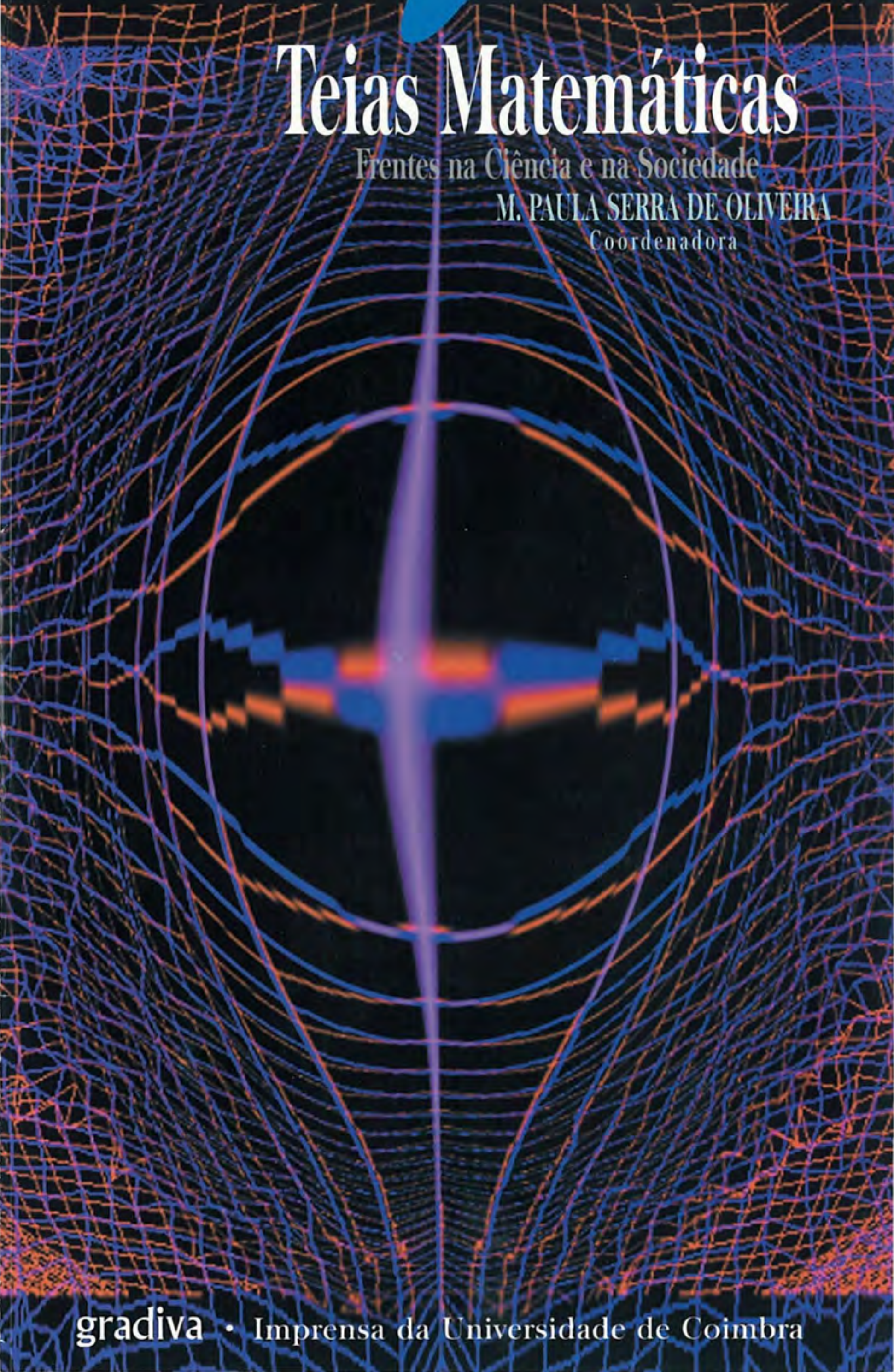
CIÊNCIA ABERTA

Teias Matemáticas

Frentes na Ciência e na Sociedade

M. PAULA SERRA DE OLIVEIRA
Coordenadora



gradiva · Imprensa da Universidade de Coimbra

(Página deixada propositadamente em branco)

MARIA PAULA SERRA DE OLIVEIRA

Coordenadora

TEIAS MATEMÁTICAS

Frentes na Ciência e na Sociedade

gradiva

Imprensa da Universidade de Coimbra

Coordenação editorial: *Maria Paula Serra de Oliveira*
Tradução: *Artur Soares Alves*
Carlota Isabel Leitão Pires Simões
Francisco José Craveiro de Carvalho
João Filipe Cortez Rodrigues Queiró
José Miguel Dordio Martinho de Almeida Urbano
Lia Sandra dos Santos
Mário da Silva Rosa
Paulo Eduardo Aragão Aleixo Neves de Oliveira

Revisão do texto: *Isabel Pedrome*
Capa: *António Barros* [Imprensa da Universidade. Coimbra], com imagem de *E. M. de Melo e Castro*, "Fract 010 explod MC", Dezembro de 2003 [Fractal original gerado no Fractint com tratamento no Photoshop 7.0]
Infografia: *Estúdios Estímulus [design]*
Paginação: *António Resende* e *Victor Hugo Fernandes*

Impressão e acabamento: *G.C. – Gráfica de Coimbra, L.da*

Gradiva – Publicações, L.da
Rua Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. • 1399-041 Lisboa
Telefs. 21 397 40 67/8 • 21 397 13 57 • 21 395 34 70
Fax 21 395 34 71 • Email: gradiva@ip.pt
URL: http://www.gradiva.pt

Imprensa da Universidade de Coimbra
Rua Antero de Quental, 195 • 3000-033 Coimbra
Telefs. 351 239 85 31 10
Fax 351 239 85 31 19 • e-mail: fjrpress@ci.uc.pt
URL: http://www.imp.uc.pt

ISBN: *972-662-970-5*
1.ª edição: *Maio de 2004*
Depósito legal n.º *210431/04*

OBRA PUBLICADA COM O PATROCÍNIO DE:
CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E DO ENSINO SUPERIOR Portugal

José M. Bernardo
Universidade de Valência
Espanha

Interpretação de resultados eleitorais: uma análise bayesiana[1]

Nos dias que se seguem a actos eleitorais, tanto os meios de comunicação social como os responsáveis políticos concentram parte dos seus discursos num exercício de adivinhação da migração de votos relativamente ao acto eleitoral precedente: quem ganhou votos a quem, quem perdeu votos para quem. Tipicamente, os argumentos apresentados para justificar cada posição são pouco mais do que simples comparações entre os resultados globais de duas eleições, sem qualquer tentativa de efectuar uma análise estatística. Neste artigo apresenta-se uma formalização deste problema, faz-se uma apresentação de resultados básicos do paradigma bayesiano que torna possível resolvê-lo e descreve-se, resumidamente, um método bayesiano de estimação das probabilidades de transição que descrevem a migração de votos, com base numa análise hierárquica dos votos registados em dois actos eleitorais num determinado conjunto de círculos eleitorais. O método será aplicado, a título de ilustração, a resultados eleitorais recentes em Espanha.

[1] Tradução de Paulo A. Oliveira, professor do Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra.

1. O PROBLEMA

Quando são anunciados os resultados de uma eleição, tanto os meios de comunicação social como os responsáveis políticos se mostram muito interessados na análise de *modificações* ocorridas nas preferências políticas dos eleitores relativamente ao último acto eleitoral. Para formalizar o problema, representamos por m o número de partidos políticos ou coligações que se apresentaram a votos no acto eleitoral mais recente e por k o número de partidos políticos ou coligações que participaram nas eleições que as precederam (incluindo, em ambos os casos, a abstenção como um partido político). As modificações nas preferências políticas dos eleitores podem ser descritas pelo conjunto de proporções

$$\left\{p_{i,j}, j=1,\ldots,m, \sum_{i=1}^{m} p_{i,j} = 1\right\}, \quad i=1,\ldots,k,$$

onde cada $P_{i,j}$ representa a proporção de eleitores que votaram, nas últimas eleições, no partido j entre os que haviam votado no partido i na eleição anterior. Isto é, $P_{i,j}$ é a proporção de eleitores que o partido i perdeu em favor do partido j. Em particular, $P_{i,j}$ (a proporção de eleitores do partido i que voltaram a votar no partido i) mede o grau de fidelidade ao partido i por parte do seu eleitorado. O problema em análise consiste na estimação das proporções $P_{i,j}$ a partir dos resultados disponíveis.

Se apenas dispuséssemos dos resultados *globais* de ambos os actos eleitorais, isto é, do número total de votos $a = \{a_1,...,a_k\}$ e $b = \{b_1,...,b_m\}$ obtidos por cada um dos partidos que se apresentaram a cada eleição, o problema seria naturalmente insolúvel. Mas os resultados eleitorais são *conhecidos para cada um dos círculos eleitorais* em que se divide a área geográfica em análise, mesas de voto, freguesias, concelhos ou distritos, dependendo do nível de detalhe com que se pretende trabalhar. Logo, os dados disponíveis, que representaremos por D, consistem tipicamente no número de votos, $\{a_1,b_1\}$, i=1,...N, que cada partido recebeu em cada eleição e em cada um dos N círculos eleitorais. Cada um destes resultados parciais está probabilisticamente relacionado com as proporções desconhecidas, $P_{i,j}$. Portanto, os dados disponíveis D constituem uma amostra de tamanho N de um modelo apropriado, parametrizado pelas proporções $P_{i,j}$ a partir dos quais os parâmetros desconhecidos podem ser estimados. O modelo relevante tem uma estrutura *hierárquica* multinomial complexa e, como consequência, o problema de estimação colocado é não trivial. Os métodos de análise estatística convencionais (frequencistas) não conseguem fornecer uma resposta adequada para a inferência em modelos hierárquicos, mas o problema pode ser resolvido utilizando uma abordagem bayesiana.

2. Estatística bayesiana

Os resultados experimentais ou obtidos por observação consistem geralmente em conjuntos de dados (possivelmente vários) que podem ser descritos formalmente por $D = \{x_1,...,x_n\}$, onde as observações x_i gozam de alguma «homogeneidade» (possivelmente multidimensional). Os métodos da estatística permitem obter conclusões acerca da natureza do processo que produziu esses resultados e também acerca do comportamento que esperamos observar em resultados futuros do mesmo processo. Um ponto essencial de *qualquer* análise estatística consiste na especificação de um *modelo probabilístico* que se presume ser capaz de descrever o mecanismo que gerou os dados D em função de um parâmetro (possivelmente multidimensional), $\omega \in \Omega$, por vezes denominado *estado da natureza,* acerca do qual qualquer conhecimento, a existir, é limitado. Todas as conclusões estatísticas subsequentes estão naturalmente condicionadas pelo modelo considerado.

Ao contrário do que é habitual nos vários ramos da matemática, os métodos convencionais da inferência estatística carecem de uma base axiomática; consequentemente, os métodos propostos enfermam, por vezes, de incompatibilidade entre si e a análise de um mesmo conjunto de dados pode levar a resultados incompatíveis quando são aplicados procedimentos diferentes, ainda que intuitivos. A aproximação bayesiana à inferência estatística, em claro contraste com os métodos convencionais, está firmemente apoiada em bases axiomáticas, que fornecem uma estrutura lógica unificadora e garantem a consistência mútua dos diversos procedimentos propostos. Os métodos bayesianos constituem assim um paradigma *completo* para a inferência estatística, uma revolução científica no sentido de Kuhn.

A estatística bayesiana apenas requer a *matemática* da teoria das probabilidades e a *interpretação* da probabilidade que está mais próxima da utilização corrente desta palavra na linguagem diária de não especialistas em matemática: não é por acaso que alguns dos trabalhos mais importantes em estatística bayesiana, como os trabalhos de Laplace, de Finetti ou de Jeffreys, têm o título *Teoria das Probabilidades*. As consequências práticas da adopção do paradigma bayesiano são bastante vastas. De facto, os métodos bayesianos (i) reduzem a inferência estatística a problemas de teoria das probabilidades, minimizando portanto a necessidade de conceitos novos, e (ii) servem para discernir entre os vários métodos convencionais, indicando uma justificação lógica para alguns (e tornando explícitas as condições em que são válidos) ou provando a inconsistência lógica de outros.

A principal consequência desta fundamentação é a *necessidade* matemática de descrever todas as incertezas num problema à custa de distribuições de probabilidade. Em particular, os parâmetros desconhecidos em modelos probabilísticos *devem* ser descritos por uma distribuição de probabilidade conjunta que permita explicitar a informação disponível acerca dos seus valores; este ponto é, na maioria das vezes, identificado como o princípio mais característico da análise bayesiana. Note-se que, no âmbito do paradigma bayesiano, e em claro contraste com a estatística convencional, *os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias.* Este tratamento não é apenas uma descrição da sua variabilidade (os parâmetros são, tipicamente, quantidades fixas mas desconhecidas), mas uma descrição do *grau de incerteza* acerca dos seus valores.

Um caso particular importante é aquele em que não existe nenhuma informação prévia relevante acerca dos parâmetros ou aquele em que a informação prévia existente é subjectiva e se pretende uma análise «objectiva», unicamente baseada em hipóteses acerca do modelo e bem fundamentadas nos dados existentes. Esta questão é resolvida pela *análise de referência*, que utiliza conceitos teóricos de informação para deduzir as distribuições de referência *a posteriori,* definidas para incluir conclusões inferenciais acerca das quantidades em estudo, baseando-se apenas no modelo que foi assumido e nos dados observados.

2.1. A probabilidade como medida de incerteza

A estatística bayesiana utiliza a palavra *probabilidade* no mesmo sentido em que esta palavra é utilizada na linguagem corrente, como uma *medida da incerteza,* condicionada pelo conhecimento corrente, que associamos à ocorrência de um acontecimento particular em função da informação disponível e das hipóteses formuladas no modelo aceite. Assim, a probabilidade de um acontecimento E sob as condições C será denotada por $\Pr(E \mid C)$ e representa a medida do grau de confiança que depositamos na ocorrência de E sob as condições C. Por vezes a probabilidade de um acontecimento sob determinadas condições pode ser associada à frequência relativa de acontecimentos «similares» sob condições «similares». No entanto, esta associação nem sempre é possível. É importante notar que uma probabilidade é *sempre* uma função de dois argumentos, o acontecimento E, cujo grau de incerteza está a ser medido, e as condições C, sob as quais a medição do grau de incerteza é efectuada; probabilidades «em termos absolutos» não existem. Nas aplicações mais correntes deste formalismo, estamos interessados na probabilidade de um certo acontecimento E, conhecidos alguns dados D, as hipóteses H que assumimos acerca do mecanismo que gerou os dados, e o *conhecimento* K relevante para o contexto, que possa existir. Assim, $\Pr(E \mid D,H,K)$ deve ser interpretada como a medida do grau de confiança que depositamos na ocorrência do acontecimento E, tendo em conta os dados D, as hipóteses H e o conhecimento específico K disponível, como uma medida da «verosimilhança» do acontecimento E sob aquelas condições. Para ilustrar os vários conceitos, descreve-se a seguir um exemplo simples.

Estimação de uma proporção

Efectua-se uma sondagem para estimar a proporção θ de indivíduos na população que possuem determinada propriedade. Escolhe-se uma amostra aleatória constituída por n elementos, r dos quais apresentam a referida propriedade. Estaremos então interessados em utilizar estes resultados da amostragem para definir uma região em [0,1] onde seja plausível que esteja o verdadeiro valor (desconhecido) de θ; esta informação será descrita por *probabilidades* da forma $\Pr(a < \theta < b \mid r,n,H,K)$, a medida do grau de incerteza, em função da informação disponível, acerca do acontecimento «θ pertence ao intervalo (a,b)» *dada* a informação que se obtém dos dados $(r;n)$, das hipóteses H consideradas para o mecanismo que gerou a amostra (uma amostra aleatória de tamanho n de provas de Bernoulli) e ainda de qualquer outra informação relevante K conhecida acerca dos valores θ. Por exemplo, uma sondagem sobre as preferências políticas de 1500 cidadãos indicou 720 respostas favoráveis à implementação de determinada medida legislativa. Se concluíssemos que $\Pr(\theta < 0.5 \mid 720,1500, H,K) = 0.933$, isso indicaria uma probabilidade de cerca de 93% de perder um referendo para tentar legitimar essa medida legislativa. De forma análoga, se efectuarmos uma pesquisa para encontrar o número de pessoas infectadas com determinada doença, sobre 100 pessoas, e não encontrarmos nenhuma infectada, poderíamos concluir que $\Pr(\theta < 0.01 \mid 0,100, H,K) = 0,844$, isto é, que a probabilidade de a proporção de infectados na população ser inferior a 1% é de cerca de 84%.

2.2. O paradigma bayesiano

A análise estatística de um conjunto D de dados inicia-se habitualmente por uma avaliação descritiva informal, que é utilizada para sugerir um primeiro *modelo probabilístico* formal $\{p(D \mid \omega), \omega \in \Omega\}$ que se supõe representar, para algum valor (desconhecido) de ω, o mecanismo probabilístico que gerou os dados observados D. É possível introduzir argumentação axiomática para justificar a necessidade lógica de uma distribuição de probabilidade *a priori* $p(\omega \mid K)$ sobre o espaço de parâmetros Ω, descrevendo a informação disponível K acerca do valor de ω antes da observação de quaisquer dados (veja-se, por exemplo, Bernardo e Smith, 1994, cap. 2). Deduz-se então, utilizando argumentos da teoria das probabilidades convencionais, que, se o modelo probabilístico está correcto, toda a informação disponível acerca do valor de ω após a observação dos dados D está contida na distribuição de probabilidade *a posteriori* cuja densidade de probabilidade, $p(\omega \mid D,H,K)$, pode ser obtida de forma imediata a partir do teorema de Bayes como

$$p(\omega \mid D,H,K) \propto p(D \mid \omega, \mathrm{A})\ p(\omega \mid K)$$

onde H representa o conjunto de hipóteses colocadas pelo modelo de probabilidade assumido. É a utilização sistemática do teorema de Bayes, para incorporar a informação obtida a partir de dados observados, que justifica o adjectivo *bayesiano*, que habitualmente se atribui a este paradigma. É óbvio, a partir do teorema de Bayes, que a qualquer valor de ω para o qual a densidade *a priori* seja nula corresponderá o valor nulo na densidade *a posteriori*. Logo, é correntemente assumido que (restringindo, se necessário, o *espaço dos parâmetros* Ω) as distribuições *a priori* são *estritamente positivas* (como diz Savage, mantenhamos um espírito aberto ou, pelo menos, entreaberto). Para simplificar a apresentação, a indicação explícita a A e K será omitida das notações a utilizar, mas o facto de que *todas* as afirmações acerca de ω são condicionais, *também* relativamente às hipóteses e à informação prévia disponível, deverá estar sempre presente no espírito do leitor.

Do ponto de vista bayesiano, o resultado final de um problema de inferência acerca de *qualquer* quantidade desconhecida é a sua distribuição de probabilidade *a posteriori*. Isto é, conhecendo os dados observados D e as condições C, *tudo* o que se pode dizer acerca de qualquer função ω que dependa dos parâmetros que descrevem o modelo está contido na distribuição *a posteriori* $p\ (\omega \mid D,C)$.

Para tornar a interpretação das conclusões mais fácil para o destinatário final da análise estatística, é muitas vezes conveniente resumir a informação contida na distribuição *a posteriori*, exibindo intervalos aos quais, à luz dos dados observados, é razoável supor que o verdadeiro valor da quantidade em estudo pertence. Este procedimento está relacionado com o conceito frequencista de intervalo de confiança, mas é conceptualmente bastante diferente: um *intervalo de confiança* apenas permite indicar que, *se o procedimento for repetido uma infinidade de vezes,* então o correspondente intervalo conterá o verdadeiro valor do parâmetro numa certa proporção (previamente definida) dos casos. Contudo, do ponto de vista frequencista nada pode ser dito acerca da probabilidade de o verdadeiro valor do parâmetro estar no intervalo apresentado *conhecidos os dados disponíveis,* uma probabilidade que aparece naturalmente a partir da distribuição *a posteriori* quando se utiliza o paradigma bayesiano. Ilustremos estes conceitos com um exemplo.

Estimação de uma proporção *(continuação)*. Suponhamos que os dados observados consistem em n observações de Bernoulli com parâmetro θ, das quais r são positivas. Assim, $p(D \mid \theta, n) = \theta^r (1-\theta)^{n-r}$, e suponhamos que o conhecimento prévio dos valores que θ assume é descrito por uma distribuição beta com parâmetros α e β, $Be\ (\theta \mid \alpha, \beta)$. Neste caso obtemos $p(\theta \mid \alpha, \beta) \propto \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$. Utilizando agora o teorema de Bayes, a densidade *a posteriori* associada ao parâmetro θ é

$$p(\theta \mid r, n, \alpha, \beta) \propto \theta^r (1-\theta)^{n-r} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \propto \theta^{r+\alpha-1} (1-\theta)^{n-r+\beta-1},$$

que identifica uma distribuição $Be(\theta \mid r+\alpha, n-r+\beta)$.
Suponhamos que θ representa a proporção de eleitores que votam favoravelmente uma determinada medida legislativa num referendo. A experiência de sondagens anteriores e a informação disponível acerca de θ poderá tornar razoável a suposição de a distribuição *a priori* do parâmetro ser descrita pela distribuição $Be(\theta \mid 50{,}50)$. Esta distribuição prevê que é igualmente provável a aprovação e a reprovação da medida legislativa que está a ser referendada e que a probabilidade de a aprovação ou reprovação da medida legislativa obter menos de 60% dos votos é igual a 0.95. Uma sondagem aleatória é efectuada a 1500 eleitores, registando--se 720 eleitores que aprovam a medida legislativa em causa. A utilização das distribuições descritas atrás indica que a distribuição *a posteriori* de θ é $Be(\theta \mid 730{,}790)$. As distribuições *a priori* e *a posteriori* estão representadas na figura 1. É de realçar que, como se poderia esperar, o efeito dos dados consiste numa redução drástica da incerteza inicial que o modelo atribuía ao valor de θ e, portanto, ao resultado do referendo. Mais precisamente, $\Pr(\theta < 0.5 \mid 720, 1500, H) = 0.933$ (que corresponde à área a sombreado na figura 1), pelo que, após a inclusão dos resultados

da sondagem no modelo definido, a probabilidade de o referendo ser desfavorável à medida legislativa em causa deverá ser de cerca de 93%.

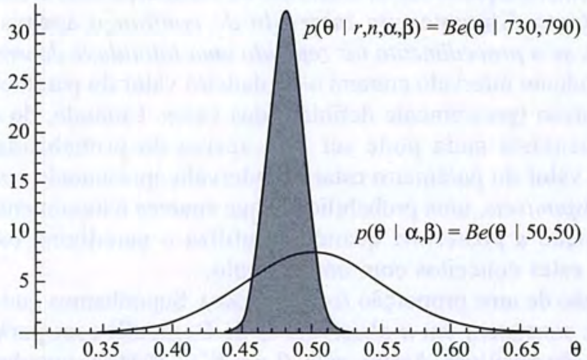


Fig. 1 — Densidades das distribuições a priori *e* a posteriori *para a proporção θ de eleitores que votariam positivamente num referendo*

A situação *a priori* para este problema em que não há informação inicial disponível consiste em tomar $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}$, isto é, uma distribuição beta $Be(\theta \mid 0.5, 0.5)$. A correspondente distribuição *a posteriori* é $Be(\theta \mid r+0.5, n-r+0.5)$, onde, mais uma vez, r representa o número de respostas positivas.

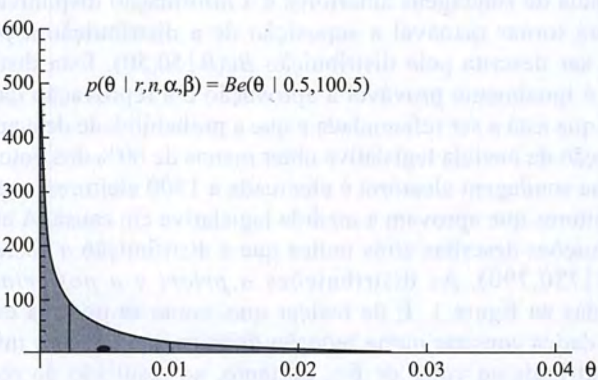


Fig. 2 — Distribuição a posteriori *para a proporção de indivíduos infectados numa população, dada a observação de indivíduos dos quais nenhum estava infectado*

Suponhamos agora que em 100 indivíduos escolhidos ao acaso foi testada a presença de uma infecção, tendo-se verificado que nenhum dos indivíduos escolhidos estava infectado, isto é, $r = 0$. A figura 2 mostra que a distribuição *a posteriori* para a proporção θ de indivíduos na população inteira que estão infectados é $Be(\theta \mid 0.5, 100.5)$. Logo, baseando-nos nos resultados observados, podemos concluir que a proporção de indivíduos infectados é seguramente inferior a 5% (pois, para a distribuição *a posteriori*, a probabilidade do acontecimento $\{\theta > 0.05\}$ é 0.001), que θ é inferior a 0.01 com probabilidade 0.844 (a área da região a sombreado na figura 2), que é igualmente provável que θ esteja acima ou esteja abaixo de 0.23% (a mediana da distribuição *a posteriori* está representada por um traço vertical na figura 2) e que um indivíduo escolhido ao acaso naquela população tem uma probabilidade 0.005 (a média da distribuição *a posteriori* está representada por um círculo negro na figura 2) de estar infectado, já que $\Pr(x=1 \mid r,n) = E[\theta \mid r,n] = 0{,}005$. Se quisermos uma aproximação numérica para o valor de θ, deveríamos escolher a mediana 0.0023 ou 0.23%. Note-se que a solução convencional para este problema, baseada no comportamento assimptótico do estimador da máxima verosimilhança, é

$$\hat{\theta} = \frac{r}{n} = 0,$$

independentemente do valor de n. Esta conclusão, de a proporção de infectados ser nula, não faz sentido neste cenário.

Nos últimos anos foram publicados vários livros sobre estatística bayesiana, que recomendamos ao leitor mais interessado. Destacamos alguns, referindo-os por ordem cronológica de publicação: Berger (1985), Lee (1989), Bernardo e Smith (1994), O'Hagan (1994) e Gelman *et al.* (1995). Para uma introdução simples à estatística bayesiana veja-se Bernardo (2001), incluído na *Encyclopedia of Life Support Systems.*

A estatística bayesiana permite a análise de modelos probabilísticos complexos, como os de estrutura hierárquica, que estão fora do alcance dos métodos convencionais. O modelo probabilístico apropriado para a análise das transferências de votos entre actos eleitorais é, precisamente, um modelo hierárquico.

3. A SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA PROPOSTO

O modelo probabilístico considerado para a estimação da redistribuição de votos entre dois actos eleitorais consecutivos baseia-se na *permutabilidade parcial* dos eleitores que votaram na eleição prévia. Este princípio faz aparecer (veja-se Bernardo e Smith, 1994, cap. 4) um produto de k distribuições multinomiais, onde k é o número de partidos políticos que se apresentaram à eleição anterior, o que implica que se considerem como parâmetros *simultaneamente* os $P_{i,j}$ que representam a proporção, de entre os votantes que na eleição anterior haviam votado no partido i, de votantes no partido j na presente eleição, e a matriz de variáveis latentes $n_{i,j,u}$ que descreve o número (desconhecido) de eleitores que alteraram o seu voto de i para j em cada um dos círculos eleitorais u, todas sujeitas às condições (conhecidas) impostas pelo número total de votos obtido por cada partido em cada um dos círculos eleitorais u, que são também conhecidos.

Tabela 1 — Cidade de Valência. Resultados por círculo eleitoral nas eleições de 1995

Círculo	PP	PSOE	EU	UV	Bloc	Outros	Abst.
1	11 474	2 732	1 628	1 491	223	166	4 257
2	21 025	4 584	2 835	2 547	298	227	6 823
3	21 591	5 840	3 425	3 282	377	258	8 277
4	8 267	4 579	2 942	1 704	212	210	682
5	13 911	7 549	4 303	2 927	310	313	11 242
6	14 223	2 748	1 649	1 341	232	156	5 284
7	13 148	9 067	4 604	3 126	227	279	11 675
8	14 127	7 411	5 195	3 294	281	323	15 404
9	12 088	8 593	4 862	3 347	236	304	12 981
10	18 010	9 941	5 985	4 907	414	382	18 128
11	11 227	11 500	5 239	4 635	334	304	16 643
12	11 317	8 906	4 559	2 756	280	242	14 328
13	11 000	6 387	3 944	2 061	339	222	10 453
14	7 628	4 346	2 800	1 581	232	162	7 849
15	9 174	8 404	4 330	2 432	221	238	11 736
16	7 432	7 056	3 590	2 013	179	251	12 498
17	1 568	1 019	373	877	70	16	1 306
18	2 337	2 693	1 021	654	44	78	3 496
19	3 754	2 793	1 287	2 593	113	70	5 624

Para aproximar as variáveis latentes utiliza-se programação linear. Obtém-se assim um perfil de verosimilhanças que depende apenas dos parâmetros $P_{i,j}$ que nos interessam. Utilizando uma distribuição *a priori* adequada (Bernardo, 1979; Berger e Bernardo, 1992; Bernardo e Ramón, 1998), é possível obter uma distribuição *a posteriori* para os $P_{i,j}$ e, em particular, os seus valores médios *a posteriori* (que constituem as aproximações pretendidas) e ainda os desvios padrões, também *a posteriori* (que descrevem os erros previsíveis em cada estimativa).

É importante realçar que a metodologia delineada depende *exclusivamente* dos resultados eleitorais registados. Em particular, não requer nenhum conhecimento adicional proveniente, por exemplo, de sondagens. A título de ilustração da metodologia, consideremos as alterações no padrão da votação na cidade de Valência, Espanha, entre as eleições ocorridas em 1995 e em 1999, baseando-nos exclusivamente nos resultados eleitorais nestas duas eleições em cada um dos 19 círculos eleitorais em que a cidade está dividida (tabelas 1 e 2). Os partidos políticos considerados foram: PP (conservadores), PSOE (socialistas), EU (comunistas), UV (direita--nacionalistas), Bloc, (esquerda-nacionalistas), outros (pequenos partidos) e a abstenção (eleitores que não votaram).

Tabela 2 — Cidade de Valência. Resultados por círculo eleitoral nas eleições de 1999

Círculo	PP	PSOE	EU	UV	Bloc	Outros	Abst.
1	9 778	2 319	786	599	643	154	7 692
2	18 261	4 087	1 165	991	993	302	12 540
3	19 329	5 340	1 469	1 260	1 241	317	14 094
4	7 816	4 775	1 168	687	701	196	9 391
5	13 839	7 300	1 970	1 281	998	301	14 866
6	12 416	2 709	657	611	654	188	8 398
7	13 000	8 365	1 811	1 257	825	338	16 530
8	15 107	8 302	2 209	1 505	1 180	362	17 370
9	12 595	8 659	1 947	1 468	931	294	16 517
10	18 570	9 445	2 496	1 933	1 184	734	23 405
11	12 617	10 251	2 460	2 167	1 050	443	20 894
12	12 182	8 482	2 054	1 280	935	291	17 164
13	10 919	6 477	1 696	1 070	1 011	274	12 959
14	7 750	4 699	1 225	693	698	190	9 343
15	9 717	7 862	1 708	1 012	735	317	15 184
16	8 409	7 126	1 509	1 036	689	256	13 994
17	1 839	872	178	461	215	22	1 642
18	2 597	2 599	389	391	194	63	4 090
19	4 911	2 663	591	740	325	984	6 020

Utilizando a metodologia descrita atrás obtemos uma distribuição *a posteriori* para a matriz 7×7 que descreve as probabilidades de transição entre cada par de partidos políticos. Os valores esperados para as probabilidades, expressos em percentagens (isto é, $100P_{i,j}$), são os da matriz de transições indicada na tabela 3. Esta tabela dá-nos uma análise detalhada da estrutura de transferência de votos. Por exemplo, os dois maiores partidos (PP e PSOE) mantiveram na eleição de 1999 praticamente todos os eleitores que neles haviam votado na eleição de 1995 (95,8% e 95,3%, respectivamente), enquanto os comunistas (EU) apenas mantêm 43% do seu eleitorado, com perto de 50% a decidir-se pela abstenção na eleição de 1999.

Tabela 3 — Estrutura de transição. Distribuição percentual dos votos em 1999 em função do voto em 1995

% Votos 95→99	PP	PSOE	EU	UV	Bloc	Outros	Abst.
PP	95,8	0,0	0,0	0,0	0,7	0,0	3,5
PSOE	0,0	95,3	0,0	0,0	4,0	0,3	0,4
EU	0,2	0,0	43,0	0,0	6,7	0,2	49,9
UV	15,9	3,5	0,0	43,3	0,0	3,0	34,3
Bloc	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	0,0	0,0
Outros	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	98,5	1,5
Abst.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0

Como são conhecidos os resultados globais, as aproximações da tabela 3 podem naturalmente ser reescritas em termos absolutos, oferecendo uma estimativa da relevância efectiva da transferência de votos. Assim (veja-se a tabela 4), cerca de 4800 eleitores entre os 116 146 que votaram PSOE em 1995 deverão ter votado em Bloc na eleição de 1999, e, dos 47 569 eleitores que votaram em UV em 1995, estima-se que cerca de 7500 votaram em PP em 1999.

Tabela 4 — Estrutura de transição. Distribuição absoluta dos votos em 1999 em função do voto em 1995

Partido	Votos em 1995	PP	PSOE	EU	UV	Bloc	Outros	Abst.
PP	213 299	204 202	0	0	0	1 542	0	7 555
PSOE	116 146	0	110 592	0	0	4 759	359	436
EU	64 570	151	0	27 711	0	4 314	133	32 261
UV	47 569	7 547	1 654	0	20 516	0	1 391	16 461
Bloc	4 619	0	0	0	0	4 619	0	0
Outros	4 199	0	0	0	0	0	4 136	63
Abst.	184 820	0	0	0	0	0	0	184 820
	Votos em 1999	211 900	112 246	27 711	20 516	15 234	6 019	241 596

Referências

Berger, J. O. (1995) – Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Berlim: Springer.

Berger, J. O. e Bernardo, J. M. (1992) – On the development of reference priors. *Bayesian Statistics 4* (J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid e A. F. M. Smith, eds.). Oxford: University Press, 35-60 (com discussão).

Bernardo, J. M. (1979) – Reference posterior distributions for Bayesian inference. J. Roy. Statist. Soc. B 41, 113-147 (com discussão). Reimpresso em *Bayesian Inference* (N. G. Polson e G. C. Tiao, eds.). Brookfield, VT: Edward Elgar, 1995, 229-263.

Bernardo J. M. (2001) – Bayesian Statistics. *Encyclopedia of Life Support Systems* (EOLSS). Paris: UNESCO (em publicação).

Bernardo, J. M. e Ramón, J. M. (1998) – An introduction to Bayesian reference analysis: inference on the ratio of multinomial parameters. *The Statistician* 47, 101-135.

Bernardo, J. M. e Smith, A. F. M. (1994) – *Bayesian Theory*. Chichester: Wiley.

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. e Rubin, D. B. (1995). *Bayesian Data Analysis*. Londres: Chapman and Hill.

Lee, P. M. (1989) – *Bayesian Statistics: an Introduction*. Londres: Edward Arnold.

O'Hagan, A. (1994) – Bayesian Inference (Kendall's Advanced Theory of Statistics 2B). Londres: Edward Arnold.

Instrumentos matemáticos complexos permitiram realizar com sucesso tarefas tão distintas como a programação de um voo a Marte, a previsão de resultados eleitorais, a explicação do funcionamento de alguns mecanismos do sistema nervoso, ou a abordagem crítica de obras de arte e de textos literários. Da ciência à sociedade, dos grandes avanços técnicos à solidez de uma argumentação lógica, a Matemática constrói teias de uma imensa flexibilidade resultante do carácter universal da sua linguagem.

Neste livro, personalidades de diferentes universos dão o seu testemunho sobre a forma como usam as teias matemáticas para tecer a sua própria visão do mundo.

MARIA PAULA SERRA DE OLIVEIRA é professora de Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

ISBN 972-662-970-5

9 789726 629702

gradiva • Imprensa da Universidade de Coimbra