EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

PAULO SARAIVA
JOSÉ MURTEIRA

INTRODUÇÃO TEÓRICA E APLICAÇÕES

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

E N S I N O

I

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

U

EDIÇÃO
Imprensa da Universidade de Coimbra
Email: imprensauc@ci.uc.pt
URL: http//www.uc.pt/imprensa_uc
Vendas online: http://livrariadaimprensa.uc.pt

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Imprensa da Universidade de Coimbra

CONCEPÇÃO GRÁFICA
António Barros

INFOGRAFIA DA CAPA
Carlos Costa

EXECUÇÃO GRÁFICA
Simões & Linhares

ISBN
978-989-26-0642-2

ISBN DIGITAL
978-989-26-0643-9

DOI
http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0643-9

DEPÓSITO LEGAL
365892/13

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

PAULO SARAIVA
JOSÉ MURTEIRA

INTRODUÇÃO TEÓRICA E APLICAÇÕES

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS

(Página deixada propositadamente em branco)

Índice

Prefácio

O presente livro constitui uma primeira introdução, em contexto de ensino universitário, ao cálculo de equações de diferenças, tema que, em certa medida, assumiu crescente relevo como resultado do incremento das capacidades computacionais. De facto, estas permitiram não só um desenvolvimento da investigação matemática nesta área do cálculo, mas também uma generalização da aplicação das equações de diferenças como ferramenta de modelização nas mais diversas áreas, desde a Economia e as Finanças à Física, passando pelos estudos demográficos e até mesmo pelo desenvolvimento de estratégias de guerra.

O texto que agora se apresenta baseia-se, em parte, num capítulo de um texto proposto aos alunos de Cálculo II da licenciatura em Economia da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra (FEUC). Relativamente a este, o presente texto surge enriquecido tanto pela abordagem dos sistemas de equações de diferenças, como pela inclusão da modelização de situações práticas de relevo. O suporte teórico é de nível relativamente acessível e pressupõe conhecimentos básicos de sucessões. Aconselha-se ainda o domínio de alguns tópicos de Álgebra Linear, dada a apresentação dos processos de resolução das equações lineares com coeficientes constantes utilizando o método do polinómio anulador, que, por sua vez, envolve a teoria dos operadores lineares. Contudo, precisamente para o leitor que sinta lacunas nesta área, os autores optaram pela inclusão no corpo do texto e em anexos, dos rudimentos que, nesta disciplina, são necessários e suficientes para a fundamentação teórica das técnicas apresentadas.

O texto está dividido em dois capítulos. No primeiro expõe-se a teoria relativa às equações de diferenças lineares com coeficientes constantes, começando com uma secção introdutória relativa ao chamado cálculo de diferenças finitas. Embora diversos autores explanem a teoria das equações de diferenças utilizando o operador diferença, optou-se aqui por fazê-lo com base no operador E (operador avanço), justamente tendo em vista o recurso ao método do polinómio anulador. A distinção que de seguida se faz entre as equações de ordem um e as de ordem superior resulta do diferente método de resolução adotado. Com efeito, no primeiro caso optou-se por um simples método de resolução por recorrência (o qual, diga-se *en passant*, constituiria um interessante exercício ao nível do ensino secundário). A terceira e última secção, sobre as equações de ordem superior, constitui portanto o principal assunto do primeiro capítulo. Paralelamente à dedução da solução geral das equações de diferenças lineares, procura-se apresentar, de modo sucinto, as técnicas que permitem analisar o comportamento das mesmas, tarefa cujo aprofundamento não cabe num texto de cariz introdutório. Em ambas as subsecções, os autores esforçaram-se por ilustrar os métodos de resolução mediante a inclusão de exemplos e exercícios resolvidos em número suficiente para a compreensão dos mesmos. No final de cada subsecção, para além de uma lista de exercícios propostos, ocupam lugar de destaque exemplos de aplicação dos conceitos num contexto de modelação matemática em diversas áreas.

O segundo capítulo ocupa-se dos sistemas de equações de diferenças lineares, restringido-se o estudo ao caso dos coeficientes constantes. Para além disso, aborda-se brevemente a teoria da estabilidade destes sistemas. Como a resolução deste tipo de sistemas está relacionada com o cálculo de potências matriciais, apresentam-se dois métodos para a sua concretização, complementados, em anexo, com outros aplicáveis a casos particulares. Evidentemente, num curso introdutório que aborde outros temas para além das equações de diferenças, o conteúdo do segundo capítulo poderá considerar-se opcional.

Termina-se este prefácio mencionando o trabalho pioneiro na FEUC da falecida Dra. Maria dos Anjos Saraiva, docente responsável durante vinte

anos pela disciplina de Matemática II naquela faculdade, que introduziu as Equações de Diferenças como tema de estudo com especial relevo para a formação de futuros economistas e produziu uma obra didáctica sobre o mesmo (veja-se [13]). A presente publicação dá continuidade a tal trabalho, reforçando a importância que o tema adquire na formação dos estudantes. É de registar ainda um agradecimento ao Professor António Alberto Santos pelo apoio técnico nos acabamentos da redação desta obra. Uma palavra de apreço deve finalmente ser endereçada aos dois revisores científicos anónimos, cujas notas e recomendações permitiram o aperfeiçoamento do texto. Eventuais incorreções que, de maneira formal ou substancial, ocorram no texto são, evidentemente, da responsabilidade dos autores. Ainda assim, espera-se que tais limitações não manchem em demasia a importância de uma obra cujos principais destinatários são os estudantes.

Paulo Saraiva

José Murteira

(Página deixada propositadamente em branco)

Capítulo I

Equações de Diferenças Lineares

O presente capítulo expõe os métodos de resolução das equações de diferenças lineares de ordem n. Dado o carácter introdutório da presente obra, optou-se por restringir o estudo ao caso das equações com coeficientes constantes.

1 Cálculo de diferenças finitas

Antes de iniciar propriamente o estudo sistemático das equações de diferenças, introduz-se o chamado Cálculo de Diferenças, que pode ser visto como correspondente discreto do Cálculo Diferencial. Como se verá, esta introdução é útil na procura das soluções de uma equação de diferenças linear, assim como na sua análise.

Definam-se dois operadores: o operador diferença e o operador avanço ou salto em frente.([1]) Estudam-se as suas propriedades e as relações que entre eles se estabelecem.

Seja $x : t \longrightarrow x(t)$ uma função real de variável real, $t \in D$. O **operador**

[1] Um **operador** é toda a aplicação entre espaços vetoriais de funções (ver Anexo A), *i.e.*, uma aplicação que transforma cada função numa função.

diferença, representado por Δ, define-se através de

$$\Delta x\,(t) = x\,(t+h) - x(t), \tag{1.1}$$

onde $t,\ t+h \in D$. O valor h é uma constante real arbitrária dita **intervalo** ou **passo** da diferença.

Na seguinte figura representa-se graficamente a atuação do operador diferença.

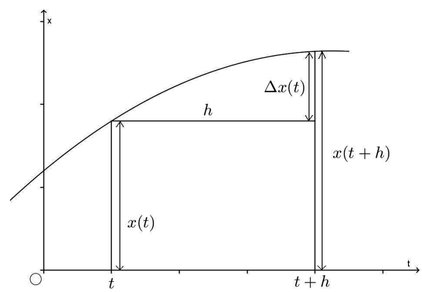


Figura I.1: Atuação do operador Δ.

No que se segue, se nada se disser em contrário, adota-se a convenção

$$h = 1 \qquad \text{e} \qquad D = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}\,. \tag{1.2}$$

Deste modo, as funções x acima referidas são as familiares sucessões de números reais, pelo que (1.1), na notação mais usual, admite a forma

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t, \quad t \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.1 *Considere a sucessão x tal que*

$$x_t = at + b,$$

onde a e b são constantes reais. Descreva a atuação do operador diferença.

Resolução: Note-se que

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = (a(t+1) + b) - (at + b) = a,$$

ou seja, uma constante. Como é óbvio, nem sempre isto acontece. De facto, considerando

$$y_t = at^2 + bt + c,$$

onde a, b e c são constantes reais, vem

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = (\cdots) = 2at + a + b.$$

Visualize-se graficamente esta última, tomando $a = 1$ e $b = c = 0$.

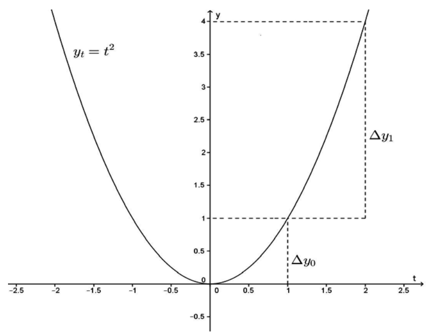


Figura I.2: Atuação do operador Δ sobre y_t.

□

É frequente ver-se escrito Δx_t com x_t substituído pela sua expressão. Assim, relativamente ao exemplo anterior,

$$\Delta (at + b) = a$$

e

$$\Delta \left(at^2 + bt + c\right) = 2at + a + b.$$

Note-se no entanto que Δt^2 e $(\Delta t)^2$ têm significados distintos.

O operador **avanço** ou **salto em frente** (*shift* na literatura em inglês), simbolizado por E, define-se através de

$$Ex_t = x_{t+1}, \quad t \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Em termos geométricos, a ação do operador E consiste numa translação do gráfico de x associada ao vetor $(-1, 0)$, isto é, numa deslocação do gráfico de x uma unidade para a esquerda.

Exemplo 1.2 *Para as sucessões x e y do exemplo anterior, tem-se:*

$$Ex_t = x_{t+1} = a\,(t + 1) + b = at + a + b$$

e

$$\begin{aligned} Ey_t = y_{t+1} &= a\,(t+1)^2 + b\,(t+1) + c \\ &= at^2 + (2a+b)\,t + a + b + c. \end{aligned}$$

Tomando $a = 1$ *e* $b = c = 0$, *visualize-se* $y_t = t^2$ *e* $Ey_t = (t+1)^2$.

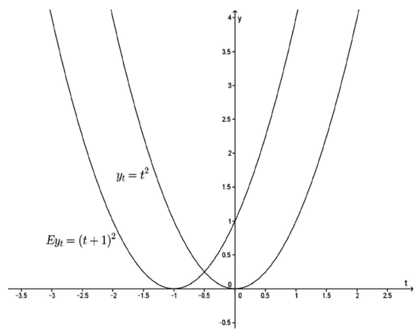


Figura I.3: y_t e atuação do operador E sobre y_t.

$\square$

Atendendo às definições, facilmente se deduz a seguinte relação entre estes dois operadores:

$$\Delta = E - 1, \tag{1.5}$$

onde 1 é aqui o **operador identidade**, o qual transforma toda a sucessão em si mesma. Com efeito, sendo x uma qualquer sucessão, de (1.3) vem

$$\Delta x_t = Ex_t - x_t = (E-1)\,x_t,$$

de onde resulta (1.5).

Mostre-se agora que o operador E é uma **aplicação linear**, *i.e.*, dadas duas quaisquer sucessões x e y, e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, E satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &(1) \quad E\,(x_t + y_t) = Ex_t + Ey_t\ ; \\ &(2) \quad E\,(\alpha x_t) = \alpha Ex_t\ . \end{aligned}$$

De facto,

$$E\,(x_t + y_t) = x_{t+1} + y_{t+1} = Ex_t + Ey_t$$

e

$$E(\alpha x_t) = \alpha x_{t+1} = \alpha E x_t.$$

Uma vez que o operador identidade é linear, por (1.5) também se pode concluir que o operador Δ satisfaz tal propriedade.

Podem-se definir, por recorrência, operadores diferença e salto em frente de ordem superior à primeira. Com efeito, o operador diferença de segunda ordem, Δ^2, atua como se segue:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_t &= \Delta(\Delta x_t) = \Delta(x_{t+1} - x_t) = \Delta x_{t+1} - \Delta x_t \\ &= (x_{t+2} - x_{t+1}) - (x_{t+1} - x_t) \\ &= x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t. \end{aligned}$$

Mais geralmente, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^k x_t = \Delta\left(\Delta^{k-1} x_t\right).$$

Além disso, convencionou-se que $\Delta^0 x_t = x_t$, ou seja,

$$\Delta^0 = 1.$$

Exemplo 1.3 *Considere de novo a sucessão y tal que*

$$y_t = at^2 + bt + c.$$

Calcule $\Delta^k y_t$, $k = 1, 2, 3$.

Resolução: Do Exemplo 1.1 sabe-se que

$$\Delta y_t = 2at + a + b$$

e, portanto,

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = 2a,$$

pelo que

$$\Delta^3 y_t = \Delta\left(\Delta^2 x_t\right) = 2a - 2a = 0.$$

□

Exercício 1.4 *Mostre, por indução, a seguinte fórmula para a n-ésima diferença:*

$$\Delta^n x_t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x_{t+n-k}.$$

O operador *avanço* de segunda ordem, E^2, define-se por recorrência como

$$E^2 x_t = E\,(Ex_t) = Ex_{t+1} = x_{t+2}.$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$E^k x_t = E\left(E^{k-1} x_t\right) = x_{t+k}.$$

Mais uma vez, convenciona-se que $E^0 = 1$. Graficamente, a ação do operador E^k corresponde a uma translação do gráfico de x associada ao vetor $(-k, 0)$.

Exemplo 1.5 *Tome-se de novo x tal que $x_t = at + b$, e calcule-se*

$$E^k x_t,\ k = 1, 2, 3, ...$$

Resolução: Tem-se

$$\begin{aligned} Ex_t &= x_{t+1} && = at + a + b \\ E^2 x_t &= x_{t+2} && = at + 2a + b \\ E^3 x_t &= x_{t+3} && = at + 3a + b \\ &\ \ \vdots && \ \ \vdots \end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$E^k x_t = x_{t+k} = at + ka + b, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

□

Recorrendo ao desenvolvimento binomial, pode agora provar-se novamente o que se pede no exercício anterior. Assim, de (1.5) vem

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k E^{n-k},$$

ou seja, dada uma sucessão x, tem-se outra vez

$$\Delta^n x_t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, E^{n-k} x_t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x_{t+n-k}.$$

A terminar, chama-se a atenção do leitor para o Anexo B, onde se evidencia uma analogia entre o operador diferença e o operador diferencial linear.

1.1 Exercícios

1. Para cada uma das seguintes funções, calcule Δx_t para um passo h genérico e para $h = 1$. Calcule ainda os três primeiros termos de Δx_t.

   (a) $x_t = t - 3$ (b) $x_t = t\,(t+1)$

   (c) $x_t = 3t^2$ (d) $x_t = 5^t$

2. Para cada uma das sucessões de 1., recorra às funcionalidades de uma folha de cálculo para construir uma tabela com 10 ou mais termos de x_t e de Δx_t, com $h = 1$. Visualize ainda graficamente os termos de ambas as sucessões.

3. Para cada uma das sucessões de 1., calcule $\Delta^2 x_t$.

4. Estabeleça as fórmulas de $\Delta^n x_t$ e de $E^n x_t$ em função de x_{t+kh}, com $k = 0, 1, 2, ..., n$ para um passo h genérico. Aplique-as à sucessão dada em 1. (d).

5. Mostre que os operadores Δ^n e E^n são lineares (tome $h = 1$).

6. Prove as seguintes igualdades:

   (a) $\Delta^p\left(\Delta^q x_t\right) = \Delta^{p+q} x_t$, para todos os $p, q \in \mathbb{N}_0$

   (b) $\Delta\left(x_t y_t\right) = x_t \Delta y_t + E y_t \Delta x_t$

   (c) $\Delta\left(\dfrac{x_t}{y_t}\right) = \dfrac{y_t \Delta x_t - x_t \Delta y_t}{y_t E y_t}$

   (d) $\Delta a^t = (a-1)\, a^t$

   (e) $\Delta \sin(at) = 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left[a\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]$

   (f) $\Delta \cos(at) = -2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left[a\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]$

   (g) $\Delta \log_b(at) = \log_b\left(a + \frac{1}{t}\right)$

2 Equações lineares de ordem 1

Dadas duas sucessões de números reais, a e b, onde a é não identicamente nula, designa-se **equação de diferenças linear (EDL), de primeira ordem**, toda a equação que se possa reduzir à forma

$$y_{t+1} + a_t y_t = b_t, \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

onde y é a sucessão incógnita.

Note-se que qualquer equação do tipo

$$c_t y_{t+1} + d_t y_t = b_t, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

equivale a (2.1) para todos os valores de t tais que $c_t \neq 0$ (bastando para tal dividir ambos os membros desta por c_t).

Equações envolvendo os operadores Δ e E poderão também ser deste tipo. Assim, a título de exemplo, se a equação é dada na forma

$$\Delta y_t = q_t, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

então facilmente se escreve como

$$y_{t+1} - y_t = q_t, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

que está na forma (2.1).

2.1 Equações com coeficiente e segundo membro constantes

No que se segue, considera-se que em (2.1) as sucessões a e b são constantes, admitindo pois a forma

$$y_{t+1} + a y_t = b, \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, mas $a \neq 0$.

Antes de abordar o processo de resolução de (2.2), convém clarificar o conceito de solução, o que se fará após a ilustração proporcionada pelo seguinte exemplo.

Exemplo 2.1 *Considere a seguinte equação de diferenças,*

$$y_{t+1} - 5y_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

Tomando y tal que

$$y_t = 5^t \tag{2.4}$$

e substituindo em (2.3)*, verifica-se que*

$$y_{t+1} - 5y_t = 5^{t+1} - 5.5^t = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{N}_0$. Quer isto dizer que tal sucessão satisfaz a equação *dada no conjunto $\mathbb{N}_0$. Dito de outro modo,* (2.4)*, é **solução** de* (2.3)*. Não é difícil mostrar que também*

$$y_t = 2.5^t, \qquad y_t = -2.5^t \qquad e \qquad y_t = \frac{1}{3}.5^t$$

são soluções da referida equação. Mais: toda a sucessão da forma

$$y_t = C\ 5^t, \tag{2.5}$$

com C constante real, é solução de (2.3)*. Esta será dita **solução geral**, ao passo que as antes elencadas se dirão **soluções particulares**, por resultarem desta por concretização de C. A constante C está relacionada com a condição inicial dada. Assim, se se pretende a solução particular de* (2.3) *para a qual é dado $y_0 = 1$, basta determinar o valor de C na solução geral. De facto, com $y_0 = 1$, de* (2.4) *vem*

$$1 = C.5^0 \Leftrightarrow C = 1,$$

pelo que tal solução é a sucessão y tal que

$$y_t = 5^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

□

Posto isto, dir-se-á que a sucessão y é uma **solução** da equação de diferenças (2.2) sobre um conjunto S se os valores de y convertem, após substituição, a referida equação numa identidade em S. A solução de (2.2) que envolva uma constante real arbitrária designa-se **solução geral**. Toda a solução de (2.2) que se obtém da solução geral por concretização da constante arbitrária designa-se **solução particular**.

A resolução deste tipo de equações requer apenas uma simples técnica designada *método iterativo*, cuja aplicação se exemplifica de seguida.

Exemplo 2.2 *Resolva a equação*

$$y_{t+1} - 2y_t = 1, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

supondo que $y_0 = 1$.

Resolução: Vem sucessivamente

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2y_0 + 1 \\
y_2 &= 2y_1 + 1 = 2\,(2y_0 + 1) + 1 = 2^2 y_0 + 1 + 2 \times 1 \\
y_3 &= 2y_2 + 1 = 2\left(2^2 y_0 + 1 + 2 \times 1\right) + 1 = 2^3 y_0 + 1 + 2 \times 1 + 2^2 \times 1 \\
&\vdots \\
y_t &= 2^t y_0 + 2^0 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times 1 + \ldots + 2^{t-1} \times 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim, recorrendo à fórmula para a soma dos t primeiros termos de uma progressão geométrica, a solução da equação dada vem

$$y_t = y_0 2^t + \frac{1 - 2^t}{1 - 2} = (y_0 + 1)2^t - 1, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

onde y_0 é um valor arbitrariamente dado. Deste modo, a solução particular que se obtém quando tomamos $y_0 = 1$ será

$$y_t = -1 + 2^{t+1}, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

$\square$

Este procedimento pode reproduzir-se facilmente para o caso geral. De facto, supondo que é dado um valor inicial, y_0, a partir de (2.2) vem

$$\begin{aligned}
y_1 &= -ay_0 + b \\
y_2 &= -ay_1 + b = -a\left[-ay_0 + b\right] + b = (-a)^2 y_0 + b + (-a)\, b \\
y_3 &= -ay_2 + b = -a\left[(-a)^2 y_0 + b + (-a)\, b\right] + b \\
&= (-a)^3 y_0 + b + (-a)\, b + (-a)^2 b \\
&\vdots \\
y_t &= (-a)^t y_0 + b\left[(-a)^0 + (-a)^1 + \ldots + (-a)^{t-1}\right], \quad t \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Se $a = -1$, resulta

$$y_t = y_0 + b\Big(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{t \text{ parcelas}}\Big) = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Por outro lado, se $a \neq -1$, da fórmula para a soma dos t primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $(-a)$ vem

$$y_t = (-a)^t y_0 + b\left[\frac{1-(-a)^t}{1-(-a)}\right] = \frac{b}{1+a} + \left(y_0 - \frac{b}{1+a}\right)(-a)^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

É então legítimo formular o seguinte resultado.

Teorema 2.3 *A sucessão y definida por*

$$y_t = \begin{cases} \frac{b}{1+a} + \left(y_0 - \frac{b}{1+a}\right)(-a)^t, & \text{se } a \neq -1 \\ y_0 + bt, & \text{se } a = -1 \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{N}_0$, é a solução única de (2.2) *com y_0 dado.*

Demonstração. Para mostrar que y é solução de (2.2), basta que se substitua y_t e y_{t+1} nessa equação em cada um dos casos. Quanto à unicidade, é fácil verificar que, uma vez fixado previamente y_0, os sucessivos valores de y_1, y_2,... resultam de modo único, para cada caso de a, da relação de recorrência (2.2), tal como se expôs no parágrafo anterior ao presente resultado. ∎

Corolário 2.4 *Seja* y *uma solução da equação* (2.2) *em* $\mathbb{N}_0$. *Então existe uma constante real* C *para a qual se tem*

$$y_t = \begin{cases} \frac{b}{1+a} + \left(C - \frac{b}{1+a}\right)(-a)^t, & \textit{se } a \neq -1 \\ C + bt, & \textit{se } a = -1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{N}_0.$$

Este corolário dá-nos a solução geral da equação (2.2). Note-se que $C = y_0$. Ver-se-á a utilidade prática deste resultado sobretudo quando for dado y_k, $k \neq 0$, em vez de y_0.

Exemplo 2.5 *Considere as equações seguintes em* $\mathbb{N}_0$:

$$\text{(a) } x_{t+1} = 2x_t - 3 \quad \text{(b) } 2y_{t+1} - 2y_t = 6 \quad \text{(c) } z_{t+1} = 2z_t - 1.$$

1. Resolva as equações.

2. Determine as soluções particulares de (a), (b) *e* (c) *tais que, respetivamente,*

$$\text{(a) } x_0 = 5 \quad \text{(b) } y_0 = -1 \quad \text{(c) } z_4 = 17.$$

Resolução: No que diz respeito a (a), tal equação equivale a

$$x_{t+1} - 2x_t = -3,$$

que é linear, de primeira ordem, com $a = -2$ e $b = -3$. Atendendo ao corolário, a solução geral de (a) vem

$$x_t = 3 + (C - 3)\, 2^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Se $x_0 = 5$, dado que $C = x_0$, a solução particular será a sucessão x tal que

$$x_t = 3 + (5 - 3)\, 2^t = 3 + 2^{t+1}, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Repare-se agora que (b) equivale a

$$y_{t+1} - y_t = 3,$$

que é linear, de primeira ordem, com $a = -1$ e $b = -3$. Logo, a solução geral vem dada por

$$y_t = C - 3t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Para o valor inicial dado, tem-se a solução particular

$$y_t = -1 - 3t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Finalmente, (c) equivale a

$$z_{t+1} - 2z_t = -1,$$

linear, de primeira ordem, com $a = -2$ e $b = -1$. A solução geral será pois

$$z_t = \frac{-1}{1-2} + \left(C - \frac{-1}{1-2}\right) 2^t = 1 + (C-1)\, 2^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Dado que $z_4 = 17$, vem, após substituição,

$$17 = 1 + (C-1)2^4 \Leftrightarrow C = 2.$$

Logo, a solução particular será z tal que

$$z_t = 1 + 2^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

□

O seguinte resultado conclui esta subsecção.

Teorema 2.6 *A equação de diferenças linear, de primeira ordem,*

$$y_{t+1} + ay_t = b, \quad t \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

tem solução geral dada por

$$y_t = \begin{cases} \frac{b}{1+a} + \left(C - \frac{b}{1+a}\right)(-a)^{t-k}, & \textit{se } a \neq -1 \\ C + b\,(t-k), & \textit{se } a = -1 \end{cases}$$

com $t \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}$*, onde* C *é uma constante real arbitrária.*

Nota 2.7 *Repare-se que o Corolário 2.4 é um caso particular deste, para* $k = 0$*. Por outro lado, sendo dado o valor inicial de* y_t *para algum* $t \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}$*, é possível determinar* C *e indicar a consequente solução particular.*

2.2 Comportamento das soluções

Na presente subsecção estuda-se o comportamento da solução de uma EDL, de primeira ordem, com coeficiente e segundo membro constantes, *i.e.*, analisa-se a convergência da sucessão, sua monotonia e limitação. Para não sobrecarregar a notação, se nada se disser em contrário, sempre que se escrever

$$\lim y_t$$

subentende-se que $t \to +\infty$. Sem perda de generalidade, supõe-se que se pretende descrever o comportamento da solução de (2.2) para y_0 dado. Recorde--se que a solução admite, neste caso, a seguinte forma:

$$y_t = \begin{cases} \frac{b}{1+a} + \left(y_0 - \frac{b}{1+a}\right)(-a)^t, & \text{se } a \neq -1 \\ y_0 + bt, & \text{se } a = -1 \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{N}_0$ e onde, sublinhe-se, as constantes a e b são reais, com a não nula.

Divida-se a análise em dois casos: $a = -1$ e $a \neq -1$.

$\boxed{\textbf{CASO } a = -1}$

A solução é a sucessão y tal que $y_t = y_0 + bt$. Facilmente se deduz que

$$\lim y_t = \begin{cases} +\infty, & \text{se } b > 0 \\ y_0, & \text{se } b = 0 \\ -\infty, & \text{se } b < 0 \end{cases}.$$

Se $b = 0$, resulta a sucessão constante $y_t = y_0$, evidentemente limitada. Nos restantes casos de b, a sucessão é ilimitada e, uma vez que

$$y_{t+1} - y_t = b,$$

conclui-se que a sucessão é monótona crescente (respetivamente, decrescente) se $b > 0$ (respetivamente, se $b < 0$).

$\boxed{\textbf{CASO } a \neq -1}$

Considerando
$$y^* = \frac{b}{1+a},$$
pode exprimir-se a solução da equação através de
$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)\,(-a)^t\,, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$
É imediato que se $y_0 = y^*$, então a sucessão é constante,
$$y_t = y^*, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$
Por outro lado, se $y_0 \neq y^*$, então o comportamento de y depende do comportamento de $(-a)^t$. Quanto à convergência desta, recorde-se agora que
$$\lim\,(-a)^t = 0 \Longleftrightarrow |-a| < 1 \Longleftrightarrow -1 < a < 1.$$
$$a < -1 \quad \Longrightarrow \quad \lim\,(-a)^t = +\infty$$
$$a \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim\,(-a)^t \text{ não existe.}$$
Por conseguinte,

1. Se $-1 < a < 1$, a solução converge para y^*, pois
$$\lim\, y_t = \lim\left[y^* + (y_0 - y^*)\,(-a)^t\right] = y^*;$$
2. Se $a < -1$, tem-se
$$\begin{aligned} y_0 < y^* \quad &\Longrightarrow \quad \lim\, y_t = -\infty \\ y_0 > y^* \quad &\Longrightarrow \quad \lim\, y_t = +\infty \end{aligned}$$
3. Se $a \geq 1$, então $\lim\, y_t$ não existe.

Complete-se o estudo, analisando o que acontece no que se refere à monotonia e limitação. Se $-1 < a < 0$, *i.e.*, se $0 < -a < 1$, então
$$y_{t+1} - y_t = \underbrace{(-a)^t}_{>0}\,(y_0 - y^*)\,\underbrace{(-a-1)}_{<0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_0 < y^* &\implies \quad y \quad \text{é monótona crescente, limitada, tendo-se } y_0 \leq y_t < y^*; \\ y_0 > y^* &\implies \quad y \quad \text{é monótona decrescente, limitada, tendo-se } y^* < y_t \leq y_0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $0 < a < 1$, *i.e.*, se $-1 < -a < 0$, então $(-a)^t$ tem um comportamento oscilatório (logo, não monótono), mas limitado. Assim, o mesmo acontece com y_t. Se $a < -1$, então $-a > 1$, pelo que

$$y_{t+1} - y_t = \underbrace{(-a)^t}_{>0} (y_0 - y^*) \underbrace{(-a-1)}_{>0}.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} y_0 < y^* &\implies \quad y \text{ é monótona decrescente e ilimitada;} \\ y_0 > y^* &\implies \quad y \text{ é monótona crescente e ilimitada.} \end{aligned}$$

Subdivida-se o caso $a \geq 1$. Se $a = 1$, então $(-a)^t$ oscila de maneira finita (admite os valores -1 e 1), pelo que também y tem um comportamento oscilatório (entre os valores y_0 e $2y^* - y_0$). Se $a > 1$, então $(-a)^t$ oscila de maneira infinita e o mesmo sucede com y.

As conclusões agora deduzidas surgem resumidas na tabela da página seguinte.

	a	b	y_0	relação entre y_t e y^*	comportamento da sucessão y
1	-1	$b=0$		$y_t = y_0$	constante
2	-1	$b>0$		$y_t > y_0$	crescente, divergente para $+\infty$
3	-1	$b<0$		$y_t < y_0$	decrescente, divergente para $-\infty$
4	$a \neq -1$		$y_0 = y^*$	$y_t = y^* = y_0$	constante
5	$-1 < a < 0$		$y_0 < y^*$	$y_t < y^*$	crescente, limitada e convergente para y^*
6	$-1 < a < 0$		$y_0 > y^*$	$y_t > y^*$	decrescente, limitada e convergente para y^*
7	$0 < a < 1$		$y_0 \neq y^*$		oscilatória, limitada e convergente para y^*
8	$a < -1$		$y_0 < y^*$	$y_t < y^*$	decrescente, ilimitada e divergente para $-\infty$
9	$a < -1$		$y_0 > y^*$	$y_t > y^*$	crescente, ilimitada e divergente para $+\infty$
10	$a = 1$		$y_0 \neq y^*$		oscilatória, limitada e divergente
11	$a > 1$		$y_0 \neq y^*$		oscilatória, ilimitada e divergente

Exemplo 2.8 *Resolva as equações seguintes em* $\mathbb{N}_0$*, supondo que o valor inicial é* 1 *(i.e.,* $x_0 = 1$*,* $y_0 = 1$ *e* $z_0 = 1$*) e faça a interpretação gráfica das respetivas soluções.*

$$\text{(a) } x_{t+1} = x_t \quad \text{(b) } y_{t+1} = y_t + 3 \quad \text{(c) } z_{t+1} = z_t - 1.$$

Resolução: Note-se que as referidas equações se podem escrever na forma

$$x_{t+1} - x_t = 0, \quad y_{t+1} - y_t = 3 \quad \text{e} \quad z_{t+1} - z_t = -1,$$

respetivamente. Assim, em todos os casos se tem equações em que $a = -1$. No caso (a) a solução é a sucessão constante

$$x_t = x_0 = 1.$$

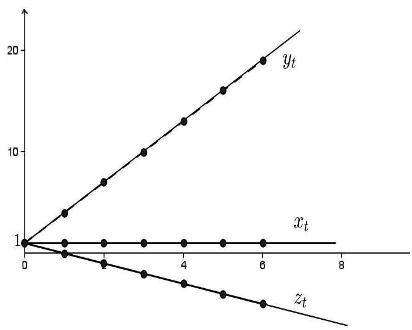
Em (b), a solução vem dada por

$$y_t = y_0 + bt = 1 + 3t,$$

crescente e divergente para $+\infty$. Em (c), a solução

$$z_t = z_0 + bt = 1 - t$$

é decrescente e divergente para $-\infty$. De seguida apresentam-se os gráficos de cada uma das soluções num único referencial.



□

Exemplo 2.9 *Resolva as seguintes equações*

(a) $x_{t+1} - \frac{1}{2}x_t = 1, \quad x_0 = 1;$ (b) $y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 1, \quad y_0 = 3.$

Resolução: Note-se que a equação de diferenças é comum a ambos os casos, diferindo apenas na condição inicial. Dado que

$$a = -\frac{1}{2} \text{ e } b = 1,$$

então

$$x^* = y^* = \frac{b}{1+a} = 2.$$

Assim, as soluções vêm dadas, respetivamente, por

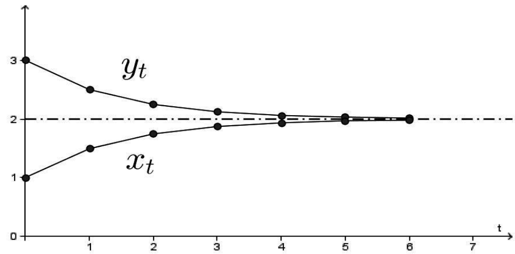
$$x_t = x^* + (x_0 - x^*)(-a)^t = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

e

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)(-a)^t = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

cujos gráficos se representam na página seguinte.

□



Exemplo 2.10 *Considerem-se as equações*

(a) $x_{t+1} - 3x_t = 1, \quad x_0 = -1;$ (b) $y_{t+1} - 3y_t = 1, \quad y_0 = 0.$

Resolva-as e proceda à respetiva interpretação gráfica.

Resolução: À semelhança do exemplo anterior, também este par de equações difere apenas no valor inicial. Assim,

$$a = -3 \text{ e } b = 1,$$

donde

$$x^* = y^* = \frac{b}{1+a} = -\frac{1}{2}.$$

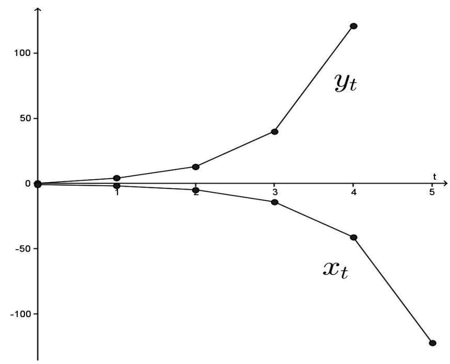
Logo,

$$x_t = x^* + (x_0 - x^*)(-a)^t = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.3^t$$

e

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)(-a)^t = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}.3^t,$$

são, respetivamente, as soluções de (a) e de (b). Graficamente,



□

Exemplo 2.11 *Resolva as equações*

$$\text{(a) } x_{t+1} + \tfrac{1}{2}x_t = 1, \quad \text{(b) } y_{t+1} + y_t = 1, \quad \text{(c) } z_{t+1} + 3z_t = 1,$$

para o mesmo valor inicial $x_0 = 1 = y_0 = z_0$. *Interprete graficamente a solução.*

Resolução: Relativamente a (a), tem-se

$$a = \frac{1}{2},\ b = 1, \text{ por conseguinte, } x^* = \frac{2}{3}\ .$$

Assim,

$$x_t = x^* + (x_0 - x^*)\,(-a)^t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^t\ .$$

No que concerne a (b), tem-se

$$a = 1,\ b = 1, \text{ pelo que } y^* = \frac{1}{2}\ .$$

Logo,

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)\,(-a)^t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(-1)^t\ .$$

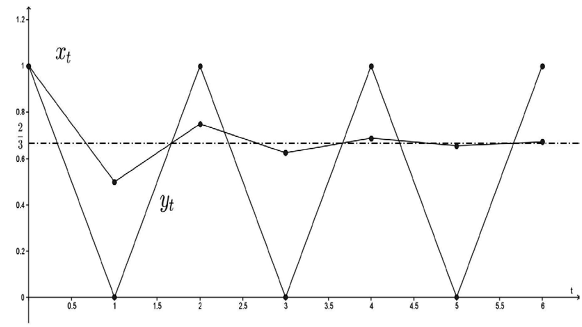
Por último, em (c) tem-se

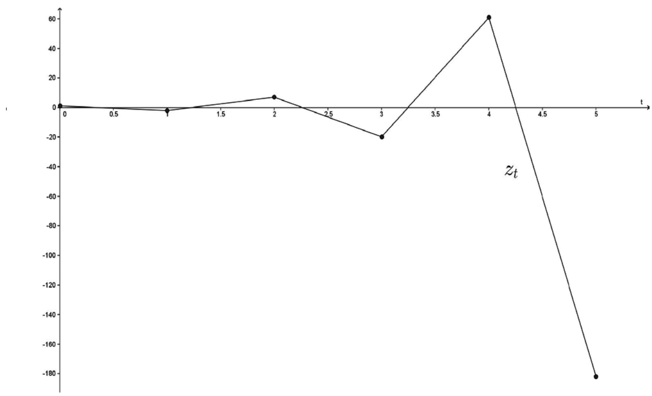
$$a = 3,\ b = 1 \text{ e } z^* = \frac{1}{4}\ .$$

Deste modo,

$$z_t = z^* + (z_0 - z^*)\,(-a)^t = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,(-3)^t\ .$$

O comportamento de cada uma das soluções pode ser observado através do esboço gráfico nas seguintes figuras.





□

Exemplo 2.12 *Resolva a equação*

$$x_{t+1} - 2x_t = 1, \qquad x_0 = -1.$$

Resolução: Uma vez que $a = -2$ e $b = 1$, tem-se

$$x^* = \frac{1}{1-2} = -1 = x_0.$$

Deste modo, a solução vem dada por uma sucessão constante,

$$x_t = x^* + (x_0 - x^*)(-a)^t = x^* = -1.$$

□

Em Economia estuda-se a noção de convergência das soluções sob a designação de **estabilidade**. Assim, procura-se saber se existe uma constante y^* tal que a solução y verifica um de dois casos:

$$y_t = y^*,\ t \in \{k, k+1, \ldots\}$$

ou se, pelo menos,

$$\lim y_t = y^*.$$

Tal valor y^* diz-se **estado de equilíbrio** ou **estado estacionário** da equação. As correspondentes equações dizem-se **estáveis** ou **globalmente assintoticamente estáveis**, respetivamente. Se este valor não existe, a equação diz-se **instável**. De acordo com o que anteriormente se viu, no caso da estabilidade fala-se de sucessões constantes a partir de certa ordem. As soluções globalmente assintoticamente estáveis convergem para o estado de equilíbrio de maneira **monótona** (crescente ou decrescente) ou por **oscilações amortecidas**. No caso de instabilidade, esta ocorre quando se verifica divergência das sucessões, a qual, como referido, pode ser de três tipos: monótona, através de oscilações constantes ou mediante oscilações explosivas.

2.3 Exercícios e aplicações

Exercícios EDL de ordem 1

1. Determine a solução geral da equação de diferenças $5y_{t+1} = 3y_t + 4$, definida em $\mathbb{N}_0$, e a solução particular que verifica $y_0 = 3$. Descreva o seu comportamento e esboce o gráfico da sucessão.

2. Calcule a solução geral das equações de diferenças (todas definidas em $\mathbb{N}_0$), os cinco primeiros termos para $y_0 = 1$ e descreva o comportamento da solução esboçando o respetivo gráfico:

   (a) $y_{t+1} - y_t = 3$ (b) $y_{t+1} = y_t$ (c) $y_{t+1} = y_t - 1$

   (d) $y_{t+1} = -y_t + 2$ (e) $y_{t+1} = 2y_t - 3$ (f) $y_{t+1} = -3y_t + 1$

   (g) $y_{t+1} + 3y_t = -1$

3. Calcule a solução geral das seguintes equações de diferenças e a solução particular que verifica a condição inicial indicada em cada caso.

   (a) $y_{t+1} = -y_t + 3,\ y_0 = 4$ (b) $y_{t+1} - 3y_t = 1,\ y_0 = -\frac{1}{2}$

   (c) $y_{t+1} = 5y_t - 2,\ y_0 = 2$ (d) $y_{t+1} - \frac{1}{3}y_t = 0,\ y_0 = -1$

   (e) $y_{t+1} - \frac{1}{3}y_t = 0,\ y_0 = 1$

4. Considere a equação de diferenças de primeira ordem

$$y_{t+1} = \frac{y_t - 1}{y_t + 3} \ .$$

   (a) Verifique que esta equação não é linear.

   (b) Efetue a mudança de variável de y para z por intermédio de

$$y_t = \frac{1}{z_t} - 1 \ .$$

   (c) Resolva a equação de diferenças na variável z.

   (d) Regresse à variável inicial e indique a solução geral da equação dada.

Aplicações — Juro composto

No início de cada período (por exemplo, mês) e durante k períodos, deposita-se o valor constante P numa conta de depósito a prazo, à taxa de juro i com capitalização no fim de cada período (regime de juros compostos). No início do t-ésimo período, imediatamente após o depósito deste período, o saldo da conta, S_t, verifica a equação

$$S_t = P + S_{t-1} + iS_{t-1} = P + (1+i)\, S_{t-1}, \;\; t = 1, 2, ...$$

Esta equação admite a solução geral

$$S_t = S_0 (1+i)^t + P\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i) - 1}, \;\; t = 1, 2, ...;$$

Dada a condição inicial $S_0 = 0$, resulta a solução particular

$$S_t = \frac{P}{i}\left[(1+i)^t - 1\right], \;\; t = 1, 2, ...$$

Por exemplo, se a conta tem depósitos mensais de $P = 10$ (depósito no início de cada mês) com juros capitalizados mensalmente com taxa mensal proporcional à taxa de 6% ao ano, o saldo da conta ao fim de um ano vem dado por

$$S_{12} \times \left(1 + \frac{0.06}{12}\right) = \frac{10}{0.06/12}\left[\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12} - 1\right] \times \left(1 + \frac{0.06}{12}\right) \approx 123.972.$$

Aplicações — Modelo de crescimento populacional

De acordo com a lei de crescimento populacional de Malthus, a taxa de variação de uma população é proporcional à dimensão corrente da população. Por outras palavras, se $N(t)$ denota a dimensão da população no instante t, então

$$\frac{dN}{dt}(t) = \alpha,$$

em que α denota a constante de proporcionalidade. Esta igualdade supõe que $N(t)$ é função diferenciável do tempo, t.

Todavia, para certas populações, parece mais realista supor que a dimensão é uma função em degraus. Por exemplo, em populações de alguns tipos de insectos cada geração morre antes que a geração seguinte se reproduza. Para uma tal população, um modelo simples consiste em admitir que, de uma geração para a seguinte, a variação da dimensão populacional seja proporcional à dimensão da geração anterior.

Seja N_k a dimensão populacional na k-ésima geração; segue-se que

$$N_{k+1} - N_k = \alpha N_k,$$

em que α denota a constante de proporcionalidade. Esta equação pode-se escrever como uma equação de diferenças linear homogénea de ordem 1,

$$N_{k+1} - (1+\alpha) N_k = 0. \tag{2.6}$$

A sua solução vem

$$N_k = N_0 (1+\alpha)^k,$$

em que N_0 denota a dimensão inicial da população.

A equação (2.6) supõe que a dimensão populacional depende da população na geração anterior. Em certos casos pode mostrar-se mais realista admitir a equação de ordem 2,

$$N_{k+2} + pN_{k+1} + qN_k = 0,$$

que traduz o pressuposto de que a dimensão da população da $(k+2)$-ésima geração depende linearmente da população em cada uma das duas gerações anteriores.

Aplicações | Modelo Cobweb

O modelo Cobweb (teia-de-aranha), amplamente conhecido em Economia, tem sido aplicado, por exemplo, a mercados agrícolas e mercados laborais qualificados. De acordo com este modelo, a oferta no período t, q_t^S, é predeterminada, dependendo do preço no período anterior, p_{t-1}, de acordo com a função

$$q_t^S = f\left(p_{t-1}\right), \; f' > 0.$$

A quantidade procurada no período t, q_t^D, depende do preço deste período, de acordo com

$$q_t^D = g\left(p_t\right), \; g' < 0.$$

Por fim, supõe-se que, em cada período, o preço é tal que a oferta e a procura se igualam: $q_t^S = q_t^D$. Desta igualdade decorre a equação de diferenças

$$g\left(p_t\right) = f\left(p_{t-1}\right). \tag{2.7}$$

Adotando as formas funcionais $f(p) = Ap^a$, $g(p) = Bp^{-b}$, (onde A, B, a, b são constantes positivas) – funções de elasticidade constante – e substituindo em (2.7), vem

$$Bp_{t+1}^{-b} = Ap_t^a,$$

que, logaritmizando, se converte na equação linear de ordem 1,

$$\begin{gathered} \log B - \log A = b \log p_{t+1} + a \log p_t \\ \Leftrightarrow y_{t+1} + cy_t = u, \end{gathered}$$

onde

$$y_t = \log p_t, \; c = \frac{a}{b}, \; u = \frac{\log B - \log A}{b}.$$

Esta equação admite a solução geral

$$y_t = \frac{u}{1+c} + (-c)^t K = \frac{1}{a+b} \log \frac{B}{A} + (-c)^t K,$$

com K constante. Dado que a e b são positivas, também $c > 0$; o que significa que a solução geral tem um comportamento oscilatório explosivo ou amortecido, consoante, respetivamente, $|c| > 1$ ou $|c| < 1$. Para $|c| < 1$ resulta a solução estacionária

$$y = Y = \frac{1}{a+b} \log \frac{B}{A},$$

a que corresponde o valor estacionário para o preço,

$$P = \exp Y = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}.$$

O correspondente valor da oferta e da procura vem dado por

$$Q = A^{1-\alpha} B^{\alpha}, \;\; \alpha = \frac{a}{a+b}.$$

Pode-se encarar o ponto de coordenadas (Q, P) como o ponto de equilíbrio de longo-prazo do mercado. Dado que $c = \frac{a}{b}$, as alternâncias do preço e da quantidade em torno deste ponto vão-se amortecendo (se $a < b$) ou, pelo contrário, ampliando (se $a > b$). O que significa que o mercado só tende para o seu ponto de equilíbrio de longo-prazo, se a elasticidade da procura excede, em valor absoluto, a elasticidade da oferta.

Representam-se ambos os casos na figura seguinte.

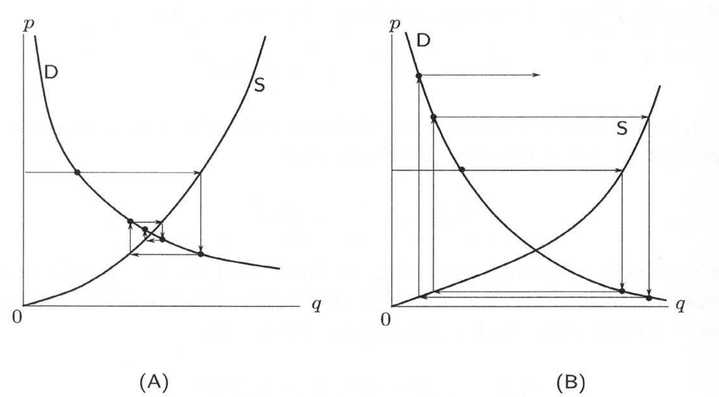


Figura I.4: Modelo Cobweb - comportamento das soluções.

Em ambos os gráficos, D e S constituem, respetivamente, as curvas de procura e oferta. No gráfico (A) ilustra-se um comportamento oscilatório amortecido; no gráfico (B) um comportamento explosivo.

A aparência dos gráficos ajuda a compreender a razão de ser da designação deste modelo ("teia de aranha"). Quanto à interpretação propriamente dita dos gráficos, note-se que em cada período o preço e quantidade efetivos estão representados por pontos na curva da procura (pontos assinalados na curva D). Uma vez que a quantidade oferecida em cada período é determinada pelo preço do período anterior, os pontos na curva da oferta (curva S) não representam valores efetivamente verificados em qualquer período: a curva S indica a quantidade oferecida no período seguinte, dado o preço do período corrente; é esta a razão de ser das setas nos gráficos. Na realidade, de acordo com o modelo, as sucessivas combinações preço/quantidade em cada período deslocam-se ao longo da curva D, alternadamente acima e abaixo do ponto de equilíbrio (aproximando-se, se $a < b$, afastando-se, se $a > b$).

3 Equações lineares de ordem superior

3.1 Generalidades. O operador $P(E)$

Define-se, na sua forma mais geral, o conceito de equação de diferenças linear.

Designa-se **equação de diferenças linear de ordem** n ($n \in \mathbb{N}$) toda a equação do tipo

$$a_t^{(n)} y_{t+n} + a_t^{(n-1)} y_{t+n-1} + ... + a_t^{(1)} y_{t+1} + a_t^{(0)} y_t = q_t, \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

onde

$$a^{(0)}, a^{(1)}, ..., a^{(n)} \text{ e } q$$

são sucessões conhecidas de números reais tais que $a^{(n)}, a^{(0)}$ são não identicamente nulas. A equação diz-se **homogénea**, se $q_t \equiv 0$, e **não-homogénea** ou **completa** no caso contrário.

As equações de diferenças são também conhecidas por **relações de recorrência** e a sua **ordem** define-se como a diferença entre o maior e o menor dos índices das referidas sucessões. Eis alguns exemplos (nem todas lineares):

$$\begin{array}{ll}
(1)\ y_{t+1} - y_t = 0 & \text{(linear, ordem 1)} \\
(2)\ y_{t+1} - 2y_t = 1 & \text{(linear, ordem 1)} \\
(3)\ y_{t+1} + t^2 y_t = 2^t & \text{(linear, ordem 1)} \\
(4)\ y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0 & \text{(linear, ordem 2)} \\
(5)\ y_{t+4}^2 + y_t y_{t+1} + t = 3 & \text{(não linear, ordem 4)}
\end{array} .$$

Nota 3.1 *Em algumas referências e até mesmo em algumas aplicações podem surgir equações de diferenças lineares em que se permite que* $a^{(0)} \equiv 0$. *Um adequado recuo dos índices nos termos* y_{t+k} *permite reescrevê-la na forma* (3.1). *De facto, e.g., perante a equação linear de ordem* 2

$$y_{t+6} - 5y_{t+5} - 3y_{t+4} = 10, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

é imediato verificar que esta equivale a

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} - 3y_t = 10, \quad t \in \{4, 5, 6, \ldots\} .$$

Por outro lado, surgem ocasionalmente casos em que figuram termos do tipo

$$y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k},$$

Estes traduzem "saltos para trás" de y_t e podem exprimir-se generalizando os operadores E^n para $n \in \mathbb{Z}^-$. De facto, sendo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$E^{-k} y_t = y_{t-k}.$$

Também aqui um conveniente avanço dos índices em y_{t-k} permite reescrever a equação dada na forma (3.1)*. Com efeito, dada, e.g., a equação*

$$y_t - 4y_{t-1} + 4y_{t-2} = 20, \quad t \in \{2, 3, \ldots\}$$

esta equivale a

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 20, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Como tal, a definição de ordem da equação permanece válida em ambas as situações e os métodos que se seguem podem adaptar-se.

As **soluções** de uma equação de diferenças são funções de domínio discreto, isto é, **sucessões** (de números reais). Daí que estas equações sejam também conhecidas por **equações funcionais discretas.** À semelhança das equações diferenciais de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), também a **solução geral de uma equação de diferenças** de ordem n contém n constantes reais arbitrárias. Por exemplo, tomando a equação (4), pode sempre escolher-se y_0 e y_1 de modo arbitrário e obter

$$y_2,\ y_3,\ y_4, \cdots$$

a partir da equação dada. De facto, de (4) vem

$$y_2 = -2y_1 - y_0$$

$$y_3 = -2y_2 - y_1 = (\cdots) = 3y_1 + 2y_0$$

$$y_4 = -2y_3 - y_2 = (\cdots) = -4y_1 - 3y_0\ .$$

Note-se que y_0 e y_1 funcionam como constantes reais arbitrárias.

Como é evidente, resolver a equação (3.1) consiste em obter o termo geral de y. Para tal é importante, como se verá mais adiante, encontrar a solução geral da chamada **equação homogénea associada**, isto é, a solução que se obtém de (3.1) tomando para segundo membro a sucessão constante nula. Para já, enuncia-se, sem demonstração, o teorema da existência e unicidade da solução de uma equação de diferenças, linear e de ordem n.

Teorema 3.2 *A equação de diferenças linear, de ordem* n (3.1)*, definida sobre um conjunto* S *de inteiros consecutivos, tem uma e uma só solução* y_t *para a qual são inicialmente dados os seus valores em* n *concretizações consecutivas da variável* t.

Considerem-se as equações de diferenças lineares com coeficientes constantes, isto é, aquelas que se escrevem na forma

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + ... + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = q_t, \quad t \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

onde

$$a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

$(a_0, a_n$ não nulos) e q é uma sucessão de números reais.

Podem-se exprimir todas as equações de diferenças lineares de ordem n utilizando os operadores E^k. De facto, (3.2) equivale a

$$\left(a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + ... + a_1 E + a_0\right) y_t = q_t,$$

ou ainda a

$$P(E)\, y_t = q_t$$

onde

$$P(E) = a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + ... + a_1 E + a_0.$$

Atendendo a que cada E^k goza de linearidade, tem-se aqui a justificação para o nome atribuído a este tipo de equações de diferenças.

Este polinómio em E, apesar de simbólico, pode também fatorizar-se. Para isso recorre-se à fatorização do chamado **polinómio característico** ou **auxiliar**,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Exemplo 3.3 *Considere a equação*

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \tag{3.3}$$

e reescreva-a na forma $P(E)\, y_t = 0$

Resolução: A equação dada equivale a

$$\left(E^2 - 5E + 6\right) y_t = 0$$

ou ainda a

$$P(E)\, y_t = 0,$$

com $P(E) = E^2 - 5E + 6$. Resolvendo a equação auxiliar

$$z^2 - 5z + 6 = 0,$$

vem

$$(z-3)(z-2) = 0.$$

Logo,

$$P(E) = (E-3)(E-2).$$

□

Exercício 3.4 *Reescreva cada uma das seguintes equações de diferenças na forma*

$$P(E)\, y = q_t, \;\; t \in \mathbb{N}_0.$$

apresentando o polinómio $P(E)$ *fatorizado.*

(a) $y_{t+2} - y_t = 2t$

(b) $y_{t+2} + y_{t+1} - 6y_t = -5t(-1)^t$

(c) $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = 0$

(d) $2y_{t+2} - 4y_t = 3^t$

Os polinómios simbólicos $P(E)$ satisfazem propriedades operatórias semelhantes às dos polinómios usuais. Assim, *e.g.*, é fácil notar que

$$(E-3)(E-2)\, y_t = (E-2)(E-3)\, y_t.$$

Efetivamente, vem

$$\begin{aligned}(E-3)(E-2)\,y_t &= (E-3)(y_{t+1}-2y_t) = (E-3)\,y_{t+1} - 2\,(E-3)\,y_t \\ &= y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_{t+1} + 6y_t = y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t,\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}(E-2)(E-3)\,y_t &= (E-2)(y_{t+1}-3y_t) = (E-2)\,y_{t+1} - 3\,(E-2)\,y_t \\ &= y_{t+2} - 2y_{t+1} - 3y_{t+1} + 6y_t = y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t.\end{aligned}$$

Exercício 3.5 *Mostre que as sucessões*

$$y_t = 2^t,\ t \in \mathbb{N}_0 \qquad e \qquad y_t = 3^t,\ t \in \mathbb{N}_0$$

são soluções da equação de diferenças (3.3)*. Tendo em conta a expressão desta equação na forma*

$$P(E)y_t = 0,$$

com $P(E)$ fatorizado, formule uma hipótese que relacione as raízes da equação auxiliar com as soluções da referida equação de diferenças.

3.2 Operadores lineares e sistema fundamental de soluções

O que a seguir se descreve constitui o suporte teórico básico para a compreensão da resolução das equações de diferenças lineares homogéneas associadas.

Se A é uma matriz $m \times n$, *i.e.*,$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, X e Y são vetores-coluna $n \times 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(1)\ A\,(X+Y) = A\ X + A\ Y; \qquad (2)\ A\,(\alpha\ X) = \alpha\ A\ X. \tag{3.4}$$

Por este motivo, toda a matriz é dita **linear**. Um operador que partilhe estas propriedades diz-se **linear** e sabe-se que qualquer operador linear se pode identificar através de uma matriz A.

No que às EDL concerne, tem-se então o seguinte resultado:

Teorema 3.6 *Os operadores E e $P(E)$ são operadores lineares em $\mathbb{N}_0$.*

Demonstração. Basta ter em conta que os operadores E^k são lineares em $\mathbb{N}_0$. ■

Em Álgebra Linear define-se o **núcleo** ou **espaço-nulo** de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, como o subespaço

$$Ker\,(A) = N\,(A) = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times 1} : A\ X = \mathbf{0}\right\},$$

onde $\mathbf{0}$ é o vetor-nulo $m \times 1$. Uma vez que A é um operador linear, qualquer combinação linear de vetores de $Ker\,(A)$ pertence ainda a $Ker\,(A)$.([2]) De facto, sejam $X, Y \in Ker\,(A)$. Então

$$A\ X = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad A\ Y = \mathbf{0},$$

pelo que

$$A\ \ (\alpha\ X + \beta\ Y) = \alpha A\ X + \beta A\ Y = \alpha\ \mathbf{0}{+}\beta\ \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Admita-se que k é um inteiro tal que $1 \leq k \leq n$. Um conjunto de k vetores do núcleo de A **gera** este subespaço se cada vetor de $Ker\,(A)$ se puder exprimir como combinação linear desses vetores. Se, além disso, um k-uplo ordenado formado à custa de tais vetores for linearmente independente, diz-se que constitui uma **base** desse subespaço. A **dimensão** de tal subespaço é o número de vetores de qualquer base de $Ker\,(A)$, o qual se denota por $\dim\,[Ker\,(A)]$. Observe que se $\dim\,[Ker\,(A)] = k$, então qualquer qualquer k-uplo ordenado de vetores linearmente independentes de $Ker\,(A)$ forma uma base desse subespaço.

Nota 3.7 *No que se segue, e uma vez que a ordem dos vetores da base é irrelevante no contexto do espaço das soluções das equações de que aqui se trata, cada base será escrita sob a forma de conjunto com k elementos em vez de k-uplo ordenado.*

Considere-se a equação de diferenças linear de ordem n escrita na forma

$$P\,(E)\,y_t = 0. \tag{3.5}$$

[2] Aliás, esta consequência resulta diretamente do facto de $Ker\,(A)$ ser um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Pretende-se obter

$$Ker\left(P\left(E\right)\right)=\left\{y_t\in\mathcal{S}:P\left(E\right)y_t=0\right\},$$

ou, mais precisamente, uma base para este subespaço vetorial de $\mathcal{S}$. De facto, sendo

$$\left\{f^{(1)},f^{(2)},...,f^{(k)}\right\}$$

uma base de $Ker\left(P\left(E\right)\right)$, cada solução de (3.5) pode escrever-se de modo único como combinação linear das sucessões de tal base.

De seguida mostra-se que se a equação (3.5) é de ordem n, então

$$\dim\left[Ker\left(P\left(E\right)\right)\right]=n,$$

que é também o grau do polinómio característico. De facto,

$$P\left(E\right)y_t=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_ny_{t+n}+a_{n-1}y_{t+n-1}+...+a_1y_{t+1}+a_0y_t=0.$$

Dado que $a_n\neq 0$, vem

$$y_{t+n}=-\left(a_n\right)^{-1}\left(a_{n-1}y_{t+n-1}+...+a_1y_{t+1}+a_0y_t\right). \tag{3.6}$$

Uma vez conhecidos os valores de $y_0,y_1,...,y_{n-1}$, o uso repetido de (3.6) permite obter os restantes termos da sucessão y, solução de (3.5). No entanto, $y_0,y_1,...,y_{n-1}$, podem escolher-se de maneira arbitrária. Cada vetor n-dimensional

$$\left(y_0,y_1,...,y_{n-1}\right)^T$$

determina uma solução de (3.5) e vice-versa, o que traduz a existência de uma correspondência bijetiva entre o conjunto de soluções de (3.5) e o conjunto dos vetores de dimensão n. Como este conjunto é um espaço de dimensão n, tal facto significa que é possível construir vetores

$$y^{(j)}=\left(y_0^{(j)},y_1^{(j)},...,y_{n-1}^{(j)}\right)^T,\ j\in\{1,\ldots,n\}$$

soluções de (3.5) e que são linearmente independentes. Logo, $\left\{y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(n)}\right\}$ é uma base de $Ker\left(P\left(E\right)\right)$ e

$$\dim\left[Ker\left(P\left(E\right)\right)\right]=n.$$

Doravante, designa-se qualquer base de $Ker\,(P\,(E))$ por **sistema fundamental de soluções** (SFS) da equação $P\,(E)\,y_t = 0$. Observe-se que, de acordo com a definição de base, tal sistema permite gerar todas as soluções da equação homogénea.

Dada uma EDL homogénea, de ordem n, e perante um conjunto

$$\left\{y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right\}$$

de n soluções da referida equação, é possível saber se este constitui um SFS. De facto, prova-se que tal conjunto constitui um SFS, se

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \cdots & y_0^{(n)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1}^{(1)} & y_{n-1}^{(2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nota 3.8 *1. O resultado é ainda válido para EDL homogéneas com coeficientes variáveis.*

2. O determinante recebe o nome de ***casoratiano*** [6] *e mais não é do que o correspondente discreto do chamado* ***wronskiano*** *de n funções, necessário para verificar se um subconjunto de n funções reais de variável real, n vezes diferenciáveis, constitui um SFS de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n (veja-se* [10]*).*

Exemplo 3.9 *Verifique que* $\left\{2^t, 3^t\right\}$ *é um SFS de*

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0.$$

Resolução: Provou-se já (ver último exercício da subsecção anterior) que as sucessões $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ tais que

$$y_t^{(1)} = 2^t \text{ e } y_t^{(2)} = 3^t$$

são soluções da equação dada. Note-se agora que

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^0 & 3^0 \\ 2^1 & 3^1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

o que confirma o pretendido. $\square$

3.3 Equações lineares homogéneas

Os resultados enunciados nas secções prévias são agora requisitados, por forma a construir um SFS para uma EDL homogénea em cada um dos casos possíveis. Procede-se de modo tal, que seja desnecessário confirmar que as n soluções construídas constituem um SFS.

Admita-se que a forma fatorizada da equação homogénea (3.5) é

$$P(E)\,y_t = (E-\alpha_1)^{m_1}(E-\alpha_2)^{m_2}\cdots(E-\alpha_k)^{m_k}\,y_t = 0, \tag{3.7}$$

onde os α_i, $i = 1, ..., k$, são raízes não nulas e distintas.([3]) Cada fator $(E-\alpha)^m$ contribui para a solução geral com m soluções linearmente independentes – nomeadamente, as sucessões

$$\left\{\alpha^t, t\alpha^t, t^2\alpha^t, \ldots, t^{m-1}\alpha^t\right\}$$

hão-de constar do SFS. Assim,

Teorema 3.10 *Um SFS da equação*

$$(E-\alpha)^m\,y_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

é dado por

$$\left\{\alpha^t, t\alpha^t, t^2\alpha^t, \ldots, t^{m-1}\alpha^t\right\}$$

e a sua solução geral vem

$$y_t = c_0\alpha^t + c_1 t\alpha^t + c_2 t^2\alpha^t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1}\alpha^t.$$

[3]Uma raiz nula do polinómio característico traduziria uma ordem da equação inferior a n, em contradição com a hipótese geral. De facto, recorde que

$$(E-0)\,y_t = y_{t+1}.$$

Considerando cada fator em (3.7), devem-se construir

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

soluções linearmente independentes (sendo n a ordem da equação de diferenças), geradas de acordo com o processo acima descrito.

Exemplo 3.11 *Obtenha um SFS de*

$$P(E)\, y_t = (E-\alpha)(E-\beta)^3 (E-\gamma)^2 y_t = 0,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, são constantes distintas entre si e, de seguida, construa a solução geral da equação de diferenças.*

Resolução: Sendo a equação de ordem 6, procurem-se 6 soluções linearmente independentes. Atendendo à multiplicidade de cada raiz, tem-se

$$\left\{\alpha^t,\ \beta^t,\ t\beta^t,\ t^2\beta^t,\ \gamma^t,\ t\gamma^t\right\}$$

para SFS, e

$$\begin{aligned} y_t &= c_0\alpha^t + c_1\beta^t + c_2 t\beta^t + c_3 t^2\beta^t + c_4\gamma^t + c_5 t\gamma^t \\ &= c_0\alpha^t + \left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2\right)\beta^t + (c_4 + c_5 t)\,\gamma^t, \end{aligned}$$

com $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$, é a sua solução geral. □

Quando o polinómio característico P possui um par de raízes complexas, $\alpha = \beta + \gamma i$ e $\overline{\alpha} = \beta - \gamma i$, em vez de

$$P(E)\, y_t = Q(E)\,(E-\alpha)\,(E-\overline{\alpha})\, y_t,$$

(onde Q é um polinómio de grau $(n-2)$), escreve-se

$$P(E)\, y_t = Q(E)\left[(E-\beta)^2 + \gamma^2\right] y_t = 0.$$

Tendo em conta que apenas interessa soluções que sejam sucessões de números reais, em vez de escrever

$$A\alpha^t + B\overline{\alpha}^t, \qquad A, B \in \mathbb{C},$$

para a parte da solução geral correspondente às raízes complexas, representa-se esta de uma forma que torne aquele requisito imediatamente visível. Entretanto, note-se que é igualmente possível provar que $A\alpha^t + B\overline{\alpha}^t \in \mathbb{R}$ sempre que A e B são complexos conjugados.

Dado $\alpha = \beta + \gamma i \in \mathbb{C}$, sejam $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ tais que

$$\rho = |\alpha| = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \qquad \text{(módulo de } \alpha\text{)}$$

e

$$\begin{cases} \rho \cos\theta = \beta \\ \\ \rho \sin\theta = \gamma \end{cases} . \tag{3.8}$$

O valor θ diz-se **argumento positivo mínimo** de α e denota-se por $\arg\alpha$.([4]) Deste modo, têm-se as seguintes representações para o complexo α:

$$\alpha = \beta + \gamma i = \rho\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = \rho\ cis\ \theta = \rho\ e^{i\theta},$$

ditas, respetivamente, representação algébrica, trigonométrica, trigonométrica abreviada e polar.([5]) Neste caso,

$$\overline{\alpha} = \beta - \gamma i = \rho\ cis\ (-\theta) = \rho\ e^{i(-\theta)}.$$

Prova-se então o seguinte resultado:

Teorema 3.12 ***(a)*** *Um SFS da equação*

$$(E - \alpha)(E - \overline{\alpha})\, y_t = \left[(E - \beta)^2 + \gamma^2\right] y_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

é dado por

$$\left\{\rho^t \cos(\theta t), \rho^t \sin(\theta t)\right\}$$

e a sua solução geral vem

$$y_t = \rho^t \left[a\cos(\theta t) + b\sin(\theta t)\right], \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

[4] Em rigor, qualquer valor de θ que satisfaça as relações (3.8) diz-se argumento de α. Alguns autores optam por escolher $\theta \in\ ]-\pi, \pi]$, dito argumento principal. Ao escolher $\theta \in [0, 2\pi[$ adota-se o argumento positivo mínimo.

[5] Consulte-se o Anexo C a propósito da exponencial de números complexos.

com $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) *Um SFS da equação*

$$[(E-\alpha)(E-\overline{\alpha})]^m y_t = \left[(E-\beta)^2+\gamma^2\right]^m y_t = 0, \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

é dado por

$$\left\{\rho^t \cos(\theta t), \rho^t \sin(\theta t), t\rho^t \cos(\theta t), t\rho^t \sin(\theta t), t^2\rho^t \cos(\theta t), t^2\rho^t \sin(\theta t), \ldots, \right.$$
$$\left. t^{m-1}\rho^t \cos(\theta t), t^{m-1}\rho^t \sin(\theta t)\right\}$$

e a sua solução geral vem

$$y_t = \rho^t \left[\left(a_0 + a_1 t + ... + a_{m-1}t^{m-1}\right)\cos(\theta t) + \left(b_0 + b_1 t + ... + b_{m-1}t^{m-1}\right)\sin(\theta t)\right],$$

$t \in \mathbb{N}_0$, *com* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.13 *Determine a solução geral de cada uma das equações de diferenças definidas para* $t \in \mathbb{N}_0$.

(a) $y_{t+2} + 3y_{t+1} + 2y_t = 0$, (b) $y_{t+3} + y_{t+1} + 10y_t = 0$, (c) $y_{t+3} = 2y_{t+2}$.

Resolução: Apresentam-se as resoluções de maneira abreviada, deixando ao leitor o cuidado de completar e verificar os pormenores.

(a) Fatorizando o polinómio característico, esta equação pode escrever-se na forma

$$\left(E^2 + 3E + 2\right) y_t = (E+1)(E+2)\, y_t = 0.$$

Assim,

$$\left\{(-1)^t, (-2)^t\right\}$$

é um SFS dessa equação e

$$y_t = A(-1)^t + B(-2)^t, t \in \mathbb{N}_0 ,$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, a sua solução geral.

(b) O polinómio característico desta equação tem as seguintes raízes:

$$z = -2, \qquad z = 1 + 2i \quad \text{e} \quad z = 1 - 2i.$$

Assim, a equação dada pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned}\left(E^3+E+10\right)y_t &= (E+2)(E-1-2i)(E-1+2i)\,y_t\\ &= (E+2)\left[(E-1)^2+4\right]y_t=0.\end{aligned}$$

Além disso, dado que

$$\rho=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

e

$$\begin{cases}\sqrt{5}\cos\theta=1\\ \sqrt{5}\sin\theta=2\end{cases},\ \theta\in[0,2\pi[\ \Leftrightarrow tg\ \theta=2,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\ \Leftrightarrow \theta=arctg\,(2)\,,$$

um SFS vem dado por

$$\left\{(-2)^t,\left(\sqrt{5}\right)^t\cos\left(t\ arctg\,(2)\right),\left(\sqrt{5}\right)^t\sin\left(t\ arctg\,(2)\right)\right\},$$

obtendo-se a solução geral

$$y_t=A\,(-2)^t+\left(\sqrt{5}\right)^t\left[b\cos\left(t\ arctg\,(2)\right)+c\sin\left(t\ arctg\,(2)\right)\right],\quad t\in\mathbb{N}_0,$$

com $A,b,c\in\mathbb{R}$.

(c) Retrocedendo duas unidades em cada um dos índices da equação dada, esta equivale a

$$y_{t+1}-2y_t=(E-2)\,y_t=0,\quad t\in\{2,3,\ldots\}$$

de solução geral

$$y_t=C\ 2^t,\quad t\in\{2,3,\ldots\},$$

com $C\in\mathbb{R}$. Uma vez que a equação dada começa com $t\in\mathbb{N}_0$, a solução geral implica que $y_0=A$ e $y_1=B$ são valores arbitrários reais. □

Nota 3.14 *Na equação anterior a solução nula da equação característica não é considerada, uma vez que daria origem à sucessão nula ($0^t=0,\ t\in\mathbb{N}_0$). Ora, qualquer conjunto de sucessões contendo a sucessão nula é linearmente dependente. Embora seja percetível que tal sucessão é solução da equação dada, repare-se que ela está contemplada na solução geral: basta que se tome $y_0=y_1=0$ e $C=0$.*

Exemplo 3.15 *Resolva a seguinte equação de diferenças*

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0, t \in \mathbb{N}_0$$

para os valores iniciais $y_0 = 3$ *e* $y_1 = 5$.

Resolução: Os métodos expostos permitem chegar à solução geral da equação:

$$y_t = A\ 2^t + B\ t2^t, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

com $A, B \in \mathbb{R}$. Resolve-se o sistema

$$\begin{cases} y_0 = 3 \\ \\ y_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ \\ 2A + 2B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Logo,

$$y_t = 3.2^t - t2^{t-1}, \quad t \in \mathbb{N}_0$$

é a solução particular procurada. $\square$

3.4 Exercícios

Exercícios EDL Homogéneas

1. Determine a solução geral das equações de diferenças homogéneas:

(a) $4y_{t+2} - 2y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = 0$ (b) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$

(c) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 4y_t = 0$ (d) $y_{t+2} + 24y_{t+1} + 169y_t = 0$

(e) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 0$ (f) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0$

(g) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 6y_t = 0$ (h) $5y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$

(i) $y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = 0$ (j) $y_{t+2} - 4\sqrt{2}y_{t+1} + 16y_t = 0$

(k) $y_{t+2} - \sqrt{2}y_{t+1} + y_t = 0$ (l) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 0$

(m) $y_{t+2} - y_t = 0$ (n) $2y_{t+2} - 5y_{t+1} + 2y_t = 0$

(o) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$ (p) $9y_{t+2} - 6y_{t+1} + y_t = 0$

(q) $3y_{t+2} - 6y_{t+1} + 4y_t = 0$ (r) $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 25y_t = 0$

2. Para cada uma das equações anteriores, calcule a solução particular que satisfaz as condições iniciais

$$y_0 = 0 \text{ e } y_1 = 1.$$

3. Determine a solução geral de cada uma das seguintes EDL de ordem superior ou igual a 3.

(a) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + 4y_{t+1} - 8y_t = 0$ (b) $y_{t+3} - 6y_{t+2} + 11y_{t+1} - 6y_t = 0$

(c) $y_{t+3} - 7y_{t+2} + 11y_{t+1} - 5y_t = 0$ (d) $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = 0$

(e) $y_{t+3} - 4y_{t+2} + 5y_{t+1} - 2y_t = 0$

(f) $y_{t+3} - 8y_{t+2} + 21y_{t+1} - 18y_t = 0$

(g) $y_{t+3} - 12y_{t+2} + 48y_{t+1} - 64y_t = 0$

(h) $y_{t+3} - 5y_{t+2} + 8y_{t+1} - 4y_t = 0$

(i) $y_{t+3} - y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = 0$

(j) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 0$

(k) $y_{t+3} + y_{t+2} + y_{t+1} + y_t = 0$

(l) $y_{t+3} + 3y_{t+2} + 3y_{t+1} + y_t = 0$

(m) $y_{t+4} - y_t = 0$

(n) $y_{t+4} - 4y_{t+3} + 6y_{t+2} - 4y_{t+1} + y_t = 0$

Observação: Em alguns casos, poderá ter de baixar de grau o polinómio característico, recorrendo à regra de Ruffini. Admita que os polinómios em causa possuem alguma raiz inteira e tenha em consideração o seguinte

Lema de Gauss:
Seja $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ um polinómio com coeficientes inteiros. Se $a_n = 1$ e P possui alguma raiz racional, então tal raiz deverá ser um inteiro p divisor de a_0. ([6])

[6]Este é na realidade um corolário de um Lema mais amplo. Com efeito, o referido resultado afirma que, dado $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ um polinómio com coeficientes inteiros, se P possui alguma raiz racional , $\frac{p}{q}$, então p divide a_0 e q divide a_n.

3.5 Equações lineares completas

A fim de abordar a questão da obtenção da solução geral no caso das equações não homogéneas, começam-se por requisitar alguns resultados relativos a sistemas de equações lineares.

Considerem-se as matrizes genéricas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Seja $X = p$ uma qualquer solução particular do sistema

$$AX = b.$$

É sabido que qualquer outro vetor-coluna $u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ é solução deste sistema se, e só se,

$$u = X_0 + p,$$

onde X_0 é solução do sistema homogéneo

$$AX = 0$$

($i.e.$, $X_0 \in Ker\,(A)$).

Aproveitando este facto e o que já se disse nas secções anteriores acerca das equações de diferenças lineares, pode afirmar-se que qualquer solução da equação completa se exprime como soma de uma solução da equação homogénea com uma solução particular da equação completa.

Teorema 3.16 *A equação de diferenças linear de ordem n, completa,*

$$P(E)y_t = q_t, \qquad t \in \mathbb{N}_0 \tag{3.9}$$

tem solução geral

$$y_t = y_t^{(H)} + p_t,$$

onde $y_t^{(H)}$ é a solução geral da equação homogénea associada e p_t é uma solução particular da equação completa.

Apresenta-se de seguida uma técnica que permite determinar p_t, solução particular da equação completa, a qual faz uso do chamado **polinómio anu-**

lador do segundo membro da equação completa.([7]) Constitui este um polinómio $Q(E)$ tal que

$$Q(E)q_t = 0.$$

É possível determinar tal polinómio nos casos previstos no seguinte teorema:

Teorema 3.17 *1. O operador*

$$(E-\alpha)^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

anula cada uma das sucessões

$$\alpha^t, t\alpha^t, t^2\alpha^t, ..., t^{m-1}\alpha^t.$$

2. Sendo $\alpha = \beta + \gamma i = \rho \; cis\,(\theta) \in \mathbb{C}$, o operador

$$\left[(E-\beta)^2+\gamma^2\right]^m, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

anula cada uma das sucessões

$$\rho^t \cos(\theta t),\ t\rho^t \cos(\theta t),\ t^2\rho^t \cos(\theta t), \ldots,\ t^{m-1}\rho^t \cos(\theta t),$$
$$\rho^t \sin(\theta t),\ t\rho^t \sin(\theta t),\ t^2\rho^t \sin(\theta t), \ldots,\ t^{m-1}\rho^t \sin(\theta t).$$

Ilustra-se a utilização desta técnica através do exemplo seguinte.

Exemplo 3.18 *Determine a solução geral da equação*

$$P(E)y_t = (E-1)\,y_t = t2^t, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Resolução: A solução geral da equação homogénea associada é

$$y_t^{(H)} = A\ 1^t = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Pelo anterior teorema, verifica-se que

$$Q\,(E) = (E-2)^2$$

[7] Tal técnica é análoga à do polinómio diferencial anulador utilizada para equações diferenciais lineares em [10].

anula $q_t = t2^t$. Aplicando a ambos os membros da equação completa, vem

$$Q(E)\,P(E)y_t = Q(E)\,q_t = 0$$

(para todo o $t \in \mathbb{N}_0$). Assim, a solução geral desta equação homogénea auxiliar é dada por

$$\widehat{y_t} = C_0\;1^t + C_1 2^t + C_2 t 2^t = C_0 + C_1 2^t + C_2 t 2^t.$$

Atendendo à forma da solução geral da equação homogénea associada, a solução particular da equação completa admite a expressão

$$p_t = C_1 2^t + C_2 t 2^t = (C_1 + C_2 t)\,2^t.$$

Ora, daqui resulta

$$p_{t+1} = (C_1 + C_2 + C_2 t)\,2^{t+1}.$$

A equação dada equivale a

$$y_{t+1} - y_t = t2^t,$$

Substituindo y por p, vem

$$(C_1 + C_2 + C_2 t)\,2^{t+1} - (C_1 + C_2 t)\,2^t = t2^t$$

ou seja

$$(2C_2 - C_2)\,t2^t + (2C_1 + 2C_2 - C_1)\,2^t = t2^t$$

(para todo o $t \in \mathbb{N}_0$). Logo,

$$\begin{cases} C_2 & = 1 \\ C_1 + 2C_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 & = -2 \\ C_2 & = 1 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$p_t = (-2 + t)\,2^t$$

é solução particular da equação completa e

$$y_t = y_t^{(H)} + p_t = A + (-2 + t)\,2^t, \quad A \in \mathbb{R}$$

a sua solução geral. □

Observe-se outro exemplo, envolvendo agora a aplicação da parte (b) do teorema anterior.

Exemplo 3.19 *Determine-se a solução geral da equação*

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Resolução: A equação dada pode escrever-se na forma

$$P(E)y_t = q_t,$$

com

$$P(E) = E^2 - 3E + 2 = (E-1)(E-2) \text{ e } q_t = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

A solução geral da equação homogénea associada vem, pois,

$$y_t^{(H)} = A\ 1^t + B2^t = A + B2^t, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Procure-se agora uma solução da equação completa. Uma vez que

$$q_t = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1^t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

pode-se afirmar que o número complexo associado ao segundo membro é tal que o seu módulo e argumento positivo mínimo são, respetivamente,

$$\rho = 1 \text{ e } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Tal número complexo será pois

$$\alpha = 1\ cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i.$$

Logo, um polinómio anulador de q_t será

$$Q(E) = (E-0)^2 + 1^1 = E^2 + 1.$$

Aplicando-o a ambos os membros da equação completa, vem

$$Q(E)\,P(E)y_t = Q(E)\,q_t = 0$$

(para todo o $t \in \mathbb{N}_0$). Assim, a solução geral desta equação homogénea auxiliar é

$$\begin{aligned} \widehat{y_t} &= C_0\ 1^t + C_1 2^t + C_3 1^t \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_4 1^t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ &= C_0 + C_1 2^t + C_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right). \end{aligned}$$

Dada a forma de $y_t^{(H)}$, a solução particular da equação completa admite a expressão

$$p_t = C_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Determinem-se os valores das constantes C_3 e C_4. Recorrendo a fórmulas trigonométricas,

$$p_{t+1} = C_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right) = -C_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

e

$$p_{t+2} = C_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+2)\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}(t+2)\right) = -C_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - C_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Assim, substituindo na equação completa, obtém-se

$$p_{t+2} - 3p_{t+1} + 2p_t = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

que equivale a

$$\begin{aligned} &-C_3 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - C_4 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + 3C_3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) \\ &-3C_4 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + 2C_3 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + 2C_4 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) \quad = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) \end{aligned}$$

ou seja

$$(-C_3 - 3C_4 + 2C_3)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + (-C_4 + 3C_3 + 2C_4)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = t2^t,$$

para todo o $t \in \mathbb{N}_0$. Logo, de

$$\begin{cases} C_3 - 3C_4 &= 0 \\ 3C_3 + C_4 &= 1 \end{cases}$$

vem

$$\begin{cases} C_3 = \frac{3}{10} \\ C_4 = \frac{1}{10} \end{cases}.$$

Finalmente,

$$p_t = \frac{3}{10}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{10}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

é solução particular da equação completa e

$$y_t = y_t^{(H)} + p_t = A + B2^t + \frac{3}{10}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{10}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

a sua solução geral. □

O resultado que se segue responde a algumas situações que podem surgir no processo de resolução de EDL.

Teorema 3.20 *(a) Se $Q_1(E)$ anula q_t e $Q_2(E)$ anula r_t, então $Q_1(E)Q_2(E)$ anula $(q_t + r_t)$, isto é,*

$$[Q_1(E)Q_2(E)]\,(q_t + r_t) = 0.$$

(b) Se $P\,(E)\,p_t = q_t$ e $P\,(E)\,p_t^* = r_t$, então

$$P\,(E)\,[p_t + p_t^*] = q_t + r_t.$$

A parte (b) deste teorema é bastante útil, pois garante que, conhecidas soluções particulares de duas EDL completas com a mesma equação homogénea associada, é possível indicar uma solução completa da EDL completa que mantenha a mesma equação homogénea associada e cujo segundo membro seja a soma dos segundos membros das EDL completas dadas.

Exemplo 3.21 *Resolva a equação de diferenças*

$$(E - 1)\,y_t = t2^t + 5t + 4.$$

Resolução: A equação dada é da forma

$$y_{t+1} - y_t = q_t + r_t,$$

onde

$$q_t = t2^t \qquad \text{e} \qquad r_t = 5t + 4.$$

Viu-se já no exemplo 3.18 que

$$y_t^{(H)} = A, \quad A \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

é a solução geral da equação homogénea associada. Por outro lado, do mesmo exemplo sabe-se que

$$p_t = (-2 + t)\, 2^t$$

é solução particular de

$$(E - 1)\, y_t = t2^t = q_t.$$

Procure-se uma solução particular, p_t^*, de

$$(E - 1)\, y_t = 5t + 4 = r_t. \tag{3.11}$$

Atendendo a que

$$r_t = 5t + 4 = 4 \times 1^t + 5t \times 1^t,$$

o Teorema 3.17 permite dizer que

$$Q(E) = (E - 1)^2$$

é polinómio anulador de r_t. Aplicando-o a ambos os membros da equação completa, vem

$$(E - 1)^2\, (E - 1)\, y_t = (E - 1)^2\, r_t = 0$$

ou seja,

$$(E - 1)^3\, y_t = 0.$$

Esta equação homogénea auxiliar tem solução geral

$$\widehat{y}_t = B_0 + B_1 t + B_2 t^2,$$

e como a solução geral da equação homogénea é (3.10), deve-se procurar uma solução particular da equação completa (3.11) na forma:

$$p_t^* = B_1 t + B_2 t^2.$$

Ora,

$$Ep_t^* = p_{t+1}^* = (\ldots) = B_2 t^2 + (2B_2 + B_1)\, t + (B_1 + B_2)$$

pelo que

$$(E-1)\, p_t^* = r_t$$

equivale a

$$B_2 t^2 + (2B_2 + B_1)\, t + (B_1 + B_2) - B_1 t - B_2 t^2 = 5t + 4,$$

de que resulta

$$B_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \frac{5}{2}.$$

Logo,

$$p_t^* = \frac{3}{2} t + \frac{5}{2} t^2.$$

Atendendo ao teorema anterior,

$$p_t + p_t^* = (-2+t)\, 2^t + \frac{3}{2} t + \frac{5}{2} t^2$$

é solução particular da equação completa dada. A sua solução geral vem

$$y_t = A + (-2+t)\, 2^t + \frac{3}{2} t + \frac{5}{2} t^2, \quad A \in \mathbb{R}$$

o que conclui o exemplo. □

3.6 Comportamento das soluções

Nesta subsecção aborda-se o problema do comportamento das soluções, começando por estudar o caso das equações de diferenças lineares, com coeficientes constantes de ordem 2, isto é, das soluções de

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = q_t, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

Para tal, adotam-se as noções de estabilidade, no sentido exposto na Subsecção 2.2 explicitado em seguida. Posteriormente, generaliza-se para o caso de uma ordem n qualquer.

A solução geral da equação (3.12) é dada por

$$y_t = C_1 u_t^{(1)} + C_2 u_t^{(2)} + p_t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

onde p_t é uma solução particular da equação completa (3.12) e $C_1 u_t^{(1)} + C_2 u_t^{(2)}$ a solução geral da equação homogénea associada. O comportamento – convergência, monotonia e limitação – de cada solução da equação (3.12) depende dos comportamentos de $u_t^{(1)}, u_t^{(2)}$ e de p_t, assim como das condições iniciais dadas, *i.e.*, dos valores de y_0 e y_1. Recorde-se que são estas condições iniciais que determinam os valores das constantes arbitrárias, C_1 e C_2. Se pequenas alterações nos valores de y_0 e y_1 não têm repercussão no comportamento de y_t quando $t \longrightarrow +\infty$, o sistema diz-se **estável**; se, pelo contrário, pequenas variações nos valores de y_0 e y_1 conduzem a diferenças significativas no comportamento de y_t, então o sistema diz-se **instável**. Este conceito de estabilidade é o requisito mínimo para que um dado modelo seja útil em termos económicos, uma vez que apenas se consegue localizar as condições iniciais de maneira aproximada.

A equação (3.12) diz-se **globalmente assintoticamente estável** se

$$\lim\ C_1 u_t^{(1)} + C_2 u_t^{(2)} = 0$$

quaisquer que sejam os valores de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou, o que é equivalente, quaisquer que sejam as condições iniciais, y_0 e y_1.

O resultado seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para que a equação (3.12) seja globalmente assintoticamente estável.

Teorema 3.22 *Seja*

$$M = \textit{máx}\ \{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$$

onde α_1 *e* α_2 *são as soluções da equação característica da equação homogénea associada a* (3.12). *A equação* (3.12) *é globalmente assintoticamente estável se, e só se,* $M < 1$.

Demonstração. Note-se que

$$\lim\ C_1 u_t^{(1)} + C_2 u_t^{(2)} = 0,\ \forall_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}} \iff \lim\ u_t^{(1)} = \lim\ u_t^{(2)} = 0.$$

A implicação recíproca é óbvia. A implicação direta resulta dos casos particulares $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ e $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Prossegue-se então mostrando que

$$\lim\ u_t^{(1)} = \lim\ u_t^{(2)} = 0 \Leftrightarrow M < 1. \tag{3.13}$$

Primeiro caso: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Neste caso,

$$u_t^{(1)} = (\alpha_1)^t \text{ e } u_t^{(2)} = (\alpha_2)^t,$$

e, como é sabido,

$$\lim\ u_t^{(1)} = \lim\ u_t^{(2)} = 0 \Leftrightarrow\ |\alpha_1| < 1\ \wedge\ |\alpha_2| < 1$$

ou seja, (3.13) verifica-se.

Segundo caso: $\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Deste modo,

$$u_t^{(1)} = (\alpha_1)^t \text{ e } u_t^{(2)} = t\,(\alpha_1)^t.$$

Uma vez que

$$\lim\ u_t^{(2)} = 0 \Leftrightarrow |\alpha_1| < 1,$$

é verdade que também

$$\lim\ u_t^{(1)} = \lim\ u_t^{(2)} = 0\ \Leftrightarrow\ |\alpha_1| < 1\ \wedge\ |\alpha_2| < 1,$$

e (3.13) verifica-se.

Terceiro caso: $\alpha_1 = \rho\ cis\,(\theta), \alpha_2 = \overline{\alpha_1} \in \mathbb{C}$

Recorde-se que

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \rho$$

e que

$$u_t^{(1)} = \rho^t \cos(\theta t) \text{ e } u_t^{(2)} = \rho^t \sin(\theta t).$$

Ora,

$$\lim\ u_t^{(1)} = \lim\ u_t^{(2)} = 0 \Leftrightarrow \rho < 1,$$

o que corresponde a (3.13). ■

Eis a generalização deste resultado para o caso de equações de diferenças lineares de ordem n.

Teorema 3.23 *Seja dada uma equação de diferenças linear de ordem* n, *com coeficientes constantes,*

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \ldots + a_n y_t = q_t,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

e tome-se

$$M = \text{máx } \{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|\},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *são as raízes da equação auxiliar da equação homogénea associada,*

$$P(E)\, y_t = 0.$$

Então, $M < 1$ *é uma condição necessária e suficiente para que a solução desta equação convirja para zero quaisquer que sejam os valores iniciais,* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, *dados.*

Exemplo 3.24 *Descreva o comportamento da solução geral da equação de diferenças*

$$y_{t+2} + 3y_{t+1} + 2y_t = 0,\ t \in \mathbb{N}_0$$

e da solução particular que satisfaz as condições fronteira $y_0 = 2$ *e* $y_1 = -3$.

Resolução: A solução geral desta equação é

$$y_t = A(-1)^t + B(-2)^t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Se B é não nula, o comportamento da solução geral é dominado pelo segundo termo. Diz-se que a solução tem o **comportamento assintótico** do segundo termo. Assim sendo, tal solução tende a oscilar ilimitadamente (oscilações ditas *explosivas*, segundo alguns autores) quando $t \to +\infty$. Se $B = 0$, a solução oscila mas de maneira limitada (entre os valores A e $-A$) à medida que $t \to +\infty$. A solução particular que obedece às condições fronteira dadas é

$$y_t = (-1)^t + (-2)^t, \qquad t \in \mathbb{N}_0,$$

cujo comportamento é de facto dominado pelo termo $(-2)^t$. □

3.7 Exercícios e aplicações

EXERCÍCIOS EDL COMPLETAS

1. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 8t - 8.$$

   (a) Verifique que $y_t^{(1)} = 3^t$ e $y_t^{(2)} = t3^t$ formam um SFS para a equação homógenea correspondente.

   (b) Verifique que $y_t^* = 2t$ é solução particular da equação completa.

   (c) Encontre a solução geral da equação completa.

   (d) Determine a equação particular da equação completa para a qual $y_0 = y_1 = 0$.

2. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$y_{t+2} - \frac{1}{4}y_t = g(t).$$

   (a) Verifique que $y_t^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ e $y_t^{(2)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^t$ formam um SFS para a equação homógenea correspondente.

   (b) Sabendo que $y_t^* = 2^t t$ é uma solução particular da equação completa, determine $g(t)$.

   (c) Encontre a solução geral da equação completa.

   (d) Determine a equação particular da equação completa para a qual $y_1 = 2$ e $y_2 = 0$.

3. Determine a solução geral das seguintes equações de diferenças completas.

   (a) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = (-2)^t$

   (b) $y_{t+2} - 4\sqrt{2}y_{t+1} + 16y_t = 2$

   (c) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 6y_t = 5$

   (d) $5y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = t2^t$

   (e) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 5^t$

   (f) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = t^2 + 2t$

   (g) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 6y_t = 3t + 5$

   (h) $5y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = t\left(\frac{1}{5}\right)^t$

(i) $y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
(j) $y_{t+2} - 4\sqrt{2}y_{t+1} + 16y_t = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
(k) $y_{t+2} - \sqrt{2}y_{t+1} + y_t = 2$
(l) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 2$
(m) $y_{t+2} - y_t = 3$
(n) $6y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 5$
(o) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = (-2)^t + 5^t$
(p) $5y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = t2^t - 4t\left(\frac{1}{5}\right)^t$
(q) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 3$
(r) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = t\,(-1)^t$

Observação: Considere que, com exceção de (n), as equações homogéneas associadas a cada uma destas equações estão já resolvidas na folha de exercícios anterior (pg. 47).

4. Determine a solução geral das equações de diferenças completas

   (a) $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = 2^t$

   (b) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + 4y_{t+1} - 8y_t = 3$

   (c) $y_{t+3} - 6y_{t+2} + 11y_{t+1} - 6y_t = t^2 + 1$

   (d) $y_{t+3} - 7y_{t+2} + 11y_{t+1} - 5y_t = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

   (e) $y_{t+3} - 9y_{t+2} + 26y_{t+1} - 24y_t = 3$

5. Considere a equação em 3. (n).

   (a) Mostre que a solução da equação homogénea associada converge para 0 quaisquer que sejam os valores iniciais de y_0 e y_1.

   (b) Qual o termo dominante da solução da equação homogénea associada? Descreva o comportamento assintótico dessa solução.

   (c) A solução da equação completa converge?

6. Considere a equação em 3. (k).

   (a) Qual o único caso em que a solução da equação homogénea associada converge? Excetuando tal caso, descreva o comportamento da referida solução.

(b) Determine a solução particular da equação completa para a qual $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$ e descreva o seu comportamento.

7. Considere a equação em 4. (a).

   (a) Determine a solução particular que satisfaz $y_0 = y_1 = 0$ e $y_2 = 1$ e descreva o comportamento dessa solução.

   (b) Existe alguma solução particular da equação dada que convirja? Justifique.

8. Considere a equação em 4. (e).

   (a) Determine a solução particular que satisfaz $y_0 = y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$ e descreva o comportamento dessa solução.

   (b) Qual o comportamento das soluções nos restantes casos?

9. Escreva as seguintes equações de diferenças em termos do operador E e resolva-as.

$$\text{(a) } \Delta^2 y_t + 2\Delta y_t - 3y_t = 3t^2 \quad \text{(b) } \Delta^3 y_t - 3\Delta y_t = 0.$$

Aplicações — Modelo de multiplicador-acelerador (1)

O modelo de multiplicador-acelerador de Samuelson [12] pode formular--se como se segue:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + G_t, \\ C_t &= \alpha Y_{t-1} \\ I_t &= \beta \left[C_t - C_{t-1} \right] = \alpha\beta Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

em que t denota o período, Y o rendimento nacional, C o consumo agregado, I o investimento privado induzido e G as despesas do governo. Para simplificar, toma-se $G_t = 1$. As constantes α e β denotam, respetivamente, a propensão marginal do consumo e a relação ou coeficiente de acelerador. Admite-se que $0 < \alpha \leq 1$ e $\beta > 0$. Substituindo as expressões de C_t e I_t na primeira equação, vem

$$\begin{aligned} & Y_t - \alpha\left(1+\beta\right) Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} = 1, \quad t = 2, 3, \ldots \\ \Leftrightarrow\ & Y_{t+2} - \alpha\left(1+\beta\right) Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = 1, \quad t = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{3.15}$$

que é uma equação de diferenças linear, de segunda ordem. Pretende-se resolver a equação (3.15) e descrever o comportamento das soluções em função dos valores para α e β.

Parte I: Resolução da equação

A quação homogénea associada a (3.15) é

$$Y_{t+2} - \alpha\left(1+\beta\right) Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = 0 \tag{3.16}$$

e a correspondente equação característica,

$$m^2 - \alpha\left(1+\beta\right) m + \alpha\beta = 0,$$

tem soluções

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1+\beta\right) + \sqrt{\Delta}\right] \text{ e } m_2 = \frac{1}{2}\left[\alpha\left(1+\beta\right) - \sqrt{\Delta}\right],$$

onde

$$\Delta = \alpha^2 (1+\beta)^2 - 4\alpha\beta.$$

(i) Se $\Delta = 0$, *i.e.*, se

$$\alpha = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2},$$

existe uma única raiz real dupla,

$$m = \frac{\alpha(1+\beta)}{2},$$

e

$$Y_t^{(H)} = (C_1 + C_2 t)\, m^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

é a solução geral de (3.16).

(ii) Se $\Delta > 0$, *i.e.*, se

$$\alpha > \frac{4\beta}{(1+\beta)^2},$$

as duas raízes indicadas são reais e distintas, e a solução geral de (3.16) é

$$Y_t^{(H)} = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii) Se $\Delta < 0$, *i.e.*, se

$$\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2},$$

as duas raízes indicadas são complexas conjugadas, tendo-se

$$m_1 = a + bi \text{ e } m_2 = a - bi,$$

onde

$$a = \frac{\alpha(1+\beta)}{2} \text{ e } b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

A solução geral de (3.16) pode ser escrita, como se viu, recorrendo às coordenadas polares, mediante

$$a = \rho\cos\theta, \; b = \rho\sin\theta.$$

Tem-se

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\alpha\beta} \text{ e } tg\ \theta = \frac{b}{a}.$$

vindo

$$Y_t^{(H)} = \rho^t \left[A_1 \cos(\theta t) + A_2 \cos(\theta t)\right], \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Para mais adiante se facilitar o estudo do comportamento das soluções, considerem-se A e ϵ tais que

$$A_1 = A\cos\epsilon,\ A_2 = A\sin\epsilon.$$

Deste modo, vem

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \text{ e } tg\ \epsilon = \frac{A_2}{A_1},$$

pelo que

$$Y_t^{(H)} = A\rho^t \cos(\theta t - \epsilon), \quad A, \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Com exceção do caso em que uma ou ambas as raízes da equação característica são 1, mostra-se facilmente que a solução particular de (3.15) é uma sucessão constante, p, tal que

$$p_t = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Por outro lado, prova-se que se alguma das raízes for 1, então o mesmo sucede com a outra e, além disso, tal occorre apenas quando $\alpha = \beta = 1$. Nessas circunstâncias,

$$Y_t^{(H)} = C_1 + C_2 t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

e tem de ser

$$p_t = C_3 t^2$$

para solução particular de (3.15). Verifica-se que, então, $C_3 = \frac{1}{2}$ e

$$p_t = \frac{1}{2}t^2.$$

Em resumo, a solução geral de (3.15) é:

$$\begin{aligned}
(1)\ Y_t &= C_1 m_1^t + C_2 m_2^t + \frac{1}{1-\alpha}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \text{ se } \alpha > \frac{4\beta}{(1+\beta)^2};\\
(2)\ Y_t &= (C_1 + C_2 t)\, m^t + \frac{1}{1-\alpha}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \text{ se } \alpha = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \text{ e } (\alpha,\beta) \neq (1,1);\\
(3)\ Y_t &= C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \text{ se } (\alpha,\beta) = (1,1);\\
(4)\ Y_t &= A\rho^t \cos(\theta t - \epsilon) + \frac{1}{1-\alpha}, \quad A, \epsilon \in \mathbb{R}, \text{ se } \alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}.
\end{aligned}$$

Parte II: Comportamento das soluções

O comportamento das soluções depende, em cada caso, dos valores das constantes reais arbitrárias e das raízes da equação característica. Como se sabe, são as condições iniciais do problema que determinam o valor das constantes reais. Para simplificar, assume-se que aquelas são

$$Y_0 = 0 \text{ e } Y_1 = 1. \tag{3.17}$$

Quanto às raízes, viu-se que elas são determinadas pelos valores dos parâmetros α e β.

Para as condições iniciais (3.17), o caso (3) tem descrição imediata. De facto, de (3) resulta $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{2}$, pelo que

$$Y_t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2,$$

que é estritamente crescente e ilimitada, tendo-se pois

$$\lim\ Y_t = +\infty.$$

Para o caso (2), é fácil verificar que as constantes C_1 e C_2 são não nulas. O comportamento da solução depende agora de m^t. Ora,

$$m = \frac{\alpha\,(1+\beta)}{2} = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}\frac{(1+\beta)}{2} = \frac{2\beta}{1+\beta}.$$

Se $\beta > 1$, vem $m > 1$ e a solução tende para $+\infty$ ou $-\infty$ consoante o sinal de $C_1 + C_2 t$. Se $\beta < 1$, vem $m < 1$ e prova-se que

$$\lim\ Y_t = \lim\ \left[(C_1 + C_2 t)\,m^t + \frac{1}{1-\alpha}\right] = 0 + \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Para os restantes casos, comece-se por traçar num plano $\mathcal{O}\beta\alpha$ a região admissível para os valores dos parâmetros α, β e, nele, a curva

$$\alpha = f\,(\beta) = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2},$$

cuja importância resulta óbvia da classificação acima feita para as raízes da equação característica.([8]) A figura mostra ainda duas regiões, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$, importantes nos casos em que as raízes são reais.

[8]Deixa-se ao cuidado do leitor a tarefa de confirmar as propriedades gráficas da função f (nomeadamente, monotonia, máximo, concavidades, ponto de inflexão e assíntota horizontal) sugeridas pela figura.

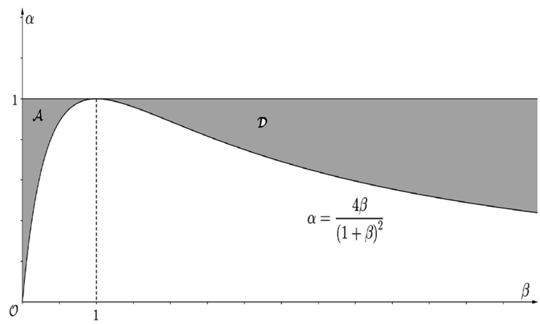


Figura I.5: Plano $\mathcal{O}\beta\alpha$, curva $\alpha = f(\beta)$ e regiões $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$

Para o caso (1), as condições iniciais conduzem a

$$C_1 = \frac{m_2 - \alpha}{(1-\alpha)(m_1 - m_2)} \text{ e } C_2 = \frac{\alpha - m_1}{(1-\alpha)(m_1 - m_2)}.$$

Na análise que se segue, omite-se o caso $\alpha = 1$.

Região $\mathcal{A}$: $\frac{4\beta}{(1+\beta)^2} < \alpha < 1$ e $0 \leq \beta < 1$.

Observando que $m_1 > m_2$, o sinal de C_1 e C_2 depende apenas dos de $m_2 - \alpha$ e $\alpha - m_1$, respetivamente. Tem-se:

$$m_2 - \alpha = \frac{1}{2}\left[\alpha(\beta - 1) - \sqrt{\Delta}\right] < 0,$$

pelo que $C_1 < 0$. Além disso,

$$m_2 - \alpha < 0 \Rightarrow m_2 < \alpha < 1.$$

Por outro lado,

$$\alpha - m_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha(1-\beta) - \sqrt{\Delta}\right].$$

Dado que $0 \leq \beta < 1$, tem-se $1 - \beta > 0$. Assim, para avaliar se

$$\alpha(1-\beta) > \sqrt{\Delta}$$

podem-se elevar ambos os membros ao quadrado. Tem-se:

$$\alpha^2(1-\beta)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = (\cdots) = 4\alpha\beta(1-\alpha) > 0,$$

pelo que $\alpha(1-\beta) > \sqrt{\Delta}$ e $\alpha - m_1 > 0$. Logo pelo que $C_2 > 0$. Resulta ainda que $0 < m_1 < \alpha < 1$. Note agora que

$$Y_0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{1-\alpha} = 0$$

e, para $t \geq 1$, vem $\alpha > m_1 > m_2 > 0$, pelo que resulta

$$|m_2 - \alpha| > |\alpha - m_1|$$

o que leva a $|C_1| > |C_2|$ e, por conseguinte, a

$$\left|C_1 m_1^t\right| > \left|C_2 m_2^t\right|.$$

Como $C_1 m_1^t < 0$, esta desigualdade de módulos dos termos $C_1 m_1^t$ e $C_2 m_2^t$ implica

$$C_1 m_1^t + C_2 m_2^t < 0.$$

Além disso,

$$\lim\ Y_t = \lim\ \left[C_1 m_1^t + C_2 m_2^t + \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha},$$

sendo este limite atingido por valores inferiores.

Região $\mathcal{D}$: $\frac{4\beta}{(1+\beta)^2} < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.

Note que agora $\alpha(\beta - 1) > 0$. Para analisar o sinal de

$$m_2 - \alpha = \frac{1}{2}\left[\alpha(\beta-1) - \sqrt{\Delta}\right],$$

tem-se

$$\alpha^2 (\beta - 1)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = (\cdots) = 4\alpha\beta(1-\alpha) > 0,$$

pelo que $\alpha(\beta - 1) > \sqrt{\Delta}$ e $m_2 - \alpha > 0$. Por conseguinte, $C_1 > 0$ e $m_2 > \alpha$.

$$m_2 - \alpha < 0 \Rightarrow m_2 < \alpha < 1.$$

Por outro lado,

$$\alpha - m_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha(1-\beta) - \sqrt{\Delta}\right] < 0.$$

dado que $1 - \beta < 0$. Assim,

$$C_2 < 0 \text{ e } m_1 > \alpha.$$

Para avaliar a convergência de Y deve perceber-se qual a raiz dominante e onde se localiza. Note que

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[\alpha(1+\beta) + \sqrt{\Delta}\right] > \frac{1}{2}\alpha(1+\beta).$$

Uma vez que em $\mathcal{D}$ se tem $\alpha > \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$, pode-se concluir que

$$m_1 > \frac{1}{2}\alpha(1+\beta) > \frac{1}{2}\frac{4\beta}{(1+\beta)^2}(1+\beta) = \frac{2\beta}{1+\beta} = \frac{2}{\frac{1}{\beta}+1} > 1,$$

pois $\beta > 1$. Deste modo $m_1 > 1$ é raiz dominante e como $m_1 > m_2$, Y terá o comportamento assintótico de m_1^t. Assim, a solução particular

$$Y_t = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t + \frac{1}{1-\alpha}$$

onde C_1, C_2 foram acima determinadas tenderá a crescer de maneira ilimitada, tendendo para $+\infty$.

No caso (3) o comportamento da solução Y é oscilatório, estando ainda dependente dos fatores ρ^t e $\cos(\theta t - \epsilon)$, dando o primeiro a amplitude das oscilações e o segundo o período das oscilações. Recorde que ρ é tal que

$$\rho^2 = \alpha\beta.$$

Assim, há a considerar três casos:

(i) $\rho < 1$, *i.e.*, $\alpha\beta < 1$ (ii) $\rho = 1$, *i.e.*, $\alpha\beta = 1$ (iiii) $\rho > 1$, *i.e.*, $\alpha\beta > 1$.

Trace-se a curva $\alpha\beta = 1$ (que corresponde a um ramo de hipérbole) no plano $\mathcal{O}\beta\alpha$ e obtêm-se mais duas regiões denotadas por $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, como mostra a figura.

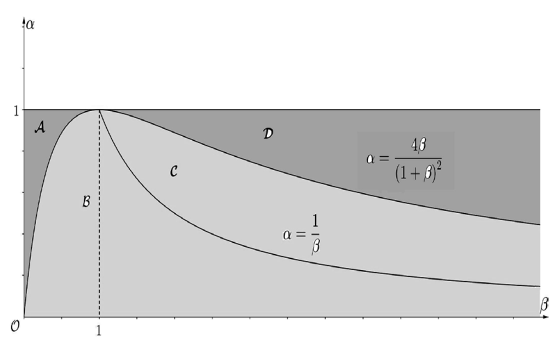


Figura I.6: Plano $\mathcal{O}\beta\alpha$, regiões $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e curvas que as delimitam

Região $\mathcal{B}$: $\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$ e $\alpha\beta < 1$.

Nesta região tem-se

$$\lim\, Y_t = \lim\left[A\rho^t\cos(\theta t - \epsilon) + \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha},$$

uma vez que $\rho < 1$. Graficamente, a solução é uma sucessão com comportamento oscilatório amortecido de período $\frac{2\pi}{\theta}$, convergindo para $\frac{1}{1-\alpha}$.

Região $\mathcal{C}$: $\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$ e $\alpha\beta > 1$

Aqui verificam-se oscilações explosivas, uma vez que a amplitude das oscilações se torna tanto maior quanto maior for t (note que $\rho > 1$). Como tal, a solução não convergirá.

Ao longo da curva $\alpha\beta = 1$ que separa as duas regiões $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, a solução é

$$Y_t = A\cos(\theta t - \epsilon) + \frac{1}{1-\alpha},$$

que corresponde a oscilações harmónicas simples, não havendo convergência.

Aplicações — Um problema de racionamento de água

Por motivo de racionamento de água, o dono de um relvado só o pode regar após as 21h e antes das 9h do dia seguinte. Suponha-se que durante este período ele consegue adicionar ao solo um volume v de água mas que, por evaporação ou absorção, metade deste volume se perde no período seguinte antes de nova rega (das 9h às 21h).

Suponha-se que às 21h do primeiro dia de racionamento o solo contém uma quantidade inicial, I, de água. Seja y_t o volume de água no solo no fim do t-ésimo período de doze horas, a partir de então. Vem

$$y_{t+2} = \begin{cases} \frac{1}{2}y_t + v, & t \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2}y_t + \frac{1}{2}v, & t \text{ par} \end{cases} \Leftrightarrow y_{t+2} - y_t/2 = \frac{1}{4}v\left[3 - (-1)^t\right].$$

A correspondente equação característica admite as raízes $r = \pm 1/\sqrt{2}$, logo, a solução geral da equação homogénea é

$$y_t = C_1\sqrt{2}^{-t} + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^{-t}$$

(C_1, C_2: constantes arbitrárias). A expressão da solução particular da equação completa é $A+B\,(-1)^t$, facilmente se obtendo $A = \frac{3v}{2}$, $B = -\frac{v}{2}$. Resulta assim a solução geral da equação linear não homogénea

$$y_t = C_1\sqrt{2}^{-t} + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^{-t} + \frac{1}{2}v\left[3 - (-1)^t\right].$$

Finalmente, tomando os valores iniciais $y_0 = I$, $y_1 = I + v$, obtém-se a solução particular da equação

$$y_t = \frac{I - v}{2}\sqrt{2}^{-t}\left\{\sqrt{2}\left[1 - (-1)^t\right] + \left[1 + (-1)^t\right]\right\} + \frac{v}{2}\left[3 - (-1)^t\right],\ t \in \mathbb{N}_0.$$

Note-se que para valores elevados de t, y_t oscila essencialmente entre v e $2v$.

APLICAÇÕES SUCESSÃO DE FIBONACCI

A sucessão de Fibonacci define-se como $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ em que cada termo, após o segundo, resulta da soma dos dois termos anteriores. A sucessão de Fibonacci também ocorre na análise de algoritmos e reveste grande interesse matemático. ([9])

Seja F_n o termo de ordem n da sucessão, para $n = 1, 2, \ldots$; F_n designa-se "n-ésimo número de Fibonacci" e verifica a equação de diferenças linear de ordem 2

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$F_1 = F_2 = 1.$$

A equação característica vem $r^2 - r - 1 = 0$, que admite as raízes

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Obtém-se a solução geral da equação (C_1, C_2: constantes arbitrárias)

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Das condições iniciais resulta

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \; n = 1, 2, ...$$

Note-se que, contrariamente às aparências, F_n é sempre um número natural. Além disso,

$$\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = (\cdots) = \lim \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

que se designa "proporção áurea" ou "número de ouro". Esta proporção ocorre em alguns fenómenos naturais, como, por exemplo, o aumento do diâmetro das

[9] A título de curiosidade, refere-se que existe inclusivamente uma revista científica, a *Quarterly Fibonacci* editada pela *Fibonacci Association*, dedicada ao estudo das propriedades desta sucessão.

espirais de sementes de um girassol ou a proporção de diminuição das folhas de uma árvore à medida a altura cresce. Também no reino animal a proporção entre abelhas fêmeas e machos em qualquer colmeia é uma proporção áurea.

Aplicações — Falência do jogador

Dois jogadores, A e B, apostam sucessivamente, um euro de cada vez. Em cada aposta um jogador ganha e o outro perde, pagando este um euro ao jogador que ganha. O jogo termina quando um dos jogadores fica com todo o dinheiro do adversário (ganhando neste caso o jogo). Suponha-se que A e B começam o jogo com X_A e X_B euros, respetivamente, e que, em cada aposta, a probabilidade de cada um ganhar é $\frac{1}{2}$. Pretende calcular-se a probabilidade de A ganhar o jogo.

Sejam

$$X = X_A + X_B$$

e P_x a probabilidade de A ganhar o jogo quando dispõe de x euros, $x \in \{0, 1, ..., X\}$. Obviamente, $P_0 = 0$ e $P_X = 1$. Considere-se um valor x tal, que $x + 1 < X$; após a jogada seguinte, A terá $x + 2$ euros ou x, ambos os casos com probabilidade $1/2$. Formalmente, resulta a equação de diferenças linear de ordem 2,

$$P_{x+1} = \frac{1}{2}P_{x+2} + \frac{1}{2}P_x \Leftrightarrow P_{x+2} - 2P_{x+1} + P_x = 0,$$

cuja equação característica, $r^2 - 2r + 1 = 0$, admite a raiz dupla $r = 1$. Deste modo, resulta a solução geral

$$P_x = C_1 + C_2 x;$$

de $P_0 = 0$ e $P_X = 1$ obtém-se a solução particular

$$P_x = \frac{x}{X} = \frac{x}{X_A + X_B}.$$

Dado que A começa o jogo com X_A euros, a probabilidade de A ganhar o jogo vem

$$P_{X_A} = \frac{X_A}{X_A + X_B}.$$

Conclui-se que a probabilidade de ganhar o jogo depende da proporção de riqueza com que se começa. Se, por exemplo, $X_A = 10$ e $X_B = 90$, a probabilidade de A ganhar o jogo é de apenas $\frac{10}{10+90} = 0.1$.

Capítulo II

Sistemas de Equações de Diferenças Lineares

Diversos problemas em Economia são modelizados através de equações envolvendo duas ou mais sucessões-incógnitas em vários períodos de tempo. Fala-se neste caso de sistemas de equações de diferenças. No presente capítulo aborda-se a resolução de sistemas de equações de diferenças de ordem um, com coeficientes constantes. Mostra-se que um sistema de ordem superior pode converter-se num sistema de ordem um, daí o destaque que estes merecem.

Um **sistema de equações de diferenças de ordem um** nas incógnitas $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, onde o expoente (k) denota a k-ésima sucessão, é todo aquele que pode exprimir-se na forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{t+1}^{(1)} = & f^{(1)}\left(t, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(k)}\right) \\ \vdots & \vdots \\ x_{t+1}^{(k)} = & f^{(k)}\left(t, x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(k)}\right) \end{array} \right. , \qquad t \in \{a, a+1, \ldots\} \tag{0.1}$$

a qual se designa **forma normal**, e onde a é um valor fixado em $\mathbb{N}_0$. A solução do sistema (0.1) é determinada de modo único pelos valores iniciais

$$x_a^{(1)}, \ldots, x_a^{(k)}.$$

De facto, sendo estes conhecidos e admitindo que as funções $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ estão definidas para todos os valores das variáveis, a partir de (0.1) obtém-se

$$x_{a+1}^{(1)}, \ldots, x_{a+1}^{(k)},$$

tomando $t = a$. Por sua vez, e dados estes, podem obter-se

$$x_{a+2}^{(1)}, \ldots, x_{a+2}^{(k)},$$

tomando $t = a + 1$. Assim procedendo, podem sempre obter-se os sucessivos valores de

$$x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(k)}$$

para cada t. A solução geral do sistema (0.1) é da forma

$$\begin{cases} x_t^{(1)} = & g^{(1)}(t, C_1, \ldots, C_k) \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ x_t^{(k)} = & g^{(k)}(t, C_1, \ldots, C_k) \end{cases},$$

onde $C_1, \ldots, C_k$ denotam k constantes arbitrárias. Como habitualmente, soluções particulares do sistema resultam de concretizações destas constantes. Sabendo que não existem métodos gerais que conduzam a soluções explícitas de (0.1), abordam-se alguns casos especiais para os quais se pode obter uma solução na forma fechada.

1 Sistemas de equações lineares de ordem 1

Supõe-se no decorrer desta secção que as funções $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ da forma normal do sistema (0.1) são funções lineares, com coeficientes constantes, nas incógnitas $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$. Um tal sistema, dito **sistema linear de equações de diferenças** com coeficientes constantes, pode escrever-se na forma

$$\begin{cases} x_{t+1}^{(1)} = & a_{11}x_t^{(1)} + a_{12}x_t^{(2)} + \ldots + a_{1k}x_t^{(k)} + h_t^{(1)} \\ x_{t+1}^{(2)} = & a_{21}x_t^{(1)} + a_{22}x_t^{(2)} + \ldots + a_{2k}x_t^{(k)} + h_t^{(2)} \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ x_{t+1}^{(k)} = & a_{k1}x_t^{(1)} + a_{k2}x_t^{(2)} + \ldots + a_{kk}x_t^{(k)} + h_t^{(k)} \end{cases}, \qquad t \in \{a, a+1, \ldots\}$$

Designando por X o vetor-coluna

$$\left[\begin{array}{cccc} x^{(1)} & x^{(2)} & \ldots & x^{(k)} \end{array}\right]^T,$$

por h o vetor-coluna

$$\left[\begin{array}{cccc} h^{(1)} & h^{(2)} & \ldots & h^{(k)} \end{array}\right]^T,$$

e ainda por X_t e h_t os respetivos valores no período t, o anterior sistema pode reescrever-se na forma

$$X_{t+1} = AX_t + h_t, \qquad t \in \{a, a+1, \ldots\} \tag{1.1}$$

onde se admite que a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é regular. Dado um vetor incial $X_{t_0} = X_0$, com $t_0 \in \{a, a+1, ...\}$, um processo iterativo permite obter, através de (1.1), os sucessivos valores de X_t, $t = 1, 2, \ldots$ Ou seja, tem-se o resultado

Teorema 1.1 *Para cada* $t_0 \in \{a, a+1, ...\}$ *e cada vetor-coluna* X_0 *dado, a equação* (1.1) *possui uma única solução* X_t *com* $t \in \{t_0, t_0+1, ...\}$ *tal que* $X_{t_0} = X_0$.

No que se segue, se nada de contrário se diz, admite-se que

$$h_t = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]^T$$

e que $a = 0$. Deste modo, (1.1) admite a forma

$$X_{t+1} = AX_t, \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{1.2}$$

e

$$X_t = A^t X_0, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

é a sua solução para um valor inicial X_0 dado. Evidentemente, se o problema consiste em

$$X_{t+1} = AX_t, \qquad t = t_0, t_0+1, \ldots$$

e X_{t_0} é agora o valor inicial, a sua solução vem dada por

$$X_t = A^{t-t_0} X_{t_0}, \qquad t = t_0, t_0+1, \ldots$$

de novo através de um processo iterativo.

Exemplo 1.2 *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x_{t+1}^{(1)} = & 2x_t^{(1)} + x_t^{(2)} + x_t^{(3)} + x_t^{(4)} \\ x_{t+1}^{(2)} = & 2x_t^{(2)} \\ x_{t+1}^{(3)} = & 2x_t^{(3)} + x_t^{(4)} \\ x_{t+1}^{(4)} = & x_t^{(4)} + x_t^{(5)} \\ x_{t+1}^{(5)} = & -x_t^{(2)} - x_t^{(3)} - x_t^{(4)} \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{N}_0,$$

com $X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Resolução: A tradução matricial deste sistema é dada por

$$X_{t+1} = AX_t, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_t = \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \\ x_t^{(3)} \\ x_t^{(4)} \\ x_t^{(5)} \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução é tal que

$$X_t = A^t X_0, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

Prova-se (ver Anexo D) que

$$A^t = \begin{bmatrix} 2^t & 2^{t+1} - t - 2 & 2^{t+1} - t - 2 & 2^{t+1} - t - 2 & 2^t - t - 1 \\ 0 & 2^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t(t+1)}{2} - 2^t + 1 & \frac{t(t+1)}{2} + 1 & \frac{t(t+1)}{2} & \frac{t(t-1)}{2} \\ 0 & \frac{t(1-t)}{2} & \frac{t(1-t)}{2} & \frac{t(1-t)}{2} + 1 & \frac{t(3-t)}{2} \\ 0 & -t & -t & -t & -t+1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução do sistema vem

$$
\begin{aligned}
X_t &= A^t X_0 \\
&= \begin{bmatrix} 2^t & 2^{t+1}-t-2 & 2^{t+1}-t-2 & 2^{t+1}-t-2 & 2^t-t-1 \\ 0 & 2^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t(t+1)}{2}-2^t+1 & \frac{t(t+1)}{2}+1 & \frac{t(t+1)}{2} & \frac{t(t-1)}{2} \\ 0 & \frac{t(1-t)}{2} & \frac{t(1-t)}{2} & \frac{t(1-t)}{2}+1 & \frac{t(3-t)}{2} \\ 0 & -t & -t & -t & -t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{t+3}-4t-7 \\ 2^t \\ -2^t+t(2t+1)+2 \\ t(3-2t)+1 \\ -4t+1 \end{bmatrix}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

$\square$

A solução deste tipo de sistemas remete para a importância da procura de métodos expeditos para o cálculo de potências matriciais de expoente t arbitrário. Numa primeira abordagem deste problema, suponha-se que λ é um valor próprio de uma matriz A e que u é o correspondente vetor próprio. Então tem-se

$$A^t u = \lambda^t u,$$

pelo que

$$X_t = \lambda^t u$$

é uma solução do sistema (1.2) com valor inicial $X_0 = u$. De modo geral, se X_0 se pode escrever como combinação linear dos vetores próprios de A, por exemplo,

$$X_0 = c_1 u_1 + ... + c_m u_m,$$

onde os c_i são constantes e cada u_i é um vetor próprio associado a λ_i, então a solução do sistema (1.2) vem

$$X_t = c_1 \lambda_1^t u_1 + ... + c_m \lambda_m^t u_m.$$

Em consequência, todo o sistema de ordem n cuja matriz possua n vetores próprios linearmente independentes é tal que qualquer solução do sistema (1.2) pode ser determinada deste modo.

Exemplo 1.3 *Resolva o sistema*

$$X_{t+1} = AX_t, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e X_0 *dado.*

Resolução: De $\det(A - \lambda I_2) = 0$ resultam os valores próprios de A: $\lambda = 6$ e $\lambda = -1$. Assim, pode-se desde já garantir que A possui dois vetores próprios linearmente independentes, sendo possível recorrer ao processo descrito previamente a este exemplo para resolver o sistema para qualquer valor de X_0. É tarefa simples mostrar que

$$u_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são vetores próprios associados a $\lambda_1 = 6$ e a $\lambda_2 = -1$, respetivamente. Escreva-se agora

$$X_0 = \begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

como combinação linear de u_1 e u_2. Trata-se de resolver o sistema

$$X_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Ora, tem-se

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} X_1^{(0)} + X_2^{(0)} \\ 2X_1^{(0)} - 5X_2^{(0)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim sendo, a solução do sistema para um valor inicial X_0 vem

$$\begin{aligned} X_t &= c_1 6^t u_1 + c_2 (-1)^t u_2 \\ &= \frac{1}{7}\left(X_1^{(0)} + X_2^{(0)}\right) 6^t \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\left(2X_1^{(0)} - 5X_2^{(0)}\right) (-1)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com $t = 1, 2, \ldots$ □

Uma outra abordagem para o cálculo de uma potência matricial resulta do chamado **Teorema de Cayley-Hamilton**. Este afirma que toda a matriz quadrada verifica a sua equação característica. Assim, para a matriz A dada,

$$A^k + a_1 A^{k-1} + \ldots + a_{k-1} A + a_k I_k = 0$$

de onde resulta

$$A^k = -\left(a_1 A^{k-1} + \ldots + a_{k-1} A + a_k I_k\right),$$

que exprime a potência de expoente k de A (ordem da matriz) envolvendo uma combinação linear de $A^{k-1}, \ldots, A, I_k$. Como consequência deste facto, toda a potência de A pode também ser escrita como combinação linear dessas mesmas matrizes.

Exemplo 1.4 *Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e obtenha uma expressão para A^3 *como combinação linear de* A *e de* I_2*.*

Resolução: A matriz dada é a mesma do exemplo anterior e a sua equação característica é

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0.$$

É fácil verificar que A satisfaz a igualdade

$$A^2 - 5A - 6I_2 = \mathbf{0}.$$

Daqui resulta

$$A^2 = 5A + 6I_2$$

e, portanto,

$$A^3 = AA^2 = 5A^2 + 6A = 25A + 6A + 30I_2.$$

□

Tendo em vista o estudo de outros métodos de cálculo de potências matriciais, sugere-se a consulta do Anexo D.

Finalmente, admita-se que se pretende resolver um sistema não homogéneo,

$$X_{t+1} = AX_t + C_t, \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

O teorema seguinte, demonstrado em [6], fornece a resposta a este problema.

Teorema 1.5 *A solução do sistema* (1.3) *para o valor inicial* X_0*, dado, é*

$$X_t = A^t X_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s-1} C_s, \qquad t \in \mathbb{N}_0.$$

2 Sistemas de equações lineares de ordem superior

Observe-se que o estudo das equações de diferenças de ordem n com coeficientes constantes,

$$y_{t+n} + p_{n-1}y_{t+n-1} + \ldots + p_1 y_{t+1} + p_0 y_t = r_t \tag{2.1}$$

não é mais do que um caso especial dos sistemas do tipo (1.1). De facto, defina-se X tal que

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t^{(1)} & x_t^{(2)} & \ldots & x_t^{(n)} \end{bmatrix}^T$$

onde

$$x_t^{(k)} = y_{t+k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

e $t = a, a+1, \ldots$. Tome-se agora

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad h_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_t \end{bmatrix}.$$

Então

$$X_{t+1} = AX_t + h_t, \qquad t = a, a+1, \ldots$$

isto é, X satisfaz a equação (1.1). A matriz A assim definida diz-se **matriz companheira** da equação (2.1) e verifica-se também que se X satisfizer (1.1) com A e h definidos como acima, então $y_t = x_t^{(1)}$ é solução de (2.1). A título ilustrativo, apresenta-se um exemplo de conversão de uma equação de ordem dois num sistema de ordem dois.

Exemplo 2.1 *Considere-se a equação de diferenças de segunda ordem*

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Fazendo

$$x_t = y_{t+1}$$

e, consequentemente,

$$x_{t+1} = y_{t+2},$$

a equação dada pode-se reescrever como

$$\begin{cases} x_{t+1} = & 3x_t - 2y_t \\ y_{t+1} = & x_t \end{cases},$$

que admite a seguinte versão matricial:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$V_{t+1} = AV_t.$$

Se y_0 *é dado, também se conhece* $x_0 = y_1$ *e passa a considerar-se*

$$V_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

onde $x_0 = y_1$. *Assim, como se viu na secção anterior, a solução deste sistema vem*

$$V_t = A^t V_0.$$

Os valores próprios de A *são* 2 *e* 1, *pelo que* A *é diagonalizável. Verifica-se que*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

são vetores próprios de A *associados a* 2 *e a* 1, *respetivamente. Deste modo,* $A = PDP^{-1}$, *com*

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por fim,

$$A^t = PD^tP^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{t+1} - 1 & -2^{t+1} + 2 \\ 2^t - 1 & -2^t + 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} V_t &= A^t V_0 = \begin{bmatrix} 2^{t+1}-1 & -2^{t+1}+2 \\ 2^t - 1 & -2^t + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(2^{t+1}-1\right) x_0 + \left(-2^{t+1}+2\right) y_0 \\ \left(2^t - 1\right) x_0 + \left(-2^t+2\right) y_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Uma consequência imediata da possibilidade de converter qualquer equação de diferenças linear, de ordem superior a um, num sistema linear de equações de diferenças de primeira ordem é a de que o estudo dos sistemas lineares de equações de diferenças se pode restringir ao caso dos sistemas de primeira ordem.

3 Estabilidade dos sistemas de equações lineares

A estabilidade dos sistemas lineares de equações de diferenças relaciona-se diretamente com o tema da estabilidade dos sistemas de equações lineares propriamente ditos. A solução dum sistema de equações de diferenças de ordem k é uma sucessão, X, de pontos de $\mathbb{R}^k$ tal que

$$X_t = \left[\begin{array}{cccc} x_t^{(1)} & x_t^{(2)} & \ldots & x_t^{(k)} \end{array} \right]^T, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Na maior parte das aplicações, para além da procura de tal solução, interessa saber de que modo esta evolui quando t cresce de maneira ilimitada, isto é, importa saber onde se situam os pontos da solução para *grandes valores* de t. Neste sentido, diversas situações podem ocorrer. Assim, a sucessão pode convergir para um ponto de $\mathbb{R}^k$ (ou, pelo menos, permanecer numa vizinhança deste); a sucessão pode oscilar entre valores na vizinhança de diversos pontos; a sucessão pode ser ilimitada; a sucessão pode permanecer num conjunto limitado mas oscilando de modo aparentemente imprevisível. O estudo destas matérias designa-se *teoria da estabilidade.* Apresentam-se alguns tópicos desta teoria mas apenas para sistemas lineares homogéneos. Para o leitor que pretenda rever alguns conceitos de Álgebra Linear, estes encontram-se sucintamente enunciados nos Anexos A e D.

O primeiro resultado é fundamental no que segue.

Teorema 3.1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem k com elementos de $\mathbb{R}$, cujo raio espectral, $r(A)$, satisfaz*

$$r(A) < 1.$$

Então, toda a solução X do sistema (1.2) *satisfaz*

$$\lim X_t = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k.$$

Mais, se δ é tal que

$$r(A) < \delta < 1,$$

então existe algum $C > 0$ *tal que*

$$\|X_t\| \leq C\delta^t \|X_0\|$$

para todo o $t = 0, 1, 2, \ldots$ *e para toda a solução* X *do sistema* (1.2).

O sistema (1.2) diz-se **assintoticamente estável** se todas as suas soluções convergirem para a origem sempre que $t \longrightarrow +\infty$. A este respeito, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Seja* A *uma matriz quadrada de ordem* k *com entradas em* $\mathbb{R}$. *Se*

$$r(A) \geq 1,$$

então existe alguma solução X *de* (1.2) *tal que*

$$\lim X_t \neq \mathbf{0}.$$

Exemplo 3.3 *Considere a equação de diferenças linear de primeira ordem, com valor inicial, cuja notação matricial é*

$$X_{t+1} = AX_t, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que

$$\sigma(A) = \left\{ -\frac{i}{3}, \frac{i}{3} \right\},$$

conclui-se que

$$r(A) = \frac{1}{3} < 1$$

e, portanto, o teorema anterior garante que todas as soluções do sistema convergem para a origem quando t *tende para* $+\infty$, *independentemente do valor inicial dado. A figura seguinte ilustra a situação de convergência, descrevendo os sucessivos pontos uma espiral em torno da origem.* $\square$

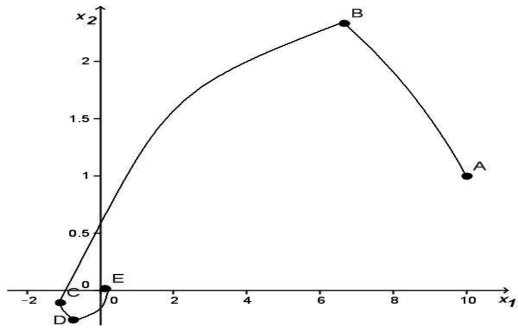


Figura II.1: Sucessivos pontos da solução.

Se a matriz A possui raio espectral $r(A) \leq 1$, então o sistema pode manifestar uma forma mais fraca de estabilidade desde que se verifiquem certas condições.

Teorema 3.4 *Admita-se que A, matriz do sistema* (1.2), *é tal que:*
(i) $r(A) \leq 1$;
(ii) *Cada valor próprio λ de A tal que $|\lambda| = 1$ é simples.*
Então, existe alguma constante $C > 0$ tal que

$$\|X_t\| \leq C\delta^t \|X_0\| \tag{3.1}$$

para todo o $t = 0, 1, 2, \ldots$ e para toda a solução X do sistema (1.2).

Este resultado tem aplicação prática na análise dos chamados *métodos de passo múltiplo*, para obtenção de aproximações numéricas de problemas de equações de diferenças lineares com valor inicial.

Exemplo 3.5 *Tome-se a equação de diferenças linear de primeira ordem, com valor inicial, cuja notação matricial é*

$$X_{t+1} = AX_t, \quad t = 0, 1, \ldots$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e θ denota um ângulo arbitrariamente fixado. A matriz A diz-se de rotação *uma vez que tem a propriedade de converter cada vetor X noutro vetor com o mesmo comprimento, através da multiplicação. Deste modo, se X_0 é o valor inicial do sistema dado, então todas as suas soluções se situam numa circunferência centrada na origem, com raio igual a $\|X_0\|$.*
Os valores próprios da matriz A são

$$\lambda = \cos\theta \pm i \sin\theta,$$

pelo que as hipóteses do teorema anterior estão satisfeitas. Consequentemente, (3.1) *deve verificar-se. De facto, tem-se*

$$\|X_t\| \leq C\delta^t \|X_0\|,$$

com $C = 1$. □

De seguida analisa-se o comportamento de soluções de um sistema em que alguns, mas não todos, os valores próprios da matriz A têm módulo menor do que um. São necessários certos conceitos adicionais de Álgebra Linear que se podem rever no Anexo D.

Teorema 3.6 (Teorema do subespaço estável) *Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_k$ os valores próprios da matriz A, não necessariamente distintos, tais que $\lambda_1, ..., \lambda_p$ verificam $|\lambda_i| < 1$. Seja S o subespaço p-dimensional gerado pelos vetores próprios generalizados correspondentes a estes valores próprios. Se X é solução do sistema* (1.2) *com $X_0 \in S$, então*

$$X_t \in S, \; t \in \mathbb{N}_0$$

e $X_t \to \mathbf{0}$ quando $t \to +\infty$.

O conjunto S no anterior resultado diz-se *subespaço estável* da equação (1.2). Pode-se provar que toda a solução do sistema que tenda para a origem sempre que $t \to +\infty$ possui ponto inicial em S. Logo, S pode ser descrito como a reunião das sucessões X que são solução do sistema e que tendem para a origem quando $t \to +\infty$.

Exemplo 3.7 *Seja a equação de diferenças linear de primeira ordem cuja notação matricial é*

$$X_{t+1} = AX_t, \quad t \in \mathbb{N}_0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A sua equação característica é

$$\det (A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 (\lambda - 2) = 0.$$

O subespaço estável, S, da equação dada tem dimensão 2, sendo constituído pelas soluções de

$$\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)^2 u = \mathbf{0}.$$

Sendo $u = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, S é então o plano de equação

$$4x + 6y + 9z = 0.$$

Dado que se verificam as condições do teorema anterior, toda a solução X_0 que esteja neste plano produz uma sucessão de vetores $X_t \in S$ e que converge para a origem quando $t \to +\infty$. Por outro lado, como $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ é um vetor próprio correspondente a $\lambda = 2$, as soluções geradas no eixo OZ são dadas por

$$X_t = 2^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \text{ com } t \in \mathbb{N}_0 \text{ e } z \text{ livre.}$$

Estas soluções tendem para $+\infty$ ou para $-\infty$ quando $t \to +\infty$, sempre que se tenha $z > 0$ ou $z < 0$, respetivamente. □

Nota 3.8 *Sempre que algum dos valores próprios da matriz A seja $\lambda \in \mathbb{C}$, com $|\lambda| < 1$, os correspondentes vetores próprios generalizados são complexos e o subespaço estável é um subespaço complexo. Contudo, estes vetores próprios generalizados ocorrem aos pares (conjugados) e é fácil provar que as respetivas* *partes real e coeficiente da parte complexa destes vetores são vetores reais que geram um subespaço estável com a mesma dimensão.*

3.1 Exercícios e aplicações

EXERCÍCIOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES

1. Considere em $\mathbb{N}_0$ o seguinte sistema de ordem dois:

$$\begin{cases} x_{t+2} - 6x_{t+1} + 4y_{t+1} - 3x_t + y_t &= 0 \\ y_{t+2} + y_{t+1} + 3x_{t+1} - 2y_t &= t3^t \end{cases}.$$

Converta-o num sistema de ordem um.

2. Mostre que a equação característica de

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0,\ t \in \mathbb{N}_0,$$

é a mesma da correspondente à sua matriz companheira.

3. Determine o espectro e o raio espectral de cada uma das matrizes seguintes:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Utilize o método apresentado na Secção 1 do presente capítulo para resolver o sistema

$$X_{t+1} = AX_t, \qquad t \in \mathbb{N}_0,$$

com X_0 dado, nos casos em que

(a) A é a matriz do exercício 3. (a) (b) A é a matriz do exercício 3. (d)

5. Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

6. Utilize o Algoritmo de Putzer para resolver em $\mathbb{N}_0$ o problema

$$y_{t+2} + 3y_{t+1} + 2y_t = 0,\ y_0 = -1 \text{ e } y_1 = 7,$$

começando por reescrever a equação na forma de um sistema de equações de ordem 1.

7. Determine A^t, $t \in \mathbb{N}_0$, sendo A dada em cada uma das alíneas seguintes.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. Recorra ao Algoritmo de Putzer para resolver em $\mathbb{N}_0$ os problemas de valor inicial seguintes.

(a) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} X_t, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X_t, \quad X_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. Utilize o Teorema 1.5 para resolver em $\mathbb{N}_0$ os problemas de valor inicial seguintes.

(a) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) (b) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X_t + \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

10. Verifique para cada um dos sistemas seguintes se todas as respetivas soluções convergem para a origem quando $t \to +\infty$.

(a) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} X_t$

(b) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} X_t$

(c) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{8} & -1 & -1 \end{bmatrix} X_t$

11. Se $r(A) > 1$, mostre que alguma das soluções reais do sistema $X_{t+1} = AX_t$ satisfaz
$$\lim \|X_t\| = +\infty.$$

12. Verifique para cada um dos sistemas seguintes se todas as respetivas soluções satisfazem a condição (3.1).

(a) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} X_t$

(b) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} X_t$

(c) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_t$

13. Mostre que o recíproco do Teorema 3.4 pode não se verificar. (Sugestão: recorra ao exercício 12. (c))

14. Prove que se a equação característica de
$$y_{t+n} + p_{n-1}y_{t+n-1} + \ldots + p_0 y_t = 0$$
possui uma raiz λ tal que $|\lambda| > 1$, então esta equação de diferenças possui uma solução ilimitada.

15. Determine o subespaço estável S para cada um dos sistemas seguintes em $\mathbb{N}_0$.

(a) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} X_t$

(b) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X_t$

(c) $X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} X_t$

16. Para o sistema do exercício 15. (b), mostre que se $X_0 \notin S$, então $\lim \|X_t\| = +\infty$.

17. Determine o subespaço estável real de dimensão 2 de

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & 1 \end{bmatrix} X_t.$$

Aplicações Modelo de multiplicador-acelerador (2)

Considere-se o modelo de economia fechada (G: despesa pública, suposta constante; todos os outros termos com o significado atrás referido – veja-se (3.14)) ([1])

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + G, \qquad (3.2)\\ C_t &= \alpha Y_{t-1}, \;\; 0<\alpha<1, \\ I_t &= \beta\left(C_t - C_{t-1}\right), \;\; \beta>0. \end{aligned}$$

Neste contexto, o multiplicador denota-se por α (o consumo é proporcional ao rendimento do período anterior) e β denota o acelerador (o investimento é proporcional ao acréscimo do consumo no período corrente face ao consumo no período anterior). Substituindo Y na segunda equação este modelo pode converter-se num sistema de ordem 1:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha\left(C_{t-1} + I_{t-1} + G\right), \\ I_t &= \beta\left[\alpha\left(C_{t-1} + I_{t-1} + G\right) - C_{t-1}\right] \\ &= \left(\alpha - 1\right)\beta C_{t-1} + \alpha\beta I_{t-1} + \alpha\beta G. \end{aligned}$$

Admita-se que $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.375$ e $G = 9$ (em determinada unidade). Pode então escrever-se, em termos matriciais,

$$\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ -0.075 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{t-1} \\ I_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.2 \\ 2.7 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz do sistema resultam de

$$\begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.8 \\ -0.075 & 0.3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.3 = 0$$

ou seja, $\lambda = 0.6$ e $\lambda = 0.5$, o que assegura a estabilidade do sistema (ambos os valores próprios inferiores à unidade, em valor absoluto). A solução de

[1] Esta aplicação constitui uma cconcretização do Modelo de Multiplicador-Acelerador de Samuelson atrás apresentado (pp. 64 e seguintes), resolvido agora com recurso a um sistema de equações de diferenças.

equilíbrio, $(\overline{C}, \bar{I})$, obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \overline{C} \\ \bar{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ -0.075 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \bar{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.2 \\ 2.7 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \; &\begin{bmatrix} -0.2 & 0.8 \\ -0.075 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \bar{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.2 \\ 2.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \; &\begin{bmatrix} \overline{C} \\ \bar{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.8 \\ -0.075 & -0.7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -7.2 \\ -2.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou seja, o consumo estabiliza em 3.6 e o volume de investimento tende para zero. De (3.2) se conclui que Y converge para $\frac{3.6}{0.8} = 4.5$. Para obter a solução geral torna-se necessário determinar os vetores próprios da matriz do sistema (correspondentes aos valores próprios 0.5 e 0.6):

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ -0.075 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ -0.075 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0.6 \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

de que se obtém

$$v = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \; w = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e a solução geral (c_1 e c_2 denotam constantes arbitrárias)

$$\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \end{bmatrix} = c_1 v 0.5^t + c_2 w 0.6^t + \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} C_t = 3.6 + 8c_1 0.5^t + 4c_2 0.6^t \\ I_t = -3c_1 0.5^t - c_2 0.6^t \end{cases},$$

solução que confirma os valores da solução de equilíbrio acima referida, uma vez que $\lim 0.5^t = \lim 0.6^t = 0$. Das condições iniciais $Y_1 = 9$, $Y_0 = 9.5$, pode calcular-se a correspondente solução particular:

$$C_1 = 0.8Y_0 = 7.6, \;\; C_2 = 0.8Y_1 = 7.2,$$

donde

$$\begin{cases} C_1 = 7.6 = 3.6 + 8c_1 0.5 + 4c_2 0.6 \\ C_2 = 7.2 = 3.6 + 8c_1 0.5^2 + 4c_2 0.6^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -30 \\ c_2 = 66.(6) \end{cases}.$$

A solução particular vem então dada por

$$\begin{cases} C_t = 3.6 - 240 \times 0.5^t + 266.(6) \times 0.6^t \\ \\ I_t = 90 \times 0.5^t + 66.(6) \times 0.6^t \end{cases} .$$

A figura seguinte representa a evolução temporal de Y_t, C_t e I_t expressa nesta solução particular (para Y_t utiliza-se a identidade (3.2)).

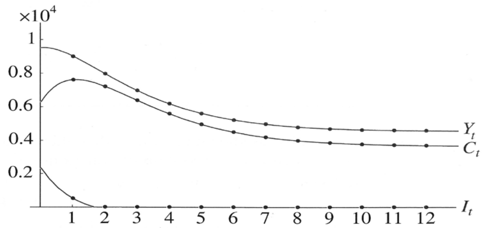


Figura II.2: Evolução temporal das sucessões Y_t, C_t e I_t.

APLICAÇÕES CORRIDA AO ARMAMENTO (MODELO DE RICHARDSON)

Considerem-se dois países em estado de guerra, A e B, com orçamentos militares no ano t de, respetivamente, A_t e B_t. De acordo com o modelo de Richardson (referido em [5]), a variação anual dos orçamentos militares dos dois países verifica as equações

$$\begin{aligned}\Delta A_t &= A_{t+1} - A_t = D_a\ B_t - aA_t + c,\\ \Delta B_t &= B_{t+1} - B_t = D_b\ A_t - bB_t + d,\end{aligned}$$

com o seguinte significado das constantes, para A e B, respetivamente: D_a e D_b denotam o *grau de defesa* (medida do nível de reação do orçamento militar de um país em resposta ao orçamento do outro – $D_a, D_b > 0$), a e b o *grau de desgaste* (medida das consequências económicas negativas do acréscimo de orçamento militar – $0 < a, b < 1$), e c e d o conjunto de outras grandezas económicas não diretamente dependentes dos orçamentos militares nacionais ($c, d > 0$). Matricialmente, o modelo pode então escrever-se

$$x_{t+1} = M\ x_t + p,$$

em que

$$x_t = \begin{bmatrix} A_t \\ B_t \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 1-a & D_a \\ D_b & 1-b \end{bmatrix},\ p = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

O valor de equilíbrio das variáveis do sistema,

$$A_t = A, \quad B_t = B,$$

pode calcular-se mediante a resolução da equação matricial

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = x = M\ x + p \quad &\Leftrightarrow (I - M)\,x = p\\ &\Leftrightarrow x = (I-M)^{-1}\,p,\end{aligned}$$

que corresponde naturalmente à resolução do sistema de equações

$$\begin{cases} aA - D_aB = c \\ bB - D_bA = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{bc+dD_a}{ab-D_aD_b} \\ B = \frac{ad+cD_b}{ab-D_aD_b} \end{cases}.$$

Dados os sinais das constantes, os valores de equilíbrio são não negativos se $ab > D_a D_b$. Esta condição corresponde a $|I - M| > 0$, o que garante a estabilidade da solução de equilíbrio. Pode interpretar-se esta desigualdade como segue: o produto ab (produto dos graus de desgaste) representa a limitação na corrida ao armamento; por outro lado, pode encarar-se o termo $D_a D_b$ como uma medida da propensão dos dois países em intensificarem o seu armamento. Naturalmente, a solução é estável quando a propensão a controlar o armamento supera a tendência para o aumentar.

Anexo A

Espaços vetoriais: definições básicas

Seja dado um conjunto não vazio E e um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma operação interna $\oplus : E \times E \to E$ – dita adição – e de uma aplicação $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – dita multiplicação escalar.([1]) Diz-se que $(E, \oplus, \bullet)$ é um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$ se:

(A1) $\oplus$ é comutativa

(A2) $\oplus$ é associativa

(A3) $\oplus$ possui elemento neutro (denotado por $\mathbf{0}_E$)

(A4) todo o elemento $x \in E$ possui simétrico em E (denotado por $-x$)

(M1) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}}, \forall_{x,y \in E} \quad \alpha \bullet (x \oplus y) = \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y$

(M2) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}}, \forall_{x,y \in E} \quad (\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x$

(M3) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}}, \forall_{x \in E} \quad (\alpha\beta) \bullet x = \alpha \bullet (\beta \bullet x)$

(M4) $\forall_{x \in E} \quad \mathbf{1} \bullet x = x$ ($\mathbf{1}$ elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{K}$)

Os elementos de E dizem-se **vetores** e os de $\mathbb{K}$ dizem-se **escalares**. Eis alguns exemplos de espaços vetoriais reais (isto é, sobre $\mathbb{R}$).

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ onde $+$ é a adição usual de vetores definida por:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

[1] Um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto não vazio com uma adição e uma multiplicação, satisfazendo certas propriedades. No presente texto, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, com a adição e multiplicação usuais.

e "$\cdot$" é tal que

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

2. $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ onde $+$ é a adição usual de matrizes $m \times n$ e $\cdot$ é a multiplicação de um escalar por uma matriz.

3. $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f é n vezes diferenciável$\}$ munido da adição usual de funções e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x).$$

4. $\mathcal{S} = \{u_t : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\}$ munido da adição usual de sucessões e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ tal que

$$(\alpha \cdot u)_t = \alpha u_t.$$

Seja $(E, \oplus, \bullet)$ um espaço vetorial real e F um subconjunto de E.([2]) F diz-se um **subespaço vetorial** de E se F for espaço vetorial para as mesmas operações de E. Uma condição necessária e suficiente para que F seja um subespaço vetorial de E é que se verifiquem os três axiomas seguintes:

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathbf{0}_E \in F & \\ (2) & u \oplus v \in F, & \forall_{u,v\in F} \\ (3) & \alpha \bullet u \in F, & \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \forall_{u\in F} \end{array}$$

Se S é um subespaço do espaço vetorial E, então $S = \{\mathbf{0}_E\}$ ou $S = E$ ou $S \subset E$ e $S \neq \{\mathbf{0}_E\}$, caso em que S é dito subespaço próprio de E. Uma **combinação linear** dos vetores de $\{u_1, u_2, ..., u_m\} \subset E$ é qualquer vetor

$$v = \alpha_1 \bullet u_1 \oplus \alpha_2 \bullet u_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_m \bullet u_m,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Diz-se que um conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset E$ **gera** um subespaço S de E se todo o vetor de S puder ser escrito como combinação linear dos vetores daquele conjunto. Em tal caso, pode-se dizer que S é o **subespaço gerado** por $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, denotando-se este facto como se segue

$$S = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle.$$

[2] As definições e resultados que se seguem são análogas se $\mathbb{K}$ for diferente de $\mathbb{R}$.

Um conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset E$ diz-se **linearmente independente** se

$$\alpha_1 \bullet u_1 \oplus \alpha_2 \bullet u_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n \bullet u_n = \mathbf{0}_E$$

apenas pode ocorrer se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Uma **base** do espaço vetorial E é todo o n-uplo ($n \in \mathbb{N}$) de vetores

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n) \subset E,$$

que é linearmente independente e tal que todo o vetor $v \in E$ se escreve de modo único como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. Sendo $\mathcal{B}$ uma base de E, se $x \in E$ é tal que

$$x = \alpha_1 \bullet e_1 \oplus \alpha_2 \bullet e_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_m \bullet e_m,$$

os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dizem-se **coordenadas** de x em relação à base $\mathcal{B}$.Todo o espaço vetorial possui alguma base e todas as bases de um espaço vetorial têm o mesmo número de elementos. Se n é tal valor, este diz-se **dimensão** do espaço vetorial e escreve-se

$$\dim E = n.$$

Por convenção, $\dim \{\mathbf{0}_E\} = 0$.

Sejam $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ e $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, ..., f_n)$ duas bases do espaço vetorial E e escreva-se cada vetor de $\mathcal{B}_2$ como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_1$. Tem-se:

$$f_j = p_{1j} \bullet e_1 \oplus p_{2j} \bullet e_2 \oplus \ldots \oplus p_{nj} \bullet e_n = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \bullet e_k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

A matriz $P = [p_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ diz-se **matriz de mudança de base** (da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$). Trata-se de uma matriz invertível cuja utilidade se explica de seguida. Se

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

são os vetores-coluna das coordenadas de $x \in E$ em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respetivamente, então

$$Y = PX.$$

Para mais pormenores, consulte-se [15].

Anexo B

Primitivação Discreta

Sublinha-se a analogia entre o operador diferença Δ e o operador diferencial linear $D = \frac{d}{dx}$. Pode-se obter uma versão discreta do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, com Δ em vez de D e $\sum$ em vez de $\int$. De facto, tem-se

$$\sum_{t=0}^{N-1} \Delta y_t = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_N - y_{N-1}) = y_N - y_0.$$

Assim, se F_t é tal que $\Delta F_t = f_t$, a equação de diferenças

$$\Delta y_t = f_t$$

tem solução geral

$$y_t = F_t + C,$$

onde C é uma constante arbitrária real. Para que se confirme este facto é apenas necessário observar que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=0}^{N-1} \Delta y_t - f_t = \sum_{t=0}^{N-1} \Delta y_t - \Delta f_t = \sum_{t=0}^{N-1} \Delta (y_t - f_t) = \\ &= (y_N - F_N) - (y_0 - F_0) \\ &= y_N - F_N - C. \end{aligned}$$

Na ausência de melhor nome, a toda a sucessão F_t que satisfaz

$$\Delta F_t = f_t \tag{0.1}$$

chama-se **primitiva discreta** de f_t. Na seguinte tabela estabelece-se uma lista de sucessões f_t e as respetivas primitivas discretas F_t.

$\Delta F_t = f_t$	F_t
$f_t = 0$	$F_t = C$
$f_t = b$	$F_t = bt + C$
$f_t = at$	$F_t = \frac{1}{2}at(t-1) + C$
$f_t = r^t$	$F_t = (r-1)^{-1} r^t + C \qquad (r \neq 1)$

Exemplo 0.9 *Resolva a equação de diferenças*

$$y_{t+1} = y_t + 3t + 1,$$

recorrendo à tabela anterior.

Resolução: Tal equação pode-se reescrever na forma

$$\Delta y_t = 3t + 1.$$

Tomando $a = 3$ e $b = 1$ na tabela acima, obtemos a solução geral

$$y_t = \frac{3}{2}t(t-1) + t + C = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + C,$$

o que conclui o exemplo. □

Exemplo 0.10 *Idem, para a equação de diferenças*

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0.$$

Resolução: A equação dada pode-se reescrever na forma:

$$\left(E^2 - 2E + 1\right) y_t = (E-1)^2 y_t = \Delta^2 y_t = 0.$$

Daqui vem

$$\Delta y_t = c,$$

logo

$$y_t = ct + d,$$

onde c e d são constantes reais arbitrárias. □

Anexo C

Exponencial de um Número Complexo

A exponencial complexa resulta da extensão para números complexos da série de MacLaurin para a função exponencial. Assim, dado $z \in \mathbb{C}$ chama-se exponencial de z, denotada igualmente por e^z, à soma da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Dado que esta série converge para todo o $z \in \mathbb{C}$, tem-se

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

A soma desta série é (em geral) um número complexo, pelo que $e^z \in \mathbb{C}$. A exponencial complexa satisfaz a propriedade

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Pode consultar-se a demonstração deste resultado em [2]. Esta envolve a operação de multiplicação de séries. Um outro importante resultado relaciona a exponencial complexa com as funções trigonométricas.

Teorema 0.11 *Seja* $\theta \in \mathbb{R}$. *Então*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Demonstração. Tem-se:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + ... \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - ... \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ...\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta,
\end{aligned}$$

o que demonstra o pretendido. ■

Corolário 0.12 ***(Fórmula de Euler):***

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Demonstração. Faça-se $\theta = \pi$ na identidade do teorema anterior. ■

O teorema anterior permite apresentar uma nova representação dos números complexos. De facto, seja

$$\alpha = \beta + \gamma i \in \mathbb{C}$$

a representação trigonométrica de z. Então

$$\alpha = \rho e^{i\theta} \tag{0.1}$$

onde $\rho = |\alpha|$ e $\theta = \arg(\alpha)$. De facto, tendo em conta a representação trigonométrica de α e o resultado expresso no teorema, vem

$$\alpha = \beta + \gamma i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}.$$

A igualdade (0.1) diz-se **representação polar** do complexo α. Prova-se que se $\overline{\alpha} = \beta - \gamma i$, então

$$\overline{\alpha} = \rho e^{-i\theta}.$$

Anexo D

Potências Matriciais

1 Introdução

No cálculo de potências de uma matriz de qualquer ordem é fundamental a determinação dos seus valores próprios. No decorrer deste anexo, toma-se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k \times k}$, embora tudo funcione do mesmo modo se as entradas de A são números complexos. As fontes bibliográficas são [6], [9] e [15].

A equação

$$Au = \lambda u, \tag{1.1}$$

onde λ é um parâmetro, tem sempre a solução trivial: o vetor nulo de $\mathbb{R}^k$. Se u é uma solução não trivial de (1.1), chama-se um **vetor próprio** de A e λ diz-se o **valor próprio** que lhe está associado. Como a equação (1.1) equivale a

$$(A - \lambda I_k)\, u = \mathbf{0},$$

conclui-se que os valores próprios de A são as soluções λ, reais ou complexas, de

$$\det (A - \lambda I_k) = 0,$$

equação dita **característica**, que se pode escrever na forma

$$p(\lambda) = 0,$$

onde

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k$$

é o **polinómio característico** de A. O conjunto dos valores póprios de A diz-se **espectro** de A e denota-se por $\sigma(A)$. Por seu turno, o valor

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

diz-se **raio espectral** da matriz A.

Para cada λ valor próprio de uma matriz A, o espaço

$$Ker\,(A - \lambda I_k)$$

diz-se **subespaço próprio** de A associado a λ.

Seja agora λ um valor próprio de uma matriz A com **multiplicidade algébrica** m (*i.e.*, a multiplicidade de λ enquanto raiz do polinómio característico, $\det(A - \lambda I_k)$). Os **vetores próprios generalizados** de A associados a λ são as soluções não triviais v de

$$(A - \lambda I)^m v = \mathbf{0}.$$

É claro que todo o vetor próprio de A é também um vetor próprio generalizado. O conjunto de todos os vetores próprios generalizados associados a λ, reunidos com o vetor nulo, formam o chamado **espaço próprio generalizado**, o qual constitui um subespaço de dimensão m. A interseção de dois quaisquer espaços próprios generalizados é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo. Por último, prova-se que todo o produto de A por um vetor próprio generalizado associado a λ tem como resultado um vetor próprio generalizado ainda associado a λ.

Estes vetores ocupam lugar de relevo na determinacão da chamada *forma canónica de Jordan* de uma matiz quadrada.

Exemplo 1.1 *Determinem-se os vetores próprios generalizados de*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz possui apenas dois valores próprios:

$$\lambda_1 = 3, \text{ com multiplicidade } 2, \text{ e } \lambda_2 = 2, \text{ com multiplicidade } 1.$$

Os vetores próprios generalizados associados a λ_1 resultam de

$$(A - 3I)^2 \, v = \mathbf{0},$$

sistema que admite a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

O espaço próprio generalizado consiste no subespaço gerado pelos vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No que toca a λ_1, existe um espaço próprio generalizado de dimensão um, que é gerado por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Pretende-se exprimir A^t para qualquer $t \in \mathbb{N}_0$ de tal modo que as entradas desta potência matricial sejam funções de t. Este problema foi levemente aflorado no final da Secção 1. Abordam-se de seguida certos casos especiais com mais detalhe.

2 Potências de matrizes diagonalizáveis

Admita-se que a matriz A é diagonal; formalmente,

$$A = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_k\right).$$

Neste caso, é imediato que

$$A^t = diag\left(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_k^t\right)$$

para cada $t = 0, 1, \ldots$

Recorde-se agora que uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k \times k}$ se diz **diagonalizável** se existem matrizes (de ordem k), P, invertível, e D, diagonal, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{2.1}$$

Quando tais matrizes existem, P diz-se **matriz diagonalizante** de A. Por satisfazerem uma relação do tipo (2.1), as matrizes A e D dizem-se **semelhantes**.

O processo de **diagonalização** de A consiste na procura das matrizes P e D tais que (2.1) é válida e está associado ao cálculo dos valores e vetores próprios de A. Admitindo que a matriz A é diagonalizável, é muito simples calcular uma potência de expoente t de A. De facto, se (2.1) se verifica, aplicando a associatividade da multiplicação matricial,

$$\begin{aligned} A^t &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\ldots\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}\ldots\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\ &= PD^tP^{-1}, \end{aligned}$$

para cada $t = 0, 1, \ldots$

Tendo em conta o seguinte resultado, conclui-se que nem sempre uma matriz é diagonalizável.

Teorema 2.1 *Uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é diagonalizável se, e só se, existem k vetores próprios de A linearmente independentes.*

Doravante, e dado um valor próprio, λ, de uma matriz A, $ma(\lambda)$ denota a **multiplicidade algébrica** de λ e $mg(\lambda)$ a **multiplicidade geométrica** de λ, isto é, o número de vetores próprios linearmente independentes associados a λ. Neste sentido,

$$mg(\lambda) = \dim Ker(A - \lambda I_k).$$

Mostra-se que

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda).$$

Enuncie-se agora, sem demonstrar, três outros resultados que permitem decidir acerca da possibilidade de diagonalizar uma matriz.

Teorema 2.2 *Seja* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *uma matriz.*
(a) vetores próprios de A *associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.*
(b) Se A *admite* k *valores próprios distintos, então* A *é diagonalizável.*
(c) Se $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$*, então* A *é diagonalizável se, e só se,*

$$mg(\lambda_1) + \ldots + mg(\lambda_r) = k$$

Admita-se que A é diagonalizável e que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são todos os valores próprios de A. A construção da matriz P faz-se através da indicação de k vetores próprios linearmente independentes, os quais vêm das bases de

$$Ker(A - \lambda_1 I_k), \ldots, Ker(A - \lambda_r I_k),$$

os subespaços próprios de A, e que formam as colunas da matriz diagonalizante. A matriz diagonal tem como elementos principais os valores próprios pela mesma ordem que os vetores próprios escolhidos.

Exemplo 2.3 *Para cada uma das seguintes matrizes, averigue-se se cada uma delas é diagonalizável. Em caso afirmativo, obtenha uma expressão para* A^t.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Relativamente a (a), os valores próprios de A são 1, 2 e 3. Tal é suficiente para garantir que A é diagonalizável. Verifica-se que

$$Ker(A - I_3) = \langle(-1,1,1)\rangle, \; Ker(A - 2I_3) = \langle(1,1,0)\rangle$$

e

$$Ker(A - 3I_3) = \langle(1,1,1)\rangle.$$

Deste modo,

$$A = PDP^{-1}$$

com

$$P=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ \text{e } P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}A^t &= PD^tP^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^t&0&0\\0&2^t&0\\0&0&3^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^t&-1-3^t+2^{t+1}&2\times3^t-2^{t+1}\\-1+3^t&1-3^t+2^{t+1}&2\times3^t-2^{t+1}\\-1+3^t&1-3^t&2\times3^t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

No que concerne a (b), os valores próprios de B são 1 e 3, o que não é suficiente para garantir a possibilidade de diagonalizar B. Determinando os espaços próprios de 1 e 3, repectivamente, tem-se

$$Ker\,(B-I_3)=\langle(2,-1,1)\rangle\ \text{ e } Ker\,(B-3I_3)=\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle\,.$$

Deste modo, é possível tomar três vetores próprios de B linearmente independentes e B é diagonalizável. Vem

$$B=PDP^{-1},$$

com

$$P=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ \text{e } P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}B^t &= PD^tP^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3-3^t&-1+3^t&-3+3^{t+1}\\0&2&0\\1-3^t&-1+3^t&-1+3^{t+1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente, a respeito da matriz C, o seu único valor próprio é 1. Por outro lado, verifica-se que

$$Ker\,(C - I_3) = \langle (1,0,0)\,,(0,0,1)\rangle\,,$$

o que implica que C não é diagonalizável. $\square$

3 Potências de matrizes não diagonalizáveis

Expõe-se de maneira sucinta o método de construção da chamada forma canónica de Jordan de uma matriz A, com entradas reais. Tal processo permite escrever as potências de A no caso de esta não admitir diagonalização.

Definição 3.1 *Chama-se* ***bloco de Jordan de ordem*** r *associado a um valor próprio* λ *(real ou complexo) a toda a matriz quadrada de ordem* r *cujos elementos principais são iguais a* λ*, cujos elementos da diagonal superior, quando existem, são iguais a* 1*, sendo nulos todos os restantes elementos.*

Se uma matriz consiste na justaposição de blocos Jordan ao longo da diagonal principal (sendo nulos os restantes elementos) diz-se que está na **forma canónica de Jordan**, *i.e.*, se é da forma

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2) & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_r) \end{bmatrix},$$

onde $J(\lambda_i)\,,\ i = 1,\ldots,r$ são blocos de Jordan (não necessariamente de igual ordem).

Dada uma matriz A, pretende-se construir uma matriz J na forma canónica de Jordan tal que A e J são semelhantes, *i.e.*, tais que

$$A = PJP^{-1},$$

para alguma matriz invertível P.([1]) À semelhança do processo de diagonalização, também aqui os valores próprios de A e certos vetores a estes associados são essenciais.

Definição 3.2 *Diz-se que os vetores não nulos $v_1, \ldots, v_r$ formam uma **cadeia de Jordan** associado a um valor próprio λ (real ou complexo) de $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k\times k}$ se*

$$(A - \lambda I_k)\, v_1 = \mathbf{0},\ (A - \lambda I_k)\, v_2 = v_1, \ldots, (A - \lambda I_k)\, v_r = v_{r-1}.$$

Em tal caso, representa-se esta cadeia através de

$$v_r \mapsto v_{r-1} \mapsto \ldots \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto \mathbf{0}\ .$$

Note-se que em cada cadeia de Jordan associada a λ apenas v_1 é um vetor próprio de A associado a λ. Os restantes v_i, $i = 2, 3, \ldots, r$ são os valores próprios generalizados, já antes definidos.

O resultado que se segue indica que é sempre possível construir a forma canónica de Jordan, J, de uma matriz A tal que A e J são semelhantes.

Teorema 3.3 *Toda a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k\times k}$ é semelhante a uma matriz J na forma canónica de Jordan, i.e., existe uma matriz P invertível tal que $A = PJP^{-1}$, onde*

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2) & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_r) \end{bmatrix}, \qquad 1 \le r \le k,$$

e

$$J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

[1]Note que J, forma canónica de Jordan de A, é única a menos de uma permutação dos blocos.

e onde:

(i) os elementos λ_i *são os valores próprios de* A*;*

(ii) o número total de blocos de Jordan associados a λ_i *é igual a* $mg(\lambda_i)$*;*

(iii) a soma das ordens dos blocos que correspondem a λ_i *é igual a* $ma(\lambda_i)$*;*

(iv) se $J(\lambda_i)$ *é uma matriz de ordem* s_i*, então* $\sum_{i=1}^{r} s_i = k$*.*

As colunas da matriz P são constituídas pelos vetores de cada uma das cadeias de Jordan e formam uma base de $\mathbb{R}^k$, dita **base de Jordan**. Os valores próprios de A podem classificar-se do seguinte modo:

(i) se $ma(\lambda) = mg(\lambda) = 1$, λ diz-se simples;

(ii) se $ma(\lambda) = mg(\lambda) > 1$, λ diz-se semi-simples;

(iii) se $mg(\lambda) < ma(\lambda)$, λ não é simples nem semi-simples.

Exemplo 3.4 *Considere a seguinte matriz na forma canónica de Jordan*

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

O valor próprio -1 *é simples, o valor próprio* 1 *é semi-simples e o valor próprio* 5 *não é simples nem semi-simples.* □

Para exibir uma base de Jordan de A devem construir-se as cadeias de Jordan associadas aos valores próprios de A.

Teorema 3.5 *Os vetores de uma cadeia de Jordan são linearmente independentes.*

Resta apresentar um processo de construção das cadeias de Jordan.

Seja

$$v_r \mapsto v_{r-1} \mapsto \ldots \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto \mathbf{0}$$

uma cadeia de Jordan associada ao valor próprio λ de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Faça-se

$$S = A - \lambda I_k.$$

O primeiro vetor da cadeia é v_1, tal que

$$Sv_1 = 0,$$

isto é, v_1 é um vetor próprio de A associado a λ. Quanto a $v_2, \ldots, v_r$ devem escolher-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
Sv_2 &= v_1 \neq 0 \text{ e } S^2v_2 = 0, \text{ ou seja, } v_2 \in Ker\left(S^2\right) \backslash Ker\left(S\right) \\
Sv_3 &= v_2 \neq 0 \text{ e } S^2v_3 = v_1 \neq 0 \text{ e } S^3v_3 = 0, \text{ ou seja, } v_3 \in Ker\left(S^3\right) \backslash Ker\left(S^2\right) \\
&\vdots \\
Sv_r &= v_{r-1} \neq 0 \text{ e } S^{r-1}v_r = v_1 \neq 0 \text{ e } S^r v_r = 0, \text{ ou seja, } v_r \in Ker\left(S^r\right) \backslash Ker\left(S^{r-1}\right).
\end{aligned}$$

Como $Ker\left(S^p\right) \subseteq Ker\left(S^{p+1}\right), \forall_{p\in\mathbb{N}}$, tem-se

$$Ker\left(S\right) \subseteq Ker\left(S^2\right) \subseteq \ldots \subseteq Ker\left(S^r\right).$$

Ao atingir um valor do índice p tal que

$$Ker\left(S^p\right) = Ker\left(S^{p+1}\right),$$

a cadeia não pode aumentar mais, pois isto traduz que não existe v_{p+1} tal que

$$S^{p+1}v_{p+1} = 0 \text{ e } S^p v_{p+1} \neq 0.$$

Neste caso,

$$Ker\left(S^r\right) = Ker\left(S^{r+m}\right), \forall_{m\in\mathbb{N}}$$

e diz-se que o **comprimento da cadeia de Jordan** é r. Nenhuma outra cadeia de Jordan associada a λ pode ter outro comprimento.

Veja-se como tudo se processa na prática, através dos seguintes exemplos.

Exemplo 3.6 *Escreva a matriz A na forma $A = PJP^{-1}$, onde J está na* *forma canónica de Jordan e*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 5 & 11 \\ -2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Como o polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = (\lambda - 8)^4,$$

o seu único valor próprio é 8 e tem-se

$$ma(8) = 4.$$

Tomando

$$S = A - 8I_4,$$

vem

$$Ker(S) = \langle(-1, 1, 0, 0)\rangle,$$

o que significa que

$$mg(8) = 1$$

e, portanto, J terá um único bloco. Por outro lado,

$$\begin{aligned} Ker\left(S^2\right) &= \langle(1,0,0,0), (0,1,0,0)\rangle, \\ Ker\left(S^3\right) &= \langle(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\rangle, \\ Ker\left(S^4\right) &= \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Isto implica que o comprimento da cadeia de Jordan será 4 e o bloco de Jordan é de ordem 4, sendo

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Escolham-se os vetores v_4, v_3, v_2, v_1, tais que

$$v_4 \mapsto v_3 \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, tem-se

$$e_4 \in Ker\left(S^4\right) \text{ e } S^3 e_4 = (A - 8I)^3 e_4 \neq 0.$$

Assim, $e_4 \in Ker\left(S^4\right) \backslash Ker\left(S^3\right)$. Pode pois tomar-se $v_4 = e_4$ e, além disso,

$$v_3 = Sv_4 = (A - 8I)\, e_4 = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que $v_3 \in Ker\left(S^3\right) \backslash Ker\left(S^2\right)$, e pode-se tomar

$$v_2 = Sv_3 = (A - 8I)\, v_3 = \begin{bmatrix} 176 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se agora, $v_2 \in Ker\left(S^2\right) \backslash Ker\,(S)$, e toma-se

$$v_1 = Sv_2 = (A - 8I)\, v_2 = \begin{bmatrix} 512 \\ -512 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que v_1 é um vetor próprio de A. Assim, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de Jordan e a matriz de mudança de base será

$$P = \begin{bmatrix} 512 & 176 & 11 & 0 \\ -512 & 80 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, vem

$$
\begin{aligned}
A &= PJP^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 512 & 176 & 11 & 0 \\ -512 & 80 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{8192} & -\frac{11}{8192} & -\frac{11}{32768} & 0 \\ \frac{1}{256} & \frac{1}{256} & -\frac{1}{1024} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo 3.7 *Escreva A na forma $A = PJP^{-1}$, onde J está na forma canónica de Jordan e*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução: O polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = (1-\lambda)^3 (2-\lambda)^2.$$

Assim, os dois valores próprios de A são 1 e 2, tendo-se

$$ma(1) = 3 \text{ e } ma(2) = 2.$$

Relativamente ao primeiro, tomando $S = A - I_5$, vem

$$Ker(S) = \langle (0,0,1,-1,0) \rangle,$$

traduzindo que

$$mg(1) = 1.$$

Logo, há apenas um bloco de Jordan correspondente a $\lambda = 1$, que é

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se agora que

$$Ker\left(S^2\right) = \langle (1,0,-1,0,1),(0,0,-1,1,0)\rangle$$

e

$$Ker\left(S^3\right) = \langle (-2,0,1,0,0),(-2,0,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\rangle .$$

Prova-se que

$$Ker\left(S^{3+p}\right) = Ker\left(S^3\right), \forall_{p\in\mathbb{N}},$$

o que permite concluir que a cadeia de Jordan correspondente a este valor próprio tem comprimento 3:

$$v_3 \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Começa-se com

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in Ker\left(S^3\right)\backslash Ker\left(S^2\right),$$

e toma-se

$$v_2 = Sv_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Finalmente, notando que

$$v_2 \in Ker\left(S^2\right)\backslash Ker\left(S\right),$$

toma-se

$$v_1 = Sv_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

No que diz respeito a $\lambda = 2$, e considerando $U = A - 2I_5$, tem-se

$$Ker\left(U\right) = \langle (1,0,0,0,0),(0,-1,1,0,0)\rangle .$$

Assim,

$$ma\left(2\right) = mg\left(2\right) = 2,$$

pelo que há dois blocos de Jordan cujo comprimento é, forçosamente, igual a 1:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \text{ e } J_3 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

As cadeias de Jordan correspondentes são de comprimento 1:

$$v_4 \mapsto \mathbf{0} \text{ e } v_5 \mapsto \mathbf{0}.$$

Tais vetores são vetores próprios de A associados a 2, podendo-se tomar

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ e } v_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Por último, $A = PJP^{-1}$ com

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k \times k}$, é sempre possível ter uma relação

$$A = PJP^{-1}$$

onde J está na forma canónica de Jordan. As potências de A calculam-se então na forma,

$$A^t = PJ^tP^{-1},$$

onde

$$J^t = \begin{bmatrix} J_1^t & \mathbf{0} & -2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2^t & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J_r^t \end{bmatrix}, 1 \leq r \leq k.$$

Observe-se que, para cada $i = 1, \ldots, r$, se tem

$$J_i = \lambda_i I_{s_i} + N_i,$$

onde

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que as matrizes N_i, de ordem s_i, são nilpotentes (recorde que uma matriz A é nilpotente se $A^p = \mathbf{0}$, para algum $p \in \mathbb{N}$), tendo-se

$$N_i^{s_i} = \mathbf{0}.$$

Para cada $i = 1, \ldots, r$, tem-se

$$\begin{aligned} J_i^t &= (\lambda_i I_{s_i} + N_i)^t = \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (\lambda_i I_{s_i})^{t-j} N_i^j \\ &= \binom{t}{0}\lambda_i^t I + \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1}N_i + \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2}N_i^2 + \ldots + \binom{t}{s_i - 1}\lambda_i^{t-s_i+1}N_i^{s_i-1}. \end{aligned}$$

Calculando as potências de N_i, obtém-se

$$J_i^t = \begin{bmatrix} \lambda_i^t & t\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & & \cdots & \binom{t}{s_i-1}\lambda_i^{t-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^t & t\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & \cdots & \binom{t}{s_i-2}\lambda_i^{t-s_i+1} \\ & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & t\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} \\ \vdots & \vdots & & 0 & \lambda_i^t & t\lambda_i^{t-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i^t \end{bmatrix}$$

Observe-se que os elementos de cada diagonal desta matriz são todos iguais.

Exemplo 3.8 *Seja A a matriz do Exemplo* (3.7). *Determine a expressão de A^t e recorde a resolução do Exemplo* 1.2 *do Capítulo II.*

Resolução: Tendo em conta a decomposição de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

vem

$$A^t = PJ^tP^{-1},$$

onde

$$J^t = \begin{bmatrix} J_1^t & 0 & 0 \\ 0 & J_2^t & 0 \\ 0 & 0 & J_3^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t(t-1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^t \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^t &= PJ^tP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2^t & 2^{t+1}-t-2 & 2^{t+1}-t-2 & 2^{t+1}-t-2 & 2^t-t-1 \\ 0 & 2^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t(t+1)}{2}-2^t+1 & \frac{t(t+1)}{2}+1 & \frac{t(t+1)}{2} & \frac{t(t-1)}{2} \\ 0 & \frac{t(1-t)}{2} & \frac{t(1-t)}{2} & \frac{t(1-t)}{2}+1 & \frac{t(3-t)}{2} \\ 0 & -t & -t & -t & -t+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fica agora concluída a justificação para a expressão de A^t necessária para a resolução do sistema de equações de diferenças do Exemplo 1.2 do Capítulo II. $\square$

4 O Algoritmo de Putzer

O Algoritmo de Putzer utiliza-se para o cálculo de exponenciais de matrizes no contexto de sistemas de equações diferenciais. A sua versão discreta permite apresentar outro método de cálculo de potências de matrizes quadradas reais.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Procura-se representar A^t na forma

$$A^t = \sum_{i=1}^{s} u_t^{(i)} M_{i-1},$$

onde os $u^{(i)}$ são sucessões escalares a determinar e as matrizes $M_0, \ldots, M_{s-1}$ se definem por recorrência através de

$$M_i = (A - \lambda_i I_k)\, M_{i-1} \text{ e } M_0 = I_k.$$

A iteração recursiva desta fórmula conduz a

$$\begin{aligned} M_t &= (A - \lambda_t I_k)\, M_{t-1} = \ldots = (A - \lambda_t I_k)\,(A - \lambda_{t-1} I_k) \ldots (A - \lambda_1 I_k) \\ &= \prod_{i=1}^{t} (A - \lambda_i I_k) \end{aligned}$$

(note-se que, neste caso, há comutatividade na multiplicação dos fatores). Pelo teorema de Cayley-Hamilton, sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os valores próprios de A, tem-se

$$M_k = \prod_{i=1}^{k} (A - \lambda_i I_k) = 0,$$

o que implica

$$M_n = 0, \forall_{n\geq k}.$$

Logo, pode-se reescrever a potência de A na forma

$$A^t = \sum_{i=1}^{k} u_t^{(i)} M_{i-1}. \qquad (4.1)$$

Determinem-se as expressões de $u_t^{(i)}$.

Para $t = 0$, vem

$$I_k = A^0 = u_0^{(1)} M_0 + u_0^{(2)} M_1 + \ldots + u_0^{(k-1)} M_{k-2} + u_0^{(k)} M_{k-1}.$$

Uma vez que $M_0 = I_k$, esta equação é satisfeita se

$$u_0^{(1)} = 1 \text{ e } u_0^{(i)} = 0,\ i = 2, \ldots, k.$$

Para $t \in \mathbb{N}$, temos:

$$A^{t+1} = \sum_{i=1}^{k} u_{t+1}^{(i)} M_{i-1}.$$

e também

$$A^{t+1} = AA^t = A\sum_{i=1}^{k} u_t^{(i)} M_{i-1} = \sum_{i=1}^{k} u_t^{(i)} AM_{i-1} = \sum_{i=1}^{k} u_t^{(i)} \left[M_i + \lambda_i M_{i-1}\right] \ ,$$

onde a última passagem se justifica por meio de

$$M_i = \left(A - \lambda_i I_k\right) M_{i-1}.$$

Podem agora comparar-se e igualar as expressões para os coeficientes de M_i em cada um dos desenvolvimentos de M_i. Assim,

$$u_{t+1}^{(1)} = \lambda_1 u_t^{(1)}, \text{ com } u_0^{(1)} = 1, \tag{4.2}$$

e, para $i = 2, \ldots, k$,

$$u_{t+1}^{(i)} = u_t^{(i-1)} + \lambda_i u_t^{(i)}, \text{ com } u_0^{(i)} = 0. \tag{4.3}$$

A resolução de (4.2) é imediata, por recursão, tendo-se

$$u_t^{(1)} = \left(\lambda_1\right)^t, \ t = 0, 1, \ldots \tag{4.4}$$

A respeito de (4.3), deixa-se ao leitor a tarefa de provar que, para cada $i = 2, \ldots, k$, se obtém

$$u_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{t-1} \left(\lambda_i\right)^{t-j-1} u_j^{(i-1)}. \tag{4.5}$$

Acrescenta-se agora um exemplo de aplicação desta técnica.

Exemplo 4.1 *Calcule a potência de expoente t de A, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Note-se que os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \text{ e } \lambda_4 = 3.$$

Deste modo, devem-se determinar $u_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$ e M_i, $i = 0, \ldots, 3$ tais que

$$A^t = \sum_{i=1}^{4} u_t^{(i)} M_{i-1}. \tag{4.6}$$

De acordo com as deduções antes feitas, tem-se

$$\begin{aligned}
M_0 &= I_4, \\
M_1 &= (A - \lambda_1 I_4)\, M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\
M_2 &= (A - \lambda_2 I_4)\, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\
M_3 &= (A - \lambda_3 I_4)\, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
u_t^{(1)} &= (\lambda_1)^t = 1,\ t = 0, 1, \ldots \\
u_t^{(2)} &= \sum_{j=0}^{t-1} (\lambda_2)^{t-j-1} u_j^{(1)} = \sum_{j=0}^{t-1} 2^{t-j-1} = 2^{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} 2^{-j} = 2^t - 1, \\
u_t^{(3)} &= \sum_{j=0}^{t-1} (\lambda_3)^{t-j-1} u_j^{(2)} = \sum_{j=0}^{t-1} 2^{t-j-1} \left(2^j - 1\right) = t2^{t-1} - 2^t + 1, \\
u_t^{(4)} &= \sum_{j=0}^{t-1} (\lambda_4)^{t-j-1} u_j^{(3)} = \sum_{j=0}^{t-1} 3^{t-j-1} \left(j2^{j-1} - 2^j + 1\right) = \frac{1}{2}\left(3^t - 1\right) - t2^{t-1}.
\end{aligned}$$

Por fim, de (4.6) resulta

$$\begin{aligned} A^t &= u_t^{(1)} M_0 + u_t^{(2)} M_1 + u_t^{(3)} M_2 + u_t^{(4)} M_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3\left(2^t - 1\right) & \frac{3\left[(t-2)2^t+2\right]}{2} & -\frac{3}{2}\left(3^t + 1\right) + 3 \times 2^t \\ 0 & 2^t & t2^{t-1} & -3^t + 2^t \\ 0 & 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

(Página deixada propositadamente em branco)

Anexo E

Soluções dos exercícios

SOLUÇÕES [1] — EXERCÍCIOS 1.1 (PG. 11)

1.

(a) $\Delta x_t = h;$ $\quad \Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = h$

$\Delta x_t = 1;$ $\quad \Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$

(b) $\Delta x_t = h + h^2 + 2ht;$ $\quad \Delta x_0 = h + h^2; \Delta x_1 = 3h + h^2; \Delta x_2 = 5h + h^2$

$\Delta x_t = 2 + 2t;$ $\quad \Delta x_0 = 2; \Delta x_1 = 4; \Delta x_2 = 6$

(c) $\Delta x_t = 3h^2 + 6ht;$ $\quad \Delta x_0 = 3h^2; \Delta x_1 = 6h + 3h^2; \Delta x_2 = 12h + 3h^2$

$\Delta x_t = 3 + 6t;$ $\quad \Delta x_0 = 3; \Delta x_1 = 9; \Delta x_2 = 15$

(d) $\Delta x_t = \left(5^h - 1\right) 5^t;$ $\quad \Delta x_0 = 5^h - 1; \Delta x_1 = 5\left(5^h - 1\right); \Delta x_2 = 25\left(5^h - 1\right)$

$\Delta x_t = 4 \times 5^t;$ $\quad \Delta x_0 = 4; \Delta x_1 = 20; \Delta x_2 = 100$

3.

(a) $\Delta^2 x_t = 0$ (h genérico); $\quad \Delta^2 x_t = 0$ $(h = 1)$

(b) $\Delta^2 x_t = 2h^2$ (h genérico); $\quad \Delta^2 x_t = 2$ $(h = 1)$

(c) $\Delta^2 x_t = 6h^2$ (h genérico); $\quad \Delta^2 x_t = 6$ $(h = 1)$

(d) $\Delta^2 x_t = \left(5^h - 1\right)^2 5^t$ (h genérico); $\quad \Delta^2 x_t = 16 \times 5^t$ $(h = 1)$

---

[1] Se nada é dito em contrário, em todas as soluções supõe-se que $t \in \mathbb{N}_0$ e que os $C_i, i = 1, ..., n$ designam constantes reais arbitrárias.

Soluções Exercícios 2.3. (pg. 24)

1. Solução geral: $y_t = 2 + (y_0 - 2)\left(\frac{3}{5}\right)^t$. Solução particular: $y_t = 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^t$.

2.

(a) Solução geral: $y_t = y_0 + 3t$

Solução particular: $y_t = y_0 + 3t$

$y_0 = 1, y_1 = 4, y_2 = 7, y_3 = 10, y_4 = 13$

(b) Solução geral: $y_t = y_0$

Solução particular: $y_t = 1$

$y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$

(c) Solução geral: $y_t = y_0 - t$

Solução particular: $y_t = 1 - t$

$y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = -1, y_3 = -2, y_4 = -3$

(d) Solução geral: $y_t = 1 + (y_0 - 1)(-1)^t$

Solução particular: $y_t = 1$

$y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$

(e) Solução geral: $y_t = 3 + (y_0 - 3)\, 2^t$

Solução particular: $y_t = 3 + (-2)\, 2^t$

$y_0 = 1, y_1 = -1, y_2 = -5, y_3 = -15, y_4 = -29$

(f) Solução geral: $y_t = \frac{1}{4} + \left(y_0 - \frac{1}{4}\right)(-3)^t$

Solução particular: $y_t = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-3)^t$

$y_0 = 1, y_1 = -2, y_2 = 7, y_3 = -20, y_4 = 61$

(g) Solução geral: $y_t = -\frac{1}{4} + \left(y_0 + \frac{1}{4}\right)(-3)^t$

Solução particular: $y_t = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}(-3)^t$

$y_0 = 1, y_1 = -4, y_2 = 11, y_3 = -20, y_4 = 101$

3.

(a) Solução geral: $y_t = \frac{3}{2} + \left(y_0 - \frac{3}{2}\right)(-1)^t$

Solução particular: $y_t = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}(-1)^t$

(b) Solução geral: $y_t = -\frac{1}{2} + \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)(-1)^t$

Solução particular: $y_t = -\frac{1}{2}$

(c) Solução geral: $y_t = \frac{1}{2} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) 5^t$

Solução particular: $y_t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 5^t$

(d) Solução geral: $y_t = y_0\left(\frac{1}{3}\right)^t$

Solução particular: $y_t = -\left(\frac{1}{3}\right)^t$

(e) Solução geral: $y_t = y_0\left(\frac{1}{3}\right)^t$

Solução particular: $y_t = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

4. (b) Equação obtida: $z_{t+1} - z_t = \frac{1}{2}$; (c) Solução geral: $z_t = y_0 + \frac{1}{2}t$;

(d) Solução geral: $y_t = \frac{1}{y_0 + \frac{1}{2}t} - 1$.

Soluções Exercícios 3.4. (pg. 40)

1.

(a) $y_t = (C_1 + C_2 t)\left(\frac{1}{4}\right)^t$

(b) $y_t = C_1 + C_2 t$

(c) $y_t = 2^t\left[C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right]$

(d) $y_t = 13^t\left[C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)\right]$, com $\theta = arctg\left(-\frac{5}{12}\right)$

(e) $y_t = C_1(-2)^t + C_2 3^t$

(f) $y_t = C_1 2^t + C_2 4^t$

(g) $y_t = C_1\left(3 - \sqrt{3}\right)^t + C_2\left(3 + \sqrt{3}\right)^t$

(h) $y_t = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t\left[C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)\right]$, com $\theta = arctg(2)$

(i) $y_t = (C_1 + C_2 t)\, 4^t$

(j) $y_t = 4^t\left[C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]$

(k) $y_t = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

(l) $y_t = \left(\sqrt{2}\right)^t\left[C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]$

(m) $y_t = C_1 + C_2(-1)^t$

(n) $y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2 2^t$

(o) $y_t = (C_1 + C_2 t)(-1)^t$

(p) $y_t = (C_1 + C_2 t)\left(\frac{1}{3}\right)^t$

(q) $y_t = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^t\left[C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right]$

(r) $y_t = 5^t\left[C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t)\right]$, com $\theta = arctg\left(-\frac{4}{3}\right)$

2. Soluções particulares tais que $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$.

(a) $y_t = 4t\left(\frac{1}{4}\right)^t$

(b) $y_t = t$

(c) $y_t = \frac{\sqrt{3}}{3}.2^t \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

(d) $y_t = \frac{1}{5}.13^t \sin(\theta t)$, com $\theta = arctg\left(-\frac{5}{12}\right)$

(e) $y_t = -\frac{1}{5}(-2)^t + \frac{1}{5}.3^t$

(f) $y_t = -\frac{1}{2}.2^t + \frac{1}{2}.4^t$

(g) $y_t = -\frac{\sqrt{3}}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right)^t + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)^t$

(h) $y_t = \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t \sin(\theta t)$, com $\theta = arctg(2)$

(i) $y_t = \frac{1}{4}t4^t$

(j) $y_t = \frac{\sqrt{2}}{4}.4^t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

(k) $y_t = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

(l) $y_t = \left(\sqrt{2}\right)^t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

(m) $y_t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^t$

(n) $y_t = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{3}.2^t$

(o) $y_t = -t(-1)^t$

(p) $y_t = 3t\left(\frac{1}{3}\right)^t$

(q) $y_t = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^t \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

(r) $y_t = \frac{1}{4}.5^t \sin(\theta t)$, com $\theta = arctg\left(-\frac{4}{3}\right)$

3.

(a) $y_t = C_1 2^t + 2^t \left[C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right]$

(b) $y_t = C_1 + C_2 2^t + C_3 3^t$

(c) $y_t = C_1 + C_2 t + C_3 5^t$

(d) $y_t = C_1 + C_2 t + C_3 t^2$

(e) $y_t = C_1 + C_2 t + C_3 2^t$

(f) $y_t = (C_1 + C_2 t)\, 3^t + C_3 2^t$

(g) $y_t = \left(C_1 + C_2 t + C_3 t^2\right) 4^t$

(h) $y_t = (C_1 + C_2 t)\, 2^t + C_3$

(i) $y_t = (C_1 + C_2 t)\, 2^t + C_3 \left(-1\right)^t$

(j) $y_t = C_1 2^t + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

(k) $y_t = C_1 \left(-1\right)^t + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

(l) $y_t = \left(C_1 + C_2 t + C_3 t^2\right) \left(-1\right)^t$

(m) $y_t = C_1 + C_2 \left(-1\right)^t + C_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

(n) $y_t = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3$

SOLUÇÕES EXERCÍCIOS 3.7 (PG. 52)

1. (c) $y_t = (C_1 + C_2 t)\,3^t + 2t$; (d) $y_t = -\frac{2}{3}t3^t + 2t$.

2. (b) $g(t) = \left(8 + \frac{15}{4}t\right)2^t$; (c) $y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t + t2^t$;
(d) $y_t = -16\left(\frac{1}{2}\right)^t - 16\left(-\frac{1}{2}\right)^t + t2^t$.

3.

(a) $y_t = C_1(-2)^t + C_2 3^t + \frac{1}{10}t(-2)^t$

(b) $y_t = 4^t\left[C_1\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right] + \frac{2}{17-4\sqrt{2}}$

(c) $y_t = C_1\left(3-\sqrt{3}\right)^t + C_2\left(3+\sqrt{3}\right)^t + 5$

(d) $y_t = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t\left[C_1\cos(\theta t) + C_2\sin(\theta t)\right] + \left(-\frac{36}{17^2} + \frac{1}{17}t\right)2^t$, com $\theta = arctg\,(2)$

(e) $y_t = C_1(-2)^t + C_2 3^t + \frac{1}{14}$

(f) $y_t = C_1 2^t + C_2 4^t + \left(\frac{62}{27} + \frac{14}{9}t + \frac{1}{3}t^2\right)$

(g) $y_t = C_1\left(3-\sqrt{3}\right)^t + C_2\left(3+\sqrt{3}\right)^t + 17 + 3t$

(h) $y_t = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t\left[C_1\cos(\theta t) + C_2\sin(\theta t)\right] + \frac{5}{4}t\left(\frac{1}{5}\right)^t$, com $\theta = arctg\,(2)$

(i) $y_t = (C_1 + C_2 t)\,4^t + \left(-\frac{8}{161}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \left(\frac{15}{161}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

(j) $y_t = 4^t\left[C_1\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right] + \frac{161}{15}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{4\sqrt{2}}{193}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

(k) $y_t = C_1\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2 + \sqrt{2}$

(l) $y_t = \left(\sqrt{2}\right)^t\left[C_1\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right] + 2$

(m) $y_t = C_1 + C_2(-1)^t + \frac{3}{2}t$(n) $y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{5}{4}$

(o) $y_t = C_1(-2)^t + C_2 3^t + \frac{1}{10}t(-2)^t + \frac{1}{14}$

(p) $y_t = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t\left[C_1\cos(\theta t) + C_2\sin(\theta t)\right] + \left(-\frac{36}{17^2} + \frac{1}{17}t\right)2^t - 5t\left(\frac{1}{5}\right)^t$,
com $\theta = arctg\,(2)$

(q) $y_t = (C_1 + C_2 t)(-1)^t + \frac{3}{4}$(r) $y_t = (C_1 + C_2 t)(-1)^t + \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right)(-1)^t$

4.

(a) $y_t = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + 2^t$

(b) $y_t = C_1 2^t + 2^t \left[C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] - \frac{3}{5}$

(c) $y_t = C_1 + C_2 2^t + C_3 3^t + \frac{11}{39}t + \frac{1}{13}t^2 + \frac{1}{39}t^3$

(d) $y_t = C_1 + C_2 t + C_3 5^t + \frac{1}{7}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{2\sqrt{3}}{21}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

(e) $y_t = C_1 2^t + C_2 3^t + C_3 4^t - \frac{1}{2}$

5. (b) Termo dominante: $C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t$; comportamento assintótico: crescente ou decrescente (consoante o sinal de C_1), limitado e convergente para 0.
(c) Sim, para $\frac{5}{4}$.

6. (a) Quando $C_1 = C_2 = 0$. A solução geral diverge de maneira oscilatória e limitada.
(b) Solução particular: $p_t = \left(-2-\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 2 + \sqrt{2}$; comportamento: divergente, oscilatório, limitado.

7. (a) Solução particular: $p_t = -1 - t + 2^t$; comportamento assintótico: divergente para $+\infty$, creescente, ilimitado.
(b) Não, em virtude da presença do termo 2^t, solução particular da equação completa.

8. (a) É constante e igual a $-\frac{1}{2}$.
(b) Não, pois nos restantes casos as constantes arbitrárias serão nulas. O comportamento assintótico será o do termo dominante, $C_3 4^t$, isto é, crescente ou decrescente (consoante o sinal de C_3), ilimitado e divergente para $+\infty$ ou para $-\infty$ (consoante o sinal de C_3).

9.

(a) $y_t = C_1(-2)^t + C_2 2^t + C_3 t^2 - \frac{20}{9} - \frac{4}{3}t - t^2$

(b) $y_t = C_1 + 2^t\left[C_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right]$

SOLUÇÕES EXERCÍCIOS 3.1 (PG. 72)

1. O sistema escreve-se na forma $U_{t+1} = AU_t + b$, onde

$$U_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ w_t \end{bmatrix}, \text{ com } z_t = x_{t+1} \text{ e } w_t = y_{t+1},\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t3^t \end{bmatrix}.$$

2. Eq. característica: $m^2 + am + b = 0$.

3. Notação: A: matriz dada;

   (a) $\sigma(A) = \{-2, -1\}$; $r(A) = 2$
   (b) $\sigma(A) = \{-3, 2\}$; $r(A) = 3$
   (c) $\sigma(A) = \{2 - 3i, 2 + 3i\}$; $r(A) = 13$
   (d) $\sigma(A) = \{-1, 8\}$; $r(A) = 8$
   (e) $\sigma(A) = \{-2, -1\}$; $r(A) = 2$
   (f) $\sigma(A) = \{2, 3, 6\}$; $r(A) = 6$

4. (a) $X_t = \left(x^{(0)} + y^{(0)}\right)(-2)^t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(-2x^{(0)} - y^{(0)}\right)(-1)^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, onde $X_0 = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix}$.

   (b) $$X_t = \left(5x^{(0)} - 2y^{(0)} - 4z^{(0)}\right)(-1)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   $$+\left(-4x^{(0)} - 2y^{(0)} + 5z^{(0)}\right)(-1)^t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(2x^{(0)} + y^{(0)} + 2z^{(0)}\right) 8^t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$
   onde $X_0 = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix}$

5. A satisfaz $\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$.

6. $y_t = 5(-1)^t - 6(-2)^t$.

7. Para $t \in \mathbb{N}_0$,e designando por A a matriz em cada alínea, tem-se

(a) $A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}(-2)^t + \frac{4}{5}3^t & -\frac{2}{5}(-2)^t + \frac{2}{5}3^t \\ -\frac{2}{5}(-2)^t + \frac{2}{5}3^t & \frac{4}{5}(-2)^t + \frac{1}{5}3^t \end{bmatrix}$ (b) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}t(t-1) & t & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$ (d) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$

8. (a) $X_t = \begin{bmatrix} 2 \times 5^t \\ 0 \end{bmatrix}$; (b) $X_t = 3^t \begin{bmatrix} -1 + \frac{2}{3}t \\ 1 + \frac{2}{3}t \end{bmatrix}$.

9. (a) $X_t = \sum_{s=0}^{t-1} B_s$, onde $B_s = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}(-2)^s + \frac{2}{5}.3^s \\ 3^s + \frac{4}{5}(-2)^s - \frac{4}{5}.3^s \end{bmatrix}$, $t = 1, 2, ...$

$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $X_t = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2t + 3 + \frac{1}{2}t(t-1) \end{bmatrix}$, $t = 1, 2, ...$ $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

10. (a) assintoticamente estável; (b) não assintoticamente estável; (c) assintoticamente estável.

12. (a) Satisfazem. (b) Nem todas satisfazem. (c) Nem todas satisfazem.

15. (b) Subespaço estável: plano $z = 0$.

Bibliografia

[1] AZENHA, Acilina e M. A. Jerónimo. Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$. Lisboa: McGraw-Hill, 1995.

[2] BINMORE, K. and J. Davies. Calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[3] BREDA, Ana d'Azevedo e Joana Nunes da Costa. Cálculo com funções de várias variáveis. Lisboa: McGraw-Hill, 1996.

[4] CHIANG, Alpha C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. Auckland: McGraw-Hill, 1984.

[5] GOULET, J. Richardson's arms model and arms control. Proceedings of the SIAM Conference on Discrete Mathematics and Its Applications, MIT, June 1983.

[6] KELLEY, Walter G. e Allan C. Peterson. Difference Equations - An Introduction With Applications. San Diego: Academic Press, 2001.

[7] LARSON, Hostetler e Edwards. Cálculo. Vol. 1. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

[8] LARSON, Hostetler e Edwards. Cálculo. Vol. 2. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

[9] LIPSCHUTZ, Seymour. Theory and Problems of Linear Algebra. New York: McGraw-Hill, 1968.

[10] MURTEIRA, José e Paulo Saraiva. Equações Diferenciais Ordinárias, introdução teórica, exercícios e aplicações. Coimbra: Almedina, 2010.

[11] PIRES, Cesaltina. Cálculo para economistas. Lisboa: McGraw-Hill, 2001.

[12] SAMUELSON, Paul A.. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *Review of Economic Statistics*, **21**, 75-78, 1939.

[13] SARAIVA, M. A. Equações às Diferenças Finitas, aplicações à Economia. Coimbra: FEUC, 1997.

[14] SILVA, Jaime Carvalho. Princípios de Análise Matemática Aplicada. Lisboa: McGraw-Hill, 1994.

[15] VITÓRIA, José e Teresa Pedroso de Lima. Álgebra Linear. Lisboa: Universidade Aberta, 1998.

[16] ZILL, Dennis G. A First Course in Differential Equations with Modelling Applications. Belmont: Brooks/Cole Cengage Learning, 2009.

SÉRIE ENSINO
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS
2013

• U C •

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
COIMBRA UNIVERSITY PRESS