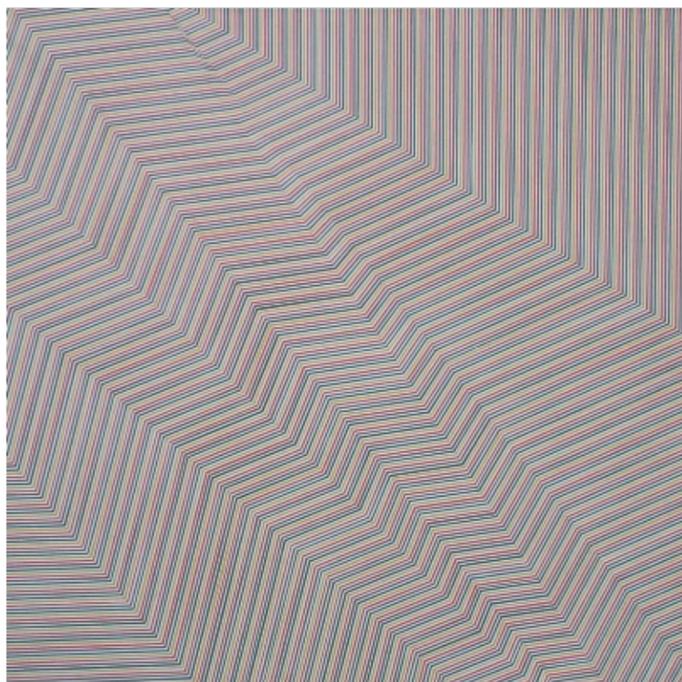


Jorge André

Ensinar e estudar Matemática em Engenharia



COORDENAÇÃO CIENTÍFICA DA COLEÇÃO CIÊNCIAS E CULTURAS

João Rui Pita e Ana Leonor Pereira

Os originais enviados são sujeitos a apreciação científica por *referees*

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Maria João Padez Ferreira de Castro

EDIÇÃO

Imprensa da Universidade de Coimbra

Email: imprensa@uc.pt

URL: http://www.uc.pt/imprensa_uc • Normas de publicação de colecções

DESIGN

António Barros

PRÉ-IMPRESSÃO

Rafael Resende

CAPA

Isabel Freire

Percurso III, 2006

Acrílico sobre tela

Cortesia Galeria Sete

IMPRESSÃO E ACABAMENTO

SerSilito • Maia

ISBN

978-989-8074-37-9

ISBN DIGITAL

978-989-26-0354-48

DOI

<http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0354-4>

DEPÓSITO LEGAL

284725/08

OBRA PUBLICADA COM A COLABORAÇÃO DE:

2



C E I S 2 0
CENTRO DE ESTUDOS
INTERDISCIPLINARES
DO SÉCULO XXI
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

OBRA PUBLICADA COM O PATROCÍNIO DE:



JORGE ANDRÉ

ENSINAR E ESTUDAR MATEMÁTICA EM ENGENHARIA

(Página deixada propositadamente em branco)

ÍNDICE

Introdução	7
Prefácio	11
1. O papel da Matemática na Formação de Um Engenheiro	17
1.1. O Papel da Matemática Como Escola de Pensamento.....	17
1.2. O Papel da Matemática Como Linguagem.....	18
1.3. O Papel da Matemática Como Ferramenta de Cálculo.....	25
1.4. Três Conclusões Preliminares.....	26
1.5. O Papel da Matemática no Exercício Profissional da Engenharia.....	27
2. Formação Matemática Ministrada em Cursos de Engenharia	33
2.1. As Cadeiras de Formação Matemática Fundamental (Bloco 1).....	33
2.1.1. <i>Composição e Objectivos Formativos Globais</i>	33
2.1.2. <i>Análise dos Programas das Cadeiras</i>	34
2.1.3. <i>Localizações das Cadeiras no Curso</i>	40
2.1.4. <i>Justificação Conjunta do Bloco 1</i>	41
2.1.5. <i>Formas de Exposição e de Avaliação</i>	43
2.2. As Cadeiras de Formação Matemática Aplicada (Bloco 2).....	54
2.2.1. <i>Composição e Características Gerais das Cadeiras</i>	54
2.2.2. <i>A Cadeira de Análise Numérica</i>	56
2.2.3. <i>A Cadeira de Probabilidades e Estatística</i>	59
2.3. As Cadeiras de Formação Mista Matemática/Engenharia (Bloco 3).....	63
3. A Ligação Entre as Cadeiras de Matemática e de Engenharia	65
3.1. Uma Formação Matemática Aplicada à Engenharia.....	66
3.1.1. <i>Ingredientes</i>	66
3.1.2. <i>Passos a Dar para a Adquirir</i>	69
3.2. Carências de Conhecimentos Matemáticos Sentidas nas Cadeiras de Engenharia.....	71
3.2.1. <i>Dificuldade Para Aplicar Conhecimentos Matemáticos</i>	72
3.2.2. <i>Matérias de Matemática Não Leccionadas</i>	80

3.3. Deficiências do Ensino nas Cadeiras de Engenharia que Reduzem a Correlação	81
6 4. A Análise Estatística do Fenómeno: Um Desafio Pendente	85
5. Conclusões	87
Bibliografia	95
Apêndices	97
Apêndice 1	99
Apêndice 2	101
Apêndice 3	103
Apêndice 4	113
Apêndice 5	119
Apêndice 6	127
Apêndice 7	133
Apêndice 8	143
Apêndice 9	147

APRESENTAÇÃO

Esta é uma obra original. Original no tema e original na abordagem. Quanto ao tema, é legítima uma interrogação sobre a sua própria existência. Que tema é este?, perguntará o leitor mais desprevenido. Não é toda a Matemática superior igual? Ou então: de que Matemática particular precisam os estudantes de Engenharia? Há uma Matemática específica para engenheiros? O que tem de especial o ensino da Matemática para estudantes de Engenharia? Ora o tema existe, sim, e é muito importante. Não existe Engenharia sem Matemática, e a boa preparação matemática ajuda muito o futuro engenheiro de concepção, de projecto, de desenvolvimento, de inovação, de investigação.

O autor leva a cabo uma reflexão pessoal aprofundada sobre questões importantes: Qual o papel da Matemática na formação de um engenheiro? Como organizar o ensino da Matemática em cursos de Engenharia de modo a concretizar esse papel? Como articular a formação em Matemática com a formação específica em Engenharia? Sobre cada um destes temas é desenvolvida uma análise cuidadosa e pormenorizada, em que se faz a ponte entre a natureza da Matemática e as necessidades práticas do estudante de engenharia e do engenheiro. Percebe-se que há aqui um interesse já antigo do autor, tanto pela Engenharia e a Matemática com as suas aplicações como pelas difíceis questões levantadas pela organização de uma licenciatura em Engenharia.

O texto é bem organizado e argumentado, bem redigido e bastante completo. O autor exhibe uma compreensão lúcida e informada da natureza da Matemática como ciência do pensamento rigoroso, e da forma por que ela se aplica, bem como das diversas modalidades da acção de um engenheiro. Há passagens em que o exame crítico se apresenta quase num registo filosófico, com uma apologia do conhecimento integral que é de realçar. O livro é nesse sentido também obra de cultura.

Parte da reflexão transcende a problemática concreta que é objecto do livro. Em particular, muitas das observações sobre pedagogia valem noutros contextos, inclusive para um curso superior de Matemática, disciplina cujo estudo ganha obviamente com o conhecimento das suas aplicações.

O texto compreende uma interessante lista de exemplos, com grande valor diáctico para os estudantes, porque ilustram de forma detalhada a importância da Matemática na análise dos fenómenos físicos.

É importante frisar que o texto do Doutor Jorge André é um ensaio analítico sobre o seu tema, não um manual de técnicas ou receitas sobre ensino, que poderia ter algum interesse, mas seria obra completamente diferente.

A “conclusão C3” (p. 9) – “são distintos o modo de estudar a Matemática, o gosto que por ela têm e o uso que dela fazem um engenheiro e um matemático” – conduz à discussão mais delicada e, possivelmente, controversa: a questão da generalidade da Matemática, e dos prejuízos trazidos pelos inevitáveis compromissos no seu ensino a estudantes de Engenharia.

Uma das principais “forças” da Matemática está em que as suas ideias e ferramentas *são gerais*, e muito do poder da Matemática, mesmo da elementar, vem-lhe precisamente da aplicabilidade de ideias gerais em vários contextos diferentes.

Isso faz com que pareça preocupante qualquer abordagem à Matemática excessivamente ligada a tipos muito particulares de problemas ou aplicações.

Por outro lado, o rigor do pensamento matemático tende a ir ao fundo de tudo, mas no ensino da Engenharia não há tempo para isso, nem a motivação dos estudantes será em geral suficiente para grandes aprofundamentos.

Tais limitações, inevitáveis, ocupam longamente o autor no seu texto. O Doutor Jorge André não foge a estas questões – que estão de facto no centro da problemática em estudo – e distingue níveis progressivamente diferenciados de estudo da Matemática ao longo de um curso de Engenharia.

São muito interessantes as suas análises sobre a “simbiose formativa” da Matemática com a Física e a Engenharia, e sobre a capacidade de dar “saltos lógicos” como pré-requisito essencial na modelação de fenómenos naturais e na posterior aplicação prática dos resultados do respectivo tratamento matemático.

O livro que a Imprensa da Universidade agora publica tem uma variedade de públicos possíveis, como aliás o próprio título sugere: estudantes, professores de Matemática, professores de Engenharia e, claro, decisores académicos interessados no desenho de cursos na área da Engenharia.

Trata-se de uma obra de reflexão crítica original e profunda sobre um tema de capital importância para o futuro da Engenharia portuguesa, num país que se pretende tecnologicamente actualizado e apetrechado com os recursos humanos indispensáveis à sua modernização.

Coimbra, Fevereiro de 2008

João Filipe Queiró

(Página deixada propositadamente em branco)

PREFÁCIO

Motivação e Objectivo

Ensinar e aprender matemática num curso de engenharia foi, é e, provavelmente, continuará sempre a ser um desafio, uma perpétua fonte de insatisfação e equívocos.

Os estudantes não entendem por que têm de estudar tanta matemática num curso de engenharia (1º e 2º Ciclos), queixam-se que o seu ensino é muito teórico e pouco motivante – não querem ser matemáticos, querem ser engenheiros –, e, ainda por cima, que os professores lhes dificultam muito a aprovação nestas cadeiras. Em correspondência com estas queixas, comprova-se que as classificações dos estudantes nas cadeiras de matemática são muito mais fracas que nas cadeiras de engenharia, e que os atrasos na sua aprovação são também mais prolongados e frequentes. Um número não desprezável de estudantes termina mesmo o seu curso com uma ou mais cadeiras de matemática, do 1º ou 2º anos.

Por seu lado, muitos professores de matemática não têm gosto em ensiná-la a estudantes de engenharia pois sabem que é difícil motivá-los sem fazer cedências que consideram inadmissíveis no nível de ensino da matemática: deixaria de ser “matemática a sério”. Nem sequer sabem, concretamente, para que lhes vai servir aquela matemática no resto do seu curso e, mais tarde, na vida profissional. Nenhum professor de engenharia veio alguma vez explicar-lhes. Eles ignoram até se os professores de engenharia estão realmente interessados em que os seus futuros estudantes saibam a matemática que lhes tentam ensinar e que uso fazem dela nas suas cadeiras de engenharia.

Finalmente, os professores de engenharia escandalizam-se de que muitos estudantes atrasem tanto a aprovação nas cadeiras de matemática. Muitos deles acham que a culpa é dos professores de matemática, que não sabem motivar os estudantes e que se empenham em fazer-lhes a vida difícil. Se se pergunta a um professor de uma cadeira de engenharia com forte componente quantitativa, se acha que os seus estudantes necessitam de formação matemática, ele responde que sim mas, por outro lado, reconhece que já não se lembra bem em que cadeiras tal formação é ministrada, e como: prefere dá-la ele próprio, à sua maneira, em “pré-fabricados matemáticos” concebidos expressamente para as aplicações de engenharia que ensina, e, por conseguinte, “prontos-a-usar” neste contexto. Apesar de tudo, com frequência, queixa-se que os seus alunos não sabem matemática básica, por exemplo, somar fracções ou equacionar uma relação simples.

Neste contexto de equívocos e tensões, em boa parte filho do fenómeno mais geral e profundo da especialização das Ciências, o presente texto recolhe algumas reflexões sobre as questões anteriores, originadas da experiência pessoal do autor e da de outros com quem as debateu, com o propósito de despertar o interesse e ajudar a organizar as reflexões de estudantes e professores de matemática e engenharia sobre a forma como a matemática se ensina e se estuda em cursos de engenharia. Neste interesse e nesta reflexão residem a única esperança de alteração do “status quo” nesta matéria cuja relevância radica no papel nevrálgico que, na opinião do autor, a formação matemática assume na formação universitária de um engenheiro.

Génese

Constituem antecedentes relevantes na génese deste texto, o interesse continuado do autor pelo estudo, o ensino e a aplicação da matemática em engenharia mecânica. Tal interesse, que nasce durante a própria frequência do curso, iniciado no Instituto Superior Técnico e terminado na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (FCTUC), foi incentivado, já na carreira docente,

por um percurso pedagógico que atravessa cadeiras de engenharia mecânica com forte componente quantitativa (Resistência de Materiais, Mecânica dos Fluidos, Turbomáquinas, Máquinas Térmicas, Aerodinâmica), e, simultaneamente, cadeiras de formação matemática do curso de licenciatura (Matemática Aplicada à Engenharia Mecânica, Tratamento Estatístico de Dados) e do curso de pós-graduação (Matemática Aplicada à Engenharia Mecânica, Modelação de Fenómenos Físicos), ambos “pré-Bolonha” e ministrados no Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) da FCTUC. Neste contexto, desempenharam também um papel as análises curriculares dos cursos de licenciatura e mestrado (“pré e pós Bolonha”) do DEM da FCTUC levadas a cabo como fundamento de propostas de reforma curricular ou para efeitos de apresentação do curriculum a estudantes do 1º ano. Por outro lado, a investigação, através de variados problemas de índole experimental, numérica e teórica, tem também constituído um estímulo constante à reflexão sobre esta temática. Por último, mais recentemente, foram determinantes os contactos com matemáticos no seio da Comissão de Ligação da Matemática às Ciências e Engenharias, envolvendo vários departamentos da FCTUC, e também os vários processos de avaliação e acreditação a que o curso de licenciatura em engenharia mecânica do DEM da FCTUC tem sido submetido.

Embora traíndo, aqui e ali, a sua origem na especificidade de alguns pontos do percurso do autor, espera-se que o presente livro seja útil a estudantes e professores de outros cursos de engenharia (em particular, os cursos clássicos, de Engenharia Civil, Electrotécnica, Mecânica e Química) e de outras escolas.

Organização

O livro consta de cinco capítulos, profusamente ilustrados com exemplos e complementados por um conjunto de nove apêndices, alguns deles extensos.

No primeiro capítulo expõem-se algumas considerações sobre a questão-chave da utilidade ou necessidade da matemática em engenharia, começando por considerações de índole geral, e passando, depois, a considerações mais específicas,

ligadas ao exercício profissional pós-licenciatura. Pode considerar-se que as ideias fundamentais deste capítulo formam a coluna vertebral do pensamento explanado nos restantes capítulos.

No segundo capítulo faz-se a análise das cadeiras de matemática que, com pequenas variantes, compõem o curriculum de muitos cursos universitários de engenharia (actualmente, de 1º Ciclo não profissionalizante e, eventualmente, de 2º Ciclo), agrupadas em três blocos formativos homogêneos, respectivamente, de formação matemática fundamental, matemática aplicada e mista matemática/engenharia. Esta análise compreende os objectivos formativos e o programa substancial das cadeiras, a sua localização no curriculum e as formas de exposição e avaliação dos conhecimentos. Especial ênfase é posta em proporcionar uma visão de conjunto unitária.

No terceiro capítulo reflecte-se sobre a ligação, real ou desejável, existente entre as cadeiras de matemática e de engenharia. Começa por se enumerar os ingredientes de uma formação matemática aplicada a qualquer ramo da engenharia, e os grandes passos da sua aprendizagem ao longo do curso. Reflecte-se depois sobre a natureza, as causas e as formas de compensar as carências desta formação matemática aplicada, que prejudicam a aprendizagem nas cadeiras de engenharia. Por último, apontam-se possíveis deficiências dos projectos formativos destas cadeiras, que desvalorizam e tornam em grande medida inútil o investimento na formação matemática de base no início do curso.

No quarto capítulo, muito breve, chama-se a atenção para o interesse em realizar análises estatísticas do fenómeno do insucesso escolar na área da matemática, bem como da correlação existente entre o sucesso escolar nas cadeiras de matemática e engenharia, no contexto de cursos e escolas de engenharia concretos.

No quinto capítulo apresentam-se as conclusões consideradas mais relevantes.

Relegaram-se para apêndice, daí o número tão elevado de apêndices, as análises com o detalhe considerado adequado à plena compreensão e, por conseguinte, ao cabal aproveitamento das ideias expressas, de exemplos-chave mencionados no corpo principal do texto.

Agradecimentos

Estou muito grato aos Senhores Prof. Jorge da Costa André (Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico), meu pai, Prof. Luís Nunes Vicente (Departamento de Matemática da FCTUC), Prof. José Manuel Baranda Ribeiro (DEM da FCTUC) e Doutor Paulo Aires Pereira, pelo tempo que despenderam a ler versões preliminares deste texto, bem como pelas críticas e sugestões que acharam por bem fazer-me no sentido de o corrigir e melhorar, sem que, com este agradecimento, os queira tornar co-responsáveis pelos aspectos menos bem conseguidos deste trabalho e, muito menos ainda, pelos erros que ele possa conter. Agradeço também ao Prof. João Queiró (Departamento de Matemática da FCTUC) as suas sugestões e, sobretudo, a sua amável apresentação do livro.

(Página deixada propositadamente em branco)

1. O PAPEL DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE UM ENGENHEIRO

Neste capítulo começa por se expor, em abstracto, o tríplice papel que a matemática está chamada a desempenhar na formação universitária de um engenheiro, como escola de pensamento, como linguagem e como ferramenta. Consequentemente, realça-se a relevância da matemática na formação do engenheiro, sob a forma de três conclusões preliminares. Por último, em reforço das considerações abstractas anteriores, proporcionam-se alguns elementos práticos respeitantes ao exercício profissional da engenharia: dados (Perfil do Engenheiro Europeu de Grau I), reflexões e casos práticos.

1.1. O Papel da Matemática Como Escola de Pensamento

Em primeiro lugar, a matemática é útil para um engenheiro como escola de pensamento onde aprende a pensar e a comunicar o seu pensamento a outros com objectividade, rigor e concisão.

Com efeito, qualquer teoria matemática: começa por definir de forma económica, sistemática e rigorosa os seus conceitos, utilizando para tal uma notação consistente e eficaz; possui uma estrutura lógica bem vincada, na qual se distinguem conceitos primitivos e derivados, axiomas, teoremas e corolários, situados, frequentemente, em níveis de abstracção distintos mas mutuamente relacionados; demonstra com rigor lógico todas as suas teses não primitivas, distinguindo um argumento motivante (demonstração heurística) de uma demonstração cabal, delimitando bem as condições de aplicação da tese implicadas na demonstração, e servindo-se, sem retirar criatividade à sua aplicação, de uma variada panóplia de técnicas demonstrativas (de redução ao absurdo, construtivas, de indução...).

Sendo certo que um engenheiro raramente sente necessidade ou tem tempo para empregar um tal nível de rigor formal no seu trabalho, seja como via de descoberta, confirmação ou justificação de teses que lhe interessem – aliás, outro tanto, apenas um pouco matizado, se poderia dizer do físico ou do químico –, também não é menos certo que lhe é inestimável o hábito de “pensar e comunicar bem” em qualquer âmbito mas, mormente, em âmbitos quantitativos.

É possível que, para alguns, esta afirmação implique o reconhecimento de que a engenharia se trata de uma actividade menos “racional” que a matemática, questão que, em última análise, se prende com a ideia que temos sobre a própria natureza da racionalidade humana. A este respeito, alvitramos que nem todos os processos racionais são formalizáveis. Pense-se, por exemplo, em dois âmbitos tão amplos como o da criatividade e o do senso comum. De facto, se alguma coisa entendemos do Teorema da Incompletude de Gödel, parece-nos que esta afirmação é verdadeira no próprio âmbito da investigação matemática. Em todo o caso, no mundo real, que é o da engenharia, admitir apenas processos puramente formais como via legítima de descoberta ou justificação de teses é tão irracional como querer introduzir um oceano dentro de um copo de água! Deste modo, a falta de “rigor formal” não só não significa necessariamente falta de “racionalidade”, como, pelo contrário, muitas vezes é uma exigência da própria racionalidade.

1.2. O Papel da Matemática Como Linguagem

Em segundo lugar, a matemática é para um engenheiro a linguagem natural não só da sua ciência experimental básica, a Física, entendida em sentido amplo, como Físico-Química, mas também das próprias Ciências da Engenharia.

Sobre o facto das leis físicas fundamentais possuírem apenas expressão essencial e irreduzivelmente matemática limitamo-nos aqui a remeter o leitor para um belo e profundo texto de Feynman (1989).

Vale a pena, no entanto, discriminar três tipos correntes de utilização da matemática como linguagem, equiparando-os às três funções linguísticas gerais, de leitura, escrita e raciocínio verbal.

O primeiro tipo ou função corresponde à “leitura” de enunciados matemáticos de ideias (conceitos, hipóteses, teses) físicas, sendo tais enunciados dados previamente, “escritos” por outros. Esta função refere-se comumente como a “descoberta do sentido físico de um enunciado matemático, num certo contexto físico”. Sirva de ilustração o seguinte exemplo.

§ **Exemplo 1:** Considere-se um fluido em escoamento, caracterizado por um campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, e uma propriedade termodinâmica extensiva do fluido, Φ , com campo de propriedade específica volúmica, $\phi(\mathbf{r},t)$. Para simplificar, pode supor-se que Φ é uma propriedade escalar tal como, por exemplo, a massa. Neste caso, ϕ identificar-se-ia com a massa volúmica, ρ [kg/m^3]. Em Mecânica dos Fluidos é útil exprimir a derivada material ou substancial da propriedade ϕ , $(D\phi/Dt)$, a qual representa a taxa temporal de variação de ϕ para uma partícula de fluido (perspectiva de Lagrange), em função de valores e taxas de variação locais e instantâneos, em $(\mathbf{P}(\mathbf{r}), t)$, dos campos \mathbf{v} e ϕ (perspectiva de Euler), através da relação

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad (1)$$

Como se “lê”, que “diz”, a eq. (1)? Preparando a resposta a esta questão, considerem-se dois escoamentos particulares e um curto intervalo de tempo, $[t, t+\Delta t]$. O primeiro escoamento corresponde à condição de repouso do fluido, caracterizada por $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\mathbf{0}$ e $\phi(\mathbf{r},t)$ arbitrário. Neste caso, a posição de cada partícula de fluido permanece invariante no tempo e, por conseguinte, a definição física do operador D/Dt traduz-se imediatamente pela seguinte relação aproximada:

$$\frac{D\phi}{Dt} \approx \frac{\phi(\mathbf{P}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{P}, t)}{\Delta t} \quad (2)$$

a qual se identifica com a versão particular da eq. (1) sem a segunda parcela do membro direito, quando $\Delta t \rightarrow 0$. Quer dizer, neste primeiro caso, o

valor de ϕ para a partícula varia, apesar dela estar parada, devido à não-estacionaridade do campo $\phi(\mathbf{r},t)$. O segundo escoamento é estacionário, sendo caracterizado por $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e $\phi(\mathbf{r},t)=\phi(\mathbf{r})$. Assim, a partícula de fluido que passa por $P(\mathbf{r})$ no instante t , viajando à velocidade $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$, no instante $t+\Delta t$ já se encontra em $Q(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$, sendo $\Delta\mathbf{r}\approx\mathbf{v}\Delta t$, pelo que a definição física do operador D/Dt é agora traduzida por

$$\frac{D\phi}{Dt} \approx \frac{\phi(Q)-\phi(P)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta\mathbf{r}\cdot\nabla\phi(P)}{\Delta t} \approx \mathbf{v}(P)\cdot\nabla\phi(P) \quad (3)$$

convertendo-se todas as relações aproximadas em exactas quando $\Delta t\rightarrow 0$, caso-limite em que se reencontra a eq. (1) na sua versão particular sem a primeira parcela do membro direito. Quer dizer, neste segundo caso, sendo o campo ϕ estacionário mas não-uniforme, o valor de ϕ para a partícula varia apenas porque ela se desloca de P para Q (efeito advectivo ou de transporte). Para um escoamento arbitrário é fácil induzir que os dois efeitos isolados expressos pelas eqs. (2,3) se conjugam aditivamente, conduzindo à relação (1), mais geral. Por outras palavras, a relação (1) pode ter a seguinte “leitura”: “A taxa instantânea de variação da propriedade ϕ para a partícula de fluido que passa em $P(\mathbf{r})$ no instante t , $(D\phi/Dt)$, é igual à soma das taxas locais e instantâneas de variação da propriedade ϕ , respectivamente, temporal, $(\partial\phi/\partial t)$ (efeito de não-estacionaridade), e espacial, $(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi)$ (efeito advectivo ou de transporte)”. ■

A segunda função “linguística” da matemática corresponde à “escrita” em linguagem matemática de ideias físicas. O Exemplo 1 apresentado acima, uma vez invertido, serve para ilustrar esta função, dada a reciprocidade das operações de leitura e de escrita. Vamos porém reforçá-lo com um segundo exemplo.

§ **Exemplo 2:** Pretende-se traduzir analiticamente o conceito físico de “linha de emissão” de um escoamento. Tal conceito está ligado à interpre-

tação de uma técnica experimental de visualização de escoamentos que consiste na injeção virtualmente contínua de partículas traçadoras (suficientemente finas para que se possa assumir que são perfeitamente arrastadas pelo escoamento) num dado ponto do espaço, seja $P_0(\mathbf{r}_0)$, tornando visível uma “linha de emissão” do escoamento, que se vai desdobrando com a passagem do tempo, formada pela sequência de partículas traçadoras que foram sendo injectadas em P_0 , por exemplo, durante o intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_1$ (Figura 1). Como se exprime esta “linha de emissão” em função de (P_0, t_0, t_1) e do campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, do escoamento? Para o descobrir, reparemos que, no instante final, t_1 , a partícula traçadora que foi injectada em P_0 no instante t , com $t \in [t_0, t_1]$, se encontra na posição

$$\mathbf{r}(t, t_1) = \mathbf{r}_0 + \int_t^{t_1} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t, t'), t') \cdot dt' \quad (4)$$

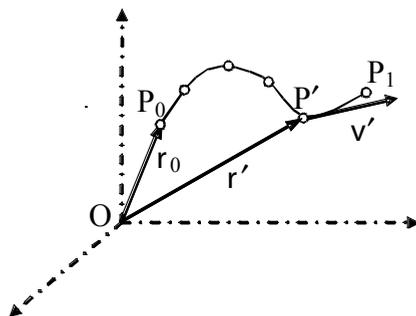


Figura 1 — (Exemplo 2) – Linha de emissão do escoamento nascida em $P_0(\mathbf{r}_0)$ e desenvolvida ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$.

dado que, no instante intermédio $t' \in [t, t_1]$, a partícula ocupa a posição $P'(\mathbf{r}')$, com $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}(t, t')$, e, por conseguinte, sendo perfeitamente arrastada pelo escoamento, tem velocidade $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}', t')$ (Figura 1). Pois bem, a eq. (4) proporciona uma formulação analítica integral para a linha de emissão desejada, através da representação paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, t_1)$, em que o argumento t identifica a partícula traçadora pelo seu instante de injeção. Pode passar-se

para uma formulação diferencial matematicamente equivalente, derivando a eq. (4) em ordem a t_1 enquanto se mantém congelada a variável t ,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1}(t, t_1) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t, t_1), t_1) \quad (5)$$

Note-se que a eq. (5) pode ser tratada formalmente como uma equação diferencial ordinária (vectorial) com variável independente t_1 . ■

Finalmente, a terceira função “linguística” da matemática abarca, simultaneamente, operações de leitura, escrita e raciocínio, sendo, por isso, aqui designada sinteticamente por “raciocínio verbal”. Tal função é empregue própria e plenamente na construção de um modelo matemático de um fenómeno físico e na sua subsequente exploração com o propósito de aumentar a compreensão física do fenómeno, tal como se ilustra no exemplo seguinte.

§ **Exemplo 3:** O fenómeno consiste na evolução isotérmica de um sistema simples (isto é, um sistema constituído por uma única substância) mas bifásico, líquido-vapor, no interior de um recipiente paralelepípedo fechado (Figura 2a). São conhecidas as seguintes leis de evaporação/condensação da termodinâmica fora do equilíbrio: (L1) o caudal mássico de evaporação (isto é, em termos moleculares, a massa total de moléculas que migram da fase líquida para a fase de vapor, por unidade de tempo), m_{1-} [kg/s], é proporcional à área da superfície da interface líquido-vapor, também chamada superfície livre da fase líquida; (L2) o caudal mássico de condensação, m_{1+} [kg/s], é proporcional à massa total da fase de vapor. Os parâmetros pertinentes do fenómeno são, assim: as massas iniciais da fase líquida e de vapor, (m_{l0}, m_{v0}) [kg], assumindo-se que $m_{v0}=0$; a área da base da caixa, A [m²]; e os coeficientes (positivos) de proporcionalidade das leis L1 e L2, respectivamente, k_1 [kg/s·m²] e k_2 [s⁻¹]. Numa primeira fase de abordagem do fenómeno, pretende construir-se um modelo matemático que proporcione a lei geral de variação com o tempo, da massa da fase líquida dentro da caixa, $m_l(t)$. Para isso, comecemos por “escrever” as leis L1, L2

e de conservação da massa total da substância dentro da caixa, para um instante de tempo arbitrário,

$$\begin{cases} \dot{m}_{l-} = k_1 \cdot A & \text{(L1)} \\ \dot{m}_{l+} = k_2 \cdot m_v & \text{(L2)} \\ m_v + m_l = m_{l_0} \end{cases} \quad (6a,b,c)$$

onde, como é usual, o ponto por cima de um símbolo designa uma derivada em ordem ao tempo. Por outro lado, a taxa de variação da massa da substância em fase líquida é

$$\dot{m}_l = \dot{m}_{l+} - \dot{m}_{l-} \quad (7)$$

Das eqs. (6a,b,c,7) resulta, então, a equação diferencial em $m_l(t)$,

$$\dot{m}_l + k_2 \cdot m_l + \left(k_1 \cdot A - k_2 \cdot m_{l_0} \right) = 0 \quad (8)$$

a qual, uma vez acoplada à condição inicial $m_l(0) = m_{l_0}$, e integrada, proporciona a lei geral procurada, a saber (Figura 2b):

$$m_l(t \mid m_{l_0}, A, k_1, k_2) = m_{l_0} - \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \cdot A \cdot (1 - e^{-k_2 \cdot t}) \quad (9)$$

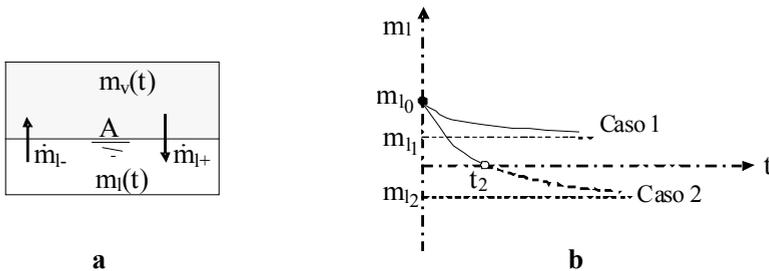


Figura 2 — (Exemplo 3) – a – Caixa fechada com sistema bifásico simples, líquido-vapor. b – Gráficos da função $m_l = m_l(t)$, dada pela eq. (9), para dois casos possíveis de valores dos parâmetros (m_{l_0} , A , k_1 , k_2).

Numa segunda fase de análise do fenómeno, já de posse da lei geral ou modelo (9), é fácil indagar as condições em que a fase líquida se evapora completamente, deixando a caixa cheia de vapor da substância fora do equilíbrio de fases. Com efeito, a lei (9) corresponde a um decaimento exponencial com constante de tempo $\tau=1/k_2$ e valor-limite $m_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} m_1(t) = m_{1_0} - (k_1/k_2) \cdot A$. Deste modo, a condição supra referida verifica-se sempre que $m_{1_0} \leq 0$, isto é, quando

$$m_{1_0} \leq \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \cdot A \quad (10)$$

Por outro lado, repare-se que, quando se verifica estritamente a desigualdade expressa na relação (10), para $t > t_2$, sendo t_2 a raiz da equação $m_1(t)=0$, a função $m_1(t)$ definida por (9) torna-se negativa, perdendo, neste contexto, o “sentido físico” (parte da linha do Caso 2 da Figura 2b assinalada a traço interrompido). ■

Em suma, não é difícil perceber que, quanto mais “fluente” em linguagem matemática se tornar um engenheiro, na tríplice vertente de “leitura”, “escrita” e “raciocínio verbal” que acima se expõe, tanto mais capaz se torna de adquirir uma compreensão profunda, geral¹ e unitária dos conceitos, leis, fenómenos e técnicas dos campos da Física e da Engenharia que lhe interessarem. Compreensão, por outro lado, sem a qual não lhe é possível assimilar verdadeiramente os conhecimentos científico-tecnológicos, nem, portanto, tornar-se crítico e criativo na sua actividade de engenharia.

¹ Sob este aspecto, pode dizer-se que o uso da linguagem matemática torna possível tirar partido em engenharia, do Princípio de Economia de Pensamento (designação inspirada no princípio homónimo de Mach) que é apanágio da Ciência, pelo qual a capacidade de explicação de uma multiplicidade de fenómenos é reduzida à compreensão profunda de um pequeno número de conceitos, hipóteses e leis.

1.3. O Papel da Matemática Como Ferramenta de Cálculo

A terceira utilidade que a matemática presta à engenharia consiste em proporcionar-lhe uma variada panóplia de técnicas analíticas e numéricas para resolver eficazmente os problemas matemáticos que resultam da “escrita em linguagem matemática” de problemas de engenharia. Esta utilidade é, das três referidas acima, a mais óbvia e simples de entender. Por este motivo, chama-se aqui apenas a atenção para os dois pontos seguintes.

O primeiro ponto, levantado por Chapra e Canale (1989), relewa do impacto na engenharia da entrada na “era do computador”. Estes autores começam por subdividir a abordagem de um problema de engenharia em três grandes fases, a saber: a formulação do problema, em que se constrói um modelo físico-matemático adequado; o cálculo, em que se resolve o problema numérico resultante da aplicação do modelo construído na primeira fase, ao problema de engenharia em causa; e a interpretação, em que se procede à análise dos resultados dos cálculos, tendo em vista a resolução final do problema. Consideram, seguidamente, que, na “era pré-computador”, o estrangulamento do processo se dava na fase de cálculo, pois as técnicas analíticas, as únicas então disponíveis, além de limitadas, são, frequentemente, complexas e fastidiosas. Tal situação levava, na primeira fase, a ter que simplificar bastante o modelo, e, na terceira fase, a exaurir a análise da solução matemática encontrada, de forma a rentabilizar o esforço que tinha sido despendido para a obter, na segunda fase. Os autores concluem o seu argumento referindo que a entrada na era do computador, ao viabilizar o emprego de técnicas numéricas muito gerais, veio deslocar o centro de gravidade da atenção do engenheiro para as fases mais nobres da abordagem do problema, permitindo-lhe, na primeira fase, construir modelos mais complexos e detalhados, e, na terceira fase, proceder a análises multi-solução mais poderosas, como sejam, análises de simulação e de sensibilidade, tirando partido do relativamente baixo custo de cálculo.

O segundo ponto que se realça é que um engenheiro necessita de uma formação numérica e informática, não só para tentar efectuar por si próprio os cálculos requeridos pela resolução dos problemas que põe, mas ainda, sempre que tal não

se revele possível ou vantajoso, para recorrer eficazmente à ajuda de especialistas que o auxiliem na realização de tais cálculos, directamente ou através de programas de computador especializados.

1.4. Três Conclusões Preliminares

Da exposição feita acima acerca da tríplice utilidade da matemática para um engenheiro – como escola de pensamento, como linguagem e como ferramenta de cálculo –, é possível induzir já três conclusões preliminares, a saber:

- C1** Existe um nível mínimo de formação matemática abaixo do qual não é possível estudar ou exercer profissionalmente engenharia.
- C2** Quanto mais formação matemática um estudante ou profissional de engenharia conseguirem assimilar, tanto melhores estudante ou profissional serão, desde que a sejam capazes de aplicar.
- C3** São distintos, o modo de estudar a matemática, o gosto que por ela têm e o uso que dela fazem, um engenheiro e um matemático. Concretamente, uma formação matemática aplicada à engenharia não resulta simplesmente da justaposição de uma formação matemática de base com uma formação técnica de engenharia.

As duas primeiras conclusões são complementares: enquanto C1 garante a existência de um “mínimo” (necessário) de formação matemática em engenharia, C2 afirma a inexistência de um “máximo” (desejável). A questão, mais polémica, da definição do “mínimo” aludido na conclusão C1 é deixada para mais tarde.

Em particular, a conclusão C2 merece dois comentários. O primeiro comentário, para dizer que não parece útil, nem mesmo possível, dividir “a priori” os

conhecimentos matemáticos em “aplicáveis” e “não aplicáveis”, tal como o demonstra sobejamente a própria História da Ciência, nela incluindo as Ciências da Engenharia. De resto, especificamente em relação às teorias matemáticas que são normalmente leccionadas nos cursos de engenharia das universidades nacionais, o problema nem sequer se chega a pôr, pois não há nenhuma que não tenha sido já aplicada. O segundo comentário, para reconhecer que é possível opor a C2 a tese, que poderíamos apelidar de “Metáfora da Metamorfose”, de acordo com a qual, com o crescimento ilimitado da formação matemática, a uma dada altura deixaríamos de ter um engenheiro para passar a ter um físico, que trocava o interesse pelos problemas reais, sujos e confusos, de engenharia, pelo de fenómenos físicos mais puros e idealizados, e, a outra altura mais elevada ainda, o físico transformar-se-ia em matemático, o qual, por sua vez, teria já perdido o interesse pela própria realidade. No seu simplismo, esta tese toca um ponto interessante, a questão da existência de um nível máximo desejável para a formação matemática de um engenheiro, no qual não há aqui espaço para entrar. Esta questão pode, no entanto, ser torneada passando a interpretar C2 de forma puramente pragmática, nestes termos: a existir um tal limite superior para a formação matemática do engenheiro, ele estaria, em todo o caso, suficientemente acima do nível que corresponde aos nossos cursos de engenharia (1º e 2º Ciclos) para, na prática, não se manifestar.

A conclusão C3, por ora apenas intuída, é completamente justificada e explanada nos Capítulos 2 e 3.

1.5. O Papel da Matemática no Exercício Profissional da Engenharia

As considerações que se tecem nas Secções 1.1-4 têm uma aplicação óbvia durante a fase de formação universitária de um engenheiro. Passa agora a analisar-se em que medida elas se aplicam na fase de exercício profissional da engenharia, em qualquer função, da gestão da produção à investigação, e em qualquer âmbito, da indústria à universidade.

Neste sentido, comece por se atentar nas alíneas **b**, **e** e **f** do Perfil do Engenheiro Europeu de Grau I (citado em Cortez, 1987), o qual corresponde ao grau de formação visado nos nossos cursos de licenciatura (“pré-Bolonha”) ou de mestrado (“pós-Bolonha”) em engenharia, proposto por diversas associações europeias de profissionais de engenharia:

- b** “Tem um conhecimento completo dos princípios de engenharia, baseado na física e na matemática, no domínio da sua especialidade.”
- e** “É capaz de conceber e utilizar os modelos teóricos que permitem prever o comportamento dos fenómenos físicos.”
- f** “Sabe fazer livremente os seus juízos sobre assuntos técnicos com o auxílio da análise científica e da reflexão lógica.”

Sem necessidade de comentários, são patentes as afinidades entre estas aptidões e o tríplice papel que se atribui acima à matemática na formação de um engenheiro.

Algumas Considerações Avulsas

Seguem-se algumas considerações avulsas sobre a utilização da matemática por engenheiros no seu exercício profissional.

A primeira consideração é que nem tudo o que um engenheiro faz constitui, necessariamente, “exercício específico da engenharia”, mesmo prescindindo de qualquer juízo de qualidade. Daí que alguns engenheiros não utilizem, e afirmem mesmo não sentir a necessidade de formação matemática no seu dia-a-dia profissional. Sob este aspecto e para a questão que se está a tratar, nada importa que sejam muitos ou poucos os engenheiros portugueses que se encontrem nesta situação.

Uma segunda consideração é que há áreas importantes da engenharia em que, por fundados motivos científico-tecnológicos, os conhecimentos têm um forte carácter qualitativo, neles desempenhando a matemática um papel proporcionalmente reduzido. Por exemplo, a Ciência dos Materiais, e, no âmbito da engenharia mecânica, parte das Tecnologias Mecânicas.

Uma terceira consideração é que há três causas que podem limitar mais ou menos severamente a utilização da matemática na resolução de um problema de engenharia. São elas:

- a) As deficiências que existam na formação matemática aplicada do engenheiro encarregado de resolver o problema.
- b) A complexidade dos processos e fenómenos envolvidos no problema.
- c) A falta de tempo do engenheiro para amortizar o esforço inerente a uma abordagem mais profunda e inovadora do problema, em face da concorrência de outras vias mais rápidas e eficazes de resolução, dadas as condicionantes existentes.

A causa a), quando se dá, justifica que o facto de um engenheiro dizer que não precisa, ou precisa pouco de matemática na sua profissão não constitui razão suficiente para concluir que a matemática não lhe pudesse ser realmente útil, pois “Quem não sabe é como quem não vê.”.

A causa b) e, em certa medida, também a c), trazem à colação a necessidade, aliás frequente, que o engenheiro tem de se basear em modelos simplificados dos fenómenos, por exemplo, modelos integrais em vez de diferenciais, ou mesmo de adoptar estratégias de abordagem empíricas, guiado pelo simples propósito de viabilizar a resolução do problema que tem entre mãos. Não há dúvida que uns e outras requerem linguagem e ferramentas matemáticas mais modestas que as que se necessitam em abordagens mais profundas.

A causa c) dá oportunidade para recordar que em engenharia existem quase sempre múltiplas vias de resolução de um problema, e até várias soluções admissíveis para este, requerendo, as distintas vias ou soluções, empregos de matemática em graus muito diversos. De facto, em certos casos, é mesmo possível resolver satisfatoriamente um problema de engenharia com base numa compreensão puramente qualitativa dos fenómenos físicos envolvidos. Na verdade, a relação entre a investigação científica, mesmo no âmbito das Ciências da Engenharia, e o desenvolvimento tecnológico está longe de ser óbvia, simples ou directa.

Por último, a segunda e a terceira considerações que se fazem acima explicam que haja bons profissionais de engenharia, na indústria e na investigação, utilizando a matemática no seu dia-a-dia profissional, de formas e em proporções muito diversas.

Casos Práticos de Boa Aplicação da Matemática em Engenharia

Apresentam-se abaixo três casos práticos protagonizados por engenheiros mecânicos portugueses, que ilustram boas aplicações da matemática na resolução de problemas de engenharia. São problemas pequenos mas fora da rotina e não triviais, que desafiaram em maior ou menor grau a criatividade e a capacidade de análise dos seus protagonistas, tidas em atenção as suas formação e experiência prévias, bem como o “saber fazer” de engenharia das instituições onde trabalhavam.

§ **Exemplo 4:** Trata-se do problema da afinação óptima do sistema de direcção do eixo das rodas motrizes de um veículo automóvel especial, com vista a minimizar as perdas por atrito em curva. “A priori” consideraram-se três vias alternativas de resolução do problema, com complexidade matemática e qualidade da solução alcançada crescentes, a saber: uma primeira via, puramente empírica, de tentativa, teste e correcção; uma segunda via, em que a função-objectivo a otimizar é deduzida teoricamente mas a determinação dos valores dos parâmetros do sistema correspondentes a uma solução quase óptima considerada satisfatória é feita por emprego de uma heurística empírica; e, finalmente, uma terceira via, con-

duzindo à solução ótima propriamente dita. A via seguida na realidade, por proporcionar o melhor compromisso custo/qualidade, foi a segunda. A primeira via foi empregue a título preliminar mas acabou por ser afastada por se revelar muito morosa e produzir soluções apenas sofríveis, e a terceira nem sequer chegou a ser tentada. Do ponto de vista matemático o problema pode ser resolvido (segunda via) com ferramentas de álgebra e geometria vectorial 3D. ■

§ **Exemplo 5:** Trata-se, neste caso, do problema do re-alinhamento do veio de transmissão de potência, do motor para o hélice, de uma fragata da marinha de guerra. Esta operação faz parte da rotina de manutenção do navio, pois as chumaceiras de apoio do veio apoiam-se, por sua vez, na estrutura do casco do navio, a qual, com os embates a que este está sujeito em alto mar e nas manobras de acostagem, após algum tempo, sofre alterações de forma que desalinham os eixos do hélice e do motor, nos extremos opostos do veio. O veio tem um comprimento total de algumas dezenas de metros, sendo composto por secções ligadas por flanges rígidas, e está apoiado em numerosas chumaceiras. O processo de re-alinhamento é feito por ajuste da altura de cada uma das chumaceiras, podendo o veio composto ser tratado como um corpo sólido único ao longo de todo o seu comprimento. O objectivo visado consiste em conferir ao eixo do veio (linha elástica) uma forma curvilínea que assegure uma distribuição de tensões o mais baixa e uniforme possível ao longo do seu comprimento, evitando, nomeadamente, pontos de elevada curvatura. O processo tradicional de re-alinhamento era um processo puramente empírico, de tentativa e erro, que se baseava no ajuste sequencial independente da altura de cada chumaceira. Quando a distância entre eixos não era muito pequena, o processo tornava-se moroso e o resultado final alcançado tinha qualidade variável e, sobretudo, imprevisível. Nestas circunstâncias, a intervenção do engenheiro visou a concepção de um procedimento mais rápido e eficiente, capaz de proporcionar uma boa solução à primeira tentativa. Mate-

maticamente, o problema conduz a um sistema de equações lineares em ordem aos deslocamentos das chumaceiras. ■

32

§ **Exemplo 6:** O terceiro caso consiste na equilibragem dinâmica do rotor de uma turbina de um navio da marinha de guerra. O caso passou-se há cerca de 50 anos atrás, altura em que os currícula nacionais dos cursos de licenciatura em engenharia mecânica não compreendiam cadeiras especificamente na área de vibrações de estruturas, sendo esta matéria abordada sumariamente em cadeiras gerais de Física, não ultrapassando o estudo dos sistemas vibrantes com um único grau de liberdade. Ora, neste caso, o banco de equilibragem do rotor constitui um sistema com dois graus de liberdade de vibração, cuja análise dinâmica conduz a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias. ■

Naturalmente, a sequência de casos práticos poderia prolongar-se, abrangendo situações progressivamente mais complexas, até chegar a projectos de investigação e desenvolvimento em qualquer área da engenharia, podendo envolver o recurso a teorias e técnicas matemáticas bastante abstractas e especializadas, e justificando, eventualmente, o concurso de engenheiros, físicos e matemáticos, em equipas interdisciplinares de maior ou menor dimensão. Em todo o caso, mesmo tratando-se de um trabalho de investigação em engenharia, há que ter em conta que este pode envolver um balanço variável de esforço, ferramentas e técnicas de índole experimental, numérica e teórico-analítica, em função da natureza do problema de que se trate, dos meios técnicos disponíveis e, sobretudo, da vocação dos investigadores da equipa de trabalho. Por conseguinte, mesmo neste caso a utilização da matemática é muito variável.

2. FORMAÇÃO MATEMÁTICA MINISTRADA EM CURSOS DE ENGENHARIA

Tendo em linha de conta as considerações norteadoras feitas no Capítulo 1, sobre o papel da formação matemática em engenharia, analisam-se neste capítulo as cadeiras de matemática classicamente incluídas num curso de engenharia, agrupadas em três grandes blocos formativos, denominados, respectivamente, de formação matemática fundamental, matemática aplicada e mista matemática/engenharia. Opta-se por tomar como ponto de partida os cursos de licenciatura “pré-Bolonha”, e tecer depois algumas considerações relativas aos actuais cursos de licenciatura e mestrado, quando estes registam alterações dignas de nota relativamente aos primeiros. Convencionalmente, atribui-se a cada cadeira uma unidade lectiva semestral. Para cada bloco, o conjunto de itens analisados compreende: os objectivos formativos conjuntos e a composição; os conteúdos genéricos dos programas das cadeiras e a sua justificação; a localização típica ou óptima das cadeiras no curriculum; e alguns aspectos relativos às formas de exposição das matérias e de avaliação dos conhecimentos. O Bloco 1, por ser de formação fundamental, é o que justifica a análise mais extensa e profunda. Pelo contrário, a análise do Bloco 3 é bastante sucinta.

2.1. As Cadeiras de Formação Matemática Fundamental (Bloco 1)

2.1.1. Composição e Objectivos Formativos Globais

Integram-se no Bloco 1 quatro cadeiras de Análise Matemática (AM I a IV) e uma de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA). Normalmente, estas cadeiras são leccionadas por docentes do Departamento de Matemática da escola.

Este bloco é qualificado de formação matemática fundamental para um engenheiro, por englobar cadeiras com objectivos formativos muito fundamentais e abrangentes, que as constituem, desde logo, como base formativa das próprias cadeiras de matemática dos Blocos 2 e 3. Além disso, estas cadeiras são também consideradas fundamentais por terem um pleno potencial para prestar o tríplice papel formativo da matemática em engenharia (cf. Secções 1.1-3), na medida em que: formam um conjunto com extensão e unidade suficientes para permitir uma exposição relativamente profunda e rigorosa das teorias matemáticas em causa (papel de escola de pensamento); introduzem, por assim dizer, o alfabeto e a gramática básicos da linguagem matemática (papel de linguagem); e proporcionam uma importante e variada panóplia de ferramentas básicas de cálculo (papel de ferramenta de cálculo).

2.1.2. *Análise dos Programas das Cadeiras*

Panorâmica Conjunta

Pode obter-se uma visão panorâmica conjunta e substancialmente completa dos programas das cadeiras deste bloco no esquema do Quadro 1, o qual é discriminado com mais detalhe no Apêndice 1. Em sentido estrito, há que referir que, para além das cadeiras de matemática do Bloco 1, também as cadeiras de Física (Mecânicas Geral e Aplicada, Electromagnetismo, Termodinâmica Geral) proporcionam contributos não despidiendos ao projecto formativo unitário subjacente a este esquema.

Quadro 1 — Visão panorâmica conjunta dos programas das cadeiras do Bloco 1.

ANÁLISE VECTORIAL (REAL)		Tópicos Autónomos Afins	
		Integrados	Não Integrados
1	Álgebra Vectorial		• Álgebra Complexa
2	Funções ou Transformações Lineares	• Matrizes • Determinantes • Formas Quadráticas	
3	Operadores Diferenciais	• Geometria Analítica	
4	Operadores Integrais	• Vectorial	

No esquema do Quadro 1 a unidade é proporcionada pela super-teoria da Análise Vectorial (Real), entendida como teoria das funções entre espaços vectoriais reais, subdividida em quatro capítulos cujos conteúdos essenciais se passam a apresentar.

No primeiro capítulo, Álgebra Vectorial, introduzem-se os elementos básicos da teoria, isto é, o conceito de vector e as operações algébricas básicas a que este pode ser sujeito. Esta introdução é feita segundo três perspectivas mutuamente consistentes mas progressivamente mais abstractas e gerais, nas quais o objecto “vector” é identificado, respectivamente, com um segmento de recta orientado (teoria geométrica), com uma sequência de números reais (teoria analítica) e com um elemento de uma certa estrutura algébrica (teoria axiomática). Neste contexto, os elementos de Álgebra Complexa que é usual dar na cadeira de Álgebra Linear e Geometria Analítica constituem como que um tópico autónomo afim mas desintegrado deste capítulo da super-teoria.

O segundo capítulo, Funções ou Transformações Lineares, aborda o tipo mais simples de funções que se podem estabelecer entre espaços vectoriais: as funções que gozam da propriedade linear. Esta matéria é substancialmente tratada na cadeira de Álgebra Linear e Geometria Analítica, onde o termo “transformação linear” se emprega em vez do de “função linear”, mais comum em Análise. Uma das propriedades notáveis das funções lineares é o facto de admitirem uma representação matricial uma vez escolhidas as bases de trabalho nos respectivos espaços objecto e imagem. Deste modo, ficam harmonicamente integradas neste capítulo, a Teoria das Matrizes e, associadas a esta, as Teorias dos Determinantes e das Formas Quadráticas, as quais prestam contributos relevantes nos capítulos subsequentes.

O terceiro capítulo, Operadores Diferenciais, começa por generalizar o conceito de função introduzido no capítulo anterior, passando a incluir também funções não lineares. Neste contexto, é interessante recordar as designações correntes em Física e Engenharia, de “campo escalar” e “campo vectorial” para uma função vectorial com um espaço-objecto multi-dimensional, normalmente um plano ou o espaço físico tridimensional, e um espaço-imagem, respectivamente, uni- e multi-dimensional. Um “campo” é utilizado para descrever a distribuição espacial de uma

propriedade física representada pela variável dependente do campo. Retomando o fio da exposição, o tratamento generalizado das funções vectoriais dá lugar a uma variedade de operadores de derivação, que podem ser unidimensionais (derivadas simples, parciais e direccionais), totais (gradiente, matriz jacobiana) ou especiais (divergência, rotacional, laplaciano...). O tópico de Geometria Analítica Vectorial, tratando linhas e superfícies no espaço, integra-se perfeitamente neste capítulo embora também requeira e preste contributos do e ao capítulo seguinte.

Finalmente, o quarto capítulo, Operadores Integrais, introduz e explora as propriedades de um variado leque de operadores integrais actuando sobre funções vectoriais, os quais se podem enquadrar em duas grandes classes, a saber: a classe dos integrais múltiplos (simples, duplos, triplos...) e a classe dos integrais paramétricos (de linha, de superfície, volúnicos...). Por sua vez, o tratamento dos integrais paramétricos requer conhecimentos de Geometria Analítica Vectorial, por exemplo, para representar parametricamente linhas e superfícies encurvadas do espaço.

As Cadeiras de Análise Matemática I e II (AM I e II)

Na exposição global da super-teoria de Análise Vectorial acima apresentada, as cadeiras de Análise Matemática I e II (AM I e II), em continuidade com a formação matemática do Ensino Secundário, constituem um primeiro passo, na medida em que tratam da sua restrição a espaços vectoriais unidimensionais: a Análise das Funções Reais de Variável Real. Uma sub-teoria notável, que serve de base ao desenvolvimento da teoria mais geral das funções de variável real, é a Teoria das Sucessões, que não são mais que funções reais de variável natural. Nesta teoria, por sua vez, se apoia a Teoria das Séries numéricas, que dá depois lugar, na teoria geral, à Teoria das Séries de Funções.

Um aspecto relevante do programa conjunto de AM I e II consiste no facto de, no seu nível restrito de abordagem, este representar um corte transversal completo da super-teoria, que abrange os seus capítulos principais à excepção do segundo, Funções ou Transformações Lineares, para o qual não tem potencial para dar contribuições significativas. Assim, no respeitante ao primeiro capítulo, assenta as

bases da Álgebra Vectorial ao tratar a Teoria dos Números Reais ¹, e, no tocante aos terceiro e quarto capítulos, apresenta um quadro teórico fundante e relativamente completo dos operadores de derivação e integração simples.

Por outro lado, a Análise das Funções Reais de Variável Real é, no quadro das cadeiras do Bloco I e “a fortiori” de todo o curso, a teoria matemática que é tratada com maior extensão, profundidade e rigor, o que confere às cadeiras de AM I e II um importante papel no campo da formação do pensamento de um engenheiro (cf. Secção 1.1).

Finalmente, nesta Análise unidimensional, a Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias ocupa um lugar de destaque na formação matemática de um engenheiro, pelas suas numerosas e importantes aplicações. Esta matéria também pode ser dada nas cadeiras de Análise Matemática III ou IV, seja por falta de tempo lectivo para a cobrir em AM II, seja por que nela se pretende tirar partido de conceitos e ferramentas de Análise multi-dimensional.

A Cadeira de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA)

O programa da cadeira de Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA) cobre substancialmente os dois primeiros capítulos da super-teoria de Análise Vectorial (Álgebra Vectorial e Transformações Lineares), com os seus tópicos afins (Matrizes, Determinantes, Formas Quadráticas e Álgebra Complexa), e, ainda, algumas partes do tópico de Geometria Analítica Vectorial (por exemplo: sistemas de coordenadas rectilíneas, rectas, planos e superfícies quádricas), anexo aos terceiro e quarto capítulos.

Nomeadamente, é nesta cadeira que se proporciona a perspectiva mais rica e geral do conceito de vector, com realce para a poderosa abordagem axiomática da Teoria dos Espaços Vectoriais, cujas potencialidades na formação matemática aplicada de um engenheiro são pouco aproveitadas nos cursos de engenharia, possivelmente pelo carácter relativamente abstracto desta teoria.

¹ Esta teoria admite vários níveis de abordagem, preferindo aqui deixar-se em aberto a questão de qual o nível a adoptar em cada caso (curso e escola de engenharia).

Dentro do plano formativo conjunto do Bloco 1, pode considerar-se que a ALGA desempenha o papel de ponte entre as AM I e II, por um lado, e as AM III e IV, por outro, na medida em que dá as bases necessárias para operar a generalização da Análise unidimensional (AM I e II) para a Análise multi-dimensional (AM III e IV).

As Cadeiras de Análise Matemática III e IV (AM III e IV)

Como se dá a entender acima, o coroamento da super-teoria de Análise Vectorial é feito nas cadeiras de Análise Matemática III e IV (AM III e IV), nas quais a Análise das Funções Reais de Variável Real, dada em AM I e II, é generalizada a quaisquer funções (não apenas funções lineares, como se considera em ALGA, na Teoria das Transformações Lineares) entre espaços vectoriais com dimensões arbitrárias.

Deste modo, comparativamente com o que sucede em AM I e II, e em ALGA, a teoria matemática abordada em AM III e IV é objectivamente mais complexa, o que, por sua vez, justifica um tratamento menos rigoroso. Abaixo dão-se alguns exemplos que ilustram este aumento de complexidade.

§ **Exemplo 7:** É agora mais difícil fazer apelo à intuição geométrica, sendo necessário, por exemplo, recorrer a formas mais variadas, complexas e parcelares de representação gráfica de funções (cortes unidimensionais, representações 3D em perspectiva, linhas de nível, linhas de corrente...). ■

§ **Exemplo 8:** Os tipos de descontinuidade que uma função pode apresentar são muito mais variados, sendo, alguns deles, difíceis de visualizar e perceber, como se ilustra no Apêndice 2 para alguns casos práticos de campos escalares bidimensionais. Naturalmente, para valores crescentes das dimensões dos espaços objecto e imagem da função podem dar-se situações ainda mais complexas. ■

§ **Exemplo 9:** Em vez de um único operador de derivada de 1ª ordem, a derivada simples, surgem agora diversos operadores de derivada: direcionais, de que as derivadas parciais constituem um caso particular; total, que é aquele que corresponde à generalização mais cabal do operador de derivada simples, compendiando, por assim dizer, toda a informação diferencial de 1ª ordem da função; e especializados, como sejam, a divergência, $\text{div } \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}$ com $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e o rotacional, $\text{rot } \mathbf{f} \equiv \nabla \times \mathbf{f}$ com $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. ■

§ **Exemplo 10:** O operador de derivada total de 1ª ordem é agora mais complexo, como se passa a explicar. Considerem-se as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{f} \equiv (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciáveis nas vizinhanças, respectivamente, dos pontos x_0 e $\mathbf{x}_0 \equiv (x_{10}, \dots, x_{n0})$, dos seus domínios, e dois pontos arbitrários destas vizinhanças: $x = x_0 + h$, em \mathbb{R} , e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, em \mathbb{R}^n , com $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{h} \equiv (h_1, \dots, h_n)$.

A derivada de f no ponto x_0 , $f'(x_0)$, pode ser vista simplesmente como o coeficiente da função linear em h ,

$$g(h) = f'(x_0) \cdot h \quad (11)$$

com a qual a diferença $[f(x) - f(x_0)]$ se confunde para h suficientemente pequeno, e que também recebe as seguintes designações:

$$g(h) \equiv d_h f(x_0) \equiv (\text{diferencial de } f \text{ em } x_0, \text{ segundo } h) \quad (12a,b)$$

Já a derivada (total) de \mathbf{f} em \mathbf{x}_0 , $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \equiv D_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}$, está associada à transformação linear que verifica a relação análoga às (11,12)

$$D_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{h}) = d_h \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \equiv (\text{diferencial de } \mathbf{f} \text{ em } \mathbf{x}_0, \text{ segundo } \mathbf{h}) \quad (13a,b)$$

a qual é representada eficientemente pela matriz ($m \times n$),

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0}, \text{ designada por "matriz jacobiana" e}$$

simbolizada por $J(\mathbf{f}, \mathbf{x}_0)$, conforme prescrito pela Teoria das Transformações Lineares dada em ALGA. Adoptando esta representação, a identidade (13a) escreve-se, em notação matricial,

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{x}_0) \times \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix} = \mathbf{d}_h \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad (14)$$

passando o vector $\mathbf{d}_h \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ a ser visto como uma matriz ($m \times 1$). Naturalmente, no caso particular em que \mathbf{f} é um campo escalar, $f \equiv \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a matriz jacobiana ($1 \times n$) também pode ser vista como um vector, designado por “vector gradiente” e representado por $\nabla f \equiv J(\mathbf{f}, \mathbf{x}_0)$. ■

§ **Exemplo 11:** Um único operador de integração simples dá agora lugar a uma variedade de operadores integrais: múltiplos (duplos, triplos...), de que o integral simples é um caso particular, e paramétricos (de linha, de superfície...). ■

2.1.3. Localizações das Cadeiras no Curso

A análise dos programas das cadeiras deste bloco feita na Secção 2.1.2 mostra que as localizações das cadeiras no curso que se apresentam no Quadro 2 são óptimas, justificando a opção normal que se fazia até há pouco tempo, a este respeito, nos cursos clássicos de engenharia (licenciaturas “pré-Bolonha”). Os actuais cursos de licenciatura devem, pois, respeitar, no essencial, a disposição relativa das correspondentes cadeiras.

Quadro 2 — Localizações das cadeiras do Bloco 1 num curso clássico de engenharia (“pré-Bolonha”), perfeitamente justificadas pela análise dos programas das cadeiras conduzida na Secção 2.1.2.

1º Ano		2º Ano	
1º Semestre	2º Semestre	1º Semestre	2º Semestre
AM I	AM II	AM III	AM IV
	ALGA		

2.1.4. Justificação Conjunta do Bloco 1

À luz do que se refere no Capítulo 1 e nas Secções 2.1.1-3, é claro que o Bloco 1 de cadeiras de matemática se justifica plenamente num curriculum de engenharia, mantendo substancialmente os programas e as localizações tradicionais destas cadeiras, pelo notável contributo que presta na formação de um engenheiro, na tríplice vertente de rigor de pensamento, de linguagem e de ferramenta de cálculo. Assim, por exemplo, como linguagem, a super-teoria da Análise Vectorial constitui, por si só, um património “linguístico” extremamente útil em engenharia, para além de constituir também um primeiro passo necessário para a aprendizagem de muitas outras “línguas” e “dialectos” matemáticos mais poderosos ou especializados. No campo das ferramentas de cálculo analítico, a Análise Vectorial proporciona a aprendizagem de úteis técnicas, como as seguintes: cálculo de limites de sucessões e da soma de séries numéricas (convergentes), cálculo de variados operadores diferenciais e resolução de equações diferenciais ordinárias, cálculo matricial e cálculo de diversos operadores integrais.

Pode-se mesmo afirmar que qualquer redução substancial do projecto formativo subjacente a este bloco de cadeiras, limitaria, proporcionalmente, a plena apreensão das matérias leccionadas em muitas cadeiras de engenharia, tanto fundamentais como aplicadas. A reestruturação dos cursos de engenharia decorrente do Processo de Bolonha conduziu, em muitos casos, à redução do número de disciplinas semestrais de Análise, de quatro para três. Na linha do que se acaba de referir, tal redução parece-nos legítima desde que se garantam duas condições, a saber: i) que cada uma destas três disciplinas tenha 7.5 ECTS (bom) ou, então, duas delas tenham 7.5

ECTS e a outra 6 ECTS (suficiente); e ii) que não se deixe de tratar (no conjunto das disciplinas do Bloco 1) nenhum ponto do programa do Apêndice 1.

42

Mais ainda, sem prejuízo do seu papel insubstituível e prioritário, a super-teoria de Análise Vectorial que constitui a síntese formativa do Bloco 1, nem sequer esgota os interesses de um engenheiro nesta área de formação matemática ². É isto que se ilustra nos exemplos que se dão abaixo, sem que com eles se pretenda fazer a apologia indiscriminada da inclusão das respectivas matérias no curriculum, seja em cadeiras já existentes, por substituição ou acrescento de matéria nos seus programas, seja pela introdução de novas cadeiras.

§ **Exemplo 12:** Introdução à Teoria (analítica) das Equações às Derivadas Parciais. Cadeiras beneficiárias: Mecânica Estrutural, Transmissão de Calor, Mecânica dos Fluidos, etc. ■

§ **Exemplo 13:** Análise de Fourier. Cadeiras beneficiárias: Vibrações, Controlo Automático de Sistemas, Mecânica Estrutural, Métodos de Medida, etc. ■

§ **Exemplo 14:** Análise Tensorial. Cadeiras beneficiárias: Mecânica Aplicada, Elasticidade e Plasticidade, Resistência de Materiais, Mecânica dos Fluidos, etc. ■

§ **Exemplo 15:** Análise Complexa. Cadeiras beneficiárias: Mecânica dos Fluidos, Aerodinâmica, Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada, etc.

§ **Exemplo 16:** Teoria dos Torsores. Cadeiras beneficiárias: Mecânica Aplicada, Resistência de Materiais, etc. ■

§ **Exemplo 17:** Análise Funcional ou Variacional. Cadeiras beneficiárias: Mecânica Aplicada, Mecânica Estrutural, etc. ■

² Outras áreas de formação matemática são contempladas nos Blocos 2 e 3 de cadeiras de matemática do curso, nas Secções 2.2,3.

2.1.5. Formas de Exposição e de Avaliação

Como já se referiu reiteradamente acima, o conjunto de cadeiras de formação matemática deste bloco tem, objectivamente, potencial para visar os três grandes papéis ou objectivos formativos expostos nas Secções 1.1-3. Contudo, para que esta potencialidade se concretize efectivamente, é necessário que as formas de exposição das matérias e de avaliação dos conhecimentos respeitem certos requisitos, alguns dos quais se passam em revista nesta secção. Neste contexto, em relação à avaliação, não é tanto a sua dimensão de aferição que interessa, como a sua dimensão formativa, na medida em que o estilo dos enunciados das provas e os seus critérios de correcção influenciam o tipo de estudo dos estudantes.

O Papel do Rigor Formal

Para que a matemática seja para um engenheiro “escola de pensamento”, é necessário que aquela lhe seja apresentada com suficiente preocupação pelo rigor formal. No âmbito das cadeiras do Bloco 1, as teorias matemáticas que se prestam a uma apresentação mais rigorosa são, provavelmente, a Análise das Funções Reais de Variável Real, em AM I e II, e o grupo de teorias dos Espaços Lineares, das Matrizes, dos Determinantes e das Transformações Lineares, em ALGA.

Sob este aspecto, especificamente a respeito das demonstrações matemáticas, as principais questões que se colocam são as seguintes: qual o seu papel formativo, qual a pedagogia da sua exposição, e que atenção e espaço lhes devem ser reservados na avaliação?

Respondendo à primeira questão, podem-se atribuir às demonstrações os três papéis formativos que se passam a expor, por ordem decrescente de importância para a formação de um engenheiro. Primeiro: proporcionar uma compreensão simples e profunda da tese em causa, nomeadamente: da sua verdade, da sua não trivialidade, do seu interesse e da razão de ser das suas restrições de aplicação. Segundo: ajudar a perceber a lógica e a consistência internas do corpo teórico em que a tese se integra, evidenciando a sua ligação com os axiomas ou outros teore-

mas já provados. Terceiro: treinar no raciocínio dedutivo formal, em particular, na utilização de recursos e técnicas demonstrativas de aplicação mais geral.

44

Passando a responder à segunda questão, é agora evidente que a pedagogia de apresentação de uma demonstração, oralmente ou por escrito, é tanto melhor quanto mais plena e ordenadamente conseguir desempenhar o tríplice papel formativo que se enuncia acima, evitando, nomeadamente, que “as árvores ocultem a floresta”. Neste sentido, é importante realçar a “ideia-mestra” da demonstração, que é sempre uma “ideia luminosa”, bem como o seu “esqueleto lógico”, afastando a “folhagem” mais ou menos densa de aspectos técnicos secundários. Por contraste, são dignas de reflexão, pelo seu carácter verdadeiramente paradoxal, as demonstrações que não esclarecem os estudantes ou, pior ainda, mais os confundem. Por outro lado, há que reconhecer que pode ser preferível não apresentar certas demonstrações, por serem excessivamente complexas, extensas, particulares ou artificiosas, pelo menos sempre que não se esteja disposto a empregar os “antídotos pedagógicos” necessários para lhes conferir valor formativo. Noutros casos, há vantagem em que demonstrações cabais e rigorosas sejam precedidas ou mesmo substituídas por demonstrações parciais ou heurísticas. Nestes casos, porém, é importante que se chame a atenção e, na medida do possível, se expliquem as limitações da demonstração heurística, para não correr o risco de transmitir uma falsa noção de rigor. A título de resumo prático das considerações anteriores, comparam-se no Apêndice 3 três exposições da demonstração clássica do Teorema da Derivada da Função Composta em Análise de Funções Reais de Variável Real, que aparecem em três livros de texto que já têm sido utilizados em cursos de engenharia no nosso país, como bibliografia principal ou de apoio a AM I e II.

Como resposta à terceira questão, sobre se vale ou não a pena, e como avaliar a capacidade dos estudantes de engenharia para construir demonstrações matemáticas rigorosas, parece que o ideal seria fazer essa avaliação mas com sensatez, peso e medida, o que, por outro lado, se reconhece ser difícil de definir e custoso de levar à prática. Em todo o caso, não sabendo ou não estando dispostos a investir o tempo necessário para o fazer proveitosamente, é preferível deixar cair este aspecto da avaliação. Concretamente, não se vislumbra que seja proveitosa para a formação

matemática de um engenheiro a capacidade para reproduzir uma demonstração dada expressamente nas aulas ou na bibliografia da cadeira. Por outro lado, o abandono das demonstrações na avaliação é também uma opção “a priori” legítima embora não chegue, certamente, a ser de excelência.

Uma Simbiose Formativa da Matemática Com a Física e a Engenharia

O objectivo de ensinar um estudante de engenharia a utilizar a matemática como linguagem cria a oportunidade para uma interessante e profunda simbiose entre a sua formação matemática, por um lado, e a sua formação física e de engenharia, por outro.

Em síntese, tal simbiose consiste em tirar partido de conhecimentos prévios do estudante versando matérias das ciências experimentais (Física, Química e alguns rudimentos de Ciências da Engenharia), como contextos concretos para a utilização incipiente da matemática como “linguagem”, de forma coordenada com a aprendizagem da própria “linguagem matemática”, nas cadeiras do Bloco 1. Os conhecimentos prévios a que acima se alude podem vir do Ensino Secundário ou de cadeiras do 1º e 2º anos do próprio curso de engenharia (Física, Química, Programação de Computadores, Desenho Técnico, Resistência de Materiais, Electrónica, Elasticidade e Plasticidade...). Sob este aspecto, a própria Geometria pode ser vista como um capítulo da Física, visto que os seus conceitos e teoremas admitem uma “materialização” intuitiva. Nos parágrafos seguintes explica-se, sob uma tríplice perspectiva, a forma como esta simbiose se pode processar e os benefícios que dela se podem retirar.

Na primeira perspectiva considera-se o potencial que esta simbiose tem para proporcionar ao estudante de engenharia uma assimilação mais profunda dos próprios conhecimentos matemáticos, na medida em que, ao vinculá-los a realidades físicas concretas, baixa o seu nível de abstracção e permite o concurso da imaginação, a qual, por sua vez, é uma importante fonte de intuição e criatividade. Os exemplos seguintes ilustram possíveis “leituras físicas” de conceitos e teses matemáticas, e os efeitos que daí resultam.

§ **Exemplo 18:** Seja dada uma função diferenciável, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)$. A sua derivada de 1ª ordem, calculada no ponto x , admite a seguinte “interpretação física generalizada”:

$$f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \left(\begin{array}{l} \text{taxa local ou instantânea de variação} \\ \text{da grandeza } y \text{ com a grandeza } x \end{array} \right) \quad (15)$$

a qual, por sua vez, engloba uma grande variedade de interpretações físicas mais específicas, como se ilustra no Quadro 3. ■

Quadro 3 — (Exemplo 18). Concretizações possíveis da relação (15). Legenda: t ≡tempo, s ≡(abscissa curvilínea de um ponto móvel sobre a sua linha de trajectória), l ≡(distância percorrida numa dada direcção sobre uma carta topográfica), h ≡(altura do terreno num ponto de uma carta topográfica).

Caso	Grandeza x	Grandeza y	Taxa (dy/dx)
1	t [s]	s [m]	velocidade, v [m/s]
2	t [s]	v [m/s]	aceleração, a [m/s ²]
3	t [mês]	índice de preços [pontos]	inflação mensal [pontos/mês]
4	l [m]	h [m]	declive topográfico direccionado [m/m ou %]

Contudo, na apresentação de possíveis interpretações físicas do conceito de derivada a um estudante de engenharia (Exemplo 18) é necessário cuidar, não só que este aprenda correcta e distintamente os conceitos matemáticos e físicos individualmente considerados, mas também que perceba como se estabelece a correspondência entre estes conceitos no contexto físico em causa. Assim, por exemplo, no Caso 1 do Quadro 3, pode ser importante explicar que as unidades físicas, [s], em que está expressa a variável x , correspondente à grandeza física tempo, t , não implicam que a unidade mínima ou resolução de medida do relógio utilizado seja 1 s. Na verdade, se assim fosse, a função que descreve a posição da partícula sobre a linha da sua trajectória, $s=s(t)$, deixaria de ser uma função de variável real para passar a ser uma sucessão, à qual o operador de derivação, d/dt , nem sequer se poderia aplicar. Por outro lado, como qualquer processo real de

medida tem uma resolução finita, também poderia ser conveniente explicar que se deve conceber um relógio “ideal”, que mede o tempo t em contínuo, como o caso-limite de uma sucessão de relógios “reais” com unidade mínima de medida, Δt , progressivamente menor. Uma explicação alternativa, mais profunda e geral que a anterior mas também mais complexa, seria considerar um relógio “real” qualquer, com unidade de medida, Δt , finita, e substituir a sucessão $s=s_{\Delta t}(i \cdot \Delta t)$, com $i \in \mathbb{N}_0$, resultante das medições experimentais, pela função-prolongamento $s=s(t)$, com $t \in \mathbb{R}^+$, formada, por exemplo, por uma sequência de splines de quarto grau definida sobre a partição de intervalos de tempo $[(i-1) \cdot \Delta t, i \cdot \Delta t]$, $i \in \mathbb{N}$, a qual, por um lado, admite as definições matematicamente rigorosas de velocidade, $v(t)$, e aceleração, $a(t)$, instantâneas, para todo o $t \in \mathbb{R}^+$, do modo que se indica nos Casos 1 e 2 do Quadro 3, e, por outro lado, é empiricamente indiscernível da realidade.

§ **Exemplo 19:** A solução do seguinte sistema de equações lineares em $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = a_{13} \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = a_{23} \end{cases} \quad (16 \text{ a,b})$$

admite uma interpretação geométrica simples, estabelecendo, num plano Π qualquer do espaço, um sistema de coordenadas Cartesianas rectangulares, OXY . Neste caso, a solução do sistema corresponde às coordenadas do ponto I , de intersecção das duas rectas do plano Π com equações (16a,b), ρ_1 e ρ_2 . Por sua vez, esta interpretação vem tornar intuitivas várias propriedades algébricas (por exemplo, existência e unicidade de solução) e numéricas (por exemplo, tipo de condicionamento) do sistema (16). Considere-se, a título ilustrativo, esta última propriedade. Como se mostra geometricamente na Figura 3, quando as rectas ρ_1 e ρ_2 são aproximadamente paralelas, a posição do ponto I torna-se muito sensível a variações da posição relativa das rectas. Concretamente, na figura representa-se um pequeno deslocamento de translação aplicado à recta ρ_2 , $\rho_2 \rightarrow \rho'_2$.

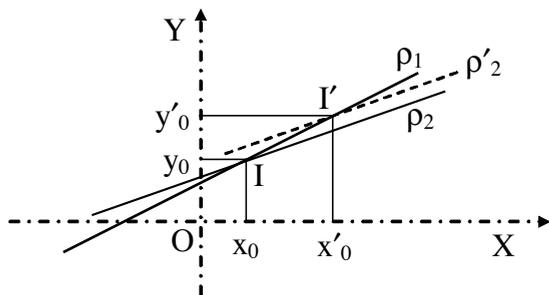


Figura 3 — (Exemplo 19) Descoberta, por via geométrica, da propriedade numérica de “mau condicionamento” de um sistema de equações lineares.

Procuramos, agora, “retroverter” esta descoberta para as “linguagens analítica e numérica”. Analiticamente, uma “pequena variação na posição relativa das rectas” traduz-se por uma “pequena alteração nos valores de alguns dos coeficientes, a_{ij} , do sistema (16)”. Num contexto numérico, tal alteração pode ser devida, por exemplo, a erros de arredondamento no cálculo destes coeficientes. Por outro lado, a condição geométrica de “paralelismo aproximado das rectas ρ_1 e ρ_2 ” traduz-se, analiticamente, pela “igualdade aproximada dos seus coeficientes de declive”, isto é, pela condição

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \approx \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad (17)$$

ou, empregando “linguagem” da Teoria das Matrizes e dos Determinantes,

$$|A| \approx 0 \quad (18)$$

onde $A(2 \times 2) \equiv [a_{ij}]$ designa a matriz dos coeficientes do sistema (16). Por esta via, acaba de se descobrir uma importante propriedade numérica do sistema (16), imediatamente generalizável a um sistema linear com dimensão arbitrária, que se pode enunciar assim: “Quando a matriz $A \equiv [a_{ij}]$, dos coeficientes do sistema, verifica a condição (18), a solução do sistema torna-se extremamente sensível a quaisquer erros numéricos, de entrada ou outros, dizendo-se, então, que o sistema é mal condicionado”. ■

§ **Exemplo 20:** Neste exemplo explica-se como se pode construir um sistema de numeração em \mathbb{N}_0 (inteiros positivos com o zero incluído), empregando um simples carimbo numérico ou, mais genericamente, simbólico. Para começar, recorde-se que um “sistema de numeração” em \mathbb{N}_0 é um conjunto de regras ou algoritmo de representação escrita dos números de \mathbb{N}_0 , que cumpre os seguintes requisitos: (i) consegue representar qualquer número de \mathbb{N}_0 ; (ii) não é redundante nem ambíguo, isto é, gera uma representação única e exclusiva para cada número; e (iii) é simples e económico, isto é, permite construir a representação de qualquer número empregando apenas um pequeno conjunto ordenado de símbolos-base, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, e aplicando um algoritmo finito. Neste caso, o sistema de numeração diz-se “de base n ”.

Posto isto, neste contexto, designa-se por “carimbo simbólico” um simples carimbo composto por várias rodas coaxiais iguais, justapostas axialmente e numeradas por ordem crescente da direita para a esquerda. O número de rodas do carimbo determina o máximo número inteiro que se pode representar, pelo que, para não violar o requisito (i), deve poder ser tão elevado quanto necessário. Cada roda tem marcados os n símbolos de S , ordenadamente, a toda a volta, de s_1 até s_n . Seleccionando um símbolo em cada roda, s_{i_1} na roda 1, s_{i_2} na roda 2, e assim por diante, embebendo o carimbo numa almofada de tinta e carimbando um papel, fica impressa neste uma sequência de símbolos que constitui a representação escrita de um número de \mathbb{N}_0 , seja a . A identificação deste número pode ser feita por aplicação de um algoritmo baseado nas duas regras abaixo.

R1 A representação do número $a \equiv$ “zero” é gerada seleccionando em todas as rodas do carimbo o símbolo s_1 . Para abreviar, esta representação escreve-se apenas

$$\text{"zero"} \equiv \overline{s_1} \quad (19)$$

R2 Suponha-se que no carimbo foi já seleccionada a representação de um número qualquer, a , na forma

$$a \equiv \overline{s_{i_m} s_{i_{m-1}} \dots s_{i_2} s_{i_1}} \quad (20)$$

na qual: $1 \leq i_j \leq n$, para $j=1, \dots, m-1$, mas $1 < i_m \leq n$; e, como em (19), os símbolos para a esquerda de s_{i_m} foram truncados pelo facto de serem todos iguais a s_1 . Neste caso, para obter a representação do número inteiro sucessor de a , $a^+ = \text{suc } a$, avança-se a primeira roda do carimbo de um símbolo, de s_{i_1} para s_{i_1+1} . Se $i_1+1 \leq n$, então, a representação de a^+ fica completa. Porém, se $i_1+1 > n$, considera-se que a primeira roda deu uma volta completa, devendo regressar ao símbolo s_1 . Além disso, a segunda roda é avançada de um símbolo, de s_{i_2} para s_{i_2+1} . Este procedimento é repetido as vezes que forem necessárias até se completar a representação de a^+ .

Quadro 4 – (Exemplo 20) Representação do número “quatro” nos sistemas de numeração: a – decimal corrente; b – ternário “ad-hoc”; e c – binário corrente.

<i>Roda N.º:</i>
“zero” \equiv
“um” \equiv
“dois” \equiv
“três” \equiv
“quatro” \equiv

<i>1</i>
0
1
2
3
4

a

<i>2</i>	<i>1</i>
–	A
–	B
–	C
B	A
B	B

b

<i>3</i>	<i>2</i>	<i>1</i>
–	–	0
–	–	1
–	1	0
–	1	1
1	0	0

c

Para ilustrar o emprego deste algoritmo, nos Quadros 4a,b,c constroem-se as representações do número “quatro” geradas por três “carimbos simbólicos” com os seguintes conjuntos de símbolos-base: $S_a = \{“0”, “1”, \dots, “8”, “9”\}$, correspondente ao sistema decimal usado correntemente; $S_b = \{“A”, “B”, “C”\}$, correspondente a um sistema ternário “ad-hoc”; e $S_c = \{“0”, “1”\}$, correspondente ao sistema binário usado em informática.

A imagem física do “carimbo simbólico”, para além de desmitificar em boa medida o conceito matemático de “sistema de numeração”, revela-se também um precioso auxiliar na descoberta e demonstração de vários teoremas da Aritmética Racional. ■

§ **Exemplo 21:** Considere-se o seguinte teorema de Fermat, dado normalmente em AM I: «Se a função $f(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, tem um extremo relativo (mínimo ou máximo) em x_0 , sendo aí diferenciável, então, tem-se, necessariamente, $f'(x_0)=0$ ». É usual facilitar a compreensão deste teorema recorrendo à sua interpretação geométrica num sistema Cartesiano, OXY, a qual é, aliás, perfeitamente satisfatória no contexto da simbiose que se tem estado a ilustrar. De seguida proporciona-se uma outra interpretação possível do teorema no âmbito da cinemática de uma partícula material. Nesta interpretação, a função f representa a posição da partícula ao longo do tempo, isto é, supondo que a partícula se move sobre o eixo OX, no instante t ela ocupa a posição $x=f(t)\equiv x(t)$. Admita-se, então, de acordo com as condições do teorema, que f tem um mínimo relativo com valor x_0 , no instante t_0 . Isto significa, “cinematicamente”, que, um pouco antes de t_0 , se observa a partícula a deslocar-se para a esquerda, reduzindo o valor da sua coordenada de posição, $x(t)$ (Figura 4a), até que, em $t=t_0$, esta atinge o seu valor mínimo, $x_0=f(t_0)$ (Figura 4b). Pouco tempo depois, vê-se a partícula a deslocar-se para a direita, fazendo aumentar o valor de $x(t)$ (Figura 4c). Neste contexto, o requisito de diferenciabilidade de $x(t)$ suficientemente próximo de t_0 , imposto pelo teorema, garante que, durante esta manobra, a partícula tem sempre uma velocidade instantânea, $v(t)\equiv(dx/dt)\equiv f'(t)$, bem definida e variando continuamente. Nestas circunstâncias, diz a intuição física que, para que a partícula atinja mas não passe para a esquerda do obstáculo situado na posição x_0 , é necessário que na fase de aproximação, para $t<t_0$, a partícula “trave”, isto é, que $|v(t)|$ seja decrescente com t , até ficar “parada” no instante em que atinge o obstáculo, isto é, que $v(t_0)\equiv f'(t_0)=0$,

como diz o Teorema de Fermat, e que volte depois a “acelerar” no sentido oposto quando $t > t_0$, para se afastar do obstáculo. De passagem, note-se que o embate ideal de uma bola de bilhar numa tabela, ambos considerados perfeitamente rígidos, não está nas condições de aplicação do teorema, implicando, do ponto de vista físico, acelerações infinitas. ■

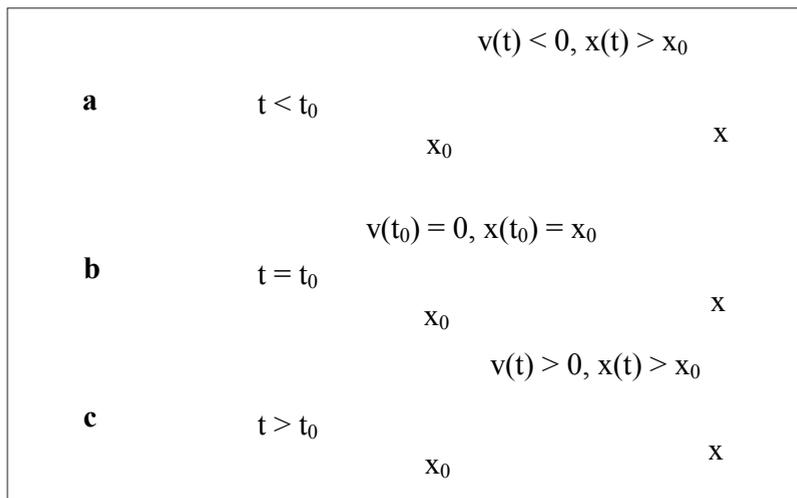


Figura 4 — (Exemplo 21) – a – A partícula aproxima-se da parede, na posição x_0 , vinda do lado direito. b – Instante de embate da partícula na parede, a que se refere o Teorema de Fermat. c – A partícula afasta-se da parede, para o lado direito.

A segunda perspectiva do proveito que se pode retirar da simbiose formativa Matemática/Física-Engenharia é a do benefício em que redundaria para o segundo elemento do par, como treino incipiente na utilização da “ linguagem matemática” em contextos reais com interesse para o futuro engenheiro. Sob este aspecto, porém, há que reconhecer que em cadeiras deste bloco formativo não se pode nem deve ir muito longe, tanto pela falta de tempo (não é esta a finalidade principal destas cadeiras) como pela falta de conhecimentos de física e, sobretudo, de engenharia, dos estudantes, dado que se encontram, desejavelmente, no 1º ou no 2º anos dos seus cursos.

A terceira perspectiva do benefício que pode resultar desta simbiose é a da motivação acrescida do estudante de engenharia para o estudo das teorias matemáticas que lhe são apresentadas nas cadeiras do Bloco 1. Os exemplos dados acima também servem para ilustrar este aspecto.

Para visar o primeiro (potenciar a assimilação dos conhecimentos matemáticos) e o terceiro (motivar o estudo da matemática) benefícios acima apresentados, as aulas teóricas parecem constituir o espaço pedagógico mais adequado, enquanto uma boa selecção de problemas que sejam depois alvo de discussão em aulas teórico-práticas e matéria de avaliação nas provas, pode perfeitamente servir para gerar o segundo (treinar no uso da linguagem matemática em contextos aplicados) e o terceiro benefícios.

O Adestramento nas Técnicas de Cálculo

O adestramento nas numerosas e variadas técnicas analíticas de cálculo que aparecem, por assim dizer, como subprodutos das teorias matemáticas estudadas nas cadeiras do Bloco 1 – desde o simples cálculo da soma de uma série numérica convergente, em AM I ou II, ou de um determinante, em ALGA, ao cálculo de um integral de superfície, em AM III ou IV –, é, dos três objectivos formativos que se consideram neste texto, aquele que é mais fácil de atingir e avaliar. Por isso mesmo, o principal perigo que encerra é o de abafar os outros dois objectivos formativos (ensinar a pensar com rigor e ensinar a usar a matemática como linguagem em variados contextos aplicados), mais nobres mas também mais árduos de alcançar. É porventura isto que sucede quando, nomeadamente, se exagera o número de técnicas similares abordadas (por exemplo, métodos de integração de equações diferenciais ordinárias), ou se dá uma importância desproporcionada a técnicas muito artificiosas, particulares ou pouco utilizadas (por exemplo, não tendo em conta a existência de técnicas numéricas mais eficazes); ou também quando se confere excessiva relevância na avaliação à aferição da rapidez de aplicação das técnicas (dando pouco tempo nas provas), ou à capacidade para as aplicar em casos muito complexos ou artificiosos.

2.2. As Cadeiras de Formação Matemática Aplicada (Bloco 2)

2.2.1. *Composição e Características Gerais das Cadeiras*

Incluem-se no Bloco 2, de cadeiras de formação matemática aplicada, cadeiras como Análise Numérica, Probabilidades e Estatística ou Investigação Operacional, que partilham duas características importantes.

A primeira característica é que, dentro da formação matemática de um engenheiro, estas cadeiras têm objectivos eminentemente (se bem que não exclusivamente) aplicados, no sentido em que a sua principal função é conferir ao estudante a capacidade para fazer uso de certas teorias matemáticas (conceitos, teoremas, técnicas) para resolver problemas específicos com interesse no ramo da engenharia em causa. Sob este aspecto, como alguém disse, «não há nada mais prático que uma boa teoria», para ser, simultaneamente, eficaz, seguro e rápido na resolução de problemas. Por outras palavras, enquanto as cadeiras do Bloco 1, de formação matemática fundamental, visam de forma sensivelmente equilibrada os três grandes objectivos formativos da matemática num curso de engenharia (cf. Secções 1.1-3), já nas cadeiras do Bloco 2, de formação matemática aplicada, o primeiro objectivo (ensinar a pensar com rigor) perde importância face ao restante par de objectivos (ensinar a usar a matemática como linguagem e como ferramenta de cálculo), e, mesmo dentro deste par, o segundo objectivo perde também importância face ao terceiro. Além disso, as teorias matemáticas tratadas nas cadeiras do Bloco 2 situam-se, por assim dizer, numa segunda camada de desenvolvimento da formação matemática, ocupando as teorias estudadas nas cadeiras do Bloco 1 a primeira camada.

A segunda característica comum às cadeiras deste bloco é o carácter substancialmente isolado e autónomo do projecto formativo que está subjacente a cada uma delas dentro de um curso de engenharia.

Das características anteriores decorrem, por sua vez, duas consequências gerais relativas à pedagogia a empregar nestas cadeiras, a saber:

- a) Na exposição das respectivas teorias matemáticas não se justifica empregar o grau de rigor formal característico das cadeiras do Bloco 1 (cf. Secção 2.1.5), pois, neste caso, a teoria está subordinada à prática. De uma forma positiva, poderia dizer-se que constitui um desafio peculiar para os professores responsáveis por estas cadeiras, seleccionar os conteúdos teóricos com maior interesse prático, e encontrar formas de exposição da teoria que, sem prejuízo de uma correcta e suficientemente profunda assimilação dos conhecimentos matemáticos, propiciem verdadeiros “curto-circuitos” na aprendizagem.

- b) Uma atenção especial deve ser dada à selecção dos problemas das aulas teórico-práticas, das folhas de problemas fornecidas aos estudantes e das provas de avaliação, bem como à aplicação que se faz dos conhecimentos teóricos para os resolver. Na sua maioria, estes problemas devem estar tão “próximos” quanto possível dos contextos de engenharia mais relevantes para os estudantes.

Em reforço da prescrição a), vale a pena referir que nestas cadeiras o estudante não tem tempo de assimilar teoria matemática nova e muito abstracta para, pouco tempo depois, a começar a aplicar com domínio, versatilidade e eficácia, à resolução de problemas práticos, que é o que principalmente se pretende. Surge assim o perigo de que, desrespeitando a prescrição a), os estudantes saiam destas cadeiras, por um lado, com uma compreensão superficial e confusa de um conjunto de conhecimentos teóricos que, por esse facto, acabam por “decorar” sem serem depois capazes de os aplicar por si mesmos com originalidade, e, por outro lado, limitando-se a saber resolver mais ou menos “mecanicamente” uma classe restrita de problemas que tenham sido resolvidos nas aulas teórico-práticas.

As considerações que se fazem acima ajudam a perceber por que é que, não se discute aqui se mal ou bem, em muitos cursos de engenharia a leccionação de algumas cadeiras do Bloco 2 é confiada a engenheiros e não a matemáticos.

2.2.2. A Cadeira de Análise Numérica

Objectivos Formativos e Programa

Os objectivos formativos específicos de uma cadeira introdutória de Análise Numérica num curso de engenharia consistem, segundo se crê, em proporcionar ao estudante o conhecimento e a capacidade de utilização de um conjunto de conceitos e ferramentas numéricas básicos, um “estojo de primeiros socorros para cuidados numéricos primários”, passe a expressão, que lhe permita resolver com a aproximação que desejar, problemas numéricos relativamente simples, compreendidos entre os seguintes:

- a determinação de raízes de equações não lineares (nomeadamente, equações polinomiais de grau superior ao 2º, com raízes complexas, e equações transcendentais);
- a resolução de sistemas de equações lineares;
- a resolução de sistemas de equações não-lineares;
- a interpolação e a extrapolação de sequências de pontos “sem erro”;
- a construção de funções de regressão passando pelo meio de um conjunto de pontos com “ruído de fundo”;
- o cálculo pontual de derivadas;
- o cálculo de integrais definidos;
- a integração de equações diferenciais ordinárias (com condição inicial e, eventualmente, condições de fronteira dadas);
- a determinação de valores e vectores próprios de matrizes.

Naturalmente, tratando-se de uma cadeira semestral, haverá que fazer opções quanto à profundidade da abordagem dos problemas anteriores (suas variantes e técnicas de resolução). Apesar de tudo, crê-se que seria pena omitir a abordagem de mais do que um destes problemas. Por outro lado, do elenco anterior ficam claramente de fora problemas numéricos mais complexos ou especializados, como sejam, para mencionar apenas alguns dos que têm maior interesse em engenharia:

- a integração de sistemas de equações às derivadas parciais;
- a resolução de equações integrais;
- problemas de optimização (Programação Matemática, Teoria dos Grafos, etc., alguns dos quais, aliás, são abordados em cadeiras específicas, como Investigação Operacional);
- o cálculo de transformadas de Fourier.

Quanto às competências práticas que se pretende que os estudantes adquiram nesta cadeira, mencionam-se abaixo as que se consideram mais importantes:

- a) Capacidade para reconhecer o interesse ou a necessidade de empregar técnicas numéricas para resolver eficientemente um dado problema de cálculo matemático.
- b) Capacidade para identificar e formular o problema numérico pertinente.
- c) Capacidade para seleccionar criteriosamente a técnica numérica a empregar, atendendo, nomeadamente:
 - no caso de uma técnica iterativa: ao número de estimativas “a priori” necessárias para iniciar o processo iterativo; à velocidade e à robustez da convergência;
 - no que respeita aos erros numéricos: à geração de erros de arredondamento (número de operações elementares de cálculo e forma de representação dos números); à propagação de erros de dados e de arredondamento (problemas mal condicionados e técnicas instáveis); aos erros de método ou truncatura; à possibilidade e facilidade de dispor “a priori” de bons majorantes do erro de método e, se possível, do próprio erro global;
 - às condições de aplicação.
- d) Capacidade para desenvolver variantes das técnicas mais correntes, para as adaptar ou otimizar à resolução do problema em causa.

- e) Capacidade para conceber o algoritmo de implementação da técnica escolhida ³, e, consoante as conveniências, fazer a sua aplicação manual ou programá-lo numa folha de cálculo (EXCEL ou outra) ou numa linguagem de programação genérica de alto nível (FORTRAN, BASIC, PASCAL ou outra) ⁴.

- f) Capacidade para, em alternativa a (d,e), utilizar programas com interfaces mais ou menos “amigáveis” com o utilizador, tais como, o MATLAB, o MAPLE ou o MATHEMATICA ⁵, que possuem “pacotes” de cálculo numérico, ou, então, programas numéricos mais específicos.

A título puramente ilustrativo, o livro de Chapra e Canale (1989) pode ser dado como exemplo de um excelente projecto formativo e livro de texto para a cadeira de Análise Numérica, na linha do que se refere acima. Este livro é notável, não só pela sua exposição simples, clara, bastante completa, bem organizada e equilibrada nas vertentes teórica e prática, como pelos exemplos e problemas que apresenta e resolve, entre os quais se distinguem os “casos de estudo” de diferentes áreas de engenharia, como ainda pela simbiose que consegue fazer entre as matérias de Análise Numérica e de Programação, tirando partido do conceito-chave de algoritmo, que é comum a ambas.

Localização no Currículo

O organigrama da Figura 5 apresenta a localização mais comum num curso de engenharia (“pré-Bolonha”), das cadeiras que interagem mais intimamente com

³ Fica subentendida a capacidade para ultrapassar as dificuldades comuns que surgem na aplicação de uma técnica numérica, como sejam: a escolha de aproximações iniciais e o ajustamento de parâmetros numéricos afectando os erros numéricos cometidos e/ou a convergência e a estabilidade da técnica.

⁴ Fica subentendida a necessidade de formação informática específica.

⁵ Fica subentendida a necessidade de formação informática específica.

a cadeira de Análise Numérica. O número e a localização das cadeiras da área de Programação de Computadores foram deixados em aberto. Este conjunto está bem harmonizado. Salienta-se apenas a oportunidade para sinergias de motivação e, mesmo, mais profundas, entre as cadeiras de Análise Numérica e da área de Programação de Computadores. No essencial, os actuais cursos de licenciatura devem, pois, respeitar a disposição relativa das cadeiras correspondentes.

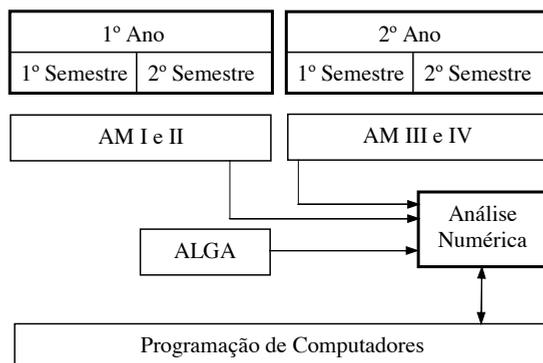


Figura 5 — Organigrama de inter-relações e localizações típicas do grupo de cadeiras com maior afinidade com a cadeira de Análise Numérica, num curso clássico de engenharia (“pré-Bolonha”).

2.2.3. A Cadeira de Probabilidades e Estatística

Objectivos Formativos e Programa

Atribui-se à cadeira de Probabilidades e Estatística, dentro do plano de formação de um engenheiro, os dois objectivos principais que se passam a apresentar.

- a) Explicar o que é uma previsão “probabilística/estatística” de um fenómeno, isto é, explicar o que a distingue de uma previsão “determinística”, a única até agora familiar ao estudante, e explicar em que casos o engenheiro tem interesse ou necessidade de recorrer a ela em substituição da tradicional previsão determinística.

- b) Ensinar a fazer análises probabilísticas/estatísticas relativamente simples de “fenómenos aleatórios”, empregando as teorias matemáticas das Probabilidades e da Estatística Descritiva e Indutiva ou Inferencial.

No Apêndice 4 expõe-se com mais detalhe o objectivo a).

No âmbito do objectivo b), a Teoria das Probabilidades desempenha o papel básico e primordial, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista das aplicações, na medida em que o seu objectivo é, “grosso modo”, a definição e o cálculo “a priori” da probabilidade de ocorrência de um dado acontecimento relacionado com um “fenómeno aleatório”, sendo este objectivo atingido pela construção de um edifício teórico de base axiomática, que começa pela introdução do vocabulário-base com o rigor necessário e constitui a base teórica da Estatística, em particular, da Estatística Indutiva. Além disso, esta teoria ensina também a construir um modelo probabilístico “a priori” (isto é, um modelo baseado em hipóteses teóricas e não em dados empíricos) de um fenómeno, como seja, por exemplo, o modelo do dado perfeito, com base no qual se pode efectuar o cálculo de probabilidades como a supra referida.

Pelo contrário, no projecto formativo conjunto, a Estatística Descritiva desempenha um papel essencialmente subsidiário, quer da Teoria das Probabilidades, motivando alguns dos seus conceitos e desenvolvimentos, quer sobretudo da Estatística Indutiva, ao ter como objectivo a concepção e aplicação de processamentos base de filtragem dos dados empíricos “em bruto”, resultantes da observação do comportamento de um fenómeno aleatório, dados que, por princípio, são muito irregulares, com o intuito de pôr em evidência as “regularidades estatísticas” que manifestam as leis físico-químicas, biológicas, psíquicas, etc., que o regem. Por este motivo, havendo uma única cadeira semestral da área de Probabilidades e Estatística no curso, seria pena que esta matéria tivesse uma expressão excessiva no seu programa, em detrimento das matérias mais nobres de Teoria das Probabilidades e de Estatística Indutiva.

Finalmente, a Estatística Indutiva é como que o complemento empírico da Teoria das Probabilidades. Trata-se de um desenvolvimento teórico eminentemente virado para as aplicações, o que, aliás, se reflecte na sua própria organização interna, já que tem como objectivo geral a extracção de inferências estatísticas sobre o fenómeno baseadas num conjunto limitado, ou “amostra”, de observações empíricas sobre o seu comportamento, podendo tratar-se de observações “em bruto” ou já filtradas pelo emprego prévio de ferramentas de Estatística Descritiva. Por sua vez, as “inferências estatísticas” acima referidas podem consistir num modelo estatístico (empírico) completo do fenómeno ou, simplesmente, em partes (empíricas) de um modelo probabilístico (teórico) previamente existente.

Dificuldades Peculiares e Sua Superação

No âmbito do Bloco 2, de cadeiras de formação matemática aplicada, o ensino das Probabilidades e Estatística em engenharia apresenta dificuldades peculiares que resultam da conjugação do relativamente elevado nível de abstracção da Teoria das Probabilidades ⁶, e, “a fortiori”, da Estatística Indutiva, com os objectivos e características formativas específicos das cadeiras deste bloco (cf. Secção 2.2.1). Nestas circunstâncias, apresentam-se abaixo algumas considerações e sugestões sobre o modo de ultrapassar estas dificuldades.

A primeira consideração é que não é admissível contornar as dificuldades anteriores, seja colocando a ênfase na Estatística Descritiva, convertendo-a numa espécie de “livro de receitas”, seja saltando “por cima” da Teoria das Probabilidades, directamente para a Estatística Indutiva, que apareceria, então, como um misto de “livro de receitas” e milagre teórico incompreensível. Com efeito, tanto num caso como noutro, o projecto formativo pretendido para esta cadeira ficaria substancialmente mutilado: um engenheiro necessita, nesta matéria, de muito mais do que

⁶ Basta pensar que, sob certo aspecto, a Teoria ou Análise das Probabilidades pode ser encarada como uma generalização da super-teoria de Análise Vectorial do Bloco 1 (cf. Secção 2.1.2), na qual uma “variável real” é vista como uma “variável determinística”, isto é, como um caso particular de uma “variável aleatória” que assume valores no seu domínio de uma forma previsível com certeza pelo seu utilizador.

simples regras de cálculo do valor médio ou do desvio-padrão de uma amostra de dados, ou uma compreensão puramente algorítmica do Teste do Qui-Quadrado, para dar apenas alguns exemplos.

Positivamente, a solução deste problema passa pela concepção de um projecto formativo de ensino da Teoria das Probabilidades e da Estatística Indutiva que consiga reunir as três características seguintes:

- a) Reduzir o formalismo matemático ao nível mínimo indispensável para transmitir uma verdadeira e sólida compreensão dos conceitos-chave e dos resultados com maior interesse prático da teoria, e dar uma percepção da sua estrutura lógica global.
- b) Motivar o desenvolvimento progressivo da teoria na óptica do utilizador e, a par-e-passo, ir proporcionando as interpretações físicas mais relevantes e interessantes da teoria, devidamente contextualizadas.
- c) Fazer uma boa selecção de problemas aplicados e, sobretudo, ensinar a fazer a “desmontagem teórica” destes problemas, isto é, a sua interpretação e formalização prévias e preparatórias da utilização da teoria para a sua resolução, evidenciando claramente as vantagens práticas, de segurança, rapidez e eficácia, de uma abordagem baseada na teoria face a uma abordagem mais ou menos intuitiva.

A título ilustrativo, discutem-se no Apêndice 5 alguns tópicos de um possível projecto formativo (André 2008) satisfazendo as características a) e b). Um outro projecto formativo, muito interessante e original sob este aspecto, foi desenvolvido na Loughborough University of Technology (Inglaterra) por um grupo de matemáticos (Bajpai *et al.* 1979). Por contraste, a obra de Murteira (1990a,b), sendo também notável no seu género e, por isso mesmo, uma referência útil para o professor, não se crê ser a mais adequada para estudantes de engenharia, tanto

por ser excessivamente teórica como por não tratar aplicações de engenharia. No Apêndice 5 ilustra-se o primeiro aspecto a propósito da definição do conceito de “variável aleatória”.

Como esclarecimento à característica c) acima apresentada, trata-se no Apêndice 6 um pequeno problema de engenharia, neste caso, de Controlo de Qualidade.

Localização no Curriculum

Na Figura 6 mostra-se um organigrama com a localização óptima da cadeira de Probabilidades e Estatística (PE), dadas as localizações das cadeiras de que mais depende. Sendo a dependência de PE, em relação a AM III e IV, mais fraca que em relação a AM I e II, em caso de necessidade, a cadeira de PE pode passar para o 1º semestre do 2º ano. Estas localizações relativas devem ser substancialmente respeitadas nos actuais cursos de licenciatura (1º Ciclo).

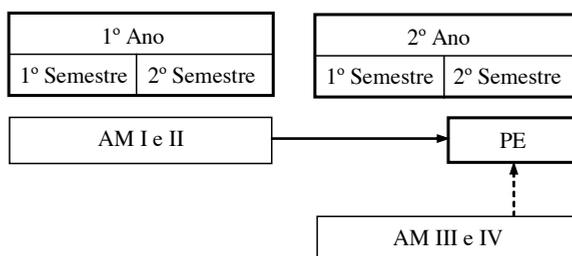


Figura 6 — Organigrama de inter-relações e localizações do grupo de cadeiras mais “próximas” da cadeira de Probabilidades e Estatística (PE), num curso clássico de engenharia (“pré-Bolonha”).

2.3. As Cadeiras de Formação Mista Matemática/Engenharia (Bloco 3)

Incluem-se no Bloco 3 as cadeiras de formação mista em matemática e diferentes áreas de engenharia, tais como as que se apresentam no Quadro 5.

Quadro 5 — Cadeiras de formação mista matemática/engenharia (Bloco 3), num curso de engenharia.

Cadeira/Área	Componente matemática	Componente de engenharia	Áreas/Cadeiras que serve
Programação de Computadores	<ul style="list-style-type: none"> • Lógica • Análise Numérica (algoritmo) <p>* AM I e II, ALGA</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Linguagens de Programação * Ambientes de Operação * Tecn. Informática 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo Computacional • Anal. Numérica (sinergias)
Desenho Técnico	<ul style="list-style-type: none"> • Geometria Descritiva 	<ul style="list-style-type: none"> • Tecn. Mecânica • Projecto • CAD 	<ul style="list-style-type: none"> • Representação Gráfica • Projecto

3. A LIGAÇÃO ENTRE AS CADEIRAS DE MATEMÁTICA E DE ENGENHARIA

Certamente, poucos contestam que uma boa formação matemática de base, adquirida no início de um curso de engenharia (1º Ciclo, particularmente, não profissionalizante), tem uma influência benéfica na assimilação da formação específica de engenharia ao longo do curso (1º e 2º Ciclos). Porém, vale a pena examinar com mais detalhe a correlação formativa que efectivamente existe entre as cadeiras de matemática e de engenharia, sendo este o propósito do presente capítulo.

Assim, na Secção 3.1 reflecte-se sobre as condições que se devem dar para que o supra referido efeito benéfico de correlação seja alcançado, conferindo ao estudante uma verdadeira “formação matemática aplicada à engenharia”, a qual, aliás, toca o nervo da formação universitária de um engenheiro, distinguindo-o claramente de um matemático, por um lado, e de um técnico superior, por outro. É possível até que, desejando ir mais fundo nesta formação, se possa mesmo falar de uma nova “especialização” em engenharia, com carácter transversal do ponto de vista das aplicações. Tal especialização configura o que se chama uma “sensibilidade teórica”, com as suas sub-especializações “analítica” e “numérica”, por contraste com uma “sensibilidade experimental”, e, se não o tiver noutros campos da engenharia, tem pelo menos pleno cabimento no campo da investigação (em engenharia).

Na Secção 3.2 faz-se a análise das carências de conhecimentos matemáticos eventualmente sentidas em algumas cadeiras de engenharia, procurando delinear a sua natureza, identificar potenciais causas e propor algumas medidas de prevenção ou compensação.

Finalmente, na Secção 3.3 expõem-se possíveis deficiências dos projectos formativos de cadeiras de engenharia, que são responsáveis por uma redução do efeito benéfico de correlação a que se alude acima.

3.1. Uma Formação Matemática Aplicada à Engenharia

3.1.1. Ingredientes

A Formação Matemática de Base

A primeira condição ou ingrediente de uma “formação matemática aplicada à engenharia” é, naturalmente, uma adequada formação matemática de base. Nesta formação, que constitui como que a componente teórica do projecto formativo, assumem particular importância os dois aspectos que se passam a apresentar.

O primeiro aspecto é que a assimilação dos conhecimentos matemáticos deve reflectir ordem, clareza e unidade. A análise das cadeiras de matemática de um curso de engenharia conduzida ao longo do Capítulo 2 é, justamente, expressão prática desta preocupação. Do ponto de vista da utilização da matemática como “linguagem”, uma tal preocupação visa dotar o engenheiro de um bom “dicionário”. Neste contexto, “bom” significa mais “bem organizado” do que “muito rico”, pois o perigo principal aqui a evitar é ter que orientar-se numa lista caótica de “vocabúlos”. Por outro lado, do ponto de vista da utilização da matemática como “ferramenta”, o que é vital é dispor de uma “panóplia bem organizada de ferramentas”, onde cada uma seja fácil de localizar, para não ter, por exemplo, que descobrir um alicate de pontas num monte de ferramentas a esmo. Sob este prisma, é melhor dispor de um único alicate de pontas que se sabe onde está, do que possuir três tipos de alicates de pontas não se sabe bem onde.

O segundo aspecto consiste num domínio “quasi-físico” dos conceitos e teoremas matemáticos. Nas Secções 2.1.5 e 3.2.1 dão-se já alguns exemplos do que isto significa. Na verdade, este aspecto é tão importante para um engenheiro que se lhe impõe quase como uma “deformação profissional” ao estudar matemática: é incapaz de dissociar este estudo da utilização natural da matemática como “linguagem” nos contextos físicos e de engenharia que lhe são familiares, mesmo que o seu estudo não seja directa e imediatamente motivado pela resolução de um problema específico de engenharia. É por isso que, a respeito de um novo conceito ou teorema

matemático que lhe é apresentado, acodem espontaneamente à sua mente perguntas como estas: “Para que serve?”, “Que diz?”, “Qual o seu sentido físico?”, ficando subentendido um contexto físico ou de engenharia apropriado.

A Formação em Física e Engenharia

O segundo ingrediente de uma “formação matemática aplicada à engenharia”, correspondendo à componente prática do projecto formativo, é constituído pelos conhecimentos de física e de engenharia pertinentes, aqui se incluindo um variado conjunto de conceitos, leis fundamentais e empíricas, resultados experimentais, técnicas e tecnologias.

Neste âmbito, merece uma particular menção o seguinte conjunto de capacidades, necessárias para fazer a análise de fenómenos físicos em contextos de engenharia, culminando na construção, teste e aplicação de modelos físico-matemáticos apropriados:

- Capacidade para simplificar o fenómeno pela identificação dos parâmetros e mecanismos que o controlam e pela formulação de hipóteses acertadas.
- Capacidade para estimar de forma expedita a ordem de grandeza dos parâmetros importantes.
- Capacidade para validar experimentalmente o modelo proposto.
- Capacidade para quantificar riscos de análise e projecto.

A Capacidade Para Dar “Saltos Lógicos”

Sem subestimar a importância dos dois ingredientes apresentados acima, o ingrediente essencial e mais genuíno de uma “formação matemática aplicada à engenharia” é o que se poderia designar como a capacidade para dar “saltos lógicos”. É por isso que este tipo de formação não resulta espontaneamente da justaposição de uma formação matemática teórica a uma formação prática em qualquer âmbito da engenharia.

Podem distinguir-se, em primeiro lugar, “saltos lógicos para cima”, cujo paradigma é a construção de modelos físico-matemáticos de fenómenos. Com efeito, há claras e descontínuas subidas no nível de abstracção da análise quando se passa, num primeiro momento, do “fenómeno” (realidade físico-química concreta) para o “modelo físico” (parâmetros, hipóteses, mecanismos...), e, num segundo momento, do “modelo físico” para o “modelo matemático” (teorias, técnicas analíticas e numéricas...). Neste contexto, pode considerar-se que o “fenómeno” está situado no nível de abstracção “zero” (Figura 7a).

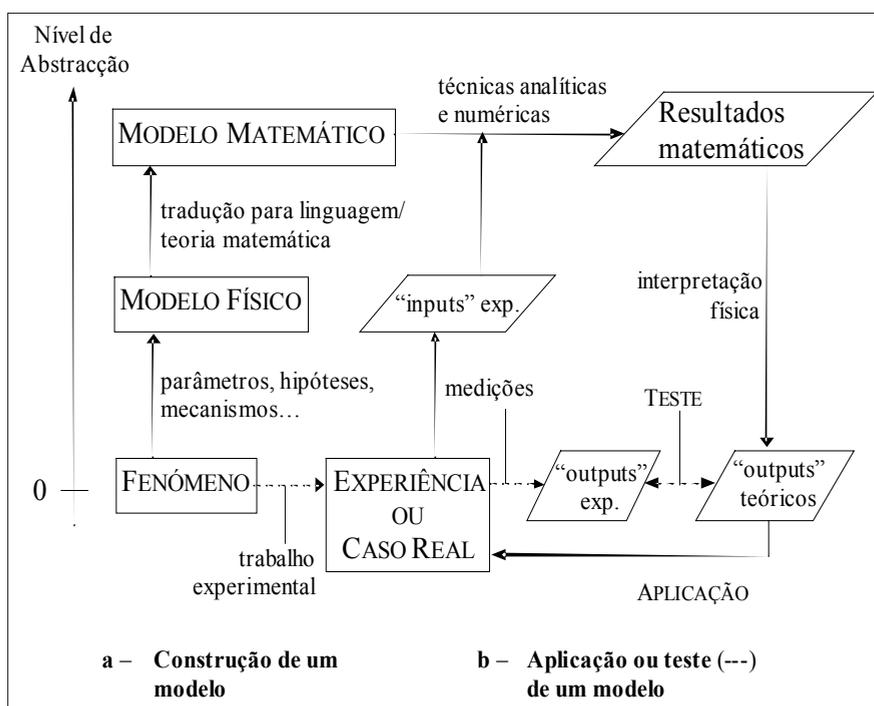


Figura 7 — Esquema dos “saltos lógicos”: a – “para cima” e b – “para baixo”, numa formação matemática aplicada à engenharia.

Em segundo lugar, fala-se de “saltos lógicos para baixo” a respeito da interpretação física dos resultados matemáticos de um modelo, seja num contexto de teste experimental do modelo, seja num contexto de aplicação do modelo à análise de um caso real (Figura 7b).

3.1.2. Passos a Dar para a Adquirir

1º e 2º Passos: As Cadeiras de Matemática e as Cadeiras de Física e de Engenharia

As cadeiras de matemática de um curso clássico de engenharia (1º Ciclo não profissionalizante) proporcionam em dose suficiente o primeiro ingrediente da formação matemática aplicada à engenharia: a própria formação matemática de base. Ao longo do Capítulo 2, em particular nas Secções 2.1.5 e 2.2.1, apresentam-se já muitos dos aspectos a ter em conta para que estas cadeiras alcancem os objectivos formativos desejáveis neste contexto. Não é pois necessário estar aqui a estender-se mais sobre este assunto.

O segundo ingrediente (formação em física e engenharia) e, em certa medida, também o terceiro ingrediente (capacidade para dar “saltos lógicos”) da formação matemática aplicada à engenharia são ministrados, num segundo passo do processo de aprendizagem, nas cadeiras de física e de engenharia do curso (1º e 2º Ciclos), desde que se acautelem devidamente os aspectos que se mencionam adiante, nas Secções 3.2 e 3.3.

3º Passo (Opcional): As Cadeiras de Formação Matemática Aplicada à Engenharia

A respeito da opção de introduzir cadeiras especificamente dedicadas à formação matemática aplicada a um ramo da engenharia, no respectivo curso de mestrado (2º Ciclo) ou, mais tarde, em cursos de pós-graduação ou doutoramento (3º Ciclo), como um terceiro passo no processo global de aprendizagem, começa por se chamar a atenção para os quatro pontos seguintes:

Primeiro: Como se diz acima, se forem bem dados, os dois primeiros passos do processo de aprendizagem são já suficientes para, no nível formativo correspondente ao actual mestrado, proporcionar ao estudante a formação matemática aplicada necessária para um bom exercício profissional da engenharia. Segundo:

A introdução de uma cadeira obrigatória de formação matemática aplicada no final do curso de licenciatura ou no curso de mestrado, após a formação matemática de base, é de eficácia duvidosa e imprevisível para emendar erros formativos neste âmbito, cometidos nos dois primeiros passos: para alguns estudantes é inútil, pois, ou não estão interessados ou, os melhores, já estão sensibilizados; e, para outros, é tarde demais, pois é oferecer-lhes um fruto apetecido mas que, pelo menos nesta altura da sua formação, lhes parece estar já colocado alto demais. Terceiro: Numa óptica de “especialização” ou aprofundamento, sempre útil mas dispensável para muitos engenheiros, é pedagogicamente viável a introdução de uma cadeira com estas características no final do curso de mestrado ou em cursos de 3º Ciclo, desde que tenha carácter opcional. Quarto: É importante não confundir uma cadeira deste tipo com cadeiras de formação matemática avançada que visam antes preencher algumas das lacunas mencionadas nas Secções 2.1.4 e 3.2.2.

Passam agora a apresentar-se as traves-mestras de um possível projecto formativo de uma cadeira de formação matemática aplicada a qualquer ramo da engenharia.

- a) Objectivos formativos:
 - i) Principal: ensinar a dar “saltos lógicos”, ingrediente essencial da formação matemática aplicada:
 - proporcionando método na aplicação de conhecimentos matemáticos à abordagem de problemas de engenharia;
 - e aumentando a capacidade de utilização da matemática como “linguagem”.
 - ii) Secundário: conferir à formação matemática de base as duas características mencionadas na Secção 3.1.1, Subsecção “A Formação Matemática de Base”.
- b) Estrutura pedagógica geral:
 - i) Núcleo introdutório de aulas teórico-práticas, onde se proporcionem os elementos teóricos dos objectivos formativos e se ilustre a sua

aplicação a problemas relativamente pequenos, susceptíveis de ser resolvidos na aula.

71

- ii) Trabalho prático de “investigação”, ainda que mais pelo espírito com que os problemas são abordados do que pela sua natureza, de preferência individual e com acompanhamento personalizado extra-aulas, ao longo do período lectivo. Neste trabalho aborda-se um problema de engenharia com natureza, dimensão e complexidade adequadas ao objectivo formativo principal da cadeira. Trata-se, pois, de uma via de formação “em acção”, eminentemente prática.

De forma transversal a estes elementos pedagógicos, podem distinguir-se duas vias fundamentais para atingir o objectivo formativo principal, a saber:

- Via teórica: Reflexões de carácter metodológico culminando com a proposta de uma metodologia suficientemente geral e flexível de resolução de problemas de matemática aplicada à engenharia.
- Via prática: Aplicação dos elementos de reflexão teórica e, em particular, da metodologia proposta, à resolução e discussão de problemas seleccionados de forma rica e diversificada do ponto de vista das áreas de matemática e engenharia envolvidas, e também do ponto de vista metodológico.

3.2. Carências de Conhecimentos Matemáticos Sentidas nas Cadeiras de Engenharia

Não se discutem aqui as carências mais óbvias de conhecimentos matemáticos de um estudante manifestadas na frequência de cadeiras de engenharia do seu curso: as resultantes da falta de aproveitamento nas cadeiras de matemática que as precedem.

3.2.1. Dificuldade Para Aplicar Conhecimentos Matemáticos

72

Um primeiro tipo de carências da formação matemática dos estudantes que causa problemas nas cadeiras de engenharia é a dificuldade para aplicar a matemática como “linguagem” nos contextos requeridos pela cadeira em causa. Os exemplos abaixo ilustram, pela positiva, a natureza e as consequências deste tipo de carências.

§ **Exemplo 22:** Empregar a lei de conservação da massa para obter a relação instantânea entre o caudal volúmico de alimentação de um depósito de água, Q [m^3/s] (t), e a taxa de subida do nível da água no seu interior. Dado que, neste caso, a água pode ser assimilada a um fluido incompressível, a lei de conservação da massa de água no depósito, relativa ao intervalo de tempo infinitesimal $[t, t+dt]$, pode ser expressa em termos volúnicos por (Figura 8)

$$dV = Q(t) \cdot dt \quad (21)$$

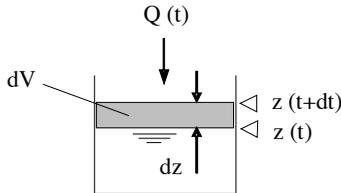


Figura 8 — (Exemplo 22) – Enchimento de um depósito de água. Esquema auxiliar de “escrita” da relação (21).

Se o reservatório for paralelepípedo com área da base A , aplica-se a relação geométrica $dV=A \cdot dz$, da qual, conjuntamente com a (21), resulta a relação procurada, sob a forma de uma equação diferencial ordinária envolvendo simultaneamente as funções $z(t)$ e $Q(t)$,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A} \cdot Q(t) \quad (22) \blacksquare$$

§ **Exemplo 23:** Perceber que qualquer integral (no sentido de Riemann) é um simples operador de soma sobre um domínio contínuo, análogo a um somatório sobre um domínio discreto. Assim, por exemplo, a única coisa que distingue um integral simples de um integral de linha é o respectivo domínio de integração: uma linha recta paralela a um eixo coordenado, no primeiro caso, e uma linha curva arbitrária do espaço, no segundo caso. ■

§ **Exemplo 24:** Seja dado um campo de altura topográfica, $z=z(x,y)$, definido num referencial Cartesiano 3D, $OXYZ$, sendo OXY o plano horizontal de referência e apontando OZ “para cima”. Saber que o vector-gradiente do campo $z(x,y)$ no ponto $P(x,y)$, designado por $\nabla z(x,y)$, pode ser assimilado a um vector do plano OXY : i) com a direcção do declive máximo do terreno em P , apontando “encosta acima”; ii) que é, portanto, normal à linha de nível de $z(x,y)$ que passa em P ; e iii) que tem grandeza $\|\nabla z\| = \tan \theta$, sendo θ o ângulo de declive máximo do terreno em P . ■

§ **Exemplo 25:** Compreender que o campo vectorial **rot v**, sendo **v** o campo de velocidade de um escoamento, por resultar da aplicação de um operador diferencial ao campo vectorial **v**, o operador rotacional, não está relacionado com a forma das linhas de corrente do escoamento em larga escala mas sim com uma propriedade local do escoamento: a capacidade para fazer rodar uma pequena veleta com eixo de rotação de orientação controlável, colocada no ponto em questão (cf. Apêndice 7). Daí que possa existir um escoamento com linhas de corrente circulares que seja irrotacional, o chamado “vórtice potencial”, ou, inversamente, que um escoamento com linhas de corrente rectilíneas possa ter campo rotacional não identicamente nulo. ■

§ **Exemplo 26:** Perceber que qualquer “risco” em engenharia está associado, embora não unicamente, à “probabilidade de ocorrência de um certo acontecimento no quadro de uma dada experiência aleatória”. Naturalmente-

te, corresponde ao engenheiro identificar ou escolher a experiência e o acontecimento pertinentes ao risco em causa. ■

O Papel do Professor de Engenharia

Em relação a carências como as anteriores, cabe ao professor da cadeira de engenharia em apreço – normalmente, cadeiras de física ou de fundamentos de engenharia, tais como, Termodinâmica, Resistência de Materiais ou Mecânica dos Fluidos – um importante papel formativo, no sentido de ajudar o estudante a colmatar eventuais brechas na sua formação matemática de base e, sobretudo, de o ajudar a desenvolver a capacidade para empregar a matemática como “linguagem da engenharia”.

A este respeito, o professor de engenharia não pode nem deve esperar que os seus colegas das cadeiras de matemática, sejam eles matemáticos ou engenheiros, estejam em condições de satisfazer cabalmente esta necessidade formativa dos estudantes no âmbito das cadeiras que lhes incumbem. Tanto mais que este complemento genuinamente aplicado de formação matemática do estudante de engenharia, cuja importância transcende para o resto do curso e para a vida profissional, tem, no contexto destas cadeiras de engenharia, um ambiente pedagógico ótimo para se exercitar, nomeadamente, do ponto de vista da motivação dos estudantes. Mais ainda, graças ao efeito de simbiose que se explica na Secção 2.1.5, o professor de engenharia tem aqui uma oportunidade excelente para conseguir que o estudante assimile com maior profundidade os próprios conhecimentos matemáticos de base, como se ilustra no exemplo seguinte.

§ **Exemplo 27:** Em Mecânica dos Fluidos, a dedução da formulação diferencial de Euler da lei de conservação da quantidade de movimento para um fluido Newtoniano em escoamento estacionário – isto é, substancialmente, a dedução das conhecidas equações de Navier-Stokes –, costuma envolver a análise diferencial de 1ª ordem (no espaço e no tempo) do movimento e deformação de uma porção identificada ou “partícula” de fluido

que, no instante t , tem a forma de um paralelepípedo com centro, ou um dos vértices, no ponto $P(\mathbf{r})$. Designando o campo de velocidade do escoamento por $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$, esta análise oferece uma excelente oportunidade para explicar ao estudante:

- i) uma aplicação prática, à qual vai anexa uma interpretação física particular, da expansão de Taylor de 1ª ordem do campo \mathbf{v} junto de $P(\mathbf{r})$;
- ii) que a matriz jacobiana $J(\mathbf{v},\mathbf{r})$, resultado da aplicação do operador de derivada total ao campo \mathbf{v} no ponto $P(\mathbf{r})$, contém a informação diferencial de 1ª ordem completa sobre o campo \mathbf{v} em $P(\mathbf{r})$;
- iii) e que os operadores diferenciais $\text{div } \mathbf{v}$ e $\text{rot } \mathbf{v}$ extraem informação diferencial especializada de $J(\mathbf{v},\mathbf{r})$, e qual o “sentido físico” desta informação neste contexto particular. ■

O Exemplo 27 é desenvolvido no Apêndice 7 para um escoamento bidimensional.

Utilizações Indevidas de Matemática nas Cadeiras de Engenharia

Naturalmente, sem prejuízo do que se refere acima, nas cadeiras de engenharia são sempre de lamentar as utilizações da matemática que dificultam aos estudantes, sem contrapartida proporcionada de proveito formativo, a apreensão dos conhecimentos de engenharia que constituem o principal objectivo formativo destas cadeiras. Pelo contrário, na análise e resolução de problemas físicos e de engenharia nestas cadeiras, a utilização da matemática não deve ser nunca forçada, dando preferência às abordagens matemáticas mais simples, com menor nível de abstracção e que apresentem mais vantagens práticas, e, sobretudo, dando a devida ênfase ao “sentido físico” dos conceitos, argumentos e resultados matemáticos. Acima de tudo, há que evitar transmitir a falsa mensagem de que a utilização da

matemática no ensino da engenharia é um luxo desnecessário, quando não um obstáculo adicional puramente artificial, empregue com a finalidade de “deslumbrar” os incautos. Uma tal deformação do ensino da engenharia, de que se passa a dar alguns exemplos, mereceria justamente a qualificação de “ensino teórico” na sua conotação negativa.

§ **Exemplo 28:** Considere-se a dedução da lei de Arquimedes, da impulsão hidrostática. Para simplificar, supõe-se que o corpo sólido a que se aplica a lei está totalmente imerso no fluido, encontrando-se ambos em repouso num referencial de inércia, e que a distribuição hidrostática de pressão no interior do fluido, $p=p(\mathbf{r})$, é unicamente determinada: pelo campo gravítico, caracterizado pela constante $\mathbf{g} [\text{m/s}^2]=-\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}$, sendo \mathbf{k} um vector unitário vertical apontando “para cima”; pelo valor da pressão num ponto de referência do fluido ¹, p_a [Pa]; e pela massa volúmica do fluido, ρ [kg/m^3], suposta constante de modo consistente com a hipótese de fluido incompressível subjacente à lei de Arquimedes.

A via óptima de dedução a seguir, aliás a mais comum em livros de texto de Mecânica dos Fluidos, é, indubitavelmente, a que se baseia na consideração do equilíbrio estático da porção de fluido, F , que ocuparia a mesma região do espaço que o corpo sólido, com superfície S e volume V , se este fosse extraído “virtualmente” do fluido, isto é, sem provocar nenhuma alteração no campo de pressão, $p(\mathbf{r})$. Com efeito, independentemente da complexidade da distribuição das forças de pressão sobre a superfície S , expressão da acção mecânica de curto alcance do fluido exterior a S sobre F , de que a força de impulsão, \mathbf{I} [N], é a resultante, da condição de equilíbrio hidrostático do fluido decorre, imediatamente, que a porção de fluido F se encontra numa condição mecânica de equilíbrio indiferente, e que,

¹ Tratando-se de um líquido em contacto com a atmosfera, um caso muito comum, ter-se-á, normalmente, $p_a \equiv$ (pressão atmosférica na “superfície livre” do líquido).

para tal, a força de impulsão \mathbf{I} deve ser simétrica do peso de F , \mathbf{P} , e ter linha de acção passando pelo centro de gravidade de F , G , neste caso, coincidente com o centróide de F . Ora, é precisamente isto que diz a lei de Arquimedes, cuja tradução matemática, a menos a referência ao ponto de aplicação da força de impulsão, G , é, portanto,

$$\mathbf{I} = (\rho V g) \cdot \mathbf{k} \quad (23)$$

É interessante reparar que a simplicidade deste argumento físico não o impede de ser simultaneamente rigoroso, profundo e geral. Assim, por exemplo, dele decorre uma demonstração simples da tese lateral segundo a qual a distribuição das forças de pressão do fluido sobre a superfície S admite a “redução” a uma única força resultante, a força deslizante (G, \mathbf{I}) , dado que a referida distribuição deve, necessariamente, equilibrar a força única (G, \mathbf{P}) . Na verdade, em face da arbitrariedade da forma e posição da superfície S , a demonstração matemática independente desta tese em Teoria dos Torsores não é trivial, para além de requerer o conhecimento adicional da distribuição de pressão hidrostática, $p(\mathbf{r})$. ■

Para comparação com a anterior, apresenta-se no Apêndice 8 uma via alternativa de dedução da lei de Arquimedes, com carácter mais matemático, cujo uso num curso de engenharia é desaconselhado.

§ **Exemplo 29**: Considere-se agora, em Resistência de Materiais, o problema da determinação dos esforços numa secção de uma estrutura composta por barras ou vigas, sujeita a um carregamento conhecido.

Sob a perspectiva que se tem estado a explanar, opina-se que a via óptima de abordagem deste problema é o Método das Secções, que se baseia directamente nas relações que exprimem o equilíbrio estático de uma parte integral da estrutura, compreendida entre um dos seus extremos e a secção em causa. Os motivos são estes:

- i) Sem quaisquer restrições, este método facilita ao utilizador a percepção directa do “sentido físico” do cálculo.
- ii) É um método de aplicação versátil, seja para calcular esforços em secções isoladas, seja para construir o diagrama de esforços completo ao longo do eixo da estrutura.
- iii) Trata-se de um método que permite um controlo imediato dos erros de cálculo. Além disso, eventuais erros cometidos no cálculo dos esforços numa secção não se propagam automaticamente a outras secções.

Em alternativa ao Método das Secções emprega-se o Método Diferencial, que se baseia em relações diferenciais indirectamente decorrentes do equilíbrio estático de uma fatia da estrutura com espessura infinitesimal segundo o seu eixo, contígua à secção em causa. Porém, este segundo método, para além de não possuir as características (i-iii) acima apontadas, presta-se a uma aplicação “mecanizada” e “casuística”, com menor valor formativo. A única vantagem que é costume atribuir-lhe, a de ser mais expedito que o Método das Secções por permitir concentrar a atenção de cálculo numa parte infinitesimal da estrutura, é também discutível. ■

§ **Exemplo 30:** Considere-se, por último, algumas deficiências comuns na utilização de Análise Tensorial em engenharia. A sua causa seminal parece ser uma apreensão físico-matemática superficial da própria teoria matemática, da qual nascem depois interpretações físicas erradas nos diferentes contextos em que é aplicada. De facto, esta matéria não costuma ser leccionada nas cadeiras matemáticas de base de um curso de engenharia (cf. Secção 2.1.4), sendo apenas tratada de forma mais ou menos superficial em cadeiras como: Mecânica dos Meios Contínuos, Resistência de Materiais, Mecânica Aplicada ou Mecânica dos Fluidos, entre outras. Acresce que muitos livros de texto de cadeiras de engenharia como as

anteriores contém más exposições desta matéria ². Seja qual for a sua causa, a lista de questões que se apresenta abaixo, cujas respostas constam no Apêndice 9, faz o levantamento de algumas das deficiências e perplexidades mais comuns nesta matéria.

- i) Tratar-se-á a Análise Tensorial, substancialmente, de uma “notação indicial” que permite exprimir teses e deduções matemáticas de forma muito sintética mas críptica?
- ii) Em que situações tem um engenheiro real interesse em empregar Análise Tensorial?
- iii) Será correcta, e, neste caso, que sentido tem, a expressão: “a grandeza física y tem carácter covariante ou contravariante”? Assim, por exemplo, é comum ouvir-se dizer que “a velocidade de uma partícula tem carácter contravariante” mas “uma força tem carácter covariante”. Por outro lado, por que é que se introduzem, e que sentido físico têm, as componentes “covariantes” e “contravariantes” de uma grandeza física?
- iv) Poderão existir grandezas físicas sem “carácter tensorial”, tais como, por exemplo, aquelas que são definidas à custa de um produto vectorial externo, como seja, o momento de uma força deslizante, (P, \mathbf{F}) , relativamente ao ponto O, definido por $\mathbf{M} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$?
- v) O operador tensorial de “derivada covariante” generaliza algum operador já definido em Análise Vectorial, e, neste caso, qual, ou, pelo contrário, trata-se de um novo operador? ■

² De passagem, aproveita-se para recomendar o excelente livro de Young (1993).

3.2.2. *Matérias de Matemática Não Leccionadas*

80

O segundo tipo de carências de conhecimentos matemáticos eventualmente sentidas em cadeiras de engenharia resulta simplesmente do facto das matérias de matemática em causa não estarem incluídas nos programas das cadeiras de formação matemática de base do curso (1º Ciclo ou, excepcionalmente, 2º Ciclo).

Em cursos de engenharia bem estruturados (cf. Capítulo 2) este tipo de carências não costuma ser muito importante, quer porque é relativamente raro, quer porque, quando ocorre, ou existem abordagens matemáticas alternativas que não apresentem este inconveniente, ou, então, as carências dos conhecimentos matemáticos em causa podem ser supridas nas cadeiras de engenharia onde se fazem sentir, de uma forma satisfatória.

Em todo o caso, na Secção 2.1.4 dão-se já alguns exemplos de teorias matemáticas nas áreas das cadeiras do Bloco 1, de formação matemática fundamental, que poderão originar situações destas. A estas teorias poderíamos juntar as seguintes, desta vez em áreas afins às cadeiras do Bloco 2, de formação matemática aplicada (cf. Secção 2.2; entre parêntesis rectos indicam-se algumas cadeiras de engenharia onde a falta das respectivas teorias matemáticas se pode fazer sentir):

- a) No âmbito da Análise Numérica: técnicas de integração de equações às derivadas parciais baseadas em diferenças finitas ou em elementos finitos [Mecânica Estrutural, Transmissão de Calor]; transformada de Fourier rápida [Métodos de Medida, Processamento de Sinal, Controlo Automático de Sistemas].
- b) No âmbito das Probabilidades e Estatística: sinais aleatórios [Métodos de Medida, Processamento de Sinal]; cadeias de Markov [Organização da Produção, Manutenção].

Infelizmente, o carácter mais avançado ou especializado da maior parte destes tópicos de matemática, relativamente aos que são presentemente tratados nas

cadeiras de matemática dos Blocos 1 e 2, torna mais aconselhável tolerar o mal menor da situação actual do que introduzir grandes mudanças. Além disso, nalguns casos, o facto do estudante tomar contacto com estes tópicos de matemática no contexto da sua aplicação a problemas de engenharia concretos até se revela pedagogicamente mais vantajoso que uma abordagem prévia destas matérias, com carácter mais sistemático e profundo mas também mais abstracto, embora isto dependa muito do professor de engenharia em causa e, por outro lado, encerre também o perigo que se ilustra acima, no Exemplo 30 (Secção 3.2.1).

3.3. Deficiências do Ensino nas Cadeiras de Engenharia que Reduzem a Correlação

Quando no projecto formativo de uma cadeira de engenharia com uma componente quantitativa relevante, não se visa, não se facilita ou não se avalia uma verdadeira e profunda assimilação dos conhecimentos, a importância da formação matemática de base do estudante para o seu sucesso escolar na cadeira de engenharia em causa reduz-se proporcionalmente. Pelo contrário, um conhecimento baseado na compreensão dos conceitos e leis físicas e de engenharia pertinentes, aliado à capacidade para aplicar este núcleo de conhecimentos fundamentais com domínio próprio e originalidade ³, à análise de fenómenos e à resolução de problemas de engenharia na área em causa, implica necessariamente a capacidade para fazer uso da matemática como linguagem e como ferramenta nos contextos mencionados, tal como o requer o Perfil do Engenheiro Europeu de Grau I apresentado na Secção 1.5.

As deficiências do projecto formativo a que se alude acima transparecem geralmente na forma como o professor dá as aulas teóricas e teórico-práticas, ou como concebe e corrige as provas de avaliação, mas também na forma como o estudante estuda, caracterizando-se, em todos os casos, por um divórcio entre a teoria e a prática.

³ Mesmo que se trate de uma originalidade puramente subjectiva, isto é, exclusivamente do ponto de vista pessoal do estudante.

Na vertente teórica do projecto formativo este divórcio pode manifestar-se:

82

i) Nas aulas teóricas:

- Pela falta de correspondência entre as matérias teórica e prática da cadeira: isto é, a teoria dada nem é justificada, nem serve efectivamente de base para a resolução dos problemas que se abordam nas aulas teórico-práticas. [Questão diagnóstica: É possível, pelo menos em princípio, resolver na aula teórica um problema das aulas teórico-práticas?]

ii) No estudo:

- Em que os conhecimentos teóricos são assimiladas apenas superficialmente, havendo um desproporcionado recurso à memorização.
- Em que não se chega a formar ou não se consolida a capacidade para aplicar estes conhecimentos com independência e originalidade.

iii) Na avaliação:

- No facto de ser separada em duas partes, uma teórica e outra prática, embora não se negue a possibilidade de fazer uma avaliação bipartida bem feita. [Questão para reflexão: Não seria possível, e até vantajoso, avaliar o domínio dos conhecimentos teóricos indirectamente, por via da capacidade para os aplicar de forma original na resolução de problemas, independentemente do seu grau de dificuldade?]
- No facto de que, na parte teórica da avaliação não se permite consulta e pedem-se definições, informação e demonstrações dadas expressamente nas aulas ou nos livros de texto da cadeira. [Questões para reflexão: Como se sabe se o estudante percebe realmente o que escreveu? Se tais questões são susceptíveis de

avaliar níveis de assimilação que transcendam a simples consulta de uma fonte bibliográfica acessível e familiar, por que não se permite a sua consulta?]

Na vertente prática do projecto formativo o divórcio teoria/prática tende a manifestar-se:

i') Nas aulas teórico-práticas:

- Na resolução de problemas facilmente enquadráveis num número não muito elevado de problemas-tipo, cada qual representado por um número excessivo de “replicações”.
- Na abundância de problemas “académicos”, que não correspondem a situações com real interesse.
- No ditado de uma resolução-tipo dos problemas, que os estudantes registam meticulosamente, onde não há preocupação por destacar o principal (interpretação do enunciado, desmontagem do problema, construção da estratégia de abordagem, emprego de leis fundamentais...) do secundário (contas, técnicas auxiliares mais ou menos artificiosas e particulares...). [Questões ou considerações para reflexão: Por que não se substituem estas aulas por folhas de problemas resolvidos? Apresentar uma resolução de um problema é muito mais simples, mas é também formativamente mais pobre, que “ensinar a resolver problemas pensando” ou, melhor ainda, que “ensinar a estudar resolvendo problemas”.]
- Em que não se explora a simbiose teoria-prática na resolução dos problemas, por exemplo, não os utilizando para consolidar a assimilação, ou para mostrar a generalidade de aplicação da teoria. [Questão para reflexão: Não deveria um problema assemelhar-se a uma carta que se recebe, em que o mais importante é a mensagem do remetente e não o envelope?]

ii') No estudo:

- No emprego de resoluções “mecanizadas”, superficialmente compreendidas, e, por conseguinte, postas em prática com capacidade crítica e de adaptação proporcionalmente reduzida.
- No abuso de raciocínios baseados em analogias próximas ou superficiais, em detrimento de raciocínios baseados na aplicação de princípios teóricos fundamentais, por exemplo, resolvendo um grande número de problemas muito semelhantes entre si.
- Em que o estudante não exercita nem testa verdadeiramente a capacidade para resolver problemas por si próprio, por exemplo, recorrendo, logo que surge a menor dificuldade, à consulta de resoluções feitas por outros.

iii') Na avaliação:

- No uso de problemas-tipo, já mencionado acima.
- No pouco tempo dado para resolver as provas, assim transmitindo aos estudantes a mensagem de que o importante é “agir rapidamente” e não “pensar por conta própria”, que demora sempre mais tempo. [Questão-diagnóstica: O tempo da prova é fixado com base na cronometragem da sua resolução prévia pelo professor, adicionando-lhe uma margem de tempo sensata?]
- Em que os critérios ou recursos usados nas provas para discriminar diferentes níveis de assimilação dos conhecimentos assentam em aspectos secundários e até deformantes, como sejam, a capacidade para deslindar enunciados pouco claros ou “com armadilhas”, ou a concentração de um número desproporcionado de problemas em sectores restritos e secundários da matéria.

4. A ANÁLISE ESTATÍSTICA DO FENÓMENO: UM DESAFIO PENDENTE

De certo modo, as reflexões, análises e propostas apresentadas nos capítulos precedentes partem de um pressuposto indiscutido: algo está mal ou, pelo menos, poderia estar melhor na forma como se ensina e estuda a matemática nos nossos cursos universitários de engenharia. No entanto, se descemos ao terreno de uma escola e de um curso de engenharia concretos, e nos dispomos a tomar medidas para melhorar a sua situação actual sob este aspecto, parece legítimo e prudente começar por fazer um diagnóstico o mais objectivo e preciso possível sobre onde estão, quais são, que dimensão e gravidade têm e quais as causas dos problemas nesta área, na escola e no curso de engenharia em questão. Ora, um tal diagnóstico não pode deixar de se basear numa análise estatística do fenómeno, que apresenta sempre três grandes etapas: a recolha de dados; o seu processamento, conduzindo ao cálculo de um conjunto de indicadores estatísticos; e a interpretação do cenário de valores destes indicadores para o caso em apreço, que proporciona as respostas finais às questões de diagnóstico acima formuladas.

Desconhecemos a existência de um estudo desta natureza no nosso país. Daí que o consideremos um desafio pendente. Neste contexto, o único propósito do presente capítulo, assumidamente modesto, é chamar a atenção para a necessidade, e alinhar umas poucas reflexões e propostas embrionárias e avulsas sobre um estudo deste tipo ¹.

Assim, uma primeira questão diagnóstica que se impõe fazer neste estudo é esta:

- Há, ou não, uma diferença estatisticamente significativa entre o insucesso escolar nas cadeiras de matemática e de engenharia do curso?

¹ Em André (2000), uma publicação com interesse e difusão restritos, vai-se um pouco mais longe nestas propostas, chegando-se a construir um leque diversificado e concreto de indicadores estatísticos aplicados especificamente a um curso de engenharia mecânica.

Neste contexto, o insucesso escolar pode ser quantificado pelo atraso na aprovação, pelo número de tentativas até aprovar e pelas classificações. Por outro lado, a confirmar-se a existência de mais insucesso escolar nas cadeiras de matemática, a investigação de questões como as seguintes permitiria apurar se tal facto se deverá ou não imputar, a par de outras causas, a deficiências no ensino da matemática:

- Apenas os maus estudantes, com médias de curso baixas, se atrasam na aprovação destas cadeiras, ou também os bons estudantes as atrasam?
- Fazem estas cadeiras nos últimos anos também os estudantes que atrasam pouco a conclusão do seu curso (interesse particular revestem, sob este aspecto, os cursos de mestrado integrado)?
- Os estudantes que atrasam estas cadeiras vão tentando aprová-las, época após época, ou adiam-nas simplesmente?

Uma segunda questão diagnóstica de fundo que se poderia investigar neste estudo é a seguinte:

- Qual a influência da formação matemática de base adquirida no início do curso (tipicamente, de 1º Ciclo), no desempenho escolar do estudante nas cadeiras de engenharia (1º e 2º Ciclos)?

A sua investigação mais fina pode, por sua vez, ser auxiliada pelas seguintes questões discriminantes:

- A aprovação prévia nas cadeiras de matemática aumenta as taxas de aprovação e as classificações nas cadeiras de engenharia?
- Haverá uma correlação positiva entre as classificações das cadeiras de matemática aprovadas previamente, e as de engenharia?

As questões e reflexões supra são suficientes para ilustrar a natureza e o interesse do estudo estatístico proposto no presente capítulo, que assim se encerra.

5. CONCLUSÕES

O Papel Formativo da Matemática em Engenharia

Reflexões “a priori”, corroboradas “a posteriori” por bons profissionais de engenharia, mostram que a matemática joga um tríptico papel na formação de um engenheiro (Capítulo 1):

- É “escola de pensamento” onde o engenheiro aprende a pensar e a comunicar o seu pensamento a outros com objectividade, rigor e concisão. A relevância desta primeira utilidade não é diminuída pelo reconhecimento do facto de que o engenheiro raramente tem necessidade de empregar um elevado grau de rigor matemático na sua vida profissional, seja como via de descoberta, confirmação ou justificação de soluções de engenharia.
- É “linguagem” que o engenheiro “lê”, em que “escreve” e que lhe serve de base para o “raciocínio verbal” sobre fenómenos e problemas de engenharia. Por esta via o engenheiro chega a adquirir uma compreensão profunda, geral e unitária dos conhecimentos de física e de engenharia da sua área, que lhe permite depois ser crítico e criativo no seu dia-a-dia profissional.
- É “ferramenta” que permite ao engenheiro resolver eficazmente, por si mesmo ou recorrendo à ajuda de especialistas matemáticos, os problemas matemáticos em que se traduzem muitos dos seus problemas de engenharia. No âmbito desta terceira utilidade, as possibilidades computacionais hoje existentes permitem ao engenheiro construir e explorar cabalmente, em tempo útil, modelos físico-matemáticos mais complexos que no passado, e, desta forma, abordar novos problemas de engenharia ou encontrar melhores soluções para problemas antigos.

É tal a relevância deste papel, que se pode dizer que há um mínimo necessário mas não um máximo desejável de formação matemática para um engenheiro. Por outro lado, a necessidade de conciliar a complexidade dos problemas com o tempo e os meios disponíveis, e com a qualidade da solução desejada, bem como a própria vocação, mais teórica ou mais experimentalista, do engenheiro, explicam que haja bons profissionais de engenharia a fazer uso da matemática em doses muito diversas.

Panorâmica da Formação Matemática de Base de Um Curso de Engenharia

Um curso universitário clássico de engenharia (1º e 2º Ciclos integrados) contém, de forma que se considera ser substancialmente justificada, cerca de 20% de cadeiras na área matemática. Pode obter-se uma panorâmica unitária deste conjunto de cadeiras subdividindo-o em três grandes blocos, de acordo com a sua natureza e objectivos formativos. São eles:

- O Bloco 1 (Secção 2.1), de formação matemática fundamental, composto pelas Análises Matemáticas e pela Álgebra Linear e Geometria Analítica. Estas cadeiras integram-se num projecto formativo unitário, cujo programa compreende substancialmente a Análise Vectorial (cf. Apêndice 1). Para além de formar a base da restante formação matemática de um engenheiro, constitui para ele um inestimável património “linguístico” e um útil “arsenal de ferramentas de cálculo”. Todas as cadeiras deste bloco têm potencial para desempenhar os três papéis formativos da matemática em engenharia, de forma equilibrada.
- O Bloco 2 (Secção 2.2), de formação matemática aplicada, composto por cadeiras como: Análise Numérica, Probabilidades e Estatística, e Investigação Operacional. As cadeiras deste bloco caracterizam-se por terem projectos formativos substancialmente autónomos e isolados, e por perseguirem objectivos eminentemente, se bem que não exclusivamente, práticos: habilitar o futuro engenheiro para fazer uso de certas teorias matemáticas para resolver problemas com interesse em

engenharia, de forma eficaz, segura e rápida. Por conseguinte, nestas cadeiras a matemática é principalmente uma “ferramenta”, secundariamente uma “linguagem”, e, em muito menor grau, “escola de pensamento”.

- O Bloco 3 (Secção 2.3), de formação matemática mista matemática/engenharia, composto por cadeiras como: Programação de Computadores e Desenho Técnico.

Recomendações Para o Ensino das Cadeiras de Matemática

São distintos as motivações, o modo de estudar e o uso que fazem da matemática um engenheiro e um matemático. Por conseguinte, existem especificidades a respeitar no ensino da matemática em cursos de engenharia.

Eis algumas recomendações pedagógicas para as cadeiras do Bloco 1, de formação matemática fundamental (Secção 2.1.5):

- Localizações óptimas das cadeiras no curso (1º Ciclo): cf. Quadro 2.
- Deve favorecer-se a percepção da unidade formativa deste bloco de cadeiras.
- O rigor formal usado deve diminuir das cadeiras de Análise Matemática I e II, e Álgebra, para as cadeiras de Análise Matemática III e IV.
- Sobre o papel formativo e a pedagogia das demonstrações matemáticas: cf. Secção 2.1.5, Subsecção “O Papel do Rigor Formal”, e Apêndice 3.
- Deve tirar-se partido da simbiose formativa entre a matemática e a física/ engenharia, exercitando o uso da “linguagem matemática” em contextos físicos e de fundamentos da engenharia familiares aos estudantes, de forma coordenada com a aprendizagem da própria matemática, para: motivar o estudante, fazê-lo assimilar mais profundamente os conhecimentos matemáticos e iniciá-lo na formação matemática aplicada à engenharia.

- Deve acautelar-se que o objectivo formativo de adestramento nas técnicas de cálculo, neste caso, analíticas, não atrofie os outros dois objectivos formativos, mais nobres mas mais árduos de alcançar: ensinar a pensar com rigor e ensinar a utilizar a matemática como “linguagem” em variados contextos aplicados.
- Salvaguardados os aspectos que se referem acima, como norma geral, parece mais indicado atribuir a regência destas cadeiras a matemáticos.

Para as cadeiras do Bloco 2, de formação matemática aplicada, fazem-se as seguintes recomendações pedagógicas (Secção 2.2.1):

- Não deixar que o rigor formal seja obstáculo para a consecução do principal objectivo formativo destas cadeiras, que é, como se refere acima, eminentemente aplicado.
- Cuidar a selecção dos problemas, que devem estar próximos dos contextos de engenharia relevantes, e cuidar, sobretudo, a sua abordagem metodológica. Esta abordagem deve transmitir a convicção, e a correspondente capacidade prática, de que «não há nada mais prático que uma boa teoria» para resolver problemas com eficácia, segurança e rapidez.
- As duas recomendações anteriores justificam que se pondere, com mais cuidado que nas cadeiras do Bloco 1, se a regência destas cadeiras deve ser atribuída a matemáticos ou a engenheiros, pressupondo nestes últimos especiais formação e vocação para esta função.
- Especificamente para a cadeira de Análise Numérica, que deve ser vista como um “estojo de primeiros socorros para cuidados numéricos básicos”: cf. Secção 2.2.2.
- A cadeira de Probabilidades e Estatística merece uma atenção especial (cf. Secção 2.2.3 e Apêndices 4-6), pelas dificuldades peculiares que apresenta em virtude do elevado nível de abstracção daquelas teorias matemáticas.

Dos três ingredientes que compõem uma formação matemática aplicada à engenharia, destacam-se os dois seguintes (Secção 3.1.1):

- A formação matemática de base, que deve reflectir ordem, clareza e unidade, a par de um domínio “quasi-físico” dos conhecimentos.
- A capacidade para dar “saltos lógicos”, que constitui o seu ingrediente mais genuíno e sinérgico, necessária para construir modelos físico-matemáticos de fenómenos, e para os testar e aplicar em situações de engenharia.

A respeito dos grandes passos para a sua aprendizagem num curso universitário de engenharia (do 1º ao 3º Ciclos), vale a pena chamar a atenção para dois aspectos, a saber:

- O conjunto de cadeiras de um curso de engenharia (1º e 2º Ciclos) bem estruturado, observando os cuidados pedagógicos que se referem acima para as cadeiras de matemática e abaixo para as cadeiras de engenharia, é mais que suficiente para proporcionar ao futuro engenheiro a formação matemática aplicada de que terá necessidade.
- Pode introduzir-se uma cadeira específica de formação matemática aplicada à engenharia no final do curso de mestrado (2º Ciclo), ou em 3º Ciclo, a título opcional, para oferecer uma “especialização teórica transversal” pela qual uns poucos engenheiros sentem especial apetência e vocação.

Problemas de Ligação Entre as Cadeiras de Matemática e de Engenharia

Podem identificar-se quatro grandes problemas na ligação entre as cadeiras de matemática e de engenharia (Secções 3.2 e 3.3), quais sejam:

- A dificuldade do estudante em usar a matemática como “linguagem” nos contextos requeridos pela cadeira de engenharia em causa. Cabe

aqui ao professor de engenharia um duplo papel: ajudar o estudante a colmatar brechas na sua formação matemática de base; e ensiná-lo a usar a matemática como “linguagem”, pondo em acção a simbiose formativa que se ilustra no âmbito das recomendações pedagógicas relativas às cadeiras de matemática do Bloco 1 (cf., em particular, Apêndice 7).

- A má utilização da matemática numa cadeira de engenharia, não a pondo devidamente ao serviço dos conhecimentos de engenharia cuja compreensão constitui o objectivo formativo principal destas cadeiras. Neste contexto, a matemática surge para o estudante como um obstáculo pedagógico artificial, sendo-lhe, assim, transmitida uma noção errada do papel da matemática em engenharia (cf. Apêndices 8 e 9).
- A necessidade de matemática avançada ou especializada, não compreendida nos programas das cadeiras de matemática do curso, que possa surgir numa ou noutra cadeira de engenharia (Secção 3.2.2).
- Um projecto formativo pobre da cadeira de engenharia em questão (Secção 3.3), caracterizado por uma sintomatologia própria, nas aulas teóricas e teórico-práticas, na avaliação e no estudo, cuja raiz profunda é o divórcio entre a teoria e a prática. Um tal projecto tem duas consequências negativas: por um lado, não proporciona uma verdadeira formação universitária de engenharia porque não gera a capacidade para aplicar conhecimentos fundamentais de matemática, física e engenharia, com domínio próprio e originalidade, para resolver problemas de engenharia; e, por outro lado, torna em grande medida inútil o investimento na formação matemática de base, no início do curso.

Análise Estatística do Fenómeno

Chama-se a atenção para o interesse em realizar análises estatísticas do “fenómeno” do ensino da matemática nos cursos de engenharia, de que se desconhece a existência em Portugal (Capítulo 4). Concretamente, estas análises:

- Devem contemplar, tanto o insucesso escolar específico na área da matemática, como a ligação entre o sucesso escolar nas cadeiras de matemática e de engenharia do curso (1º e 2º Ciclos).
- Revestem interesse para cursos e escolas de engenharia concretos, na medida em que proporcionam um diagnóstico objectivo e preciso da situação, o qual constitui um instrumento necessário para ajuizar da real necessidade de uma actuação correctiva neste campo, e para a levar a cabo de modo acertado e eficaz.

(Página deixada propositadamente em branco)

BIBLIOGRAFIA

- APOSTOL, T. M. (1967) *Calculus*, Vol. I (2ª Ed.). Ed. Xerox Corp. (Int. Textbook Series).
- ANDRÉ, J. C. S. (2000) *O ensino da matemática no curso de licenciatura em engenharia mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra (DEM-FCTUC)*. Relatório interno do DEM-FCTUC.
- ANDRÉ, J. C. S. (2008) *Probabilidades e estatística para engenharia*. Ed. LIDEL - Edições Técnicas.
- Bajpai, A. C.; CALUS, I. M. ; FAIRLEY, J. A. (1979) *Statistical Methods for Engineers and Scientists*. Ed. John Wiley & Sons.
- CHAPRA, S. C. ; CANALE, R. P. (1989) *Numerical Methods for Engineers*. Ed. McGraw-Hill Int. (Appl. Math. Series).
- CORTEZ, J. A. S. (1987) *Texto de Conferência pronunciada por ocasião dos trabalhos preparatórios do Código Deontológico da Ordem dos Engenheiros* (Junho de 1987, Porto).
- FERREIRA, J. C. (1991) *Introdução à Análise Matemática* (4ª Ed.). Ed. Gulbenkian (Col. Manuais Universitários).
- FEYNMAN, R. (1989) *O que é uma lei física*. Ed. Gradiva (Col. Ciência Aberta, n. 35).
- MURTEIRA, B. J. F. (1990 a,b.) *Probabilidades e Estatística*, Vols. I e II (2ª Ed. Rev.). Ed. Mc Graw-Hill de Portugal.
- SWOKOWSKI, E. W. (1983) *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 1. Ed. McGraw-Hill do Brasil.
- YOUNG, E. C. (1993) *Vector and Tensor Analysis* (2nd Ed.). Ed. Marcel & Dekker.

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICES

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICE 1:
PROGRAMA DA SUPER-TEORIA DE ANÁLISE VECTORIAL (REAL)

Capítulo 1 – Álgebra Vectorial

1. Três conceitos de vector ¹
2. Álgebra vectorial em \mathbb{R}^n ²
 - 2.1. Operações algébricas básicas
 - 2.2. Produto vectorial interno (norma Euclidiana, ortogonalidade)
 - 2.3. Combinação linear (sub-espço, independência, bases, sistemas de coordenadas rectilíneas)
 - 2.4. Produto vectorial externo
 - 2.5. Produtos vectoriais derivados (misto, externo duplo)

Capítulo 2 – Funções ou Transformações Lineares

1. Conceitos básicos (linearidade, representação matricial, operações básicas)
2. Vectores e valores próprios
3. Transformações de semelhança (congruência, equivalência)
4. Transformações lineares especiais (simétricas e anti-simétricas, ortogonais)
5. Formas quadráticas

¹ Correspondentes, respectivamente, às abordagens das teorias Geométrica, Analítica e Axiomática.

² Deste ponto em diante, parece preferível adoptar a Teoria Analítica como abordagem padrão, e reservar a Teoria Geométrica para motivar ou ilustrar conceitos e teses concretas que o justifiquem, e a Teoria Axiomática para proporcionar, aqui e além, uma perspectiva mais profunda e geral de algumas partes da teoria.

Capítulo 3 – Operadores Diferenciais

1. Conceitos básicos (tipos de funções vectoriais, representações gráficas, noções de continuidade e limite)
2. Operadores de derivação unidimensional (derivadas direccionais e parciais)
3. Operador de derivação total aplicado a campos escalares e vectoriais (gradiente e matriz jacobiana, fórmula de Taylor)
4. Operadores diferenciais especiais (divergência, rotacional, laplaciano)
5. Equações diferenciais (ordinárias e parciais ³, simples e sistemas)
6. Geometria analítica vectorial (linhas e superfícies)

Capítulo 4 – Operadores Integrais

1. Interpretação geométrica de um operador integral genérico
2. Tipos de operadores integrais
 - 2.1. Integrais múltiplos (simples, duplos, triplos...)
 - 2.2. Integrais paramétricos (de linha, de superfície, volúmicos...)
3. Conceitos e teoremas importantes
 - 3.1. Fluxo de um campo vectorial e teorema da divergência
 - 3.2. Circulação de um campo vectorial e teorema de Stokes
 - 3.3. Teoremas de transporte ⁴ (opcional)
 - 3.4. Campos vectoriais conservativos e solenoidais

³ Tratar-se-ia, em todo o caso, de uma introdução bastante sumária (cf. Secções 2.1.4 e 3.2.2).

⁴ Empregando a linguagem da Termodinâmica e da Mecânica dos Fluidos, estes teoremas relacionam as taxas de variação de propriedades extensivas de um meio material em movimento macroscópico, caracterizado por um certo campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, para sistemas integrais do tipo “volume de controlo” e “massa de controlo”, em 2D (entendendo por “volume generalizado 2D” uma “superfície”) ou 3D. Neste sentido, por exemplo, a eq. (1) pode ser vista como a formulação diferencial de um teorema de transporte em 3D.

APÊNDICE 2:
EXEMPLOS DE DESCONTINUIDADES
DE CAMPOS ESCALARES BIDIMENSIONAIS

§ **Exemplo A2.1:** Descontinuidade em fundão com simetria radial e eixo OZ, do campo f , em O,

$$z \equiv f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad (\text{A2.1}) \blacksquare$$

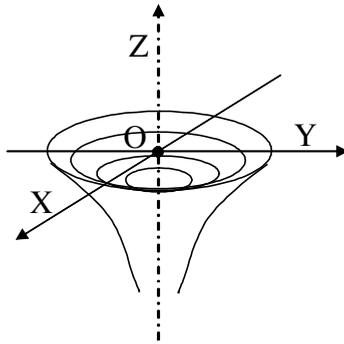


Figura A2.1– (Exemplo A2.1) – Vista em perspectiva (não rigorosa), em OXYZ, da descontinuidade do campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$, em O.

§ **Exemplo A2.2:** Paredão de descontinuidade ao longo da recta $y=x$, em OXY, do campo f ,

$$z \equiv f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{x-y} \quad (\text{A2.2}) \blacksquare$$

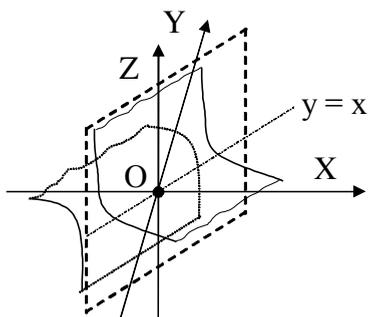


Figura A2.2 – (Exemplo A2.2) – Vista em perspectiva (não rigorosa), em OXYZ, da descontinuidade do campo escalar f , ao longo da bissetriz dos quadrantes ímpares de OXY.

§ **Exemplo A2.3:** Sucessão de paredes cilíndricas de descontinuidade, com eixo OZ e traço $x^2 + y^2 = (i + 1/2) \cdot \pi$ ($i = 0, 1, \dots$) no plano OXY, do campo f ,

$$z \equiv f(x, y) = \log(\cos(x^2 + y^2)) \quad (\text{A2.3}) \blacksquare$$

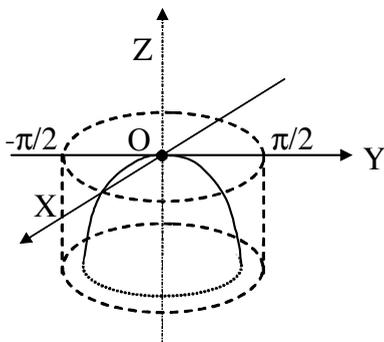


Figura A2.3 – (Exemplo A2.3) – Vista em perspectiva (não rigorosa), em OXYZ, da descontinuidade do campo escalar f , sobre a circunferência de centro em O e raio $\pi/2$, em OXY. Mostra-se apenas uma vista unilateral da descontinuidade, correspondente ao lado de dentro da circunferência.

§ **Exemplo A2.4:** Descontinuidade assimilável a uma escada em caracol com eixo OZ e degraus com largura infinita e passo contínuo, do campo f , em O,

103

$$z \equiv f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \quad (\text{A2.4}) \blacksquare$$

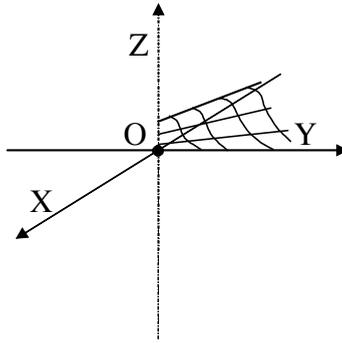


Figura A2.4 – (Exemplo A2.4) – Vista parcial, em perspectiva (não rigorosa), em OXYZ, da descontinuidade do campo escalar f , em O. O gráfico de f é simétrico relativamente ao eixo OZ. Mostra-se apenas a parte do gráfico de f correspondente a um dos bissetores do segundo quadrante do plano OXY.

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICE 3:
A DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA DO TEOREMA
DA DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA: TRÊS EXPOSIÇÕES

O propósito deste apêndice é fazer uma análise comparativa, do ponto de vista do seu valor formativo para estudantes de engenharia, de três exposições da demonstração clássica do Teorema da Derivada da Função Composta no âmbito da Análise de Funções Reais de Variável Real, matéria dada nas cadeiras de AM I ou II, da autoria de Ferreira (1991), Swokowski (1983) e Apostol (1967).

O enunciado do teorema, retirado de Ferreira (1991) [p. 360]¹, é o seguinte:

«Suponha-se que $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $b=g(a)$. Então $f \circ g$ é diferenciável no ponto a e tem-se

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad (\text{A3.1})$$

Eis a demonstração apresentada pelo mesmo autor [pp. 360-362]:

«Começaremos por mostrar que, nas condições da hipótese (que exige em particular que seja $a \in \text{int } E$ e $b \in \text{int } D$) o ponto a é interior ao domínio U da função $\psi = f \circ g$, $U = \{x: x \in E \wedge g(x) \in D\}$.

Com efeito, decorre da hipótese a existência de números positivos δ e ε' tais que $V_{\varepsilon'}(a) \subset E$ e $V_{\delta}(b) \subset D$. Por outro lado, sendo g contínua em a (por aí ser diferenciável) e $g(a)=b$, existirá ε'' tal que $g(x) \in V_{\delta}(b)$ para qualquer $x \in V_{\varepsilon''}(a) \cap E$. Para concluir que, com $\varepsilon = \min \{ \varepsilon', \varepsilon'' \}$, $V_{\varepsilon}(a) \subset U$ (o que mostrará que $a \in \text{int } U$) basta então observar que, para $x \in V_{\varepsilon}(a) \cap \theta$ se tem por um lado $x \in E$ (por ser $V_{\varepsilon}(a) \subset V_{\varepsilon'}(a) \subset E$) e por outro $g(x) \in D$ (por ser $V_{\varepsilon}(a) = V_{\varepsilon''}(a) \cap V_{\varepsilon'}(a) \subset V_{\varepsilon''}(a) \cap E$).

¹ A numeração das equações é nossa.

Ponhamos agora:

106

$$\alpha(h) = \begin{cases} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} - g'(a) & \text{se } a+h \in E \text{ e } h \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases} \quad (\text{A3.2a,b})$$

e

$$\beta(k) = \begin{cases} \frac{f(b+k) - f(b)}{k} - f'(b) & \text{se } b+k \in D \text{ e } k \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (\text{A3.3a,b})$$

Ter-se-á evidentemente $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = \lim_{k \rightarrow 0} \beta(k) = 0$ e

$$g(a+h) - g(a) = h \cdot [g'(a) + \alpha(h)] \quad (\text{para } a+h \in E) \quad (\text{A3.4a,b})$$

$$f(b+k) - f(b) = k \cdot [f'(b) + \beta(k)] \quad (\text{para } b+k \in D)$$

Se nos limitarmos a considerar valores de h de módulo suficientemente pequeno para que $a+h \in U$ (não esquecer que $a \in \text{int } U$) e portanto $g(a+h) \in D$, poderemos substituir, na última das igualdades precedentes, k por $g(a+h) - g(a)$, obtendo:

$$f(g(a+h)) - f(g(a)) = (g(a+h) - g(a)) \cdot (f'(b) + \beta(k)) \quad (\text{A3.5})$$

(onde $\beta(k)$ é abreviatura de $\beta[g(a+h) - g(a)]$) e portanto:

$$\psi(a+h) - \psi(a) = h \cdot [g'(a) + \alpha(h)] \cdot [f'(b) + \beta(k)] \quad (\text{A3.6})$$

ou, sendo ainda $h \neq 0$:

$$\frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} = [g'(a) + \alpha(h)] \cdot [f'(b) + \beta(k)] \quad (\text{A3.7})$$

Fazendo $h \rightarrow 0$ e atendendo a que $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$ e à igualdade

$$\lim_{h \rightarrow 0} \beta [g(a+h) - g(a)] = 0$$

107

(que facilmente se justifica recorrendo ao teorema 12, §III.2 e tendo em conta, em particular, a continuidade de g no ponto a e o facto de a função β ter limite nulo no ponto 0) pode então concluir-se que

$$\psi'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) \text{.} \text{.} \text{.} \quad (\text{A3.8}) \blacksquare$$

Swokowski (1983) [pp. 116-117] opta por apresentar a seguinte demonstração parcial no corpo do texto, remetendo para apêndice o material adicional necessário para tornar a demonstração completa ²:

«Seja Δx um acréscimo, tal que tanto x como $x + \Delta x$ estejam no domínio da função composta. Como $y = f(g(x))$, o acréscimo correspondente de y é dado por

$$\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) \quad (\text{A3.1}')$$

Se a função composta tem derivada em x , então, por definição,

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{A3.2}')$$

Consideremos, em seguida, $u = g(x)$ e seja Δu o acréscimo de u correspondente a Δx , isto é,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \quad (\text{A3.3}')$$

² De novo, a numeração das equações é nossa. Optámos por manter integralmente a notação original por nos parecer que a sua harmonização com a da primeira demonstração a viria prejudicar. A correspondência das notações é a seguinte: $x = a$ e $u = b$.

Como

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u \quad (\text{A3.4'})$$

108

podemos exprimir Δy como

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \quad (\text{A3.5'})$$

Se $y=f(u)$ é diferenciável em u , então, por definição,

$$D_u y = f'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (\text{A3.6'})$$

Analogamente, se $u=g(x)$ é diferenciável em x , então

$$D_x u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\text{A3.7'})$$

Suponhamos que existe um intervalo aberto I contendo x , tal que, sempre que $x+\Delta x$ está em I e $\Delta x \neq 0$, então $\Delta u \neq 0$ ³. Nesse caso podemos escrever

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \quad (\text{A3.8'})$$

desde que o limite exista. Como g é diferenciável em x , é contínua em x . Logo, se $\Delta x \rightarrow 0$, então $g(x+\Delta x)$ tende para $g(x)$ e $\Delta u \rightarrow 0$. Segue-se que a última fórmula do limite acima apresentada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} D_x y &= \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= (D_u y) \cdot (D_x u) = f'(u) \cdot g'(x) \end{aligned} \quad (\text{A3.9'a,b})$$

que é o que queríamos demonstrar.» ■

³ Diga-se, de passagem, que esta é a hipótese desnecessária que constitui a principal limitação desta demonstração parcial.

Por último, apresenta-se a demonstração de Apostol (1967) [pp. 175-176] ⁴:

«Assumimos que g tem derivada em a e que f tem derivada em $g(a)$, e queremos provar que $\psi = f \circ g$ tem derivada em a dada pelo produto $f'[g(a)] \cdot g'(a)$. A razão incremental de ψ [em a] é

109

$$\frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \quad (\text{A3.1''})$$

Neste momento é útil introduzir alguma notação nova. Seja $b = g(a)$ e $k = g(a+h) - g(a)$. (É importante reparar que k depende de h .) Temos então $g(a+h) = b+k$ e (A3.1'') converte-se em

$$\frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} = \frac{f(b+k) - f(b)}{h} \quad (\text{A3.2''})$$

O membro direito de (A3.2'') assemelha-se à razão incremental cujo limite define $f'(b)$ exceptuando o facto de h aparecer em denominador em vez de k . Se $k \neq 0$, é fácil completar a demonstração. Multiplicamos simplesmente o numerador e o denominador por k , e o membro direito de (A3.2'') fica

$$\frac{f(b+k) - f(b)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{f(b+k) - f(b)}{k} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \quad (\text{A3.3''})$$

Quando $h \rightarrow 0$, o último quociente no membro direito tende para $g'(a)$. Além disso, $k \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ porque $k = g(a+h) - g(a)$ e g é contínua em a . Por conseguinte o primeiro quociente no membro direito de (A3.3'') aproxima-se de $f'(b)$ quando $h \rightarrow 0$, e isto [prova imediatamente o teorema].

⁴ A notação, bem como as equações (A3.4''), (A3.5'') e (A3.6''), foram ligeiramente alteradas para facilitar a comparação com as demonstrações dos outros autores, sem que daí resulte qualquer dificuldade acrescida de acompanhamento. A numeração das equações sofreu uma adaptação simples. A tradução do inglês é nossa. Os textos entre parêntesis rectos foram acrescentados ou um pouco alterados em relação ao original, para suprir a ausência do contexto.

Embora o argumento anterior pareça o mais natural a adoptar, ele não é perfeitamente geral. Uma vez que $k=g(a+h)-g(a)$, pode suceder que $k=0$ para infinitos valores de h quando $h \rightarrow 0$, caso em que a passagem de (A3.2'') para (A3.3'') não é válida. Para ultrapassar esta dificuldade, requer-se uma ligeira modificação do argumento.

Regressemos à equação (A3.2'') e exprimamos o quociente no membro direito numa forma tal que não envolva k no denominador. Com este propósito introduzimos a diferença entre a derivada $f'(b)$ e a razão incremental cujo limite é $f'(b)$. Isto é, definimos uma nova função β como se segue:

$$\beta(t) = f'(b) - \frac{f(b+t) - f(b)}{t} \quad \text{se } t \neq 0 \quad (\text{A3.4''})$$

Esta equação define $\beta(t)$ somente se $t \neq 0$. Multiplicando por t e re-arranjando os termos, podemos escrever (A3.4'') da seguinte forma:

$$f(b+t) - f(b) = t \cdot [f'(b) + \beta(t)] \quad (\text{A3.5''})$$

Embora (A3.5'') tenha sido obtida sob a hipótese de que $t \neq 0$, também é válida para $t=0$, desde que atribuamos um valor definido a $\beta(0)$. Como $\beta(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, vamos definir $\beta(0)$ igual a 0. Isto assegura a continuidade de β em 0. Se, agora, substituirmos t em (A3.5'') por k , onde $k=g(a+h)-g(a)$, e substituirmos o membro direito de (A3.3'') em (A3.2''), obtemos

$$\frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} = [f'(b) + \beta(k)] \cdot \frac{k}{h} \quad (\text{A3.6''})$$

uma fórmula que é válida mesmo quando $k=0$. Quando $h \rightarrow 0$ o quociente $k/h \rightarrow g'(a)$ e $\beta(k) \rightarrow 0$ de modo que o membro direito de (A3.6'') se aproxima do limite $f'(b) \cdot g'(a)$. Isto completa a demonstração [do teorema].» ■

Em nossa opinião, das três demonstrações transcritas acima, a terceira é a melhor do ponto de vista pedagógico, no quadro de uma cadeira de AM I ou II de um curso de engenharia (1º Ciclo não profissionalizante). Nela, Apostol:

111

- i) num primeiro argumento, expõe sucinta e eficazmente a ideia-chave da demonstração, sem desviar demasiado cedo a atenção do leitor para aspectos acessórios;
- ii) mostra as limitações do primeiro argumento e motiva a sua superação através de um segundo argumento, que, apesar de mais subtil e difícil de apreender que o primeiro, expõe com uma simplicidade desarmante;
- iii) e acaba, assim, por construir uma demonstração que nem faz cedências significativas no rigor nem se estende excessivamente.

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICE 4:
INTERESSE/NECESSIDADE DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA
NUM CURSO DE ENGENHARIA

Previsão Determinística versus Previsão Probabilística/Estatística

No Quadro A4.1 identificam-se as propriedades distintivas de uma previsão probabilística/estatística ¹ e de uma previsão determinística de idêntico nível. O objecto de ambas as previsões é o valor que a variável X vai tomar numa certa realização de um fenómeno qualquer, designando X uma característica observável do fenómeno. Sem perda de generalidade, admite-se que a variável X é discreta, sendo medida, por exemplo, por um processo de contagem.

Quadro A4.1 – Previsão determinística “versus” previsão probabilística de um fenómeno caracterizado pela variável X.

	Previsão determinística	Previsão probabilística
Propriedades:	individualizada/ completa <i>e</i> certa/sem risco	individualizada <i>mas</i> incerta/arriscada <i>ou</i> agregada/incompleta <i>mas</i> certa
Termos da previsão:	“A variável X vai tomar <i>tal</i> valor.”	“Existe uma probabilidade de <i>tantos</i> % de a variável X tomar <i>tal</i> valor.” “Num grande número de casos similares, em média, a variável X toma <i>tal</i> valor.”

¹ Doravante, o qualificativo simples “probabilístico” abrevia a designação composta “probabilístico/ estatístico”.

Uma simples inspecção do Quadro A4.1 suscita num engenheiro, de imediato, a seguinte questão: “Atendendo às características superiores, de certeza e concretização, de uma previsão determinística, qual o interesse ou necessidade de adoptar uma previsão probabilística?”. A resposta é que tal interesse ou mesmo necessidade ocorrem quando estamos na presença de um “fenómeno aleatório”, isto é, quando, no nível de previsão desejado, se verificam uma ou mais das seguintes condições:

- i) Não se dispõe de informação e/ou de capacidade de controlo suficientemente ricas e precisas sobre alguns dos parâmetros de entrada ou de configuração do fenómeno para se poder fazer uma previsão determinística satisfatória.
- ii) O fenómeno é demasiado complexo para que, embora em princípio possível, seja viável realizar uma previsão determinística.
- iii) O fenómeno é, por princípio, intrinsecamente indeterminístico, isto é, não admite mesmo uma previsão física determinística.

Passam a apresentar-se cinco exemplos ilustrativos tirados de contextos familiares a estudantes de engenharia do 1º Ciclo. A condição i) dá-se nos Exemplos A4.1 e A4.2, e talvez também no Exemplo A4.4. A condição ii) verifica-se nos Exemplos A4.3 e A4.5. A condição iii) talvez ocorra no Exemplo A4.4.

§ **Exemplo A4.1:** Observar as posições de impacto dos tiros no alvo de uma carreira de tiro, sob rajadas fortes e erráticas de vento. Neste caso, um modelo determinístico baseado na Mecânica Clássica proporciona, quando muito, a posição média ² dos tiros. Uma previsão estatística inclui infor-

² Na verdade, a interpretação do valor pretensamente “exacto e certo” proporcionado por um tal modelo determinístico, como um “valor médio” das posições de impacto dos tiros, já pressupõe o recurso à Teoria das Probabilidades e Estatística.

mação adicional sobre a incerteza de previsão da posição de impacto de tiros individuais. O fenómeno em causa é classificado como “puramente clássico” (não caótico nem quântico), e os seus factores “aleatórios” (incontroláveis/desconhecidos) são a pontaria do atirador e o vento. ■

§ **Exemplo A4.2:** Lançar um dado de jogar e observar a face que fica voltada para cima. Este fenómeno é classificado como “clássico mas caótico”, dado que é muito sensível a pequenas perturbações de alguns dos seus parâmetros de entrada. Neste caso é inútil construir um modelo determinístico para adivinhar a face que vai sair no próximo lançamento do dado, mesmo trabalhando com um dispositivo puramente mecânico de lançamento. ■

§ **Exemplo A4.3:** Para um gás simples em equilíbrio termodinâmico, construir um modelo mecânico clássico na escala molecular ou microscópica, do qual se possa depois deduzir, na escala macroscópica, um modelo de estado térmico do gás expresso por uma relação com a forma geral

$$f(p, V, T, n) = 0 \quad (\text{A4.1})$$

sendo: p e T , a pressão e a temperatura absolutas do gás, espacialmente uniformes; e V , o volume ocupado por n moles de moléculas do gás. Embora o modelo macroscópico possa ter carácter determinístico, o modelo microscópico que está na sua base deve ter, necessariamente, natureza probabilística, pois o número de moléculas contido em qualquer volume macroscópico do gás é da ordem de grandeza do número de Avogadro ($\sim 10^{23}$). A construção de um tal modelo é levada a cabo na Mecânica Estatística Clássica, situando-se a relação (A4.1) no âmbito da Termodinâmica Macroscópica. ■

§ **Exemplo A4.4:** Prever o instante de disparo de um fóton por uma fonte radioactiva. Presentemente, a abordagem mais satisfatória deste problema é feita no domínio da Mecânica Quântica, a qual tem carácter intrinsecamente probabilístico no sentido em que certas grandezas físicas básicas, como sejam, a posição ou o momento linear de uma partícula elementar, são representadas matematicamente por campos de variáveis aleatórias. Concretamente, neste caso, a teoria apenas é capaz de calcular a função densidade de probabilidade da variável aleatória $T \equiv$ (lapso de tempo entre o disparo de dois fótons consecutivos), da qual se pode depois extrair, por exemplo, o valor médio de T ou a probabilidade de um valor individual mas arbitrário de T cair num intervalo finito pré-especificado, $[t_1, t_2]$. Actualmente, muitos físicos pensam que, neste âmbito, dito “quântico”, não pode mesmo existir uma teoria física determinística mais fundamental que a Mecânica Quântica, isto é, parece-lhes impossível construir uma teoria sub-quântica determinística, formulada num nível de descrição mais profundo e básico. ■

§ **Exemplo A4.5:** Planear o fornecimento do stock de livros de uma livraria. Não sendo possível fazer previsões determinísticas fiáveis sobre o volume diário de vendas de um livro, para fazer uma gestão do stock economicamente eficiente, um livreiro deve necessariamente recorrer a conceitos e ferramentas probabilísticas. (De passagem, repare-se que a actuação livre de uma pessoa não admite mesmo qualquer previsão física, seja determinística seja probabilística ³). ■

³ Tecnicamente, dir-se-ia que a actuação de um ser livre não se pode circunscrever ao quadro de uma “experiência aleatória”, isto é, de um procedimento que, pelo menos em princípio, é “reprodutível” e exhibe “regularidade estatística”.

1. Análise e simulação do comportamento de sistemas físicos caóticos, complexos ou intrinsecamente indeterminísticos (por exemplo: jogos de azar, processos de fabrico ou fontes radioactivas) e de sistemas biológicos (por exemplo: dinâmica de crescimento de populações ou características físicas de seres vivos).

2. Análise e controlo de projectos:
 - Análise e controlo do risco em projectos de engenharia sujeitos a condicionantes aleatórias, tais como, condições de utilização imponderáveis ou cargas de origem natural.
 - Análise económica de projectos com risco.

3. Análise e controlo de erros aleatórios em experiências, como sejam, certo tipo de erros de medida ou erros de arredondamento em cálculos complexos.

4. Análise e controlo de processos e organizações:
 - Prospecções de mercado.
 - Planeamento e organização da produção.
 - Gestão de stocks.
 - Fiabilidade e manutenção de sistemas sujeitos a falhas aleatórias.
 - Controlo de qualidade de processos.
 - Gestão de tráfego em redes de comunicações.

Quadro A4.2 – Necessidades de Probabilidades e Estatística potencialmente sentidas em várias cadeiras ou áreas de um curso de engenharia (1º e 2º Ciclos).

Aplicações de Probabilidades e Estatística	Cadeiras/Áreas Beneficiárias
• Erros de natureza aleatória	Análise Numérica
• Funções geradoras de números aleatórios	Programação de Computadores
• Filas de espera, Cadeias de Markov	Investigação Operacional
• Mecânica Estatística (distrib. de velocidades moleculares de Maxwell, interpretação estatística de grandezas microscópicas...)	Termodinâmica
• Tratamento estatístico da fadiga dos materiais	Resistência de Materiais Órgãos de Máquinas
• Quantificação do risco em projecto	Projecto
• Tratamento de sinais aleatórios	Controlo Automático de Sistemas
• Análise estatística de erros de medida	Métodos de Medida
• Caracterização estatística de condições meteorológicas (vento, precipitação...)	Ambiente
• Análise estatística e gestão de linhas de produção	Gestão da Produção
• Gestão de stocks	
• Fiabilidade de sistemas	Gestão da Qualidade
• Controlo estatístico de processos	
• Leis de degradação de máquinas	Manutenção
• Análise de risco em projectos de investimento	
• Prospecções de mercado	Economia e Gestão

APÊNDICE 5:
UM PROJECTO FORMATIVO EM TEORIA DAS PROBABILIDADES:
VISÃO PANORÂMICA E DISCUSSÃO DE ALGUNS TÓPICOS

Discutem-se abaixo alguns tópicos avulsos de Teoria das Probabilidades com o exclusivo propósito de ilustrar os cuidados a ter e os perigos a evitar na sua exposição a estudantes de engenharia. De passagem, proporciona-se uma visão panorâmica do projecto formativo subjacente, desenvolvido em André (2008).

A Definição Clássica de Probabilidade

Subentende-se a familiaridade do leitor com o vocabulário básico da teoria, o qual se apoia de perto no da Teoria dos Conjuntos, destacando-se o conceito-chave de “experiência aleatória” e os conceitos-satélite de “espaço de resultados” e “acontecimento”.

Neste pressuposto, eis um enunciado possível da definição clássica de probabilidade:

- «Dados uma experiência aleatória E , com espaço de resultados R , e um acontecimento $A \subset R$, define-se $P(A) \equiv$ (Probabilidade de A ocorrer numa realização de E) como

$$P(A) = \frac{\#A}{\#R} \tag{A5.1}$$

onde o símbolo “#” designa o operador “cardinal”, ou “número de elementos de”, aplicado a conjuntos. Esta definição apresenta duas restrições importantes, a saber: (i) R tem de se poder “contar”, isto é, tecnicamente, deve ser um conjunto numerável ou discreto, embora não necessite,

estritamente, de ser finito; e (ii) todos os acontecimentos elementares que se podem definir em R têm de ser “equiprováveis”.)»

120

Um dos aspectos que é importante esclarecer, é que esta definição não é propriamente viciosa mas sim uma definição com carácter teórico, isto é, hipotético, e, evidentemente, restritivo, como se passa a explicar. Um vício formal resulta, é certo, do uso do termo “equiprovável” na definição (restrição (ii)). Contudo, passando a conferir à restrição (ii) o estatuto de hipótese “a priori”, este vício desaparece. O problema é então transferido do plano teórico para o plano prático, pois o que é importante saber agora é se, para uma dada experiência aleatória E , é possível aceitar ou rejeitar uma tal hipótese com base em ideias físicas prévias e independentes da definição de probabilidade dada acima. Ora sucede que, nalguns casos com interesse prático, a resposta a esta questão é afirmativa. Tratam-se daqueles casos reais, tal como o do Exemplo A5.1, que se aproximam suficientemente de casos-limite ideais em que se verifica um princípio físico de simetria.

§ **Exemplo A5.1:** A experiência E consiste no lançamento de um dado de jogar e na observação do número que sai. Corresponde-lhe o espaço de resultados, $R=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A simetria cúbica e a uniformidade do campo de densidade, ρ [kg/m^3]= $\rho(\mathbf{r})$, do dado, características de um “dado ideal ou perfeito”, constitui, neste caso, o suporte físico de um Princípio de Simetria segundo o qual se pode afirmar “a priori” que

$$P(\{i\})=P(\{j\}) \text{ para } i,j=1, 2, \dots, 6 \quad (\text{A5.2}) \blacksquare$$

Este tipo de argumento hipotético é utilizado, na verdade, na construção de qualquer modelo físico-matemático em engenharia, carecendo apenas, naturalmente, de confirmação experimental. Por outras palavras, a definição clássica de probabilidade é, do ponto de vista formal, perfeitamente satisfatória em engenharia. O que não é, por outro lado, é geral, pois existem muitas experiências aleatórias em que não se pode recorrer “a priori” a um princípio de simetria, ou em que o espaço de resultados não é contável.

Há ainda um segundo aspecto que vale a pena ter em conta ao tratar a definição clássica. É que, para alguns conjuntos, o problema da sua contagem, de formulação tão simples, é, pelo contrário, de resolução complexa no âmbito do Cálculo Combinatório. Deve, pois, ser acautelado que o centro de gravidade da atenção do estudante não seja excessivamente desviado para esta área, claramente marginal à formação em Teoria das Probabilidades necessária para um engenheiro.

A Definição Empírica de Probabilidade

Tome-se agora a seguinte definição empírica de probabilidade:

- «Dados uma experiência aleatória E , com espaço de resultados R , e um acontecimento $A \subset R$, define-se

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r,n}(A) \quad (\text{A5.3})$$

em que $f_{r,n}(A) \equiv$ (frequência relativa de ocorrência de A , em n réplicas de E).»

Esta definição é verdadeiramente notável para um engenheiro, visto que se trata de uma definição “experimental”, isto é, de uma definição que propõe um “procedimento de medida” da probabilidade $P(A)$. Esta, assume assim o estatuto de uma grandeza física real, tal como o comprimento ou a massa. Por outras palavras, $P(A)$ passa a ser vista como uma propriedade física do acontecimento A no seio da experiência E : um suporte físico objectivo para o grau de certeza que o experimentador tem sobre a ocorrência de A numa realização arbitrária de E , à semelhança do modo como a massa de um corpo traduz a sua inércia em movimento de translação. É certo que, na sua aplicação prática, o processo de medida acima referido não é isento de erro – em princípio, tanto menor quanto maior for o número de réplicas, n , que o experimentador esteja disposto a realizar –, mas também não é menos certo que os erros de medida constituem uma realidade familiar e natural para um engenheiro.

Embora geral “a priori”, do ponto de vista puramente formal, esta definição, tal como a definição clássica, também não é perfeita pois, por exemplo, assenta no pressuposto, não justificado, da convergência de qualquer sucessão de frequências relativas, $f_{r,n}(A)$, para um limite único, $P(A)$. Tal convergência, quando empiricamente verificada (ainda que apenas parcialmente, como uma tendência observada), recebe, aliás, a designação de “regularidade estatística” da experiência aleatória E . Mais uma vez, porém, na prática, tal crítica não colhe, pois pode demonstrar-se que, sendo a experiência E idealmente reproduzível, condição que cabe ao experimentador assegurar e verificar com suficiente aproximação, a probabilidade de ocorrência de uma sucessão $f_{r,n}(A)$ divergente, ou convergente mas com um limite distinto de $P(A)$ é nula ¹, isto é, tais sucessões anómalas são raríssimas e, quando ocorrem, podem ser facilmente descartadas pelo experimentador.

Um outro aspecto que, neste contexto, assume importância para estudantes de engenharia é o confronto entre os valores obtidos para $P(A)$ empregando as definições clássica e empírica de probabilidade, num caso em que a primeira seja presumivelmente aplicável, como seja, o caso da experiência do lançamento de um dado real aproximadamente “perfeito” e do acontecimento $A = \{\text{“sair um número par”}\}$ (cf. Exemplo A5.1).

Um Núcleo da Teoria das Probabilidades

Um ponto, surpreendente para o estudante, para o qual é importante chamar a sua atenção, é que o simples quadro teórico formado pelo vocabulário e definições básicas de probabilidade acima esboçado, constitui já um núcleo suficientemente

¹ Nomeadamente, é fácil ver que a sucessão de variáveis aleatórias discretas X_n ($n=1, 2, \dots$), tais que $x_n=f_{r,n}(A)$, verifica $n \cdot X_n \sim \mathbf{Bi}(p=P(A), n)$ e, portanto, $E(X_n)=P(A)$ e $\text{Var}(X_n)=P(A) \cdot (1-P(A))/n$. Daqui à demonstração da tese “ $\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - P(A)| < \varepsilon) = 1$ ”, conhecida como Lei dos Grandes Números para a distribuição Binomial, vai apenas um pequeno passo, muito facilitado, aliás, pelo emprego do Teorema de Chebyshev. Já a demonstração cabal da tese “ $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = P(A)) = 1$ ”, a chamada Lei Forte dos Grandes Números, que é aquela que aqui mais interessa, é bem mais complexa de fazer.

completo da Teoria das Probabilidades, no sentido em que os desenvolvimentos ulteriores que verá a seguir apenas tornam mais simples e expedita a resolução de problemas que, em princípio, também podem ser resolvidos empregando exclusivamente conceitos e resultados deste núcleo duro.

As “Leis das Probabilidades”

Um primeiro desenvolvimento possível deste núcleo duro da teoria consiste em tirar partido da Teoria dos Conjuntos para resolver a seguinte classe de problemas, de grande interesse prático:

- «Dados uma experiência aleatória, E , e, contidos no seu espaço de resultados, R , vários acontecimentos-base, como sejam, A , B e C , e um acontecimento-derivado, D , que se pode obter de (A, B, C) por meio das operações que se definem entre conjuntos, podendo ser, por exemplo, $D = (A \cup B) \cap \bar{C}$; obter uma relação o mais simples possível entre $P(D)$, as probabilidades dos acontecimentos-base e, se necessário, de outros acontecimentos seus derivados, uns e outros com probabilidades previamente conhecidas ou, pelo menos, mais simples de calcular, recorrendo a uma das definições básicas de probabilidade, que $P(D)$.»

Este é o contexto mais adequado para introduzir e explicar o interesse das conhecidas “leis das probabilidades” a estudantes de engenharia, quais sejam:

$$L0 - \quad P(R) = 1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset) = 0 \quad (A5.4)$$

$$L1 - \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (A5.5)$$

$$L2 - \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (A5.6)$$

$$L3 - \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (A5.7)$$

Resta agora, por um lado, cuidar a dedução das leis anteriores com base no núcleo duro da Teoria das Probabilidades e na Teoria dos Conjuntos, de modo a tornar patente a consistência interna do edifício teórico em construção, e, por outro lado, demonstrar o seu interesse prático por meio de uma boa selecção de problemas, de forma a justificar o esforço anterior. Assim, por exemplo, relativamente ao primeiro aspecto, a lei L2 resulta imediatamente da definição clássica de probabilidade e da definição da operação “ \cup ” entre conjuntos, pois

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#R} = \frac{\#A + \#B - \#(A \cap B)}{\#R} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

onde a subtracção de $\#(A \cap B)$, na contagem dos elementos de $A \cup B$, se deve ao facto dos elementos de $A \cap B$ estarem contabilizados em duplicado, em $\#A$ e em $\#B$, por pertencerem simultaneamente a A e a B .

O Conceito de Variável Aleatória

Um segundo desenvolvimento possível do núcleo duro da Teoria das Probabilidades passa pela introdução do conceito-chave de “variável aleatória”. Apoiase na Análise das Funções Reais de Variável Real, matéria dada nas cadeiras de AM I e II, para o caso das variáveis aleatórias unidimensionais, ou na sua extensão multidimensional, matéria dada nas cadeiras de ALGA e AM III e IV, para o caso das variáveis aleatórias multidimensionais.

Neste desenvolvimento deve ter-se em conta que o conceito de variável aleatória se torna intuitivo para um estudante de engenharia se ele for capaz de o associar à incerteza accidental inerente a qualquer processo de medição de uma grandeza física, ou ao carácter incontrolável de algumas das perturbações a que está sujeito um sistema físico (cf. Apêndice 4). Além disso, devem também acautelar-se os três pontos seguintes:

- a) Deve ressaltar-se que, sob certo ponto de vista, o conceito de “variável aleatória” constitui uma generalização do conceito de “variável real”, ou, neste contexto, de “variável determinística”, com o qual o estudante já se familiarizou nas cadeiras de Análise Matemática.
- b) A ligação entre os conceitos de experiência aleatória, E , e variável aleatória, X , deve ser exposta de forma a facilitar a apreensão do “sentido físico” contextual de X , e não a dificultá-la.
- c) Deve evitar-se que a passagem do conceito de “variável aleatória simples” para o de “vector aleatório n -dimensional”, em que o estudante reencontra as dificuldades características da transição das cadeiras de AM I e II para as de AM III e IV, e que tem carácter muito menos relevante do que a passagem mencionada no ponto a), de uma “variável determinística” para uma “variável aleatória”, prejudique uma adequada compreensão desta última.

O fulcro da questão levantada no ponto b) está no modo como se introduz a função que associa a cada resultado ou elemento r de R , sendo R o espaço de resultados da experiência E , um valor real x , no domínio de X , que é, por sua vez, parte do conjunto dos reais, \mathbb{R} . Do ponto de vista teórico, é inteiramente compreensível que se dedique atenção às condições necessárias e suficientes que tal função deve satisfazer para não arruinar a consistência interna da teoria, ou para não lhe retirar generalidade e potencial de desenvolvimento. Contudo, do ponto de vista prático, tal preocupação começa por ser substancialmente ociosa, pois a construção desta função é, quase sempre, da responsabilidade do utilizador, que a constrói satisfazendo tais condições de forma natural e óbvia, sem necessidade de as conhecer com rigor e generalidade. Isto acontece, em particular, quando os resultados da experiência E têm, já de si, carácter numérico ². Porém, pior ainda

² Por exemplo, na experiência E do Exemplo A5.1, do dado de jogar, a função $X:R \rightarrow \mathbb{R}$ é, simplesmente, $X(i)=i$ ($i=1, \dots, 6$).

que ociosa, tal preocupação formal corre um sério risco de desviar a atenção do estudante dos aspectos práticos verdadeiramente importantes do conceito de variável aleatória, que são: porquê, para quê e como se “constrói” uma variável aleatória. Atente-se, por exemplo, na seguinte definição de variável aleatória dada por Murteira (1990a) ³, que subentende a introdução prévia de uma experiência aleatória com espaço de resultados R , e a definição de A como “ σ -álgebra dos sub-conjuntos de R ”:

- «Posto isto, a função $X(A)$, $X:R \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se uma variável aleatória se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o conjunto de R , $\{A: X(A) \leq x\}$ é um acontecimento, isto é, pertence à classe A .»

Com efeito, insiste-se, nesta matéria as questões verdadeiramente cruciais para um engenheiro são:

- i) Reconstruir a experiência aleatória, E , que está por detrás de uma variável aleatória, X , que se lhe depara num dado contexto real, e, por essa via, fazer a interpretação física cabal da variável X .
- ii) Dada uma experiência real, E , associar-lhe as variáveis aleatórias de interesse, ganhando assim acesso a um “andar mais elevado” da Teoria das Probabilidades, particularmente bem apetrechado de ferramentas.

³ A citação é tirada da p. 94 da edição que consta na Bibliografia, com ligeiras variações de notação.

APÊNDICE 6:
APLICAÇÃO DA TEORIA DAS PROBABILIDADES
A UM PROBLEMA DE CONTROLO DE QUALIDADE

O problema que se passa a apresentar e resolver constitui um bom exemplo de problema a discutir numa cadeira introdutória de Probabilidades e Estatística para estudantes de engenharia (cf. André 2008).

- «Uma empresa industrial produz componentes que são submetidos a uma operação de acabamento de alta precisão. A experiência mostra que 6% dos produtos à saída da operação não satisfazem o standard de qualidade pelo que a empresa instalou um sistema pneumático de aferição dimensional capaz de rejeitar automaticamente os produtos deficientes. No entanto, o próprio sistema de aferição não é totalmente fiável, existindo uma probabilidade de 5% de que não rejeite um produto imperfeito e uma probabilidade de 10% de que rejeite um produto satisfatório. (i) Qual é a probabilidade de que um produto passe no controlo do sistema de aferição? (ii) Calcule a proporção de produtos defeituosos nos produtos que passam o controlo do sistema de aferição. (iii) Finalmente, calcule a proporção de produtos bons nos produtos que são rejeitados pelo sistema de aferição.»

A parte terminal da linha de fabrico a que se alude no enunciado do problema, incorporando já a modificação em análise, está esquematizada na Figura A6.1. De momento, ignorem-se os “trajectos” a traço interrompido e a ponteados.

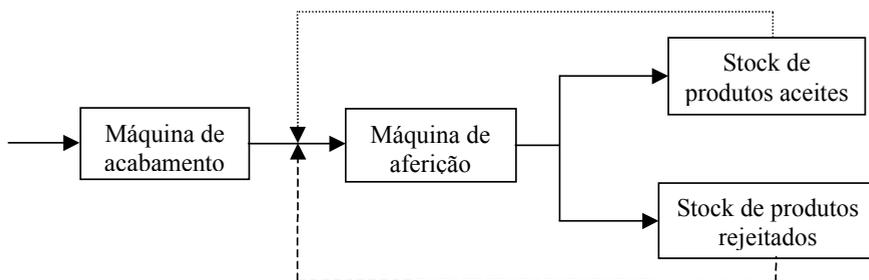


Figura A6.1 – Esquema da parte final da linha de fabrico do problema.

Os dados proporcionados no problema, organizados nos Quadros A6.1a,b, fazem uma caracterização estatística suficiente do desempenho independente das máquinas de acabamento e de aferição dimensional, podendo ser disponibilizados pelos respectivos fornecedores. Na verdade, apenas os números em “negrito” são directamente proporcionados no enunciado, sendo os restantes obtidos mediante um emprego trivial das leis das probabilidades (cf. lei L1, Apêndice 5).

Estado do produto à saída	% produtos
bom	94
defeituoso	6

a

Estado do produto à entrada	% produtos	
	aceites	rejeitados
bom	90	10
defeituoso	5	95

b

Quadros A6.1 – Caracterização estatística independente das máquinas de: a – acabamento; b – aferição dimensional ou controlo de qualidade automático.

Um conjunto de indicadores estatísticos úteis para avaliar a alteração do desempenho da linha de fabrico após a instalação da máquina de controlo dimensional é formado pelos três indicadores seguintes:

- Indicador I1, que mede a redução artificial da produção para venda, dado que o stock de produtos aceites é agora um subconjunto do stock total de produtos fabricados. Este indicador é definido por

$$I1 = P(\{\text{“Um produto passe no sistema de aferição”}\}) \quad (A6.1)$$

- Indicador I2, de melhoria da qualidade dos produtos vendidos, dado por

$$I2 = (\text{proporção de defeituosos no stock de produtos aceites}) \quad (A6.2)$$

- Indicador I3, do potencial de recuperação de desperdícios inúteis, definido por

$$I3 = (\text{proporção de produtos bons no stock de produtos rejeitados}) \quad (A6.3)$$

Os indicadores I1, I2 e I3 são justamente os pedidos das alíneas (i), (ii) e (iii), respectivamente. Destes três indicadores, pode considerar-se que I2 é o indicador-alvo do investimento em análise.

Para calcular o valor de cada um dos indicadores recorrendo às leis das probabilidades L1 a L3 do Apêndice 5, introduzem-se os seguintes acontecimentos-base:

$$A = \{\text{“Um produto sai bom da operação de acabamento”}\} \quad (A6.4)$$

$$B = \{\text{“Um produto é aceite pelo sistema de controlo de qualidade”}\} \quad (A6.5)$$

A respeito destes acontecimentos, proporciona-se no enunciado do problema a seguinte informação de probabilidade: $P(\bar{A}) = 0.06$, $P(\bar{B}|A) = 0.10$ e $P(B|\bar{A}) = 0.05$. Desta informação, mediante aplicações simples da lei L1, pode ainda concluir-se que $P(A) = 0.94$, $P(B|A) = 0.90$ e $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.95$. Todos estes valores aparecem já nos Quadros A6.1a,b, estando os primeiros destacados a “negrito”.

Para calcular o indicador I1, pedido na alínea (i), basta notar que $I1 = P(B)$, considerar a seguinte partição de B, $\{A \cap B, \bar{A} \cap B\}$, e aplicar depois, sucessivamente, as leis das probabilidades L2, L3 e L1, daí resultando

$$I1 = P(B) = (1 - P(\bar{A})) \cdot (1 - P(\bar{B}|A)) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) \approx 85\% \quad (A6.6)$$

Naturalmente, se o sistema de aferição fosse óptimo, isto é, se tivesse um comportamento determinístico caracterizado por $P(\bar{B}|A) = P(B|\bar{A}) = 0$, o indicador I1 atingiria o valor máximo de $\text{máx } I1 = P(A) = 94\%$. Assim, pode dizer-

se que a máquina instalada é responsável por uma “redução artificial” da produção de 15%, sendo uma parcela de 9% inútil, isto é, unicamente imputável a deficiências da máquina de controlo de qualidade. De passagem, refira-se que a relação (A6.6) admite a seguinte interpretação intuitiva:

$$\begin{aligned} \text{\%}(\text{prod. aceites}) &= \text{\%}(\text{prod. bons}) \text{\%}(\text{prod. bons que são aceites}) + \\ &+ \text{\%}(\text{prod. defeituosos}) \text{\%}(\text{prod. defeituosos que são aceites}) \end{aligned} \quad (\text{A6.7})$$

Para determinar agora o índice I2, solicitado na alínea (ii), basta reconhecer que $I2 = P(\bar{A}|B)$ e aplicar a lei L3,

$$I2 = P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}{P(B)} \approx 0.4\% \quad (\text{A6.8})$$

onde se fez uso de (A6.6). Repare-se que antes de se instalar a máquina de controlo automático de qualidade, o índice I2 tinha o valor $I2' = P(\bar{A}) = 6\%$, o que torna patente a melhoria de qualidade permitida pelo investimento, tendo em atenção que o valor ideal para este índice é, evidentemente, $\min I2 = 0$. A relação (A6.8) também pode resultar de uma aplicação directa do Teorema de Bayes.

Finalmente, abordemos a alínea (iii), calculando o índice I3. A observação de que $I3 = P(A|\bar{B})$ e aplicações simples das leis L1 e L3 conduzem imediatamente a

$$I3 = P(A|\bar{B}) = \frac{(1 - P(\bar{A})) \cdot P(\bar{B}|A)}{1 - P(B)} \approx 63\% \quad (\text{A6.9})$$

onde, novamente, se recorreu a (A6.6). Este valor tão elevado do indicador I3, o seu valor ideal é $\min I3 = 0$, talvez justificasse a aplicação de um controlo de qualidade manual ao stock de produtos rejeitados pelo sistema automático de aferição.

Duas pistas possíveis de aprofundamento da análise iniciada neste problema são:

- i) Empregar a recirculação a traço interrompido na Figura A6.1 para baixar o índice I3, cujo valor actual é bastante elevado, e, indirectamente, fazer subir I1, de 85% para um valor mais próximo de máx I1=94% ¹. Infelizmente, esta medida produz também o efeito indesejável de aumentar o valor do indicador I2.

- ii) Empregar a recirculação a ponteadado na Figura A6.1 para baixar I2. Esta medida é menos interessante que a anterior, porque o valor actual de I2 é já bastante baixo e porque prejudica os restantes índices.

¹ Para aproximar ainda mais este limiar dos 100% seria necessário investir numa máquina de acabamento, ou noutras partes da linha de produção, com melhor desempenho.

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICE 7:
ESCOAMENTO DE UMA PARTÍCULA DE FLUIDO:
OS VÁRIOS OPERADORES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM
APLICADOS A UM CAMPO VECTORIAL

Considere-se um fluido em escoamento estacionário com campo de velocidade $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Sem perda significativa de generalidade, admita-se que o escoamento é 2D, ou bidimensional, no sentido em que, mediante uma orientação apropriada do referencial Cartesiano de trabalho, OXYZ, com base de versores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, se tem

$$\nabla_z : \mathbf{v}(x, y, z) = u(x, y, 0) \cdot \mathbf{i} + v(x, y, 0) \cdot \mathbf{j} \quad (\text{A7.1})$$

Deste modo, passando a trabalhar no plano coordenado OXY, podem omitir-se a variável independente z e a componente de \mathbf{v} segundo \mathbf{k} , w .

Doravante, a análise do escoamento concentrar-se-á na “partícula de fluido” composta pelo fluido que no instante t , de observação, ocupa o cubo com vértice em O, lado dl e uma das faces no plano OXY. O propósito da análise é relacionar o movimento e a deformação sofridos por esta partícula de fluido durante o intervalo de tempo de observação, $[t, t+dt]$, com propriedades locais (em O) do campo de velocidade do escoamento, \mathbf{v} .

Decomposição Geral do Movimento e Deformação da Partícula

Em virtude da hipótese 2D expressa por (A7.1), é suficiente caracterizar o movimento e deformação da face da partícula que permanece coplanar a OXY.

Para isso, tendo em atenção que tanto a dimensão linear da partícula, dl , como a duração do intervalo de tempo de observação, dt , são grandezas infinitesimais de 1ª ordem, comecemos por representar aproximadamente o campo de velocidade na região ocupada pela partícula durante $[t, t+dt]$, pela expansão de Taylor de 1ª ordem de \mathbf{v} em torno de O , isto é,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{v}(O) + J(\mathbf{v}, O) \cdot \mathbf{r} \tag{A7.2}$$

dv

em que: $\mathbf{r} \equiv \mathbf{OP} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$, sendo P um ponto arbitrário da face da partícula coplanar a OXY , em qualquer instante do intervalo de tempo $[t, t+dt]$; $J(\mathbf{v}, O)$ é a

matriz jacobiana de \mathbf{v} , em O , dada por $J(\mathbf{v}, O) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$; dv é o diferencial

de primeira ordem de \mathbf{v} , em O , segundo \mathbf{r} ; o produto no segundo termo do membro direito de (A7.2) pode ser calculado como o produto matricial de $J(2 \times 2)$ por $\mathbf{r}(2 \times 1)$, mas o resultado, $dv(2 \times 1)$, deve ser interpretado como um vector. Do ponto de vista físico, toda a informação sobre o movimento (rígido) e a deformação da partícula de fluido durante $[t, t+dt]$ está contida em (A7.2), como se passa a mostrar.

O primeiro termo no membro direito de (A7.2) descreve um movimento rígido de translação da partícula, com velocidade $\mathbf{v}(O)$, tal como se mostra na Figura A7.1.

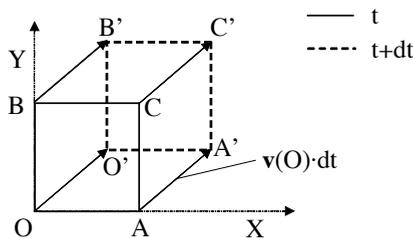


Figura A7.1 – Movimento de translação rígida da partícula (vista frontal, em OXY).

O segundo termo no membro direito de (A7.2) descreve, de forma combinada: (a) uma dilatação ou compressão volumétrica anisotrópica; (b) uma deformação de corte puro; e (c) um movimento rígido de rotação. Dado que todos estes movimento e deformações deixam invariantes a posição do vértice O da partícula, pois $d\mathbf{v}(\mathbf{O})=\mathbf{0}$, doravante toma-se $\mathbf{O}\equiv\mathbf{O}'$. Para pôr em evidência a justeza da interpretação física de (A7.2) que se acaba de fazer, decompõe-se aditivamente ¹ o campo de velocidade relativa, $d\mathbf{v}(\mathbf{r})$, em três sub-termos, $(d\mathbf{v}_a, d\mathbf{v}_b, d\mathbf{v}_c)$, tais que

$$\nabla_{\mathbf{r}} : d\mathbf{v}(\mathbf{r}) = d\mathbf{v}_a(\mathbf{r}) + d\mathbf{v}_b(\mathbf{r}) + d\mathbf{v}_c(\mathbf{r}) \quad (\text{A7.3a,b})$$

$$J(\mathbf{v}, \mathbf{O}) = J(d\mathbf{v}, \mathbf{O}) = J(d\mathbf{v}_a, \mathbf{O}) + J(d\mathbf{v}_b, \mathbf{O}) + J(d\mathbf{v}_c, \mathbf{O})$$

satisfazendo as matrizes jacobianas dos vários sub-termos as seguintes propriedades:

- (i) $J(d\mathbf{v}_a, \mathbf{O})$ é uma matriz diagonal.
- (ii) $J(d\mathbf{v}_b, \mathbf{O})$ é uma matriz simétrica com diagonal nula.
- (iii) $J(d\mathbf{v}_c, \mathbf{O})$ é uma matriz anti-simétrica.

Esta decomposição é sempre possível e única, conduzindo às matrizes jacobianas:

$$J(d\mathbf{v}_a, \mathbf{O}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad J(d\mathbf{v}_b, \mathbf{O}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(d\mathbf{v}_c, \mathbf{O}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.4a,b,c})$$

¹ Sendo a derivada total de 1ª ordem de \mathbf{v} um operador linear, aplica-se-lhe o Princípio da Sobreposição.

Para investigar a natureza do movimento/deformação da partícula de fluido descrito por cada um destes sub-termos, é útil ter em conta que, pelo facto do respectivo campo de velocidade ser linear, tal movimento/deformação respeita as seguintes propriedades gerais (Figura A7.2):

(i') As arestas da partícula ($[OA], \dots$) mantêm-se rectilíneas durante $[t, t+dt]$.

$$(ii') \quad \mathbf{AA}' = J(dv_k, O) \cdot \mathbf{OA} \cdot dt \quad \text{com } \mathbf{OA} = dl \cdot \mathbf{i} \text{ e } k \equiv a, b, c \quad (A7.5a,b)$$

$$(iii') \quad \mathbf{BB}' = J(dv_k, O) \cdot \mathbf{OB} \cdot dt \quad \text{com } \mathbf{OB} = dl \cdot \mathbf{j} \text{ e } k \equiv a, b, c \quad (A7.6a,b)$$

$$(iv') \quad \mathbf{CC}' = \mathbf{AA}' + \mathbf{BB}' \quad (A7.7)$$

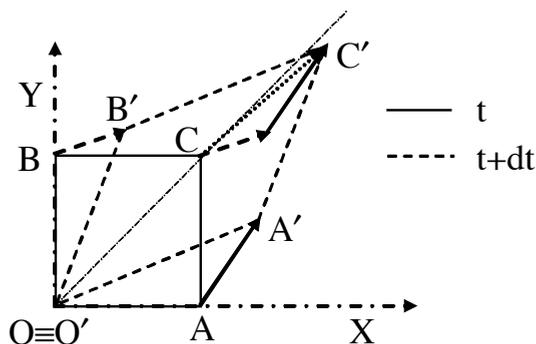


Figura A7.2 – Movimento/deformação da partícula associado ao campo de velocidade genérico dv_k , com $k \equiv a, b, c$ (vista frontal, no plano OXY).

Os produtos nos membros direitos das equações (A7.5a) e (A7.6a) devem ser interpretados do mesmo modo que se refere acima a respeito da relação (A7.2). Por outro lado, as propriedades (i') e (iv') implicam que $[O', A', C', B']$ defina um paralelogramo.

Das equações (A7.4a) e (A7.5,6) para $k \equiv a$, resultam

$$\mathbf{AA}' = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dl \cdot dt \right) \cdot \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{BB}' = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \cdot dl \cdot dt \right) \cdot \mathbf{j} \quad (\text{A7.8a,b})$$

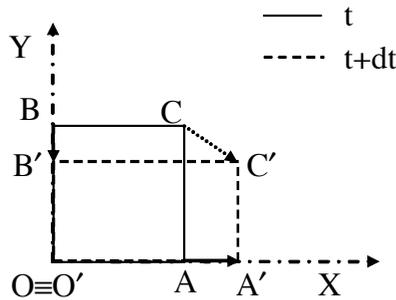


Figura A7.3 – Primeiro sub-termo, dv_a : dilatação/compressão volumétrica anisotrópica da partícula (vista frontal, em OXY). Neste caso, $(\partial u/\partial x) > 0$ mas $(\partial v/\partial y) < 0$.

Por sua vez, com base em (A7.8), (i') e (iv') é possível construir a Figura A7.3, que torna patente que este primeiro sub-termo do campo de velocidade relativa, dv_a , descreve uma dilatação/compressão volumétrica anisotrópica da partícula segundo os eixos OX e OY, que preserva a sua forma rectangular mas altera o seu volume à “taxa volumétrica relativa” de

$$\alpha_v \equiv \frac{dV' - dV}{dV \cdot dt} = \frac{\pm \overline{AA'} \cdot dl \cdot dl + \pm \overline{BB'} \cdot dl \cdot dl + \pm \overline{AA'} \cdot \pm \overline{BB'} \cdot dl}{(dl \cdot dl \cdot dl) \cdot dt} \quad (\text{A7.9a,b})$$

ou, atendendo a (A7.8) e eliminando em (A7.9b) o termo infinitésimo em dt,

$$\alpha_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \text{div}(\mathbf{dv}_a) = \text{div} \mathbf{v} = \text{tr} J(\mathbf{v}, O) \quad (\text{A7.10a,b,c,d})$$

onde o símbolo “tr J(v,O)”, em (A7.10d), designa o “traço da matriz J(v,O)”, isto é, a soma dos elementos da sua diagonal principal.

138

Acabamos assim de descobrir que:

- O operador diferencial divergência aplicado ao campo \mathbf{v} em O, $\text{div } \mathbf{v}$, extrai da derivada total de \mathbf{v} , expressa por J(v), a informação especializada armazenada na diagonal principal da matriz J(v), cujo “sentido físico” é, neste caso, a taxa de dilatação volumétrica relativa de uma partícula de fluido quando passa junto de O, α_v , definida por (A7.9a).

Torna-se agora claro por que é que, por um lado, as matrizes J(dv_b) e J(dv_c) devem ter diagonal principal nula (porque os movimentos ou deformações associados não alteram o volume da partícula de fluido), e, por outro lado, $\text{div } \mathbf{v}=0$ num escoamento incompressível (porque, neste caso, o volume da partícula não se altera).

Segundo Sub-termo: Deformação de Corte Puro

Repetindo o procedimento para o segundo sub-termo do campo de velocidade relativa, dv_b, empregando agora a equação (A7.4b), obtêm-se as relações

$$\mathbf{AA}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot d\mathbf{l} \cdot dt \cdot \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{BB}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot d\mathbf{l} \cdot dt \cdot \mathbf{i} \quad (\text{A7.11a,b})$$

com base nas quais se constrói a Figura A7.4, que, por sua vez, torna patente estar-se diante de uma deformação de corte puro da partícula segundo os eixos OX e OY (ou os planos OXZ e OYZ), caracterizada por idênticas taxas de deformação segundo cada eixo, de forma a não alterar o volume da partícula (o que decorre do facto da matriz J(dv_b) ter diagonal principal nula, como se refere acima) nem a fazer rodar a sua diagonal [OC] (o que decorre da matriz J(dv_b) ser simétrica, como se verá abaixo).

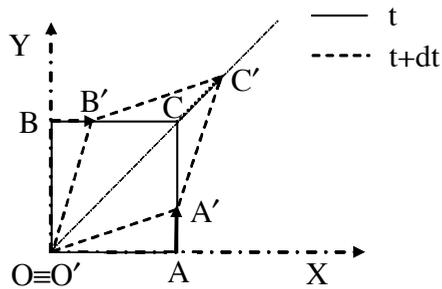


Figura A7.4 – Segundo sub-termo, dv_b : deformação de corte puro da partícula (vista frontal, em OXY).

Terceiro Sub-termo: Movimento Sólido de Rotação

Para analisar o movimento/deformação descrito pelo terceiro sub-termo do campo de velocidade relativa, dv_c , com matriz jacobiana dada por (A7.4c), vai seguir-se uma estratégia distinta da empregue para analisar os dois primeiros sub-termos. Concretamente, regressando à expansão geral (A7.2) e substituindo aí \mathbf{v} por dv_c , o campo de velocidade $dv_c(\mathbf{r})$ fica expresso por

$$dv_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot (y \cdot \mathbf{i} - x \cdot \mathbf{j}) \quad (\text{A7.12})$$

Recordando agora, da cinemática do corpo rígido, que o campo de velocidade associado a um movimento sólido de rotação em torno do eixo OZ, com velocidade angular $\dot{\mathbf{u}} = \omega_z \cdot \mathbf{k}$, é dado por

$$\mathbf{v}_\omega(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r} = -\omega_z \cdot (y \cdot \mathbf{i} - x \cdot \mathbf{j}) \quad (\text{A7.13a,b})$$

e comparando as equações (A7.12) e (A7.13b), imediatamente se constata que dv_c descreve uma rotação sólida da partícula de fluido, em torno de OZ, com velocidade angular (Figura A7.5)

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{rot} \, dv_c) \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{2} (\mathbf{rot} \, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} \quad (\text{A7.14a,b,c})$$

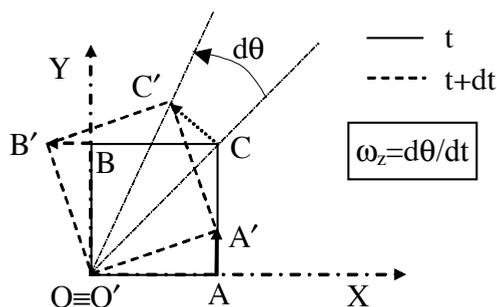


Figura A7.5 – Terceiro sub-termo, dv_c : rotação sólida da partícula (vista frontal, em OXY).

Num escoamento tridimensional a relação (A7.14c) é substituída por

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (\text{A7.15})$$

Neste caso, a velocidade angular de rotação, ω , pode ter uma orientação arbitrária no espaço.

Acabamos assim de descobrir que:

- O operador diferencial rotacional aplicado ao campo \mathbf{v} em O, $\mathbf{rot} \mathbf{v}$, extraído da derivada total de \mathbf{v} , expressa por $\mathbf{J}(\mathbf{v})$, a informação especializada armazenada na componente anti-simétrica da matriz $\mathbf{J}(\mathbf{v})$, cujo “sentido físico” é, neste caso, o dobro da velocidade angular de rotação de uma partícula de fluido quando passa junto de O, ω , tal como expresso em (A7.15).

Desta descoberta decorre a seguinte ideia para um dispositivo experimental de medida de $\mathbf{rot} \mathbf{v}$: uma veleta ideal com dimensões infinitesimais e orientação controlável, equipada com um conta-rotações (Fig. A7.6). Neste contexto, o qualificativo “ideal” significa que as pás da veleta são perfeitamente arrastadas pelo escoamento. Com efeito, com base na generalização 3D de (A7.14c), vê-se que, orientando o eixo da veleta segundo a direção de versor \mathbf{t} , esta irá girar com

velocidade angular $\omega_t = \frac{1}{2}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}$, no sentido de rotação de um saca-rolhas direito orientado segundo \mathbf{t} (Figura A7.6). Deste modo, descobrindo o eixo \mathbf{t}_{\max} para o qual $\omega_{\mathbf{t}_{\max}} \equiv \omega_{\max} = \max_{\mathbf{t}} \{\omega_t\}$, e medindo ω_{\max} com o conta-rotações, $\mathbf{rot} \mathbf{v} (O)$ é dado por

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = 2\omega_{\max} \cdot \mathbf{t}_{\max} \quad (\text{A7.16})$$

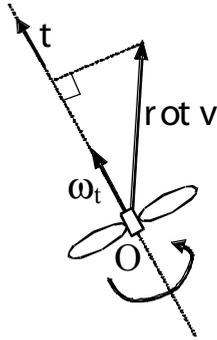


Figura A7.6 – Veleta ideal de medida de $\mathbf{rot} \mathbf{v} (O)$. Neste caso, estando o eixo da veleta orientado segundo o versor \mathbf{t} , esta irá girar com velocidade angular $\omega_t = \frac{1}{2}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}$, no sentido indicado.

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICE 8:
VIA MATEMÁTICA DE DEDUÇÃO DA LEI DE ARQUIMEDES

Apresenta-se neste apêndice uma via de dedução da Lei de Arquimedes, da impulsão hidrostática, que se distingue da que se expõe no Exemplo 28 (Secção 3.2.1) pelo seu carácter mais matemático. Os dados, as hipóteses e a notação básicas desta dedução estão expostas no primeiro parágrafo do Exemplo 28.

Pressupõe-se o conhecimento da distribuição das forças de pressão do fluido sobre a superfície S , do corpo sólido completamente imerso no fluido, deduzida em Hidrostática (Figura A8.1), a saber:

- i) A força infinitesimal de pressão, $d\mathbf{F}_p$, exercida pelo fluido sobre o elemento de superfície dS centrado no ponto P é dada por

$$d\mathbf{F}_p = -p(P) \cdot dS \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A8.1})$$

sendo: $p(P)$, a pressão do fluido em P ; e \mathbf{n} , o vetor normal a S em P , apontando para o interior do fluido.

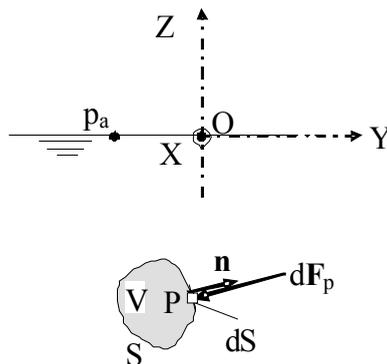


Figura A8.1 – Esquema auxiliar da dedução da lei de Arquimedes apresentada neste apêndice, supondo que o fluido é um líquido com uma “superfície livre” de contacto com um meio gasoso semi-infinito (cf. Exemplo 28).

ii) O campo de pressão no interior do fluido, $p(P)$, é dado por

144

$$p(P) = p_a - \rho g z \quad (A8.2)$$

sendo conhecidos: p_a , a pressão na “superfície livre” do fluido; ρ , a massa volúmica do fluido; e g , a aceleração local da gravidade. O sistema Cartesiano OXYZ tem origem, O, sobre a superfície livre do fluido, e eixo OZ vertical, apontando “para cima”.

Posto isto, em primeiro lugar, a força de impulsão procurada, \mathbf{I} , é, por definição, dada por

$$\mathbf{I} = \iint_S d\mathbf{F}_p \quad (A8.3)$$

Em segundo lugar, considere-se a região do espaço ocupada pelo corpo, com volume V , e, nela definido, um campo vectorial qualquer, \mathbf{G} , de modo que tanto a região V como o campo \mathbf{G} se encontrem nas condições de aplicação do Teorema da Divergência, matéria dada em AM III ou IV. Neste caso, a relação que exprime o referido teorema é

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{G} \cdot dV \quad (A8.4)$$

Em terceiro lugar, das equações (A8.1), (A8.3) e (A8.4), fazendo $\mathbf{G} = -p \cdot \mathbf{k}$, tira-se

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{k} = \iint_S -(p \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -\iiint_V \text{div } (p \cdot \mathbf{k}) \cdot dV \quad (A8.5a,b)$$

Como, por (A8.2), se tem $\text{div}(p \cdot \mathbf{k}) = \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, de (A8.5b) resulta

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{k} = \rho g V \quad (A8.6)$$

Em quarto lugar, designando por \mathbf{i} o versor de OX, sendo OX um eixo horizontal qualquer, mantêm-se válidas as relações (A8.5a,b) nelas substituindo \mathbf{k} por \mathbf{i} . Porém, como, em virtude de (A8.2), se tem agora $\text{div}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}) = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$, a relação (A8.6) transforma-se em

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (\text{A8.7})$$

Finalmente, em quinto lugar, de (A8.6) e (A8.7) decorre a Lei de Arquimedes, sob a forma

$$\mathbf{I} = (\rho g V) \cdot \mathbf{k} \quad (\text{A8.8})$$

“q.d.d.” ou “q.e.d.”, como dizem os matemáticos.

(Página deixada propositadamente em branco)

APÊNDICE 9:
RESPOSTA A ALGUMAS QUESTÕES RELATIVAS
À APLICAÇÃO DA ANÁLISE TENSORIAL EM ENGENHARIA

Neste apêndice apresentam-se as respostas às questões (i-v) formuladas no Exemplo 30 (Secção 3.2.1), relativas à aplicação da Análise Tensorial em engenharia.

Questão i): «Tratar-se-á a Análise Tensorial, substancialmente, de uma “notação indicial” que permite exprimir teses e deduções matemáticas de forma muito sintética mas críptica?»

De forma alguma. A “notação indicial” é apenas a notação natural da Análise Tensorial embora se possa entender em parte, e até utilizar com proveito, fora deste âmbito. Concretamente, a parte da notação da Análise Tensorial que se pode considerar de “utilidade pública” inclui, essencialmente, os índices livres e mudos, com a convenção da soma, ou de Einstein, para os índices mudos, e os símbolos de Krönecker, δ_{ij} , e de permutação cíclica, ε_{ijk} , que em Análise Tensorial se interpretam como certo tipo de componentes de dois tensores isotrópicos, respectivamente, de 2^a e 3^a ordens. Tal notação oferece, de facto, um excelente compromisso de síntese e visibilidade ¹, entre os extremos da notação algébrica estendida, muito extensa mas totalmente explícita, e da notação vectorial/matricial, muito compacta mas pouco explícita, para além de tornar patentes úteis e profundas simetrias de expressões matemáticas, como se ilustra nos dois exemplos seguintes.

¹ No sentido de ser fácil passar uma expressão escrita em notação indicial para a forma algébrica estendida.

§ **Exemplo A9.1:** Sendo A, B e C matrizes (3×3), comparem-se os enunciados equivalentes:

148

$$C = A \times B \quad (\text{notação matricial}) \quad (\text{A9.1})$$

$$c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (\text{notação indicial}) \quad (\text{A9.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} \\ c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} \\ c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \\ c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} \\ c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} \\ c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{array} \right. \quad (\text{notação algébrica}) \quad (\text{A9.3}) \blacksquare$$

§ **Exemplo A9.2:** Em Teoria da Elasticidade ou Mecânica dos Meios Contínuos, designe \mathbf{T}_n , a tensão resultante que actua num plano com versor normal \mathbf{n} , num ponto de um corpo sólido carregado. A demonstração da conhecida propriedade da reciprocidade das tensões, cujo enunciado em notação vectorial é

$$\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{T}_n' \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A9.4})$$

torna-se muito simples de fazer e entender quando se emprega notação indicial, como se passa a mostrar. É sabido que tal demonstração se apoia nas identidades

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ni} = \sigma_j \cdot n_j \\ \sigma_j = \sigma_j \end{array} \right. \quad (\text{A9.5a,b})$$

em que σ é o tensor das tensões no ponto em questão, exprimindo (A9.5b) a sua propriedade de simetria. Partindo desta base, a demonstração, expressa em notação tensorial, consta dos cinco passos seguintes:

$$\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{n}' \equiv (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot n'_i = (\sigma_{ij} \cdot n'_i) \cdot n_j = (\sigma_{ji} \cdot n'_i) \cdot n_j = T_{n'_j} \cdot n_j \equiv \mathbf{T}_{n'} \cdot \mathbf{n}$$

Nesta sequência de identidades: o símbolo “ \equiv ” designa uma mera tradução de notações, no primeiro e no quinto passos; o primeiro e o quarto passos apoiam-se em (A9.5a); e no terceiro passo faz-se uso de (A9.5b). ■

Por outro lado, há que reconhecer que, por vezes, é necessária alguma atenção para elaborar ou entender um argumento expresso em notação tensorial, como é o caso do exemplo seguinte.

§ **Exemplo A9.3:** Sendo x_j e t_k , respectivamente, as coordenadas de um ponto do espaço e as componentes do versor de uma direcção qualquer do espaço, ambas expressas num sistema de coordenadas Cartesianas, (O, x_j) , considere-se a seguinte identidade tensorial:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_j \cdot x_j) \cdot (t_k \cdot t_k) + (x_k \cdot x_k) \cdot (t_j \cdot t_j) = \\ \quad = (x_k \cdot x_k) - (x_k \cdot x_k) \cdot (t_k \cdot t_k) \end{array} \right. \quad (\text{A9.6a,b})$$

$$(i, j, k) \equiv (\text{permutação cíclica de } (1, 2, 3))$$

Nesta identidade, o índice i que aparece em (A9.6b) deve ser tomado, em cada termo do membro esquerdo de (A9.6a), como um índice “oculto” formando com (j, k) um terço de índices mudos ligados pela condição (A9.6b). Deste modo, a convenção da soma não se pode empregar independentemente em ordem aos índices (j, k) , dentro dos factores de cada um dos termos do membro esquerdo de (A9.6a). O recurso à notação algébrica estendida permite um entendimento mais claro de (A9.6a,b):

$$\begin{aligned}
& (x_j \cdot x_j) \cdot (t_k \cdot t_k) + (x_k \cdot x_k) \cdot (t_j \cdot t_j) \equiv \\
& \equiv ((x_2 \cdot x_2) \cdot (t_3 \cdot t_3) + (x_3 \cdot x_3) \cdot (t_1 \cdot t_1) + (x_1 \cdot x_1) \cdot (t_2 \cdot t_2)) + \\
& \quad + ((x_3 \cdot x_3) \cdot (t_2 \cdot t_2) + (x_1 \cdot x_1) \cdot (t_3 \cdot t_3) + (x_2 \cdot x_2) \cdot (t_1 \cdot t_1)) \\
& = (x_1 \cdot x_1) \cdot \left((t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - (t_1 \cdot t_1) \right) + (x_2 \cdot x_2) \cdot (1 - (t_2 \cdot t_2)) + \blacksquare \\
& \quad + (x_3 \cdot x_3) \cdot (1 - (t_3 \cdot t_3)) \\
& \equiv (x_k \cdot x_k) - (x_k \cdot x_k) \cdot (t_k \cdot t_k)
\end{aligned}$$

Por último, o exemplo seguinte ilustra o facto da notação tensorial ser mais ampla do que a “notação indicial” comumente utilizada fora do âmbito da Análise Tensorial.

§ **Exemplo A9.4:** Em notação tensorial, a lei de conservação da massa num escoamento incompressível com campo de velocidade \mathbf{v} pode exprimir-se assim:

$$v^i{}_{,i} = 0 \tag{A9.7}$$

O entendimento desta expressão requer o domínio prévio dos seguintes conceitos de Análise Tensorial: componentes contravariantes de um tensor de 1ª ordem; operação tensorial de contração de um par de índices mistos, um covariante e outro contravariante, de um tensor de 2ª ordem; e operador de derivada covariante de 1ª ordem, aplicado a um campo tensorial também de 1ª ordem. ■

Questão ii): «Em que situações tem um engenheiro real interesse em empregar Análise Tensorial?»

O objectivo da Análise Tensorial é exprimir matematicamente, como tensores de ordem apropriada, as grandezas e leis físicas de forma independente do sistema de coordenadas de trabalho. Como se sabe, um “sistema de coordenadas” é apenas

uma construção auxiliar utilizada por um observador para especificar a posição de pontos do espaço e a distribuição espacial de grandezas físicas. A sua escolha constitui, pois, matéria de livre opção do observador, sendo influenciada, nomeadamente, pela existência de simetrias no fenómeno em estudo. Neste contexto, podem distinguir-se três grandes utilidades práticas da Análise Tensorial em Física e Engenharia, a saber:

- a) Para lidar com grandezas físicas de ordem tensorial superior à 1ª ou, pelo menos, à 2ª.
- b) Para passar a expressão matemática de uma lei física escrita num sistema de coordenadas Cartesiano ², em notação algébrica estendida, isto é, em termos de componentes, para um outro sistema de coordenadas mais apropriado ao fim em vista.
- c) Para escrever uma lei física numa forma universal ou invariante, que seja, por um lado, independente do sistema de coordenadas mas, por outro, fácil de passar para notação algébrica estendida num qualquer sistema de coordenadas não previamente especificado.

O exemplo abaixo oferece uma primeira ilustração da utilidade a).

§ **Exemplo A9.5:** A formulação tensorial da lei de Hooke para sólidos elásticos, válida num qualquer sistema de coordenadas Cartesianas rectangulares, é

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (\text{A9.8})$$

em que: σ [Pa] é o tensor das tensões, de 2ª ordem; ϵ é o tensor das deformações, também de 2ª ordem; e E [Pa] é o módulo de elasticidade do material, representado por um tensor de 4ª ordem. Se o sólido for isotrópico

² Sendo o sistema de coordenadas mais simples de todos, rectangular e rectilíneo, assume o papel de padrão na escrita das leis físicas em notação algébrica estendida. No extremo oposto de complexidade está um sistema de coordenadas oblíquo e curvilíneo.

pode mostrar-se que das $3^4=81$ componentes de E , apenas 2 são independentes, sendo comum exprimir todas as componentes em função dos módulos de elasticidade longitudinal (ou de Young) e transversal (ou de Poisson), (E, ν) , ou das constantes de Lamé, (λ, μ) . Neste caso, até há pouco tempo o único normalmente considerado nos cursos de engenharia, é fácil tornar o carácter tensorial de 4ª ordem do módulo de elasticidade, E , e passar a escrever as relações (A9.8) em notação algébrica estendida, dado que estas se simplificam muito. Contudo, muitos dos novos materiais utilizados hoje em engenharia não possuem este tipo de simetria tão forte e, neste caso, a grandeza física E só a duras penas pode ser tratada com conceitos e ferramentas de Análise Vectorial. ■

O motivo por que a necessidade da Análise Tensorial só se faz sentir mais imperiosamente ao tratar grandezas físicas tensoriais de ordem superior à 1ª, ou, mais estritamente, à 2ª, deve-se à analogia que existe, termo a termo, entre os ternos ordenados de conceitos (“escalar”, “vector”, “função/transformação linear”), da Análise Vectorial, e (“tensor de ordem 0”, “tensor de ordem 1”, “tensor de ordem 2”), da Análise Tensorial. O exemplo seguinte ilustra a última analogia, entre os conceitos de “função linear” e “tensor de ordem 2”, porventura a menos conhecida das três.

§ **Exemplo A9.6:** A formulação do tensor das tensões, σ , como uma função linear $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, baseia-se na seguinte relação:

$$\mathbf{T}_n = F(\mathbf{n}) \quad (\text{A9.9})$$

em que \mathbf{T}_n designa a tensão resultante que actua num plano com versor normal \mathbf{n} . Como se sabe da Teoria das Transformações Lineares, matéria estudada em ALGA, escolhido um par de bases de trabalho nos espaços objecto e imagem de F – eventualmente, a mesma base nos dois espaços, dado que estes coincidem –, a função F passa a admitir uma representação matricial que é formalmente idêntica à representação familiar do tensor

das tensões no sistema de coordenadas de trabalho, $[\sigma_{ij}]$ (3×3). Naturalmente, supondo que se trata de um sistema de coordenadas curvilíneas genérico, (O, u^i) , cada uma das duas bases escolhidas deve coincidir com uma das duas bases locais do sistema de coordenadas no ponto P, a que se refere o tensor das tensões em causa: a base covariante, $\{e_i\}$, ou a base contravariante, $\{e^i\}$ (cf. resposta à Questão iii)). Assim, por exemplo, se forem escolhidas a base contravariante no espaço objecto de F e a base covariante no espaço imagem de F, então, as componentes matriciais do tensor das tensões assimilado à função linear F são interpretadas, em Análise Tensorial, como as componentes contravariantes puras do tensor, σ^{ij} . ■

As utilidades b) e c) são afins, pelo que podem ser ilustradas conjuntamente pelo exemplo abaixo.

§ **Exemplo A9.7:** A lei de conservação da massa num escoamento incompressível bidimensional escreve-se, em notação algébrica, num sistema de coordenadas Cartesianas, assim (Figura A9.1a):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A9.10})$$

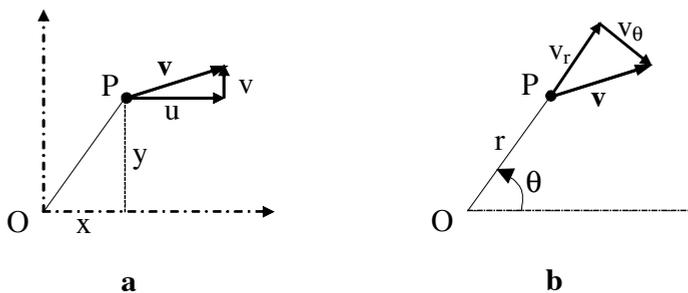


Figura A9.1 – (Exemplo A9.7) – Sistemas de coordenadas: a – Cartesianas; b – polares.

Mantendo a notação mas passando para um sistema de coordenadas polares (Figura A9.1b), a mesma lei passa a escrever-se

$$154 \quad \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A9.11})$$

A utilidade b) tem justamente a ver com a passagem de (A9.10) para (A9.11), a qual é possível mas complexa de fazer em Análise Vectorial. Se, por outro lado, visando a utilidade c), se quiser escrever a mesma lei de uma forma que seja independente do sistema de coordenadas, pode começar-se por recorrer à notação vectorial, escrevendo

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A9.12})$$

Porém, a equação (A9.12) não satisfaz plenamente a utilidade c), pois não dá nenhuma indicação sobre a forma algébrica específica assumida pelo operador diferencial “div” num sistema de coordenadas arbitrário. Em Análise Tensorial, a lei pode ser escrita na forma (A9.7) ou, então, na forma mais explícita, imediatamente aplicável a um sistema de coordenadas curvilíneas arbitrário, (O, u^i) ,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} \cdot v^i) = 0 \quad (\text{A9.13})$$

na qual: g é o determinante do tensor da métrica do espaço; e v^i são as componentes contravariantes do campo de velocidade, \mathbf{v} , visto como um campo tensorial de 1ª ordem. Para se perceber como é fácil passar da forma (A9.13) para a (A9.10) ou a (A9.11), recorde-se que, no sistema de coordenadas Cartesianas da Figura A9.1a, se tem

$$\begin{cases} u^1 \equiv x, u^2 \equiv y \\ v^1 \equiv u, v^2 \equiv v \\ g = 1 \end{cases} \quad (\text{A9.14})$$

e, no sistema de coordenadas polares da Figura A9.1b,

$$\begin{cases} u^1 \equiv r, u^2 \equiv \theta \\ v^1 \equiv v_r, v^2 \equiv \frac{v_\theta}{r} \\ g = r^2 \end{cases} \quad (\text{A9.15})$$

No caso das coordenadas polares, não tão evidente como o das coordenadas Cartesianas, a equação (A9.13), tendo em conta (A9.15), pode ser traduzida primeiramente para a forma

$$\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \cdot \frac{v_\theta}{r} \right) \right) = 0 \quad (\text{A9.16})$$

a qual não é já difícil ver que é equivalente a (A9.11). ■

Questão iii): «Será correcta, e, neste caso, que sentido tem, a expressão: “a grandeza física y tem carácter covariante ou contravariante”? Assim, por exemplo, é comum ouvir-se dizer que “a velocidade de uma partícula tem carácter contravariante” mas “uma força tem carácter covariante”. Por outro lado, por que é que se introduzem, e que sentido físico têm, as componentes “covariantes” e “contravariantes” de uma grandeza física?»

Começa por se recordar donde vêm as componentes tensoriais covariantes e contravariantes de uma grandeza física assimilável a um tensor de 1ª ordem, \mathbf{a} , num dado sistema de coordenadas generalizadas, (O, u^i) , uma vez que o argumento é facilmente generalizável a tensores de ordem superior.

Para isso, considerem-se as relações entre as coordenadas curvilíneas, u^i , e as coordenadas Cartesianas, x_j , de um sistema Cartesiano auxiliar, (O, x_j) , com base de versores $\{\mathbf{i}_j\}$,

$$u^i = u^i(x_j) \quad \text{e} \quad x_j = x_j(u^i) \equiv \mathbf{r}(u^i) \quad (\text{A9.17a; b,c})$$

Com base nestas relações definem-se em Análise Tensorial, em cada ponto do espaço, P, duas bases locais do sistema (O, u^i) , a saber:

156

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial u^i} \cdot \mathbf{i}_j \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \cdot \mathbf{i}_j \equiv \nabla u^i \quad (\text{A9.18a,b; 19a,b})$$

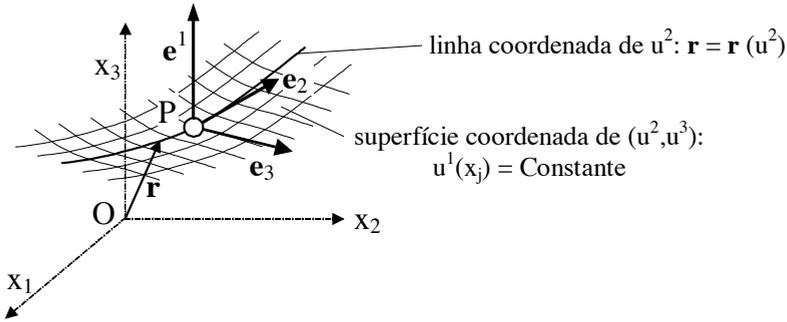


Figura A9.2 – Bases locais covariante ou natural, e contravariante ou recíproca, de um sistema de coordenadas curvilíneas, (O, u^i) , tendo como pano de fundo o sistema Cartesiano auxiliar, (O, x_j) .

O sentido físico destas bases é ilustrado na Figura A9.2, a qual se apoia em particular nas relações (A9.18b) e (A9.19b). A base $\{\mathbf{e}_i\}$ é chamada a “base natural” do sistema e a base $\{\mathbf{e}^i\}$ recebe a designação de “base recíproca”, em virtude das seguintes relações existentes entre os vectores das duas bases, decorrentes de (A9.18) e (A9.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial u^i} \cdot \mathbf{i}_k \right) \cdot \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_l} \cdot \mathbf{i}_l \right) = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u^i} \right) \cdot (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l) = \\ &= \frac{\partial u^j}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial u^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u^i} = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A9.20})$$

O rótulo (A9.20) identifica apenas a relação entre os membros extremos da cadeia de identidades acima, convenção que se adopta doravante. Da relação (A9.18a)

decorre também a lei de transformação dos vectores da base natural, de \mathbf{e}_j para \mathbf{e}^{*i} , quando se muda o sistema de coordenadas, de (O, u^j) para (O, u^{*i}) , pois

$$\mathbf{e}^{*i} = \frac{\partial x_k}{\partial u^{*i}} \cdot \mathbf{i}_k = \left(\frac{\partial x_k}{\partial u^j} \right) \cdot \left(\frac{\partial u^j}{\partial u^{*i}} \right) \cdot \mathbf{i}_k = \left(\frac{\partial u^j}{\partial u^{*i}} \right) \cdot \mathbf{e}_j \quad (\text{A9.21})$$

Uma lei de transformação do tipo (A9.21) é classificada como “covariante”, motivo pelo qual se dá também a designação de “base covariante”, ou “base de vectores covariantes”, à “base natural” do sistema de coordenadas. Entidades tensoriais³ que se transformam de acordo com a lei covariante são denotadas por sub-índices. De forma inteiramente análoga, decorre de (A9.19a) a seguinte lei de transformação para os vectores da “base recíproca”:

$$\mathbf{e}^{*i} = \left(\frac{\partial u^{*i}}{\partial u^j} \right) \cdot \mathbf{e}^j \quad (\text{A9.22})$$

a qual é classificada como uma “lei de transformação contravariante”, estando na origem da designação alternativa de “base contravariante” para a “base recíproca” do sistema de coordenadas. Entidades tensoriais que se transformam de acordo com uma lei contravariante são denotadas por super-índices.

Posto isto, as componentes contravariantes (covariantes) de \mathbf{a} , em (P, u^i) , designadas por a^i (a_i), são simplesmente as componentes de \mathbf{a} na base covariante, $\{\mathbf{e}_i\}$ (contravariante, $\{\mathbf{e}^i\}$), isto é,

$$\mathbf{a} \equiv a^i \cdot \mathbf{e}_i = a_i \cdot \mathbf{e}^i \quad (\text{A9.23a,b})$$

Isto responde à questão sobre o “sentido físico” destas componentes. Além disso, pode mostrar-se que as componentes contravariantes (covariantes), a^i (a_i), definidas por (A9.23a,b), se transformam de acordo com a lei contravariante (covariante) (A9.22,21), tal como o requer a consistência interna da teoria.

³ Designa-se com este termo não propriamente tensores mas sim as suas componentes ou vectores das bases do sistema de coordenadas.

A título ilustrativo, deduz-se a lei de transformação das componentes contravariantes com base nas relações (A9.23a) e (A9.21), embora trocando nesta última as posições de u com u^* e de e com e^* :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \equiv a^i \cdot \mathbf{e}_i &= a^i \cdot \left(\left(\frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \right) \cdot \mathbf{e}^{*j} \right) = \left(\left(\frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \right) \cdot a^i \right) \cdot \mathbf{e}^{*j} \Rightarrow \\ & \Rightarrow a^{*i} = \left(\frac{\partial u^{*i}}{\partial u^j} \right) \cdot a^j \end{aligned} \quad (\text{A9.24})$$

Para tornar mais evidente a analogia entre as relações (A9.24) e (A9.22), trocaram-se as posições dos índices i e j no último passo do raciocínio.

Naturalmente, as duas bases do sistema de coordenadas e, “a fortiori”, os dois tipos de componentes de \mathbf{a} , não são independentes. Assim, por exemplo, decorre de (A9.23) e (A9.20) que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \equiv a_k \cdot \mathbf{e}^k &= a^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow a_k \cdot (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i) = a^j \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) \Rightarrow \\ & \Rightarrow a_i = \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \right) \cdot a^j \end{aligned} \quad (\text{A9.25})$$

sendo g_{ij} as componentes covariantes puras de um tensor de 2ª ordem chamado “tensor da métrica do espaço”, em (P, u^i) .

Embora a base local (em P) covariante de um sistema de coordenadas arbitrário, $\{\mathbf{e}_i\}$, formada por vectores tangentes às linhas coordenadas em P (Figura A9.2), seja aquela que mais naturalmente se impõe para trabalhar, relações como as (A9.20), (A9.23) ou (A9.25) põem em evidência a grande simetria/reciprocidade de papéis desempenhados pelas bases “natural ou covariante” e “recíproca ou contravariante”, conferindo a esta última um estatuto de pleno direito na teoria. Fica assim respondida uma outra parte da Questão iii).

Falta abordar a última parte da Questão iii), sobre o pretenso “carácter covariante ou contravariante” de certas grandezas físicas.

À luz de tudo o que se refere acima, fica já claro que a qualificação de covariante ou contravariante se aplica apenas a entidades tensoriais, isto é, a componentes de tensores ou a vectores das bases do sistema de coordenadas, que se transformam com a mudança do sistema de coordenadas, e não a tensores, nem, portanto, a grandezas físicas, que permanecem, pelo contrário, invariantes.

Por conseguinte, o modo de se exprimir supra referido é infeliz na medida em que induz a pensar, por exemplo, que a velocidade de uma partícula quando passa no ponto P, \mathbf{v} , expressa no sistema de coordenadas (O, u^i) , só admitiria componentes contravariantes, v^i , o que é, evidentemente, falso, pois em qualquer momento se podem empregar as relações (A9.25) para obter as suas componentes covariantes. A explicação da origem desta expressão, que apesar de pouco adequada é muito comum, radica na relação de definição da velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{notação vectorial}) \quad (\text{A9.26})$$

na qual a função $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ descreve o movimento da partícula. A tradução de (A9.26) para notação algébrica, em termos de componentes, é óbvia quando se trabalha num sistema Cartesiano, (O, x_j) , pois, neste caso,

$$\mathbf{r} \equiv x_j \cdot \mathbf{i}_j \quad (\text{A9.27})$$

Porém, num sistema de coordenadas generalizadas, (O, u^i) , é preferível basear a correspondente tradução na relação (A9.27), válida apenas em (O, x_j) , e servir-se depois do teorema da derivada da função composta, tendo em conta que $\mathbf{r}(t) \equiv x_j(u^i(t)) \cdot \mathbf{i}_j$. Obtém-se assim, em primeiro lugar,

$$\mathbf{v} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right) \cdot \left(\frac{du^i}{dt} \right)$$

e, depois, atendendo a (A9.18b) e (A9.23a),

160

$$\mathbf{v} \equiv v^i \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{com} \quad v^i = \frac{du^i}{dt} \quad (\text{A9.28a,b})$$

Por outras palavras, a tradução mais directa de (A9.26) conduz primeiramente à descoberta das componentes contravariantes da velocidade da partícula, \mathbf{v} .

O caso da grandeza física “força”, \mathbf{F} [N], merece também uma menção particular. Se se tratar de uma força conservativa, derivável de uma função-potencial, ϕ , então, a sua definição natural é

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi \equiv -\underset{F_i}{\phi_{,i}} \cdot \mathbf{e}^i \quad (\text{A9.29a,b})$$

Na equação (A9.29b), escrita em notação tensorial, emprega-se o operador de “derivada covariante”, que se volta a referir adiante, na resposta à Questão v). Este caso, muito comum, em que as componentes covariantes da força, F_i , são aquelas que mais directamente resultam da definição física de \mathbf{F} , dá pé para que alguns classifiquem a “força” como uma “grandeza física covariante”. Considere-se, porém, a força de propulsão de um foguete, definida por

$$\mathbf{F} = -\underset{F^i}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}} \equiv -\mathbf{m} \cdot v^i \cdot \mathbf{e}_i \quad (\text{A9.30a,b})$$

em que: \mathbf{m} [kg/s] é o caudal mássico de saída dos gases de escape pela tubeira do foguete; \mathbf{v} é a velocidade de saída dos gases relativamente ao corpo do foguete; e a relação (A9.30b) se apoia na (A9.28). Se a “força” fosse verdadeiramente uma “grandeza física covariante”, como se explicaria então o facto da força de propulsão do foguete aparecer expressa mais naturalmente pelas suas componentes contravariantes, F^i , dadas pela eq. (A9.30b)?

Questão iv): «Poderão existir grandezas físicas sem “carácter tensorial”, tais como, por exemplo, aquelas que são definidas à custa de um produto vectorial externo, como seja o momento de uma força deslizando, (\mathbf{P}, \mathbf{F}) , relativamente ao ponto O , definido por $\mathbf{M} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$?»

Basta remeter para afirmações feitas acima, nas respostas às Questões (ii) e (iii), para ver que a resposta à presente questão é negativa, sem quaisquer restrições mas com o esclarecimento que se faz abaixo.

Na verdade, qualquer grandeza física, pelo facto de exprimir um aspecto da natureza susceptível, por exemplo, de medição experimental, deve poder ser definida matematicamente de uma forma independente do sistema de coordenadas, visto que este é, pelo contrário, uma mera construção mental. Este é o fundamento físico da tese segundo a qual qualquer grandeza física pode ser expressa por um tensor de ordem apropriada.

O problema de encontrar a definição tensorial correcta para uma dada grandeza física pode não ser, porém, simples. Vejamos o exemplo dado no enunciado da questão, do momento de uma força deslizando, (\mathbf{P}, \mathbf{F}) , relativamente ao ponto O , designado por \mathbf{M} . A definição mais comum de \mathbf{M} baseia-se no produto vectorial externo, e tem a seguinte expressão em notação vectorial:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{A9.31})$$

sendo $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. Por outro lado, em sistemas de coordenadas Cartesianas, tal como (O, x_i) , é usual em Análise Vectorial definir o produto vectorial externo entre os vectores \mathbf{r} e \mathbf{F} através da identidade simbólica

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A9.32})$$

Porém, as relações (A9.31) e (A9.32) não definem correctamente \mathbf{M} como um tensor de 1ª ordem mas sim como um “vector-axial”, visto que se pode mostrar

que \mathbf{M} muda de sinal, indevidamente, quando muda a orientação, de “esquerda” para “direita” ou vice-versa, do sistema de coordenadas. Neste caso, a deficiência não está em (A9.31) mas em (A9.32). Uma forma tensorial correcta para (A9.31,32), válida em qualquer sistema de coordenadas, (O, u^i) , e não apenas em sistemas Cartesianos, é a seguinte:

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{r}^j \cdot \mathbf{F}^k - \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{F}^j) \quad (\text{A9.33})$$

v

na qual: as componentes de todos os tensores intervenientes estão expressas numa das bases locais de (O, u^i) , em P ; (i, j, k) é uma permutação cíclica de $(1, 2, 3)$; \mathbf{r} e \mathbf{F} estão definidos pelas suas componentes contravariantes ⁴ mas \mathbf{M} aparece definido pelas suas componentes covariantes. Para evitar a circularidade desta definição mas sem lhe retirar generalidade, o cálculo do produto vectorial misto no membro direito de (A9.33) deve ser feito num sistema Cartesiano de referência, fixo mas arbitrário, empregando as expressões usuais em Análise Vectorial. Na verdade, também o cálculo prévio das componentes r^i deve ser feito com o auxílio deste sistema de referência, com base em relações como as (A9.27) e (A9.23a).

Questão v): «O operador de “derivada covariante” generaliza algum operador já definido em Análise Vectorial, e, neste caso, qual, ou, pelo contrário, trata-se de um novo operador?»

O operador designado em Análise Tensorial por “derivada covariante” não é mais do que a componente covariante do operador invariante de “derivada total” já introduzido em Análise Vectorial (cf. Exemplos 9 e 10 da Secção 2.1.2). É, porém, definido com maior generalidade: por um lado, porque é aplicável não apenas a campos escalares (caso em que toma a designação restrita de “vector

⁴ Num sistema de coordenadas curvilíneas as componentes r^i não se identificam com as coordenadas u^i , ao contrário do que sucede nos sistemas de coordenadas rectilíneas, em que $r^i = x^i$. Em particular, nos sistemas Cartesianos, rectilíneos e ortogonais, tem-se $x^i = x_i$, sendo válida a relação (A9.27).

gradiente”) e vectoriais (designado, então, por “matriz jacobiana”), isto é, a campos tensoriais de ordens 0 e 1, respectivamente, mas também a campos tensoriais de ordem superior (fala-se, agora, mais genericamente, em “tensor gradiente”); e, por outro lado, porque é formulado não apenas em sistemas de coordenadas Cartesianas mas também em qualquer sistema de coordenadas generalizadas.

Assim, por exemplo, a formulação tensorial do operador de derivada total de 1ª ordem sob forma covariante, ou, mais simplesmente, do operador de derivada covariante, aplicado a um campo tensorial de 2ª ordem definido pelas suas componentes mistas, a_i^j , no sistema (O, u^i) , é

$$b_{i k}^j \equiv a_{i, k}^j = \frac{\partial a_i^j}{\partial u^k} - a_i^j \cdot \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} + a_i^l \cdot \left\{ \begin{matrix} j \\ l k \end{matrix} \right\} \quad (\text{A9.34})$$

onde: o resultado é um campo tensorial de 3ª ordem, b , designado por “campo tensorial gradiente de a ”, que aparece definido pelo tipo de componentes mistas identificáveis pelas posições dos índices, $b_{i k}^j$; no primeiro termo do membro extremo-direito, pode reconhecer-se a reminiscência da definição restrita do operador em Análise Vectorial; e, nos dois últimos termos deste membro, o símbolo $\left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} \equiv e^i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial u^k}$ é exemplo de um “símbolo de Christöffel de 2ª espécie”, podendo verificar-se que estes símbolos se anulam identicamente, em todos os pontos do espaço (suposto Euclidiano), em sistemas de coordenadas rectilíneas.

É importante reparar que o qualificativo “covariante” não se aplica propriamente ao operador tensorial de derivada total, da mesma forma que não se aplica a uma grandeza física ou a um tensor, tal como se refere na última parte da resposta à Questão iii). Concretamente, a respeito da relação (A9.34), nada impede que, “a posteriori”, se passe o índice k , de $b_{i k}^j$, “de baixo para cima”, isto é, “de covariante para contravariante”, por emprego de uma fórmula de transformação apropriada, a qual aliás não é mais do que uma variante simples de (A9.25). Tal operação definiria um “operador de derivada contravariante”, $a_i^{j, k} \equiv b_i^{j k}$, isto é, definiria as “componentes contravariantes (em relação ao índice k) do operador único de derivada total”.

11 Coleção
Ciências e Culturas
Coimbra 2008

