OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

DO

Dr. F. Gomes Teixeira

DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, ETC.

PUBLICADAS

POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS

VOLUME PRIMEIRO

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1904

PREFACIO

Em 8 de fevereiro de 1902 foi assignada por Sua Ex.ª o Sr. Presidente do Conselho de Ministros e Ministro dos Negocios do Reino, Conselheiro Ernesto Rodolpho Hintze Ribeiro, uma portaria em que se diz o seguinte:

«Sua Majestade El-Rei, a quem foi presente a proposta do Director Geral de Instrucção Publica para serem reunidos em volumes os trabalhos sobre Mathematica do Dr. Francisco Gomes Teixeira, lente cathedratico e director da Academia Polytechnica do Porto, que se acham dispersos em revistas nacionaes e estrangeiras: ha por bem determinar que se proceda a essa publicação.»

Tendo pois de se proceder á publicação dos nossos trabalhos scientificos, por conta do Estado e debaixo da nossa direcção, em conformidade com o que determina esta portaria, julgámos conveniente fazer-lhes uma revisão, para corrigir erros que encontrássemos, esclarecer alguma passagem obscura e annotar outras.

Na disposição dos trabalhos não seguimos nem a ordem por que foram pela primeira vez impressos, nem a ordem logica dos assumptos a que se referem, porque isso demoraria a sua publicação, visto os mais antigos necessitarem de revisão mais cuidadosa.

É-nos extremamente agradavel exprimir neste logar o nosso reconhecimento ao nobre Ministro que assignou a portaria, e ao illustre Director Geral de Instrucção Publica, Sr. Conselheiro Abel de Andrade, que lhe apresentou a respectiva proposta, pela alta honra que nos fizeram.

Porto, dezembro de 1903.

F. Gomes Teixeira.

I

SOBRE O DESENVOLVIMENTO DAS FUNCÇÕES EM SÉRIE

Memoria premiada e publicada pela Real Academia de sciencias exactas, physicas e naturaes de Madrid

(Memorias de la Real Academia de ciencias exactas, fisicas e naturales de Madrid, 1897, tomo XVIII, parte I)

A

INTRODUCÇÃO

Versa esta Memoria sobre o assumpto do thema seguinte, proposto pela Academia Real das Sciencias de Madrid:

«*Exposición razonada y metódica de los desarrollos en serie de las funciones matemáticas. Teoría general de los mismos. Significación de las llamadas series divergentes. Investigación de una serie típica, de la cual, á ser posible, se deriven como casos particulares las series de mayor importancia y uso en análisis, como las de Taylor, Lagrange y cualquiera otra análoga*».

O desenvolvimento das funcções em série tem sido empregado pelos geometras umas vezes com o fim de calcular os valores numericos que tomam estas funcções para valores determinados das variaveis, outras vezes para estudar as propriedades das mesmas funcções. Quer se empreguem para um, quer para outro fim, é conveniente variar quanto possivel a fórma d'estes desenvolvimentos, já para obter séries mais rapidamente convergentes, quando se destinam ao primeiro fim, já porque ha propriedades que se manifestam nos desenvolvimentos de uma fórma e ficam occultas nos desenvolvimentos de outra fórma.

O problema geral do desenvolvimento das funcções em série consiste em procurar, dadas as funcções $f(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \ldots$, as condições para que seja

$$f(x) = \mathrm{A}_1\,\theta_1(x) + \mathrm{A}_2\,\theta_2(x) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\theta_n(x) + \ldots,$$

A_1, $\mathrm{A}_2 \ldots$ representando quantidades constantes, e determinar estas constantes. Na impossibilidade de resolver este problema com toda a generalidade, têem os geometras considerado os casos particulares que, ou por sua simplicidade ou por sua importancia nas applicações da Analyse á Geometria, á Mechanica e á Physica, têem merecido preferencia. Assim foi considerado o caso de $\theta_1(x)$, $\theta_2(x) \ldots$ representarem potencias inteiras de uma funcção, o caso de estas funcções serem os senos ou os cosenos de multiplos successivos do arco x, o caso de estas funcções representarem potencias inteiras, positivas ou negativas, de muitos binomios da fórma $x-a$, $x-b \ldots$, etc. Cada uma d'estas questões exige bastante espaço para ser tratada de uma maneira completa; porisso aqui limitar-nos-hemos a tratar da primeira, isto é, do desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras de uma funcção dada.

Principiando pelo caso mais simples, consideraremos primeiramente os desenvolvimentos ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de uma variavel independente, tanto no caso d'esta variavel ser real como no caso de ser imaginaria, expondo os differentes methodos empregados pelos geometras para resolver esta questão. Assim estudaremos primeiramente o methodo, apresentado por J. Bernoulli e Taylor e completado por Lagrange e Cauchy, para o desenvolvimento das funcções de variaveis reaes; depois a extensão d'este methodo, esboçada por Cauchy e completada por Darboux, ao caso das funcções de variaveis imaginarias. Em seguida, continuando o estudo do desenvolvimento das funcções de variaveis imaginarias e considerando a questão n'um ponto de vista menos elementar, exporemos o methodo de Cauchy, fundado na theoria dos integraes curvilineos, o methodo de Riemann, fundado na theoria das funcções harmonicas, e finalmente o methodo de Weierstrass, fundado na theoria das séries inteiras. Cada um d'estes methodos é o objecto principal de um dos primeiros cinco capitulos.

O desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, é tambem considerado. A formula dada, para achar estes desenvolvimentos, por Laurent é demonstrada no capitulo terceiro pelo methodo de Cauchy e no capitulo quinto pelo methodo de Weierstrass e Mittag-Leffler. A bella demonstração que Mittag-Leffler deu d'esta formula nas *Acta Mathematica,* foi apresentada pelo eminente geometra de uma maneira bastante resumida; aqui apresentamo-la com todos os desenvolvimentos necessarios para ser facilmente comprehendida, modificando mesmo algumas passagens com o fim de a tornar mais elementar.

No capitulo sexto demonstraremos a formula de Bürmann, que dá o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma funcção dada, e d'ella tiraremos a de Lagrange, que só differe d'aquella na notação. Em seguida faremos, nos numeros 61 e 62, uma applicação, que julgamos nova, da mesma formula ao desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de sen x e á demonstração de duas formulas devidas a Euler. Finalmente, para responder á ultima parte do programma proposto, daremos uma formula, que dá o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, de uma funcção dada. Esta formula, que julgamos nova e que estudamos nos numeros 64 e 65, comprehende a de Bürmann, e por tanto a de Taylor e Lagrange, e ainda a de Laurent.

Terminando estas considerações preleminares, devemos dizer que, na exposição dos assumptos, suppomos sómente conhecidas do leitor a theoria algebrica das quantidades complexas, os principios geraes mais elementares da theoria das séries e os primeiros principios do calculo differencial e do calculo integral. Porisso, antes de entrar em cada questão, apresentamos alguns estudos preleminares que certamente serão conhecidos por muitos dos leitores. Devemos ainda dizer que fazemos acompanhar cada assumpto pelas indicações bibliographicas e historicas que nos pareceram convenientes.

CAPITULO I

Estudo da série de Taylor no caso das funcções de variaveis reaes

1. As séries de forma mais simples que se podem empregar, para desenvolver as funcções, são as séries da forma

$$A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots,$$

onde a, A_0, $A_1 \ldots$ representam quantidades constantes e x uma quantidade variavel. Consideremos, pois, em primeiro logar estas séries, determinando as condições para que qualquer funcção dada $f(x)$ seja susceptivel de um tal desenvolvimento e procurando os meios para calcular os coefficientes A_0, $A_1 \ldots$ Supporemos em primeiro logar que a funcção $f(x)$ é real, assim como as quantidades x e a.

2. Gregory, nas sua *Exercitationes geometricae,* publicadas em 1668, e Mercator, na sua *Logarithmotechnia,* publicada no mesmo anno, apresentaram os primeiros desenvolvimentos de funcções em série ordenada segundo as potencias da variavel, dando o primeiro o desenvolvimento de arctang x, e o segundo o desenvolvimento de log $(1+x)$. Alguns annos depois Newton apresentou, nas suas cartas a Leibnitz de 13 e 24 de outubro de 1676, os desenvolvimentos em série do binomio, do seno, do coseno e da exponencial.

O primeiro geometra que deu, porém, uma formula assaz geral para o desenvolvimento das funcções em série, foi João Bernoulli, que publicou em 1694, nas *Acta eruditorum,* um artigo em que apresentou a formula seguinte (Veja-se *Opera omnia,* t. I, p. 125):

$$\int F(x)\,dx = xF(x) - \frac{1}{2}x^2F'(x) + \frac{1}{2.3}x^3F''(x) - \ldots,$$

de que fez algumas applicações a funcções particulares, a qual elle tirou da identidade evidente

$$F(x)\,dx = [F(x) + x F'(x)]\,dx - \frac{1}{2}[2x F'(x) + x^2 F''(x)]\,dx$$

$$+ \frac{1}{2.3}[3x^2 F''(x) + x^3 F'''(x)]\,dx - \ldots$$

$$\pm \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}[(n-1)x^{n-2} F^{(n-2)}(x) + x^{n-1} F^{(n-1)}(x)]\,dx$$

$$\mp \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x)\,dx,$$

integrando ambos os membros, pondo $n = \infty$, e determinando a constante arbitraria, introduzida pela integração, pela condição de ser nullo o integral $\int F(x)\,dx$, quando $x = 0$.

Analysando esta demonstração, vê-se que a conclusão tirada pelo celebre geometra é demasiadamente lata, e que o que se pode affirmar é que este desenvolvimento tem logar todas as vezes que a quantidade

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \int x^{n-1} F^{(n-1)}(x)\,dx$$

tende para zero, quando n tende para o infinito. Assim modificada, é esta demonstração ainda hoje empregada.

3. A série de Bernoulli, que vimos de considerar, não está ordenada segundo as potencias da variavel. O primeiro geometra que apresentou uma formula, que dá immediatamente o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias da variavel, foi Taylor, que, no seu *Methodus incrementorum*, publicado em 1715, deu para este fim a formula

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \ldots,$$

sem todavia fazer conhecer as condições para que este desenvolvimento seja convergente.

O methodo empregado por Taylor, para chegar a esta formula, é fundado na theoria das differenças finitas. Esboçado pelo seu auctor na obra citada, foi depois desenvolvidamente exposto por Euler nas suas *Institutiones calculi differentialis*. Eis resumidamente em que consiste.

Sejam Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots$ as differenças da funcção $y = f(x)$, correspondentes á differença constante Δx da variavel independente x. Teremos, como se vê por inducção facil de completar,

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= f(x)+\Delta f(x) = y+\Delta y,\\
f(x+2\Delta x) &= f(x+\Delta x)+\Delta f(x+\Delta x) = y+2\Delta y+\Delta^2 y,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f(x+k\Delta x) &= y+k\Delta y+\frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 y+\dots,
\end{aligned}$$

onde k representa um numero inteiro positivo, e onde o numero de termos que entram no segundo membro é igual a $k+1$; e, pondo $k\Delta x = h$,

$$\text{(A)} \qquad f(x+h) = y+h\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}+\dots$$

Fazendo tender Δx para zero, ou k para o infinito, e attendendo ás egualdades

$$\begin{aligned}
\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},\\
\lim\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} &= \lim\frac{\Delta[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x^2} = \lim\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} = \frac{d^2 y}{dx^2},\\
\lim\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} &= \lim\frac{\Delta^2[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x^3} = \lim\frac{\Delta^2 f'(x)}{\Delta x^2} = \frac{d^3 y}{dx^3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

vem a formula pedida

$$f(x+h) = f(x)+h\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2 y}{dx^2}+\dots$$

Esta demonstração é evidentemente viciosa. Tem, entre outros inconvenientes, o de se fundar em que o limite para que tende uma somma de parcellas é igual á somma dos limites para que tendem as parcellas, theorema que é verdadeiro quando as parcellas são em numero finito, mas que nem sempre tem logar quando, como no caso actual, o numero $k+1$ das parcellas tende para o infinito.

A formula de Taylor não differe essencialmente da formula de Bernoulli, da qual resulta por uma mudança de notação. Mudando, com effeito, na formula de Bernoulli primeiramente $F(x)$ em $f'(h-x)$, e depois x em h e h em $x+h$, vem a formula de Taylor. Porisso Bernoulli, depois da publicação da obra de Taylor, reclamou para si a prioridade da descoberta da formula precedente. (*Opera omnia,* t. II, p. 584).

4. Maclaurin, no seu *Treatise of Fluxions,* publicado em 1742, apresentou outra demonstração da formula de Taylor. Admittindo que toda a funcção que tem derivadas de todas as ordens é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de x:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

determinou os coefficientes A_0, A_1, $A_2 \ldots$ por meio das egualdades seguintes:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots,$$
$$f''(x) = 2A_2 + 2.3A_3 x + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que dão

$$A_0 = f(0), \quad A_1 = f'(0), \quad A_2 = \frac{1}{2} f''(0), \ldots$$

Achou assim a formula

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \ldots$$

ainda hoje conhecida pelo nome de *formula de Maclaurin.*

Da formula de Taylor passa-se para esta pondo primeiramente $x = 0$ e depois mudando h em x. D'esta passa-se para a de Taylor mudando primeiramente $f(x)$ em $f(x+h)$ e depois trocando h por x.

A demonstração que precede tem, entre outros inconvenientes, o de nella se suppôr estabelecida antecipadamente a possibilidade de a funcção ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas da variavel.

5. O inconveniente que vimos de notar na demonstração de Maclaurin tem-o tambem a demonstração que Lagrange deu da formula de Taylor n'uma memoria apresentada em 1772 á Academia de Sciencias de Berlin (*Oeuvres,* t. III, p. 441). Parte, com effeito, da igualdade

$$f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots,$$

A, B, C,... representando funcções de x que pretende determinar; e, para isso, muda neste desenvolvimento x em $x + l$ e h em $h + l$, o que o leva a dois desenvolvimentos, que devem ser identicos, e que dão, pelo methodo dos coefficientes indeterminados, as quantidades B, C,... Acha d'este modo que, pondo por definição $A = f'(x)$, vem $B = \frac{1}{2} f''(x)$, $C = \frac{1}{2.3} f'''(x)$, etc.

Foi porém este grande geometra o primeiro que reconheceu o papel fundamental da formula de Taylor na analyse, e o que deu os primeiros passos para o estudo das condições para o desenvolvimento das funcções pela série de Taylor, apresentando na sua *Théorie des fonctions analytiques*, publicada em 1797, a formula seguinte:

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \mathrm{R}_n,$$

onde é

$$(2) \qquad \mathrm{R}_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h),$$

θ representando uma funcção desconhecida de n, cujo valor está comprehendido entre 0 e 1. Quando R_n tende para 0, para $n=\infty$, a formula de Taylor tem logar; no caso contrario não tem logar.

6. Para demonstrar a fórmula anterior apresentou Lagrange dois methodos, dos quaes vamos dar uma ideia succinta, empregando, para simplificar a exposição do primeiro, as notações do calculo integral.

O primeiro methodo foi publicado na *Théorie des fonctions analytiques* (*Oeuvres*, t. IX, p. 69).

Pondo

$$f(x+h) = f(x+h-hz) + hzf'(x+h-hz)$$
$$+ \frac{h^2z^2}{2} f''(x+h-hz) + \ldots + \frac{h^{n-1}z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x+h-hz) + h^n\mathrm{P},$$

esta igualdade determina uma funcção P de x e z, que é nulla quando $z=0$.

Derivando os seus dois membros relativamente a z, vem

$$0 = -\frac{h^n z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+h-hz) + h^n\mathrm{P}',$$

o que dá

$$\mathrm{P} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^z z^{n-1} f^{(n)}(x+h-hz)\,dz.$$

Pondo agora $z=1$, obtem-se a formula (1) com a seguinte expressão do resto R_n:

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{P}h^n = \frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^1 z^{n-1} f^{(n)}(x+h-hz)\,dz.$$

Temos assim uma expressão do resto da série de Taylor por meio de um integral definido.

Para d'esta expressão de R_n tirar a formula (2), demonstrou Lagrange um theorema que coincide no fundo com um caso particular do theorema hoje conhecido pelo nome de *primeiro theorema dos valores medios dos integraes definidos.* Applicando-o ao integral que entra na expressão de R_n, suppondo para isso que a funcção $f^{(n)}(x+h-hz)$ é *continua* no intervallo de $z=0$ a $z=1$, vem

$$\int_0^1 z^{n-1} f^{(n)}(x+h-hz)\,dz = \frac{1}{n} f^{(n)}(x+h-\theta' h),$$

θ' representando uma quantidade comprehendida entre 0 e 1. Pondo agora $1-\theta'=\theta$, temos finalmente

$$R_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h),$$

se a funcção $f^{(n)}(x)$ fôr *continua* no intervallo $(x, x+h)$.

7. A segunda demonstração dada por Lagrange das formulas (1) e (2) foi publicada nas suas *Leçons sur le calcul des fonctions* (*Oeuvres,* t. x, p. 85). Esta demonstração, mais simples e directa do que a anterior, é fundada no theorema de Calculo differencial, segundo o qual as funcções crescem com as variaveis, quando as suas derivadas de primeira ordem são positivas, e decrescem, quando estas derivadas são negativas.

Consideremos a série de expressões

$$\begin{aligned}
&f^{(n)}(x+h')-L,\\
&f^{(n-1)}(x+h')-f^{(n-1)}(x)-Lh',\\
&f^{(n-2)}(x+h')-f^{(n-2)}(x)-f^{(n-1)}(x)h'-L\frac{h'^2}{1.2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(x+h')-f(x)-f'(x)h'-\ldots-f^{(n-1)}(x)\frac{h'^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}-L\frac{h'^n}{1.2\ldots n}.
\end{aligned}$$

Todas estas expressões são nullas quando é $h'=0$ (exceptuando a primeira, que é egual a zero ou differente de zero, segundo o valor que se dá a L), e cada uma d'ellas é a derivada da seguinte relativamente a h'; applicando, pois, o theorema que vimos de recordar, vê-se que, se a primeira tiver um signal constante quando h' varia desde 0 até h, todas as outras têm este mesmo signal, quando h é positivo, e o signal contrario, quando h é negativo. Representando, pois, por M e N o maior e o menor dos valores que toma $f^{(n)}(x+h')$ quando

h' varia desde 0 até h, e dando a L os valores M e N, temos as desigualdades

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)<\frac{Mh^n}{1.2\ldots n},$$
$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)>\frac{Nh^n}{1.2\ldots n},$$

quando h é positivo, e as desigualdades contrarias, quando h é negativo.

Em ambos os casos, tira-se d'estas desigualdades a igualdade seguinte:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{Kh^n}{1.2\ldots n},$$

K representando uma quantidade nem superior a M, nem inferior a N.

Suppondo agora que a funcção $f^{(n)}(x)$ é continua no intervallo de x a $x+h$, deve existir um numero x_1, comprehendido entre x e $x+h$, tal que esta funcção tome o valor K quando $x=x_1$ (1). Como a este numero se pode dar a fórma $x+\theta h$, θ representando uma quantidade comprehendida entre 0 e 1, temos

$$K=f^{(n)}(x+\theta h).$$

Substituindo este valor de K na formula anterior vêem as formulas (1) e (2).

8. Cauchy no tomo I, pagina 29, dos seus *Exercices de Mathématiques,* publicados em 1826 (*Oeuvres*, t. VI da 2.ª série), deu uma nova demonstração das formulas (1) e (2), e partindo de um caso particular d'estas formulas, apresentou em seguida uma nova expressão do resto R_n, mais propria para o estudo do desenvolvimento em série de algumas funcções.

Applicando, com effeito, á funcção de z

$$\varphi(z)=f(x+h)-f(z)-(x+h-z)f'(z)$$
$$-\frac{1}{2}(x+h-z)^2f''(z)-\ldots-\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)$$

a formula

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x+\theta h),$$

(1) Este principio, considerado por Lagrange como evidente, foi mais tarde demonstrado por Cauchy no seu *Cours d'Analyse.*

*

que resulta das formulas (1) e (2) pondo nellas $n=1$, e attendendo á igualdade

$$\varphi'(z)=-\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(z),$$

obtem a formula de Taylor

$$(1)\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\mathrm{R}_n,$$

com a expressão do resto

$$(2')\qquad \mathrm{R}_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+\theta h).$$

9. A expressão do resto, que vimos de achar, foi objecto de uma observação interessante de Pringsheim (*Mathematische Annalen,* t. XLIV). Mostrou, com effeito, este geometra que, apesar de θ ser funcção de n, é condição *necessaria* para que a série que resulta de (1) pondo $n=\infty$ convirja para a funcção $f(x)$, que esta expressão de R_n, *considerada como funcção de duas variaveis independentes* θ e n, tenda para 0, quando n tende para o infinito e θ varia entre 0 e 1. Conclue-se d'aqui que o conhecimento da funcção θ nada adiantaria a resolução do problema que tem por fim desenvolver $f(x)$ em série. A demonstração d'este theorema, que não será dada aqui, pode ver-se no trabalho de Pringsheim já citado e n'uma nota de E. Pascal, publicada na *Rivista di Matematica* (Roma, 1895).

10. As expressões do resto da série de Taylor devidas a Lagrange e Cauchy são casos particulares de uma expressão muito geral, dada por Schlömilch primeiramente no seu *Handbuch der Differentialrechnung,* publicado em 1847–1848, e em seguida n'um artigo publicado no *Journal de Liouville* (2.ª série, t. III), que obteve por meio da igualdade, devida a Cauchy,

$$(3)\qquad \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)},\quad (0<\theta<1)$$

$\psi'(x)$ representando uma funcção que não seja nulla no intervallo de x a $x+h$.

Applicando, com effeito, esta igualdade á funcção, considerada no n.º 8,

$$\varphi(z)=f(x+h)-f(z)-(x+h-z)f'(z)$$
$$-\frac{1}{2}(x+h-z)^2f''(z)-\ldots-\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z),$$

vem o resultado

$$(1)\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\mathrm{R}_n,$$

$$(2'')\qquad \mathrm{R}_n=\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{\psi'(x+\theta h)}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Pondo

$$\psi(z)=(x+h-z)^p,$$

vem para R_n a expressão

$$(2''')\qquad \mathrm{R}_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}(x+\theta h),$$

a qual, sem ter tido outros usos que não tenham as formulas de Lagrange e Cauchy, tem todavia a vantagem de as conter a ambas, correspondendo uma a $p=n$ e a outra a $p=1$.

A formula $(2''')$ foi tambem obtida por Roche, partindo da expressão de R_n por meio de um integral definido, anteriormente achada (n.º 6), (*Journal de Liouville*, 2.ª série, t. III).

Applicando, com effeito, a este integral o *primeiro theorema dos valores medios dos integraes definidos*, vem

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_n&=\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 z^{n-1}f^{(n)}(x+h-hz)\,dz\\&=\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 z^{p-1}z^{n-p}f^{(n)}(x+h-hz)\,dz=\frac{\theta'^{n-p}h^n}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}(x+h-\theta' h),\end{aligned}$$

onde θ' representa uma quantidade comprehendida entre 0 e 1. Pondo agora $\theta'=1-\theta$, obtem-se a formula $(2''')$.

11. Nas demonstrações das formulas (1) e (2), dadas por Lagrange, suppoz-se que a funcção $f^{(n)}(x)$ é *continua* no intervallo de x a $x+h$. A mesma hypothese se é obrigado a fazer na demonstração das formulas (1) e $(2''')$, dada no numero anterior, quando se adopta, para estabelecer a igualdade (3), a demonstração que deu Cauchy d'esta formula, pois que nella o illustre geometra suppõe que $\varphi'(z)$ e $\psi'(z)$ são funcções *continuas* de z no intervallo de x a $x+h$. O. Bonnet porém, dando uma nova demonstração da igualdade (3), que vamos expôr, a qual só exige que as funcções $\varphi'(z)$ e $\psi'(z)$ sejam *finitas* e *determinadas* no intervallo considerado, permittiu que se estendessem as formulas (1) e $(2''')$ ao caso de $f^{(n)}(z)$ ser descontinua, se todavia fôr *finita* e *determinada* no intervallo $(x, x+h)$.

Seja $\mathrm{F}(z)$ uma funcção que admitte uma derivada $\mathrm{F}'(z)$ finita e determinada, no intervallo de $z=a$ a $z=a+h$, e que é nulla nos extremos d'este intervallo. Quando z varia desde a até $a+h$, a funcção $\mathrm{F}(z)$ deve principiar por crescer (em valor absoluto), para depois decrescer; porisso e por ser continua, deve, no intervallo considerado, passar por um maximo ou por um minimo negativo [1]. Deve, pois, existir um numero x_1 tal qual seja $F'(z)=0$, quando $z=x_1$, e a este numero, que deve estar comprehendido entre x e $x+h$, pode dar-se a fórma $x_1=x+\theta h$ (onde $0<\theta<1$).

O theorema que vimos de demonstrar é conhecido pelo nome de *theorema de Rolle,* por ter sido dado por este geometra para o caso particular das funcções inteiras. Para tirar d'elle a formula (3) basta pôr

$$F(z)=\varphi(x)-\varphi(z)-[\psi(x)-\psi(z)]\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}.$$

A funcção $F(z)$ é nulla nos pontos $z=x$ e $z=x+h$; logo temos a igualdade

$$F'(x_1)=-\varphi'(x_1)+\psi'(x_1)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}=0,$$

da qual se tira a formula (3), quando $\psi'(z)$ é differente de 0 no intervallo $z=x$ a $z=x+h$.

12. Viu-se nos dois numeros anteriores que a formula de Taylor, com a expressão do resto dada por Schlömilch, pode ser deduzida do theorema de Rolle por intermedio da formula (3). Homersham Cox, n'um artigo publicado no t. VI do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* tirou-a directamente d'este theorema, applicando-o á funcção

$$\begin{aligned} F(z)=&-f(x+h)+f(z)+(x+h-z)f'(z)\\ &+\frac{1}{2}(x+h-z)^2 f''(z)+\ldots+\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)\\ &+\frac{(x+h-z)^p}{h^p}\left[f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)\right],\end{aligned}$$

que é nulla quando $z=x$ e quando $z=x+h$. Temos, com effeito, a equação

$$\begin{aligned} 0=F'(x_1)=&\frac{(x+h-x_1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x_1)\\ &-\frac{p(x+h-x_1)^{p-1}}{h^p}\left[f(x+h)-f(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)\right],\end{aligned}$$

da qual se tiram, pondo $x_1=x+\theta h$, as formulas (1) e ($2'''$).

---

[1] A existencia d'este maximo ou minimo negativo, que O. Bonnet considerava evidente, foi rigorosamente demonstrada por Weierstrass. (Veja-se, por exemplo, o t. I do nosso *Curso de Analyse*).

É conveniente observar que a expressão de $F(z)$, de que se partiu, é a que resulta de substituir na expressão de $F(z)$, dada no numero anterior, $\varphi(z)$ pela expressão dada no numero 10 e $\psi(z)$ por $(x+h-z)^p$. Logo o methodo que vimos de expôr coincide no fundo com o methodo dado nos numeros 10 e 11.

13. Fundados nos mesmos principios podemos dar uma formula muito geral, que contém a formula de Taylor [1].

Para isso appliquemos a igualdade

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x+\theta h)$$

á funcção

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = & f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^l}{1.2\ldots l} f^{(l)}(x) \\
& - f(z) - (x+h-z)f'(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(z) \\
& - \Big[F(x) + hF'(x) + \ldots + \frac{h^k}{1.2\ldots k} F^{(k)}(x) \\
& - F(z) - (x+h-z)F'(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m-1)}(z) \Big] \\
& \times \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \ldots - \frac{h^l}{1.2\ldots l} f^{(l)}(x)}{F(x+h) - F(x) - hF'(x) - \ldots - \frac{h^k}{1.2\ldots k} F^{(k)}(x)}.
\end{aligned}$$

Teremos, suppondo $n \overline{\overline{>}} l+1$ e $m \overline{\overline{>}} k+1$ e effectuando alguns calculos simples, a igualdade

$$\frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \ldots - \frac{h^l}{1.2\ldots l} f^{(l)}(x)}{F(x+h) - F(x) - hF'(x) - \ldots - \frac{h^k}{1.2\ldots k} F^{(k)}(x)}$$

$$= \frac{\frac{h^{l+1}}{1.2\ldots(l+1)} f^{(l+1)}(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n}{\frac{h^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)} F^{(k+1)}(x) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m-1)}(x) + R'_m},$$

[1] Gomes Teixeira: *Sur une formule d'Analyse.* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, t. v).

onde

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\theta h),$$

$$R'_m = \frac{h^m (1-\theta)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m)}(x+\theta h),$$

se o denominador do segundo membro d'esta igualdade se conservar differente do zero quando θ varia entre 0 e 1.

Pondo nesta formula

$$F(x) = h^m, \quad k = m-1, \quad l = n-1,$$

$$F^{(m)}(x) = 1.2\ldots m, \quad F^{(m)}(x+\theta h) = 1.2\ldots m,$$

obtem-se a formula de Taylor com uma expressão do resto que coincide com a que resulta da formula de Schlömilch ($2'''$) dando a p um valor inteiro positivo qualquer.

14. Se a funcção $f^{(n)}(x)$ fôr continua no ponto x, temos

$$f^{(n)}(x+\theta h) = f^{(n)}(x) + \varepsilon,$$

ε representando uma quantidade que tende para 0 quando h tende para 0. Podemos porisso, substituindo este valor de $f^{(n)}(x+\theta h)$ na expressão do resto dada por Lagrange, escrever a formula de Taylor do modo seguinte:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\,\varepsilon.$$

Esta formula tem mesmo logar, como mostrou Peano, n'um artigo publicado no t. IX do *Mathesis*, quando $f^{(n)}(z)$ não é continua no ponto x, se todavia é n'este ponto finita e determinada. Esta extensão da formula anterior pode ser tirada muito simplesmente da formula demonstrada no numero 13, como vamos ver.

Mudemos para isso na referida formula m e n em $n-1$, e ponha-se depois $x=0$, $l=n-2$, $k=n-2$. Teremos

$$\frac{f(h) - f(0) - hf'(0) - \ldots - \dfrac{h^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} f^{(n-2)}(0)}{F(h) - F(0) - hF'(0) - \ldots - \dfrac{h^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} F^{(n-2)}(0)} = \frac{f^{(n-1)}(\theta h)}{F^{(n-1)}(\theta h)}.$$

Appliquemos agora esta igualdade ás funcções

$$f(h)=\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x),$$

$$\mathrm{F}(h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}.$$

Como é

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad \ldots,\quad f^{(n-2)}(0)=0,$$

$$f^{(n-1)}(h)=\varphi^{(n-1)}(x+h)-\varphi^{(n-1)}(x)-h\varphi^{(n)}(x),$$

$$\mathrm{F}(0)=0,\quad \mathrm{F}'(0)=0,\quad \ldots,\quad \mathrm{F}^{(n-2)}(0)=0,\quad \mathrm{F}^{(n-1)}(h)=h,$$

vem

$$f(h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{\varphi^{(n-1)}(x+\theta h)-\varphi^{(n-1)}(x)}{\theta h}-\varphi^{(n)}(x)\right].$$

Mas, em virtude da definição de derivada, temos

$$\frac{\varphi^{(n-1)}(x+\theta h)-\varphi^{(n-1)}(x)}{\theta h}=\varphi^{(n)}(x)+\varepsilon,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h.

Logo temos a igualdade

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)-\ldots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x)=\frac{h^n\,\varepsilon}{1.2\ldots n},$$

da qual se tira a formula pedida mudando φ em f.

15. Temos até aqui considerado o desenvolvimento de $f(x+h)$ segundo as potencias de h. Para achar agora o desenvolvimento de $f(x)$ segundo as potencias de $x-a$, basta desenvolver $f(a+h)$ segundo as potencias de h e substituir depois h por $x-a$. D'este modo tiram-se das formulas (1) e ($2'''$) as seguintes:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\mathrm{R}_n,$$

$$\mathrm{R}_n=\frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

das quaes se tira o desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias de $x-a$, quando, n tendendo para ∞, R_n tende para 0.

16. Terminaremos o que temos a dizer sobre a série de Taylor, no caso das variaveis reaes, expondo uma observação importante, devida a Cauchy. Fez notar este grande geometra, nas suas *Leçons de Calcul différentiel,* que, sendo uma funcção desenvolvida pela formula de Taylor, pode obter-se um resultado convergente e todavia este desenvolvimento não representar a funcção que lhe deu origem. Para dar um exemplo d'este facto apresenta a funcção $e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}$ que, sendo-lhe applicada aquella formula, dá o resultado convergente

$$1-x^2+\frac{x^4}{1.2}-\frac{x^6}{1.2.3}+\ldots,$$

que todavia tende para e^{-x^2} e não para $e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}$. Só quando o resto de uma série, obtida pela formula de Taylor, tender para 0, quando n tender para ∞, é que podemos affirmar que a série tem para somma a funcção que lhe deu origem.

Os geometras que primeiro empregaram a série de Taylor não faziam esta discussão do resto, nem mesmo attendiam, na maior parte das vezes, á questão da convergencia das séries que empregavam. Muitos resultados verdadeiros foram mesmo obtidos pela série de Taylor em circumstancias em que esta série era divergente. Não nos occuparemos aqui dos motivos d'esta coincidencia e só notaremos que, em muitos casos, o emprego que faziam da série de Taylor equivalia ao emprego da formula

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varepsilon$$

em questões em que não era necessario conhecer ε.

17. Por meio da formula de Taylor, com as expressões do resto dadas por Lagrange e Cauchy, tem-se achado o desenvolvimento em série de algumas funcções importantes. A difficuldade que se encontra porém geralmente em verificar se o resto R_n tende ou não para 0, quando n tende para o infinito, limitaria consideravelmente o uso da série de Taylor, se Cauchy, fundando-se em methodos de natureza mais elevada, não tivesse dado o meio de evitar esta discussão, tirando a possibilidade do desenvolvimento da consideração immediata da funcção. Vamos deduzir o theorema celebre que deu para este fim, empregando para isso primeiramente o methodo por elle seguido, depois o methodo proposto por Riemann, e finalmente o methodo empregado por Weierstrass. Porém, antes d'isso, vamos, conservando-nos ainda no ponto de vista elementar, estender ao caso das funcções de variaveis complexas o theorema de Taylor e as expressões do resto obtidas neste capitulo.

CAPITULO II

Estudo da formula de Taylor no caso das funcções de variaveis complexas. Methodo elementar

18. A extensão da formula de Taylor ao caso das funcções de variaveis complexas foi feita pela primeira vez por Cauchy, já por um processo elementar, que aqui vamos expôr, já por um processo de natureza superior, que será exposto no capitulo seguinte. O processo elementar, a que vimos de nos referir, foi publicado pelo celebre geometra nas suas *Leçons de Calcul différentiel,* publicadas em 1829.

Seja

$$F(x) = F(\rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

uma funcção da variavel complexa

$$x = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = \rho e^{i\omega},$$

e supponhamos que x, quando varia, percorre uma recta que passa pela origem das coordenadas e faz um angulo ω com o eixo das abscissas e que $F(x)$ admitte as derivadas $F'(x), \ldots, F^{(n)}(x)$, finitas e determinadas. Teremos, derivando $F(x)$ n vezes relativamente a ρ,

$$e^{ni\omega} F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(\rho) + i\psi^{(n)}(\rho).$$

Supponhamos agora que $\varphi(\rho)$, $\psi(\rho)$ e as derivadas d'estas funcções até á ordem $n-1$ são nullas quando $\rho = 0$. As formulas (1) e (2''') do numero 10 mostram que é, n'este caso,

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^n (1-\theta_1)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}\varphi^{(n)}(\theta_1\rho), \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

$$\psi(\rho) = \frac{\rho^n (1-\theta_2)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}\psi^{(n)}(\theta_2\rho), \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

*

Vem portanto

$$F(x) = \frac{\rho^n}{1.2\ldots(n-1)p}\left[(1-\theta_1)^{n-p}\varphi^{(n)}(\theta_1\rho) + i(1-\theta_2)^{n-p}\psi^{(n)}(\theta_2\rho)\right].$$

Applicando agora esta formula á funcção

$$F(x) = f(x) - \left[f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0)\right],$$

que é nulla assim como as suas derivadas até á ordem $n-1$, quando $\rho = 0$, vem a formula pedida:

(1) $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

(2) $$R_n = \frac{\rho^n}{1.2\ldots(n-1)p}\left[(1-\theta_1)^{n-p}\varphi^{(n)}(\theta_1\rho) + i(1-\theta_2)^{n-p}\psi^{(n)}(\theta_2\rho)\right].$$

Cauchy punha $p = 1$, mas, como se vê, o seu methodo é applicavel qualquer que seja p.

19. Á expressão de R_n, que vimos de achar, pode dar-se uma forma mais propria para a sua applicação ao desenvolvimento das funcções em série. Para isso, basta notar que, por ser $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$, temos, representando por x_1 e x_2 os valores de x cujos modulos são $\theta_1\rho$ e $\theta_2\rho$,

$$x^n f^{(n)}(x_1) = \rho^n e^{ni\omega} F^{(n)}(x_1) = \rho^n\left[\varphi^{(n)}(\theta_1\rho) + i\psi^{(n)}(\theta_1\rho)\right],$$
$$x^n f^{(n)}(x_2) = \rho^n e^{ni\omega} F^{(n)}(x_2) = \rho^n\left[\varphi^{(n)}(\theta_2\rho) + i\psi^{(n)}(\theta_2\rho)\right].$$

Podemos, pois, escrever a expressão de R_n da maneira seguinte:

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)p}\Big[(1-\theta_1)^{n-p} R\,\{x^n f^{(n)}(x_1)\}$$
$$+ i(1-\theta_2)^{n-p} J\,\{x^n f^{(n)}(x_2)\}\Big],$$

representando por $R\,\{x^n f^{(n)}(x_1)\}$ a parte real de $x^n f^{(n)}(x_1)$ e por $J\,\{x^n f^{(n)}(x_2)\}$ o coefficiente de i na parte imaginaria de $x^n f^{(n)}(x_2)$.

Como porém x_1 e x_2 representam pontos da recta que passa pela origem das coordenadas e faz o angulo ω com o eixo das abscissas, temos

$$x_1 = \theta_1 \rho e^{i\omega} = \theta_1 x, \quad x_2 = \theta_2 \rho e^{i\omega} = \theta_2 x.$$

Logo podemos dar á expressão de R_n a forma

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} R_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)p} \Big[& (1-\theta_1)^{n-p} R \{ x^n f^{(n)}(\theta_1 x) \} \\ & + i(1-\theta_2)^{n-p} J \{ x^n f^{(n)}(\theta_2 x) \} \Big]. \end{aligned} \right.$$

Esta formula foi empregada por Mansion, n'uma memoria publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (t. IX, 1885), para achar o desenvolvimento em série das funcções elementares e^x, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, etc.

20. Mudando $f(x)$ em $f(x+h)$, e trocando h por x, pode dar-se ás formulas (1) e (2') a forma

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

$$\begin{aligned} R_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)p} \Big[& (1-\theta_1)^{n-p} R \{ h^n f^{(n)}(x+\theta_1 h) \} \\ & + i(1-\theta_2)^{n-p} J \{ h^n f^{(n)}(x+\theta_2 h) \} \Big]. \end{aligned}$$

21. N'uma memoria importante, publicada em 1876 no *Journal de Liouville* (t. II da 3.ª série), apresentou Darboux uma expressão do resto da série de Taylor, no caso das funcções de variaveis complexas, mais simples do que a precedente e que é a verdadeira extensão das formulas dadas no capitulo anterior.

Para achar esta expressão fundou-se o eminente geometra no seguinte lemma geometrico:

Se um ponto M descreve uma recta AB, variando sempre no mesmo sentido, e se um ponto m está ligado com M de modo que, quando M descreve esta recta, o ponto m descreve a curva acb, existe pelo menos uma posição d'estes pontos onde a rasão $\frac{ds}{d\sigma}$ da differencial do comprimento dos arcos da curva para a differencial do comprimento dos segmentos da recta é igual ou maior do que $\frac{ab}{AB}$.

Se fosse, com effeito, para todas as posições dos pontos considerados

$$\frac{ds}{d\sigma} < \frac{ab}{\mathrm{AB}},$$

teriamos, representando por σ_1 e σ_2 os valores que toma σ nos pontos A e B,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{ds}{d\sigma}\, d\sigma < \frac{ab}{\mathrm{AB}} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma,$$

e portanto

$$\text{arc } acb < ab,$$

o que é absurdo.

22. Posto isto, sejam

$$\varphi(z) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}, \quad \psi(z) = \mathrm{X}_1 + i\mathrm{Y}_1$$

duas funcções de uma variavel complexa z, continuas em todos os pontos de uma recta que une o ponto correspondente a x ao ponto correspondente a $x+h$, e supponhamos que, quando z percorre esta recta, $\mathrm{X}_1 + i\mathrm{Y}_1$ percorre tambem a recta AB, variando sempre no mesmo sentido, e $\mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ percorre o arco de curva acb.

Por serem a, b, A, B, os pontos correspondentes aos numeros complexos $\varphi(x)$, $\varphi(x+h)$, $\psi(x)$, $\psi(x+h)$, temos

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}} = \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} \right|.$$

Temos tambem

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{\sqrt{d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2}}{\sqrt{d\mathrm{X}_1^2 + d\mathrm{Y}_1^2}} = \left| \frac{d\varphi(z)}{d\psi(z)} \right| = \left| \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)} \right|.$$

Logo, applicando o lemma precedente, vê-se que existe um numero x_1, correspondente a um valor de $\psi(z)$ representado por um ponto da recta AB, e portanto comprehendido entre x e $x+h$, tal que é

$$\left| \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} \right| \geqq \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} \right|,$$

e portanto

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(h)}=\lambda\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

λ representando um numero complexo cujo modulo não pode ser superior á unidade.

A esta igualdade podemos ainda dar outra forma. Seja KL (1) a recta descripta pelo ponto z, K, N e L os pontos correspondentes aos imaginarios x, x_1 e $x+h$, ω o angulo d'esta recta com o eixo das abscissas, ρ', ρ'', R, b as distancias OK, OL, ON e CO. Teremos

$$x=b+\rho' e^{i\omega},\quad x+h=b+\rho'' e^{i\omega},\quad x_1=b+\mathrm{R}e^{i\omega},$$

e portanto

$$h=(\rho''-\rho')e^{i\omega},\quad x_1-x=(\mathrm{R}-\rho')e^{i\omega};$$

mas

$$\mathrm{R}-\rho'<\rho''-\rho';$$

logo

$$\mathrm{R}-\rho'=\theta(\rho''-\rho'),$$

θ representando uma quantidade real comprehendida entre 0 e 1; e por consequencia

$$x_1-x=\theta(\rho''-\rho')e^{i\omega}=\theta h.$$

Temos pois a igualdade

$$(3)\qquad \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}=\lambda\frac{\varphi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)}.$$

A formula que vimos de achar differe só pelo factor λ da formula correspondente do numero 10.

23. Pondo

$$\psi(z)=(x+h-z)^p,$$

e notando que, se representarmos por ρ o modulo de z, temos

$$z=b+\rho e^{i\omega},$$

---

(1) É facil traçar a figura. Basta tirar duas rectas perpendiculares Cx e Cy e, por um ponto O de Cx, tirar depois a recta OKNL.

vê-se que é

$$X_1 + iY_1 = \psi(z) = (\rho'' - \rho)^p e^{ip\omega} = (\rho'' - \rho)^p (\cos p\,\omega + i \operatorname{sen} p\,\omega),$$

e portanto

$$X_1 = (\rho'' - \rho)^p \cos p\,\omega, \quad Y_1 = (\rho'' - \rho)^p \operatorname{sen} p\,\omega,$$

e

$$Y_1 = X_1 \operatorname{tang} p\,\omega.$$

Logo, quando z descreve a recta KL, $\psi(z)$ descreve uma recta AB.

Podemos, pois, applicar a formula (3) á funcção precedente, o que dá

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \lambda h \frac{\varphi'(x+\theta h)}{p(1-\theta)^{p-1}}.$$

Applicando esta formula á funcção considerada no numero 10,

$$\varphi(z) = f(x+h) - f(z) - (x+h-z) f'(z)$$
$$- \frac{1}{2}(x+h-z)^2 f''(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(z),$$

vem a *formula de Darboux*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$
$$R_n = \lambda \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p} f^{(n)}(x+\theta h),$$

que é a extensão ao caso das variaveis complexas das formulas (1) e (2''') do numero 10.

24. Mansion, na memoria já citada, deu uma demonstração puramente analytica do theorema de Darboux. Mais tarde, no seu *Résumé du Cours d'Analyse,* publicado em 1887, deu á expressão de R_n uma outra forma que serve para os mesmos fins que a anterior, da qual não differe essencialmente, mas cuja demonstração analytica é mais simples e directa.

Parte para isso da expressão de R_n dada no numero 20, onde põe

$$h^n = Be^{ib}, \quad \frac{(1-\theta_1)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p} f^{(n)}(x+\theta_1 h) = Ce^{ic},$$
$$\frac{(1-\theta_2)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p} f^{(n)}(x+\theta_2 h) = De^{id};$$

o que dá

$$R_n = BC\cos(b+c) + BDi\,\mathrm{sen}\,(b+d) = He^{i\alpha},$$

representando por H a quantidade

$$H = [B^2C^2\cos^2(b+c) + B^2D^2\,\mathrm{sen}^2(b+d)]^{\frac{1}{2}}.$$

Suppondo agora $C \geqq D$, temos $H^2 \overline{\overline{<}}\, 2B^2C^2$ e portanto $H = \lambda_1 BC\sqrt{2}$, onde λ_1 representa um factor positivo igual ou inferior á unidade.

Logo

$$R_n = \lambda_1\sqrt{2}\,e^{i(\alpha-b-c)}h^n\frac{(1-\theta_1)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}(x+\theta_1 h),$$

ou

$$R_n = \lambda\sqrt{2}\,\frac{h^n(1-\theta_1)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p}f^{(n)}(x+\theta_1 h),$$

onde $|\lambda| \overline{\overline{<}}\, 1$. É esta formula que pretendiamos achar.

Se fôr $D > C$, demonstra-se o theorema do mesmo modo, pondo $H = \lambda_1 BD\sqrt{2}$.

25. Por meio de qualquer das formulas, que vimos de achar, pode-se obter o desenvolvimento em série das funcções elementares e^x, $(1+x)^k$, $\log(1+x), \ldots$, procedendo como no caso das funcções de variaveis reaes. Aqui vamos considerar sómente a funcção $(1+x)^k$, de cujo desenvolvimento temos de usar adiante.

Temos n'este caso

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{a=1}^{a=n-1}\frac{k(k-1)\ldots(k-a+1)}{1.2\ldots a}x^a + R_n,$$

$$R_n = \lambda\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{k-1}.$$

1) Se o modulo ρ de x é menor do que a unidade, a quantidade

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\rho^n$$

tende, como é sabido, para 0 quando n tende para o infinito. Além d'isso é

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| = \frac{1-\theta}{\sqrt{1+\theta^2\rho^2+2\theta\rho\cos\omega}} \overline{\overline{<}}\, \frac{1-\theta}{1-\theta\rho} < 1.$$

Logo R_n tende para 0 quando n tende para ∞, e o binomio considerado pode ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de x pela formula

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-a+1)}{1.2\ldots a} x^a.$$

2) Se o modulo ρ é maior do que a unidade, a série precedente é divergente.

O estudo do caso em que ρ é igual á unidade não será aqui feito. A respeito d'elle pode consultar-se a memoria de Abel sobre o binomio (*Oeuvres,* t. I) ou ainda os trabalhos de Mansion anteriormente citados.

Deve-se observar que, no caso de k ser um numero fraccionario ou um numero irracional, a funcção $(1+x)^k$ tem muitos ramos. A série anterior dá o desenvolvimento do ramo que se reduz á unidade quando $x=0$. Para achar o desenvolvimento dos outros ramos basta attender a que estão todos comprehendidos na expressão $1^k\,(1+x)^k$, onde se deve substituir 1^k pelos seus diversos valores e $(1+x)^k$ pelo desenvolvimento que vimos de achar.

CAPITULO III

Continuação do estudo da série de Taylor, no caso das funcções de variaveis complexas. Methodo de Cauchy

26. O methodo para o estudo da série de Taylor, que vamos agora considerar, é devido a Cauchy e é fundado n'uma theoria importante, devida a este grande geometra, da qual elle fez muitas e notaveis applicações. Esta theoria, que vamos expôr succintamente, foi publicada em 1825 na sua bella e importante *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*

Consideremos uma curva composta de muitos arcos AB, BC, CD,... taes que, em cada um, a cada valor de x corresponda um unico valor da ordenada, sejam a, b, c, d,... as abscissas dos pontos A, B, C,... e y_1, y_2, y_3,... funcções de x, que representam os valores que toma y respectivamente nos arcos AB, BC, CD,... Chama-se *integral curvilineo de* $f(x, y)\,dx$ tomado ao longo da curva ABCD..., que designaremos por S, e representa-se pela notação $\int_S f(x, y)\,dx$ a somma:

$$\int_a^b f(x, y_1)\,dx + \int_b^c f(x, y_2)\,dx + \int_c^d f(x, y_3)\,dx + \dots$$

D'esta definição resulta immediatamente que, se a curva S fôr descripta no sentido DCBA, contrario ao precedente, o integral ao longo d'esta curva conserva o mesmo valor absoluto e muda de signal.

Quando a curva S é fechada, o integral pode ser tomado em sentido tal que a área, que ella limita, fique á esquerda de um observador que percorra aquella curva movendo-se no mesmo sentido, ou á direita d'este observador. O primeiro sentido diz-se *directo,* o segundo *retrogrado.*

*

Posto isto, vamos demonstrar o theorema fundamental, devido a Cauchy:

Se na área limitada por uma curva fechada as funcções $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dx}$ *forem continuas e tiver logar a condição* $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$, *o integral de* $\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$, *tomado ao longo da curva considerada em sentido determinado, é nullo.*

A demonstração que Cauchy deu d'este theorema é fundada nos principios do calculo das variações. Mais tarde Riemann deu outra demonstração do mesmo theorema fundada em um theorema importante de G. Green, que adiante será estabelecido. Aqui vamos apresentar uma demonstração mais directa e que é fundada nos principios mais elementares do calculo integral.

Consideremos primeiramente uma área ABCD, limitada por uma recta AD, parallela ao eixo das ordenadas, por duas rectas AB e DC, parallelas ao eixo das abscissas, e por uma linha recta ou curva BC, e sejam

$$x = f_1(s),\ y = f_2(s)$$

as equações da linha ABC (f_1 e f_2 representando uma funcção ao longo de AB e outra funcção ao longo de BC, e s representando o comprimento dos arcos d'esta linha, contados a partir do ponto A) e s_1 o valor que toma s no ponto C.

Integrar a expressão $\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$ ao longo de ABC entre os pontos A e C, cujas coordenadas são (x_0, y_0) e (x_1, y_1), é procurar o valor que toma no ponto C, onde $s = s_1$, a funcção das variaveis x e y, dependentes de s, que satisfaz á condição

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy,$$

e que é nulla quando $s = 0$.

Para determinar u, podemos empregar as equações

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{du}{dy} = \psi(x, y),$$

que dão primeiramente

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \theta(y),$$

e depois

$$\psi(x, y) = \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \frac{d\theta(y)}{dy},$$

ou, notando que, $\varphi(x, y)$ e $\frac{d\varphi}{dy}$ sendo, para cada valor de y comprehendido entre y_0 e y_1, funcções continuas de x e y no intervallo de x_0 a x, o theorema de Leibnitz relativa á differenciação dos integraes é applicavel ao integral que entra n'esta igualdade,

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, y)}{dy}\, dx + \frac{d\theta(y)}{dy},$$

ou

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\psi}{dx}\, dx + \frac{d\theta(y)}{dy} = \psi(x, y) - \psi(x_0, y) + \frac{d\theta(y)}{dy};$$

e portanto

$$\theta(y) = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy.$$

Temos pois

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{x_0}^{x} \psi(x_0, y)\, dy.$$

O valor que toma u no ponto (x_1, y_1) é pois igual á quantidade

$$\int_{y_0}^{y_1} \psi(x_0, y)\, dy + \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y_1)\, dx.$$

Analysando esta expressão, vê-se que a primeira parcella coincide com o resultado que se obtem integrando $\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$ ao longo de AD, e que a segunda parcella coincide com o resultado que se obtem integrando a mesma expressão ao longo de DC. Logo temos, representando por (ABC), (ADC), etc. os integraes da expressão considerada, tomados respectivamente ao longo de ABC, ADC, etc.,

$$(\mathrm{ABC}) = (\mathrm{ADC}) = -(\mathrm{CDA}),$$

e portanto

$$(\mathrm{ABCDA}) = 0.$$

Consideremos agora uma área limitada por um contorno qualquer S. Decompondo-a, por meio de rectas auxiliares, parallelas aos eixos coordenados, em áreas parciaes limitadas por contornos $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_k$, que estejam nas condições que vimos de considerar, temos

$$\int_{\mathrm{S}} [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy] = \sum_{m=1}^{k} \int_{\mathrm{S}_m} [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy],$$

estes contornos sendo todos percorridos no mesmo sentido relativamente ás áreas que limitam.

Com effeito, no segundo membro d'esta igualdade entram os integraes relativos a todos os lados das figuras em que se decompoz a área dada. Os integraes que correspondem ás rectas auxiliares são dois a dois eguaes e de signal contrario, por ser cada recta descripta duas vezes, cada uma em seu sentido, quando (x, y) descreve os contornos de duas figuras adjacentes, reunidas pela recta considerada; e os integraes correspondentes ás linhas que fazem parte do contorno S, dão uma somma igual ao primeiro membrò d'esta igualdade, por ser S a somma d'estas linhas.

Basta agora attender a que os integraes que entram no segundo membro são todos nullos, para concluir que é

$$\int_S [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy] = 0.$$

O theorema que vimos de demonstrar tem applicações importantes em Analyse e em Physica mathematica. Aqui vamos immediatamente applical-o á demonstração de um theorema relativo ás funcções de variaveis complexas, por meio da qual Cauchy deduziu a formula de Taylor.

27. Consideremos uma funcção da variavel complexa $z = x + iy$

$$f(z) = u + iv,$$

onde u e v representam funcções de x e y, e supponhamos que esta funcção admitte derivada. Sabe-se que n'este caso u e v satisfazem ás equações

$$\text{(A)} \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy},$$

e que, reciprocamente, se u e v satisfazem a estas equações e $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}$ são funcções continuas de x e y, $u + iv$ admitte derivada. Sabe-se tambem que esta derivada é dada pela formula

$$f'(z) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}.$$

As funcções que admittem derivada são as unicas que ha interesse em estudar, e dá-se-lhes o nome de funcções *monogeneas* ou *analyticas*.

A funcção $f(z)$ pode ter um só valor para cada valor de z ou muitos. No primeiro d'estes casos a funcção diz-se *uniforme* ou *monodroma*. No segundo caso, se considerarmos, para determinar completamente a funcção, um dos valores que $f(z)$ toma em um ponto B como valor inicial, o valor que a funcção toma n'um ponto qualquer D da área A, limitada por um contorno S, quando z descreve uma curva que ligue D a B, deve ser determinado pela condição de $f(z)$ variar de uma maneira continua quando z descreve esta curva. Se este valor é sempre o mesmo, qualquer que seja a linha descripta pelo ponto z, quando vae de B a D sem sahir da área A, a funcção diz-se ainda *uniforme* ou *monodroma* na área considerada. No caso contrario diz-se *multiforme* ou *polydroma*.

Se a funcção $f(z)$ fôr monogenea, uniforme e continua em todos os pontos de uma área A e, além d'isso, as derivadas parciaes de u e v relativamente a x e y forem funcções continuas d'estas variaveis, diremos, com Cauchy, que a funcção $f(z)$ é *synectica* na área A.

28. Posto isto, temos por definição, representando por S o contorno da área A,

$$\int_S f(z)\,dz = \int_S (u + iv)(dx + idy) = \int_S (udx - vdy) + i\int_S (vdx + udy).$$

Se a funcção $f(z)$ é synectica na área A, temos tambem, em virtude do theorema demonstrado no numero 26 e das formulas (A),

$$\int_S (vdy - udx) = 0, \quad \int_S (udy + vdx) = 0;$$

e portanto

$$\int_S f(z)\,dz = 0.$$

Podemos pois ennunciar o theorema seguinte:

Se a funcção $f(z)$ fôr synectica na área A, limitada por uma curva fechada, o integral de $f(z)\,dz$, tomado no longo do contorno da área, é nullo.

Este theorema, publicado por Cauchy em 1825 na sua Memoria celebre sobre os integraes tomados entre limites imaginarios, atraz citada, foi a base dos trabalhos d'este eminente geometra sobre a theoria das funcções de variaveis complexas. Entre os corollarios que d'elle se deduzem notaremos os seguintes, de que teremos de fazer uso:

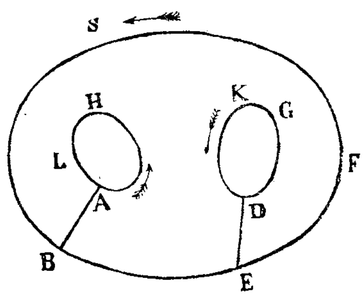
1.º *Se a funcção $f(z)$ fôr synectica na área limitada por uma curva exterior S e pelas curvas interiores c_1, c_2, ..., temos*

$$\int_S f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \ldots,$$

os contornos S, c_1, c_2,... sendo descriptos todos no mesmo sentido relativamente ás áreas interiores.

Com effeito, o contorno fechado EDGKDEBAHABFE limita uma área na qual a funcção é synectica; logo o theorema precedente é applicavel, e temos, representando por (ED), (DGKD), etc., os integraes de $f(z)\,dz$ tomados ao longo de ED, DGKD, etc.,

$$(\mathrm{ED})+(\mathrm{DGKD})+(\mathrm{DE})+(\mathrm{EB})+(\mathrm{BA})+(\mathrm{AHLA})+(\mathrm{AB})+(\mathrm{BFE})=0.$$



Mas

$$(\mathrm{ED})=-(\mathrm{DE}),\quad (\mathrm{BA})=-(\mathrm{AB}).$$

Logo temos

$$(\mathrm{DGKD})+(\mathrm{EB})+(\mathrm{AHLA})+(\mathrm{BFE})=0,$$

ou

$$(\mathrm{EFBE})=(\mathrm{DGKD})+(\mathrm{AHLA}),$$

o que demonstra o theorema enunciado.

2.° *Se $f(z)$ fôr synectica na área limitada por um unico contorno S e se a representar um ponto do interior d'esta área, será*

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \tag{B}$$

S sendo descripto no sentido directo.

Temos, com effeito, representando por c uma circumferencia de raio ρ, cujo centro seja o ponto representado por a e que esteja collocada no interior da curva S,

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a}=\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Mas, pondo $z-a=\rho e^{i\omega}$, vem

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a}=i\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\omega})\,d\omega.$$

Logo, pondo $\varepsilon=f(a+\rho e^{i\omega})-f(a)$, temos

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a}=\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a}=i\left[\int_0^{2\pi} f(a)\,d\omega+\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\omega\right].$$

Notando agora que, por ser a funcção $f(z)$ continua no ponto a, $|\varepsilon|$ pode tornar-se menor do que qualquer numero positivo δ, por mais pequeno que seja, dando a ρ valores sufficientemente pequenos, e que é

$$\left|\int_0^{2\pi} \varepsilon d\omega\right| < \int_0^{2\pi} |\varepsilon|\, d\omega < 2\delta\pi,$$

obtém-se a formula procurada

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\omega = 2i\pi f(a).$$

3.º *Se a funcção $f(z)$ fôr synectica na área A, limitada por um contorno exterior S e por um contorno interior S', e se a representar um ponto do interior d'esta área, é*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} - \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

É o que resulta dos dois corollarios precedentes, que dão

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Deve observar-se que, no theorema que vimos de demonstrar, S deve ser descripto no sentido directo e S' no sentido retrogrado relativamente á área A, que limitam.

29. *Se a funcção $f(z)$ é synectica na área limitada pela curva S', temos, n'um ponto qualquer a do interior d'esta área, a igualdade*

$$f^{(n)}(a) = \frac{1.2\ldots n}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

que dá as derivadas de $f(a)$.

Temos, com effeito, por definição

$$f'(a) = \lim_{h=0}\int_S \frac{f(z)\,dz}{h}\left[\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a}\right]dz;$$

mas

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \frac{h^2}{(z-a)^2(z-a-h)};$$

logo

$$f'(a) = \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \lim_{h=0} \int_S \frac{hf(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}.$$

Basta attender agora a que temos, representando por M o maior valor que toma $\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|$ quando z descreve a curva S e notando que é $|dz| = |dx + idy| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ (s representa o comprimento do arco que une o ponto (x, y) ao ponto fixo que se toma para origem dos arcos),

$$\left|\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| < \int_S \left|\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| < \text{MS},$$

para concluir que a segunda das parcellas que entram na expressão de $f'(a)$ tende para 0 quando h tende para 0, e que portanto temos

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}.$$

Do mesmo modo se acham as derivadas seguintes.

30. Habilitados com os theoremas que vimos de demonstrar, podemos agora estender, seguindo Cauchy, a formula de Taylor ao caso das funcções de variaveis complexas.

Seja $f(x)$ uma funcção synectica da variavel complexa x na área limitada por um contorno S, sejam a e x dois numeros representados por dois pontos do interior da mesma área e seja z um numero representado por um ponto do contorno.

A identidade

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

dá, substituindo x por $x-a$ e z por $z-a$,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)},$$

e depois, multiplicando ambos os membros por $f(z)\,dz$ e integrando ao longo do contorno S,

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} + (x-a)\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$
$$+ \ldots + (x-a)^{n-1}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n} + (x-a)^n \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-x)}.$$

Temos porém (numeros 28 e 29)

$$2i\pi f(a)=\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \quad 2i\pi f(x)=\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$$f^{(n)}(a)=\frac{1.2\ldots n}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Logo é

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+R_n,$$

onde

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-x)}.$$

Temos assim a formula de Taylor com uma expressão do resto da qual Cauchy deduziu, na sua importante *Mémoire sur le Calcul des résidus et le Calcul des limites* (1), apresentada em 1831 á Academia de Turin, o seguinte theorema, que constitue uma das suas mais bellas descobertas:

Se a funcção $f(z)$ é synectica na área limitada por uma circumferencia, cujo centro é o ponto correspondente a a, e se x representa um ponto qualquer do interior d'esta área, tem logar o desenvolvimento em série

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Supponhamos, com effeito, que S representa uma circumferencia cujo centro é o ponto correspondente a a. Para todos os pontos z do contorno e para todos os pontos x do interior tem n'este caso logar a desigualdade

$$|x-a|<|z-a|.$$

Por outra parte, da desigualdade seguinte, que resulta immediatamente da noção de integral definido,

$$|R_n| \overset{=}{<} \frac{1}{2\pi}\int_S \left|\frac{x-a}{z-a}\right|^n \left|\frac{f(z)}{z-x}\right| \, |dz|$$

deduz-se, notando que é $|dz|=\sqrt{dx_1^2+dy_1^2}=ds$ (pondo $z=x_1+iy_1$) e representando por M

(1) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, pag. 50.

*

o maior valor que toma $\left|\frac{f(z)}{z-x}\right|$, quando z descreve a circumferencia S,

$$\left|R_n\right| < \frac{SM}{2\pi}\left|\frac{x-a}{z-a}\right|^n.$$

Basta attender agora a que é $|x-a|<|z-a|$ para concluir que $|R_n|$ tende para 0 quando n tende para o infinito, e portanto que $f(x)$ pode ser desenvolvida pela série de Taylor.

31. Não nos occuparemos aqui a deduzir as consequencias importantes que se tiram d'este theorema nem a mostrar o papel fundamental que elle representa na theoria geral das funcções (1). Faremos sómente excepção para a proposição seguinte, porque teremos de fazer d'ella uso adiante.

Seja $f(x)$ uma funcção synectica na área A, limitada por um contorno S, e procuremos o numero de raizes que a equação $f(x)=0$ tem no interior d'este contorno.

Sejam a, b, c,... estas raizes e m, n,... os seus graus de multiplicidade, e representem-se por S', S'', etc. circumferencias cujos centros sejam os pontos correspondentes a a, b,... e cujos raios sejam tão pequenos que ellas não cortem o contorno S e cada uma contenha no interior só uma raiz.

Teremos (numero 28 — 1.º)

$$\int_S \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int_{S'} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} + \int_{S''} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} + \ldots,$$

e, em virtude do theorema anterior,

$$f(x) = (x-a)^m P_1(x-a),$$
$$f(x) = (x-b)^n P_2(x-a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$P_1(x-a)$, $P_2(x-a)$,... representando séries ordenadas respectivamente segundo as potencias de $x-a$, $x-b$,..., e a primeira igualdade tendo logar na área limitada pelo contorno S', a segunda na área limitada pelo contorno S'', etc.

---

(1) Para um estudo desenvolvido da theoria geral das funcções monogeneas pode consultar-se, entre outras obras, a seguinte: A. R. Forsyth, *Theory of Functions of a complex variable*, London, 1893.

Das igualdades anteriores tira-se

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{P_1'(x-a)}{P_1(x-a)},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x-b} + \frac{P_2'(x-b)}{P_2(x-b)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e portanto (numero 28)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{m}{2i\pi}\int_{S'} \frac{dz}{z-a} = m,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S''} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{n}{2i\pi}\int_{S''} \frac{dz}{z-b} = n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Temos pois

$$m + n + \ldots = \frac{1}{2i\pi}\int_{S} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}.$$

Esta formula dá o numero de raizes da equação $f(x) = 0$, contidas no interior do contorno S, expresso por meio de um integral curvilineo tomado ao longo do contorno.

32. Passando agora a considerar os desenvolvimentos ordenados segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, da variavel, seja $f(z)$ uma funcção synectica na área annular limitada por duas circumferencias concentricas de raio R e R', e sejam x um ponto qualquer do interior d'esta área e a o centro das circumferencias.

Temos n'este caso (numero 28 — 3.º)

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

representando por S e S' as circumferencias de raio R e R' consideradas.

Applicando ao primeiro integral a analyse desenvolvida no numero 30, vem

$$\int_{S} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_{S} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + (x-a)\int_{S} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \ldots + (x-a)^{n-1}\int_{S} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n} + \ldots$$

Para achar o segundo integral partiremos da igualdade

$$\frac{1}{z-x} = -\left[\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^n(x-z)}\right],$$

que dá

$$\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = -\frac{1}{x-a}\int_{S'} f(z)\,dz - \frac{1}{(x-a)^2}\int_{S'} (z-a)f(z)\,dz$$
$$-\ldots-\frac{1}{(x-a)^n}\int_{S'} (z-a)^{n-1} f(z)\,dx + R'_n,$$

onde

$$R'_n = -\int_{S'} \left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{x-z}.$$

Por ser, ao longo de S', $|z-a| < |x-a|$, vê-se, procedendo como se fez no numero 30 a respeito de R_n, que $|R'_n|$ tende para 0 quando n tende para o infinito.

Logo temos a formula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(x-a)^n},$$

onde é (numero 28 — 1.º)

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$
$$B_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz.$$

A formula que vimos de achar é conhecida pelo nome de *formula de Laurent* e tem uma importancia consideravel na theoria das funcções. Foi apresentada por este geometra á Academia das Sciencias de Paris em 1843 e foi objecto de um parecer de Cauchy, onde se indicam diversos modos de a obter (*Comptes rendus*, t. XVI).

Pondo $z - a = R' e^{i\omega}$, pode-se ainda exprimir A_n e B_n por meio dos integraes definidos:

$$A_n = \frac{1}{2\pi R'^n}\int_0^{2\pi} f(a + R' e^{i\omega})\, e^{-ni\omega} d\omega,$$
$$B_n = \frac{R'^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + R' e^{i\omega})\, e^{ni\omega}\, d\omega.$$

CAPITULO IV

Continuação do estudo da série de Taylor no caso das funcções de variaveis complexas. Methodo de Riemann

33. Seja $f(z)=u+iv$ uma funcção monogenea da variavel complexa $z=x+iy$. Já dissemos que as funcções u e v devem satisfazer ás equações

$$\frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx},\quad \frac{dv}{dy}=\frac{du}{dx}, \tag{1}$$

e portanto ás equações seguintes, que resultam das anteriores:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0.$$

As propriedades das funcções monogeneas podem, pois, ser tiradas das propriedades das funcções que satisfazem á equação ás derivadas parciaes de segunda ordem

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{d^2Z}{dy^2}=0, \tag{2}$$

ás quaes se dá o nome de *funcções harmonicas*.

Para ver como por este methodo, proposto por Riemann [1], se obtem a formula de Taylor

[1] *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse,* 1851.

e o theorema de Cauchy demonstrado no numero 30, vamos estudar algumas propriedades das funcções harmonicas das quaes teremos de fazer uso ([1]).

34. Para estudar as propriedades das funcções que satisfazem á equação (2) fundou-se Riemann n'um theorema importante, publicado em 1828 por G. Green, que vamos primeiramente demonstrar.

Consideremos o integral duplo seguinte, referido a uma área A limitada por uma curva que não possa ser cortada em mais de dois pontos pelas rectas parallelas aos eixos das coordenadas e na qual a funcção $f(x, y)$ seja continua:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx,$$

onde $x_1 = \theta_1(y)$, $x_2 = \theta_2(y)$ são as equações ([2]) dos arcos MQP e MNP da curva, que limita A, e a, b são as ordenadas dos pontos M e P, onde as ordenadas são minima e maxima; e seja

$$\int f(x, y)\, dx = \mathrm{F}(x, y) + \mathrm{C},$$

C representando uma constante arbitraria.

Teremos

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \mathrm{F}(x_2, y)\, dy - \int_a^b \mathrm{F}(x_1, y)\, dy.$$

Por outra parte, representando por S a curva que limita A e attendendo á definição de integral curvilineo dada no numero 26, temos tambem

$$\int_S \mathrm{F}(x, y)\, dy = \int_a^b \mathrm{F}(x_2, y)\, dy + \int_b^a \mathrm{F}(x_1, y)\, dy,$$

o integral sendo tomado ao longo d'esta curva n'um sentido tal que A fique á esquerda de um observador que percorra o seu contorno (sentido a que se dá, como já dissemos, o nome de *directo*).

([1]) Para um estudo mais completo das funcções harmonicas veja-se: Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, 1892.

([2]) É facil descrever a figura. Basta traçar dois eixos coordenados Ox e Oy e uma curva fechada que não possa ser cortada pelas rectas parallelas aos eixos em mais de dois pontos, e representar depois respectivamente por M e P os pontos de ordenada minima e maxima e por Q e N os pontos de abscissa minima e maxima.

D'estas igualdades resulta a formula

$$(a)\qquad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \frac{d\,F(x,y)}{dx}\,dx\,dy = \int_S F(x,y)\,dy.$$

Do mesmo modo se demonstra a formula

$$(b)\qquad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \frac{d\,F_1(x,y)}{dy}\,dx\,dy = -\int_S F_1(x,y)\,dx,$$

suppondo que o contorno S é ainda descripto no sentido directo.

As formulas precedentes podem ser extendidas ao caso de A ter uma forma differente da que vimos de considerar. Decompondo A em outras figuras A_1, A_2, $A_3, \dots$ cujos contornos não sejam cortados pelas rectas parallelas aos eixos coordenados em mais de dois pontos, estes contornos são formados por porções do contorno A, as quaes representaremos por S_1, $S_2, \dots$ e pelas linhas auxiliares empregadas para fazer a decomposição de A nas figuras A_1, $A_2, \dots$, as quaes representaremos por s_1, $s_2, \dots$ Logo temos, suppondo que os contornos A_1, $A_2, \dots$ são descriptos no sentido directo,

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \Sigma \iint_{A_i} f(x,y)\,dx\,dy = \Sigma \int_{S_i} F(x,y)\,dy + \Sigma \int_{s_i} F(x,y)\,dy.$$

É facil porém de ver que cada linha s_1, $s_2, \dots$ é descripta duas vezes, uma em cada sentido, quando são descriptos os contornos de duas áreas separadas por esta linha; portanto, a cada parcella da somma $\Sigma \int_{s_i} f(x,y)\,dy$ corresponde outra igual e de signal contrario, esta somma é nulla e temos

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \Sigma \int_{S_i} F(x,y)\,dy = \int_S F(x,y)\,dy.$$

35. As formulas (a) e (b) são as formulas de Green, que pretendiamos achar. Antes de as applicar ao estudo das funcções harmonicas, observaremos que Riemann tirou d'ellas o theorema de Cauchy demonstrado no numero 26, applicando-as ás funcções $\frac{d\psi}{dx}$ e $\frac{d\varphi}{dy}$. Vem, com effeito,

$$\iint_A \frac{d\psi}{dx}\,dx\,dy = \int_S \psi(x,y)\,dy, \quad \iint_A \frac{d\varphi}{dy}\,dx\,dy = -\int_S \varphi(x,y)\,dx,$$

e portanto

$$\iint_A \left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dy}\right) dx\, dy = \int_S [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy].$$

Basta attender agora a que as funcções φ e ψ consideradas no numero 26 satisfazem, por hypothese, á condição $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$, para se obter a igualdade

$$\int_S [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy] = 0,$$

que pretendiamos demonstrar.

30. Passando agora ao estudo das funcções harmonicas, vamos primeiramente achar, fundados nas formulas de Green, uma expressão d'estas funcções por meio de um integral curvilineo.

Sejam U e V duas funcções de x e y continuas, assim como as suas derivadas parciaes de primeira ordem, na área A, limitada por um contorno S, e seja tambem continua na mesma área a somma $\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2}$. Applicando o theorema de Green á funcção

$$\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy} + U\left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2}\right),$$

que é igual a

$$\frac{d}{dx}\left(U\frac{dV}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(U\frac{dV}{dy}\right),$$

vem

$$\iint_A \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}\right) dx\, dy = \int_S U\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) - \iint_A U\left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2}\right) dx\, dy,$$

e portanto, se V representar uma funcção harmonica,

$$\iint_A \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}\right) dx\, dy = \int_S U\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right).$$

Do mesmo modo se acha, U representando uma funcção harmonica,

$$\iint_A \left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}\right) dx\, dy = \int_S V\left(\frac{dU}{dx}dy - \frac{dU}{dy}dx\right).$$

D'esta igualdade e da anterior resulta a seguinte:

$$(3) \qquad \int_S \left[U\left(\frac{dV}{dx}\,dy - \frac{dV}{dy}\,dx\right) - V\left(\frac{dU}{dx}\,dy - \frac{dU}{dy}\,dx\right)\right] = 0,$$

que dá, pondo $U = 1$, visto que 1 é uma solução da equação (2),

$$(4) \qquad \int_S \left(\frac{dV}{dx}\,dy - \frac{dV}{dy}\,dx\right) = 0.$$

Se a área A fôr limitada por um contorno exterior C e por um contorno interior c, teremos, applicando a formula (3) ao contorno unico EFBEDKGDE, e representando por (EFBE), (ED), etc. os integraes da funcção que entra em (3), tomados respectivamente ao longo de EFBE, ED, etc.,

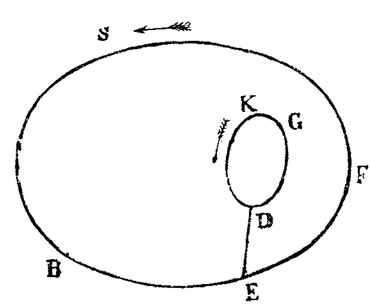
$$(\mathrm{EFBE}) + (\mathrm{ED}) + (\mathrm{DKGD}) + (\mathrm{DE}) = 0$$

ou, por ser $(\mathrm{ED}) = -(\mathrm{DE})$,

$$(\mathrm{EFBE}) + (\mathrm{DKGD}) = 0$$

ou

$$(\mathrm{EFBE}) = (\mathrm{DGKD}).$$



Porisso, suppondo que os contornos C e c são descriptos no sentido indicado pelas flechas, podemos escrever a igualdade

$$\int_C \left[U\left(\frac{dV}{dx}\,dy - \frac{dV}{dy}\,dx\right) - V\left(\frac{dU}{dx}\,dy - \frac{dU}{dy}\,dx\right)\right]$$
$$= \int_c \left[U\left(\frac{dV}{dx}\,dy - \frac{dV}{dy}\,dx\right) - V\left(\frac{dU}{dx}\,dy - \frac{dU}{dy}\,dx\right)\right].$$

É facil verificar que a funcção

$$U = \log z,$$

onde

$$z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

satisfaz á equação (2), e portanto que a funcção $\log z$ é harmonica. A formula anterior dá

*

porisso, suppondo que o ponto $(a,\ b)$ está no interior da curva c,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\mathrm{C}}\left[\log z\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dy-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dx\right)-\mathrm{V}\left(\frac{d\log z}{dx}\,dy-\frac{d\log z}{dy}\,dx\right)\right]\\ &=\int_{c}\left[\log z\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dy-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dx\right)-\mathrm{V}\left(\frac{d\log z}{dx}\,dy-\frac{d\log z}{dy}\,dx\right)\right].\end{aligned}\right.$$

37. Tomemos agora para contorno interior c uma circumferencia de raio ρ e centro $(a,\ b)$, e supponhamos que a funcção V e suas derivadas parciaes de primeira ordem são funcções continuas de x e y em toda a área limitada por C. Teremos, pondo

$$x=a+\rho\cos t,\quad y=b+\rho\operatorname{sen} t,$$

e attendendo á formula (4),

$$(6)\qquad \int_c \log z\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dy-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dx\right)=\log\rho\int_c\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dy-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dx\right)=0,$$

$$\int_c \mathrm{V}\left(\frac{d\log z}{dx}\,dy-\frac{d\log z}{dy}\,dx\right)=\int_c\mathrm{V}\left(\frac{x-a}{z^2}\,dy-\frac{y-b}{z^2}\,dx\right)=\int_c\mathrm{V}dt=\int_0^{2\pi}\mathrm{V}dt.$$

Tornando explicitas as variaveis x e y que entram em V, podemos substituir V por $\mathrm{V}(x,y)$ e temos, applicando o primeiro theorema dos medios valores dos integraes definidos,

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{V}dt=\int_0^{2\pi}\mathrm{V}(a+\rho\cos t,\ b+\rho\operatorname{sen} t)\,dt=2\pi\mathrm{V}(a+\rho\cos t_1,\ b+\rho\operatorname{sen} t_1)\,dt,$$

t_1 representando um numero comprehendido entre 0 e 2π. A igualdade anterior dá portanto

$$\int_c\mathrm{V}\left(\frac{d\log z}{dx}\,dy-\frac{d\log z}{dy}\,dx\right)=2\pi\mathrm{V}(a+\rho\cos t_1,\ b+\rho\operatorname{sen} t_1),$$

e, fazendo tender ρ para zero,

$$\int_c\mathrm{V}\left(\frac{d\log z}{dx}\,dy-\frac{d\log z}{dy}\,dx\right)=2\pi\mathrm{V}(a,b).$$

D'esta igualdade e das igualdades (5) e (6) tira-se finalmente a formula seguinte:

$$(7)\qquad \mathrm{V}(a,b)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}}\left[\log z\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dy-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dx\right)-\mathrm{V}\left(\frac{d\log z}{dx}\,dy-\frac{d\log z}{dy}\,dx\right)\right],$$

que dá os valores da funcção harmonica V expressos por meio de um integral definido e que representa no methodo de Riemann o mesmo papel que a igualdade (B) do numero 28 representa no methodo de Cauchy.

38. Para dar um segundo passo para a resolução da questão que estamos considerando, vamos tirar d'esta formula outra que dê os valores de V expressos por um integral definido ordinario. Para isso vamos porém primeiramente demonstrar um lemma de que teremos de fazer uso.

Consideremos um circulo de centro O e raio R, e seja A um ponto collocado no interior d'este circulo, cujas coordenadas são a e b.

Vejamos se existe um ponto B, exterior ao circulo, tal que seja constante, para todos os pontos M da circumferencia, a razão $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$.

Representando por α e β as coordenadas do ponto B, por x e y as do ponto M e por c^2 uma constante, teremos

$$\frac{\overline{\mathrm{AM}}^2}{\overline{\mathrm{BM}}^2}=\frac{z^2}{z_1^2}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=c^2,$$

e portanto, sendo O a origem das coordenadas,

$$\mathrm{R}^2-2ax-2by+a^2+b^2=c^2(\mathrm{R}^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2),$$

ou, pondo $a=\rho\cos\varphi,\quad b=\rho\operatorname{sen}\varphi,\quad \alpha=\rho_1\cos\varphi_1,\ \beta=\rho_1\operatorname{sen}\varphi_1,$

$$\mathrm{R}^2-2\rho x\cos\varphi-2\rho y\operatorname{sen}\varphi+\rho^2=c^2[\mathrm{R}^2-2\rho_1 x\cos\varphi_1-2\rho_1 y\operatorname{sen}\varphi_1+\rho_1^2].$$

Satisfaz-se a esta igualdade pondo

$$\rho_1=\frac{\mathrm{R}^2}{\rho},\quad c=\frac{\rho}{\mathrm{R}},\quad \varphi=\varphi_1, \tag{8}$$

como é facil verificar, e vê-se que é $\rho_1>\mathrm{R}$.

D'estas igualdades conclue-se o lemma seguinte:

Dado um circulo de raio R *e um ponto* A *no interior, existe outro ponto* B, *exterior ao mesmo circulo e situado sobre a recta que une o primeiro ponto ao centro do circulo, tal que a razão geometrica das distancias* AM *e* BM *é constante, qualquer que seja* M. *A distancia do ponto* B *ao centro do circulo é dada pela primeira das formulas* (8) *e o valor da constante é dado pela segunda.*

39. Posto isto, tomemos para contorno da integração na igualdade (7) a circumferencia a que vimos de nos referir, e notemos que a igualdade (3) dá, pondo $U=\frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=\log z_1$ e attendendo a que $\log z_1$ e V são funcções continuas de x e y no interior da área A,

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\log z_1\left(\frac{dV}{dx}dy-\frac{dV}{dy}dx\right)-V\left(\frac{d\log z_1}{dx}dy-\frac{d\log z_1}{dy}dx\right)\right]=0$$

e a que a igualdade (4), dá, por ser $\frac{z}{z_1}$ constante,

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\log\frac{z}{z_1}\left(\frac{dV}{dx}dy-\frac{dV}{dy}dx\right)=0.$$

Sommando membro a membro estas igualdades e a igualdade (7), vem

$$V(a,b)=-\frac{1}{2\pi}\int_C V\left[\frac{d\log z_1}{dx}dy-\frac{d\log z_1}{dy}dx-\frac{d\log z}{dx}dy+\frac{d\log z}{dy}dx\right],$$

ou

$$V(a,b)=-\frac{1}{2\pi}\int_C V\left[\frac{x-\alpha}{z_1^2}dy-\frac{y-\beta}{z_1^2}dx-\frac{x-a}{z^2}dy+\frac{y-b}{z^2}dx\right],$$

ou, por ser $c=\frac{\rho}{R}=\frac{z}{z_1}$,

$$\begin{aligned}V(a,b)&=-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{V}{z^2}\left[\frac{\rho^2}{R^2}(x-\alpha)dy-\frac{\rho^2}{R^2}(y-\beta)dx-(x-a)dy+(y-b)dx\right]\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{V}{z^2R^2}\left[(R^2-\rho^2)(ydx-xdy)-(\alpha\rho^2-aR^2)dy+(\beta\rho^2-bR^2)dx\right],\end{aligned}$$

ou, attendendo ás igualdades

$$\rho\rho_1=R^2,\ \frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{R^2}{\rho^2},$$

$$V(a,b)=-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{V(R^2-\rho^2)}{z^2R^2}(ydx-xdy).$$

Pondo nesta formula

$$x = \mathrm{R}\cos\psi, \quad y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\psi$$

e attendendo á igualdade

$$z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = (\mathrm{R}\cos\psi - \rho\cos\varphi)^2 + (\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\psi - \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 = \mathrm{R}^2 + \rho^2 - 2\mathrm{R}\rho\cos(\psi-\varphi),$$

vem a formula

$$\mathrm{V}(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{V}(\mathrm{R}\cos\psi, \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\psi)(\mathrm{R}^2-\rho^2)\,d\psi}{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2},$$

que determina, por meio de um integral definido, os valores que a funcção harmonica $\mathrm{V}(a, b)$ toma no interior do contorno C.

40. Partindo d'este integral, vamos exprimir os valores da funcção harmonica por meio de um desenvolvimento em série.

É facil de ver que é

$$\frac{\mathrm{R}^2-\rho^2}{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2} = -1 + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\rho e^{i(\psi-\varphi)}} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\rho e^{-i(\psi-\varphi)}},$$

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\rho e^{\varepsilon i(\psi-\varphi)}} = 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{\rho^m}{\mathrm{R}^m} e^{\varepsilon m i(\psi-\varphi)} + \frac{\rho^n}{\mathrm{R}^n}\cdot\frac{\rho e^{\varepsilon(n+1)i(\psi-\varphi)}}{\mathrm{R}-\rho e^{\varepsilon i(\psi-\varphi)}},$$

onde $\varepsilon = \pm 1$, e portanto

$$\frac{\mathrm{R}^2-\rho^2}{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2} = 1 + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{\rho^m}{\mathrm{R}^m}\cos m(\psi-\varphi)$$
$$+\frac{\rho^n}{\mathrm{R}^n}\cdot\frac{2[\mathrm{R}\rho\cos(n+1)(\psi-\varphi)-\rho^2\cos n(\psi-\varphi)]}{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}.$$

Logo

$$\mathrm{V}(a, b) = \sum_{m=0}^{n}\rho^m(a_m\cos m\varphi + b_m\,\mathrm{sen}\,m\varphi)$$
$$+\frac{1}{\pi}\frac{\rho^{n+1}}{\mathrm{R}^n}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{V}[\mathrm{R}\cos(n+1)(\psi-\varphi)-\rho\cos n(\psi-\varphi)]}{\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}\,d\psi,$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)\,d\psi,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi} V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)\cos m\psi d\psi,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi} V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)\,\mathrm{sen}\,m\psi d\psi,$$

e $m = 1, 2, 3, \ldots$

Fazendo tender n para o infinito e attendendo a que, por ser $\rho < R$, o ultimo termo da expressão anterior de $V(a, b)$ tende para zero, esta formula dá o desenvolvimento em série da funcção harmonica:

$$V\,a, b) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (a_m \cos m\varphi + b_m\,\mathrm{sen}\,m\varphi). \tag{9}$$

41. Consideremos agora as séries

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m \cos m\varphi, \quad F_1 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \rho^m\,\mathrm{sen}\,m\varphi, \tag{a}$$

que entram na formula que vimos de achar, e notemos que por meio das desigualdades

$$|a_m \cos m\varphi|\,\rho^m = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m |\cos m\varphi| \left|\int_0^{2\pi} V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)\cos m\psi\, d\psi\right|$$

$$< \frac{1}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_0^{2\pi} |V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)|\,d\psi < \left(\frac{\rho}{R}\right)^m M,$$

$$|b_m\,\mathrm{sen}\,m\varphi|\,\rho^m = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m |\mathrm{sen}\,m\varphi| \left|\int_0^{2\pi} V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)\,\mathrm{sen}\,m\psi\, d\psi\right|$$

$$< \frac{1}{\pi}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \int_0^{2\pi} |V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)|\,d\psi < \left(\frac{\rho}{R}\right)^m M,$$

onde M representa o maior valor que toma a funcção $|2V(R\cos\psi, R\,\mathrm{sen}\,\psi)|$ quando ψ varia desde 0 até 2π, se vê que estas séries são convergentes quando $\rho < R$, isto é, quando ρ e φ representam as coordenadas polares de um ponto do interior do circulo de raio R.

Consideremos tambem as séries que resultam de derivar as precedentes relativamente a ρ e a φ.

Seja R' um numero positivo inferior a R. A primeira das desigualdades anteriores dá, pondo $\rho = R'$ e $\varphi = 0$,

$$| a_m | R'^m < \left(\frac{R'}{R}\right)^m M < M,$$

e portanto

$$| a^m | \rho_1^m < M \left(\frac{\rho_1}{R'}\right)^m.$$

Esta desigualdade mostra que os termos da série

$$(b) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m \, | a_m | \, \rho_1^{m-1}$$

são menores do que os termos correspondentes da série

$$\frac{M}{\rho_1} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{\rho_1}{R'}\right)^m,$$

a qual é convergente quando $\rho_1 < R'$; logo aquella série é tambem convergente para os mesmos valores de ρ_1.

Seja agora R_n o resto da série (b), isto é, seja

$$R_n = \sum_{m=n}^{\infty} m \, | a_m | \, \rho_1^{m-1}.$$

Por ser convergente a série considerada, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero n_1 tal que é $| R_n | < \delta$, quando $n > n_1$.

Mas os termos da série

$$(c) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} \cos m\varphi,$$

que é formada pelas derivadas relativamente a ρ dos termos da primeira das séries (a), não podem exceder, em valor absoluto, os termos correspondentes da série (b), quando é $\rho \overset{=}{<} \rho_1$, qualquer que seja φ. Logo temos a desigualdade

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} a_m m\rho^{m-1} \cos m\varphi \right| < \delta,$$

para $n > n_1$, a qual mostra que a série (c) é uniformemente convergente para todos os valores de φ e ρ correspondentes aos pontos da área do circulo de raio ρ_1.

Basta agora applicar um theorema bem conhecido, relativo á derivação das séries, para ver que tem logar a igualdade

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\rho} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m\rho^{m-1} \cos m\varphi.$$

Do mesmo modo se demonstra a igualdade

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\varphi} = - \sum_{m=1}^{\infty} a_m m\rho^{m} \operatorname{sen} m\varphi.$$

A segunda das séries (a) pode ser cansiderada do mesmo modo e obteem-se resultados analogos.

42. Posto isto, vamos agora ver como a formula (9) conduz com a maior facilidade á resolução da questão que se pretende resolver.

Seja

$$f(z) = u + iv$$

a funcção proposta, que suppomos synectica no circulo de raio R, e seja (x, y) um ponto [até agora representado por (a, b)] do interior d'este circulo.

As funcções u e v satisfazem, por hypothese, á equação (2), e temos portanto, em virtude da formula (9),

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (a_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi),$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \operatorname{sen} m\varphi).$$

Mas, por ser $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$, temos

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho}, \quad \frac{d\rho}{dx} = \cos \varphi, \quad \frac{d\rho}{dy} = \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos \varphi}{\rho},$$

e portanto

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\,(\rho^m \cos m\varphi)}{dx} &= \quad m\rho^{m-1} \cos (m-1)\,\varphi, \\ \frac{d\,(\rho^m \operatorname{sen} m\varphi)}{dx} &= \quad m\rho^{m-1} \operatorname{sen} (m-1)\,\varphi, \\ \frac{d\,(\rho^m \cos m\varphi)}{dy} &= -m\rho^{m-1} \operatorname{sen} (m-1)\,\varphi, \\ \frac{d\,(\rho^m \operatorname{sen} m\varphi)}{dy} &= \quad m\rho^{m-1} \cos (m-1)\,\varphi. \end{aligned} \right.$$

Substituindo agora na igualdade

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$$

os desenvolvimentos de u e v anteriormente escriptos, e attendendo ás igualdades precedentes, vem

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} m\rho^{m-1} [\quad a_m \cos (m-1)\,\varphi + b_m \operatorname{sen} (m-1)\,\varphi] \\ = &\sum_{m=1}^{\infty} m\rho^{m-1} [-a_m \operatorname{sen} (m-1)\,\varphi + \beta_m \cos (m-1)\,\varphi]. \end{aligned}$$

Pondo n'esta equação $\varphi = 0$, vem a seguinte:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m \beta_m \rho^{m-1},$$

que, devendo ter logar para todos os valores de ρ, na vesinhança de $\rho = 0$, mostra que é

$$a_m = \beta_m, \quad (m > 0).$$

*

A mesma equação dá depois a seguinte:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m m\rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi = -\sum_{m=1}^{\infty} a_m m\rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi,$$

que, depois de dar a φ um valor determinado qualquer, devendo ainda ter logar para todos os valores de ρ, na vesinhança de $\rho = 0$, mostra que é

$$b_m = -a_m, \quad (m > 0).$$

Temos pois a igualdade

$$f(z) = u + iv = a_0 + ia_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m [a_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi - ib_m \cos m\varphi + ia_m \operatorname{sen} m\varphi],$$

ou

$$f(z) = a_0 + ia_0 + \sum_{m=1} \rho^m (a_m - ib_m)(\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

ou finalmente

$$f(z) = a_0 + ia_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - ib_m) z^m.$$

Temos pois o theorema de Cauchy, já demonstrado no numero 30:

A funcção f(z) *é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de* z, *quando* z *representa um ponto qualquer do interior do circulo de raio* R, *no qual é synectica.*

43. Para completar esta questão, resta ainda determinar, seguindo o mesmo methodo, os coefficientes do desenvolvimento precedente. Para isso, vamos considerar as séries da fórma

$$f_1(z) = u_1 + iv_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^m (\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

$$f_2(z) = u_2 + iv_2 = -i \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho^m (\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

que estão nas condições das séries que entram na formula anterior, e que são (numero 41) convergentes para todos os valores de φ e ρ que são coordenadas polares dos pontos de um circulo de raio R.

Temos, attendendo ás formulas (10) do numero anterior,

$$\frac{du_1}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m \rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi,$$

$$\frac{dv_1}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m \rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi,$$

$$\frac{du_1}{dy} = -\sum_{m=1}^{\infty} ma_m \rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi,$$

$$\frac{dv_1}{dy} = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m \rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi.$$

Vê-se pois que as igualdades (1) são satisfeitas pela funcção $u_1 + iv_1$, e portanto que esta funcção é monogenea. A sua derivada relativamente a z é pois dada (n.º 27) pela formula

$$f_1'(z) = \frac{du_1}{dx} + i\frac{dv_1}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m \rho^{m-1}[\cos(m-1)\varphi + i\operatorname{sen}(m-1)\varphi] = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m z^{m-1};$$

o que mostra que se obtem esta derivada derivando cada termo da série

$$f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m.$$

Como a derivada de $f_1(z)$ está tambem ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de z, conclue-se do mesmo modo que é monogenea e que admitte uma derivada

$$f_1''(z) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m z^{m-2},$$

dada por uma série cujos termos se formam derivando os termos do desenvolvimento de $f_1'(z)$.

Continuando do mesmo modo temos a formula geral

$$f_1^{(n)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-n+1)a_m z^{m-n},$$

que, pondo $z=0$, dá

$$a_n = \frac{f_1^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}.$$

Considerando do mesmo modo a funcção $f_2(z)$, vê-se que é

$$-ib_n = \frac{f_2^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}.$$

Temos pois finalmente

$$a_n - ib_n = \frac{f_1^{(n)}(0) + f_2^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n},$$

o que dá a formula de Maclaurin

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} z^n.$$

Pondo $f(z) = \mathrm{F}(z+a)$, deduz-se d'esta formula a de Taylor

$$\mathrm{F}(z+a) = \mathrm{F}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{F}^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} z^n,$$

ou, mudando z em $z-a$,

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{F}^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} (z-a)^n,$$

que tem logar quando é $|z-a| < \mathrm{R}$.

CAPITULO V

Continuação do estudo das séries de Taylor e de Laurent no caso das funcções de variaveis complexas. Methodo de Weierstrass e Mittag-Leffler

44. Se, para os valores de x visinhos de um valor a, tiver logar o desenvolvimento

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

a funcção $f(x)$ diz-se *regular* ou *holomorpha* na vesinhança do ponto a. Se esta propriedade tiver logar para todos os valores de a representados pelos pontos de uma área A, a funcção $f(x)$ diz-se *regular* ou *holomorpha na área* A.

Viu-se no capitulo III que as funcções analyticas são regulares nas áreas em que são synecticas. A theoria d'estas funcções coincide portanto com a theoria das funcções regulares n'uma certa área, e pode porisso ser feita, sem a intervenção da theoria dos integraes curvilineos, por meio das propriedades das séries da forma (1). Este modo de expôr a theoria considerada, cuja primeira ideia remonta a Lagrange, tem sido empregado principalmente por Weierstrass e Mittag-Leffler nos seus bellos e importantes trabalhos sobre as funcções analyticas. O presente capitulo é destinado a estudar por este methodo os theoremas de Taylor e de Laurent. Para isso principiaremos por recordar algumas propriedades das séries da forma (1), de que teremos de fazer uso.

45. *A área que representa os valores de x para os quaes é convergente a série* (1) *é limitada por uma circumferencia, cujo centro é o ponto que representa a, e esta série é absolutamente convergente no interior da circumferencia considerada.*

Com effeito, seja x_1 um valor de x para o qual a série seja convergente. Os modulos

$$|a_0|, \; |a_1|\,|x_1 - a|, \dots, \; |a_n|\,|x_1 - a|^n, \dots$$

devem ser todos inferiores a um numero B, visto que $|a_n|\,|x_1-a|^n$ tende para zero quando n tende para ∞; e portanto temos, qualquer que seja n,

$$|a_n|\,|x_1-a|^n<\mathrm{B},$$

o que dá

$$|a_n|\,|x-a|^n<\mathrm{B}\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^n.$$

Suppondo que os valores que se dão a x satisfazem á condição

$$|x-a|<|x_1-a|,$$

vê-se que os termos da série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}|a_n|\,|x-a|^n$$

são inferiores aos termos correspondentes da progressão convergente

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{B}\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^n;$$

logo, para os valores de x considerados, a primeira série é convergente, e a série (1) é portanto absolutamente convergente.

Como os valores de x que satisfazem á condição $|x-a|<|x_1-a|$ são representados pelos pontos do interior de um circulo de raio igual a $|x_1-a|$ com o centro no ponto correspondente a a, vê-se que, se a série (1) for convergente no ponto x_1, é absolutamente convergente em todos os pontos do interior da circumferencia que passa por este ponto.

Fazendo agora variar x_1 obtem-se uma série de circumferencias cujos raios ou crescem indefinidamente ou têem um limite superior. No primeiro caso a série é convergente em todo o plano, o que se exprime ainda dizendo que ella é convergente n'um circulo de raio infinito. No segundo caso o limite considerado é o raio de uma circumferencia tal que a série (1) é convergente quando x representa um ponto do interior do circulo que esta circumferencia limita e é divergente quando x representa um ponto exterior. Ao circulo que vimos de considerar deu Cauchy o nome de *circulo de convergencia* da série (1). A série (1) pode ser convergente sómente no ponto $x=a$; n'este caso o raio do circulo de convergencia é nullo.

46. Consideremos agora a série

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_{-1}(x-a)^{-1}+a_{-2}(x-a)^{-2}+\ldots$$

A série inteira que forma a primeira parte d'esta expressão é convergente quando $|x-a|<\mathrm{R}$, R representando o raio do seu circulo de convergencia.

A série que forma a segunda parte da mesma expressão é convergente para todos os valores de x que satisfazem a condição $\left|\frac{1}{x-a}\right|<\mathrm{R}'$, R′ representando o raio do circulo de convergencia da série

$$a_{-1}y+a_{-2}y^2+a_{-3}y^3+\ldots,$$

e portanto quando é $|x-a|>\frac{1}{\mathrm{R}'}$.

Logo a série considerada só é convergente quando é $\mathrm{R}>\frac{1}{\mathrm{R}'}$ e, n'este caso, a área que representa os valores de x, para os quaes ella é convergente, é limitada por duas circumferencias de raio R e $\frac{1}{\mathrm{R}'}$ com o centro no ponto correspondente a a.

47. Se uma série

$$u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

cujos termos são funcções de uma variavel x, é convergente para todos os valores de x representados pelos pontos de uma área A, o valor que em cada ponto toma o resto

$$\mathrm{R}_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$$

tende para zero quando n tende para o infinito. A cada valor que se dê á quantidade positiva δ corresponde pois um numero n_1 tal que é $|\mathrm{R}_n|<\delta$, quando $n>n_1$. Se este numero é o mesmo para todos os valores de x considerados, a série diz-se *uniformemente convergente na área* A.

Posto isto, temos o theorema seguinte:

Se a série

$$a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots+a_nu^n+\ldots,$$

onde u representa uma funcção de x, fôr convergente quando $|u|<\mathrm{R}$, esta série é uniformemente convergente na área A *que representa os valores de x que tornam $|u|\overline{\overline{<}}\rho$, ρ representando qualquer numero positivo inferior a* R.

Com effeito, por ser a série proposta absolutamente convergente quando $|u|=\rho$ (numero

45), a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero n_1 tal que é

$$|a_{n+1}|\rho^{n+1}+|a_{n+2}|\rho^{n+2}+\ldots<\delta,$$

quando $n>n_1$.

Temos porém, para todos os valores de x representados pelos pontos da área A,

$$\begin{aligned} |R_n| &= |a_{n+1}u^{n+1}+a_{n+2}u^{n+2}+\ldots| \\ &\overline{\overline{<}}\, |a_{n+1}|\,|u|^{n+1}+|a_{n+2}|\,|u|^{n+2}+\ldots \\ &< |a_{n+1}|\rho^{n+1}+|a_{n+2}|\rho^{n+2}+\ldots \end{aligned}$$

Logo, para todos os pontos da área A, temos $|R_n|<\delta$, quando $n>n_1$; o que mostra que a série proposta é uniformemente convergente na área A.

48. *Se a série*

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n x^n$$

fôr convergente n'um annel circular dado e se, em todos os pontos do interior d'este annel que têem o mesmo modulo ρ, *o modulo de* $F(x)$ *fôr menor do que uma quantidade positiva* L, *o modulo de cada termo da série será tambem menor do que* L.

Com effeito, multiplicando a série proposta por x^{-m}, vem

$$\begin{aligned} x^{-m}F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n x^{n-m}+a_m+\sum_{n=m+1}^{n=\infty} a_n x^{n-m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n x^{n-m}+a_m+\sum_{n=m+1}^{n=k} a_n x^{n-m}+R, \end{aligned}$$

R representando uma quantidade que tende para zero quando k tende para o iufinito.

Mas, como por hypothese é

$$|x^{-m}F(x)|<L\rho^{-m},$$

e como, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a uma quantidade positiva δ, existe sempre um valor k_1 tal que é $|R|<\delta$, quando $k>k_1$, temos

$$|x^{-m}F(x)-R|<L\rho^{-m}+\delta,$$

ou

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n x^{n-m} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n x^{n-m}\right| < L\rho^{-m} + \delta.$$

Dando agora n'esta desigualdade a x os valores

$$x = \rho,\ \rho e^{i\theta},\ \rho e^{2i\theta}, \ldots,\ \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valor maior do que os differentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de x, temos as desigualdades

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n \rho^{n-m} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n \rho^{n-m}\right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta}\right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

que dão, sommando-as e attendendo a que o modulo de uma somma de quantidades não pode exceder a somma dos modulos das parcellas,

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{n=m+1} a_n \rho^{n-m} (1 + e^{(n-m)i\theta} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)i\theta})\right.$$

$$\left. + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n \rho^{n-m} (1 + e^{(n-m)i\theta} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)i\theta}) + a a_m \right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{(n-m)i\theta} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)i\theta} = \frac{1 - e^{a(n-m)i\theta}}{1 - e^{(n-m)i\theta}} = A$$

e dando á quantidade θ um valor que não seja raiz da equação

$$1 - e^{(n-m)i\theta} = 0,$$

isto é um valor tal que A seja finito,

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n A\rho^{n-m} + a a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n A\rho^{n-m}\right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

*

ou

$$\left| a_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte do primeiro membro da desigualdade precedente independente de a_m. D'esta desigualdade tira-se

$$(a) \qquad | a_m | \overline{\overline{<}} L\rho^{-m} + \delta,$$

porque se fosse

$$| a_m | > L\rho^{-m} + \delta,$$

podia dar-se a a um valor tão grande que fosse

$$| a_m | - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta,$$

ou *á fortiori*

$$\left| a_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta, .$$

visto ser

$$\frac{|B|}{a} + \left| a_m + \frac{B}{a} \right| \overline{\overline{>}} | a_m |.$$

Da desigualdade (a) tira-se o theorema enunciado; porque, se fosse $| a_m | > L\rho^{-m}$, podia dar-se a δ um valor tão pequeno que fosse

$$| a_m | > L\rho^{-m} + \delta.$$

O theorema que vimos de demonstrar é devido a Cauchy. Aqui serve como lemma para a demonstração do theorema seguinte.

49. *Se uma funcção $f(x)$ fôr susceptivel de ser desenvolvida na série uniformemente convergente dentro de um annel, comprehendido entre duas circumferencias de raio* R *e* R′ *com o centro na origem das coordenadas:*

$$(1) \qquad f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

e se as funcções $f_0(x), f_1(x), \ldots$ forem susceptiveis de ser desenvolvidas em séries ordenadas segundo as potencias inteiras de x, convergentes dentro do mesmo annel:

$$(2) \qquad \begin{cases} f_n(x) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} x + A_2^{(n)} x^2 + \ldots + A_m^{(n)} x^m + \ldots \\ \qquad + A_{-1}^{(n)} x^{-1} + A_{-2}^{(n)} x^{-2} + \ldots + A_{-m}^{(n)} x^{-m} + \ldots, \end{cases}$$

a funcção $f(x)$, será tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de x:

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m + \ldots \\ \qquad + A_{-1} x^{-1} + A_{-2} x^{-2} + \ldots + A_{-m} x^{-m} + \ldots \end{cases}$$

e será

$$(4) \qquad \begin{cases} A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} + \ldots \\ A_{-m} = A_{-m}^{(0)} + A_{-m}^{(1)} + \ldots + A_{-m}^{(n)} + \ldots \end{cases}$$

Este theorema representa um papel importante na theoria das funcções analyticas. É devido a Weierstrass, assim como a demonstração que vamos dar d'elle [1].

Seja ρ uma quantidade positiva tal que $R' < \rho < R$; por ser uniformemente convergente a série (1) na circumferencia de raio ρ, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um numero n_1 tal que as desigualdades

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots| < \frac{1}{2}\delta,$$

$$|f_{n+p+1}(x) + f_{n+p+2}(x) + \ldots| < \frac{1}{2}\delta$$

serão satisfeitas por todos os valores de n superiores a n_1 e por todos os valores de x que têem o modulo ρ, qualquer que seja p; logo a desigualdade

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \delta$$

será satisfeita pelos mesmos valores de n e x.

---

(1) *Monatsbericht der Kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1880).

Mas temos, sommando os desenvolvimentos de $f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+p}(x)$,

$$f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (A_m^{(n+1)} + \ldots + A_m^{(n+p)}) x^m.$$

Logo, em virtude do theorema demonstrado no numero precedente, temos a desigualdade

$$| A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)} | < \delta \rho^{-m}, \quad (n > n_1)$$

da qual se conclue a convergencia das séries (4), applicando para isso o criterio fundamental de convergencia e divergencia que se deve a Cauchy.

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja $R > \rho_1 > R'$, podemos dar a n_1 um valor tal que seja tambem

$$| A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)} | < \delta \rho_1^{-m},$$

quando $n > n_1$, por maior que seja p; e portanto

$$| \lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)} | \overline{\overline{<}} \delta \rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} = A'_m,$$
$$| \lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}) = A''_m,$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m, \quad | A''_m | \overline{\overline{<}} \delta \rho_1^{-m},$$

vem, para os valores de x cujo modulo ρ é inferior a ρ_1, a desigualdade

$$| A''_0 | + | A''_1 x | + \ldots + | A''_m x^m | + \ldots$$
$$< \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^m + \ldots \right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue que a série

$$A''_0 + A''_1 x + \ldots + A''_m x^m + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Considerando outro numero ρ_2 tal que seja $\rho > \rho_2 > R'$, vê-se do mesmo modo que temos a desigualdade

$$|A''_{-1}x^{-1}|+|A''_{-2}x^{-2}|+\ldots+|A''_{-m}x^{-m}|+\ldots<\delta\frac{\rho}{\rho-\rho_2},$$

da qual se conclue que a série

$$A_{-1}x^{-1}+A_{-2}x^{-2}+\ldots+A_{-m}x^{-m}+\ldots$$

é tambem absolutamente convergente.

Temos depois

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (A'_m + A''_m) x^m = \sum_{m=0}^{m=n} f_m(x) + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A''_m x^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(x) - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m = \sum_{m=n+1}^{m=\infty} f_m(x) - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A''_m x^m,$$

e portanto

$$\left|\sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(x) - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m\right| < \delta + \delta\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho} + \delta\frac{\rho}{\rho-\rho_2}.$$

Como a δ se pode dar um valor tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m,$$

isto é a igualdade (3), que se queria demonstrar, e vê-se que esta igualdade tem logar para todos os valores de x cujo modulo está comprehendido entre ρ_1 e ρ_2. Como ρ_1 e ρ_2 são tão proximos de R e R' quanto se queira, vê-se que a igualdade anterior tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos do annel limitado pelas circumferencias de raio R e R' e com o centro na origem das coordenadas.

No que precede pode ser $R'=0$, e então o annel circular, que vimos de considerar, reduz-se a um circulo de raio igual a R. N'este caso os desenvolvimentos (2) e (3) não contéem potencias negativas de x.

50. Antes de entrar no assumpto que forma o objecto principal d'este capitulo, demonstraremos finalmente as proposições seguintes:

1.º *A somma e o producto de funcções regulares, na vesinhança do ponto a, são regulares na vesinhança do mesmo ponto.*

Com effeito, se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ são regulares na vesinhança do ponto a, temos, para valores sufficientemente pequenos de $|x-a|$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots,$$
$$F(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots;$$

e d'estas igualdades tiram-se, em virtude de theoremas bem conhecidos relativos ás operações sobre séries, as igualdades seguintes:

$$f(x) + F(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)(x-a) + (a_2 + b_2)(x-a)^2 + \ldots,$$
$$f(x)\,F(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x-a) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x-a)^2 + \ldots,$$

que têem logar para os mesmos valores de $|x-a|$.

2.º *A funcção $[f(x)]^k$ é tambem regular na vesinhança do ponto a, qualquer que seja o valor de $f(a)$, no caso de k ser inteiro e positivo, e quando $f(a)$ é differente de zero, nos outros casos.*

O caso de k representar um numero inteiro positivo já foi considerado, visto que n'este caso $[f(x)]^k$ representa um producto de factores.

Nos outros casos temos, suppondo $a_0 = f(a)$ differente de zero,

$$[f(x)]^k = a_0\left[1 + \frac{a_1}{a_0}(x-a) + \frac{a_2}{a_0}(x-a)^2 + \ldots\right]^k = a_0\,[1 + P(x-a)]^k,$$

representando por $P(x-a)$ o desenvolvimento

$$P(x-a) = (x-a)\left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}(x-a) + \ldots\right].$$

Dando a $|x-a|$ valores tão pequenos que seja

$$|P(x-a)| < 1,$$

podemos desenvolver $[f(x)]^k$ em série ordenada segundo as potencias $x-a$ por meio da formula de Newton (numero 25), e teremos

$$[f(x)]^k = a_0 \left[1 + k\,P(x-a) + \frac{k(k-1)}{1.2} P(x-a)^2 + \ldots \right].$$

Esta série é uniformemente convergente na vesinhança do ponto a (numero 47), assim como os desenvolvimentos de $P(x-a)$, $[P(x-a)]^2, \ldots$; logo a funcção $[f(x)]^k$ é susceptivel de ser desenvolvida (numero 49) em série ordenada segundo as potencias de $x-a$, na vesinhança do ponto a.

3.º *O quociente* $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ *é regular na vesinhança do ponto* a, *se* $f(a)$ *fôr differente de zero*

Este principio é uma consequencia dos dois anteriores, visto que podemos escrever a expressão considerada debaixo da forma $F(x)[f(x)]^{-1}$.

4.º *Se* $F(y)$ *fôr regular na vesinhança do ponto* $y=b$ *e se* $y=f(x)$ *fôr regular na vesinhança do ponto* a, *a que corresponde* $y=b$, $F[f(x)]$ *é regular na vesinhança do ponto* a.

Temos, por hypothese,

$$F(y) = b_0 + b_1(y-b) + b_2(y-b)^2 + \ldots,$$
$$y-b = a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$$

Substituindo na primeira série $y-b$ pelo seu desenvolvimento e ordenando o resultado segundo as potencias de $(x-a)$ vem (numero 49) um resultado da forma

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots,$$

o que demonstra o theorema enunciado.

51. Postas estas proposições relativas ás séries inteiras, vamos agora deduzir a *série de Taylor* e demonstrar o *theorema de Cauchy* relativo ao raio de convergencia d'esta série.

Se a série

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

fôr convergente no interior de uma circumferencia de centro a *e raio* R, *isto é quando* $|x-a| < R$, *e se* x_0 *representar um ponto do interior d'esta circumferencia, a funcção* $f(x)$ *admitte uma derivada finita no ponto* x_0 *e esta derivada é dada pela série*

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x_0-a)^{n-1},$$

cujos termos se formam derivando os termos da série proposta.

Em segundo logar temos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(x_0) + \dots,$$

e este desenvolvimento tem logar para todos os valores de x que satisfazem á condição

$$|x_0 - a| + |x - x_0| < \mathrm{R},$$

isto é para todos os valores de x representados pelos pontos da área de um circulo de centro x_0, contido no interior da circumferencia de raio R *e tangente interiormente a esta circumferencia.*

Com effeito, pondo na série proposta $x = x_0 + h$, temos

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + h - a)^n.$$

Esta série, considerada como funcção de h, é uniformemente convergente quando $|x_0 + h - a| < \mathrm{R}$, ou *á fortiori* quando é $|x_0 - a| + |h| < \mathrm{R}$. Desenvolvendo pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h, temos (numero 49)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f_1(x_0) + h^2 f_2(x_0) + \dots,$$

onde é

$$f_1(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x_0 - a)^n,$$

$$f_2(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n (x_0 - a)^{a-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Pondo agora $h = x - x_0$, vem

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f_2(x_0) + \dots$$

com a condição de ser $|x_0 - a| + |x - x_0| < \mathrm{R}$.

Para d'estas formulas tirar o theorema enunciado, basta notar que a ultima dá, passando $f(x_0)$ para o primeiro membro, dividindo depois os dois membros por $x - x_0$ e fazendo finalmente tender $x-x_0$ para zero, $f_1(x_0)=f'(x_0)$. Basta em seguida notar que cada uma das funcções

$$f_2(x_0), f_3(x_0), \dots$$

se deduz da anterior como $f'(x_0)$ se deduz de $f(x_0)$, para ver que é

$$f_2(x_0)=f''(x_0),\ f_3(x_0)=f'''(x_0), \dots$$

52. *Se a funcção $f(x)$ fôr regular no interior de uma circumferencia de centro a, o desenvolvimento*

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\dots$$

tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos do interior d'esta circumferencia.

Esta proposição coincide com o theorema de Cauchy, considerado no numero 30, e pode ser demonstrada do modo seguinte.

Notemos primeiramente que, se uma funcção $f(x)$ fôr regular em uma área A, o contorno sendo incluido, os valores do raio de convergencia da série

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\dots,$$

correspondentes aos valores de a representados pelos pontos d'esta área, têem um *limite inferior* λ, e mostremos que este limite é differente de zero.

Circumscrevendo, com effeito, á área A um rectangulo, cujos lados sejam parallelos aos eixos das coordenadas e dividindo depois esta área em quatro novas áreas por meio de duas rectas parallelas aos lados do rectangulo e que o dividam ao meio, os valores do raio de convergencia da série precedente, correspondentes aos valores que toma a em uma, pelo menos, d'ellas, deve ter evidentemente tambem para limite inferior o numero λ. Representemos esta ultima área por A_1.

Dividindo do mesmo modo A_1 em quatro novas áreas, os valores do raio de convergencia da série considerada, correspondentes aos valores de a representados pelos pontos de uma, pelo menos, d'estas ultimas áreas deve ter λ para limite inferior. Representamol-a por A_2.

Dividindo A_2 em quatro novas áreas e continuando do mesmo modo, obtem-se uma série de áreas $A_1, A_2, A_3, \dots$, cada uma das quaes tem no interior a seguinte, que decrescem e tendem a reduzir-se a um ponto, collocado no interior de todas ellas; e vê-se portanto que podemos traçar uma circumferencia com o centro no referido ponto e de raio r, tão pequeno quanto se queira, tal que o limite inferior dos valores que toma o raio de convergencia da série considerada, correspondentes aos valores de α representados pelos pontos da área limitada por esta circumferencia, seja egual a λ.

Seja agora β o numero representado pelo ponto a que vimos de nos referir, e r_1 o valor do raio de convergencia da série considerada, correspondente a $\alpha = \beta$. Por meio do theorema demonstrado no numero anterior vê-se que é $\lambda > r_1 - r$, suppondo que é $r_1 > r$; e portanto $\lambda = r_1$, visto que r se pode tornar tão pequeno quanto se queira.

Notemos, em segundo logar, que o limite superior M dos valores que toma $|f(x)|$ na área A é *finito*. Vê-se com effeito primeiramente, por meio de um raciocinio analogo ao que vem de ser empregado para mostrar que λ é differente de zero, que existe uma circumferencia de centro α_1 e raio tão pequeno quanto se queira, tal que, na área limitada por esta circumferencia, o limite superior de $|f(x)|$ é egual a M; e, por ser contínua esta funcção no ponto α_1, vê-se tambem que os valores que toma na vesinhança d'este ponto devem differir pouco de $|f(\alpha_1)|$, e que não podem porisso ter um limite superior infinito.

Posto estes dois lemmas, seja (c) a circumferencia mencionada no enunciado do theorema que pretendemos demonstrar e R o seu raio.

Por ser regular a funcção $f(x)$ na vesinhança do ponto a (ao qual corresponde o centro da circumferencia) existe uma circumferencia (c_1), de raio ρ_1, e com o mesmo centro, tal que é, em toda a área que ella limita,

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \ldots,$$

e basta demonstrar que é $\rho_1 = \mathrm{R}$.

Supponhamos que era $\rho_1 < \mathrm{R}$. Por ser tambem regular a mesma funcção na vesinhança do valor b de x, correspondente a um ponto B interior a (c_1), existe uma circumferencia (c_2), de centro B e raio ρ_2, tal que é, em toda a área que ella limita, x' representando um ponto qualquer d'esta área,

$$f(x') = f(b) + (x'-b)f'(b) + \frac{1}{2}(x'-b)^2 f''(b) + \ldots$$

Representando porém por L o maximo valor de $|f(x')|$ na circumferencia de raio igual a $|x'-b|$ e centro b, temos, applicando o theorema demonstrado no numero 48,

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\left|f^{(m)}(b)\right| |x'-b|^m < \mathrm{L};$$

e portanto, representando por l um numero que satisfaça ás condições $0 < l < \lambda$ e $\rho_1 + l < \mathrm{R}$ e por M o maior valor que toma $|f(x)|$ no circulo de raio egual a $\rho_1 + \lambda$,

$$\left|\frac{f^{(m)}(b)}{1.2\ldots m}\right| l^m < \mathrm{M}.$$

Notando agora que é

$$f^{(m)}(b)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots n}(b-a)^{n-m}f^{(n)}(a),$$

e applicando outra vez o theorema do numero 48 á funcção de b

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots m}(b-a)^{n-m}l^{m}f^{(n)}(a),$$

cujo modulo é inferior a L, vem

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots m}|b-a|^{n-m}l^{m}|f^{(n)}(a)|<\mathrm{L},$$

ou

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots m}|b-a|^{n}\left(\frac{l}{\rho_1}\right)^{m}|f^{(n)}(a)|<\mathrm{L}\left|\frac{b-a}{\rho_1}\right|^{m};$$

e portanto, sommando todas as desigualdades correspondentes aos valores

$$m=0,1,2,3,\ldots,n,$$

$$\frac{|f^{(n)}(a)|\,|b-a|^{n}}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{l}{\rho_1}\right)^{n}<\mathrm{L}\sum_{m=0}^{m=n}\left|\frac{b-a}{\rho_1}\right|^{m},$$

ou

$$\frac{|f^{(n)}(a)|\,|b-a|^{n}}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{l}{\rho_1}\right)^{n}<\mathrm{L}\frac{\rho_1}{\rho_1-|b-a|},$$

ou

$$\frac{|f^{(n)}(a)|\,|x-a|^{n}}{1.2\ldots n}<\mathrm{L}\frac{\rho_1}{\rho_1-|b-a|}\left|\frac{x-a}{|b-a|\left(1+\frac{l}{\rho_1}\right)}\right|^{n}.$$

Esta desigualdade mostra que a série (1) é convergente quando é

$$|x-a|<|b-a|\left(1+\frac{l}{\rho_1}\right),$$

e basta attender a que $|b-a|$ differe de ρ_1 tão pouco quanto se queira, para concluir d'ella que aquella série é convergente no interior da circumferencia de raio igual a ρ_1+l.

Demonstrado assim que o segundo membro de (1) é convergente no interior da circumferencia de raio $\rho_1 + l$, resta demonstrar que coincide com $f(x)$ em toda esta área.

Para isso, representemos por $\varphi(x)$ e a série que entra no segundo membro de (1), e notemos em primeiro logar que é, por hypothese, $\varphi(x) = 0$ no circulo (c_1).

Tomando um ponto b n'este circulo, tão proximo quanto se queira da sua circumferencia, temos a igualdade (n.º 50 — 1.º)

$$\varphi(x) = \varphi(b) + (x - b)\varphi'(b) + \frac{1}{2}(x - b)^2 \varphi''(b) + \dots;$$

mas, por b pertencer ao circulo (c_1), é $\varphi(b) = 0$, $\varphi'(b) = 0, \dots$; logo temos $\varphi(x) = 0$ em todos os pontos da área d'este segundo circulo, que é em parte distincta da anterior.

Continuando do mesmo modo até considerar toda a área do circulo de raio $\rho_1 + l$ vê-se que $\varphi(x)$ é nulla em toda esta área, e portanto que a igualdade (1) tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos d'esta área.

Basta agora notar que tinhamos partido das hypotheses de que ρ_1 era o raio de circulo no qual tinha logar a igualdade (1) e que era $\rho_1 < \text{R}$, para concluir que esta ultima desigualdade é absurda, e que deve porisso ser $\rho_1 = \text{R}$.

53. A demonstração da *formula de Laurent* por meio das propriedades das séries inteiras foi dada por Mittag-Leffler nas *Memorias da Sociedade das Sciencias de Liège* (2.ª série, t. XI) e no t. IV das *Acta mathematica*. Para expôr esta demonstração são necessarias algumas notas preliminares que vamos apresentar.

Sejam x e y duas variaveis complexas ligadas pela relação

$$(1) \qquad y = \varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\text{R}}\right)^n + \left(\frac{\text{R}}{x}\right)^n\right],$$

onde n representa um numero inteiro positivo e R um numero positivo. É em primeiro logar necessario procurar qual é a área que, no plano de representação dos y, corresponde a uma área A, limitada pelas circumferencias de raio $\text{R}(1 + \rho)$ e $\frac{\text{R}}{1 + \rho}$, com os centros na origem das coordenadas, onde são representados os valores de x. Suppomos que a quantidade ρ é positiva.

Para resolver esta questão procuremos primeiramente qual é a curva descripta pelo ponto correspondente a y quando o ponto correspondente a x descreve uma circumferencia de raio igual a $\text{R}(1 + \delta)$, com o centro na origem das coordenadas, δ representando uma quantidade positiva não superior a ρ. Para isso basta pôr em (1)

$$y = \text{X} + i\text{Y}, \quad x = \text{R}(1 + \delta)(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$

o que dá as equações

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\left[(1+\delta)^n + \dfrac{1}{(1+\delta)^n}\right]\cos n\varphi, \\ Y = \dfrac{1}{2}\left[(1+\delta)^n - \dfrac{1}{(1+\delta)^n}\right]\operatorname{sen} n\varphi, \end{cases}$$

que determinam os pontos (X, Y) da curva pedida, fazendo variar φ desde 0 até 2π, e que mostram que esta curva é uma ellipse.

A curva, cujas equações vimos de achar, gosa das propridades seguintes:

1.º O seu centro coincide com a origem das coordenadas. Os seus eixos coincidem com os eixos das coordenadas e são iguaes a

$$(1+\delta)^n + \frac{1}{(1+\delta)^n} \quad (1+\delta)^n - \frac{1}{(1+\delta)^n}.$$

A distancia dos focos ao centro é igual á unidade.

2.º A distancia de cada ponto da curva á origem das coordenadas é dada pela formula

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 = \frac{1}{4}\left[(1+\delta)^{2n} + \frac{1}{(1+\delta)^{2n}} + 2(\cos^2 n\varphi - \operatorname{sen}^2 n\varphi)\right].$$

Como a derivada de X^2+Y^2 relativamente a δ é positiva, vê-se que X^2+Y^2 cresce quando δ cresce. Esta circumstancia faz ver que as curvas correspondentes aos diversos valores de δ não se podem cortar e que as curvas que correspondem a menores valores de δ estão no interior das que correspondem a maiores valores de δ.

Pondo em (2) $\delta = 0$, vêem as equações

$$X = \cos n\varphi, \quad Y = 0;$$

logo, quando x descreve uma circumferencia de raio R com o centro na origem das coordenadas, y descreve uma recta que une os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, e esta recta está pois no interior de todas as curvas correspondentes aos diversos valores de δ.

Do que precede conclue-se que, quando δ varia desde 0 até ρ, a ellipse descripta por y, correspondente á circumferencia de raio $R(1+\delta)$, descripta por x, varia desde o segmento de recta pq, que une os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, até uma ellipse determinada (E), afastando-se sempre da origem das coordenadas em todas as direcções.

3.º Quando x descreve o circulo de raio $\dfrac{R}{1+\delta}$, y descreve ainda a curva representada pelas equações (2).

Pondo, com effeito, em (1)

$$y = X + iY, \quad x = \frac{R}{1+\delta}(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

vêem as equações

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\delta)^n} + (1+\delta)^n\right]\cos n\varphi,$$

$$Y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\delta)^n} - (1+\delta)^n\right]\operatorname{sen} n\varphi.$$

Notando que a curva representada por estas equações não se altera quando se muda φ em $-\varphi$, vê-se que ella coincide com a curva representada pelas equações (2).

4.º Por cada ponto do plano de representação dos y passa uma das curvas dadas pelas equações (2).

Com effeito, a equação (1) dá para x, quando y é dado, $2n$ valores:

$$x = R\sqrt[n]{y \pm \sqrt{y^2 - 1}}.$$

Seja x' um d'estes valores. Quando x descreve uma circumferencia de raio $|x'|$ com o centro na origem das coordenadas, y descreve uma das curvas representadas pelas equações (2), que passa pelo ponto correspondente ao valor dado a y. Os outros valores de x devem ter todos modulos iguaes a $|x'|$, visto que por cada ponto não pode passar mais do que uma das curvas representadas pelas equações (2).

5.º A maior e a menor distancia dos pontos da curva representada pelas equações (2) á origem das coordenadas podem ser obtidas procurando os valores de φ que tornam a expressão de $X^2 + Y^2$, dada pela formula (3), maxima ou minima; o que dá para valor da distancia maxima

$$\frac{1}{2}\left[(1+\delta)^n + \frac{1}{(1+\delta)^n}\right]$$

e para valor da distancia minima

$$\frac{1}{2}\left[(1+\delta)^n - \frac{1}{(1+\delta)^n}\right].$$

Reflectindo um pouco sobre as propriedades que vimos de indicar, podemos concluir que *ao annel circular* A, *collocado no plano de representação dos x, comprehendido entre as cir-*

cumferencias de raio $R(1+\rho)$ *e* $\frac{R}{1+\rho}$, *e com o centro na origem das coordenadas, corresponde no plano de representação dos* y *uma superficie* B *limitada por uma curva fechada composta de um só ramo e tendo no interior os pontos* $y=0$ *e* $y=\pm 1$.

54. A demonstração, dada por Mittag-Leffler, do theorema de Laurent funda-se ainda n'um lemma demonstrado por Weierstrass na sua bella e importante memoria sobre a theoria das funcções inteiras (1), que vamos estabelecer.

Seja $f(x)$ uma funcção de x monogenea, uniforme e regular na área A, limitada pelas circumferencias de raio $R(1+\rho)$ e $\frac{R}{1+\rho}$, com o centro na origem das coordenadas.

Pondo ainda

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n+\left(\frac{R}{x}\right)^n\right],$$

a cada valor de y correspondem $2n$ valores $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ para x, e entre estes valores só existem alguns iguaes quando é $y=\pm 1$. Por meio d'estes valores podemos formar $2n$ funcções $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ de y taes que a igualdade

$$\sum_{v=0}^{v=2n-1} F_v x^v = f(x) \tag{5}$$

seja satisfeita quando a x se dão os valores $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Para isso basta notar que, em virtude da formula de interpolação de Lagrange, temos, quando as raizes $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ são todas differentes, isto é, quando y é differente de $+1$ e -1,

$$f(x)=\sum_{v=1}^{v=2n} \frac{f(x_v)}{\Pi'(x_v)} \cdot \frac{\Pi(x)}{x-x_v}, \quad (x=x_1, \ldots, x_{2n})$$

onde

$$\Pi(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_{2n})=x^{2n}-2yR^n x^n+R^{2n},$$

e que temos tambem

$$\frac{\Pi(x)}{x-x_v}=\frac{x^{2n}-x_v^{2n}}{x-x_v}-2yR^n\frac{x^n-x_v}{x-x_v}=x^{2n-1}+x_v x^{2n-2}+\ldots+x_v^{2n-1}-2yR^n x_v^{n-1}.$$

---

(1) *Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 1876. Uma traducção franceza d'esta memoria foi publicada nos *Annales de l'École Normale Supérieure de Paris* (2.ª série, t. VIII).

Logo, para ser satisfeita a igualdade (5) pelos valores $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ que correspondem a valores de y differentes de ± 1, basta pôr

$$F_{2n-1} = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{f(x_v)}{\Pi'(x_v)},$$

$$F_{2n-2} = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{x_v f(x_v)}{\Pi'(x_v)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_0 = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{x_v^{2n-1} f(x_v)}{\Pi'(x_v)} - 2yR^n \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{x_v^{n-1} f(x_v)}{\Pi'(x_v)},$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ são os valores de x dados pela igualdade

$$x = R \sqrt[n]{y \pm \sqrt{y^2 - 1}},$$

e onde é

$$\Pi'(x_v) = 2n x_v^{n-1}(x_v^n - yR^n).$$

Posto isto, vamos agora mostrar que as funcções de y representadas por $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são todas regulares na área B.

Seja b um dos valores dados a y, representado por um dos pontos da área B, e supponhamos em primeiro logar que b é differente de ± 1.

Escrevendo a relação entre x e y debaixo da forma

$$x = R \sqrt[n]{(y-b) + b \pm \sqrt{(y-b)^2 + 2b(y-b) + b^2 - 1}}$$

e applicando os theoremas demonstrados no numero 50, vê-se em primeiro logar que o radical

$$\sqrt{(y-b)^2 + 2b(y-b) + b^2 - 1}$$

é regular na vesinhança do ponto b, e em seguida que as quantidades x_v são regulares na vesinhança do mesmo ponto.

A funcção $f(x_v)$ é tambem regular (numero 50 — 4.º) na vesinhança do ponto considerado.

Basta agora attender a que as expressões de $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são compostas de sommas, productos e quocientes de funcções regulares na vesinhança do ponto b e que $\Pi'(x_v)$ só é nulla quando $b = \pm 1$, para concluir que estas funcções são regulares (numero 50) na vesinhança do ponto b considerado.

Supponhamos agora que é $b = 1$. As expressões de $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são compostas de parcellas da forma

$$\phi(x_v) = \frac{x_v^k f(x_v)}{2n(x_v^n - y\mathrm{R}^n)}.$$

Temos primeiramente, na vesinhança do ponto $y = 1$,

$$\sqrt{y^2 - 1} = (y-1)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}(y-1) + \ldots\right] = (y-1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{P}(y-1),$$

$\mathrm{P}(y-1)$ representando um desenvolvimento ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de $y-1$.

Temos depois, na vesinhança do mesmo ponto,

$$x = \mathrm{R}\left[y - 1 + 1 \pm (y-1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{P}(y-1)\right]^{\frac{1}{n}},$$

e, pondo $(y-1)^{\frac{1}{2}} = t$ e representando por A_m o coefficiente do termo de ordem $m+1$ no desenvolvimento d'este binomio,

$$x = \mathrm{R}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{A}_m \left(t^2 \pm t\mathrm{P}(t^2)\right)^m\right].$$

O segundo membro d'esta igualdade pode ser desenvolvido segundo as potencias de t (numero 49), e temos portanto um resultado da forma

$$x = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}_{2m} t^{2m} \pm \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}_{2m+1} t^{2m+1}.$$

Em virtude d'esta igualdade e dos theoremas demonstrados no numero 50, vê-se que $\phi(x_v)$ é da forma

$$\phi(x_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{C}_{2m} t^{2m} \pm \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{C}_{2m+1} t^{2m+1},$$

ou

$$\phi(x_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{C}_{2m} (y-1)^m \pm (y-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{C}_{2m+1} (y-1)^m.$$

Basta agora attender a que cada um dos signaes que affectam a segunda das séries, que

*

entram nesta formula, corresponde a uma raiz da equação $\varphi(x) - y = 0$, para concluir que os termos dependentes de $(y-1)^{\frac{1}{2}}$ devem desapparecer na somma $\sum_{v=1}^{v=2n} \psi(x_v)$ e que deve ser

$$\sum_{v=1}^{v=2n} \psi(x_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{D}_m (y-1)^m.$$

Vê-se pois que as expressões de $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{2n-1}$ são ainda regulares na vesinhança do ponto $y=1$.

Do mesmo modo se mostra que estas expressões são regulares na vesinhança do ponto $y=-1$.

As funcções $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{2n-1}$ foram determinadas de modo que, para cada valor dado a y, os valores correspondentes de x, dados pela equação (1), satisfaçam á equação (5). Pondo pois $y=\varphi(x)$ n'esta equação, temos o theorema seguinte:

A igualdade

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=2n-1} \mathrm{F}_v[\varphi(x)]\, x^v$$

é satisfeita por todos os valores de x representados pelos pontos da área A. *As funcções de y representadas por* $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots,$ *que entram n'esta igualdade, são regulares na área* B.

Deve observar-se que, para estabelecer esta igualdade, excluiram-se os valores de x correspondentes a $y=1$ e a $y=-1$. Basta porém attender a que os seus dois primeiros membros admittem (numero 51) derivadas finitas n'estes pontos, e a que portanto são continuas, para concluir que ella ainda tem logar para estes valores de x.

55. Fundado nas proposições que vimos de demonstrar nos dois numeros anteriores, obteve Mittag-Leffler o theorema de Laurent do modo seguinte.

Supponhamos que $f(x)$ representa uma funcção monogenea, uniforme e regular na área limitada por duas circumferencias de raio R′ e R″ e seja R um numero comprehendido entre R′ e R″.

Representando por h uma quantidade positiva arbitraria, podemos dar a ρ um valor tão pequeno e depois a n um valor tão grande que seja

$$\mathrm{R}(1+\rho) < \mathrm{R}'', \quad \frac{\mathrm{R}}{1+\rho} > \mathrm{R}',$$

$$\frac{1}{2}\left[(1+\rho)^n - \frac{1}{(1+\rho)^n}\right] > 1+h.$$

Viu-se no numero anterior que as funcções $\mathrm{F}_0(y), \mathrm{F}_1(y), \ldots, \mathrm{F}_{2n-1}(y)$ são regulares na área B, correspondente aos valores de x representados pelos pontos do annel comprehendido entre as circumferencias de raio $R(1+\rho)$ e $\frac{R}{1+\rho}$, com os centros na origem das coordenadas. Como porém o primeiro membro da ultima desigualdade representa o minimo valor da distancia dos pontos da curva, que limita B, á origem das coordenadas, vê-se que esta área contém no interior o circulo de raio $1+h$. Logo temos, para os valores de y representados pelos pontos d'este circulo (numero 52),

$$F_v(y) = A_0^{(v)} + A_1^{(v)} y + A_2^{(v)} y^2 + \dots$$

Por outra parte, dando a ε um valor positivo sufficientemente pequeno para que seja

$$\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^n + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right] < 1+h,$$

e notando que o primeiro membro d'esta desigualdade representa o maximo valor da distancia da origem das coordenadas aos pontos da curva que limita a área B_1, correspondente ao annel A_1, limitado pelas circumferencias de raio $R(1+\varepsilon)$ e $\frac{R}{1+\varepsilon}$, com o centro na origem das coordenadas, vê-se que os modulos das quantidades representadas pelos pontos da área B_1 são menores do que $1+h$.

A série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(v)} y^\mu = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(v)}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right]^\mu$$

é portanto (numero 47) uniformemente convergente na área A_1, e temos, para os valores de x representados pelos pontos d'esta área (numero 49),

$$F_v(y) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} a_m x^m.$$

Sommando agora todos os desenvolvimentos d'esta forma, que correspondem aos diversos termos da somma

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=2n-1} F_v(y)\, x^v,$$

obtem-se um resultado da forma

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m, \tag{6}$$

que tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos da área A_1. Basta agora fazer variar R desde R′ até R″ para concluir que *a formula* (6) *tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos da área limitada pelas circumferencias de raio R′ e R″, com o centro na origem das coordenadas.*

A formula (6) é a *formula de Laurent,* que pretendiamos obter.

Applicando a formula (6) á funcção $f(x+a)$ e mudando no resultado x em $x-a$, obtem-se o desenvolvimento

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m (x-a)^m,$$

que tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos do annel comprehendido entre as circumferencias de raio R′ e R″, com o centro no ponto correspondente a a.

56. O methodo que vimos de dar não é proprio para o calculo dos coefficientes do desenvolvimento. Estabelecida porém a possibilidade do desenvolvimento, é facil obter a expressão dos coefficientes por meio de integraes definidos.

Multiplicando, com effeito, os dois membros da igualdade anterior por $(x-a)^{-n}$, obtem-se um resultado da forma

$$(x-a)^{-n} f(x) = A_n + \Sigma A_m (x-a)^m,$$

onde m é differente de n. Pondo agora $x-a=\mathrm{R}e^{i\theta}$, R representando uma quantidade qualquer comprehendida entre R′ e R″, e integrando os dois membros da igualdade entre os limites 0 e 2π, vem a formula

$$A_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{R}^n}\int_0^{2\pi} f(a+\mathrm{R}e^{i\theta})\, e^{-ni\theta}\, d\theta,$$

já obtida no numero 32.

CAPITULO VI

Série de Bürmann. Série de Lagrange. Generalização da série de Bürmann

57. Passemos agora a tratar do desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma funcção dada $\theta(x)$, isto é, em série da forma

$$A_0 + A_1 \theta(x) + A_2 \theta^2(x) + \ldots + A_n \theta^n(x) + \ldots,$$

procurando as condições para que este desenvolvimento tenha logar e o valor dos coefficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Supponhamos que as funcções $f(z)$ e $\theta(z)$ são synecticas na área A limitada por um unico contorno fechado S, que $\theta(z)$ admitte um unico zero no interior d'este contorno e que, designando por x um valor representado por um ponto do interior da área A e por a o valor que torna nulla esta funcção e pondo $\theta(z) = (z-a)\,\Theta(z)$, a desigualdade

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|$$

ou

$$|x-a|\,|\Theta(x)| < |z-a|\,|\Theta(z)|$$

é satisfeita por todos os valores de z que correspondem aos pontos do contorno S.

N'este caso a equação

$$\theta(z) - \theta(x) = 0$$

tem uma unica raiz $z = x$ no interior do contorno S. Com effeito, o numero d'estas raizes é dado pelo integral (numero 31)

$$u = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)},$$

ou, desenvolvendo-o em série,

$$u = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \theta(x)\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)} + \ldots\right];$$

mas o primeiro termo d'esta série é igual á unidade, visto representar as raizes da equação $\theta(z)=0$ comprehendidas na área A, e os outros são nullos, por ser, pondo $z=\rho e^{i\omega}$,

$$\int_S \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta^n(z)} = -\left[\frac{1}{(n-1)\,\theta^{n-1}(z)}\right]_0^{2\pi} = 0;$$

logo é $u=1$.

Posto isto, consideremos o integral

$$U = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}.$$

Como o denominador da funcção integrada é nullo quando $z=x$ e este zero é o unico que este denominador tem na área A, temos (numero 28 — 1.º), representando por C uma circumferencia cujo centro seja o ponto x e cujo raio seja igual ao raio do circulo de convergencia da série

$$\theta(z)-\theta(x) = (z-x)\,\theta'(x) + \frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x) + \ldots,$$

$$U = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{(z-x)\left[\theta'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x)+\ldots\right]},$$

mas (numero 28 — 2.º)

$$U = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{(z-x)\left[\theta'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x)+\ldots\right]} = f(x);$$

logo

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}.$$

Se attendermos agora a que, por ser $|\theta(x)| < |\theta(z)|$, tem logar o desenvolvimento em série

$$\frac{1}{\theta(z)-\theta(x)} = \frac{1}{\theta(z)} + \frac{\theta(x)}{\theta^2(z)} + \ldots + \frac{\theta^n(x)}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots,$$

vê-se que é

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \theta(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)} + \ldots + \theta^n(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots\right].$$

Para determinar os integraes que entram n'este desenvolvimento, notemos que a integração por partes dá, quando $n > 0$,

$$\int \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = -\frac{f(z)}{n\theta^n(z)} + \frac{1}{n}\int \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)};$$

e portanto temos (numero 29)

$$\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{n}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)} = \frac{1}{n}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{(z-a)^n\,\Theta^n(z)} = \frac{2i\pi}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right].$$

Logo temos a formula

$$f(x) = f(a) + \theta(x)\frac{f'(a)}{\Theta(a)} + \ldots + \frac{\theta^n(x)}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right] + \ldots,$$

devida a Bürmann, que a apresentou em 1796 á Academia das Sciencias de Paris.

58. Pondo na formula precedente

$$\theta(x) = t,$$

t representando um numero dado tal que seja $|t| < |\theta(z)|$, quando z descreve o contorno S, esta formula dá o desenvolvimento em série, ordenada segundo as potencias de t, da funcção $f(x)$ da unica raiz d'esta equação que, como vimos no principio do numero 57, existe no interior de S.

59. A formula de Bürmann contem como caso particular a formula de Taylor. Pondo, com effeito, n'ella $\theta(z) = z - a$ e tomando para o contorno S da integração uma circumferencia de raio R e centro a, limitando uma área na qual a funcção $f(x)$ seja synectica, temos, para todos os pontos x do interior da área e todos os pontos z da circumferencia que a limita, $|x-a|<|z-a|$; a formula de Bürmann é pois applicavel e dá

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\dots$$

60. Pondo na formula de Bürmann

$$\theta(z)=\frac{z-a}{\varphi(z)},$$

$\varphi(z)$ representando uma funcção synectica na área A e tal que seja, para todos os pontos z do contorno d'esta área,

$$\left|\frac{x-a}{\varphi(x)}\right|<\left|\frac{z-a}{\varphi(z)}\right|,$$

vem *a formula de Lagrange*

$$\begin{aligned} f(x)=f(a)+\frac{x-a}{\varphi(x)}f'(a)\varphi(a)+\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\varphi^2(x)}\frac{d[f'(a)\varphi^2(a)]}{da} \\ +\dots+\frac{1}{1.2\dots n}\frac{(x-a)^n}{\varphi^n(x)}\frac{d^{n-1}[f'(a)\varphi^n(a)]}{da^{n-1}}+\dots \end{aligned}$$

Pondo n'esta formula

$$\frac{x-a}{\varphi(x)}=t,$$

vem a seguinte:

$$\begin{aligned} f(x)=f(a)+tf'(a)\varphi(a)+\frac{1}{2}t^2\frac{d[f'(a)\varphi^2(a)]}{da} \\ +\dots+\frac{1}{1.2\dots n}t^n\frac{d^{n-1}[f'(a)\varphi^n(a)]}{da^{n-1}}+\dots, \end{aligned}$$

que determina a funcção $f(x)$ da raiz x da equação

$$x=a+t\varphi(x),$$

que existe no interior do contorno S, quando para todos os pontos z do contorno tem logar a desigualdade

$$|t| < \left| \frac{z-a}{\varphi(z)} \right|.$$

No que precede tirou-se a formula de Lagrange da formula de Bürmann. Esta ultima formula não é todavia mais geral do que a primeira. Pondo, com effeito,

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{\theta(z)}$$

na formula de Lagrange vem immediatamente a de Bürmann.

A formula de Lagrange foi pela primeira vez publicada pelo grande geometra n'uma memoria apresentada á Academia das Sciencias de Berlin (*Nouvelle méthode pour résoudre les équations litérales par le moyen des séries*, 1770; *Oeuvres*, t. III) a qual foi pouco tempo depois seguida de outra sobre a applicação d'esta formula á resolução de algumas equações que apparecem em Mechanica celeste. A demonstração de Lagrange é fundada em considerações algebricas e nos desenvolvimentos em série de algumas funcções elementares. Laplace na sua *Mechanica celeste* obteve esta formula de uma maneira mais simples, deduzindo-a directamente da série de Maclaurin. Nenhum d'estes geometras deu todavia as condições para que a série seja applicavel. O primeiro geometra que estudou a questão da convergencia da série de Lagrange foi Cauchy, que applicou a esta série os methodos que tão bom resultado lhe tinham dado quando applicados á série de Taylor. Os resultados a que chegou dão logar a difficuldades; abriram todavia a Rouché o caminho para a resolução definitiva d'esta questão (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*, cad. 39), o qual coincide, á parte as notações, com o que foi empregado no numero 57 para deduzir a série de Bürmann.

61. Para terminar o que temos a dizer sobre a formula de Bürmann, vamos fazer applicação d'esta formula ao desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de $\operatorname{sen} x$.

Temos de pôr n'este caso $\theta(x) = \operatorname{sen} x$ e de procurar um contorno tal que seja, para todos os valores de x representados por pontos do interior d'este contorno,

$$|\operatorname{sen} x| < |\operatorname{sen} z|,$$

z representando um ponto qualquer do contorno.

Para resolver esta questão, vamos estudar as curvas definidas pela equação

$$|\operatorname{sen} z| = c,$$

*

c representando uma constante, ou, pondo $z = x_1 + iy_1$,

$$(1) \qquad + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \operatorname{sen}^2 iy_1} = c,$$

onde $\operatorname{sen}^2 iy_1$ e $\cos^2 iy_1$ são quantidades reaes dadas pelas formulas

$$\operatorname{sen}^2 iy_1 = -\left(\frac{e^{-y_1} - e^{y_1}}{2}\right)^2, \quad \cos^2 iy_1 = \left(\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2}\right)^2.$$

Como o valor do primeiro membro d'esta equação não muda quando se muda x_1 em $x_1 + \pi$, vê-se que y_1 é uma funcção periodica de x_1, cujo periodo é igual a π; basta portanto considerar o ramo da curva que corresponde aos valores de x_1 comprehendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

Vê-se tambem que a curva é symetrica relativamente aos eixos das coordenadadas; podemos portanto considerar sómente, para a discussão da curva, os valores de x_1 e y_1 que são positivos.

Posto isto, supponhamos primeiramente $c \leqq 1$.

Vê-se immediatamente, pondo na equação $x_1 = 0$, que o ramo considerado da curva corta o eixo das ordenadas no ponto cuja ordenada é igual a $\log(c + \sqrt{c^2 + 1})$. Vê-se tambem, pondo $y_1 = 0$, que a curva corta o eixo das abscissas no ponto cuja abscissa é igual a $\operatorname{arc\,sen} c$.

Resolvendo a equação (1) relativamente a $\cos^2 iy_1$, vem

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1,$$

e portanto

$$\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1},$$

ou

$$e^{2y_1} \mp \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1}\, e^{y_1} + 1 = 0.$$

Esta equação dá

$$e^{y_1} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1},$$

e portanto

$$y_1 = \log\left[\pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1}\right].$$

Esta igualdade faz ver, em primeiro logar, que y_1 é imaginario quando $x_1 > \operatorname{arc\,sen} c$. Para cada valor de x_1, inferior a $\operatorname{arc\,sen} c$, a mesma igualdade dá para y_1 dois valores reaes e dois valores imaginarios. Dos dois valores reaes deve-se aproveitar aquelle que, para $x_1 = 0$, dá

$$y_1 = \log(c + \sqrt{c^2+1}),$$

isto é o valor

$$(2) \qquad y_1 = \log\left[\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1}\right];$$

o outro corresponde á equação

$$-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \operatorname{sen}^2 iy_1} = c.$$

Obtêem-se por meio da igualdade (2) todos os pontos da curva comprehendidos entre os pontos cujas abscissas são 0 e $\operatorname{arc\,sen} c$, e vê-se que y_1 cresce desde 0 até $\log(c + \sqrt{c^2+1})$ quando x_1 diminue desde $\operatorname{arc\,sen} c$ até 0.

A equação

$$y'_1 = \frac{\operatorname{sen} 2x_1}{i \operatorname{sen} 2iy_1}$$

dá as tangentes á curva e faz ver que as tangentes nas extremidades dos eixos são perpendiculares a estes eixos. Para tirar esta conclusão deve-se observar que a quantidade $i \operatorname{sen} 2iy_1$ é real.

A eliminação de y_1 entre a equação

$$\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1,$$

que resulta de (1), e a equação

$$\operatorname{sen}^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \operatorname{sen}^2 2iy_1,$$

que resulta de formar y''_1 e pôr depois $y''_1 = 0$, leva á equação

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1},$$

a qual mostra que não existem pontos de inflexão quando $c \overline{\overline{<}} 1$.

Vê-se pois que cada uma das curvas representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ é composta, quando $c \overline{\overline{<}} 1$, de um numero infinito de ovaes iguaes, cujos centros correspondem ás raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$ e cujos eixos são iguaes a $2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} c$ e $2 \log(c + \sqrt{c^2 + 1})$, o primeiro eixo coincidindo com o eixo das abscissas e o segundo sendo parallelo ao eixo das ordenadas.

Vê-se facilmente que, se fôr $c > 1$, as curvas representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ não cortam o eixo das abscissas e não podem porisso dar logar a contornos fechados contendo no interior os pontos que correspondem ás raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$.

Quando c varia desde 1 até 0, as ovaes representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ variam de tal modo que aquella que corresponde a menor valor de c é interior áquella que corresponde a maior valor de c, e diminuem continuamente até se reduzirem a um ponto. Estas curvas resolvem a questão proposta, isto é, cada uma d'ellas limita uma área tal que

$$|\operatorname{sen} x| < |\operatorname{sen} z|,$$

z representando um ponto qualquer do contorno e x um ponto qualquer do interior.

Seja pois $f(z)$ uma funcção synectica na área A, limitada por uma oval cuja equação seja $|\operatorname{sen} z| = c$. A formula de Bürmann é n'este caso applicavel e temos

$$f(x) = f(0) + A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen}^2 x + \ldots,$$

onde $A_1, A_2, \ldots$ são quantidades constantes, que podem ser determinadas por meio dos integraes

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z dz}{\operatorname{sen}^{n+1}} = \frac{1}{2ni\pi} \int_S \frac{f'(z)\, dz}{\operatorname{sen}^n z},$$

ou por meio da expressão

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{x^n f'(x)}{\operatorname{sen}^n x}\right],$$

onde, depois de effectuadas as derivações indicadas, se deve substituir x por aquella, a, das raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$ que corresponde ao centro da oval considerada.

62. Consideremos, por exemplo, a funcção

$$f(x) = \operatorname{sen} kx, \quad .$$

k representando um numero qualquer, real ou imaginario, e ponha-se $a = 0$.

Teremos

$$A_n = \frac{k}{2ni\pi} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}, \qquad (n > 0).$$

Mas

$$\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} - \int \frac{\cos kz \cos^2 z dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z}$$

e, integrando por partes o ultimo termo do segundo membro,

$$\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} + \int \frac{\cos kz \cos z}{(n+1) \operatorname{sen}^{n+1} z}$$
$$+ \frac{k}{n+1} \int \frac{\operatorname{sen} kz \cos z dz}{\operatorname{sen}^{n+1} z} + \frac{1}{n+1} \int \frac{\cos kz \operatorname{sen} z dz}{\operatorname{sen}^{n+1} z},$$

ou, integrando por partes o penultimo termo do segundo membro,

$$\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} + \frac{\cos kz \cos z}{(n+1) \operatorname{sen}^{n+1} z}$$
$$- \frac{k}{n+1} \cdot \frac{\operatorname{sen} kz}{n \operatorname{sen}^n z} + \frac{k^2}{n(n+1)} \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} + \frac{1}{n+1} \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}.$$

Portanto

$$\int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} + \frac{k^2}{n(n+1)} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} + \frac{1}{n+1} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z},$$

ou

$$\int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} = \frac{n^2 - k^2}{n(n+1)} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}.$$

Temos pois a igualdade

$$(a) \qquad A_{n+2} = \frac{n^2 - k^2}{(n+1)(n+2)} A_n.$$

A analyse que precede não tem logar quando é $n = 0$. Vamos porém mostrar que a formula a que chegámos ainda tem logar n'este caso.

Por ser

$$A_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\operatorname{sen} kz \cos z dz}{\operatorname{sen} z},$$

e

$$\int \frac{\operatorname{sen} kz \cos z dz}{\operatorname{sen} z} = -\frac{\cos kz \cos z}{k \operatorname{sen} z} - \frac{1}{k}\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^2 z},$$

temos, com effeito,

$$A_0 = -\frac{1}{2ki\pi}\int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^2 z} = -\frac{2}{k^2} A_2,$$

e portanto

$$A_2 = -\frac{k^2}{2} A_0.$$

Posto isto, da igualdade (a) tira-se, quando n é par, notando que A_0 é igual a zero,

$$A_n = 0.$$

Por ser (numero 28 — 2.º)

$$A_1 = \frac{k}{2i\pi}\int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen} z} = \frac{k}{2i\pi}\int_S \frac{z \cos kz dz}{z \operatorname{sen} z} = k,$$

a mesma igualdade dá, quando n é impar,

$$A_{n+2} = \frac{(n^2 - k^2)\,[(n-2)^2 - k^2]\ldots(1-k^2)}{1.2\ldots(n+2)}\,k.$$

Logo, se x representar um ponto da oval cujo centro é a origem das coordenadas e cuja equação é $|\operatorname{sen} z| = 1$, temos

$$\operatorname{sen} kx = k\left[\operatorname{sen} x - \frac{k^2-1}{1.2.3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{(k^2-1)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{sen}^5 x + \ldots\right].$$

Do mesmo modo se acha, no caso da funcção $\cos kx$,

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{k^2(k^2-2^2)}{1.2.3.4}\operatorname{sen}^4 x - \ldots$$

Estas formulas são devidas a *Euler*.

63. Os coefficientes do desenvolvimento da funcção $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias de uma funcção $\theta(x)$ podem ser expressos ainda por meio de determinantes, como fez ver *Wronski*.

Seja

$$f(x) = f(a) + A_1 \theta(x) + A_2 \theta^2(x) + \ldots + A_n \theta^n(x) + \ldots$$

e $\theta(x) = (x-a)\Theta(x)$. Teremos, derivando esta série, pondo depois $x=a$ e notando que as derivadas de ordem n das potencias de $\theta(x)$, superiores a n, são nullas quando $x=a$,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= A_1 \frac{d\theta(a)}{da}, \\
f''(a) &= A_1 \frac{d^2\theta(a)}{da^2} + A_2 \frac{d^2\theta^2(a)}{da^2}, \\
f'''(a) &= A_1 \frac{d^3\theta(a)}{da^3} + A_2 \frac{d^3\theta^2(a)}{da^3} + A_3 \frac{d^3\theta^3(a)}{da^3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(a) &= A_1 \frac{d^n\theta(a)}{da^n} + A_2 \frac{d^n\theta^2(a)}{da^n} + \ldots + A_n \frac{d^n\theta^n(a)}{da^n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Estas formulas dão $A_1, A_2, A_3, \ldots$, expressos por meio de determinantes que nos dispensamos de escrever.

Wronski considerou mesmo a questão do desenvolvimento das funcções em série da fórma

$$a_1 \theta_1(x) + a_2 \theta_2(x) + a_3 \theta_3(x) + \ldots$$

$\theta_1(x), \theta_2(x) \ldots$ sendo funcções dadas. O resultado a que, a este respeito, chegou foi modernamente demonstrado por Ch. Lagrange, astronomo do Observatorio de Bruxellas, de um modo muito simples (*Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1884).

Sejam $f(z), \theta_1(z), \theta_2(z), \ldots$ funcções synecticas na área limitada por um contorno S e x e a dois pontos do interior d'esta área. O determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \theta_1(x) & \ldots & \theta_n(x) \\ f(a) & \theta_1(a) & \ldots & \theta_n(a) \\ f'(a) & \theta'_1(a) & \ldots & \theta'_n(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(n-1)}(a) & \theta_1^{(n-1)}(a) & \ldots & \theta_n^{(n-1)}(a) \end{vmatrix}$$

é nullo, assim como as suas $n-1$ primeiras derivadas relativamente a x, quando $x=a$;

logo, applicando á funcção $F(x)$ a formula de Taylor e o theorema de Cauchy (numero 30), temos

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{(x-a)^n F(z)\, dz}{(z-a)^n (z-x)}.$$

Esta igualdade dá, desenvolvendo o determinante $F(x)$ segundo os termos da primeira linha,

$$A_0 f(x) = A_1 \theta_1(x) - A_2 \theta_2(x) + \ldots \pm A_n \theta_n(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{(x-a)^n F(z)\, dz}{(z-a)^n (z-x)},$$

onde $A_0, A_1, A_2, \ldots$ representam os determinantes menores que se obtêem supprimindo no anterior a primeira linha e successivamente a $1.^a, 2.^a, 3.^a, \ldots$ columna.

N'esta formula, que conduz á série a que Wronski deu o nome de *lei suprema*, entram os determinantes $A_0, A_1, A_2, \ldots$ e $F(z)$, que são compostos de um numero de columnas que tende para o infinito quando n tende para o infinito; porisso é de uma applicação tão difficil que (fóra do caso já considerado de $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots$ representarem potencias de uma mesma funcção) não tem servido nem parece poder servir para desenvolver funcção alguma em série.

64. Terminaremos o que temos a dizer sobre o desenvolvimento das funcções em série apresentando uma formula que dá o desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, de uma funcção $\theta(x)$, quando $f(x)$ é synectica sómente n'um annel limitado por duas curvas S e s e x representa um ponto do interior d'este annel.

Seja S o contorno exterior e s o contorno interior do annel, seja a um numero complexo representado por um ponto do interior da área limitada por s e supponhamos que, para todos os pontos do contorno S, é

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|$$

e que, para todos os pontos do contorno s, é

$$|\theta(x)| > |\theta(z)|.$$

A equação $\theta(z) - \theta(x) = 0$ tem (numero 57) uma só raiz $z = x$ no interior do contorno S, e o theorema de Cauchy demonstrado no numero 28 — 1.º dá

$$\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\, dz}{\theta(z)-\theta(x)} = \int_s \frac{f(z)\,\theta'(z)\, dz}{\theta(z)-\theta(x)} + \int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\, dz}{\theta(z)-\theta(x)},$$

c representando uma circumferencia descripta do ponto x como centro com um raio sufficientemente pequeno para ficar no interior do annel

Temos porém (numero 28 — 2.º)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{(z-x)\left[\theta'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x)+\ldots\right]} = f(x).$$

Logo

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)} - \int_s \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}\right].$$

O primeiro integral já foi considerado no numero 57 e dá

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \theta(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)}\right.$$
$$\left. + \ldots + \theta^n(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots\right].$$

Para desenvolver o segundo integral em série, notemos que, por ser, em todos os pontos z da curva s, o modulo de $\theta(z)$ menor que o modulo de $\theta(x)$, temos

$$\frac{1}{\theta(z)-\theta(x)} = -\frac{1}{\theta(x)}\left[1+\frac{\theta(z)}{\theta(x)}+\ldots+\frac{\theta^n(z)}{\theta^n(x)}+\ldots\right];$$

e portanto

$$\int_s \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)} = -\frac{1}{\theta(x)}\int_s f(z)\,\theta'(z)\,dz$$
$$-\frac{1}{\theta^2(x)}\int_s f(z)\,\theta(z)\,\theta'(z)\,dz - \ldots - \frac{1}{\theta^n(x)}\int_s f(z)\,\theta^{n-1}(z)\,\theta'(z)\,dz - \ldots$$

Logo temos a formula

$$f(x) = A_0 + A_1\,\theta(x) + A_2\,\theta^2(x) + \ldots + A_n\,\theta^n(x) + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{\theta(x)} + \frac{B_2}{\theta^2(x)} + \ldots + \frac{B_n}{\theta^n(x)} + \ldots,$$

*

onde

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)\,\theta^{n-1}(z)\,\theta'(z)\,dz.$$

Esta formula contém a formula de Bürmann, que corresponde ao caso de a funcção $f(z)$ ser synectica na área limitada por s. N'este caso, com effeito, o integral que entra na expressão de B_n é (numero 28) nullo.

Pondo

$$\theta(z) = z - a$$

e tomando para contornos S e s duas circumferencias de raios R e r e de centro a, é $|z-a| < |x-a|$ para todos os pontos z da circumferencia interior, e $|z-a| > |x-a|$ para todos os pontos z da circumferencia exterior. A formula anterior é pois applicavel e dá a seguinte:

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(x-a)^n} + \ldots,$$

onde

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)(z-a)^{n-1}\,dz,$$

isto é, a *formula de Laurent* já considerada nos numeros 32 e 55.

65. Os integraes que entram na formula geral, que vimos de apresentar, podem ser expressos por meio dos coefficientes do desenvolvimento obtido pela formula de Laurent, no caso de a funcção $f(x)$ admittir, na área limitada pelo contorno interior s, sómente um numero limitado de pontos singulares em que deixe de ser synectica.

Sejam com effeito, $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots, b_k$ estes pontos, $c_1, c_2, \ldots, c_k, c$ circumferencias cujos centros sejam os pontos representados por $b_1, b_2, \ldots, b_k, a$ e cujos raios sejam assaz pequenos para que a área limitada por cada uma d'ellas não contenha outro d'estes pontos, além do centro.

Temos, em virtude do theorema de Cauchy demonstrado no numero 28 — 1.º,

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{2ni\pi}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m} \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)}.$$

Mas, representando por a um qualquer dos pontos $b_1, b_2, \ldots, b_k$, tem logar, na vesinhança do ponto a, o desenvolvimento (em virtude do theorema de Laurent)

$$\text{(A)} \qquad f(z) = M_0 + M_1(z-a) + M_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{N_1}{z-a} + \frac{N_2}{(z-a)^2} + \frac{N_3}{(z-a)^3} + \ldots,$$

e portanto o desenvolvimento

$$f'(z) = M_1 + 2M_2(z-a) + \ldots - \frac{N_1}{(z-a)^2} - \frac{2N_2}{(z-a)^3} - \frac{3N_3}{(z-a)^4} - \ldots$$

Substituindo esta série em logar de $f'(z)$ na expressão de A_n, vê-se que as k primeiras parcellas d'esta expressão podem ser decompostas n'uma somma de parcellas da forma

$$\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m} \frac{dz}{\theta^n(z)\,(z-b_m)^\beta},$$

que são nullas (numero 28) quando $\beta \overline{\overline{<}} 0$, e que são iguaes a (numero 29)

$$\frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)\,n}\left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}\left(\frac{1}{\theta^n(x)}\right)\right]_{x=b_m}$$

quando $\beta > 0$.

Por ser $\theta(x) = (x-a)\,\Theta(x)$, vê-se que a ultima das parcellas que entra na expressão de A_n é igual a (numero 29)

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)\,n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{f'(x)}{\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=a},$$

quando a é differente de $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

A analyse que precede não é applicavel quando $n=0$. Para calcular A_0 pode-se porém recorrer á formula

$$A_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} = \frac{1}{2i\pi}\left[\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m}\frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)}\right].$$

Substituindo nas k primeiras parcellas do segundo membro $f(z)$ pelo seu desenvolvimento, dado pela formula (A), faz-se depender cada uma d'ellas de outras da forma

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c_m}\frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)\,(z-b_m)^\beta},$$

que são nullas quando $\beta \overline{\overline{<}} 0$ e que são eguaes a

$$\frac{1}{1\ 2\ldots(\beta-1)}\left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}\left(\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}\right)\right]_{x=b_m}$$

quando $\beta > 0$. E, por ser $\theta(z) = (z-a)\,\Theta(z)$, vê-se que a ultima é dada pela formula

$$\int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} = \int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\Theta(z)} + \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2i\pi f(a),$$

quando a é differente de $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

A analyse que precede deve tambem ser modificada quando a coincide com um ponto singular, b_k por exemplo, de $f(z)$. Temos então

$$A_n = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m}\frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)}, \qquad (n>0)$$

e

$$A_0 = \frac{1}{2i\pi}\left[\sum_{m=1}^{k-1}\int_{c_m}\frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \int_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)}\right].$$

N'este caso o ultimo termo da expressão A_n pode ser decomposto em parcellas da forma

$$\frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{dz}{\Theta^n(z)\,(z-a)^\beta}$$

cujo valor é

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+\beta-1)\,n}\left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}\left(\frac{1}{\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=a}$$

quando $\beta > 0$ e que são nullas quando $\beta \overline{\overline{<}} 0$; e o ultimo termo da expressão de A_0 pode ser decomposto em parcellas da forma

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)(z-a)^\beta},\quad \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{dz}{(z-a)^\beta},$$

cujos valores são eguaes a

$$\frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)}\left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}\left(\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right)\right]_{x=a},\quad \frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)}f^{(\beta-1)}(a),$$

quando $\beta > 0$, e que são nullos quando $\beta \overline{\overline{<}} 0$.

Para os coefficientes B_n temos do mesmo modo

$$B_n = \frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)\,\theta^{n-1}(z)\,\theta'(z)\,dz = -\frac{1}{2ni\pi}\int_s f'(z)\,\theta^n(z)\,dz = -\frac{1}{2ni\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} f'(z)\,\theta^n(z)\,dz;$$

e os integraes que entram no segundo membro reduzem-se, como no caso anterior, a integraes da forma

$$\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m}\frac{\theta^n(z)\,dz}{(z-b_m)^\beta},$$

quando a não é ponto singular de $f(z)$, e a integraes d'esta forma e a outros da forma

$$\frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{\Theta^n(z)\,dz}{(z-a)^\beta},$$

quando a é um ponto singular de $f(z)$. Estes integraes são nullos quando $\beta \overline{\overline{<}} 0$ e são iguaes a

$$\frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)\,n}\left[\frac{d^{\beta-1}\,\theta^n(x)}{dx^{\beta-1}}\right]_{x=b_m},\quad \frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)\,n}\left[\frac{d^{\beta-1}\,\Theta^n(x)}{dx^{\beta-1}}\right]_{x=a}$$

quando $\beta > 0$.

Para determinar os coefficientes do desenvolvimento (A) (ou, o que é o mesmo, os integraes de que elles dependem segundo a formula de Laurent), quando o numero de parcellas fraccionarias que n'elle entram é infinito, não existe regra geral. No caso (o mais importante nas applicações) de o numero d'estas parcellas ser finito, isto é, no caso de ser

$$f(x) = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 (x-a) + \mathrm{M}_2 (x-a)^2 + \ldots + \frac{\mathrm{N}_1}{x-a} + \frac{\mathrm{N}_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{N}_\eta}{(x-a)^\eta}$$

podem calcular-se estes coefficientes desenvolvendo em série

$$(x-a)^\eta f(x)$$

por meio da formula de Taylor.

Reconhece-se que a funcção está n'estas circumstancias procurando se existe um numero η tal que o producto $(x-a)^\eta f(x)$ tenda para um limite finito e determinado quando x tende para a.

Para fazer uma applicação d'estes principios, consideremos a funcção

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x-b)}.$$

Por ser

$$\lim_{x=b} \frac{x-b}{\operatorname{sen}(x-b)} = 1,$$

temos

$$f(x) = \frac{1}{x-b} + \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 (x-b) + \ldots,$$

e portanto

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-b)^2} + \mathrm{M}_1 + 2\mathrm{M}_2 (x-b) + \ldots$$

Podemos pois determinar A_n por meio da formula

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2ni\pi}\int_{c_1} \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi}\int_{c} \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)}, \quad (n > 0),$$

que dá

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_n &= -\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_1}\frac{dz}{\theta^n(z)(z-b)^2}+\frac{1}{2ni\pi}\int_c\frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)}\\
&= -\frac{1}{n}\left[\frac{d\theta^{-n}(x)}{dx}\right]_{x=b}+\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{f'(x)}{\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=a}.\\
&= \frac{\theta'(b)}{\theta^{n+1}(b)}-\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\cos(x-b)}{\operatorname{sen}^2(x-b)\,\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=a},
\end{aligned}
$$

e A_0 por meio da formula

$$
\mathrm{A}_0=\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{f(z)\,\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz+\frac{1}{2i\pi}\int_c\frac{f(z)\,\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz=\frac{\theta'(b)}{\theta(b)}+\frac{1}{\operatorname{sen}(a-b)}.
$$

Para calcular B_n temos a formula

$$
\mathrm{B}_n=-\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_1}f'(z)\,\theta^n(z)\,dz=\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_1}\frac{\theta^n(z)\,dz}{(z-b)^2},
$$

que dá

$$
\mathrm{B}_n=\frac{1}{n}\left(\frac{d\theta^n(x)}{dx}\right)_{x=b}=\theta^{n-1}(b)\,\theta'(b).
$$

Temos pois o desenvolvimento

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{sen}(x-b)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{n-1}(b)\,\theta'(b)}{\theta^n(x)}+\frac{\theta'(b)}{\theta(b)}+\frac{1}{\operatorname{sen}(a-b)}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\theta'(b)}{\theta^{n+1}(b)}-\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\cos(x-b)}{\operatorname{sen}^2(x-b)\,\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=a}\right\}\theta^n(x).
\end{aligned}
$$

NOTAS

1. Estudaram-se no trabalho anterior as principaes demonstrações conhecidas da formula de Taylor. Muitas outras, quasi todas ligadas com as anteriores por alguns dos conceitos em que se fundam, têem sido apresentadas por varios auctores. Vamos indicar algumas d'ellas.

I. Principiando por indicar uma demonstração cuja ideia primordial pertence a *d'Alembert*, consideremos o integral multiplo de ordem n,

$$\mathrm{R}_n = \int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x f^{(n)}(x)\, dx.$$

Teremos, effectuando successivamente uma, duas,... integrações,

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_n &= \int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x \left[f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) \right]; \\
&= \int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x \left[f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0) - x f^{(n-1)}(0) \right] \\
&= \int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x \left[f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(0) - x f^{(n-2)}(0) - \frac{x^2}{2} f^{(n-1)}(0) \right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{1.2} f''(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Temos pois a formula de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \mathrm{R}_n$$

e uma expressão do resto por meio de um integral multiplo de ordem n.

Do resultado, que vimos de obter, pode-se tirar facilmente a expressão do resto devida a Lagrange. Com effeito, suppondo que os valores que toma $f^{(n)}(x)$, quando x varia desde 0 até x, estão comprehendidos entre m e M, o integral $\int_0^x f^{(n)}(x)\,dx$ está comprehendido entre mx e Mx. O integral $\int_0^x dx \int_0^x f^{(n)}(x)\,dx$ está portanto comprehendido entre $\frac{x^2}{1.2}m$ e $\frac{x^2}{1.2}\mathrm{M}$. Continuando do mesmo modo vê-se finalmente que R_n está comprehendido entre $\frac{x^n}{1.2\ldots n}m$ e $\frac{x^n}{1.2\ldots n}\mathrm{M}$. Temos pois

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\mathrm{K},$$

K representando um numero comprehendido entre m e M. Procedendo depois como no numero 7 do texto obtem-se a formula pedida.

II. Occupou-se tambem da formula de Taylor Laplace na sua *Théorie analytique des probabilités*, publicada em 1812 (*Oeuvres*, t. VII, p. 179), que a obteve por meio de applicações successivas do methodo de integração por partes.

Temos, com effeito,

$$\begin{aligned}\int_0^z f'(x-z)\,dz &= zf'(x-z) + \int_0^z zf''(x-z)\,dz \\ &= zf'(x-z) + \frac{z^2}{1.2}f''(x-z) + \frac{1}{1.2}\int_0^z z^2 f'''(x-z)\,dz \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= zf'(x-z) + \frac{z^2}{1.2}f''(x-z) + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x-z) \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^z z^{n-1} f^{(n)}(x-z)\,dz,\end{aligned}$$

e

$$\int_0^z f'(x-z)\,dz = f(x) - f(x-z).$$

D'estas formulas tira-se a seguinte:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x-z) + zf'(x-z) + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x-z) \\ &\quad + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^z z^{n-1} f^{(n)}(x-z)\,dz,\end{aligned}$$

*

ou, pondo $z=h$ e mudando x em $x+h$,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\mathrm{R}_n,$$

onde

$$\mathrm{R}_n=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}f^{(n)}(x+h-z)\,dz,$$

ou, pondo $z=th$,

$$\mathrm{R}_n=\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 t^{n-1}f^{(n)}(x+h-th)\,dt.$$

Temos assim a formula de Taylor e a expressão do seu resto por meio de um integral definido, obtida já no numero 6 do texto. Laplace deduziu d'este resultado a expressão do resto devida a Lagrange, empregando, sem todavia o demonstrar, o primeiro theorema dos valores medios dos integraes definidos.

III. Na demonstração dada por Lagrange da formula de Taylor, apresentada no numero 7, figuram as mesmas proposições que entram em uma das demonstrações conhecidas do *theorema de Rolle* (1). É pois natural procurar obter-se a formula de Taylor modificando a analyse de Lagrange de modo a fazer intervir este theorema. É o que fez Hatzidakis, professor na Universidade de Athenas, em um artigo publicado no *Enseignement mathématique* (t. II, p. 448), ao qual é devida a demonstração seguinte d'aquella formula.

Considerem-se as funcções de h' que entram na demonstração de Lagrange:

(A) $f^{(n)}(x+h')-\mathrm{K}$,

(B) $f^{(n-1)}(x+h')-f^{(n-1)}(x)-\mathrm{K}h'$

. . . .

(M) $f'(x+h')-f'(x)-h'f''(x)-\ldots-\dfrac{h'^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^{(n-1)}(x)-\dfrac{h'^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{K}$,

(N) $f(x+h')-f(x)-h'f'(x)-\ldots-\dfrac{h'^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)-\dfrac{h'^n}{1.2\ldots n}\mathrm{K}$;

(1) Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$, contínua no intervallo $(a, a+h)$, e se annullar nos pontos a e $a+h$, aquella funcção cresce na vesinhança de um d'estes pontos e decresce na vesinhança do outro. Logo a sua derivada $f'(x)$ passa de positiva para negativa, e, como é contínua, passa por 0 em um ponto do intervallo considerado.

cada uma das quaes é a derivada da seguinte, e seja K uma quantidade definida pela equação

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}\mathrm{K},$$

h sendo uma quantidade dada.

A funcção (N) annulla-se quando $h'=0$ e quando $h'=h$; logo existe um numero ε_1, comprehendido entre 0 e h, que annulla a funcção (M). E, como a funcção (M) se annulla quando $h'=0$ e quando $h'=\varepsilon_1$, existe tambem um numero ε_2, comprehendido entre 0 e ε_1, que annulla a funcção anterior. Continuando do mesmo modo vê-se que existe um numero ε, comprehendido entre 0 e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, e portanto entre 0 e h, que annulla a funcção (A); e temos portanto

$$\mathrm{K}=f^{(n)}(x+\varepsilon)=f^{(n)}(x+\theta h).$$

IV. Outras demonstrações da formula de Taylor, fundadas nas propriedades elementares da theoria das séries, foram dadas por Koenig nos *Nouvelles Annales* (1874) e por Amigues no volume correspondente a 1880 da mesma publicação. Estas demonstrações são applicaveis tanto no caso das variaveis reaes como das variaveis imaginarias, mas exigem que os valores absolutos da funcção $f(x)$ e das suas derivadas admittam um limite superior, e não são porisso tão geraes como as anteriores.

2. Deram-se no texto duas demonstrações da *formula de Laurent,* uma fundada na theoria dos integraes curvilineos e outra na theoria das séries. Outras demonstrações da mesma formula foram dadas por Scheeffer no tomo IV das *Acta mathematica* e por Pringsheim nos *Sitzungsb. der Alcademie zu München* (t. XXV e XXVI, 1895 e 1896). Esta ultima é fundada na noção de *valor medio* de uma funcção, que o auctor define do modo seguinte.

Consideremos uma funcção $f(z)$ e uma circumferencia de raio ρ com o centro na origem das coordenadas. Devida-se esta circumferencia, a partir do eixo das abscissas, em 2^n partes eguaes. Os pontos assim obtidos serão representados pelas quantidades complexas

$$\rho,\ \rho e^{\frac{2i\pi}{m}},\quad \rho e^{\frac{4i\pi}{m}},\ldots,\ \rho e^{\frac{2(m-1)i\pi}{m}},$$

onde $m=2^n$. Posto isto, chama-se valor medio da funcção $f(z)$ e representa-se por $\mathrm{M}f(\rho)$ o limite para que tende a somma

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\rho e^{\frac{2ki\pi}{m}}\right)$$

quando n tende para ∞.

Entre o valor medio e o integral curvilineo de $f(z)$, tomado ao longo da circumferencia considerada, existe uma relação muito simples. Temos, com effeito, por ser $z = \rho e^{i\theta}$,

$$\int_c f(z)\,dz = i\rho\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta = \lim_{m=\infty} 2i\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m}\,\rho f\left(\rho e^{\frac{2ki\pi}{m}}\right) e^{\frac{2ki\pi}{m}} = 2i\pi\,\mathrm{M}\left[\rho f(\rho)\right].$$

A theoria dos valores medios corresponde pois á theoria dos integraes curvilineos tomados ao longo de circumferencias, e as suas propriedades são caso particular das propriedades dos integraes curvilineos geraes; podem porém estabelecer-se por processos especiaes mais simples e elementares do que os que intervêem na demonstração das propriedades dos ultimos. Estas demonstrações foram dadas por Pringsheim, e, partindo dos theoremas assim obtidos, achou a formula de Laurent por um methodo analogo ao que foi empregado no texto para a obter por meio da theoria dos integraes curvilineos. Aqui não apresentaremos esta demonstração, que se pode ver nos trabalhos citados ou na obra de Vivanti intitulada *Teoria delle funzioni analitiche* (Milano, 1901).

II

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIE ORDONNÉE SUIVANT LES PUISSANCES DU SINUS ET DU COSINUS DE LA VARIABLE

(Journal für die reine und angewandte Mathematik,
gegründet von Crelle-Berlin 1896. Band 116)

INTRODUCTION

L'étude du développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable mène à l'étude préliminaire des courbes définies par l'équation $|\sin z| = c$, c représentant une constante réelle positive et z une variable complexe $x_1 + iy_1$. Ces courbes sont étudiées dans les premiers n^{os}. du présent mémoire. Nous y verrons que, si est $c \overline{\overline{<}} 1$, cette équation représente une infinité d'ovales et que, si est $c > 1$, elle représente une courbe composée de deux branches placées symétriquement par rapport à l'axe des abscisses et qui s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans le sens des abscisses négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale.

Quand est $c \overline{\overline{<}} 1$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par un des ovales représentés par l'équation $|\sin z| = c$, cette fonction peut être développée en série de la forme

$$A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + A_3 \sin^3 x + \ldots,$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de l'ovale considéré. On pourrait faire la détermination des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ au moyen de la série de Bürmann; mais nous donnons ici une manière plus simple de les obtenir [formule (13.)] et nous en faisons application à la fonction x^k, ce qui nous mène aux formules (14.) et (15.).

Quand est $c > 1$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire infinie comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ et si elle admet la période 2π, la fonction est, comme on va le voir, susceptible du développement suivant:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + \ldots + \cos x\,[B_1 + B_2 \sin x + B_3 \sin^2 x + \ldots],$$

et nous donnerons des formules pour le calcul des coefficients $A_0, A_1, \ldots, B_1, B_2 \ldots$ On considère ensuite le cas où la fonction $f(x)$ admet la période 2ω, réelle ou imaginaire, et on fait application des résultats trouvés à la fonction elliptique $\operatorname{sn} x$.

N

I.

Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une aire limitée.

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une aire A, x l'affixe d'un point quelconque de l'intérieur de cette aire et supposons que l'équation $\sin z = 0$ n'a qu'une seule racine dans l'aire considérée et que x est assez peu différent de cette racine pour qu'il soit, le long du contour A,

$$|\sin x| < |\sin z|. \tag{1.}$$

Dans ce cas l'équation

$$\sin z - \sin x = 0 \tag{2.}$$

a aussi une seule racine dans l'aire A.

Cela posé, je considère l'intégrale

$$\int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin z - \sin x},$$

où s représente le contour de l'aire A. Comme l'équation (2.) a une seule racine à l'intérieur de s, nous avons

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin z - \sin x},$$

et, en développant l'intégrale, qui entre dans cette formule, suivant les puissances de $\sin x$,

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \ldots + A_n \sin^n x + \ldots \tag{3.}$$

où est

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z}, \tag{4.}$$

ou encore

$$A_n = \frac{1}{2ni\pi} \int_s \frac{f'(z)\, dz}{\sin^n z}. \tag{5.}$$

2. La question précédente nous conduit à chercher une aire telle que, pour tout point x à l'intérieur et pour tout point z du contour, on ait

$$|\sin x| < |\sin z|.$$

Pour résoudre cette question on doit étudier les courbes définies par l'équation

$$|\sin z| = c,$$

ou, en posant $z = x_1 + iy_1$,

$$+\sqrt{\sin^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \sin^2 iy_1} = c, \tag{6.}$$

c représentant une constante réelle quelconque.

On voit immédiatement que y_1 est une fonction périodique de x_1 dont la période est égale à π; il suffit donc d'étudier la partie de chaque courbe qui corresponde aux valeurs de x_1 comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On voit aussi que la courbe est symétrique par rapport aux axes des coordonées; il suffit donc d'étudier la partie correspondant aux valeurs positives de x_1 et y_1.

Cela posé, nous allons considérer séparément le cas où est $c \leqq 1$ et le cas où est $c > 1$.

1.er cas. Supposons premièrement qu'est

$$c \leqq 1.$$

En posant premièrement $x_1 = 0$ et ensuite $y_1 = 0$, on voit que la partie considérée de la courbe coupe l'axe des y_1 au point dont l'ordonnée est égale à $\log(c + \sqrt{c^2+1})$ et l'axe des x_1 au point dont l'abscisse est égale à $\arcsin c$.

En posant dans l'équation (6.) $1 - \cos^2 iy_1$ au lieu de $\sin^2 iy_1$ et en la résolvant ensuite, il vient

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1,$$

*

et par conséquent

$$\frac{e^{-y_1}+e^{y_1}}{2} = \pm \sqrt{c^2+\cos^2 x_1}.$$

Cette équation donne la suivante

$$y_1 = \log\left[\pm\sqrt{c^2+\cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2-\sin^2 x_1}\right].$$

Cette égalité fait voir, en premier lieu, que y_1 est imaginaire quand $x_1 > \arcsin c$. Pour chaque valeur de x_1, inférieur à $\arcsin c$, elle donne pour y_1 deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires. Des deux valeurs réelles on ne doit choisir que celle qui, pour $x_1 = 0$, donne pour y_1 la valeur $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, c'est-à-dire la valeur

$$y_1 = \log\left[\sqrt{c^2+\cos^2 x_1} + \sqrt{c^2-\sin^2 x_1}\right]. \tag{7.}$$

On obtient au moyen de cette équation tous les points de la courbe considérée correspondants aux valeurs de x_1 comprises entre 0 et $\arcsin c$, et l'on voit que y_1 croît depuis 0 jusqu'à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, quand x_1 décroît depuis $\arcsin c$ jusqu'à 0.

L'équation

$$y'_1 = \frac{\sin 2x_1}{i \sin 2iy_1}$$

donne les tangentes à la courbe et fait voir que les tangentes dans les extrémités des axes sont perpendiculaires à l'axe correspondant.

Les points d'inflexion de la courbe sont donnés par l'élimination de y_1 entre l'équation

$$\sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \sin^2 2iy_1$$

et l'équation

$$\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1$$

qui résulte de (6.). On trouve de cette manière l'équation

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4-1},$$

laquelle fait voir que la courbe n'a pas de points d'inflexion quand $c \overline{\overline{<}} 1$. De cette discussion on conclue que la courbe représentée par l'équation $|\sin z| = c$ est, quand $c \overline{\overline{<}} 1$, composée d'un nombre infini *d'ovales* égaux, dont les centres sont les points $(0,0)$, $(0, \pm\pi)$, $(0, \pm 2\pi)\ldots$

et dont les axes sont égaux à $2 \arcsin c$ et $2 \log (c + \sqrt{c^2+1})$, le premier axe coïncidant avec l'axe des abscisses et le second étant parallèle à l'axe des ordonées.

2.$^{\text{me}}$ cas. Considérons maintenant le cas où est $c > 1$. Au moyen d'une discussion semblable, on voit qu'alors la courbe $|\sin z| = c$ a seulement deux branches, symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et qui s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans celui des abscisses négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π. L'ordonnée prend une valeur maximum égale à $\log (c + \sqrt{c^2+1})$ dans les points $x_1 = 0, \ \pm \pi, \ \pm 2\pi, \ldots$, et une valeur minimum égale à $\log (c + \sqrt{c^2-1})$ dans les points $x = \pm \frac{\pi}{2}, \ \pm \frac{3}{2}\pi, \ldots$

Les courbes que nous venons d'étudier résolvent la question que nous nous proposions de résoudre. Si est $c \overline{\overline{<}} 1$, on a

$$|\sin x| < |\sin z|$$

pour tout point x de l'intérieur de chaque *ovale* représenté par l'équation $|\sin z| = c$ et pour tout point z du contour. Si est $c > 1$, la même inégalité a lieu pour tous les points x de la *bande infinie* comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ et pour tous les points z de cette courbe.

3. De ce qu'on vient de démontrer dans les n$^{\text{os}}$. précédents on conclue que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire A, limitée par un des *ovales* représentés par l'équation $|\sin z| = c$ (où $c \overline{\overline{<}} 1$), qu'on vient d'étudier, on a, pour tous les points x de l'intérieur de l'ovale considéré

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \ldots + A_n \sin^n x + \ldots, \tag{3.}$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots$ étant donnés par les intégrales (4.) ou (5.), qu'on peut déterminer, comme on sait, au moyen de la théorie des résidus. Mais nous allons donner, pour la détermination de ces coefficients, une méthode plus simple.

Considérons premièrement l'ovale dont le centre est l'origine des coordonnées. Il est facile de voir que l'égalité (3.) et les égalités qu'on obtient en la dérivant par rapport à x donnent, en y posant $x = 0$,

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_0,\\
f'(0) &= A_1,\\
f''(0) &= 2A_2,\\
f'''(0) &= -A_1 + 6A_3,\\
f^{IV}(0) &= -8A_2 + 24A_4,\\
f^{V}(0) &= A_1 - 60A_3 + 120A_5,\\
f^{VI}(0) &= 32A_2 - 480A_4 + 720A_6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et par conséquant

$$
\begin{aligned}
A_0 &= f(0),\\
A_1 &= f'(0),\\
A_2 &= \tfrac{1}{2}\, f''(0),\\
A_3 &= \tfrac{1}{6}\, [f'''(0)+f'(0)],\\
A_4 &= \tfrac{1}{24}\, [f^{IV}(0)+4f''(6)],\\
A_5 &= \tfrac{1}{120}\, [f^{V}(0)+10f'''(0)+9f'(0)],\\
A_6 &= \tfrac{1}{720}\, [f^{VI}(0)+20f^{IV}(0)+64f''(0)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

En général, nous pouvons écrire

$$
\text{(A.)}\qquad \begin{cases} A_{2n} = K\,[f^{(2n)}(0)+A f^{(2n-2)}(0)+\ldots+L f^{(2)}(0)],\\ A_{2n+1}=K'\,[f^{(2n+1)}(0)+A' f^{(2n-1)}(0)+\ldots+L' f'(0)],\end{cases}
$$

où $K, K', A, A', \ldots, L, L'$ représentent des quantités constantes que nous allons déterminer.

Considérons dans ce but la fonction $\sin kx$, où k est un nombre entier impair, dont le développement suivant est donné dans les éléments de trigonométrie:

$$
\sin kx = k\sin x - k\frac{k^2-1^2}{1.2.3}\sin^3 x+\ldots+(-1)^n k\frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)\ldots(k^2-(2n-1)^2)}{1.2\ldots(2n+1)}\sin^{2n+1}x-\ldots
$$

En appliquant la seconde des formules (A.) à cette fonction, on trouve

$$
A_{2n+1}=(-1)^n K'\,[k^{2n+1}-A' k^{2n-1}+\ldots\pm L' k].
$$

En comparant ce résultat au suivant

$$
A_{2n+1}=(-1)^n k\frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)\ldots(k^2-(2n-1)^2)}{1.2\ldots(2n+1)}
$$

et en représentant par $s^{(m)}_{2n+1}$ la somme des combinaisons des nombres

$$
1^2,\quad 3^2,\quad 5^2,\quad \ldots,\quad (2n-1)^2
$$

pris m à m, on a donc

$$
K'=\frac{1}{(2n+1)\,!},\quad A'=s^{(1)}_{2n+1},\quad B'=s^{(2)}_{2n+1},\quad \ldots,\quad L'=s^{(n)}_{2n+1}.
$$

On peut donc écrire en général

$$(8.)\qquad A_{2n+1}=\frac{f^{(2n+1)}(0)+s_{2n+1}^{(1)}f^{(2n-1)}(0)+\ldots+s_{2n+1}^{(n)}f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Cette formule peut être encore écrite *symboliquement* de la manière suivante

$$(9.)\qquad A_{2n+1}=\frac{f(0)[f^2(0)+1^2][f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)},$$

où l'on doit, après les multiplications, remplacer les puissances de $f(0)$ par des dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance.

Pour déterminer les coefficients K, A, B, ..., L de la première des formules (A.), nous pouvons considérer la fonction $\cos kx$, où k est un nombre entier pair. La trigonométrie donne en effet alors la formule suivante:

$$\cos kx=1-\frac{k^2}{2}\sin^2 x+\frac{k^2(k^2-2^2)}{2.3.4}\sin^4 x-\ldots+(-1)^n\frac{k^2(k^2-2^2)\ldots(k^2-(2n-2)^2)}{2.3\ldots 2n}\sin^{2n}x\pm\ldots;$$

et, en comparant la valeur du coefficient de $\sin^{2n}x$ dans cette formule avec la valeur donnée par la formule

$$A_{2n}=(-1)^n K[k^{2n}-Ak^{2(n-1)}+\ldots\pm Lk^2]$$

et en représentant par $S_{2n}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\quad 4^2,\quad 6^2,\quad \ldots,\quad (2n-2)^2$$

pris m à m, on a

$$K=\frac{1}{(2n)!},\quad A=S_{2n}^{(1)},\quad B=S_{2n}^{(2)},\quad \ldots,\quad L=S_{2n}^{(n-1)}$$

Nous pouvons donc écrire la formule générale suivante:

$$(10.)\qquad A_{2n}=\frac{f^{(2n)}(0)+S_{2n}^{(1)}f^{(2n-2)}(0)+\ldots+S_{2n}^{(n-1)}f^{(2)}(0)}{1.2.3\ldots 2n},$$

ou *symboliquement*

$$(11.)\qquad A_{2n}=\frac{f^2(0)[f^2(0)+2^2][f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2.3\ldots 2n}.$$

De tout ce qui précède il résulte le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par l'ovale dont l'équation est $|\sin z| = c$ (où $c \overline{\overline{<}} 1$) et dont le centre est l'origine des coordonnées, on a, pour tous les points x de l'intérieur de cette aire,

$$(12.)\quad \begin{cases} f(x) = f(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \qquad + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x, \end{cases}$$

ou symboliquement

$$(13.)\quad \begin{cases} f(x) = f(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^2(0)[f^2(0)+2^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \qquad + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(0)[f^2(0)+1^2][f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x, \end{cases}$$

où l'on doit remplacer, après les multiplications, les puissances de $f(0)$ par des dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance.

4. Pour faire une première application de la formule précédente nous allons développer la fonction

$$f(x) = x^k,$$

où k représente un nombre entier positif.

1.^{er} cas. Supposons premièrement que k est un nombre pair égal à $2m$. On a

$$f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0) = 0$$

quando est $n < m$, et par conséquent

$$A_0 = 0,\quad A_2 = 0,\quad A_4 = 0,\quad \ldots,\quad A_{2m-2} = 0.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} A_{2m} &= \frac{f^{2m}(0)}{(2m)!} = 1, \\ A_{2m+2} &= \frac{S_{2m+2}^{(1)} f^{2m}(0)}{(2m+2)!} = \frac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)}, \\ A_{2m+4} &= \frac{S_{2m+4}^{(2)} f^{2m}(0)}{(2m+4)!} = \frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Comme est

$$f^{(2n+1)}(0)+s_{2n+1}^{(1)}f^{(2n-1)}(0)+\ldots+s_{2n+1}^{(n)}f'(0)=0,$$

on a aussi

$$A_1=A_3=A_5=\ldots=0.$$

Nous avons donc la formule

$$(14.)\quad \begin{cases} x^{2m}=\sin^{2m}x\Big[1+\dfrac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)}\sin^2 x+\dfrac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)\ldots(2m+4)}\sin^4 x \\ \qquad +\dfrac{S_{2m+6}^{(3)}}{(2m+1)\ldots(2m+6)}\sin^6 x+\ldots\Big]. \end{cases}$$

2ième. cas. Supposons maintenant que k est un nombre impair égal à $2m+1$. Au moyen d'une analyse semblable, on trouve alors la formule

$$(15.)\quad \begin{cases} x^{2m+1}=\sin^{2m+1}x\Big[1+\dfrac{s_{2m+3}^{(1)}}{(2m+2)(2m+3)}\sin^2 x+\dfrac{s_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2)\ldots(2m+5)}\sin^4 x \\ \qquad +\dfrac{s_{2m+7}^{(3)}}{(2m+2)\ldots(2m+7)}\sin^6 x+\ldots\Big]. \end{cases}$$

La formule (14.) en y posant $m=1$ et en remarquant qu'est

$$S_4^{(1)}=2^2,\quad S_6^{(2)}=2^2.4^2,\quad S_8^{(3)}=2^2.4^2.6^2,\quad \ldots$$

donne la formule connue

$$x^2=\sin^2 x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^4 x+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{3}\sin^6 x+\ldots$$

De la même manière, en posant dans la formule (15.) $m=0$ et en remarquant qu'est

$$s_3^{(1)}=1,\quad s_5^{(2)}=3^2,\quad s_7^{(3)}=3^2.5^2,\quad s_9^{(5)}=3^2.5^2.7^2,\quad \ldots,$$

on trouve la formule connue

$$x=\sin x+\frac{1}{2.3}\sin^3 x+\frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x+\ldots$$

o

5. Pour faire une seconde application des formules (12.) et (13.) considérons les fonctions $\sin kx$ et $\cos kx$, où k représente un nombre quelconque, réel ou imaginaire. Ces formules donnent immédiatement les formules connues

$$\sin kx = k\left[\sin x - \frac{k^2-1^2}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \dots\right],$$

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2}\sin^2 x + \frac{k^2(k^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \dots,$$

lesquelles ont lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de celui des ovales donnés par l'équation $|\sin z| = 1$ qui a pour centre l'origine des coordonnées.

On doit remarquer que nous avons déjà employé ces formules pour trouver les formules (12.) et (13.), mais en supposant k un nombre entier positif impair, dans le cas de la première formule, et un nombre entier positif pair, dans le cas de la seconde.

6. Considérons encore la fonction

$$f(x) = x\cot x.$$

On a alors, B_1, B_3, ... représentant les nombres de *Bernoulli*,

$$f(0) = 1, \quad f''(0) = -2^2 B_1, \quad \dots, \quad f^{(2n)}(0) = -2^{2n} B_{2n-1},$$
$$f'(0) = f'''(0) = \dots = 0.$$

Donc la formule (12.) donne

$$x\cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n-1} + S_{2n}^{(1)} 2^{2(n-1)} B_{2n-3} + \dots + S_{2n}^{(n-1)} 2^2 B_1}{1.2\dots 2n}\sin^{2n} x.$$

On peut écrire cette formule *symboliquement* de la manière suivante:

$$x\cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2 B[2^2 B^2 + 2^2][2^2 B^2 + 4^2]\dots[2^2 B^2 + (2n-2)^2]}{1.2\dots 2n}\sin^{2n} x,$$

où l'on doit remplacer, après les multiplications, les exposants des puissances de B par des indices.

7. Nous avons considéré jusqu'ici seulement des *ovales* représentés par l'équation $|\sin z| = c$ dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées. En appliquant la formule

(12.) à la fonction $f(x+m\pi)$ et en changeant ensuite x en $x-m\pi$, on trouve la formule qui a lieu quand x représente un point de l'ovale, représenté par la même équation, dont le centre est le point $(m\pi, 0)$. On trouve ainsi, quand $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par cet ovale,

$$(16.)\quad \begin{cases} f(x) = f(m\pi) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(m\pi)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \quad + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^m \dfrac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x. \end{cases}$$

On peut écrire cette formule *symboliquement* de la manière suivant:

$$(17.)\quad \begin{cases} f(x) = f(m\pi) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^2(m\pi)[f^2(m\pi)+2^2]\ldots[f^2(m\pi)+(2n-2)^2]}{1.2.3\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \quad + (-1)^m \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(m\pi)[f^2(m\pi)+1^2][f^2(m\pi)+3^2]\ldots[f^2(m\pi)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x. \end{cases}$$

8. De la comparaison de la formule (16.) avec les formules (3.), (4.) et (5.) on conclue les résultats suivants, dont nous ferons encore usage:

1°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f(z)\cos z}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport au pôle $m\pi$ est donné par la formule

$$R_m = \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(m\pi)}{1.2\ldots 2n};$$

2°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f(z)\cos z}{\sin^{2n+2} z}$ par rapport au même pôle est donné par la formule

$$R'_m = (-1)^m \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1.2\ldots(2n+1)};$$

3°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f'(z)}{\sin^{2n} z}$ par rapport à $m\pi$ est donné par la formule

$$R''_m = \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(m\pi)}{1.2.3\ldots(2n-1)};$$

*

4°. Le résidu de la fonction $\frac{f'(z)}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport à $m\pi$ est

$$R'''_m = (-1)^m \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s^{(1)}_{2n+1} f^{(2n-1)}(m\pi) + \ldots + s^{(n)}_{2n+1} f'(m\pi)}{1.2\ldots 2n}.$$

En changeant dans les formules précédentes $f'(z)$ en $f(z)$, on voit encore que le résidu de $\frac{f(z)}{\sin^{2n} z}$ par rapport à $m\pi$ est donné par la formule

$$R^{(IV)}_m = \frac{f^{(2n-1)}(m\pi) + S^{(1)}_{2n} f^{(2n-3)}(m\pi) + \ldots + S^{(n-1)}_{2n} f'(m\pi)}{1.2.3\ldots(2n-1)}$$

et que le résidu de $\frac{f(z)}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport au même pôle est donné par l'égalité

$$R^{(V)}_m = (-1)^m \frac{f^{(2n)}(m\pi) + s^{(1)}_{2n+1} f^{(2n-2)}(m\pi) + \ldots + s^{(n)}_{2n+1} f(m\pi)}{1.2\ldots 2n}.$$

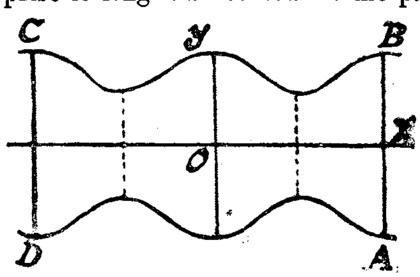
II.

Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une bande infinie.

9. Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\sin(z+x)\,dz}{\sin z - \sin x}$$

prise le long d'un contour formé par les droites AB et CD, parallèles à l'axe des ordonnées, qui passent par les points dont les abscisses sont $-\pi+\eta$ et $\pi+\eta$ $\left(\text{où } \eta<\frac{\pi}{2}\right)$ et par les deux branches de la courbe représentée par l'équation $|\sin z| = c$ (où $c>1$), et soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans cette aire et périodique, la période étant égale à 2π.



La fonction

$$\frac{f(z)\sin(z+x)}{\sin z - \sin x} = \frac{f(z)\sin\frac{1}{2}(z+x)}{\sin\frac{1}{2}(z-x)}$$

a un seul pôle, $z=x$, à l'intérieur du contour S et le résidu de cette fonction par rapport à ce pôle est égal à $2f(x)\sin x$; par conséquent nous avons

$$2\sin x\, f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\sin(z+x)\,dz}{\sin z - \sin x}.$$

Mais de la périodicité de la fonction $f(z)$ il résulte

$$\int_{AB} \frac{f(z)\sin(z+x)\,dx}{\sin z - \sin x} = \int_{DC} \frac{f(z)\sin(z+x)\,dx}{\sin z - \sin x}.$$

Donc nous avons, en représentant par S′ et S″ les courbes BC et DA:

$$2 \sin x f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S'} \frac{f(z) \sin(z+x)\, dz}{\sin z - \sin x} + \frac{1}{2i\pi} \int_{S''} \frac{f(z) \sin(z+x)\, dz}{\sin z - \sin x}.$$

Si l'on remarque maintenant que le développement

$$\frac{1}{\sin z - \sin x} = \frac{1}{\sin z} + \frac{\sin x}{\sin^2 z} + \frac{\sin^2 x}{\sin^3 z} + \ldots$$

a lieu pour toutes les valeurs de z représentées par les points de S′ et S″ et pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de l'aire considérée (parce qu'on a pour tous ces points $|\sin x| < |\sin z|$), on peut écrire le développement

$$\begin{aligned} \sin x f(x) = \sin x\, [A_0 + A_1 \sin x + \ldots + A_n \sin^n x + \ldots] \\ + \cos x\, [B_0 + B_1 \sin x + \ldots + B_n \sin^n x + \ldots], \end{aligned}$$

où

$$A_n = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{S'} \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z} + \int_{S''} \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z} \right],$$
$$B_n = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_{S'} \frac{f(z)\, dz}{\sin^n z} + \int_{S''} \frac{f(z)\, dz}{\sin^n z} \right].$$

En posant dans ce développement $x = 0$, il vient $B_0 = 0$; nous pouvons donc encore écrire

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \ldots + A_n \sin^n x + \ldots + \cos x\, [B_1 + B_2 \sin x + \ldots + B_n \sin^{n-1} x + \ldots].$$

On peut encore donner aux coefficients A_n et B_n de ce développement une autre forme. En effet, on a

$$\int_{AB} \frac{f(z) \cos z\, dz}{\sin^{n+1} z} = \int_{DC} \frac{f(z) \cos z\, dz}{\sin^{n+1} z},$$
$$\int_{AB} \frac{f(z)\, dz}{\sin^n z} = \int_{DC} \frac{f(z)\, dz}{\sin^n z},$$

et par conséquent

$$(18.) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{4i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z dz}{\sin^{n+1} z}, \\ B_n &= \frac{1}{4i\pi} \int_S \frac{f(z)\, dz}{\sin^n z}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de l'intégration par parties on voit qu'on peut encore écrire

$$A_n = \frac{1}{4ni\pi}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\sin^n z}. \tag{18'.}$$

De tout ce qui précède on peut tirer le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande infinie comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ *(où $c > 1$) et admet la période 2π, on peut développer $f(x)$ en série de la forme suivante:*

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \ldots + A_n \sin^n x + \ldots + \cos x\,[B_1 + B_2 \sin x + \ldots + B_n \sin^{n-1} x + \ldots], \tag{19.}$$

les coefficientes A_n et B_n étant donnés par les formules (18).

10. Il faut maintenant calculer les intégrales qui entrant dans les expressions de A_n et B_n, ce qu'on peut faire au moyen du théorème de Cauchy, qui donne, en employant les notations du n.° 8, les résultats suivants:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \tfrac{1}{2}[R_0 + R_1], \\ A_{2n+1} &= \tfrac{1}{2}[R'_0 + R'_1], \\ B_{2n} &= \tfrac{1}{2}[R_0^{(IV)} + R_1^{(IV)}], \\ B_{2n+1} &= \tfrac{1}{2}[R_0^{(V)} + R_1^{(V)}]. \end{aligned}$$

Ces formules donnent (n.° 8)

$$\begin{aligned} A_{2n} = &\frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{1.2\ldots 2n} \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n)}(\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(\pi) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(\pi)}{1.2\ldots 2n}, \end{aligned}$$

ou, en posant

$$f(x) + f(x+\pi) = F_1(x):$$

$$A_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} F_1^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} F_1^{(2)}(0)}{1.2\ldots 2n}. \tag{20.}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} A_{2n+1} = &\frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)} \\ &- \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(\pi) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(\pi)}{1.2\ldots(2n+1)}, \end{aligned}$$

ou, en posant
$$f(x)-f(x+\pi)=\mathrm{F}(x):$$

$$(21.)\qquad \mathrm{A}_{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{F}^{(2n+1)}(0)+s^{(1)}_{2n+1}\mathrm{F}^{(2n-1)}(0)+\ldots+s^{(n)}_{2n+1}\mathrm{F}'(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

De la même manière on trouve les formules

$$(22.)\qquad \mathrm{B}_{2n}\;=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{F}_1^{(2n-1)}(0)+\mathrm{S}^{(1)}_{2n}\mathrm{F}_1^{(2n-3)}(0)+\ldots+\mathrm{S}^{(n-1)}_{2n}\mathrm{F}_1'(0)}{1.2\ldots(2n-1)},$$

$$(23.)\qquad \mathrm{B}_{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{F}^{(2n)}(0)+s^{(1)}_{2n+1}\mathrm{F}^{(2n-2)}(0)+\ldots+s^{(n)}_{2n+1}\mathrm{F}(0)}{1.2\ldots2n}.$$

Les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) peuvent encore être écrites *symboliquement* de la manière suivante:

$$(24.)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_{2n}\;=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{F}_1^2(0)[\mathrm{F}_1^2(0)+2^2][\mathrm{F}_1^2(0)+4^2]\ldots[\mathrm{F}_1^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots2n}, \\ \mathrm{A}_{2n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{F}(0)[\mathrm{F}^2(0)+1^2][\mathrm{F}^2(0)+3^2]\ldots[\mathrm{F}^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)}, \\ \mathrm{B}_{2n}\;=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{F}_1(0)[\mathrm{F}_1^2(0)+2^2][\mathrm{F}_1^2(0)+4^2]\ldots[\mathrm{F}_1^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots(2n-1)}, \\ \mathrm{B}_{2n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{F}^0(0)[\mathrm{F}^2(0)+1^2][\mathrm{F}^2(0)+3^2]\ldots[\mathrm{F}^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots2n}. \end{cases}$$

Les formules antérieures ne déterminent pas les coefficients A_0 et B_1. On les obtient au moyen de la formule (19.) en y posant $x=0$ et $x=\pi$, ce qui donne

$$f(0)=\mathrm{A}_0+\mathrm{B}_1,\quad f(\pi)=\mathrm{A}_0-\mathrm{B}_1$$

et par conséquent

$$\mathrm{A}_0=\tfrac{1}{2}[f(0)+f(\pi)]=\tfrac{1}{2}\mathrm{F}_1(0),$$
$$\mathrm{B}_1=\tfrac{1}{2}[f(0)-f(\pi)]=\tfrac{1}{2}\mathrm{F}\;(0).$$

11. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ admet la période réelle ou imaginaire 2ω. Alors la fonction $f\left(\frac{\omega\mathrm{X}}{\pi}\right)$ de la variable X admet la période 2π et, si elle est holomorphe dans l'aire infinie limitée par les deux branches de la courbe $|\sin\mathrm{X}|=c$ (où $c>1$), nous avons

$$f\left(\frac{\omega\mathrm{X}}{\pi}\right)=\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1\sin\mathrm{X}+\mathrm{A}_2\sin^2\mathrm{X}+\ldots+\cos\mathrm{X}\,[\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2\sin\mathrm{X}+\mathrm{B}_3\sin^2\mathrm{X}+\ldots].$$

Si l'on pose maintenant

$$\text{(A.)} \qquad \frac{\omega X}{\pi} = x,$$

on trouve

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin\frac{\pi x}{\omega} + A_2 \sin^2\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + \cos\frac{\pi x}{\omega}\left[B_1 + B_2 \sin\frac{\pi x}{\omega} + B_3 \sin^2\frac{\pi x}{\omega} + \ldots\right].$$

Les coefficients A_n et B_n sont donnés par les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) en y posant

$$F\,(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) - f\left(\frac{\omega\,(x+\pi)}{\pi}\right),$$

$$F_1\,(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) + f\left(\frac{\omega\,(x+\pi)}{\pi}\right).$$

En posant en (A.)

$$\omega = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta), \quad X = R\,(\cos\theta' + i\sin\theta'), \quad x = r\,(\cos\tau + i\sin\tau)$$

on trouve

$$\tau = \theta + \theta', \quad \frac{\rho R}{\pi} = r.$$

On voit donc que l'aire qui, dans le plan de représentation de x, correspond à l'aire limitée par les deux branches de la courbe $|\sin X| = c$ est limitée par une courbe qu'on obtient en transformant premièrement la courbe $|\sin X| = c$ de manière qu'entre les rayons vecteurs R des points de cette courbe et les rayons vecteurs correspondants r de la transformée existe le rapport $r = \frac{\rho}{\pi} R$, et ensuite en faisant tourner l'aire limitée par la courbe ainsi obtenue autour de l'origine des coordonnées d'un angle égal à l'argument de la période 2ω.

12. En appliquant la doctrine antérieure à la fonction $f(X+\alpha)$, on obtient le développement

$$f(X+\alpha) = A_0 + A_1 \sin\frac{\pi X}{\omega} + A_2 \sin^2\frac{\pi X}{\omega} + \ldots + \cos\frac{\pi X}{\omega}\left[B_1 + B_2 \sin\frac{\pi X}{\omega} + B_3 \sin^2\frac{\pi X}{\omega} + \ldots\right],$$

qui, en posant

$$X + \alpha = x$$

donne

$$f(x)=A_0+A_1\sin\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha)+A_2\sin^2\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha)+\ldots+\cos\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha)\Big[B_1+B_2\sin\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha)$$
$$+B_3\sin^2\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha)+\ldots\Big].$$

Ce développement a lieu dans l'aire qu'on obtient en donnant à l'aire considérée dans le numéro antérieur un mouvement de translation qui transporte le point qui coïncide avec l'origine des coordonnées, au point dont l'affixe est α.

Les coefficients A_0, A_1, ..., B_1, B_2, ... de cette formule sont donnés par les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) en y posant

$$F\ (x)=f\left(\frac{\omega x}{\pi}+\alpha\right)-f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}+\alpha\right),$$
$$F_1(x)=f\left(\frac{\omega x}{\pi}+\alpha\right)+f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}+\alpha\right).$$

En posant dans les formules antérieures $\alpha=-\frac{\omega}{2}$, on trouve

$$f(x)=A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{\omega}+A_2\cos^2\frac{\pi x}{\omega}+\ldots-\sin\frac{\pi x}{\omega}\left[B_1+B_2\cos\frac{\pi x}{\omega}+B_3\cos^2\frac{\pi x}{\omega}+\ldots\right].$$

Les coefficients sont donnés par les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) en y posant

$$F\ (x)=f\left(\frac{\omega x}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right)-f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right),$$
$$F_1(x)=f\left(\frac{\omega x}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right)+f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right).$$

13. Pour faire une application de cette formule considérons la fonction elliptique

$$f(x)=\operatorname{sn}\frac{2kx}{\pi},$$

qui admet les périodes 2π et $\frac{\pi i k'}{k}$ et les pôles

$$\frac{\pi i k'}{2k}+n\pi+m\frac{\pi i k'}{k}$$

(n et m étant des nombres entiers) et supposons, pour simplifier, que k et k' sont des quantitées réelles.

Il est facile de voir, en ayant égard à ce que les ordonnées maximums de la courbe $|\sin z| = c$ (où $c > 1$) sont égales à $\log(c + \sqrt{c^2+1})$, que la fonction considérée est holomorphe dans la bande infinie limitée par les deux branches de la courbe

$$|\sin z| = \left|\sin \frac{\pi i k'}{2k}\right|,$$

quand k et k' vérifient la condition

$$\frac{\pi k'}{2k} > \log(1 + \sqrt{2}).$$

Dans ce cas on a

$$\operatorname{sn} \frac{2kx}{\pi} = A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + \ldots + \cos x\,[B_1 + B_2 \sin x + B_3 \sin^2 x + \ldots].$$

Mais, en remarquant qu' est

$$\operatorname{sn}\left(-\frac{2kx}{\pi}\right) = -\operatorname{sn}\left(\frac{2kx}{\pi}\right),$$

on voit qu' est

$$A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = \ldots = 0,$$
$$B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0;$$

et, en remarquant qu' est

$$\operatorname{sn} \frac{2k(x+\pi)}{\pi} = -\operatorname{sn} \frac{2kx}{\pi},$$

on voit ensuite qu'on a

$$B_2 = B_4 = B_6 = \ldots = 0.$$

On a donc

$$\operatorname{sn} \frac{2kx}{\pi} = A_1 \sin x + A_3 \sin^3 x + A_5 \sin^5 x + \ldots,$$

et par conséquent

$$\operatorname{sn} x = A_1 \sin \frac{\pi x}{2k} + A_3 \sin^3 \frac{\pi x}{2k} + \ldots.$$

*

Les coefficients qui entrent dans cette formule doivent être déterminés par la formule (21.) en y posant

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{sn}\,\frac{2kx}{\pi} - \mathrm{sn}\,\frac{2k(x+\pi)}{\pi} = 2\,\mathrm{sn}\,\frac{2kx}{\pi}.$$

Le développement qu'on vient de trouver a lieu dans l'aire infinie limitée par la courbe qu'on obtient en transformant la courbe dont l'équation est

$$|\sin z| = \left|\sin\frac{\pi i k'}{2k}\right|$$

comme on a dit dans le n.° 11. En particulier elle a lieu pour toutes les valeurs réelles de x.

14. Nous pouvons déterminer un développement de $\mathrm{sn}\,x$ qui est applicable pour toutes les valeurs de k et k' et pour toutes les valeurs réelles de x, comme on va voir.

Considérons la fonction

$$f(x) = \mathrm{sn}\,\frac{2k}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

qui admet les périodes 2π et $\frac{\pi i k'}{k}$ et les pôles

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i k'}{2k} + n\pi + m\,\frac{\pi i k'}{k},$$

n et m étant des nombres entiers, et supposons encore que k et k' sont des nombres réels.

Comme les pôles de la fonction considérée ont les mêmes abscisses que les points de la courbe $|\sin z| = c$ où l'ordonnée est minimum, on voit qu'il existe une valeur de c, supérieure à l'unité, telle que la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par les deux branches de cette courbe. Cette valeur est donnée par l'équation

$$c = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i k'}{2k}\right) = \cos\frac{\pi i k'}{2k}.$$

Nous avons donc, dans l'aire considérée,

$$\mathrm{sn}\,\frac{2k}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \sin x + \mathrm{A}_2 \sin^2 x + \ldots + \cos x\,[\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 \sin x + \mathrm{B}_3 \sin^2 x + \ldots].$$

Cette égalité donne premièrement

$$\operatorname{sn} x = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{2k} + A_2 \cos^2\frac{\pi x}{2k} + \ldots - \sin\frac{\pi x}{2k}\left[B_1 + B_2 \cos\frac{\pi x}{2k} + B_3 \cos^2\frac{\pi x}{2k} + \ldots\right],$$

et, à cause des égalités

$$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x,$$
$$\operatorname{sn}(x+2k) = -\operatorname{sn} x,$$

elle donne ensuite

$$\operatorname{sn} x = -\sin\frac{\pi x}{2k}\left[B_1 + B_3 \cos^2\frac{\pi x}{2k} + B_5 \cos^4\frac{\pi x}{2k} + \ldots\right].$$

Les coefficients B_1, B_3, B_5, ... doivent être calculés au moyen de la formule (23.) en y posant

$$F(x) = \operatorname{sn}\left(\frac{2kx}{\pi} - k\right) - \operatorname{sn}\left(\frac{2k(x+\pi)}{\pi} - k\right) = 2\operatorname{sn}\left(\frac{2kx}{\pi} - k\right).$$

Le développement que nous venons de trouver a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire qu'on obtient en transformant l'aire limitée par les deux branches de la courbe

$$|\sin z| = \cos\frac{\pi i k'}{2k},$$

comme on l'a dit dans les n.^{os} 11 et 12. En particulier il a lieu pour toutes les valeurs réelles de x.

III

SUR LES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES D'UNE FONCTION DONNÉE

(Journal für die reine und angewandte Mathematik,
gegründet von Crelle-Berlin, 1896. Band 116)

INTRODUCTION

Les formules de *Lagrange* et de *Bürmann* et celle de *Laurent* sont des cas particuliers d'une formule qui donne le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives d'une autre fonction. Cette formule, qu'on obtient en généralisant la méthode au moyen de laquelle on trouve ces formules-là, est donnée dans les premiers n^os^. de ce travail. Mais cette généralisation facile n'est pas le seul but que nous avons en vue; notre but principal est de présenter quelques conséquences de la formule considérée, qui nous paraissent offrir quelque intérêt.

La première application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$. Nous démontrons premièrement que, étant donnée une fonction holomorphe dans la couronne limitée par deux circonférences dont les centres ne coïncident pas, on peut déterminer a et b de manière qu'elle soit développable en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$ convergente dans la couronne considérée. Ensuite nous faisons voir qu'on peut développer, au moyen de séries de cette forme, les fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites, ou par des droites et par des arcs de circonférence, et nous arrivons à un théorème qui contient comme cas particulier un théorème donné par M. *Appell* dans les *Acta mathematica* (t. I, p. 111). Nous donnons enfin une méthode pour former des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites, qui ne peuvent pas être continuées à l'extérieur du contour de l'aire.

La deuxième application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $\sin x$. Nous avons considéré déjà ces développements dans un mémoire publié dans le tome 116 de ce journal, et nous allons faire voir maintenant que la méthode pour déterminer les coefficients du développement y donnée est applicable aux fonctions qui admettent des pôles.

La dernière application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$. A cet égard je donne une démonstration, que je crois nouvelle, de la formule de *Fourier* pour le cas des fonctions de variables complexes périodiques, et encore une extension de cette formule, applicable dans le cas où la fonction considérée n'est pas périodique.

I.

Sur le développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$

1. Supposons: 1°. que $f(z)$ soit une fonction holomorphe dans une couronne A, limitée extérieurement par une courbe S et intérieurement par une courbe s; 2°. que $\Theta(z)$ soit une fonction holomorphe dans l'aire limitée par S, possédant à l'intérieur de ce contour un seul zéro a; 3°. que x soit l'affixe d'un point de l'intérieur de la couronne considérée; 4°. qu'on ait, pour tous les points z du contour S,

$$|\Theta(x)| < |\Theta(z)|,$$

et, pour tous les points du contour s,

$$|\Theta(x)| > |\Theta(z)|.$$

L'équation

$$\Theta(z) - \Theta(x) = 0$$

a, dans ce cas, une seule racine $z = x$ à l'intérieur de S, comme on le voit au moyen de l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\,dz + \Theta(x)\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta^2(z)}\,dz + \dots\right] = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)},$$

dont le premier et le dernier membres représentent respectivement le nombre des racines de l'équation considérée et celui des racines de l'équation $\Theta(z) = 0$ qui existent à l'intérieur de

S; et le théorème de *Cauchy* donne

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}-\int_s \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}\right].$$

Les intégrales, qui entrent dans cette formule, peuvent être développées suivant les puissances de $\Theta(x)$ au moyen des formules

$$\int_S \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta^n(x)\int_S \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)},$$

$$\int_s \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Theta^n(x)}\int_s f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz.$$

On a donc la formule

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,\Theta^n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\Theta^n(x)},$$

où

$$A_n=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)},$$

$$B_n=\frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz,$$

laquelle donne le développement de $f(x)$ suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$.

2. Si la fonction $f(z)$ a un nombre fini de points singuliers dans l'aire limitée par la courbe s et ces points sont des pôles, les intégrales qui entrent dans la formule précédente peuvent être obtenues de la manière suivante.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points et soient $c_1, c_2, \ldots, c_k, c$ des circonférences dont les centres sont les points d'affixes $b_1, b_2, \ldots, b_k, a$ et dont les rayons sont assez petits pour qu'ils n'existent pas deux à l'intérieur d'une même circonférence. On a

$$A_n=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)}=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{n\,\Theta^n(z)}=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m}\frac{f'(z)\,dz}{\Theta^n(z)}+\frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\Theta^n(z)},$$

$$B_n=\frac{1}{2i\pi}\int_S f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz=-\frac{1}{2ni\pi}\int_S f'(z)\,\Theta^n(z)\,dz=-\frac{1}{2ni\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} f'(z)\,\Theta^n(z)\,dz,$$

et par conséquent, α étant le degré de multiplicité du pôle b_m,

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a},$$

$$B_n = - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(f'(x)\,\Theta^n(x)\,(x-b_m)^{\alpha+1} \right) \right]_{x=b_m},$$

où $\theta(x) = \dfrac{\Theta(x)}{x-a}$.

Il peut arriver que a soit aussi un pôle de $f(x)$. Il est facile de voir qu' alors on doit calculer A_n au moyen de la formule

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{(n+\beta)! n} \left[\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a},$$

β représentant le degré de multiplicité du pôle a, et que la formule qui donne B_n doit être remplacée par la suivante:

$$B_n = - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (f'(x)\Theta^n(x)(x-b_m)^{\alpha+1} \right]_{x=b_m} - \frac{1}{(\beta-n)! n} \left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}} (f'(x)\theta^n(x)(x-a)^{\beta+1-n}) \right]_{x=a},$$

quand $n \overline{\overline{<}} \beta$.

Les formules antérieures ne donnent pas les valeurs de A_0, mais on peut les trouver au moyen de la formule

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{c} \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)},$$

qui donne

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \left(\frac{f(x)\,\Theta'(x)\,(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)} \right) \right]_{x=b_m} + f(a),$$

quand a est un point ordinaire de $f(x)$, et

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\left(\frac{f(x)\,\Theta'(x)\,(x-b_m)^{\beta}}{\Theta(x)}\right)\right]_{x=b_m} + \frac{1}{\beta!}\left[\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}\left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-a)^{\beta}}{\theta(x)}\right)\right]_{x=a},$$

quand a est un pôle de $f(x)$.

3. Considérons l'équation

$$\Theta(x) = (x-a)\,\theta(x) = t,$$

où t représente un nombre donné tel qu'il soit, le long de S, $|\Theta(z)| > |t|$ et, le long de s, $|\Theta(z)| < |t|$. L'équation $\Theta(x) = t$ a alors une seule racine dans la couronne limitée par les courbes S et s; on voit, en effet, au moyen des égalités

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-t} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\,dz + t\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta^2(z)}\,dz + \ldots\right] = 1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-t} = -\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{1}{t}\int_s \Theta'(z)\,dz + \frac{1}{t^2}\int_s \Theta'(z)\,\Theta^2(z)\,dz + \ldots\right] = 0,$$

que l'équation considérée a une racine à l'intérieur de S et qu'elle n'a aucune à l'intérieur de s.

Cela posé, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la couronne limitée par S et s, la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{t^n},$$

où A_n et B_n représentent des coefficients qui sont donnés par les formules trouvées antérieurement, donne le développement de la fonction $f(x)$ de la racine considérée suivant les puissances de t.

Considérons, par exemple, l'équation de *Kepler*

$$x = a + e\sin x,$$

et soit $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$.

On a alors

$$A_0 = -\frac{\cos a}{\sin a},$$

$$A_n = -\frac{1}{(n+1)!\,n} \cdot \frac{d^{n+1}(\sin^n a)}{da^{n+1}}, \qquad (n > 0)$$

$$B_1 = \frac{1}{\sin a}, \quad B_2 = B_3 = \ldots = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{\cos a}{\sin a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!\,n} \cdot \frac{d^{n+1}(\sin^n a)}{da^{n+1}} + \frac{1}{e \sin a}.$$

II.

Sur les séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$.

4. Pour faire une première application de la doctrine antérieure, considérons les développements ordonnés suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$, a et b étant deux nombres donnés.

Pour étudier ces développements, il faut chercher deux courbes S et s telles que, pour tout point z de S et pour tout point x à l'intérieur de la couronne qu'elles limitent, on ait

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| < \left|\frac{z-a}{z-b}\right|,$$

et, pour tout point z de s et pour les mêmes valeurs de x, ou ait

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| > \left|\frac{z-a}{z-b}\right|.$$

On est ainsi conduit à considérer les courbes données par l'équation

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \mathrm{C},$$

C étant une constante, ou, en posant $z = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$, $a = \alpha + i\beta$, $b = \alpha' + i\beta'$,

$$(1.) \qquad (\mathrm{X}-x_1)^2 + (\mathrm{Y}-y_1)^2 = \frac{\mathrm{C}^2\,[(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2]}{(1-\mathrm{C}^2)^2},$$

où

$$(2.)\qquad x_1=\frac{\alpha-\alpha' C^2}{1-C^2},\quad y_1=\frac{\beta-\beta' C^2}{1-C^2}.$$

Cette équation représente des circonférences dont les centres (x_1, y_1) sont placés sur la droite qui passe par les points dont les affixes sont a et b.

Aux valeurs que prend C^2, quand il varie depuis 0 jusqu'à 1, il correspond un ensemble de circonférences dont les rayons varient depuis 0 jusqu'à l'infini et dont les centres varient depuis le point (α, β), qui représente a et qui correspond à $C=0$, jusqu'à l'infini, en restant toujours du même côté du point (α, β). Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs inférieurs de C^2, et le point dont l'affixe est a, est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

Aux valeurs de C^2 comprises entre ∞ et 1 correspond un autre ensemble de circonférences dont les rayons sont compris entre 0 et ∞ et dont les centres sont compris entre le point dont l'affixe est b, qui correspond à $C^2=\infty$, et l'infini, en restant tous du côté opposé, par rapport à (α, β), de ceux des circonférences du premier ensemble. Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs supérieures de C^2, et le point dont l'affixe est b est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

En cherchant les points d'intersection de la droit dont l'équation est

$$\frac{Y-\beta}{y_1-\beta}=\frac{X-\alpha}{x_1-\alpha},$$

laquelle passe par les points a et b, avec les circonférences représentées par l'équation (1.), on trouve pour les valeurs des abscisses x' et x'' de ces points

$$x'=\frac{\alpha-C\alpha'}{1-C},\quad x''=\frac{\alpha+C\alpha'}{1+C},$$

et on voit qu'elles tendent la première vers l'infini et la seconde vers $\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, quand C^2 tend vers l'unité. Donc les deux ensembles de circonférences représentées par l'équation (1.) sont séparés par une droit K, perpendiculaire à la droite des centres, qui coupe cette droite dans un point équidistant de (α, β) et (α', β'), et les circonférences des deux ensembles tendent vers la droite K quand C^2 tend vers l'unité. On peut même voir que la droit K est le lieu des points où $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=1$.

5. De ce qu'on vient de démontrer dans les n^{os}. précédents, on conclut que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans une couronne limitée par deux des circonférences représentées par les points de l'intérieur de cette couronne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^n, \tag{3.}$$

A_n et B_n étant des constantes qu'on détermine par la méthode donnée dans les n.^{os} 1 et 2.

Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est holomorphe dans celle des moitiés, dans lesquelles la droite K divise le plan, qui contient le point a, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n.$$

C'est ce qu'il arrive dans le cas de la fonction $\log x$, dont le développement suivant les puissances de $\dfrac{x-a}{x+a}$, qui est bien connu, peut être obtenu de la manière suivante.

On a

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{(z-b)^n}{z(z-a)^n}\,dz = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{-1}(z-b)^n\right)\right]_{z=a}.$$

Mais on trouve au moyen de la formule de *Leibnitz*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = \frac{n!\,b^n}{x^{n+1}},$$

et par conséquent

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^{n-1}(x-b)\right) = \frac{(n-1)!}{x}\cdot\frac{b^{n-1}}{x^{n-1}}(x-b) + (n-1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^{-1}(x-b)^{n-1}\right).$$

Donc

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = (n-1)!\,\frac{x-b}{x}\left[\left(\frac{b}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{b}{x}\right)^{n-2} + \ldots + 1\right] = \frac{(n-1)!}{x^n}(x^n - b^n).$$

On a donc

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{a^n - b^n}{a^n}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n.$$

En posant $b = -a$ il vient la formule connue

$$\log x = \log a + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2m+1},$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de celle des deux moitiés, dans lesquelles la perpendiculaire à la droite qui passe par les points d'affixes a et $-a$ divise le plan, qui contient le point a.

6. Voici une question qui se présente maintenant. Étant données deux circonférences dans le plan de représentation des x, l'une placée à l'intérieur de l'autre, et une fonction $f(x)$ holomorphe dans la couronne limitée par ces circonférences, est-il toujours possible de former une série de la forme (3.) qui la représente dans la couronne considérée?

Supposons premièrement que le centre de la circonférence extérieure coïncide avec l'origine des coordonnées, et soient R_1 et R_2 les rayons des circonférences extérieure et intérieure, x' et y' les coordonnées du centre de celle-ci.

Pour résoudre la question considérée il faut voir si les deux circonférences données sont comprises entre celles que représente l'équation (1.), et, par conséquent, s'il existe un système de valeurs réelles de $C_1^2, C_2^2, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$, telles qu'il soit

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha = \alpha' C_1^2, \quad \beta = \beta' C_1^2, \\ &\alpha - \alpha' C_2^2 = (1 - C_2^2)\, x', \quad \beta - \beta' C_2^2 = (1 - C_2^2)\, y', \end{aligned}\right.$$

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{C_1^2\left[(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2\right]}{(1-C_1^2)^2}, \\ R_2^2 &= \frac{C_2^2\left[(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2\right]}{(1-C_2^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

Or les quatre premières équations donnent

$$\alpha' = \frac{1-C_2^2}{C_1^2 - C_2^2}\, x', \quad \beta' = \frac{1-C_2^2}{C_1^2 - C_2^2}\, y',$$

et les deux dernières donnent ensuite

$$R_1^2 = \frac{C_1^2 (1-C_2^2)^2}{(C_1^2 - C_2^2)^2}(x'^2 + y'^2), \quad R_2^2 = \frac{C_2^2 (1-C_1^2)^2}{(C_1^2 - C_2^2)^2}(x'^2 + y'^2),$$

et par conséquent, en posant $R_1 - R_2 = k$, $\frac{R_1}{R_2} = m$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \rho$,

$$k = \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2}\rho, \quad m = \frac{C_1(1 - C_2^2)}{C_2(1 - C_1^2)}.$$

En éliminant C_1^2 et C_2^2 entre ces équations, on trouve premièrement

$$\text{(6.)} \qquad C_1 = \frac{\rho - C_2 k}{k - C_2 \rho},$$

et ensuite

$$k\rho(C_2^4 - 1) + [m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2] C_2 (C_2^2 - 1) = 0,$$

ou

$$k\rho(C_2^2 + 1) + C_2[m(\rho^2 - k^2) - k^2 - \rho^2] = 0.$$

Cette équation donne pour C_2 deux valeurs, qui sont réelles quand on a

$$(\rho^2 - k^2)[\rho^2(m-1)^2 - k^2(m+1)^2] > 0.$$

Or, comme la circonférence dont le rayon est R_2 est placée à l'intérieur de celle dont le rayon est R_1 et comme ρ représente la distance des centres, on a

$$\rho < R_1 - R_2, \quad \rho < R_1 + R_2,$$

et par conséquent

$$\rho < k, \quad \rho(m-1) < k(m+1).$$

Les deux valeurs considérés sont donc réelles.

On peut encore remarquer que ces deux racines sont réciproques; soient donc représentées par t et $\frac{1}{t}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (6.) il vient, pour déterminer C_1,

$$C_1 = \frac{\rho - tk}{k - t\rho} = v, \quad C_1 = \frac{t\rho - k}{tk - \rho} = \frac{1}{v},$$

et on voit que les deux valeurs de C_1 sont aussi réciproques l'une de l'autre.

*

En substituant enfin les valeurs qu'on vient de trouver pour C_1 et C_2 dans les équations (4.) on obtient les valeurs de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. On trouve ainsi, en posant $C_1 = v$, $C_2 = t$,

$$\alpha' = \frac{1-t^2}{v^2-t^2} x', \quad \beta' = \frac{1-t^2}{v^2-t^2} y',$$

$$\alpha = \frac{v^2(1-t^2)}{v^2-t^2} x', \quad \beta = \frac{v^2(1-t^2)}{v^2-t^2} y',$$

et, en posant $C_1 = \frac{1}{v}$, $C_2 = \frac{1}{t}$,

$$\alpha' = \frac{v^2(t^2-1)}{t^2-v^2} x', \quad \beta' = \frac{v^2(t^2-1)}{t^2-v^2} y',$$

$$\alpha = \frac{t^2-1}{t^2-v^2} x', \quad \beta = \frac{t^2-1}{t^2-v^2} y'.$$

Si l'on permute dans le premier système de formules α et α', β et β', on obtient le second. Ces formules ne déterminent donc que deux points (α, β), (α', β'), et ces points représentent les nombres a et b.

De tout ce qui précède on conclut que les circonférences données sont comprises entre les circonférences réelles représentées par les équations (1.) et (2.), et qu'il existe, par conséquent, une série de la forme (3.) qui représente, dans la couronne limitée par ces circonférences, la fonction donnée $f(x)$. Les valeurs des nombres a et b, qui entret dans cette série, sont données par les formules qu'on vient d'obtenir, les valeurs des coefficients sont données par les formules obtenues dans les n^{os}. 1 et 2.

Nous avons supposé jusqu'ici que le centre de la circonférence extérieure coïncidait avec l'origine des coordonnées. Si le centre de cette circonférence est le point d'affixe λ, on peut poser $x = x' + \lambda$, développer la fonction $f(x'+\lambda)$ suivant les puissances de $\frac{x'-a}{x'-b}$ et remplacer dans le résultat x' par $x - \lambda$.

Il convient encore de remarquer que, dans le cas limite où le cercle intérieur se réduit à un point (x', y'), c'est-à-dire, dans le cas où la fonction $f(x)$ est holomorphe dans un cercle donné, le point (x', y') de son intérieur excepté, on a, en premier lieu, $\alpha = x'$, $\beta = y'$, $C_2 = 0$, et ensuite

$$C_1^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{R_1^2}, \quad \alpha' = \frac{R_1^2}{x'^2+y'^2} x', \quad \beta' = \frac{R_1^2}{x'^2+y'^2} y'.$$

Les constantes a et b, qui entrent dans le développement de $f(x)$, sont alors données par les formules

$$a = x' + iy', \quad b = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2}(x' + iy'));$$

le point b est donc l'inverse de a par rapport au centre du cercle donné.

7. Pour faire une première application de la doctrine antérieure considérons une aire A limitée intérieurement par des arcs de circonférence $s_1, s_2, \ldots, s_k$, limitée extérieurement, dans une direction, par une droite K, qui ne coupe pas ces arcs, et infinie dans les autres directions; et supposons que les circonférences auxquelles appartiennent les arcs considérés ne coupent pas l'aire A et que $f(x)$ soit une fonction holomorphe dans cette aire. Prenons à l'intérieur de A un point d'affixe a et sur la droite perpendiculaire à K, tirée par ce point, un autre point d'affixe b tel que les distances des deux points à K soient égales. Tirons ensuite une des circonférences représentées par l'équation $\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \text{const.}$, dont le rayon soit assez grand et le centre assez éloigné de la droite K pour contenir à l'intérieur les arcs $s_1, s_2, \ldots$.

Cela posé, nous avons, C représentant cette circonférence et x l'affixe d'un point de l'intérieur de l'aire limitée par C et par $s_1, s_2, \ldots$,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} - \sum_{m=1}^{k}\int_{s_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}\right],$$

où $\Theta(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

Mais

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b},$$

$$\int_C \frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n,$$

$$\int_{s_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \int_{s_m}\frac{f(z)\,dz}{z-x} - \int_{s_m}\frac{f(z)\,dz}{z-b} = -\int_{s_m}\frac{f(z)\,dz}{(x-c_m)\left[1-\frac{z-c_m}{x-c_m}\right]} - \int_{s_m}\frac{f(z)\,dz}{z-b},$$

où $c_1, c_2, \ldots$ représentent les affixes des centres de $s_1, s_2, \ldots$.

En remarquant maintenant qu'on a $|z-c_m| < |x-c_m|$, le long de s_m, on voit que la première des intégrales, qui entrent dans le dernier membre de cette égalité, peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{z-c_m}{x-c_m}$, et qu'on a par conséquent

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{s_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}=\mathrm{G}\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

$\mathrm{G}\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$ représentant, suivant l'usage, une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-c_m}$.

Nous avons donc la formule

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{A}_n\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n+\sum_{m=1}^{k}\mathrm{G}_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire limitée par C et par les arcs s_1, s_2, s_3, ...

Les valeurs de A_n sont données par la formule

$$\mathrm{A}_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)}=\frac{a-b}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{f(z)\,(z-b)^{n-1}\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

laquelle fait voir que ces valeurs ne changent pas quand on remplace la circonférence C par les autres circonférences représentées par l'équation $\left|\frac{x-a}{x-b}\right|=\text{const.}$, qui la contiennent à l'intérieur; et, comme ces circonférences tendent vers la droite K, on peut énoncer le théorème suivant:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée intérieurement par des arcs de cercle et extérieurement par une droite peut être développée en série de la forme suivante:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{A}_n\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n+\sum_{m=1}^{k}\mathrm{G}_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de cette aire.

Il est facile de voir que cette formule a encore lieu lorsque les circonférences antérieures se reduisent à leurs centres.

8. Une autre question qui mène à des séries de la forme considérée est celle du développement des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites.

Soient K_1, K_2, K_3, ... des droites qui limitent une aire A donnée, mais ne le coupent pas, x un point de son intérieur et $f(x)$ la fonction considérée. Par le point b de l'intérieur de A tirons des droites perpendiculaires à K_1, K_2, K_3, ... et soient a_1, a_1, a_3, ... des points de ces perpendiculaires tels que leurs distances à K_1, K_2, ... soient respectivement égales aux distances de b aux mêmes droites.

On a, en vertu du théorème de *Cauchy,*

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2i\pi}\int_{K_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)},$$

où $\Theta(z)=\dfrac{z-a}{z-b}$.

Mais, comme on a

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)}=\frac{1}{z-x}-\frac{1}{z-b},$$

on voit que la fonction $\dfrac{f(z)\,\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)}$ est indépendante de a, et qu'on peut par conséquent écrire, en rendant explicite la constante a qui entre dans la fonction $\Theta(x)$

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2i\pi}\int_{K_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z,a_m)\,dz}{\Theta(z,a_m)-\Theta(x,a_m)}.$$

En remarquant maintenant qu'on a

$$\left|\frac{x-b}{x-a_m}\right|<\left|\frac{z-b}{z-a_m}\right|$$

pour tous les points x de l'intérieur de l'aire A et pour tous les points z de la droite K_m, on conclut que l'intégrale

$$\int_{K_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z,a_m)\,dz}{\Theta(z,a_m)-\Theta(x,a_m)}$$

peut être développée en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\dfrac{x-b}{x-a_m}$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Toute fonction $f(x)$ holomorphe dans une aire limitée par des droites, qui ne la coupent pas, est développable en série de la forme

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n,$$

quand x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

9. On peut démontrer, au moyen de considérations analogues à celles qu'on vient d'employer pour démontrer les théorèmes antérieurs, le théorème suivant:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence est développable en série de la forme

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)+\Sigma P_m(x-c_m')+\Sigma G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$$

(c_1', c_2', ... représentant les centres des arcs extérieurs, c_1, c_2, ... ceux des arcs intérieurs et x un point de l'intérieur de l'aire), *si ni les droites ni les circonférences considérées ne coupent pas l'aire.*

Ce théorème contient un théorème démontré par M. Appell dans les *Acta mathematica* (t. I, p. 111).

10. Nous avons supposé jusqu'ici que b était l'affixe d'un point de l'aire A. On peut trouver, au moyen de la même méthode, une formule applicable lorsque b est l'affixe d'un point de l'extérieur de l'aire considérée. Si l'on représente par a_m' les valeurs de a_m qui sont les affixes de points du plan placés du même côté que l'aire A, par rapport aux droites K_m, et par a_m'' les autres valeurs de a_m, on a alors

$$f(x)=\sum_{m=1}^{k'}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m''}\right)^n+\sum_{m=1}^{k''}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(m)}\left(\frac{x-a_m'}{x-b}\right)^n+\Sigma P_m(x-c_m')+\Sigma G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right).$$

11. Une conséquence qu'on tire des théorèmes qu'on vient d'énoncer, laquelle nous ferons ici remarquer, c'est que les fonctions elliptiques peuvent être développées, d'une infinité de manières différentes, en des séries simples, dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, lesquelles sont convergentes dans un parallélogramme des périodes.

Ainsi, par exemple, dans le cas de la fonction $p(x)$, nous avons, en considérant le parallélogramme des périodes dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées, en posant $b=0$ et en représentant par c une circonférence infiniment petite avec le centre dans l'origine,

$$p(x)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{K_m}\frac{p(z)\,\Theta'(z,a_m)\,dz}{\Theta(z,a_m)-\Theta(x,a_m)}-\frac{1}{2i\pi}\int_c\frac{p(z)\,dz}{z-x}+\frac{1}{2i\pi}\int_c\frac{p(z)\,dz}{z},$$

où $\Theta(z,a_m)=\dfrac{z-a_m}{z}$; mais $a_1=-a_3$, $a_2=-a_4$, et

$$p(z)=\frac{1}{z^2}+b_0z^2+\ldots;$$

donc

$$p(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^{(1)}\left(\frac{x}{x-a_1}\right)^n+A_n^{(2)}\left(\frac{x}{x-a_2}\right)^n+A_n^{(3)}\left(\frac{x}{x+a_1}\right)^n+A_n^{(4)}\left(\frac{x}{x+a_2}\right)^n\right],$$

où

$$A_n^{(1)}=-\frac{a_1}{2i\pi}\int_{K_1}\frac{p(z)(z-a_1)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(2)}=-\frac{a_2}{2i\pi}\int_{K_2}\frac{p(z)(z-a_2)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(3)}=\frac{a_1}{2i\pi}\int_{K_3}\frac{p(z)(z+a_1)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(4)}=\frac{a_2}{2i\pi}\int_{K_4}\frac{p(z)(z+o_2)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}}.$$

Mais, en posant $z=-z'$, il vient

$$\int_{K_1}\frac{p(z)(z-a_1)^{n-1}}{z^{n+1}}\,dz=-\int_{K_3}\frac{p(z')(z'+a_1)^{n-1}}{z'^{n+1}}\,dz',$$

$$\int_{K_2}\frac{p(z)(z-a_2)^{n-1}}{z^{n+1}}\,dz=-\int_{K_4}\frac{p(z')(z'+a_2)}{z'^{n+1}}\,dz',$$

et par conséquent $A_n^{(1)}=A_n^{(3)}$, $A_n^{(2)}=A_n^{(4)}$.

Donc

$$p(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-a_1)^n}+\frac{A_n^{(1)}}{(x+a_1)^n}+\frac{A_n^{(2)}}{(x-a_2)^n}+\frac{A_n^{(2)}}{(x+a_2)^n}\right].$$

On peut encore écrire cette formule de la manière suivante:

$$p(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\left[A_n^{(1)}\log(x^2-a_1^2)+A_n^{(2)}\log(x^2-a_2^2)\right].$$

12. La fonction $f(x)$, considérée dans le n°. 9, peut encore être représentée, dans l'aire A, par un autre développement que nous allons trouver.

Remarquons, en premier lieu, qu'on voit, au moyen des égalités (1.) et (2.) du n°. 4, que, si l'on donne un point d'affixe $b=\alpha'+i\beta'$ et une circonférence dont le centre soit le point d'affixe $c_m=x'+iy'$ et dont le rayon soit R_m, on peut trouver un nombre $a_m=\alpha+i\beta$ tel que cette circonférence appartienne à l'ensemble de circonférences représentées par l'équation

$$\left| \frac{x - a_m}{x - b} \right| = \text{cost.};$$

cette valeur de a_m est donné par l'équation

$$a_m = \frac{R_m^2 (\alpha' + i\beta')}{(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2} + \frac{[(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2 - R_m^2](x' + iy')}{(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2}.$$

Cela posé, prenons, comme antérieurement, un point b à l'intérieur de l'aire considérée et faisons correspondre à chaque droite du contour et à chaque circonférence un point, qu'on détermine par le moyen indiqué dans le n°. 8, dans le cas des droites, et par le moyen qu'on vient d'indiquer, dans le cas des circonférences; soient a_1, a_2, a_3, ..., a_k les affixes de ces points. On a, représentant par s_1, s_2, ..., s_k les arcs de circonférence ou les segments de droite, qui forment le contour de l'aire, et par ε_m une quantité égale à $+1$, lorsque s_m fait partie du contour extérieur, et égale à -1, lorsqu'il fait partie du contour intérieur,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^{k} \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\, \Theta'(z)\, dz}{\Theta(z) - \Theta(x)},$$

ou, comme dans le n°. 8,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^{k} \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\, \Theta'(z, a_m)\, dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)},$$

où $\Theta(z, a_m) = \frac{z - a_m}{z - b}$. Mais on a, le long de s_m,

$$\left| \frac{x - b}{x - a_m} \right| < \left| \frac{z - b}{z - a_m} \right|.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{s_m} \frac{f(z)\, \Theta'(z, a_m)\, dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)}$$

peut être développée suivant les puissances entières et positives de $\frac{x - b}{x - a_m}$; et nous avons par conséquent le développement

$$f(x) = f(b) + \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x - b}{x - a_m} \right)^n,$$

convergent à l'intérieur de l'aire considérée.

Si b représente un point de l'extérieur de l'aire A, cette formule doit être remplacée par la suivaute:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a''_m}\right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a'_m}{x-b}\right)^n,$$

où a'_m représente les valeurs que prend a_m lorsque a_m et x sont tous deux à l'intérieur ou tous deux à l'extérieur de la circonférence à laquelle appartient l'arc s_m, et a''_m représente les autres valeurs de a_m.

13. Nous terminerons ce que nous avons à dire à l'égard des séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$ en faisant voir qu'on peut former, au moyen de ces séries, des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites ou par des droites et des arcs de circonférence, lesquelles ne peuvent pas être continuées à l'extérieur de cette aire.

Soit

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + \ldots \tag{7.}$$

une série convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, laquelle représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle (on connaît un grand nombre de séries qui sont dans ce cas); et soit K une droite qui passe par le milieu du segment de droite déterminé par deux points dont les affixes sont a et b et y soit perpendiculaire à ce segment. La série qu'on obtient en posant $X = \frac{x-a}{x-b}$, c'est-à-dire, la série

$$A_0 + A_1 \left(\frac{x-a}{x-b}\right) + A_2 \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + \ldots, \tag{8.}$$

est convergente dans celle des régions du plan de représentation des x, dans lesquelles le divise la droite K, qui contient le point d'affixe a. Elle représente donc, dans cette aire, une fonction holomorphe, et nous allons démontrer que cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire considérée.

Soit, en effet, u l'affixe d'un point de cette aire, voisin de K. Il existe une quantité positive ρ et une série

$$b_0 + b_1 (x-u) + b_2 (x-u)^2 + b_3 (x-u)^3 + \ldots, \tag{9.}$$

convergente dans le cercle de rayon ρ et de centre u, telle que la fonction définie par cette série et la fonction définie par la série (8.) coïncident dans la partie commune des aires de convergence des deux séries.

*

Mais, en posant

$$X = \frac{x-a}{x-b}, \quad A = \frac{u-a}{u-b},$$

la série antérieure se réduit à la suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{a-b}{A-1}\right)^n \left(\frac{X-A}{X-1}\right)^n, \tag{10.}$$

laquelle est donc convergente, lorsque

$$\left|\frac{X-A}{X-1}\right| < \rho \left|\frac{A-1}{a-b}\right| = \frac{\rho}{|u-b|},$$

c'est-à-dire, dans un cercle, qui existe dans le plan de représentation des X, lequel contient à l'intérieur le point A. Or, ce cercle doit être tout à l'intérieur du cercle de convergence de la série (7.), parce que la fonction définie par le série (10.) doit coïncider, dans le voisinage du point A, avec la fonction définie par (7.) et cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle. Le cercle de convergence de la série (9.) doit donc être aussi tout à l'intérieur de l'aire de convergence de (8.). Comme cette circonstance se donne, quelque petite que soit la distance du point d'affixe u à la droite K, on conclut que *la fonction définie par la série* (8.) *ne peut pas être continuée au delà de la droite* K.

Cela posé, soient: 1°. $K_1, K_2, K_3, \ldots$ des droites qui limitent une aire A, mais ne la coupent pas; 2°. a l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire; 3°. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ les affixes des points placés respectivement sur les perpendiculaires à $K_1, K_2, K_3, \ldots$, tirées par le point d'affixe a, dont les distances à ces droites-ci sont respectivement égales aux distances du point correspondant à a aux mêmes droites.

Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n, \ldots$$

sont respectivement convergentes, dans la moitié du plan déterminée par K_1 et a, par K_2 et a, etc., et les fonctions qu'elles représentent ne peuvent par être continuées au delà de ces droites.

Considérons maintenant la somme des séries précédentes:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n + \ldots.$$

Cette somme représente une fonction holomorphe dans l'aire A, et nous allons démontrer que cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de cette aire.

En effet, si cette fonction peut être continuée au delà de la droite K_1, par exemple, il existe un point d'affixe u et une série de la forme

$$b'_0 + b'_1(x-u) + b'_2(x-u)^2 + \dots,$$

convergente dans un cercle de rayon ρ et de centre d'affixe u, lequel coupe la droite, tels que les valeurs de la série coïncident avec les valeurs de S dans la partie commune des régions de convergence des deux développements. En approchant le point d'affixe u de la droite K_1, on peut tirer un autre cercle C_1 de rayon égal à ρ_1 et de centre d'affixe u_1, qui coupe encore K_1, qui soit à l'intérieur du premier et qui ne coupe pas les droites K_2, K_3, ...; et il existe encore une série de la forme

$$b''_0 + b''_1(x-u_1) + b''_2(x-u_1)^2 + \dots,$$

convergente dans ce cercle, dont les valeurs coïncident avec les valeurs de S dans la partie commune des régions de convergence des deux développements.

Comme le cercle C_1 est à l'intérieur des aires dans lesquelles les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n, \dots$$

sont convergentes, on a aussi, dans ce cercle

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n = c_0 + c_1(x-u_1) + c_2(x-u_1)^2 + \dots,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n = c'_0 + c'_1(x-u_1) + c'_2(x-u_1)^2 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On a donc aussi, dans le cercle considéré,

$$b''_0 + b''_1(x-u_1) + \dots - \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n + \dots\right] = d_0 + d_1(x-u_1) + d_2(x-u_2)^2 + \dots.$$

Or le premier membre de cette égalité coïncide avec $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n$ dans la partie du cercle C_1 qui est à l'intérieur de l'aire A. Donc la fonction définie par cette série peut être continuée au delà de K_1, ce qui est absurde. On conclut donc que la fonction définie par la série S ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire A.

14. On peut aussi former par ce moyen des fonctions holomorphes dans une aire donnée A, limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence, qui ne peuvent pas être continuées à l'extérieur de A.

Soient C_1, C_2, C_3, ... les circonférences auxquelles appartiennent les arcs qui forment le contour de A et K_1, K_2, K_3, ... les droites données, et supposons que ces droites et ces circonférences ne coupent pas l'aire A.

A chaque circonférence et à chaque droit il correspond deux nombres a_m et c_m (c_m étant égal à l'unité dans le cas des droites) tels qu'elle peut être représentée par l'équation

$$\left|\frac{x-b}{x-a_m}\right| = c_m. \tag{11.}$$

Cela posé, on voit comme antérieurement que, si la série (7.) représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'exterieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c_m^n}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n$$

représente une fonction holomorphe dans une aire, qui contient l'aire A, laquelle ne peut pas être continuée au delà de la droite ou de la circonférence représentée par l'équation (11.). La somme

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c_m^n}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n$$

représente donc la fonction qu'on voulait former.

L'aire A peut, en particulier, être limitée seulement à l'exterieur ou seulement à l'intérieur. Dans les cas où elle est limitée intérieurement, les fonctions qu'on obtient au moyen de la méthode précédente ont des *lacunes* limitées par des arcs de circonférence.

III.

Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$

15. Considérons maintenant les développements ordonnés suivant les puissances de $\sin x$. Nous avons déjà vu, dans un mémoire publié dans ce journal (t. CXVI, p. 14), que l'équation $|\sin x| = c$ représente des courbes fermées, lorsque $c \overline{\overline{<}} 1$, et nous y avons trouvé le développement des fonctions holomorphes dans l'aire limitée par une de ces courbes. Si la fonction $f(x)$ est holomorphe seulement dans la couronne limitée par deux des courbes considérées, on peut trouver son développement suivant les puissances positives et négatives de $\sin x$ au moyen des formules données dans le n°. 1. Alors, si la fonction n'a, à l'intérieur du contour s, qu'un nombre limité de points singuliers, les coefficients du développement sont donnés par les formules

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_n &= \mathrm{A}'_n + \mathrm{A}''_n, \\
\mathrm{A}'_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\cos z\, dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\, dz}{\sin^n z}, \\
\mathrm{A}''_n &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} \frac{f(z)\cos z\, dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} \frac{f'(z)\, dz}{\sin^n z}, \\
\mathrm{B}_n &= -\frac{1}{2ni\pi}\int_s f'(z)\sin^n z\, dz.
\end{aligned}
$$

A l'égard de A''_n et B_n nous n'avons rien à ajouter à ce qui résulte immédiatement de la théorie générale. Mais la méthode qui résulte de cette théorie pour le calcul de A'_n peut être remplacé, comme dans le cas considéré dans le mémoire rapporté, par une autre plus simple, qui résulte des égalités

$$\frac{1}{2(2\eta+1)i\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+1} z}=\frac{f^{(2\eta+1)}(0)+s_{2\eta+1}^{(1)}f^{(2\eta-1)}(0)+\ldots+s_{2\eta+1}^{(\eta)}f'(0)}{(2\eta+1)!},$$

$$\frac{1}{2.2\eta i\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^{2\eta} z}=\frac{f^{(2\eta)}(0)+S_{2\eta}^{(1)}f^{(2\eta-2)}(0)+\ldots+S_{2\eta}^{(\eta-1)}f''(0)}{(2\eta)!},$$

lesquelles sont une conséquence de l'analyse y donnée et ont lieu, lorsque la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point d'affixe 0. Nous rappelons qu'on représente par $s_{2n+1}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots,\ (2\eta+1)^2$$

pris m à m, et par $S_{2\eta}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots,\ (2\eta-2)^2$$

pris aussi m à m.

Si le point d'affixe 0 est un pôle de $f(x)$, dont le dégré de multiplicité est égal à β, on a, en posant $F(x)=f(x)\sin^\beta x$,

$$A'_n=\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\cos z\sin^\beta z}{\sin^{n+\beta+1} z}\,dz=\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+\beta+1} z}=\frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{n+\beta} z};$$

et, comme la fonction $F(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point d'affixe 0, les égalités qu'on vient d'écrire sont applicables à l'intégrale qui entre dans cette formule.

16. Pour faire une première application des formules précédentes considérons la fonction $\frac{1}{x}$. On a alors

$$A_n=\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\cos z\,dz}{z\sin^{n+1} z}=\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\sin z\cos z\,dz}{z\sin^{n+2} z}.$$

Mais, en posant $\frac{\sin z}{z}=F(z)$, il vient

$$F^{(2\eta)}(0)=(-1)^\eta.\frac{1}{2\eta+1},\quad F^{(2\eta+1)}(0)=0.$$

Donc

$$A_{2\eta+1} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{2\eta+3} z} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+2)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+2} z}$$

$$= \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{1}{2\eta+3} - \frac{S^{(1)}_{2(\eta+1)}}{2\eta+1} + \ldots \pm \frac{S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}}{3}\right];$$

$$A_{2\eta} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{2\eta+2} z} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+1)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+1} z} = 0.$$

On a aussi

$$B_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 1, \quad B_n = 0 \qquad (n > 1).$$

Donc nous avons la formule

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{1}{2\eta+3} - \frac{S^{(1)}_{2(\eta+1)}}{2\eta+1} + \ldots \pm \frac{S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}}{3}\right]\sin^{2\eta+1} x.$$

Cette formule a lieu pour toutes les valeurs de x qui sont représentées par les points de l'aire limitée par celui des ovales $|\sin x| = 1$ dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées.

17. Comme seconde application considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

On a

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\cos^2 z\,dz}{z\sin^{n+1} z} = \frac{1}{4i\pi}\int_c \frac{\sin 2z\cos z\,dz}{z\sin^{n+2} z},$$

ou, en posant $F(z) = \dfrac{\sin 2z}{2z}$,

$$A_n = \frac{1}{2i\pi(n+1)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{n+1} z}.$$

Mais, on a

$$F^{(2\eta)}(0) = (-1)^{\eta} \frac{2^{2\eta}}{2\eta+1}, \quad F^{(2\eta+1)}(0) = 0.$$

Donc

$$A_{2\eta+1} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+2)} \int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+2} z} = \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!} \left[\frac{2^{2(\eta+1)}}{2\eta+3} - S^{(1)}_{2(\eta+1)} \frac{2^{2\eta}}{2\eta+1} + \ldots \pm S^{(\eta)}_{2(\eta+1)} \frac{2^2}{3} \right],$$
$$A_{2\eta} = 0.$$

On a aussi $B_1 = 1$, $B_n = 0$ $(n > 1)$; et par conséquent nous avons la formule

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!} \left[\frac{2^{2(\eta+1)}}{2\eta+3} - S^{(1)}_{2(\eta+1)} \frac{2^{2\eta}}{2\eta+1} + \ldots \pm S^{(\eta)}_{2(\eta+1)} \frac{2^2}{3} \right] \sin^{2\eta+1} x.$$

IV.

Sur la série de *Fourier*.

18. L'intégrale considérée dans le n°. 1 contient comme cas particulier l'intégrale $\int \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}$, au moyen de laquelle on peut obtenir la série de *Fourier*.

Supposons que la fonction $f(x)$ admette la période 2ω, représentée géometriquement par la droite DA, qui fait un angle égal à l'argument de 2ω avec l'axe des abscisses et supposons que cette fonction soit holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites parallèles DA et CB. On trouve au moyen du théorème de *Cauchy*, en représentant par S le parallélogramme ABCD et par x l'affixe d'un point de l'intérieur de ce parallélogramme,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \int_S \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

ou, en remarquant que les parties de cette intégrale relatives aux droites AB et CD sont égales,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \left[\int_{BC} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_{DA} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} \right].$$

Cela posé, nous allons démontrer que, le long de la droite DA, est $\left| e^{\frac{i\pi z}{\omega}} \right| > \left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|$ et que,

*

le long de la droite CB, est $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|$. Considérons pour cela les lignes représentées par l'équation

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| = c,$$

c étant une constante positive quelconque, laquelle, en posant

$$z = x_1 + iy_1, \quad \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

peut être réduite à la forme suivante

$$e^{-\frac{\pi}{\rho}(y_1\cos\theta - x_1\sin\theta)} = c,$$

ou

$$y_1 = x_1 \operatorname{tang}\theta - \frac{\rho\log c}{\pi\cos\theta}.$$

On voit au moyen de cette équation que les points du plan de représentation de la variable z dans lesquels $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ prend une même valeur sont placés sur une même droite parallèle à DA. Pour trouver cette valeur, quand la droite est donnée, on doit chercher la valeur que prend $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ dans le point où la droite coupe l'axe des ordonnées. En posant pour cela $x_1 = 0$ et en représentant par y'_1 l'ordonnée de ce point, on voit que la valeur que $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ prend dans la droite, parallèle à DA, qui coupe l'axe des ordonnées dans le point y'_1, est égale à $e^{-\frac{\pi y'_1\cos\theta}{\rho}}$; et par conséquent que (l'angle θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$) cette quantité décroît, lorsque la droite considérée se déplace dans le sens des ordonnées positives. Nous avons donc, pour tous les points z de la droite DA et pour tous les points x de l'intérieur l'aire ABCD,

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| > \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

et, pour tous les points de la droite CB et pour les mêmes valeurs de x,

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|.$$

On a donc, le long de DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi z}{\omega}}} + \dots$$

et, le long de CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = -\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi x}{\omega}}} + \dots\right];$$

et par conséquent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{A}_n e^{\frac{ni\pi x}{\omega}},$$

où

$$\mathrm{A}_n = -\frac{1}{2\omega}\int_{\mathrm{DA}} e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)\,dz,$$

$$\mathrm{A}_{-n} = \frac{1}{2\omega}\int_{\mathrm{BC}} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)\,dz = \frac{1}{2\omega}\int_{\mathrm{DA}} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)\,dz.$$

On a donc, en représentant par l le segment DA (ou un segment égal pris sur une droite parallèle à DA comprise entre DA et BC) la formule de *Fourier:*

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_l f(z)\,dz + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_l f(z)\cos\frac{n(x-z)\pi}{\omega}\,dz\right].$$

19. La formule de *Fourier* est encore susceptible, dans le cas des variables complexes, d'une extension que nous allons indiquer. Supposons, en effet, maintenant: 1°. que la fonction $f(z)$ ne soit pas périodique, mais qu'elle soit holomorphe dans le voisinage du segment de droit AB, c'est-à-dire dans l'aire limitée par un parallélogramme $\mathrm{P\,P_1\,Q_1\,Q}$ dont deux côtes $\mathrm{PP_1}$ et $\mathrm{QQ_1}$ sont parallèles et égaux à AB; 2°. que ce segment soit représenté par le nombre complexe 2ω et que a soit l'affixe du point A. On a, comme antérieurement, en représentant par S le contour du parallélogramme,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \int_S \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}.$$

Soient maintenant u l'affixe d'un point de AP, v l'affixe d'un point de AQ et x l'affixe d'un point de AB. On peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_a^u \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_u^{u+2\omega} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_{u+2\omega}^{a+2\omega} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right.$$

$$\left. - \int_a^v \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \int_v^{v+2\omega} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \int_{v+2\omega}^{a+2\omega} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right],$$

et par conséquent

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\lim_{u=a} \int_u^{u+2\omega} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \lim_{v=a} \int_v^{v+2\omega} \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right],$$

ou, en supposant, comme antérieurement, que l'argument de 2ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et en ayant égard à l'inégalité

$$\left| e^{\frac{i\pi z}{\omega}} \right| > \left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes u et $u + 2\omega$, et à l'inégalité

$$\left| e^{\frac{i\pi z}{\omega}} \right| < \left| e^{\frac{i\pi x}{\omega}} \right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes v et $v+2\omega$,

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\left[\lim_{u=a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz+\lim_{v=a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_v^{v+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz\right].$$

Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz,$$

et remarquons que, comme on a

$$\int f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz=\frac{\omega i}{n\pi} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}+\frac{\omega^2}{n^2\pi^2} f'(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}-\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\int f''(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz,$$

on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\omega i}{\pi}[f(u+2\omega)-f(u)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}+\frac{\omega^2}{\pi^2}[f'(u+2\omega)-f'(u)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} e^{-\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}$$
$$-\frac{\omega^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz.$$

Or la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{-\frac{ni\pi(a-x)}{\omega}},$$

ou, puisque les arguments de $x-a$ et de ω sont égaux,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi|a-x|}{|\omega|}},$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|}+i\sin\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|}\right]$$

est convergente, suivant un théorème connu (Picard, *Traité d'Analyse,* t. I, p. 231); et on voit par conséquent, au moyen d'un théorème donné par *Abel* pour le cas des séries de termes réels et dont M. *Picard* a fait l'extension au cas des séries de termes complexes (l. c., t. II, p. 73), qu'est

$$\lim_{u=a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{ni\pi(x-u)}{\omega}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{ni\pi(x-a)}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière

$$\lim_{u=a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{\frac{ni\pi(x-u)}{\omega}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{\frac{ni\pi(x-a)}{\omega}}$$

Comme on a

$$\left|\int_u^{u+2\omega}f''(z)\,e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}}dz\right|<\mathrm{M}\,|\,2\omega\,|,$$

où M représente la plus grande valeur que prend $\left|f''(z)\,e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}}\right|$ dans le parallélogramme $\mathrm{P\,P_1\,Q_1\,Q}$, on voit que les valeurs des termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|\int_u^{u+2\omega}f''(z)\,e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}}dz\right|$$

sont inférieures aux valeurs des termes correspondants de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{M}\,|\,2\omega\,|}{n^2}$, quelle que soit la valeur de u, et par conséquent que la série considérée est uniformement convergente dans le voisinage du point A; nous avons par conséquent

$$\lim_{u=a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_u^{u+2\omega}f''(z)\,e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_a^{a+2\omega}f''(z)\,e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}}dz.$$

De tout ce qui précède on tire l'égalité

$$\lim_{u=a}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_a^{a+2\omega}f(z)\,e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz;$$

et de la même manière on trouve la suivante:

$$\lim_{v=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_v^{v+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_a^{a+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz.$$

Il vient donc la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_a^{a+2\omega} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz + \sum_{n=1} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_a^{a+2\omega} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz\right],$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_a^{a+2\omega} f(z)\, dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{a+2\omega} f(z) \cos\frac{n\pi(x-z)}{\omega}\, dz\right],$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de AB.

IV

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE

(Bulletin des sciences mathématiques — Paris, 1890, 2.e série t. XIV)

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE

Permettez, Monsieur, que je prenne la liberté de vous présenter quelques conséquences relatives aux développements des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$ et $\cos(x-a)$ que je viens de déduire de la considération de l'intégrale curviligne

$$J=\int_s \frac{f(z)\sin^m(x-a)\,dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)}.$$

Je prendrai pour contour de l'intégration le rectangle, dont le centre est le point qui a pour affixe a, et dont les côtés sont deux droites parallèles à l'axe des abscisses, égales à $2k$ (où $2k \leqq \pi$), et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, égales à $2l$; et je supposerai que la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par ce contour, et que x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

1. Cela posé, j'applique à l'intégrale J le théorème de Cauchy qui donne l'expression de l'intégrale des fonctions uniformes, prise le long d'un contour fermé, et je trouve

$$J=2i\pi(A+B),$$

en représentant par A et B les résidus de la fonction

$$F(z)=\frac{f(z)\sin^m(x-a)}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)},$$

par rapport à x et à a, qui sont les racines de $\sin(z-x)=0$ et $\sin(z-a)=0$ qui sont représentées par des points de l'intérieur de l'aire considérée.

Le résidu de $F(z)$, par rapport à x, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$F(x+h) = \frac{f(x+h)\sin^m(x-a)}{\sin h \sin^m(x-a+h)},$$

en série ordonnée suivant les puissances de h; et nous avons, par conséquent,

$$A = f(x).$$

Le résidu B de $F(z)$, par rapport à a, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$F(a+h) = \frac{f(a+h)\sin^m(x-a)}{\sin(a-x+h)\sin^m h} = \frac{f(a+h)\sin^m(x-a)}{h^m \sin(a-x+h)\,\frac{\sin^m h}{h^m}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de h. Mais nous avons, en développant les trois fonctions

$$f(a+h), \quad \sin^{-1}(a-x+h), \quad \frac{h^m}{\sin^m h}$$

en série ordonnée suivant les puissances de h,

$$F(a+h) = \frac{1}{h^m}\Sigma\frac{h^u}{u!}f^u(a)\sin^m(x-a) \times \Sigma\frac{h^v}{v!}\left[\frac{d^v\sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0 \times \Sigma\frac{h^w}{w!}\left[\frac{d^w(h\,\text{cosèc}\,h)^m}{dh^w}\right]_0.$$

Donc on a

$$B = \Sigma\frac{\sin^m(x-a)}{u!\,v!\,w!}f^u(a)\left[\frac{d^v\sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0\left[\frac{d^w(h\,\text{cosèc}\,h)^m}{dh^w}\right]_0,$$

où la somme représentée par Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives ou nulles de l'équation

$$u+v+w = m-1.$$

En formant maintenant les dérivées successives de $\sin^{-1}(x-a)$, je trouve

$$\left[\frac{d^v\sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0 = -\frac{d^v\sin^{-1}(x-a)}{dx^v} = \frac{B_0 + B_1\sin^2(x-a) + \ldots + B_{\frac{1}{2}v}\sin^v(x-a)}{\sin^{v+1}(x-a)},$$

si v est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^v \sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0 = \frac{\cos(x-a)\left[B'_0 + B'_1 \sin^2(x-a) + \ldots + B'_{\frac{1}{2}(v-1)} \sin^{v-1}(x-a)\right]}{\sin^{v+1}(x-a)},$$

si v est un nombre impair.

Donc l'expression du résidu B a la forme suivante

$$\begin{aligned} B = &-[K_1 \sin(x-a) + K_3 \sin^3(x-a) + \ldots + K_{m-1} \sin^{m-1}(x-a)] \\ &-[L_0 + L_2 \sin^2(x-a) + \ldots + L_{m-2} \sin^{m-2}(x-a)] \cos(x-a), \end{aligned}$$

si m est un nombre pair, et la forme suivante

$$\begin{aligned} B = &-[K'_0 + K'_2 \sin^2(x-a) + \ldots + K'_{m-1} \sin^{m-1}(x-a)] \\ &-[L'_1 \sin(x-a) + L'_3 \sin^3(x-a) + \ldots + L'_{m-2} \sin^{m-2}(x-a)] \cos(x-a), \end{aligned}$$

si m est un nombre impair.

Nous avons donc les formules suivantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = &\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n} \sin^{2n}(x-a) \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \sin^m(x-a)\, dz}{\sin(z-x) \sin^m(z-a)}, \end{aligned} \right.$$

si m est pair;

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = &\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n} \sin^{2n}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-3)} L'_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \sin^m(x-a)\, dz}{\sin(z-x) \sin^m(z-a)}, \end{aligned} \right.$$

si m est impair.

2. *Détermination des coefficients qui entrent dans les formules* (1) *et* (2). — La méthode que nous venons d'employer pour obtenir les formules (1) et (2) ne donne pas facilement les coefficients K et L, et ne fait pas voir que ces coefficients sont indépendants de m. Nous allons donc les obtenir d'une autre manière qui fait voir cette circonstance importante.

Dans ce but, je remarque que la fonction $\sin^m(x-a)$ et ses dérivées, par rapport à x, jusqu'à l'ordre $m-1$, s'annulent pour $x=a$ et, par conséquent, que les fonctions

$$\Theta(x)=\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a)+\cos(x-a)\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n}\sin^{2n}(x-a)$$

et

$$\Theta_1(x)=\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n}\sin^{2n}(x-a)+\cos(x-a)\sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-3)} L'_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a)$$

doivent satisfaire aux conditions suivantes:

$$\begin{array}{llll}\Theta\ (a)=f(a), & \Theta'(a)=f'(a), & \ldots, & \Theta^{(m-1)}(a)=f^{(m-1)}(a),\\ \Theta_1(a)=f(a), & \Theta'_1(a)=f'(a), & \ldots, & \Theta_1^{(m-1)}(a)=f^{(m-1)}(a).\end{array}$$

On peut obtenir, au moyen de ces équations, les coefficients K et L, et l'on trouve ainsi dans le cas de la première formule:

$$\tag{3}\left\{\begin{array}{l}L_0=f(a),\\ K_1=f'(a),\\ L_2=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f''(a),\\ K_3=\frac{1}{6}[f'(a)+f'''(a)],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

et dans le cas de la seconde:

$$\tag{4}\left\{\begin{array}{l}K'_0=f(a),\\ L'_1=f'(a),\\ K'_2=\frac{1}{2}f''(a),\\ L'_3=\frac{1}{6}[f'''(a)+4f(a)],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

3. *Séries qui résultent de* (1) *et* (2). — Les formules (1) et (2) donnent deux développements de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$, si l'intégrale curviligne

$$J=\int_s \frac{f(z)\sin^m(x-a)\,dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)}$$

tend vers zéro quand m tend vers l'infini. Or on trouve, en employant un théorème de M. Darboux,

$$J = \theta\sigma \frac{f(\zeta)\sin^m(x-a)}{\sin(\zeta - x)\sin^m(\zeta - a)},$$

où ζ représente l'affixe d'un point du contour de l'intégration, σ le périmètre de ce contour et θ un facteur dont le module ne peut pas dépasser l'unité. Donc, si l'on a

$$\text{(A)} \qquad |\sin(x-a)| < |\sin(z-a)|,$$

en tous les points du contour de l'intégration, l'intégrale J tend vers zéro quand m tend vers l'infini et les formules (1) et (2) mènent à deux développements de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$.

Nous allons étudier la condition (A). Si l'on pose

$$z = x_1 + iy_1, \quad a = \alpha + i\beta,$$

nous avons

$$\sin(z-a) = \sin(x_1 - \alpha)\cos i(y_1 - \beta) + i\cos(x_1 - \alpha)\frac{\sin i(y_1 - \beta)}{i}$$

et par conséquent, en représentant par M le module de $\sin(z-a)$,

$$M^2 = \sin^2(x_1 - \alpha)\cos^2 i(y_1 - \beta) - \cos^2(x_1 - \alpha)\sin^2 i(y_1 - \beta).$$

Nous allons, maintenant, chercher la plus petite valeur que peut prendre M^2 quand z décrit le rectangle qui constitue le contour de l'intégration, c'est-à-dire le rectangle formé par les droites dont les équations sont

$$x_1 = \alpha - k, \quad x_1 = \alpha + k, \quad y_1 = \beta - l, \quad y_1 = \beta + l.$$

Pour trouver le minimum des valeurs que prend M^2, quand z décrit la droite $x_1 = \alpha - k$, nous devons chercher la valeur de y_1 qui rend minimum l'expression dans laquelle se transforme M^2 quand on y pose $x_1 = \alpha - k$, c'est-à-dire l'expression

$$\sin^2 k \cos^2 i(y_1 - \beta) - \cos^2 k \sin^2 i(y_1 - \beta).$$

On trouve, de cette manière, en représentant par m_1^2 ce minimum,

$$m_1^2 = \sin^2 k,$$

et qu'il correspond à $y_1 = \beta$, c'est-à-dire à un point du rectangle considéré.

On trouve, de la même manière, que le minimum des valeurs que prend M^2, quand z décrit la droite $x_1 = \alpha + k$, est encore égal à $\sin^2 k$ et correspond à $y_1 = \beta$.

Pour trouver le minimum de M^2, quand z décrit la droite $y_1 = \beta - l$, on doit transformer l'expression de M^2 en y posant $y_1 = \beta - l$, ce qui donne

$$M^2 = \sin^2 (x_1 - \alpha) \left(\frac{e^l + e^{-l}}{2}\right)^2 + \cos^2 (x_1 - \alpha) \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2,$$

et, ensuite, chercher le minimum de cette expression. On trouve, de cette manière, que ce minimum correspond à $x_1 = \alpha$ et qu'il est, en le représentant par m_2^2,

$$m_2^2 = \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2.$$

On trouve, de la même manière, que le minimum des valeurs que prend M^2 quand z décrit la droite $y_1 = \beta + l$ correspond à $x_1 = \alpha$ et est égal à m_2^2.

De tout ce que je viens de démontrer il résulte que le minimum des valeurs que prend M^2, quand z décrit le contour de l'intégration, est égal à la plus petite des quantités

$$\sin^2 k, \quad \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2.$$

Or on voit facilement que

$$\frac{e^l - e^{-l}}{2} > \sin k,$$

si $l \overline{\overline{>}} \log (\sin k + \sqrt{\sin^2 k + 1})$ et que

$$\frac{e^l - e^{-l}}{2} < \sin k,$$

si $l < \log (\sin k + \sqrt{\sin^2 k + 1})$.

Donc nous avons le théorème suivant:

Si $l \overline{\overline{>}} \log (\sin k + \sqrt{\sin^2 k + 1})$, *l'intégrale* J *tend vers zéro, quand* m *tend vers l'infini, si* x *satisfait à la condition*

$$|\sin (x - \alpha)| < \sin k.$$

Si $l < \log (\sin k + \sqrt{\sin^2 k + 1})$, *l'intégrale* J *tend vers zéro, quand* m *tend vers l'infini, si* x

satisfait à la condition

$$|\sin(x-a)| < \frac{e^l - e^{-l}}{2}.$$

Dans ces deux cas, on peut développer $f(x)$ en série convergente au moyen des formules suivantes:

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n}(x-a),$$

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K'_{2n} \sin^{2n}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\infty} L'_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a).$$

4. *Application.* — Pour faire une application de ce résultat, je vais considérer la fonction $f(x) = \cos kx$, k représentant un nombre quelconque.

Les formules (3) donnent

$$L_0 = 1, \quad K_1 = 0, \quad L_2 = -\frac{k^2-1}{2}, \quad K_2 = 0, \ldots,$$

et, par conséquent, la formule (5) donne la formule d'Euler

$$\cos kx = \cos x \left[1 - \frac{k^2-1}{1.2} \sin^2 x + \frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \ldots\right],$$

et l'on voit que cette formule a lieu toutes les fois que

$$|\sin x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

En appliquant les formules (4) à la même fonction, on trouve

$$K'_0 = 1, \quad L'_1 = 0, \quad K'_2 = -\frac{k^2}{2}, \quad L'_3 = 0, \ldots,$$

et, par conséquent, la formule (6) donne la formule connue

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 x + \frac{k^2(k^2-2^2)}{2.3.4} \sin^4 x - \ldots,$$

quand $|\sin x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

On trouve de la même manière les développements suivants:

$$\sin kx = k \sin x - \frac{k(k^2-1)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{k(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots,$$

$$\sin kx = \cos x\left[k \sin x - \frac{k(k^2-2^2)}{2.3}\sin^3 x + \ldots\right],$$

quand $|\sin x| < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

La méthode que nous venons d'employer pour obtenir les coefficients qui entrent dans les développements de $\cos kx$ et $\sin kx$ donne ces coefficients de proche en proche, mais n'en donne pas la loi. Mais cette loi est toujours la même quel que soit k, et, dans le cas de k entier positif, on l'obtient par des moyens tout à fait élémentaires.

5. Je vais maintenant considérer l'intégrale

$$M = \int_s \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)}\,dz,$$

qui va me permettre d'étudier les conditions de convergence de votre formule (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* p. 331):

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)} f(\alpha) \\ & + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)} f(\beta) \\ & + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\ldots\sin(\gamma-\lambda)} f(\gamma) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

quand le nombre des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tend vers l'infini. Je suppose la partie réelle de x comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et je prenne pour contour de l'intégration le rectangle dont le centre coïncide avec l'origine des coordonées, et dont les côtés sont deux droites parallèles à l'axe des abscisses, égales à π, et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, égales à $2l$.

En supposant que les points d'affixe $x, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ sont placés à l'intérieur du contour s, on trouve

$$M = 2i\pi(A + B + C + \ldots),$$

où A, B, C, ... représentent les résidus de la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)}$$

par rapport à x, α, β, ...

Or le résidu de cette fonction par rapport à x est égal au coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$\frac{f(x+h)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots}{\sin h \sin(x+h-\alpha)\sin(x+h-\beta)\ldots}$$

en série ordonnée suivant les puissances de h, c'est-à-dire à $f(x)$.

Le résidu B de la même fonction est égal au coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$\frac{f(\alpha+h)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots}{\sin(\alpha+h-x)\sin h\sin(\alpha+h-\beta)\ldots}$$

en série ordonnée suivant les puissances de h, et, par conséquent,

$$B = -\frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)} f(\alpha).$$

On trouve de la même manière les autres résidus.

Nous avons donc la formule

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)} f(\alpha) \\ & + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)} f(\beta) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \int_s \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)} dz. \end{aligned}$$

Or on voit, au moyen du théorème de M. Darboux déjà employé dans le cas antérieur, que l'intégrale qui entre dans cette formule tend vers zéro, quand le nombre des quantités α, β, γ, ... tend vers l'infini, si l'on a, en tous les points du contour de l'intégration,

$$|\sin(x-\alpha)| < |\sin(z-\alpha)|, \quad |\sin(x-\beta)| < |\sin(z-\beta)|, \quad \ldots,$$

donc, quand les conditions précédentes sont satisfaites, l'expression

$$\frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots}f(\alpha)+\frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots}f(\beta)+\ldots$$

représente $f(x)$ avec d'autant plus d'approximation que le nombre des quantités α, β, γ, ... est plus grand.

Pour étudier les conditions qu'on vient d'écrire on peut recorrir à la méthode qu'on a déjà employée dans le n.° 3 pour le même but. En supposant qu'est $\alpha = u + iv$, on trouve de cette manière que la première condition a lieu quand

$$|\sin(x-\alpha)| < \cos u,$$

si

$$l \overline{\overline{>}} \log(\cos u + \sqrt{\cos^2 u + 1}) + |v|,$$

et quand

$$|\sin(x-\alpha)| < \frac{e^{l-|v|} - e^{-l+|v|}}{2},$$

si

$$l < \log(\cos u + \sqrt{\cos^2 u + 1}) + |v|,$$

et que les autres conditions mènent à des resultats analogues.

Je termine ici les considérations relatives aux intégrales M et J que je me proposais de soumettre à votre considération. Je serai bien heureux si elles méritent votre haute approbation.

NOTES.

Après la publication de cette lettre nous avons fait des nouvelles recherches sur le même sujet, qui ont été insérées dans le travail qu'on trouve dans le page 105 de ce volume. Au moyen des résultats y publiés on peut completer en quelques points l'étude des questions que nous venons de considérer, comme on va le voir.

1. Les conditions pour l'existence des développements (5) et (6), que nous avons obtenues précédemment, en prenant pour contour de l'intégration un certain rectangle, sont suffisantes et de facile application, mais ne sont pas toutes nécessaires. Pour obtenir les conditions générales pour l'existence de ces développements il faut prendre pour contour s de l'intégration une courbe fermée telle qu'il soit, pour tous les points z de s et pour tous les points x de l'intérieur,

$$|\sin(x-a)| < |\sin(z-a)|.$$

Cette courbe a pour équation $|\sin(z-a)| = c$, c étant une constante, et sa forme ne diffère pas de celle de la courbe $|\sin z| = c$, qui a été étudiée dans la page 107, où l'on a vû que cette équation représente une suite d'ovales quand $c \leqq 1$, et une courbe ouverte quand $c > 1$.

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par un des ovales définis par l'équation $|\sin(z-a)| = c$ (où $c \leqq 1$), on peut développer $f(x)$ en séries de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n}(x-a),$$

et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K'_{2n} \sin^{2n}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\infty} L'_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a),$$

x étant l'affixe d'un point quelconque placé à l'intérieur de la courbe considérée.

Ce théorème est plus général que celui que nous avons énoncé dans le n.° 3, parceque l'aire dans laquelle il faut que la fonction $f(x)$ soit holomorphe pour qu'il soit applicable est à l'intérieur du rectangle considéré dans le n.° 3, mais il est de moins facile application.

2. Nous avons donné antérieurement des méthodes pour le calcul des coefficients qui entrent dans les développements précédentes. On peut les obtenir encore au moyen des formules générales que nous allons trouver.

Nous allons considérer dans ce but une fonction *paire* $\varphi(x+a)$ et une fonction *impaire* $\psi(x+a)$, auxquelles nous ferons application de la formule (12) de la page 112.

Nous aurons

$$\varphi(x+a) = \varphi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(a) + S_{2n}^{(1)} \varphi^{(2n-2)}(a) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} \varphi^{(2)}(a)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x,$$

$$\psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(2n+1)}(a) + s_{2n+1}^{(1)} \psi^{(2n-1)}(a) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} \psi'(a)}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x,$$

et, en dérivant les deux membres de ces égalités par rapport à x et en changeant ensuite dans les résultats $\varphi'(x+a)$ et $\psi'(x+a)$ en $\psi_1(x+a)$ et $\varphi_1(x+a)$,

$$\psi_1(x+a) = \cos x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_1^{(2n-1)}(a) + S_{2n}^{(1)} \psi_1^{(2n-3)}(a) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} \psi_1(a)}{1.2\ldots(2n-1)} \sin^{2n-1}(x),$$

$$\varphi_1(x+a) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(2n)}(a) + s_{2n+1}^{(1)} \varphi_1^{(2n-2)}(a) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} \varphi_1(a)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x.$$

Cela posé, si l'on définit $\varphi_1(x+a)$ et $\psi(x+a)$ au moyen des égalités

$$\varphi_1(x+a) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n} x,$$

$$\psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x,$$

il vient

$$f(x+a) = \psi(x+a) + \varphi_1(x+a),$$

et

$$f'(a) = \psi'(a), \quad f'''(a) = \psi'''(a), \quad \ldots$$
$$f(a) = \varphi_1(a), \quad f''(a) = \varphi_1''(a), \quad \ldots.$$

Donc on a

$$L_{2n} = \frac{f^{(2n)}(a) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-2)}(a) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f(a)}{1.2\ldots 2n},$$

$$K_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(a) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(a) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(a)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

On trouve de la même manière

$$\mathrm{L}'_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(a) + \mathrm{S}^{(1)}_{2(n+1)} f^{(2n-1)}(a) + \ldots + \mathrm{S}^{(n)}_{2(n+1)} f'(a)}{1.2\ldots(2n+1)},$$

$$\mathrm{K}'_{2n} = \frac{f^{(2n)}(a) + \mathrm{S}^{(1)}_{2n} f^{(2n-2)}(a) + \ldots + \mathrm{S}^{(n-1)}_{2n} f''(a)}{1.2\ldots 2n}.$$

3. Nous ferons encore remarquer que la fonction $f(x)$ a un nombre infini de développements de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n \sin(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n \sin^n(x-a),$$

applicables dans l'ovale dont l'équation est $|\sin(z-a)| = c$ (où $c \leqq 1$), vû qu'on peut la représenter, d'une infinité de manières différentes, par des expressions de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \cos(x-a)\,\psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant holomorphes dans l'aire limitée par l'ovale considéré. Les développements antérieurement obtenus sont caractérisés par la circonstance suivante: une des fonctions $\varphi(x+a)$ et $\psi(x+a)$ est *paire* et l'autre *impaire*.

Il convient encore rappeller ici que le développement de la même forme que nous avons donné dans la page 119, pour le cas des fonctions périodiques, est dans des circonstances différentes de celles que nous considérons ici, par ce qu'il est applicable dans la zône infinie comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin(z-a)| = c$ (où $c > 1$).

V

SUR LES COURBES PARALLÈLES A L'ELLIPSE

(Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique
— Bruxelles, 1898, t. LVIII)

SUR LES COURBES PARALLÈLES A L'ELLIPSE

1. Les courbes parallèles à l'ellipse sont, comme on le sait, les courbes qui ont la même développée que l'ellipse. Elles sont donc le lieu des points qu'on obtient en prenant sur les normales à l'ellipse, à partir de cette courbe, du côté extérieur ou du côté intérieur, une longueur constante k. Les mêmes courbes sont aussi l'enveloppe d'une circonférence de rayon constant k, dont le centre décrit l'ellipse considérée. Comme on peut aussi les regarder comme la projection du contour apparent d'un tore sur un plan quelconque, on les a appelées *toroïdes*.

On trouve facilement la forme de ces courbes en partant de la relation

$$\mathrm{R} = \rho \pm k,$$

où ρ et R représentent les rayons de courbure de l'ellipse et de la courbe parallèle. Les toroïdes ont deux branches, l'une correspond à $\mathrm{R} = \rho + k$, l'autre à $\mathrm{R} = \rho - k$; elles n'ont pas de point d'inflexion; elles ont des points de rebroussement quand on a $\mathrm{R} = \rho - k$, k étant compris entre la plus grande valeur $\frac{a^2}{b}$ et la plus petite valeur $\frac{b^2}{a}$ de ρ. On voit encore facilement, en considérant la développée, que la première branche a la forme d'un ovale et que la seconde a aussi la forme d'un ovale quand $k > \frac{a^2}{b}$ ou $< \frac{b^2}{a}$ et que dans le cas contraire elle a quatre points de rebroussement, lesquels sont formés par quatre arcs de la courbe qui ou ne se coupent pas ou se coupent en deux points placés sur un des axes de l'ellipse.

La forme des courbes parallèles à l'ellipse a été trouvée par Breton de Champ [1] au moyen de leur développée, comme on vient de l'indiquer. Les bases de la théorie analytique de ces

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1844, t. III.

courbes ont été posées par Cauchy ([1]); en cherchant l'enveloppe de la circonférence

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2$$

dont le centre décrit l'ellipse

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1,$$

et en faisant

$$a^2\frac{x-\alpha}{\alpha}=b^2\frac{y-\beta}{\beta}=\theta, \tag{1}$$

ce géomètre a trouvé les équations

$$\frac{a^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=1, \quad \frac{\theta^2x^2}{(\theta+a^2)^2}+\frac{\theta^2y^2}{(\theta+b^2)^2}=k^2. \tag{2}$$

L'équation des toroïdes, qui résulte de l'élimination de θ entre les équations (2), est du huitième degré; elle a été donnée par Catalan ([2]). Mais l'étude de ces courbes peut être faite directement au moyen des équations de Cauchy, ainsi que nous allons le montrer.

2. En résolvant les équations (2) par rapport à x et y, on obtient les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{\theta+a^2}{\theta}\sqrt{\frac{\theta^2-b^2k^2}{a^2-b^2}},\\ y&=\frac{\theta+b^2}{\theta}\sqrt{\frac{a^2k^2-\theta^2}{a^2-b^2}},\end{aligned}\right. \tag{3}$$

qui donnent les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre arbitraire θ. Les points réeles de la courbe carrespondent aux valeurs réelles de θ comprises entre bk et ak, et entre $-bk$ et $-ak$. Pour chaque valeur de k, ces équations déterminent une courbe algébrique avec deux branches réelles, dont l'une se rapporte à $R=\rho+k$ et l'autre à $R=\rho-k$.

Des formules (2) on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta}&=\frac{\theta^3+a^2b^2k^2}{\theta^2\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\theta^2-b^2k^2}},\\ \frac{dy}{d\theta}&=-\frac{\theta^3+a^2b^2k^2}{\theta^2\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2k^2-\theta^2}},\end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{\theta^2-b^2k^2}{a^2k^2-\theta^2}}=-\frac{x(\theta+b^2)}{y(\theta+a^2)}. \tag{4'}$$

([1]) *Comptes-rendus*, 1841, p. 1062.

([2]) *Nouvelles Annales*, 1844, t. III, p. 553.

On peut déduire des équations (3) et (4) la forme des toroïdes. Mais cette détermination, qui résulte si facilement de la considération de leur développée, n'est pas le but que nous avons en vue dans ce travail; nous allons seulement, à cet égard, chercher leurs points multiples, réels ou imaginaires, puis étudier leurs podaires, leurs transformées par rayons vecteurs réciproques, les transformées de ces podaires, enfin signaler quelques propriétés relatives aux normales à l'ellipse. Ces recherches nous conduisent aussi à quelques propriétés de certaines classes de *spiriques* et, en particulier, des *ellipses de Cassini.*

3. Pour trouver les points multiples des courbes parallèles à l'ellipse, nous examinerons les cas suivants:

1.° Soit $k \overline{\overline{>}} a$. Si l'on fait $\theta = -b^2$, il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \pm \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \sqrt{b^2 - k^2}, \quad y = 0\,; \\ y' = \pm \dfrac{b^2 x}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 k^2 - b^4)}}. \end{cases}$$

Comme on a $k \overline{\overline{>}} a > b$, les points de la courbe déterminés par les équations (5) sont imaginaires. Si l'on remarque maintenant que y' a deux valeurs différentes en chacun de ces points, on voit qu'ils sont doubles.

Ainsi, la courbe a deux points doubles imaginaires sur l'axe des abscisses.

En posant $\theta = -a^2$, on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} x = 0, \quad y = \pm \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \sqrt{k^2 - a^2}, \\ y' = \mp \dfrac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^4 - b^2 k^2)}}{a^2 y}\,; \end{cases}$$

les formules (6) déterminent deux points de la courbe sur l'axe Oy, en chacun desquels y' a deux valeurs réelles quand $k < \dfrac{a^2}{b}$, deux valeurs imaginaires quand $k > \dfrac{a^2}{b}$. Dans le premier cas, la courbe a deux points doubles réels sur l'axe des ordonnées (qui coïncident quand $k = a$); dans le second cas, elle a deux points isolés.

2.° Soit maintenant $a > k > b$. La courbe a quatre points doubles, qui sont tous imaginaires. Les coordonnées de ces points résultent des équations (5) et (6).

3.° Si l'on a $k \overline{\overline{<}} b$, la courbe possède deux points doubles réels (qui coïncident quand $k = b$), dont les coordonnées sont déterminées par les formules (5), et elle a deux points doubles imaginaires, dont les coordonnées résultent des formules (6). Les deux points réels sont *isolés* quand $k < \dfrac{b^2}{a}$.

De cette discussion, il résulte le théorème suivant:

Chacune des courbes algébriques représentées par les équations (3) *a, à distance finie, quatre points doubles. Deux de ces points sont toujours imaginaires; les deux autres sont aussi imaginaires quand* k *est compris entre* b *et* a, *et ils sont réels dans le cas contraire. Si* $k > \frac{a^2}{b}$ *ou* $k < \frac{b^2}{a}$, *ces derniers points sont isolés.*

4. Les valeurs que prend θ aux points de rebroussement doivent satisfaire aux équations $\frac{dx}{d\theta} = 0$, $\frac{dy}{d\theta} = 0$; elles sont, par conséquent, données par l'équation

$$\theta^3 + a^2 b^2 k^2 = 0.$$

On en conclut qu'il existe *quatre rebroussements réels* quand la racine réelle de cette équation est comprise entre $-bk$ et $-ak$, c'est-à-dire quand k satisfait aux conditions $\frac{b^2}{a} < k < \frac{a^2}{b}$, comme d'ailleurs nous l'avions déjà vû; la courbe a en outre *huit points de rebroussement imaginaires.* Quand ces conditions ne sont pas satisfaites, la courbe a *douze points de rebroussement imaginaires.*

Les points de rebroussement peuvent encore être obtenus d'une autre manière. Ils doivent, en effet, satisfaire à l'équation $\rho^2 = k^2$, ρ représentant, comme ci-dessus, le rayon de courbure de l'ellipse au point (α, β) correspondant; la relation $\rho^2 = k^2$ donne

$$a^4\beta^2 + b^4\alpha^2 = k^{\frac{2}{3}} b^{\frac{8}{3}} a^{\frac{8}{3}}. \tag{7}$$

L'équation (7) représente trois ellipses, une réelle et deux imaginaires, lesquelles déterminent, au moyen de leurs intersections avec l'ellipse proposée, douze points, dont quatre sont réels quand k est compris entre $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$. Les centres de courbure en ces points de l'ellipse proposée sont les points de rebroussement demandés.

A l'égard des ellipses (7), nous remarquerons que, si $2a_1$ et $2b_1$ représentent leurs axes, on a

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{ka^4}{b^2}}, \quad b_1 = \sqrt[3]{\frac{kb^4}{a^2}};$$

d'où la relation

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

5. Dans l'étude précédente, on n'a pas considéré le cas de $k=\frac{a^2}{b}$, ni celui de $k=\frac{b^2}{a}$.

Si $k=\frac{a^2}{b}$, les points de rebroussement réels et les points doubles réels qui existent sur l'axe des ordonnées quand $a<k<\frac{a^2}{b}$, forment, en se réunissant en les extrémités du grand axe de la développée de l'ellipse, *deux points triples,* où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. La courbe a alors la forme d'un ovale.

Si $k=\frac{b^2}{a}$, les points de rebroussement réels et les points doubles réels, situées sur l'axe des abscisses quand $b>k>\frac{b^2}{a}$, forment, en se réunissant en les extrémités du petit axe de la développée de l'ellipse, *deux points triples,* où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées. La courbe a encore la forme d'un ovale.

6. Pour compléter l'étude des points singuliers, il faut encore étudier les points situés à l'infini. En remplaçant dans les équations (2) x par $\frac{1}{x}$ et y par $\frac{y}{x}$, on trouve

$$x=\frac{\theta}{\theta+a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\theta^2-b^2k^2}},$$

$$y=\frac{\theta+b^2}{\theta+a^2}\sqrt{\frac{a^2k^2-\theta^2}{\theta^2-b^2k^2}}.$$

La courbe représentée par ces équations coupe l'axe des ordonnées en quatre points dont les ordonnées sont égales à $+i$, $-i$, $\frac{b}{a}i$, $-\frac{b}{a}i$, et l'on peut voir, en procédant comme pour les points doubles de la courbe (3), que ces points sont doubles. *La toroïde a donc quatre points doubles à l'infini.*

7. On peut aussi étudier les points à l'infini de la toroïde en cherchant les asymptotes.

On conclut des équations (3) que, quand θ tend vers 0, x tend vers $i\,\infty$, et y vers ∞; et si l'on prend les valeurs de x et y qui ont le même signe, $\frac{x}{y}$ tend vers $\frac{a}{b}\,i$. De même, quand θ tend vers ∞, x tend vers ∞ et $\frac{y}{x}$ tend vers i.

On a ensuite, dans le premier cas,

$$\lim_{\theta=0}\left(x-\frac{a}{b}\,iy\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\lim_{\theta=0}\left\{ibk\left(1+\frac{a^2}{\theta}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{b^2k^2}+\dots\right)\right.$$
$$\left.-\frac{a^2k}{b}\,i\left(1+\frac{b^2}{\theta}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{a^2k^2}+\dots\right)\right\}=\pm\,i\,\frac{k}{b}\sqrt{a^2-b^2}.$$

Y

Donc la courbe a deux asymptotes dont les équations sont

$$x = \frac{a}{b} iy \pm \frac{ik}{b} \sqrt{a^2 - b^2},$$

ou

$$y = -\frac{b}{a} ix \pm \frac{k}{a} \sqrt{a^2 - b^2},$$

et aussi deux asymptotes représentées par les équations

$$y = \frac{b}{a} ix \pm \frac{k}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Pour $k = 0$, ces équations donnent les asymptotes de l'ellipse.
Dans le second cas,

$$\lim_{\theta=\infty} (y - ix) = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \lim_{\theta=\infty} \left\{ i\theta\left(1 + \frac{b^2}{\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2k^2}{\theta^2} + \dots\right) \right.$$
$$\left. - i\theta\left(1 + \frac{a^2}{\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{b^2k^2}{\theta^2} + \dots\right) \right\} = \pm\, i\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Donc la courbe a encore quatre asymptotes imaginaires, dont les équations sont

$$y = ix \pm i\sqrt{a^2 - b^2},$$
$$y = -ix \pm i\sqrt{a^2 - b^2}.$$

A chacun de ces couples d'asymptotes correspond un point double à l'infini.

8. On vient de voir que la toroïde a douze points de rebroussement et huit nœuds ; ou deux points triples, six nœuds et huit de rebroussement, quand $k = \frac{a^2}{b}$ ou $k = \frac{b^2}{a}$. On en conclut que *ces courbes sont du genre un,* ce qui résulte d'ailleurs immédiatement de la forme des équations (3). On en déduit aussi, en s'appuyant sur l'une des formules de Plücker, que *la classe de ces courbes est égale à quatre.*

L'équation tangentielle de la toroïde est bien connue. On la trouve facilement au moyen des équations (3). En effet, l'équation de la tangente est

$$\frac{\sqrt{a^2k^2 - \theta^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}} \mathrm{Y} + \frac{\sqrt{\theta^2 - b^2k^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}} \mathrm{X} = 1.$$

En la comparant à l'équation

$$uY + vX = 1,$$

on trouve

$$u = \frac{\sqrt{a^2k^2 - \theta^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad v = \frac{\sqrt{\theta^2 - b^2k^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}}$$

d'où, en éliminant θ, on tire l'équation cherchée

$$[(a^2 - k^2)v^2 + (b^2 - k^2)u^2 - 1]^2 = 4k^2(u^2 + v^2).$$

On en déduit que la courbe a deux foyers réels, qui coïncident avec les foyers de l'ellipse.

On en conclut aussi que la courbe n'a pas de tangente double à distance finie.

9. Une courbe parallèle à l'ellipse est le lieu d'un point tel que sa distance au pied d'une normale issue du point soit égale à une constante donnée k. Par les points doubles de la courbe on peut tirer deux normales différentes, qui satisfont à cette condition; par les points de rebroussement, deux normales coïncidentes, et par les points triples, trois normales coïncidentes. Comme les points de rebroussement des différentes courbes parallèles à l'allipse coïncident avec les points de sa développée, celle-ci est le lieu des points par lesquels passent deux normales à l'ellipse coïncidentes; elle sépare la région du plan qui contient les points par lesquels on peut tirer à l'ellipse quatre normales réelles, de la région du plan qui contient les points par lesquels on ne peut tirer que deux normales. Ces résultats sont bien connus.

10. De ce qui précède il résulte que par chaque point (x, y) du plan d'une ellipse passent quatre courbes parallèles à l'ellipse; deux d'entre elles sont coïncidentes, quand le point (x, y) est sur la développée ou sur les axes; trois, quand le point est un point de rebroussement de la développée. Si le point appartient à l'aire extérieure à la développée, deux de ces courbes sont imaginaires.

Cela posé, si l'on ordonne la première des équations (2) par rapport à θ, on obtient

$$\begin{aligned} &\theta^4 + 2(a^2 + b^2)\theta^3 + (b^4 + a^4 + 4a^2b^2 - a^2x^2 - b^2y^2)\theta^2 \\ &+ 2(a^4b^2 + a^2b^4 - a^2b^2x^2 - a^2b^2y^2)\theta + a^4b^4 - a^2b^4x^2 - b^2a^4y^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation donne les valeurs que prend θ au point considéré; chacune de ces valeurs caractérise une toroïde passant par le point (x, y).

*

1.° En représentant par θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 les quatre racines de cette équation, on a

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=-2(a^2+b^2). \tag{8}$$

Donc *la somme des quatre valeurs que prend θ en un point (x, y), et qui correspondent aux quatre toroïdes qui y passent, est constante.*

2.° On a aussi [1]

$$\Sigma\theta_1\theta_2=a^4+b^4+4a^2b^2-a^2x^2-b^2y^2. \tag{9}$$

Donc, *la somme des produits, deux a deux, des nombres θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 est constante pour tous les points placés sur l'ellipse dont l'équation est*

$$a^2x^2+b^2y^2=m^4.$$

3.° L'égalité

$$\Sigma\theta_1\theta_2\theta_3=-2(b^2a^4+a^2b^4-a^2b^2x^2-a^2b^2y^2) \tag{10}$$

fait voir que *la somme des produits, trois à trois, des nombres θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 est constante pour tous les points de la circonférence dont l'équation est*

$$x^2+y^2=m^2.$$

4.° Comme on a

$$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4=a^2b^2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2), \tag{11}$$

le produit des nombres θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 est constant pour tous les points de l'ellipse dont l'équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=m^4.$$

11. Des relations qu'on vient d'obtenir, on tire un grand nombre de propositions relatives aux normales à l'ellipse.

1.° Les relations (8) et (1) donnent

$$\Sigma\frac{x-\alpha_1}{\alpha_1}=-2\frac{a^2+b^2}{a^2},\quad \Sigma\frac{y-\beta_1}{\beta_1}=-2\frac{a^2+b^2}{b^2}, \tag{12}$$

[1] Dans ce qui suit, le signe sommatoire s'étend aux quatre indices 1, 2, 3, 4.

(α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), (α_4, β_4) désignant les coordonnées des pieds des normales à l'ellipse tirées par le point (x, y).

Représentons par N_1, N_2, N_3, N_4 les segments des normales considérées, compris entre leurs pieds et le grand axe de l'ellipse; par N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 les segments des mêmes normales compris entre leurs pieds et le petit axe de l'ellipse; enfin par k_1, k_2, k_3, k_4 les distances du point (x, y) aux points (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), (α_4, β_4). On aura les relations

$$\frac{x-\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{k_1}{N'_1}, \ldots, \quad \frac{y-\beta_1}{\beta_1} = \frac{k_1}{N_1}, \ldots$$

les seconds membres ayant le signe + ou le signe —, suivant que le point (x, y) est extérieur ou intérieur à l'ellipse.

Il vient donc

$$\Sigma \frac{k_1}{N'_1} = -2\,\frac{a^2+b^2}{a^2}, \quad \Sigma \frac{k_1}{N_1} = -2\,\frac{a^2+b^2}{b^2}. \tag{13}$$

Donc: *Si par un point intérieur à la développée d'une ellipse on tire les normales à cette courbe, la somme des quotients qu'on obtient en divisant les distances du point aux pieds des normales par les segments des mêmes normales compris entre ces pieds et l'un des axes, est constante.*

On tire de la même manière, de la relation (9), que le lieu des points tels que la somme des produits, deux à deux, des quotients qu'on vient de considérer, reste constante, est une ellipse dont les axes, dirigés suivant ceux de l'ellipse proposée, sont inversement proportionnels à ces derniers.

On voit aussi que le lieu des points tels que la somme des produits, trois à trois, des mêmes quotients reste constante, est une circonférence concentrique à l'ellipse donnée.

Enfin, le lieu des points pour lesquels le produit des quotients considérés est constant, est une ellipse semblable à l'ellipe donnée et de même centre.

De la seconde des formules (13) on tire une relation entre les rayons de courbure R_1, R_2, R_3, R_4 de l'ellipse aux pieds des quatre normales abaissées du point (x, y) sur cette courbe, à savoir

$$\frac{k_1}{R_1^{\frac{1}{3}}} + \frac{k_2}{R_2^{\frac{1}{3}}} + \frac{k_3}{R_3^{\frac{1}{3}}} + \frac{k_4}{R_4^{\frac{1}{3}}} = -2\,\frac{a^2+b^2}{(ab)^{\frac{2}{3}}}.$$

2.° Les équations (12) donnent aussi

$$x\,\Sigma \frac{1}{\alpha_1} = \frac{2c^2}{a^2}, \quad y\,\Sigma \frac{1}{\beta_1} = \frac{2c^2}{b^2}. \tag{14}$$

Donc: *La somme des rapports de l'abscisse* (ordonnée) *d'un point quelconque, dans le plan d'une ellipse, à l'abscisse* (ordonnée) *du pied de l'une des normales à cette ellipse, tirées par le point considéré, est constante.*

On a aussi

$$(15)\qquad \Sigma\frac{x-\alpha_1}{\alpha_1}\cdot\frac{x-\alpha_2}{\alpha_2}=\Sigma\frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2}-3\,\Sigma\frac{x}{\alpha_1}+6=\frac{b^4+a^4+4\,a^2b^2-a^2x^2-b^2y^2}{a^4}.$$

Donc on a l'égalité

$$(16)\qquad x^2\,\Sigma\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{c^4-a^2x^2-b^2y^2}{a^4},$$

laquelle fait voir que *le lieu des points tels que la somme des produits, deux à deux, des rapports* $\frac{x}{\alpha_1}, \frac{x}{\alpha_2}, \frac{x}{\alpha_3}, \frac{x}{\alpha_4}$ *est constante, est une ellipse.* Si λ est la valeur de cette constante, l'équation de ce lieu est

$$a^2x^2+b^2y^2=c^4-a^4\lambda.$$

On trouve, de la même manière, les égalités

$$(17)\qquad \Sigma\frac{x}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=-\frac{2c^2}{a^4},$$

$$(18)\qquad \frac{x^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}=-\frac{c^4}{a^6}.$$

3.° L'équation (18) donne

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-\frac{a^6x^2}{c^4}\,;$$

en la combinant avec les relations (17), (16) et (14), on obtient

$$\Sigma\,\alpha_1=\frac{2a^2x}{c^2},$$

$$\Sigma\,\alpha_1\alpha_2=\frac{a^2(a^2x^2+b^2y^2-c^4)}{c^4},$$

$$\Sigma\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{2a^4x}{c^2}.$$

De ces égalités [1], on tire les propositions suivantes:

La somme des abscisses des pieds des quatre normales à l'ellipse, tirées par un point donné, reste constante quand ce point varie sur une droite parallèle à son petit axe.

La somme des produits, deux à deux, des mêmes abscisses reste constante quand le point considéré décrit l'ellipse dont l'équation est

$$a^2x^2 + b^2y^2 = m^4,$$

m représentant une constante quelconque.

La somme des produits, trois à trois, des mêmes abscisses reste constante quand le point décrit une droite parallèle au petit axe de l'ellipse.

Le produit $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ *est constant pour tous les points* (x, y) *de deux droites parallèles au petit axe de l'ellipse et placées à des distances égales de cet axe.*

4.° Pour les ordonnées β_1, β_2, β_3, et β_4 des pieds des normales à l'ellipse tirées par le point (x, y), il existe des relations analogues à celles qu'on vient de trouver pour les abscisses.

Ainsi, on a

$$\Sigma \frac{y}{\beta_1} = -\frac{2c^2}{b^2},$$

$$\Sigma \frac{y^2}{\beta_1\beta_2} = \frac{c^4 - a^2x^2 - b^2y^2}{b^4},$$

$$\Sigma \frac{y}{\beta_1\beta_2\beta_3} = \frac{2c^2}{b^4},$$

$$\Sigma \beta_1 = -\frac{2b^2y}{c^2},$$

$$\Sigma \beta_1\beta_2 = \frac{b^2[a^2x^2 + b^2y^2 - c^4]}{c^4},$$

$$\Sigma \beta_1\beta_2\beta_3 = \frac{2b^4y}{c^2},$$

$$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 = -\frac{b^6y^2}{c^4}.$$

Il est facile de les interpréter géométriquement.

(1) Pour démontrer les nouvelles égalités, on peut éliminer β entre les équations

$$y - \beta = \frac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x - \alpha), \quad a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2, \text{ etc.}$$

5.° Des égalités précédentes on conclut:

$$(19) \qquad \begin{cases} \Sigma\, \alpha_1^2 = \dfrac{2a^2\,[a^2x^2 - b^2y^2 + c^4]}{c^4}, \\ \Sigma\, \beta_1^2 = \dfrac{2b^2\,[b^2y^2 - a^2x^2 + c^4]}{c^4}. \end{cases}$$

Donc, *si, par un point quelconque d'une hyperbole, dont l'équation est*

$$a^2x^2 - b^2y^2 = \pm\, m^4,$$

on tire les normales à l'ellipse donnée, la somme des carrés des abscisses et celle des carrés des ordonnées des pieds des quatre normales, sont constantes. La somme des carrés des distances des pieds des mêmes normales au centre de l'ellipse est aussi constante.

6.° A moyen de l'égalité

$$\Sigma\, \frac{\alpha_1}{x - \alpha_1} = a^2\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{\theta_4}\right) = -\,2a^2\,\frac{a^2 + b^2 - (x^2 + y^2)}{a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2}$$

on trouve la suivante:

$$\Sigma\, \frac{N_1'}{k_1} = -\,2a^2\,\frac{a^2 + b^2 - (x^2 + y^2)}{a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2}.$$

De même

$$\Sigma\, \frac{N_1}{k_1} = -\,2b^2\,\frac{a^2 + b^2 - (x^2 + y^2)}{a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2}.$$

Donc, *si, par un point quelconque de la circonférence dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

on tire des normales à l'ellipse considérée, la somme des quotients obtenus en divisant, par les distances de ce point aux pieds des normales, les segments des mêmes normales, compris entre ces pieds et un quelconque des axes, est nulle.

7.° L'égalité

$$\Sigma\, k_1^2 = \Sigma\,[(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2] = 2\left[\left(-\,2\,\frac{a^2}{c^2}\right)x^2 + \left(2 + \frac{b^2}{c^2}\right)y^2 + a^2 + b^2\right]$$

montre que *la somme des carrés des distances du point (x, y) aux pieds des normales à l'ellipse* *tirées par ce point est constante pour tous les points d'une conique représentée par l'équation*

$$\left(2-\frac{a^2}{c^2}\right)x^2+\left(2+\frac{b^2}{c^2}\right)y^2=\pm m^2.$$

Ce résultat est compris dans un autre plus général que nous allons trouver.

Soient δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 les distances du point (ε, η) aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point (x, y). On a

$$\Sigma\,\delta_1^2=\frac{2}{c^2}\left\{a^2x^2-b^2y^2-2\,a^2\varepsilon x+2\,b^2\eta y+2\,(\varepsilon^2+\eta^2)\,c^2+c^2\,(a^2+b^2)\right\}.$$

Donc, *si le point (ε, η) est fixe, le lieu des points pour lesquels la somme $\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_4^2$ est égale à une constante donnée, est une hyperbole dont le centre est le point (ε, η) et dont les axes sont parallèles aux axes de l'ellipse considérée et inversement proportionnels à ceux de cette ellipse.*

Si l'on a $\varepsilon=\frac{1}{2}x$, $\eta=\frac{1}{2}y$, l'équation précédente devient

$$\Sigma\,\delta_1^2=x^2+y^2+2\,(a^2+b^2).$$

Donc, *si le point (x, y) parcourt une circonférence concentrique avec une ellipse, la somme des carrés des distances du point $\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ aux pieds des normales à l'ellipse tirées par le point (x, y) reste constante.*

8.° La longueur de la normale à l'ellipse est donnée par la formule

$$N^2=\frac{a^4\beta^2+b^4\alpha^2}{a^4}.$$

Donc, en représentant par N_1, N_2, N_3 et N_4 les valeurs que prend N aux points (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), (α_4, β_4), on trouve, eu égard aux égalités (19),

$$\Sigma\,N_1^2=\frac{2b^2}{a^2c^2}\,[b^2y^2-a^2x^2+c^2\,(a^2+b^2)].$$

Donc, *la somme des carrés des normales est constante pour tous les points (x, y) d'une hyperbole représentée par une équation de la forme*

$$b^2y^2-a^2x^2=\pm m^4.$$

De même, la somme

$$R_1^{\frac{2}{3}} + R_2^{\frac{2}{3}} + R_3^{\frac{2}{3}} + R_4^{\frac{2}{3}}$$

est constante, R_1, R_2, R_3 et R_4 représentant les rayons de courbure de l'ellipse aux points (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), (α_4, β_4).

12. Si, par un point donné (x, y), on tire les normales à une des courbes représentées par les équations (3), on a, pour déterminer les valeurs de θ aux pieds de ces normales, l'équation

$$[(y^2+x^2-c^2)\,\theta^4 + k^2(a^2c^2+b^2c^2-a^2x^2-b^2y^2)\,\theta^2 - a^2b^2c^2k^4]^2 = 4c^2y^2\theta^2(a^2k^2-\theta^2)(\theta^2-b^2k^2)^2.$$

Elle donne pour θ^2 quatre valeurs θ_1^2, θ_2^2, θ_3^2, θ_4^2 auxquelles correspondent quatre valeurs positives de θ, qui donnent les points placés sur une branche de la courbe, et quatre valeurs négatives, qui donnent les points placés sur l'autre branche.

On a

$$\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\theta_4^2 = \frac{a^4b^4c^4k^8}{(x^2+y^2-c^2)^2+4c^2y^2};$$

donc le produit $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$ reste constant lorsque

$$(x^2+y^2-c^2)^2+4c^2y^2 = m^4,$$

ou

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)+c^4-m^4=0,$$

c'est-à-dire quand le point (x, y) décrit un *ovale de Cassini* dont les foyers coïncident avec les foyers de l'ellipse donnée.

Représentons maintenant par ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les angles des normales considérées avec l'axe des ordonnées; on peut écrire

$$\theta_1 = b^2\frac{y-\beta_1}{\beta_1} = b^2\frac{k\cos\omega_1}{\beta_1}, \quad \theta_2 = b^2\frac{k\cos\omega_2}{\beta_2}, \quad \ldots,$$

d'où

$$\frac{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}{\cos\omega_1\cos\omega_2\cos\omega_3\cos\omega_4} = \frac{b^8k^4}{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}.$$

Mais si l'on désigne, comme ci-dessus, par N_1, N_2, N_3, N_4 les longueurs des normales à l'ellipse aux points (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), (α_4, β_4), terminées au grand axe, on a aussi

$$N_1 = \frac{\beta_1}{\cos \omega_1}, \quad N_2 = \frac{\beta_2}{\cos \omega_2}, \quad \ldots.$$

Donc

$$N_1 N_2 N_3 N_4 = \frac{b^8 k^4}{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4}.$$

Par conséquent, *si, par un point quelconque d'un ovale de Cassini, on mène les normales à une ellipse ayant les mêmes foyers, le produit des segments de ces normales compris entre le grand axe de l'ellipse et des pieds des normales est constant.*

Pareillement, en représentant par N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 les segments des mêmes normales compris entre le petit axe de l'ellipse et les pieds des normales, on a

$$N'_1 N'_2 N'_3 N'_4 = \frac{a^8 k^4}{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4}.$$

Donc ce produit est constant pour le même ovale.

13. Menons maintenant par le point (x, y) les quatre tangentes à une des courbes représentées par les équations (3). On a

$$y\sqrt{a^2k^2 - \theta^2} + x\sqrt{\theta^2 - b^2k^2} = (\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
&[(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2y^2]\,\theta^4 - 4k^2c^2(x^2 - y^2 - c^2)\,\theta^3 \\
&\quad + 2k^2[(x^2 - y^2 - c^2)(a^2y^2 - b^2x^2 - c^2k^2) + 2k^2c^4 - 2c^2x^2y^2]\,\theta^2 \\
&\quad - 4k^4c^2(a^2y^2 - b^2x^2 - c^2k^2)\,\theta \\
&\quad + k^4[(a^2y^2 + b^2x^2)^2 + c^4k^4 - 2c^2k^2(a^2y^2 - b^2x^2)] = 0.
\end{aligned}$$

Cette équation détermine les valeurs de θ aux points de contact des tangentes considérées. Si θ', θ'', θ''', θ^{IV} sont ces valeurs, on a

$$\Sigma\,\theta' = \frac{4k^2c^2(x^2 - y^2 - c^2)}{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2y^2}, \tag{20}$$

et l'on voit que la somme $\theta' + \theta'' + \theta''' + \theta^{\text{IV}}$ est constante pour tous les points de *l'ovale de*

Cassini dont l'équation est

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(1+m)x^2+2c^2(1+m)y^2+c^4(1+2m)=0.$$

Désignons par ω', ω'', ω''', ω^{IV} les angles de l'axe des x avec les normales à l'ellipse menées par les points de contact des tangentes considérées, par α', α'', α''', α^{IV} les abscisses des points correspondants de l'ellipse, par N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 les segments des normales à l'ellipse compris entre ces points et l'axe des y, segments qui sont positifs ou négatifs suivant que les points de la toroïde considérés appartiennent à la branche extérieure ou intérieure; on aura

$$\theta'=a^2k\frac{\cos\omega'}{\alpha'}=\frac{a^2k}{N'_1},\quad \theta''=\frac{a^2k}{N'_2},\ \text{etc.}$$

Donc, *si, par les points de l'ovale de Cassini considéré, on tire les tangentes à une courbe parallèle à l'ellipse et si, par les points de contact de ces tangentes, on tire les normales à la même ellipse, les segments de ces normales compris entre leurs pieds et le petit axe de l'ellipse satisfont à l'équation*

$$\frac{1}{N'_1}+\frac{1}{N'_2}+\frac{1}{N'_3}+\frac{1}{N'_4}=\text{constante}. \tag{21}$$

La même relation s'applique aux segments des normales compris entre la courbe et le grand axe.

De l'égalité (20) on déduit que les rayons de courbure de l'ellipse aux pieds des normales considérées vérifient l'égalité

$$\frac{1}{R_1^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{R_2^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{R_3^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{R_4^{\frac{1}{3}}}=\text{constante}.$$

On voit aussi, au moyen de la formule (20), que *si, par les points de l'hyperbole dont l'équation est*

$$x^2-y^2=c^2,$$

on tire les tangentes à une courbe parallèle à l'ellipse donnée, et si par les points de contact on mène les normales à l'ellipse, les segments des normales compris entre leurs pieds et un quelconque des axes de l'ellipse satisfont à l'équation

$$\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}+\frac{1}{N_3}+\frac{1}{N_4}=0.$$

14. Étudions maintenant les podaires des toroïdes par rapport au centre.

Soient X, Y les coordonnées du point de la podaire considérée qui correspond au point (x, y) d'une courbe parallèle à l'ellipse. Les équations de la tangente à cette courbe au point (x, y) et la perpendiculaire à cette droite tirée par le centre de l'ellipse donnent

$$Y = -\sqrt{\frac{\theta^2 - b^2k^2}{a^2k^2 - \theta^2}}\,X + \frac{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2k^2 - \theta^2}},$$

$$Y = \sqrt{\frac{a^2k^2 - \theta^2}{\theta^2 - b^2k^2}}\,X,$$

et par conséquent les coordonnées d'un point de la podaire sont

$$(22)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{\theta + k^2}{k^2}\sqrt{\dfrac{\theta^2 - b^2k^2}{a^2 - b^2}}, \\[2ex] Y = \dfrac{\theta + k^2}{k^2}\sqrt{\dfrac{a^2k^2 - b^2}{a^2 - b^2}}; \end{cases}$$

θ joue ici le rôle de paramètre variable.

Chacune des podaires considérées est composée de deux branches réelles fermées, dont l'une correspond à la branche extérieure et l'autre à la branche intérieure de la courbe parallèle à l'ellipse. On obtient les points de la première branche en faisant varier θ entre bk et ak; et ceux de la seconde correspondent aux valeurs de θ compris entre $-bk$ et $-ak$.

On trouve facilement, au moyen des équations (22) et de

$$(23)\qquad \frac{dY}{dX} = -\frac{2\theta^2 + k^2\theta - a^2k^2}{2\theta^2 + k^2\theta - b^2k^2}\sqrt{\frac{\theta^2 - b^2k^2}{a^2k^2 - \theta^2}},$$

la forme de la courbe. Chaque branche est symétrique par rapport aux axes des coordonnées, et ses axes sont égaux à ceux de la toroïde correspondante; la courbe a deux ou six points (deux étant en tous les cas placés sur l'axe des ordonnées) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, et deux ou six points (deux étant sur l'axe des abscisses) où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées. Si $k > a$ ou $< b$, l'origine des coordonnées est un point *quadruple isolé;* si $b < k < a$, l'origine est un *nœud quadruple.* Deux seulement des tangentes à la courbe au point quadruple sont distinctes; leurs coefficients angulaires sont égaux à $\pm\sqrt{\frac{a^2 - k^2}{k^2 - b^2}}$. Enfin, si l'on a $k = a$ ou $k = b$, la courbe a encore un point quadruple à l'origine des coordonnées et la branche intérieure est composée de deux ovales tangents en ce point à l'axe des abscisses quand $k = a$, ou à l'axe des ordonnées quand $k = b$.

15. On tire facilement des formules (22) l'équation cartésienne des podaires de toroïde. Ces équations donnent, en effet,

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{\theta^2-b^2k^2}{a^2k^2-\theta^2};$$

tirant de là la valeur de θ^2 pour la substituer dans l'une des équations (22), on trouve l'équation demandée:

$$[(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)-k^2(x^2+y^2)]^2=4k^2(b^2y^2+a^2x^2)(x^2+y^2). \tag{24}$$

On en conclut, en premier lieu, que *les points circulaires à l'infini sont des points quadruples* de la courbe. Les équations des asymptotes sont

$$y=ix\pm\frac{1}{2}ci,\quad y=-ix\pm\frac{1}{2}ci;$$

chacune de ces droites est *double*. Enfin, les points dont les coordonnées sont $\left(\pm\frac{1}{2}c, 0\right)$ sont des *foyers* des podaires de toutes les courbes parallèles à l'ellipse donnée; ces foyers ne varient pas quand on remplace l'ellipse par une autre ellipse homofocale quelconque.

16. L'équation (24) peut encore être écrite ainsi:

$$[(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)+k^2(x^2+y^2)]^2=4k^2(x^2+y^2)^3, \tag{24'}$$

ou, en posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,

$$(\rho\pm k)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta,$$

de sorte que l'équation polaire des courbes considérées est

$$\rho=k\pm\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}. \tag{25}$$

De l'équation (25) il résulte immédiatement que les podaires des courbes parallèles à l'ellipse sont des conchoïdes de la courbe ayant pour équation

$$\rho=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

ou

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2;$$

celle-ci est la podaire de l'ellipse par rapport au centre. Ce résultat est d'ailleurs évident et s'applique à deux courbes parallèles quelconques.

17. Avant de continuer, il convient de rappeler que la podaire centrale de l'ellipse et celle de l'hyperbole coïncident avec les courbes qu'on trouve en coupant un tore fermé ou un tore ouvert par un plan parallèle à l'axe et tangent intérieurement. Booth, en son *Treatise on some new geometrical methods* (Londres, 1873), a donné aux podaires de l'ellipse le nom de *lemniscates elliptiques*, et aux podaires de l'hyperbole le nom de *lemniscates hyperboliques*. Les premières sont des courbes fermées unicursales, avec un point isolé, qui coïncide avec le centre de l'ellipse, et deux points doubles à l'infini. Les autres sont aussi des courbes unicursales et ont un nœud au centre de l'hyperbole et deux points doubles à l'infini. Les unes et les autres ont deux foyers réels dont les coordonnées sont $\left(\pm \frac{1}{2} c, 0\right)$. La classe des lemniscates hyperboliques contient la *lemniscate de Bernoulli*, qui correspond à $a^2 = b^2$.

18. Les podaires de toroïde appartiennent à une classe très générale de courbes, dont l'équation est $(x^2 + y^2)^m = \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ représentant une fonction entière d'un degré inférieur à $2m$. Ces lignes ont été étudiées par M. Petersen, qui leur a donné le nom de *courbes de puissance constante;* par M. Humbert, qui les a nommées *courbes cycliques;* par M. d'Ocagne, qui les a appelées *courbes isotropiques,* etc. Les podaires de toroïde ont donc les propriétés générales de cette classe de courbes, que nous n'avons pas besoin de rappeler ici, et encore quelques propriétés spéciales que nous allons signaler.

19. Si l'on élimine θ entre l'équation d'une podaire centrale de toroïde

$$(\rho - k)^2 = a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \theta\right)$$

et l'équation

$$\rho \sin \theta = A\rho \cos \theta + y_0,$$

qui représente une droite passant par le point $(0, y_0)$ il vient

$$\frac{(1 + A^2)^2}{(b^2 - a^2)^2} (\rho^8 - 4k\rho^7) + 2 \frac{1 + A^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{(3k^2 - a^2)(1 + A^2)}{b^2 - a^2} - A^2\right) \rho^6 + \ldots + y_0^4 = 0.$$

Cette équation détermine les valeurs de θ aux points où la droite coupe la courbe. En désignant par ρ_1, ρ_2, ..., ρ_8 ces valeurs, on a

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_8 = 4k.$$

Donc, *la somme des distances du centre aux points où une droite quelconque coupe la courbe est égale à 4k.*

On a aussi

$$\Sigma \rho_1\rho_2 = -\frac{b^2-a^2}{1+A^2}K,$$

K représentant une quantité indépendant de y_0; par conséquent

$$\Sigma \rho_i^2 = 2\frac{b^2-a^2}{1+A^2}K.$$

Donc, *la somme des carrés des distances du centre aux points où une droite coupe la courbe, reste constante quand la droite se déplace parallèlement à elle même.*

On a encore

$$\rho_1\rho_2\rho_3\ldots\rho_8 = \frac{y_0^4(b^2-a^2)^2}{(1+A^2)^2} = y_0^4(b^2-a^2)^2\cos^4\omega,$$

ω représentant l'angle de la droite donnée avec l'axe des abscisses; si Δ est la distance de la droite au centre de la courbe, cette relation prend la forme

$$\rho_1\rho_2\rho_3\ldots\rho_8 = \Delta^4(a^2-b^2)^2.$$

Donc, *le produit des distances du centre aux points où une droite coupe la courbe considérée, est constant pour toutes les droites qui sont à la même distance de ce centre.*

Remarquons aussi que ce produit ne change pas quand on remplace la podaire d'une courbe parallèle à l'ellipse donnée par la podaire d'une autre courbe parallèle à la même ellipse ou parallèle à une ellipse homofocale, pourvu que la distance des droites au centre de la courbe ne varie pas.

20. De même, la circonférence dont l'équation est

$$\rho^2 - 2\alpha\rho\cos\theta - 2\beta\rho\sin\theta + \alpha^2 + \beta^2 = R^2,$$

coupe la podaire de chaque courbe parallèle à l'ellipse donnée en huit points; les valeurs que prend ρ en ces points, satisfont aux conditions

$$\rho_1' + \rho_2' + \ldots + \rho_8' = K,$$

$$\rho_1'\rho_2'\ldots\rho_8' = \frac{(b^2-a^2)^2(\alpha^2+\beta^2)^4}{[4(\alpha^2+\beta^2)-(b^2-a^2)]^2 + 16\beta^2(a^2-b^2)},$$

K représentant une quantité indépendante de R.

Donc, *la somme des distances du centre aux points où une circonférence quelconque coupe la podaire d'une courbe parallèle à l'ellipse est indépendante de* R.

Le produit des mêmes distances ne varie pas quand on remplace la podaire considérée par la podaire d'une autre courbe parallèle à la même ellipse ou à une ellipse homofocale.

21. Soit (x, y) un point donné quelconque. Par ce point passent les podaires de deux courbes parallèles à l'ellipse proposée; elles correspondent aux valeurs de k^2 données par l'équation (24). En représentant ces valeurs par k_1^2 et k_2^2, on a

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{2\left[(x^2+y^2)^2 + a^2x^2 + b^2y^2\right]}{x^2+y^2}.$$

Cette égalité montre que la somme $k_1^2 + k_2^2$ est constante et égale à $2m^2$ pour les points de la courbe dont l'équation est

$$(26) \qquad (x^2+y^2)^2 = (m^2-a^2)\,x^2 + (m^2-b^2)\,y^2;$$

quand $m^2 > a^2$, cette courbe est une *lemniscate elliptique,* podaire de l'ellipse

$$\frac{x^2}{m^2-a^2} + \frac{y^2}{m^2-b^2} = 1;$$

quand $b^2 < m^2 < a^2$, c'est une *lemniscate hyperbolique,* podaire de l'hyperbole

$$\frac{y^2}{m^2-b^2} - \frac{x^2}{a^2-m^2} = 1.$$

Si $2m^2 = a^2 + b^2$, la lemniscate hyperbolique se réduit à une *lemniscate de Bernoulli.*

De là nous allons tirer de nouvelles propriétés des normales à l'ellipse.

22. Soit A le point dont les coordonnées sont (x, y), et tirons la droite qui passe par ce point et par le centre O de l'ellipse; menons en A une perpendiculaire A_1A_2 à AO. Il existe deux courbes parallèles à l'ellipse, dont les podaires passent par A; elles sont tangentes à la droite A_1A_2 en des points que nous désignons par A_1 et A_2.

Soient A_1M et A_2N deux droites perpendiculaires à A_1A_2; elles sont normales à l'ellipse en deux points que nous représentons par M et N.

Cela posé, à toute ellipse

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

correspond une lemniscate elliptique ou hyperbolique telle, que la somme des carrés des distances A_1M et A_2N reste constante et égale à $2m^2$ quand A décrit cette lemniscate. On sait aussi que les foyers de cette lemniscate (n.° 17) ne varient pas quand on substitue à l'ellipse considérée une autre ellipse homofocale.

Si l'on remarque maintenant que les tangentes menées à l'ellipse proposée aux points M et N sont perpendiculaires à AO, on peut énoncer le résultat précédent de la manière suivante:

Si un point se déplace de manière que la somme des carrés de ses distances aux deux tangentes à une ellipse, perpendiculaires à la droite qui l'unit au centre, reste égale à $2m^2$, il décrit une lemniscate elliptique, quand $m > a$; une lemniscate hyperbolique, quand $b < m < a$; une lemniscate de Bernoulli, quand $m^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Si $m^2 = a^2$, l'équation (26) se réduit à

$$x^2 + y^2 = \pm\, cy, \tag{26'}$$

et représente deux circonférences de rayon égal à $\frac{1}{2}c$ et ayant pour centres les points $\left(0, \pm \frac{1}{2}c\right)$.

On a donc ce théorème: *Si l'on joint un point quelconque* A *des circonférences* (26') *au centre* O *de l'ellipse et si l'on mène les tangentes à l'ellipse perpendiculaires à* OA, *la somme des carrés des distances du point* A *aux deux tangentes est constante et égale à* $2a^2$.

23. On déduit encore de l'équation (24)

$$k_1 k_2 = \frac{(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2}{x^2 + y^2};$$

par conséquent, le produit k_1k_2 reste constant quand le point (x, y) décrit la courbe ayant pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 = (a^2 \pm m^2)\, x^2 + (b^2 \pm m^2)\, y^2. \tag{27}$$

Donc, *le lieu décrit par un point* A *qui se déplace de manière que le produit de ses distances aux deux tangentes à une ellipse, perpendiculaires à la droite* OA, *reste constant et égal à $\pm\, m^2$, est une lemniscate elliptique quand la constante est positive ou négative, mais inférieure, en valeur absolue, à b^2; le lieu est une lemniscate hyperbolique quand la constante est comprise entre $-a^2$ et $-b^2$.*

Si la constante qu'on vient de considérer est négative et égale à $-b^2$, l'équation (27) se réduit à

$$(27') \qquad x^2+y^2=\pm\, cx;$$

elle représente deux circonférences de rayon égal à $\frac{1}{2}c$ et ayant pour centres les points $\left(\pm\frac{1}{2}c, 0\right)$.

Donc, *si l'on joint un point quelconque* A *des circonférences* (27') *au centre* O *de l'ellipse et que l'on mène ensuite les tangentes à l'ellipse perpendiculaires à* OA, *le produit des distances du point* A *aux deux tangentes est constant et égal à* $-b^2$.

24. On reconnaît, au moyen de l'équation (24), qu'une podaire de toroïde est l'enveloppe des courbes représentées par l'équation

$$(x^2+y^2)^2\,t^2+2\left[(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)+k(x^2+y^2)\right]t+4k^2(x^2+y^2)=0,$$

t étant le paramètre arbitraire.

En écrivant cette équation ainsi:

$$(28) \qquad (x^2+y^2)^2=\frac{2\,(a^2-k^2)\,t-4k^2}{2t+t^2}\,x^2+\frac{2\,(b^2-k^2)\,t-4k^2}{2t+t^2}\,y^2,$$

on voit que les courbes (28) sont des lemniscates elliptiques et hyperboliques.

A chacune de ces lignes correspond une circonférence, de même centre que la lemniscate et passant par ses foyers; elle coupe cette courbe en quatre points dont les coordonnées sont données par l'équation de la lemniscate considérée et par l'équation

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\,(a^2-b^2)\,t}{2\,t+t^2}-\frac{c^2}{2\,(t+2)}.$$

En éliminant t entre ces deux équations, on obtient l'équation du lieu décrit par les quatre points considérés quand t varie:

$$(x^2+y^2)\left[(16\,a^2-4\,c^2)\,x^2+(16\,b^2-4\,c^2)\,y^2\right]+c^2\,(4k^2+c^2)\,(x^2+y^2)-4\,c^2\,(a^2x^2+b^2y^2)=0.$$

Ce lieu est donc une *quartique* ayant un point double à l'origine.

*

En partant de l'équation (24'), on voit encore que les podaires de toroïde sont les enveloppes des lemniscates représentées par l'équation

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{2(a^2+k^2)t-4k^2-a^2t^2}{2t}x^2 + \frac{2(b^2+k^2)t-4k^2-b^2t^2}{2t}y^2.$$

Mais, en cherchant le lieu des intersections de chaque lemniscate avec la circonférence concentrique qui passe par ses foyers, on obtient la même courbe que ci-dessus. Ce moyen de génération des podaires n'est donc pas distinct de celui qu'on vient de donner.

25. En posant, dans l'équation (24'),

$$x^2 = \frac{m^4x_1^2}{(x_1^2+y_1^2)^2}, \quad y^2 = \frac{m^4y_1^2}{(x_1^2+y_1^2)^2}, \tag{29}$$

on obtient l'équation des transformées par rayons vecteurs réciproques des podaires centrales des toroïdes, le pôle de la transformation étant le centre des courbes, à savoir:

$$[m^4-(a^2-k^2)x_1^2-(b^2-k^2)y_1^2]^2 = 4k^2m^4(x_1^2+y_1^2).$$

On voit que ces courbes appartiennent à la classe des *quartiques binodales* dont les nœuds sont à l'infini, et qu'elles sont les enveloppes des coniques représentées par l'équation

$$k^2(x_1^2+y_1^2)+2t[m^4-(a^2+k^2)x_1^2-(b^2+k^2)y_1^2]+4m^4t^2=0,$$

t étant le paramètre arbitraire.

26. En faisant la transformation (29) sur les équations (22), on obtient les formules

$$y_1 = \frac{m^2}{\theta+k^2}\sqrt{\frac{a^2k^2-\theta^2}{a^2-b^2}}, \quad x_1 = \frac{m^2}{\theta+k^2}\sqrt{\frac{\theta^2-b^2k^2}{a^2-b^2}}, \tag{30}$$

lesquelles déterminent les coordonnées des points des courbes considérées, en fonction du paramètre variable θ.

A l'égard de ces courbes, nous ferons remarquer, en premier lieu, qu'elles sont du genre *un* et qu'en vertu d'un théorème général connu, elles coïncident avec les polaires réciproques des courbes parallèles à l'ellipse par rapport au cercle concentrique avec l'ellipse et dont le rayon est égal à m.

En second lieu, on a

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\theta + a^2}{\theta + b^2}\sqrt{\frac{\theta^2 - b^2k^2}{a^2k^2 - \theta^2}}. \tag{31}$$

En comparant les formules (3) et (31), on trouve

$$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0;$$

par conséquent, *le vecteur d'un point quelconque d'une courbe parallèle à une ellipse et la tangente au point correspondant de l'inverse de sa podaire centrale sont perpendiculaires, le pôle d'inversion étant le centre de l'ellipse.*

Cette propriété s'applique, on le sait, à une courbe quelconque et à sa podaire réciproque par rapport à un cercle.

On interprète de la même façon la relation

$$\frac{y_1}{x_1}\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

27. On peut encore étudier les courbes parallèles à l'ellipse par une autre méthode.

En effet, représentons par α et β les coordonnées des points de l'ellipse; on peut poser

$$\alpha = a\sin\varphi,\quad \beta = b\cos\varphi,$$

et alors on a, pour déterminer les courbes parallèles à l'ellipse, les équations

$$(x - a\sin\varphi)^2 + (y - b\cos\varphi)^2 = k^2,$$
$$\frac{a(x - a\sin\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{b(y - b\cos\varphi)}{\cos\varphi},$$

qui donnent

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\sin\varphi + \frac{kb\sin\varphi}{a\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}},\\ y &= b\cos\varphi + \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

On pourrait établir, au moyen de ces formules, les propriétés qu'on a obtenues en se servant des équations (3). Mais nous ne ferons pas ici cette étude, et nous allons seulement nous en servir pour déterminer la longueur des arcs et les valeurs des aires des courbes considérées.

Les équations (32) donnent

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\cos\varphi + \frac{kb\cos\varphi}{a\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -b\sin\varphi - \frac{kb^2\sin\varphi}{a^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais, en représentant par s_1 la longueur d'un arc de l'ellipse, on a

$$\left(\frac{ds_1}{d\varphi}\right)^2 = a^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right).$$

Donc

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= a\cos\varphi + kba^2\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^3, \\ \frac{dy}{d\varphi} &= -b\sin\varphi - kb^2a\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^3; \end{aligned}\right.$$

par conséquent, si s est la longueur d'un arc de toroïde, on peut écrire

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left[\frac{ds_1}{d\varphi} + kab\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2\right]^2.$$

Cette équation donne, en intégrant,

$$s = s_1 + kab\int\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2 d\varphi = s_1 + kab\int\frac{d\varphi}{a^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)},$$

ou

$$s = s_1 - k\,\text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right) + \text{const.}$$

En prenant pour origine des arcs s_1 et s les points de l'ellipse et de la courbe parallèle qui correspondent à $\varphi = 0$, on a

$$(34) \qquad s = s_1 + k\frac{\pi}{2} - k\,\text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right).$$

Mais des formules (33) il résulte

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tang} \varphi;$$

d'où, en représentant par ω l'angle formé par l'axe des x avec la normale à la toroïde au point qui correspond à la valeur considérée de φ:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a}{b} \cot \varphi.$$

L'équation (34) prend ainsi la forme

$$s = s_1 + k\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right).$$

Ce résultat coïncide avec celui qui a été trouvé par Breton de Champ (*loc. cit.*).

28. L'aire balayée par le vecteur d'un point d'une courbe parallèle à l'ellipse quand φ varie depuis zéro jusqu'à φ, se détermine par la formule

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\left(y\frac{dx}{d\varphi} - x\frac{dy}{d\varphi}\right)d\varphi,$$

qui donne

$$S = \frac{1}{2}\left[ab\varphi + \frac{bk^2}{a}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi} + ka\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\, d\varphi \right.$$
$$\left. + \frac{kb^2}{a}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Mais on a

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{b^2}\left[\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\, d\varphi \right.$$
$$\left. - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}\right],$$

et

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi} = \frac{a}{b}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right)\right].$$

Donc

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\left[ab\varphi + k^2\frac{\pi}{2} - k^2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right) - k\,\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}\right.$$
$$\left. + 2ka\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi\right].$$

On conclut, de cette égalité, que l'aire balayée par le vecteur d'un point de la courbe, quand φ varie depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, est donnée par la formule

$$\mathrm{S}_1 = \frac{1}{4}\left[ab\pi + k^2\pi + 4ka\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi\right],$$

k étant positif dans le cas des branches extérieures des courbes considérées et négatif dans le cas des branches intérieures.

L'aire comprise entre deux branches d'une courbe représentée par les équations (32) est donnée par la formule

$$\mathrm{S}_2 = 8ka\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

trouvée par Cauchy (*loc. cit.*).

VI

SUR LES DÉRIVÉES D'ORDRE QUELCONQUE

(Giornale di Matematiche — Napoli, 1880, t. XVIII)

SUR LES DÉRIVÉES D'ORDRE QUELCONQUE

Nous allons nous occuper dans cette Note [1] de la recherche de l'expression analytique de la dérivée de l'ordre n de la fonction $f(x)$.

1. *Dérivée de* $u = f[\varphi(x)]$. La dérivation successive de la fonction $u = f(y)$, étant $y = \varphi(x)$, donne:

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= u'y' \\
\frac{d^2u}{dx^2} &= u''\,y'^2 + u'y'' \\
\frac{d^3u}{dx^3} &= u'''y'^3 + 3u''y'y'' + u'y''' \\
\frac{d^4u}{dx^4} &= u^{(\mathrm{IV})}y'^4 + 6u'''y'^2y'' + 3u''y''^2 + 4u''y'y''' + u'y^{(\mathrm{IV})} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

On voit, par analogie, que

$$
(2) \qquad \frac{d^nu}{dx^n} = \Sigma\, \mathrm{A} u^{(i)} (y')^{\alpha} (y'')^{\beta} (y''')^{\gamma} \ldots (y^{(n)})^{\lambda},
$$

---

[1] No tomo I do *Mathesis* (Gand, 1881, p. 23) foi publicada pelo illustre geometra belga P. Mansion uma noticia a respeito do presente trabalho, que contém algumas indicações bibliographicas a respeito do assumpto que nelle é considerado.

*

où α, β, ..., λ représentent les racines entières positives ou nulles de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=n,$$

et où est

$$i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

Pour démontrer cette formule, cherchons la dérivée d'ordre $n+1$ de u:

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=\Sigma\,\mathrm{A}\left\{u^{(i+1)}(y')^{\alpha+1}(y'')^{\beta}(y''')^{\gamma}+\ldots+u^{(i)}\Big(\alpha(y')^{\alpha-1}(y'')^{\beta+1}(y''')^{\gamma}\ldots\right.$$
$$\left.+\beta(y')^{\alpha}(y'')^{\beta-1}(y''')^{\gamma+1}\ldots+\ldots\Big)\right\}.$$

On voit que les exposants de y', y'', y''', etc. satisfont en chaque terme aux équations

$$\alpha'+2\beta'+3\gamma'+\ldots=n+1,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots=i+1\quad \text{ou}\quad =i;$$

et que cette formule contient des termes correspondants à toutes les solutions de la première de ces équations. Donc la formule (2) est vraie.

Pour déterminer le coefficient A, nous poserons

$$u=y^k,\quad y=x+x^2+x^3+\ldots+x^n,$$

k étant entier et positif. Nous aurons

$$u=[x+x^2+x^3+\ldots]^k=\sum\frac{1.2.3\ldots k x^{h_1+2h_2+3h_3+\ldots}}{1.2\ldots h_1\times 1.2\ldots h_2\times 1.2\ldots h_3\times\ldots},$$

où

$$k=h_1+h_2+h_3+\ldots.$$

En dérivant cette équation n fois et en faisant ensuite $x=0$, pour rendre nuls tous les termes de la dérivée qui ont des puissances de x différentes de n, on obtient:

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_{x=0}=\sum\frac{1.2.3\ldots k\times 1.2\ldots n}{1.2\ldots h_1\times 1.2\ldots h_2\times\ldots},\tag{3}$$

étant

$$h_1+2h_2+3h_3+\ldots+nh_n=n,\quad h_1+h_2+h_3+\ldots+h_n=k.$$

Mais la formule (2) donne

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_{x=0} = \Sigma\, \mathrm{A}k\,(k-1)\ldots(k-i+1)\, y_0^{k-i}\,(y_0')^{\alpha}\,(y_0'')^{\beta}\ldots$$

ou, en remarquant que tous les termes où $k-i$ est différent de zéro sont nuls,

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_{x=0} = \Sigma\, \mathrm{A}\,(1.2)^{\beta}\,(1.2.3)^{\gamma}\ldots(1.2.3\ldots n)^{\lambda} \times 1.2\ldots k,$$

étant

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots = n.$$

Le terme général de la somme précédente doit être égal au terme général de la somme (3), parceque ici on donne à α, β, γ, etc. les mêmes valeurs qu'on donne en (3) à h_1, h_2, h_3, etc.; donc

$$\mathrm{A} = \frac{1.2\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times (1.2)^{\beta}\,(1.2.3)^{\gamma}\ldots(1.2.3\ldots n)^{\lambda}},$$

et

$$(4) \qquad \frac{d^n u}{dy^n} = \sum \frac{1.2\ldots n u^{(i)}\,(y')^{\alpha}\,(y'')^{\beta}\ldots(y^{(n)})^{\lambda}}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda \times (1.2)^{\beta}\,(1.2.3)^{\gamma}\ldots(1.2\ldots n)^{\lambda}},$$

où la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives et nulles de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n,$$

et où est

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

On trouve cette formule dans le *Calcul différentiel* de M.r Bertrand, où est démontrée d'une manière différente.

2. *Dérivées de fonctions simples.* Nous allons appliquer cette formule à la recherche des dérivées des fonctions simples.

1.º La dérivée d'ordre n de $y=[\varphi(x)]^m$ est:

$$y^{(n)}=\sum\frac{1.2\ldots n\times m(m-1)\ldots(m-i+1)(\varphi'x)^{\alpha}(\varphi''x)^{\beta}\ldots(\varphi^{(n)}x)^{\lambda}}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times\ldots\times1.2\ldots\lambda\times(1.2)^{\beta}(1.2.3)^{\gamma}\ldots(1.2.3\ldots n)^{\lambda}}(\varphi x)^{m-i}$$

$$i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda,\quad \alpha+2\beta+3\lambda+\ldots+n\lambda=n.$$

Nous ferons bientôt un usage important de cette formule.

2.º La dérivée d'ordre n de $y=e^z$, étant $z=\varphi(x)$, est:

$$y^{(n)}=\sum\frac{1.2\ldots ne^z(z')^{\alpha}(z'')^{\beta}\ldots(z^{(n)})^{\lambda}}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times\ldots\times1.2\ldots\lambda(1.2)^{\beta}(1.2.3)^{\gamma}\ldots(1.2\ldots n)^{\lambda}},$$

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=n,\quad i=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

3. La fonction $y=\operatorname{sen} z$ donne:

$$y^{(n)}=\sum\frac{1.2\ldots n\operatorname{sen}\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)(z')^{\alpha}(z'')^{\beta}\ldots(z^{(n)})^{\lambda}}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times\ldots\times1.2\ldots\lambda(1.2)^{\beta}(1.2.3)^{\gamma}\ldots(1.2\ldots n)^{\lambda}}$$

On trouve de la même manière les dérivées des autres fonctions simples.

3. *Question inverse de celle do n.º 1.* Les formules (1) donnent $u^{(n)}$, exprimée au moyen d'un déterminant, les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., y', y'', y''', etc. étant données.

En effet, en représentant par $T_{n,i}$ le coefficient de $u^{(i)}$ dans la formule (4), les formules (1) donnent:

$$(5)\qquad u^{(n)}=\frac{1}{T_{1,1}.T_{2,2}..T_{n,n}}\begin{vmatrix} T_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{du}{dx}\\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 & \ldots & 0 & \frac{d^2u}{dx^2}\\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & \ldots & 0 & \frac{d^3u}{dx^3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots\\ T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & \ldots & T & \frac{d^nu}{d} \end{vmatrix}.$$

Cette formule sert pour faire le changement de la variable indépendante, parce qu' elle donne les dérivées de u par rapport à y, quand $u=f(x)$, $y=\varphi(x)$, sans faire l'élimination de x.

4. *Dérivées des fonctions inverses.* La formule (5) sert encore pour trouver les dérivées de x par rapport à y quand on connaît les dérivées de y par rapport à x. Alors on doit faire $u=x$, et il vient:

$$(6)\qquad \frac{d^n x}{dy^n}=\frac{1}{T_{1,1}T_{2,2}\ldots T_{n,n}}\begin{vmatrix} T_{1,1} & 0 & \ldots & 0 & 1\\ T_{2,1} & T_{2,2} & \ldots & 0 & 0\\ . & . & \ldots & . & .\\ . & . & \ldots & . & .\\ . & . & \ldots & . & .\\ T_{n,1} & T_{n,2} & \ldots & T_{n,n-1} & 0\end{vmatrix}$$

ou

$$(7)\qquad \frac{d^n x}{dy^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{T_{1,1}T_{2,2}\ldots T_{n,n}}\begin{vmatrix} T_{2,1} & T_{2,2} & 0 & \ldots & 0\\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & \ldots & 0\\ . & . & . & \ldots & .\\ . & . & . & \ldots & .\\ . & . & . & \ldots & .\\ T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & \ldots & T_{n,n-1}\end{vmatrix}.$$

Par exemple, la dérivée par rapport à y de

$$x=\text{arc sen}\, y$$

sera donnée par la formule précédente, étant

$$T_{m.j}=\sum\nolimits_1 \frac{1.2\ldots m\sin^\alpha\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^\beta\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin^\lambda\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times\ldots\times1.2\ldots\lambda\,(1.2)^\beta(1.2.3)^\gamma\ldots(1.2\ldots m)^\lambda},$$

où Σ_1 se rapporte aux racines entières positives ou nulles des équations

$$\alpha+2\beta+\ldots+m\lambda=m,\quad \alpha+\beta+\ldots+\lambda=j.$$

5. *Dérivée d'une fonction de plusieurs fonctions de x.* Nous allons chercher la dérivée d'ordre n de y, étant

$$(8)\qquad y=f(u_1,u_2,\ldots u_l),\quad u_1=\varphi_1(x),\quad u_2=\varphi_2(x),\ldots u_l=\varphi_l(x).$$

Il suffit de faire quelques dérivations pour trouver que $y^{(n)}$ a la forme:

$$y^{(n)} = \sum \mathrm{A} \frac{d^m f}{du_1^a \, du_2^b \, du_3^c \ldots} (u_1')^\alpha . (u_1'')^\beta \ldots \times (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \ldots \times \ldots; \tag{9}$$

et nous allons déterminer a, b, c, ..., α, β, γ, ..., α', β', γ', ...

Pour faire ça nous allons particulariser, comme on fait en beaucoup de questions, la fonction donnée (8), en faisant

$$y = (u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_l)^k,$$

k étant une quantité quelconque plus grande que n, et l'on obtiendra ainsi:

$$y^{(n)} = \Sigma\, k(k-1)\ldots(k-a+1) \times k(k-1)\ldots(k-b+1) \times \ldots\ldots \times$$
$$\times\, u_1^{k-a} . u_2^{k-b} \ldots \times (u_1')^\alpha . (u_1'')^\beta \ldots \times (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \ldots \times \ldots$$

Les quantités A, α, β, ..., α', β', ..., a, b, c, ..., qui entrent dans cette formule, sont les mêmes qui entrent en (9), et par conséquent, pour avoir leurs valeurs dans le cas général, il suffit de les déterminer dans ce cas particulier.

Pour faire cette détermination, cherchons $y^{(n)}$ par un autre moyen.

L'expression connue de la dérivée d'un produit de des fonctions donne, lorsqu'on l'applique à $u_1^k . u_2^k \ldots u_h^k$:

$$y^{(n)} = \sum \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots h_1 \times 1.2\ldots h_2 \times \ldots} (u_1^k)^{(h_1)} (u_2^k)^{(h_2)} \ldots\ldots,$$

où l'on doit donner a h_1, h_2, h_3, etc. les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_l = n.$$

En substituant ici les dérivées des puissances par leurs valeurs données dans le n.° 2, 1.er cas, on obtient:

$$y^{(n)} = \sum \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1.2\ldots n \times k(k-1)\ldots(h-a+1) \times k(k-1)\ldots(k-b+1) \times \ldots}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\alpha' \times 1.2\ldots\beta' \times \ldots \times 1.2\ldots\alpha'' \times 1.2\ldots\beta'' \times \ldots \times \ldots} \\ \times \dfrac{(u_1')^\alpha . (u_1'')^\beta \ldots \times (u_2')^{\alpha'} . (u_2'')^{\beta'} \ldots \times \ldots \times u_1^{k-a} . u_2^{k-b} \ldots}{(1.2)^{\beta+\beta'+\beta''+\cdots} (1.2.3)^{\gamma+\gamma'+\gamma''+\cdots} \ldots\ldots} \end{array} \right\},$$

où

$$a = \alpha + \beta + \gamma + \dots, \quad b = \alpha' + \beta' + \gamma' + \dots, \quad c = \alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \dots, \quad \text{etc.},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$ étant les valeurs entières et positives qui satisfont aux équations

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = h_1, \quad \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + \dots = h_2, \quad \text{etc.}$$

La comparaison des deux valeurs de $y^{(n)}$ donne maintenant le coefficient A, qui, substitué en (9), donne la dérivée de la fonction (8) [1]:

$$y^{(n)} = \sum \frac{1.2\dots n \dfrac{d^m f}{du_1^a\, du_2^b\, du_3^c \dots} (u_1')^{\alpha} . (u_1'')^{\beta} \dots \times (u_2')^{\alpha'} . (u_2'')^{\beta'} \dots \times \dots}{1.2\dots\alpha \times 1.2\dots\beta \times \dots \times 1.2\dots\alpha' \times 1.2\dots\beta' \times \dots \times (1.2)^{\beta+\beta'+\dots} (1.2.3)^{\gamma+\gamma'+\gamma''+\dots} \dots},$$

étant

$$m = a + b + c + \dots, \quad a = \alpha + \beta + \gamma + \dots, \quad b = \alpha' + \beta' + \gamma' + \dots, \quad \text{etc.},$$

et $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$ étant les racines entières et positives ou nulles des équations

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = h_1, \quad \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + \dots = h_2, \quad \text{etc.},$$

et $h_1, h_2, h_3, \dots$ celles de l'équation

$$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_l = n.$$

6. *Dérivée d'une équation.* La formule précedente donne la dérivée de l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

par rapport à x, y étant la fonction implicite qu'elle détermine.

En effet, dans ce cas on a

$$u_1 = y, \quad u_1' = y_1', \quad u_1'' = y_1'', \quad \dots; \quad u_2 = x, \quad u_2' = 1, \quad u_2'' = u_2''' = \dots = 0,$$
$$m = a + b, \quad a = \alpha + \beta + \gamma + \dots, \quad b = \alpha', \quad \alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = h_1, \quad \alpha' = h_2, \quad h_1 + h_2 = n;$$

---

[1] No tomo XII (1894, pag. 110) do *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* foi dada por J. B. Arez outra demonstração d'esta fórmula, fundada na fórmula de Taylor.

et par conséquent

$$\sum \frac{(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{1.2}\right)^{\beta}\left(\frac{y'''}{1.2.3}\right)^{\gamma}\cdots\left(\frac{y^{n)}}{1.2\ldots n}\right)^{\lambda}\frac{d^mF}{dx^{\alpha'}\,dy^{m-\alpha'}}}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times\ldots\times1.2\ldots\lambda\times1.2\ldots\alpha'}=0,$$

où l'on doit donner à α' toutes les valeurs entières, depuis zéro jusqu'à n, et à α, β, γ, ... les valeurs entières et positives ou nulles qui satisfont à l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=n-\alpha'.$$

On voit au moyen de cette équation que λ ne peut pas être supérieur à l'unité, et par conséquent que l'équation précedente est du premier dégré en $y^{(n)}$.

VII

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES EN SÉRIE

(Journal de mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville
— Paris, 1881, 3.^{e} série, t. VII)

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES EN SÉRIE

On connaît la formule de Lagrange qui sert à développer en une série ordonnée suivant les puissances de x une fonction u définie par les équations

$$u = f(y), \quad y = t + x\varphi(y).$$

Nous allons dans cette Note présenter une formule plus générale que celle de Lagrange, qui sert à développer en série ordonnée suivant les puissances de x une fonction u, quand est

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = f(y), \\ y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^n\varphi_n(y). \end{array} \right.$$

Dérivant la deuxième des équations (1), on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y) + [x\varphi_1'(y) + x^2\varphi_2'(y) + \ldots + x^n\varphi_n'(y)]\frac{dy}{dx},$$
$$\frac{dy}{dt} = 1 + [x\varphi_1'(y) + x^2\varphi_2'(y) + \ldots + x^n\varphi_n'(y)]\frac{dy}{dt},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dt}[\varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y)]$$

ou

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\sum_{t=1}^{t=n}[tx^{t-1}\varphi_t(y)].$$

Mais, étant

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{du}{dt}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt},$$

nous avons

(3) $$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}\sum_{t=1}^{t=n}[tx^{t-1}\varphi_t(y)],$$

ou

(4) $$\frac{du}{dx}=\theta\frac{du}{dt},$$

où l'on pose

(5) $$\theta=\sum_{t=1}^{t=n}[tx^{t-1}\varphi_t(y)].$$

Dérivant l'équation (4) et ayant égard à l'équation (2), il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dxdt}\theta+\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx}+\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dxdt}=\frac{d^2u}{dt^2}\theta+\frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt};$$

donc

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}\theta^2+\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx}+2\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}\right)$$

ou

(6) $$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta^2\right)}{dt}+\frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dx}.$$

En dérivant (6), on obtient de la même manière

(7) $$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\theta^3\right)}{dt^2}+3\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta\frac{d\theta}{dx}\right)}{dt}+\frac{du}{dt}\frac{d^2\theta}{dx^2},$$

et après

$$\frac{d^4u}{dx^4}=\frac{d^3\left(\frac{du}{dt}\theta^4\right)}{dt^3}+6\frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\theta^2\frac{d\theta}{dx}\right)}{dt^2}+3\frac{d\left[\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right]}{dt}+4\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)}{dt}+\frac{du}{dt}\frac{d^3\theta}{dx^3}.$$

On obtient les dérivées suivantes de la même manière. Nous allons en chercer la loi.

En général, représentant par θ', θ'', θ''', ... les dérivées partielles de θ par rapport à x, qui résultent de (5) en y supposant y constante, on a

$$\frac{d^{i-1}u}{dx^{i-1}} = \sum \frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\,\theta^k(\theta')^m(\theta'')^p(\theta''')^q\dots\right]}{dt^{a-1}}, \tag{8}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{d^iu}{dx^i} = \sum \Bigg\{ & \frac{d^{a-1}\left[\frac{d^2u}{dt^2}\,\theta^{k+1}(\theta')^m(\theta'')^p\dots\right]}{dt^{a-1}} \\ & + \frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\left(\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}(k+1)+k\frac{d\theta}{dx}\right)\theta^{k-1}(\theta')^m(\theta'')^p\dots\right]}{dt^{a-1}} \\ & + \frac{d^{a-1}\left[m\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta'}{dx}+\frac{d\theta'}{dy}\frac{dy}{dt}\theta\right)\theta^k(\theta')^{m-1}(\theta'')^p\dots\right]}{dt^{a-1}} \\ & + \frac{d^{a-1}\left[p\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta''}{dx}+\frac{d\theta''}{dy}\frac{dy}{dt}\theta\right)\theta^k(\theta')^m(\theta'')^{p-1}(\theta''')^q\dots\right]}{dt^{a-1}} + \dots\Bigg\}\end{aligned}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^iu}{dx^i} = \sum \Bigg\{ & \frac{d^{a}\left[\frac{du}{dt}\,\theta^{k+1}(\theta')^m(\theta'')^p\dots\right]}{dt^{a}} \\ & + k\,\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\,\theta^{k-1}(\theta')^{m+1}(\theta'')^p\dots\right]}{dt^{a-1}} \\ & + m\,\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\,\theta^{k}(\theta')^{m-1}(\theta'')^{p+1}(\theta''')^q\dots\right]}{dt^{a-1}} \\ & + p\,\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\,\theta^{k}(\theta')^{m}(\theta'')^{p-1}(\theta''')^{q+1}\dots\right]}{dt^{a-1}} + \dots\Bigg\}.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Comparant cette formule à la formule (8), on voit que chaque terme de (8) donne une somme de termes qu'on forme de celui-là on ôtant une unité à l'exposant de chaque facteur 1, θ, θ', θ'', ... et en l'additionnant à celui du suivant, et donnant pour coefficient au terme l'exposant qui a été diminué.

L'ordre de la dérivée par rapport à t qui entre en chaque terme est égal à la somme des exposants de θ, θ', θ'', ..., dans le terme, moins une unité. En effet, cela est vrai pour la dérivée $\frac{d^2u}{dx^2}$, et par la formule (9) on voit que l'ordre de chaque dérivée augmente d'une unité dans le passage de $\frac{d^{a-1}u}{dx^{a-1}}$ à $\frac{d^a u}{dx^a}$, ainsi que la somme des exposants de θ, θ', θ'' ...

Il résulte de ce qui précède une methode pour calculer de proche en proche les dérivées successives de u par rapport à x. Mais on peut même trouver une formule générale pour ce calcul, comme nous allons faire voir.

Nous avons, en effet, en remarquant que les dérivées de θ d'ordre plus grand que $n-1$ sont nulles, la formule suivante,

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum A \frac{d^{b-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^\alpha (\theta')^\beta (\theta'')^\gamma \ldots (\theta^{(n-1)})^\lambda\right]}{dt^{b-1}},$$

où b est donné par la formule

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Il ne nous reste qu'à déterminer le coefficient A et les exposants α, β, γ, ..., λ. Pour cela nous ferons

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \ldots = \varphi_n(y) = 1,$$

et nous aurons

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum A \frac{d^b u}{dy^b}\left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\beta \ldots \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^\lambda.$$

Mais on trouve dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand une formule (¹) qui donne la dérivée d'ordre i de u par rapport à x, étant $u=f(y)$, $(y)=\psi(x)$, laquelle, étant appliquée aux fonctions

$$u = f(y), \quad y = t + x + x^2 + \ldots + x^n,$$

donne:

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum 1.2. \;.i \frac{d^b u}{dy^b} \cdot \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha}{1.2\ldots\alpha} \cdot \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\beta}{(1.2)^\beta\, 1.2\ldots\beta} \cdots \frac{\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^\lambda}{(1.2\ldots n)^\lambda\, 1.2\ldots\lambda},$$

(¹) Veja-se na pag. 211 do presente volume uma demonstração d'esta fórmula.

où α, β, ..., λ représentent les racines entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = i,$$

et où est

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

La comparaison des deux formules précédentes mène à la valeur de A, qui, substituée dans la formule générale, donne la suivante

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum \frac{1.2\ldots i \dfrac{d^{b-1}\left[\dfrac{du}{dt}\theta^\alpha(\theta')^\beta(\theta'')^\gamma\ldots(\theta^{(n-1)})^\lambda\right]}{dt^{b-1}}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda(1.2)^\beta(1.2.3)^\gamma\ldots(1.2\ldots n)^\lambda},$$

et fait voir qu'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières, positives ou nulles, qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = i.$$

Nous avons ainsi l'expression générale de la dérivée de u par rapport à x de la fonction (1).

Pour obtenir maintenant le développement de u en série ordonnée suivant les puissances de x, nous emploierons la formule de Maclaurin:

$$u = u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 x^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 x^3 + \ldots,$$

et les coefficients seront donnés par la formule précédente, en y faisant $x = 0$.

En faisant donc $x = 0$, nous aurons premièrement

$$u = f(t), \quad y = t, \quad \frac{dn}{dt} = f'(t).$$

Ensuite les formules

$$\begin{aligned}
\theta \quad &= \varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y),\\
\theta' \quad &= 2\varphi_2(y) + 3.2x\varphi_3(y) + \ldots + n(n-1)x^{n-2}\varphi_n(y),\\
\theta'' \quad &= 3.2\varphi_3(y) + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\varphi_n(y),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\theta^{(n-1)} &= n(n-1)\ldots 2.1\varphi_n(y),\\
\theta^{(n)} \quad &= 0
\end{aligned}$$

donneront

$$\theta = \varphi_1(t), \quad \theta' = 2\varphi_2(t), \quad \theta'' = 3.2\varphi_3(t), \quad \ldots, \quad \theta^{(n-1)} = n(n-1)\ldots 2.1\varphi_n(t),$$
$$\theta^{(n)} = \theta^{(n+1)} = \theta^{(n+2)} = \ldots = 0.$$

Nous aurons donc

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = f'(t).\varphi_1(t),$$
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{d\left\{f'(t).[\varphi_1(t)]^2\right\}}{dt} + 2f'(t)\varphi_2(t),$$
$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = \frac{d^2\left\{f'(t)[\varphi_1(t)]^3\right\}}{dt^2} + 6\frac{d[f'(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)]}{dt} + 6f'(t)\varphi_3(t).$$

En général

$$\left(\frac{d^iu}{dx^i}\right)_0 = \sum \frac{1.2\ldots i d^{b-1}\left\{f'(t).[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi^2(t)]^\beta\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda\right\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda dt^{b-1}},$$

où l'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières et positives ou nulles qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = i$$

et où b est donné par la formule

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Nous avons donc la formule

$$u = f(t) + xf'(t)\varphi_1(t) + \ldots + x^i \sum \frac{d^{b-1}\left\{f'(t)[\varphi_1(t)]^\alpha.\ .[\varphi_n(t)]^\lambda\right\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda dt^{b-1}} + \ldots,$$

qui, en posant $n = 1$, donne celle de Lagrange.

VIII

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES

(Journal de mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville
— Paris, 1889, 4.e série, t. V)

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS IMPLICITES

Dans une Note *Sur le développement des fonctions implicites,* publiée dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées,* 3.e série, t. VII, 1881, nous avons présenté une formule pour développer en série, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, une fonction u définie par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} u = f(z), \\ z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + \varphi^k\varphi_k(z), \end{cases}$$

à savoir

$$(2) \qquad u = f(t) + xf'(t)\varphi_1(t) + \ldots + x^n \sum \frac{d^{b-1}\{f'(t)[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta \ldots [\varphi_k(t)]^\lambda\}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}} + \ldots,$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières, positives ou nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + k\lambda = n,$$

et où

$$b = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

De cette question se sont ensuite occupés M. E. Cesàro dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3.e série, t. IV, 1885, et M. David dans le *Journal de l'École Polytechnique,* LVII.e Cahier, 1887.

Nous revenons aujourd'hui sur ce sujet pour déterminer quelle valeur de u doit être considérée comme représentée par la série (2), et pour étudier les condition de convergence de cette série.

THÉORÈME. — *Soient*

$f(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\ldots$, $\varphi_k(z)$ *des fonctions holomorphes dans l'intérieur d'un contour* K;

t *un point intérieur à ce contour;*

η *une quantité positive assez petite pour que la condition* ($|A|$ représentant le module de A)

$$\left|\frac{\eta\,\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{\eta^2\,\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{\eta^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|<1 \tag{3}$$

soit satisfaite le long du contour K. *A chaque valeur de x, qui satisfait à la condition $|x|<\eta$, correspond une racine unique z_1 de l'équation que détermine z, existant à l'intérieur du contour* K, *et $f(z_1)$ est susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x au moyen de la formule* (2).

En effet, de la condition (3) et de la condition $|x|<\eta$ on tire

$$\left|\frac{x\,\varphi_1(z)}{z-t}\right|+\left|\frac{x^2\,\varphi_2(z)}{z-t}\right|+\ldots+\left|\frac{x^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|<1,$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{x\,\varphi_1(z)+x^2\,\varphi_2(z)+\ldots+x^k\,\varphi_k(z)}{z-t}\right|<1.$$

Donc, on peut appliquer la série de Lagrange aux équations

$$u=f(z),$$
$$z=t+x\,F(z),$$

où

$$F(z)=\varphi_1(z)+x\varphi_2(z)+\ldots+x^{k-1}\,\varphi_k(z);$$

ce qui donne [1]

$$f(z_1)=f(t)+x\,F(t)f'(t)+\ldots+\frac{x^m}{m!}\,\frac{d^{m-1}\,\{[F(t)]^m f'(t)\}}{dt^{m-1}}+R_m, \tag{4}$$

[1] Voir notre *Curso de Analyse infinitesimal* (*Calculo integral*, 2.ª parte, p. 284).

où

$$R_m = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_K \frac{x^{m+1}[F(z)]^{m+1} f(z)[1 - x\varphi_1'(z) - \ldots - x^k \varphi_k'(z)]\,dz}{(z-t)^{m+2}\left[1 - \frac{xF(z)}{z-t}\right]}.$$

On sait que, pour les valeurs de x considérées, la série qui résulte de (4) en y posant $m = \infty$ est convergente; nous allons faire voir qu'elle est *uniformément* convergente.

L'expression de R_m donne

$$|R_m| < \frac{1}{2\pi} \int\limits_K \left|\frac{f(z)}{z-t}\right| \left|\frac{xF(z)}{z-t}\right|^{m+1} \frac{\{1 + |x\varphi_1'(z)| + \ldots + |x^k \varphi_k'(z)|\}\,ds}{\left|1 - \frac{xF(z)}{z-t}\right|},$$

mais

$$\begin{aligned}\left|\frac{xF(z)}{z-t}\right| &< \left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right| \\ &< \left|\frac{\eta\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{\eta^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\eta^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{xF(z)}{z-t}\right| > 1 - \left|\frac{xF(z)}{z-t}\right| &> 1 - \left\{\left|\frac{x\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{x^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{x^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\} \\ &> 1 - \left\{\left|\frac{\eta\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \left|\frac{\eta^2\varphi_2(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\eta^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\};\end{aligned}$$

donc

$$|R_m| < \frac{1}{2\pi} \int\limits_K \left|\frac{f(z)}{z-t}\right| \left\{\left|\frac{\eta\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\eta^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}^{m+1} \frac{\{1 + |\eta\varphi_1'(z)| + \ldots + |\eta^k\varphi_k'(z)|\}\,ds}{1 - \left\{\left|\frac{\eta\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\eta^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|\right\}}.$$

Soient maintenant:

M le maximum de

$$\left|\frac{f(z)}{z-t}\right|;$$

M$_1$ le maximum de

$$1 + |\eta\varphi_k'(z)| + \ldots + |\eta^k\varphi_k'(z)|;$$

M$_2$ le maximum de

$$\left|\frac{\eta\varphi_1(z)}{z-t}\right| + \ldots + \left|\frac{\eta^k\varphi_k(z)}{z-t}\right|$$

le long du contour K. Nous avons

$$|\mathrm{R}_m| < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{MM_1M_2^{m+1}}}{1-\mathrm{M_2}}\,ds,$$

et, par conséquent, s représentant la longueur du contour K,

$$|\mathrm{R}_m| < \frac{\mathrm{MM_1\,M_2^{m+1}}\,s}{2\pi(1-\mathrm{M_2})}$$

pour toutes les valeurs de x, dont le module est inférieur à η.

Comme $\mathrm{M_2} < 1$, on voit donc que l'on peut, quelque petite que soit la quantité ε, déterminer m de manière que l'on ait $|\mathrm{R}_m| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x| < \eta$.

Donc la série considérée est *uniformément convergente* dans le cercle de rayon η.

Cela posé, si dans cette série on pose

$$\mathrm{F}(t) = \varphi_1(t) + x\,\varphi_2(t) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(t),$$

on voit facilement qu'on peut développer chaque terme suivant les puissances de x, et qu'on obtient des polynômes respectivement des degrés 0, k, $2k$, ...

Donc, en vertu d'un théorème bien connu de la théorie des séries [1], la fonction $f(z_1)$ est susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et convergente dans le cercle de rayon η.

Le théorème énoncé est donc démontré.

La méthode précédente donne même la série trouvée dans mon article antérieur.

En effet, le terme général de la série (4) est

$$\frac{x^b}{b\,!}\,\frac{d^{b-1}\left\{[\varphi_1(t)+\ldots+x^{k-1}\varphi_k(t)]^b f'(t)\right\}}{dt^{b-1}}$$

ou

$$\frac{x^b}{b\,!}\,\frac{d^{b-1}\sum \frac{b\,!\,[\varphi_1(t)]^\alpha\,[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!}\,x^{\beta+2\gamma+\ldots+(k-1)\lambda}}{dt^{b-1}},$$

---

[1] M. Weierstrass, *Monatsberichte der Kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 1880; *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1881, p 160.

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=b,$$

ou

$$\sum \frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)\}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}}\,x^{\alpha+2\beta+\ldots+k\lambda}.$$

Donc le coefficient du terme du degré n dans le développement de $f(z_1)$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x sera

$$\sum \frac{d^{b-1}\{[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi_2(t)]^\beta\ldots[\varphi_k(t)]^\lambda f'(t)\}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,dt^{b-1}},$$

où la somme $\sum$ se rapporte à toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+k\lambda=n$$

et où

$$b=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

EE

NOTA

1. A questão que vimos de considerar n'este trabalho e no anterior tendo merecido a attenção de alguns geometras illustres, que a respeito d'ella têem escripto artigos em que se referem á fórmula que n'elles foi demonstrada, julgamos conveniente dar aqui uma indicação succinta dos resultados de maior interesse, por elles obtidos, que estão ligados aos apresentados nos referidos trabalhos.

Mencionaremos, em primeiro logar, um artigo intitulado — *Généralisation de la formule de Lagrange,* publicado por E. Cesàro nos *Nouvelles Annales des Mathématiques* (Paris, 3.ª série, t. IV), no qual este sabio geometra reduziu os coefficientes do desenvolvimento de $f(z)$ a uma fórma differente da nossa, exprimindo-os por meio de um *algorithmo,* a que deu o nome de *isobarico* e de que por varias vezes se tinha anteriormente occupado, o qual designa a somma dos productos que se formam dando, em

$$f(z_1) f(z_2) \dots f(z_s),$$

a $z_1, z_2, \dots, z_s$ todos os valores inteiros e positivos que satisfazem á equação

$$z_1 + z_2 + \dots + z_s = \eta,$$

$f(z)$ sendo uma funcção dada e η um numero inteiro dado.

Representando este algorithmo pela notação $\overset{s}{\underset{\eta}{\mathrm{S}}}[f(z)]$, mostrou que a fórmula (2) póde ser escripta do modo seguinte:

$$f(z) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{b!} \frac{d^{b-1}}{dt^{b-1}} \left\{ f'(t) \overset{b}{\underset{n}{\mathrm{S}}} [\varphi_r(t)] \right\}.$$

2. Ao desenvolvimento em série ordenada segundo as potencias de x da funcção u, definida pelas egualdades (1), deu Bassani, professor na Escola Naval de Livorno, outra fórma, em um artigo intitulado — *Generalizzazione della formola de Lagrange,* o qual foi publicado nas *Atti del R. Istituto veneto di scienze* (série 6.ª, t. v). O resultado a que chegou póde ser deduzido da fórmula (4), que dá

$$f(z)=f(t)+\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b\,!}\cdot\frac{d^{b-1}\left\{f'(t)\left[x\varphi_1(t)+x^2\varphi_2(t)+\ldots\right]^b\right\}}{dt^{b-1}},$$

e, portanto, pondo

$$[\varphi_1(t)+x\varphi_2(t)+x^2\varphi_3(t)+\ldots]^b=\varphi_{b,0}(t)+\varphi_{b,1}(t)\,x+\varphi_{b,3}(t)\,x^2+\ldots,$$

$$f(z)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{b\,!}\,\frac{d^{b-1}}{dt^{b-1}}\left[\varphi_{b,n-b}(t)f'(t)\right].$$

Para calcular as quantidades $\varphi_{b,n-b}(t)$ apresentou Bassani, no referido trabalho, uma fórmula devida a Eisenstein.

3. Occupou-se tambem do desenvolvimento em série das funcções definidas pelas equações (1) David, tenente coronel de artilheria no exercito francez, em uma memoria importante publicada no caderno LVII do *Journal de l'École Polytechnique de Paris,* na qual demonstrou que da solução d'esta questão depende a do problema geral que tem por fim desenvolver em série as funcções algebricas implicitas.

Consideremos, com effeito, a funcção definida pela equação algebrica $F(x, y)=0$, ou, mudando x em x_1+x-x_1 e y em y_1+y-y_1,

$$f_1(x-x_1,\ y-y_1)=0,$$

e supponhamos que $(x_1,\ y_1)$ é um ponto *ordinario* da funcção. N'este caso uma, pelo menos, das derivadas parciaes $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ deve ser differente de zero no ponto considerado, e porisso esta equação póde ser reduzida primeiramente a uma das fórmas

$$y=y_1+A\,(y-y_1)^2+\ldots+(x-x_1)\,\Theta\,[x-x_1,\ y-y_1],$$

ou

$$x=x_1+A\,(x-x_1)^2+\ldots+(y-y_1)\,\Theta\,[x-x_1,\ y-y_1],$$

onde Θ representa uma funcção inteira de $x-x_1$ e $y-y_1$, e depois a uma das fórmas

$$y-y_1=(x-x_1)\,\psi\,[x-x_1,\ y-y_1],$$

ou

$$x-x_1=(y-y_1)\,\psi\,[x-x_1,\ y-y_1],$$

*

onde ϕ representa uma funcção racional de $x-x_1$ e $y-y_1$, cujo denominador, no caso da primeira equação, só contém $y-y_1$ e não é nullo quando $y=y_1$, e, no caso do segundo, só contém $x-x_1$ e não é nullo quando $x=x_1$.

Basta agora pôr na primeira equação $x-x_1=\text{X}$, ou na segunda $y-y_1=\text{Y}$, para as reduzir á fórma que tem a segunda das equações (1).

Posto isto, para desenvolver em série a funcção u, definida pela equação (1), indicou o auctor da memoria a que nos estamos referindo dois methodos. No primeiro fez uso da fórmula de Lagrange, de que deu uma nova demonstração e de que fez um estudo profundo. No segundo fez uso da fórmula (2), da qual deu tambem uma nova demonstração, fundada na doutrina das derivações de Arbogast.

4. Terminaremos esta nota mencionando ainda, a respeito da questão considerada, um trabalho de Stolz, professor na Universidade de Innsbruck, publicado no t. XCV dos *Sitzungsberichte der Keiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien,* no qual, referindo-se a um trabalho do Dr. Weiss, intitulado *Entwicklungen zum Lagrange'schen Reversions theorem,* fez notar que uma formula por este ultimo considerada está contida na fórmula (2), por nós anteriormente dada; e um trabalho, em lingua russa, publicado recentemente por Bougaïev, professor na Universidade de Moscow, no t. XXII de *Bulletim da Sociedade mathematica de Moscow,* no qual é apresentada uma nova demonstração da fórmula (4) e se indica a relação d'esta fórmula com a fórmula (2).

IX

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

(Journal für die reine und angewandte Mathematik,
gegründet von Crelle-Berlin 1903. Band CXXV)

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

1. On peut faire dépendre l'étude des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, dont les multiplicateurs sont c et c', de l'étude d'autres dont l'un des multiplicateurs est égal à l'unité. En considérant donc ce dernier cas, soit $f(x)$ une fonction donnée qui satisfasse aux conditions

$$f(x+2\omega)=f(x), \quad f(x+2\omega')=cf(x).$$

On sait développer cette fonction en série trigonométrique, valable dans tout le plan de représentation de la variable x, et aussi en série valable dans la zone comprise entre deux droites dont l'inclinaison sur l'axe est égale à l'argument de ω. *Briot* et *Bouquet,* dans leur ouvrage sur la *Théorie des fonctions elliptiques,* ont employé, pour obtenir ces développements dans le cas particulier où $c=-1$, la théorie des résidus de *Cauchy*. Nous allons démontrer qu'on peut traiter cette question dans le cas général, où c est un nombre quelconque, au moyen de la même théorie. Nous partirons, dans ce but, de l'intégrale

$$U=\int \frac{f(z)\, e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\, dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

qui nous a servi déjà pour obtenir la formule de *Fourier,* dans un article publié dans le tome CXII, p. 97, de ce Journal [1]; et nous obtiendrons de cette manière non seulement les

---

[1] Veja-se a pag. 157 do presente volume.

résultats connus, mais encore quelques développements, valables dans un demi-plan, qui, à ce que nous croyons, n'ont pas encore été remarqués. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ ait un seul pôle dans chaque parallélogramme des périodes, et que ce pôle soit simple. On pourrait traiter au moyen de la même analyse le cas général où dans chaque parallélogramme il existe un nombre quelconque de pôles, avec un degré quelconque de multiplicité; mais on n'en a pas besoin, parce qu'on peut réduire ce cas à l'antérieur au moyen de la formule de décomposition de *Hermite*.

2. Considérons dans le plan de représentation de x un parallélogramme ABCD dont le côté DA représente géométriquement, en grandeur et en direction, la quantité 2ω, et lont le côté AB représente la quantité $2(\alpha+\beta+1)\omega'$, α et β étant deux nombres entiers positifs quelconques.

Dans ce parallélogramme la fonction $f(x)$ a $\alpha+\beta+1$ pôles, qu'on peut représenter par

$$a-2\alpha\omega',\ a-2(\alpha-1)\omega',\ \ldots,\ a,\ a+2\omega',\ a+4\omega',\ \ldots,\ a+2\beta\omega';$$

et, si l'on représente par k le résidu de la fonction par rapport au pôle a, ces résidus par rapport aux pôles que contient le parallélogramme considéré, sont respectivement

$$c^{-\alpha}k,\ c^{-(\alpha-1)}k,\ \ldots,\ k,\ ck,\ \ldots,\ c^{\beta}k.$$

Cela posé, considérons l'intégrale U prise le long du contour S du parallélogramme ABCD considéré; et soit x l'affixe d'un point de l'intérieur de ce parallélogramme.

On trouve, au moyen du théorème fondamental de la théorie des résidus, en remarquant que les résidus de la fonction

$$\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

par rapport à ses pôles x et $a+2m\omega'$, sont

$$\frac{\omega}{i\pi}f(x),\quad kc^m.\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

la formule suivante:

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\frac{i\pi}{\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} kc^m\cdot\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

qui, à cause de l'égalité

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega'),$$

donne

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)\,{}^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=+\beta} c^m\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right].$$

Si l'on remarque maintenant que les parties de l'intégrale, qui entre dans cette formule, qui correspondent aux droites AB et DC sont égales, on voit qu'on peut écrire

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\left[\int_{DA}\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\int_{CB}\frac{f(z)\,e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\,dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c^m\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right].$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que l'argument de ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Nous avons déjà démontré dans ce Journal (tome CXII, p. 119) [1] qu'on a alors, pour tous les points z de la droite DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}=\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}+\frac{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi z}{\omega}}}+\cdots,$$

[1] Veja-se na pag. 157 do presente volume.

FF

et, pour tous les points z de la droite CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = -\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi x}{\omega}}} + \dots\right].$$

Donc nous avons

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} - \frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c^m \left[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - a - 2m\omega')\right],$$

où

$$A_n = \frac{1}{2\omega} \int_{DA} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz,$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2\omega} \int_{CB} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz.$$

3. Nous allons maintenant chercher les valeurs des intégrales qui entrent dans les expressions de A_n et de A_{-n}.

Supposons, pour fixer les idées, que la partie imaginaire de ω' soit positive, et considérons le parallélogramme DAA′D′ dont les côtés DA et AA′ sont égaux à 2ω et $2\omega'$ et qui contient à l'intérieur le pôle $a - 2\alpha\omega'$. On trouve, en appliquant le théorème fondamental de la théorie des residus,

$$\int_{DA} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz + \int_{AA'} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz + \int_{A'D'} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz + \int_{D'D} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz$$
$$= 2i\pi c^{-\alpha} k e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(a - 2\alpha\omega')} = 2i\pi c^{-\alpha} k q^{2n\alpha} e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

en posant $q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}}$; mais

$$\int_{AA'} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \int_{DD'} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz,$$

$$\int_{D'A'} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \int_{DA} f(z + 2\omega') e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(z + 2\omega')} dz = q^{-2n} c \int_{DA} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz;$$

donc

$$\int_{\mathrm{DA}} f(z)\, e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz = \frac{2i\pi k q^{2n\alpha} c^{-\alpha}}{1 - cq^{-2n}}\, e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

et par conséquent

$$\mathrm{A}_n = \frac{i\pi k}{\omega} \cdot \frac{q^{2n\alpha} c^{-\alpha}}{1 - cq^{-2n}}\, e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière, en considérant le parallélogramme C′B′BC, dont les côtés C′B′ et B′B sont égals à 2ω et $2\omega'$ et qui contient à l'intérieur le pôle $a + 2\beta\omega'$,

$$\int_{\mathrm{CB}} f(z)\, e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}\, dz = \frac{2i\pi k q^{2n(1+\beta)} c^{1+\beta}}{1 - cq^{2n}}\, e^{\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

et par conséquent

$$\mathrm{A}_{-n} = \frac{i\pi k}{\omega} \cdot \frac{q^{2n(1+\beta)} c^{1+\beta}}{1 - cq^{2n}}\, e^{\frac{ni\pi a}{\omega}}.$$

Nous avons donc la formule suivante

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega} \Bigg[& \frac{c^{-\alpha}}{1-c} + \left(\frac{q^2}{c}\right)^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1 - cq^{-2n}}\, e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \\ & + (cq^2)^{\beta+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1 - cq^{2n}}\, e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \Bigg] \\ & - \frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c^m \left[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - a - 2m\omega') \right], \end{aligned} \right.$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points d'une zone infinie comprise entre les droites DA et CB.

4. Nous allons considérer les conséquences de cette formule. Mais, avant de le faire, nous introduirons, pour abréger le langage, les notations suivantes. Nous représenterons par K_m la droite qui passe par le pôle $a + 2m\omega'$ et qui fait un angle égal à l'argument de ω avec l'axe des abscisses; et nous représenterons par $(\mathrm{K}_m, \varepsilon)$ celui des demiplans qu'on obtient quand on coupe le plan de représentation de la variable x par la droite K_m, qui contient le point ε.

Cela posé, la première conséquence qu'on tire de la formule (1.) est la formule suivante, qu'on obtient en y posant $\alpha=0$ et $\beta=0$:

$$(2.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}ce^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{2n}}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)\right],$$

laquelle a lieu dans la zone comprise entre les droites K_{-1} et K_1.

De cette formule on tire une autre formule importante, en ayant égard au développement suivant:

$$\frac{1}{2}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)\right]=\frac{1}{1-e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}=1+e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}+e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x-a)}+e^{\frac{3i\pi}{\omega}(x-a)}+\ldots,$$

lequel a lieu dans le demi-plan $(K_0,\ a+2\omega')$, si l'on continue à supposer que l'argument de ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette autre formule est la suivante:

$$(3.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c}{q^{2n}-c}e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cq^{2n}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right],$$

valable dans la zone comprise entre les droites K_0 et K_1.

En ponsant $c=e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$ et en ayant égard aux relations

$$\frac{1}{1-cq^{-2n}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2\omega}(2n\omega'+v)}}{2i\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')},$$

$$\frac{q^{2n}c}{1-cq^{2n}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2\omega}(2n\omega'-v)}}{2i\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')},$$

$$1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)=i\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)},$$

on peut encore écrire les formules qu'on vient d'obtenir de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{i\pi v}{2\omega}} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}} \frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)}\right],$$

ou

$$(4.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon\frac{i\pi v}{2\omega}} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\varepsilon\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)}\right],$$

où $\varepsilon=+1$, quand n est nul ou positif, et $\varepsilon=-1$, quand n est négatif; et

$$(5.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega} e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}.$$

On tire de cette dernière formule, en y considérant v comme variable et en posant

$$f_1(x, v)=k^{-1} f(x, v),$$

les égalités

$$f_1(x, v+2\omega)=f_1(x, v),\quad f_1(x, v+2\omega')=e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)} f_1(x, v).$$

Donc $f_1(x, v)$ est aussi une fonction doublement périodique de v, de seconde espèce, dont les multiplicateurs sont 1 et $e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}$, dont les périodes sont encore 2ω et $2\omega'$, et dont les pôles sont les nombres $2n\omega'$. La formule (5.) fait aussi voir que le résidu de $f_1(x, v)$ par rapport au pôle 0 est égal à l'unité. Nous avons donc encore la formule

$$(5'.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')},$$

valable pour toutes les valeurs de x et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre deux droites qui passent par les points d'affixe 0 e $2\omega'$ et dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses est égale à l'argument de K; et la formule

$$(4'.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v+\varepsilon\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')}+\frac{e^{\frac{i\pi v}{2\omega}}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}v}\right],$$

valable aussi pour toutes les valeurs de x et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre deux parallèles aux droites antérieures, menées par les points d'affixe $-2\omega'$ et $2\omega'$.

Les formules qu'on vient d'obtenir sont équivalentes à des formules connues; nous ne nous y arrêterons donc plus, et nous passons à considérer celles qui résultent de (1.) en y posant $\alpha=\infty$, ou $\beta=\infty$.

5. Soit θ l'argument de cq^{2n}. On a alors

$$\begin{aligned}|1-cq^{2n}|=|1-|cq^{2n}|(\cos\theta+i\sin\theta)|&=\sqrt{1-2|c||q|^{2n}\cos\theta+|c|^2|q|^{4n}}\\&>\sqrt{1-2|c||q|^{2n}+|c|^2|q|^{4n}},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$|1-cq^{2n}|^2>[1-|c||q|^{2n}]^2$$

ou

$$|1-cq^{2n}|>|1-|c||q|^{2n}|.$$

Mais, $|q|$ étant <1, nous pouvons donner à n_1 une valeur assez grande pour qu'on ait $|c||q^{2n}|<1$, quand $n\geqq n_1$; et alors on a

$$(\mathrm{A}.)\qquad |1-cq^{2n}|>1-|c||q|^{2n}\geqq 1-|c||q|^{2n_1}$$

quand $n\geqq n_1$.

Cela posé, considérons la série

$$\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)},$$

qui entre dans la formule (1.), laquelle peut être décomposée dans les sommes

$$\sum_{n=1}^{n=n_1-1} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-cq^{2n}} e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)},$$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-cq^{2n}} e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}.$$

La première somme tend vers $\dfrac{e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^2}$ quand β tend vers l'infini.

Au moyen de l'inégalité (A.) on voit que les valeurs des modules des termes de la deuxième somme sont inférieures aux valeurs des termes correspondantes de la progression géométrique

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-|c|\,|q|^{2n_1}}\right| \left|e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right|,$$

dont la raison est égale à

$$|q^{2(1+\beta)}| \left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|;$$

et, comme on peut donner à β' une valeur assez grande pour qu'on ait

$$|q^{2(1+\beta)}| \left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right| < 1$$

quand $\beta \overline{\gtrless} \beta'$, on voit aussi que la somme de cette progression est alors égale à

$$\frac{|q^{2(n_1-1)(1+\beta)}| \left|e^{-\frac{n_1 i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}{[1-|c|\,|q|^{2n_1}]\left[1-|q|^{2(1+\beta)}\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|\right]},$$

et qu'elle tend vers zéro quand β tend vers l'infini.

Nous avons donc

$$\lim_{\beta=\infty} |S| = \left|\frac{e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^2}\right|.$$

Si l'on remarque maintenant que $|cq^2|^{\beta+1}$ tend vers zéro quand β tend vers l'infini, lors qu'on a $|cq^2|<1$, on tire de la formule (1.), en y posant $\alpha=0$ et $\beta=\infty$, le développement suivant:

$$(6.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2n}}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty}c^m\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right]$$

valable dans le demi-plan $(K_{-1},\ \infty)$ et applicable quand $|c|<|q|^{-2}$.

En posant $c=e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$, on peut écrire cette formule de la manière suivante:

$$(7.)\quad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[e^{\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}+e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')}\right].$$

6. Pour déterminer les valeurs qu'on peut donner à v dans cette formule, on doit remarquer que l'inégalité $|cq^2|<1$ peut être écrite de la manière suivante:

$$\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(v-2\omega')}\right|<1,$$

ou, en représentant par θ, θ' et τ les arguments de ω, ω' et v,

$$|v|\sin(\tau-\theta)<2\,|\omega'|\sin(\theta'-\theta).$$

Donc la distance du point d'affixe v à la droite qui passe par l'origine et fait un angle égal à θ avec l'axe des abscisses, doit être plus petite que la distance du point d'affixe $2\omega'$ à la même droite. En représentant donc par L_n la droite qui passe par le point d'affixe $2n\omega'$ et qui fait l'angle θ avec l'axe des abscisses, on peut dire que la formule antérieure est valable dans le demi-plan $(L_1,\ -\infty)$. On suppose toujours θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas particulier où a s'évanouit, le développement précédent est applicable dans la région du plan située au-dessus de K_{-1}, pour ce qui concerne x, et dans la région du plan située au-dessous de L_1, pour ce qui concerne v.

7. On a vu déjà (n.° 4) que $k^{-1}f(x)$ est une fonction doublement périodique de v, dont les périodes sont 2ω et $2\omega'$, les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}$, et les pôles les nombres $2n\omega'$. On a vu aussi que le résidu de cette fonction par rapport au pôle 0 est égal à 1. Si l'on pose donc dans la formule antérieure $a=0$ et on change ensuite x en v et v en $x-a$, on obtient la formule

$$(8.)\quad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')}+e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}\right],$$

valable dans le demi-plan (L_{-1}, ∞), pour ce qui concerne v, et dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$, pour ce qui concerne x.

8. Considérons le cas particulier où l'on a $|c|<1$. Alors la formule (6.) peut encore être écrite de la manière suivante

$$(9.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\frac{1}{2(1-c)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2n}}-\frac{i}{2}\sum_{m=0}^{\infty}c^m\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right],$$

ou encore, en posant $c=e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$,

$$(10.)\ f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}e^{\frac{i\pi v}{2\omega}}\left[\frac{1}{2\sin\frac{\pi v}{2\omega}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}\right]+\frac{\pi k}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{ni\pi v}{\omega}}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega').$$

Cette dernière formule est applicable dans le demi-plan $(L_0, -\infty)$.

9. Nous allons maintenant chercher les formules qui résultent de (1.) en y posant $a=\infty$. Considérons, pour cela, la série

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1-cq^{-2n}}e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}.$$

On voit, en premier lieu, comme dans le cas de la série S, considérée antérieurement, qu'on a

$$|1-cq^{-2n}|>||c||q|^{-2n}-1|.$$

Mais, comme $|q|<1$, on peut donner à n_2 une valeur qui fasse

$$|c||q|^{-2n}>1$$

quand $n \overline{\overline{>}} n_2$; et alors nous avons

$$|1 - cq^{-2n}| > |c||q|^{-2n_2} - 1,$$

quand $n \overline{\overline{>}} n_2$.

Cela posé, décomposons la série s dans les sommes

$$\sum_{n=1}^{n_2-1} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1 - cq^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)},$$

et

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1 - cq^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}.$$

La première somme tend vers la limite $\dfrac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1 - cq^{-2}}$, quand α tend vers l'infini.

Les valeurs des modules des termes de la deuxième somme sont inférieures aux valeurs des termes correspondants de la progression géométrique

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{|q|^{2(n-1)\alpha}}{|c||q|^{2n_2} - 1} \left| e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \right|,$$

dont la raison est

$$|q|^{2\alpha} \left| e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)} \right|.$$

On peut donc donner à α' une valeur assez grande pour qu'on ait

$$|q|^{2\alpha} \left| e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)} \right| < 1$$

quand $\alpha \geqq \alpha'$; et alors le module de la somme considérée sera inférieur à

$$\frac{|q|^{2(n_2-1)\alpha} \left| e^{\frac{n_2 i\pi}{\omega}(x-a)} \right|}{[|c||q|^{2n_2} - 1]\left[1 - |q|^{2\alpha} \left| e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)} \right|\right]},$$

et tend, par conséquent, vers zéro quand α tend vers l'infini.

Donc la somme s tend vers la limite $\dfrac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2}}$, quand α tend vers l'infini.

10. Nous pouvons maintenant voir ce qui arrivera lorsqu'on pose en (1.) $\beta=0$, $\alpha=\infty$.

1.er cas. Soit $|c|>1$. On a alors aussi $|c|>|q|^2$; et la formule (1.) donne la suivante:

$$(11.)\qquad f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cq^{2n}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty}c^{-m}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2m\omega')\right],$$

valable dans le demi-plan $(K_1,-\infty)$.

On peut écrire encore cette formule de la manière suivante:

$$(12.)\qquad f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}+e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{mi\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2m\omega')}\right].$$

Cette formule est valable dans le demi-plan (L_0,∞), pour ce qui concerne v; et dans le demi-plan $(K_1,-\infty)$, pour ce qui concerne x.

On peut enfin écrire la formule (11.) de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\left[\frac{1}{2\sin\frac{\pi v}{2\omega}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}\right]+\frac{\pi k}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{ni\pi v}{\omega}}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega').$$

2.ème cas. Si $|c|<1$ et aussi $|c|>|q|^2$, la formule (1.) donne, en y posant $\alpha=\infty$, $\beta=0$, et en ayant égard à l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{c^{-\alpha}}{1-c}-\frac{1}{2}\sum_{m=-\alpha}^{0}c^m&=c^{-\alpha}(1+c+c^2+\ldots+c^{\alpha}+c^{\alpha+1}+\ldots)-\frac{1}{2}(1+c^{-1}+\ldots+c^{-\alpha})\\&=\frac{1}{2}(c^{-\alpha}+c^{-(\alpha-1)}+\ldots+1)+c+c^2+\ldots\\&=\frac{1}{2}(c^{-\alpha}+c^{-(\alpha-1)}+\ldots+1)+\frac{c}{1-c},\end{aligned}$$

la formule suivante:

$$f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cq^{2n}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right]-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}c^{-n}\left[i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')-1\right],$$

valable dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$.

On peut encore écrire cette formule de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}+e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')}\right],$$

où v représente l'affixe d'un point quelconque de la zone comprise entre les droites L_0 et L_{-1}. Cette formule coïncide avec (8.); elle est donc applicable dans une aire plus large, pour ce qui concerne v, que celle que donne la méthode au moyen de laquelle on vient de la trouver.

11. Supposons maintenant qu'on ait

$$|q|^{-2}>|c|>|q|^2.$$

La formule (1.) donne alors

$$f(x)=-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c^m\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right],$$

lorsque $|c|>1$; et

$$f(x)=-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c^m\left[i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')-1\right]$$

lorsque $|c|<1$.

Ces développements sont valables dans tout le plan de représentation de la variable x et peuvent encore être écrits de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')},$$

et

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\,e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(v+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')}.$$

Dans la première formule on doit donner à v les valeurs représentées par les points de la zone comprise entre les droites L_0 et L_1, et dans la deuxième les valeurs représentées par les points de la zone comprise entre les droites L_0 et L_{-1}.

La première de ces formules coïncide avec (5'.). La deuxième ne diffère pas essentiellement de la première, puisqu'on passe de la deuxième à la première au moyen de la formule

$$f(x,v)=e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}f(x,v-2\omega').$$

12. Considérons maintenant le cas où $|c|=1$. La formule (1.) donne alors, en y posant $\alpha=\infty$ et $\beta=\infty$,

$$f(x)=\frac{i\pi k}{\omega}\lim_{\alpha=\infty}\left[\frac{c^{-\alpha}}{1-c}-\frac{1}{2}\sum_{m=-\alpha}^{\infty}c^m\left(1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right)\right].$$

Dans le cas particulier où $c=-1$, on a, en supposant que α soit un nombre entier *pair*, égal à $2t$,

$$f(x)=\frac{i\pi k}{2\omega}\left[1-\lim_{t=\infty}\sum_{m=-2t}^{\infty}(-1)^m\left(1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right)\right],$$

et, en supposant $\alpha=2t+1$,

$$f(x)=\frac{i\pi k}{2\omega}\left[-1-\lim_{t=\infty}\sum_{m=-(2t+1)}^{\infty}(-1)^m\left(1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right)\right].$$

Ces deux formules donnent, en réunissant, dans chacune, les termes consécutifs, deux à deux,

$$(13.)\quad f(x)\mp\frac{i\pi k}{2\omega}=\mp\frac{\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi\frac{\omega'}{\omega}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2(m+1)\omega')},$$

où m est un nombre *pair* dans le cas du signe supérieur et *impair* dans le cas du signe inférieur.

La première des formules considérées donne encore, en réunissant les termes consécutifs, deux à deux, excepté celui qui correspond à $m=0$,

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\Bigg[\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a) &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\frac{\omega'}{\omega}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}[x-a-2(2n-1)\omega']\sin\frac{\pi}{2\omega}[x-a-4n\omega']} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\frac{\omega'}{\omega}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}[x-a+2(2n-1)\omega']\sin\frac{\pi}{2\omega}[x-a+4n\omega']}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

13. On peut encore déduire de (1.) un autre développement de $f(x)$, applicable auss lorsque $c=-1$. En effet, si l'on y pose $\alpha=\beta$, il vient

$$f(x) = (-1)^{\alpha}\frac{i\pi k}{\omega}\left[\frac{1}{2} + q^{2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1+q^{-2n}}e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} - q^{2(\alpha+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(n-1)(1+\alpha)}}{1+q^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right]$$

$$-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{\alpha}(-1)^m + \frac{\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{\alpha}(-1)^m\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega'),$$

et, en posant ensuite $\alpha=\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\lim_{\alpha=\infty}\sum_{m=-\alpha}^{\alpha}(-1)^m\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega').$$

14. On peut changer les rôles des périodes 2ω et $2\omega'$ dans la formule (1.) et dans celles qui en découlent, ce qui conduit à un nouveau groupe de formules, comme on va voir.

Considérons la fonction

$$\mathrm{F}(x) = f(x)\,e^{-\frac{ux}{2\omega'}},$$

où $u=\log c$.

On a, en posant $c_1 = e^{\frac{u\omega}{\omega'}}$,

$$\mathrm{F}(x+2\omega') = \mathrm{F}(x),\qquad \mathrm{F}(x-2\omega) = e^{\frac{u\omega}{\omega'}},\qquad \mathrm{F}(x) = c_1\,\mathrm{F}(x).$$

Si l'on applique maintenant la formule (1.) à la fonction $F(x)$ et l'on remarque que son résidu par rapport au pôle a est égal à $ke^{-\frac{ua}{2\omega'}}$, on trouve la formule suivante:

$$(15.)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{i\pi k}{\omega'} e^{\frac{u(x-a)}{2\omega'}} \left[\dfrac{c_1^{-\alpha}}{1-c_1} + \left(\dfrac{q_1^2}{c_1}\right)^{\alpha} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{q_1^{2(n-1)\alpha}}{1-cq_1^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \right. \\ \quad + (c_1 q_1^2)^{\beta+1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{q_1^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-c_1 q_1^{2n}} e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \\ \quad \left. -\dfrac{1}{2} \sum\limits_{m=-\alpha}^{m=\beta} c_1^m \left[1 + i\cot\dfrac{\pi}{2\omega}(x-a+2m\omega)\right] \right]. \end{cases}$$

Dans cette formule on a $q_1 = e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$, et par conséquent $|q_1| < 1$.

On tire de cette formule des conséquences analogues à celles qu'on tire de la formule (1.)

Considérons, en particulier, le cas où $c = -1$, et par conséquent $u = i\pi$.

Alors $|c_1||q_1| = 1$; on aura donc

$$|q_1|^{-2} > |c_1| > |q_1|^2, \qquad |c_1| > 1.$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (B.), qui donne

$$f(x) = -\frac{i\pi k}{2\omega'} e^{\frac{i\pi(x-a)}{2\omega'}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_1^m \left[1 + i\cot\frac{\pi}{2\omega'}(x-a+2m\omega)\right]$$

ou

$$(16.)\qquad f(x) = \frac{\pi k}{2\omega'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\omega'}(x-a+2m\omega)}.$$

On trouve cette formule dans l'ouvrage de *Briot* et *Bouquet* (p. 287).

15. Nous ne terminerons pas ce que nous avons ici à dire sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique sans remarquer que de l'égalité (1.) et de ce qu'on a dit dans les n.^{os} 5 et 9 on conclut que la formule

$$f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{n_2} \frac{q^{2n\alpha'} c^{-\alpha}}{1-cq^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{q^{2n(1+\beta')} c^{\beta'+1}}{1-cq^{2n}} e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right]$$
$$-\frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha'}^{\beta'} c^m \left[1 + i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right],$$

où n_1, n_2, α', β' sont des nombres qu'on détermine d'après ce qu'on a dit dans les n.[os] mentionnés, représente $f(x)$ avec un dégré d'approximation plus grand que le nombre donné par l'expression

$$\frac{|q^{2(n_1-1)(1+\beta')}|\left|e^{-\frac{n_1 i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}{[1-|c||q|^{2n_1}][1-|q|^{2(1+\beta')}]\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}+\frac{|q^{2(n_2-1)\alpha'}|\left|e^{\frac{n_2 i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}{|1-|c||q|^{2n_2}|[1-|q|^{2\alpha'}]\left|e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}$$

16. Pour faire une application des formules précédentes, considérons la fonction, étudiée par *Jacobi* et *Hermite*

$$f(x)=\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+v)}{\mathrm{H}(v)\,\Theta(x)},$$

qui satisfait aux conditions

$$f(x+2\mathrm{K})=f(x),$$
$$f(x+2i\mathrm{K}')=e^{-\frac{i\pi v}{\mathrm{K}}}f(x),$$

et admet le pôle $-i\mathrm{K}'$ dans un parallélogramme des périodes, auquel correspond le résidu

$$k=e^{\frac{iv\pi}{2\mathrm{K}}}.$$

En posant alors dans la formule (5.)

$$\omega=\mathrm{K},\qquad \omega'=i\mathrm{K}',\qquad c=e^{-\frac{i\pi v}{\mathrm{K}}},\qquad q=e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}},\qquad a=-i\mathrm{K}',$$

on obtient la formule

$$f(x)=\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi x}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(v+2ni\mathrm{K}')},$$

valable dans tout le plan, pour ce qui concerne v, et dans la zone comprise entre les droites K_0 et K_1, qui passent par les pôles $-i\mathrm{K}'$ et $i\mathrm{K}'$ et dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses est égale à l'argument de K, pour ce qui concerne x.

La formule qu'on vient d'obtenir fut donnée par *Hermite* dans son beau et important Mémoire — *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (1885, p. 19).

Appliquons la formule (7.) à la même fonction; si l'on considère maintenant le parallélogramme des périodes qui contient le pôle $i\mathrm{K}'$, et que l'on pose, par conséquent

$$k = e^{-\frac{i\pi v}{2\mathrm{K}}}, \qquad a = i\mathrm{K}',$$

il vient

$$f(x) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi x}{\mathrm{K}}}}{\sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}} (v + 2ni\mathrm{K}')} + e^{-\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2n+1)i\pi}{2\mathrm{K}}(v - i\mathrm{K}')}}{\sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}} [x - (2n+1) i\mathrm{K}']} \right].$$

Cette formule est applicable aux valeurs de x représentées par les points du demi-plan situé au-dessus de la droite K_{-1} (l'argument de K étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$). Les valeurs qu'on peut attribuer à v dans la même formule sont représentées par les points du demi-plan situé au-dessous de la droite L_1, qui passe par le pôle $2i\mathrm{K}'$ et fait un angle égal à l'argument de K avec l'axe des abscisses.

Si l'on applique à la même fonction la formule (5'.) on trouve, en posant $a = -i\mathrm{K}'$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} e^{-\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2\mathrm{K}}(v - i\mathrm{K}')}}{\sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}} [x + (2n+1) i\mathrm{K}']},$$

valable pour toutes les valeurs de x, et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre la droite L_1 et la parallèle L_0, qui passe par le point d'affixe 0.

La formule (8.) donne enfin, en posant $a = -i\mathrm{K}'$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left[e^{\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2\mathrm{K}}(v + i\mathrm{K}')}}{\sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}} [x + (2n+1) i\mathrm{K}']} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{ni\pi x}{\mathrm{K}}}}{\sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}} (v - 2ni\mathrm{K}')} \right],$$

valable dans le demi-plan $(\mathrm{L}_{-1}, \infty)$, pour ce qui concerne v, et dans le demi-plan $(\mathrm{K}_1, -\infty)$, pour ce qui concerne x.

X

APONTAMENTOS BIOGRAPHICOS SOBRE DANIEL AUGUSTO DA SILVA

(Boletim da Direcção Geral de Instrucção Publica
— Lisboa, 1902, t. I)

APONTAMENTOS BIOGRAPHICOS SOBRE DANIEL AUGUSTO DA SILVA

Fica bem a este *Boletim,* publicado por uma alta Repartição do Estado, commemorar nas suas paginas os homens illustres do paiz que, com trabalhos de alto valor, honraram alguns dos estabelecimentos que d'ella dependem. E n'este caso está o sabio eminente, cujo nome vimos de escrever, o qual illustrou, com trabalhos cheios de originalidade e profundeza de vistas, as collecções scientificas da Academia Real das Sciencias de Lisboa, os quaes lhe dão direito ao primeiro logar entre os geometras que Portugal teve no seu tempo, e que, apesar d'isso, parece ir caindo em um lamentavel e injusto esquecimento. E a mim, que tive por elle a veneração e o respeito que o seu alto merito e as suas grandes virtudes impunham a quem se aproximava d'elle, e que considero como a maior das honras da minha vida a consideração e estima que me consagrou no principio da minha modesta carreira scientifica, é-me agradavel concorrer para esta commemoração, sentindo todavia que se não encarregue d'esta missão pessoa de mais engenho, que possa estudar com mais profundeza e descrever com maior brilho a sua importante obra scientifica.

*

* *

Daniel Augusto da Silva nasceu em Lisboa, na freguesia dos Martyres, em 16 de maio de 1814, e era filho de Roberto José da Silva e de D. Maria do Patrocinio e Silva, e irmão do Conselheiro Carlos Bento da Silva, que foi por varias vezes Ministro dos Negocios da Fazenda em situações politicas presididas pelo Duque de Avila e Bolama.

Em 1829 assentou praça na companhia dos guardas-marinhas, corpo que, para o serviço da Armada, Martinho de Mello, seguindo uma ideia anterior do grande Marquez de Pombal, creara e organizara militarmente em 1782.

Existiam nessa occasião em Lisboa duas escolas, de cujos programmas fazia parte a nautica: uma, denominada Academia Real de Marinha, fôra creada em 5 de agosto de 1779, e a outra, denominada Academia Real dos Guardas-Marinhas, fôra creada em 1 de abril de 1796 (1). Na primeira, que mais tarde foi transformada na actual Escola Polytechnica, e que preparava não só para a carreira naval mas ainda para diversas carreiras militares e civis, ensinavam-se, em um curso de tres annos, as mathematicas puras e applicadas e a arte de navegar; na segunda, que foi a antecessora da actual Escola Naval, ensinavam-se, em curso tambem de tres annos, as sciencias nauticas e militares de que carecem os officiaes da Armada e a parte indispensavel das sciencias auxiliares do estudo das anteriores.

Daniel da Silva frequentou estas Academias, terminando o curso da primeira em 1832 e o da segunda em 1835, e obtendo na primeira premios no primeiro e segundo anno e distincção no terceiro. Entretanto, foi promovido a guarda-marinha em 25 de agosto de 1833, esteve embarcado na corveta *Elisa* desde 25 de janeiro até 5 de novembro de 1834 e foi empregado na commissão de observação das marés desde 17 de maio até 18 de julho de 1835.

O curso de Daniel da Silva na Academia de Marinha foi, como já vimos, dos mais distinctos, revelando-se nelle pela primeira vez a notavel aptidão do joven estudante para as mathematicas, que desde essa occasião ficaram sendo as sciencias da sua predilecção. Desejando por isso ampliar os seus conhecimentos sobre estas sciencias, resolveu ir frequentar a faculdade de mathematica da Universidade de Coimbra, onde ainda estavam vivas as tradições de Monteiro da Rocha, José Anastacio da Cunha, Manuel Pedro de Mello e outros, que tanta honra deram a esta veneranda instituição.

Obtida para esse fim a necessaria auctorização do Governo, que lhe foi concedida por portaria de 4 de setembro de 1835, fez n'este anno os exames preparatorios que a lei vigente exigia e matriculou-se em outubro de 1836 no primeiro anno da referida faculdade.

Fazia-se n'esse tempo a formatura em mathematica em quatro annos. Estudava-se no primeiro anno a arithmetica, a geometria elementar e a trigonometria, no segundo a algebra, o calculo infinitesimal e a geometria analytica, no terceiro a mecanica e no quarto a astronomia, a hydraulica e a mecanica celeste; e simultaneamente, na faculdade de philosophia, a chimica, a physica, a botanica e a zoologia. No fim do quarto anno do curso tomava-se o grau de bacharel e, no mesmo anno, fazia-se depois acto de formatura, que versava sobre todas as doutrinas mathematicas do curso.

Daniel da Silva seguiu com regularidade os seus estudos, e fez acto de formatura em 16 de julho de 1839, tendo por professores os sabios doutores Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto, que d'elle me falou algumas vezes com grande elogio, Francisco de Castro Freire, que se

(1) Veja-se a interessante *Nota sobre os estabelecimentos de instrucção naval em Portugal*, publicada em 1892 por Vicente M. M. C. Almeida d'Eça.

referiu a elle com justo louvor na sua *Memoria historica da faculdade de mathematica* (Coimbra, 1872, p. 116), Thomás de Aquino, Agostinho José Pinto de Almeida, etc.

No seu curso da Universidade de Coimbra continuou o esperançoso estudante a revelar os dotes de espirito que tinham já tornado notavel o seu curso na Academia Real de Marinha. Obteve partidos de 50$000 réis no primeiro e segundo anno do curso e, nas informações finaes, que nesse tempo eram reguladas pela carta regia de 3 de junho de 1782, foi qualificado, em conselho da faculdade de mathematica de 29 de julho de 1839, *Muito bom* por tres votos e *Bom* por dois. No terceiro anno do curso não obteve classificação alguma, porque foi comprehendido na graça de perdão de acto concedido por carta de lei de 9 de abril de 1838.

Terminada com tão felizes auspicios a sua formatura em mathematica, voltou para Lisboa a retomar o seu logar na companhia dos guardas-marinhas, sendo depois promovido a segundo tenente da armada em 26 de novembro de 1840.

A vida socegada do professor tinha porém para elle mais attractivos e estava mais em harmonia com a sua debil constituição physica do que a vida encantadora, mas mais agitada, do marinheiro; e, a ver novos continentes e novos mares, outros povos e outras raças, preferiu elle conhecer novos capitulos e novos ramos das sciencias da sua predilecção. Por isso, quando, pelo decreto de 19 de maio de 1845, foi transformada a Academia dos Guardas-Marinhas na actual Escola Naval, Daniel da Silva acceitou a nomeação para lente substituto da cadeira de elementos de mecanica, astronomia espherica e nautica, e da cadeira de principios de optica, construcção e uso dos instrumentos de reflexão, prática das observações astronomicas e dos calculos mais uteis na navegação, etc.

Poucos annos depois, em 31 de agosto de 1848, foi promovido a lente proprietario da cadeira de artilharia theorica e prática, principios de fortificação provisional, geographia e hydrographia; e n'esta cadeira se conservou até á sua jubilação, que teve logar em 20 de outubro de 1865. Entretanto, foi tendo differentes promoções como official da armada, sendo nomeado primeiro tenente em 6 de novembro de 1851, capitão-tenente em 13 de julho de 1859, e sendo reformado no posto de capitão de fragata em 31 de dezembro de 1868.

*
* *

Daniel da Silva foi proposto para socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, por Franzini, em sessão de 15 de maio de 1850, e em seguida eleito para este logar em 19 de junho do mesmo anno. Não tinha ainda nesse tempo publicado trabalho algum original; havia apenas publicado uma traducção do allemão, com annotações, de uma obra do principe Lichnowsky, intitulada *Portugal — Recordações do anno de 1842* (Lisboa, 1844). Tinha porém apresentado já a esta Academia, em sessão de 27 de fevereiro de 1850, um trabalho notavel, intitulado *Memoria sobre a rotação das forças em torno dos pontos de appli-*

cação, o qual foi depois publicado no volume correspondente a 1851 da sua collecção de Memorias [1].

Neste bello e importante trabalho, em que o auctor se revelou pela primeira vez como geometra de grande valor, procura elle mostrar como variam os effeitos das forças applicadas a um corpo, quando estas forças giram á roda dos seus pontos de applicação, conservando-se porem constantes os angulos que umas fazem com as outras, e as diversas circumstancias notaveis que acompanham esta mudança de orientação das mesmas. O estudo geral da questão é precedido do estudo do caso simples em que as forças estão todas sobre um plano e giram sobre elle, e, tanto a respeito d'este caso como do caso geral, são apresentados numerosos resultados cheios de interesse, de que não é possivel dar aqui noticia sem entrar em longos detalhes. Todos estes resultados são obtidos por methodos elegantes, claros e expressivos, em que o auctor, sem perder de vista o systema de forças que considera, caminha directamente para o fim que tem em vista, empregando principalmente considerações geometricas, e recorrendo á analyse só quando esta é naturalmente chamada a intervir.

A theoria importante a que é consagrada a memoria a que nos estamos referindo, foi estudada pela primeira vez pelo celebre geometra allemão Möbius, em 1837, na sua *Statica,* e pouco tempo depois por Minding, que a enriqueceu com um theorema notavel, no tomo XV do *Jornal de Crelle.*

Daniel da Silva não conhecia estes trabalhos, quando se occupou do mesmo assumpto cêrca de treze annos depois. Só mais tarde os conheceu por meio das *Leçons de Mécanique analytique* de Moigno, publicadas em 1868, onde se encontra um capitulo consagrado a esta doutrina, então desconhecida em França, e que elle traduziu de um tratado de macanica publicado em Christiania por Broch. Encontram-se por isso no trabalho de Daniel alguns resultados que já tinham sido obtidos por Möbius. Os methodos empregados por estes dois sabios para os obter são porém differentes e, além d'isso, na memoria portuguesa é o assumpto mais ampla e profundamente estudado e são obtidos muitos resultados interessantes, que não se encontram na obra do eminente geometra allemão.

Uma questão da theoria a que nos estamos referindo, que tanto Möbius como Daniel da Silva foram naturalmente levados a estudar é a que tem por objecto determinar as orientações das forças a que corresponde o seu equilibrio. Möbius julgava que todo o systema de forças que está em equilibrio em quatro orientações differentes deve estar em equilibrio com todas as outras orientações. Daniel chegou porém a um resultado differente, mostrando que ha, em geral, quatro posições de equilibrio e sómente quatro. Este ultimo resultado, que deve substituir o de Möbius, foi confirmado pelas indagações posteriores.

Vinte e cinco annos depois da publicação da *Memoria* de Daniel da Silva, occupou-se tambem do mesmo assumpto Darboux em uma communicação feita á Academia das Sciencias de Paris, em 27 de dezembro de 1876 (*Comptes-rendus,* tomo LXXXIII, p. 1284), onde deu

[1] *Historia e Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa,* 2.ª série, t. III.

conta dos resultados que a este respeito obteve, e depois em um trabalho mais extenso, publicado nas *Memorias da Sociedade de sciencias physicas e naturaes de Bordeaux* (1877, 2.ª serie, tomo II), onde demonstrou e desenvolveu aquelles resultados. Nestes trabalhos Darboux, que não conhecia a memoria portuguesa, rectificou o erro de Möbius, a que anteriormente nos referimos, e chegou a varias proposições relativas á mesma theoria que se encontram já naquella memoria.

Daniel da Silva teve noticia dos theoremas de Darboux por meio do extracto que *Les Mondes* de Moigno publicaram da sessão da Academia das Sciencias de Paris em que foram communicados, e foi nessa occasião que teve tambem noticia dos trabalhos de Möbius. A impressão que produziu no seu espirito esta coincidencia de se encontrar na invenção de uma theoria importante com dois geometras eminentes, um dos quaes tinha já desapparecido, deixando um brilhante rasto na historia da sciencia allemã, e o outro principiava a brilhar na sciencia francesa como astro de primeira grandeza, exprimiu-a elle nos termos seguintes em uma carta que me fez a honra de me dirigir, em 23 de fevereiro de 1877:

«Quer saber o que me aconteceu ha bem poucos dias.

Vejo annunciada no jornal *Les Mondes* de Moigno uma Memoria apresentada á Academia das Sciencias de Paris por M. Darboux, em que elle diz accrescentar muitas cousas novas á importante theoria iniciada na Allemanha por Möbius e Minding.

Quasi todas as proposições *novas* de Darboux estão publicadas ha vinte e cinco annos nas Memorias da nossa Academia, no meu trabalho sobre a rotação das forças em torno dos seus pontos de applicação!

Foi por essa occasião que tive ensejo de saber que em 1868 dizia Moigno que a theoria de Möbius (1837), a mesmissima que eu tratei, ignorando a existencia do meu predecessor, muitissimo curiosa e importante, era totalmente desconhecida em França, e que elle só muito tarde a veiu a aprender em um livro que um amigo lhe mandou da Noruega!

A minha Memoria, que tem muitissimas cousas, além do que lembrou a Möbius, inclusivamente a correcção de um erro d'elle com cuja rectificação muito se gloria Darboux, jaz ignorada, ha quasi vinte e seis annos, nas bibliothecas de quasi todas as academias do mundo. O que aproveita escrever em portuguez!

Tive bastante desgosto de só agora saber que, sem suspeitar sequer da existencia de Möbius, um dos mais distinctos geometras da sua epoca, como lhe chama o Diccionario de Brockaus (1846), eu coincidira com elle na invenção de uma theoria, hoje declarada muito importante, e que cheguei no seu desenvolvimento muito mais longe do que chegara o illustre sabio allemão».

Daniel da Silva fez, como era natural, a sua reclamação de prioridade a respeito das proposições reinventadas por Darboux, mas dotado de modestia, talvez excessiva, recorreu para isso a um jornal de simples vulgarização scientifica, em logar de recorrer á Academia das Sciencias de Paris, que de certo a publicaria nos *Comptes-rendus* das suas sessões, onde tinham sido anteriormente publicados os theoremas de Darboux sobre a theoria considerada. Appareceu, com effeito, esta reclamação no jornal *Les Mondes*, de Moigno, em carta dirigida a este homem illustre, a qual foi publicada no numero correspondente a 29 de março de 1877, e depois transcripta no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes,* da Academia das Sciencias de Lisboa, e no *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* (Coimbra, tomo I, pag. 38).

A Memoria de Daniel da Silva contém ainda muitos theoremas que se não encontram nem no trabalho de Möbius nem no de Darboux. A Academia das Sciencias de Lisboa, a que aquelle sabio mathematico deu tanta honra, faria grande serviço á sciencia e ao paiz, se, a exemplo do que fez a Academia das Sciencias de Copenhague em um caso analogo, concorresse para tirar do injusto esquecimento em que cahiu, aquelle importante trabalho, publicando uma traducção francesa d'elle, precedida de uma introducção historica sobre o assumpto considerado e acompanhada de notas onde, a proposito de cada proposição ou resultado obtido, se indicasse o seu primeiro inventor.

*
* *

No mesmo volume da *Historia e Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa* em que foi publicada a Memoria, a que vimos de nos referir, foi publicado ainda outro trabalho do mesmo geometra, intitulado *Da transformação e reducção dos binarios,* o qual, segundo o testemunho de F. Horta (*Annaes de Sciencias,* tomo II, Lisboa, 1858, p. 194), tinha sido composto pelo seu auctor antes d'aquelle que primeiro mencionamos e que primeiro foi impresso. Esta segunda Memoria de Daniel da Silva não tem a importancia nem a originalidade d'aquella a que primeiro nos referimos; é todavia ainda um trabalho excellente, onde se apresentam meios para simplificar a exposição de uma theoria importante de mecanica.

É bem sabido que Poinsot, na sua admiravel *Statica,* substituiu os *momentos* das forças, empregados pelos antigos geometras como meios subsidiarios para deduzir as condições de equilibrio dos corpos, por forças de rotação, a que Daniel da Silva deu o nome de *binarios* (traducção feliz da palavra *couple,* empregada pelo eminente geometra fracez), e que d'este modo conseguiu simplificar e esclarecer a maior parte das theorias da Mecanica. É á theoria dos binarios que é consagrada a memoria a que nos estamos referindo, a qual o nosso geometra simplifica em muitos pontos, e, em especial, na parte relativa á decomposição dos binarios em outros collocados em planos coordenados obliquos, por meio de uma representação geometrica nova d'estes grupos de forças.

*
* *

Em 24 de março de 1852 apresentou Daniel da Silva á Academia das Sciencias de Lisboa um terceiro trabalho, que tem por titulo *Propriedades geraes e resolução directa das con-*

gruencias binomias, o qual foi publicado em 1854 no volume I da *Nova serie* das suas *Memorias.* Era n'essa occasião já socio effectivo da Academia, tendo sido elevado a socio livre em 19 de fevereiro de 1851 e depois a socio effectivo, na sessão de sciencias exactas, em 7 de janeiro de 1852.

Nesta nova Memoria, consagrada a um assumpto importante de arithmetica superior, não brilha menos o engenho do nosso mathematico no menejo dos methodos algebricos do que brilhara, nos trabalhos anteriores, no menejo dos methodos geometricos. Effectivamente encerra ella fórmulas e methodos directos, mais ou menos originaes, para a resolução das congruencias lineares e das congruencias binomias, e ainda varios resultados novos, cheios de interesse, e varias demonstrações novas de resultados conhecidos.

A este respeito mencionaremos, em primeiro logar, uma formula symbolica nova e muito util, que vem no capitulo I, da qual deduziu, com extrema facilidade, primeiramente o theorema notavel dado por Euler no tomo VIII dos *Novos Commentarios da Academia das Sciencias de S. Petersburgo,* que se refere ao numero de numeros primos com outro numero dado que são inferiores a este; depois ainda uma expressão nova da somma d'aquelles numeros; e mais adeante, no capitulo III, o theorema importante relativo ao numero de raizes primitivas das congruencias binomias, publicado por Lambert, em 1769, nas *Acta eruditorum,* de Leipzig. D'esta fórmula symbolica deu mais tarde nova e interessante demonstração F. Horta nos *Annaes de Sciencias* (1857, 1.º anno, p. 705).

Mencionaremos, em segundo logar, um theorema muito digno de notar-se, que se encontra ainda no capitulo I, o qual contém como caso muito particular a generalização bem conhecida de um theorema celebre de Fermat, dada por Euler, no tomo VIII, p. 75, das *Nova Acta Petropolitana.*

Mencionaremos finalmente a extensão de uma fórmula dada por Poinsot nas suas *Réflexions sur les principes fundamentaux de la théorie des nombres* (p. 48) para determinar o numero de numeros primos com um numero dado, inferiores a elle, a qual se encontra ainda no capitulo II; a demonstração directa de uma fórmula dada por Gauss no n.º 86 das suas admiraveis *Desquisitiones arithmeticae,* á qual este grande geometra chegou por um caminho indirecto e que julgava difficil obter por meios directos (capitulo III); varias consequencias novas d'esta fórmula, dadas tambem no capitulo III; e interessantes investigações sobre as propriedades e o calculo das raizes modulares, que se encontram no capitulo IX.

*

* *

Os tres trabalhos importantes a que vimos de nos referir, dois dos quaes são bastante extensos (o primeiro e o terceiro), foram elaborados pelo seu auctor em curto espaço de tempo. O grande espirito porém que os concebeu estava encerrado em corpo debil que não poude resistir ao grande esforço que aquelle teve de empregar para os produzir. Atacado por doença grave que veio cortar-lhe os vôos com que seguia rapidamente a tomar logar entre os primeiros geometras do seu tempo, Daniel da Silva teve de abandonar o trabalho e nem mesmo poude rever as provas da ultima Memoria que vimos de analysar, nem terminar a redacção do seu ultimo capitulo, que era destinado a varias applicações, entre as quaes figuravam as fracções continuas.

A Academia das Sciencias de Lisboa premiou tanto valor e tão grande esforço elevando Daniel da Silva, na sua sessão de 20 de janeiro de 1859, a socio de merito de 1.ª classe, a maior das honras que ella póde conceder e á qual corresponde uma pensão annual de 200$000 réis. O parecer da commissão que propoz que se concedesse esta distincção ao eminente geometra foi elaborado por F. Horta, mathematico de grande merito e que, pelas relações de amigo e collega no professorado e na Academia que com elle tinha, melhor estava que qualquer outro em condições de o conhecer e apreciar. N'este documento, que dá honra a quem o escreveu, e que foi publicado nos *Annaes de sciencias* (1858, tomo II, p. 193), descreve-se em traços largos mas expressivos e aprecia-se em phrases cheias de verdade e justiça a obra scientifica de Daniel.

*

* *

No intervallo que vae desde 1854 a 1866 não appareceu nas collecções da Academia Real das Sciencias de Lisboa trabalho algum de Daniel da Silva. A doença grave a que nos referimos anteriormente, obstou de um modo fatal a todo o esforço intellectual da sua parte durante este periodo. Felizmente, com o repouso e extremosos cuidados, voltou pouco a pouco a saude perdida, e, se não poude jámais produzir trabalhos da importancia e extensão d'aquelles a que vimos de nos referir, poude ainda illustrar as collecções da Academia com uma memoria e algumas notas sobre assumptos de menor difficuldade, nas quaes continuou a manifestar a originalidade do seu bello espirito.

A primeira d'estas notas foi publicada em 1866 no volume I do *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes,* e tem por titulo *Nota sobre alguns theoremas novos de statica.* N'ella apresentou o seu auctor duas expressões notaveis, independentes dos eixos coordenados, do producto da resultante de um systema de forças pelo binario resultante minimo.

No mesmo volume do *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes,* foi publicada ainda em 1867 outra nota de Daniel da Silva, intitulada *Amortização annual media nos principaes monte-pios de sobrevivencia portuguezes,* na qual elle introduziu a consideração, no estudo das condições economicas dos monte-pios, de um certo numero a que chamou *taxa media,* ensinou o modo de o calcular e fez notar a sua importancia para o calculo das quotas e pensões. As questões relativas a monte-pios interessaram muito o nosso geometra que, juntando a um grande espirito um coração cheio de bondade, receava as calamidades que da sua má organização provêem para as familias que lhes confiam os seus haveres. Por isso se occupou d'elles em artigos publicados nos n.os 4004, 4006, 4010, 4012, 4018 e 4019 do *Jornal do Commercio*, de Lisboa, onde fez a critica do projecto para a creação do Monte-pio Official apresentado ás Côrtes em 1867, e em um opusculo intitulado *O presente e o futuro do Monte-pio Geral*, publicado em 1868, onde se occupou das condições em que então se encontrava este ultimo monte-pio. Todos estes trabalhos de Daniel da Silva sobre monte-pios merecem ser meditados pelos que tiverem de occupar-se das questões de installação ou administração d'estas utilissimas instituições.

N'estas questões relativas a monte-pios e n'outras questões sociaes importantes representam um papel essencial certos valores medios relativos ao movimento da população, que no tempo de Daniel da Silva se iam buscar ás estatisticas dos paizes estrangeiros, apesar de os resultados que estas fornecem não serem applicaveis a Portugal, onde as condições de vida são differentes das que se dão nos paizes a cujas estatisticas se recorria. E todavia existiam já n'esse tempo no nosso paiz alguns elementos estatisticos para calcular os valores medios que lhe são applicaveis. Este calculo fel-o o nosso sabio mathematico, empregando para esse fim os mappas de baptismos, casamentos e obitos de 1860, 1861 e 1862, publicados pelo Ministerio da Justiça em 1864, 1867 e 1869, o censo da população, referido ao ultimo dia de 1863, feito pelo Ministerio das Obras Publicas, e alguns mappas de obitos por elle colligidos no Monte-pio Geral e no da Marinha. Os resultados a que chegou, acompanhados de notas interessantes, relativas á comparação dos numeros que obteve com os que fornecem as estatisticas de outros paizes, foram publicados em 1869 no volume II do *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, em um artigo intitulado *Contribuições para o movimento comparativo da população em Portugal.*

Ao trabalho a que vimos de nos referir seguiu-se outro em 1872, o qual foi publicado nas *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, e que tem por titulo *De varias fórmulas novas de geometria analytica relativas aos eixos coordenados obliquos.*

N'este trabalho interessante e util generalizou o seu auctor para o caso de eixos das coordenadas com direcção qualquer algumas fórmulas, correspondentes aos eixos orthogonaes, que se encontravam nos livros consagrados ao ensino da geometria analytica, taes como as que servem para determinar os cosenos dos angulos que faz com os eixos a recta perpendicular a duas rectas dadas, as que dão o seno e coseno do angulo de duas rectas dadas, a que relaciona as áreas planas com as das suas projecções sobre os planos coordenados, etc.; e fez applicação de algumas d'estas fórmulas a uma questão de Mecanica por elle já anteriormente considerada na sua memoria, *Da reducção e transformação dos binarios*, atrás mencionada. Para obter aquellas fórmulas empregou Daniel methodos claros e simples, acompanhados de uma analyse cheia de elegancia e symetria.

O ultimo trabalho que Daniel da Silva escreveu é de uma indole differente de todos os anteriores, pois refere-se a uma questão de physica, e revela a variedade de aptidões do seu bello espirito. O assumpto considerado n'elle é a theoria da chamma; foi publicado no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes* (1873, tomo IV, p. 113) e tem por titulo *Considerações e experiencias ácerca da chamma.*

Encerra este trabalho primeiramente algumas indicações interessantes e instructivas sobre o que se passa no phenomeno da chamma; em seguida os meios engenhosos imaginados pelo auctor para medir a velocidade com que, nos bicos em fórma de leque, o gaz de illuminação atravessa a fenda do bico, e aquella com que sae da zona azulada; e finalmente os resultados das experiencias para este fim realizadas.

O sr. Benevides, que se occupou com successo do estudo da chamma em excellentes artigos publicados em 1872 e 1873 nos *Annales de Chimie et Physique,* de Paris, e no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes,* referiu-se com louvor ao trabalho de Daniel em um artigo publicado no tomo VI d'este ultimo jornal. E tambem ao mesmo trabalho se referiu com elogio, em uma carta dirigida a este sabio mathematico, que o sr. Benevides fez conhecer no citado artigo, o Dr. Heumann, de Zurich, que estudou tambem a chamma em artigos publicados em 1876 nos *Annalen der Chimie,* de Leipzig.

*

* *

Descripta a obra scientifica de Daniel da Silva seja-me permittido, evocando gratas recordações de tempos distantes, referir-me ás relações que tive com o eminente geometra. Creio que me desculpará que o faça quem attender a que estas relações me deram os meios de conhecer e apreciar, sem ter de recorrer a informações de extranhos, o seu bello caracter, ao qual não devo deixar de me referir aqui.

Ouvi pela primeira vez falar de Daniel da Silva em Coimbra, quando frequentava o terceiro anno da faculdade de mathematica, ao professor da cadeira de Mecanica racional, Dr. Teixeira de Queiroz, que, quando explicou a bella theoria de Poinsot sobre os binarios de força, se referiu com elogio aos importantes trabalhos do geometra portuguez a respeito d'aquelle assumpto.

Vinha eu de publicar ha pouco tempo um pequeno opusculo sobre o desenvolvimento das funcções em fracção continua, e, depois de algumas hesitações naturaes, resolvi remetter-lhe um exemplar d'este trabalho.

Passado algum tempo recebi, com surpresa e prazer, uma carta, datada de 6 de janeiro de 1872, na qual elle, depois de me apresentar os seus agradecimentos pela minha insignificante offerta, dizia, referindo-se a si proprio, as palavras seguintes:

«A paixão pelo estudo das sciencias mathematicas, que foi em mim assaz desordenada, pelo excesso, desde muitos annos se tem reduzido ás proporções modestas de amor platonico.

A diurna e gravissima enfermidade que padeci, pelo excesso de applicação, deixou após si o deshabito da contensão do espirito e mesmo talvez a impossibilitação para as aturadas investigações.

Restou-me porém das ruinas do meu passado scientifico a affeição admirativa, o vivo interesse de sympathia que me ligam sempre áquelles que se distinguiram de um modo notavel na sciencia objecto das minhas predilecções.

Dizer pois que estimo desde já cordialmente o auctor da Memoria que recebi, é muito mais que um cumprimento epistolar: é o simples enunciado de uma condição inevitavel da minha organização».

Transcrevemos aqui esta passagem da carta de Daniel da Silva, porque ella descreve singela e eloquentemente o homem que sacrificou á sciencia todo o seu tempo, a sua saude e que esteve prestes a sacrificar-lhe a propria vida, e que, modesto e bom, acolheu com carinho o humilde ensaio de um obscuro estudante.

A esta carta seguiram-se muitas outras, cheias de conselhos affectuosos, que eu conservo, com a mesma veneração que um crente tem pelas reliquias de um santo, como recordação do sabio e do amigo.

Em uma d'estas cartas refere elle um facto interessante relativo a Laplace, que me parece ser hoje desconhecido. É que o celebre auctor da *Mécanique céleste* foi convidado por Martinho de Mello, Secretario dos Negocios da Marinha e Ultramar, no intervallo de 1770 a 1796, e restaurador da instrucção naval em Portugal, a vir estabelecer-se em Lisboa. Muitissimo agradecido, respondeu-lhe o sabio, mas falta-me ahi o meu theatro. Não tem razão, replicou o estadista portuguez, ha aqui o excellente theatro de S. Carlos. Laplace não acceitou porém este honroso convite; porque o theatro que lhe faltava em Lisboa era o Observatorio de Paris.

Só duas vezes fallei com Daniel da Silva: uma em Lisboa, quatro annos depois de principiarem as nossas relações, outra em Coimbra, em uma occasião em que elle veio visitar esta cidade em companhia do seu unico filho, um rapaz intelligente que infelizmente falleceu no verdor dos annos quando, terminado o seu curso na Escola Polytechnica, se preparava, cheio de esperanças, para concorrer a um logar de professor neste estabelecimento de instrucção.

Quando, depois de repetidas instancias suas, acceitei um logar de astronomo no Observatorio de Lisboa, e parti em agosto de 1878 para esta cidade a tomar posse d'aquelle logar, tinha elle sahido para fóra da capital, onde não voltou mais em vida.

Durante a sua ausencia de Lisboa foi atacado por uma pneumonia, e, em 6 de outubro de 1878, deixou de bater o seu coração cheio de affectos e desappareceu d'este mundo a sua alma, rica de ideias, que tantas vezes já luctara contra a morte para viver para a sciencia.

Daniel da Silva viveu sempre modestamente, todo entregue aos seus deveres de professor e aos seus trabalhos scientificos, sem aspirar nem a honras nem a empregos, que, pela sua posição social e alta collocação de seu irmão, facil lhe seria obter. Viveu para a familia e para a sciencia, a qual serviu tão desinteressadamente que nem sequer tratou da propaganda dos seus trabalhos nos meios scientificos extrangeiros. O seu amor á sciencia reflectia-se sobre os que se occupavam d'ella, e sobre a Academia das Sciencias de Lisboa, á qual consagrava uma viva affeição e á qual confiou a publicação de todos o seus trabalhos scientificos.

*
* *

Não terminaremos estes singelos apontamentos para a historia das mathematicas em Portugal, sem chamar a attenção das nossas escolas de instrucção superior para a conveniencia que haveria em se consagrarem algumas lições á historia das sciencias n'ellas professadas. Não fica bem a quem terminou um curso de sciencias exactas desconhecer a historia d'estas sciencias, nem a quem terminou um curso de philosophia natural ignorar a historia da physica, da chimica, da botanica, etc.

É certo que muitos professores indicam, a respeito de cada facto, proposição ou theoria que ensinam, o nome do seu inventor; mas estas indicações desconnexas são insufficientes para darem ideia do modo como se fez a evolução de cada sciencia. O que se torna necessario é que se descreva resumidamente e a traços largos a sua marcha progressiva desde os seus principios até aos tempos modernos e que se indique o papel que nesta evolução desempenhou cada um dos seus mais eminentes cultores. Se esta ideia tiver seguimento, a historia da sciencia portugueza ha de ser de certo tambem considerada e o nome de Daniel da Silva mencionado, perpetuando-se assim na memoria das successivas gerações academicas.

Porto, outubro de 1902.

XI

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECONDE ORDRE

(Bulletin de la Société mathématique de France
— Paris, 1881, t. XVII)

NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECONDE ORDRE

1. Je vais considérer l'équation aux dérivées partielles du seconde ordre

$$\text{(1)} \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N représentent des fonctions de x, y, z, p, q, et où l'on pose, suivant l'usage,

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

M. Imschenetsky a fait voir, dans son *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre* (pages 130 et 131 de la traduction par M. J. Hoüel), que cette équation peut être transformée dans une équation linéaire, quand on connait une intégrale primitive particulière avec trois constantes arbitraires.

Ensuite, en se basant sur les importants recherches sur la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles, publiées par Ampère dans les cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique,* il a fait voir que cette équation se simplifie considérablement quand cette intégrale satisfait à un ou aux deux systèmes d'équations de la *caracteristique,* auxquels Monge et Ampère ramènent le problème de l'intégration de (1).

Comme la théorie de Ampère, qui ne se prête pas aisément à une exposition succinte, ne se trouve pas dans les Traités systématiques de Calcul intégral, je crois qu'il ne sera pas inutile de voir comme on obtient les mêmes résultats par des considérations directes. C'est le but que nous nous proposons dans cette Note.

*

2. Soit

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \gamma) \tag{2}$$

une intégrale particulière de (1) avec trois constantes arbitraires α, β, γ. Nous avons l'identité

$$\mathrm{H}_1 \frac{d^2\omega}{dx^2} + 2\mathrm{K}_1 \frac{d^2\omega}{dxdy} + \mathrm{L}_1 \frac{d^2\omega}{dy^2} + \mathrm{M}_1 + \mathrm{N}_1 \left[\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d^2\omega}{dy^2} - \left(\frac{d^2\omega}{dxdy}\right)^2\right] = 0, \tag{3}$$

où H_1, K_1, L_1, M_1, N_1 représentent des fonctions de ω, x, y, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega}{dy}$.

M. Imschenetsky considère ensuite α, β, γ comme variables et introduit en (1), au lieu de la variable dépendante z, la variable γ déterminée par (2) et, au lieu des variables indépendantes x et y, les variables α et β déterminées par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\omega}{d\alpha} + \frac{d\omega}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0, \\ &\frac{d\omega}{d\beta} + \frac{d\omega}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta} = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Pour obtenir l'équation dans laquelle se transforme de cette manière l'équation proposée, on tire de (2)

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\omega}{dx}, \quad q = \frac{d\omega}{dy}, \\ r &= \frac{d^2\omega}{dx^2} + \left(\frac{dp}{d\alpha} + \frac{dp}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dx} + \left(\frac{dp}{d\beta} + \frac{dp}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{dx}, \\ s &= \frac{d^2\omega}{dxdy} + \left(\frac{dp}{d\alpha} + \frac{dp}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dy} + \left(\frac{dp}{d\beta} + \frac{dp}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{dy}, \\ t &= \frac{d^2\omega}{dy^2} + \left(\frac{dq}{d\alpha} + \frac{dq}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dy} + \left(\frac{dq}{d\beta} + \frac{dq}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{dy}; \end{aligned}$$

ensuite on substitue dans les expressions précédentes de r, s, t les valeurs de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$, $\frac{d\beta}{dy}$ que l'on tire des équations du premier dégré qui résultent de la différentiation des deux équations (4) par rapport à x et à y; et enfin on substitue les valeurs qui résultent pour r, s, t dans l'équation (1). On trouve de cette manière, ayant égard à (3), l'équation suivante:

$$\mathrm{R}\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} + 2\mathrm{S}\frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta} + \mathrm{T}\frac{d^2\gamma}{d\beta^2} + \mathrm{U} = 0, \tag{5}$$

où R, S, T, U sont des fonctions de α, β, η $\frac{d\eta}{d\alpha}$, $\frac{d\eta}{d\beta}$ données par les formules suivantes:

$$-\mathrm{R}=(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1t_1)\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2+2(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1s_1)\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)$$
$$+(\mathrm{L}_1+\mathrm{N}_1r_1)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2,$$

$$\mathrm{S}=(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1t_1)\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)$$
$$+(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1s_1)\left[\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\right.$$
$$\left.+(\mathrm{L}_1+\mathrm{N}_1r_1)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\right],$$

$$-\mathrm{T}=(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1t_1)\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^2+2(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1s_1)\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)$$
$$+(\mathrm{L}_1+\mathrm{N}_1r_1)\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^2,$$

$$\frac{d\omega}{d\eta}\mathrm{U}=\mathrm{N}_1\left[\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)-\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\right]^2$$
$$+\ \mathrm{R}_1\left[\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}+2\frac{d^2\omega}{d\alpha d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}+\frac{d^2\omega}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^2\right]$$
$$+2\mathrm{S}_1\left[\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta}+\frac{d^2\omega}{d\alpha d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}+\frac{d^2\omega}{d\eta d\beta}\frac{d\eta}{d\alpha}+\frac{d^2\omega}{d\eta^2}\frac{d\eta}{d\alpha}\frac{d\eta}{d\beta}\right]$$
$$+\ \mathrm{T}_1\left[\frac{d^2\omega}{d\beta^2}+2\frac{d^2\omega}{d\beta d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}+\frac{d^2\omega}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2\right],$$

où je pose, pour abreger,

$$p_1=\frac{d\omega}{dx},\quad q_1=\frac{d\omega}{dy},\quad r_1=\frac{d^2\omega}{dx^2},\quad s_1=\frac{d^2\omega}{dxdy},\quad t_1=\frac{d^2\omega}{dy^2}.$$

3. Cela posé, j'entre dans le sujet de cette Note, c'est-à-dire, je vais considérer le cas où l'on obtient l'intégrale (2) au moyen d'une ou de deux intégrales intermédiaires particulières de (1), avec une constante arbitraire chacune.

Soit

$$f(x,y,z,p,q)=a \tag{6}$$

une intégrale intermédiaire de (1) avec une constante arbitraire α. On sait que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait aux équations qui résultent de l'élimination de deux des quantités r, s, t entre (1) et les équations suivantes:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dx}+\dfrac{df}{dz}p+\dfrac{df}{dp}r+\dfrac{df}{dq}s=0, \\ \dfrac{df}{dy}+\dfrac{df}{dz}q+\dfrac{df}{dp}s+\dfrac{df}{dq}t=0, \end{cases}$$

et que ces équations sont

$$\begin{aligned} \mathrm{P}=\mathrm{H}&\left(\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dq}-\mathrm{H}\frac{df}{dp}\left(\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}\right) \\ &-2\mathrm{K}\left(\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dp}+\mathrm{M}\left(\frac{df}{dp}\right)^2-\mathrm{N}\left(\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}\right)=0, \\ \mathrm{Q}=\mathrm{H}&\left(\frac{df}{dq}\right)^2-2\mathrm{K}\frac{df}{dp}\frac{df}{dq}+\mathrm{L}\left(\frac{df}{dp}\right)^2 \\ &-\mathrm{N}\left(\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dq}-\mathrm{N}\left(\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dp}=0. \end{aligned}$$

Soit maintenant l'équation (2) une intégrale particulière de (6), que l'on peut obtenir, comme on sait, par la méthode de Lagrange et Charpit. La valeur qu'il donne pour z satisfait aux équations précédentes, et par conséquent satisfait aussi à l'équation suivante:

$$(8)\qquad (\mathrm{H}+\mathrm{N}t)\left(\frac{df}{dq}\right)^2-2(\mathrm{K}-\mathrm{N}s)\frac{df}{dp}\frac{df}{dq}+(\mathrm{L}+\mathrm{N}r)\left(\frac{df}{dp}\right)^2=0,$$

qui résulte de l'élimination de

$$\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz},\quad \frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}$$

dans la seconde au moyen des équations (7).

Mais, en différentiant (6) par rapport à β et considérant z, p, q comme des fonctions de β déterminées par (2), on trouve

$$\frac{df}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{d\beta}+\frac{d\omega}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)=0,$$

ou, en vertu des équations (4),

$$\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\,\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\,\frac{d\eta}{d\beta}\right)=0.$$

En substituant maintenant dans l'expression de R la quantité

$$\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\,\frac{d\eta}{d\beta}$$

par sa valeur, donnée par cette équation, on trouve

$$-\mathrm{R}=\frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\,\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\Big[(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1t_1)\left(\frac{df}{dq_1}\right)^2$$
$$-2\,(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1s_1)\frac{df}{dp_1}\,\frac{df}{dq_1}+(\mathrm{L}_1+\mathrm{N}_1r_1)\left(\frac{df}{dp_1}\right)\Big]^2.$$

Donc, en vertu de la formule (8), nous avons $\mathrm{R}=0$, et l'équation (5) prend la forme simplifiée suivante:

$$2\mathrm{S}\,\frac{d^2\eta}{d\alpha d\beta}+\mathrm{T}\,\frac{d^2\eta}{d\beta^2}+\mathrm{U}=0.$$

4. Soient maintenant

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x,\,y,\,z,\,p,\,q)=\alpha,\\ &\mathrm{F}\,(x,\,y,\,z,\,p,\,q)=\beta \end{aligned}\right.$$

deux intégrales intermédiaires de (1) avec deux constantes arbitraires α et β. Si chacune d'elles satisfait à un des deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, auxquels la methode de Monge ramène le problème de l'intégration de l'équation (1), ou à un des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, auxquels la methode de Boole ramène le même problème, on sait que les valeurs de p et q données par les équations (9) rendent

$$dz=pdx+qdy$$

intégrable. De cette intégration résulte l'équation (2).

Dans ce cas, on voit, comme dans le cas antérieur, que $R=0$. Ensuite, en éleminant dans l'expression de T la quantité

$$\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}$$

au moyen de l'équation

$$\frac{dF}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)+\frac{dF}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)=0,$$

et ayant égard à l'équation qui résulte du changement dans (8) de f en F, on voit aussi que $T=0$.

L'équation (5) prend donc la forme suivante:

$$2S\frac{d^2\eta}{d\alpha d\beta}+U=0.$$

5. Soit maintenant

$$K^2-HL+MN=0,$$

ce qui arrive quand les deux systèmes d'équations de la *caractéristique* coïncident, et soit encore

$$f(x, y, z, p, q)=\alpha,$$

une intégrale particulière de (1) avec une constante arbitraire α.

En différentiant cette équation par rapport à α et à β, considérant z, p, q comme des fonctions de α et β déterminées par (2), et en ayant égard à (4), on trouve

$$\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)=0,$$
$$\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)=1.$$

En substituant ensuite dans l'expression de S les valeurs que ces équations donnent pour

$$\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta},$$
$$\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha},$$

on trouve

$$S = \frac{\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\left[(H_1 + N_1 t_1)\left(\frac{df}{dq_1}\right)^2\right.$$

$$\left. - 2(K_1 - N_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\frac{df}{dq_1} + (L_1 + N_1 r_1)\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\left[-(H_1 + N_1 t_1)\frac{df}{dq_1} + (K_1 - N_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\right],$$

et par conséquent, en vertu de (8),

$$S = \frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\left[-(H_1 + N_1 t_1)\frac{df}{dq_1} + (K_1 - N_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\right].$$

Mais l'équation (8) donne

$$\frac{df}{dq} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt} \cdot \frac{df}{dp}$$

$$= \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt}\frac{df}{dp} = \frac{K - Ns}{H + Nt}\frac{df}{dp}.$$

Donc nous avons $S = 0$, et l'équation (5) prend la forme

$$T\frac{d^2\eta}{d\beta^2} + U = 0.$$

XII

DIVERSOS ARTIGOS SOBRE GEOMETRIA ANALYTICA PLANA

I

SUR LA COURBE ÉQUIPOTENTIELLE

(Archiv der Mathematik und Physik — Leipzig, 1902. Reihe III, Band III)

1. Le nom de *courbe équipotentielle* a été donné par Cayley, dans un important article publié dans le *Philosophical Magazine* (t. XIV, 1857), à la courbe représentée par l'équation, en coordonnées bi-polaires,

$$\frac{m}{\rho}+\frac{m'}{\rho'}=\frac{k}{a}, \tag{1}$$

où m, m' et k représentent des quantités constantes données, et ρ et ρ' les distances des points de la courbe à deux foyers dont la distance est égale à a. Dans ce travail l'éminent géomètre détermine la forme générale des ovales qui constituent la courbe, et leur disposition par rapport aux foyers, pour les diverses valeurs de k, par des considérations presque intuitives, sans entrer en détails analytiques. Ici nous allons donner quelques indications sur une manière de faire la théorie analytique de la courbe, et en déduire quelques-unes de ses propriétés qui ne se trouvent pas dans le travail de Cayley.

2. En prenant pour origine des coordonnées un foyer et pour axe des abscisses la droite qui passe par l'autre, on a

$$\rho^2 = x^2+y^2, \quad \rho'^2=(x-a)^2+y^2;$$

et, par conséquent, en éliminant x, y et ρ' entre ces équations et (1),

$$x = \frac{(a^2+\rho^2)(k\rho - am)^2 - a^2m'^2\rho^2}{2a(k\rho - am)^2}, \tag{2}$$

$$y = \frac{k^2\sqrt{-(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)\ldots(\rho-\alpha_8)}}{2a(k\rho - am)^2}, \tag{3}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ représentent les racines des équations

$$\left\{\begin{aligned} &(\rho-a)(k\rho-am) - am'\rho = 0,\\ &(\rho-a)(k\rho-am) + am'\rho = 0,\\ &(\rho+a)(k\rho-am) - am'\rho = 0,\\ &(\rho+a)(k\rho-am) + am'\rho = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

A l'égard de ces racines il convient de remarquer que celles de la première et des deux dernières équations sont réelles et inégales. Celles de la deuxième sont réelles quand on a

$$(k+m-m')^2 - 4km \mathrel{\overline{\overline{>}}} 0$$

ou

$$[k-(\sqrt{m}+\sqrt{m'})^2][k-(\sqrt{m}-\sqrt{m'})^2] \mathrel{\overline{\overline{>}}} 0,$$

et imaginaires dans le cas contraire; et par conséquent elles sont réelles et inégales quand $k > (\sqrt{m}+\sqrt{m'})^2$, et quand $k < (\sqrt{m}-\sqrt{m'})^2$, imaginaires quand k est compris entre ces deux valeurs, et égales quand $k = (\sqrt{m}+\sqrt{m'})^2$, et quand $k = (\sqrt{m}-\sqrt{m'})^2$.

3. Cela posé, supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ sont toutes réelles et inégales et que $\alpha_8 > \alpha_7 > \ldots > \alpha_1$. Dans ce cas y est réelle quand ρ est comprise entre α_8 et α_7, ou entre α_6 et α_5, ou entre α_4 et α_3, ou entre α_2 et α_1, et imaginaire dans les autres cas. La courbe est donc composée de *quatre ovales,* symétriques par rapport à l'axe des abscisses et qui coupent cet axe.

En déterminant au moyen de l'équation (2) les valeurs de x qui correspondent aux valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$, données à ρ, on pourrait trouver, en chaque cas particulier, la disposition des ovales par rapport aux foyers; mais on n'en a pas besoin, parceque cela résulte immédiatement de l'analyse de Cayley.

Nous allons déterminer les points des ovales où la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l'axe. Pour cela, employons la formule

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k^2\left[F'(\rho)(k\rho-am)-4kF(\rho)\right]}{4\rho\left[(k\rho-am)^3+a^3mm'^2\right]\sqrt{F(\rho)}},$$

où

$$F(\rho)=-(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)\ldots(\rho-\alpha_8);$$

afin de déterminer les valeurs que ρ prend dans les points où la tangente est parallèle à l'axe de la courbe, on en tire l'équation

$$F'(\rho)(k\rho-am)-4kF(\rho)=0,$$

qui est du huitième degré par rapport à ρ. A l'égard du nombre de ces points nous remarquerons que, la fonction $F'(\rho)$ étant négative pour $\rho=\alpha_8, \alpha_6, \alpha_4, \ldots, \alpha_2$, et positive pour $\rho=\alpha_7, \alpha_5, \ldots, \alpha_3, \alpha_1$, le premier membre de cette équation change septe fois de signe, quand on donne à ρ les valeurs $\alpha_8, \alpha_7, \alpha_6, \ldots, \alpha_1$. Donc chaque ovale a seulement un point, de chaque côté de l'axe, où la tangente est parallèle à cet axe, à l'exception d'un qui peut en avoir un ou trois.

La tangente est perpendiculaire à l'axe dans les points qui correspondent aux valeurs de ρ données par l'équation

$$(k\rho-am)^3+a^3mm'^2=0 \quad \text{ou} \quad \rho=\frac{am-a\sqrt[3]{mm'^2}}{k}.$$

A ces valeurs de ρ correspondent deux points, placés symétriquement par rapport à l'axe de la courbe, et qui sont réels quand ρ est compris dans un des intervalles (α_8, α_7), (α_6, α_5), $\ldots$, (α_2, α_1).

4. On étudie de la même manière le cas où deux des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ sont imaginaires. Alors la courbe est composée seulement de trois ovales.

Si deux des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ sont égales, la courbe est composée de quatre ovales, mais deux d'entre eux ont un point commun placé sur l'axe. Dans ce point on a

$$\rho=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{m'}},$$

si $k=(\sqrt{m}+\sqrt{m'})^2$, et

$$\rho=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{m'}},$$

si $k=(\sqrt{m}-\sqrt{m'})^2$.

5. Les points qu'on détermine en coupant la courbe par une transversale quelconque, jouissent de quelques propriétés qui, à ce que je crois, n'ont pas encore été remarquées.

Soit

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation de la transversale considérée. Elle coupe la courbe en huit points où ρ prend les valeurs données par l'équation suivante, qui résulte de l'élimination de x et de y entre l'équation de la transversale et les équations (2) et (3):

$$A\left[(a^2+\rho^2)(k\rho - am)^2 - a^2m'^2\rho^2\right] + Bk^2\sqrt{F(\rho)} + 2aC(k\rho - am)^2 = 0,$$

ou

$$B^2k^4F(\rho) - \left\{(k\rho - am)^2\left[2aC + A(a^2+\rho^2)\right] - a^2m'^2\rho^2\right\}^2 = 0,$$

ou

$$k^4(A^2+B^2)\rho^8 - 4amk^3(A^2+B^2)\rho^7 + \ldots + a^4m^4\left[B^2a^4 + (2aC + Aa^2)^2\right] = 0.$$

Cette équation fait voir que la somme des distances $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_8$ des points où la droite coupe la courbe au foyer qu'on a pris pour origine des coordonnées, satisfait à la condition

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_8 = 4\frac{am}{k}.$$

On voit aussi que la somme des distances $\rho'_1, \rho'_2, \ldots$ des mêmes points à l'autre foyer satisfait à la condition

$$\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots + \rho'_8 = -4\frac{am'}{k}.$$

On en conclut que *la somme des distances entre les points où une transversale quelconque coupe la courbe et un foyer est constante.*

On voit, au moyen de la même équation, qu'on a

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_8 = \frac{a^6m^4}{k^4}\left[a^2 + 4\frac{C(C+Aa)}{A^2+B^2}\right]. \tag{5}$$

En posant $C = 0$, on voit que le produit des distances à l'origine des points où les transversales qui passent par ce point coupent la courbe, satisfait à la condition

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_8 = \frac{a^8m^4}{k^4}. \tag{6}$$

De la même manière on trouve, pour les transversales qui passent par l'autre foyer,

$$\rho_1' \rho_2' \ldots \rho_8' = \frac{a^8 m'^4}{k^4}.$$

On en conclut que le *produit des distances à un foyer des points où une transversale quelconque, passant par ce foyer, coupe la courbe, est constant.*

Mais ce n'est pas ce corollaire de l'équation (5) qu'il y a intérêt à considérer ici, parce qu'il est un cas particulier d'un théorème général connu, applicable à toutes les courbes cycliques. Ce qu'il nous convient de considérer résulte de (5) en posant dans cette équation

$$C + Aa = 0.$$

L'équation de la droite considérée prend alors la forme

$$A(x - a) + By = 0,$$

et on voit qu'elle passe par le foyer $(a, 0)$. Et, ayant égard à l'équation (9), on conclut que le *produit des distances à un foyer des points où les transversales, qui passent par l'autre, coupent la courbe, est constant.*

II

SOBRE UNA CURVA NOTABLE

(El Progreso Matemático — Zaragoza, 1899, série 2.ª, t. I)

Consideremos dos rectas fijas que formen un ángulo dado ω y una recta movil tal, que el segmento comprendido entre las rectas fijas tenga una longitud constante l. La envolvente de la recta móvil es una curva cuya ecuación fué obtenida por Merlieux y Joachimsthal en los tomos I y VI de los *Nouvelles annales des mathématiques*. Respecto de esta curva, propuso M. Barisien, en *l'Intermédiaire des mathématiciens*, una cuestión que tiene por objeto determinar el área limitada por ella.

Varias respuestas se presentaron, entre las cuales una nuestra, fundada en la propiedad que tiene esta curva de ser paralela á un astroide (*Intermédiaire*, t. V, p. 160–163).

Ahora vamos á demostrar, por un método directo y puramente analítico, el resultado expuesto en el lugar mencionado.

Tomemos por ejes de coordenadas las rectas fijas, y sea

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

la ecuación de la recta movil. Esta recta corta á las rectas fijas en dos pontos, cuya distancia l está dada por la ecuación

$$l^2=a^2+b^2-2\,ab\cos\omega.$$

La envolvente de la recta móvil se obtiene eliminando a, b y $\frac{db}{da}$ entre las ecuaciones que preceden y las siguientes

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{db}{da}=0,$$

$$a-b\cos\omega+(b-a\cos\omega)\frac{db}{da}=0.$$

Para hacer esta eliminación, notemos en primer lugar que las dos últimas ecuaciones dan

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{b\cos\omega-a}{b-a\cos\omega}=0,$$

y que esta ecuación combinada con la ecuación de la recta móvil da

$$l^2 x=a^2(a-b\cos\omega),\quad l^2 y=b^2(b-a\cos\omega),$$

ó, eliminando b,

$$l^2 x=a^2\left[a\,\mathrm{sen}^2\,\omega\mp\cos\omega\sqrt{l^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}\right],$$
$$l^2 y=\pm\left[a\cos\omega\pm\sqrt{l^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}\right]^2\sqrt{l^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}.$$

Para obtener la ecuación de la envolvente pedida faltaba eliminar a entre estas dos ecuaciones. Pero puede estudiarse la curva sin hacer esta eliminación y, en particular, determinar el área, que limita, como vamos á ver.

Sea S un área limitada por un arco de curva y por los vectores de los extremos de este arco.

Tenemos

$$d\,\mathrm{S}=\frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{da}-x\frac{dy}{da}\right)\mathrm{sen}\,\omega.$$

Luego el área limitada por la curva y por los vectores de los puntos en que $a=0$ y $a=a_1$, está dada por la fórmula

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{2l^2}\left\{\frac{3}{2}a_1^4\cos\omega\,\mathrm{sen}^2\,\omega-a_1^2 l^2\cos\omega\pm 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega\cos 2\omega\int_0^{a_1}\frac{a^4da}{\sqrt{l^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}}\right.$$
$$\left.\pm\, l^2(3\,\mathrm{sen}^2\,\omega-2\cos^2\omega)\int_0^{a_1}\frac{a^2da}{\sqrt{l^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}}\right\},$$

*

donde se debe emplear el signo superior, cuando se considera un arco de curva en el que y es positivo, y el signo inferior, para el caso contrario.

Pero tenemos

$$\int_0^{a_1} \frac{a^4 da}{\sqrt{l^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \omega}} = \frac{l^4}{\operatorname{sen}^5 \omega} \left[-\frac{a_1^3 \operatorname{sen}^3 \omega}{4 l^4} \sqrt{l^2 - a_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} - \frac{3}{8} \frac{a_1 \operatorname{sen} \omega}{l^2} \sqrt{l^2 - a_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8} \operatorname{arc\,sen} \frac{a_1 \operatorname{sen} \omega}{l} \right],$$

$$\int_0^{a_1} \frac{a^2 da}{\sqrt{l^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \omega}} = \frac{l^2}{\operatorname{sen}^2 \omega} \left[-\frac{1}{2} \frac{a_1 \operatorname{sen} \omega}{l^2} \sqrt{l^2 - a_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{a_1 \operatorname{sen} \omega}{l} \right].$$

Luego

$$S = \frac{\operatorname{sen} \omega}{2 l^2} \left\{ \frac{3}{2} a_1^4 \cos \omega \operatorname{sen}^2 \omega - a_1^2 l^2 \cos \omega \mp \frac{3}{4} a_1^3 \cos 2\omega \sqrt{l^2 - a_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \right.$$
$$\pm \frac{l^2 a_1}{8 \operatorname{sen}^2 \omega} (\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega) \sqrt{l^2 - a_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega}$$
$$\left. \pm \frac{l^4}{8 \operatorname{sen}^3 \omega} (\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega) \operatorname{arc\,sen} \frac{a_1 \operatorname{sen} \omega}{l} \right\}.$$

Esta fórmula da el valor del área pedida.

Haciendo $a_1 = \frac{l}{\operatorname{sen} \omega}$, resulta para el valor del área limitada por los vectores de los puntos $(0, l)$ y $\left(\frac{l}{\operatorname{sen} \omega}, 0\right)$ y por la curva

$$S_1 = \frac{l^2}{4} \left\{ \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega}{8 \operatorname{sen}^2 \omega} \pi \right\},$$

y para el valor del área limitada por los vectores de los puntos $(0, -l)$ y $\left(\frac{l}{\cos \omega}, 0\right)$ y por la curva

$$S_2 = \frac{l^2}{4} \left\{ -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} + \frac{\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega}{8 \operatorname{sen}^2 \omega} \pi \right\}.$$

En área limitada por la curva tiene pues por expresión

$$S = \frac{l^2}{8} \frac{\cos^2 \omega + 3 \operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} \pi = \frac{l^2}{8} \frac{1 + 2 \operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} \pi.$$

La clase de curvas de que hemos tratado tiene como caso particular una curva á que se da el nombre de *astroide,* que corresponde á $\omega = \frac{\pi}{2}$. Á las curvas consideradas se ha dado, como dice el sr. Brocard, el nombre de *tetracúspides;* talvez sea preferible darle el nombre de *astroides* llamándose la que corresponde á $\omega = \frac{\pi}{2}$ *astroide de cuatro ejes* y á las otras *astroides de dos ejes*.

III

SOBRE LOS FOCOS DE LAS ESPÍRICAS DE PERSEO

(El Progreso Matemático — Zaragoza, 1900, série 2.ª, t. II)

Se da, como se sabe, el nombre de *espíricas de Perseo* á las curvas de cuarto orden que se obtienen cortando el toro por planos paralelos al eje. Se sabe también que la ecuación de estas curvas puede escribirse del modo siguiente

$$(1) \qquad y = \sqrt{R^2 - (l + \sqrt{x^2 + c^2})^2},$$

representando R el radio del círculo generador del toro, l la distancia de su centro al eje de la superficie y c la distancia del plano secante al centro de la superficie.

Esto sentado, el objeto de esta Nota es dar un método elemental para determinar los focos de la curva considerada, llamando, como Plücker, focos á los puntos del plano de la curva por los que se pueden trazar dos tangentes á la curva, cuyos coeficientes angulares sean iguales á $+i$ y $-i$ (siendo $i = \sqrt{-1}$).

Para resolver esta cuestión, notemos en primer lugar, que la ecuación (1) da

$$(2) \qquad y' = -\frac{(l + \sqrt{x^2 + c^2})\, x}{\sqrt{R^2 - (l + \sqrt{x^2 + c^2})^2}\, \sqrt{x^2 + c^2}},$$

y que, por consiguiente, las abscisas de los puntos de la curva considerada, en los cuale coeficientes angulares de la tangente son iguales á $+i$ ó á $-i$, deben satisfacer la condición

$$\frac{(l+\sqrt{x^2+c^2})\,x}{\sqrt{R^2-(l+\sqrt{x^2+c^2})^2}\,\sqrt{x^2+c^2}}=\pm i,$$

ó $$(l+\sqrt{x^2+c^2})^2 x^2=-[R^2-(l+\sqrt{x^2+c^2})^2](x^2+c^2),$$

ó $$(R^2-c^2)^2(x^2+c^2)^2-2\,l^2c^2(R^2+c^2)(x^2+c^2)+l^4c^4=0,$$

ó $$x^2+c^2=\frac{l^2c^2}{(R\pm c)^2},\quad \text{ó}\quad \sqrt{x^2+c^2}=\pm\frac{lc}{R\pm c}.$$

Esta ecuación se decompone en las seguientes:

$$\sqrt{x^2+c^2}=\frac{lc}{R-c},\quad \sqrt{x^2+c^2}=-\frac{lc}{R+c},\tag{3}$$

$$\sqrt{x^2+c^2}=\frac{lc}{R+c},\quad \sqrt{x^2+c^2}=-\frac{lc}{R-c}.\tag{4}$$

Esto sentado, consideremos diversos casos:

1.° caso. Sea $l^2<(R-c)^2$.

En este caso, la primera de las ecuaciones (3), la ecuación (1) y la ecuación (2) dan para x é y los valores

$$x=\pm\frac{c}{R-c}\sqrt{l^2-(R-c)^2}=\pm\frac{ci}{R-c}\sqrt{(R-c)^2-l^2},$$

$$y=\pm\frac{R}{R-c}\sqrt{(R-c)^2-l^2}$$

y para y' el valor $(-i)$, cuando x é y tienen el mismo signo, y el valor $(+i)$ cuando tienen signo contrario.

La segunda ecuación (3) y las ecuaciones (1) y (2) dan para x é y los valores

$$x=\pm\frac{ci}{R+c}\sqrt{(R+c)^2-l^2},\quad y=\pm\frac{R}{R+c}\sqrt{(R+c)^2-l^2},$$

y para y' el valor $(+i)$, cuando x é y tienen el mismo signo, y el valor $(-i)$ cuando tienen signo contrario.

Las ecuaciones (4) no dan para y' ningún valor $(+i)$, ningún valor $(-i)$.

Luego representando por a, b, a_1, b_1 las cantidades

$$a = \frac{c}{R-c}\sqrt{(R-c)^2-l^2}, \quad b = \frac{R}{R-c}\sqrt{(R-c)^2-l^2},$$

$$a_1 = \frac{c}{R+c}\sqrt{(R+c)^2-l^2}, \quad b_1 = \frac{R}{R+c}\sqrt{(R+c)^2-l^2},$$

los puntos de la curva en que el coeficiente angular de la tangente es $(+i)$ son

$$(ai, -b), \quad (-ai, b), \quad (a_1i, b_1), \quad (-a_1i, -b_1),$$

y los puntos en que el coeficiente angular de la tangente es $(-i)$ son

$$(ai, b), \quad (-ai, -b), \quad (-ai, b_1), \quad (a_1i - b_1).$$

Las tangentes á la curva en los primeros puntos son

$$Y + b = i(X - ai), \quad Y - b = i(X + ai),$$
$$Y - b_1 = i(X - a_1i), \quad Y + b_1 = i(X + a_1i),$$

y las tangentes á la curva cuyo coeficiente angular es igual á $(-i)$ son

$$Y - b = -i(X - ai), \quad Y + b = -i(X + ai)$$
$$Y - b_1 = -i(X + a_1i), \quad Y + b_1 = -i(X - a_1i).$$

Las ecuaciones de las rectas del primer grupo pueden, pues, escribirse del modo siguiente:

$$Y \pm \sqrt{(R-c)^2-l^2} = iX, \quad Y \pm \sqrt{(R+c)^2-l^2} = iX;$$

y las del segundo grupo

$$Y \pm \sqrt{(R-c)^2-l^2} = -iX, \quad Y \pm \sqrt{(R+c)^2-l^2} = -iX.$$

Las rectas del primer grupo cortan á las del segundo en 16 puntos, que son los focos ordinarios de la curva. A cada recta del primer grupo, que hemos considerado, corresponde una recta del segundo grupo conjugada á la primera. Las rectas conjugadas determinan por sus intersecciones cuatro puntos reales, que son los cuatro *focos ordinarios reales* de la curva.

Las coordenadas de estos focos son

$$[0, \pm\sqrt{(\mathrm{R}-c)^2-l^2}], \quad [0, \pm\sqrt{(\mathrm{R}+c)^2-l^2}].$$

2.° caso. Sea en segundo logar $l > \mathrm{R}+c$.

Por un análisis semejante se ve que en este caso los focos se obtienen por las intersecciones de las rectas

$$\mathrm{Y}+bi=-i(\mathrm{X}-a), \quad \mathrm{Y}-bi=-i(\mathrm{X}+a),$$
$$\mathrm{Y}-b_1i=-i(\mathrm{X}-a_1), \quad \mathrm{Y}+b_1i=-i(\mathrm{X}+a_1)$$

con las rectas

$$\mathrm{Y}-bi=i(\mathrm{X}-a), \quad \mathrm{Y}+bi=i(\mathrm{X}+a),$$
$$\mathrm{Y}-b_1i=i(\mathrm{X}+a_1), \quad \mathrm{Y}+b_1i=i(\mathrm{X}-a_1),$$

de donde

$$a=\frac{c}{\mathrm{R}-c}\sqrt{l^2-(\mathrm{R}-c)^2}, \quad b=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}-c}\sqrt{l^2-(\mathrm{R}-c)^2},$$
$$a_1=\frac{c}{\mathrm{R}+c}\sqrt{l^2-(\mathrm{R}+c)^2}, \quad b_1=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+c}\sqrt{l^2-(\mathrm{R}+c)^2}.$$

Las ecuaciones de las rectas del primer grupo pueden pues escribirse como sigue:

$$\mathrm{Y}=-i(\mathrm{X}\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}-c)^2}), \quad \mathrm{Y}=-i(\mathrm{X}\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}+c)^2}),$$

y las del segundo grupo del modo seguiente:

$$\mathrm{Y}=i(\mathrm{X}\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}-c)^2}), \quad \mathrm{Y}=i(\mathrm{X}\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}+c)^2}).$$

Los focos reales son, pues, en este caso

$$[\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}-c)^2}, 0], \quad [\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}+c)^2}, 0].$$

3.° caso. Si se tiene que $(\mathrm{R}-c)^2 < l^2 < (\mathrm{R}+c)^2$, se ve del mismo modo que los focos resultan de la intersección de las rectas

$$\mathrm{Y}=-i(\mathrm{X}\pm\sqrt{l^2-(\mathrm{R}-c)^2}), \quad \mathrm{Y}\pm\sqrt{(\mathrm{R}+c)^2-l^2}=-i\mathrm{X}$$

con las rectas

$$Y = i(X \pm \sqrt{l^2 - (R - c)^2}), \quad Y \pm \sqrt{(R + c)^2 - l^2} = iX.$$

Los focos reales son pues

$$[\pm \sqrt{l^2 - (R - c)^2},\ 0], \quad [0,\ \pm \sqrt{(R + c)^2 - l^2}].$$

4.° caso. Sea $l = R - c$. En este caso, la primera de las ecuaciones (3) y la ecuación (1) dan $x = 0$, $y = 0$. La ecuación (2) da $y' = \frac{0}{0}$; pero es fácil ver que el verdadero valor de y' es $\pm \sqrt{-\frac{l + c}{c}}$.

La segunda ecuación (3) y la ecuación (1) dan

$$x = \pm \frac{2ci}{R + c} \sqrt{Rc}, \quad y = \pm \frac{2R}{R + c} \sqrt{Rc},$$

y la ecuación (2) da después $y' = i$, cuando x é y tinen el mismo signo, $y' = -i$, cuando lo tienen contrario.

Las rectas que determinan por medio de sus intersecciones los focos son:

$$Y \pm 2\sqrt{Rc} = iX, \quad Y \pm 2\sqrt{Rc} = -iX.$$

Los focos reales son los puntos que tienen por coordenadas $(0,\ \pm 2\sqrt{Rc})$.

5.° caso. Si $l = R + c$, se ve del mismo modo que los focos resultan de las intersecciones de las rectas.

$$Y = -i(X \pm 2\sqrt{Rc}), \quad Y = i(X \pm 2\sqrt{Rc}).$$

Los focos reales son, pues, los puntos cuyas coordenadas son $(\pm 2\sqrt{Rc},\ 0)$.

IV

SOBRE UNA PROPIEDAD DE LOS FOCOS DE LOS ÓVALOS DE CASSINI

(Revista trimestral de Mathemáticas — Zaragoza, 1901, t. I)

El objeto de este artículo es demostrar una propiedad de las distancias á los focos de los puntos en que una recta cualquiera corta á los ovalos de Cassini, la cual me parece que aun no ha sido señalada.

Se sabe que la ecuación bipolar de estos óvalos es

$$\rho\rho' = k,$$

representando ρ y ρ' las distancias de uno cualquiera de sus puntos á dos puntos fijos (*focos* de la curva), y k una constante dada.

Tenemos, pues, tomando por origen de las coordenadas uno de los focos, y por eje de las abscisas la recta que pasa por el otro foco, y representando por a la distancia entre estos focos,

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = \rho'^2;$$

y por lo tanto

$$x = \frac{\rho^2 + a^2 - \rho'^2}{2a} = \frac{\rho^2(\rho^2 + a^2) - k^2}{2a\rho^2},$$

$$y = \frac{\sqrt{4a^2\rho^6 - [\rho^2(\rho^2 + a^2) - k^2]^2}}{2a\rho^2};$$

*

ó, poniendo $\rho^2 = t$,

$$x = \frac{t(t + a^2) - k^2}{2at}.$$

$$y = \frac{\sqrt{4a^2t^3 - [t(t + a^2) + k^2]^2}}{2at}.$$

Estas ecuaciones determinan las coordenadas de los puntos de la curva en función del parámetro variable t.

Esto sentado, consideremos la recta cuya ecuación es

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0,$$

y busquemos los valores que toma t en los puntos en que esta recta corta á la curva. Para eso, basta eliminar x é y entre esta ecuación y las dos anteriores, lo que da

$$\left[\mathrm{A}t(t + a^2) - \mathrm{A}k^2 + 2a\mathrm{C}t\right]^2 = \mathrm{B}^2\left[4a^2t^3 - [t(t + a^2) - k^2]^2\right],$$

ó

$$(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)t^4 + \left[2\mathrm{A}a(\mathrm{A}a + 2\mathrm{C}) - 2a^2\mathrm{B}^2\right]t^3 + \ldots + (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)k^4 = 0.$$

Representando, pues, por t_1, t_2, t_3 y t_4 las cuatro raíces de esta ecuación, tenemos

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2a^2\mathrm{B}^2 - 2\mathrm{A}a(\mathrm{A}a + 2\mathrm{C})}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2},$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = k^4;$$

y por lo tanto

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = \frac{2a^2\mathrm{B}^2 - 2\mathrm{A}a(\mathrm{A}a + 2\mathrm{C})}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2},$$

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 = k^2,$$

representando ρ_1, ρ_2, ρ_3 y ρ_4 las distancias de los puntos en que la recta corta á la curva, al foco que se tomó por origen de las coordenadas.

Tenemos, pues, los teoremas siguientes:

1.° *La suma de los cuadrados de las distancias á uno cualquiera de los focos de los puntos en que corta á la curva cualquiera recta paralela al eje que contiene los dos focos, es constante.*

Porque, en efecto, cuando $A = 0$, tenemos

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = 2a^2.$$

2.° *El producto de las distancias á uno cualquiera de los focos de los puntos en que una recta cualquiera corta á la curva, es constante.*

V

SUR LA TÉTRACUSPIDALE DE BELLAVITIS

(Mathesis — Gand, 1901, tome XXI)

1. On a beaucoup étudié l'enveloppe d'une droite qui se déplace de manière que le segment compris entre deux droites données soit constant; et on sait que cette courbe est parallèle à une *astroïde.* On a appelé cette courbe *tétracuspidale,* et on a attribué à Bellavitis cette désignation. Mais la courbe qui a été étudiée par cet illustre géomètre dans sa *Sposizione del metodo delle Equipollenze* [1] et à laquelle il a donné ce nom, est une ligne différente qui a pour équation

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

les axes des coordonnées étant *obliques.*

La *tétracuspidale parallèle à l'astroïde* et la *tétracuspidale de Bellavitis* ont l'une et l'autre quatre points de rebroussement réels, mais les deux courbes ne coïncident pas, parce que les quatre tangentes à la première en ces points sont quatre droites distinctes; et, au contraire, dans la deuxième, les tangentes en ces points coïncident deux à deux.

---

[1] Voir *Nouvelles Annales des Mathématiques,* (2), XIII, 229, où on trouve une traduction, par M. Laisant, de ce mémoire.

Il est facile d'obtenir au moyen des méthodes ordinaires du calcul différentiel les propriétés que Bellavitis a établies par la méthode des équipollences, comme on va le voir.

2. L'équation de la tangente à la courbe représentée par l'équation (1) est

$$Y = -\left(\frac{b^2 y}{a^2 x}\right) X + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

par conséquent, cette droite coupe les axes OY, OX en deux points P et Q, dont les coordonnées sont

$$(0, \quad b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}), \quad (a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}, \quad 0).$$

Si on tire ensuite par ces deux points deux droites parallèles aux axes, elles déterminent, par leur intersection, un point M, dont les coordonnées sont

$$x_1 = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 = b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

et si l'on porte les valeurs de x et y, données par ces équations, dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

On en conclut que, *si, par les points d'une ellipse, on tire des droites parallèles à deux diamètres conjugués, l'enveloppe des droites qui passent par les points où elles coupent les diamètres considérés est une tétracuspidale de Bellavitis.*

A chaque système de diamètres conjugués de l'ellipse considérée correspond une tétracuspidale. Aux axes correspond la développée de l'ellipse.

3. *La tétracuspidale de Bellavitis est l'enveloppe des ellipses représentées par l'équation*

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{2}$$

dont les axes satisfont à la condition

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1. \tag{3}$$

En effet, si l'on différentie ces équations par rapport aux paramètres variables α et β, on trouve

$$\frac{x^2}{\alpha^3}\,d\alpha+\frac{y^2}{\beta^3}\,d\beta=0,\quad \frac{d\alpha}{a}+\frac{d\beta}{b}=0;$$

d'où l'on déduit, λ désignant une inconnue auxiliaire,

$$\frac{x^2}{\alpha^3}=\frac{\lambda}{a},\quad \frac{y^2}{\beta^3}=\frac{\lambda}{b}.$$

En écrivant

$$\frac{x^2}{\alpha^2}=\lambda\,\frac{\alpha}{a},\quad \frac{y^2}{\beta^2}=\lambda\,\frac{\beta}{b}$$

et en additionant, on obtient, eu égard aux équations (2) et (3), $\lambda=1$; par conséquent, le point de contact de l'ellipse (2) avec l'enveloppe a pour coordonnées

$$x=\sqrt{\frac{\alpha^3}{a}},\quad y=\sqrt{\frac{\beta^3}{b}}.$$

Tirons de là les valeurs de α, β pour les porter dans l'équation (3); il vient pour l'équation de l'enveloppe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

4. Pour distinguer les deux courbes auxquelles on donne le nom de *tétracuspidale,* nous venons d'appeler l'une *tétracuspidale parallèle à l'astroïde* et l'autre *tétracuspidale de Bellavitis.* On pourrait aussi, comme nous l'avons proposé dans *El Progreso matemático* (Zaragoza, 1890) appeler la première *astroïde à deux axes;* l'astroïde ordinaire serait alors appelée *astroïde à quatre axes.*

VI

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES OVALES DE DESCARTES

(Mathesis -- Gand, 1902, tome XXII)

On sait que l'équation bipolaire de ces courbes est

$$\rho + h\rho' = k,$$

où ρ et ρ' sont les distances d'un point quelconque de la courbe à deux points fixes F, F', qui sont des foyers; h et k sont des constantes.

Prenons pour axes de coordonnées la droite FF' et la perpendiculaire en F, et posons $\mathrm{FF'} = a$; nous aurons

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = \rho'^2 = \left(\frac{k-\rho}{h}\right)^2,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{(h^2-1)\,\rho^2 + 2k\rho + a^2h^2 - k^2}{2\,ah^2},$$

$$y^2 = -\frac{[(h^2-1)\,\rho^2 + 2k\rho + a^2h^2 - k^2]^2 - 4\,a^2h^4\rho^2}{4\,a^2h^4}.$$

Cela posé, considérons la droite

(1) $$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0.$$

NN

Elle recontre la courbe en quatre points dont on obtient les distances au point F en substituant les valeurs x et y en ρ dans l'équation (1). En rendant l'équation rationnelle et ordonnant par rapport à ρ, on trouve

$$\frac{(h^2-1)^2}{4a^2h^4}(A^2+A^2)\rho^4+\frac{k(h^2-1)}{a^2h^4}(A^2+B^2)\rho^3+\ldots$$
$$+\frac{(a^2h^2-k^2)^2}{4a^2h^4}(A^2+B^2)+C^2+AC\frac{a^2h^2-k^2}{ah^2}=0.$$

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les quatre racines; on aura

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=-\frac{4k}{h^2-1},$$
$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=\frac{(a^2h^2-k^2)^2}{(h^2-1)^2}+\frac{4a^2h^4}{(h^2-1)^2}\left[C^2+AC\frac{a^2h^2-k^2}{ah^2}\right].$$

La première de ces relations est connue. La seconde, si l'on y fait $C=0$, donne un théorème qui est un cas particulier d'une proposition connue, applicable à toutes les courbes cycliques; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

On obtient une propriété nouvelle en supposant

$$C=-A\frac{a^2h^2-k^2}{a^2h^2};$$

cette hypothèse donne

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=\frac{(a^2h^2-k^2)^2}{(h^2-1)^2}, \tag{2}$$

et l'équation de la sécante est maintenant

$$A\left(x-\frac{a^2h^2-k^2}{ah^2}\right)+By=0. \tag{3}$$

Toutes les droites représentées par l'équation (3), lorsque A et B varient, passent par le point fixe f de FF' qui a pour coordonnées

$$x_1=\frac{a^2h^2-k^2}{ah^2},\quad y_1=0.$$

Ainsi, *il existe sur l'axe* FF' *un point f tel que toute droite menée par ce point coupe l'ovale en quatre points dont le produit des distances au foyer* F *est constant.*

Le foyer F′ jouit évidemment d'une propriété analogue, mais par rapport à un autre point f' de la droite FF′. Si l'on écrit l'équation bipolaire sous la forme

$$\rho' + \frac{1}{h}\rho = \frac{k}{h},$$

on voit qu'on passe de F à F′ en changeant dans les résultats précédents h en $\frac{1}{h}$ et k en $\frac{k}{h}$. On a donc pour l'abscisse de f':

$$F'f' = \frac{a^2 - k^2}{a} = a - \frac{k^2}{a}, \quad \text{d'où} \quad Ff' = \frac{k^2}{a},$$

et pour les rayons vecteurs des points où une sécante menée par f' coupe l'ovale

$$\rho_1' \rho_2' \rho_3' \rho_4' = \frac{(a^2 - k^2)^2}{(h^2 - 1)^2}.$$

La courbe possède un troisième foyer F″ situé sur l'axe FF′, et dont l'abscisse $FF'' = a_1$ a pour valeur

$$a_1 = \frac{a^2h^2 - k^2}{a(h^2 - 1)},$$

et l'équation bipolaire correspondant est

$$\rho + \frac{ah}{k}\rho'' = \frac{a^2h^2 - k^2}{k(h^2 - 1)}.$$

Pour passer du couple FF′ au couple FF″, il suffit de remplacer a, h, k par

$$a_1, \quad \frac{ah}{k}, \quad \frac{a^2h^2 - k^2}{k(h^2 - 1)};$$

ces substitutions n'altèrent pas les valeurs de x_1 et $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$, ce qui est évident.

A F″ correspond un point f'' tel, que

$$F''f'' = \frac{a(a^2h^2 - k^2)}{k^2(h^2 - 1)}, \quad \rho_1''\rho_2''\rho_3''\rho_4'' = \frac{(a^2h^2 - k^2)^2(k^2 - a^2)^2}{a^4(h^2 - 1)^2}.$$

*

VII

SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE DE LONGUEUR DONNÉE S'APPUYANT SUR DEUX DROITES

(Intermédiaire des Mathématiciens — Paris, 1898, t. V)

Une droite de longueur constante s'appuie sur deux droites fixes faisant entre elles un angle donné. L'enveloppe de la droite est une courbe analogue à l'hypocycloïde à quatre rebroussements. On désire avoir l'expression de l'aire de cette courbe, ainsi que son équation ou au moins son degré (¹).

*

* *

Soint λ l'angle des droites données et l la longueur du segment donné.

Il résulte d'une passage du *Traité de Géométrie analytique (courbes planes)* de M. Salmon (Paris. 1884, p. 148) qu'il existe deux droites d'angle λ qui déterminent par leur intersection avec les tangentes à la courbe parallèle à l'astroïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{l}{\sin\lambda}\right)^{\frac{2}{3}},$$

obtenue en prenant sur les normales à l'astroïde une longueur égale à $\frac{l}{2}\cot\lambda$, un segment

---

(¹) Question proposée par M. Barisien dans *l'Intermédiaire des mathématiciens,* t. v, p. 28–29.

de grandeur constante, égal à l. Donc la courbe parallèle à l'astroïde qu'on vient de mentionner, coïncide avec la courbe définie à la question proposée. Or, des équations de l'astroïde

$$x = \frac{l}{\sin\lambda}\cos^3 t, \quad y = \frac{l}{\sin\lambda}\sin^3 t$$

résultent celles de la courbe parallèle considérée

$$x = \frac{l}{\sin\lambda}\cos^3 t - \frac{l}{2}\cot\lambda\sin t,$$

$$y = \frac{l}{\sin\lambda}\sin^3 t - \frac{l}{2}\cot\lambda\cos t.$$

En cherchant l'aire de cette courbe au moyen de la formule

$$dS = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

on trouve le résultat demandé

$$S = \frac{\pi l^2}{8\sin^2\lambda}(1 + 2\sin^2\lambda).$$

VIII

EVALUATION DIRECTE DE L'AIRE DE LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE

(Intermédiaire des Mathématiciens — Paris, 1900, t. VII)

En désignant, suivant l'usage, par c^2 la quantité a^2-b^2, a et b étant les deux axes de l'ellipse donnée, la rélation à démontrer est la suivante:

$$\frac{1}{b}\int_0^{\frac{c^2}{a}}\sqrt{\left[(c^2)^{\frac{2}{3}}-(ax)^{\frac{2}{3}}\right]^3}\,dx=\frac{3\pi c^4}{32\,ab}.$$

Le quart de l'aire de l'astroïde engendrée par la droite de longueur $\dfrac{c^2}{\sqrt{ab}}$ a pour expression

$$\int_0^{\frac{c^2}{\sqrt{ab}}}\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{\sqrt{ab}}\right)^{\frac{2}{3}}-(x)^{\frac{2}{3}}\right]^3}\,dx;$$

---

(1) Réponse à une question proposée par M. Barisien dans le t. VI, p. 31, de *l'Intermédiaire des Mathématiciens.*

posons $ax' = \sqrt{ab}\, x$ et substituons, il vient, pour valeur du quart de l'aire de l'astroïde considérée

$$\frac{1}{b}\int_0^{\frac{c^2}{a}} \sqrt{\left[(c^2)^{\frac{2}{3}} - (ax')^{\frac{2}{3}}\right]^3}\, dx\,;$$

or, il est bien connu que le quart de l'aire de l'astroïde est égal (λ étant la longueur de sa droite génératrice) à $\frac{3}{32}\pi\lambda^2$: le quart de l'aire de la développée de l'ellipse est donc

$$\frac{3}{32}\pi\left(\frac{c^2}{\sqrt{ab}}\right)^2 = \frac{3\pi c^4}{32\, ab}.$$

IX

SUR LE RECTIFICATION DES COURBES PARALLÈLES A UNE COURBE DONNÉE

(Intermédiaire des Mathématiciens — Paris, 1900, t. VII)

Cauchy a démontré que l'aire des courbes parallèles à une courbe donnée était fonction de l'aire de cette courbe. Existe-il une relation analogue pour la *longueur* des courbes parallèles? Autrement dit, est-il vrai que, *si une courbe est quarrable et rectifiable, ses courbes parallèles le soient aussi,* comme cela a lieu pour l'hypocycloïde à quatre rebroussements? (1).

*

* *

Soient s et s_1 la longueur d'un arc de la courbe donnée et la longueur de l'arc correspondant de la courbe parallèle considérée. En représentant par θ les angles des tangentes à la courbe donnée avec l'axe des abscisses, on peut représenter cette courbe par les équations

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \psi(\theta)$$

---

(1) Question proposée par M. Barisien dans le t. VI, p. 220, de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*

et les courbes parallèles correspondantes par les équations

$$x_1 = x \pm k \sin\theta, \quad y_1 = y \mp k \cos\theta,$$

k étant une constante.

On a donc

$$\frac{ds_1^2}{d\theta^2} = \frac{dx_1^2}{d\theta^2} + \frac{dy_1^2}{d\theta^2} = \left(\frac{dx}{d\theta} \pm k\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \pm k\sin\theta\right)^2$$

$$= \frac{ds^2}{d\theta^2} \pm 2k\frac{ds}{d\theta}\left(\frac{dx}{ds}\cos\theta + \frac{dy}{ds}\sin\theta\right) + k^2.$$

Mais

$$\frac{dx}{ds}\cos\theta + \frac{dy}{ds}\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Donc

$$\frac{ds_1}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} \pm k,$$

et par conséquent

$$s_1 = s \pm k(\theta - \theta_0),$$

en snpposant que les origines des arcs s et s_1 sont les points où $\theta = \theta_0$ et que, dans le cas du signe inférieur, le signe de $s - k(\theta - \theta_0)$ ne varie pas dans l'arc considéré.

X

SUR LES FOYERS DU LIMAÇON DE PASCAL

(Intermédiaire des Mathématiciens — Paris, 1900, t. VII)

On sait que le limaçon de Pascal est un ovale de Descartes. La difinition des foyers de l'ellipse que les rayons vecteurs sont des fonctions rationnelles etc., est-elle applicable au limaçon? [1].

*
* *

L'équation du limaçon est

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2), \tag{1}$$

et en coordonnées bipolaires

$$2b\rho + 2a\rho' = b^2 - a^2, \tag{2}$$

ρ et ρ' représentant les distances de (x, y) aux points

$$(0, 0), \quad \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}, 0\right).$$

---

[1] Question proposée par M. Barisien dans le t. VI, p. 221, de *l'Intermédiaire des mathématiciens*.

Les foyers sont, en *adoptant la definition de Plücker,* les points [1]

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2a},\ 0\right),\quad \left(\frac{1}{2}a,\ 0\right)$$

(voir *Journal de Battaglini,* t. XXI). L'équation (1) fait voir que la distance de (x, y) au point $(0, 0)$ est une fonction rationnelle de x et y. L'équation (2) fait voir ensuite que la même circonstance a lieu pour le foyer $\left(\frac{a^2-b^2}{2a},\ 0\right)$. Le foyer $\left(\frac{1}{2}a,\ 0\right)$ ne jouit pas de cette propriété. On le voit en représentant d'abord x et y par des fonctions rationnelles d'un paramètre t (la courbe est, en effet, unicursale) et en remarquant ensuite que la distance de (x, y) à ce foyer n'est pas une fonction rationnelle de t.

---

(1) Nous supposons ici que les *foyers* d'une courbe sont les points où se coupent les tangentes à cette courbe, menées par les points circulaires de l'infini. Si l'on suppose, comme quelques auteurs, que les foyers de la courbe sont les points où se coupent les droites qui passent par les points circulaires de l'infini et qui coupent la courbe en deux points coïncidantes, le point double $(0, 0)$ est aussi un foyer du limaçon.

XIII

SUR LA CONVERGENCE DES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE, GAUSS, ETC.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik,
gegründet von Crelle. Berlin, 1903. Band CXXVI)

SUR LA CONVERGENCE DES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE, GAUSS, ETC.

1. Si l'on connait les valeurs que prend une fonction $f(x)$ quand on donne à x les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$, on peut former, au moyen de la formule d'interpolation de *Lagrange*, une fonction entière de x qui ait ces mêmes valeurs là dans les points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Nous allons nous occuper dans la première partie de ce travail de l'étude des conditions pour que cette fonction tende vers $f(x)$, quand m tend vers l'infini.

Cette question a été considérée par *Hermite* dans un travail important, publié dans ce journal (tome LXXXIV, 1878), où l'éminent géomètre a présenté une expression, au moyen d'une intégrale curviligne, du reste de la formule de *Lagrange*, qui l'a conduit à une suite d'inégalités qui sont des conditions suffisantes pour cette convergence. Mais ces conditions ne sont pas nécessaires pour que la fonction déterminée par celle formule là tende vers $f(x)$, pour $m = \infty$; et, par conséquent, l'étude directe du reste, quand il est possible, peut conduire à des résultats que les inégalités de *Hermite* ne donnent pas. C'est ce qu'il arrive quand $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent le système de valeurs

$$h \cos \frac{\pi}{2n}, \quad h \cos \frac{3\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad h \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

dont l'importance dans cette question résulte d'un théorème de *Tchebicheff* bien connu. En étudiant directement, dans ce cas, le reste de la formule rapportée, nous avons obtenu les théorèmes énoncés dans les n.^{os} 6 et 7, qui contiennent comme cas très particulier celui qu'on a tiré dans le n.^{o} 5 des inégalités de *Hermite.*

Un autre cas, plus général que le précedent, dans lequel l'étude de la convergence de la formule d'interpolation de *Lagrange* nous parait offrir quelque intérêt est quand $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent des nombres réels, deux à deux égaux et de signes contraires. Nous le considérons dans le n.^{o} 10.

Dans la seconde partie de ce travail nous étudions, en nous plaçant dans le même point de vue, les formules d'interpolation trigonométriques, en considérant une formule donnée par *Gauss* dans son beau et important Mémoire sur l'interpolation (*Theoria interpolationis methodo nova tractata,* Werke, t. III, p. 265), une formule analogue indiquée par *Hermite* dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique,* p. 331, etc. Après quelques remarques générales nous considérons, en particulier, les fonctions périodiques, en supposant premièrement que a_1, a_2, a_3, ... sont des nombres réels arbitraires, et ensuite qu'ils sont des racines de l'équation $\cos nx = 0$ ou $\sin nx = 0$.

Dans ces études représentent un rôle fondamental les courbes définies par l'équation $|\sin(x-a)| = c$, que nous avons étudiées dans un mémoire publié dans ce journal, t. CXVI, p. 14 [1], auquel le présent travail est lié par plus qu'un rapport. Et, par cela, nous profiterons cette occasion pour joindre quelques formules à celles y indiquées.

[1] Voir ce volume, p. 103.

I.

Sur la convergence de la formule d'interpolation de *Lagrange*.

2. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par un contour A et désignons par x, a_1, a_2, $\ldots$, a_m les affixes de $m+1$ points à l'intérieur de A. En appliquant à l'intégrale

$$(1.)\qquad \mathrm{R}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A}} \frac{f(z)(x-a_1)^{\alpha}(x-a_2)^{\beta}\ldots(x-a_m)^{\lambda}}{(z-x)(z-a_1)^{\alpha}(z-a_2)^{\beta}\ldots(z-a_m)^{\lambda}}\,dz$$

le théorème fondamental de la théorie des résidus, *Hermite* a obtenu, dans un article publié dans ce journal (tome LXXXIV, 1878), la formule suivante:

$$(2.)\qquad f(x) = \Theta(x) + \mathrm{R}(x),$$

où $\Theta(x)$ représente une fonction entière de x, qui satisfait aux conditions suivantes:

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\Theta(a_1) = f(a_1),\ \Theta'(a_1) = f'(a_1),\ \ldots,\ \Theta^{(\alpha-1)}(a_1) = f^{(\alpha-1)}(a_1),\\
\Theta(a_2) = f(a_2),\ \Theta'(a_2) = f'(a_2),\ \ldots,\ \Theta^{(\beta-1)}(a_2) = f^{(\beta-1)}(a_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Theta(a_m) = f(a_m),\ \Theta'(a_m) = f'(a_m),\ \ldots,\ \Theta^{(\lambda-1)}(a_m) = f^{(\lambda-1)}(a_m).
\end{array}\right.$$

De cette formule et de l'inégalité

$$|\mathrm{R}(x)| < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{A}} \left|\frac{f(z)}{z-x}\right| \left|\frac{(x-a_1)^{\alpha}\ldots(x-a_m)^{\lambda}}{(z-a_1)^{\alpha}\ldots(z-a_m)^{\lambda}}\right| ds$$

il résulte que $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand tous ou quelqu'uns des nombres m, α, β, ..., λ tendent vers l'infini, si la plus grande valeur que prend l'expression

$$|K(x)| = \left| \frac{(x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \dots (x-a_m)^\lambda}{(z-a_1)^\alpha (z-a_2)^\beta \dots (z-a_m)^\lambda} \right|,$$

lorsque z décrit le contour A, tend vers zéro. Cette condition est satisfaite, comme l'a remarqué l'éminent géomètre, quand on a, pour tout point z du contour,

$$(4.) \qquad \left|\frac{x-a_1}{z-a_1}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{x-a_2}{z-a_2}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{x-a_3}{z-a_3}\right| < \varepsilon, \dots$$

ε étant une quantité arbitraire, inférieure à l'unité.

Si, étant donné le contour A, on veut chercher l'ensemble des valeurs qu'on doit donner à x pour que $\Theta(x)$ tende vers $f(x)$, ou au moins une partie de cet ensemble, on a besoin d'employer ordinairement les inégalités (4.), à cause de la difficulté de l'étude directe de la condition générale; mais on doit recourir à cette condition tous les fois que ce soit possible, parcequ'elle peut mener à des conséquences qui ne resultent pas de ces inégalités. Nous allons étudier un cas important où cette circonstance a lieu.

3. Dans l'étude que nous allons faire nous aurons besoin de considérer la courbe représentée par l'équation $|\cos z| = c$, ou $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right| = c$, c étant une constante donnée; or cette courbe ne diffère que par sa position dans le plan de celle dont l'équation est $|\sin z| = c$, étudiée par nous même dans un travail publié dans le tome CXVI, p. 14, de ce journal [1], où nous avons démontré que, si est $c \leqq 1$, cette équation représente une courbe composée d'un nombre infini *d'ovales* égaux, dont les centres sont les points $(0, 0)$, $(\pm \pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, ... et dont les axes sont égaux à $2 \operatorname{arc} \sin c$ et $2 \log(c + \sqrt{c^2+1})$; et que, si est $c > 1$, elle représente une courbe composée de deux branches, symétriquement placées chaqu'une de son côté de l'axe de abscisses, qui s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans celui des négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π, et dans lesquelles l'ordonnée prend une valeur absolue maximum, égale à $\log(c + \sqrt{c^2+1})$, dans les points où les valeurs de l'abscisse sont 0, $\pm \pi$, $\pm 2\pi$, ..., et une valeur absolue minimum, égale à $\log(c + \sqrt{c^2-1})$, dans les points où les valeurs de l'abscisse sont

$$\pm \frac{1}{2}\pi, \ \pm \frac{3}{2}\pi, \ \pm \frac{5}{2}\pi, \ \dots$$

---

[1] Voir ce volume, p 107.

La courbe représentée par l'équation $|\cos z| = c$ est donc aussi composée, lorsque $c \overline{\overline{<}} 1$, d'un nombre infini d'ovales égaux, dont les centres sont les points

$$\left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\pm \frac{3\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\pm \frac{5\pi}{2}, 0\right), \ \ldots$$

et dont les axes sont égaux à $2 \arcsin c$ et $2 \log(c + \sqrt{c^2+1})$; et, lorsque $c > 1$, de deux branches symétriques par rapport à l'axe des abscisses, qui s'étendent jusqu'à l'infini, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π, et dans lesquelles l'ordonnée prend une valeur absolue maximum, égale à $\log(c + \sqrt{c^2+1})$, dans les points où l'abscisse prend les valeurs

$$\pm \frac{\pi}{2}, \ \pm \frac{3\pi}{2}, \ \ldots,$$

et une valeur absolue minimum, égale à $\log(c + \sqrt{c^2-1})$, dans le points où l'abscisse prend les valeurs $0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \ldots$

Nous aurons besoin de considérer aussi la courbe définie par l'équation plus générale $|\sin(z-a)| = c$. Elle ne diffère pas des antérieures que par sa position dans le plan. Les centres des ovales, qu'elle a quand $c \overline{\overline{<}} 1$, sont les points $(a, 0)$, $(a \pm \pi, 0)$, $\ldots$; et, quand $c > 1$, l'ordonnée prend une valeur absolue maximum ou minimum dans les points où l'abscisse prend respectivement les valeus a, $a \pm \pi$, $a \pm 2\pi$, $\ldots$ ou les valeurs

$$a \pm \frac{1}{2}\pi, \ a \pm \frac{3}{2}\pi, \ a \pm \frac{5}{2}\pi, \ \ldots,$$

et ses deux branches sont placées symétriquement chaqu'un de son côté de la parallèle à l'axe des abscisses menée par le point d'affixe a.

4. Je vais encore, avant terminer ces remarques préliminaires, démontrer l'inégalité suivante:

$$|\cos nz| > \frac{1}{2}\left[(c + \sqrt{c^2-1})^n - (c + \sqrt{c^2-1})^{-n}\right],$$

où z représente l'affixe d'un point quelconque de la courbe représentée par l'équation $|\cos z| = c$, dans laquelle est $c > 1$, que j'aurai besoin d'appliquer bientôt.

Pour cela je déterminerai d'abord la plus petite valeur que prend $|\cos nz|$ quand z décrit la droite représentée par l'équation

$$y = l, \quad l = \log(c + \sqrt{c^2-1}),$$

*

qui passe par les points de la courbe $|\cos z| = c$ où l'ordonnée prend une valeur minimum, et, pour résoudre cette question, je remarque qu'on a, en posant $z = x' + iy'$, $u = |\cos nz|$,

$$u^2 = \cos^2 nx' \left(\frac{e^{ny'} + e^{-ny'}}{2}\right)^2 + \sin^2 nx' \left(\frac{e^{ny'} - e^{-ny'}}{2}\right)^2,$$

et qu'on doit, par conséquent, appliquer la methode des maxima et minima à la fonction de x' suivante:

$$u_1^2 = \cos^2 nx' \left(\frac{e^{nl} + e^{-nl}}{2}\right)^2 + \sin^2 nx' \left(\frac{e^{nl} - e^{-nl}}{2}\right)^2.$$

On trouve de cette manière, en ayant égard aux équations

$$\frac{du_1^2}{dx'} = -n \sin 2\,nx'$$

et

$$\frac{d^2u_1^2}{dx'^2} = -2\,n^2 \cos 2\,nx',$$

que u_1^2 prend une valeur minime quand est

$$x' = \pm \frac{\pi}{2n},\ \pm \frac{3\pi}{2n},\ \pm \frac{5\pi}{2n},\ \ldots$$

et que cette valeur est égale à

$$\frac{1}{4}[e^{nl} - e^{-nl}]^2.$$

Mais d'un autre côté, comme la dérivée partielle de u^2 par rapport à y':

$$\frac{du^2}{dy'} = \frac{n}{2}(e^{2ny'} - e^{-2ny'})$$

est positive, quand $y' > 0$, on voit que les valeurs que prend u^2, quand on donne a x' une valeur déterminée quelconque, croissent quand y' augmente; et que, par conséquent, la valeur que prend cette fonction dans un point quelconque de la courbe $|\cos z| = c$ est plus grande que celle qu'elle prend dans le point de la droite $y = l$ qui correspond à la même abscisse.

On conclut de tout ce qui précède que, dans tout point z de la courbe $|\cos z| = c$, où $c > 1$, on a l'inégalité

$$u > \frac{1}{2}\left[e^{nl} - e^{-nl}\right],$$

qui, en posant $l = \log(c + \sqrt{c^2 - 1})$, donne celle qu'on voulait démontrer.

Il convient de remarquer encore que le limite inférieur des valeurs de $|\cos nz|$, qu'on vient de déterminer, ne coïncide pas avec la valeur minimum que cette fonction prend quand z décrit la courbe $|\cos z| = c$. Les ordonnées des points de cette courbe où $|\cos nz|$ dévient minimum doivent, en effet, être calculées par l'équation

$$(e^{2ny'} - e^{-2ny'}) \sin 2x' = (e^{2y'} - e^{-2y'}) \sin 2nx',$$

qu'on obtient en appliquant la methode des maxima et minima à la fonction u^2, en y éliminant d'abord x' au moyen de l'équation

$$(e^{y'} + e^{-y'})^2 = 4\left[c^2 + \sin^2 x'\right]$$

de la courbe considérée ([1]).

5. Cela posé, nous allons considérer la formule qui résulte de (1.) en y posant $\alpha = 1$, $\beta = 1$, ..., $\lambda = 1$, c'est à dire la formule d'interpolation de *Lagrange:*

$$f(x) = \Theta(x) + \mathrm{R}(x), \tag{5.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Theta(x) = {} & \frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_m)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_m)} f(a_1) \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_m)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_m)} f(a_2) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{m-1})}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\dots(a_m-a_{m-1})} f(a_m), \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

avec l'expression du reste donnée par *Hermite*

$$\mathrm{R}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{A}} \frac{f(z)(x-a_1)\dots(x-a_m)}{(z-x)(z-a_1)\dots(z-a_m)} dz, \tag{7.}$$

([1]) Voir ce volume, p. 108.

et, en supposant que le contour A de l'aire dans laquelle la fonction $f(z)$ est holomorphe est une circonférence de rayon égal à ρ, avec le centre dans l'origine des coordonnées, et que $a_1, a_2, \ldots a_m$ représentent des nombres réels compris entre $-h$ et $+h$, nous allons chercher un ensemble de valeurs de x telles que $\Theta(x)$ tende vers $f(x)$, quand m tende vers l'infini.

En employant premièrement pour ce but les inégalités (4.), nous remarquerons d'abord que les circonférences de rayon égal à $|a|+h$, ayant leur centre dans le point d'affixe a, qui correspondent aux valeurs que prend a entre les limites $-h$ et $+h$, sont placées dans l'aire limitée par les circonférences C et C$'$, de rayon respectivement égal à h et à ρ, ayant leur centre dans l'origine des coordonnées, si est $\rho > 3h$. On a donc, pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire limitée par C et pour toutes les valeurs de z représentées par les points de la circonférence C$'$,

$$|x-a| < |a|+h, \quad |z-a| > \rho - |a| > \rho - h,$$

et par conséquent

$$\left|\frac{x-a}{z-a}\right| < \frac{2h}{\rho - h} < 1.$$

On a donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par la circonférence C$'$, *si x représente l'affixe d'un point de l'aire limitée par la circonférence* C, *et si $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres réels compris entre $-h$ et h $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$ quand le nombre des quantités $a_1, a_2, \ldots$ tend vers l'infini.*

Il convient de remarquer qu'on arrive à la même conclusion en supposant que le fonction $f(z)$ est holomorphe seulement dans la partie de l'aire du cercle C$'$ qui coïncide avec les aires des cercles de rayon égal à $2h$ avec leur centre dans les points $(h, 0)$ et $(-h, 0)$.

6. Les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$, qui entrent dans la doctrine antérieure, peuvent être choisis d'une manière arbitraire. Il convient donc qu'on leur donne des valeurs telles que $\Theta(x)$ tende le plus rapidement possible pour $f(x)$. Nous leur donnerons donc les valeurs

$$(8.) \qquad h\cos\frac{\pi}{2n}, \quad h\cos\frac{3\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

qui sont celles qui satisfond à cette condition, comme *Tchebicheff* l'a fait voir.

En posant alors

$$x = h\cos x_1, \quad \mathrm{P}(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_m),$$

et en ayant égard aux identités

$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} = -\cos\frac{\pi}{2n}, \quad \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n} = -\cos\frac{3\pi}{2n}, \quad \ldots$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= h^n \left(\cos\ x_1 - \cos\ \frac{\pi}{2n}\right) \left(\cos\ x_1 - \cos\ \frac{3\pi}{2n}\right) \ldots \left(\cos\ x_1 - \cos\ \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \\
&= h^n \left(\cos^2 x_1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n}\right) \left(\cos^2 x_1 - \cos^2 \frac{3\pi}{2n}\right) \ldots \left(\cos^2 x_1 - \cos^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) \\
&= h^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - x_1\right) \\
&\times \quad \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} + x_1\right),
\end{aligned}$$

quand n est un nombre *pair,* et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= h^n \left(\cos^2 x_1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n}\right) \left(\cos^2 x_1 - \cos^2 \frac{3\pi}{2n}\right) \ldots \left(\cos^2 x_1 - \cos^2 \frac{(n-2)\pi}{2n}\right) \left(\cos x_1 - \cos \frac{n\pi}{2n}\right) \\
&= h^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} - x_1\right) \\
&\times \quad \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} + x_1\right) \\
&\times \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2n} - x_1\right),
\end{aligned}$$

quand n est un nombre impair. Et de ces formules et des suivantes, données par *Euler* dans son *Introductio in Analysin infinitorum:*

$$\text{(A.)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\cos nx_1 &= 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - x_1\right) \\
&\times \quad \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} + x_1\right),
\end{aligned}\right.$$

si n est un nombre pair, et

$$\text{(B.)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\cos nx_1 &= 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} - x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} - x_1\right) \\
&\times \quad \sin\left(\frac{\pi}{2n} + x_1\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} + x_1\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2n} + x_1\right) \\
&\times \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2n} - x_1\right),
\end{aligned}\right.$$

si n est un nombre impair, il résulte

$$P(x) = \frac{h^n}{2^{n-1}} \cos nx_1.$$

En posant maintenant

$$z = h \cos z_1,$$

on trouve aussi

$$P(z) = \frac{h^n}{2^{n-1}} \cos nz_1.$$

L'expression du reste $R(x)$ prend donc la forme

$$(9.) \qquad R(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_A \frac{f(z) \cos nx_1}{(z-x) \cos nz_1} dz,$$

et elle fait voir que la condition générale pour que $R(x)$ tende vers zéro, pour $n = \infty$, est que la plus grande valeur que prend l'expression

$$\left| \frac{\cos nx_1}{\cos nz_1} \right|,$$

quand le point dont z est l'affixe décrit la circonférence A, tende vers zéro, pour $n = \infty$.

Pour étudier cette condition il nous faut chercher la courbe que décrit le point dont l'affixe est z_1, quand le point dont l'affixe est z décrit la circonférence A. Or, comme l'équation de cette circonférence est $|z| = \rho$, on voit que l'équation de la courbe demandée est

$$|\cos z_1| = \frac{\rho}{h}.$$

Nous trouvons ainsi la courbe considérée dans le n.° 3, où on a vu qu'elle est fermée et coupe l'axe des abscisses, quand $\rho \overline{\overline{<}} h$, et qu'elle est ouverte et ne coupe pas cet axe, quand est $\rho > h$. Dans le premier cas, les valeurs de z_1 qui correspondent aux points où la courbe coupe l'axe des abscisses sont réelles, et dans ces points on a $|\cos nz_1| \overline{\overline{<}} 1$, quelque grand que soit n; dans le second cas, la plus petite valeur que prend $|\cos nz_1|$, quand z_1 décrit la courbe considérée, tend (n.° 4) vers l'infini, pour $n = \infty$.

D'un autre côté, si l'on suppose que x est une quantité réelle, comprise entre $-h$ et h, x_1 est aussi une quantité réelle, comprise entre 0 et π, et on a $|\cos nx_1| < 1$.

De tout ce qui précède il résulte que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos nx_1}{\cos nz_1}\right|$, quand z décrit le contour A, tend vers zéro, pour $n=\infty$, si x est un nombre réel, compris entre $-h$ et h; et que, par conséquent, on a, pour ces valeurs de x,

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{R}(x)=0.$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par une circonférence de rayon égal à ρ ayant son centre dans l'origine des coordonnées et si x est une quantité réelle comprise entre $-h$ et h, et $\rho > h$, la valeur que prend $\Theta(x)$, quand on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs (8.), *tend vers $f(x)$, quand n tend vers l'infini.*

En comparant ce résultat à celui qu'on a obtenu dans le n.° 5 et en considérant seulement les valeurs réelles de x, on voit que, dans le théorème qu'on vient de démontrer, on fixe à ces valeurs les limites $(-\rho, \rho)$, moins étroits que ceux $\left(-\frac{1}{3}\rho, \frac{1}{3}\rho\right)$ qu'on avait été obligé à leur fixer en faisant usage des inégalités (4).

7. On peut généraliser facilement la doctrine qui précède en l'étendant aux valeurs complexes de x, comme on va voir.

On a, en effet, en posant $x_1 = \alpha + i\beta$,

$$|\cos nx_1|^2 = \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta}+e^{-n\beta}}{2}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta}-e^{-n\beta}}{2}\right)^2$$

et (n.° 4)

$$|\cos nz_1| > \frac{1}{2}(e^{nl}-e^{-nl}),$$

où

$$l = \log(c+\sqrt{c^2-1}) = \log\frac{\rho+\sqrt{\rho^2-h^2}}{h},$$

z_1 étant l'affixe d'un point quelconque de la courbe $|\cos z_1| = c$; et, par conséquent,

$$\left|\frac{\cos nx_1}{\cos nz_1}\right|^2 < \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta}+e^{-n\beta}}{e^{nl}-e^{-nl}}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta}-e^{-n\beta}}{e^{nl}-e^{-nl}}\right)^2.$$

Mais

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta}+e^{-n\beta}}{e^{nl}-e^{-nl}}=0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta}-e^{-n\beta}}{e^{nl}-e^{-nl}}=0,$$

lorsque $|\beta|<l$.

Donc la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos n x_1}{\cos n z_1}\right|$, quand z_1 décrit la courbe $|\cos z_1|=c$, tend vers zéro, pour $n=\infty$.

Il résulte de ce qui précède qu'est

$$f(x)=\lim_{n=\infty} \Theta(x)$$

quand

$$|\beta|<\log \frac{\rho+\sqrt{\rho^2-h^2}}{h}.$$

Considérons, en particulier, les valeurs de x qui sont les affixes des points de la circonférence de rayon ρ_1, ayant son centre dans l'origine des coordonnées, et soit $\rho_1<\rho$. Les valeurs correspondantes de x_1 sont représentées par les points de la courbe $|\cos x_1|=\frac{\rho_1}{h}=c_1$, et, par conséquent, pour qu'on ait, por toutes ces valeurs de x, $\lim_{n=\infty} \Theta(x)=f(x)$, il suffit que cette courbe-ci soit à l'intérieur de la bande limitée par les droites $y=-l$ et $y=l$. Or, comme la plus grande valeur absolue des ordonnées de la courbe $|\cos x_1|=c_1$ est égale à $\log(c_1+\sqrt{c_1^2+1})$, la condition énoncée est satisfaite quand

$$\log(\rho_1+\sqrt{\rho_1^2+h^2})<\log(\rho+\sqrt{\rho^2-h^2})$$

ou, par conséquent,

$$\rho_1+\sqrt{\rho_1^2+h^2}<\rho+\sqrt{\rho^2-h^2}.$$

Il résulte de cette inégalité la suivante:

$$\rho^2>\rho_1^2+h^2,$$

et nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur de la circonférence de rayon égal à ρ, ayant le centre dans l'origine des coordonnées, et si x est l'affixe d'un point de l'aire du cercle de rayon égal à ρ_1 ayant le centre dans le même point, et si est $\rho^2>\rho_1^2+h^2$, la fonction $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand n tend vers l'infini.

Ce théorème contient comme cas particulier celui qui résulte du théorème obtenu dans le n.° 5 en y donnant à a_1, a_2, a_3, ... les valeurs (8.), lequel correspond au cas où $\rho_1 = h$ et $\rho > 3h$.

8. Nous allons nous occuper maintenant de la détermination du dégré d'approximation avec laquelle le polynôme $\Theta(x)$, correspondant à une valeur de n donnée, représente la fonction $f(x)$, en continuant à supposer que $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par la circonférence de rayon ρ ayant son centre dans l'origine des coordonnées, que x est un nombre réel compris entre $-h$ et h, et que a_1, a_2, a_3, ... représentent les nombres (8.).

Pour étudier cette question nous partirons de la formule

$$\mathrm{R}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{A}} \frac{f(z) \cos nx_1}{(z-x) \cos nz_1} dz,$$

qui donne

$$|\mathrm{R}(x)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{A}} \left| \frac{f(z)}{z-x} \right| \left| \frac{\cos nx_1}{\cos nz_1} \right| ds,$$

et par conséquent, en représentant par M un nombre égal ou supérieur à la plus grande valeur que prend $|f(z)|$ quand z décrit la circonférence A, et par B un nombre égal on inférieur à la plus petite valeur que prend $|\cos nz_1|$, quand z décrit la même circonférence (et par conséquent z_1 la courbe $|\cos z_1| = c$), et en remarquant qu'est $|z-x| \overline{\overline{>}} \rho - |x|$,

$$\text{(10.)} \qquad |\mathrm{R}(x)| < \frac{\rho \mathrm{M} |\cos nx_1|}{\mathrm{B}(\rho - |x|)}.$$

Or on a déjà vu qu'est

$$|\cos nz_1| > \frac{1}{2} [(c + \sqrt{c^2-1})^n - (c + \sqrt{c^2-1})^{-n}],$$

et on peut donc poser

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2} [(c + \sqrt{c^2-1})^n - (c + \sqrt{c^2-1})^{-n}].$$

L'expression (10.) du limite de l'erreur qui résulte de prendre pour valeur de $f(x)$ la valeur de $\Theta(x)$, correspondant à un nombre n donné, depend de x. On en tire la suivante, independante de cette variable, applicable à tout l'intervalle $(-h, +h)$:

$$|\mathrm{R}(x)| < \frac{\rho \mathrm{M}}{(\rho - h)\mathrm{B}}.$$

*

On peut obtenir de une manière facile la valeur qu'on doit attribuer à n pour que $|R(x)|$ soit inférieur à un nombre donné d'avance δ. Il suffit, en effet, de satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\rho M}{(\rho-h)B} < \delta,$$

qui donne, en posant $\frac{\rho M}{(\rho-h)\delta} = u$,

$$(c+\sqrt{c^2-1})^{2n} - 1 > 2u(c+\sqrt{c^2-1})^n,$$

ou

$$[(c+\sqrt{c^2-1})^n - u]^2 - (u^2+1) > 0$$

et, par conséquent,

$$(c+\sqrt{c^2-1})^n > u + \sqrt{u^2+1},$$

ou

$$n > \frac{\log(u+\sqrt{u^2+1})}{\log(c+\sqrt{c^2-1})}.$$

On obtient donc le nombre démandé en cherchant le plus petit entier qui satisfait à cette inégalité.

La doctrine qui précède est applicable à l'évaluation approchée des intégrales définies. On a, en effet, en représentant par a et b deux nombres compris entre $-h$ et h,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Theta(x)\,dx + \int_a^b R(x)\,dx,$$

et, en supposant $b > a$,

$$\left|\int_a^b R(x)\,dx\right| < \frac{\rho M(b-a)}{(\rho-h)B}\,; \ \lim_{n=\infty} B = \infty.$$

Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b \Theta(x)\,dx.$$

L'erreur qui résulte de prendre le nombre $\int_a^b \Theta(x)\,dx$, correspondant à une valeur de n donnée, pour valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$, est inférieure à

$$\frac{\rho M(b-a)}{B(\rho-h)}.$$

Si l'on veut déterminer la valeur qu'on doit attribuer à n pour que cette erreur soit inférieur à un nombre donné δ, ou peut recourir à l'inégalité

$$\frac{\rho M(b-a)}{B(\rho-h)}<\delta,$$

ou

$$(c+\sqrt{c^2-1})^{2n}-1>2\,\frac{\rho M(b-a)}{(\rho-h)\delta}(c+\sqrt{c^2-1})^n$$

ou

$$n>\frac{\log(u_1+\sqrt{u_1^2+1})}{\log(c+\sqrt{c^2-1})},$$

où

$$u_1=\frac{\rho M(b-a)}{(\rho-h)\delta}=u(b-a).$$

Le plus petit entier qui lui satisfait est le nombre demandé.

9. La doctrine qui précède peut être étendue au cas où la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par une circonférence de rayon ρ ayant le centre dans le point $(a, 0)$, et où x représente un nombre réel compris entre $a-h$ et $a+h$, et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ représentent les nombres

$$a+h\cos\frac{\pi}{2n},\quad a+h\cos\frac{3\pi}{2n},\quad \ldots,\quad a+h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

En posant, en effet, $x=x'+a$, on voit que $f(x'+a)$ est une fonction de x' holomorphe dans l'aire limitée par la circonférence de rayon ρ ayant son centre dans l'origine des coordonnées, et que prend les valeurs $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, $\ldots$, quand on donne à x' les valeurs

$$h\cos\frac{\pi}{2n},\quad h\cos\frac{3\pi}{2n},\quad \ldots,\quad h\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

On a donc, quand les conditions indiquées aux n.^{os} 6 et 7 sont satisfaites,

$$f(x'+a) = \lim_{n=\infty} \Theta(x')$$

et, par conséquent,

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \Theta(x-a).$$

10. Voici encore un autre cas dans lequel la condition générale pour la convergence de la formule d'interpolation de *Lagrange,* considérée dans le n.° 5, conduit à des résultats, qui nous paraissent offrir quelque intérêt, qu'on ne peut pas tirer des inégalités (4.).

Supposons que les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soient encore réels et, deux à deux, égaux et de signes contraires, et qu'ils soient compris entre $-h$ et h. Supposons aussi que la fonction $f(x)$ soit, comme dans le n.° 6, holomorphe dans l'aire limitée par une circonférence de rayon ρ ayant son centre dans l'origine des coordonnées.

La condition pour que $\Theta(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m=\infty$, est alors que la plus grande valeur que prend

$$\left|\frac{(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\ldots(x^2-a_v^2)}{(z^2-a_1^2)(z^2-a_2^2)\ldots(z^2-a_v^2)}\right|,$$

où $v=\frac{1}{2}m$, quand z décrit la circonférence considérée, tende vers zéro, pour $v=\infty$; et sont des conditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait

$$\left|\frac{x^2-a_1^2}{z^2-a_1^2}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{x^2-a_2^2}{z^2-a_2^2}\right| < \varepsilon, \quad \ldots$$

ε étant une quantité positive arbitraire, inférieure à l'unité. Nous allons étudier ces conditions-ci.

Soit a un nombre réel quelconque, compris entre $-h$ et h, et considérons la *cassinique* définie par l'équation

$$|z^2-a^2| = c^2,$$

c étant une constante, ou, en posant $z=x'+iy$,

$$[(x'-a)^2+y'^2][x'+a)^2+y'^2] = c^4,$$

laquelle, lorsqu'on suppose $c>a$, est composée d'un seul *ovale,* lequel coupe l'axe des abscisses dans les points $[\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0]$ et celui des ordonnées dans les points $(0, \sqrt{c^2-a^2}]$.

Quand a varie depuis 0 jusqu'à h, et c^2 varie aussi de manière qu'il soit toujours $a^2 + c^2 = h_1^2$, h_1^2 étant un nombre donné, que ne soit pas inférieur à $2h^2$, les ovales résultants coupent tous l'axe des abscisses dans les mêmes points, ne se coupent pas en autres points réels, et varient de manière que celui qui correspondent à une déterminée valeur de a contient à l'intérieur ceux qui correspondent à les valeurs supérieures de a; et tous ces ovales sont placés à l'intérieur de la circonférence représentée par l'équation

$$x'^2 + y'^2 = h_1^2,$$

qui est l'ovale correspondant à $a = 0$.

Cela posé, si x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de l'ovale suivant, qui correspond à $a = h$:

(C.) $$| z^2 - h^2 | = h_1^2 - h^2,$$

ce point est alors à l'intérieur de tous les ovales considérés, et on a donc

$$| x^2 - a^2 | < h_1^2 - a^2 < h_1^2.$$

D'un autre côté, on trouve au moyen de l'expression

$$| z^2 - a^2 |^2 = (x'^2 + y'^2)^2 + 2a^2 (x'^2 + y'^2) - 4a^2 x'^2 + a^4,$$

que la plus petite valeur que prend $| z^2 - a^2 |$, quand z décrit la circonférence

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2,$$

où $\rho > h_1$, coincide avec la plus petite valeur que prend

$$\rho^4 + 2a^2\rho^2 - 4a^2x'^2 + a^2,$$

quand x'^2 varie depuis 0 jusqu'à ρ^2, et est, par conséquent, égale à $\rho^2 - a^2$.

Nous avons donc, pour tout point z de la circonférence considérée,

$$| z^2 - a^2 | > \rho^2 - a^2 > \rho^2 - h^2,$$

et par conséquent

$$\left| \frac{x^2 - a^2}{z^2 - a^2} \right| < \frac{h_1^2}{\rho^2 - h^2}.$$

En substituant maintenant a par les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et en supposant

$$\rho^2 > h^2 + h_1^2,$$

on trouve les inégalités suivantes:

$$\left|\frac{x^2 - a_1^2}{z^2 - a_1^2}\right| < \frac{h_1^2}{\rho^2 - h^2} < 1, \quad \left|\frac{x^2 - a_2^2}{z^2 - a_2^2}\right| < \frac{h_1^2}{\rho^2 - h^2} < 1, \quad \ldots,$$

au moyen desquelles on voit qu'alors on a

$$f(x) = \lim \Theta(x).$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le cercle de rayon égal à ρ, ayant son centre dans l'origine des coordonnées; si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont des nombres réels, compris entre $-h$ et h, deux à deux égaux et de signes contraires; et si x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de l'ovale de Cassini (C.), *$\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, pour $v = \infty$,* quand est

$$h_1 > h\sqrt{2}, \quad \rho > \sqrt{h^2 + h_1^2}.$$

Si, en particulier, x est un nombre réel, compris entre $-h\sqrt{2}$ et $h\sqrt{2}$, et est $\rho > h\sqrt{3}$, $\Theta(x)$ tend vers $f(x)$, quand v tend vers l'infini.

De ce qui précède et des inégalités

$$|R(x)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi} \int_A \left|\frac{f(z)}{z - x}\right| \left|\frac{(x^2 - a_1^2) \ldots (x^2 - a_v^2)}{(z^2 - a_1^2) \ldots (z^2 - a_v^2)}\right| ds,$$

$$|z - x| \overline{\overline{>}} \rho - |x|.$$

on tire encore les inégalités suivantes, lorsque x est réel:

$$|R(x)| < \frac{M\rho}{\rho - |x|} \left(\frac{h_1^2}{\rho^2 - h^2}\right)^v < \frac{M\rho}{\rho - h_1} \cdot \frac{h_1^{2v}}{(\rho^2 - h^2)^v},$$

où M représente un nombre égal ou supérieur à la plus grande valeur que prend $|f(z)|$, quand z décrit la circonférence de rayon ρ ayant le centre à l'origine des coordonnées, qui ont les mêmes usages que les inégalités analogues considérées dans le n.° 8.

11. Nous terminerons la première partie de ce travail en étendant la formule (2.), qui a été le point de départ des recherches précedentes, aux fonctions qui admetent des pôles ou des points singuliers essentiels, en nombre fini, à l'intérieur du contour A.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points. On sait qu'il existe alors k développements respectivement ordonnés suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-b_1}, \frac{1}{x-b_2}, \ldots, \frac{1}{x-b_k}$, que nous designerons, suivant l'usage, par

$$G_1\left(\frac{1}{x-b_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-b_2}\right), \quad \ldots, \quad G_k\left(\frac{1}{x-b_k}\right),$$

tels que la fonction $F(x)$ définie par l'égalité

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{i=k} G_i\left(\frac{1}{x-b_i}\right)$$

est holomorphe dans l'aire considérée. Donc on peut lui appliquer la formule (2.), et il vient

$$F(x) = \Pi(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{F(z)(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\ldots(x-a_m)^\lambda}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta\ldots(z-a_m)^\lambda}\,dz,$$

où $\Pi(x)$ représente une fonction entière de x, qui satisfait aux conditions

$$\begin{array}{llll} \Pi(a_1) = F(a_1), & \Pi'(a_1) = F'(a_1), & \ldots, & \Pi^{(\alpha)}(a_1) = F^{(\alpha)}(a_1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Pi(a_m) = F(a_m), & \Pi'(a_m) = F'(a_m), & \ldots, & \Pi^{(\lambda)}(a_m) = F^{(\lambda)}(a_m), \end{array}$$

où $F(a_1), F(a_2), \ldots, F'(a_1), F'(a_2), \ldots$ sont des nombres qui dépendent des valeurs que prenent $f(x)$ et ses dérivées dans les points $a_1, a_2, \ldots$

Mais on a, en posant $P(x) = (x-a_1)^\alpha \ldots (x-a_m)^\lambda$,

$$\int_A \frac{F(z)P(x)}{(z-x)P(z)}\,dz = \int_A \frac{f(z)P(x)}{(z-x)P(z)}\,dz - \sum_{i=1}^{i=k}\int_A \frac{G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)P(x)}{(z-x)P(z)}\,dz,$$

et, à cause de l'égalité

$$G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right) = \frac{A_1^{(i)}}{(z-b_i)} + \frac{A_2^{(i)}}{(z-b_i)^2} + \frac{A_3^{(i)}}{(z-b_i)^3} + \ldots,$$

on a aussi

$$\int_A \frac{G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)P(x)}{(z-x)P(z)}\,dz = \sum_{s=1}^{\infty}\int_A \frac{A_s^{(i)}P(x)}{(z-x)(z-b_i)^s P(z)}\,dz.$$

Or dans cette formule il entre l'intégrale de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(z-x)(z-b_i)^s(z-a_1)^\alpha\ldots(z-a_m)^\lambda},$$

et il suffit qu'on remarque que le dégré de son numérateur est égal à 0 et que celui de son dénominateur est supérieur à 2 pour conclure, en employant un théorème bien connu, suivant lequel la somme de ses résidus par rapport à ses pôles est égal à zéro, qu'est

$$\int_A \frac{dz}{(z-x)(z-b_i)^s(z-a_1)^\alpha\ldots(z-a_m)^\lambda}=0,$$

et par conséquent

$$\int_A \frac{G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)P(x)}{(z-x)P(z)}\,dz=0.$$

Nous avons donc la formule suivante:

$$f(x)=\Pi(x)+\sum_{i=1}^{i=k} G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)+\frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)P(x)}{(z-x)P(z)}\,dz,$$

qu'on voulait démontrer.

II.

Sur la convergence des formules d'interpolation trigonométriques.

12. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par une courbe fermée A, et supposons que cette courbe soit enfermée dans la bande comprise entre les droites parallèles à l'axe des ordonnées dont les abscisses sont égales à $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$, et qu'elle contienne à l'intérieur les points d'affixe x, a_1, a_2, $\ldots$, a_m.

Alors la fonction

$$\mathrm{F}(z)=\frac{f(z)\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\ldots\sin(z-a_m)}$$

a, dans l'aire considérée, les pôles x, a_1, a_2, $\ldots$, a_m; et, en appliquant à l'intégrale

$$\mathrm{R}(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A}}\mathrm{F}(z)\,dz \tag{12.}$$

le théorème fondamental de la théorie des résidus, on trouve la formule

$$f(x)=\Psi(x)+\mathrm{R}(x), \tag{13.}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}\Psi(x)=&\frac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_m)}f(a_1)\\&+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_m)}f(a_2)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{m-1})}{\sin(a_m-a_1)\sin(a_m-a_2)\ldots\sin(a_m-a_{m-1})}f(a_m),\end{aligned}\right. \tag{14.}$$

*

et on voit que $\Psi(x)$ satisfait aux conditions

$$\Psi(a_1)=f(a_1),\quad \Psi(a_2)=f(a_2),\quad \ldots,\quad \Psi(a_m)=f(a_m). \tag{15.}$$

Nous venons de trouver ainsi une formule d'interpolation donnée par *Hermite* dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1873, p. 332) et une expression de son reste au moyen d'une intégrale curviligne, que nous avons déjà indiquée dans une note publiée dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (2.e série, t. XIV), au moyen de laquelle nous étudierons sa convergence. Mais, avant de la faire, nous indiquerons une autre forme qu'on peut donner à l'expression de $\Psi(x)$.

13. Chaqu'un des termes qui entrent dans le second membre de l'égalité (14.) est le produit de $m-1$ facteurs de la forme $p\cos x+q\sin x$; donc $\Psi(x)$ est une fonction homogène de $\sin x$ et $\cos x$ du dégré $m-1$, et elle peut être réduite à la forme suivante:

$$\Psi(x)=\mathrm{L}_1\cos^{m-1}x+\mathrm{L}_3\cos^{m-3}x+\ldots+[\mathrm{K}_1\cos^{m-2}x+\mathrm{K}_3\cos^{m-4}x+\ldots]\sin x.$$

En employant maintenant les formules connues:

$$2^{s-1}\cos^s x=\cos sx+\binom{s}{1}\cos(s-2)x+\binom{s}{2}\cos(s-4)x+\ldots+\frac{1}{2}\binom{s}{\frac{1}{2}s},$$

si s est pair,

$$2^{s-1}\cos^s x=\cos sx+\binom{s}{1}\cos(s-2)x+\binom{s}{2}\cos(s-4)x+\ldots+\binom{s}{\frac{1}{2}(s-1)}\cos x,$$

si s est impair, et les suivantes, qui résultent de dériver par rapport à x les antérieures,

$$2^{s-1}s\cos^{s-1}x\sin x=s\sin sx+\binom{s}{1}(s-2)\sin(s-2)x+\ldots+\binom{s}{\frac{1}{2}s-1}2\sin 2x,$$

$$2^{s-1}s\cos^{s-1}x\sin x=s\sin sx+\binom{s}{1}(s-2)\sin(s-2)x+\ldots+\binom{s}{\frac{1}{2}(s-1)}\sin x,$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned}\Psi(x)=\;&\mathrm{A}_{m-1}\cos(m-1)x+\mathrm{A}_{m-3}\cos(m-3)x+\ldots+\mathrm{A}_1\cos x\\&+\mathrm{B}_{m-1}\sin(m-1)x+\mathrm{B}_{m-3}\sin(m-3)x+\ldots+\mathrm{B}_1\sin x,\end{aligned}\right. \tag{16.}$$

si m est un nombre pair, et

$$(17.)\quad \begin{cases} \Psi(x) = A_{m-1}\cos(m-1)x + A_{m-3}\cos(m-3)x + \dots + A_2\cos 2x + A_0 \\ \qquad + B_{m-1}\sin(m-1)x + B_{m-3}\sin(m-3)x + \dots + B_2\sin 2x, \end{cases}$$

si m est un nombre impair.

Au moyen de l'analyse que précède ou démontre non seulement la possibilité de réduire toujours $\Psi(x)$ aux formes précedentes mais on peut déterminer, en chaque cas particulier, les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$. On peut aussi, la possibilité de cette réduction étant établie, déterminer ces coefficients au moyen des équations

$$\Psi(a_1) = f(a_1), \quad \Psi(a_2) = f(a_2), \quad \dots, \quad \Psi(a_m) = f(a_m),$$

qui sont du premier dégré par rapport à ces quantités.

14. En passant maintenant à étudier la convergence, pour $m = \infty$, de la formule d'interpolation qu'on vient de considérer, que est le bût principal que nous avons en vue, nous remarquerons que les formules (12.) et (13.) font voir que la condition générale pour que $\Psi(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m = \infty$, est que la plus grande valeur que prend

$$\left| \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\dots\sin(z-a_m)} \right|,$$

quand z décrit le contour A, tende vers zéro; et que, par conséquent, sont des conditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait, pour les mêmes valeurs de z,

$$(18.)\qquad \left| \frac{\sin(x-a_1)}{\sin(z-a_1)} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\sin(x-a_2)}{\sin(z-a_2)} \right| < \varepsilon, \quad \dots,$$

ε étant une quantité arbitraire inférieure à l'unité.

Les considérations qui précèdent nous mènent à poser le problème suivant: le contour A et les points $a_1, a_2, a_3, \dots$ étant donnés, déterminer l'ensemble des valeurs qu'on doit donner à x pour que $\Psi(x)$ converge vers $f(x)$, quand le nombre de ces points tend vers l'infini, ou, au moins, une partie de cet ensemble; ou, réciproquement, étant données ces valeurs, déterminer A.

On ne peut pas resoudre ce problème d'une manière générale, mais nous allons l'étudier en quelques cas qui nous paraissent offrir quelque intérêt.

15. En considérant prémièrement un cas qui nous conduit à employer les inégalités (18.), soient $a_1, a_2, a_3, \dots$ des nombres réels compris entre $-h$ et h et β une quantité qui satisfasse aux conditions $3h < \beta < \frac{1}{2}\pi$, et considérons les *ovales* représentés par les équations

$$|\sin z| = \sin\beta, \quad |\sin z| = \sin h, \quad |\sin z| = \sin 3h,$$

dont les centres coincident avec l'origine des coordonnées, lesquels nous désignerons par L, L′, L″, et l'ovale représenté par l'équation

$$|\sin(z-a)| = \sin(|a|+h),$$

dont le centre coincide avec le point d'affixe a, lequel nous désignerons par L_a. Ces ovales coupent l'axe des abscisses respectivement aux points

$$(0, \pm\beta), \quad (0, \pm h), \quad (0, \pm 3h), \quad [0, a \pm (|a|+h)],$$

L'ovale L_a est tangent à l'ovale L′, et, en écrivant leurs équations sous la forme suivante, en posant pour cela $z = x' + iy'$:

$$\begin{aligned}\cos^2 iy' &= \sin^2 h + \cos^2 x',\\ \cos^2 iy' &= \sin^2(|a|+h) + \cos^2(x'-a),\end{aligned}$$

on voit qu'ils n'ont pas d'autres points communs.

On voit de la même manière que l'ovale L_a est tangent à l'ovale L″ et que celui-là est à l'intérieur de celui-ci, quand le paramètre a est égal à $\pm h$.

Quand a varie depuis $-h$ jusquà h, l'ovale L_a varie, mais il ne coupe jamais L″, ni par conséquent L, qui est extérieur à L″. Il reste donc à l'intérieur de l'aire limitée par L et L′.

Nous avons donc, en représentant par x l'affixe d'un point quelconque de l'aire limitée par L′,

$$|\sin(x-a)| < \sin(|a|+h) < \sin 2h.$$

D'un autre côté, l'ovale L et l'ovale représenté par l'équation

$$|\sin(z-a)| = \sin(\beta - |a|)$$

sont tangents et le deuxième est à l'intérieur du premier. Donc on a, pour tout point z de L,

$$|\sin(z-a)| > \sin(\beta - |a|) > \sin(\beta - h).$$

Nous avons donc

$$\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(z-a)}\right| < \frac{\sin 2h}{\sin(\beta-h)} < 1.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quand on donne à a les valeurs a_1, a_2, a_3, ..., on peut énoncer le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par l'ovale L *et* a_1, a_2, a_3, ... *sont des nombres compris entre* $-h$ *et* h, $\Psi(x)$ *tend vers* $f(x)$, *pour* $m=\infty$, *quand* x *est l'affixe d'un point quelconque de l'aire limitée par l'ovale* L'.

16. C'est dans le cas de fonctions périodiques que se présentent les plus intéressantes applications de la doctrine du n.° 12. Nous allons nous en occuper maintenant.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans la bande infinie comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses, $Y=l$ et $Y=l'$, et supposons que cette fonction soit *périodique* et que sa période soit égale à π. Supposons aussi que le nombre des quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ soit *impair* et que A représente un rectangle formé par les deux droites précédentes et par les droites, parallèles à l'axe des ordonnées, dont les équations sont $X=-\frac{\pi}{2}$ et $X=\frac{\pi}{2}$.

On a alors

$$R(x)=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il} F(z)\,dz+\int_{\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz+\int_{\frac{\pi}{2}+il'}^{-\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz+\int_{-\frac{\pi}{2}+il'}^{-\frac{\pi}{2}+il} F(z)\,dz\right],$$

et aussi, à cause de la périodicité de la fonction $F(z)$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz=\int_{-\frac{\pi}{2}+il}^{-\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz;$$

et par conséquent

$$R(x)=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}+il}^{\frac{\pi}{2}+il} F(z)\,dz+\int_{\frac{\pi}{2}+il'}^{-\frac{\pi}{2}+il'} F(z)\,dz\right].$$

On voit au moyen de cette formule que la condition pour que $\Psi(x)$ tende vers $f(x)$, quand m tend vers l'infini, est que la plus grande valeur que prend

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\ldots\sin(z-a_m)}\right|,$$

quand z décrit les côtés du rectangle A parallèles à l'axe des abscisses, tende vers zéro, et que sont des coditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait, pour les mêmes valeurs de z,

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)}{\sin(z-a_1)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\sin(x-a_2)}{\sin(z-a_2)}\right| < \varepsilon, \quad \ldots,$$

ε étant, comme antérieurement, une quantité arbitraire, inférieure à l'unité.

Comme dans ce cas m est un nombre impair, $\Psi(x)$ est déterminée par la formule (14.) ou (17.).

17. Pour faire une première application de ces résultats, considérons la courbe définie par l'équation

$$|\sin(z-a)| = c,$$

et supposons qu'est $c > 1$ et que a est un nombre réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette courbe est alors composée de deux branches symétriquement placées par rapport à l'axe des abscisses et elle a un nombre infini de points où l'ordonnée est minimum, en valeur absolue, placés sur les droites dont l'équation est

$$\text{(20.)} \qquad Y = \pm \log(c + \sqrt{c^2-1}).$$

On a donc, pour toute valeur de x représenté par un point compris entre ces droites,

$$|\sin(x-a)| < c.$$

Considérons aussi la courbe définie par l'équation

$$|\sin(z-a)| = \beta,$$

et soit $\beta > c$. Cette courbe est placée au-dessus de l'antérieure et elle a un nombre infini de points où la valeur absolue de l'ordonnée est maximum, placés sur les droites dont l'équation est

$$(21.)\qquad Y = \pm \log(\beta + \sqrt{\beta^2+1}).$$

On a donc, pour toute valeur de z représentée par un point de ces droites,

$$|\sin(z-a)| \overline{\overline{>}} \beta > c.$$

Il vient, par conséquent,

$$\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(z-a)}\right| < \frac{c}{\beta} < 1,$$

et ensuite, en représentant par $a_1, a_2, \ldots$ des nombres réels, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\left|\frac{\sin(x-a_1)}{\sin(z-a_1)}\right| < \frac{c}{\beta}, \quad \left|\frac{\sin(x-a_2)}{\sin(z-a_2)}\right| < \frac{c}{\beta}, \quad \ldots.$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les droites (21.) *et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont des nombres réels, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $m=\infty$, quand x représente l'affixe d'un point de la bande comprise entre les droites* (20.).

18. En continuant l'étude du cas que nous venons de considérer et en supposant maintenant que x est réel, nous allons indiquer une propriété des coefficients qui entrent dans la formule (17.), qu'il convient remarquer.

Soit M la plus grande valeur que prend $|f(z)|$ quand z décrit les droites qui limitent la bande où cette fonction est holomorphe, et B la plus petite valeur que prend $|\sin(z-x)|$ quand z décrit les mêmes droites et x varie depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. On a, en remarquant que B est différente de zéro,

$$|R(x)| < \frac{M}{B}\left(\frac{c}{\beta}\right)^m.$$

De l'égalité

$$f(x) = \Psi(x) + R(x)$$

et de l'inégalité précédente il résulte

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos kx\,dx = \lim_{m=\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(x)\cos kx\,dx$$

$$= \lim_{m=\infty}\Bigg[\mathrm{A}_{m-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(m-1)x\cos kx\,dx + \ldots + \mathrm{A}_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\,dx$$

$$+ \mathrm{B}_{m-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(m-1)x\cos kx\,dx + \ldots + \mathrm{B}_2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos kx\,dx\Bigg],$$

où k représente un quelconque des nombres pairs $m-1,\ m-3,\ \ldots,\ 2,\ 0$.

Mais on a, en représentant par k' un quelconque de ces mêmes nombres,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\cos k'x\,dx = 0,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\sin k'x\,dx = 0,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 kx\,dx = \frac{\pi}{2},\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 kx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{m=\infty}\mathrm{A}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{m=\infty}\mathrm{A}_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos kx\,dx, \qquad (k>0).$$

On trouve de la même manière, en partant de l'égalité

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z)\sin kx\,dx = \lim_{m=\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(x)\sin kx\,dx,$$

'égalité suivante:

$$\lim_{m=\infty} \mathrm{B}_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin kx \, dx.$$

19. Il est facile de voir que tout ce que nous venons de dire à l'égard du cas où la fonction $f(z)$ a la periode π a aussi lieu quand cette fonction satisfait à la condition $f(z+\pi) = -f(z)$. Mais alors il faut que le nombre m soit *pair*, pour que la fonction $\mathrm{F}(z)$ ait encore la période π; et, par conséquent, la fonction $\Psi(x)$ est donnée par la formule (16.).

20. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, qu'on choisissait d'une manière arbitraire les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Nous allons maintenant considérer quelques nombres particuliers qui conduisent à des conséquences remarquables.

Supposons premièrement que la fonction $f(z)$ admette la période π, que l'axe des abscisses soit à l'intérieur de la bande infinie, limitée par deux droites qui lui sont parallèles, dans laquelle elle est holomorphe, et que à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on donne les valeurs

$$(22.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2n}, \ \frac{3\pi}{2n}, \ \frac{5\pi}{2n}, \ \ldots, \ \frac{(n-2)\pi}{2n}, \ \frac{n\pi}{2n}, \\ -\frac{\pi}{2n}, \ -\frac{3\pi}{2n}, \ -\frac{5\pi}{2n}, \ \ldots, \ -\frac{(n-2)\pi}{2n}, \end{array}\right.$$

n étant un nombre *impair*.

On voit alors, au moyen de la formule (B.) (n.° 6) qu'est

$$\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(z-a_1)\sin(z-a_2)\ldots\sin(z-a_m)} = \frac{\cos nx}{\cos nz},$$

et, par conséquent,

$$(23.)\qquad \mathrm{R}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{A}} \frac{f(z)\cos nx}{\sin(z-x)\cos nz} dz.$$

Il en résulte que la condition pour que $\Psi(x)$ tende vers $f(x)$, quand n tend vers l'infini, est que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos nx}{\cos nz}\right|$, quand z décrit les droites qui limitent la bande considérée, tende vers zéro.

*

Or, en posant $z = x' + iy'$, on trouve l'identité

$$|\cos nz|^2 = \cos^2 nx' \left(\frac{e^{ny'} + e^{-ny'}}{2}\right)^2 + \sin^2 nx' \left(\frac{e^{ny'} - e^{-ny'}}{2}\right)^2,$$

au moyen de laquelle on voit, en posant premièrement $y' = \pm l$ et en appliquant ensuite la méthode des maxima et minima, que la plus petite valeur que prend $|\cos nz|$, quand z décrit les droites $y' = -l$ et $y' = l$, est égale à

$$\frac{e^{nl} - e^{-nl}}{2}$$

et qu'elle tend, par conséquent, pour l'infini, quand $n = \infty$.

D'un autre côté, en posant $x = \alpha + i\beta$ et en ayant égard à l'identité

$$|\cos nx|^2 = \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{2}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{2}\right)^2,$$

on trouve

$$\left|\frac{\cos nx}{\cos nz}\right|^2 < \cos^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}}\right)^2 + \sin^2 n\alpha \left(\frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}}\right)^2,$$

quand z représente un point quelconque des droites $y' = l$ et $y' = -l$.

Mais on a, quand $|\beta| < l$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nl} - e^{-nl}} = 0.$$

On conclut donc que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\cos nx}{\cos nz}\right|$, quand z décrit les droites $y' = -l$ et $y' = l$, tend vers zéro, quand $n = \infty$, si le point d'affixe x est à l'intérieur de la bande limitée par ces droites.

Nous avons donc le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande comprise entre deux droites, parallèles à l'axe des abscisses et équidistantes de cet axe, et est périodique, sa période étant égale à π, la fonction $\Psi(x)$, qu'on obtient en donnant en (14.) *ou* (17.) *à a_1, a_2, ... les valeurs* (22.), *tend vers $f(x)$, quand n tend vers infini, si x représente un point quelconque de l'intérieur de la bande considérée.*

21. La fonction $\Psi(x)$ prend, dans le cas qu'on vient de considérer, deux formes simples qu'on pouvait déduire des formules (14.) et (17.), mais qu'on obtient d'une manière plus facile en partant directement de l'intégrale (23.), en lui appliquant le théorème fondamental de la théorie des résidus.

En effet, en représentant par a un quelconque des nombres (22.) et par R le résidu de la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)\cos nx}{\sin(z-x)\cos nz}$$

par rapport à son pôle a, on trouve

$$R = \lim_{h=0} \frac{hf(a+h)\cos nx}{\sin(a+h-x)\cos n(a+h)} = -\frac{f(a)\cos nx}{n\sin(a-x)\sin na},$$

et par conséquent

$$\Psi(x) = -\frac{\cos nx}{n}\Sigma\frac{f(a)}{\sin na\sin(x-a)},$$

ou

$$(24.)\qquad \Psi(x) = -\frac{\cos nx}{n}\Sigma\sin na\frac{f(a)}{\sin(x-a)},$$

où a représente les nombres

$$\frac{(2\eta+1)\pi}{2n},\ \left(\eta=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}\right),\ -\frac{(2\eta+1)\pi}{2n}\left(\eta=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{n-3}{2}\right).$$

Ayant obtenu ainsi la première expression de $\Psi(x)$ démandée, nous allons en déduire la seconde.

Posons, pour cela, dans l'expression $\frac{\cos nx}{\sin(x-a)}$, qui entre dans la formule qu'on vient de trouver, $e^{ix}=t$ et $e^{ia}=\lambda$. On trouve

$$\frac{\cos nx}{\sin(x-a)} = i\lambda t^{1-n}\frac{t^{2n}+1}{t^2-\lambda^2} = i\left[\lambda t^{n-1}+\lambda^3 t^{n-3}+\ldots+\lambda^{2n-3}t^{3-n}+\lambda^{2n-1}t^{1-n}\right]+i\lambda t^{1-n}\frac{\lambda^{2n}+1}{t^2-\lambda^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos nx}{\sin(x-a)} = i\left[e^{i[(n-1)x+a]}+e^{i[(n-3)x+3a]}+\ldots+e^{i[(3-n)x+(2n-3)a]}+e^{i[(1-n)x+(2n-1)a]}\right],$$

ou, à cause de l'identité $e^{2nia} = e^{\pm(2\eta+1)i\pi} = -1$,

$$\frac{\cos nx}{\sin(x-a)} = -2\left[\sin((n-1)x+a)+\sin((n-3)x+3a)+\ldots+\sin(2x+(n-2)a)+\frac{1}{2}\sin na\right].$$

On a donc la formule

$$\Psi(x) = \frac{2}{n}\Sigma\sin na\left[\sin((n-1)x+a)+\sin((n-3)x+3a)+\ldots+\sin(2x+(n-2)a)+\frac{\sin na}{2}\right]f(a),$$

ou

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned}\Psi(x) &= A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-3}\cos(n-3)x + \ldots + A_2\cos 2x + A_0\\ &+ B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-3}\sin(n-3)x + \ldots + B_2\sin 2x,\end{aligned}\right.$$

où n est impair, et

$$A_0 = \frac{1}{n}\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{2}{n}\Sigma\sin na f(a)\sin(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos ka, \qquad (k>0)$$

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma\sin na f(a)\cos(n-k)a = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

Ces formules donnent immédiatement les propriétés suivantes des constantes A_k et B_k:

$$\lim_{n=\infty} A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} B_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin kx\,dx,$$

qui coincident avec celles qu'on a données dans le n.° 18 pour le cas où a_1, a_2, a_3, ... représentent des nombres arbitraires, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

22. Soit x une quantité réelle et M_1 et M_2 les plus grandes valeurs que prend $|f(z)|$, quand z décrit les droites qui limitent la bande dans laquelle $f(z)$ est holomorphe. En remarquant que les plus petites valeurs qu'alors prenent $|\sin(z-x)|$ et $|\cos nz|$ sont égales à

$$\frac{e^l-e^{-l}}{2}, \quad \frac{e^{nl}-e^{-nl}}{2},$$

on trouve l'inégalité

$$|R(x)| < \frac{2(M_1+M_2)|\cos nx|}{(e^l-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})},$$

qui donne un limite supérieur de l'erreur qui resulte de prendre la fonction $\Psi(x)$, correspondante à une valeur de n donnée, pour valeur approchée de la fonction $f(x)$.

De cette inégalité on tire encore la suivante:

$$|R(x)| < \frac{2(M_1+M_2)}{(e^l-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})},$$

qui est indépendante de x, et qui peut être employée pour démontrer que, si α et β représentent deux nombres réels, on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_\alpha^\beta \Psi(x)\,dx,$$

et que l'erreur qui résulte de prendre $\int_\alpha^\beta \Psi(x)\,dx$ pour valeur de $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ est inférieur à

$$\frac{2(M_1+M_2)|\beta-\alpha|}{(e^l-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})}.$$

Comme l'inégalité

$$\frac{2(M_1+M_2)|\beta-\alpha|}{(e^l-e^{-l})(e^{nl}-e^{-nl})} < \delta$$

donne

$$e^{2nl}-1 > 2\,ve^{nl}, \quad v = \frac{M_1+M_2}{(e^l-e^{-l})\,\delta},$$

ou

$$e^{nl} > v + \sqrt{v^2+1}$$

on peut déterminer au moyen de l'inégalité

$$n > \frac{\log(v + \sqrt{v^2+1})}{l}, \quad v = \frac{M_1 + M_2}{(e^l - e^{-l})\delta},$$

la plus petite valeur qu'on doit donner à n pour que l'erreur qui résulte de prendre $\Psi(x)$ pour valeur de $f(x)$ soit inférieur à δ.

23. Pour faire maintenant une application de la doctrine considérée dans le n.° 19, supposons que la fonction $f(x)$ satisfasse à la condition $f(x+\pi) = -f(x)$ et que soit encore holomorphe dans la bande comprise entre les droites $y = -l$ et $y = l$, et supposons aussi qu'on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$\pm \frac{(2\eta+1)\pi}{2n}, \quad \eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n-2}{2}, \tag{26.}$$

et que n soit *pair*.

Au moyen de la formule (A) du n.° 6 on voit qu'est encore

$$R(x) = \int_A F(z)\,dz = \int_A \frac{f(z)\cos nx}{\sin(z-x)\cos nz}\,dz,$$

et que $F(z)$ est périodique, et que sa période est égale à π. On en conclut que le théorème démontré dans le n.° 20 a encore lieu ainsi que la formule (24.).

Mais on doit substituer à la formule (25.) la suivante:

$$\begin{aligned}\Psi(x) = {} & A_{n-1}\cos(n-1)x + A_{n-3}\cos(n-3)x + \ldots + A_1\cos x \\ & + B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-3}\sin(n-3)x + \ldots + B_1\sin x.\end{aligned}$$

Les coefficients A_k et B_k de cette formule sont donnés par les mêmes rélations que dans le cas antérieur en y substituant a par les valeurs (26.).

24. Nous indiquerons encore un autre système de valeurs de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui, quand la fonction $f(x)$ admet la période π, mènent à des résultats convergents. C'est le suivant:

$$a = \frac{\eta\pi}{n}, \quad \left[\eta = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm \frac{1}{2}(n-1)\right],$$

n étant un nombre *impair*.

En appliquant le théorème fondamental de la théorie des résidus à l'intégrale

$$\int_A \frac{f(z)\sin nx}{\sin(z-x)\sin nz}\,dz$$

et en ayant égard à que le résidu de la fonction $\frac{f(z)\sin nx}{\sin(z-x)\sin nz}$ est donné par la formule

$$\mathrm{R} = \lim_{h=0} \frac{hf(a+h)\sin nx}{\sin(a+h-x)\sin n(a+h)} = \frac{f(a)\sin nx}{n\sin(a-x)\cos na},$$

on trouve alors

$$f(x) = \Psi(x) + \mathrm{R}(x),$$

où

$$\mathrm{R}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin nx\,dz}{\sin(z-x)\sin nz},$$

$$(26.)\qquad \Psi(x) = \frac{\sin nx}{n}\,\Sigma(-1)^{\eta}\frac{f(a)}{\sin(x-a)};$$

et on voit au moyen de cette expression de $\mathrm{R}(x)$ que $\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $n=\infty$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par deux droites parallèles à l'axe des abscisses, équidistantes de cet axe, et x est l'affixe d'un point de son intérieur.

Comme on a, en posant, comme au n.° 21, $e^{ix}=t$, $e^{ia}=\lambda$,

$$\frac{\sin nx}{\sin(x-a)} = \lambda t^{1-n}\frac{t^{2n}-1}{t^2-\lambda^2} = \lambda t^{n-1} + \lambda^3 t^{n-3} + \ldots + \lambda^{2n-3}t^{3-n} + \lambda^{2n-1}t^{1-n} + i\lambda t^{1-n}\frac{t^{2n}+1}{t^2-\lambda^2},$$

et par conséquent

$$\frac{\sin nx}{\sin(x-a)} = e^{i[(n-1)x+a]} + e^{i[(n-3)x+3a]} + \ldots + e^{i[(3-n)x+(2n-3)a]} + e^{i[(1-n)x+(2n-1)a]},$$

ou, à cause de l'identité $\lambda^{2n} = e^{2\eta ia} = e^{2ni\pi} = 1$,

$$\frac{\sin nx}{\sin(x-a)} = 2\left[\cos[(x-1)x+a] + \cos[(n-3)x+3a] + \ldots + \cos[2x+(n-2)a] + \frac{1}{2}(-1)^{\eta}\right],$$

on peut réduire l'expression de $\Psi(x)$ à la forme suivante:

$$\Psi(x)=\frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}\left\{\cos[(n-1)x+a]+\cos[(n-3)x+3a]+\ldots+\cos[2x+(n-2)a]+\frac{(-1)^{\eta}}{2}\right\}f(a),$$

ou

$$\begin{aligned}\Psi(x)=&\,A_{n-1}\cos(n-1)x+A_{n-3}\cos(n-3)x+\ldots+A_2\cos 2x+A_0\\&+B_{n-1}\sin(n-1)x+B_{n-3}\sin(n-3)x+\ldots+B_2\sin 2x,\end{aligned}$$

où

$$A_0=\frac{1}{n}\Sigma f(a),$$

$$A_k=\frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}f(a)\cos(n-k)a=\frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos ka, \qquad (k>0)$$

$$B_k=\frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}f(a)\sin(n-k)a=\frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

25. Si la fonction $f(x)$ satisfait à la condition $f(x+\pi)=-f(x)$ et on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$a=\frac{\eta\pi}{n},\quad \eta=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm\left(\frac{1}{2}n-1\right),\quad \frac{1}{2}n,$$

où n est un nombre *pair*, on trouve, comme dans le cas antérieur, que la fonction $\Psi(x)$, définie par la formule (26.), tend vers $f(x)$, quand $n=\infty$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande considérée dans le n.° antérieur et x représente un point de son intérieur.

L'expression de $\Psi(x)$ peut être réduite alors à la forme

$$\Psi(x)=\frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}\left\{\cos[(n-1)x+a]+\cos[(n-3)x+3a]+\ldots+\cos[x+(n-1)a]\right\}f(a),$$

ou

$$\begin{aligned}\Psi(x)=&\,A_{n-1}\cos(n-1)x+A_{n-3}\cos(n-3)x+\ldots+A_1\cos x\\&+B_{n-1}\sin(n-1)x+B_{n-3}\sin(n-3)x+\ldots+B_1\sin x,\end{aligned}$$

où

$$A_k=\frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}f(a)\cos(n-k)a=\frac{2}{n}\Sigma f(a)\cos ka,$$

$$B_k=\frac{2}{n}\Sigma(-1)^{\eta}f(a)\sin(n-k)a=\frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

26. L'intégrale

$$(27.) \qquad R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_A \frac{f(z) \sin \frac{1}{2}(x-a_1) \ldots \sin \frac{1}{2}(x-a_m)}{\sin \frac{1}{2}(z-x) \sin \frac{1}{2}(z-a_1) \ldots \sin \frac{1}{2}(z-a_m)} dz$$

conduit à des résultats analogues à ceux qu'on a obtenu au moyen de l'intégrale considérée dans le n.° 12.

On trouve, en premier lieu, en supposant que A représente une courbe fermée, placée à l'intérieur de la bande comprise entre les droites $X = -\pi$ et $X = \pi$, et que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soient les affixes de des points donnés, placés à l'intérieur de l'aire qu'elle limite:

$$f(x) = \Psi_1(x) + \frac{1}{2} R_1(x),$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = & \frac{\sin \frac{1}{2}(x-a_2) \sin \frac{1}{2}(x-a_3) \ldots \sin \frac{1}{2}(x-a_m)}{\sin \frac{1}{2}(a_1-a_2) \sin \frac{1}{2}(a_1-a_3) \ldots \sin \frac{1}{2}(a_1-a_m)} f(a_1) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\sin \frac{1}{2}(x-a_1) \sin \frac{1}{2}(x-a_2) \ldots \sin \frac{1}{2}(x-a_{m-1})}{\sin \frac{1}{2}(a_m-a_1) \sin \frac{1}{2}(a_m-a_2) \ldots \sin \frac{1}{2}(a_m-a_{m-1})} f(a_m), \end{aligned}$$

ou, en procédant comme dans le n.° 13,

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = & A_{m-1} \cos \frac{1}{2}(m-1)x + A_{m-3} \cos \frac{1}{2}(m-3) + \ldots + A_1 \cos \frac{1}{2} x \\ & + B_{m-1} \sin \frac{1}{2}(m-1)x + B_{m-3} \sin \frac{1}{2}(m-3) + \ldots + B_1 \sin \frac{1}{2} x, \end{aligned}$$

si m est un nombre *pair*, et

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = & A_{m-1} \cos \frac{1}{2}(m-1)x + A_{m-3} \cos \frac{1}{2}(m-3) + \ldots + A_0 \\ & + B_{m-1} \sin \frac{1}{2}(m-1)x + B_{m-3} \sin \frac{1}{2}(m-3) + \ldots + B_1 \sin x, \end{aligned}$$

*

si m est *impair;* et on voit que $\Psi_1(x)$ satisfait aux conditions

$$\Psi_1(a_1)=f(a_1),\quad \Psi_1(a_2)=f(a_2),\quad \ldots,\quad \Psi_1(a_m)=f(a_m).$$

Nous avons ainsi une formule d'interpolation considérée par Gauss (*Werke,* t. III, p. 281) et une expression du reste au moyen d'une intégrale curviligne, laquelle fait voir qu'est condition pour que $\Psi_1(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m=\infty$, que la plus grande valeur que prend l'expression

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_1)\sin\frac{1}{2}(x-a_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(x-a_m)}{\sin\frac{1}{2}(z-a_1)\sin\frac{1}{2}(z-a_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(z-a_m)}\right|, \tag{28.}$$

quand z décrit le contour A, tende vers zéro, et que sont des conditions suffisantes pour cette convergence qu'on ait, pour les mêmes valeurs de z,

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_1)}{\sin\frac{1}{2}(z-a_1)}\right|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a_2)}{\sin\frac{1}{2}(z-a_2)}\right|<\varepsilon,\quad \ldots, \tag{29.}$$

ε étant une constante arbitraire, inférieure à l'unité.

27. Supposons que la fonction $f(x)$ soit périodique, sa période étant égale à 2π, et qu'elle soit holomorphe dans une bande infinie comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses. On voit alors, comme dans le n.° 16, que dans ce cas la condition pour que $\Psi_1(x)$ tende vers $f(x)$, pour $m=\infty$, est que la plus grande valeur que prend l'expression (28.), quand z décrit ces droites, tende vers zéro, et que sont des conditions suffisantes pour cette convergence que les inégalités (29.) soient satisfaites par les valeurs que alors prend z.

On voit aussi, en procédant comme dans le n.° 17 et en remarquant que l'équation

$$\left|\sin\frac{1}{2}(z-a)\right|=c$$

représente, quand $c>1$, une courbe composée de deux branches infinies, symétriquement placées par rapport à l'axe des abscisses, ayant un nombre infini de points où l'ordonnée est minimum, en valeur absolue, placés sur les droites représentées par l'équation

$$Y=\pm 2\log(c+\sqrt{c^2-1}), \tag{30.}$$

et que la courbe analogue représentée par l'équation

$$\left| \sin \frac{1}{2}(z-a) \right| = \beta,$$

où $\beta > c > 1$, a un nombre infini de points où l'ordonnée est maximum, en valeur absolue, placés sur les droites dont l'équation est

$$Y = \pm 2 \log(\beta + \sqrt{\beta^2+1}), \tag{31.}$$

le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par les droites (31.) *et est périodique, la période étant égale à 2π; et si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont des nombres réels, compris entre $-\pi$ et π, et x est l'affixe d'un point de l'intérieur de la bande limitée par les droites* (30.), *on a*

$$\lim_{m=\infty} \Psi_1(x) = f(x).$$

On démontre aussi, comme dans le n.° 18, l'inégalité

$$|R(x)| < \frac{M}{B_1}\left(\frac{c}{\beta}\right)^m,$$

où M représente la plus grande valeur que prend $|f(z)|$, quand z décrit les droites qui limitent la bande où la fonction est holomorphe, et B_1 la plus petite valeur que prend $\left|\sin\frac{1}{2}(z-x)\right|$, quand z décrit les mêmes droites, et ensuite les formules

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{1}{2} kx \, dx = \lim_{m=\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1(x) \cos \frac{1}{2} kx \, dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{1}{2} kx \, dx = \lim_{m=\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1(x) \sin \frac{1}{2} kx \, dx.$$

Au moyen de ces formules et des rélations

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{k}{2} x \cos \frac{k'}{2} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{k}{2} x \sin \frac{k'}{2} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{k}{2} x \cos \frac{k'}{2} x \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \frac{k}{2} x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{k}{2} x \, dx = \pi,$$

où les entiers k et k' sont l'un et l'autre pairs ou l'un et l'autre impairs, on voit que les coefficients de $\Psi_1(x)$ ont, dans le cas considéré, les propriétés exprimées par les rélations suivantes:

$$\lim_{m=\infty} \mathrm{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{m=\infty} \mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad (k>0)$$

$$\lim \mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

28. Supposons maintenant qu'on donne à $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les valeurs

$$a = \frac{\eta\pi}{n}, \qquad (\eta = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1), n), \tag{32.}$$

et que les équations des droites qui limitent la bande dans laquelle $f(x)$ est holomorphe sont $\mathrm{Y} = -l$ et $\mathrm{Y} = l$.

On voit alors, au moyen de la formule

$$\sin nx = 2^{2n-1} \prod_{\eta=1}^{n} \sin\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\pi}{n} - x\right) \prod_{\eta=0}^{n-1} \sin\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\pi}{n} + x\right),$$

que l'intégrale (27.) se réduit alors à la forme

$$\mathrm{R}_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A}} \frac{f(z)\sin nx \sin\frac{1}{2}z}{\sin\frac{1}{2}(z-x)\sin\frac{1}{2}x\sin nz}\,dz;$$

et, en appliquant directement à cette intégrale le théorème fondamental de la théorie des résidus, en prenant pour contour A de l'intégration le rectangle formé par les droites $\mathrm{Y} = -l$, $\mathrm{Y} = l$, $\mathrm{X} = -\pi + \delta$, $\mathrm{X} = \pi + \delta$, δ étant une quantité positive assez petite pour que le point $-\frac{(n-1)\pi}{n}$ soit à son intérieur, et en remarquant que le résidu de la fonction

$$\frac{f(z)\sin nx \sin\frac{1}{2}z}{\sin\frac{1}{2}(z-x)\sin\frac{1}{2}x\sin nz}$$

par rapport à a est égal à

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)\sin nx \sin \frac{1}{2}(a+h)}{\sin \frac{1}{2}(a+h-x)\sin \frac{1}{2} x \sin n(a+h)},$$

ou

$$\frac{f(a)\sin \frac{1}{2} a}{n \sin \frac{1}{2}(a-x)\sin \frac{1}{2} x \cos na},$$

on trouve

$$f(x) = \Psi_1(x) + \frac{1}{2} R_1(x),$$

où

$$\Psi_1(x) = \frac{\sin nx}{2n \sin \frac{1}{2} x} \Sigma (-1)^{\eta} \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a).$$

Or, on voit, comme dans le n.º 20, premièrement que la plus grande valeur que prend $|\sin nz|$ quand z décrit les côtés du rectangle considéré, parallèles à l'axe des abscisses, est égale á $\frac{e^{nl}+e^{-nl}}{2}$, et ensuite que la plus grande valeur que prend $\left|\frac{\sin nx}{\sin nz}\right|$, quand z décrit les mêmes droites, tend vers zéro, pour $n=\infty$. Donc on peut énoncer le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ admet la periode 2π et est holomorphe dans la bande infinie comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses, équidistantes de cet axe, et si x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette bande, on a

$$\lim_{n=\infty} \Psi_1(x) = f(x),$$

quand a représente les nombres (32.).

29. On peut donner à l'expression de $\Psi_1(x)$ une autre forme, qu'il convient remarquer.

Considérons l'expression

$$\varphi(x) = \frac{\sin nx}{\sin \frac{1}{2}(x-a) \sin \frac{1}{2} x},$$

dans laquelle nous poserons $e^{\frac{1}{2}ix} = t$, $e^{\frac{1}{2}ia} = \lambda$.

Il vient

$$\varphi(x) = 2i\lambda \frac{(t^{4n}-1)\, t^{2-2n}}{(t^2-\lambda^2)(t^2-1)}$$

ou

$$\varphi(x) = 2i\lambda t^{2-2n} \left[t^{4n-4} + (1+\lambda^2)\, t^{4n-6} + (1+\lambda^2+\lambda^4)\, t^{4n-8} \right.$$
$$\left. + \ldots + (1+\lambda^2+\ldots+\lambda^{4n-6})\, t^2 + 1 + \lambda^2 + \lambda^4 + \ldots + \lambda^{4n-4}\right],$$

et, par conséquent,

$$\varphi(x) = 2i \left[\lambda t^{2(n-1)} + \lambda \frac{\lambda^4-1}{\lambda^2-1} t^{2(n-2)} + \lambda \frac{\lambda^6-1}{\lambda^2-1} t^{2(n-3)} + \ldots + \lambda \frac{\lambda^n-1}{\lambda^2-1} \right.$$
$$\left. + \ldots + \lambda \frac{\lambda^{4n-4}-1}{\lambda^2-1} t^{-2(n-2)} + \lambda \frac{\lambda^{4n-2}-1}{\lambda^2-1} t^{-2(n-1)} \right].$$

Mais on trouve, en substituant λ par $e^{\frac{1}{2}ia}$ et en ayant égard à l'identité $e^{2nia} = 1$,

$$\lambda \frac{\lambda^4-1}{\lambda^2-1} = e^{ia} \frac{\sin a}{\sin \frac{1}{2} a}, \quad \lambda \frac{\lambda^6-1}{\lambda^2-1} = e^{\frac{3}{2}ia} \frac{\sin \frac{3}{2} a}{\sin \frac{1}{2} a}, \quad \ldots, \quad \lambda \frac{\lambda^n-1}{\lambda^2-1} = e^{\frac{1}{2}nia} \frac{\sin \frac{n}{2} a}{\sin \frac{1}{2} a}, \quad \ldots$$

$$\lambda \frac{\lambda^{4n-6}-1}{\lambda^2-1} = -e^{-\frac{3}{2}ia} \frac{\sin \frac{3}{2} a}{\sin \frac{1}{2} a}, \quad \lambda \frac{\lambda^{4n-4}-1}{\lambda^2-1} = -e^{-ia} \frac{\sin a}{\sin \frac{1}{2} a}, \quad \lambda \frac{\lambda^{4n-2}-1}{\lambda^2-1} = -e^{-\frac{1}{2}ia}.$$

Donc

$$\varphi(x)=2i\left[e^{i\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]}+\frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}e^{i[(n-2)x+a]}+\ldots+\frac{\sin\frac{n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}e^{i\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]}+\frac{\sin\frac{n}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}e^{\frac{1}{2}nia}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\frac{n-1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}e^{-i\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]}-\ldots-\frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}e^{-i[(n-2)x+a]}-e^{-i\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]}\right],$$

et, par conséquent,

$$\varphi(x)=-4\left[\sin\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]+\frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}a}\sin[(n-2)x+a]+\frac{\sin\frac{3}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}\sin\left[(n-3)x+\frac{3}{2}a\right]\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\sin\frac{1}{2}(n-1)a}{\sin\frac{1}{2}a}\sin\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]+\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{na}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a}\right].$$

On en conclut qu'on peut donner à l'expression de $\Psi_1(x)$ la forme suivante:

$$\Psi_1(x)=-\frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta\left\{\sin\frac{1}{2}a\sin\left[(n-1)x+\frac{1}{2}a\right]+\sin a\sin[(n-2)x+a]\right.$$

$$\left.+\sin\frac{3}{2}a\sin\left[(n-3)x+\frac{3}{2}a\right]+\ldots+\sin\frac{1}{2}(n-1)a\sin\left[x+\frac{n-1}{2}a\right]+\frac{\sin^2\frac{na}{2}}{2}\right\}f(a),$$

ou

$$\Psi_1(x)=\mathrm{A}_{n-1}\cos(n-1)x+\mathrm{A}_{n-2}\cos(n-2)x+\ldots+\mathrm{A}_1\cos x+\mathrm{A}_0$$
$$+\mathrm{B}_{n-1}\sin(n-1)x+\mathrm{B}_{n-2}\sin(n-2)x+\ldots+\mathrm{B}_1\sin x,$$

où

$$\mathrm{A}_0=-\frac{1}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin^2\frac{na}{2}=\frac{1}{n}\Sigma' f(a),$$

Σ' représentant une somme qui se rapporte aux valeurs impaires de η, et

$$A_k = -\frac{2}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin^2\frac{n-k}{2}a = -\frac{1}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a) + \frac{1}{n}\Sigma f(a)\cos ka,$$

$$B_k = -\frac{1}{n}\Sigma(-1)^\eta f(a)\sin(n-k)\,a = \frac{1}{n}\Sigma f(a)\sin ka.$$

En se basant sur la notion d'intégrale définie comme limite d'une somme d'éléments infiniment petits, il est facile de démontrer les propriétés suivantes des constantes qu'on vient d'écrire:

$$\lim_{n=\infty} A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n=\infty} A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad (k>0)$$

$$\lim_{n=\infty} B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

30. Dans le cas particulier où $f(x)$ satisfait à la condition

$$f(x) = -f(-x),$$

la formule antérieure se réduit à la suivante:

$$\Psi_1(x) = B_{n-1}\sin(n-1)x + B_{n-2}\sin(n-2)x + \ldots + B_1\sin x,$$

et les valeurs des constantes sont données par la formule

$$B_k = \frac{2}{n}\Sigma f(a)\sin ka,$$

en y posant

$$a = \frac{\eta\pi}{n}, \qquad (\eta = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

Ce résultat coincide avec celui qui a été obtenu par Lagrange, dans ses *Recherches sur la nature et la propagation du son,* au moyen de l'élimination des constantes B_1, B_2, B_3, ...

entre les équations

$$\Psi_1\left(\frac{\eta\pi}{n}\right)=f\left(\frac{\eta\pi}{n}\right),\qquad (\eta=1,2,3,\ldots,n-1).$$

31. Supposons maintenant qu'on donne à a_1, a_2, a_3, ... les valeurs

$$a_1=0,\quad a=\pm\frac{(2\eta+1)\pi}{2n},\qquad (\eta=0,1,2,\ldots,n-1).$$

et que la fonction $f(x)$ soit encore périodique, sa période étant égale à 2π, et que soit holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles à l'axe des abscisses, équidistantes de cet axe. Alors l'intégrale

$$\mathrm{R}_1(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)\cos nx\sin\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}(z-x)\sin\frac{1}{2}z\cos nz}\,dz$$

conduit à des résultats analogues à ceux qu'on vient d'obtenir dans les numeros précedents.

Ainsi il vient premièrement

$$f(x)=\Psi_1(x)+\frac{1}{2}\mathrm{R}_1(x),$$

où

$$\Psi_1(x)=f(0)\cos nx+\frac{1}{2}\Sigma\sin na\frac{f(a)\cos nx\sin\frac{1}{2}x}{n\sin\frac{1}{2}(a-x)\sin\frac{1}{2}a},$$

et on voit qu'est

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\Psi_1(x),$$

quand x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de la bande dans l'aquelle $f(x)$ est holomorphe.

On peut voir ensuite, au moyen de l'égalité

$$\frac{\cos nx}{\sin\frac{1}{2}(a-x)}=2\left\{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}a\right]+\sin\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)x+\frac{3}{2}a\right]+\ldots+\sin\left[\frac{x}{2}+\frac{2n-1}{2}a\right]\right\},$$

*

qu'on obtient par la même méthode qui fut employée au n.º 21 pour démontrer une formule analogue, et au moyen de l'identité

$$\sin\left[\left(n-\frac{p}{2}\right)x+\frac{p}{2}\,a\right]\sin\frac{1}{2}\,x=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(n-\frac{p+1}{2}\right)x+\frac{p}{2}\,a\right]-\cos\left[\left(n-\frac{p-1}{2}\right)x+\frac{p}{2}\,a\right]\right\},$$

qu'on a

$$\frac{\cos nx \sin\frac{1}{2}\,x}{\sin\frac{1}{2}(a-x)}=\cos\left[(n-1)\,x+\frac{1}{2}\,a\right]+\cos\left[(n-2)\,x+\frac{3}{2}\,a\right]+\ldots+\cos\frac{2n-1}{2}\,a$$

$$-\left\{\cos\left[nx+\frac{1}{2}\,a\right]+\cos\left[(n-1)\,x+\frac{3}{2}\,a\right]+\ldots+\cos\left[x+\frac{2n-1}{2}\,a\right]\right\},$$

et que, par conséquent, $\Psi_1(x)$ peut être réduite à la forme

$$\Psi_1(x)=\mathrm{A}_n\cos nx+\mathrm{A}_{n-1}\cos(n-1)\,x+\ldots+\mathrm{A}_1\cos x+\mathrm{A}_0$$
$$+\mathrm{B}_n\sin nx+\mathrm{B}_{n-1}\sin(n-1)\,x+\ldots+\mathrm{B}_1\sin x,$$

où

$$\mathrm{A}_0=\frac{1}{2n}\,\Sigma f(a),$$

$$\mathrm{A}_k=\frac{1}{n}\,\Sigma\sin na f(a)\sin(n-k)\,a=\frac{1}{n}\,\Sigma f(a)\cos ka,\qquad (0<k<n)$$

$$\mathrm{B}_k=\frac{1}{n}\,\Sigma\sin na f(a)\cos(n-k)\,a=\frac{1}{n}\,\Sigma f(a)\sin ka,\qquad (k<n)$$

$$\mathrm{A}_n=f(0)-\frac{1}{2n}\,\Sigma\sin na f(a)\cot\frac{1}{2}\,a,$$

$$\mathrm{B}_n=\frac{1}{2n}\,\Sigma\sin na f(a).$$

32. Les résultats donnés dans les n.os 16 à 25 peuvent être étendus au cas où la fonction $f(x)$ satisfait à une des conditions $f(x+\omega)=f(x)$ ou $f(x+\omega)=-f(x)$. On peut, pour cela, partir de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{A}}\frac{f(z)\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_1)\ldots\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_m)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-x)\sin\frac{\pi}{\omega}(z-a_1)\ldots\sin\frac{\pi}{\omega}(z-a_m)}\,dz$$

et appliquer les méthodes employées dans ces numeros-là, ou appliquer les théorèmes y obtenus à la fonction $f\left(\frac{X\omega}{\pi}\right)$, qui satisfait alors à la condition

$$f\left[\frac{(X+\pi)\,\omega}{\pi}\right]=\pm f\left(\frac{X\omega}{\pi}\right),$$

et poser ensuite $x=\frac{X\omega}{\pi}$. Si l'on suit cette voie, il faut chercher le point du plan qui représente x, quand on donne celui qui représente X, et le contour A_1 que décrit le point z, défini par l'égalité $\frac{Z\omega}{\pi}=z$, quand Z décrit le rectangle A. En posant, pour cela,

$$\omega=\beta(\cos\theta+i\sin\theta),\quad X=R(\cos\theta'+i\sin\theta'),\quad x=r(\cos\tau+i\sin\tau),$$

on trouve

$$r=\frac{\beta R}{\pi},\quad \tau=\theta+\theta',$$

et on en conclut: 1.° que, si les coordonnées polaires du point X sont égales à R et θ', celles du point x sont égales à $\frac{\beta R}{\pi}$ et $\theta+\theta'$; 2.° qu'aux points de l'axe des abscisses compris entre $-\pi$ et π correspondent les points de la droite (que nous représenterons par D) qui passe par l'origine des coordonnée et fait un angle égal à l'argument de ω avec l'axe des abscisses, compris entre $-\omega$ et ω; 3.° que les droites parallèles à l'axe des abscisses menées par les points $(0, \pm l)$ se transforment dans les parallèles à D dont la distance à cette droite est égale à $\frac{l\beta}{\pi}$; 4.° que les droites parallèles à l'axe des ordonnées menées par les points $(\pm\pi, 0)$ se transforment dans les perpendiculaires à D qui passent par les points d'affixes $-\omega$ et ω.

On trouve de cette manière les résultats suivants:

1.° Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par deux droites parallèles à D, et x represente un point de son intérieur et $\Psi(x)$ la fonction

$$\begin{aligned}\Psi(x)=&\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_2)\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_3)\ldots\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_m)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(a_1-a_2)\sin\frac{\pi}{\omega}(a_1-a_3)\ldots\sin\frac{\pi}{\omega}(a_1-a_m)}f(a_1)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_1)\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_2)\ldots\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a_{m-1})}{\sin\frac{\pi}{\omega}(a_m-a_1)\sin\frac{\pi}{\omega}(a_m-a_2)\ldots\sin\frac{\pi}{\omega}(a_m-a_{m-1})}f(a_m),\end{aligned}$$

on a

$$\lim_{m=\infty} \Psi(x) = f(x),$$

quand la plus grande valeur que prend

$$\left| \frac{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-a_1)\ldots \sin \frac{\pi}{\omega}(x-a_m)}{\sin \frac{\pi}{\omega}(z-a_1)\ldots \sin \frac{\pi}{\omega}(z-a_m)} \right|,$$

dans les droites qui limitent la bande, tend vers zéro, pour $m=\infty$. Nous supposons que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont représentés par des points de l'intérieur du rectangle A_1, dans lequel se transforme A.

L'expression de $\Psi(x)$ peut être réduite à la forme

$$\begin{aligned}\Psi(x) = A_{m-1}\cos(m-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{m-3}\cos(m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + A_1 \cos\frac{\pi x}{\omega} \\ + B_{m-1}\sin(m-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{m-3}\sin(m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + B_1 \sin\frac{\pi x}{\omega},\end{aligned}$$

où m est pair, si est $f(x+\omega) = -f(x)$; ou

$$\begin{aligned}\Psi(x) = A_{m-1}\cos(m-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{m-3}\cos(m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + A_0 \\ + B_{m-1}\sin(m-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{m-3}\sin(m-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + B_2 \sin\frac{2\pi x}{\omega},\end{aligned}$$

où m est impair, si $f(x+\omega) = f(x)$.

2.° Si, en particulier, $f(x)$ est holomorphe dans la bande limitée par deux parallèles à D, dont la distance à cette droite soit supérieure à $\frac{l\beta}{\pi}\log(c+\sqrt{c^2+1})$, c étant un nombre quelconque plus grand que l'unité, et si x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de la bande limitée par deux parallèles à D, dont la distance à la même droite soit égale à $\frac{l\beta}{\pi}\log(c+\sqrt{c^2+1})$, $\Psi(x)$ tend vers $f(x)$, pour $m=\infty$.

3.° Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande comprise entre deux droites parallèles à D et équidistantes de cette droite, et si x représente l'affixe d'un point de l'intérieur de la bande, la fonction définie par l'égalité

$$\Psi(x) = -\frac{\cos\frac{n\pi x}{\omega}}{n}\,\Sigma \sin\frac{n\pi a}{\omega}\,\frac{f(a)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-a)},$$

où n est un nombre impair et

$$a = \frac{(2\eta+1)\,\omega}{2n}, \quad \eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ \frac{n-1}{2},$$

$$a = -\frac{(2\eta+1)\,\omega}{2n}, \quad \eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ \frac{n-3}{2},$$

quand $f(x+\omega) = f(x)$, et où n est un nombre pair et

$$a = \pm\frac{(2\eta+1)\,\omega}{2n}, \quad \eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ \frac{n-2}{2},$$

quand $f(x+\omega) = -f(x)$, tend vers $f(x)$, pour $m = \infty$.

Dans le premier cas on peut encore écrire

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{n-3}\cos(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + A_0$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{n-3}\sin(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + B_2\sin 2\frac{\pi x}{\omega},$$

et dans le second

$$\Psi(x) = A_{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + A_{n-3}\cos(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + A_1\cos\frac{\pi x}{\omega}$$
$$+ B_{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi x}{\omega} + B_{n-3}\sin(n-3)\frac{\pi x}{\omega} + \ldots + B_1\sin\frac{\pi x}{\omega},$$

où

$$A_0 = \frac{1}{n}\,\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{2}{n}\,\Sigma \sin\frac{n\pi a}{\omega} f(a)\sin(n-k)\frac{\pi a}{\omega} = \frac{2}{n}\,\Sigma f(a)\cos k\frac{\pi a}{\omega}, \qquad (k>0)$$

$$B_k = \frac{2}{n}\,\Sigma \sin\frac{n\pi a}{\omega} f(a)\cos(n-k)\frac{\pi a}{\omega} = \frac{2}{n}\,\Sigma f(a)\sin k\frac{\pi a}{\omega}.$$

4.° On transforme de la même manière les formules considérées dans le n.° 24.

33. La doctrine exposée dans les n.os 26 à 31 peut être étendue de la même manière au cas où la periode de la fonction $f(x)$ est égale à ω. On doit poser alors $x = \frac{X\omega}{2\pi}$ et considérer la fonction $f\left(\frac{X\omega}{2\pi}\right)$, qui admet la période 2π. Des résultats auxquels on arrive de cette manière nous indiquerons seulement les suivants.

1.° Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la bande comprise entre deux droites, parallèles à la droite antérieurement représentée par D et équidistantes de cette droite, et si x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette bande, la fonction définie par l'égalité

$$\Psi_1(x) = \frac{\sin \frac{2n\pi x}{\omega}}{2 \sin \frac{\pi x}{\omega}} \Sigma (-1)^\eta \frac{\sin \frac{\pi a}{\omega}}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x-a)} f(a),$$

où

$$a = \frac{\eta\omega}{2n}, \quad \eta = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-1), n,$$

tend vers $f(x)$, pour $n = \infty$.

On peut donner à la fonction $\Psi_1(x)$ la forme suivante:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) = {} & A_{n-1} \cos (n-1) \frac{2\pi x}{\omega} + A_{n-3} \cos (n-3) \frac{2\pi x}{\omega} + \ldots + A_0 \\ & + B_{n-1} \sin (n-1) \frac{2\pi x}{\omega} + B_{n-3} \sin (n-3) \frac{2\pi x}{\omega} + \ldots + B_1 \sin \frac{2\pi x}{\omega},\end{aligned}$$

où

$$A_0 = \frac{1}{n} \Sigma' f(a),$$

Σ' représentant une somme qui se rapporte aux valeurs impaires de η, et

$$A_k = -\frac{2}{n} \Sigma (-1)^\eta f(a) \sin^2 \frac{(n-k)\pi a}{\omega},$$

$$B_k = \frac{1}{n} \Sigma f(a) \sin \frac{2k\pi a}{\omega}.$$

2.° On trouve de la même manière que la fonction $\Psi_1(x)$, définie par l'équation

$$\Psi_1(x) = f(0)\cos\frac{2n\pi x}{\omega} + \frac{1}{2}\Sigma\sin\frac{2n\pi a}{\omega}\,\frac{f(a)\cos\frac{2n\pi x}{\omega}\sin\frac{\pi x}{\omega}}{n\sin\frac{\pi}{\omega}(a-x)\sin\frac{\pi a}{\omega}}$$

ou

$$\Psi_1(x) = A_n\cos\frac{2n\pi x}{\omega} + A_{n-1}\cos\frac{2(n-1)\pi x}{\omega} + \ldots + A_0$$

$$+ B_n\sin\frac{2n\pi x}{\omega} + B_{n-1}\sin\frac{2(n-1)\pi x}{\omega} + \ldots + B_1\sin\frac{2\pi x}{\omega},$$

où

$$A_0 = \frac{1}{2n}\Sigma f(a),$$

$$A_k = \frac{1}{2n}\Sigma f(a)\cos k\frac{2\pi a}{\omega}, \qquad (0 < k < n)$$

$$B_k = \frac{1}{2n}\Sigma f(a)\sin k\frac{2\pi a}{\omega}, \qquad (k < n)$$

$$A_n = f(0) - \frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2n\pi a}{\omega}f(a)\cot\frac{\pi a}{\omega},$$

$$B_n = \frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2n\pi a}{\omega}f(a),$$

$$a = \pm\frac{(2\eta+1)\omega}{4n}, \qquad (\eta = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

tend vers $f(x)$, pour $n = \infty$.

34. La formule (13.) peut être étendue au cas où la fonction $f(x)$ admet des pôles **ou** des points singuliers essentiels à l'intérieur de A, comme on va voir.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points. Il résulte d'une théorie que nous avons considérée dans ce journal, tome CXXII, p. 116 [1], qu'il existent k développements $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$

[1] Voir ce volume, p. 150.

de la forme

$$\varphi_i(x) = \frac{A_1^{(i)}}{\sin(x-b_i)} + \frac{A_2^{(i)}}{\sin^2(x-b_i)} + \frac{A_3^{(i)}}{\sin^3(x-b_i)} + \dots$$

tels que la fonction $F(x)$ définie par l'équation

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i(x)$$

est holomorphe dans l'aire limitée par A.

On peut donc lui appliquer la formule (13.), et il vient

$$F(x) = \Pi(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{F(z)\sin(x-a_1)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin(z-a_1)\dots\sin(z-a_m)}\,dz,$$

où $\Pi(x)$ représente une fonction entière de $\sin x$ et $\cos x$, qui satisfait aux conditions

$$\Pi(a_1) = f(a_1), \quad \Pi(a_2) = F(a_2), \quad \dots, \quad \Pi(a_m) = F(a_m).$$

Mais on a, en posant $P(x) = \sin(x-a_1)\dots\sin(x-a_m)$,

$$\int_A \frac{F(z)\,P(x)}{\sin(z-x)\,P(z)}\,dz = \int_A \frac{f(z)\,P(x)}{\sin(z-x)\,P(z)}\,dz - \sum_{i=1}^{i=k}\int_A \frac{\varphi_i(z)\,P(x)\,dz}{\sin(z-x)\,P(z)},$$

et

$$\int_A \frac{\varphi_i(z)\,P(x)}{\sin(z-x)\,P(z)}\,dz = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s^{(i)}\,P(x)\,dz}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\,P(z)},$$

$$\int_A \frac{dz}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\,P(z)} = 2i\pi(R_1 + R_2 + \dots),$$

en représentant par R_1, R_2, ... les résidus de la fonction

$$\frac{1}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\sin(z-a_1)\dots\sin(z-a_m)}$$

par rapport à ses pôles.

Or, en posant $e^{iz} = t$ dans cette fonction, on obtient une fonction rationnelle de t, et on voit que le dégré de son numérateur est inférieur de deux unités, au moins, à celui du dénominateur. En représentant donc par r_1, r_2, r_3, ... ses résidus par rapport à ses pôles et en ayant égard à un théorème bien connu, on peut écrire

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots = 0.$$

Mais on a *Hermite* (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* p. 324)

$$r_1 = 2R_1, \quad r_2 = 2R_2, \quad \ldots.$$

Donc

$$\int_A \frac{dz}{\sin(z-x)\sin^s(z-b_i)\,P(z)} = 0.$$

On a, par conséquent, la formule:

$$f(x) = \Pi(x) + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin(x-a_1)\ldots\sin(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin(z-a_1)\ldots\sin(z-a_m)}\,dz,$$

que nous voulions démontrer.

35. L'intégrale qui a été le point de départ des recherches contenues dans ce chapitre est un cas particulier de la suivante:

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin^\alpha(x-a_1)\ldots\sin^\lambda(x-a_m)}{\sin(z-x)\sin^\alpha(z-a_1)\ldots\sin^\lambda(z-a_m)}\,dz,$$

qu'on pouvait aussi étudier de la même manière, et étendre ainsi quelqu'uns des résultats obtenus antérieurement. Mais nous ne considérerons pas cette généralisation, et nous allons nous occuper seulement de l'intégrale

$$R(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_A \frac{f(z)\sin^\alpha x}{\sin(z-x)\sin^\alpha z}\,dz,$$

qui se rapporte à la théorie du développement de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$.

En appliquant à cette intégrale le théorème fondamental de la théorie des residus, nous avons trouvé, dans un article publié dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (2.e série,

*

tome XIV) les formules suivantes:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\alpha-1} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x + \cos x \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\alpha-1} L_{2n} \sin^{2n} x + R(x),$$

si α est pair; et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} K'_{2n} \sin^{2n} x + \cos x \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} L'_{2n+1} \sin^{2n+1} x + R(x),$$

si α est impair, et nous avons donné une méthode pour calculer de proche en proche les coefficients. Il en résulte que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par un ovale $|\sin z| = c$ (où $c \leqq 1$), on a, pour tout point x de son intérieur,

$$(A) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x + \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n} x,$$

et

$$(B) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K'_{2n} \sin^{2n} x + \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L'_{2n+1} \sin^{2n+1} x.$$

Or nous allons déduire ces résultats, et aussi des formules générales pour le calcul des coefficients, au moyen des théorèmes démontrés dans un travail sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus, que nous avons publié dans le tome CXVI de ce journal.

Pour cela, nous remarquerons, en premier lieu, qu'on peut représenter d'une infinité de manières différentes $f(x)$ par des expressions de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cos x,$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont, comme $f(x)$, holomorphes dans l'aire limitée par un ovale $|\sin z| = c$ ($c \leqq 1$), et qu'on peut compléter la détermination de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ au moyen de la condition d'être *paire* une de ces fonctions et l'autre *impaire*. On en conclut, en appliquant un théorème démontré dans l'article rapporté, qu'on peut développer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$, quand x est l'affixe d'un point de l'intérieur de l'ovale considéré, et que, par conséquent, $f(x)$ peut être représentée par les deux développements précédentes.

Nous allons maintenant déterminer les coefficients de ces développements.

Soit premièrement $\varphi(x)$ une fonction *paire* et $\psi(x)$ une fonction *impaire*. En appliquant à ces fonctions la formule (12.) de l'article rapporté on trouve

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} \varphi^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} \varphi''(0)}{1.2.3\ldots 2n} \sin^{2n} x,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} \psi^{(2n-1)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} \psi'(0)}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x,$$

et ensuite, en dérivant les deux membres de ces égalités par rapport à x et en changeant dans les résultats $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ en $\psi_1(x)$ et $\varphi_1(x)$,

$$\psi_1(x) = \cos x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_1^{(2n-1)}(0) + S_{2n}^{(1)} \psi_1^{(2n-3)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} \psi_1'(0)}{1.2\ldots(2n-1)} \sin^{2n-1} x,$$

$$\varphi_1(x) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(2n)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} \varphi_1^{(2n-2)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} \varphi_1(0)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x.$$

Mais, en posant

$$\varphi_1(x) = \cos x \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \sin^{2n} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1} \sin^{2n+1} x,$$

la formule (A) donne

$$f(x) = \psi(x) + \varphi_1(x),$$

et, par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f'(0) &= \psi'(0), \quad f'''(0) = \psi'''(0), \quad \ldots \\ f(0) &= \varphi_1(0), \quad f''(0) = \varphi_1''(0), \quad \ldots \end{aligned}$$

Donc

$$L_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f(0)}{1.2\ldots 2n},$$

$$K_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

On trouve de la même manière les formules suivantes:

$$L'_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + S_{2(n+1)}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + S_{2(n+1)}^{(n)} f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)},$$

$$K'_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S_{2n}^{(n-1)} f''(0)}{1.2\ldots 2n}.$$

Dans ces formules $s_{2n+1}^{(m)}$ représente la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots,\ (2n-1)^2$$

pris m à m; et $S_{2n}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots,\ (2n-2)^2$$

pris aussi m à m.

Les formules précédentes peuvent être écrites symboliquement de la manière suivante:

$$L_{2n} = \frac{f^0(0)\,[f^2(0)+1^2]\,[f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots 2n},$$

$$K_{2n+1} = \frac{f\ (0)\,[f^2(0)+1^2]\,[f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)},$$

$$L'_{2n+1} = \frac{f\ (0)\,[f^2(0)+2^2]\,[f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n)^2]}{1.2\ldots(2n+1)},$$

$$K'_{2n} = \frac{f^2(0)\,[f^2(0)+2^2]\,[f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots 2n}.$$

XIV

DIVERSOS ARTIGOS SOBRE ANALYSE INFINITESIMAL

I

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE JACOBI [1]

Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch

(Monatshefte für Mathematik und Physik — Wien, 1890, Band I)

Soient données les fonctions

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Vous connaissez bien ce beau et important théorème de Jacobi:

Si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admettent des dérivées partielles, relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui soient fonctions continues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est condition nécessaire et suffisant pourque une soit fonction des autres que soit identiquement nul le déterminant:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \cdots \frac{df_2}{dx_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

[1] Uma traducção hespanhola d'este trabalho foi publicada por Galdeano em *El Progreso matematico* (Zaragoza, 1891, t. I, p. 121).

Mon but est de faire voir qu'on peut énoncer ce théorème de la manière plus complète suivante:

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les valeurs correspondantes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et supposons que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admettent des dérivées partielles par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans les environs du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et que ces derivées soient des fonctions continues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1.° Si une des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (y_1 par exemple) est fonction des autres $(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ et cette fonction admet des dérivées partielles relatives à $y_2, y_3, \ldots, y_n$, continues dans les environs du point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, le déterminant (2) est nul dans les environs du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2.° Si le déterminant (2) est nul dans les environs du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et si un des déterminants mineurs du premiér ordre n'est pas nul dans ce point, une des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (y_1 par exemple) est une fonction des autres, dans les environs du point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, et cette fonction est continue et admet des derivées partielles relatives à $y_2, y_3, \ldots, y_n$ dans le point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

3.° Si le déterminant (2) et les déterminants mineurs du premier ordre sont nuls dans les environs du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et si un des déterminants mineurs du second ordre n'est pas nul dans ce point, deux des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont fonctions des autres dans les environs du point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, et ces fonctions sont continues et admettent des dérivées partielles dans ce point.

4.° En général, si le déterminant (2) et les déterminants mineurs d'ordre égale ou inférieure à i sont tous nuls dans les environs du point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et si un des déterminants mineurs d'ordre $i+1$ n'est pas nul dans ce point, i des fonctions $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont fonctions des autres dans les environs du point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, et ces fonctions sont continues et admettent des dérivées partielles dans le point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Pour démontrer cette proposition je vais considérer seulement les trois équations:

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Il est facile de voir que, dans le cas général, on démontre le théorème de la même manière.

Vous savez bien que, pour établier la première partie du théorème énoncé ou pose $y_1 = \varphi(y_2, y_3)$, on dérive par rapport à x_1, x_2, x_3 cette équation et on élimine $\frac{d\varphi}{dy_2}$ et $\frac{d\varphi}{dy_3}$ entre les trois équations résultantes. Je passe donc aux autres parties du théorème.

Supposons que le déterminant:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_3} \end{vmatrix}$$

est nul dans les environs du point (a_1, a_2, a_3), et que un des déterminants mineurs du premier ordre n'est pas nul dans le point (a_1, a_2, a_3), par exemple le déterminant

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_3} \end{vmatrix}.$$

En vertu d'un théorème bien connu (Jordan, *Cours d'Analyse,* t. III, p. 585), la seconde et la troisième des équations (3) déterminent x_2 et x_3 comme fonctions de x_1, y_2 et y_3 dans les environs du point $(a_1, a_2, a_3, b_2, b_3)$ et ces fonctions admettent dans ce point des dérivées partielles relatives à x_1, x_2, x_3 données par les équations

$$\frac{df_2}{dx_1}+\frac{df_2}{dx_2}\,\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{df_2}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_1}=0,$$
$$\frac{df_3}{dx_1}+\frac{df_3}{dx_2}\,\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{df_3}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_1}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on substitue maintenant les valeurs de x_2 et x_3 dans la première des équations (3), on trouve le résultat

$$y_1=\varphi(x_1, y_2, y_3),$$

qui a lieu dans les environs du point (a_1, b_1, b_2, b_3).

En remarquant maintenant que le théorème relatif à la dérivation des fonctions composées est applicable à la première des équations (3), on voit que y_1 admet des dérivées partielles relatives à x_1, y_2 et y_3.

La dérivée relative à x_1 est donnée par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx_1}=\frac{df_1}{dx_1}+\frac{df_1}{dx_2}\,\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{df_1}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_1},$$

qui, en substituant $\frac{dx_2}{dx_1}$ et $\frac{dx_3}{dx_1}$ par leurs valeurs tirées des équations antérieures, donne

$$\frac{d\varphi}{dx_1}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}_1},$$

en représentant par D le déterminant (4) et par D_1 le déterminant (5).

Comme le second membre de cette équation est nul dans les environs du point (a_1, a_2, a_3), nous avons

$$\frac{d\varphi}{dx_1}=0,$$

et par conséquent dans les environs du point (a_1, a_2, a_3) la fonction φ ne dépend pas de x_1. Nous avons donc

$$y_1=\varphi(y_2, y_3),$$

et la seconde partie du théorème est démontrée.

Supposons maintenant que tous les déterminants mineurs du premier ordre sont nuls dans les environs du point (a_1, a_2, a_3); et soit

$$\frac{df_3}{dx_3}$$

un des déterminants mineurs de troisième ordre qui n'est pas nul dans le point considéré.

En vertu du théorème déjà employé dans le cas antérieur, la troisième des équations (3) détermine x_3 en fonction de x_1, x_2, y_3, et les dérivées partielles de x_3 relativement à x_1 et x_2 sont données par les équations

$$\frac{df_3}{dx_1}+\frac{df_3}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_1}=0,$$

$$\frac{df_3}{dx_2}+\frac{df_3}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_2}=0.$$

Si l'on substitue maintenant la valeur de x_3 dans la première des équations (3), on trouve le résultat

$$y_1=\varphi(x_1, x_2, y_3),$$

et nous avons, comme dans le cas antérieur,

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_1}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_1}$$

$$\frac{d\varphi}{dx_2} = \frac{df_1}{dx_2} + \frac{df_1}{dx_3}\,\frac{dx_3}{dx_2};$$

ou, éliminant $\frac{dx_3}{dx_1}$ et $\frac{dx_3}{dx_2}$ au moyen des équations antérieures,

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_3} \end{vmatrix}}{\frac{df_3}{dx_3}},$$

$$\frac{d\varphi}{dx_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_3} \end{vmatrix}}{\frac{df_3}{dx_3}}.$$

Comme les seconds membres de ces égalités sont nuls dans les environs du point (a_1, a_2, a_3), la fonction φ ne contient pas x_1 ni x_2, et nous avons

$$y_1 = \varphi(y_3).$$

La seconde des équations (3) donne de la même manière

$$y_2 = \psi(y_3).$$

Le théorème est donc démontré.

II

SUR LA DÉTERMINATION DE LA PARTIE ALGÉBRIQUE DE L'INTÉGRALE DES FONCTIONS RATIONELLES

(Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei — Roma, 1885, série 4.ª, vol. 1.º)

1. Dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite on trouve (page 263 et suivantes) deux savantes méthodes pour la recherche de la partie algébrique de l'intégrale des fonctions rationnelles, dont la deuxième est indépendante de la connaissance des racines du dénominateur de la fonction donnée. Nous allons voir qu'on peut aussi rendre la première méthode indépendante de cette connaissance en employant les théorèmes de la théorie des fonctions symétriques rationnelles.

En effet, soit

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{F_1(x)}{M^\alpha N^\beta P^\gamma \ldots}$$

la fonction proposée, et

$$\begin{aligned}
M &= (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = x^n + h_1 x^{n-1} + h_2 x^{n-2} + \ldots,\\
N &= (x-a'_1)(x-a'_2)\ldots(x-a'_p) = x^p + h'_1 x^{p-1} + h'_2 x^{p-2} + \ldots,\\
P &= (x-a''_1)(x-a''_2)\ldots(x-a''_q) = x^q + h''_1 x^{q-1} + h''_2 x^{q-2} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

M, N, P, etc. étant obtenus au moyen de la théorie des racines égales. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{F_1(x)}{F(x)} &= \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \ldots + \frac{L}{x-a_n}\\
&+ \frac{A'}{x-a'_1} + \frac{B'}{x-a'_2} + \ldots + \frac{L'}{x-a'_p}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},
\end{aligned}$$

où l'on représente par $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ la somme des fractions simples dont le degré du dénominateur est supérieur à l'unité.

Cela posé, M. Hermite fait voir que le numérateur $f(x)$ de la partie algébrique de l'intégrale de la fonction donnée peut être calculé au moyen de la formule suivante:

$$\begin{aligned} f(x) = \pi_1 (x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}) \\ \pi_2 (x^{m-2} + p_1 x^{m-3} + \ldots + p_{m-2}) + \ldots + \pi_{m-1}(x + p_1) + \pi_m, \end{aligned}$$

où $m, p_1, p_2, \ldots, \pi_1, \pi_2, \ldots$ représentent des nombres déterminés par les égalités

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{M.N.P}\ldots} = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m,$$

et

$$\frac{\omega_k - \Sigma \mathrm{A} a^k}{k} = \pi_k,$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, etc. étant obtenus au moyen du développement

$$\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x^2} + \frac{\omega_3}{x^3} + \ldots,$$

qui résulte de la division algébrique de $\mathrm{F}_1(x)$ par $\mathrm{F}(x)$.

Or, dans cette analyse, $\Sigma \mathrm{A} a^k$ représente la somme

$$\Sigma \mathrm{A} a^k = \mathrm{A} a_1^k + \mathrm{B} a_2^k + \ldots + \mathrm{L} a_n^k + \mathrm{A}' a_1'^k + \mathrm{B}' a_2'^k + \ldots + \mathrm{L}' a_p'^k + \ldots,$$

et elle peut être calculée au moyen des théorèmes de la théorie des fonctions symétriques rationnelles, sans la connaissance des racines $a_1, a_2, \ldots, a_1', a_2', \ldots$. En effet, cette somme est une fonction symétrique rationnelle séparément de $a_1, a_2, \ldots$; de $a_1', a_2', \ldots$; etc., puisque on sait, par la théorie de la décomposition des fractions rationnelles, que A, B, C, ..., L, A′, B′, ... L′, etc. sont des fonctions rationnelles de $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1', a_2', \ldots, a_p'$, etc., et qu'on passe de A pour B, C, etc. échangeant a_1 par a_2, a_3, etc. D'un autre côté on sait toujours ramener le calcul des fonctions symétriques rationnelles des racines d'une équation à celui des sommes des puissances semblables de ces racines, c'est-à-dire, dans notre cas, à celui des sommes:

$$\begin{gathered} a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i \\ a_1'^i + a_2'^i + \ldots + a_p'^i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

qui sont calculables au moyen du théorème de Newton en fonction de $h_1, h_2, \ldots$; de $h'_1, h'_2, \ldots$; etc. (1).

On peut donc calculer $f(x)$, et ensuite la partie algébrique $\frac{f(x)}{M^{\alpha-1}N^{\beta-1}P^{\gamma-1}\ldots}$ de l'intégrale démandée, sans la connaissance des racines $a_1, a_2, \ldots$

2. Pour trouver la partie transcendante de l'intégrale de la fonction rationnelle il faut connaître les racines du dénominateur. Mais on peut obtenir le développement en série de cette intégrale au moyen des théorèmes de la théorie des fonctions symétriques sans la connaissance de ces racines.

En effet, développant en série les fractions simples dont le dénominateur est du premier degré et additionnant les résultats, nous trouvons un résultat de la forme suivante:

$$\Sigma \frac{A}{x-a} = \frac{\Sigma A}{x} + \frac{\Sigma A a}{x^2} + \frac{\Sigma A a^2}{x^3} + \ldots,$$

dont l'intégrale est

$$\Sigma A \log(x-a) = \log x \, \Sigma A - \frac{\Sigma A a}{x} - \frac{\Sigma A a^2}{x^2} - \ldots.$$

Donc il faut calculer les sommes ΣA, $\Sigma A a$, $\Sigma A a^2$, etc., qui sont des fonctions symétriques de $a_1, a_2, \ldots a_n$; de $a'_1, a'_2, \ldots a'_p$; etc., et qu'on peut par conséquent obtenir au moyen des théorèmes connus, sans résoudre l'équation $F(x) = 0$.

---

(1) Ch. Biehler, *Sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1884, 3.e série, tome III).

III

SUR L'INTÉGRALE $\int e^{\omega x} f(x)\, dx$.

(Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei — Roma, 1885, série 4.ª, vol. 1.º)

On sait que, si $f(x)$ représente une fonction rationnelle de x, l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\, dx$ a la forme suivante:

$$\int e^{\omega x} f(x)\, dx = e^{\omega x}\, \Theta(x) + \Sigma \mathrm{A} \int \frac{e^{\omega x}}{x - a}\, dx,$$

où la première partie contient une fonction $\Theta(x)$ rationnelle, et la deuxième partie contient une transcendante qui a la dénomination de *logarithme intégral*. La méthode qu'on emploie pour obtenir cette intégrale exige la décomposition de $f(x)$ en des fractions simples, et par conséquent la recherche des racines de son dénominateur. Nous allons faire voir que, si on veut seulement la première partie $e^{\omega x}\, \Theta(x)$ de l'intégrale, il ne faut pas résoudre cette équation. Nous emploierons dans ce but la même méthode que nous avons employée pour résoudre une question analogue, relative à l'intégration des fonctions rationnelles, dans notre note insérée à page 187 de ce volume des *Rendiconti* (1).

En effet, soit

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)} = \varphi(x) + \frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{M}^{\alpha}\, \mathrm{N}^{\beta}\, \mathrm{P}^{\gamma} \ldots}$$

---

(1) Voir ce volume, p. 382.

la fonction proposée, et

$$M=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=x^n+h_1x^{n-1}+h_2x^{n-2}+\ldots,$$
$$N=(x-a'_1)(x-a'_2)\ldots(x-a'_p)=x^p+h'_1x^{p-1}+h'_2x^{p-2}+\ldots,$$
$$P=(x-a''_1)(x-a''_2)\ldots(x-a''_q)=x^q+h''_1x^{q-1}+h''_2x^{q-2}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

M, N, P, etc. étant obtenus au moyen de la théorie des racines égales. Nous avons

$$\begin{aligned}f(x)=\varphi(x)&+\sum_{i=1}^{\alpha}\left[\frac{A_i}{(x-a_1)^i}+\frac{B_i}{(x-a_2)^i}+\ldots+\frac{L_i}{(x-a_n)^i}\right]\\&+\sum_{k=1}^{\beta}\left[\frac{A'_k}{(x-a'_1)^k}+\frac{B'_k}{(x-a'_2)^k}+\ldots+\frac{L'_k}{(x-a'_p)^k}\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

et par conséquent

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\int e^{\omega x}f(x)\,dx=\int e^{\omega x}\varphi(x)\,dx\\&+\sum_{i=1}^{\alpha}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_1)^i}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_2)^i}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_n)^i}\right]\\&+\sum_{k=1}^{\beta}\left[A'_k\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a'_1)^k}+B'_k\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a'_2)^k}+\ldots+L'_k\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a'_p)^k}\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Comme $\varphi(x)$ est une fonction entière, on trouve facilement la première intégrale. Les autres intégrales sont de la forme suivante:

$$\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a)^m}=-\frac{e^{\omega x}}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+\frac{\omega}{m-1}\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a)^{m-1}},$$

et on a par conséquent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\alpha}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_1)^i}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_2)^i}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_n)^i}\right]\\ &=-\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{e^{\omega x}}{i-1}\left[\frac{A_i}{(x-a_1)^{i-1}}+\frac{B_i}{(x-a_2)^{i-1}}+\ldots+\frac{L_i}{(x-a_n)^{i-1}}\right]\\ &\quad+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\omega}{i-1}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_1)^{i-1}}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_2)^{i-1}}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_n)^{i-1}}\right].\end{aligned}\right.$$

On trouve A_i, B_i, ... L_i, au moyen des formules de décomposition des fractions rationnelles; et comme ces numérateurs sont des fonctions rationnelles de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et sont des fonctions symétriques de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$, de $a''_1, a''_2, \ldots, a''_q$, etc., et on passe de A_i pour B_i, C_i, ..., L_i échangeant a_1 par $a_2, a_3, \ldots, a_n$, on conclut que

$$\frac{A_i}{(x-a_1)^{i-1}}+\frac{B_i}{(x-a_2)^{i-1}}+\ldots+\frac{L_i}{(x-a_n)^{i-1}}$$

est une fonction symétrique rationnelle séparément de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$, etc. On peut donc obtenir cette somme au moyen des théorèmes de la théorie des fonctions symétriques en fonction de $h_1, h_2, h_3, \ldots, h'_1, h'_2, h'_3, \ldots$, etc. sans connaitre les racines a_1, a_2, etc.

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\omega}{i-1}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_1)^{i-1}}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_2)^{i-1}}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_n)^{i-1}}\right]\\ &=-\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\omega e^{\omega x}}{(i-1)(i-2)}\left[\frac{A_i}{(x-a_1)^{i-2}}+\frac{B_i}{(x-a_2)^{i-2}}+\ldots+\frac{L_i}{(x-a_n)^{i-2}}\right]\\ &\quad+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\omega^2}{(i-1)(i-2)}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_1)^{i-2}}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_2)^{i-2}}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_n)^{i-2}}\right],\end{aligned}$$

et on voit que la partie

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\omega e^{\omega x}}{(i-1)(i-2)}\left[\frac{A_i}{(x-a_1)^{i-2}}+\frac{B_i}{(x-a_2)^{i-2}}+\ldots+\frac{L_i}{(x-a_n)^{i-2}}\right]$$

peut être calculée au moyen de la théorie des fonctions symétriques.

*

En continuant de la même manière, on arrive au résultat

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_1)^i}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_2)^i}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{(x-a_n)^i}\right]$$
$$=e^{\omega x}.\Psi(x)+\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\omega^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)}\left[A_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a_1}+B_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a_2}+\ldots+L_i\int\frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a_n}\right],$$

où $\Psi(x)$ représente la partie qu'on a calculé au moyen des théorèmes de la théorie des fonctions symétriques, et l'autre partie dépend du *logarithme intégral.*

On voit donc que la connaissance des racines du dénominateur $F(x)$ est seulement nécessaire pour obtenir la partie de la valeur de l'expression considérée qui ne dépend pas de cette transcendante.

Ce qu'on vient de dire de la partie de la formule (1) relative à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s'applique à la partie relative à $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$, à $a''_1, a''_2, \ldots, a''_q$, etc. On conclut donc le théorème énoncé.

IV

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE x^k EN SÉRIE ORDONNÉE SUIVANT LES PUISSANCES DU SINUS DE LA VARIABLE

(Nouvelles Annales de Mathématiques — Paris, 1896, 3.e série, t. XV)

Dans un article *Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable,* publié dans le *Journal de Crelle-Fuchs* (t. CXVI, p. 14), nous avons donné, pour le développement des fonctions x^{2m} et x^{2m+1} suivant les puissances de $\sin x$, les formules suivantes [1]:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x^{2m} = \sin^{2m} x \Big[1 &+ \frac{S^{(1)}_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)} \sin^2 x \\ &+ \frac{S^{(2)}_{2m+4}}{(2m+1)\ldots(2m+4)} \sin^4 x \\ &+ \frac{S^{(3)}_{2m+6}}{(2m+1)\ldots(2m+6)} \sin^6 x + \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x^{2m+1} = \sin^{2m+1} x \Big[1 &+ \frac{S^{(1)}_{2m+3}}{(2m+2)(2m+3)} \sin^2 x \\ &+ \frac{S^{(2)}_{2m+5}}{(2m+2)\ldots(2m+5)} \sin^4 x \\ &+ \frac{S^{(3)}_{2m+7}}{(2m+2)\ldots(2m+7)} \sin^6 x + \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

---

[1] Voir ce volume, p. 112.

qui ont lieu quand on a $|\sin x| < 1$. Dans ces formules, $S_{2a}^{(b)}$ représente la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\quad 4^2,\quad 6^2,\quad \ldots,\quad (2a-2)^2,$$

pris b à b, et $S_{2a+1}^{(b)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\quad 3^2,\quad 5^2,\quad (2a-1)^2,$$

pris aussi b à b.

Nous avons employé, pour obtenir ces formules, une méthode fondée sur la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires. Ici nous allons voir comment on peut les vérifier au moyen d'une méthode élémentaire.

Je remarque, en premier lieu, qu'on démontre, d'une manière très simple, la possibilité du développement de x^{2m} et x^{2m+1} en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$, en partant de l'égalité connue

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \ldots,$$

où $|\sin x| < 1$.

On sait, en effet, par un théorème bien connu, relatif à la multiplication des séries, que le second membre de l'égalité

$$x^k = \left(\sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \ldots\right)^k$$

peut être développé en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$.

Cela posé, je suppose que la formule (1) ait lieu quand l'exposant de x est égal à $2(m-1)$ et je vais démontrer qu'elle a encore lieu quand l'exposant est égal à $2m$. Dans ce but, je pose

$$x^{2m} = A_{2m}\sin^{2m} x + A_{2m+2}\sin^{2m+2} x + \ldots,$$

relation où l'on n'écrit pas les termes de degré impair, parce que la valeur de x^{2m} ne varie pas quand on change x en $-x$, et je dérive deux fois les deux membres de cette égalité. Il vient

$$\begin{aligned}2m(2m-1)x^{2m-2} = &-[2m A_{2m}\sin^{2m} x + (2m+2)A_{2m+2}\sin^{2m+2} x \\ &+ (2m+4)A_{2m+4}\sin^{2m+4} x + \ldots] \\ &+ (1-\sin^2 x)[2m(2m-1)A_{2m}\sin^{2m-2} x \\ &+ (2m+2)(2m+1)A_{2m+2}\sin^{2m} x + \ldots].\end{aligned}$$

Si l'on pose dans cette identité

$$x^{2m-2} = A'_{2m-2} \sin^{2m-2} x + A'_{2m} \sin^{2m} x + \ldots,$$

on trouve les égalités

$$2m(2m-1) A_{2m} = 2m(2m-1) A'_{2m-2},$$
$$-2m A_{2m} + (2m+2)(2m+1) A_{2m+2} - 2m(2m-1) A_{2m} = 2m(2m-1) A'_{2m},$$
$$-(2m+2) A_{2m+2} + (2m+4)(2m+3) A_{2m+4} - (2m+2)(2m+1) A_{2m+2} = 2m(2m-1) A'_{2m+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui donnent

$$A_{2m} = A'_{2m-2},$$
$$-(2m)^2 A_{2m} + (2m+2)(2m+1) A_{2m+2} = 2m(2m-1) A'_{2m},$$
$$-(2m-2)^2 A_{2m+2} + (2m+4)(2m+3) A_{2m+4} = 2m(2m-1) A'_{2m+2},$$
$$-(2m+4)^2 A_{2m+4} + (2m+6)(2m+5) A_{2m+6} = 2m(2m-1) A'_{2m+4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(3) \qquad -(2m+2\nu)^2 A_{2m+2\nu} + (2m+2\nu+2)(2m+2\nu+1) A_{2m+2\nu+2} = 2m(2m-1) A'_{2m+2\nu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, comme nous supposons que la formule (1) a lieu quand l'exposant de x égal à $2(m-1)$, nous avons

$$A'_{2m-2} = 1,$$

$$A'_{2m+2\nu} = \frac{S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu}}{(2m-1)\,2m\,(2m+1)\ldots(2m+2\nu)},$$

et nous pouvons donc calculer A_{2m}, A_{2m+2}, A_{2m+4}, ... au moyen des formules antérieures.

Les valeurs qu'on obtient de cette manière pour les coefficients A_m, A_{2m+2}, A_{2m+4}, ... coïncident avec les valeurs des coefficients de la formule (1). Pour nous rendre compte de cette circonstance dans toute sa généralité, supposons qu'elle ait lieu pour le coefficient $A_{2m+2\nu}$, c'est-à-dire que l'on ait

$$A_{2m+2\nu} = \frac{S^{(\nu)}_{2m+2\nu}}{(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+2\nu)}.$$

La formule (3) donne alors

$$A_{2m+2\nu+2} = \frac{1}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)}\left[S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu} + (2m+2\nu)^2 S^{(\nu)}_{2m+2\nu}\right].$$

Mais si l'on a égard à la signification des symboles $S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu}$ et $S^{(\nu)}_{2m+2\nu+2}$, on voit que

$$S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu} + (2m+2\nu)^2 S^{(\nu)}_{2m+2\nu} = S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu+2}.$$

Donc on a

$$A_{2m+2\nu+2} = \frac{S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu+2}}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)},$$

et l'on voit que la valeur de $A_{2m+2\nu+2}$ coïncide encore avec la valeur du coefficient de $\sin^{2m+2\nu+2} x$ dans la formule (1).

Au moyen de l'analyse qui précède, on voit que la formule (1) a lieu pour l'exposant $2m$ si elle a lieu pour l'exposant $2(m-1)$, et, par conséquent, si elle a lieu pour la fonction x^2. Mais cette formule, en y posant $m=1$ et en remarquant que

$$S^{(1)}_4 = 2^2, \quad S^{(2)}_6 = 2^2.4^2, \quad S^{(3)}_8 = 2^2.4^2.6^2, \quad \ldots,$$

donne la formule *connue*

$$x^2 = \sin^2 x + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sin^4 x + \frac{2.4}{3.5}.\frac{1}{3}\sin^6 x + \ldots$$

La formule (1) est donc démontrée. De la même manière on vérifie la formule (2).

On tire de l'égalité (1), en la dérivant par rapport à x,

$$\frac{x^{2m-1}}{\cos x} = \sin^{2m-1} x \left[1 + \frac{S^{(1)}_{2m+2}}{2m+1}\sin^2 x + \frac{S^{(2)}_{2m+4}}{(2m+1)\ldots(2m+3)}\sin^4 x + \ldots\right].$$

De l'égalité (2) on tire aussi

$$\frac{x^{2m}}{\cos x} = \sin^{2m} x \left[1 + \frac{S^{(1)}_{2m+3}}{2m+2}\sin^2 x + \frac{S^{(2)}_{2m+5}}{(2m+2)\ldots(2m+4)}\sin^4 x + \ldots\right].$$

V

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE WARING

(Nouvelles Annales de Mathématiques — Paris, 1888, 3.e série, t. VII)

Dans un intéressant article intitulé: *Sur certaines fonctions symétriques; application au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation* (1), M. M. d'Ocagne calcule, au moyen de la théorie des fonctions symétriques, la fonction

$$\frac{1}{(x-x_1)^n}+\frac{1}{(x-x_2)^n}+\ldots+\frac{1}{(x-x_p)^n},$$

où x_1, x_2, ... représentent les racines de l'équation

$$\mathrm{U}=\mathrm{A}_0 x^p+\mathrm{A}_1 x^{p-1}+\ldots+\mathrm{A}_{p-1} x+\mathrm{A}_p=0;$$

et ensuite déduit, du résultat auquel il arrive, une formule pour le calcul de la somme des puissances semblables des racines de cette équation, analogue à celle de Waring. Il part de l'identité

$$\mathrm{D}_x \log \mathrm{U}=\sum \frac{1}{x-x_\omega}$$

qui, étant dérivée $n-1$ fois par rapport à x, donne

$$\sum \frac{1}{(x-x_\omega)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{D}_x^n \log \mathrm{U}.$$

(1) *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* (Coimbra, t. VII, p. 133).

Le but de cette Note est de faire voir qu'on peut, par la méthode de M. M. d'Ocagne, obtenir la formule de Waring, en faisant usage, pour le calcul de $D_x^n \log U$, d'une formule différente de celle qu'il a employée, à savoir (1)

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!\,\dfrac{d^i y}{du^i}\,(u')^\alpha\,(u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\ldots(n!)^\lambda},$$

où $\sum$ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

En effet, cette formule donne

$$D_x^n \log U = \sum (-1)^{i-1} \frac{n!\,(i-1)!\,U^{-i}\,U'^\alpha\,U''^\beta \ldots U^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\ldots(p!)^\lambda},$$

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

parce que

$$U^{(p+1)} = U^{(p+2)} = \ldots = U^{(n)} = 0.$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = (-1)^n\, n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,U^{-i}\,U'^\alpha\,U''^\beta \ldots U^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta \ldots (p!)^\lambda}$$

et, en posant $x = 0$,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,U_0^{-i}\,U_0'^\alpha \ldots U_0^{(p)\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta\,(3!)^\gamma\ldots(p!)^\lambda}$$

---

(1) Voir le *Calcul différentiel* de M. J. Bertrand, p. 308, ou mon *Curso de analyse infinitesimal*, t. I, 3.e ed., p. 242.

ou

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_p^{-i} A_{p-1}^{\alpha} A_{p-2}^{\beta} \ldots A_0^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!}.$$

En appliquant maintenant cette formule à l'équation

$$A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

dont les racines sont inverses des racines de l'équation proposée, on trouve la formule de Waring

$$\sum x_\omega^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_0^{-i} A_1^{\alpha} A_2^{\beta} \ldots A_p^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

où α, β, ..., λ sont les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

VI

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$

(Nouvelles Annales de Mathématiques — Paris, 1889, 3.e série, t. VIII)

L'intégrale $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$, qui a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$, a été obtenue par M. Hermite dans son savant *Cours d'Analyse*, p. 344, au moyen d'une construction géométrique, et ensuite dans *Jornal de Sciencias mathematicas*, t. II, p. 65, au moyen d'une méthode entièrement élémentaire. Je me propose ici de considérer la même intégrale, pour l'obtenir par une autre méthode, aussi élémentaire, en la faisant dépendre de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,du}{1+[f(x)]^2}.$$

Soit $\alpha = a + ib$. On a

$$\int \cot(x-a-ib)\,dx = \int \frac{\cos(x-a-ib)}{\sin(x-a-ib)} = \int \frac{\cos(x-a)\cos ib + \sin(x-a)\sin ib}{\sin(x-a)\cos ib - \cos(x-a)\sin ib}\,dx,$$

où l'on doit remplacer $\sin ib$ et $\cos ib$ par leurs valeurs

$$\cos ib = \frac{e^{-b}+e^{b}}{2},$$

$$\sin ib = \frac{e^{-b}-e^{b}}{2i},$$

ce qui donne

$$\int \cot(x-a)\,dx = \int \frac{(e^{-b}+e^{b})\cos(x-a) - i(e^{-b}-e^{b})\sin(x-a)}{(e^{-b}+e^{b})\sin(x-a) + i(e^{-b}-e^{b})\cos(x-a)}\,dx$$

$$= \int \frac{2\sin 2(x-a)\,dx}{e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)} - i\,\frac{(e^{-2b}-e^{2b})\,dx}{(e^{-b}+e^{b})^2\sin^2(x-a)+(e^{-b}-e^{b})^2\cos^2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos(x-a)\right] - i\int \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\,\text{tang}\,(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\,\text{tang}\,(x-a)\right]^2}.$$

Mais, comme on a $e^{-2b}+e^{2b}>2$, la fonction

$$\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)\right]$$

a une branche réelle qui prend des valeurs égales dans les points $x=0$ et $x=\pi$. Donc

$$\int_0^{\pi} \cot(x-a)\,dx = -i\int_0^{\pi} \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\,\text{tang}\,(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\,\text{tang}\,(x-a)\right]^2}.$$

L'intégrale, qui entre dans le second membre de cette égalité, a la forme

$$\int_0^{\pi} \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2},$$

et nous allons par conséquent lui appliquer le théorème de Cauchy:

$$\int_0^{\pi} \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2} = \text{arc tang}\,f(\pi) - \text{arc tang}\,f(0) + (n-m)\,\pi,$$

où n représente le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du positif au négatif, et m le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du négatif au positif.

En y posant donc

$$f(x) = \frac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\,\text{tang}\,(x-a),$$

et en remarquant que, quand x varie depuis zéro jusqu'à π, $\operatorname{tang}(x-a)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif, et que la fraction

$$\frac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}$$

est positive ou négative suivant que $b<0$ ou >0, on voit que $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif quand $b<0$, et du négatif au positif quand $b>0$.

Nous avons donc

$$\int_0^\pi \cot(x-a)\,dx = i\pi$$

quand $b>0$, et

$$\int_0^\pi \cot(x-a)\,dx = -i\pi$$

quand $b<0$.

FIM DO VOLUME PRIMEIRO

INDICE

Paginas

III

IV

V

VI

VII

VIII

IX