NOTAS ECONÓMICAS 4

REVISTA DA FACULDADE DE ECONOMIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

NÚMERO 4/Novembro'94/PREÇO 1 500$00/ISSN 0872-4733

O Modelo de Preferência pela Liquidez de Tobin Revisitado:
uma abordagem a partir de um modelo de equilíbrio dos preços das obrigações

José Alberto Soares da Fonseca Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra
Fátima Teresa C. Assunção Sol Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

resumo

Neste artigo apresenta-se uma nova abordagem do modelo de preferência pela liquidez de Tobin a partir de um modelo de equilíbrio das obrigações em que se pressupõe que as taxas de juro seguem processos estocásticos de Itô.

Admite-se que a estrutura de prazo das taxas de juro pode ser representada pelo processo de difusão seguido pela taxa de juro de curto prazo e que esta segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck. Esta hipótese permite desenvolver um modelo de preferência pela liquidez em que o portafólio é composto por moeda e títulos e em que se incluem simultaneamente a hipótese de retorno da taxa de juro para um valor normal de longo prazo e uma medida do risco das obrigações determinada pela volatilidade das taxas de juro.

résumé / abstract

Dans cet article on présente une nouvelle approche du modèle de préférence pour la liquidité de Tobin à partir d'un modèle d'équilibre des obligations dans lequel on suppose que les taux d'intérêts suivent des processus stochastiques de Itô.

On suppose que la structure par termes des taux d'intérêts peut être représentée par le processus de diffusion suivi par le taux d'intérêt à court terme et nous admettons que celui-ci suit un processus de Ornstein-Uhlenbeck. Cette hypothèse permet de développer un modèle de préférence pour la liquidité dans lequel le portefeuille est composé de monnaie et titres et dans lequel on inclut simultanément l'hypothèse du retour du taux d'intérêt à une valeur normale de long terme et une mesure du risque des obligations déterminée par la volatilité des taux.

This article presents a new approach to Tobin's liquidity preference model based on a bond price equilibrium model assuming that interest rates follow Itô's stochastic processes.

It is assumed that the term structure of interest rates may be represented by the diffusion process followed by the short term interest rate and that the latter follows an Ornstein-Uhlenbeck process. This hypothesis enables the development of a liquidity preference model where the portfolio is a mix of money and bonds. The model also assumes that the interest rate may resume a standard long term value and that the degree of bonds risk is determined by the interest rates volatility.

Introdução

O modelo de preferência pela liquidez de Tobin contêm uma medida do risco das obrigações que está ausente na teoria de Keynes sobre a procura especulativa de moeda. Por outro lado, enquanto esta se baseia na hipótese do retorno das taxas de juro para um valor normal de longo prazo, o modelo de Tobin pressupõe que os ganhos esperados de capital nas obrigações seguem um passeio aleatório.

Fazendo uma abordagem de preferência pela liquidez a partir de um modelo de preços de equilíbrio das obrigações em que se pressupõe que as taxas de juro seguem processos de Ornstein-Uhlenbeck, integramos no modelo de preferência pela liquidez, simultaneamente, uma medida de risco e a tendência de retorno para um valor normal de longo prazo.

I — Apresentação do Modelo de Tobin

O modelo de Tobin para a preferência pela liquidez (1965) utiliza a abordagem desenvolvida pela teoria do portafólio. Tobin supõe que os indivíduos podem escolher a composição do seu portafólio entre moeda, que não proporciona qualquer rendimento, e títulos de dívida que proporcionam um rendimento esperado $e = r + ge$ onde r representa a taxa de juro de mercado e ge o ganho esperado de capital.

As obrigações detidas pelos investidores são consolidadas (rendas perpétuas) e o seu preço é

$$P = \frac{1}{r} \tag{1.1}$$

Sendo o juro periódico de 1 u.m. e r a taxa de juro. O ganho esperado de capital é

$$g_e = \frac{r}{r_e} - 1 \tag{1.2}$$

A rentabilidade total da carteira de títulos do indivíduo é

$$E(R_T) = x(r + g_e) \tag{1.3}$$

x é a percentagem de títulos no portafólio do indivíduo e $1\text{-}x$ é a percentagem de moeda.

O risco da carteira é

$$\sigma_T = x\sigma_g \tag{1.4}$$

sendo σg o risco de perda de capital do título o qual é medido pelo desvio-padrão da distribuição de probabilidade g.

Na ausência, suposta no modelo, de qualquer processo inflacionista, a detenção de encaixes monetários não implica risco.

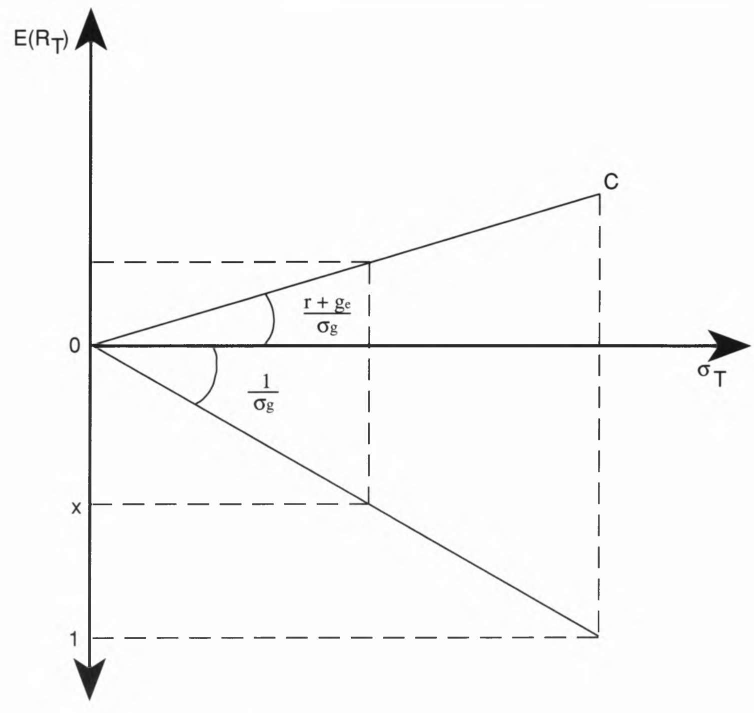
As combinações possíveis entre moeda e títulos são representadas pela recta

$$E(R_T) = \frac{\sigma_T}{\sigma_g}(r + g_e) \tag{1.5}$$

O investidor pode obter um rendimento esperado $E(RT)$ superior (inferior) se aceitar incorrer num riscoΔT; superior (inferior), dado que

$$\frac{\partial E(R_T)}{\partial \sigma_T} = \frac{r + g_e}{\sigma_g} \tag{1.6}$$

Fig. 1.1 — Curva das oportunidades de investimento e composição do portafólio



A recta OC cuja inclinação é $\frac{r+g_e}{\sigma_g}$ representa a relação entre a rentabilidade esperada e o risco que o investidor pode obter no mercado (sendo conhecidos *r*, *ge* e *σg*).

Dado que

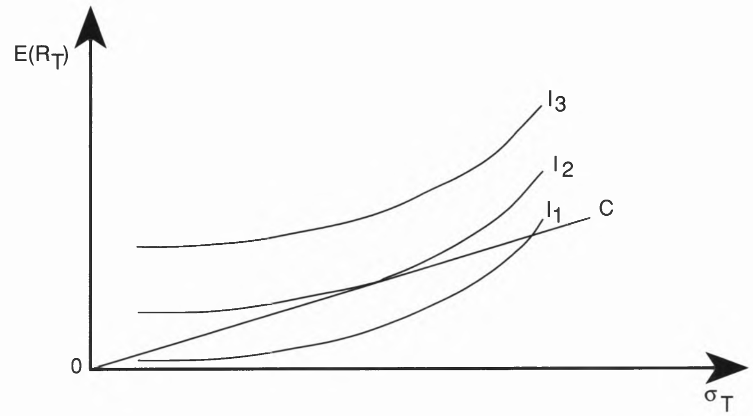
$$\frac{\partial x}{\partial \sigma_T} = \frac{1}{\sigma_g} \qquad (1.7)$$

a cada combinação entre rendimento esperado e risco corresponde uma dada composição da carteira em moeda e títulos. Quanto maior (menor) for a proporção dos títulos na carteira, maior (menor) é o rendimento esperado e o risco.

Na equação (1.5) vemos as combinações entre rentabilidade esperada e risco que o indivíduo pode obter no mercado. O que o investidor pretende é maximizar a sua função de utilidade.

Se admitirmos que o investidor tem aversão ao risco, ele desejará aumentos crescentes do seu rendimento esperado para aceitar aumentos constantes no seu risco. As suas preferências podem ser representadas por um mapa de curvas de indiferença convexas em relação à origem e em que a derivada do rendimento esperado em relação ao risco é crescente.

Fig 1.2 — Maximização da utilidade esperada



O indivíduo escolherá a combinação rendimento esperado/risco que corresponde ao ponto de tangência de uma das suas curvas de indiferença com a recta de oportunidades de investimento OC.

II — A relação entre a esperança de rentabilidade e o risco a partir de um modelo dos preços das obrigações

A relação de equilíbrio entre a esperança de rentabilidade das obrigações e o seu risco é abordada nesta secção a partir de modelos em que se pressupõe que uma só taxa de juro, que segue um processo estocástico de Itô, representa as taxas de juro de todos os prazos[1].

Para determinar a relação de equilíbrio entre a esperança de rentabilidade de uma obrigação e o seu risco de taxa de juro recorre-se a um raciocínio de arbitragem, sendo ainda requeridas as condições a seguir apresentadas.

A — Hipóteses de base do modelo

— Não existem custos de transacção ou impostos sobre obrigações e é possível transaccioná-las em qualquer momento de tempo. As obrigações não estão sujeitas a risco de pagamento.

— A informação é imediatamente acessível a todos os investidores.

— A existência de um preço de equilíbrio não permite obter lucro sem risco.

— O objectivo dos investidores é maximizar a rentabilidade das suas carteiras.

— As variações das taxas de juro são governadas por um conjunto de variáveis aleatórias que determinam a estrutura de prazo das taxas de juro.

B — O processo de difusão da taxa de juro

Admitimos que os processos estocásticos seguidos pelas taxas de juro podem ser representados por uma única variável de estado, a taxa de juro de curto prazo r_t, que segue um processo estocástico de Itô[2], com a seguinte representação

1 A análise da estrutura de prazo das taxas de juro pelo processo de difusão seguido por uma única taxa é utilizada entre outros por Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985).
2 Sobre os processos estocásticos, ver Malliaris e Brock (1985).

$$dr_t = a_{rt,t}dt + \sigma_{rt,t}dz_{r,t} \quad (2.1)$$

onde $a_{rt,t}$ é a componente determinista, $\sigma_{rt,t}$ é a componente aleatória e $dz_{r,t}$ um processo geral de Wiener[3].

C — A determinação do preço de equilíbrio de uma obrigação de cupão zero.

Se a taxa de juro sem risco seguir um processo estocástico tal como é definido em (2.1), podemos representar a rentabilidade de uma obrigação de cupão nulo por uma equação estocástica de Itô

$$\frac{dP}{P} = \mu(r_t,t)dt - \theta(r_t,t)dz_{r,t} \quad (2.2)$$

sendo $\frac{dP}{P}$ a representação simplificada de $\frac{dP_{t,\tau,r}}{P_{t,\tau,r}}$ em que $P_{t,\tau,r}$ é o preço no momento t, de obrigação de cupão zero cuja maturidade é τ o que significa que $d\tau = -dt$ e portanto $\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{dP}{d\tau}$

$$\mu(r_t,t) = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r_t}a_{rt,t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2}(\sigma_{rt,t})^2\right] \quad (2.3)$$

representa a esperança matemática, no momento t, da rentabilidade da obrigação e

$$\theta(r_t,t) = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\sigma_{rt,t} \quad (2.4)$$

representa o termo aleatório da rentabilidade. Como a duração estocástica da obrigação em relação à taxa de juro sem risco é, por definição

$$D_{r,t} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r_t} \quad (2.5)$$

a volatilidade da rentabilidade da obrigação é

$$\theta(r_t,t) = D_{r,t}\sigma_{rt,t} \quad (2.6).$$

Se seguirmos uma abordagem semelhante à de Black e Scholes (1973) o nosso objectivo será compor um portafólio de forma a que as proporções dos activos que o compõem permitam eliminar o risco de taxa de juro.

Para isso escolhemos arbitrariamente duas obrigações de qualquer maturidade, cujo preço no momento t é respectivamente P_1 e P_2. As proporções das obrigações no portafólio são respectivamente x_1 e x_2 com $x_1+x_2 = 1$. O valor do portafólio é

$$V = x_1P_1 + x_2P_2 \quad (2.7)$$

Aplicando a equação estocástica de Itô às rentabilidades das duas obrigações temos a rentabilidade do portafólio

$$\frac{dV}{V} = [\, x_1\mu_1(r_t,t) + x_2\mu_2(r_t,t)\,] - [\, x_1\theta_1(r_t,t) + x_2\theta_2(r_t,t)\,]dZ_{r,t} \quad (2.8)$$

onde μ_i e θ_i representam respectivamente a esperança matemática e o termo aleatório da rentabilidade da obrigação i (com i = 1, 2).

3 Sobre os processos estocásticos de Wiener, ver Malliaris e Brock (1985).

O portafólio é imune ao risco de taxa de juro se as proporções χ_1 e χ_2 anularem a sua componente aleatória, isto é, se

$$x_1\theta_1(r_t,t)+x_2\theta_2(r_t,t)=0 \quad (2.9).$$

Por outro lado, é impossível obter lucro sem risco, isto é, a esperança da rentabilidade do portafólio deve ser igual à taxa de juro corrente de curto prazo r_t, isto é

$$x_1[\mu_1(r_t,t)-r_t]+x_2[\mu_2(r_t,t)-r_t]=0 \quad (2.10).$$

As equações (2.9) e (2.10) representam um sistema de equações com duas incógnitas χ_1 e χ_2. Para que este sistema tenha solução diferente de zero, o seu determinante principal deve ser nulo, o que implica

$$\frac{\mu_1(r_t,t)-r_t}{\theta_1(r_t,t)}=\frac{\mu_2(r_t,t)-r_t}{\theta_2(r_t,t)} \quad (2.11).$$

Esta relação pode ser interpretada como o preço de mercado do risco de taxa de juro, pois mostra o acréscimo esperado na taxa de rentabilidade da obrigação por unidade adicional de risco

$$q(r_t,t)=\frac{\mu(r_t,t)-r_t}{\theta(r_t,t)} \quad (2.12)$$

O preço de mercado do risco de taxa de juro é determinado, em cada momento, pelas preferências e riqueza dos investidores assim como pelas oportunidades de investimento. A sua determinação permite representar a esperança matemática da rentabilidade de uma obrigação em função do risco de taxa respectivo

$$\mu(r_t,t)=r_t+\theta(r_t,t)q(r_t,t) \quad (2.13)$$

Substituindo nesta equação as expressões de $\mu(rt,t)$ e $\theta(rt,t)$, respectivamente (2.3) e (2.4), obtemos

$$\mu(r_t,t)=\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial r_t}[\,a_{rt,t}-q(r_t,t)\sigma_{rt,t}\,]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2}(\sigma_{rt,t})^2-r_tP=0 \quad (2.14)$$

Esta equação (2.14) permite calcular o preço de equilíbrio de uma obrigação de cupão nulo e sem risco de pagamento.

D — Um caso particular de processo estocástico seguido pela taxa de juro: o modelo de Vasicek (1977)

Vasicek (1977) pressupõe que a taxa de juro de curto prazo segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck[4]

$$dr_t=\alpha(\beta-r_t)dt+\sigma_{rt,tt}dz_{r,t} \quad (2.15)$$

em que β é o valor normal de longo prazo da taxa de juro e α é a elasticidade de retorno de rt ao seu valor normal.

Resolvendo a equação (2.14) para o processo de Ornstein-Uhlenbeck, sujeito à condição limite de o preço da obrigação na data de reembolso ser igual a 1 ($P(t,0,r)=1$), obtém-se o preço de equilíbrio de uma obrigação de cupão zero de acordo com o modelo de Vasicek:

4 Cf. Malliaris e Brock (1985), sobre o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

$$P(t,\tau,r)=\exp[\ \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})(R(\infty)-r)-\tau R(\infty)-\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-e^{-\alpha t})^2\ ] \tag{2.16}$$

sendo

$$R(\infty)=\beta+\frac{\sigma q}{\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2} \tag{2.17}$$

em que q=q (rt,t).

Aplicando à equação (2.16) a definição da duração estocástica obtemos

$$D_{r,t}=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \tag{2.18}$$

tendo em conta a igualdade (2.5).

III — A preferência pela liquidez quando a taxa de curto prazo segue um processo de Ornstein--Uhlenbeck

Consideremos, contrariamente ao que é proposto pelo modelo de Tobin, que cada indivíduo detém moeda e títulos cujo prazo corresponde ao seu *habitat* preferido[5] e não necessariamente obrigações consolidadas.

Admitimos, adicionalmente, que a estrutura de prazo das taxas de juro é representada pelo processo estocástico seguido pela taxa de juro de curto prazo, sendo este um processo de difusão de Ornstein-Uhlenbeck.

Nesta hipótese, os preços de equilíbrio das obrigações são-nos dados pelo modelo de Vasicek. A medida do risco de uma obrigação, é, de acordo com este modelo, dada por:

$$D_{r,t}\sigma_{r,t}=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\sigma_{r,t} \tag{3.1}$$

Quando um investidor constitui uma carteira composta por uma determinada obrigação na proporção χ e por moeda na proporção 1-χ, a rentabilidade esperada da sua carteira é dada por:

$$E(R_T)=x\mu \tag{3.2}$$

onde μ é a rentabilidade esperada da obrigação.

O risco da carteira é

$$\sigma_T=x\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\sigma_{r,t} \tag{3.3}$$

sendo o risco individual do título definido na equação (3.1), o que implica:

$$x=\frac{\sigma_T}{\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\sigma_{r,t}} \tag{3.4}$$

Substituindo na equação (3.2) temos:

$$E(R_T)=\frac{\mu}{\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\sigma_{r,t}}\sigma_T \tag{3.5}$$

5 De acordo com a teoria de Modigliani e Sutch (1965, 1966).

em que $\dfrac{\mu}{\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\sigma_{r,t}}$ é a inclinação da recta de combinações possíveis de rentabilidade e risco, a cada uma das quais corresponde uma determinada combinação entre moeda e títulos.

A inclinação desta recta varia directamente com a rentabilidade esperada dos títulos tal como no modelo de Tobin. No que diz respeito à influência do risco, temos que distinguir entre a influência do termo aleatório $\sigma_{r,t}$ do processo de difusão da taxa de juro de curto prazo e a elasticidade,α, de retorno desta para o seu valor normal de longo prazo. O risco das obrigações varia directamente com a primeira destas duas componentes, e varia inversamente com a segunda. Esta relação inversa entre o risco de uma obrigação e o parâmetro de elasticidade α, decorre do facto de que, quanto maior for o valor deste, mais rapidamente qualquer flutuação da taxa de juro é reabsorvida pela tendência de longo prazo.

Conclusão

A inclusão dos processos de difusão das taxas de juro na análise da preferência pela liquidez permitiu-nos abandonar a hipótese de neutralidade dos investidores acerca da evolução das taxas de juro, presente no modelo de Tobin. Demonstrámos assim, com o recurso a estes processos, que a hipótese keynesiana tradicional de retorno da taxa de juro para um valor normal de longo prazo é compatível com a inclusão de uma medida de risco das obrigações e que a elasticidade desse retorno influencia o valor do risco.

Simultaneamente, abandonámos o quadro limitativo de uma análise apresentada em termos de obrigações consolidadas, generalizando o modelo de preferência pela liquidez a obrigações de todos os prazos, de acordo com as preferências dos investidores.

Referências Bibliográficas

Black, F.; Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, vol. 81, 3, 637-657.

Cox, J.; Ingersoll, J.; Ross, S. (1985) A theory of the term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, vol. 53, 2, 385-407.

Malliaris, A.; Brock, W.A. (1985) *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Amsterdam, North-Holland.

Modigliani, F.; Sutch, R. (1965) Innovations in Interest Rate Policy, *American Economic Review — Proceedings*, May, 178-197.

Modigliani, F.; Sutch, R. (1966) Debt Management and the Term Structure of Interest Rates: an Empirical Analysis of Recent Experiences, *Supplement to Journal of Political Economy*, August, 569-595.

Tobin, J. (1965) Liquidity Preference as Behavior towards Risk, *Review of Economic Studies*, vol. 26, 1, 65-86 .

Vasiceck, O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.