ELEMENTOS
DE
ANALYSE.

ELEMENTOS
DE
ANALYSE
POR
Mr. BEZOUT
TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

SEGUNDA EDIÇÃO

Correcta e accõmodada para o uso das Escolas de Mathematica da Universidade.

TOMO I.

COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXXIII.

Com licença da Real Mesa da Commissão Geral sobre o Exame e Censura dos Livros, e Privilegio Real.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo Eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abolir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quaes os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita aboliçaõ ficaraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta da Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para a ſobredita

Uni-

Universidade de Coimbra o mesmo Privilegio exclusivo para a impressaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Classicos das Sciencias Mathematicas; assim, e da maneira que na sobredita Doaçaõ Eu havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo a este fim, a mesma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della só he comprehensiva das impressoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de servir aos sobreditos Estudos Mathematicos, e pelos quaes se devaõ ensinar na mesma Universidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conselho de Estado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Universidade de Coimbra; á Real Mesa Censoria; Mesa do Desembargo do Paço; Regedor da Casa da Supplicaçaõ; Conselhos de Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultramarinos; Mesa da Consciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Casa do Porto; Senado da Camara, e bem assim a todos os Desembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Justiças, e mais pessoas destes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deste Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guardar sem duvida, ou embargo algum, qualquer que elle seja; naõ obstante a sobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpe-

tua

tua de doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco, que Tenho revogado ao ſobredito fim na parte, que ſó reſpeita ás ſobreditas impreſſoens; ficando para tudo o mais em ſeu vigor, e inteira validade. E eſte valerá como ſe paſſaſſe pela Chancellaria, poſto que por ella naõ ha de paſſar, e o ſeu effeito haja de durar hum, e muitos annos: naõ obſtantes as Ordenaçoens em contrario, as quaes Hey por derogadas para eſte effeito ſómente. Dado no Palacio de Noſſa Senhora da Ajuda em deſeſeis de Dezembro de mil ſetecentos ſetenta e tres.

REY ...

Marquez de Pombal.

Alvará, porque Voſſa Mageſtade pelos motivos nelle expreſſos He ſervido transferir para a Univerſidade de Coimbra o Privilegio excluſivo para as impreſſoens dos Livros Claſſicos dos Eſtudos Mathematicos;

cos; havendo cessado o fim, com que antes fora concedido, e doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

TABOA
DAS
MATERIAS QUE SE CONTÈM NESTES ELEMENTOS.

Das

SECÇAÕ II.

Das

ERRA-

ERRATAS.

Pag.	*Lin.*	*Errat.*	*Emend.*
5	12	da letra	de qualquer letra
14	3	b	c
ibid.	4	ab	ac
22	21	para dividir	para ſe dividir
26	3	$-c^4$	$-c^2$
27	13	$+2c$	$+2ac$
28	11	$8ab$	$8b-a$
34	1	diminuindo	diminuido
79	18	17	10
ibid.	19	6 de Numero Aureo, e 5	8 de Numero Aureo, e 11
81	2	caudas	cauda
ibid.	9	o ſinal $\surd$	o ſinal $+$
85	3	$\overset{\pm}{=} 5$	± 5
90	7	uſando	ſe uſando
93	3	tirar	tirarmos
95	7	$+$; ou $-$	$+$, ou com o ſinal $-$
96	5	porque	pela qual
110	14	elle	ella
119	17	pares	impares
ibid.	18	impares	pares
127	10	$(a+b)^{\frac{m}{n}} +$	$(a+b)^{\frac{m}{n}} =$
149	18	*ſe tornara;*	*ſe tornarão*
153	16	y^{m-1}	$y^{m}-1$
180	5	a ſua raiz	o ſeu valor
197	8	altura	altura b
200	3	quadrando DEAIH	quadrado
202	13	*an* ſerá a ſoma das quantidades	a ſoma das quantidades *an* ſerá

Pag.	Lin.	Errat.	Emend.
206	10	vençe	vença
208	7	poximamente	proximamente
ibid.	14	progressaõ	propagaçaõ
216	10	m	m^2
ibid.	11	n	n^2
220	12	*pependicular*	*perpendicular*
222	19	agudo, ou obtuso	obtuso, ou agudo
247	*ult.*	de A e B	A e B
248	22	que será	será
251	9	determidada	determinada
257	17	ponto M	ponto M da ellipse
263	20	NN	NN′
270	1	estes	estas
ibid.	10	AT	At
271	12	obsciffas	absciffas
283	3	MO	as partes MO
285	12	encontraõ	encontraráõ
ibid.	15	MAm	AMm
291	6	linha	linha indefinida
300	17	neceſſario	neceſſaria
303	6	b^2g^2c	$b^2g^2c^2$

ELE-

ELEMENTOS
DE
ANALYSE.

INTRODUCÇAÕ.

OS raciocinios que se fazem nas indagações Mathematicas, naõ obstante a variedade dos objectos destas sciencias, tem partes communas, que se podem reduzir a regras gerais, resultando dellas a vantagem de ser o nosso espirito alliviado de grande parte dos esforços, que seria necessario applicar em cada huma das questões. O methodo que ensina a achar as ditas regras, chama-se *Analyse*.

Divide-se esta em duas partes: em *Analyse Finita*, ou *Algebra*; e em *Analyse Infinitesimal*, a qual comprehende o *Calculo Differencial*, e *Integral*. A primeira parte será a materia deste Tomo.

PRIMEIRA PARTE,

OU

ELEMENTOS DE ALGEBRA.

SECÇAÕ I.

Dos principios do Calculo Literal.

1 A ALGEBRA he o instrumento da Analyse, ou a Sciencia, que tem por objecto ensinar os meios de reduzir a regras geraes a resoluçaõ de todas as questões, que se pódem propôr ácerca das quantidades.

Como estas regras para serem geraes, naõ devem depender dos valores particulares das quantidades que se consideraõ, mas da natureza de cada huma das questões, de maneira que sejaõ constantemente as mesmas para todos os problemas da mesma especie; segue-se, que a Algebra naõ deve representar as quantidades pelos mesmos caracteres, de que usa a Arithmetica.

Porque 1.º os algarismos tem hum valor determinado por convençaõ. Ainda que 3, por exemplo, tanto póde significar 3 toezas, como 3 horas, ou 3 libras &c.; comtudo naõ póde significar cem, ou mil &c. 2.º Os resultados da Arithmetica naõ mostraõ o caminho, porque chegamos a descubri-los. Huma, ou muitas operações Arithmeticas pó-

pódem dar o resultado 12, por exemplo; mas este numero naõ declara se procedeo de multiplicar 3 por 4, ou 2 por 6, ou de somar 5 com 7, ou 2 com 10, ou em geral de alguma outra combinaçaõ de operações. Além de que a Arithmetica dá regras para achar certos resultados, mas destes naõ se pódem deduzir regras. A Algebra para satisfazer a estes objectos representa as quantidades por sinais genericos, e universais, como saõ as letras do Alfabeto, as quais, naõ tendo mais relaçaõ com hum numero do que com outro, admittem todos os valores; e estando presentes sempre á vista no decurso de hum calculo, conservaõ, por assim dizer, o vestigio das operações, que com ellas se executáraõ, ou ao menos mostraõ nos resultados das mesmas operações o caminho mais breve, que se deve seguir para chegar ao mesmo fim pelos meios mais simples.

Tambem se exprimem em linguagem Algebrica as relações, e condições das quantidades, as differentes operações, que destinamos fazer sobre ellas, &c.: em huma palavra na Algebra tudo he representaçaõ. Pouco a pouco ensinaremos os differentes modos de representar tudo, quanto diz respeito ás quantidades, e mostraremos as vantagens, que disso resultaõ.

He pois a Algebra a Arte de representar por symbolos gerais todas as idêas, que se pódem formar relativamente ás quantidades. Assim tudo o que he designado pelas letras do Alfabeto tem o nome de *Quantidade*, ou *Expressaõ Algebrica*.

Das Operações Fundamentais do Calculo Literal.

2 SObre as quantidades algebricas ſe fazem, ou para melhor dizer ſe indicaõ as quatro operações de ſomar, diminuir, multiplicar e dividir, que ſe executaõ na Arithmetica.

Da Addiçaõ, e Subtracçaõ.

3 PAra ſomar e diminuir quantidades ſemelhantes naõ ſe preciſa de regra; he evidente, que para ſomar huma quantidade repreſentada por a com igual quantidade a, devemos eſcrever $2a$; e que para ſomar $2a$ com $3a$, eſcreveremos $5a$. Tambem he manifeſto, que tirando $2a$ de $5a$ o reſto he $3a$. A eſtas duas operações taõ faceis como frequentes ſe dá o nome commum de *Reducçaõ*.

4 Nas quantidades diſſemelhantes, que ſempre ſe repreſentaõ por letras differentes, naõ fazemos mais do que indicar eſtas operações. Para iſſo no ſomar uſamos do ſinal $+$, que ſe pronuncia *mais*, e no diminuir do ſinal $-$, que ſe pronuncia *menos*.

Aſſim, havendo de ſomar huma quantidade repreſentada por a com outra repreſentada por b, eſcreveremos $a + b$; de maneira que naõ ſaberemos qual he o verdadeiro reſultado, ſenaõ depois de conhecermos o valor particular das quantidades, que ſe repreſentaõ por a e b; ſe a vale 5, e b vale 12, $a + b$ valerá 17.

Do

Do meſmo modo para ſomar - - $5a + 3b$
com - - - - - - - - - - - - $9a + 2c$
e - - - - - - - - - - - - - $9b + 3d$

eſcreveremos - $5a + 3b + 9a + 2c + 9b + 3d$

que ſe reduz (3) a - - $14a + 12b + 2c + 3d$.

Em quanto ao diminuir, para tirarmos b de a eſcreveremos $a - b$.

Se de - - - - - - - - - $9a + 6b$
quizermos tirar - - - - - - $5a + 4b$

eſcreveremos. - - - - $9a + 6b - 5a - 4b$

que ſe reduz (3) a - - - $4a + 2b$.

5 Hum numero poſto antes da letra chama-ſe com razaõ *Coefficiente* da meſma letra: em $3b$, por exemplo, 3 he coefficiente de b. Quando o coefficiente he 1, naõ ſe eſcreve; aſſim ſe de $3a$ tirarmos $2a$ o reſto he $1a$, mas eſcreve-ſe taõ ſómente a. Pelo que ſe encontrarmos huma letra ſem numero que a preceda, naõ imaginemos que o ſeu coefficiente ſeja cifra; neſſe caſo o coefficiente he a unidade.

6 He indifferente a ordem em que ſe diſpõem as quantidades, que ſe ſomaõ ou diminuem. Se quizermos ſomar a com b, poderemos eſcrever $a + b$, ou $b + a$; e para tirarmos b de a, eſcreveremos $a - b$, ou $- b + a$. Seguiremos porem, quanto podermos, a ordem alfabetica, que he a mais uſada, porque nella ſe pronunciaõ as letras com mais facilidade do que em outra qualquer, e ſe percebem melhor as quantidades ſemelhantes.

7 Notemos tambem, que toda a quantidade, que naõ tem final, se reputa ter $+$: a he o mesmo que $+a$. He costume supprimir o final $+$ nas quantidades que o devem ter, quando estas se escrevem no primeiro lugar; naõ assentamos $+a+b$, mas simplesmente $a+b$.

8 Quando depois de huma operaçaõ se procede á reducçaõ, póde acontecer que a quantidade precedida do final — tenha coefficiente maior, que o da quantidade semelhante precedida do final $+$; porém em todos os casos a operaçaõ se executa por esta regra geral. *Para somar as quantidades algebricas, escrevaõ-se consecutivamente todas as suas partes com os finais respectivos, reduzaõ-se todas as quantidades semelhantes a huma unica, ajuntando de huma parte todas as que tiverem $+$, e da outra todas as que tiverem —, tire-se finalmente o menor resultado do maior, e dê-se ao resto o final do maior.*

Por exemplo, se huma operaçaõ desse $14a+12b+2c+3d+a+b+4d-5c$; reduziriamos esta quantidade a $15a+13b-3c+7d$, na qual em lugar de $2c-5c$, que tinhamos na primeira, se escreve $-3c$, porque havendo de tirar $5c$ de huma quantidade, em que sómente se offerece $2c$, resta ainda $3c$, que se deve tirar da totalidade das outras quantidades.

Havendo de somar $a+b$ e $a-b$, teremos $a+b+a-b$, isto he $2a$, porque $b-b$ he nada. Logo se ajuntarmos a soma $a+b$ de duas quantidades quaisquer a e b com a sua differença $a-b$, acharemos o dobro da maior das mesmas quantidades.

Que-

Queremos ſomar as quatro quantidades ſeguintes

$$\begin{array}{r} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e \\ \hline \end{array}$$

Soma $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a$
$- 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Fazendo a reducçaõ em ordem a a, temos $15a$; em ordem a b, temos $+ 7b$ de huma parte, e $- 9b$ da outra, conſeguintemente $- 2b$ de reſto; em ordem a c, temos $- 9c$ de huma parte, $6c$ da outra, e conſeguintemente $- 3c$ de reſto; reduzindo as outras quantidades do meſmo modo, acharemos $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9 Nas expreſsões algebricas as quantidades ſeparadas pelos ſinaes $+$ e $-$, chamaõ-ſe *Termos* das meſmas expreſsões.

10 Huma quantidade chama-ſe *Monomio*, *Binomio*, *Trinomio* &c. conforme ſe compõe de hum, ou dous, ou tres &c. termos; e em geral ſe chama *Polynomio*, quando conſta de hum numero indeterminado de termos.

11 Em quanto á ſubtracçaõ das quantidades algebricas, a regra geral he eſta. *Mudem-ſe os ſinais dos termos da quantidade que ſe deve tirar, iſto he, mude-ſe + em —, e — em +; ſôme-ſe a quantidade aſſim mudada com a outra de que ſe deve fazer a ſubtracçaõ, e reduza-ſe.*

Ex-

Exemplo.

De - - - - - $6a - 3b + 4c$
queremos tirar - $5a - 5b + 6c$

escreveremos - $6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$.

e reduzindo, teremos o resto $a + 2b - 2c$.

Escolhendo hum exemplo mais simples para dar a razaõ da regra, supponhamos que de a queremos tirar b, he evidente que devemos escrever $a - b$. Mas se de a quizermos tirar $b - c$, isto he, se quizermos tirar naõ b por inteiro, mas sómente b diminuido de c, devemos por compensaçaõ ajuntar o que se tirou de mais no primeiro caso, e escrever $a - b + c$, isto he, mudar os sinais de todos os termos na quantidade que se ha de subtrahir.

Nos numeros he desnecessario este cuidado; por quanto se de 12 houvessemos de tirar $8 - 3$, começariamos por tirar 3 de 8, e o resto 5 tirado de 12 daria o resto buscado 7. Mas poderiamos tambem tirar logo 8 de 12, e ao resto 4 ajuntar 3, o que da mesma sórte daria 7. Este ultimo partido he o que se toma na Algebra por necessidade, pois que ella naõ admitte a reducçaõ preliminar, que se faz nos numeros.

Quando se pertende sómente indicar a subtracçaõ, encerra-se cada huma das duas quantidades entre parentheses, e dá-se o sinal $-$ áquella que se deve tirar. Assim, para indicar que de $a + b$ se deve tirar $a - b$, escreveremos $(a + b) - (a - b)$: se effeituarmos a operaçaõ, acharemos o resto $2b$. Logo a differença entre a soma, e a differença de

du-

duas quantidades dá o dobro da menor dellas.

12 As quantidades precedidas do final + chamaõ-se *Positivas*, e as que tem antes de si o final — chamaõ-se *Negativas*.

Da Multiplicaçaõ.

13 A Multiplicaçaõ Algebrica requer algumas consideraçóes particulares, que naõ tem lugar na Arithmetica; porque além das quantidades há finais, a que se deve attender. Porém se naõ considerarmos mais que os valores numericos das quantidades representadas pelas letras, deve-se formar a mesma idêa de ambas as multiplicaçóes (Arith. 40). Assim, multiplicar *a* por *b* he tomar a quantidade representada por *a* tantas vezes, quantas saõ as unidades da quantidade representada por *b*.

14 Para indicar a multiplicaçaõ usamos do final ×, ou de hum ponto posto entre as duas quantidades que se devem multiplicar, e tambem de nenhum final, pelo menos nas quantidades monomias; de maneira que $a \times b$, $a \cdot b$, ab saõ tres expressóes, as quais querem dizer *a* multiplicado por *b*, ou que *a* se deve multiplicar por *b*. O ultimo modo he o mais usado.

15 Querendo multiplicar *ab* por *c*, escreveremos *abc*, e para multiplicar *ab* por *cd* escreveremos *abcd*. He indifferente o lugar em que as letras se pöem, porque (Arith. 44) o producto he sempre o mesmo.

16 Quando encontrarmos pois huma quantidade como v. g. *ab*, *abc*, *abcd*, na qual as letras se achem escritas consecutivamente sem final algum

inter-

intermediario, concluiremos que ella reprefenta o producto da multiplicaçaõ fucceffiva de cada huma das letras, de que fe compóe.

17 Logo (Arith. 42) *a* e *b* faõ factores de *ab*; *a*, *b*, *c* faõ factores de *abc*, e affim nos outros cafos.

18 Segue-fe mais, que *no producto da multiplicaçaõ de muitas quantidades monomias devem entrar todas as letras, de que fe compõe tanto o multiplicando como o multiplicador.*

Isto fuppofto, fe as quantidades, que houverem de multiplicar-fe, qualquer que feja o numero dellas, fe compuzerem da mefma letra, efcreveremos efta no producto tantas vezes quantas fe achar nos factores. Affim *a* multiplicado por *a* dá *aa*; *aa* multiplicado por *aaa* dá *aaaaa*; *aa* multiplicado por *aaa*, e além diffo por *a*, dá *aaaaaa*.

19 Em tais cafos fe affentou, que naõ fe efcreveffe a dita letra mais que huma vez, mas que fe marcaffe com hum numero, a que fe deo o nome de *Expoente*, o qual fe puzeffe á direita da letra, algum tanto por cima, e fignificaffe quantas vezes ella fe devia efcrever; isto he, que em lugar de *aa* fe efcreveffe a^2, em lugar de *aaa* fe efcreveffe a^3 &c.

Confervemos pois na lembrança, que *o expoente de huma letra denota quantas vezes ella he factor do producto*. Em $a^3 b^2 c$ há tres factores de valor differente, a faber *a*, *b*, *c*; porém deftas letras a primeira he factor tres vezes, a fegunda duas, e a terceira huma, porque $a^3 b^2 c$ vale o mefmo que *aaabbc*.

Logo (Arith. 150) o expoente denota tambem a potencia, a que huma quantidade eftá eleva-

da

da. Assim a^2 he a segunda potencia, ou o quadrado de a; a^5 a quinta potencia de a. Deste modo todas as potencias de a se representaõ cõmodamente por a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c. Logo em lugar de a se póde escrever a^1. Em geral, quando o expoente he 1 omitte-se, e reciprocamente.

Naõ devemos pois confundir o expoente com o coefficiente. O expoente indica a multiplicaçaõ mais ou menos repetida de huma quantidade por si mesma; o coefficiente porém denota a addiçaõ repetida de huma mesma quantidade. Por exemplo, $2a$ vale o mesmo que $a + a$, e a^2 significa $a \times a$, de maneira que se a vale 5, $2a$ vale 10, mas a^2 vale 25.

Os termos, que saõ formados das mesmas letras affectas respectivamente dos mesmos expoentes, chamaõ-se semelhantes.

20 Donde se segue, que *para multiplicar duas quantidades monomias, que tenhaõ letras commuas, somaremos os expoentes das letras semelhantes do multiplicando e multiplicador.*

Para multiplicar a^5 por a^3 escreveremos a^8, isto he a letra a, dandolhe o expoente 8 soma dos dous expoentes 5 e 3. Do mesmo modo para multiplicar $a^3 b^2 c$ por $a^4 b^3 cd$, escreveremos $a^7 b^5 c^2 d$. Tal he a regra das letras na multiplicaçaõ das quantidades monomias.

21 Em quanto aos coefficientes que pódem ter os factores monomios, por elles começaremos a multiplicaçaõ como na Arithmetica, e o producto servirá de coefficiente do producto algebrico. Assim, para multiplicar $5a$ por $3b$, multiplicaremos primeiramente 5 por 3, depois a por b, e acharemos o producto $15ab$. Do mesmo modo havendo

do de multiplicar $12a^3 b^2$ por $9a^4 b^3$, teremos $108a^7 b^5$.

22 Paſſando agora á multiplicaçaõ das quantidades complexas ou dos polynomios, devemos como nos numeros compoſtos multiplicar ſucceſſivamente cada hum dos termos do multiplicando por cada hum dos termos do multiplicador, obſervando as regras, que havemos dado para a multiplicaçaõ dos monomios, ſomar depois os productos parciais, e reduzir. He indifferente principiar da direita para a eſquerda, ou da eſquerda para a direita; mas ſeguiremos eſte ultimo modo, que he o mais uſado.

Exemplo I.

Havendo de multiplicar - $a + b$
por - - - - - - - - - $c + d$

Producto - - $ac + bc + ad + bd$.

1.° Multiplico a por c, o producto he ac (15); 2.° multiplico b por c, o producto he bc; ſomo os dous productos, e tenho $ac + bc$ por producto de $a + b$ por c.

Multiplicando do meſmo modo a e b por d, acho o producto $ad + bd$, o qual ſomado com o primeiro dá $ac + bc + ad + bd$.

Com effeito, multiplicar $a + b$ por $c + d$ he tomar naõ ſómente a, mas tambem b tantas vezes, quantas ſaõ as unidades da totalidade $c + d$, iſto he, tantas vezes quantas ſaõ as unidades de c, e mais tantas quantas ſaõ as unidades de d.

Ex-

Exemplo II.

Querendo multiplicar - - -	$a - b$
por - - - - - - -	$c - d$
Producto	$ac - bc - ad + bd.$

Multiplico primeiramente a por c que dá ac, e depois b por c que dá bc; mas tiro o ſegundo producto do primeiro, porque multiplicando a por inteiro na primeira operaçaõ, multiplica-ſe de mais a quantidade b, que ſe devia tirar de a: logo devemos tirar do producto a quantidade b multiplicada por c, iſto he bc.

Do meſmo modo $a - b$ multiplicado por d, dá $ad - bd$; mas como o ſinal do multiplicador actual d he $-$, tiraremos o ſegundo producto do primeiro, e (11) acharemos $ac - bc - ad + bd$.

Com effeito, valendo o multiplicador $c - d$ menos que c a quantidade d, o multiplicando ſómente ſe deve tomar tantas vezes, quantas ſaõ as unidades de c diminuido de d. E como havendo tomado primeiramente $a - b$ tantas vezes, quantas ſaõ as unidades de c, o producto $ac - bc$ vale mais do que deve ſer, quanto he o valor de $a - b$ tomado tantas vezes quantas ſaõ as unidades de d, ſegue-ſe que devemos tirar o producto de $a - b$ por d.

Se em lugar das letras a, b, c, d tomarmos 6, 4, 7, 3 ou outros quaiſquer numeros, poderemos com elles formar a meſma demonſtraçaõ.

23 Se attendermos aos ſinaes dos termos de que ſe compõe o producto total $ac - bc - ad + bd$, e os compararmos com os ſinais do multiplican-

cando e do multiplicador, acharemos 1.º que o termo *a*, em que se reputa estar o sinal +, sendo multiplicado por *b* da mesma sórte affecto de + deo o producto *ab*, tambem notado com o sinal +.

2.º Que o termo *b* notado com o sinal — sendo multiplicado por *c*, que se reputa ter o sinal +, deo o producto *bc* com o sinal —.

3.º Que o termo *a* affecto de + multiplicado por *d*, que tem o sinal —, deo *ad* com o sinal —.

4.º Finalmente que o termo *b*, o qual tem o sinal —, sendo multiplicado por *d*, que da mesma sórte tem —, deo *bd* notado com +.

Isto posto, daqui por diante conheceremos facilmente nas multiplicações parciais, se os productos particulares devem ser positivos ou negativos; para o que observaremos as duas regras seguintes deduzidas das reflexões precedentes.

24 *Se o multiplicando e o multiplicador tiverem ambos o mesmo sinal, o producto será affecto do sinal +. Se pelo contrario tiverem sinais differentes, o producto terá sempre o sinal —.* Por meio destas regras, e das que havemos dado (15, 20, 21 e 22) estamos em termos de fazer qualquer multiplicação algebrica. Mas para se proceder com methodo, observaremos primeiramente a regra dos sinais, depois a dos coefficientes, e por fim a das letras e dos expoentes.

Ex-

Exemplo III.

Se quizermos multiplicar $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
por - - - - - - $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\ \hline \end{array}$$

Pr. $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Multiplicaremos ſucceſſivamente os tres termos do multiplicando pelo primeiro a^3 do multiplicador. Tendo os dous termos $5a^4$ e a^3 o meſmo ſinal, o producto deve ter $+$; porém naõ o eſcreveremos por pertencer ao primeiro termo do producto (7). Depois diſſo multiplicaremos o coefficiente 5 de a por 1 coefficiente de a^3 (21), o producto he 5. Por fim multiplicando a^4 por a^3 (20) teremos a^7, e conſeguintemente $5a^7$ por producto.

Paſſando a multiplicar o termo $-2a^3b$ por a^3, vê-ſe que ſendo differentes os ſinais, o producto ſerá negativo. Multiplicando além diſſo os coefficientes e as letras, teremos o producto $-2a^6b$.

Do meſmo modo o termo $+4a^2b^2$ multiplicado por a^3 dará $4a^5b^2$.

Havendo multiplicado todos os termos do multiplicando por a^3, devemos multiplica-los pelo ſegundo termo $-4a^2b$ do multiplicador. O termo $5a^4$ multiplicado por $-4a^2b$ de ſinal contrario dará $-20a^6b$; o termo $-2a^3b$ multiplicado por $-4a^2b$ do meſmo ſinal dará $+8a^5b^2$; e o termo $+4a^2b^2$ multiplicado por $-4a^2b$ dará $16a^4b^3$.

Por fim paſſaremos a fazer a multiplicaçaõ pelo lo termo $+ 2b^3$; e obſervando as meſmas regras, acharemos que os tres productos parciais ſaõ $+ 10a^4 b^3$, $- 4a^3 b^4$, $+ 8a^2 b^5$.

Somando todos eſtes productos e reduzindo teremos o producto total $5a^7 - 22a^6 b + 12a^5 b^2 - 6a^4 b^3 - 4a^3 b^4 + 8a^2 b^5$.

25 Para exercicio dos principiantes ajuntamos os exemplos ſeguintes, acompanhados de algumas reflexões, as quais moſtraõ hum dos uſos, que tem a Algebra para deſcubrir verdades gerais.

Exemp. IV. *Exemp. V.* *Exemp. VI.*

$$\begin{array}{c} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2. \end{array} \qquad \begin{array}{c} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array} \qquad \begin{array}{c} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2 b + ab^2 \\ + a^2 b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3. \end{array}$$

O exemplo IV. demonſtra duas propoſições, a que muitas vezes havemos de recorrer. I. *A ſoma de duas quantidades multiplicada pela ſua differença dá ſempre a differença dos quadrados das meſmas quantidades*. Tomem-ſe dous numeros quaisquer, 5 e 3 por exemplo, a ſoma 8 multiplicada pela differença 2 dá 16, que he com effeito a differença entre 25 e 9, quadrados de 5 e 3. II. Reciprocamente, *a differença dos quadrados de duas quantidades pode ſempre conſiderar-ſe, como formada pela multiplicaçaõ da ſoma das meſmas quantidades pela ſua differença*.

As-

Aſſim $b^2 - c^2$ reſulta da multiplicaçaõ de $b + c$ por $b - c$. Donde ſe ſegue, que a differença dos quadrados naõ póde ſer hum numero primo.

No exemplo V. ſe moſtra de hum modo geral e ſimples, que *o quadrado da ſoma* a + b *de duas quantidades he compoſta do quadrado* a² *da primeira, do dobro* 2ab *da primeira multiplicada pela ſegunda, e do quadrado* b² *da ſegunda* (Arith. 134).

O exemplo VI. confirma tambem o que diſſemos (Arith. 154) ſobre a formaçaõ do cubo.

Se multiplicarmos $\frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{5}a^2b + \frac{1}{2}b^3$ por $\frac{3}{5}ab - 2b^2$, acharemos, que o producto he $\frac{2}{5}a^4b - \frac{136}{75}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 + \frac{3}{10}ab^4 - b^5$. Do meſmo modo $5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3$ multiplicado por $4a^2 - 5ab + 2b^2$, dá $20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5$.

26 Para indicar a multiplicaçaõ das quantidades complexas, he coſtume cobrir cada huma dellas com huma riſca, ou encerra-làs entre parentheſes, eſcrevendo hum dos ſinaes da multiplicaçaõ (14) entre o multiplicando e o multiplicador: algumas vezes naõ ſe interpõe ſinal algum. Por exemplo, as expreſsões $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$, $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$, e $(a^2 + 3ab + b^2) . (2a + 3b)$, ou ſimpleſmente $(a^2 + 3ab + b^2)$

$(2a + 3b)$ denotaõ, que a totalidade $(a^2 + 3ab + b^2)$ ſe deve multiplicar por $2a + 3b$.

27 Em muitos caſos he mais util indicar a multiplicaçaõ do que effeitua-la. Aindaque eſtes ſómente pele uſo ſe diſtinguem, com tudo podemos dizer geralmente, que devemos indicar as multiplicações, quando a eſtas ſe ſegue a diviſaõ; porque executando-ſe eſta ultima operaçaõ, como veremos, pela ſuppreſſaõ dos factores communs ao dividendo e ao diviſor, melhor conheceremos os factores, quando a multiplicaçaõ eſtiver ſimpleſmente indicada.

Da Diviſaõ.

28 A Diviſaõ na Algebra tem o meſmo objecto que na Arithmetica, e conſeguintemente o modo de a fazer depende muito dos ſinais, de que uſamos na multiplicaçaõ.

29 Quando a quantidade dividenda e o diviſor naõ tem letra commua, he impoſſivel executar a operaçaõ; indica-ſe porém eſta em tal caſo, eſcrevendo o diviſor por baixo do dividendo em fórma de fracçaõ. Aſſim, para denotar que devemos dividir a por b, eſcreveremos $\frac{a}{b}$, e para ſignificar que devemos dividir $aa + bb$ por $c + d$, eſcreveremos $\frac{aa + bb}{c + d}$. Tambem ſe indica a diviſaõ por meio de dous pontos poſtos entre o dividendo e o diviſor. Deſte modo $(aa + bb) : (c + d)$ ou $\overline{aa + bb} : \overline{c + d}$ he o meſmo que $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30 Sendo o dividendo e o diviſor monomios, ſe to-

todas as letras, que tem o divifor, fe acharem tambem no dividendo, póde fazer-fe a divifaõ exactamente; o que fe executará da maneira feguinte.

Supprimaõ-fe no dividendo todas as letras cõmuas no divifor, as que reftarem formaraõ o quociente. Affim para dividir ab por a fupprimiremos a no dividendo, e teremos b por quociente.

Do mefmo modo, havendo de dividir abc por ab, efcreveremos c.

A razaõ he, porque as letras do divifor commuas ao dividendo faõ factores (15) do mefmo dividendo, e confeguintemente (Arith. 69) o quociente fe comporá das letras do dividendo, que naõ forem commuas ao divifor.

31 Donde fe fegue, que havendo expoentes, *tiraremos o expoente de cada huma das letras do divifor do expoente da letra femelhante do dividendo.*

Defta fórte, querendo dividir a^3 por a^2, tiraremos 2 de 3, teremos 1; e confeguintemente a^1, ou a ferá o quociente. Do mefmo modo, havendo de dividir $a^4b^3c^2$ por a^2bc, teremos a^2b^2c.

Com effeito, $\frac{a^3}{a^2}$ he o mefmo que $\frac{aaa}{aa}$, e efta expreffaõ fe reduz (30) a a. Em geral, o expoente de qualquer letra do quociente deve fer a differença entre os expoentes, que a mefma letra tem no dividendo e no divifor.

32 Logo a letra, cujo expoente for o mefmo no dividendo e no divifor, terá no quociente cifra por expoente. Affim a^3 dividido por a^3 dá a^0; e a^3bc^2 dividido por a^2bc^2 dá ab^0c^0.

As letras que tem o por expoente naõ se escrevem, porque cada huma dellas naõ he outra cousa mais do que a unidade. Com effeito, quando dividimos a^3 por a^3, buscamos quantas vezes a^3 se contém em a^3; e como se contém huma vez, o quociente deve ser 1. Mas por outra parte a^3 dividido por a^3 dá a^0: logo a^0 vale 1. Em geral, *toda a quantidade, cujo expoente he eifra, vale* 1.

33 Se algumas letras do divisor naõ forem communs ao dividendo, ou se alguns expoentes do divisor forem maiores que os de letras semelhantes do dividendo, indicaremos a divisaõ (29), porque em tais casos naõ he possivel faze-la exactamente. Simplificaremos porém o quociente, ou a quantidade fraccionaria que o representa, supprimindo as letras communs ao dividendo e ao divisor; de maneira que, havendo expoentes em letras semelhantes, riscaremos aquella que o tiver menor, e deixaremos na outra a differença entre os expoentes primitivos. Querendo, por exemplo, dividir a^5bc^3 por $a^2b^3c^4$, escreveremos $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$, e a reducçaõ se fará desta sórte: riscaremos a^2 no divisor, e escreveremos sómente a^3 no dividendo; riscaremos b no dividendo, e escreveremos sómente b^2 no divisor; finalmente escreveremos sómente c no divisor, e assim teremos $\frac{a^3}{b^2c}$. Do mesmo

mo-

modo $\frac{a^2b^5c^3}{a^3bc^2d}$ ſe reduz a $\frac{b^4c}{ad}$. Se depois deſtas operações naõ reſtar letra alguma no dividendo, eſcreveremos em lugar delle a unidade. Aſſim $\frac{a^2}{a^3}$ ſe reduz a $\frac{1}{a}$.

A razaõ deſtas regras ſe percebe facilmente, advertindo, que ſupprimir o meſmo numero de letras no dividendo e no diviſor he o meſmo, que dividir os dous termos de huma fracçaõ por huma meſma quantidade; operaçaõ (Arith. 89) que ſimplifica os quebrados, e naõ altéra o ſeu valor.

34 Se o dividendo, ou o diviſor, ou ambos elles tiverem coefficientes, praticaremos as regras de Arithmetica; e ſe naõ podermos fazer a diviſaõ exactamente, poremos os numeros em fórma de quebrado, o qual, podendo ſer, ſe reduzirá (Arith. 92) á expreſſaõ mais ſimples.

Havendo, por exemplo, de dividir $8a^3b$ por $4a^2b$, dividiremos primeiramente 8 por 4, e teremos 2 por quociente; dividindo depois a^3b por a^2b teremos a por quociente, e conſeguintemente $2a$ por quociente total. Querendo dividir $8a^3b^2$ por $6ab$, eſcreveremos $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, que ſe reduz a $\frac{4a^2b}{3}$.

35 A regra que acima demos (33) ſe applica aos polynomios, com tanto que as letras communas ao dividendo e ao diviſor ſe achem em todos

dos os termos de ambos elles. Aſſim, tendo para dividir $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ por $a^3 - 5a^2b$ reduziremos o quociente $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$ a $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$, ſupprimindo a^2, que he factor commum a todos os termos do dividendo, e do diviſor.

36 Quando o dividendo e o diviſor saõ complexos, naõ temos regras geraes para conhecer por ſimples inſpecçaõ, ſe a diviſaõ póde ou naõ fazer-ſe exactamente. Para o ſaber, e achar ao meſmo tempo o quociente, he preciſo fazer a operaçaõ ſeguinte.

1.° *Ordenem-ſe* os termos do dividendo e do diviſor relativamente a huma meſma letra, iſto he, eſcolha-ſe huma letra que ſeja commua a ambos, e eſcrevaõ-ſe por ordem de grandeza os termos, em que a dita letra tiver expoentes conſecutivamente mais pequenos.

2.° Havendo poſto em huma linha tanto o dividendo como o diviſor com os termos aſſim ordenados, ſepare-ſe hum do outro por meio de huma riſca, e proceda-ſe á diviſaõ, tomando ſómente o primeiro termo do dividendo para dividir conforme as regras acima dadas (30, 31, 34) pelo primeiro termo do diviſor, e eſcrevendo o quociente debaixo do diviſor.

3.° Multipliquem-ſe ſucceſſivamente todos os termos do diviſor pelo quociente achado, e eſcreva-ſe o producto debaixo do dividendo, mudando os ſinais.

4.° Paſſando huma riſca por baixo de tudo iſto, e fazendo a reducçaõ, eſcreva-ſe o reſto, e comece-ſe ſegunda diviſaõ com eſte novo dividendo do, tomando por primeiro termo aquelle que tiver maior expoente.

He preciſo notar, que ſe deve attender aos ſinais dos termos do dividendo e do diviſor. A regra he a meſma, que demos para a multiplicaçaõ, iſto he....

Se o dividendo e o diviſor tiverem o meſmo ſinal, o quociente ſerá poſitivo.

Se pelo contrario tiverem ſinais differentes, o quociente ſerá negativo.

Porque, como (Arith. 74) multiplicando o quociente pelo diviſor, deve ſahir no producto o dividendo, he preciſo que o quociente tenha ſinais tais, que ſendo multiplicado pelo diviſor reproduza o dividendo com os meſmos ſinais; condiçaõ, da qual ſe deduz neceſſariamente a regra que acabamos de dar.

Paſſemos aos exemplos, e para procedermos com ordem, começaremos pelos ſinais, depois dividiremos os coefficientes, e por fim as letras.

Exemplo I.

Se houvermos de dividir $a^2 - b^2$ por $b + a$, ordenaremos eſtas quantidades relativamente a huma das letras a, b, a a, por exemplo, eſcrevendo como aqui ſe vê.

Dividendo - -	$aa - bb$	$a + b$	Diviſor
	$-aa - ab$	$a - b$	Quociente
Reſto - - -	$-ab - bb$		
	$+ab + bb$		
Reſto - - - - - - -	0		

Ten-

Tendo o primeiro termo *aa* do dividendo o meſmo ſinal, que o primeiro termo *a* do diviſor, eſcreveremos $+$ no quociente; mas como pertence ao primeiro termo, podemos omitti-lo. Dividindo *aa* por *a*, temos *a* por quociente, que eſcreveremos debaixo do diviſor.

Multipliquem-ſe ſucceſſivamente os dous termos *a* e *b* do diviſor pelo primeiro termo *a* do quociente, e eſcrevaõ-ſe os productos *aa* e *ab* debaixo do dividendo com o ſinal — contrario ao que deo a multiplicaçaõ, pois que eſtes productos devem ſer tirados do dividendo.

Faça-ſe a reducçaõ, riſcando os dous termos *aa* e $-aa$ que ſe deſtroem, e reſta $-ab$, que com a parte $-bb$, que ainda reſta do dividendo, compõe tudo o que ainda falta para dividir.

Continuaremos pois a diviſaõ, tomando $-ab$ por primeiro termo do novo dividendo.

Dividindo $-ab$ por *a*, eſcreveremos — no quociente, porque os ſinais ſaõ differentes: em quanto ás letras o quociente he *b*, que eſcreveremos no ſeu lugar.

Multipliquem-ſe os dous termos *a* e *b* do diviſor pelo termo $-b$ do quociente; os productos ſaõ $-ab$, e $-b^2$. Eſcreveremos pois $+ab+b^2$ debaixo do ſegundo dividendo; e como fazendo a reducçaõ, naõ ha reſto, concluiremos, que o quociente he $a-b$.

Igualmente ſe poderia ter ordenado o dividendo e o diviſor relativamente a *b*. Neſſe caſo teriamos para dividir $-b^2+a^2$ por $b+a$, e fazendo-ſe a operaçaõ da meſma ſórte, achariamos $-b+a$, que he o meſmo que $a-b$.

Exem-

Exemplo II.

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - b^3 & a - b \\
\hline
-a^3 + a^2 b & a^2 + ab + b^2 \\
\hline
\quad + a^2 b - b^3 & \\
\quad - a^2 b + ab^2 & \\
\hline
\qquad + ab^2 - b^3 & \\
\qquad - ab^2 + b^3 & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Exemplo III.

$$\begin{array}{l|l}
8a^4 - 2a^3 b - 13a^2 b^2 - 3ab^3 & 4a^2 + 5ab + b^2 \\
\hline
-8a^4 - 10a^3 b - 2a^2 b^2 & 2a^2 - 3ab \\
\hline
\quad - 12a^3 b - 15a^2 b^2 - 3ab^3 & \\
\quad + 12a^3 b + 15a^2 b^2 + 3ab^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Exemplo IV.

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 + \frac{1}{6}a^2 b - \frac{3}{20}b^3 & \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\
\hline
-\frac{2}{7}a^3 + \frac{9}{35}ab^2 & \frac{3}{7}a + \frac{1}{4}b \\
\hline
\qquad \frac{1}{6}a^2 b - \frac{3}{20}b^3 & \\
\qquad -\frac{1}{6}a^2 b + \frac{3}{20}b^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Exemplo V.

$$
\begin{array}{r|l}
a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4 & a^2 + b^2 + c^2 \\ \cline{2-2}
- a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 \qquad\qquad & a^2 + b^2 - c^4 \\ \hline
+ a^2b^2 - a^2c^2 + b^4 - c^4 & \\
- a^2b^2 - b^4 - b^2c^2 & \\ \hline
- a^2c^2 - b^2c^2 - c^4 & \\
+ a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Quando a divisaõ se naõ póde fazer exactamente, naõ querendo indica-la (29), continuaremos a operaçaõ até onde nos parecer, assim como se pratica na Arithmetica. Havendo de dividir, por exemplo, a por $b + c$, escreveremos

$$\frac{a}{b+c}, \text{ ou } \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \text{\&c.\&c. sem fim.}$$

Deste modo se resolvem geralmente todas as fracções em series infinitas.

37 Se havendo ordenado o dividendo e o divisor relativamente a huma letra, se acharem outros termos, nos quais a dita letra tenha o mesmo expoente, estes se disporaõ em huma colunna vertical, como se mostra no exemplo seguinte; e nesta disposiçaõ se deveraõ ordenar todos os termos de cada colunna respectivamente a outra letra.

Exemplo.

Para dividir $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ por $-3ab - 5a^2 + b^2$, ordenaremos o dividendo e o diviſor relativamente a a, e teremos $-20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ para dividir por $-5a^2 - 3ab + b^2$; mas como no dividendo ha dous termos affectos de a^3, dous affectos de a^2, e dous affectos de a, devemos diſpo-los da maneira ſeguinte, ordenando-os em cada colunna relativamente a b.

$$\text{Divid.}\left\{\begin{array}{l} -20a^4 + 13a^3b + 19a^2b^2 - 5ab^3 \\ \qquad - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -5a^2 - 3ab + b^2 \\ \hline 4a^2 - 5ab + 2a \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} +20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reſto} \;\text{- -}\; \left\{\begin{array}{l} +25a^3b + 15a^2b^2 - 5ab^3 \\ -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} -25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reſto} \;\text{- - -}\; -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c$$

$$\begin{array}{l} +10a^3c + 6a^2bc - 2ab^2c \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reſto} \;\text{- - - - - - - - - - - -}\; 0$$

Para ordenar as quantidades, he ordinariamente mais commodo eſcolher a letra, que tem o meſmo expoente em muitos termos.

38 Se huma quantidade póde ter a fórma de producto, como acontece muitas vezes, principal-

palmente quando reſulta de differentes operações, he util indicar a multiplicaçaõ entre os ſeus factores. Aindaque o methodo de os achar depende de conhecimentos, que ſó adiante daremos, com tudo quem ſe familiarizar com a multiplicaçaõ e diviſaõ, com facilidade os achará em muitos caſos. Por exemplo, havendo de ſomar $5ab - 3bc + a^2$ com $3ab + 3bc - 2a^2$, teremos $8ab - a^2$, que por cauſa da letra a, que he factor commum dos dous termos $8ab$ e a^2, póde conſiderar-ſe como producto da multiplicaçaõ de $8ab$ por a, e repreſentar-ſe por $(8b - a)a$. He muito util o exercicio neſte genero de reſoluções.

Do modo de achar o maior diviſor commum de duas quantidades litterais.

39 O Methodo he o meſmo que havemos dado para os numeros (Arith. 95), e a demonſtraçaõ funda-ſe nos meſmos principios. Havendo ordenado as duas quantidades, divida-ſe a maior pela menor: ſe houver reſto, por elle ſe dividirá o diviſor, e pelo novo reſto o novo diviſor, e aſſim por diante, até chegar a huma diviſaõ exacta: o ultimo diviſor ſerá o que ſe buſca.

Para facilitar o uſo deſta regra, notaremos que duas quantidades A e B conſervaõ o ſeu maior diviſor commum, aindaque ſe multiplique ou divida huma dellas, v.g. A, por huma quantidade que naõ tenha diviſor cõmum com B. Por exemplo, ab e ac tem o diviſor commum a; e ſe multiplicarmos ab por d, entre o producto abd e ac haverá terá o meſmo diviſor commum a, que havia entre ab e ac. Naõ aconteceria o meſmo, ſe multiplicaſſemos ab por huma quantidade, que foſſe diviſor de ac, v. g. por c; porque o diviſor cómum entre o producto abc e ac he ac, e naõ a. Do meſmo modo, ſe multiplicaſſemos ab por cd, que tem hum factor commum com ac; teriamos $abcd$, cujo diviſor commum com ac he ac. Em geral, $a + b$ e $a^2 - b^2$, $am + bm$ e $a^2n - b^2n$ tem o meſmo maior diviſor commum; e reciprocamente.

40 Donde ſe ſeguem as duas reflexões ſeguintes, que tem ambas lugar no progreſſo das diviſões ſucceſſivas, que exige a regra dada. I. Conhecendo que huma das duas quantidades tem hum factor, que naõ he diviſor da outra, podemos ſupprimi-lo, e ficará o calculo mais ſimples. II. A fim de fazer a diviſaõ exacta, podemos multiplicar huma das duas quantidades por huma grandeza conveniente, com tanto que eſta naõ ſeja diviſor da outra quantidade.

Exemplo I.

Supponhamos que ſe pede o maior diviſor commum de $a^2 - 3ab + 2b^2$ e $a^2 - ab - 2b^2$

$$\begin{array}{lrl}
1.^{\circ}\text{ Divid.} & a^2 - 3ab + 2b^2 & \left\{ \begin{array}{ll} a^2 - ab - 2b^2 & 1.^{\circ}\text{ Diviſor} \\ \hline 1 & 1.^{\circ}\text{ Quociente} \end{array} \right. \\
 & -a^2 + ab + 2b^2 & \\
\hline
1.^{\circ}\text{ Reſto} & -2ab + 4b^2 &
\end{array}$$

Devemos agora dividir $a^2 - ab - 2b^2$ por $-2ab + 4b^2$, porque o expoente de a no reſto he menor, que

que o expoente de a no divisor; mas como o resto tem o factor $2b$, que naõ he factor do novo dividendo, bastará dividir $a^2 - ab - 2b^2$ por $-a + 2b$, supprimindo $2b$. Temos pois

$$\begin{array}{llll} 2.^{\circ}\text{Divid.} & a^2 - ab - 2b^2 & \left\{ \begin{array}{l} -a + 2b \quad 2.^{\circ}\ \text{Divisor} \\ \hline -a - b \quad 2.^{\circ}\ \text{Quociente} \end{array} \right. \\ & -a^2 + 2ab & \\ \hline & \quad + ab - 2b^2 & \\ & \quad - ab + 2b^2 & \\ \hline \text{Resto} & - - - - 0 & \end{array}$$

Logo $-a + 2b$ he o maior divisor commum.

Exemplo II.

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \left\{ 7a^2 - 23ab + 6b^2 \right.$$

Como 5 naõ he divisivel por 7, e alem disso este numero naõ he factor commum dos termos da segunda quantidade, multiplicaremos a primeira por 7, e teremos - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} 35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 \\ -35a^3 + 115a^2b - 30ab^2 \\ \hline \quad - 11a^2b + 47ab^2 - 42b^3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ \hline 5a \end{array} \right.$$

A operaçaõ se continuará ainda pelo mesmo divisor, multiplicando o resto por 7, e omittindo o factor b.

— 77

$$
\begin{array}{r|l}
-77a^2 + 329ab - 294b^2 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ \cline{2-2}
+77a^2 - 253ab + 66b^2 & -11 \\ \cline{1-1}
76ab - 228b^2 &
\end{array}
$$

Devemos agora dividir $7a^2 - 23ab + 6b^2$ por $76ab - 228b^2$, ou melhor, por $a - 3b$.

$$
\begin{array}{r|l}
7a^2 - 23ab + 6b^2 & a - 3b \\ \cline{2-2}
-7a^2 + 21ab & 7a - 2b \\ \cline{1-1}
-2ab + 6b^2 & \\
+2ab - 6b^2 & \\ \cline{1-1}
\text{Resto} - - - - - 0 &
\end{array}
$$

Logo $a - 3b$ he o maior divisor commum das duas quantidades propostas.

Pelo habito de calcular (38) se descobre em muitos casos o maior divisor commum de duas quantidades com maior facilidade, do que pelo methodo geral. Por exemplo, nas quantidades $a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$, e $2a^2c + 4bc^2 - 2a^3 - 4abc$, ou $a^2(a^2 + b^2) - c^2(a^2 + b^2)$, e $c(2a^2 + 4bc) - a(2a^2 + 4bc)$, he claro que a primeira he o mesmo que $(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)$, e a segunda o mesmo que $(2a^2 + 4bc)(c - a)$. Mas $(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)$ he (24) o mesmo que $-(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)$, e $c^2 - a^2$ he divisivel (25) por $c - a$; logo $c - a$ he divisor das duas quantidades. Fazendo do a divisaõ, os quocientes saõ $-(a^2+b^2)(a+c)$ e $2a^2+4bc$, que naõ tem divisor commum: logo $c-a$ he o maior divisor commum das quantidades propostas.

Das Fracções Litteraes.

41 AS fracções litterais calculaõ-se pelas regras das fracções numericas, fazendo-se a applicaçaõ do que havemos dito a respeito das quatro operações algebricas.

42 A fracçaõ $\frac{a}{b}$ pode transformar-se sem alteraçaõ de valor em $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{a^2}{ab}$, ou $\frac{a^2+ab}{ab+b^2}$, e assim por diante (Arith. 88).

43 A fracçaõ $\frac{a^2c}{abc}$ he o mesmo que $\frac{a}{b}$, assim como $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ e $\frac{2a+b}{4a+3c}$ tem o mesmo valor (Arith. 89). Esta reducçaõ das fracções á expressaõ mais simples comprehende-se no que havemos dito (33).

44 A regra mais geral para reduzir huma fracçaõ aos seus menores termos, consiste em dividir tanto o numerador como o denominador pelo maior divisor commum, que elles podem ter (39).

45 A expressaõ $a+\frac{bd}{c}$ pode mudar-se na fracçaõ unica $\frac{ac+bd}{c}$, e do mesmo modo $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ se reduz a $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, isto he, a $\frac{cd-ad}{b-d}$ (Arith. 86).

46 A quantidade $\frac{3ab+ac+cd}{a}$ póde reduzir-

zir-ſe a $3b + c + \frac{cd}{a}$, e ſemelhantemente $\frac{a^2+4ab+4b^2+c^2}{a+2b}$ ſe reduz a $a + 2b + \frac{c^2}{a+2b}$ (Arith. 85).

47 As tres fracções $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ſendo reduzidas ao meſmo denominador, tornaõ-ſe em $\frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf}$, e do meſmo modo as duas $\frac{b+c}{a+b}$ e $\frac{a-2c}{a-b}$ ſe mudaõ em $\frac{ab+ac-b^2-bc}{a^2-b^2}$ e $\frac{a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}$ (Arith. 90, 91).

48 Se os denominadores tiverem factor commum, praticaremos conforme a regra dos numeros (Arith. 91 §§). Por exemplo $\frac{a}{bc}$ e $\frac{d}{bf}$ ſe reduzem a $\frac{af}{bcf}$ e $\frac{cd}{bcf}$. Do meſmo modo as tres fracções $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$ ſe reduzem a $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{deg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

49 Para ſomar as fracções $\frac{b+c}{a+b}$ e $\frac{a-2c}{a-b}$, obſervaremos a regra dada (Arith. 102), e teremos $\frac{ab+ac-b^2-bc+a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}$, que ſe reduz a $\frac{2ab-ac-b^2-3bc+a^2}{a^2-b^2}$.

Pelo contrario, havendo de tirar a ſegunda da primeira, acharemos $\frac{ab+ac-b^2-bc-a^2+2ac-ab+2bc}{a^2-b^2}$, que ſe reduz a $\frac{3ac-b^2+bc-a^2}{a^2-b^2}$ (Arith. 105).

50 Se neſta operaçaõ mudaſſemos juntamente os ſinaes do numerador e do denominador, haveriamos

somado as fracções e naõ diminuindo; porque $\frac{a}{b}$ naõ he differente de $\frac{-a}{-b}$ (36).

51 Para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, escreveremos $\frac{ac}{bd}$, como tambem $\frac{1}{2}a$ multiplicado por $\frac{1}{2}b$ dá $\frac{1}{4}ab$, e $\frac{a}{b}$ multiplicado por c dá $\frac{ac}{b}$ (Arith. 106, 107). No caso de serem complexos os termos da fracçaõ, praticaremos conforme a regra da multiplicaçaõ dos polynomios.

52 Querendo dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, escreveremos $\frac{ad}{bc}$, e para dividir $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{c+d}{a-b}$, escreveremos $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, que se reduz a $\frac{a^2-b^2}{(c+d)^2}$. Finalmente $\frac{a}{b}$ dividido por c dá $\frac{a}{bc}$ (Arith. 109, 110).

Das Equações.

53 PAra significar que duas quantidades saõ iguais, he costume separa-las pelo sinal $=$, que se pronuncia *igual*, ou *he igual a*; pelo que, a expressaõ $a=b$ quer dizer a igual a b, ou que a he igual a b.

O concurso de duas, ou de muitas quantidades assim separadas pelo sinal $=$ tem o nome de *Equaçaõ*. A totalidade das quantidades, que estaõ á esquerda do dito sinal, fórma o *primeiro membro* da equaçaõ; e a totalidade das que estaõ á direita, constitue o *segundo membro*.

Na equaçaõ $4x-3=2x+7$, $4x-3$ fórma o primeiro membro, e $2x+7$ o segundo.

To-

Toda a queſtaõ, que póde reſolver-ſe por Algebra, envolve no enunciado hum certo numero de condições, as quais ſaõ outros tantos meios para perceber as relações, que ha entre as quantidades, que ſe buſcaõ, a que ſe dá o nome de *incognitas*, e as conhecidas do problema. Eſtas relações pódem exprimir-ſe ſempre por equações, em que as *incognitas* ſe achaõ combinadas com as quantidades conhecidas de hum modo mais ou menos compoſto, confórme a queſtaõ he mais ou menos difficultoſa.

Aſſim para reſolver por Algebra as queſtões, que pódem propor-ſe ácerca das quantidades, ſaõ neceſſarias tres couzas.

1.° Perceber na propoſiçaõ, ou na natureza do problema as relações, que ha entre as quantidades conhecidas e as incognitas. Sobre eſta faculdade, que o noſſo eſpirito adquire com o uſo, naõ ſe pódem dar regras gerais.

2.° Exprimir cada huma das relações por huma equaçaõ. Eſte requiſito póde reduzir-ſe a huma unica regra; mas a ſua applicaçaõ he mais ou menos facil, confórme a natureza das queſtões, e confórme a capacidade e exercicio do Analyſta.

3.° Reſolver a equaçaõ ou as equações, iſto he, deduzir o valor das incognitas. Sobre eſte ponto ſe póde dar hum numero determinado de regras, que vamos a expôr.

Como as queſtões pódem conduzir a equações mais ou menos compoſtas, tem-ſe eſtas dividido em muitas claſſes ou gráos, os quais ſe diſtinguem pelo expoente da quantidade ou das quantidades incognitas, que nellas entraõ. Começamos agora a tratar das *Equações do primeiro grão*, ou *Lineares*, que ſaõ aquellas, em que as incognitas naõ eſtaõ multiplicadas nem entre ſi, nem por ſi meſmas.

Da reſoluçaõ das Equações do primeiro grão a huma incognita.

54 RESolver huma equaçaõ he reduzi-la a outra, na qual a incognita ſe ache ſó em hum membro, e no outro eſtejaõ ſómente quantidades conhecidas. Feito iſto, fica o problema reſolvido, porque huma quantidade igual a quantidades conhecidas he conhecida.

Daqui por diante repreſentaremos as incognitas por algumas das ultimas letras x, y, z do Alfabeto, para as diſtinguirmos das quantidades conhecidas, que repreſentaremos ou por numeros, ou pelas primeiras letras do Alfabeto.

55 A incognita póde achar-ſe miſturada com as quantidades conhecidas de tres modos: 1.º por addiçaõ ou ſubtracçaõ, como na equaçaõ $x + 3 = 5 - x$. 2.º Por addiçaõ, ſubtracçaõ, e multiplicaçaõ, como na equaçaõ $4x - 6 = 2x + 16$. 3.º Finalmente por addiçaõ, ſubtracçaõ, multiplicaçaõ, e diviſaõ, como na equaçaõ $\frac{9}{5}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$; ou pelas duas operações ultimas, ou ſómente pela ultima.

Eis-aqui as tres regras, porque ſe deſembaraça a incognita neſtes differentes caſos.

56 *Para fazer paſſar qualquer termo de hum membro da equaçaõ para o outro, riſque-ſe o dito termo, e eſcreva-ſe no outro membro com ſinal contrario.*

Por exemplo, na equaçaõ $4x + 3 = 3x + 12$, querendo fazer paſſar o termo $+ 3$ para o ſegundo mem-

membro, eſcreveremos $4x = 3x + 12 - 3$, ou, reduzindo, $4x = 3x + 9$. Se quizermos agora mudar o termo $3x$ para o primeiro membro, eſcreveremos $4x - 3x = 9$, que pela reducçaõ dá $x = 9$.

Da meſma ſorte na equaçaõ $5x - 7 = 21 - 4x$, querendo tranſpôr o termo $- 7$, eſcreveremos $5x = 21 - 4x + 7$, iſto he $5x = 28 - 4x$; e ſe depois diſſo quizermos tranſpôr $- 4x$, eſcreveremos $5x + 4x = 28$, ou $9x = 28$. Brevemente veremos, como ſe acaba a reſoluçaõ deſta equaçaõ.

Eſtas transformações fundaõ-ſe, em que duas quantidades ſe conſervaõ iguais, ſe a ambas ajuntarmos, ou de ambas tirarmos a meſma quantidade.

57 Por eſta regra ſe podem tranſportar ao meſmo tempo todos os termos affectos da incognita para hum membro, e todas as quantidades conhecidas para o outro. Aſſim da equaçaõ $7x - 8 = 14 - 4x$ ſe conclue $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Do meſmo modo a equaçaõ $ax + bc - cx = ac - bx$ ſe transforma em $ax - cx + bx = ac - bc$.

58 Se depois da tranſpoſiçaõ, e reducçaõ, o termo affecto de x tiver o ſinal $-$, mudaremos os ſinais de ambos os membros. Por exemplo, ſe tivermos $3x - 8 = 4x - 12$, tranſpondo e reduzindo, acharemos $- x = - 4$: deduziremos pois $x = 4$; porque igualmente poderiamos tranſpôr os x para o ſegundo membro, e teriamos $4 = x$, que he o meſmo que $x = 4$.

59 Quando a equaçaõ he numerica, ou quando ſendo litteral inclue quantidades ſemelhantes, pode abbreviar-ſe a reducçaõ, riſcando huma dellas, e tirando outro tanto da outra, ou ſomando, conforme elles tiverem o meſmo, ou differente ſinal em differentes

tes membros. Por exemplo, na equaçaõ $6b - 4a + 2x = 5a + 3x$, riſcaremos $2x$ no primero membro, e eſcreveremos ſómente x no ſegundo; riſcaremos $5a$ no ſegundo, e ſomaremos $4a$ com $5a$, o que dará immediatamente $6b - 9a = x$. Do meſmo modo a equaçaõ $5a + 2b = 5a + x$ ſe reduz immediatamente a $2b = x$.

60 Feita a tranſpoſiçaõ, para ter o valor da incognita no caſo de naõ entrarem fracções na equaçaõ, executaremos a regra ſeguinte: *Eſcreva-ſe unicamente a incognita em hum membro, e divida-ſe o outro pelo multiplicador que ella tinha.*

Por exemplo, da equaçaõ $7x - 8 = 14 - 4x$, que dá $11x = 22$, deduzimos $x = \frac{22}{11}$; porque ſe $11x = 22$, a undecima parte de $11x$, ou x ſerá tambem igual á undecima parte de 22.

Do meſmo modo a equaçaõ $12x - 15 = 4x + 25$, ou $8x = 40$, dá $x = 5$.

A regra he a meſma para as equações litterais, qualquer que ſeja o numero dos termos affectos da incognita depois da tranſpoſiçaõ. A equaçaõ $ax = bc$ dá $x = \frac{bc}{a}$. A equaçaõ $ax + bc - cx = ac - bx$, ou $ax - cx + bx = ac - bc$ dá $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$, dividindo o ſegundo membro pela totalidade das quantidades $a - c + b$.

61 Para conhecermos pois o valor de x, quando depois da tranſpoſiçaõ ha muitos termos affectos da dita incognita, dividiremos o ſegundo membro pela totalidade das quantidades que multiplicaõ x no primeiro, tomando-as com os ſinais, com que nelle ſe achaõ.

Por exemplo, na equaçaõ $ax = bc - 2x$, ou

$ax + 2x = bc$, teremos $x = \frac{bc}{a+2}$. Da meſma ſorte a equaçaõ $x - ab = bc - ax$, ou $x + ax = bc + ab$, dá $x = \frac{bc + ab}{1+a}$ (5).

62 Se houver alguma quantidade, que ſeja factor comum de todos os termos da equaçaõ, para ſimplificar, dividiremos por elle todos os termos. Por exemplo, na equaçaõ $15b^2 = 27ab + 6bx$ dividiremos todos os termos pelo ſeu factor commum $3b$, e teremos $5b = 9a + 2x$, da qual (56, 60) ſe tira $x = \frac{5b - 9a}{2}$.

63 As regras, que acabamos de dar, podem applicar-ſe ás equações, em que entraõ denominadores, com tanto que eſtes naõ contenhaõ a incognita; mas como ellas ſe executaõ ordinariamente com mais facilidade, quando naõ ha fracções, por iſſo ajuntaremos a regra ſeguinte.

64 Para transformar huma equaçaõ na qual entraõ denominadores, em outra que os naõ tenha, *multiplique-ſe cada hum dos termos, que naõ tem denominador, pelo producto de todos os denominadores; e o numerador de cada huma das fracções pelo producto dos denominadores das outras ſómente.*

Por exemplo, ſe tiveſſemos a equaçaõ $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, multiplicariamos os termos 4 e 12 por 3. 5. 7 ou 105, e teriamos 420, e 1260. Depois multiplicariamos $2x$ por 5.7 ou 35, $4x$ por 3. 7 ou 21, e $5x$ por 3. 5 ou 15, e teriamos $70x$, $84x$, $75x$; e conſeguintemente a equaçaõ propoſta ſe muda em $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$. Applicando agora a eſta as regras precedentes, teremos $x = \frac{840}{61} = 13\frac{47}{61}$.

Com

Com effeito, as tres fracções da equaçaõ proposta, sendo reduzidas ao mesmo denominador conforme as regras da Arithmetica, daõ $\frac{70x}{105}$, $\frac{84x}{105}$, $\frac{75x}{105}$, que realmente saõ o mesmo que as primitivas. Se reduzirmos tambem os dous termos inteiros a fracções, cujos denominadores sejaõ 105, teremos $\frac{420}{105}$ e $\frac{1260}{105}$; de maneira que a equaçaõ proposta se transforma em $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$. Mas quantidades iguais, sendo multiplicadas pelo mesmo numero, conservaõ ainda a igualdade; logo multiplicando ambos os membros por 105, isto he, supprimindo o denominador commum, será verdadeira a equaçaõ, isto he, teremos, como acima, $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$.

Se os denominadores tiverem hum factor commum, simplificaremos esta operaçaõ, como ensinamos (Arith. 91 §§).

65 A regra he a mesma para as equaçoes litteraes, com tanto que se observem as regras da multiplicaçaõ algebrica. Assim, a equaçaõ $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$ se transforma em $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, donde se tira $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

Se tivermos $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, multiplicaremos (48) cx por c, dx por b, e virá - - - $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, isto he, $c^2x + bdx = abce$; da qual tiraremos $x = \frac{abce}{c^2 + bd}$.

66 No

66 No caſo de ſerem complexos os denominadores, he mais commodo de ordinario indicar primeiramente as operações, e executa-las depois. Por exemplo, ſe tiveſſemos $\frac{ax}{a-b}+4b=\frac{cx}{3a+b}$, eſcreveriamos $ax(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)=cx(a-b)$; e fazendo agora as operações indicadas, acharemos $3a^2x+abx+12a^2b-8ab^2-4b^3=acx-bcx$, e conſeguintemente . . . $x=\frac{4b^3+8ab^2-12a^2b}{3a^2+ab-ac+bc}$.

Applicação dos principios precedentes a reſolução de alguns Problemas.

67 AInda que reſervamos os uſos da Algebra para a ſegunda Secção, com tudo, afim de fazermos a tempo algumas obſervações uteis, applicaremos os principios precedentes a alguns problemas muito faceis.

As regras, que acabamos de dar, ſaõ ſufficientes para reſolver qualquer problema do primeiro gráo, que eſteja expreſſo em equação: reſta ſaber como eſta ſe ha-de formar.

Para pôr hum problema em equação, *repreſente-ſe por huma letra cada huma das quantidades que ſe buſcaõ, e havendo examinado o eſtado da queſtaõ, por meio dos ſinaes algebricos façaõ-ſe ſobre as quantidades dadas, e as incognitas as meſmas operações, e os meſmos raciocinios, que ſe fariaõ para verificar as incognitas no caſo de ſerem conhecidos os ſeus valores.*

Os problemas ſeguintes dirigiraõ a applicação çaõ desta regra geral, ainda que pela sua simplicidade naõ precisaõ da Algebra para se resolverem.

Problema I. *Hum pai e hum filho tem entre ambos cem annos; o pai tem quarenta mais que o filho; pergunta-se, qual he a idade de cada hum.*

Pouca attençaõ basta para ver, que o problema se reduz a achar duas quantidades, cuja soma seja 100, e a differença 40. Tambem he manifesto, que, se for conhecida huma destas quantidades, a segunda o será com facilidade; se a maior, por exemplo, for conhecida, tirando della 40, teremos a mais pequena.

Representemos pois a maior por x.

Ora, se este valor fosse conhecido, e o quizessemos verificar, tirariamos delle 40 para ter o numero menor; depois disso somariamos o maior com o menor para ver se davaõ 100. Imitemos pois este modo de obrar.

O numero maior he - - - - - - - - x

Logo o menor será - - - - - - - - $x - 40$

Estes dous numeros somados daõ - $2x - 40$

Mas pelas condiçóes da questaõ devem dar 100,

Logo eis-aqui o problema posto em equaçaõ - - - - - - - - $2x - 40 = 100$

Havendo assim traduzido o problema em linguagem algebrica, para ter x, naõ se trata de mais, que de applicar as regras dadas (53 e 56). A primeira dá $2x = 100 + 40 = 140$, e a segunda $x = \frac{140}{2} = 70$. Logo o numero menor será $70 - 40 = 30$; e conseguintemente o pai tem 70 annos, e o filho 30. Com effeito, $70 + 30 = 100$.

Reflectindo sobre o modo, porque nos conduzimos para resolver este problema, ve-se claramenmente, que os raciocinios, que fizemos, naõ saõ dependentes dos valores particulares dos numeros 100, e 40 da questaõ, e que se em lugar destes fossem dados outros quaisquer, sempre procederiamos pela mesma fórma. Assim, se o problema se propuzesse deste modo geral: *Sendo dada a soma* a *de duas quantidades, e a sua differença* b, *achar cada huma das mesmas quantidades.*

Representando a maior por - - - - - x
A menor será - - - - - - - - - - - - - - $x - b$
E a soma de ambas - - - - - - - - - - - - $2x - b$
Mas esta, conforme a questaõ, deve ser - - - a
Logo - - - - - - - - - - - - - - - $2x - b = a$;

equaçaõ, de que se tira $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Quer dizer, que para termos a maior, ajuntaremos a semisoma com a semidifferença, como se achou (Trig. 177) por outro modo.

Como a menor he $x - b$, será $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, isto he, $\frac{a + b - 2b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Logo, para termos a menor, da semisoma tiraremos a semidifferença (Trig. 177). Esta traducçaõ dos resultados finais deve ser hum dos principais cuidados do Analysta.

Fica pois manifesto, como representando em geral, isto he, por letras, as quantidades conhecidas, que entraõ nos problemas, descobrimos regras gerais para a resoluçaõ de todos os problemas da mesma especie.

Muitas vezes os problemas parecem differentes á primeira vista, mas depois de hum leve exame se acha, que naõ differem mais que no modo de se enunciarem. Por exemplo, se nos propuzerem:

Di-

Dividir o numero dado a *em duas partes, das quais huma exceda, ou ſeja excedida da outra na quantidade dada* b. He facil de ver, que eſte problema he o meſmo que o precedente.

Probl. II. *Dividir o numero 720 em tres partes tais, que a maior exceda a menor em 80, e a media exceda a menor em 40.*

Se me diſſeſſem qual era a parte menor, e a quizeſſe verificar, deveria ajuntar-lhe 40 para ter a ſegunda, e depois 80 para ter a maior; a ſoma das tres partes ſeria 720.

Chamemos pois á parte menor - - x
Logo a media he - - - - - - - - - - - $x+40$
E a maior - - - - - - - - - - - - - - $x+80$
Ora eſtas tres partes reunidas daõ - - $3x+120$
E como o problema exige que dem - - - - 720
Logo - - - - - - - - - - - - - - $3x+120=720$

Applicando as regras precedentes, teremos $x=200$; logo a ſegunda parte he 240, e a maior 280: eſtas tres partes juntas fazem com effeito a ſoma de 720.

Tambem aqui he manifeſto, que ſe os numeros propoſtos, em lugar de ſerem 720, 40, e 80, foſſem outros quaisquer, a queſtaõ poderia reſolver-ſe do meſmo modo. Pelo que, para reſolver todos os problemas, nos quais ſe trate de dividir hum numero dado *a* em tres partes tais, que o exceſſo da maior ſobre a menor ſeja hum numero qualquer *b*, e o exceſſo da media ſobre a menor ſeja *c*, diſcorreremos do meſmo modo, como aqui ſe moſtra.

Seja

Seja a parte menor - - - - - - x
A media ferá - - - - - - - - $x + c$
E a maior - - - - - - - - - - $x + b$
A foma dá - - - - - - - - - $3x + b + c$
Mas deve dar - - - - - - - - - - - - a
Logo ferá $3x + b + c = a$;

Donde fe tira $x = \frac{a-b-c}{3} = \frac{a-(b+c)}{3}$

Quer dizer efta formula, que para ter a parte menor tomaremos o terço da differença entre o numero, que fe quer dividir, e a foma dos dous exceffos. Affim, havendo de repartir 642 em tres partes tais, que a media exceda a menor em 75, e a maior exceda a menor em 87; tiraremos $75 + 87$ ou 162 de 642, e teremos 480; cujo terço 160 he a parte menor, e confeguintemente as outras duas faõ $160 + 75$ ou 235, e $160 + 87$ ou 247.

Probl. III. *Repartir hum numero dado, por exemplo 14250, em tres partes tais, que fejaõ entre fi como os numeros 3, 5, e 11.*

Se conheceffemos huma das partes, v. g. a primeira, para a verificarmos, bufcariamos (Arith. 194) hum numero que foffe para ella :: 5 : 3, e efte feria a fegunda parte. Bufcariamos tambem outro numero, que foffe para a mefma primeira parte :: 11 : 3; e efte feria a terceira parte. A foma deftas tres partes formaria 14250. Procedendo pois defta maneira

Seja a primeira parte - - - - - - x
Será (Arith. 194) a fegunda - - $\frac{5x}{3}$
E a terceita - - - - - - - - - - - $\frac{11x}{3}$
A foma deftas dá - - - - - $x + \frac{16x}{3}$
Mas conforme a queftaõ deve dar - - - - 14250
Logo, $x + \frac{16x}{3} = 14250$ Efta

Esta equação se muda (64) em $19x = 42750$; Logo (60) - - - $x = 2250$. A segunda parte será pois $\frac{5 \times 2250}{3}$ ou 3750, e a terceira 8250. Com effeito os tres numeros 2250, 3750, 8250, somados fazem 14250, e estaõ entre si como 3, 5, e 11; como he facil de ver, dividindo-os por 750, com o que (Arith. 170) naõ se altera a razaõ.

Se o numero que se quer dividir, em lugar de ser 14250, fosse em geral a, e os numeros proporcionais ás partes, em lugar de 3, 5, 11, fossem em geral m, n, p, imitariamos o que acabamos de fazer.

Assim, representando a primeira parte por - x

A segunda será - - - - - - - - - - - - - - - - $\frac{nx}{m}$

E a terceira - - - - - - - - - - - - - - - - - - - $\frac{px}{m}$

Cuja soma faz - - - - - - - - - - $x + \frac{nx + px}{m}$

Mas deve fazer - - - - - - - - - a

Logo $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Esta equação dá $mx + nx + px = ma$, e conseguintemente $x = \frac{ma}{m + n + p}$.

Para traduzirmos esta soluçaõ, e enunciarmos huma regra geral, note-se, que se tivessemos $m + n + p : m :: a :$; o quarto termo (Arith. 179) seria $\frac{am}{m + n + p}$; e como x he expresso nesta quantidade, segue-se, que para termos a primeira parte, calcularemos o quarto proporcional ao numero proposto, á primeira das partes dadas, e á soma de todas estas (Arith. 197).

Probl. IV. *Despachou-se de Dreux para Brest hum Postilhaõ, cuja velocidade he tal, que em huma* *ma hora anda duas leguas. Oito horas depois se despachou outro de Paris para Brest, cuja velocidade he de tres leguas por hora. Pergunta-se, onde se haõ de encontrar, sabendo-se tambem, que a distancia de Paris a Dreux he de 17 leguas.*

Se me dissessem, quantas leguas devia andar o segundo Postilhaõ para se encontrar com o primeiro, eis-aqui como verificaria este numero. Buscaria que jornada teria feito o primeiro no tempo, em que o segundo tinha feito a sua, calculando o quarto termo desta proporçaõ $3 : 2 ::$ o numero de leguas corridas pelo segundo he para o numero de leguas, que o primeiro terá andado no mesmo tempo. A este quarto termo ajuntaria o numero de leguas, que o primeiro Postilhaõ devia ter andado nas 8 horas de antecipaçaõ da partida, como tambem as 17 leguas do intervallo de Paris a Dreux, que elle tinha igualmente de avanço; a soma daria o numero de leguas corridas pelo segundo. Procedendo pois desta maneira

Seja o numero de leguas corridas pelo segundo x
No mesmo tempo o primeiro andará - - - $\frac{2}{3} x$
E nas 8^h de avanço - - - - - - - - - - - - - 16
E pela distancia de Paris a Dreux - - - - 17

Estas tres quantidades fazem a soma $\frac{2}{3} x + 33$ isto he, o numero de leguas que deverá andar o segundo, para se encontrar com o primeiro

Logo $\frac{2}{3} x + 33 = x$, e conseguintemente $x = 99$; quer dizer, que os dous Postilhões deveraõ encontrar-se a 99 leguas de Paris.

Com effeito, no tempo em que o segundo andar 99 leguas, o primeiro andará 66, estas juntatamente com as 16 leguas de adiantamento em razaõ das 8 horas, e com as 17 leguas de avanço, por partir de Dreux, fazem a ſoma de 99: logo eſtaraõ ambos ao meſmo tempo no meſmo lugar.

Em geral, ſeja o intervallo dos lugares da partida $= a$, a differença entre os tempos da partida $= b$, a velocidade do primeiro Poſtilhaõ $= c$, a do ſegundo $= d$, o eſpaço que deve andar o ſegundo para ſe encontrar com o primeiro $= x$: diſcorrendo, como havemos feito precedentemente, teremos $x = \frac{cx}{d} + bc + a$, donde ſe tira $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, que dá a ſoluçaõ de todos os problemas deſta eſpecie, pelo menos em quanto ſe ſuppõe, que os dous Poſtilhões vaõ para a meſma parte, e que a partida do que anda menos precede á do mais veloz.

Para moſtrarmos o uſo deſta formula, tornemos ao exemplo precedente. Como neſte caſo $a = 17^l$, $b = 8^h$, $c = 2^l$, $d = 3^l$, o valor geral de x ſe torna em $x = \frac{17.3 + 8.2.3}{3 - 2} = 51 + 48 = 99^l$, como acima.

O uſo pois das ſoluções geraes he tal, que ſe ſubſtituirmos em lugar das letras os numeros, que ellas repreſentaõ, e fizermos as operações indicadas pela diſpoſiçaõ e ſinais das meſmas letras, acharemos a reſoluçaõ de todos os problemas particulares da meſma eſpecie.

Por exemplo, ſe nos propuzeſſem eſte problema: *A agulha das horas de hum relogio correſponde a* $17'$, *e a dos minutos a* $24'$, *iſto he, ſaõ* $3^h\ 24'$; *pergunta-ſe, quando eſtaraõ as duas agulhas huma ſobre a outra.*

Como as duas agulhas ſe movem ao meſmo tempo, a quantidade b he cifra neſte caſo; a ou o eſpapaço que a agulha dos minutos deve correr desde a vigesima quarta divisaõ do quadrante até a decima septima, he igual a 53 divisões; $c = 5$; $d = 60$. Temos pois $x = \frac{53 \cdot 60}{60 - 5} = 57 \frac{9}{11}$, isto he, deverá a agulha dos minutos correr ainda 57 divisões e $\frac{9}{11}$; e como ella correspondia á vigesima quarta divisaõ, deverá corresponder a 81 divisões e $\frac{9}{11}$, ou, pois que huma circumferencia consta de 60 divisões, as duas agulhas estaraõ huma sobre a outra aos $21' \frac{9}{11}$ da hora seguinte, isto he, ás $4^h\, 21' \frac{9}{11}$.

Alem da vantagem exposta das soluções litteraes, ha outra, a qual consiste em que muitas vezes as formulas, precedendo certas preparações, admittem o enunciarem-se de hum modo simples, e facil de se conservar na memoria. Por exemplo, a formula ultimamente achada $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, na qual a quantidade d he factor commum dos dous termos do numerador, póde escrever-se por este modo, $x = \frac{(a + bc)\, d}{d - c}$, onde se vê, que x he o quarto termo da proporçaõ, cujos tres primeiros seriaõ $d - c : d :: a + bc$. Porem $d - c$ denota a differença das velocidades dos dous Postilhões; d denota a velocidade do segundo; e $a + bc$ compõe-se do intervallo a dos dous lugares da partida, e da quantidade bc, que exprime o espaço corrido pelo primeiro Postilhaõ no tempo que tem de avanço, de maneira que $a + bc$ representa a jornada que tem feito o primeiro até o instante, em que o segundo começa a sua, ou todo o avanço que o primeiro ganhou em rasaõ de partir mais cedo, e de hum lugar mais adiantado. Logo a resoluçaõ do problema pode reduzir-se a este enunciado: Havendo multiplicado a velocidade do primeiro Postilhaõ pelo tempo que tem de avanço, some-se o producto com o intervallo dos lugares da partida; e buscando depois o quarto proporcional á differença das velocidades, á velocidade do segundo, e á soma achada, elle determinará o lugar do encontro. Pelo que no nosso primeiro exemplo, tendo o primeiro Postilhaõ 8^h de avanço, e 2^l de velocidade, somaremos 16^l com 17^l intervallo dos dous lugares, o que dá 33; e calculando o quarto termo da proporçaõ $3 - 2$ ou $1 : 3 :: 33 :$, acharemos 99, como acima.

Ultimamente, ainda que entrem fracções, a regra sempre he a mesma. Por exemplo, se o primeiro Postilhaõ andasse 7^l em 4^h, o segundo 13^l em 5^h; se o primeiro se antecipasse 15^h, e o intervallo dos dous lugares da partida fosse de 42^l; diriamos: andando o primeiro 7^l em 4^h, vem a andar $\frac{7}{4}$ de legua por hora, e por tanto esta he a velocidade do primeiro; do mesmo modo a velocidade do segundo he de $\frac{13}{5}$ de legua por hora. Assim multiplicando $\frac{7}{4}$ por 15, e somando o producto $\frac{105}{4}$ com 42, teremos $\frac{273}{4}$; calculando pois o quarto termo da proporçaõ $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$; este quarto termo $\dfrac{\frac{13}{5} \times \frac{273}{4}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou $\dfrac{\frac{3549}{20}}{\frac{17}{20}}$, ou $\frac{3549}{17}$, ou $208\frac{13}{17}$

he

he o numero de leguas, que o ſegundo Poſtilhaõ deverá andar.

Reflexões ſobre as quantidades poſitivas, e negativas.

69 AS formulas gerais ſervem naõ ſómente para reſolver todos os problemas analagos por ſimples ſubſtituições, mas tambem para achar em muitos caſos a ſoluçaõ de outros, cujas condições ſejaõ em tudo oppoſtas áquellas, a que ſe havia ſatisfeito primeiramente; e para iſſo baſta ordinariamente huma ſimples mudança de $+$ em $-$, ou de $-$ em $+$ nos ſinais das quantidades. Mas antes de moſtrarmos eſte novo uſo dos ſinais, conſideremo-los em outro ponto de viſta.

As letras naõ repreſentaõ mais que os valores abſolutos das quantidades. Os ſinais $+$ e $-$ naõ tem repreſentado até aqui mais do que as operações da addiçaõ e ſubtracçaõ; porem podem repreſentar tambem em muitos caſos a exiſtencia relativa de humas quantidades a reſpeito de outras.

Huma quantidade póde conſiderar-ſe em dous ſentidos oppoſtos, ou como capaz de augmentar outra quantidade, ou como capaz de a diminuir; mas em quanto ella ſe repreſenta meramente por huma letra, ou por hum numero, naõ ſe ſaberá em qual dos dous ſentidos ſe conſidera. Por exemplo, ſe hum homem tiver tantos bens como dividas, o meſmo numero póde ſervir para exprimir a quantidade numerica de ambas as couſas, porem eſte numero naõ moſtrará a differença que ha entre ellas. O meio mais natural de a declarar he deſigna-las por hum ſinal, que indique o effeito que humas pódem produzir ſobre as outras; e como o effeito das dividas he diminuir os bens, que cada hum poſſue, fica muito natural deſignar aquellas, applicando-lhes o ſinal —.

Do meſmo modo, ſe conſiderarmos huma linha recta (*Fig.* 1) como gerada pelo movimento de hum ponto A na direcçaõ perpendicular á linha BC, he claro, que ainda que ſe repreſente por a o eſpaço AD ou AE, que elle tem corrido, naõ ſe determina com iſſo abſolutamente a ſua ſituaçaõ, pois que o ponto tanto póde mover-ſe de A para D, como de A para E. O meio de a fixar he indicar por algum ſinal, ſe a quantidade a eſtá á direita ou á eſquerda, e para iſſo ſaõ muito proprios os ſinais $+$, e $-$; por quanto referindo o movimento do ponto A a outro ponto L conhecido, e conſiderado como termo fixo, quando o ponto A ſe move para D, a linha que deſcreve tende a augmentar LA, e quando ſe move para E, a linha que deſcreve tende a diminuir LA, e conſeguintemente he natural o repreſentar AD por $+a$, ou ſimpleſmente por a, e AE por $-a$. Seria o contrario, ſe reportaſſemos o movimento do ponto A ao ponto O.

Tem pois as quantidades negativas huma exiſtencia taõ real como as poſitivas; a unica differença, que ha entre ellas, he o tomarem-ſe no calculo em ſentido contrario, e por tanto as regras, que havemos dado para as differentes operaçóes ſobre as quantidades, ſaõ as meſmas, ſeja qual for o ponto de viſta, em que eſtas ſe conſideraõ. Tanto humas como outras pódem achar-ſe, e muitas vezes ſe achaõ miſturadas juntamente no meſmo calculo. Acontece iſto, naõ ſó porque certas operações conduzem a tirar certas quantidades de outras, como havemos visto; mas tambem porque muitas vezes no calculo ha necessidade de exprimir as differentes accepções, em que se tomaõ as quantidades.

70 Pelo que, se na resoluçaõ de hum problema o valor da incognita sahir negativo; por exemplo, se chegarmos a hum resultado como $x = -3$; concluiremos que a quantidade designada por x naõ tem as propriedades, que lhe attribuimos, ou suppuzemos no calculo, mas outras em tudo contrarias. Propondo-se, por exemplo, este problema: *Achar hum numero, que sendo junto a* 15 *dê* 10, o qual he evidentemente impossivel; se representarmos o numero buscado por x, teremos $x + 15 = 10$, e conseguintemente $x = -5$. Esta ultima conclusaõ pois nos mostra, que x, o qual se tinha considerado como devendo ajuntar-se a 15 para formar 10, deve pelo contrario ser tirado. Deste modo toda a soluçaõ negativa indica alguma supposiçaõ falsa no enunciado do problema; mas indica ao mesmo tempo a correcçaõ, mostrando que a quantidade procurada se deve tomar em hum sentido totalmente opposto áquelle, em que d'antes havia sido tomada.

71 Concluamos pois, que havendo resolvido hum problema, no qual algumas quantidades se tenhaõ tomado em hum sentido, se o quizermos resolver, tomando as mesmas quantidades em sentido totalmente opposto, bastará mudar os sinais, que actualmente tem as mesmas quantidades. Por exemplo, no problema quarto, resolvido geralmente para o caso em que os Postilhões caminhassem para a mesma parte, se quizermos ter a reso-

lu-

luçaõ de todos os problemas, que ſe pódem propôr no caſo em que elles venhaõ de partes oppoſtas a encontrar-ſe hum com o outro, mudaremos o ſinal de c no valor achado $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$. Com effeito, neſte caſo o primeiro Poſtilhão, como em lugar de ſe apartar ſe avizinha do ſegundo, diminue a jornada que eſte devia fazer, e diminue-a em razaõ da ſua velocidade c, ou do eſpaço que corre em huma unidade de tempo; devemos pois exprimir, que c em lugar de augmentar diminue, iſto he, eſcrever $-c$ em lugar de $+c$. Eſta mudança dá $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$; porque $+bcd = + bd(+c)$; logo, mudando o ſinal, teremos $+bd(-c) = -bcd$.

Confirmemos tudo iſto com hum exemplo. Supponhamos que dous Poſtilhões vem de partes contrarias, e ſahem de dous lugares, cujo intervallo he de 100 leguas: o primeiro parte 7 horas antes do ſegundo, e tem velocidade de 2^l por hora; o ſegundo anda 3^l por hora. Seja x a jornada, que eſte deve fazer para ſe encontrar com o primeiro. He claro, que x ſerá igual á differença entre a diſtancia total, e o eſpaço corrido pelo primeiro; e como eſte eſpaço ſe compõe do que elle póde andar nas ſete horas, iſto he, de 14^l, e do que tiver andado em quanto o ſegundo caminhar, iſto he, de $\frac{2}{3}x$; teremos $x = 100 - 14 - \frac{2}{3}x$, e conſeguintemente $x = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$. Ora ſe na formula $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$, a qual, como diſſemos, pertence a eſte caſo, ſubſtituirmos 100 por a,

7

7 por b, 3 por d, e 2 por c, teremos do mesmo modo $x = 51\frac{3}{5}$.

A' medida que nos formos adiantando, teremos o cuidado de fixar cada vez mais a idêa, que se deve fazer das quantidades negativas.

72 Como convem muito adquirir facilidade de pôr os problemas em equaçaõ, ajuntamos aqui alguns simples para exercicio dos principiantes, contentando-nos com dar os resultados, os quais serviraõ para confirmar as suas tentativas. Depois de os terem resolvido nos numeros em que saõ propostos, deveraõ substituir letras aos numeros, e exercitar-se na resoluçaõ litteral: imitando assim as soluções particulares, se adquire a facilidade de genaralizar, e estender as idêas.

Achar hum numero, que sendo successivamente junto a 5, *e a* 12, *dê duas somas, as quais sejaõ entre si como* 3 *para* 4 . . . . . Resp. 16.

Achar hum numero tal, que reunindo a sua ametade, terço, e $\frac{2}{5}$, *se forme huma soma, a qual tenha* 7 *de excesso sobre o numero procurado* . . Resp. 30.

Andaõ trabalhando tres officiais, dos quais o primeiro faz 5 *braças de obra por dia, o segundo* 7, *e o terceiro* 8: *em que tempo faraõ* 100 *braças, trabalhando juntamente todos tres?* . . . Resp. 5^d.

Ajustou-se hum official preguiçozo a razaõ de 24 *soldos por cada dia em que trabalhasse; mas com condiçaõ de se lhe descontarem* 6 *soldos por cada dia, em que naõ trabalhasse. Passados* 30 *dias fez-se-lhe a conta, e achou-se que nada tinha de receber. Quantos dias trabalhou?* . . . . , Resp. 6^d.

Hum homem comprou hum cavallo, que vendeo com 100 *libras de ganho: sabe-se que o lucro foi de* 10

por

por cento. Por quanto o comprou? . . Resp. por 900^l.

Pagou-se certa quantia em 15 pagamentos, que se fizeraõ sempre progressivamente com augmento da mesma quantidade; o primeiro pagamento foi de 7 lib., e o ultimo de 37. Quanto era o augmento de cada hum? Resp. de $2\frac{1}{7}$.

Temos agua do mar, que em 32 libras contem huma de sal. Que porçaõ de agua doce se deverá ajuntar-lhe, para que em 32 libras de misto naõ haja mais que duas onças de sal? . . . . Resp. 224 *libras*.

Das Equações lineares a muitas incognitas.

73 QUalquer que seja o numero das incognitas, o methodo de pôr o problema em equaçaõ (67) he sempre o mesmo. Mas em geral, he necessario formar tantas equações, como permittirem as condições. Se todas estas forem distinctas, e independentes humas das outras, e se alem disso cada huma se podér exprimir por huma equaçaõ, o problema naõ poderá ter mais que huma soluçaõ, no caso de serem as equações todas do primeiro gráo, e de serem ao mesmo tempo tantas as equações quantas as incognitas. Se porem alguma das condições se achar implicita ou explicitamente comprehendida em alguma das outras, ou se o numero das condições for menor que o numero das incognitas; teremos menos equações que incognitas, e por tanto a questaõ poderá ter huma infinidade de soluções, excepto quando o numero destas for limitado por alguma condiçaõ particular, que naõ possa exprimir-se por equaçaõ. De tudo isto daremos exemplos. Sup-

Supponḍo primeiramente duas equações, e duas incognitas, a regra que se deve ajuntar ás que havemos dado ácerca das equações a huma incognita, he a seguinte.

74 *Tome-se em cada equação o valor de huma mesma incognita, e igualando os dous valores, teremos huma equação á segunda incognita. Sendo achado o valor desta pelas regras precedentes, faça-se substituição delle em qualquer dos dous valores, que se tomarão pela primeira operação, e assim determinaremos a segunda incognita.*

Exemplo I. Tendo as duas equações $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$, tomaremos em ambas o valor de x, e acharemos na primeira $x = \frac{24 - y}{2}$, e na segunda $x = \frac{65 - 3y}{5}$. Igualando estes dous valores, teremos $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$. Esta equação não inclue mais do que a segunda incognita y, e dá $y = 10$.

Para termos x, substituiremos em lugar de y o seu valor 10 no primeiro valor de x, que he o mais simples, e acharemos $x = 7$.

75 Exemplo II. Se tivermos $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, e $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$; acharemos primeiramente $x = \frac{60 + 25y}{24}$, e $x = \frac{228 - 9y}{8}$. Logo $\frac{60 + 25y}{3} = 228 - 9y$, e conseguintemente $y = \frac{624}{52} = 12$.

Substituindo este valor na segunda expressão de x, teremos $x = \frac{120}{8} = 15$.

76 Exemplo III. Se forem propostas as duas equa-

equações $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$, e $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$; deduziremos $x = \frac{20y - 420}{7} = \frac{55y - 420}{56}$, ou $4y - 84 = \frac{11y - 84}{8}$, da qual ſe tira $y = \frac{588}{21} = 28$. Subſtituindo eſte valor na equaçaõ $x = \frac{20y - 420}{7}$, teremos $x = 20$.

77 Exemplo IV. Em geral, as duas equações $ax + by = c$, e $dx + fy = e$, em que a, b, c, d, e, f denotaõ quantidades conhecidas, poſitivas, ou negativas, daõ $x = \frac{fc - be}{af - bd}$, e $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

78 Quando as duas incognitas naõ ſe acharem ambas em cada huma das equações, o calculo naõ differirá dos precedentes, ſenaõ em ſer mais ſimples.

Por exemplo, ſe tivermos $5ax = 3b$, e $cx + dy = e$, a primeira dará $x = \frac{3b}{5a}$, e a ſegunda $x = \frac{e - dy}{c}$: logo $\frac{3b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$, donde ſe tira $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

Das Equações lineares a tres, e mais incognitas.

79 DO que fica dito ſe deduz facilmente o methodo de reſolver as equações, quando for mais conſideravel o numero das incognitas, ſuppondo que ha igual numero de humas e outras.

Se tivermos tres equações, *tome-ſe em cada hu-*

huma o valor de huma mesma incognita, e iguale-se o primeiro ao segundo, e o primeiro ao terceiro; ou o primeiro ao segundo, e o segundo ao terceiro, e assim se reduzirá este caso ao precedente (74).

Sejaõ, por exemplo, as tres equações,

$$3x + 5y + 7z = 179$$
$$8x + 3y - 2z = 64$$
$$5x - y + 3z = 75$$

Da primeira tiro $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

Da segunda . . $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Da terceira . . . $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Igualando o primeiro ao segundo, tenho - - - $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Igualando o primeiro ao terceiro, tenho - - - $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Observando agora nestas duas equações a regra dada (74), acharemos $z = 15$, e $y = 10$.

Para ter x, substituaõ-se estes valores em huma das suas expressões, e teremos $x = 8$.

80 O calculo será mais simples, quando as incognitas naõ entrarem todas juntamente em cada huma das equações.

Sejaõ, por exemplo, as tres equações, $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$.

A primeira e a terceira daõ $x = \frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, e combinando esta ultima com a segunda, acharemos $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

81 Sendo maior o numero das equações, *tome-se em cada equaçaõ o valor de huma mesma incogni-*

gnita, iguale-ſe hum deſtes valores a cada hum dos outros, e haverá de menos huma equaçaõ e huma incognita. Tratem-ſe eſtas novas equações como as primeiras, e haverá tambem de menos huma equaçaõ e huma incognita. Continue-ſe aſſim por diante, até que finalmente ſe chegue a naõ ter mais que huma incognita.

82 Tambem podemos determinar os valores das incognitas pelo methodo ſeguinte, que he util em muitas occaſiões.

Sejaõ as duas equações $3x + 4y = 81$, e $3x - 4y = 9$. Se tirarmos a ſegunda da primeira, teremos $8y = 72$, e conſeguintemente $y = 9$: ſe pelo contrario as ajuntarmos, teremos $6x = 90$, e conſeguintemente $x = 15$. He pois manifeſto, que quando o coefficiente de huma das incognitas he o meſmo em cada huma das duas equações, eſtas muito facilmente por meio da addiçaõ, ou da ſubtracçaõ ſe reduzem a naõ terem mais que huma incognita.

83 Pode-ſe dar ſempre o meſmo coefficiente á meſma incognita, multiplicando huma das duas equações por hum numero conveniente, o qual ſe achará da maneira ſeguinte.

Sejaõ as duas equações $4x + 3y = 65$, e $5x + 8y = 111$. Repreſentando por m o numero de que ſe trata, multiplique-ſe por elle huma das duas equações, a ſegunda, por exemplo, e teremos $5mx + 8my = 111m$. Ajuntando eſta com a primeira, acharemos $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Agora para eliminar x, ſupporemos que o numero m he tal, que $4 + 5m = 0$, donde ſe tira $m = -\frac{4}{5}$. Eſta hypotheſe reduz a equaçaõ a

(3

$(3+8m)y = 65 + 111m$, que dá $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$
$= \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7$. O meſmo aconteceria, ſe multiplicaſſemos a primeira por 5, coefficiente de x na ſegunda, e eſta por 4, coefficiente de x na primeira, e tiraſſemos o ſegundo producto do primeiro. Se quizeſſemos porem eliminar y, ſupporiamos $3 + 8m = 0$, que dá $m = -\frac{3}{8}$; e conſeguintemente a equaçaõ ſe reduziria a $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, donde ſe tira $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m} = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11$.

84 Se tivermos tres equacões, e tres incognitas; multiplicaremos a ſegunda por hum numero m, e a terceira por outro n; e ajuntando os productos com a primeira, ſupporemos o coefficiente de cada huma de duas das incognitas x, y, e z igual a nada, e teremos aſſim duas equações para determinar m e n, as quais ſe trataraõ como no caſo precedente.

Tomemos para exemplo as tres equações

$$3x + 5y + 7z = 179$$
$$8x + 3y - 2z = 64$$
$$5x - y + 3z = 75$$

Multiplicando a ſegunda por m, a terceira por n, e ajuntando os productos com a primeira, teremos $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Para achar o valor de z, ſupporemos $3 + 8m + 5n = 0$, e $5 + 3m - n = 0$; e a equaçaõ ſe re-

reduzirá a $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, donde ſe tira $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$.

Determinemos agora m e n por meio das duas equações hypotheticas, multiplicando, como no caſo precedente, a ſegunda por p, e ajuntando o producto com a primeira. Eſta operaçaõ dará $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$, a qual, ſuppondo $8 + 3p = 0$, ou $p = -\frac{8}{3}$ afim de ter n, ſe reduzirá a $3 + 5p + (5 - p)n = 0$; logo $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p} = \frac{31}{23}$. Semelhantemente acharemos $m = -\frac{28}{23}$. Subſtituindo pois eſtes valores na expreſſaõ de z, teremos $z = 15$.

Pelo que fica dito ſe percebe o modo, porque deveriamos praticar, ſe em lugar de z quizeſſemos ter x ou y. Porem, havendo determinado huma das incognitas, he eſcuſado começar de novo hum calculo ſemelhante para cada huma das outras; baſta ſubſtituir o valor achado em todas as equações propoſtas menos huma, e aſſim ſe determinaõ os outros valores como no caſo de haver huma equaçaõ de menos. No noſſo exemplo, tendo achado $z = 15$, ſubſtituiremos eſte valor tanto na ſegunda equaçaõ como na terceira, e entaõ por meio de duas equações a duas incognitas acharemos $y = 10$, e $x = 8$

85 Por qualquer dos dous methodos expóſtos ſe pódem deduzir formulas gerais, que repreſentem os valores das incognitas em todos os caſos imaginaveis. Aſſim, exprimindo geralmente duas equações do primeiro gráo a duas incognitas por $ax + by + c = 0$, e $a'x + b'y + c' = 0$, como he

he ſempre poſſivel, tranſpondo todos os termos para hum membro; acharemos . . . .

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},\quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Do meſmo modo, repreſentando tres equaçóes do primeiro gráo a tres incognitas por $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, acharemos que os valores de x, y, e z ſe exprimem da maneira ſeguinte.

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

Para 4 equaçóes, e 4 incognitas achariamos quatro fracçóes, as quais teriaó 24, iſto he, 1. 2. 3. 4 termos no numerador, e outros tantos no denominador. Para 5 incognitas ſe achariaó 120, ou 1. 2. 3. 4. 5 termos, 720 ou 1. 2. 3. 4. 5. 6 para 6; e aſſim por diante.

Podemos porem abbreviar hum calculo taó longo, reflectindo na fórma dos valores achados, e nos que ſe achariaó do meſmo modo para quatro equaçóes, e quatro incognitas. Porque 1.º ſeja qual for o numero das incognitas x, y, e z, os ſeus valores tem todos o meſmo denominador.

2.º O numerador de qualquer dos valores ſe fórma do ſeu denominador, trocando neſte o coefficiente da incognita reſpectiva pela ultima letra d da equaçaó, e mudando os ſinais. Por exemplo, ſe no denominador de x ultimamente achado mudarmos

mos a em d, a' em d', a'' em d'', e fizermos mudança dos finais, teremos o numerador.

Para achar a regra que dá o denominador commum, noto 1.º que no caso de huma equaçaõ, e huma incognita, como em $ax + b = 0$, o denominador he a. 2.º No caso de duas equações, e duas incognitas, he $ab' - a'b$. 3.º No caso de tres equações, e tres incognitas, he $(ab' - a'b)\,c'' + (a''b - ab'')\,c' + (a'b'' - a''b')\,c$.

Noto mais, que o denominador $ab' - a'b$ no caso de 2 incognitas, se fórma de a denominador no caso de huma incognita, multiplicando a por b', depois mudando em ab', $'$ em o, e o em $'$ (por o entendemos o accento da letra naõ accentuada) e ultimamente fazendo mudança de $+$ em $-$.

Semelhantemente, o denominador no caso de 3 incognitas se fórma do denominador no caso de 2 incognitas: 1.º multiplicando este por c'': 2.º mudando $''$ em $'$, e $'$ em $''$, e tambem os finais: 3.º mudando neste ultimo resultado $'$ em o, e o em $'$, e os finais.

Logo o denominador para 4 incognitas se achará 1.º multiplicando o que convem a 3 por d''': 2.º mudando $'''$ em $''$, e $''$ em $'''$, e os finais: 3.º mudando neste segundo resultado $''$ em $'$, e $'$ em $''$, e os finais: 4.º mudando neste terceiro $'$ em o, o em $'$, e os finais. Bem se vê o que se devia fazer no caso de ser maior o numero das incognitas.

Temos pois huma regra geral, por meio da qual se podem determinar separadamente os valores das incognitas nas equações do primeiro gráo.

E ainda que se devaõ calcular todos os denominadores, que pertencem a todas as equações de

me-

menor numero de incognitas, com tudo a regra naõ conduz a calculos ſuperfluos; tudo o que por ella ſe calcula, entra neceſſariamente na quantidade, que ſe buſca. Veja-ſe a *Theoria geral das Equações*, que publicamos em 1779.

Applicaçaõ á reſoluçaõ de alguns Problemas.

86 PRobl. I. *Hum homem tem duas eſpecies de moeda; 7 peças da eſpecie de maior valor com 12 da ſegunda valem 288 libras; e 12 da primeira eſpecie com 7 da ſegunda fazem* 358^l. *Quanto vale cada eſpecie de moeda?*

Se o ſoubeſſemos, multiplicando o valor de huma peça da primeira eſpecie por 7, e o de huma peça da ſegunda por 12, a ſoma dos productos daria 288 libras. Do meſmo modo, multiplicando o valor de huma peça da primeira eſpecie por 12, e da ſegunda por 7, a ſoma dos productos daria 358^l.

Iſto poſto, ſeja o numero de libras, ou o valor de huma peça da primeira eſpecie $= x$, e o da ſegunda $= y$. Logo $7x + 12y = 288$, e $12x + 7y = 358$.

Para acharmos agora x e y, tomaremos em ambas as equações o valor de x, e igualando os dous valores teremos $x = \frac{288 - 12y}{7} = \frac{358 - 7y}{12}$; donde ſe tira $y = 10$, e conſeguintemente $x = 24$: logo as maiores peças eraõ de 24^l, e as menores de 10^l. Com effeito, 7 peças de 24^l valem 168^l, e eſtas com 12 de 10^l, ou com 120^l fazem a ſoma de 288^l. De mais, 12 peças de 24^l, que fazem 288^l, com 7 de 10^l valem 358^l.

Probl. II. *Fes-se hum misto de ouro e prata, cujo volume he de 12 pollegadas cubicas, e o pezo de 100 onças. A pollegada cubica de ouro peza 12 onças $\frac{2}{3}$, e huma pollegada cubica de prata peza $6\frac{8}{9}$. Pergunta-se, que quantidades de ouro e prata entráraõ nesta liga.*

Seja x o numero de pollegadas cubicas de ouro, e y o numero de pollegadas cubicas de prata; teremos $x + y = 12$. Por outra parte, pezando cada pollegada cubica de ouro $\frac{38}{3}$ de onça, o numero x de pollegadas cubicas pezará $\frac{38x}{3}$. Pela mesma razaõ, y de pollegadas cubicas de prata pezará $\frac{62y}{9}$. Logo o ouro e a prata pezaraõ juntamente $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9}$, e conseguintemente teremos $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$.

Destas duas equações se tira $x = 12 - y = \frac{450 - 31y}{57}$; logo $57(12 - y) = 450 - 31y$, que dá $y = 9$, e conseguintemente $x = 3$, isto he, misturaraõ-se 3 pollegadas cubicas de ouro com 9 de prata. Com effeito, $9 + 3 = 12$, e $38 + 62 = 100$.

Se as duas materias que se misturaraõ tivessem gravidades especificas differentes das suppostas (por gravidade especifica entendemos o pezo de hum determinado volume), e se tanto o pezo total do misto, como o seu volume fossem outros quaisquer; o methodo para achar as quantidades de cada especie de materia, naõ deixaria porisso de ser o mesmo. Assim, para incluir todas as soluções dos problemas deste genero em huma unica, seja

A

A quantidade da primeira materia - - - x
A da ſegunda - - - - - - - - - - - y
A do compoſto - - - - - - - - - - - a
Reportando-ſe a, x e y à meſma unidade de volume, pór exemplo, a pollegadas cubicas.
O pezo total do miſto - - - - - - - - b
A gravidade eſpecifica, ou o pezo da unidade adoptada de volume, da primeira materia - c
A da ſegunda - - - - - - - - - - - d
Exprimindo-ſe b, c, d na meſma unidade de pezo; v. g. em onças.
Iſto poſto; teremos $x + y = a$, e $cx + dy = b$; logo $x = \frac{b - ad}{c - d}$, e $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Eſtes valores daõ huma regra ſuſceptivel de huma enunciaçaõ commoda. Porque, ſendo $b - ad = a\left(\frac{b}{a} - d\right)$, e $ac - b = a\left(c - \frac{b}{a}\right)$, as noſſas formulas podem reduzir-ſe a - - - -
$x = \frac{a\left(\frac{b}{a} - d\right)}{c - d}$; e $y = \frac{a\left(c - \frac{b}{a}\right)}{c - d}$; iſto he, ás duas analogias.

$$c - d : \frac{b}{a} - d :: a : x$$

$$c - d : c - \frac{b}{a} :: a : y.$$

E como $\frac{b}{a}$ he o pezo da unidade de volume do compoſto, ou a ſua gravidade eſpecifica, podemos enunciar a regra geral para reſolver todos os problemas deſta eſpecie da maneira ſeguinte.

Como a differença entre as gravidades eſpecificas dos ſimplices para a differença entre as gravidades eſpecificas do compoſto e do ſimples mais leve, aſſim a

 quan-

quantidade do composto para a parte que entrou do simples mais pezado.

Como a differença entre as gravidades especificas dos simplices para a differença entre as gravidades especificas do composto e do simples mais pezado, assim a quantidade do composto para a parte que entrou do simples mais leve.

Esta regra he a mesma a que (Arith. 200) demos o nome de *Regra de Liga Inversa*, cuja demonstraçaõ reservamos para esta parte.

Ao mesmo problema se podem reduzir infinitos outros, que á primeira vista naõ parecem da mesma especie. Por exemplo este: *Fazer de 522 libras 42 peças, humas de 24^l, e outras de 6^l*; porque vem a ser o mesmo que o de *hum misto*, cuja quantidade (a) he 42, e o pezo (b) 522, sendo a gravidade especifica (c) do primeiro simples $= 24$, e a (d) do segundo $= 6$. Conforme a regra, acharemos que saõ necessarias 15 peças de 24^l, e 27 de 6^l.

A mesma regra serviria tambem para resolver o problema seguinte. *Pezando hum pé cubico de agua do mar 74^l, e hum de agua da chuva 70^l; quanto se deve misturar de huma e outra, para fazer agua que peze 73^l por pé cubico?*

Daqui se vê, quanto he util, como ja dissemos, o representar em geral as quantidades dadas que entraõ nos problemas, e interpretar ou traduzir os resultados algebricos das soluções.

Probl. III. *Temos tres barras, em cada huma das quais entra ouro, prata, e cobre. A liga da primeira he tal, que em 16 onças ha 7 de ouro, 8 de prata, e 1 de cobre. Na segunda em 16 onças ha 5 de ouro, 7 de prata, e 4 de cobre. Na terceira em 16 onças ha 2 de ouro, 9 de prata, e 5 de cobre.*

Per-

Pertende-se compôr huma quarta barra, com differentes porções destas tres ligas, tal que em 16 onças entrem 4 onças $\frac{15}{16}$ de ouro, 7 $\frac{10}{16}$ de prata, e 3 $\frac{7}{16}$ de cobre.

Representemos por x, y, e z o numero de onças, que se deve tomar respectivamente da primeira, segunda, e terceira barra.

Como 16 onças da primeira contem 7 de ouro, x conterá $\frac{7x}{16}$ do mesmo metal. Semelhantemente, tomando y da segunda e z da terceira, tomamos $\frac{5y}{16}$ e $\frac{2z}{16}$ de ouro. Teremos pois pela primeira condiçaõ do problema $\frac{7x+5y+2z}{16} = 4\frac{15}{16}$.

Logo - - - - - - - - - - $7x + 5y + 2z = 79$

Do mesmo modo a segunda condiçaõ dá - - - - $8x + 7y + 9z = 122$

E a terceira - - - - - - - $x + 4y + 5z = 55$

Eliminando x, teremos . . . .

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8},$$

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z.$$

Eliminando agora y, teremos . . . .

$$\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23};$$

Logo $z = 3$, $y = 9$, e $x = 4$: isto he; devemos tomar 4 onças da primeira barra, 9 da segunda, e 3 da terceira, para que a nova barra tenha 4 onças e $\frac{15}{16}$ de ouro, 7 $\frac{10}{16}$ de prata, e 3 $\frac{7}{16}$ de cobre.

Com effeito, tendo a primeira em 16 onças

7

7 de ouro, 8 de prata, e 1 de cobre, 4 onças conteraõ $\frac{28}{16}$ de ouro, $\frac{32}{16}$ de prata, e $\frac{4}{16}$ de cobre. Do mesmo modo, 9 onças da segunda teraõ $\frac{45}{16}$ de ouro, $\frac{63}{16}$ de prata, e $\frac{36}{16}$ de cobre, assim como 3 onças da terceira teraõ $\frac{6}{16}$ de ouro, $\frac{27}{16}$ de prata, e $\frac{15}{16}$ de cobre.

Reunindo as tres porções de cada metal, teremos $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$, ou $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ e $3\frac{7}{16}$ pelas quantidades de ouro, prata e cobre, que haõ de entrar na quarta barra.

Dos casos, em que os problemas ficaõ indeterminados, ainda que haja igual numero de equações, e de incognitas.

87 Tem isto lugar, quando algumas condições differem taõ sómente na apparencia. Entaõ as equações, que as exprimem, ou saõ multiplas humas das outras, ou, em geral, algumas dellas se compõem de huma ou de muitas outras somadas ou diminuidas, multiplicadas ou divididas por certos numeros. Por exemplo, hum problema que conduzisse a estas tres equações

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 17 \\ 8x + 2y + 4z &= 20 \\ 18x + 8y + 8z &= 54 \end{aligned}$$

ficaria indeterminado, isto he, seria susceptivel de hum numero indefinido de soluções; porque a ultitima equaçaõ compõe-ſe da ſegunda ſomada com o dobro da primeira, iſto he, ſegue-ſe neceſſariamente das duas primeiras, e por tanto naõ exprime condiçaõ nova: eſtamos pois realmente no caſo de ter ſómente as duas primeiras, e tres incognitas, no qual cada huma deſtas, como veremos, he ſuſceptivel de hum numero indefinido de valores.

88 Quando huma equaçaõ ſe comprehende nas outras, o calculo ſempre o declara, conduzindonos a huma equaçaõ *identica*, iſto he, a huma equaçaõ, na qual os dous membros conſtaõ de termos iguaes e ſemelhantes: de maneira que apareceraõ tantas equações identicas, quantas forem as inuteis das propoſtas.

Por exemplo, as duas equações $6x + 8y = 12$, e $x + \frac{4}{3}y = 2$ daõ $x = \frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, e conſeguintemente $12 - 8y = 12 - 8y$, equaçaõ identica, a qual naõ dá a conhecer o valor de y, porque depois das operações ordinarias achamos $0 = 0$. Logo huma equaçaõ he inutil: com effeito, a ſegunda ſe fórma da primeira dividida por 6.

Do meſmo modo as tres equações de cima daõ $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{20 - 2y - 4z}{8}$, e $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{54 - 8y - 8z}{18}$, donde eliminando y, ſe deduz a equaçaõ identica $\frac{36 + 4z}{14} = \frac{36 + 4z}{14}$; naõ temos pois neſte caſo mais que duas equações realmente diſtinctas.

Mas ſe tiveſſemos as tres equações ſeguintes

$$5x + 3y + 2z = 24$$
$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$
$$15x + 9y + 6z = 72$$

Achariamos . . . .

$600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, e $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$; equações identicas, das quais naõ ſe póde tirar nem y, nem z. Logo, propriamente fallando, ha huma unica equaçaõ; e bem ſe vê como as duas ultimas ſe fórmaõ da primeira.

89 Nos caſos de que acabamos de tratar, tanto o numerador como o denominador de cada hum dos valores (85) das incognitas x, y, z ſe reduzem a 0; e aſſim deve ſer. Podemos pois por meio das meſmas formulas geraes conhecer ſe humas equações ſe comprehendem nas outras.

Dos caſos em que os problemas ſaõ impoſſiveis.

90 A Impoſſibilidade de hum problema, cujas equações naõ paſſaõ do primeiro gráo, conheceſe por algum reſultado abſurdo, a que chegamos no decurſo do calculo.

Se tivermos, por exemplo, $5x + 3y = 30$, e $20x + 12y = 135$, igualando os dous valores de x, acharemos $600 = 675$; logo o problema, que conduziſſe ás duas equações propoſtas, ſeria impoſſivel, e abſurdo.

O meſmo acontecerá, quando o numero das equações for maior que o das incognitas, e nenhuma dellas ſe comprehender nas outras.

91 As foluções negativas indicaõ huma efpecie de impoffibilidade; porem efta naõ he abfoluta, he fomente relativa ao fentido, em que fe tomáraõ as quantidades; de forte que ha fempre hum, no qual as foluções faõ naturais, e admiffiveis (70). Os refultados incompativeis com as condições moftraõ tambem, que o problema he impoffivel; como, por exemplo, fe acharmos hum refultado fraccionario, devendo fer inteiro.

Dos Problemas indeterminados.

92 DAmos o nome de *Problema indeterminado* a todo aquelle, a que fe fatisfaz por muitos modos, fem que fe poffa determinar, qual he de todos elles o que tem particularmente lugar. Neftes problemas há fempre menos condições que incognitas; e ficando huma quantidade a arbitrio do Analyfta, faõ infinitas as foluções, falvo fe forem limitadas, como muitas vezes acontece, por algumas condições, as quais naõ podendo exprimir-fe em equações, naõ determinaõ directamente o numero de foluções, que o problema póde ter.

Propondo-fe, por exemplo, *Achar dous numeros, cuja foma feja* 24; reprefentando hum e outro por x e y, teremos $x + y = 24$, donde fe tira $x = 24 - y$. Bem fe vê que efte problema he fufceptivel de huma infinidade de foluções, fe por x, e y entendermos indifferentemente quaisquer numeros inteiros ou quebrados, pofitivos ou negativos: porque para fatisfazer á queftaõ bafta dar a y o valor que quizermos, e calcular o de x na equaçaõ $x = 24 - y$. Defte modo, fuppondo fucceffivamenmente $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, &c.

teremos $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$, &c.

Querendo porem ſómente numeros inteiros e poſitivos, he muito limitado o numero das ſoluções, porque entaõ y naõ deve ſer maior que 24, e a equaçaõ naõ póde ter mais que 25 ſoluções, contando o; de maneira que ſuppondo ſucceſſivamente $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, &c. teremos $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, &c.

Todos os problemas indeterminados podem reduzir-ſe á equaçaõ $ax + by = c$.

93 Para moſtrar o modo de reſolver eſtes problemas em numeros inteiros e poſitivos, quando ſeja dada huma tal condiçaõ, ſervem de muito os exemplos ſeguintes, porque nem ſempre he iſſo taõ facil como no precedente.

Probl. I. *Pergunta-ſe por quantos modos ſe podem pagar 542 libras, dando peças de* 17^l, *e recebendo em troco outras de* 11^l.

Seja x o numero de peças de 17^l, e y o numero de peças de 11^l, os quais devem ſer numeros inteiros. Como dando x peças de 17^l ſe pagaõ $17\,x^l$, e aceitando y peças de 11^l ſe recebem $11\,y^l$, he claro que ſe pagaõ $17x - 11y$; e porque o pagamento deve ſer de 542^l, teremos $17x - 11y = 542$. Tirando deſta o valor da incognita, que tem menor coefficiente, acharemos $y = \frac{17x - 542}{11}$, que ſe reduz pela diviſaõ a $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$.

De-

Devendo y ſer hum numero inteiro, tambem $\frac{6x-3}{11}$ o deverá ſer. Repreſentemos por E hum numero inteiro; teremos $\frac{6x-3}{11}=E$, e conſeguintemente $x=\frac{11E+3}{6}=E+\frac{5E+3}{6}$. Como x tambem deve ſer hum numero inteiro, he preciſo que $\frac{5E+3}{6}$ ſeja hum numero inteiro. Repreſente-ſe eſte por E'; teremos $\frac{5E+3}{6}=E'$, e conſeguintemente $E=\frac{6E'-3}{5}=E'+\frac{E'-3}{5}$.

He pois neceſſario que $\frac{E'-3}{5}$ ſeja hum numero inteiro: repreſentando-ſe eſte por E'', teremos $\frac{E'-3}{5}=E''$, donde ſe tira $E'=5E''+3$. A operaçaõ naõ paſſa adiante, porque tomando por E'' o numero inteiro que ſe quizer, teremos ſempre para E', que naõ tem denominador, hum numero inteiro como a queſtaõ requer.

Voltando agora aos valores de x e y, como temos $E=\frac{6E'-3}{5}$, ſerá $E=6E''+3$, e conſeguintemente $x=11E''+6$, e $y=17E''-40$. O valor de x dá a liberdade de tomar por E'' hum numero inteiro qualquer, mas o de y naõ permitte que ſe tome E'' menor que 3; porque y naõ ſerá poſitivo, ſenaõ for $17E''>40$, ou $E''>\frac{40}{17}$, iſto he, $E''>2$.

Pode-

Podemos pois ſatisfazer a eſte problema por huma infinidade de modos differentes, ſubſtituindo por E'' todos os numeros inteiros poſitivos deſde 3 até o infinito. Aſſim, pondo ſucceſſivamente $E'' = 3$, $E'' = 4$, $E'' = 5$, $E'' = 6$, $E'' = 7$ &c. teremos os valores correſpondentes de x, e de y, como aqui ſe moſtra.

$$\begin{array}{llll} x = 39 & \ldots & y = 11 \\ \quad = 50 & & \quad = 28 \\ \quad = 61 & & \quad = 45 \\ \quad = 72 & & \quad = 62 \\ \quad = 83, \text{ \&c.} & & \quad = 79 \end{array}$$

Em geral, $x = 39 + 11m$, e $y = 11 + 17m$.

Cada hum delles he tal, que dando o numero x de peças de 17^l, e recebendo o numero correſpondente y de peças de 11^l, pagaremos 542^l.

Probl. II. *Fazer 741 lib. em 41 peças de tres eſpecies; de* 24^l, *de* 19^l, *e de* 10^l.

Sejaõ x, y, e z os numeros de cada huma das tres eſpecies; teremos $x + y + z = 41$, e $24x + 19y + 10z = 741$.

Eliminando huma das incognitas, x por exemplo, teremos $x = 41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; logo $5y + 14z = 243$; e tomando o valor de y, acharemos $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$.

Como y e z devem ſer numeros inteiros, he neceſſario que $\frac{3 - 4z}{5}$ ſeja hum numero inteiro E: logo $\frac{3 - 4z}{5} = E$, e $z = -E + \frac{3 - E}{4}$. Deve pois

ſer

ser $\frac{3-E}{4} = E'$, donde se tira $E = 3 - 4E'$.

Fazendo agora as substituições necessarias nos valores de x, y, e z, teremos $z = 5E' - 3$, $y = 57 - 14E'$, e $x = 9E' - 13$.

Nestes tres valores em lugar de E' podemos substituir o numero inteiro que quizermos, com tanto que resultem numeros positivos para x, y, e z. Esta condiçaõ envolve as tres seguintes. 1.° Que seja $9E' > 13$, ou $E' > 1\frac{4}{9}$. 2.° Que seja $57 > 14E'$, ou $E' < 4\frac{1}{14}$. 3.° Que seja $5E' > 3$, ou $E' > \frac{3}{5}$; como acontecerá, todas as vezes que se houver satisfeito á primeira condiçaõ. Por este modo o numero das soluções he taõ limitado, que naõ passa de tres: para as achar daremos por valores a E' os numeros 2, 3 e 4, que saõ os unicos admissiveis. Logo as 741' naõ podem fazer-se em 41 peças das tres especies propostas de outra sorte, que naõ seja tomando os seguintes valores de x, y, e z.

$$x = 5 \ldots 14 \ldots 23$$
$$y = 29 \ldots 15 \ldots 1$$
$$z = 7 \ldots 12 \ldots 17$$

No progresso das divisões, que fazemos para reduzir o valor da indeterminada a hum numero inteiro, podemos tomar o quociente por cima do verdadeiro valor, e assim abbreviaremos muito o calculo em alguns casos.

Por exemplo, tendo a equaçaõ $19y = 52x + 139$, em lugar de concluir $y = 2x + 7 + \frac{14x+6}{19}$, concluiremos $y = 3x + 7 \frac{-5x+6}{19}$; por-

porque, sendo $3x$ o quociente mais proximo; o excesso $5x$, a que por compensação damos o sinal —, tem hum coefficiente menor, e conseguintemente o calculo se acabará mais depressa. Fazendo pois $\frac{-5x+6}{19} = E$, concluiremos pela mesma razaõ $x = 1 - 4E + \frac{1+E}{5}$; e fazendo $\frac{1+E}{5} = E'$, teremos $E = 5E' - 1$; logo $x = 5 - 19E'$, e $y = 21 - 52E'$. Deste modo dando por valores a E' todos os numeros negativos, acharemos todas as soluções positivas da equaçaõ. Se quizermos usar de numeros positivos, faremos $\frac{-5x+6}{19} = -E$, e depois $\frac{-E+1}{5} = -E'$, como he permittido, e teremos $x = 19E' + 5$, $y = 52E' + 21$.

Do mesmo modo, no problema II. onde devia ser $\frac{3-4z}{5} = E$, podemos tomar $-z + \frac{3+z}{5} = E$, e concluir $z = 5E - 3$.

Abbreviaõ-se muito estes calculos, somando ou diminuindo, multiplicando ou repartindo as quantidades, que devem ser numeros inteiros, por outros numeros inteiros. No problema I., multiplicando $\frac{6x-3}{11}$ por 2, teremos $\frac{12x-6}{11} = E$, e subtrahindo $\frac{11x}{11}$, acharemos $x = 11E + 6$, $y = 17E - 40$.

Probl. III. *Sendo o Circulo Solar huma revoluçaõ periodica de 28 annos, o Lunar ou Aureo Numero outra de 19 annos, e renovando-se a Indicçaõ Romana todos os 15 annos; pergunta-se qual he o anno da Era Vulgar, que tem tido 10 de Circulo Solar, 8 de Lunar, e 11 de Indicçaõ.*

Re-

Reduz-se o problema a achar hum numero, que sendo dividido por 28, 19, e 15 dê os restos 10, 8, e 11. Sendo pois x este numero, teremos $\frac{x-10}{28} = E$, $\frac{x-8}{19} = E'$, e $\frac{x-11}{15} = E''$. As duas primeiras daõ $E = 19E' + 4$, e $x = 532E' + 122$ Substituindo este valor de x na terceira, teremos $E' = 15E'' + 12$, e conseguintemente $x = 7980 E'' + 6506$.

Suppondo $E'' = 0$, $E'' = 1$, &c. teremos . . $x = 6506$, $x = 14486$, &c.

Para reduzir á Era vulgar estes annos, que pertencem ao Periodo Juliano, tiraremos de cada hum delles 4713, isto he, o anno do Periodo a que corresponde o principio da nossa Era. Fazendo pois esta applicaçaõ á primeira epoca, acharemos 1793. Logo desde o principio do mundo, conforme a Chronologia ordinaria, o anno de 1793 tem sido o unico, que reunio 17 de Circulo Solar, 6 de Numero Aureo, e 5 de Indicçaõ. O anno de 9773 da nossa Era será o unico, que no intervallo de 1793 até 9773 poderá satisfazer ás mesmas condições.

Das Equações do segundo grão a huma incognita.

94 CHamamos *Equações do segundo grão* a todas aquellas, em que a mais alta potencia da incognita he esta incognita multiplicada por si mesma, ou elevada ao quadrado. A equaçaõ $5x^2 = 125$ he do segundo grão, porque no termo $5x^2$

a

a quantidade x eſtá multiplicada por ſi meſma. Do meſmo modo $x^2 + px = q$ he huma equaçaõ geral do ſegundo gráo, ſendo p e q quaisquer quantidades conhecidas, poſitivas, ou negativas.

95 Quando $p = 0$, iſto he, quando a equaçaõ naõ inclue outra potencia da incognita, mais que o quadrado, reſolve-ſe eſta com muita facilidade, deſembaraçando o dito quadrado (56, 60, e 64) de tudo o que a multiplica ou divide, e tirando depois a raiz quadrada de cada membro.

Por exemplo, da equaçaõ pura do ſegundo gráo $5x^2 = 125$, dividindo pelo multiplicador 5, concluo $x^2 = 25$, e tirando a raiz quadrada de cada membro, $x = 5$; porque as raizes quadradas de quantidades iguais ſaõ tambem iguais. Do meſmo modo, ſe tivermos $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, acharemos pelas regras ordinarias $13x^2 = 105$, e depois $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$, iſto he, igual á raiz quadrada de $\frac{105}{13}$.

Uſamos deſte *final radical* para ſignificar, que ſe deve tirar a raiz quadrada. Havendo eſta de extrahir-ſe de huma fracçaõ, como no caſo preſente, devem as pernas do ſinal $\sqrt{}$ deſcer para baixo da riſca, que ſepara o numerador do denominanor; querendo porém repreſentar a raiz quadrada de hum termo ſómente da fracçaõ, o radical deve ficar todo por cima, ou por baixo da riſca da diviſaõ. Aſſim para notarmos que a raiz quadrada de 40 ſe ha-de dividir por 3, eſcreveremos $\frac{\sqrt{40}}{3}$.

Se for complexa a quantidade, de que quizermos

extra-

extrahir a raiz quadrada, daremos ao radical huma caudas com que se cubra toda a quantidade, ou tambem encerraremos esta entre parentheses: por exemplo, para representarmos a raiz quadrada de $3ab + b^2$, escreveremos $\sqrt{3ab + b^2}$, ou... $\sqrt{}(3ab + b^2)$.

96 Como (24) de $+ \times +$, e de $- \times -$ resulta igualmente $+$, segue-se, que á raiz quadrada de toda a quantidade que tiver o sinal $\sqrt{}$, se deve dar indifferentemente $+$, ou $-$. Assim na equaçaõ precedente $x^2 = 25$, podemos dizer com igual razaõ, que a raiz quadrada he $+5$, ou que he -5, porque cada numero destes multiplicado por si mesmo dá $+25$. A resoluçaõ pois da equaçaõ $x^2 = 25$ se deve escrever desta sórte $x = \pm 5$, que se lê dizendo *x igual a mais ou menos* 5, e equivale a estas duas equações $x = 5$, e $x = -5$; valores differentes, naõ obstante serem representados pela mesma letra x, pois sendo esta hum sinal pelo qual se exprime a quantidade que se busca, póde designar quantidades differentes.

Da mesma sórte, da equaçaõ geral $x^2 = q$ deduziremos $x = \pm \sqrt{q}$. Se dessemos ao primeiro membro o sinal ambiguo $\pm$, teriamos $\pm x = \pm \sqrt{q}$, da qual se tiraõ as quatro equações $+x = +\sqrt{q}$ $+x = -\sqrt{q}$, $-x = +q$, e $-x = -\sqrt{q}$. Como porém as duas ultimas naõ differem das duas primeiras, basta dar o sinal $\pm$ ao segundo membro.

97 Se tivermos de extrahir a raiz quadrada de huma quantidade precedida do sinal $-$, affectaremos tudo com o radical, dando-lhe tambem o sinal $\pm$. Assim se tivessemos $x^2 = -4$, escreveriamos $x = \pm \sqrt{-4}$, ou $x = \pm \sqrt{}(-4)$;

ainda que a raiz de 4 ſeja 2, naõ ſe ſegue que devamos eſcrever $x = \pm 2$; he eſſencial o attender ao ſinal — da quantidade que eſtá debaixo do radical.

98 Todas as vezes que huma equaçaõ conduzir deſte modo a tirar a raiz quadrada de huma quantidade negativa, concluiremos, que he impoſſivel o problema que deo tal equaçaõ. Com effeito, huma quantidade negativa naõ póde ter raiz quadrada, nem exacta, nem approximada, porque naõ he poſſivel achar huma quantidade, que multiplicada por ſi meſma dê producto negativo. He verdade, que -4, por exemplo, póde reſultar de $+2$ multiplicado por -2; mas tendo eſtas quantidades differente ſinal, naõ ſaõ iguais, e conſeguintemente o ſeu producto naõ he hum quadrado. Pelo que, quando ſe propõe tirar a raiz quadrada de huma quantidade negativa, propõe-ſe hum abſurdo, e conſeguintemente ſerá impoſſivel todo o problema, que depender de ſemelhante operaçaõ. Tal he o caracter, porque ſe diſtingue a impoſſibilidade dos problemas do ſegundo gráo.

Naõ deve porém reputar-ſe como inutil a conſideraçaõ das raizes quadradas das quantidades negativas: muitas vezes o problema he poſſivel, e ſem embargo diſſo ſómente admitte reſoluçaõ pelo concurſo deſta eſpecie de quantidades, nas quais por fim deſapparece o abſurdo. As raizes quadradas das quantidades negativas chamaõ-ſe *quantidades imaginarias*. Aſſim $\sqrt{-1}$ . . . $\sqrt{-2}$ . . . $\sqrt{-a}$ . . . $a + b\sqrt{-1}$ . . . $a + \sqrt{-b}$ ſaõ todas quantidades imaginarias.

99 Paſſando agora ás equações completas do ſegundo gráo, nas quais naõ he $p = 0$, como em $x^2 - 4x = 12$, he claro que ſe podermos *preparar*

o

o primeiro membro a fim de ſer hum quadrado perfeito, tirando depois a raiz quadrada de cada membro, ficará a equaçaõ reduzida ao primeiro gráo, e naõ terá difficuldade a ſua reſoluçaõ. Eſta preparaçaõ requer tres couſas: 1.º que ſe paſſem para hum membro (56) todos os termos affectos de x, e para o outro todas as quantidades conhecidas: 2.º que o termo x^2 ſe faça poſitivo (58): 3.º que eſte ſe deſembarace (60, 64) de todo o multiplicador, ou diviſor. Feito iſto, ſe ajuntarmos a cada membro o quadrado da ametade da quantidade conhecida que multiplica x, ficará completo (25) o quadrado do primeiro membro.

Por exemplo, para preparar a equaçaõ . . . $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$ que ſe pertende reſolver; 1.º paſſaremos todos os x para o primeiro membro, eſcrevendo x^2 em primeiro lugar, e teremos $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2.º faremos x^2 poſitivo, mudando todos os ſinais, e teremos $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3.º deſembaraçaremos x^2, multiplicando todos os termos por $\frac{5}{3}$, e teremos $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Reduzido aſſim o primeiro membro de qualquer equaçaõ do ſegundo gráo á forma $x^2 \pm px$, noto que eſta quantidade tem já hum quadrado x^2, que ſe póde conſiderar como o quadrado do primeiro termo x de hum binomio. Tem mais o termo px, que ſe póde conſiderar como o dobro de x

 multi-

multiplicado por outra quantidade, que devé ser a ametade do multiplicador p de x. Logo para completar o quadrado, nada mais falta do que ajuntar o quadrado desta segunda quantidade $\frac{1}{2}p$, isto he, ajuntar $\frac{1}{4}p^2$. Deste modo a equaçaõ geral $x^2 + px = q$ se transforma em $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$, $= q + \frac{1}{4}p^2$. Extrahiremos pois a raiz quadrada exactamente do primeiro membro, tirando as raizes separadamente dos dous termos extremos x^2, e $\frac{1}{4}p^2$, e interpondo o sinal que tiver o termo medio, porque o quadrado de $a \pm b = a^2 \pm 2ab + b^2$. Quanto ao segundo membro, tira-se, ou indica-se a sua raiz quadrada; e assim teremos $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$ logo . . . .

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}.$$

100 Desta formula se deduz a regra seguinte, que observaremos na resoluçaõ das equações do segundo gráo.

Havendo preparado a equaçaõ, iguale-se a incognita x *á ametade do seu multiplicador, tomado com sinal contrario, mais ou menos a raiz quadrada da mesma ametade elevada ao quadrado, e da quantidade conhecida que constitue o segundo membro.*

Por exemplo, tendo a equaçaõ $x^2 + 6x = 16$, como esta se acha preparada, concluiremos immediatamente $x = -3 \pm\sqrt{(9 + 16)}$, igualando x á ametade -3 do coefficiente 6 de x tomado com

com ſinal contrario, mais ou menos a raiz quadrada do quadrado 9 do meſmo 3, e do termo conhecido 16 da equaçaõ. Logo $x = -3 \pm 5$, iſto he $x = 2$, ou $x = -8$.

Do meſmo modo a equaçaõ $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$, que preparada (99) ſe muda em $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$, dá $x = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{20}{3}} = 5 \pm \sqrt{\frac{55}{3}}$.

Applicaçaõ a alguns Problemas do ſegundo grão.

101 SEja qual for o grão dos problemas, a regra para os pôr em equaçaõ he a meſma que havemos dado (67).

Probl. I. *Achar hum numero tal, que ſendo junto 8 vezes ao ſeu quadrado, faça a ſoma de 33.*

Seja x o numero procurado; o ſeu quadrado ſerá x^2; logo $x^2 + 8x = 33$. Deſta ſe deduz conforme a regra (100) ... $x = -4 \pm \sqrt{(16 + 33)} = -4 \pm 7$, e conſeguintemente teremos eſtes dous valores, $x = 3$, e $x = -11$.

O primeiro ſatisfaz ao problema; porque ajuntando 8 vezes 3, ou 24 a 9, quadrado de tres, temos a ſoma 33.

O ſegundo, como he negativo, indica que ha outro problema, no qual, tomando x em ſentido contrario, teremos 11 por ſoluçaõ; iſto he, o ſegundo valor de x deve ſatisfazer a eſte problema:

Achar

Achar hum numero tal, que ſendo tirado 8 *vezes do ſeu quadrado, o reſto ſeja* 33; e com effeito, de 121 quadrado de 11 tirando 8 vezes 11, ou 88, o reſto he 33.

Para confirmar o que havemos dito ſobre as quantidades negativas (70), note-ſe que eſte ſegundo problema, ſendo poſto em equaçaõ dá $x^2 - 8x = 33$, donde ſe tiraõ os dous valores $x = 11$, e $x = -3$, que ſaõ o contrario dos do primeiro problema.

102 Deſte modo toda a equaçaõ do ſegundo gráo a huma incognita tem duas ſoluções, porque ambos os valores 11 e -3, ſendo ſubſtituidos em lugar de x na equaçaõ $x^2 - 8x = 33$, a reſolvem igualmente, iſto he, reduzem igualmente o primeiro membro a 33, como he facil de ver. Mas nem ſempre o problema, que conduzio á equaçaõ, tem duas ſoluções; porque no caſo preſente o ſegundo valor -3 reſolve unicamente o problema contrario. Muitas vezes as duas ſoluções da equaçaõ ſaõ tambem ſoluções do problema, como veremos adiante.

Probl. II. *Deviaõ repartir-ſe* 175 *lib. por hum certo numero de peſſoas, mas duas por auſentes naõ tem parte. Eſta circunſtancia dá hum augmento de* 10[l] *á parte de cada hum dos preſentes: pergunta-ſe quantos haviaõ de ſer entaõ os participantes.*

Repreſentando eſte numero por x, a parte de cada hum, ſe todos eſtiveſſem preſentes, ſeria $\frac{175}{x}$; mas como faltaõ dous, ſerá $\frac{175}{x-2}$; logo, conforme o problema, $\frac{175}{x-2} - \frac{175}{x} = 10$, iſto he, $-10x^2 + 20x = -350$.

Eſta

Esta equaçaõ sendo preparada (99) dá $x^2 - 2x = 35$, e conseguintemente (100). . $x = 1 \pm \sqrt{(35+1)} = 1 \pm 6$; logo $x = 7$, e $x = -5$. O primeiro valor he o que se procura; porque $\frac{175}{5} - \frac{175}{7} = 10$. O segundo porém resolve o problema, em que se tratasse de repartir $175'$ por duas pessoas mais, de maneira, que com esta circunstancia a parte, que havia de caber sem isso a cada hum, tivesse huma diminuiçaõ de $10'$.

Probl. III. *Comprou-se hum cavallo, o qual se vendeo depois por 24 dobras, perdendo-se tanto por 100, como tinha custado: pergunta-se por quanto se havia comprado.*

Seja x o numero buscado, isto he, o numero de dobras que custou o cavallo; logo, fazendo a proporçaõ $100 : x :: x :$; o quarto termo $\frac{x^2}{100}$ será a perda, e conseguintemente $x - \frac{x^2}{100} = 24$.

Preparando esta equaçaõ, acharemos $x^2 - 100x = -2400$, donde (100) se tira $x = 50 \pm \sqrt{(2500 - 2400)} = 50 \pm 10$; isto he, $x = 60$, e $x = 40$. Podia pois o preço do cavallo ser igualmente de 60, ou de 40 dobras, porque o enunciado da questaõ naõ determina qual dos dous tem lugar. Com effeito, supponde que o cavallo custou 60 dobras, a perda foi de 36, logo vendeo-se por $60 - 36 = 24$. No segundo caso, a perda foi de 16 dobras, logo vendeo-se por $40 - 16 = 24$.

103 As duas soluções, que tem toda a equaçaõ do segundo gráo, podem ser ambas positivas, como neste problema: ou huma negativa, e outra positi-

ſitiva, como nos dous precedentes: ou tambem ambas negativas, quando o enunciado da queſtaõ he vicioſo; porque cada huma deſtas ſoluções moſtra, que a incognita ſe deve tomar em ſentido contrario ao do enunciado. Propondo-ſe, por exemplo: *Achar hum numero tal, que ajuntando-ſe ao ſeu quadrado nove vezes o meſmo numero, e mais* 50, *a ſoma ſeja igual a* 30; teremos a equaçaõ $x^2 + 9x + 50 = 30$, ou $x^2 + 9x = -20$, que dá $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{4} - 20\right)} = \frac{-9 \pm 1}{2}$; logo $x = -4$, e $x = -5$. O problema pois deve mudar-ſe neſte: *Achar hum numero tal, que ajuntando-ſe* 50 *ao ſeu quadrado, e tirando-ſe da ſoma* 9 *vezes o meſmo numero procurado, o reſto ſeja* 30.

104 Aſſim tem a Algebra a vantagem naõ ſómente de reſolver as queſtões, mas tambem de enſinar a diſtinguir ſe ſaõ bem ou mal propoſtas, e até (98) ſe ſaõ impoſſiveis. Por exemplo, reſolva-ſe o problema III., ſuppondo 26 dobras em lugar de 24, e acharemos $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; logo o problema neſta hypotheſe he impoſſivel. Acontece iſto todas as vezes que for q negativo, e ao meſmo tempo maior que $\frac{1}{4}p^2$ (98, 99).

PROBL. IV. *Huma companhia de dous negociantes ganhou* 18 *dobrões e* $\frac{3}{4}$, *tendo entrado nella o primeiro com* 30 *dobrões por* 17 *mezes, e o ſegundo com a ſua parte* 5 *mezes depois do primeiro, ou por* 12 *mezes; eſta he tal, que ſomada com o lucro reſpectivo faz* 26 *dobrões. Qual he a entrada do ſegundo, e qual o ganho de cada hum?*

Se conheceſſemos a entrada do ſegundo, com facilidade ſe acharia o ganho de cada hum. Repreſenſentando pois a dita entrada por x, e reduzindo a ſociedade a hum mez de duraçaõ, a entrada do primeiro valerá 510 dobrões por hum mez, e a do ſegundo $12x$ pelo meſmo tempo. Logo (Arith. 197) $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x :$ ganho do ſegundo $= \frac{75x}{170+4x}$; e conſeguintemente pelas condições $x + \frac{75x}{170+4x} = 26$.

Preparando eſta equaçaõ para ſe reſolver, teremos $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; logo $x = -\frac{141}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{19881}{64} + 1105\right)} = \frac{-141 \pm 301}{8}$; iſto he no problema actual, $x = \frac{160}{8} = 20$. O ſegundo negociante pois entrou com 20 dobrões, e conſeguintemente ganhou 6, e o primeiro $12\frac{3}{4}$.

Probl. V. *Dividir hum numero* a *em duas partes tais, que o producto de* m *vezes a maior por* n *vezes a menor ſeja igual a* b.

Repreſentando por x huma das duas partes, a outra ſerá $a - x$; e teremos a equaçaõ $m(a-x)nx = b$, logo $x^2 - ax = \frac{-b}{mn}$, e conſeguintemente $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b}{mn}\right)}$. Se for $b > \frac{mna^2}{4}$, o problema ſerá impoſſivel.

106 Quando as equações litterais tiverem a fórma muito compoſta, para as reduzirmos a tres termos, igualaremos a huma quantidade a ſoma de todas as que multiplicarem x, e todas as quantidades conhecidas a outra. Por exemplo, ſe tivermos

mos a equaçaõ $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 + ab^2 - acx$, preparando acharemos $x^2 + \frac{ac+bc}{a-b}x = \frac{a^2b+ab^2}{a-b}$, a qual, ſuppondo $\frac{ac+bc}{a-b} = p$, e $\frac{a^2b+ab^2}{a-b} = q$, ſe reduz á forma $x^2 + px = q$.

107 Porem eſtas transformações ſomente ſe devem fazer, quando o calculo que ſe ſeguir, naõ uſando dellas, venha a ſer muito complicado. Neſte meſmo exemplo depois de dar á equaçaõ propoſta a forma $x^2 + \frac{ac+bc}{a-b}x = \frac{a^2b+ab^2}{a-b}$, indicando o quadrado, deduziremos (100) com ſumma facilidade . . . .

$$x = \frac{-ac-ab}{2a-2b} \pm \sqrt{\left(\frac{ac+bc}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b+ab^2}{a-b}}.$$

108 Havendo concluido o valor de x, podemos conſervar o radical no meſmo eſtado em que ſe acha, até ſe fazerem as applicações numericas. Mas melhor ſerá ſimplificar, reduzindo ao meſmo denominador as duas partes que eſtaõ debaixo do radical, conforme as obſervações que fizemos (48). Por exemplo, tendo $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)}$, multiplicaremos $\frac{c}{a}$ por $4a$, e teremos $\sqrt{\left(\frac{b^2+4ac}{4a^2}\right)} = \frac{\sqrt{(b^2+4ac)}}{2a}$ (Arith. 142). Logo ſe na equaçaõ geral do ſegundo gráo p for huma fracçaõ, ou

ſe

ſe a equação for $ax^2 + bx = c$, teremos . . .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}.$$

Da Extracção da Raiz quadrada das quantidades litterais.

109 A Reſolução das equações do ſegundo gráo conduz, como acabamos de ver, a tirar a raiz quadrada, ou das quantidades numericas, ou das litterais. Pelo que reſpeita ás primeiras, naõ temos que acreſcentar ao que diſſemos na Arithmetica; reſta tratar das ultimas.

Por quanto hum producto de quantidades monomias (18) inclue todas as letras dos factores, e eſtes ſaõ os meſmos na formação de hum quadrado; ſegue-ſe que em todo o quadrado monomio cada letra da raiz deve ſer duas vezes factor, e o expoente de cada letra de hum quadrado monomio deve ſer o dobro do expoente, que a meſma letra tiver na raiz. Logo: *Para tirar a raiz quadrada de hum monomio, deve-ſe tomar a ametade dos expoentes de cada huma das ſuas letras.* Aſſim, $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{a^6} = a^3$, $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$, $\sqrt{a^4b^6c^8} = a^2b^3c^4$.

110 Se houver algum expoente impar, a quantidade propoſta naõ ſerá quadrado perfeito. Entaõ, conforme a regra, ſe introduzirá hum expoente fraccionario, o qual deſigna que reſta tirar a raiz quadrada á quantidade que o tiver. Por exemplo $\sqrt{a^2b^3c^4} = ab^{\frac{3}{2}}c^2 = abb^{\frac{1}{2}}c^2$; porque $a^2b^3c^4 = a^2b^2bc^4$.

Deſta

Desta sorte o expoente fraccionario tem o mesmo uso que o sinal $\sqrt{}$; de maneira que $abb^{\frac{1}{2}}c^2$ ou $abc^2b^{\frac{1}{2}}$ equivale a $abc^2\sqrt{b}$. Reciprocamente, em huma quantidade affecta do sinal $\sqrt{}$ poderá supprimir-se o radical, com tanto que se tome a ametade de cada hum dos expoentes; transformaçaõ de grande utilidade.

111 Podemos pois em muitos casos simplificar as quantidades affectas do sinal $\sqrt{}$. Exemplos. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \ldots \sqrt{a^2 b^3 c} = ab\sqrt{bc} \ldots \sqrt{a^5 b^4 c^3} = a^2b^2c\sqrt{ac} \ldots \sqrt{\frac{a^3}{f}} = a\sqrt{\frac{a}{f}} = \frac{a}{f}\sqrt{af}$, multiplicando o numerador e denominador por f.

112 Donde vem, que para tirarmos para fora do radical os factores que delle puderem sahir, tomaremos a ametade dos seus expoentes; e pelo contrario, para meter hum factor dentro do radical, dobraremos o seu expoente, isto he, levantaremos o mesmo factor ao quadrado. Assim, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b} \ldots a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2b}{a}} = \sqrt{ab} \ldots (a+b)\sqrt{c} = \sqrt{(a+b)^2c}$.

113 Se a quantidade tiver coefficiente, e este for quadrado perfeito, tiraremos a sua raiz conforme as regras da Arithmetica. Assim, $\sqrt{9a^2b^3} = 3ab\sqrt{b}$, $\sqrt{1024a^2b^3c} = 32ab\sqrt{bc}$.

114 Mas se o coefficiente naõ for hum quadrado perfeito, veremos se he possivel resolvello em dous factores, dos quais hum seja quadrado perfeito; tiraremos entaõ a raiz deste, e deixaremos o outro debaixo do radical. Assim, $\sqrt{48a^2b^3} = \sqrt{16 \cdot 3a^2b^3} = 4ab\sqrt{3b}$; $\sqrt{512a^3b^2} = 16ab\sqrt{2a}$.

115 Se a quantidade affecta do sinal $\sqrt{}$ for po-

lynomio, mas naõ quadrado perfeito, examinaremos ſe pode reſolver-ſe em dous factores, dos quais hum ſeja quadrado para lhe tirar a raiz, deixando o outro dentro do radical. Eſte factor quadrado facilmente ſe deſcobre, quando he monomio. Por exemplo, $\sqrt{(4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5)} =$

$\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)b^2} = b\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)}$.

116 Mas quando o factor quadrado he polynomio, ou quando a quantidade complexa que eſtá debaixo do radical he quadrado perfeito, naõ pareça que ſe lhe extrahe a raiz, tirando-a ſeparadamente a cada hum dos termos. Por exemplo, ſe tendo $a^2 + b^2$ tomaſſemos $a + b$ pela ſua raiz quadrada, cahiriamos em grande erro, pois o quadrado de $a + b$ naõ he $a^2 + b^2$, mas $a^2 + 2ab + b^2$, de ſorte que $a^2 + b^2$ naõ tem raiz exacta em letras. O methodo que entaõ devemos obſervar he o ſeguinte, o qual ſe funda na formaçaõ do quadrado (25).

117 Seja a quantidade $60ab + 36a^2 + 25b^2$ de que ſe pede a raiz quadrada. Diſporemos os termos, como na diviſaõ, em ordem a huma das ſuas letras, de a, por exemplo.

$$
\begin{array}{r|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ Raiz} \\
-36a^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{12a + 5b} \\
\hline
+ 60ab + 25b^2 & \\
- 60ab - 25b^2 & \\
\hline
0 \qquad &
\end{array}
$$

A primeira parte da raiz ſe achará, tomando a de $36a^2$; e como $\sqrt{36a^2} = 6a$, eſcreveremos $6a$ na raiz. Subtrahindo o quadrado $36a^2$ da quantidade pro-

po-

posta, resta $60ab + 25b^2$. E porque $60ab$ deve ser o producto do dobro da primeira parte $6a$ da raiz multiplicada pela segunda, para acharmos esta, dividiremos $60ab$ por $12a$; escrevendo pois o quociente $5b$ adiante da raiz, teremos $6a + 5b$ pela raiz buscada. Para confirmarmos esta operação, escreveremos $5b$ adiante de $12a$, e multiplicaremos o total $12a + 5b$ pelo mesmo quociente $5b$; e como tirando este producto da quantidade $60ab + 25b^2$, naõ resta nada, concluiremos que $6a + 5b$ he a raiz quadrada exacta de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Tomemos por segundo exemplo a quantidade $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Ordenando relativamente a a, e obrando como aqui se mostra, acharemos, que a raiz he $2a - 3b + 4c$.

$$
\begin{array}{l}
\quad 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
-4a^2 \\
\hline
\text{I. Resto} - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
\qquad\quad + 12ab \qquad\qquad - 9b^2 \\
\hline
\text{II. Resto} + 16ac - 24bc + 16c^2 \\
\qquad\quad - 16ac + 24bc - 16c^2 \\
\hline
\text{Ultimo Resto} \; - \; - \; - \; - \; 0
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
2a - 3b + 4c \ \text{Raiz} \\
\hline
4a - 3b \\
4a - 6b + 4c
\end{array}
\right.
$$

Do mesmo modo se achará, que as raizes quadradas das tres quantidades . . . $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$ . . . $36b^4 - 60ab^3 + 25a^2b^2 - 36b^2c^2 + 30abc^2 + 9c^4$ . . . $a^6 - 4a^3c^3 + 8a^3e^3 + 4c^6 - 16c^3e^3 + 16e^6$, saõ $4a^2 + 5ab$ . . . $6b^2 - 5ab - 3c^2$ . . . $a^3 - 2c^3 + 4e^3$.

Do Calculo das quantidades affectas do final $\surd$.

118 O Calculo destas quantidades irracionais se pratica por meio das mesmas quatro operações, que temos mostrado nas outras quantidades. Somaõ-se, ou diminuem-se duas, ou mais quantidades radicais, unindo-as com o final $+$; ou $-$, no caso de naõ serem semelhantes; porem se o forem, e houver sómente differença nos coefficientes numericos que estaõ fora do radical, reduzem-se pelo methodo ordinario. Por exemplo, $3a\surd b$ somado com $4b\surd c$ dá $3a\surd b + 4b\surd c$; $4ab\surd c$ somado com $5ab\surd c$ dá $9ab\surd c$; $3a\surd b$ tirado de $4b\surd c$ dá $4b\surd c - 3a\surd b$. Suppomos, que os radicais se tem reduzido antes da operaçaõ ás expressões mais simples (112); porque se tivessemos para ajuntar $4b\surd a^3c$ com $6a\surd ab^2c$, reduziriamos o primeiro a $4ab\surd ac$, e o segundo a $6ab\surd ac$, os quais somados daõ $10ab\surd ac$.

A multiplicaçaõ executa-se como se naõ entrassem radicais, e depois affecta-se o producto com o final $\surd$. Por exemplo $\surd a \times \surd c = \surd ac$, multiplicando a por c, e dando ao producto ac o final $\surd$. Do mesmo modo $\surd(a^2 + b^2) \times \surd ac = \surd(a^3c + ab^2c)$; $\surd a \times \surd a = \surd a^2 = a$; $(4 + 2\surd 2)(2 - \surd 2) = 4$; $\surd(a + b) \times \surd(a + b) = a + b$; $\surd(-a) \times \surd b = \surd - ab$; $\surd(-a) \times \surd(-b) = -\surd ab$.

Pareceria neste ultimo exemplo, que o producto conforme a regra devia ser $\surd ab$, ou antes $\pm\surd ab$; mas como $\surd(-a) = \surd a . \surd - 1$, e $\surd(-b)$

$\sqrt{(-b)} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$, ſerá $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{ab} \cdot (-1) = -\sqrt{ab}$; porque a exiſtencia actual do ſinal $-$ em $\sqrt{(-1)^2}$ declara a operaçaõ porque chegamos ao quadrado $(-1)^2$; de que pertendemos tirar a raiz, e conſeguintemente naõ havendo duvida ſe elle procede de $(+1)(+1)$, ou de $(-1)(-1)$, naõ tem aqui lugar a ambiguidade do ſinal $\pm$. Naõ ſe confunda pois $\sqrt{(-a)^2}$ com $\sqrt{-a^2}$; o primeiro he ... $\sqrt{(-a \times -a)} = -a$, e o ſegundo he ... $\sqrt{(-a \times +a)}$, ou huma quantidade imaginaria $a\sqrt{-1}$. Iſto poſto, naõ pode haver difficuldade em multiplicar os polynomios, que tem termos affectos de imaginarios.

Donde ſe ſegue, que para quadrar huma quantidade affecta de $\sqrt{}$, baſta ſupprimir eſte ſinal. Aſſim querendo quadrar $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, eſcreveremos $a^2 + b^2$. Do meſmo modo $\sqrt{(a^2b + b^3)^2} = a^2b + b^3$.

119 Logo com muita facilidade podémos deſembaraçar huma equaçaõ dos ſinais $\sqrt{}$ que ella tiver. Por exemplo, na equaçaõ $x - 2a = b + \sqrt{ax}$, deixaremos $\sqrt{ax}$ ſomente em hum membro, e teremos $x - 2a - b = \sqrt{ax}$; entaõ quadrando cada membro, teremos $x^2 - 4ax - 2bx + 4a^2 + 4ab + b^2 = ax$, ou $x^2 - (5a + 2b)x = -(2a + b)^2$.

120 Para dividir huma quantidade radical por outra, dividiremos como ſe naõ houveſſe o ſinal $\sqrt{}$, e daremos eſte ao quociente, ou á fracçaõ. Querendo, por exemplo, dividir $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$, dividiremos a por b que dá $\frac{a}{b}$, e applicando o radical te-

teremos $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Do mesmo modo, $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{ab}{a}}$ $= \sqrt{b}$; $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a + x)}} = \sqrt{(a - x)}$; $\frac{ab\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}}$ $= b\sqrt{c}$.

Estas fracções podem transformar-se em outras, que tenhaõ o denominador racional; porque se o denominador da fracçaõ for, por exemplo, $a \pm \sqrt{b}$, multiplicando tanto este, como o numerador por $a \mp \sqrt{b}$, o novo denominador será $a^2 - b$.

Assim $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$, multiplicando o numerador, e o denominador por $1 - \sqrt{2}$; e . . . $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{a - b}$.

121 Se ou o dividendo, ou o divisor for racional, separaremos hum do outro por huma risca, para significar que hum delles naõ he affecto do radical. Assim, para dividir a por $\sqrt{a}$, escreveremos $\frac{a}{\sqrt{a}}$. Quando houver semelhança nas letras do dividendo e divisor, he conveniente em muitos casos dar á quantidade racional (112) a forma de radical, porque deste modo se facilitaõ as simplificações.

No ultimo exemplo, mudaremos a em $\sqrt{a^2}$, e teremos $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. Do mesmo modo . . .

$$\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+x}=\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a+x)^2}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Se tivermos $\frac{a^2}{b\pm\sqrt{(b^2-a^2)}}$, multiplicando o numerador, e o denominador por $b\mp\sqrt{b^2-a^2}$, acharemos $b\mp\sqrt{(b^2-a^2)}$.

Da formaçaõ das potencias dos monomios, e extracçaõ das ſuas raizes.

122 O Numero que denota a potencia a que ſe quer elevar huma quantidade, chama-ſe *expoente da potencia.*

123 Do que havemos dito (19, e 20) ſe ſegue, que *para ſe elevar qualquer monomio a huma potencia dada, multiplicar-ſe-ha o expoente actual de cada letra da quantidade propoſta pelo expoente da potencia.* Aſſim para elevar a^2b^3c á quarta potencia eſcreveremos $a^8b^{12}c^4$, multiplicando os expoentes 2, 3, 1 de a, b, c pelo expoente 4 da potencia. Em geral a potencia m de $a^nb^pc^q$ he $a^{mn}b^{mp}c^{mq}$.

124 Se a quantidade propoſta for huma fracçaõ, elevaremos á potencia tanto o numerador, como o denominador. Aſſim, a quinta potencia de $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ he $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$, e geralmente a potencia m de $\frac{a^nb^p}{c^qd^r}$ he $\frac{a^{mn}b^{mp}}{c^{mq}d^{mr}}$.

125 No caſo de haver coefficiente, elevallo-he-

hemos á potencia propoſta, multiplicando-o por ſi meſmo conſecutivamente. Aſſim a quinta potencia de $4a^3b^2$ he $1024a^{15}b^{10}$, ou indicando a operaçaõ, $4^5a^{15}b^{10}$.

126 Pelo que reſpeita aos ſinais, ſe o expoente da potencia for par, o reſultado terá ſempre $+$; mas ſe for impar, terá $+$, ou $-$, conforme for $+$, ou $-$ o ſinal da quantidade propoſta (24).

127 Em qualquer potencia pois o expoente actual de cada letra contem tantas vezes o expoente da ſua raiz, quantas ſaõ as unidades do expoente da meſma potencia. Na quarta potencia, por exemplo, o expoente de cada letra he quadruplo do que era na quantidade primitiva, que he a raiz da dita potencia.

O numero que exprime o gráo da raiz, chama-ſe *expoente da raiz.*

128 Logo para voltar de qualquer potencia á ſua raiz, iſto he, *para tirar a raiz de hum gráo propoſto de qualquer monomio, dividiremos o expoente actual de cada huma das ſuas letras pelo expoente da raiz.* Aſſim a raiz terceira de $a^{12}b^6c^3$ he a^4b^2c; a raiz quinta de $a^{20}b^{15}c^5$ he a^4b^3c. Em geral a raiz m de a^nb^p he $a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}$.

O ſinal da raiz ſerá indifferentemente $+$, ou $-$, ſe o gráo for par; mas ſe for impar, a raiz terá o ſinal da quantidade propoſta.

129 Se a quantidade for huma fracçaõ, tiraremos ſeparadamente a raiz de ambos os ſeus termos.

130 Havendo coefficientes, tiraremos a ſua raiz pelos methodos da Arithmetica.

131 Quando o expoente da raiz naõ dividir exactamente cada hum dos expoentes da quantida-

de proposta, naõ será esta huma potencia perfeita do gráo de que se trata. Neste caso o expoente fica fraccionario, e designa que ainda resta extrahir huma raiz. Assim a raiz cubica de $a^3b^3c^4$ he $a^1bcc^{\frac{1}{3}}$, onde o expoente $\frac{1}{3}$ denota, que ainda resta extrahir a raiz cubica de c.

132 O sinal $\sqrt{\ }$ tambem serve para indicar as extracções de raizes superiores ao segundo gráo, escrevendo-se na abertura delle o expoente da raiz. Assim, para significar a raiz cubica de a, podemos escrever $\sqrt[3]{a}$, de maneira que $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$. Para significar a raiz setima de a^4 escreve-se $\sqrt[7]{a^4}=a^{\frac{4}{7}}$.

133 Se a quantidade for complexa, naõ se deve praticar a divisaõ em cada hum dos expoentes; mas considera-se a totalidade das suas partes como huma quantidade simples, cujo expoente he naturalmente 1, e divide-se este pelo expoente da raiz. Por exemplo, em lugar de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$, ou $\sqrt[4]{\overline{a^2+b^2}}$ escreveremos $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$, ou $\overline{a^2+b^2}^{\,\frac{1}{4}}$. Se a quantidade total que está debaixo do radical tiver ja hum expoente, este se dividirá pelo da raiz. Assim em lugar $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$ podemos escrever $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

Do Calculo dos radicais, e dos expoentes.

134 AS regras que havemos dado (118) para somar, e diminuir as quantidades radicais do segun-

gundo gráo, igualmente se applicaõ ás dos gráos superiores. Deste modo $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$; e $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}-\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{ag-bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

135 No multiplicar e dividir as quantidades radicais do mesmo gráo, tambem se pratica como nos radicais do segundo gráo. Assim $\sqrt[7]{a^5}\times\sqrt[7]{a^3}=\sqrt[7]{a^8}=a\sqrt[7]{a}\ldots\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\sqrt[m]{5}\,\frac{a}{b}\times\frac{f}{g}\sqrt[m]{-20\frac{c}{d}}=\frac{f}{g}\sqrt[m]{\left(-100\frac{ac}{bd}\right)}$.

Para dividir $\sqrt[7]{a^5}$ por $\sqrt[7]{a^3}$ escreveremos $\sqrt[7]{a^2}$. Do mesmo modo $\frac{\sqrt[n]{ab}}{\sqrt[n]{acd}}=\sqrt[n]{\frac{b}{cd}}\ldots\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}=\sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}}=\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; porque em geral toda a potencia, ou toda a raiz da unidade he a unidade.

136 Para elevar as quantidades radicais a quaisquer potencias, multiplicaremos os seus expoentes pelos das potencias, a que as quizermos elevar. Assim $\left(\sqrt[7]{a^2b^3}\right)^4=\sqrt[7]{a^8b^{12}}=ab\sqrt[7]{ab^5}$; porque $\sqrt[7]{a^2b^3}=a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$ (132), e $\left(a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}\right)^4=a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{12}{7}}$ (123), ou $ab\sqrt[7]{ab^5}$.

Do

Do meſmo modo $\left(\sqrt[5]{2\left(\frac{a}{b}\right)^m}\right)^3 = \sqrt[5]{8\left(\frac{a}{b}\right)^{3m}}$.

Logo, quando o expoente do radical he o meſmo que o da potencia propoſta, baſta tirar o radical. Aſſim $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$; e com effeito, o fim he reduzir a quantidade ao primeiro eſtado.

137 Para extrahir huma raiz qualquer das quantidades radicais, deve-ſe multiplicar o expoente actual do radical pelo expoente da nova raiz. Aſſim, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$, multiplicando 5 por 3; e

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p}$; porque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{n}}} = \sqrt[mn]{a^p}$.

138 Se os radicais propoſtos forem de differente grão, para ſe fazerem ſobre elles as duas operações de multiplicar e dividir, primeiramente ſe reduziraõ ao meſmo grão. Iſto ſe conſegue, multiplicando os expoentes de cada hum dos radicais, e os das quantidades que eſtaõ debaixo delles, pelo producto dos expoentes de todos os outros radicais.

Deſte modo para reduzir ao meſmo grão os tres radicais $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, $\sqrt[8]{a^7}$, multiplicaremos o expoente 5 do primeiro radical, e o expoente 3 da quantidade reſpectiva a^3, pelo producto 8.7, ou 56 dos expoentes dos outros radicais, e teremos $\sqrt[280]{a^{168}}$. Fazendo o meſmo a reſpeito dos outros dous, acharemos $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$. Porque, ſen-

ſendo $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$, e $\sqrt[8]{a^7} = a^{\frac{7}{8}}$, para reduzirmos as tres fracções $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{8}$ ao meſmo denominador, devemos multiplicar os dous termos de cada huma pelos productos dos denominadores de todas as outras.

Segue-ſe pois (135) que $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{mq}}$; e $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}} : \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}} = \ldots \frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}$.

139 Logo, quando o expoente do radical, e o da quantidade delle affecta tem hum diviſor commum, podemos ſimplificar a expreſſaõ, dividindo ambos os expoentes por eſſe diviſor. Aſſim, $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

140 Donde vem, que ſe o expoente da raiz que ſe pertende tirar, for producto de dous, ou mais numeros, podemos fazer ſucceſſivamente a extracçaõ da maneira ſeguinte. Supponhamos que ſe pede a raiz ſexta de a^{24}; podemos tirar primeiramente a raiz quadrada, depois a cubica, e teremos a raiz ſexta; porque (139) $\sqrt[6]{a^{24}} = \sqrt[3]{a^{12}} = \sqrt[1]{a^4} = a^4$, que he o meſmo que ſe tomaſſemos immediatamente a raiz ſexta de a^{24}, dividindo 24 por 6 conforme a regra geral (128).

Todas as operações precedentes ſe podem executar ainda mais commodamente por meio dos expoentes fraccionarios, que fazem as vezes dos radidicais, e saõ muito proprios para o calculo.

Havendo de multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^4}$, transformaremos esta operaçaõ em $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, e (20) teremos $a^{\frac{7}{5}} = a . a^{\frac{2}{5}} = a \sqrt[5]{a^2}$. Do mesmo modo $\sqrt[5]{a^3} . \sqrt[7]{a^4} = a^{\frac{3}{5}} . a^{\frac{4}{7}} = a\sqrt[35]{a^6}$. Em geral . . $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s} = \sqrt[qm]{a^{qn + mr} b^{pq + ms}}$.

O mesmo se praticará na divisaõ. Por exemplo, $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (31), ou $\sqrt[5]{a}$; $\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}} =$ . . $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = \sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$. Em geral, $\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} =$ . . $\sqrt[qm]{a^{qn - mr} b^{pq - ms}}$.

141 Neste ultimo exemplo se for $\frac{r}{q} > \frac{n}{m}$, o expoente de a será negativo, e o mesmo acontecerá ao de b, se for $\frac{s}{q} > \frac{p}{m}$. Geralmente nas divisões, ou fracções, se o expoente da letra do denominador for maior que o da letra correspondente do numerador, a differença entre elles com o sinal — será o expoente da mesma letra no numerador; de maneira que a toda a fracçaõ algebrica se pode dar a forma de inteiro. Por exemplo, em

em lugar de $\frac{a^3}{b^2}$ podemos escrever $a^3 b^{-2}$.

Com effeito, concebendo que a contem a b hum certo numero m de vezes, inteiro, ou fraccionario, será $a = mb$, e conseguintemente $\frac{a^3}{b^2} = \frac{m^3 b^3}{b^2} = m^3 b$. Mas tambem $a^3 b^{-2} = m^3 b^3 b^{-2} = m^3 b$ (20). Logo $\frac{a^3}{b^2} = a^3 b^{-2}$.

Em geral: *Pode huma quantidade passar do denominador para numerador, ou do numerador para denominador sem alteração da fracção, escrevendo-se como factor no termo em que não estava, mas com o expoente de sinal contrario do que tinha.*

Exemplos ... $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ ... $a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$ ... $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ... $\frac{e}{f} = \frac{f^{-1}}{e^{-1}}$ ... $\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q}$ ... $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)^{-1}$ ... $\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

142 E reciprocamente: *Se huma quantidade constar de partes affectas de expoentes negativos, poderão estas passar com expoentes positivos, para denominador, ou para numerador, conforme se acharem no numerador, ou no denominador.*

Des-

Deste modo $a^3 b^{-4} = \frac{a^3}{b^4}$ . . . $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$ . . . $\frac{a}{b^{-2}} = ab^2$ . . . $\frac{p^{-2} q^{-3}}{(mn)^{-1}} = \frac{mn}{p^2 q^3}$, e assim por diante.

Tal he a idêa que devemos formar dos expoentes negativos.

Da formação das potencias das quantidades complexas.

143 DO que havemos dito a respeito das potencias se segue, que para elevar qualquer quantidade complexa a huma potencia proposta, devemos multiplicar a quantidade por si mesma tantas vezes, quantas são as unidades do expoente da mesma potencia. Mas como este calculo he as mais das vezes longo, e sempre indirecto, por isso vamos a dar hum methodo livre destes inconvenientes, considerando primeiramente a propriedade dos productos das quantidades binomias, porque destes depende a formação das potencias das quantidades mais compostas.

144 Sejaõ $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. muitas quantidades binomias, todas com o termo x commum.

$$\begin{array}{ll} \text{Multiplicando} & x + a \\ \text{por} \;.\;.\;.\;. & x + b \\ \hline \text{teremos} \;.\;.\;.\;.\;.\;. & x^2 + ax + ab \\ & \quad\;\; + bx \end{array}$$

Mul-

Multiplicando eſte producto por $x + c$, teremos

$$\begin{array}{llll} x^3 + ax^2 & + abx & + abc \\ + bx^2 & + acx & \\ + cx^2 & + bcx & \end{array}$$

Multiplicando eſte ſegundo producto por $x + d$, teremos

$$\begin{array}{lllll} x^4 + ax^3 & + abx^2 & + abcx & + abcd \\ + bx^3 & + acx^2 & + abdx & \\ + cx^3 & + adx^2 & + acdx & \\ + dx^3 & + bcx^2 & + bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

e aſſim por diante. Reflectindo neſtes productos, e tomando por hum termo todas as quantidades que eſtaõ em huma meſma colunna, noto o ſeguinte.

1.° O primeiro termo de cada producto he o primeiro termo x de cada binomio, elevado a huma potencia deſignada pelo numero dos binomios; de maneira que ſe eſte foſſe m, o primeiro termo ſeria x^m.

2.° As potencias de x vaõ ao depois diminuindo continuamente de huma unidade até o ultimo termo, em que naõ entra x.

3.° Em quanto aos multiplicadores dos differentes termos, o do primeiro he conſtantemente a unidade; o do ſegundo he a ſoma dos ſegundos termos a, b, c, &c. dos binomios; o do terceiro he a ſoma dos productos das quantidades a, b, c, &c. multiplicadas duas a duas; o do quarto he a ſoma dos productos das meſmas quantidades a, b, c, &c. multiplicadas tres a tres; e aſſim por diante até o ultimo termo, que he ſempre o producto das ditas quantidades. Eſtas conſequencias ſaõ evidentes, ſeja qual for o numero dos binomios $x + a$, $x + b$, &c. que ſe tem multiplicado.

145 Se as quantidades a, b, c, d, &c. forem todas iguais a a, os productos seraõ as potencias successivas de $x + a$. Substituindo pois a em lugar de b, c, d, &c. os productos se mudaraõ em

$$x^2 + 2ax + x^2 = (x + a)^2$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$
$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$$

Logo se o expoente da potencia, a que se pertende elevar o binomio, for m, as potencias successivas de x seraõ x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, &c.

146 Pelo que respeita á lei dos coefficientes, ou á dependencia que tem de m, como o multiplicador do segundo termo (144) he igual á soma das quantidades a, b, c &c, , no caso de ellas serem iguais a a, será a tomado tantas vezes, quantas forem as mesmas quantidades. Logo para m quantidades o multiplicador será ma, isto he, será o coefficiente m igual ao expoente do primeiro termo da potencia. Isto com effeito se acha nas tres potencias que acima expuzemos.

Nos outros termos, cada huma das quantidades ab, ac, ad, &c. se reduz a a^2 na supposiçaõ presente, como tambem abc, abd, &c. se mudaõ em a^3, e assim por diante. Logo o multiplicador do terceiro termo se reduz a a^2 tomado tantas vezes, quantos saõ os productos que podem dar as letras a, b, c, &c., multiplicadas duas a duas. Da mesma sorte, o multiplicador do quarto termo se reduz a a^3 tomado tantas vezes, quantos saõ os productos das mesmas letras multiplicadas tres a tres; e assim por diante. Teremos pois os coefficientes, se determinarmos quantos productos póde dar o numero m

de letras, multiplicadas duas a duas, tres a tres, &c.

147 Se combinarmos hum numero m de letras por todos os modos imaginaveis, isto he, duas a duas, tres a tres, quatro a quatro, &c., sem que haja repetiçaõ de huma mesma letra em huma mesma combinaçaõ, acharemos:

1.° Que o numero de combinações de muitas letras duas a duas he o dobro do numero de productos realmente differentes, que se podem formar, multiplicando as letras duas a duas. Por exemplo, a e b daõ duas combinações ab, ba, mas estas naõ saõ dous productos differentes. Logo o numero de productos he igual a $\frac{1}{1.2}$ do numero destas combinações.

2.° O numero de combinações tres a tres he o sextuplo do numero de productos realmente distinctos. Por exemplo, as tres quantidades a, b, c, sendo dispostas de todos os modos possiveis, daõ seis combinações abc, acb, bac, bca, cab, cba, que naõ saõ productos differentes. Logo o numero de productos he igual a $\frac{1}{1.2.3}$ de tais combinações.

Semelhantemente, quatro quantidades saõ susceptiveis de 24 combinações, cada huma das quais he o mesmo producto; e conseguintemente o numero de productos differentes, que se podem formar combinando muitas letras 4 a 4, he $\frac{1}{1.2.3.4}$ do numero total destas combinações. Da mesma sorte o numero de productos differentes, que se podem

dem formar combinando muitas letras 5 a 5, 6 a 6, 7 a 7, &c. he $\frac{1}{1.2.3.4.5}$, $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$, $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$, &c. isto he, huma fracçaõ que tem por numerador o numero total das combinações, e por denominador o producto dos numeros 1, 2, 3, 4, &c. até o que designa de quantas letras se compõe o producto.

148 Resta achar o numero das combinações 2 a 2, 3 a 3, &c. que pode dar o numero m de letras.

Em quanto ás combinações duas a duas, he evidente, que naõ devendo multiplicar-se huma letra por si mesma, será $m - 1$ o numero de letras, por que elle se ha-de multiplicar, e conseguintemente cada letra dará $m - 1$ combinações: logo m letras daraõ $m\,(m - 1)$ combinações, e por tanto o numero de productos de duas letras realmente distinctos será $m.\frac{m-1}{2}$.

Nas combinações tres á tres he necessario, que cada huma das combinações duas a duas seja combinada com cada letra que ella naõ inclue, isto he com $m - 2$ letras, e conseguintemente huma mesma combinaçaõ de duas letras dará $m - 2$ combinações de tres letras: logo, como ha $m.\overline{m-1}$ combinações de duas letras, o numero total das combinações de tres letras será $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$, e por tanto (147) o numero dos productos realmente differentes será $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$.

Acha-

Acharemos do meſmo modo, que o numero das combinações 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c. he $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3}$, $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . \overline{m-4}$, $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . \overline{m-4} . \overline{m-5}$, &c. : Logo o numero de productos diſtinctos, que ſe podem formar, multiplicando m letras 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c. ſerá repreſentado por $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4}$; por $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5}$; por $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5} . \frac{m-5}{6}$; e aſſim por diante.

Donde ſe ſegue (146) que o coefficiente de qualquer termo da potencia de hum binomio he igual ao coefficiente do precedente multiplicado pelo expoente de x no meſmo termo precedente, e dividido pelo numero dos termos precedentes.

149 Concluamos pois que

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m . \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} a^4 x^{m-4} + \&c.$$

Por eſta formula elevaremos hum binomio qualquer a huma potencia dada, ſubſtituindo em lugar de x o primeiro termo do binomio propoſto, em lugar de a o ſegundo, e por m o expoente da potencia.

Querendo, por exemplo, formar a ſetima potencia

cia de $x+a$, acharemos $x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. Porque, $m = 7$; logo $x^m = x^7$; $max^{m-1} = 7ax^6$; $m.\frac{m-1}{2}.a^2x^{m-2} = 7.\frac{6}{2}a^2x^5 = 21a^2x^5$; $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} = 21.\frac{5}{3}a^3x^4 = 35a^3x^4$; e assim por diante até o termo ..... $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-5}{6}.\frac{m-6}{7}.a^7x^{m-7}$, o qual se reduz a a^7. Os termos seguintes saõ nada, porque no coefficiente de todos elles entra $m-7=0$ na nossa hypothese. Em geral o calculo naõ passa adiante do numero $m+1$ de termos, e o ultimo terá a fórma $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\ldots\frac{m-(m-1)}{m}a^m$.

Se em lugar de $x+a$ tivermos $x-a$, mudaremos os sinais (126) nos termos em que entraõ potencias impares de a, de maneira que reunindo ambos os casos, será $(x \pm a)^m = x^m \pm max^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} + \&c.$

150 Por quanto (142) $x^{m-1} = \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$, $x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}$, e assim por diante, podemos mudar a nossa formula em $(x \pm a)^m = x^m\left(1 \pm m\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} + \&c.\right)$

donde ſe deduz o methodo ſeguinte para achar commodamente a ſerie dos termos, de que deve conſtar qualquer potencia, cujo expoente m ſeja numero poſitivo ou negativo, inteiro ou fraccionario, de hum binomio ou ſimples como $x \pm a$, ou compoſto como $x^2 \pm a^2$, $x^3 \pm a^3$, &c.

151 Eſcrevaõ-ſe em huma linha as quantidades

$$m\,,\ \frac{m-1}{2}\,,\ \frac{m-2}{3}\,,\ \frac{m-3}{4}\,,\ \frac{m-4}{5}\,,\ \&c.$$

$$1 \pm m\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\,\frac{a^2}{x^2} \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\,\frac{a^3}{x^3}$$

$$+\, m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\,\frac{a^4}{x^4}\,,\ \&c.$$

Aſſentando depois a unidade por baixo, e mais para a eſquerda, forme-ſe a ſerie inferior por eſta lei.

Multiplique-ſe a unidade pelo primeiro termo da ſerie ſuperior, e tambem por $\pm \frac{a}{x}$, confórme o ſegundo termo do binomio for poſitivo, ou negativo, e teremos o ſegundo termo da ſerie inferior.

Multiplique-ſe eſte ſegundo termo pelo ſegundo da ſerie ſuperior, e por $\pm \frac{a}{x}$, e teremos o terceiro termo da ſerie inferior.

Multiplique-ſe eſte terceiro termo pelo terceiro da ſerie ſuperior, e por $\pm \frac{a}{x}$, teremos o quarto da ſerie inferior; e aſſim por diante.

Ajuntando todos os termos da ſerie inferior, e multiplicando a totalidade por x^m, teremos o valor de $(x \pm a)^m$.

152 Se o binomio fosse $x^2 \pm a^2$, ou $x^3 \pm a^3$, ou &c. multiplicariamos successivamente os termos por $\pm \frac{a^2}{x^2}$ ou por $\pm \frac{a^3}{x^3}$, em geral, pelo segundo termo do binomio dividido pelo primeiro; e a totalidade se multiplicaria depois pelo primeiro termo do binomio, elevado á potencia proposta.

Para fazermos huma applicaçaõ, busquemos a sexta potencia de $x^3 + a^3$.

$$6 \cdot \frac{5}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}},$$

Tendo achado a serie inferior pelo methodo antecedente, multiplicaremos a totalidade por $(x^3)^6 = x^{18}$, e teremos $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

153 Se em lugar de binomio houvermos de elevar hum polynomio a huma potencia proposta, por exemplo, o trinomio $a + b + c$ á terceira potencia, faremos $b + c = p$, e (149) teremos $(a + p)^3 = a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$. Como $(b + c)^2$, e $(b + c)^3$ saõ potencias de binomios, naõ ha difficuldade em as achar. Acabando o calculo, teremos $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

154 Isto mesmo se póde achar pelo metho-

do

do ſeguinte, que ſe deduz da formula do binomio. Faça-ſe $b+c=p$; teremos $(a+p)^3=$

$$\underset{}{a^3} + \underset{1}{3a^2p} + \underset{2}{3ap^2} + \underset{3}{p^3}$$

Eſcreva-ſe debaixo de cada termo o expoente de p, e multiplique-ſe cada termo pelo numero correſpondente, mudando hum p em b, o que dá

$$\underset{}{3a^2b} + \underset{\frac{1}{2}}{6abp} + \underset{1}{3bp^2}$$

Eſcreva-ſe debaixo deſta quantidade a ametade de cada expoente de p, e multiplique-ſe cada termo pelo numero correſpondente, mudando hum p em b; teremos . . . .

$$\underset{}{3ab^2} + \underset{\frac{1}{3}}{3b^2p}$$

Eſcreva-ſe debaixo de cada termo o terço do expoente de p, e multiplicando como dantes, mudando tambem hum p em b, teremos . . . b^3

Ajuntando eſtas quatro linhas, e mudando p em c, acharemos . . . .

$a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + 3a^2b + 9abc + 3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3$.

Multiplicaremos pois cada termo da primeira linha pelo expoente de p; cada termo da ſegunda pela ametade do expoente de p neſta linha; cada termo da terceira pelo terço do expoente de p neſta terceira, mudando hum p em b em todas as linhas, menos na primeira em que naõ ha mudança; e mudando ultimamente em c todos os p que reſtarem. Eſta regra ſe applica da meſma ſorte aos quadrinomios, quintinomios, &c.

Da extracçaõ das raizes das quantidades complexas.

155 DO que vamos a dizer ſobre a raiz quinta ſe deduzirá o que devemos executar nos outros gráos.

Por quanto $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, he manifeſto, que para achar o primeiro termo da raiz quinta de huma quantidade litteral, havendo ordenado todos os termos da potencia dada, tiraremos a raiz quinta do primeiro termo; e para achar o ſegundo termo da raiz, dividiremos o ſegundo termo da quantidade propoſta pelo quintuplo da quarta potencia da raiz achada. Com effeito $\sqrt[5]{a^5} = a$, e $\frac{5a^4b}{5a^4} = b$, que he o ſegundo termo da raiz. Para verificarmos eſta operaçaõ, depois de ter o ſegundo termo, elevaremos ao quinto gráo a raiz achada, e tiraremos o reſultado da quantidade propoſta.

Exemplo. Pede-ſe a raiz quinta de . . . . .

$$\begin{array}{l} 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \\ \underline{-32a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \textit{Reſto} + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Raiz} \\ \underline{2a + 3b} \\ 80a^4 \end{array} \right.$$

Tiro a raiz quinta de $32a^5$ que he $2a$, e eſcrevo-a na raiz. Elevo $2a$ á quinta potencia, e tirando da quantidade propoſta o producto $32a^5$, deſtróe-ſe o primeiro termo.

Ele-

Elevo a raiz $2a$ á quarta potencia, tenho $16a^4$; eſcrevo o quintuplo $80a^4$ por baixo da raiz $2a$, e por elle divido o primeiro termo $240a^4b$ do reſto; eſta operaçaõ dá $3b$, que eſcrevo na raiz. Elevo pois $2a + 3b$ á quinta potencia, e fazendo a ſubtracçaõ nada reſta; logo a raiz he exactamente $2a + 3b$.

Se a raiz houveſſe de conſtar de mais de dous termos, appareceria algum reſto depois deſta primeira operaçaõ. Entaõ conſiderando $2a + 3b$ como huma ſó quantidade, com ella ſe continuaria a operaçaõ para achar o terceiro termo, da maneira que ſe praticou com $2a$ para achar o ſegundo.

156 Pelo que reſpeita ás quantidades numericas, para extrahirmos a raiz do gráo m, ſepararemos o numero dado em claſſes de m letras, começando pela direita. Da ultima claſſe á eſquerda, que póde ter menos letras do que as outras, tiraremos a raiz do gráo m, a qual naõ conſtará de mais de huma letra, e ſerá a primeira da raiz. Para junto do reſto abaixaremos a claſſe ſeguinte, e ſeparando $m - 1$ letras á direita, dividiremos a parte que ficar á eſquerda por m vezes a raiz achada, elevada á potencia $m - 1$; e aſſim por diante.

Eſta regra que ja enſinamos (Arith. 156 §§), ſe percebe aqui com muita facilidade, advertindo que $(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b$ &c, e que ſe a repreſentar dezenas, e b unidades, a^m naõ póde incluir-ſe nos m ultimos algariſmos, nem $ma^{m-1}b$ nos $m - 1$ ultimos. Na quinta potencia,

cia, por exemplo $(10)^5 = 100000$, e $(10)^4 = 10000$; logo a^5 naõ ſe contem nos cinco ultimos algariſmos, nem $4a^4$ nos quatro ultimos.

Do modo de ter a raiz approximada das potencias imperfeitas das quantidades litterais.

157 QUando a quantidade complexa naõ he potencia perfeita do gráo de que ſe pede a raiz, naõ he poſſivel que eſta ſe ache exactamente; devemos porem approximalla tanto para o verdadeiro valor, quanto exigir o problema que depender deſſa extracçaõ. Pelo methodo que acabamos de expôr para as potencias perfeitas, poderiamos achar as raizes approximadas; porque teriamos huma ſerie de termos fraccionarios, dos quais aproveitariamos ſómente hum numero limitado, deſprezando os outros, que diminuirião continuamente de valor. Podemos porem chegar ao meſmo reſultado por hum caminho muito mais breve, fazendo uſo da formula do binomio, para o que devemos lembrar-nos (133) que as quantidades irracionais ſe pódem eſcrever em fórma de potencias com expoentes fraccionarios, ou que $\sqrt[m]{(a+x)} = (a+x)^{\frac{1}{m}}$.

Exemplo I. Pede-ſe a raiz quadrada de $a+x$, iſto he, o valor de $(a+x)^{\frac{1}{2}}$

Eſcreveremos (151) a ſerie . . . .

$$\frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \&c.$$

a qual ſe reduz a . . . .

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10}, \text{ \&c.}$$

Formaremos depois a ſegunda ſerie . . . . . .

$$1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{x^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{x^4}{a^4}$$
$$+\frac{7}{256}\frac{x^5}{a^5}-\text{ \&c.}$$

E multiplicando a totalidade por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos

$$\surd(a+x)=a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\frac{x^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{x^4}{a^4}+\frac{7}{256}\frac{x^5}{a^5}-\text{ \&c.}\right)$$

a qual ſe póde continuar com facilidade até onde quizermos, e muito melhor, ſe eſcrevermos os coefficientes, indicando ſómente a multiplicaçaõ. Deſte modo

$$\surd(a+x)=a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{x^2}{a^2}\right.$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$$
$$\left.\frac{x^5}{a^5}-\text{ \&c.}\right)$$

Na qual os numeradores ſe fórmaõ dos numeros pares multiplicados entre ſi, e os denominadores de productos dos numeros impares.

Da meſma ſorte acharemos . . . .

$$\surd(a-x)=a^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right.$$
$$\left.\frac{x^2}{a^2}-\frac{1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}\frac{x^4}{a^4}-\text{ \&c.}\right)$$

158 Pa-

158 Para moſtrarmos o uſo deſtas approximaçóes nas quantidades numericas, ſupponhamos que ſe pede a raiz quadrada de 101. Partiremos eſte numero em duas partes, huma das quais ſeja quadrado perfeito, por exemplo, em 100 e 1; entaõ ſuppondo $a = 100$, e $x = 1$, teremos $\frac{x}{a} = 0,01$, e $\sqrt{(a + x)} = \sqrt{101} = 10\left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{2.4} + \frac{3(0,01)^3}{2.4.6} - \frac{3.5(0,01)^4}{2.4.6.8} + \&c.\right)$

Querendo eſta raiz approximada ſómente até as decimas-milleſimas, baſta tomar os tres primeiros termos, porque o quarto $\frac{(0,01)^3}{16}$ ſe reduz a 0,0000000625, e ainda que eſte termo ſe deva multiplicar por 10, como todos os outros, naõ dá por iſſo mais do que 0,000000625, quantidade muito menor que huma decima-milleſima. Os termos ſeguintes por mais forte razaõ ſeráõ muito menores; porque ſaõ continuamente multiplicados pela fracçaõ 0,01. O valor pois de $\sqrt{101}$ ſe reduz a . . . .

$$10\left(1 + \frac{0,01}{5} - \frac{(0,01)^2}{8}\right) = 10(1 + 0,005 - 0,0000125) = 10,0499,$$ parando nas decimas-milleſimas.

Exemplo II. Pede-ſe a raiz quinta de $a^5 - x^5$, iſto he, o valor de $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$.

A ſerie neſte caſo he

$$\frac{1}{5}, -\frac{4}{10}, -\frac{9}{15}, -\frac{14}{20}, -\frac{19}{25}, \&c.$$

Logo teremos . . . .

$$\sqrt[5]{(a^5 - x^5)} = a\left(1 - \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1}{5}\frac{4}{10}\frac{x^{10}}{a^{10}}\right.$$

$$\left. - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5 \cdot 10 \cdot 15}\frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20}\frac{x^{20}}{a^{20}} - \&c.\right)$$

159 Advirta-ſe que neſtas ſeries, e em todas as que ſe podem formar do meſmo modo, devemos tomar para primeiro termo o maior da quantidade propoſta. Por exemplo, em $\sqrt{(a + x)}$ havemos tomado a por primeiro termo; mas ſe x foſſe maior que a, deveriamos tomar x. A razaõ he, porque ſendo $x > a$, he $\frac{x}{a} > 1$, a ſerie . . .

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2} + \&c.\right)$$ he *divergente*, ou os ſeus termos vaõ ſempre creſcendo, e conſeguintemente naõ ſe deve parar em hum certo numero delles. Porém ſe neſte meſmo caſo tomarmos x para primeiro termo, virá a ſerie *convergente*

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1}{8}\frac{a^2}{x^2} + \&c.\right),$$ cujos termos vaõ diminuindo cada vez mais.

160 Por quanto toda a fracçaõ algebrica he ſuſceptivel da forma de inteiro (141), ſegue-ſe que pela formula do binomio podemos tambem reduzir a ſerie toda a fracçaõ, que tiver o denominador complexo, com maior facilidade do que pela diviſaõ.

Por exemplo ſe tivermos $\frac{a}{b+x}$, que he o meſmo que $a(b + x)^{-1}$, elevaremos (151) $b + x$

á potencia -1. Formando pois a ſerie . . .

$$-1,\ \frac{-1-1}{2},\ \frac{-1-2}{3},\ \frac{-1-3}{4},\ \&c.$$

ou . . . $-1, -1, -1, -1$, &c.

teremos $(b+x)^{-1} = b^{-1}\left(1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^3}{b^3} + \frac{x^4}{b^4} - \&c.\right) = \frac{1}{b} - \frac{x}{b^2} + \frac{x^2}{b^3} - \frac{x^3}{b^4} + \frac{x^4}{b^5} - \&c.$ Logo $a(b+x)^{-1} = \frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} - \&c.$

Do meſmo modo $\frac{a^2}{a^2-x^2} = a^2(a^2-x^2)^{-1} = a^2.a^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.\right) = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.$

Se tiveſſemos para reduzir $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^3}$ em ſerie, conſiderariamos eſta quantidade como $a^2(a^2+x^2)^{-3}$. Do meſmo modo em lugar de $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2+x^2)^3}}$ eſcreveremos $a^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{5}}$; e aſ-

aſſim nos outros caſos.

As quantidades irracionais, e fraccionarias tambem ſe transformaõ em ſeries infinitas pelo *Methodo dos Coefficientes indeterminados*, de que vamos a dar idêa em alguns exemplos.

Supponhamos que ſe quer reduzir em ſerie a fracçaõ $\frac{a}{b+x}$.

Sejaõ as quantidades A, B, C, D, E, &c. tais, que tenhamos . . . . .

$$\frac{a}{b+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Iſto ſuppoſto, multiplicando o ſegundo membro pelo denominador, e tranſpondo, ſerá . . .

$$\begin{array}{l} 0 = Ab + Bbx + Cbx^2 + Dbx^3 + Ebx^4 + \&c. \\ \quad - a + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c. \end{array}$$

Se igualarmos cada columna a nada, o ſegundo membro ſe deſtruirá como deve ſer, e teremos tantas equações, quantas ſaõ as quantidades indeterminadas A, B, C, &c. Deſte modo ſerá $-a + Ab = 0$ . . . $Bbx + Ax = 0$ . . . $Cbx^2 + Bx^2 = 0$ . . . $Dbx^3 + Cx^3 = 0$ . . $Ebx^4 + Dx^4 = 0$ . . . &c.

A primeira equaçaõ dá $A = \frac{a}{b}$. Subſtituindo eſte valor na ſegunda, teremos $B = -\frac{a}{b^2}$. Subſtituindo eſte na terceira, teremos $C = \frac{a}{b^3}$. Da meſma ſorte ſe achará $D = -\frac{a}{b^4}$ . . . $E = \frac{a}{b^5}$. Logo ſubſtituindo todos eſtes valores na ſerie, acharemos

mos $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} - \&c.$

Querendo extrahir a raiz quadrada de $a+x$ supporemos $\sqrt{(a+x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$ e teremos (119) $a + x =$

$$A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 + 2AEx^4 + \&c.$$
$$+ B^2x^2 + 2BCx^3 + 2BDx^4 + \&c.$$
$$+ C^2x^4 + \&c.$$

a qual dá $A^2 = a \ldots 2AB = 1$, donde vem $A = a^{\frac{1}{2}}$, $B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$, e formando huma equação de cada colunna, $C = -\frac{1}{8aa^{\frac{1}{2}}} \ldots D = \frac{1}{16a^2a^{\frac{1}{2}}} \ldots$ $E = -\frac{5}{128a^3a^{\frac{1}{2}}} \ldots$ &c. Logo teremos ...

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{8aa^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^3}{16a^2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{5x^4}{128a^3a^{\frac{1}{2}}} + \&c.$$

, e multiplicando todos os numeradores e denominadores por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos como acima . . . .

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{16a^3} - \frac{5x^4}{128a^4} + \&c.\right)$$

O mesmo resultado se acharia immediatamente depois da substituiçaõ dos coefficientes, se reduzissemos o binomio proposto a ter a unidade por primeiro termo, isto he, se dessemos a $\sqrt{(a+x)}$ a fórma $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{\left(1+\frac{x}{a}\right)}$, multiplicando e dividindo ao mesmo tempo os dous termos por $\sqrt{a}$, e tratassemos depois $\frac{x}{a}$ como huma só quantidade.

161 Havemos supposto que a formula que deo o calculo para as potencias perfeitas de hum binomio, ou para m inteiro, e positivo, podia tambem servir para formar as potencias imperfeitas, ou para m fraccionario, positivo, ou negativo. Para mostrarmos agora a legitimidade desta applicaçaõ a todos os expoentes, comecemos pelo caso de ser m huma fracçaõ positiva.

Seja em geral $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, sendo $\frac{m}{n}$ positivo. Devemos provar que . . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\,\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.\right)$$

Com effeito, reduzindo o primeiro termo do binomio a ser 1, e elevando ambos os membros á potencia n, temos . . . .

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=\left(1+\frac{m}{n}\,\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.)^n,$$

isto he, ...

$$m.\frac{m-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.=$$

$$m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}+m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.$$

$$+\frac{m^2}{n^2}.\frac{n-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}+\frac{2m^2}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{n-1}{2}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.$$

$$+\frac{m^3}{n^2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.$$

Porém $m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}+\frac{m^2}{n}.\frac{n-1}{2}$, que he a totalidade do que multiplica $\frac{b^2}{a^2}$ no ſegundo membro, reduz-ſe a $m\left(\frac{m-n}{2n}+\frac{mn-m}{2n}\right)=m$ $.\frac{m-1}{2}$, que he o multiplicador de $\frac{b^2}{a^2}$ no primeiro membro.

Do meſmo modo, $m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3}+\frac{2m^2}{n}$

$$\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{m^3}{n^2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$$, que he a

totalidade do que multiplica $\frac{b^3}{a^3}$ no ſegundo membro, ſe reduz a

$$m\left(\frac{(m-n)(m-2n)+3m(m-n)(n-1)+m^2(n-1)(n-2)}{2n\cdot 3n}\right)=$$

$$m\left(\frac{m^2-3m+2}{2\cdot 3}\right)=m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}$$, que he o

multiplicador de $\frac{b^3}{a^3}$ no primeiro membro.

Se levaſſemos as ſeries adiante do cubo, achariamos da meſma ſórte termos identicos. Logo he verdadeira a equaçaõ . . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}+a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\,\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}+\right.$$

$$\left.\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.\right)$$

Serve pois a formula do binomio para elevar a huma potencia, cujo expoente ſeja hum numero fraccionario poſitivo.

Para provarmos agora que a meſma formula póde applicar-ſe a hum expoente negativo, devemos moſtrar que

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left(1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.\right)$$

isto he, que

$$1 = \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\left(1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.\right)$$

Com effeito desenvolvendo $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$, e multiplicando as duas series, sem passar do cubo; acharemos . . . .

$$1 = 1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m}{n}\frac{b}{a} - \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

iſto he; fazendo o calculo, $1 = 1$.

Logo a formula do binomio tem toda a generalidade que havemos ſuppoſto.

Das Equações ſuperlineares a duas incognitas.

162 DIzemos que huma equaçaõ a huma incognita he do terceiro, quarto, quinto, &c. grão, quando a mais alta potencia da incognita he a terceira, quarta, quinta, &c.; mas álem deſta podem entrar todas as potencias inferiores. Aſſim as equações $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$ ſaõ todas do terceiro grão.

Porém ſe a equaçaõ inclue duas ou mais incognitas, dizemos que he ſuperlinear, naõ ſómente quando huma das incognitas paſſa do primeiro grão, mas tambem quando algumas dellas eſtaõ multiplicadas entre ſi: geralmente, o grão de huma equaçaõ ſe determina pela maior ſoma dos expoentes das incognitas em hum meſmo termo. A equaçaõ $x^3 + y^3 = a^2b$ he do terceiro grão; a equaçaõ $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ tambem he do terceiro grão, porque os expoentes de x e y no termo x^2y fazem a ſoma de 3.

163 Para reſolver os problemas que conduzem a eſtas equações, devemos, como ſe pratica no primeiro grão, reduzillas todas a huma, em que naõ haja mais que huma incognita.

Se tivermos duas equações e duas incognitas, e huma deſtas naõ paſſar do primeiro grão em huma das equações, *tome-ſe o valor deſta incognita, como ſe tudo o mais foſſe conhecido*; e *ſubſtituindo-*

do-ſe o ſeu valor na outra equaçaõ, ſe formará aſſim huma nova, em que naõ entrará mais que huma incognita.

Exemplo I. Achar dous numeros, cuja ſoma ſeja 12, e o producto 35. Repreſentando eſtes dous numeros por x e y, teremos $x + y = 12$, e $xy = 35$.

A primeira dá $x = 12 - y$, e ſubſtituindo na ſegunda, acharemos $12y - y^2 = 35$, iſto he, $y^2 - 12y = -35$. Logo (100) $y = 6 \pm 1$, iſto he, $y = 7$, ou $y = 5$; e como $x = 12 - y$, teremos $x = 5$, ou $x = 7$; e conſeguintemente os dous numeros buſcados ſaõ 5 e 7, ou 7 e 5.

Exemplo II. Se tivermos $x + 3y = 6$ e $x^2 + y^2 = 12$, ſubſtituindo na ſegunda o valor de $x = 6 - 3y$, que dá a primeira, teremos $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$, iſto he, $10y^2 - 36y + 24 = 0$, donde ſe deduzirá o valor de y.

Exemplo III. Se as duas equações forem $xy + y^2 = 5$, e $x^3 + x^2 y = y^2 + 7$, tomando na primeira o valor de $x = \frac{5 - y^2}{y}$, e ſubſtituindo na ſegunda virá $\frac{(5 - y^2)^3}{y^3} + \frac{(5 - y^2)^2 y}{y^2} = y^2 + 7$; iſto he, a equaçaõ do quinto gráo $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, que inclue ſómente y.

164 *Se huma das incognitas naõ paſſar do ſegundo gráo em huma das duas equações, tome-ſe neſta o valor do ſeu quadrado, e fazendo-ſe ſubſtituições ſucceſſivas na outra equaçaõ até que a incognita ſe ache no primeiro gráo, tire-ſe o valor della, e ſubſtitua-ſe na primeira equaçaõ.*

Por exemplo, ſe tivermos $x^2 + 3y^2 = 6x$, e

2

$2x^3 - 3y^2 = 8$, tomaremos na primeira o valor de $x^2 = 6x - 3y^2$, e ſubſtituindo na ſegunda, teremos $2x(6x - 3y^2) - 3y^2 = 8$; iſto he, $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. Como neſta ainda ha x^2, ſubſtitua-ſe outra vez o meſmo valor, e virá $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. Parando com as ſubſtituições, porque eſta equaçaõ tem x ſómente no primeiro gráo, tomaremos nella o valor de . . $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$, o qual ſubſtituido na primeira $x^2 + 3y^2 = 6x$ dá $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$.

165 Semelhantemente podemos reduzir as equações de gráos mais elevados a huma, em que entre huma ſó incognita; porém a equaçaõ final ſubirá a hum gráo mais elevado do que deve ſer. Pelo que vamos a expôr outro methodo, que naõ he ſujeito a eſte inconveniente.

166 Toda a equaçaõ a duas incognitas póde reduzir-ſe á fórma . . . $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + T = 0$, ſendo m o gráo a que x eſtá elevado; porque podemos repreſentar por huma letra a totalidade das quantidades, que multiplicaõ huma meſma potencia de x. Aſſim, a equaçaõ geral do ſegundo gráo a duas incognitas $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, póde ter a fórma $ax^2 + (by + d)x + cy^2 + ey + f = 0$, ou por abbreviar, $Ax^2 + Bx + C = 0$, com tanto que depois de havermos feito o uſo para que ſe deo eſta nova fórma, ſubſtituamos em lugar das letras A, B, C o que ellas repreſentaõ. Iſto poſto, ſejaõ . . .

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots T = 0$$
$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \ldots T' = 0$$

 du-

duas equações do mesmo grão, das quaes se pertende eliminar x.

Multiplicaremos a primeira por A', a segunda por A, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos huma equaçaõ do grão $m-1$.

Multiplicaremos a primeira por $A'x+B'$, a segunda por $Ax+B$, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos segunda equaçaõ do grão $m-1$.

Multiplicaremos a primeira por $A'x^2+B'x+C'$, a segunda por Ax^2+Bx+C, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos terceira equaçaõ do grão $m-1$.

Continuando do mesmo modo, até que o multiplicador seja do grão $m-1$, teremos m equações, cada huma do grão $m-1$.

Consideraremos pois em cada huma dellas as differentes potencias x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} &c. como se fossem outras tantas incognitas do primeiro grão; e determinando (85) os seus valores por meio de $m-1$ equações, os substituiremos na ultima.

Assim virá huma equaçaõ sem x, e repondo nesta os valores de A, B, C &c. e A', B', C' &c. teremos huma equaçaõ em y.

Se tivermos, por exemplo, as duas equações . .

$$Ax^2+Bx+C=0$$
$$A'x^2+B'x+C'=0$$

as quais pódem representar todas as equações a duas incognitas, naõ passando huma destas do segundo grão; formaremos pela multiplicaçaõ, e subtracçaõ as duas equações . . . .

$$(A'B-AB')x+A'C-AC'=0$$
$$(A'C-AC')x+B'C-BC'=0 \qquad \text{A}$$

A primeira dá $x = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}$, e fubftituindo na fegunda teremos $-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$, equaçaõ em que naõ entra x.

Se tivermos . . . .

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$$

formaremos as tres equações

$$(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + A'D - AD' = 0$$
$$(A'C - AC')x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')x + B'D - BD' = 0$$
$$(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + C'D - CD' = 0$$

Confiderando pois x^2 e x como incognitas do primeiro gráo, determinaremos os feus valores por meio de duas quaisquer deftas equações, e os fubftituiremos na terceira.

167 Se as equações naõ forem do mefmo gráo, ou fe os expoentes de x forem m em huma equaçaõ, e n na outra; entaõ fuppondo que m he o maior, multiplicaremos a equaçaõ do gráo n por x^{m-n}, e defte modo a reduziremos ao mefmo gráo. Obraremos pois como no cafo precedente, continuando as multiplicações até que o multiplicador chegue ao gráo $n-1$, e teremos n equações, cada huma do gráo $m-1$. Em todas ellas fubftituiremos fucceffivamente por todas as potencias fuperiores a x^n o valor de x^n tirado da equaçaõ do gráo n, até que a mais alta potencia que reftar feja x^{n-1}, o que he fempre poffivel; e defte modo teremos n equações cada huma do gráo $n-1$. Por meio do numero $n-1$ deftas equações determinaremos os valores de x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, &c. como fe foffem incognitas do primeiro gráo, e os fubftituiremos na ultima.

Se-

Sejaõ, por exemplo, $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$ duas equações, de que se pertende eliminar y.

Multiplicando a segunda por y, a primeira por a, e tirando hum producto do outro, teremos $by^2 + xy + a = 0$.

Multiplicando a primeira por $ay + b$, a segunda por y^2, e tirando hum producto do outro, teremos $xy^2 + ay + b = 0$.

Tendo assim tres equações com y^2, y, e x, se as tratarmos como se fossem do primeiro gráo a tres incognitas, acharemos . . . .

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0.$$

Do mesmo modo se tivessemos $y^4 - 1 = 0$, e $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$, formariamos as tres equações

$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0$$
$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0$$
$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0$$

as quais juntamente com a segunda das propostas $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$ serviriaõ para eliminar as tres quantidades y^3, y^2, y, e achariamos. . .

$$\begin{aligned} x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx &- a^4 = 0 \\ - 2bbx^2 + 4bc^2x &- c^4 \\ &+ b^4 \\ &+ 2a^2c^2 \\ &- 4ab^2c \end{aligned}$$

Este methodo he geral, e admitte simplificaçaõ em muitos casos. Por exemplo, tendo as duas equações acima $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$, com muita facilidade deduziremos as duas equações do segundo grão, multiplicando a segunda por y, e substituindo nella o valor de y^3 tirado da primeira; e fazendo depois o mesmo á que resulta desta operaçaõ. Naõ nos demoraremos em individuar estes casos; advertiremos sómente, que nas multiplicações successivas por A' e A, por $A'x + B'$ e $Ax + B$, &c. he escusado multiplicar o primeiro, os dous primeiros, &c. termos das duas equações propostas, e em geral tantos primeiros termos, quantos saõ os do multiplicador, porque os productos se anniquilaõ pela subtracçaõ.

168 Se determinarmos os valores das differentes potencias de x pela regra que demos para as equações do primeiro grão a muitas incognitas, a equaçaõ final em y naõ passará do grão mn, supondo que os maiores expoentes de x, e de y saõ m em huma equaçaõ, e n na outra.

Mas se os expoentes de x e de y forem desiguais em cada huma das equações, de maneira que sendo os de x ainda m e n, os de y sejaõ porém $m + p$, e $n + q$, a equaçaõ final em y naõ passará do grão $mn + mq + np$. Veja-se a demonstraçaõ nas *Mem. da Acad. das Sciencias*, *ann.* 1764. Podem consultar-se tambem as *Mem. da Acad. de Berlin*, *ann.* 1748, e a *Analyse das linhas curvas de Cramer*.

169 Em muitos casos se consegue a eliminaçaõ mais brevemente, do que pelos methodos preceden-

cedentes. Por exemplo se tivessemos $bxy = a^2x - a^3$ e $x^2 - ax = by$, tomando na primeira . . $x = \frac{a^2x - a^3}{by}$, e na segunda . . . $x = \frac{by}{x - a}$; e multiplicando huma pela outra, achariamos $x = \pm a$.

Tambem para eliminar y das equações $ay^2 - 2x^2y = ax^2$, e $a^2y^2 - 2a^2xy = x^4$, acharemos primeiramente $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^2} + x^2\right)}$, e

$y = x \pm \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^2} + x^2\right)}$; e igualando depois os dous valores, virá $x = a$.

Se as equações fossem $x + y + z = a$, $xy + xz + yz = b$, e $xyz = c$, multiplicando a primeira por x^2, a segunda por x, tirando o segundo resultado do primeiro, e ajuntando ao resto a terceira, achariamos $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$. Se em lugar de multiplicar por x e x^2, multiplicassemos por y e y^2, ou por z e z^2, achariamos da mesma sorte equações semelhantes em y, ou em z.

Das

Das Equações ſuperlineares a mais de duas incognitas.

170 HAvendo mais de duas equações, e mais de duas incognitas, tres por exemplo, podemos pelo meſmo methodo eliminar huma das incognitas por meio da primeira e ſegunda equaçaõ, e eliminalla outra vez por meio da primeira e terceira, ou da ſegunda e terceira. Feito iſto, teremos duas equações e duas incognitas, que ſe trataraõ pelo methodo precedente.

Porém devemos advertir, que eſte methodo ſendo applicado a mais de duas incognitas, tem o inconveniente de conduzir a equações mais elevadas do que deve ſer. O meio de o evitar conſiſte em eliminar combinando as equações, naõ duas a duas, mas tres a tres, quando ſaõ tres, e quatro a quatro, quando ſaõ quatro, &c.; combinaçaõ que exige huma eſcolha particular. V. as *Mem. da Acad. das Sciencias, ann.* 1764, onde tambem ſe acharaõ muitas indagações ſobre o gráo da equaçaõ final. Sem embargo de que eſtes methodos abaixaõ conſideravelmente o gráo em comparaçaõ de outros; com tudo he provavel que elle ainda ſe poſſa diminuir mais, e que iſto ſómente ſe conſiga, quando ſe achar hum methodo para eliminar ſimultaneamente todas as incognitas menos huma, como ſe tem deſcuberto para o primeiro gráo.

Das

Das Equações a dous termos.

171 CHamamos *Equações a dous termos* áquellas em que entra huma ſó potencia da incognita.

Por exemplo, a equaçaõ $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ he huma equaçaõ a dous termos, pois que dando-ſe-lhe a fórma $(a+b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, $a+b$ póde reduzir-ſe a huma ſó quantidade p, e $a^4b^2 - a^3b^3$ a outra q, de maneira que a equaçaõ póde repreſentar-ſe por eſta . . . $px^5 = q$.

Eſtas equações ſaõ muito faceis de reſolver: Havendo deſembaraçado a potencia da incognita, como nas outras equações, naõ reſta mais que tirar a raiz do gráo deſignado pelo expoente da incognita. Aſſim a equaçaõ $px^5 = q$ ſe mudará em $x^5 = \frac{p}{q}$, e tirando a raiz quinta, teremos $x = \sqrt[5]{\frac{p}{q}}$. Em geral, a equaçaõ $px^m = q$ dá $x = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$.

172 Se m he impar, a incognita tem ſempre hum unico valor real, o qual ſerá poſitivo ou negativo, conforme for o ſegundo membro poſitivo ou negativo. Se m he par, a incognita tem, como no ſegundo gráo, dous valores, hum poſitivo, e outro negativo, os quais ſeraõ ambos reais, ou ambos imaginarios, conforme for o ſegundo membro poſitivo, ou negativo; pelo que nas equações a dous ter-

termos a incognita naõ pode ter mais que dous valores reais. Por exemplo, a equaçaõ $x^5 = 1024$ dá $x = \sqrt[5]{1024}$, porque há hum unico valor real 4, que ſendo elevado á quinta potencia poſſa produzir 1024. Porém a equaçaõ $x^4 = 625$ dá . . . $x = \pm \sqrt[4]{625}$; porque $- \times -$ hum numero par de vezes produz o meſmo que $+ \times +$. Pelo contrario a equaçaõ $x^4 = -625$ dá $x = \pm \sqrt[4]{-625}$, iſto he, dous valores imaginarios, porque naõ ha numero poſitivo ou negativo, que ſendo multiplicado por ſi meſmo hum numero par de vezes, produza huma quantidade negativa.

Applicaçaõ. *Achar dous meios proporcionais entre 5 e 625.*

Repreſentando os dous numeros deſconhecidos por x e y, teremos $\div\!\!\div\ 5 : x : y : 625$, donde ſe deduz

$$5 : x :: x : y,$$
$$x : y :: y : 625$$

Eſtas duas proporçóes daõ $5y = x^2$, e $625x = y^2$; donde vem $y = \frac{x^2}{5}$, e $x^3 = 15625$; logo $x = 25$, e $y = 125$.

Das Equações que podem reſolver-ſe á maneira das do ſegundo gráo.

173 EStas equações naõ devem incluir mais que duas potencias differentes de x, mas o expoente de huma deve ſer o dobro do expoente da outra; tais ſaõ $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, e

e em geral a equaçaõ a tres termos da fórma $x^{2m} + px^m = q$. Resolvem-se estas como as do segundo gráo; porque fazendo $x^m = y$, teremos $y^2 + py = q$, equaçaõ do segundo gráo, da qual se tira $y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, isto he, $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; logo (171)..
$x = \sqrt[m]{\left[-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}\right]}$.

Applicaçaõ. *Achar dous numeros, cujo producto seja 6, e a soma dos cubos faça 35.*

Teremos $xy = 6$, e $x^3 + y^3 = 35$, as quais daõ (163) $y = \frac{6}{x}$, e $x^6 - 35x^3 = -216$; logo $x = \sqrt[3]{\left[\frac{35}{2} \pm \sqrt{\left((\frac{35}{2})^2 - 216\right)}\right]}$ $= \sqrt[3]{\left(\frac{35 \pm 19}{2}\right)}$, isto he, $x = \sqrt[3]{27} = 3$, e $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = 2$; e conseguintemente $y = 2$, e $y = 3$.

Se m for par, a equaçaõ poderá ter até quatro raizes reais.

Da Composiçaõ das Equações.

174. TOda a equaçaõ dá tantos valores para a incognita, ou tem tantas raizes, quantas saõ as unidades do mais alto expoente da incognita; bem entendi-

dido, que humas dellas podem ſer poſitivas, outras negativas, humas reais, outras imaginarias.

175 Para o moſtrarmos, he preciſo notar, que em toda a equaçaõ ſe tranſpuzermos todos os ſeus termos para hum membro, e os ordenarmos relativamente a x (preparaçaõ que daqui por diante ſupporemos ſempre feita); póde eſte membro conſiderar-ſe como o reſultado da multiplicaçaõ de muitos factores binomios ſimples, que tenhaõ x por termo commum. Por exemplo, na equaçaõ $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$, depois de ſe lhe dar a fórma $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, póde $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$ conſiderar-ſe como reſultado de tres factores binomios ſimples $x - a$, $x - b$, $x - c$. Porque eſtes multiplicados entre ſi, daõ . .

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abc = 0 \\ - bx^2 &+ acx \\ - cx^2 &+ bcx \end{aligned}$$

e para que às duas equações ſejaõ as meſmas, baſta que ſeja . . . $a + b + c = 8$ . . . $ab + ac + bc = 7$ . . . $abc = 9$, as quais daõ (169) . . . $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$, $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, e $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Daqui ſe deduzem as propoſições ſeguintes.

176 1.º Por quanto naõ ha differença entre as equações que devem dar os valores de a, b, c, os quais por outra parte naõ podem ſer iguais entre ſi; qualquer das tres equações neceſſariamente ha-de dar os valores de a, b, c; logo cada huma dellas deve ter tres raizes a, b, c.

2.º

2.° E como cada huma das tres equações he a mesma que a proposta $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, com a differença unica de a, ou b, ou c se mudar em x; tambem esta deve ter tres raizes, as quais seraõ os valores de a, b, c; e conseguintemente as quantidades que se devem substituir em lugar de a, b, c nos factores $x - a$, $x - b$, $x - c$, para produzirem $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, seraõ as raizes da mesma equaçaõ.

177 Estas consequencias seriaõ as mesmas, ainda que os coefficientes das differentes potencias de x fossem outros quaisquer numeros, e a equaçaõ fosse de outro qualquer gráo. Assim se tivermos em geral a equaçaõ $x^4 - px^3 + qx - rx + s = 0$, sendo p, q, r, s numeros conhecidos, poderemos consideralla como formada pelo producto de quatro factores simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, ou suppolla igual a . . . . ;

$$\begin{array}{llll}
x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\
\quad\;\; - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\
\quad\;\; - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\
\quad\;\; - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\
 & + bdx^2 & & \\
 & + cdx^2 & &
\end{array}$$

Para isso, formando quatro equações como no caso precedente, $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, e $abcd = s$; a, b, c, d devem ser tais

tais, que tenhamos ... $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$ .... $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$ ... $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$ .... $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$.

Pelo que cada huma deſtas equações terá quatro raizes, que ſeraõ os valores das quatro quantidades a, b, c, d; e como cada huma daquellas he a meſma que a propoſta $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, as quantidades a, b, c, d ſeraõ tambem as ſuas raizes.

178 Logo em geral: 1.º *Huma equaçaõ de qualquer grão que ſeja, póde conſiderar-ſe como formada pelo producto de tantos factores binomios ſimples, tendo todos por termo commum a letra que repreſenta a incognita, quantas ſaõ as unidades do mais alto expoente da meſma incognita.*

2.º *Os ſegundos termos dos binomios ſaõ as raizes da meſma equaçaõ, ſendo cada huma tomada com ſinal contrario.*

179 Havemos ſuppoſto, que a equaçaõ tinha alternadamente termos poſitivos e negativos: porém ſeja qual for a ordem dos ſinaes, como na equaçaõ $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, ſempre ſe demonſtrará do meſmo modo, que póde eſta ſer repreſentada por $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0$ ſendo a, b, c, d as ſuas raizes.

180 Pois que temos .. $a + b + c + d = p$ ... $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$ ... $abc + abd + acd + bcd = r$ ... $abcd = s$, e a, b, c, &c. ſaõ as raizes da equaçaõ; ſegue-ſe, que

que na equaçaõ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; e geralmente em toda a equaçaõ.

1.° *O coefficiente* $-p$ *do ſegundo termo, tomado com ſinal contrario, iſto he,* $+p$, *he igual á ſoma de todas as raizes.*

2.° *O coefficiente do terceiro termo he igual á ſoma dos productos das raizes multiplicadas duas a duas.*

3.° *O coefficiente do quarto termo, tomado com ſinal contrario, he igual á ſoma das raizes multiplicadas tres a tres*; e aſſim por diante até que *finalmente o ultimo termo he o producto de todas as raizes.*

Eſtas conclusões ſaõ gerais, ſejaõ quais forem os ſinais dos termos da equaçaõ, com tanto que ſe tome ſempre com ſinal contrario o coefficiente de cada termo de numero par.

Aſſim na equaçaõ $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, a ſoma das tres raizes $= -2$, a ſoma dos productos, duas a duas $= -23$, e o producto de todas tres $= +60$. Com effeito, as tres raizes ſaõ $+5, -4, -3$, porque cada numero deſtes, ſendo ſubſtituido em lugar de x, reduz o primeiro membro a nada; e he evidente que $5 - 4 - 3 = -2$, $-20 - 15 + 12 = -23$, e $5 \times -4 \times -3 = +60$.

181 Logo: 1.° *Toda a equaçaõ, em que faltar o ſegundo termo, terá raizes poſitivas e negativas, e a ſoma de humas ſerá igual á ſoma das outras; e reciprocamente.*

2.° *Se algumas raizes forem* 0, *faltaraõ outros tantos termos ultimos da equaçaõ; e reciprocamente.*

3.°

3.° *Se todas as raizes forem negativas, seraõ positivos todos os termos da equaçaõ; e se todas forem positivas, os termos seraõ alternadamente positivos e negativos.*

E em huma equaçaõ, cujas raizes saõ reais, ha tantas positivas, quantas saõ as mudanças dos sinais; e tantas negativas, quantas saõ as repetições successivas do mesmo sinal.

Assim na equaçaõ $x^3 - 19x + 30 = 0$; porque falta o segundo termo, concluiremos que a soma das raizes positivas he igual á soma das negativas; com effeito as tres raizes saõ $+2$, $+3$, e -5.

Na equaçaõ $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$, em que faltaõ os dous ultimos termos, as raizes saõ -1, $+1$, $+3$, 0, 0.

Na equaçaõ $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$, em que se acha consecutivamente tres vezes o mesmo sinal $+$, ha tres raizes negativas -1, -2, -4; mas a equaçaõ $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, em que ha tres mudanças de sinal, tem tres raizes positivas $+1$, $+2$, $+4$.

Agora se póde perceber facilmente a razaõ, porque muitos numeros differentes podem satisfazer a huma equaçaõ. Propondo-se, por exemplo: *Achar hum numero tal, que se delle tirarmos* 5, *e lhe ajuntarmos successivamente* 3 e 4, *as duas somas multiplicadas entre si, e pelo resto, dem nada*; teremos, sendo x o numero desconhecido, $(x+4)(x+3)(x-5) = 0$, isto he, $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$. Vê-se pois, que este producto póde ser nada em tres casos, quando $x = -4$, quando $x = -3$, e quando $x = 5$; e que propondo-se a equaçaõ $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, naõ ha cousa que de-

 ter-

termine a preferir -4 a -3, ou a $+5$, pois que cada numero deſtes reduz igualmente o primeiro membro a nada, e por tanto ſatisfaz igualmente á equaçaõ.

182 As equações $a+b+c+d=p$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=q$, $abc+abd+acd+bcd=r$, $abcd=s$, conduzem á meſma equaçaõ, tanto para ter a, como para ter b, como &c. A razaõ he, porque a, b, c, d, eſtaõ diſpoſtas da meſma maneira em cada huma das equacões, e por tanto naõ ha motivo, para que huma dellas ſeja determinada por operações differentes das que determinaõ a outra. Logo em geral: Se buſcando muitas quantidades deſconhecidas, formos obrigados para cada huma a fazer uſo dos meſmos raciocinios, das meſmas operações, e das meſmas quantidades conhecidas, todas eſtas ſeraõ neceſſariamente raizes de huma meſma equaçaõ, e por conſequencia o problema reſpectivo conduzirá a huma equaçaõ compoſta.

183 Huma equaçaõ tambem ſe póde conſiderar como formada pelo producto de muitos factores compoſtos. Aſſim, huma equaçaõ do terceiro gráo póde conſiderar-ſe como formada por hum factor do ſegundo x^2+ax+b, e outro do primeiro $x+c$; porque x^2+ax+b póde repreſentar o producto de outros dous factores ſimples. Do meſmo modo huma equaçaõ do quinto gráo pode ſer conſiderada como producto, ou de cinco factores ſimples, ou de dous do ſegundo gráo e hum do primeiro, ou de hum do terceiro e outro do ſegundo, ou finalmente de hum factor do quarto e outro do primeiro.

184 Como pois huma equaçaõ de qualquer gráo póde ſer formada pelo concurſo de hum ou de mui-

tos

tos factores do ſegundo, e as equações deſte gráo pódem ter raizes imaginarias; ſegue-ſe que tambem aquellas as podem ter, ainda que de fórmas muito differentes das do ſegundo gráo.

185 Do meſmo modo de conſiderar as equações ſe ſegue: 1.° Que huma equaçaõ do gráo m naõ póde ter mais que m diviſores do primeiro gráo.

186 2.° Que o numero dos diviſores, que póde ter do ſegundo gráo, ſe exprime por $m.\frac{m-1}{2}$.

Com effeito, hum factor do ſegundo gráo he o producto de dous factores ſimples; logo como eſtes podem ſer diviſores, tambem aquelle o poderá ſer.

Mas (148) ha $m.\frac{m-1}{2}$ modos differentes de multiplicar m quantidades duas a duas; logo haverá $m.\frac{m-1}{2}$ diviſores differentes do ſegundo gráo.

Por exemplo, a equaçaõ. . . . .

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ \quad - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ \quad - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ \quad - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

formada pelo producto de $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, póde conſiderar-ſe como formada pelo producto de dous factores do ſegundo gráo, por eſtes ſeis differentes modos. . . . .

multiplicando $(x-a)(x-b)$ por $(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-c)$ . . $(x-b)(x-d)$
$(x-a)(x-d)$ . . $(x-b)(x-c)$
$(x-b)(x-c)$ . . $(x-a)(x-d)$
$(x-b)(x-d)$ . . $(x-a)(x-c)$
$(x-c)(x-d)$ . . $(x-a)(x-b)$

Concluamos pois, que querendo achar os valores de g e h tais, que $x^2 + gx + h$ seja divisor de huma equaçaõ proposta do gráo m, podemos ter a certeza, que g e h necessariamente se haõ-de determinar cada hum por huma equaçaõ do gráo $m \cdot \frac{m-1}{2}$. Porque sendo $x^2 + gx + h$ a expressaõ geral de hum factor do segundo gráo, h deve ser susceptivel de $m \cdot \frac{m-1}{2}$ valores differentes, e o mesmo se diz de g, que he a soma de todas as raizes: Logo cada huma destas quantidades ha-de ser dada por huma equaçaõ do gráo $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

Prova-se do mesmo modo, que no caso de se considerar huma equaçaõ como formada por factores do terceiro gráo, cada hum delles he susceptivel de $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ valores differentes, de maneira que se $x^3 + gx^2 + hx + k$ representar hum dos factores, k se determinará por huma equaçaõ do gráo $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$. Podem-se tirar consequenquencias analogas para os factores do quarto gráo, quinto &c.

187 De tudo o que fica dito se segue, que havendo achado huma raiz a, para ter as outras, podemos dividir a equaçaõ por $x - a$. A divisaõ se fará exactamente, e dará por quociente huma quantidade, na qual x estará hum gráo menos elevado; e esta, se a puzermos igual a nada, será a equaçaõ que devemos resolver para ter as outras raizes. Se fossem conhecidas duas raizes a e b, dividiriamos a equaçaõ por $(x - a)(x - b)$, e assim por diante.

Do modo de transformar as Equações.

188 ANtes de passarmos á resoluçaõ das equações, he conveniente que tratemos primeiramente das differentes fórmas que ellas podem ter.

189 *Se em huma equaçaõ mudarmos os sinais dos termos em que entraõ potencias impares, as raizes positivas se tornaraõ negativas, e as negativas se tornaraõ positivas.* Porque substituindo $-x$ em lugar de $+x$, as raizes da equaçaõ mudaõ de sinal, como tambem os termos, em que entraõ potencias impares, sem que porisso haja mudança nos termos de potencias pares.

190 *Para mudar huma equaçaõ affecta de coefficientes fraccionarios em outra que os naõ tenha, sem embaraçar com coefficiente o primeiro termo*, substitua-se em lugar da incognita, outra dividida pelo producto de todos os denominadores, e multiplique-se depois toda a equaçaõ pelo denominador, que entaõ terá o primeiro termo.

Por

Por exemplo, se tivermos $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{c}{n}x$ $\frac{d}{p} = 0$, faremos $x = \frac{y}{mnp}$, e substituindo virá $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; multiplicando pois por $m^3n^3p^3$, teremos a transformada $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

191 Se m, n, p fossem iguais, bastaria fazer $x = \frac{y}{m}$. Logo para mudarmos huma equaçaõ, que em todos os termos tem coefficientes inteiros, em outra que tenha o primeiro termo desembaraçado, sem que entrem fracções nos outros termos, faremos $x = \frac{y}{m}$, sendo m o coefficiente do primeiro termo. Com effeito a equaçaõ $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, sendo dividida por m, dá $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, a qual tem todos os denominadores iguais.

192 *Para fazer desaparecer o segundo termo de huma equaçaõ, substitua-se em lugar da incognita, outra augmentada com o coefficiente do segundo termo, tomado com sinal contrario, e dividido pelo expoente do primeiro.*

Para o mostrar, seja a equaçaõ geral . . . $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0$.

Supponhamos $x = y + s$, sendo s huma indeterminada; teremos a transformada. . . . .

$$y^m + msy^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}s^2y^{m-2} + \&c. .. + k = 0$$
$$+ ay^{m-1} + (m-1)\,asy^{m-2} + \&c.$$
$$+ \qquad by^{m-2} + \&c.$$

Considerando y como incognita, para que nesta equaçaõ desappareça o segundo termo, s deve ser tal que tenhamos $ms + a = 0$, isto he, deve ser

$s = \frac{-a}{m}$; logo $x = y - \frac{a}{m}$.

Por exemplo, para mudarmos a equaçaõ $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$ em outra que naõ tenha segundo termo, faremos $x = y - 2$; e substituindo, acharemos $y^3 - 15y + 26 = 0$, que naõ tem y^2.

Da resoluçaõ das Equações compostas.

193 RESOLVER *geralmente huma equaçaõ* ordenada de qualquer grão, como $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \&c \cdots + k = 0$, he achar para a incognita tantos valores, quantas saõ as unidades do seu maior expoente, sendo cada hum delles expresso em letras p, q, &c. k combinadas entre si de qualquer modo; mas tal, que se o substituirmos na equaçaõ em lugar de x, reduza o primeiro membro a nada, independentemente de qualquer valor particular de p, q, &c.

Por exemplo, a regra que demos (100), resolve geralmente as equações do segundo grão $x^2 + px + q = 0$

$+ q = 0$, porque dá dous valores $x = -\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$, e cada hum delles fubſtituido na equaçaõ reduz tudo a nada, como he facil de ver.

Eſta expreſſaõ geral dos differentes valores de x he tanto mais difficil de ſe achar, quanto mais elevado he o gráo da equaçaõ. Para iſto bem ſe perceber, moſtraremos, que ſeja qual for a fórma dos valores da incognita, a reſoluçaõ geral de huma equaçaõ de gráo determinado deve incluir a reſoluçaõ das equaçóes gerais de todos os gráos inferiores.

Com effeito, a reſoluçaõ geral he huma equaçaõ do quinto gráo . . . $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ deve dar a x cinco valores, cada hum delles expreſſo neceſſariamente em todas as letras p, q, r, s, t. Mas quando $t = 0$, a equaçaõ ſe reduz a $(x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s)\,x = 0$, e dá 1° $x = 0$; 2° $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Logo hum dos cinco valores de x deve em tal caſo reduzir-ſe a nada, e os outros quatro devem ſer as raizes da equaçaõ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. E como ſendo eſta do quarto gráo, as ſuas raizes naõ podem deixar de ter a fórma propria das do quarto gráo; ſegue-ſe, que comprehendendo-ſe eſtas ao meſmo tempo nas do quinto, a reſoluçaõ geral deſte gráo ha-de comprehender a reſoluçaõ geral do quarto. Pelo meſmo modo ſe provará, que a reſoluçaõ do quarto gráo comprehende a do terceiro, e aſſim por diante. Logo a reſoluçaõ de huma equaçaõ de qualquer gráo deve comprehender a reſoluçaõ de todos os gráos inferiores.

Podemos pois concluir, que na expreſſaõ de huma raiz devem entrar ou explicita, ou implicitamente todas as eſpecies de radicais deſde o ſeu gráo até o primeiro. Com effeito he facil de ver, que

em

em qualquer gráo devem entrar radicais deſſe meſmo gráo, porque no caſo particular de faltarem todos os termos excepto o primeiro e o ultimo, a expreſſaõ dos valores de x ha-de incluir hum radical ſemelhante (171); e como a fórma geral das raizes comprehende a fórma das raizes de todos os gráos inferiores, ſegue-ſe que deve incluir todos os radicais desde o ſeu gráo até o primeiro.

194 Feitas eſtas reflexões ſobre a fórma das raizes, expliquemos hum methodo de as achar, o qual conſiſte em conſiderar a equaçaõ propoſta como o reſultado de duas equações a duas incognitas.

Aſſim, ſuppondo que a equaçaõ he . . . . $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \&c \ldots + k = 0$, ſem ſegundo termo (192) para facilidade do calculo, tomaremos duas equações da fórma $y^m - 1 = 0$, e $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \&c. \ldots + x = 0$, das quais eliminando y, virá huma equaçaõ em x do gráo m da propoſta ſem ſegundo termo. Determinando pois a, b, c, &c. pela comparaçaõ deſta com a propoſta, e ſubſtituindo os ſeus valores na equaçaõ $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \&c \ldots + x = 0$, como tambem todas as raizes de y, que der a equaçaõ $y^m - 1 = 0$, as quais ſe achaõ com facilidade; teremos todas as raizes, ou valores de x.

Applicaçaõ ao terceiro gráo.

195 SEja $x^3 + px + q = 0$ a equaçaõ que ſe pertende reſolver.

Tomemos $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$, das quais eliminando y (167), vem

x^3

$$x^3 - 3abx + a^3 = 0$$
$$ + b^3$$

Comparando agora esta com a proposta, para que sejaõ as mesmas, deve ser $-3ab = p$, e $a^3 + b^3 = q$, das quais se tira $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$. Logo (173) $a = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, usando de hum só valor de a, por naõ haver necessidade de mais; e conseguintemente . . . . $b = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Resta achar os valores de y por meio da equaçaõ $y^3 - 1 = 0$. Esta dá $y = 1$, e dividindo (187) $y^3 - 1$ por $y - 1$ . . . . $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Substituindo pois successivamente estes tres valores de y, e os de a e b na equaçaõ $ay^2 + by + x = 0$, e advertindo que $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^2$ se reduz a $\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}$, teremos as tres raizes da equaçaõ proposta . . . .

$$x = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$-\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

$$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

ás quais ſe póde dar a fórma ſeguinte . . .

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$- \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

Se na equaçaõ $x^3 + px + q = 0$ ſuppuzermos $q = 0$, teremos $(x^2 + p)x = 0$, a qual dá $x = 0$, $x = + \sqrt{-p}$, e $x = - \sqrt{-p}$. O meſmo ſe deduz neſte caſo das tres formulas gerais das raizes.

196 A equaçaõ $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$ tem ſeis raizes; porem, ainda que uſemos de cada hum dos ſeis valores de a, como he licito, naõ reſultaraõ poriſſo 18 valores differentes para x: cada valor de a dá a x os meſmos tres valores, que dá outro qualquer.

Para o moſtrarmos, ſimplifiquemos o calculo, fazendo $\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} = m$ . . . e $\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} = n$; a equaçaõ $a^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}$ ſe mudará neſtas duas $a^3 = m^3$ . . . $a^3 = n^3$. A primeira dá . . . $a = m$ . . . $a = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ . . . .

$a=m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$; e a ſegunda dá . . .

$a=n$ . . . $a=n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ . . . $a=n$ $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$. E como temos $a^3+b^3=q$, ſerá $m^3+b^3=q$, e $n^3+b^3=q$, iſto he, ſubſtituindo os valores de m^3 e n^3 . . . $b^3=\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=n^3$, e $b^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ $=m^3$. Logo a e b ſaõ tais, que $ab=mn$; de maneira que os valores que ſe correſpondem, ſaõ os ſeguintes

$a=m$ . . . . $b=n$

$a=m\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$ $b=n\left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)$

$a=n$ . . . . $b=m$

$a=n\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$ $b=m\left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)$

Se ſubſtituirmos agora qualquer deſtas ſeis combinações em $x=-ay^2-by$, e puzermos ſucceſſivamente por y os ſeus tres valores, acharemos ſempre eſtas tres raizes . . . . . . $x=-m-n$,

$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.m+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.n$,

$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.m+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.n$.

197 Reparando nos tres valores de x acima achados, vê-ſe claramente que quando $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2}$

$+\frac{1}{27}p^3)$ for real , iſto he , quando p for poſitivo , ou quando for negativo , ſendo ao meſmo tempo $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, os dous ultimos valores de x ſeraõ imaginarios ; porque ſendo entaõ os dous radicais cubos quantidades reais , e deſiguais , os ſeus productos pelas quantidades $\sqrt{-3}$, e $-\sqrt{-3}$ naõ ſe deſtruiraõ , e aſſim ſe conſervaraõ expreſſões imaginarias nos dous valores de x ; pelo que ſómente o primeiro ſerá real.

198 Porem ſe $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}$ for quantidade imaginaria , iſto he , ſe p for negativo e tal , que ſeja $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, os tres valores de x ſeraõ reais.

Para o provarmos , ſupponha-ſe por abbreviar $\frac{1}{2}q = m$, e $\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)} = n$; a quantidade que tem lugar neſte caſo . . . .

$$\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right]}, \text{ ou}$$

$$\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2\right)} \cdot \sqrt{-1}\right]}$$

ſe mudará em $\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} =$

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \tfrac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1} + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}\right.$$

$$\left. - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1} + \&c.\right)$$

Do mesmo modo se achará . . . .

$$\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}]} = \sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})} =$$

$$m^{\frac{1}{3}}\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1} + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} + \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}\right.$$

$$\left. - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} - \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1} + \&c.\right)$$

Mudaõ-se pois os tres valores de x em . . . .

$$x = -m^{\frac{1}{3}}\left(2 + \frac{2}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{20}{243}\frac{n^4}{m^4} + \&c.\right)$$

$$x = m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} + \&c.\right)$$

$$-m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5} - \&c.\right)$$

$$x = m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} + \&c.\right)$$

$$+m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5} - \&c.\right)$$

Expressoens, em que naõ ha termos imaginarios.

A pezar das grandes fadigas dos Algebristas, até o presente naõ se tem achado outro modo de dar neste caso hum valor algebrico real ás tres raizes: pelo que só podemos determinallas por series, ou approximadamente. Em razaõ da difficuldade, deo-se a este caso o nome de *caso irreduzivel.*

Se $\frac{1}{27}p^3$ for negativo e igual a $\frac{1}{4}q^2$, todos os valores de x seraõ reais. Logo: Toda a equaçaõ do terceiro gráo tem pelo menos huma raiz real.

Exemplo I. *Achar as raizes da equaçaõ* $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$.

Faça-se (192) .. $y = x - 2$, e teremos a transformada sem segundo termo $x^3 - 15x + 26 = 0$. Esta comparada com a geral $x^3 + px + q = 0$, dá $p = -15$, $q = 26$; logo $\frac{1}{3}p = -5$, $\frac{1}{27}p^3 = -125$; $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; donde vem $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)} = \sqrt{44}$: a equaçaõ proposta tem pois huma raiz real, e duas imaginarias.

A primeira he negativa... $x = -\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} - \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}$; as outras duas saõ . . . .

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$

Exemplo II. *Achar as raizes da equaçaõ* $x^3 - 9x - 10 = 0$.

Aqui temos $p = -9$, $q = -10$, e conseguinguintemente $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=\sqrt{-2}$; logo a equaçaõ pertence ao caſo irreduzivel. Fazendo uſo das ſeries precedentes, temos $m=-5$, $m^{\frac{1}{3}}=-1,7099$; $n=\sqrt{2}=1,4142$; e por conſequencia $\frac{n}{m}=-0,2828$: logo, ſubſtituindo ſómente na primeira ſerie, virá . . . . $x=+1,7099\,[2+\frac{2}{9}(0,2828)^2-\frac{20}{243}(0,2828)^4+\&c.]$; quantidade, na qual ſe devem fazer as operações indicadas.

Quando m for menor que n, formaremos ſeries proprias para eſte caſo (159). Se m e n differirem muito pouco entre ſi, ſerá neceſſario calcular grande numero de termos. Adiante veremos outro modo de achar os valores approximados de x.

199 Concluamos que ſe póde agora reſolver toda a equaçaõ a quatro termos da fórma $y^{3m}+py^{2m}+qy^m+r=0$; porque, fazendo $y^m=x$, temos $x^3+px^2+qx+r=0$, iſto he, huma equaçaõ do terceiro grão. Se fizermos $y^m=x-\frac{1}{3}p$, deduziremos immediatamente huma equaçaõ do terceiro grão ſem ſegundo termo.

Applicaçaõ ao quarto grão.

200 PAra reſolvermos a equaçaõ geral do quarto grão ſem ſegundo termo

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

to-

tomaremos as duas equações $y^4 - 1 = 0$, e $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$.

Eliminando y (167), temos

$$\begin{aligned} x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx - a^4 &= 0 \\ - 2bbx^2 + 4bc^2x - c^4 & \\ + b^4 & \\ + 2a^2c^2 & \\ - 4ab^2c & \end{aligned}$$

Esta comparada termo por termo com a proposta, para que sejaõ as mesmas, dá ... $-4ac - 2b^2 = p$ ... $4a^2b + 4bc^2 = q$ ... $-a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$.

Para ter b, substituiremos na terceira o valor de $a^4 + c^4$ tirado da segunda, e o de ac tirado da primeira; e acharemos a equaçaõ

$$\begin{aligned} 64b^6 + 32pb^4 + 4p^2b^2 - qq &= 0 \\ - 16rb^2 & \end{aligned}$$

a qual he do sexto gráo, mas resolve-se (199) á maneira do terceiro, considerando b^2 como incognita. Esta equaçaõ chama-se a *reduzida*, porque á sua resoluçaõ se reduz a das equações do quarto gráo.

201 Por quanto o ultimo termo q^2 tem o sinal $-$, haverá (180) pelo menos hum factor da fórma $b^2 - n$, e conseguintemente (178) $b^2 = n$, isto he, $b = \pm \sqrt{n}$: logo b terá pelo menos dous valores reais; e dos seis que geralmente ha-de dar a equaçaõ, tres teraõ o sinal $+$, e tres o sinal $-$.

202 Para determinarmos a e c, recorreremos ás duas equações $-4ac - 2b^2 = p$, e $4a^2b$

$+4bc^2 = q$, as quais daõ $2ac = -\frac{1}{2}p - b^2$, e $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$; logo, ajuntando a primeira com a ſegunda, tirando-a tambem da ſegunda, e extrahindo a raiz quadrada da ſoma e da differença, teremos

$$a + c = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$$

$$a - c = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2\right)}$$

Naõ deduzimos a e c, o que ſeria facil (67), porque nos baſta ter os valores achados de $a + c$ e $a - c$.

Se ſubſtituirmos agora na ſegunda equaçaõ hypothetica $x = -ay^3 - by^2 - cy$ os valores de y deduzidos da primeira $y^4 - 1 = 0$, a ſaber (171, 187).. $y = \pm 1$, e $y = \pm\sqrt{-1}$, teremos os quatro valores de x, ou as quatro raizes da equaçaõ propoſta

$$x = -b - (a + c) = -b - \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = -b + (a + c) = -b + \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = +b + (a - c)\sqrt{-1} = +b + \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = +b - (a - c)\sqrt{-1} = +b - \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

as quais feraõ fempre as mefmas, ou fe tome o final $+$, ou $-$ nos valores de $a+c$, e $a-c$.

203 He facil de vêr, que as raizes achadas naõ mudaõ, ou fe fubftitua $+b$, ou $-b$. Agora moftraremos, que cada hum dos tres valores de b que tiverem o final $+$, tambem naõ dará mais que as mefmas quatro raizes.

Tirando da primeira das tres equações $-4ac-2b^2=p$, $4a^2b+4bc^2=q$, e $-a^4-c^4+b^4+2a^2c^2-4ab^2c=r$, o valor de $b^2=\frac{-p-4ac}{2}$, e fubftituindo-o na fegunda elevada ao quadrado, e na terceira, teremos $qq=-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2$, e $r=-a^4-c^4+\frac{pp}{4}+4pac+14a^2c^2$; valores que fendo fubftituidos na reduzida $64b^6+32pb^4+$ &c. daõ

$$\begin{aligned}8b^6+4pb^4&+2a^4b^2+(p+4ac)(a^2+c^2)^2=0\\&+2c^4b^2\\&-8pacb^2\\&-28a^2c^2b^2\end{aligned}$$

Efta equaçaõ, pois que he $2b^2=-p-4ac$, tem (187) o divifor $2b^2+p+4ac$. Fazendo a divifaõ, e igualando o quociente a nada, para ter os outros dous valores de b^2, acharemos $4b^4-8acb^2+a^4+c^4+2a^2c^2=0$; donde fe tira (173) $2b^2=2ac\pm(a+c)(a-c)\sqrt{-1}$, ou, multiplicando por 2, $4b^2=4ac\pm2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}=[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$, como fe póde verificar pela multiplicaçaõ; e conſeguintemente $b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$, tomando ſómente o valor poſitivo, pois que o negativo conduz ás meſmas concluſões: logo os tres valores poſitivos de b ſaõ $b = +\sqrt{\frac{-p-4ac}{2}}$, $b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$, e $b = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c) . \sqrt{-1}$.

Repreſentando o ſegundo por b', e o terceiro por b'', teremos $a+c = b' + b''$, e $(a-c)\sqrt{-1} = b' - b''$; e ſubſtituindo eſtes valores nos quatro de x, acharemos $x = -b - b' - b''$, $x = b + b' + b'' - 2b$, $x = b + b' + b'' - 2b''$, $x = b + b' + b'' - 2b'$. Aqui ſe vê, que ſe mudarmos, por exemplo, b em b', ſerá neceſſario mudar ao meſmo tempo b' em b, pois que em cada hum dos valores de x entraõ ſimultaneamente as tres raizes b, b', b''; logo eſta mudança dá os meſmos quatro valores de x, e por conſequencia a equaçaõ do quarto gráo naõ póde ter mais que quatro raizes.

204 Reparando bem nos valores $x = -b \pm (a+c)$, e $x = +b \pm (a-c)\sqrt{-1}$, offerecem-ſe tres caſos: ou as expreſſões $a+c$, e $(a-c)\sqrt{-1}$, ſaõ ambas reais, ou ambas imaginarias, ou huma he real, e a outra imaginaria. No caſo de ſerem ambas imaginarias, pódem reduzir-ſe ſempre á fórma $\sqrt{-m}$, ou $\sqrt{m} . \sqrt{-1}$, ſendo m huma quantidade real; por quanto he $a+c = \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$, e $(a-c)\sqrt{-1} = \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$; e tendo ſempre b

(201) ao menos hum valor real do qual se póde fazer uso, he evidente que as mesmas quantidades só poderaõ ser imaginarias, quando for negativa a quantidade que está debaixo do radical actual. Naõ aconteceria assim, se b naõ tivesse algum valor real; porque sendo b imaginario da fórma $\sqrt{-k}$, as quantidades $a+c$ e $(a-c)\sqrt{-1}$ poderiaõ ser imaginarias da fórma $\sqrt{\left(-\frac{m}{\sqrt{-k}}-b\right)}$.

205 Isto posto, se $a+c$ e $(a-c)\sqrt{-1}$ forem ambas reais, caso em que tambem os quatro valores de x seraõ reais, os outros dous valores de $4b^2$, a saber $[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$, seraõ reais e positivos.

206 Se pelo contrario as duas quantidades $a+c$, e $(a-c)\sqrt{-1}$ forem ambas imaginarias, ou, que vem a ser o mesmo, se os quatro valores de x forem imaginarios, os outros dous valores de b^2 seraõ reais, mas negativos; porque supondo $a+c=k\sqrt{-1}$, e $(a-c)\sqrt{-1}=l\sqrt{-1}$ (204), teremos $4b^2=-(k\pm l)^2$.

207 Finalmente se das mesmas quantidades sómente huma for real, ou se dos quatro valores de x dous forem reais e dous imaginarios, he evidente que os dous valores de $4b^2$ seraõ imaginarios.

208 Logo: 1° Se a reduzida, considerada como equaçaõ do terceiro grão, tiver as suas tres raizes reais e positivas, a equaçaõ do quarto grão terá todas as quatro raizes reais.

2° Se tiver todas reais, e sómente huma positiva, a equaçaõ do quarto grão terá todas as suas quatro imaginarias.

3º Finalmente ſe tiver ſómente huma raiz real, das quatro da equaçaõ do quarto gráo duas ſeraõ reais, e duas imaginarias.

209 Por quanto, em geral, a fórmula das raizes de huma equaçaõ do terceiro gráo naõ as dá em fórma real (197), ſenaõ quando ſó huma dellas he real; concluiremos que nenhuma das raizes do quarto gráo ſe deduzirá em fórma real, ſenaõ no caſo unico de duas ſerem reais; e conſeguintemente as fórmulas tanto do terceiro, como do quarto gráo ſómente tem applicaçaõ nas equações, em que ha duas raizes imaginarias.

210 Exemplo I. *Achar as raizes da equaçaõ* $x^4 + 3x^2 - 52x + 48 = 0$.

Temos $p = 3$, $q = -52$, $r = 48$; logo a reduzida ſerá $64b^6 + 96b^4 - 732b^2 - 2704 = 0$, ou fazendo $4b^2 = u$ para ſimplificar, $u^3 + 6u^2 - 183u - 2704 = 0$, ou fazendo $u = z - 2$, $z^3 - 195z - 2322 = 0$, ſem ſegundo termo.

Vê-ſe (197) que z naõ tem mais que hum valor real $z = -\sqrt[3]{(-1161 + \sqrt{1073296})}$ $-\sqrt[3]{(-1161 - \sqrt{1073296})} = \ldots\ldots\ldots$ $-\sqrt[3]{(-1161 + 1036)} - \sqrt[3]{(-1161 - 1036)}$ $= \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{2197} = 5 + 13 = 18$; e como he $4b^2 = z - 2$, ſerá $b = 2$. Subſtituindo pois nas fórmulas (202) eſte valor de b, e os de p, q, r, teremos $x = -2 \pm \sqrt{-12}$, $x = +2 \pm 1$; logo os dous valores reais ſaõ $x = 3$, e $x = 1$.

Os numeros deſte exemplo foraõ tais, que cada hum dos radicais pode avaliar-ſe exactamente. Porêm eſtes caſos ſaõ rariſſimos; o ordinario he

ava-

avaliar por approximaçaõ, quando queremos ter o valor numerico ſem radicais.

Exemplo II. *Achar as raizes da equaçaõ* $y^4 + 4y^3 + 9y^2 + 12y + 3 = 0$.

Fazendo (192) $y = x - 1$, virá $x^4 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$. Temos pois $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$; logo a reduzida ſerá $64b^6 + 96b^4 + 84b^2 - 4 = 0$, ou fazendo (199) immediatamente $4b^2 = z - 2$, $z^3 + 9z - 30 = 0$.

Eſta equaçaõ (197) naõ tem mais que huma raiz real, e por tanto (208) a propoſta naõ tem mais que duas raizes reais.

Applicando as fórmulas (195), teremos $z = \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$, e conſeguintemente $b = \frac{1}{2}\sqrt{(z - 2)} = \ldots$
$\frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}$.
Logo os dous valores reais de x ſe comprehendem neſta equaçaõ

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}} - 1 - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}\right]}$$

Reflexões sobre o Methodo precedente, e sobre a sua applicaçaõ ás Equações dos gráos superiores ao quarto.

211 A Equaçaõ que no quarto gráo deo b, naõ passou do sexto; porém se procurassemos directamente a ou c, chegariamos a huma equaçaõ do 24° gráo. Para nos convencermos disto, das duas equações $-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2 = qq$, e $-a^4-c^4+\frac{p^2}{4}+4pac+14a^2c^2=r$, que achámos (203) na transformaçaõ da reduzida, multiplique-se a ultima por $8(p+4ac)$, e do producto tire-se a primeira; virá a equaçaõ

$$\begin{array}{l} 512a^3c^3 + 256pa^2c^2 + 40p^2ac + 2p^3 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -32rac - 8pr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + qq \end{array}$$

a qual sendo combinada com a segunda $-a^4 - c^4 + \&c = r$, a fim de eliminar c, dará (168) huma equaçaõ do 24° gráo. Mas independentemente deste calculo, podemos mostrar a mesma cousa pelo modo seguinte.

A equaçaõ $-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2 = qq$ dá $a^4+c^4 = -\frac{qq}{8(p+4ac)} - 2a^2c^2$. Substitua-se no segundo membro o valor de ac, tirado da equaçaõ do terceiro gráo $512a^3c^3 + \&c.$; teremos $a^4+c^4 = A$, chamando A á totalidade das quantidades conhecidas que formarem o segundo membro. Agora

se

ſe repreſentarmos por B o valor achado de ac, teremos $a^4 + \frac{B^4}{a^4} = A$, ou $a^8 - Aa^4 = - B^4$.
Eſta equaçaõ dará oito valores de a; mas ac tem tres; logo viraõ tres equações do oitavo gráo, e conſeguintemente a terá 24 valores: logo a equaçaõ em a ſerá do 24° gráo.

212 He porém manifeſto, que os expoentes de todas as potencias de a que entrarem neſta equaçaõ, ſeraõ multiplos de 4, viſto ſer ella (183) o producto de tres quantidades da fórma $a^8 - Aa^4 + B^4$. Se fizermos pois $a^4 = u$, a equaçaõ transformada em u, que ſerá do 6° gráo, naõ incluirá de radicais mais que os quadrados e os cubos; porque a equaçaõ $a^8 - Aa^4 = - B^4$ dá $a^4 = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} A^2 - B^4\right)}$, quantidade na qual A e B, que dependem ſómente de huma equaçaõ do terceiro gráo, naõ podem conſtar ſenaõ de radicais quadrados e cubos.

213 Tambem eſtá claro, que a^3 no terceiro gráo, onde a reduzida he $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27} p^3$, inclue taõ ſómente radicais quadrados. Finalmente na equaçaõ do ſegundo gráo ſem ſegundo termo $x^2 + p = 0$, fazendo conforme o noſſo methodo $y^2 - 1 = 0$, e $ay + x = 0$, a reduzida $a^2 + p = 0$, dá para a^2 hum valor ſómente, ou hum radical do primeiro gráo, iſto he, huma quantidade ſem radical.

Logo concluiremos por analogia, que ſe a reduzida do quinto gráo incluir de expoentes de a

taõ

taõ ſómente os multiplos de 5, o valor de a^5 incluirá taõ ſómente radicais quartos, cubos, e quadrados. Se demonſtrarmos pois que pelo methodo actual eſta reduzida naõ póde incluir de potencias de a, ſenaõ aquellas cujos expoentes forem multiplos de 5, ſeguir-ſe-ha que o noſſo methodo reduz a difficuldade das equações do quinto gráo á dos gráos inferiores: iſſo he o que vamos a fazer.

214 Seja $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ huma equaçaõ geral do quinto gráo. Fazendo $y^5 - 1 = 0$, $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0$, e praticando como no terceiro e quarto gráo, acharemos

$$
\begin{array}{lllll}
x^5 - 5adx^3 & + 5bd^2x^2 & - 5cd^3x & + a^5 & = 0 \\
\quad - 5bcx^3 & + 5a^2cx^2 & - 5a^3bx & + b^5 & \\
 & + 5c^2dx^2 & - 5b^3dx & + c^5 & \\
 & + 5ab^2x^2 & - 5ac^3x & + d^5 & \\
 & & + 5a^2d^2x & - 5a^3cd & \\
 & & + 5b^2c^2x & - 5ab^3c & \\
 & & - 5abcdx & - 5abd^3 & \\
 & & & - 5bc^3d & \\
 & & & + 5a^2bc^2 & \\
 & & & + 5a^2b^2d & \\
 & & & + 5b^2cd^2 & \\
 & & & + 5ac^2d^2 &
\end{array}
$$

Suppondo o coefficiente de $x^3 = p$ (entendemos por coefficiente a totalidade das quantidades que multiplicaõ huma meſma potencia de x), o de

x^2

$x^2 = q$, o de $x = r$, e a totalidade dos termos conſtantes $= s$, teremos quatro equações, as quais, fazendo $b = ga^2$, $c = ha^3$, $d = ka^4$, como he licito, ſe mudaraõ em outras quatro, que incluiraõ g, h, k, e ſómente a^5, a^{10}, &c. Logo, eliminando g, h, e k, a equaçaõ final naõ iucluirá de a outras potencias mais, que as de expoentes multiplos de 5.

215 De tudo o precedente pois ſe ſegue, que em ordem ao primeiro coefficiente a da equaçaõ $ay^{m-1} + by^{m-2} +$ &c. $= 0$, a reduzida no ſegundo gráo he do gráo 1. 2; no terceiro he do gráo 1. 2. 3; no quarto, do gráo 1. 2. 3. 4: logo por inducçaõ, no quinto ſerá do gráo 1. 2. 3. 4. 5, ou do 120°; do 720° no ſexto gráo; e aſſim por diante.

E advirta-ſe, que o achar-ſe no quarto gráo huma reduzida que naõ paſſa do ſexto, he huma ſimplificaçaõ accidental, a qual provavelmente terá lugar por hum modo analogo nas equações, cujo expoente for numero compoſto, mas naõ naquellas em que for numero primo. Porque no quarto gráo vê-ſe claramente, que eſta ſimplificaçaõ procede de b ter em todas as equações, em que entra, relações ſemelhantes para a e c; ao meſmo tempo que a naõ tem para b as meſmas, que tem para c. Mas no quinto gráo a nenhuma das quantidades a, b, c, d ſe póde aplicar o meſmo que acabamos de dizer de b no quarto gráo, como he facil de vêr pelos coefficientes da equaçaõ $x^5 - 5(ad + bc) x^3 +$ &c. $= 0$.

216 Como todos os expoentes de a (214) que en-

entraõ na reduzida do quinto gráo, ſaõ multiplos de 5, ſe fizermos $a^5 = u$, a equaçaõ do 24° gráo, que entaõ teremos, incluirá taõ ſómente $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[3]{}$, e $\sqrt{}$; devendo entrar na propoſta os $\sqrt[5]{}$, que moſtra a equaçaõ $a = \sqrt[5]{u}$.

Bem ſe vê agora de que modo devemos diſcorrer ſobre os gráos ſuperiores. Quem dezejar maiores individuações neſta materia, conſulte as *Mem. da Acad. das Scienc. ann.* 1762 *e* 1765, onde ſe acharaõ muitas claſſes de equações ſuſceptiveis de huma reſoluçaõ algebrica facil, e outro methodo deduzido do noſſo, o qual ſimplifica o trabalho nas equações, cujo expoente naõ for numero primo.

217 Naõ póde haver difficuldade em achar ſempre todas as raizes da equaçaõ a dous termos $y^n - 1 = 0$, que requer o noſſo methodo. Porque deduzindo-ſe ao menos huma pela ſimples extracçaõ da raiz do gráo n, iſto he, tendo ſempre $y = 1$, quando n he impar, e $y = 1$, $y = -1$, quando n he par, a difficuldade de achar as outras reduz-ſe, quando muito, a reſolver huma equaçaõ do gráo $n - 1$, o que ſe reputa ſabido, quando ſe paſſa á reſoluçaõ de huma equaçaõ geral do gráo n. Mas a difficuldade nem ainda chega a ſer deſſe gráo; he taõ ſómente do gráo $\frac{n-1}{2}$, quando n he impar, e do gráo $\frac{n-2}{2}$, quando n he par. Porque, dividindo a equaçaõ $y^n - 1$ pela raiz $y - 1$, quando n he impar, ou por $y^2 - 1$, quando n he par, o quociente, ou a equaçaõ que deve

ve dar as outras raizes, ſerá ſempre da fórma $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \&c. \ldots + 1 = 0$, ſendo k hum numero par; eſta poderá ſempre reſolvér-ſe em $\frac{k}{2}$ factores do ſegundo gráo da fórma $y^2 + hy + i$; e a equaçaõ de que ſe ha-de deduzir h, naõ paſſará do gráo $\frac{k}{2}$. Naõ me demoro em demonſtrar a ultima propoſiçaõ, a qual ſe póde ver no *Tom. VI das Mem. de Petersburgo.*

Dos Diviſores commenſuraveis das Equações.

218 QUando huma equaçaõ tem raizes commenſuraveis, podemos achallas pelo methodo ſeguinte, com maior facilidade do que pela reſoluçaõ geral.

Como o ultimo termo (180) tem a propriedade de ſer o producto de todas as raizes, nenhum numero ſerá valor commenſuravel de x, ſe naõ for diviſor exacto do ultimo termo. Poderiamos pois tomar ſucceſſivamente todos os diviſores do ultimo termo, e ſubſtituillos em $+$ e em $-$ na equaçaõ em lugar de x, pois que as raizes igualmente podem ſer poſitivas e negativas: o diviſor que reduziſſe a equaçaõ a nada, ſeria o valor de x.

Porém, para naõ tentar tantas diviſões, vamos a dar o caracter, pelo qual ſe diſtinguem os diviſores uteis dos inuteis, enſinando primeiramente o modo de achar todos os diviſores de hum numero.

219 Divida-ſe ſucceſſivamente o numero propoſto pelos numeros primos, por que for diviſivel, co-

começando pelos mais ſimples, e continuando a dividir em quanto puder ſer. Eſcrevaõ-ſe á parte, e em linha todos eſtes numeros primos, repetidos tantas vezes quantas ſerviraõ de diviſores; e multipliquem-ſe depois dous a dous, tres a tres, quatro a quatro, &c.: eſtes productos, os numeros primos que ſe acháraõ, e a unidade formaraõ todos os diviſores procurados.

Proponha-ſe, por exemplo, achar todos os diviſores de 60.

Divido 60 por 2, tenho 30; 30 por 2, tenho 15; 15 por 3, tenho 5; 5 por 5, tenho 1. Aſſim os diviſores primos ſaõ

2, 2, 3, 5.

Multiplicando-os 2 a 2, tenho 4, 6, 10, 6, 10, 15.
Multiplicando-os 3 a 3, tenho 12, 20, 30, 30.
Multiplicando-os 4 a 4, tenho 60.
Logo, todos os diviſores de 60, entrando a unidade que he diviſor de todo o numero, ſaõ
1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

220 Iſto poſto, para termos os diviſores commenſuraveis de huma equaçaõ (havendo-os), por exemplo, da geral do quarto gráo

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

ſupponhamos hum delles igual a $x + a$: a equaçaõ propoſta póde entaõ conſiderar-ſe (183) como produzida pela multiplicaçaõ de $x + a$ por hum factor do 3º gráo, como $x^3 + kx^2 + mx + n$. Multiplicando pois, teremos

$$\begin{aligned} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an &= 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx & \end{aligned}$$

a qual, devendo ſer igual á propoſta, dá

$k + a = p \ldots m + ak = q \ldots n + am = r \ldots s$

an

$$an = s\text{, ou } n = \frac{s}{a} \ldots m = \frac{r-n}{a} \ldots$$

$$k = \frac{q-m}{a} \ldots 1 = \frac{p-k}{a}.$$

Logo para ſaber ſe hum diviſor a do ultimo termo he admiſſivel, divida-ſe o ultimo termo da equaçaõ por eſſe diviſor; tire-ſe o quociente do coefficiente de x, e divida-ſe o reſto pelo meſmo diviſor; tire-ſe eſte ſegundo quociente do coefficiente de x^2, e divida-ſe tambem o reſto pelo meſmo diviſor; e continue-ſe aſſim, até que ſe chegue ao coefficiente do ſegundo termo da equaçaõ, o qual deve dar 1 por quociente. Se o diviſor ſatisfizer a todas eſtas diviſões, poderá ſeguramente tomar-ſe por a; mas para ſe conhecer a inutilidade do numero, baſta que huma das diviſões naõ ſe poſſa fazer exactamente.

Eſtá claro, que a unidade deve tambem entrar neſte exame, tanto em $+$, como em $-$; porém he mais commodo ſubſtituir $+1$ e -1 na equaçaõ em lugar de x: ſe de nenhuma deſtas ſubſtituições reſultar o, naõ póde ſer $a = 1$, nem $a = -1$.

Exemplo I. *Pergunta-ſe ſe a equaçaõ* $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$ *tem algum diviſor commenſuravel.*

Tendo achado os diviſores do ultimo termo 15, eſcrevo-os por ordem de grandeza, tomando-os em $+$ e em $-$, como aqui ſe vê na primeira linha dos numeros.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Divisores de 15 . . .	+ 15,	+ 5,	+ 3,	− 3,	− 5,	− 15
	+ 1,	+ 3,	+ 5,	− 5,	− 3,	− 1
	− 21,	− 23,	− 25,	− 15,	− 17,	− 19
				+ 5		
				+ 18		
				− 6		
				− 3		
				+ 1		

Divido o ultimo termo $+ 15$ por cada hum dos numeros da primeira linha, e efcrevo os quocientes em fegunda linha.

Tiro cada termo da fegunda linha do coefficiente $- 20$ de x, e com os reftos fórmo terceira linha.

Divido cada termo defta pelo correfpondente da primeira linha, e vou efcrevendo os quocientes exactos, que fe forem achando. Como nefte exemplo ha fómente hum, $+ 5$, a equaçaõ naõ póde ter mais que hum divifor commenfuravel. Porém ou fe ache hum fó divifor exacto, ou fe achem muitos, continue-fe por efta maneira.

Tiro cada quociente do coefficiente 23 de x^2, e efcrevo os reftos em quinta linha; aqui he $+ 18$.

Divido, como precedentemente, cada refto pelo termo correfpondente da primeira linha, e efcrevo os quocientes por baixo; aqui he $- 6$.

Tirando eftes do coefficiente $- 9$ de x^3, formo nova linha com os reftos; aqui he $- 3$.

Finalmente, divido eftes reftos pelo termo correfpondente da primeira linha. No exemplo achamos $+ 1$; donde concluo, que o termo correfpondente $- 3$ da primeira linha he a, e que $x - 3$ divide a equaçaõ: logo $x = 3$ he o valor commenfuravel de x na equaçaõ propofta. Se

Se quizermos ter ao mesmo tempo o quociente da equaçaõ, na colunna que houver satisfeito, tomaremos os numeros que se acharem nas linhas de numero par, contando desde a primeira; estes formaráõ o ultimo termo, e os coefficientes successivos de x, x^2, x^3, &c. no segundo factor da equaçaõ. Applicando ao nosso exemplo, temos -5, $+5$, -6, $+1$; logo concluimos, que o segundo factor he $1x^3 - 6x^2 + 5x - 5$, de maneira que a equaçaõ proposta he igual ao producto de $x - 3$ por $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

Exemplo II. *Achar os divisores commensuraveis de* . . . $x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0$

Divisores de 14	$+14$,	$+7$,	$+2$,	-2,	-7,	-14
	$+1$,	$+2$,	$+7$,	-7,	-2,	-1
	-34,	-35,	-40,	-26,	-31,	-32
		-5,	-20,	$+13$		
		$+7$,	$+22$,	-11		
		$+1$,	$+11$			

Os divisores 7 e 2 saõ os unicos que sustentaõ a próva até a ultima linha; mas o segundo naõ satisfaz, porque dá 11 por ultimo quociente, devendo dar 1: logo o unico divisor commensuravel he $x + 7$.

221 Este methodo se applica do mesmo modo ás equações litterais. Se ellas saõ *homogeneas*, isto he, se tem o mesmo numero de dimensões em cada hum dos seus termos, escreveremos na primeira linha sómente os divisores do ultimo termo que forem de huma dimensaõ. Naõ sendo porém homogeneas, deverá supprir-se a homogeneidade, introduzindo huma letra, cujas potencias completem o numero de dimensões.

222 Se o primeiro termo tiver coefficiente, o divisor, em lugar de ser simplesmente $x+a$, será em geral $mx+a$, sendo m hum dos factores do dito coefficiente. Querendo praticar neste caso o methodo precedente, para cada factor em lugar da segunda linha, quarta &c., usaremos dellas multiplicadas por m, e admittiremos taõ sómente por a os termos da primeira, a que corresponder na ultima o segundo factor do primeiro termo da equaçaõ proposta: porém basta tomar em $+$ os m, em que se fizer a tentativa. Por outra parte este caso póde reduzir-se ao precedente, fazendo desapparecer o coefficiente (191).

223 Huma equaçaõ póde naõ ter divisor commensuravel do primeiro gráo, e com tudo tello do segundo. Achaõ-se estes por hum methodo analogo ao exposto, porém como os calculos saõ compridos, abbreviaremos desta maneira. O factor trinomio, representado por x^2+mx+n multiplique-se por outro factor tal, que produza huma quantidade do gráo da equaçaõ proposta, por exemplo, por hum do terceiro, como x^3+ax^2+bx+c, se a equaçaõ proposta for do quinto; e formando tantas equações quantas saõ as indeterminadas a, b, c, m, n, &c. eliminaremos a, b, c, m, e virá huma equaçaõ em n, de que se buscaráõ os divisores commensuraveis: assim ficará determinado o factor x^2+mx+n.

He manifesto o que devemos fazer, para achar os factores commensuraveis dos gráos superiores.

Da

Da extracçaõ das raizes das quantidades parte commensuraveis, e parte incommensuraveis.

224 AS quantidades da fórma $\sqrt[r]{(C + \sqrt{D})}$, a que nos conduz a resoluçaõ de algumas equações (173), pódem muitas vezes reduzir-se a outras expressões mais simples, que constem de quantidades racionais, e simples radicais quadrados; ou sómente de radicais quadrados; ou destes multiplicados, ou divididos por hum radical simples do mesmo gráo do radical superior. Comecemos pela reducçaõ das quantidades da fórma $\sqrt{(C + \sqrt{D})}$.

Seja $\sqrt{(C + \sqrt{D})} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$, sendo m, e n duas incognitas; teremos $C + \sqrt{D} = m + 2\sqrt{mn} + n$. Como podemos determinar huma das incognitas pela condiçaõ que quizermos, visto haver taõ sómente huma equaçaõ, supponhamos $2\sqrt{mn} = \sqrt{D}$; será $C = m + n$, e conseguintemente $C^2 - D = m^2 - 2mn + n^2 = (m - n)^2$. Logo $C^2 - D$ deve ser hum quadrado perfeito, para que m e n sejaõ commensuraveis. As duas equações $(m - n)^2 = C^2 - D$, e $m + n = C$ daõ $m = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \sqrt{(C^2 - D)}$, e $n = \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} \sqrt{(C^2 - D)}$; logo $\sqrt{(C + \sqrt{D})} = \ldots$ $\sqrt{[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{(C^2 - D)}]} + \sqrt{[\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{(C^2 - D)}]}$.

Exemplo I. *Pede-se a raiz quadrada de* $7 + \sqrt{48}$.

Temos aqui $C = 7$, $D = 48$, e $C^2 - D = 1$, que he hum quadrado perfeito; logo a expressaõ póde simplificar-se. Fazendo pois as substituições na formula achada, teremos $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$ $=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}=2+\sqrt{3}$.

Se nos dessem $\sqrt{(11+6\sqrt{2})}$, reduziriamos (112) esta expressaõ a $\sqrt{(11+\sqrt{72})}$, e achariamos do mesmo modo, que a sua raiz he $3+\sqrt{2}$.

Exemplo II. *Pede-se o valor de* . . . . $\sqrt{[4ac+2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}]}$.

Reduzindo esta expressaõ a $\sqrt{[4ac+\sqrt{(-4(a+c)^2(a-c)^2)}]}$, temos $C=4ac$, $D=-4a^4+8a^2c^2-4c^4$, e conseguintemente $\sqrt{(C^2-D)}$ $=2(a^2+c^2)$; logo o valor pedido será $\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{[-(a-c)^2]}=a+c+(a-c)\sqrt{-1}$, como suppuzemos (203). Assim a mesma formula serve para extrahir a raiz quadrada das quantidades parte racionais, e parte imaginarias.

Se em lugar de $\sqrt{(C+\sqrt{D})}$ tivessemos $\sqrt{(C-\sqrt{D})}$, a formula seria $\sqrt{[\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}C-\sqrt{(C^2-D)}]}$.

Pelo mesmo methodo se achará, que em geral a quantidade imaginaria monomia $A\sqrt{-1}$, sendo A huma quantidade real, tem a raiz binomia $(1+\sqrt{-1})\sqrt{\frac{1}{2}A}$. Por exemplo $\sqrt{2\sqrt{-1}}=1+\sqrt{-1}$.

225. Vejamos agora as quantidades da fórma $\sqrt[3]{(C+\sqrt{D})}$. Se $C+\sqrt{D}$ tem raiz cubica exacta, deverá esta ser huma quantidade da fórma $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$; porque se na raiz entrassem dous radicais quadrados, no cubo tambem entrariaõ dous, como se póde vêr, elevando $\sqrt{g}+\sqrt{h}$ ao cubo. Isto posto, supponhamos $\sqrt[3]{(C+\sqrt{D})}$

$= m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \,.\, \sqrt{n}$; teremos $C + \sqrt{D} = m^3 k + 3mkn + (3m^2 k + kn)\sqrt{n}$, e igualando a parte racional á parte racional, e a irracional á irracional, deduziremos $\sqrt{D} = (3m^2 k + kn)\sqrt{n}$, e $C = m^3 k + 3mkn$, donde vem $(C^2 - D)k = (m^2 k - nk)^3$, ou $m^2 - n = \frac{\sqrt[3]{k(C^2 - D)}}{k}$. Logo para que $m^2 - n$ ſeja racional, ou para que $C + \sqrt{D}$ tenha huma raiz cubica, deve tomar-ſe pela quantidade arbitraria k hum numero tal, que faça $(C^2 - D)k$ hum cubo perfeito. Supponhamos por abbreviar $\frac{\sqrt[3]{k(C^2 - D)}}{k} = p$, teremos $m^2 - n = p$, ou $n = m^2 - p$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $C = m^3 k + 3mkn$, virá $4km^3 - 3pkm - C = 0$. Logo para que m, e n ſejaõ racionais, o valor de m, que ſe deduzir deſta equaçaõ, deve ſer racional. Buſcaremos pois os ſeus diviſores commenſuraveis (220), que acharemos todas as vezes que a quantidade propoſta for ſuſceptivel de huma raiz cubica da fórma $m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \,.\, \sqrt{n}$. As duas outras raizes cubicas ſe acharaõ, buſcando todas as raizes da equaçaõ $4km^3$ — &c.

Exemplo I. *Pede-ſe o valor de* $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})}$.

Temos neſte caſo $C = 20$, $D = 392$; logo $C^2 - D = 8$, que he cubo perfeito, e por tanto poſſo fazer $k = 1$. Será pois $p = 2$, e a equaçaõ

$4km^3$

$4km^3 - 3pkm - C = 0$ se torna em $2m^3 - 3m - 10 = 0$, ou fazendo (191) $m = \frac{y}{2}$, em $y^3 - 6y - 40 = 0$. Esta equaçaõ tem $y - 4$ por divisor commensuravel (220); será pois $y = 4$, $m = 2$, e conseguintemente $n = 2$; logo $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Exemplo II. *Pede-se a raiz cubica de* $52 + 30\sqrt{3}$.

Como temos $C = 52$, $D = 2700$, será $C^2 - D = 4$, que naõ he cubo perfeito. Façamos pois $k = 2$, será $p = 1$, e $4km^3 - 3pkm - C = 0$ se reduzirá a $8m^3 - 6m - 52 = 0$, ou fazendo $2m = y$, a $y^3 - 3y - 52 = 0$, cujo divisor commensuravel $y - 4$ dá $y = 4$, $m = 2$, $n = 3$, e ultimamente $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}.\sqrt{3}$.

Do mesmo modo extrahiremos as raizes cubicas das quantidades parte racionais, e parte imaginarias.

Donde vem, que naõ obstante a fórma imaginaria que tem as raizes do terceiro gráo (198) no caso irreduzivel, com tudo quando x he numero inteiro, com facilidade se acha exactamente o seu valor: naõ he necessario mais do que tomar o dobro da parte real da raiz cubica de $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$. Porque x, ou (195) $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q -}$

$\sqrt{}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]$ naõ poderá ſer inteiro ſe $-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ naõ for hum cubo perfeito, cuja raiz conſte de huma parte real, que repreſentaremos por A, e de outra imaginaria B. Será pois $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} =$ $A + B$, e conſeguintemente $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q -}$ $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}] = A - B$; logo $x = 2A$.

Por exemplo, na equaçaõ (198) . . . $x^3 - 9x - 10 = 0$ temos $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$ $= \sqrt[3]{(5 + \sqrt{-2})} = -1 + \sqrt{-2}$; logo ſerá $x = -2$. Se achaſſemos as outras duas raizes cubicas de $5 + \sqrt{-2}$, teriamos ſemelhantemente as outras duas raizes da equaçaõ.

Na extracçaõ das raizes mais elevadas diſcorreremos do meſmo modo, que havemos feito nos dous caſos precedentes.

Do modo de achar as raizes approximadas das Equações compoſtas.

226 O Methodo que vamos a expôr, ſuppõe que ſe conhece hum valor da incognita approximado até a ſua decima parte. Vejamos pois como ſe acha eſte primeiro valor, tomando para exemplo a equaçaõ $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Sub-

Subſtituaõ-ſe em lugar de x muitos numeros, tanto poſitivos, como negativos, até que duas ſubſtituições conſecutivas dem dous reſultados de ſinais contrarios. Se os dous numeros que ſatisfizerem a eſta condiçaõ, tiverem entre ſi de differença a decima parte de hum delles, ou menos, qualquer dos dous, ou hum meio entre elles, ſerá o valor approximado que ſe procura. Se a differença porém for maior, praticaremos da maneira ſeguinte.

Subſtituiremos na equaçaõ $x^3 - 5x + 6 = 0$ os numeros 0, 1, 2, 3, 4, &c.; porém reparando que todos elles daõ reſultados poſitivos, e que iſto continuaria aſſim até o infinito, paſſaremos a ſubſtituir -1, -2, -3, &c., o que nos dá os reſultados ſeguintes.

Subſtituições.	Reſultados.
0	$+6$
-1	$+10$
-2	$+8$
-3	-6

Concluiremos pois, que a raiz eſtá entre -2 e -3. Mas como a differença entre eſtes numeros he 1, quantidade maior que a decima parte de cada hum, tomaremos o meio $-2,5$ entre elles, e ſubſtituindo-o na equaçaõ em lugar de x, acharemos $+2,875$, iſto he, huma quantidade poſitiva; logo a raiz eſtá entre $-2,5$, e -3.

Tomaremos o meio $-2,7$ entre $-2,5$, e -3, deſprezando o que paſſar das decimas, e pela ſubſtituiçaõ teremos $-0,183$, iſto he, huma quan-

quantidade negativa. Logo o valor de x eſtá entre $-2,5$, e $-2,7$; e como a differença 0,2 entre elles he menor que a decima parte de cada hum, tomando o meio, ſerá $-2,6$ o valor de x ſem erro de huma decima.

Supponha-ſe agora x igual ao numero achado mais huma nova incognita z, iſto he, no noſſo exemplo, $x = -2,6 + z$, e ſubſtitua-ſe na equaçaõ, deſprezando z^2, z^3, &c. como quantidades muito pequenas; teremos $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, ou $15,28z + 1,424 = 0$; logo $z = -\frac{1,424}{15,28} = -0,09$, levando a diviſaõ taõ ſómente até o primeiro algariſmo ſignificativo. Em geral, pára-ſe com a diviſaõ em tendo tantos algariſmos ſignificativos, entrando o primeiro que ſe acha, quantas ſaõ as caſas que medeiaõ entre eſte, e o primeiro algariſmo do primeiro valor approximado de x: no noſſo exemplo entre 9 (primeiro algariſmo ſignificativo do quociente 0,09) e 2, que he o primeiro algariſmo de 2,6, primeiro valor approximado de x, ha huma caſa unica, e por iſſo pára-ſe na primeira letra ſignificativa 9. Logo $x = -2,6 - 0,09 = -2,69$.

Se quizermos o valor de x mais approximado, ſupporemos actualmente $x = -2,69 + t$, e ſubſtituindo na equaçaõ, acharemos $-0,015109 + 16,7083\,t = 0$, donde ſe tira $t = 0,000904$, e conſeguintemente $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Se quizermos ainda maior exactidaõ, faremos $x = -2,689096 + u$, e continuaremos o calculo do meſmo modo.

To-

Tomemos por ſegundo exemplo a equaçaõ

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

O valor de x approximado até as decimas he 2,3. Faremos pois $x = 2,3 + z$, e acharemos $z = -\frac{0,5839}{17,812} = -0,03$, parando nas centeſimas pela razaõ dada; logo $x = 2,27$.

Para maior approximaçaõ, faremos $x = 2,27 + t$, e ſubſtituindo acharemos $t = -0,0025$; logo $x = 2,2675$.

Reflexões ſobre o methodo precedente.

227 No methodo de Newton, que acabamos de expôr, ſuppuzemos, que a raiz de huma equaçaõ ſe acha entre aquelles numeros, que ſendo nella ſubſtituidos daõ dous reſultados de ſinal contrario. Iſto he facil de demonſtrar. Porque, repreſentando o menor valor de x por a, e o proximamente maior por b, de maneira que $x - a$, e $x - b$ ſejaõ dous factores da equaçaõ, he claro, que ſe em lugar de x ſubſtituirmos hum numero poſitivo menor que a, $x - a$ ſe tornará negativo; e ſe ſubſtituirmos outro tambem poſitivo, mas maior que a, e menor que b, $x - a$ ſe tornará poſitivo, e o producto dos outros factores terá o meſmo ſinal, que tinha no primeiro caſo: logo como o factor $x - a$ he o unico que muda de ſinal, tambem o producto total mudará. O meſmo ſe demonſtraria, ſe o menor factor em lugar de $x - a$ foſſe $x + a$; mas deve entaõ fazer-ſe ſubſtituiçaõ de numeros negativos.

Póde porém ſer, que ſe ſubſtituaõ por x todos os valores reais, tanto poſitivos, como negativos, comprehendidos entre o e o ultimo termo, e nem por iſſo venhaõ dous reſultados de ſinal contrario. Acontece iſto em tres caſos: 1° Quando as raizes ſaõ iguais duas a duas, quatro a quatro, &c.

2° Quando todas as raizes ſaõ imaginarias.

3° Quando ſaõ parte imaginarias, parte iguais duas a duas.

Por exemplo: a equaçaõ formada pelos quatro factores $x - a$, $x - a$, $x - b$, $x - b$, iſto he, a equaçaõ $(x - a)^2 (x - b)^2 = 0$ naõ muda nunca de ſinal, ſeja qual for o numero poſitivo, ou negativo, que ſe ſubſtitua em lugar de x; porque ou $x - a$ ſeja poſitivo, ou negativo, o ſeu quadrado ſempre he poſitivo. O meſmo acontece a $x - b$.

Quando as raizes ſaõ imaginarias, os ſinais tambem naõ podem mudar; porque ſe mudaſſem, o valor de x eſtaria entre os dous numeros reais, que deſſem os dous reſultados de ſinal contrario, e por tanto naõ ſeriaõ imaginarios.

Finalmente o terceiro caſo ſegue-ſe dos dous que havemos examinado.

Vejamos como entaõ ſe pódem achar as raizes.

Do modo de achar as raizes iguais das Equações.

228 M*Ultiplique-ſe cada termo da equaçaõ pelo expoente que a incognita tiver no meſmo termo, e diminuindo eſte expoente de huma unidade, ſe forma-*

mará huma nova equaçaõ ; o maior diviſor commum entre ella e a propoſta ſe comporá das raizes iguais, mas elevadas a huma potencia diminuida de huma unidade.

Exemplo. Pedem-ſe as raizes iguais da equaçaõ formada pelo producto de $(x - a)^2$ por $(x - b)^2$, iſto he, da equaçaõ

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0 \\ - 2bx^3 &+ 4abx^2 - 2ab^2x \\ &+ b^2x^2 \end{aligned}$$

Multiplicando cada termo pelo expoente de x, e diminuindo o ſeu expoente de huma unidade, teremos

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6ax^2 &+ 2a^2x - 2a^2b = 0 \\ - 6bx^2 &+ 8abx - 2ab^2 \\ &+ 2b^2x \end{aligned}$$

cujo diviſor commum com a propoſta he $x^2 - ax - bx + ab = (x - a)(x - b)$, o qual tem os meſmos factores que $(x - a)^2 (x - b)^2$, mas diminuidos de huma unidade. Eis-aqui a demonſtraçaõ da regra.

Como (149) temos

$$(x + b)^m = x^m + mx^{m-1}b + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}b^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3}b^3 + \&c.$$

ſe multiplicarmos cada termo do ſegundo membro pelo expoente de x, e diminuirmos eſte expoente de huma unidade, acharemos

m

$$m\left(x^{m-1} + (m-1)\ x^{m-2}b + (m-1)\frac{m-2}{2}\right.$$
$$\left.x^{m-3}b^2 + (m-1)\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\ x^{m-4}b^3 + \&c.\right)$$
$$= m\,(x+b)^{m-1}.$$

Logo, quando assim se multiplicaõ os termos de que se compõe a potencia m do binomio $x+b$, cada hum pelo expoente do seu x, o producto he a potencia immediatamente inferior, multiplicada pelo expoente da potencia actual. Está pois demonstrada a regra no caso de serem todas as raizes iguais.

Se as raizes porém naõ forem todas iguais, isto he, se tivermos $(x+b)^m(x+d)^n$, multiplicaremos primeiramente os binomios desenvolvidos hum pelo outro, e depois cada termo do producto pelo expoente do seu x; o resultado será $m(x+b)^{m-1}(x+d)^n + n(x+b)^m(x+d)^{n-1}$, cujo divisor commum com $(x+b)^m(x+d)^n$ he $(x+b)^{m-1}(x+d)^{n-1}$; e assim por diante, qualquer que seja o numero dos factores $x+b$, $x+d$, &c.

Do modo de achar as raizes imaginarias das Equações.

229 AInda que as raizes imaginarias sejaõ susceptiveis de differentes fórmas, conforme o grão das equações, com tudo podemos reduzillas todas á fórma $x = a + b\sqrt{-1}$, sendo a e b quan-

quantidades reais, positivas, ou negativas. Veja-se a demonstraçaõ nas *Mem. da Acad. de Berlin*, *ann.* 1746, onde Mr. d'Alembert mostra, que podendo sempre hum dos valores de x representar-se por $a + b\sqrt{-1}$, haverá outro da fórma $a - b\sqrt{-1}$. Donde se segue:

1° O numero das raizes imaginarias he sempre par.

2° As equações de gráos pares saõ as unicas, que pódem ter todas as suas raizes imaginarias.

3° As raizes imaginarias, que dá a resoluçaõ de huma equaçaõ, tem duas a duas a mesma quantidade debaixo do radical.

4° Toda a equaçaõ de gráo par, cujo ultimo termo he negativo, tem ao menos duas raizes reais.

5° Huma equaçaõ, que tem todas as raizes imaginarias, póde resolver-se em factores do segundo gráo da fórma $(x - a - b\sqrt{-1})(x - a + b\sqrt{-1})$, isto he, em factores reais do segundo gráo $x^2 - 2ax + aa + bb$.

Logo resolvendo huma equaçaõ, que tiver todas as raizes imaginarias, em factores do segundo gráo (223) da fórma $x^2 + gx + h$, a equaçaõ em h terá seguramente algumas raizes reais, e conseguintemente poderemos achallas ao menos por approximaçaõ. Concluamos pois, que seja qual for a equaçaõ, poderemos sempre achar as suas raizes ou reais, ou imaginarias, ao menos por approximaçaõ.

SEC-

SECÇAÕ II.

DA APPLICAÇAÕ DA ALGEBRA A' ARITHMETICA E GEOMETRIA.

230 TEMOS viſto nas applicações da Secçaõ precedente, que a reſoluçaõ de hum problema, depois de formada a ſua equaçaõ, ſe reduz a deſembaraçar a incognita, ou incognitas; e que as regras porque iſto ſe executa, ainda que ſejaõ muito differentes as queſtões, e as quantidades que nellas ſe conſideraõ, ſaõ as meſmas para todos os problemas do meſmo gráo.

Moſtrámos em alguns exemplos, que eſtas regras diſpenſaõ de multiplicidade de raciocinios, que neceſſariamente ſe deviaõ fazer, ſenaõ recorreſſemos ás equações, e que independentemente do ſeu numero, muitas vezes pela ſua natureza ſeriaõ ſuperiores ás forças ordinarias da razaõ. Vimos tambem, quanto era vantajoſo repreſentar por ſinais geraes as quantidades que entraõ nos problemas, e as operações que ſobre ellas ſe praticaõ. Além deſtas vantagens a Analyſe tem muitas outras de que vamos a tractar, conſiderando as equações em hum ponto de viſta mais extenſo do que temos feito até aqui.

As equações que exprimem de hum modo geral todas as condições de qualquer problema, ſaõ como outros tantos livros, em que ſe pódem ler com muita facilidade as differentes relações, que tem humas quantidades com as outras. A razaõ aban-

abandona o problema, e occupa-se unicamente com as equações, para applicar-lhes as regras que ensinámos, e dar-lhes novas fórmas, que melhor deixaõ perceber as relações. Em huma palavra, saõ as equações o deposito das propriedades das quantidades que nellas entraõ, e das resoluções geraes de hum grande numero de problemas, que naõ lembravaõ, nem se suspeitava que dependessem do problema principal.

Com effeito, como o fim das regras porque se achaõ os valores das incognitas, he reduzir as equações a terem por primeiro membro cada huma das incognitas, e por segundo todas as outras quantidades; e como estas regras saõ applicaveis a qualquer das quantidades que entraõ nas equações, está claro, que podemos sempre chegar a ter qualquer dellas no primeiro membro, e todas as outras no segundo. Entaõ estamos reduzidos ao caso, em que houvessemos de resolver o problema, no qual se dessem estas ultimas, e aquella sómente fosse a incognita. Logo huma equaçaõ resolve tantos problemas differentes, quantas saõ as quantidades que nelle entraõ. Mostremos isto em alguns exemplos.

Propriedades gerais das Progressões Arithmeticas.

231 SEja o valor numerico do primeiro termo de huma progressaõ arithmetica $= a$, o do ultimo $= u$, a differença commua, ou a razaõ $= d$, o numero total dos termos $= n$; o numero dos termos que precedem o termo u será $n-1$; logo

logo (Arith. 206) . . . $u = a + (n - 1) d$. Esta equaçaõ resolve o problema, em que sendo dada a razaõ de huma progressaõ, com o numero dos termos, e o valor do primeiro, se procura qual deve ser o ultimo termo. Mas como contém quatro quantidades, resolve quatro problemas gerais. Porque,

1º Considerando a como incognita, temos $a = u - (n - 1) d$, a qual ensina, que o primeiro termo de huma progressaõ arithmetica crescente se acha, tirando do ultimo termo a razaõ tomada tantas vezes menos huma, quantos saõ os termos todos.

2º Considerando n como incognita, temos $n = \frac{u - a}{d} + 1$, a qual mostra, que para achar o numero dos termos, dividiremos a differença entre o primeiro e o ultimo pela razaõ, e ajuntaremos huma unidade ao quociente. Por exemplo, se o primeiro termo for 5, o ultimo 37, e a razaõ 2, constará a progressaõ de 17 termos. Se o quociente naõ for numero inteiro, a questaõ será absurda.

3º Considerando d como incognita, temos $d = \frac{u - a}{n - 1}$, a qual ensina, que para achar a razaõ, tiraremos o primeiro termo do ultimo, e dividiremos o resto pelo numero dos termos menos hum; o que concorda com a regra que demos (Arith. 209).

Assim a equaçaõ $u = a + (n - 1) d$ dá a resoluçaõ de quatro problemas gerais, que se comprehendem neste: *Das quatro cousas, o primeiro* *termo, o ultimo, o numero dos termos, e a razaõ de huma progressaõ arithmetica, sendo dadas tres, achar a quarta.*

232 Toda a progressaõ arithmetica póde representar-se por $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d$, &c. que sendo igual a $\div a \pm 4d . a \pm 3d . a \pm 2d . a \pm d . a$ a soma s dos termos de huma será igual á ametade da soma de ambas juntas. Mas a soma de dous termos correspondentes nas duas progressões deve sempre ser a mesma, e igual á do primeiro e ultimo de huma dellas reunidos; logo a totalidade das duas se achará somando os extremos de huma, e multiplicando o resultado pelo numero dos termos. Logo para acharmos a soma de todos os termos de huma progressaõ arithmetica, *multiplicaremos a soma dos extremos pela ametade do numero dos termos.* Por exemplo, a soma dos cem primeiros termos da progressaõ dos numeros impares $\div 1 . 3 . 5 . 7$ &c, cujo centesimo termo $= 199$, he $(199 + 1)\frac{100}{2} = 10000$.

A traducçaõ algebrica desta propriedade, conservando as denominações precedentes, dá a equaçaõ $s = (a + u)\frac{n}{2}$, a qual resolve este problema geral, que comprehende quatro: *Das quatro cousas, primeiro termo, ultimo, a soma, e numero dos termos de huma progressaõ arithmetica, sendo dadas tres, achar a quarta.*

Porque 1º conhecendo a, u, e n, a equaçaõ dá o valor de s. 2º Conhecendo a, u, e s, teremos

$n = \frac{2s}{a + u}$. 3° e 4° Conhecendo a, s, e n, ou u, s, e n, teremos $u = \frac{2s}{n} - a$, ou $a = \frac{2s}{n} - u$.

233 Os oito problemas geraís que acabámos de resolver por meio das duas equações, em que se traduziraõ duas propriedades das progressões, mostraõ como a Algebra ensina a deduzir de hum principio todas as verdades que delle dependem. Naõ obstante a pouca utilidade de algumas, continuaremos a tractar dellas, pois que pela sua simplicidade saõ muito proprias para servirem de exemplo do uso das equações.

Até aqui havemos considerado sómente huma equaçaõ de huma vez. Porém se duas, ou mais equações contiverem algumas quantidades communas, poderemos com summa facilidade derivar maior numero de propriedades. Por exemplo, as duas equações fundamentais das progressões arithmeticas $u = a + (n - 1) d$, e $s = (a + u) \frac{n}{2}$ tem tres quantidades communas a, u, e n. Tomemos successivamente em cada huma o valor de qualquer das tres quantidades, e igualando os dous valores, teremos novas equações, as quais exprimiraõ a relaçaõ, que tem entre si as outras quatro quantidades independentemente da eliminada. Assim, considerando a como incognita, teremos . . .

$s = \frac{2nu - n(n-1)d}{2}$, a qual resolve quatro problemas. Se eliminarmos ou u, ou n, teremos ou

$$s = an + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2}, \text{ ou } s = \frac{a+u}{2} + \frac{u^2 - a^2}{2d},$$

das quais nos ferviremos para refolver oito problemas, conforme forem conhecidas tais, ou tais quantidades.

Concluamos pois, que as duas equações fundamentais contem a refoluçaõ de vinte problemas, que fe podem propôr fobre as progrefsões arithmeticas, ou enfinaõ a achar qualquer das cinco quantidades a, u, n, d, s, huma vez que fejaõ dadas tres. Para fazermos algumas applicações,

234 Supponhamos que fe pergunta, quantas balas inclue a bafe de hum monte triangular, a qual tem n balas por lado.

He claro que cada fileira parallela a qualquer dos lados tem huma bala de menos que a precedente, e que o numero das fileiras he igual a n. Reduz-fe pois o problema a achar a foma dos termos de huma progreffaõ arithmetica, cujo primeiro termo $= 1$, o ultimo $= n$, e o numero dos termos $= n$. Logo a foma ferá $\frac{(n+1)n}{2}$; formula dos numeros triangulares, que fempre dará hum numero inteiro, quer n feja par, quer impar. Se o lado AB (*Fig.* 2) conftar de 6 balas, a bafe ABC terá 21.

235 O mefmo principio póde fervir para achar a fuperficie de qualquer trapezio, ou de hum triangulo. Com effeito, imaginando a altura dividida em huma infinidade de partes iguais por linhas rectas parallelas á bafe, ter-fe-ha o trapezio total ABDC (*Fig.* 3) dividido em infinitos trapezios *bcih*, *cdki* infinitamente pequenos. E como todos

elles

elles tem a meſma altura, tirando *ce* e *bf* parallelas a *bk*, a differença entre qualquer delles e o ſeu vezinho ſerá huma meſma quantidade *cefg*. Logo para acharmos a ſua totalidade, (232) multiplicaremos a ſoma dos extremos pela ametade do numero dos termos. Porém ſendo os trapezios infinitamente pequenos, póde cada hum ſuppôr-ſe igual á ſua baſe multiplicada pela ſua altura. Logo ſerá a ſuperficie do trapezio

$$= (\mathrm{CD}.\, b + \mathrm{AB}.\, b)\, \frac{n}{2} = \left(\frac{\mathrm{CD} + \mathrm{AB}}{2}\right) nb =$$

$\left(\frac{\mathrm{CD} + \mathrm{AB}}{2}\right) \mathrm{IH} =$ á ſemiſoma dos lados parallelos multiplicada pela altura. Donde ſe ſegue, que ſe AB for nada, ou ſe o trapezio ſe converter em triangulo, multiplicaremos a baſe pela ametade da altura; o que tudo concorda com o que ſe demonſtra na Geometria.

Da ſoma das potencias dos termos de qualquer Progreſſaõ Arithmetica.

236 A Soma de muitas quantidades que creſcem, ou diminuem por huma lei, determina-ſe pelo conhecimento de algumas dellas, do ſeu numero, e da lei do augmento, ou diminuiçaõ que obſervaõ.

Sejaõ a, b, c, d, &c. muitos numeros em progreſſaõ arithmetica, cuja differença ſeja r. Teremos 1° $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$.

2° Quadrando, teremos

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$
$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$
$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$
$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

3° Elevando ao cubo, teremos

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$
$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Se ſomarmos as equações dos quadrados, acharemos $e^2 = a^2 + 2r\,(a + b + c + d) + 4r^2$. Logo em geral, ſe o numero das quantidades a, b, c, d, &c. ſe repreſentar por n, a ultima por u, e a ſoma por s', teremos $u^2 = a^2 + 2r\,(s' - u) + (n - 1)\,r^2$, donde vem a ſoma de todos os termos de huma progreſſaõ arithmetica

$$s' = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)\,r^2}{2r} + u.$$

Do meſmo modo a ſoma dos cubos dará $e^3 = a^3 + 3r\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2\,(a + b + c + d) + 4r^3$, e em geral, ſendo s'' a ſoma dos quadrados, $u^3 = a^3 + 3r\,(s'' - u^2) + 3r^2\,(s' - u) + (n - 1)\,r^3 = a^3 + 3r\,(s'' - u^2) + 3r\,\frac{u^2 - a^2 - (n - 1)\,r^2}{2} + (n - 1)\,r^3$.

Lo-

Logo ſerá a ſoma dos quadrados, ou . . . .

$$s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1)r^3}{6r}$$

Semelhantemente acharemos a ſoma das potencias mais elevadas.

237 Se a progreſſaõ for a ſerie dos numeros naturais 1, 2, 3, &c. ſerá $a = 1$, $r = 1$, $u = a + (n-1)r = n$, e conſeguintemente $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$.

Supponhamos que ſe pertende ſaber quantas balas inclue hum monte dellas quadrado, ſendo conhecido o numero que tem hum lado da baſe. Como todas as camadas parallelas á baſe ſaõ quadrados que vaõ diminuindo de huma bala por lado deſde a baſe, eſtá claro que a totalidade ſerá a ſoma dos quadrados da ſerie natural dos numeros, continuados até o numero n das balas do lado da baſe, e conſeguintemente terá por expreſſaõ $\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$.

Praticaremos pois conforme eſta regra . . . *Ao numero das balas de hum lado da baſe, e ao ſeu dobro ajunte-ſe a unidade; multiplique-ſe huma ſoma pela outra, e o producto pelo meſmo numero de balas do lado da baſe; e tome-ſe a ſexta parte deſte ultimo producto.* Por exemplo, ſe o monte quadrangular tiver na baſe 6 balas por lado, a eſte numero e ao ſeu dobro 12 ajuntaremos 1, do que reſultará 7, e 13; o producto 91 multiplicado por 6 dará 546, cuja ſexta parte 91 ſerá o numero de balas do monte propoſto.

Se

Se o monte (*Fig.* 4.) tiver por baſe hum parallelogrammo DFGI, imagine-ſe dividido em hum monte quadrando DEAIH que ja ſe ſabe ſomar, e em hum priſma CBFEHG, cuja totalidade ſe achará, multiplicando o numero das balas do triangulo FBG (234) pelo número das balas de BC, ou de AB — 1. Aſſim, ſe AB tiver m balas, o monte terá

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(m-1)}{2}$$

$$=n.\frac{n+1}{2}.\left(\frac{m+2(m+n-1)}{3}\right).$$

238 Suppondo que o numero dos termos he infinito, a formula $s'' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ſe reduz a $s'' = \frac{n^3}{3} = n^2 . \frac{n}{3}$; porque ſuppôr n infinito, he ſuppôr que n naõ póde ſer augmentado por quantidade alguma finita; hypotheſe que ſe exprime no noſſo calculo, deſprezando 1 em comparaçaõ de n e de $2n$. Iſto poſto, imagine-ſe huma pyramide compoſta de ſecções parallelas á baſe, e a altura ST (*Fig.* 5) dividida em huma infinidade de partes iguais. Como conſta da Geometria, que todas as ſecções ſaõ proporcionais aos quadrados das ſuas diſtancias reſpectivas St ao vertice S, eſtas formaraõ a progreſſaõ natural, e as ſecções a dos ſeus quadrados. Logo, pela formula $s'' = n^2 \frac{n}{3}$, para achar a ſoma das ſecções, iſto he, a ſolidez da pyramide, deve multiplicar-ſe o ultimo quadrado, iſto

isto he, a base, pela terça parte da altura, como se demonstra na Geometria.

239 Em geral: Por quanto temos . . . .

$$e^m = d^m + md^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}d^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}d^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$d^m = c^m + mc^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}c^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}c^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}b^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}b^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$b^m = a^m + ma^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}r^3 + \&c.$$

se ajuntarmos estas quantidades, e representarmos por st^{m-1}, st^{m-2}, st^{m-3}, &c., a soma das potencias $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c. de todos os termos, e por u o ultimo, acharemos $u^m = a^m +$ . . $mr(st^{m-1} - u^{m-1}) + m.\frac{m-1}{2}r^2(st^{m-2} - u^{m-2})$ + &c. da qual se deduzem formulas da soma de todas as potencias de huma progressaõ, pondo successivamente $m=1$, $m=2$, $m=3$, &c. e advertindo que em lugar de $st^0 - u^0$ póde tomar-se $n-1$.

240 Agora he facil de achar a soma de muitas outras especies de progessões. Por exemplo, os termos da progressaõ $\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19$ &c. somados successivamente formaõ a serie 3, 10, 21, 36, 55, &c. a qual se póde somar. Ajuntando do mesmo modo os termos desta, teremos huma segunda serie 3, 13, 34, 70, 125, &c. que tambem he somavel, como igualmente a que se fórma pela addiçaõ dos termos da ultima, e assim por diante até o infinito.

Com

Com effeito, ſendo (233) a ſoma dos termos de huma progreſſaõ arithmetica $s = an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, e exprimindo s hum termo qualquer da primeira ſerie, reduz-ſe a queſtaõ a ſomar a ſerie das quantidades que reſultariaõ da expreſſaõ $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, ſe ſubſtituiſſemos ſucceſſivamente por n todos os termos da progreſſaõ natural 1, 2, 3, &c. E como a e r, ſeja n qual for, ſaõ ſempre as meſmas, para achar a ſoma das quantidades repreſentadas por an, baſta multiplicar a pela ſoma das quantidades repreſentadas por n, iſto he, pela ſoma da progreſſaõ dos numeros naturais; logo an ſerá a ſoma das quantidades $a \cdot \frac{(n+1)n}{2}$. Do meſmo modo a ſoma das quantidades $\frac{r}{2} n = \frac{r}{2} \frac{(n+1)n}{2}$, e a das quantidades $\frac{r}{2} n^2 = \frac{r}{2} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right)$. Logo a ſoma das quantidades $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, iſto he, a ſoma dos termos da primeira ſerie ſerá $a \cdot \frac{(n+1)n}{2} + \frac{r}{2} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) - \frac{r}{2} \frac{(n+1)n}{2} = \ldots$ $a \frac{(n+1)n}{2} + r \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. Somando tambem as differentes partes deſte reſultado, para

o

o que naõ ſe requer mais do que ſomar as potencias da ſerie natural dos numeros, acharemos a ſoma dos termos da ſegunda ſerie; e aſſim até o infinito.

Quando $a=1$, e $r=1$, iſto he, quando a progreſſaõ primitiva he a ſerie dos numeros naturais, as ſeries cujos termos ſe formaõ pela addiçaõ dos termos da precedente, chamaõ-ſe *numeros figurados*: eſtes ſaõ *triangulares* ou da terceira ordem, *pyramidais* ou da quarta ordem, conforme pertencem á primeira, ou á ſegunda ſerie &c.

Se for $a=1$, e fizermos r igual a 1, 2, 3, &c. reſultaraõ muitas progreſsões arithmeticas; as ſeries que ſe formaõ pela addiçaõ dos termos conſecutivos de cada huma deſſas progreſsões, chamaõ-ſe *numeros polygonos*, os quais ſeraõ *triangulares*, *quadrados*, *pentagonos*, *hexagonos*, &c. conforme a differença da progreſſaõ for 1, 2, 3, 4, &c.

Pela ultima formula póde achar-ſe o numero de balas de hum monte triangular; porque ſuppondo $a=1$, e $r=1$, teremos $n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$, donde ſe deduz huma regra muito ſimples. Se for dado o numero total m das balas, ſerá n a raiz cubica do maior cubo que ſe contiver em $6m$.

Do meſmo modo acharemos a ſoma das ſeries que ſe formaõ ajuntando a ſerie dos quadrados, a dos cubos &c., e em geral daquellas ſeries, cujos termos ſe exprimem por quaiſquer potencias perfeitas de hum meſmo numero n, multiplicadas por quaiſquer numeros.

Das

Das propriedades, e uſo das Progreſsões Geometricas.

241 SEjaõ a, b, c, d, e, &c. os termos conſecutivos de huma progreſſaõ geometrica creſcente, cuja razaõ $= q$. Como pela propriedade deſtas progreſsões (Arith. 211) he $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, teremos $b + c + d + e = (a + b + c + d)\, q$, ou em geral, ſendo s a ſoma de todos os termos, e u o ultimo, $s—a = (s—u)\, q$, a qual dá $s = \frac{qu—a}{q—1}$. Se a progreſſaõ for deſcendente, a repreſentará o ultimo termo, e u o primeiro.

Logo: *A ſoma de todos os termos de huma progreſſaõ geometrica acha-ſe, multiplicando o maior termo pela razaõ, tirando do producto o menor, e dividindo o reſto pela razaõ diminuida de huma unidade.* Entendemos em geral pela palavra *razaõ* o numero de vezes que cada termo da progreſſaõ contem o immediatamente menor, de maneira que o noſſo enunciado convem tanto ás progreſsões creſcentes, como ás decreſcentes.

Se a progreſſaõ for decreſcente até o infinito, o ultimo termo ſerá infinitamente pequeno, e a formula ſe tornará em $s = \frac{qu}{q—1}$. Logo neſte caſo o producto da razaõ multiplicada pelo maior termo, ſendo dividido pela razaõ diminuida da unidade, dará a ſoma dos termos da progreſſaõ. Aſſim a ſoma dos termos deſta progreſſaõ $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ &c. continuada até o in-

infinito he $\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{2-1} = 1$. Em geral, toda a progreſſaõ geometrica decreſcente até o infinito da fórma $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3}$ &c. ſendo n hum numero qualquer, tem por valor a unidade.

Naõ parecerá extranha eſta concluſaõ a quem advertir, que tomando, por exemplo, os $\frac{2}{3}$ da linha AB (*Fig.* 6) que ſupponho ſer de 1 pé, depois Cd, ou $\frac{2}{3}$ do reſto CB, depois $\frac{2}{3}$ do reſto dB, e aſſim por diante até o infinito, como exprime a progreſſaõ $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27}$ &c., iſto he, $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{9}$ &c., naõ ſe abſorbe mais que a linha AB.

242 Seja o primeiro termo de huma progreſſaõ geometrica $= a$, qualquer termo della $= u$, a razaõ $= q$, o numero dos termos $= n$, ſerá (Arith. 213) $u = aq^{n-1}$. Eſta equaçaõ reſolve eſte problema geral: Das quatro couſas, primeiro termo, ultimo, razaõ e numero dos termos de qualquer progreſſaõ geometrica, ſendo dadas tres, achar a quarta. Porque da formula $u = aq^{n-1}$, a qual dá immediatamente o valor de u, ſe deduz $a = \frac{u}{q^{n-1}}$, e $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Note-ſe que eſta ultima concorda com a regra que demos na Arithmetica, para meter muitos meios proporcionais entre duas quantidades a e u. Quanto a n, a Algebra naõ dá meios directos para o achar; mas facilmente ſe reſolverá a equaçaõ por meio dos logarithmos,

advertindo que se l representar as palavras *logarithmo de*, será (Arith. 227) $lab = la + lb$, e (Arith. 229) $la^n = nla$. Logo na equação $u = aq^{n-1}$ teremos $lu = la + (n-1)\,lq$, donde vem $n = 1 + \dfrac{lu - la}{lq}$.

Para fazermos algumas applicações, supponhamos que se deraõ 60000 libras a juro de 5 por 100, com a condição de se reputarem os interesses todos os annos como hum capital que igualmente vence juro: pergunta-se quantos annos são necessarios para que o capital chegue a 1000000 libras.

Como o interesse he $\frac{1}{20}$ do capital do anno precedente, representando por a, b, c, d, e, os fundos successivos de cada anno, teremos $b = a + \frac{1}{20}a = \frac{21}{20}a$, $c = \frac{21}{20}b$, $d = \frac{21}{20}c$, $e = \frac{21}{20}d$. Logo os fundos annuos formaõ huma progressaõ geometrica, cujo primeiro termo $a = 60000$, o ultimo $u = 1000000$, a razaõ $q = \frac{21}{20}$, e procura-se o tempo, isto he, $n-1$. Neste caso he $n = \dfrac{l1000000 - l60000}{l21 - l20} + 1 = \dfrac{1{,}2218487}{0{,}0211893} + 1$ pelas Taboas, ou $n-1 = 57{,}7$ proximamente. Logo o capital 60000 lib. chegará a ser de 1000000 lib. no fim de 57 annos 8 mezes $\frac{1}{2}$, com pouca differença.

A equação $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{u}{a}}$ se resolve facilmente por

por logarithmos; porque (Arith. 230, e 231) teremos $lq = \frac{lu - la}{n - 1}$. Applicando ao caſo precedente, acharemos $lq = \frac{1{,}2218487}{57{,}7} = 0{,}0211757$, logarithmo a que nas taboas correſponde o numero 1,0500 muito proximamente; donde concluiremos, que o intereſſe he $\frac{1}{20}$ proximamente.

Supponhamos por ſegundo exemplo, que a populaçaõ n de huma provincia tem de augmento ſucceſſivo todos os annos huma ſua parte deſignada por $\frac{1}{p}$; pergunta-ſe, em quantos annos virá a populaçaõ a conſtar de m peſſoas.

Sendo x o numero de annos que ſe procura, e diſcorrendo como no exemplo antecedente, vê-ſe claramente que a ſerie da populaçaõ annua fórma huma progreſſaõ geometrica, cujo primeiro termo he n, o ultimo m, a razaõ $\frac{1+p}{p}$, e o numero dos termos $x+1$; logo teremos $n\left(\frac{1+p}{p}\right)^x = m$, e por conſeguinte $x = \frac{lm - ln}{l(1+p) - lp}$.

Se for $p = 100$ e $m = 10n$, acharemos $x = \frac{l10}{l101 - l100} = \frac{10000000}{43214} = 231$. Logo ainda que a populaçaõ creſça em cada anno ſómente huma ſua centeſima parte, paſſados 231 annos eſtará dez vezes maior; paſſados 462 annos, ſe fará cem ve-

vezes maior; e mil vezes, paſſados 693 annos.

Com igual facilidade ſe achará o augmento annuo da populaçaõ. Se em cada ſeculo, por exemplo, o numero n de habitantes ſe fizer o duplo, teremos $\left(\frac{1+p}{p}\right)^{100} = 2$, e conſeguintemente $l\frac{1+p}{p} = \frac{1}{100}l2 = 0{,}0030103$; logo $p = 144$ poximamente: baſta pois que a populaçaõ creſça em cada anno a ſua $\frac{1}{144}$ parte.

No caſo de $n = 6$, como aconteceu na propagaçaõ da Terra depois do Diluvio, para que no fim de 200 annos houveſſe hum milhaõ de peſſoas, devia ſer $l\frac{1+p}{p} = \frac{1}{200}.\,l\frac{1000000}{6} = 0{,}0261092$, donde ſe tira $\frac{1+p}{p} = \frac{1061963}{1000000}$, e $p = 16$ proximamente. Se a progreſſaõ creſceſſe deſte modo por eſpaço de 400 annos, o numero de almas chegaria a $1000000 . \frac{1000000}{6} = 166666666666$.

243 A equaçaõ $s = \frac{qu-a}{q-1}$ dará tambem quatro formulas, as quais reſolveraõ eſte problema geral: Das quatro couſas, ſoma, razaõ, primeiro e ultimo termo de huma progreſſaõ geometrica, ſendo dadas tres, achar a quarta.

Finalmente, ſe combinarmos entre ſi as duas equaçóes $s = \frac{qu-a}{q-1}$, e $u = aq^{n-1}$, reſolveremos

eſte

estoutro problema mais geral: Das cinco cousas, primeiro e ultimo termo, razaõ, soma e numero dos termos de huma progressaõ geometrica, sendo dadas tres, achar as outras duas.

Da soma das Series Recurrentes.

244 DAmos o nome de *recurrentes* áquellas series, em que hum termo qualquer se fórma de certo numero de termos precedentes, multiplicados, ou divididos por numeros determinados, positivos, ou negativos. Por exemplo, a serie 2, 3, 19, 101, 543, &c. he recurrente, porque para se formar hum termo, recorre-se aos dous precedentes, multiplicando o primeiro por 2, o segundo por 5, e somando os productos; assim $543 = 19.2 + 101.5$, e $101 = 3.2 + 19.5$.

Somaõ-se estas series pelo methodo de que acima fizemos uso, como vamos a mostrar, applicando-o áquellas series, cuja lei depende de duas quantidades sómente, á maneira do exemplo proposto.

Sejaõ a, b, c, d, e, f, &c. os termos consecutivos de huma serie desta especie, m e p os numeros determinados de que depende a sua formaçaõ. Logo teremos $c = ma + pb$, $d = mb + pc$, $e = mc + pd$, $f = md + pe$, e conseguintemente $c + d + e + f = m(a + b + c + d) + p(b + c + d + e)$, ou designando s a soma de tódos os termos, $s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - f)$; a qual dá . . . .
$s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$, dependente

O dos

dos dous primeiros termos, dos dous ultimos, e das quantidades m e p. Se for $m = 0$, teremos $s = \frac{pf - b}{p - 1} + a$, como deve ser, porque entaõ a serie torna-se em progressaõ geometrica.

Póde introduzir-se o numero dos termos, procurando a expressaõ geral de hum termo qualquer em quantidades a, b, m, p, e no numero dos termos n.

Da Construcçaõ Geometrica das Quantidades Algebricas.

245 AS linhas, as superficies, e os solidos, como saõ quantidades, admitem as mesmas operações, que se fazem sobre os numeros, e sobre as quantidades algebricas. Os resultados porém de dous modos se podem avaliar, ou em numeros, ou em linhas. O primeiro modo, que tem lugar, quando as quantidades dadas se exprimem em numeros, presentemente naõ tem difficuldade: substituem-se em lugar das letras as quantidades numericas que ellas representaõ, e fazem-se as operações indicadas pela disposiçaõ dos sinais, e das mesmas letras.

O segundo modo, o qual se chama *construcçaõ* das quantidades algebricas, ou do problema que as produzio, depende de se entender a significaçaõ de certas expressões fundamentais, a que se referem todas as outras. Trataremos das primeiras, e ensinaremos ao mesmo tempo o modo de reportar-lhes quaisquer outras expressões.

246 Para conftruir $\frac{ab}{c}$, he neceffario achar huma quarta proporcional ás tres linhas conhecidas a, b, c. Isto fe faz, formando (*Fig.* 7) hum angulo qualquer com duas linhas indefinidas AX, AZ, e tomando fobre AX a parte AB igual á linha reprefentada por c, a parte AD igual a huma das duas a e b, a a por exemplo, e fobre AZ a parte AC igual a b; entaõ fe tirarmos BC, e conduzirmos por D a parallela DE, efta (2. 6. Eucl.) determinará AE $= \frac{ab}{c}$. O mefmo fe fará para conftruir $\frac{aa}{c}$, com a differença de tomar a em lugar de b.

Se tivermos $\frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, conftruiremos primeiramente $\frac{ab}{d}$, que chamaremos m, e depois $\frac{mc}{e}$. Praticar-fe-há do mefmo modo para conftruir $\frac{a^2b}{c^2}$, $\frac{a^4}{b^3}$, &c.

Se a expreffaõ for $\frac{ab + bd}{c + d} = \frac{(a + d)\,b}{c + d}$, confideraremos $a + d$ como huma linha m, $c + d$ como outra n, e affim a expreffaõ fe reduz a $\frac{mb}{n}$. Do mefmo modo conftruiremos $\frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a + b)\,(a - b)}{c}$.

Confifte pois o artificio em refolver a quanti-

 dade

dade em porções da fórma $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{a^2}{c}$. Ainda que isto pareça difficultoso em algumas expressões que tem numeradores, ou denominadores complexos, com tudo facilmente se conseguirá por meio das transformações.

Por exemplo, para construir $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$, supporemos $b^3 = a^2m$, e $c^2 = an$; então a expressão se transformará em $\frac{(a + m)a}{a + n}$, que he facil de construir, havendo determinado m e n pelas duas hypotheses.

Quando as expressões não são *homogeneas*, isto he, quando os termos do numerador, ou do denominador não tem o mesmo numero de factores, como na expressão $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$, parece que são inuteis as transformações. Porém como tais resultados sómente apparecem, quando o calculador por simplificar suppõe alguma quantidade igual á unidade; se esta se restituir em cada termo com expoente sufficiente para completar o numero das dimensões, a expressão se fará homogenea, e não haverá embaraço na sua construcção. Assim, para construir $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$, suppondo que d he a linha que se tomou por unidade, escreveremos . . $\frac{a^3 + bd^2 + c^2d}{ad + b^2}$, e faremos $b^2 = dm$, $c^2 = dn$, e $a^3 = d^2p$, o que mudará a expressão dada em $\frac{(p + b + n)d}{a + m}$.

De tudo isto se segue, que a construcçaõ das quantidades racionais, quando o numero das dimensões do numerador naõ exceder as do denominador em mais de huma unidade, se reduz a achar huma quarta proporcional a tres linhas dadas. Passemos agora ás quantidades, em que a differença das dimensões he de duas, e tres unidades: nunca o excesso póde ser maior, excepto quando se houver tomado alguma linha para unidade, ou quando alguns factores representarem numeros.

247 Quando a differença das dimensões he de duas unidades, a quantidade exprime huma superficie, e a sua construcçaõ se póde reduzir á de hum parallelogrammo, ou á de hum quadrado. Por exemplo, para construir $\frac{a^3 + a^2b}{a + c} = a \cdot \frac{a^2 + ab}{a + c}$, acharemos a linha $m = \frac{a^2 + ab}{a + c}$, e a expressaõ se tornará em $a.m$, que he a superficie de hum parallelogrammo que tem a por base, e m por altura: logo reciprocamente, esta superficie representará $a.m$, ou $\frac{a^3 + a^2 b}{a + c}$. Da mesma sorte $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, fazendo $bc = am$, e $d^2 = an$, se muda em $\frac{a(a^2 + mc + nd)}{a + c}$.

248 Se a differença entre as dimensões do numerador e do denominador for de tres unidades, a quantidade exprimirá hum solido e se construirá como hum parallelepipedo. Por exemplo,

a^3

$\frac{a^3b + a^2b^2}{a+c}$ póde conſiderar-ſe como $\frac{ab(a^2 + ab)}{a+c}$ $= abm$, ſendo m a linha que der a conſtrucçaõ de $\frac{a^2 + ab}{a+c}$. E como ab repreſenta hum parallelogrammo, ſe concebermos hum parallelepipedo, que tenha ab por baſe e m por altura, a ſua ſolidez repreſentará $\frac{a^3b + a^2b^2}{a+c}$.

249 Quanto ás quantidades radicais do ſegundo gráo, podem conſtruir-ſe, ou por huma meia proporcional entre duas linhas dadas, ou pela hypotenuſa, ou por algum dos outros lados de hum triangulo rectangulo.

Por exemplo, para conſtruir $\sqrt{ab}$, tira-ſe (*Fig.* 8) a linha indefinida AB, na qual ſe toma AC igual á linha a, CB igual a b, e ſobre a totalidade AB como diametro forma-ſe hum ſemicirculo, que cortando em D a perpendicular levantada em C, dará CD (31. 3, e Cor. 8. 6. Eucl.) por valor de $\sqrt{ab}$.

Donde vem, que para transformar hum parallelogrammo em quadrado, tomaremos huma meia proporcional entre a baſe e a altura; para os triangulos, tomaremos huma meia proporcional entre a baſe e ametade da altura; para os circulos, tomaremos huma meia proporcional entre o raio e a ſemicircumferencia; e para qualquer figura rectilinea, reduzilla-hemos a rectangulo (45. 1. Eucl.), ao qual applicaremos o que acabámos de dizer dos parallelogrammos.

Para conſtruir $\sqrt{(3ab + b^2)} = \sqrt{b(3a + b)}$, acharemos huma meia proporcional entre $3a + b$

e b. Do meſmo modo, ſe tivermos $\sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$, buſcaremos a meia proporcional entre $a+b$ e $a-b$. Se a expreſſaõ for $\sqrt{(a^2 + bc)}$, fazendo $bc = am$, teremos $\sqrt{(a+m)a}$, que ſe conſtruirá como temos dito.

Podemos conſtruir do meſmo modo a quantidade $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; porém he mais ſimples deſcrever hum triangulo rectangulo (*Fig.* 9.), cujos lados AB, AC ſejaõ a e b; ſerá (47. 1. Eucl.) a hypothenuſa BC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$. A meſma conſtrucçaõ póde ter $\sqrt{(a^2 + bc)}$, fazendo $bc = m^2$.

A expreſſaõ $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ póde conſtruir-ſe tambem de outra ſorte; porque deſcrevendo (*Fig.* 11.) ſobre AB $= a$ como diametro hum ſemicirculo, e tirando de A a corda AC $= b$, ſerá (31. 3., e 47. 1. Eucl.) BC $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Se a quantidade tiver mais de dous termos debaixo do radical, reduziremos a ſua conſtrucçaõ a algum dos methodos precedentes por meio das transformações. Tendo, por exemplo, $\sqrt{(a^2 + bc + ef)}$, faremos $bc = am$, $f = an$, e conſtruiremos a transformada $\sqrt{(a+m+n)a}$; ou de outra ſorte, faremos $bc = m^2$, $ef = n^2$, e conſtruiremos $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2)}$, o que ſe conſegue, pondo $\sqrt{(a^2 + m^2)} = h$, e $\sqrt{(h^2 + n^2)} = i$.

O modo porém mais ſimples de conſtruir os radicais, que contém huma ſerie de quadrados poſitivos, como por exemplo $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.)}$, conſiſte em conſiderar ſucceſſivamente cada hypothenuſa como hum lado. Aſſim, toma-ma-ſe (*Fig.* 10.) $AB = a$, e levantando a perpendicular $AC = b$, ſerá $BC^2 = a^2 + b^2$; levantando a perpendicular $CD = c$, teremos $BD^2 = a^2 + b^2 + c^2$; na extremidade de BD levantando a perpendicular $DE = d$, teremos $BE^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; e continuando aſſim por diante, a ultima hypothenuſa ſerá o valor de $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.)}$

Se em ſemelhantes expreſsões entrarem quadrados negativos, formar-ſe-ha hum quadrado m igual á ſoma dos quadrados poſitivos, outro n igual á ſoma dos negativos, e aſſim teremos para conſtruir $\sqrt{(m^2 - n^2)}$.

Finalmente, havendo fracções debaixo do radical, multiplicaremos ambos os termos dellas pelo denominador. Aſſim $a\sqrt{\frac{b+c}{d+e}}$ muda-ſe em $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, que he facil de conſtruir.

Por eſtes meſmos principios podemos muitas vezes ſimplificar as conſtrucções nos caſos particulares, attendendo ao que for proprio de cada problema. Eſta materia naõ admite regras gerais; ſómente advertiremos, que ſem embargo de que a conſtrucçaõ das quantidades radicais do ſegundo gráo ſe reduz a achar quartas proporcionais, meias proporcionais, e a conſtruir triangulos rectangulos; com tudo algumas vezes ſe conſeguem conſtrucções mais ou menos ſimples e elegantes, conforme o methodo de que uſarmos para achar as meias proporcionais; por tanto enſinaremos mais

dous

dous modos de tomar huma meia proporcional entre duas linhas dadas.

Consiste o primeiro em descrever sobre a maior AB (*Fig.* 11.) hum semicirculo, e tomando huma parte AD igual á menor, levanta-se a perpendicular DC, e tira-se AC, que será (31. 3, e Cor. 8. 6. Eucl.) meia proporcional entre AB e AD.

O segundo consiste em tirar (*Fig.* 12.) huma linha AB igual á maior, e tomando nella huma parte AC igual á menor, descreve-se sobre o resto BC hum semicirculo, cuja tangente AD (36. 3, e 17. 6. Eucl.) he meia proporcional entre AB e AC.

Concluamos pois, que as quantidades racionais se constroem sempre por linhas rectas, e as radicais do segundo gráo pelo circulo e pela linha recta juntamente.

Quanto aos radicais de gráos superiores, a sua construcçaõ depende da combinaçaõ de differentes linhas curvas, das quais havemos de tratar, occupando-nos primeiramente com alguns problemas, cuja resoluçaõ depende de quantidades ou racionais, ou radicais do segundo gráo.

Problemas de Geometria, e reflexões tanto sobre o modo de os pôr em equaçaõ, como sobre as differentes soluções que daõ as equações.

250 PAra pôr os problemas de Geometria em equaçaõ, serve o mesmo principio que havemos dado (67). Porém a Analyse nesta parte, ou os raciocinios que se fazem para verificar a incognita, e deduzir assim a equaçaõ, dependem de serem conhecidas algumas propriedades da quantida-

do

de deſconhecida. Nas queſtões numericas ordinariamente baſta traduzir em linguagem algebrica o enunciado do problema ; mas na applicaçaõ da Algebra á Geometria he neceſſario fazer uſo de outros meios , que iremos enſinando pouco a pouco. Por ora baſta dizer , que para verificar huma quantidade , nem ſempre he neceſſario examinar ſe ella ſatisfaz immediatamente ás condições do problema ; faz-ſe muitas vezes eſta verificaçaõ commodamente , averiguando ſe a quantidade tem certas propriedades , que ſaõ eſſencialmente connexas com as ditas condições. Paſſemos aos exemplos , que ſe percebem melhor do que os preceitos gerais.

251 Probl. I. *Inſcrever hum quadrado* ABCD (*Fig.* 13.) *no triangulo dado* EHI.

Por *triangulo dado* entendemos hum triangulo , em que tudo he conhecido , lados , angulos , altura , &c.

Examinando o problema , vê-ſe que naõ ſe trata de mais , que de achar na altura EF hum ponto G , pelo qual conduzindo AB parallela a HI , ſeja AB $=$ GF.

Supponhamos a altura conhecida EF $= a$, a baſe HI $= b$, e GF $= x$; ſerá EG $= a - x$. Sendo pois AB parallela a HI , teremos (2.6. Eucl.) EF : EG :: FI : GB :: HI : AB ; iſto he , $a : a - x :: b :$ AB $= \frac{ab - bx}{a}$; e como AB deve ſer igual a GF , teremos $\frac{ab - bx}{a} = x$, da qual ſe tira $x = \frac{ab}{a + b}$.

Pa-

Para construir esta quantidade (246), conduza-se de F para O huma linha FO $= a + b =$ EF $+$ HI, e tire-se EO; tomando depois FM $=$ HI $= b$, tire-se parallelamente a EO a linha MG, a qual encontrando EF no ponto G, determinará GF, ou x; pois que os triangulos semelhantes EFO, GFM daõ FO $(a+b)$: FM (b) :: FE (a) : FG $= \frac{ab}{a+b}$.

252 Probl. II. *Sendo dado o comprimento da linha* BC (*Fig.* 14.) *com os angulos* B *e* C, *que formaõ com ella as duas* BA *e* CA, *determinar a altura* AD, *em que estas ultimas linhas se haõ de encontrar.*

Por *angulo dado* entende-se dado o valor do seu seno, tangente, &c. que saõ as linhas, por meio das quais entraõ os angulos no calculo algebrico.

Seja BC $= a$, AD $= y$. No triangulo rectangulo ADC (Trig. 164.) temos CD : DA (y) :: 1 : m, sendo m a tangente do angulo ACD, e supondo o raio igual á unidade; logo CD $= \frac{y}{m}$.

Pela mesma razaõ BD $= \frac{y}{n}$, sendo a tangente de ABD $= n$. Mas he BD $+$ DC $=$ BC $= a$; logo $\frac{y}{m} + \frac{y}{n} = a$, donde vem $y = \frac{amn}{m+n}$.

Esta expressaõ póde simplificar-se, introduzindo em lugar das tangentes de C e B as suas cotangentes, que chamaremos p e q. Porque sendo (Trig. 26. III.) $m = \frac{1}{p}$, e $n = \frac{1}{q}$, teremos

y

$y = \frac{a}{p+q}$, que he muito facil de conſtruir.

253 Se havendo pois revolvido hum problema com certas quantidades dadas, naõ chegarmos a hum reſultado taõ ſimples como ſe deſejar, he eſcuſado começar o calculo de novo com outras quantidades, a fim de tentar a ſimplificaçaõ: baſta, como no exemplo precedente, exprimir em equações as relações, que tem as quantidades em que eſtá reſolvido o problema, com aquellas que de novo ſe introduzem, e fazer ſubſtituições.

254 Probl. III. *Sendo dados os tres lados de hum triangulo* ABC (*Fig.* 15.), *achar a pependicular* BD, *e os ſegmentos* AD, DC.

Se conheceſſemos eſtas linhas, e as quizeſſemos verificar, no triangulo rectangulo BDC ſomariamos os quadrados de BD, DC, e veriamos ſe a ſoma era igual ao quadrado de BC (47. 1. Eucl.). O meſmo ſe praticaria no triangulo ABD.

Seja pois BD $= y$, CD $= x$, BC $= a$, AB $= b$, AC $= c$; ſerá AD $= c - x$. Logo teremos $x^2 + y^2 = a^2$, e $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = b^2$, as quais daõ $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, e por conſeguinte $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$, que he muito facil de conſtruir (246).

Das muitas concluſões, que ſe podem tirar deſtas equações, exporemos algumas para exercitar os principiantes a ler em huma equaçaõ o que ella contém.

255 1° A equaçaõ $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, ou $c(2x - c) = (a + b)(a - b)$ dá (Arith. 180.) $c : a + b :: a - b : x - (c - x)$, isto he, AC : BC + AB :: BC − AB : CD − AD, como achámos (Trig. 181).

256 2° Se do ponto C com o raio BC descrevermos o arco BO, e tirarmos a corda BO, teremos $BO^2 = BD^2 + DO^2$, ou, por ser $DO = a - x$, $BO^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; mas he $y^2 + x^2 = a^2$; logo será $BO^2 = 2a(a - x) = 2a \left(a + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right) = \frac{a}{c}\left(b^2 - (c - a)^2\right) = \frac{a}{c}(b + c - a)(b - c + a) = \frac{a}{c}(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c) = \frac{4a}{c}(s - a)(s - c)$, representando por $2s$ a soma dos tres lados. Tire-se de C para OB a perpendicular CI; no triangulo CIO teremos (Trig. 162.) CO (a) : OI $(\frac{1}{2}$ BO$)$ :: R : *sen* OCI, e por conseguinte $BO^2 = \frac{4a^2}{R^2}(sen\ OCI)^2$. Igualando os dous valores de BO^2, acharemos $ac\ (sen\ OCI)^2 = R^2(s - a)(s - c)$, ou $ac : (s - a)(s - c) :: R^2 : (sen\ OCI)^2$, como se achou (Trig. 183).

257 3° Por quanto he $y^2 = (a + x)(a - x) = \left(a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)\left(a + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right)$

=

$=\left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right)\left(\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c}\right)$, ſerá $4c^2y^2=2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)$, a qual dá a ſuperficie do triangulo ABC $=\frac{cy}{2}$ $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ . . . (Trig. 189. Caſo III.)

258 4° Da equaçaõ $2cx-c^2=a^2-b^2$ ſe tira $b^2=a^2+c^2-2cx$; porém ſe a perpendicular cahir fóra, teremos (*Fig.* 16.), conſervando as meſmas denominações, $y^2+x^2=a^2$, e $y^2+c^2+2cx+x^2=b^2$, das quais ſe deduz $b^2-a^2=c^2+2cx$, ou $c:b+a::b-a:c+2x$, iſto he, AC : AB + BC :: AB — BC : CD + AD . . . (Trig. 181).

259 5° Pelas equações $b^2=a^2+c^2+2cx$ (258), e $b^2=a^2+c^2-2cx$ (254) ſe moſtra, que em hum triangulo o quadrado do lado oppoſto a hum dos angulos he maior, ou menor que a ſoma dos quadrados dos outros dous lados, conforme o angulo he agudo, ou obtuſo; e tambem como calculando os angulos de hum triangulo pelos lados, ſe vem no conhecimento da eſpecie do angulo que ſe procura.

260 6° Eſtas meſmas equações confirmaõ o que havemos dito a reſpeito das quantidades negativas. O ſegmento CD tem ſituações contrarias, conforme a perpendicular cahe dentro ou fóra do triangulo (*Fig.* 15. e 16.); e com effeito o termo

$2cx$ acha-ſe com ſinais contrarios nas duas equações. Logo reciprocamente, ſejaõ quais forem os calculos que ſe fizerem para hum deſtes triangulos, teremos os que convém aos caſos analogos do outro, mudando os ſinais ás partes, que em huma meſma linha tiverem ſituações oppoſtas.

261 Ainda que em geral a facilidade, e os recurſos, que ha para pôr em equaçaõ os problemas de Geometria, creſçaõ á proporçaõ do numero de propriedades, que conhecermos das linhas; com tudo, como a Algebra dá meios para achar eſtas meſmas propriedades, o numero das propoſições verdadeiramente neceſſarias vem a ſer muito limitado: póde dizer-ſe, que a 47 do 1º, e a 4 do 6º Livro de Euclides, ſaõ a baſe da applicaçaõ da Algebra á Geometria. O modo porém, porque ſe deve fazer uſo deſtas duas propoſições, varía muito conforme a natureza dos problemas, e naõ lembra de repente. Humas vezes devem produzir-ſe linhas até que ſe encontrem; outras vezes devem tirar-ſe linhas parallelas, ou que façaõ hum angulo dado com outra linha. Em huma palavra, neſta parte, como em qualquer outra, requer-ſe no Analyſta hum certo diſcernimento para a eſcolha e uſo dos meios. Como elle ſe adquire em parte com o exercicio, he conveniente que appliquemos eſtas obſervações a differentes exemplos.

262 Probl. IV. *Pelo ponto* A (*Fig.* 17.) *dado de poſiçaõ a reſpeito de duas linhas* HD, DI, *que formaõ o angulo conhecido* HDI, *tirar huma recta* AEG *de maneira, que o triangulo intercepto* EDG *tenha huma ſuperficie dada, iſto he, huma ſuperficie igual á do quadrado conhecido* c^2.

Conduzamos por A a linha AB parallela a DH, DH, e a linha AC perpendicular a DG produzida; do ponto E onde AEG deve cortar DH, imaginemos tirada a perpendicular EF. Se DG e EF fossem conhecidas, ametade do seu producto deveria ser igual a c^2.

Supponhamos pois $DG = x$, e vejamos se EF póde exprimir-se em x, e quantidades dadas do problema.

Como a posiçaõ de A he dada, seraõ conhecidas as linhas BD e AC, que chamaremos a e b; e pois que os triangulos semelhantes ABG, EDG daõ BG : DG :: AG : EG, e os dous tambem semelhantes ACG, EFG daõ AG : EG :: AC : EF, será $EF = \frac{AC \cdot DG}{BG} = \frac{bx}{a+x}$. Devendo pois ser $EDG = c^2$, teremos $\frac{bx}{a+x} \cdot \frac{x}{2} = c^2$, donde se tiraõ (100) para x estes dous valores $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$; mas o segundo he inutil no caso presente.

Para construir o primeiro, isto he $\frac{c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, levanto em qualquer ponto C da linha indefinida PQ a perpendicular $AC = b$; tomo sobre CA e CP as duas CO e CM, cada huma igual a c, e tiro AM; a sua parallela ON dá $CN = \frac{c^2}{b}$, e por conseguinte $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a).CN]}$. Para achar $\sqrt{[(CN+2a).CN]}$, ou huma meia proporcional, sobre NC produzida to-

tomo $CQ = 2a$, e com o diametro NQ descrevê hum semicirculo, que encontrará CA em V; fazendo entaõ NP igual á corda NV, será $CP = CN + \sqrt{[(CN + 2a).CN]} = x$. Se tomarmos pois (*Fig.* 17.) $DG = CP$, acharemos o ponto G, pelo qual e por A tirando AG, será $EDG = c^2$.

263 Em quanto á significaçaõ do segundo valor de $x = \frac{c^2}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right).\frac{c^2}{b}\right]}$, note-se, que os dados da questaõ tanto pertencem ao angulo EDG (*Fig.*17.), como ao seu igual $E'DG'$, formado pelas linhas GD, ED produzidas; e por tanto este valor resolve o problema, em que se propuzesse fazer no angulo $E'DG'$ o mesmo que fizemos no angulo EDG. Com effeito, chamando x a DG', e conservando as outras denominações, os triangulos ABG', $E'DG'$ daõ $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; e abaixando a perpendicular $E'F'$ os triangulos ACG', $E'F'G'$ daõ $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; logo será $F'E' = \frac{AC'.DG'}{BG'} = \frac{bx}{a-x}$, e pelas condições $\frac{bx}{a-x} \cdot \frac{1}{2}\, x = c^2$, a qual dá $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$; valores iguais aos do caso precedente, com a differença unica dos sinais, como deve ser.

A construcçaõ do caso precedente tem tambem aqui lugar; a unica mudança que se deve fazer he pôr $NK = NV$ para a parte de Q, e será $x =$

P CK,

CK, porque no caſo preſente $x = \frac{-c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]} = -CN + NV = -CN + NK = CK$. Logo, fazendo DG' igual a CK, e tirando por A e G' a linha $AG'E'$, teremos o triangulo $E'DG' = c^2$, iſto he, acharemos a ſegunda ſoluçaõ do problema.

264 Se o ponto A eſtiver por baixo de BG (*Fig.* 19.), a linha $AC = b$ ſerá negativa, e os dous primeiros valores de x ſeraõ $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$. Vê-ſe pois que o problema ſerá impoſſivel (98), quando for $2a > \frac{c^2}{b}$, e que os dous valores de x ſeraõ negativos, ſe for $2a < \frac{c^2}{b}$; ou por outras palavras, o problema he impoſſivel a reſpeito do angulo HDI, mas a reſpeito do igual $E'DG'$ tem duas ſoluções. Para as achar, ou para conſtruir $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, havendo determinado (*Fig.* 20.) como acima $CN = \frac{c^2}{b}$, deſcreveremos com o diametro $NQ = 2a$ hum ſemicirculo NVQ, ao qual tiraremos a tangente CV; e tomando de ambas as partes de C as linhas CP, e CK, cada huma igual a CV, as linhas NP e NK ſeraõ os dous valores de x; porque

que ſendo $CP = CK = CV = \sqrt{(CQ.CN)} = \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, teremos $NP = \frac{c^2}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, e $NK = \frac{c^2}{b} + \ldots \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$. Como eſtas quantidades ſaõ os valores de x com ſinais contrarios, devemos tomallos de D para a parte de G (*Fig.* 19.), fazendo DG, e DG′ iguais reſpectivamente a NP, e NK. Feito iſto, ſe tirarmos pelo ponto A, e pelos pontos G e G′ as rectas EG, E′G′, cada hum dos triangulos EDG, E′DG′ ſerá igual a c^2.

265 Se o ponto A (*Fig.*21.) eſtiver dentro do angulo HDI, BD cahirá para a parte oppoſta, e os dous valores primitivos de x ſe tornaráõ em $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} - \frac{2ac^2}{b}\right)}$, os quais ſaõ os meſmos (mudando os ſinais) que acabámos de conſtruir. Devemos pois fazer a meſma conſtrucçaõ (*Fig.* 20.), tomando porém (*Fig.* 21.) NP e NK de D para I.

266 Finalmente, ſe o ponto A (*Fig.* 22.) eſtiver por baixo de BD, e dentro do angulo BDE′, a e b ſeraõ negativos, o que dará $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$, com ſinal contrario dos primeiros valores achados para x. Conſtruindo-os pois

como fizemos (*Fig.* 18.), ferá CK o valor pofitivo de x, e CP o negativo; pelo que tomaremos DG (*Fig.* 22.) igual a CK para a parte de B, e DG′ igual a CP para a parte oppofta.

Demoramo-nos nefte problema, para moftrar como huma equaçaõ comprehende todos os cafos de hum problema, como eftes fe deduzem pela fimples mudança dos finais, e como as fituações oppoftas das linhas fe defignaõ por finais contrarios, e reciprocamente.

267 Para moftrarmos ainda alguns ufos deftas foluções, fupponhamos que fe propõe efte problema: *Pelo ponto dado* A (*Fig.* 23.) *fóra ou dentro do triangulo dado* DHI, *tirar huma linha* AF, *que divida o triangulo em duas partes* DEF, EFIH, *as quais tenhaõ entre fi a razaõ conhecida de* $m : n$. A refoluçaõ defte problema inclue-fe na do precedente. Com effeito, como he dado o triangulo DHI, faberemos que parte delle deve fer o triangulo DEF, achando o quarto termo da proporçaõ $m + n : m :: \text{DHI} : \text{DEF} = \frac{m.\,\text{DHI}}{m+n}$;

Vifto pois poder-fe achar hum quadrado c^2 igual a efta fuperficie (249), reduz-fe a queftaõ a tirar por A huma linha AEF, que com os lados DH, DI forme hum triangulo igual ao quadrado c^2, que he o problema precedente.

268 Ao mefmo problema fe reduz efte: *Dividir em duas partes huma figura rectilinea* (*Fig.* 24.) *pela recta tirada por qualquer ponto* A, *de forte que tenhaõ entre fi huma razaõ dada*. Com effeito, fendo dada a figura BCDHK, faõ conhecidos todos

os

os ſeus angulos e lados; logo com facilidade (Trig. 189. Caſo I.) acharemos a ſuperficie do triangulo BLC formado pelos lados KB, DC produzidos, como tambem a porçaõ determinada EBCF da ſuperficie total. Pelo que reduz-ſe a queſtaõ a tirar AEF de maneira, que forme com KL e DL hum triangulo igual a hum quadrado. Finalmente, póde-ſe por eſte modo dividir huma figura em muitas partes, que tenhaõ entre ſi razões dadas.

269 Se huma equaçaõ naõ ſe alterar pela mudança, que fizermos nos ſinais de algumas quantidades conhecidas que nella entrarem; ou ſe da mudança de poſiçaõ na linha, ou linhas procuradas da figura naõ reſultar mudança, nem de poſiçaõ, nem de grandeza nas linhas dadas; entaõ entre os differentes valores de x, que der a equaçaõ, haverá ſempre hum que reſolverá particularmente o caſo indicado pela dita mudança. Vio-ſe por exemplo no Problema IV, que hum dos dous valores de x reſolvia directamente o caſo, em que a linha AEG (*Fig.* 17.) atraveſſaſſe o angulo HDI, como ſe havia ſuppoſto no calculo; mas vio-ſe ao meſmo tempo, que o ſegundo valor de x reſolvia o caſo, em que ſe conſideraſſe, naõ o angulo HDI, mas o ſeu verticalmente oppoſto. A razaõ diſto he, porque devendo-ſe empregar em cada caſo os meſmos dados, e fazer os meſmos raciocinios, chegaremos neceſſariamente a ter ſempre a meſma equaçaõ; logo a meſma equaçaõ deve reſolver ambos os caſos.

270 Probl. V. *Do ponto dado* A (*Fig.* 25.) *fóra do circulo* BDC *tirar a recta* AE, *de ſorte que a parte* DE *intercepta no circulo ſeja igual a huma linha dada* c.

Pa-

Para ſaber de que modo ſe deve tirar AE, naõ he neceſſario mais do que buſcar, que grandeza deve ter AD, para que ſeja DE $= c$. Suppondo pois AD $= x$, AB $= a$, AC $= b$, teremos AE . AD $=$ AC . AB (Corol. 36. 3. Eucl.), ou $(x + c) x = ab$; logo $x = -\frac{1}{2} c \pm \sqrt{(\frac{1}{4} cc + ab)}$.

Para conſtruir ſem transformações o primeiro valor, que he o que ſatisfaz ao problema actual, tiraremos do ponto A a tangente AT, e o raio TO, que ſerá perpendicular a AT; entaõ tomando TI $= \frac{1}{2} c$, teremos AI $= \sqrt{(\frac{1}{4} c^2 + AT^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4} cc + ab)}$ . . (36. 3. Eucl.). Logo para ter x, tomaremos IR $=$ TI, e o arco RD deſcrito do ponto A com o raio AR determinará o ponto procurado D.

O ſegundo valor de $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} cc + ab)}$ cahe para a parte contraria a AD. Para achar a queſtaõ que elle reſolve, noto, que ſuppondo a e b negativos, a equaçaõ $x^2 + cx = ab$ naõ padece mudança alguma; logo eſta equaçaõ reſolve tambem o caſo de ſer dado o circulo B′D′E′C′, e a elle pertence o ſegundo valor de x. Na conſtrucçaõ precedente pois ſe produzirmos AI de maneira, que ſeja IR′ $=$ IT, o arco deſcrito do ponto A com o raio AR′ marcará o ponto E′ tal, que a parte intercepta E′D′ ſerá igual a c.

Como os dous circulos ſaõ iguais, e eſtaõ ſituados da meſma maneira, ambas as ſoluções podem pertencer ao meſmo circulo, de ſorte que deſcrevendo do ponto A com o raio AR′ o arco R′E, a linha AE tambem reſolverá o problema. Porém

das

das duas ſoluções que dá o calculo, a primeira cahe da direita de A, e pertence ao ponto D da circumferencia convexa; a ſegunda cahe da eſquerda, e pertence ao ponto E′ da circumferencia concava.

271 Probl. VI. *Achar na direcçaõ da linha dada* AB (*Fig.*26.) *hum ponto* C *tal, que a ſua diſtancia ao ponto* A *ſeja meia proporcional entre a ſua diſtancia ao ponto* B, *e a linha toda* AB.

Seja AB $= a$, e AC $= x$; ſerá BC $= a - x$; e como deve ſer AB : AC :: AC : CB, teremos $x^2 + ax = a^2$; logo $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$.

Para conſtruirmos o primeiro valor de x, levantaremos (249) em B a perpendicular BD $= \frac{1}{2}a$, e tirando AD, diminuiremos deſta a linha BD, e teremos AO $= x$. Levando pois AO de A para a parte de B, determinaremos o ponto procurado C.

Se produzirmos AD até O′, de ſorte que ſeja DO′ $=$ DB, teremos AO′ por ſegundo valor de x; e levando eſta linha ſobre AB deſde A para a parte oppoſta áquella para que x tendia por ſuppoſiçaõ, teremos o ponto C′, que tambem ſatisfaz á queſtaõ.

Eſte problema he o que ſe reſolveu na Geometria (30. 6. Eucl.) pelo methodo ſynthetico.

272 Nos problemas precedentes havemos tomado para incognita huma linha, a qual depois de ſer conhecida podeſſe determinar todas as outras pelas condições da queſtaõ; e iſto he o que devemos ſempre praticar. Como porém muitas linhas podem ter a dita prerogativa, ſem que de todas ellas reſultem equações igualmente ſimples,

de-

deve preferir-se huma dellas. Para nos dirigirmos nesta escolha serve a regra seguinte.

273 *Se entre as linhas ou quantidades, cada huma das quais sendo tomada por incognita póde determinar todas as outras, se acharem duas que conduzaõ á mesma equaçaõ, ainda que esta tenha sinais differentes; escolheremos para incognita outra quantidade, que dependa igualmente de ambas;* por exemplo, a sua semisoma, ou a sua semidifferença, ou huma meia proporcional, &c. Assim teremos huma equaçaõ mais simples, como se verá no problema seguinte.

274 Probl. VII. *Pelo ponto* D (*Fig.*27.) *situado dentro do angulo recto* IAE, *e em igual distancia dos lados* IA, AE, *tirar huma recta* DB, *de maneira que a parte* CB *comprehendida dentro do angulo* EAB *seja igual a huma linha dada* c.

Tendo abaixado as perpendiculares DE, DI, qualquer das linhas CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB póde servir indifferentemente para incognita. Se tomarmos, por exemplo CE, entaõ supponDo $CE = x$, e $DE = DI = a$, será $AC = a - x$, e pelos triangulos semelhantes DEC, CAB teremos $AB = \frac{aa - ax}{x}$; mas he $AB^2 + AC^2 = BC^2$, isto he $(a - x)^2 + \left(\frac{aa - ax}{x}\right)^2 = cc$; logo virá a equaçaõ do quarto grão $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$.

Se em lugar de CE tomarmos IB por incognita, teremos a mesma equaçaõ, como se póde vêr fazendo $CE = x$, e imitando a soluçaõ precedente. Se tomarmos AB ou AC, acharemos huma ma meſma equaçaõ, exceptuando os ſinais; o meſmo acontece, tomando BD ou DC.

Tomemos pois (273) para incognita a ſoma das duas linhas BD e DC, a qual ſeja deſignada por $2x$; ſerá (Trig. 177.) $DB = x + \frac{1}{2}c$, e $DC = x - \frac{1}{2}c$; e como as parallelas DI, CA daõ $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$, e $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$, teremos $\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$, iſto he $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, equaçaõ, que ſendo ainda do quarto gráo, he com tudo mais facil de reſolver (173) do que a precedente. Se empregarmos duas incognitas, ſuppondo $AB + AC = 2x$, e $AB - AC = 2y$, iſto he, $AB = x + y$, e $AC = x - y$, teremos equações bem ſimples, que os principiantes acharáõ com facilidade.

A equaçaõ $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$ dá $x = \pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa \ldots \pm a\sqrt{(cc + aa)}\right]}$; porém deſtes quatro valores o que unicamente pertence ao problema, conſiderado do modo porque foi propoſto, he $x = +\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}\right]}$. O valor $x = +\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + ac)}\right]}$ re-

ſol-

ſolve o problema, no caſo de ſe pedir que a linha CB (*Fig*.28.) eſteja dentro do meſmo angulo EAI, em que eſtá o ponto D; e neſte caſo x repreſenta a ſemidifferença das linhas BD, DC. Com effeito, ſendo $2x$ eſta differença, ſerá $DB = \frac{1}{2}c + x$, e $CD = \frac{1}{2}c - x$; logo, continuando como acima, teremos $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, iſto he, a meſma equaçaõ que achámos para a ſoma das linhas BD e CD (*Fig*.27.). Como pois a meſma equaçaõ ſatisfaz aos dous caſos, huma das ſuas raizes deve dar a ſoma das ditas linhas, e outra a differença; bem entendido, que eſtas duas raizes ſaõ as meſmas que havemos indicado, porque as outras duas ſaõ negativas, e por tanto pertencem a caſos inteiramente oppoſtos, que paſſamos agora a conſiderar.

No problema preſente, ou ao menos na equaçaõ, naõ ſe determina ſe o ponto D (*Fig*.27.) eſtá por baixo de AI, e á eſquerda de AE, como ſe ſuppoz primeiramente, ou ſe eſtá pelo contrario por cima da primeira, e á direita da ſegunda, como ſe vê relativamente a A′I′ e A′E′. E porque neſte ultimo caſo a quantidade a ſe torna negativa, teremos a ſoluçaõ competente, pondo $-a$ em lugar de $+a$ na equaçaõ achada $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2$ &c.; mas eſta com iſſo naõ padece

mu-

mudança ; logo a mesma equaçaõ resolve estes dous casos novos, e por conseguinte dos outros dous valores de x hum dá a soma das linhas DB', DC' (*Fig.*27.), e o outro a sua differença (*Fig.*28.). Com effeito, cahindo nesta nova posiçaõ os pontos B e C para partes oppostas, a respeito daquellas para que antecedentemente cahiaõ, tanto a soma, como a differença das linhas DB' e DC' devem ser negativas, e assim as dá a equaçaõ.

Para construir a equaçaõ $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4} cc \pm a\sqrt{(aa + cc)}]}$, tome-se na linha EA produzida (*Fig.* 27, e 28.) a parte AN $= c$, e tirando IN, tome-se sobre DI produzida a parte IK $=$ IN, e sobre DK como diametro descreva-se o semicirculo KLD, que encontra em L a recta AI produzida, se for necessario. Pelo meio H de AN tire-se IH, e tomando de IK (*Fig.* 27.) a parte IM $=$ IH, será LM o primeiro valor de x. Na *Figura* 28 porém descreveremos do ponto L como centro, e com o intervallo IH hum arco, o qual cortando IK em M, dará IM pelo segundo valor de x. E como BD $= x + \frac{1}{2} c$, será BD $=$ LM $+$ AH (*Fig.* 27.), e BD $=$ IM $+$ AH (*Fig.* 28.); descrevendo pois do ponto D como centro, e com o intervallo BD assim determinado hum arco, que corte IA produzida em hum ponto B, a recta BD terá as condições dadas.

A construcçaõ do segundo valor de x suppõe que IH (*Fig.* 28.) naõ he menor que LI ; se o fosse, o problema seria impossivel : isto mesmo se deduz tambem da equaçaõ.

A soma das linhas DB, e DC (*Fig.*27.), ou a sua differença deu huma equaçaõ mais simples, do que CE, ou AC, ou AB, ou IB. A razaõ he,

por-

porque a relaçaõ, que DB e DC tem com IB e AB, he ſemelhante áquella que as meſmas linhas DB e DC tem com AC e CE; iſto he, DB e DC podem determinar-ſe por operações ſemelhantes, quer ſe faça uſo de IB e AB, quer de AC e CE. Em geral, as equações, como incluem todas as relações que as incognitas tem com as quantidades de que dependem, ſeraõ tanto mais ſimples, quanto for menor o numero de relações, que a quantidade eſcolhida para incognita tiver com as outras. Eis-aqui hum exemplo na reſoluçaõ ſeguinte do meſmo problema.

275 Por quanto o angulo CAB (*Fig.* 29.) he recto, o circulo deſcrito ſobre CB paſſará por A; e ſe tirarmos DA até encontrar a circumferencia em M, o angulo BAM $=$ DAI $= 45^o$ (5.1.Eucl.) terá por medida ametade de MB (20.3.Eucl.), e por conſeguinte ſerá o arco MB de 90^o; logo tirando o raio LM, o triangulo DLM ſerá rectangulo, e conſeguintemente abaixando ſobre DM a perpendicular LN, ſerá LM (Corol. 8. 6. Eucl.) meia proporcional entre DM e MN, ou (3. 3. Eucl.) entre DM e AN. Tomando pois AN para incognita, ſupponhamos AN $= x$, DA $= d$; ſerá DM $= d + 2x$, e conſeguintemente $d + 2x : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$; logo $xx + \frac{1}{2}dx = \frac{1}{8}cc$, a qual dá $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{8}cc\right)}$.

Para conſtruirmos eſta quantidade, tomemos nos lados AO, AI do angulo recto IAO as partes Am, An iguais cada huma a $\frac{1}{4}c$, e acabando o quadrado Ampn, tiremos a diagonal Ap que ſerá perpendicular a DA, e igual a $\sqrt{\left(\frac{1}{16}c^2+\frac{1}{16}c^2\right)}$; logo tomando na linha AD a parte Ar igual a $\frac{1}{4}d$, ou $\frac{1}{4}$ AD, teremos $pr=\sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2+\frac{1}{16}c^2+\frac{1}{16}c^2\right)}$. Para ter pois o primeiro valor de x, defcrever-fe-há do ponto r como centro, e com intervallo rp hum arco, o qual cortando DM em N, dará $AN=-\frac{1}{4}d+\sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2+\frac{1}{8}c^2\right)}$; de maneira que levantando no ponto N a perpendicular NL, a qual feja cortada em L por hum arco defcrito do ponto A como centro com o intervallo $\frac{1}{2}c$, determinará o ponto L, pelo qual e por D tirando DCB, teremos refolvido o problema.

Se conduzirmos (*Fig.* 30) rp de r para N, ferá AN o fegundo valor de x, e executando a refpeito de N o mefmo que fe fez para o ponto N na *Fig.* 29 fe achará o ponto L, o qual juntamente com D determinará BLD. Com effeito, chamando a An x (*Fig.* 30), e confervando as outras denominações, fe applicarmos a efta figura o que diffemos da 29, teremos $2x-d:\frac{1}{2}c::\frac{1}{2}c:x$, e ultimamente $x=\frac{1}{4}d\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2+\frac{1}{8}c^2\right)}$. Aqui fe vê que hum dos valores de x he o mefmo que acima achámos, á excepçaõ dos finais, como deve fer.

Póde acontecer que o arco defcrito do ponto A (*Fig.* 30) naõ encontre a perpendicular NL, porque póde fer $\frac{1}{2}c<AN$; e iffo naõ obftante, a Algebra naõ moftra cafo algum de impoffibilida-

de,

de, porque todos os termos debaixo do radical saõ positivos. Deve-se porém advertir, que a Algebra sómente declara a impossibilidade, quando ou explicita, ou implicitamente se exprime tudo o que o problema suppõe, e isso he o que naõ se fez neste caso; porque suppondo o problema tacitamente, que os tres pontos D, A, L naõ estaõ na mesma linha recta, sómente se exprimio que LM era meia proporcional entre DM, e NM, propriedade que tambem póde ter lugar, quando os tres pontos estaõ em linha recta. Com effeito se se propuzer este problema: *Achar na direcçaõ* DL (*Fig.*31) *o intervallo que deve haver entre duas rectas dadas* DA e ML, *para que* ML *seja meia proporcional entre* DM e MN, *sendo* N *o meio de* AM; he facil de vêr, que acharemos a mesma equaçaõ de cima, e que esta tem duas soluções, huma para o caso de estarem os pontos A e M entre D e L, e outra para o caso contrario. Naõ he pois de admirar, que a Algebra naõ declare em que caso o primeiro problema he impossivel, por quanto deve dar a soluçaõ do segundo problema, o qual he sempre possivel.

276 Pelo que devemos distinguir duas especies de problemas, a saber: *concretos*, e *abstractos*. Por problemas concretos entendemos aquelles, nos quaes, como no penultimo, a quantidade procurada tem de particular alguma propriedade, condiçaõ, ou construcçaõ, que a equaçaõ naõ exprime. Os problemas abstractos pelo contrario saõ aquelles, em que as quantidades saõ consideradas unicamente como quantidades, e cuja equaçaõ exprime quanto nelles se contem; desta natureza he o ultimo problema. Os abstractos tem tantas solu-

luções, quantas saõ as raizes reais da equaçaõ; nos concretos porém o numero das soluções he em muitos casos ainda menor que o numero das raizes positivas da equaçaõ, como se verá no exemplo seguinte.

277 Probl. VIII. *Resolvendo-se todo o sector esferico* CBAD (*Fig.* 32) *em duas partes, das quais huma he o segmento esferico* ABD, *e outra a pyramide conica recta* CBD; *pergunta-se em que lugar será o segmento igual á pyramide.*

Sabemos pela Geometria, que o sector esferico he igual ao producto da superficie do segmento esferico BAD pelo terço do raio AC, e que a superficie do segmento se acha multiplicando a circumferencia ABED pela altura AP. Suppondo pois a razaõ do diametro para a circumferencia $= 1 : c$, $AC = a$, e $AP = x$, teremos $ABED = 2ca$; logo será a superficie do segmento esferico $= 2ca \cdot x$, e a solidez do sector $= \frac{2}{3} ca^2x$.

Para ter a solidez da pyramide, deve-se multiplicar a superficie do circulo cujo raio he BP pelo terço da altura CP. Mas $BP = \sqrt{(CB^2 - CP^2)} = \sqrt{(2ax - xx)}$; logo será a solidez da pyramide $= 2c \sqrt{(2ax-xx)} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(2ax-xx)} \cdot \frac{1}{3}(a-x) = \frac{c}{3}(a-x)(2ax-xx)$. Para que pois as duas partes do sector sejaõ iguais entre si, he necessario que este seja o dobro de huma daquellas; por tanto teremos $\frac{2}{3} caax = \frac{2}{3} c(a-x)(2ax-xx)$, ou $x^2 - 3ax = -a^2$, da qual se tira $x = \frac{1}{2} a (3 \pm \sqrt{5})$.

Para

Para construir o segundo valor, ou $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$, que he o que convem ao problema actual, descreveremos sobre AM $= \frac{3}{2}a$ o semicirculo AOM, e inscrevendo nelle a recta AO $= a$, se tirará OM, a qual sendo levada de M até P para a parte de A, determinará AP $= x$.

A outra soluçaõ $x = \frac{1}{2}a\,(3 + \sqrt{5})$ dá x maior que $2a$, e por tanto naõ pertence á esfera, mas a este problema abstracto: *Sendo dividida a linha* AN (*Fig.* 33) *em tres partes iguais nos pontos* B e D, *achar na sua direcçaõ hum ponto* P *tal, que a parte* AD *seja meia proporcional entre as distancias* AP e PN. Porque, seja AD $= a$, AP $= x$, teremos PN $= 3a - x$; e dando as condições $x : a :: a : a - x$, acharemos $x = \frac{1}{2}a\,(3 \pm \sqrt{5})$; valores que se construiraõ como acima, á excepçaõ de que se levará MO de M até P′ para a parte de N, a fim de ter AP′ $= \frac{1}{2}a\,(3 + \sqrt{5}) = x$.

Outras applicações da Algebra.

278 SEja c o numero 3,1415 &c, ou a circumferencia do circulo que tem a unidade por diametro; a circumferencia do circulo do raio a será $= 2ca$, e a superficie $= ca^2$. Donde se segue que as superficies dos circulos estaõ entre si como os quadrados dos seus diametros; porque tendo sempre

pre c o mesmo valor, ca^2 sómente crescerá como crescer a^2.

Suppondo que he b a altura de hum cylindro, cujo raio da base he a, será a sua solidez $= ca^2b$. Segue-se pois que os cylindros estaõ entre si como os productos das alturas pelos quadrados dos raios das bases. Se as alturas forem proporcionais aos raios das bases, ou se for $b = ma$, sendo m constante, será a solidez $= cma^3$; isto he, os cylindros estaraõ entre si como os cubos dos raios das bases.

Em geral, se huma quantidade se exprimir por hum numero qualquer n de factores, os quais sejaõ proporcionais huns aos outros, crescerá a quantidade do mesmo modo que crescer hum factor, elevado á potencia n. Seja, por exemplo, a quantidade $A = abcd$; se for $b = ma$, $c = pa$, e $d = qa$, será $A = mpqa^4$, isto he, proporcional a a^4. Isto mesmo tem tambem lugar, quando as quantidades naõ se exprimem por monomios. Logo: 1º Todas as figuras semelhantes, pois que se podem considerar como compostas de triangulos semelhantes, saõ entre si como os quadrados de qualquer das suas duas dimensões homologas. 2º Os solidos semelhantes, pois que se podem considerar como compostos de pyramides semelhantes, saõ entre si como os cubos de qualquer das suas tres dimensões homologas.

Naõ póde agora haver difficuldade em comparar as quantidades expressas algebricamente, ou ellas sejaõ da mesma, ou de differente especie, com tanto que sejaõ da mesma natureza. Por exemplo, sendo V e v os volumes de dous corpos semelhantes, S e s as suas superficies, L e l as linhas homologas; teremos $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{v} :: L : l$; e $\sqrt{S} : \sqrt{s} :: L : l$; logo ferá $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{v^2} :: S : s$, o que moſtra que as ſuperficies creſcem em razaõ menor do que os volumes.

279 Supponhamos a altura de huma pyramide conica truncada $= k$, a da pyramide inteira $= h$, e a da pyramide ſeparada $= h'$, a ſuperficie da baſe inferior $= s$, e a da ſuperior $= s'$; ſerá a ſolidez do tronco $= \frac{sh}{3} - \frac{s'h'}{3}$; mas he $h' = h\sqrt{\frac{s'}{s}}$ e $k = h - h' = h - h\sqrt{\frac{s'}{s}}$, ou $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$; logo ſerá a ſolidez do tronco $= \frac{k}{3} \cdot \frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$ $= \frac{k}{3}(s + \sqrt{ss'} + s')$. Donde ſe ſegue, que toda a pyramide conica truncada ſe compõe de tres pyramides igualmente altas, das quais huma tem por baſe a baſe inferior s, a outra a baſe ſuperior s', e a terceira huma meia proporcional $\sqrt{ss'}$ entre as duas baſes.

280 Suppondo o raio de huma esfera $= a$, ſerá a ſuperficie de hum dos ſeus circulos maximos $= ca^2$, a ſuperficie da esfera $= 4ca^2$, e a ſua ſolidez $= 4ca^2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}ca^3$.

Vio-ſe (277) que a ſolidez do ſector, cujo ſegmento tinha a altura x, era $= \frac{2}{3}ca^2x$, e que a

da

da pyramide conica $= \frac{c\,(2ax-xx)\,(a-x)}{3}$; logo a ſolidez do ſegmento $= \frac{2}{3}ca^2x - \frac{c}{3}(a-x)(2ax-xx) = cx^2(a-\frac{1}{3}x)$. He pois a ſolidez do ſegmento igual ao circulo, que tem por ſemidiametro a altura do ſegmento, multiplicado pelo raio menos o terço da dita altura.

Tendo as expreſsões algebricas das quantidades, com muita facilidade ſe reſolvem os problemas, que ſobre ellas ſe podem propôr, como moſtraremos em dous exemplos.

Pertende-ſe formar huma pyramide conica que ſeja igual a huma esfera dada, e que tenha por baſe hum circulo maximo da meſma esfera: pergunta-ſe que altura ſe lhe deve dar. Seja x eſta altura, e a o raio da baſe, ſerá a ſolidez da pyramide $= \frac{ca^2}{3}x$; e como deve ſer igual á esfera do raio a, teremos $\frac{c}{3}a^2x = \frac{4}{3}ca^3$, donde ſe deduz $x = 4a$; Logo he neceſſario que a altura da pyramide ſeja o dobro do diametro da esfera, como conſta tambem pela Geometria.

281 *Achar o raio de huma esfera, cujo pezo he dado tanto no ar, como na agua.*

Demonſtra-ſe na Hydroſtatica, que todo o corpo mergulhado em hum fluido perde huma parte do ſeu pezo, igual ao pezo do volume do fluido deslocado. Iſto ſuppoſto, ſeja o pezo de huma pollegada cubica de agua $= p$, o pezo da esfera no ar $= P$, o pezo da meſma na agua $= P'$, o raio $= x$;

ſerá a ſolidez $= \frac{4}{3} cx^3$, e o pezo de igual volume de agua $= \frac{4}{3} cpx^3$; logo conforme o principio expoſto $P - \frac{4}{3} cpx^3 = P'$, donde ſe tira $x = \sqrt[3]{\frac{3(P-P')}{4cp}}$.

Se o globo no ar pezar 5 onças, e na agua 2; pezando hum pé cubico de agua 72 libras, ou ſendo $p = \frac{2}{3}$ de onça, teremos $x = \sqrt[3]{\frac{3(5-2)}{\frac{2}{3}.4.c}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8c}}$, que poſto em calculo por logarithmos dará

c	. . .	CL.	9,5028501
8	. . .	CL.	9,0969100
27	. . .	L.	1,4313638
lx^3	. .		0,0311239
lx	. .		0,0103746

Logarithmo a que correſponde o numero 1,0242; logo o raio da esfera ſerá de 1,0242 pollegadas.

Havemos ſuppoſto tacitamente que o globo entrava todo na agua em virtude do proprio pezo; ſe porém for neceſſario carregallo com algum pezo, para o mergulhar inteiramente, entaõ eſſe pezo additivo ſerá a quantidade que devemos tomar por P', o qual ſe fará negativo; iſto he, teremos $x = \sqrt[3]{\frac{3(P+P')}{4cp}}$. Com effeito, ſendo neſte

caſo

caſo o pezo da esfera no ar menor que o pezo $\frac{4}{3}cpx^3$ de hum igual volume de agua, a differença, ou $\frac{4}{3}cpx^3 - P$ ſerá o peſo P' que ſe deve ajuntar para a mergulhar totalmente; logo teremos $\frac{4}{3}cpx^3 - P = P'$, da qual ſe tira $x = \sqrt[3]{\frac{3(P+P')}{4cp}}$.

Das Linhas curvas em geral, e em particular das Secções Conicas.

282 DAs linhas curvas que a Geometria conſidera, em razaõ do grande uſo que tem na conſtrucçaõ das equações, e nas ſciencias Fiſico-Mathematicas, humas ſaõ tais que cada hum dos ſeus pontos ſe póde determinar pela meſma lei, iſto he, por calculos e operações ſemelhantes; em outras porém cada ponto ſe determina por lei differente; ainda que eſta meſma differença he ſujeita a huma lei.

As linhas traçadas ao acaſo, como, por exemplo, os raſgos de huma pena ſobre o papel, naõ podem ſer objecto de huma Geometria rigoroſa. Sem embargo, a theoria das curvas conduz a imitar delineamentos rebeldes; e a arte de achar approximadamente o nexo entre quantidades, cuja lei he ou deſconhecida, ou muito compoſta, naõ he a applicaçaõ menos util da Algebra á Geometria, como adiante veremos.

Para poder deſcrever as curvas de que trata a Geometria, he neceſſario conhecer a lei, a que eſtaõ

taõ ſujeitos os differentes pontos de ſeu perimetro. De muitos modos póde ella ſer dada, ou indicando-ſe o meio para deſcrever as curvas por movimento continuo, como v. g. a reſpeito do circulo ſe faz girar huma linha ao redor de hum ponto; ou antes enſinando-ſe huma propriedade que pertença conſtantemente a cada ponto da curva, como por exemplo, ſabendo-ſe que todo o angulo do ſemicirculo he recto (31. 3. Eucl.), podemos deſcrever o circulo do diametro dado AB (*Fig.* 34), tirando da extremidade A huma infinidade de linhas AC, AD, AE, &c., e conduzindo pela outra extremidade B as perpendiculares BC, BD, BE, &c., entaõ os pontos C, D, E, &c. pertenceraõ ao circulo que tem AB por diametro.

Finalmente a lei tambem póde ſer dada por huma equaçaõ, e aſſim o ſupporemos ſempre, porque os dous primeiros modos ſervem para achar a equaçaõ que exprime a lei. Reduz-ſe pois eſta theoria a repreſentar a natureza de qualquer curva por huma equaçaõ, a qual ſerve para deſcrever a curva, e moſtrar os ſeus uſos e propriedades. De tudo iſto vamos a dar hum exemplo no circulo, que ja conhecemos pela Geometria elementar.

283 Supponhamos que da curva AMB (*Fig.*35) ſabemos taõ ſómente, que a perpendicular PM tirada de qualquer ponto M ſobre a linha AB he meia proporcional entre as duas partes AP e PB.

Para exprimir eſta propriedade em equaçaõ, ſeja $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; e teremos $AP(x) : PM(y) :: PM(y) : PB(a-x)$, iſto he $yy = ax - xx$.

Para

Para deſcrever agora a curva, concebamos AB dividida, por exemplo, em 10 partes iguais, e tiremos por cada ponto de diviſaõ as perpendiculares pm, pm, &c. Eſtá claro, que ſe na equaçaõ ſuppuzermos ſucceſſivamente x igual a cada huma das linhas Ap, Ap, &c., ſerá y igual a cada huma das linhas correſpondentes pm, pm, &c.; porque a equaçaõ exprime, que para qualquer valor de x he ſempre y meia proporcional entre x e $a - x$, e eſta he a propriedade que ſuppomos a cada huma das perpendiculares pm. Logo pela equaçaõ acharemos ſucceſſivamente cada ponto da curva, dando a x muitos valores, e calculando os correſpondentes de y. Por exemplo, na hypotheſe de $a = 10$, a noſſa equaçaõ torna-ſe em $yy = 10x - xx$, e teremos

$$x = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10$$
$$y = 0;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 4{,}5;\ \pm 4{,}9;\ \pm 5;\ \pm 4{,}9;\ \pm 4{,}5;\ \pm 4;\ \pm 3;\ 0$$

Tomando pois eſtes valores de y ſobre as perpendiculares correſpondentes aos valores 1, 2, 3, &c. de x, e fazendo o meſmo para a parte debaixo ſobre as perpendiculares pm', pm', &c., determinaremos os pontos m, m, m', m', &c. pertencentes á curva que tem a propriedade dada.

Querendo ter maior numero de pontos, ſupporemos AB dividida em maior numero de partes, em 100, por exemplo, iſto he, poremos $a = 100$; ou conſervando o meſmo valor de $a = 10$, daremos a x os valores intermedios entre 1, 2, 3, &c., e calcularemos os correſpondentes de y.

Os dous valores de $y = 0$ moſtraõ que a curva encontra AB nos dous pontos de A e B, em hum

hum dos quais he $x = 0$, e no outro he $x = 10$. A equaçaõ tambem moſtra o meſmo; porque nos lugares em que acontece o dito encontro, he $y = 0$, e metendo eſte valor na equaçaõ, teremos $0 = x(a - x)$: logo como eſte producto he nada, quando $x = 0$, e quando $x = a$, ſegue-ſe que y ſerá nada neſtes meſmos caſos; iſto he, a curva encontrará a linha AB no ponto A em que $x = 0$, e no ponto B em que $x = 10$.

284 Aſſim, para exprimir em equaçaõ a natureza de qualquer curva, reporta-ſe cada hum dos ſeus pontos m, m (*Fig.* 35) a duas rectas fixas AB, AOA que façaõ entre ſi hum angulo conhecido; porque he claro, que imaginando conduzidas pelos pontos m, m as linhas mp, e mp' parallelas a OAO, e AB, ſerá determinada a poſiçaõ de cada ponto, ſe forem conhecidos os valores das diſtancias mp' e pm, iſto he, de Ap e pm, ou o valor de huma, e a razaõ entre ella e a outra. A expreſſaõ analytica da razaõ que tem entre ſi as linhas Ap e pm para cada hum dos pontos m, dá a equaçaõ da curva, a qual que ſerá mais ou menos compoſta conforme o gráo mais ou menos elevado da equaçaõ.

As linhas Ap ou mp' chamaõ-ſe *abſciſſas*, e as linhas mp ou $p'A$ chamaõ-ſe *ordenadas*; humas e outras tem o nome commum de *coordenadas da curva*. E como pertencem indifferentemente a qualquer ponto da curva, o ſeu comprimento varia a cada inſtante, pelo que tanto ellas, como as letras x, y, z, &c. que as repreſentaõ, ſe chamaõ *indeterminadas*. O ponto A donde ſe começaõ a contar as abſciſſas chama ſe a *origem das abſciſſas*, e o ponto donde ſe começaõ a contar as ordenadas Ap' ou pm, *origem das ordenadas*. Ainda que eſtes

dous

dous pontos na *Fig.* 35. naõ ſaõ differentes, com tudo naõ ha outra razaõ para contar as abſciſſas do meſmo ponto, de que ſe contaõ as ordenadas, mais que a da ſimplicidade. Como as abſciſſas ſe podem tomar de huma e de outra parte da origem, ſeraõ negativas aquellas que eſtiverem na parte do eixo contraria á que ſe conſiderar como poſitiva. Na poſiçaõ das ordenadas nada ha de eſſencial, ſe naõ o ſerem parallelas entre ſi; podem ſer perpendiculares, ou obliquas ao eixo das abſciſſas. As ordenadas tambem ſe diſtinguem em poſitivas e negativas, conforme eſtaõ para huma, ou para outra parte do eixo das abſciſſas.

285 Moſtremos agora como por meio da equaçaõ de huma curva ſe achaõ as ſuas propriedades.

1° Do meio C de AB tire ſe para qualquer ponto M a recta CM; o triangulo CPM ſerá ſempre rectangulo, e por conſequencia teremos $CM^2 = MP^2 + PC^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$; e como $yy = ax - xx$ (283), acharemos $CM = \frac{1}{2}a$, iſto he, todos os pontos M, *m* eſtaõ em igual diſtancia do ponto C; propriedade diſtinctiva da circumferencia do circulo.

2° Se conduzirmos por qualquer ponto M, e pelas extremidades A e B do diametro as rectas MA, MB, teremos $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2 = ax$, e $MB^2 = PM^2 + BP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = -ax + a^2$. Eſtas equações ſomadas daõ $AM^2 + MB^2 = a^2 = AB^2$, que he a propriedade do triangulo rectangulo; logo todos os angulos AMB ſaõ rectos.

3°

3° A equaçaõ $AM^2 = ax$ dá $x : AM :: AM : a$; logo na curva de que se trata, todas as cordas AM saõ meias proporcionais entre o diametro AD e o segmento correspondente AP. Semelhantemente se acharáõ as outras propriedades.

Se contassemos as abscissas do centro, isto he se tomassemos CP, Cp, &c. por abscissas, está claro que representando cada huma por z, teriamos $x = \frac{1}{2}a - z$, e conseguintemente a equaçaõ do circulo ás coordenadas perpendiculares, contadas do centro, será $yy = \frac{1}{4}aa - zz$.

Outra qualquer propriedade pertencente a todos os pontos da curva, sendo traduzida algebricamente, dará a mesma equaçaõ ás mesmas coordenados. Se houver porém mudança na origem, ou na direcçaõ dellas, ou em ambas as cousas juntamente, poderá apparecer huma equaçaõ differente, ainda que será sempre do mesmo grão. Havemos visto, que pela mudança das abscissas, em lugar de $yy = ax - xx$ tivemos a equaçaõ $yy = \frac{1}{4}aa - zz$ do mesmo grão, a qual, como foi deduzida da primeira, tem a mesma propriedade por base. Porém se traduzissemos a propriedade que tem MC de ser sempre a mesma, e igual a $\frac{1}{2}a$, entaõ conservando as mesmas denominações, teriamos (47. 1. Eucl.) $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, isto he $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, como deduzimos de outra propriedade.

Da

Da Ellipse.

286 Consideremos agora a curva que tem a propriedade de ser a soma $MF + Mf$ (*Fig.* 36.) das distancias de qualquer dos seus pontos M aos pontos fixos F e f, igual a huma linha dada a. Esta curva tem o nome de *Ellipse*, as distancias MF e Mf chamaõ-se *raios vectores*, e os pontos F e f, os *fócos*.

Para deduzir a equaçaõ, tome-se huma linha determidada, por exemplo Ff, para eixo das abscissas, cuja origem seja em A na distancia $CA = \frac{1}{2}a$ do meio C de Ff. Tire-se a ordenada MP, e faça-se $CB = CA$: seja $AP = x$, $PM = y$, $AF = c$, $FM = z$; será $FP = \pm(x - c)$, conforme P cahir entre F e B, ou entre F e A; $fP = a - x - c$; e pela propriedade da curva, $Mf = a - z$.

Isto posto, os triangulos rectangulos FPM, fMP daõ $FM^2 = PM^2 + FP^2$, e $Mf^2 = PM^2 + fP^2$; ou $z^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, e $a^2 - 2az + z^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ac + 2cx + c^2$, das quais se deduz $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; logo substituindo este valor na primeira equaçaõ, teremos . . . $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$.

287 Por esta equaçaõ podemos descrever a curva por pontos, como havemos feito (283) a respei

peito do circulo. Alem deste methodo temos o seguinte.

288 Tomando $CA = CB = \frac{1}{2} a$, do ponto f como centro com o intervallo arbitrario Br descreve-se hum arco, e executa-se o mesmo do ponto F com o intervallo Ar; os pontos de intersecçaõ M e M′ dos dous arcos pertenceraõ á ellipse.

289 A propriedade fundamental de que deduzimos a equaçaõ da curva, dá hum meio muito simples para a descrever por movimento continuo. Fixem-se em dous pontos F e f as extremidades de hum fio F Mf maior que Ff, o qual se estenda por meio de hum ponteiro M; entaõ o ponteiro movendo-se ao redor dos fócos, de maneira que o fio se conserve sempre estendido, irá marcando os pontos da ellipse; porque em todos os pontos que elle descrever, a soma das distancias FM e fM será a mesma.

290 Donde se segue, que tomando o fio FMf igual a AB, a curva passará pelos pontos A e B; porque $AF = Bf$; logo $AF + Af = AB$, e $BF + Bf = AB$. A equaçaõ mostra isto mesmo, porque, pondo-se $y = 0$, dá $x(a - x) = 0$, que quer dizer que a curva encontra a linha Ff produzida, quando $x = 0$, ou no ponto A, e quando $x = a$, ou no ponto B.

291 A equaçaõ $y = \pm \sqrt{\frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)}$ dá a cada abscissa duas ordenadas iguais com sinais contrarios, e por tanto mostra que a curva tem dous ramos iguais, hum de huma parte do eixo AB, e outro da outra parte; e que a perpendicular DD′ (*Fig.* 37) conduzida por C divide a curva em duas partes iguais e semelhantes.

292

292 A linha AB he o *eixo maior* da ellipſe, DD′ o *eixo menor*, e o dobro mm' da ordenada que paſſa pelo fóco, o *parametro*. Os pontos A, B, D, D′ saõ os *vertices* dos eixos, e o ponto C he o *centro* da ellipſe.

293 Se ſuppuzermos $x = AF = c$, teremos $y = \pm \frac{2(ac - cc)}{a}$, e por conſequencia $mm' = \frac{4(ac - cc)}{a}$. Logo *o parametro he menor que o quadruplo da diſtancia* c *do vertice ao fóco.*

Seja $\frac{4ac - 4cc}{a} = p$; a equaçaõ da ellipſe ſe mudará entaõ neſta mais ſimples $yy = \frac{p}{a}(ax - xx)$.

294 Se ſuppuzermos $x = AC = \frac{1}{2}a$, teremos $yy = CD^2 = ac - cc = AF \times BF$; donde ſe tira $AF : CD :: CD : BF$. Logo *o ſemieixo menor he meio proporcional entre as diſtancias de hum dos fócos aos dous vertices.*

Seja $DD' = b$, ſerá $\frac{bb}{4} = ac - cc$, e a equaçaõ ſe mudará neſta de que ſe faz muito uſo . . .
$yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$.

Dos valores de p e b ſe deduz $pa = bb$, e conſeguintemente $a : b :: b : p$. Logo *o parametro he huma terceira proporcional aos eixos maior e menor.*

295 A equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ dá $yy : x(a - x) :: bb : aa$; logo *os quadrados das ordenadas ao eixo maior saõ para os productos das suas abscissas, como o quadrado do eixo menor he para o quadrado do eixo maior*; e conseguintemente *os quadrados das ordenadas estaõ entre si como os productos das abscissas correspondentes.*

296 Se sobre AB (*Fig.* 38.) descrevermos o circulo AEBE′ teremos $PN^2 = ax - xx$; logo será $yy = \frac{bb}{aa} PN^2$, a qual dá $y : PN :: b : a$, isto he PM : PN :: CD : AC ou CE; logo *as ordenadas da ellipse saõ proporcionais ás do circulo descrito sobre o eixo maior.* Podemos pois descrever a ellipse com muita facilidade por meio do circulo.

Donde se segue, que o circulo he huma ellipse, cujos eixos a e b saõ iguais, ou cuja distancia do vertice ao fóco he igual á ametade do eixo maior, ou tambem cujo parametro he igual ao diametro; porque supponde $b = a$, $c = \frac{1}{2}a$, e $p = a$, todas as tres equações da ellipse se tornaõ na do circulo $yy = ax - xx$.

297 Vê-se pois claramente, que huma linha unica, isto he o diametro, determina o circulo; mas naõ basta o eixo maior AB (*Fig.* 37.) para determinar a ellipse; he necessario alem disso conhecer ou o eixo menor b, ou o parametro p, ou a distancia c do vertice ao fóco. Havemos visto como se descreve a ellipse no caso de ser dado o ei-

eixo maior com a diſtancia do vertice ao fóco. Quando porém ſe derem os dous eixos, para deſcrever a curva por movimento continuo, he neceſſario determinar os fócos. Iſto he facil de fazer, deſcrevendo do ponto D como centro com o intervallo $AC = \frac{1}{2}a$ dous arcos, os quais cortaraõ o eixo maior nos pontos procurados F e *f*. Se for dado o eixo maior com o parametro, determinaremos o eixo menor, tomando huma meia proporcional (294) entre as duas linhas dadas, e aſſim reduziremos eſte caſo ao precedente.

298 Para tirarmos huma tangente a qualquer ponto M (*Fig.* 39.) da ellipſe, produziremos o raio vector *f*M até G, de ſorte que ſeja MG = MF; e tirando GF, conduziremos ſobre ella por M a perpendicular MT, a qual ſerá a tangente, iſto he, encontrará a curva unicamente no ponto M.

Porque ſe a encontra em outro ponto, por exemplo em N, entaõ tirando N*f* e NF, pela propriedade fundamental da ellipſe ſerá FN + N*f* = FM + M*f*, ou (4. e 5. 1. Eucl.) NG + N*f* = G*f*; mas iſto he abſurdo (20. 1. Eucl.); logo o ponto N naõ pertence á ellipſe.

299 O angulo FMO = GMO = *f*MN. Logo *na ellipſe os raios vectores formaõ angulos iguais com a tangente* Como ſe ſabe por experiencia, que hum raio de luz, quando encontra huma ſuperficie, ſe reflecte fazendo o angulo de reflexaõ igual ao angulo da incidencia; os raios que partirem do fóco luminoſo F, e encontrarem a ellipſe, iraõ reunir-ſe no outro fóco *f*; e reciprocamente.

Se

Se conduzirmos por M (*Fig.* 40.) ſobre a tangente MT a perpendicular MI, eſta linha que ſerá tambem perpendicular á curva, dividirá o angulo FMf em duas partes iguais; porque ſendo IMT = IMT′, ſe tirarmos os angnlos iguais FMT, fMT′, reſtará FMI = IMf.

300 A linha PI chama-ſe a *Subnormal*, MI a *Normal*, PT a *Subtangente*.

Por quanto temos FMI = IMf, ſerá Mf : MF :: fI : FI (3. 6. Eucl.), e conſeguintemente Mf + MF (a) : Mf — MF ($a - 2z$) :: fI + FI ($a - 2c$) : fI — FI ($a - 2c - 2$FI) da qual ſe tira

$$\mathrm{FI} = \frac{az - 2cz}{a} = \frac{a^2c - 2ac^2 + a^2x - 4acx + 4c^2x}{a^2};$$

logo $\mathrm{PI} = \mathrm{FI} - (x - c) = \frac{2a - 4x}{a^2}(ac - cc) = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)$ (294).

301 A ſubtangente $\mathrm{PT} = \frac{\mathrm{PM}^2}{\mathrm{PI}} = \frac{a^2y^2}{b^2(\frac{1}{2}a - x)} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$.

As expreſsões de PI e PT podem ſervir para tirar huma perpendicular, e huma tangente a qualquer ponto M da ellipſe.

302 Como PT naõ depende de b, todas as tangentes a pontos correſpondentes de todas as ellipſes, deſcritas ſobre AB como eixo maior, ſe encontraõ no meſmo ponto T do eixo. Pelo que a tangente ao ponto N do circulo deſcrito ſobre AB

como

como diametro (*Fig.* 38.) encontrará no mesmo ponto do eixo T a tangente ao ponto correspondente M da ellipse.

Porque he CP $= \frac{1}{2}a - x$ (*Fig.* 40.), será CT $= CP + PT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{AC^2}{CP}$; logo CP : AC :: AC : CT; proporçaõ, pela qual se determina com summa facilidade o ponto T, por onde passa a tangente MT.

303 O triangulo rectangulo TPM dá TM $= \sqrt{\left[\left(ax - xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2\right)\frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}\right]}$.

304 A ellipse tem grande uso na Architectura Naval. A curvatura, por exemplo, da superficie exterior dos mastros, he a de huma porçaõ de ellipsoide, isto he, de hum solido gerado pela revoluçaõ da ametade de huma ellipse ao redor do seu eixo maior.

305 Se de qualquer ponto M tirarmos sobre o eixo menor a perpendicular ou ordenada MP′, e suppuzermos DP′ $= x'$, MP′ $= y'$, teremos $y = \frac{1}{2}b - x'$, e $x = \frac{1}{2}a - y'$. Substituindo estes valores na equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, acharemos $y'y' = \frac{aa}{bb}(bx' - x'x')$; equaçaõ semelhante a que se deduzio para o eixo maior; por tanto tiraremos conclusões analogas (295, 296).

306 Para termos as linhas P′I′, P′T′, CT′, MT′ pertencentes ao eixo menor, imitaremos o que fizemos a respeito do eixo maior, usando

das linhas correſpondentes, e dos triangulos ſemelhantes, que ſe reconhecem na Figura. Deſte modo acharemos valores em x' ſemelhantes aos deduzidos em x relativamente ao eixo maior.

Tambem damos hum *parametro* ao eixo menor, entendendo por eſta linha naõ o dobro da ordenada, que paſſa pelo fóco do eixo menor, porque naõ o ha; mas huma terceira proporcional aos dous eixos menor e maior (294).

307 Se quizermos contar as abſciſſas do centro C, poremos CP $= z$, e ſubſtituindo $\frac{1}{2}a - z$ em lugar de x na equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, e nos valores de PI, PT, CI, e TM, acharemos $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz)$, PI $= \frac{bbz}{aa}$, PT $= \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$, CT $= \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, e TM $= \sqrt{\left[\left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right)\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}\right]}$.

Como os valores de z começaõ em C, e acabaõ em A, parece que a equaçaõ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$ dá ſómente ametade DAD' da ellipſe. Porém como devemos dar a z tanto valores poſitivos, como negativos, eſtá claro, que eſtes ultimos daraõ as ordenadas pm, que determinaõ a outra ametade DBD'; a qual he igual e ſemelhante á primeira DAD', porque a quantidade $\pm\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$ naõ muda de valor pela ſubſtituiçaõ de $-z$ em lugar de $+z$.

308

308 Dá-se o nome de *diametro* a toda a recta MCM′ (*Fig.* 41.), que passa pelo centro da ellipse, e termina nos dous pontos oppostos da curva. Se conduzirmos pelo centro a recta NCN′ parallela á tangente em M, seraõ NCN′ e MCM′ os *diametros conjugados*. As linhas mO parallelas á tangente em M saõ *ordenadas* ao diametro MCM′, e as partes MO saõ as *abscissas*. O parametró de qualquer diametro he huma terceira proporcional ao mesmo diametro e ao seu conjugado.

309 Para mostrarmos que as ordenadas a hum diametro tem propriedades semelhantes ás das ordenadas aos eixos, tirem-se as perpendiculares mp, OQ ao eixo AB, e a recta ms perpendicular a OQ. Seja $AB = a$, $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; teremos $AP = \frac{1}{2}a - z$, $PB = \frac{1}{2}a + z$, $Ap = \frac{1}{2}a - k - g$, $pB = \frac{1}{2}a + k + g$.

Os triangulos semelhantes TPM, mSO daõ $SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$, e outros dous CPM, COQ tambem semelhantes daõ $QO = \frac{ky}{z}$; logo $pm = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Mas pela propriedade da ellipse (295) $pm^2 \times AP.\,PB = PM^2 \times Ap\,.\,pB$; logo substituindo, e reduzindo, teremos $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg.$

Notemos de passagem, que quando a linha mO passa pelo centro, isto he, quando o ponto O cahe ſobre C, he $k = o$, e $g = CR$; logo ſubſtituindo eſtes valores na equaçaõ achada, virá $CR^2 = \frac{1}{4}aa - zz = AP.PB$.

Fazendo agora $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $mO = y'$, $CO = z'$, os triangulos ſemelhantes CPM, CQO daõ $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$, e os dous CNR, mSO tambem ſemelhantes daõ $CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; logo $CR^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$; donde, igualando entre ſi os dous valores de CR^2, reſultará $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$. Subſtituindo pois os valores de gg e kk na equaçaõ $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, teremos $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$, ſemelhante a que achámos a reſpeito dos eixos.

310 Pondo $y' = o$, teremos $z' = \pm\frac{1}{2}a'$. Logo a curva encontra a linha MM' em dous pontos M e M' equidiſtantes do centro, e por conſequencia todos os diametros da ellipſe ſaõ cortados no centro em duas partes iguais.

311 A equaçaõ $y = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$ moſtra que qualquer diametro MCM' divide em duas partes iguais as ſuas ordenadas mom', ou as parallelas á tangente em M, e conſeguintemente tambem a ellipſe inteira.

312 Donde ſe ſegue, 1º que a tangente em

N

N he parallela ao diametro MM′; 2° que as ordenadas O*m* ao diametro MM′ saõ as ordenadas ao circulo do diametro MM′, diminuidas porém ou augmentadas na razaõ de $a' : b'$, e inclinadas debaixo de hum angulo igual ao comprehendido pelos diametros conjugados.

Para sabermos em que lugar $a' = b'$, ou onde as ordenadas saõ iguais ás do circulo, substituiremos CP (z) em lugar de CR na equaçaõ $CR^2 = \frac{1}{4} aa - zz$, e teremos $z = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$, quantidade real e independente de b, a qual mostra, que cada ellipse tem dous diametros conjugados iguais, e que estes se determinaõ do mesmo modo em todas as ellipses que tiverem o mesmo eixo. Para os achar, descreva-se sobre o eixo maior como diametro (*Fig.* 38.) o semicirculo ANEB, e dividindo em duas partes iguais no ponto N o arco AE determinado pelo eixo menor CD produzido, abaixe-se NP, que corta a ellipse em M e M′; seraõ CM e CM′ os dous diametros conjugados iguais, pois que o triangulo rectangulo isosceles PCN dá $CP = CN \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

313 Se conduzirmos do centro C (*Fig.* 42.) a perpendicular CF sobre a tangente, será $CF = \frac{PM \cdot CT}{TM}$, e $CN = \frac{TM \cdot CR}{PT}$; logo

$$CF \cdot CN = \frac{PM \cdot CT \cdot CR}{PT} = \tfrac{1}{4} ab \ (307, 309);$$

isto he (tirando a tangente NT′ até encontrar TM em I) $CMIN = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b$. Logo *todos os parallelogrammos formados pelas tangentes nas extre-*

tremidades dos diametros conjugados ſaõ iguaes entre ſi, e ao rectangulo formado pelos eixos.

314 Os triangulos ſemelhantes TPM, CRN daõ $RN = \frac{CR \cdot PM}{PT} = \frac{bz}{a}$; mas pelos dous triangulos rectangulos CRN, CPM temos $CR^2 + RN^2 + CP^2 + PM^2 = CN^2 + CM^2$, logo ſubſtituindo neſta as expreſsões algebricas das linhas, ſerá $CN^2 + CM^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$. Donde ſe ſegue, que *na ellipſe a ſoma dos quadrados de dous quaiſquer diametros conjugados he igual á ſoma dos quadrados dos dous eixos.*

315 Por quanto temos $CN^2 = CR^2 + RN^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2z^2}{a^2}$, ſerá (307) $TM^2 = CN^2 \left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2}\right)$. Porém os triangulos ſemelhantes TPM, MP′T′ daõ $MT' = \frac{P'M \times TM}{PT}$; logo $MT'^2 = \frac{CN^2 \times z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$, e conſeguintemente $TM \times MT' = CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$ (308), ſendo p' o parametro do diametro MM′; donde ſe tira $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

O circulo deſcrito ſobre TT′ como diametro (*Fig.*43.) paſſará pelo ponto C, porque o angulo TCT′ he recto; ſe produzirmos pois CM até encontrar a circumferencia em V, teremos (35.3.Eucl.) $CM : TM :: MT' : MV$; logo $MV = \frac{1}{2}p'$.

316

316 Daqui se infere, que para descrever a ellipse, quando saõ dados os dous diametros conjugados MM', NN', com o angulo que formaõ entre si, produziremos CM até V, de sorte que MV seja igual á ametade do parametro, e do meio X de CV levantaremos a perpendicular XZ, que encontra em Z a linha TT' conduzida por M parallelamente a NN'; descrevendo entaõ do ponto Z como centro e com o intervallo ZC hum circulo, que cortará TT' em dous pontos T e T', as rectas TC, T'C conduzidas por elles para o centro seraõ as direcções dos dous eixos. A sua grandeza se determinará abaixando as perpendiculares MP, MP', e tomando CA (302) igual a huma meia proporcional entre CT e CP; e CD igual a huma meia proporcional entre CT' e CP', como se deduz dos triangulos semelhantes TPM, TCT'.

317 Para resolvermos analyticamente este problema, seja MM' $= m$, NN $= n$, e o angulo MCN $= \alpha$, teremos (314) $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, e (313) $mn \, sen \, \alpha = ab$, porque (Trig. 174.) CF $= m \, sen \, \alpha$ (*Fig.* 42.); logo $a = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \, sen \, \alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \, sen \, \alpha)}$, e $b = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \, sen \, \alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \, sen \, \alpha)}$.

Para acharmos a direcçaõ dos eixos, ou o angulo MCT, que representaremos por φ, temos no triangulo CMT (Trig.173.) sen T ou $sen \, (\alpha - \varphi)$: CM ($\frac{1}{2}m$) :: sen TMC ($sen \, \alpha$) : CT $\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{CP}\right)$;

lo-

logo $CP = \frac{a^2 \, sen \, (\alpha - \phi)}{2m \, sen \, \alpha}$. Mas o triangulo rectangulo CMP (Trig. 162) dá $1 : \frac{1}{2}m :: cos\,\phi :$ CP ou $\frac{a^2 \, sen \, (\alpha - \phi)}{2m \, sen \, \alpha}$; logo teremos $m^2 \, sen \, \alpha \, cos \, \phi = a^2 \, (sen \, \alpha \, cos \, \phi - cos \, \alpha \, sen \, \phi)$ (Trig. 34), e dividindo por $cos\,\phi$, virá $tang \, \phi = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \, tang \, \alpha$, que se póde exprimir em m e n, substituindo por a o valor achado.

Da Hyperbola.

318 SE a curva (*Fig.* 44.) tiver a propriedade de que a differença $Mf - MF$ das distancias de cada hum dos seus pontos M a dous fixos F, f, seja sempre a mesma, e igual a huma linha dada a; para acharmos a sua equaçaõ, tomaremos huma linha Ff, por exemplo, para eixo das abscissas, cuja origem seja v. g. no ponto A em distancia $CA = \frac{1}{2}a$ do ponto C meio de Ff, e faremos $CB = CA$. Supponhamos $AP = x$, $PM = y$, $AF = c$, $FM = z$; será $FP = \pm (c - x)$, $fP = c + a + x$, e pela propriedade da curva, $Mf = a + z$.

Os triangulos rectangulos FPM, fPM daõ $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$, e $c^2 + 2ac + a^2 + 2cx + 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2$, das quais

quais se tira $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; logo substituindo este valor na primeira equação, teremos $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$.

319 Esta equação póde servir para descrever a curva por pontos, dando a x muitos valores. Tambem se podem achar successivamente os mesmos pontos, tomando arbitrariamente huma parte Br maior que BF, e descrevendo do ponto f como centro, e com o intervallo Br hum arco, o qual seja cortado em M por outro arco descrito do ponto F como centro, e com o intervallo Ar.

Se quizermos porém descrever a curva por movimento continuo, fixaremos no ponto f huma regoa indefinida, que possa girar ao redor delle: em F, e em hum dos pontos Q da regoa ataremos as extremidades de hum fio FMQ, que seja igual a fQ — a. Depois, por meio de hum ponteiro applicaremos á regoa huma parte MQ do fio, e movendo o ponteiro de M para A, de sorte que o fio se conserve sempre estendido, a regoa irá abaixando, a parte FM diminuindo, e o ponteiro descreverá a nossa curva, á qual se dá o nome de *Hyperbola*. Com effeito, fM — FM será sempre igual a a.

320 A equação $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$ mostra que a curva tem dous ramos AM, AM′ iguais e infinitos, hum de huma, e outro da outra parte da linha AB produzida, a qual se chama o *primeiro eixo*.

321

321 Se fizermos x negativo, ou se suppuzermos que P cahe porcima de A, $y = \pm\sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}(xx - ax)}$ será imaginario em quanto for $x < a$, e por consequencia naõ haverá curva desde A até B; mas começando a ser $x > a$, as ordenadas tornaõ a ser reais, e assim começa em B huma nova porçaõ de curva mBm', a qual tambem tem como a primeira dous ramos infinitos, hum de huma, e outro da outra parte de AB produzida; e he perfeitamente igual á hyperbola *positiva*, pois que tomando $Bp = AP$, $xx - ax$ ou $Ap \times pB$ vem a ser igual a $AP \times PB$, logo $pm = PM$.

322 Se na equaçaõ puzermos $y = 0$, acharemos que a curva encontra o eixo nos dous pontos A e B, em que $x = 0$, e $x = -a$.

323 Para termos o valor da ordenada Fm'', que passa por F (este ponto chama-se *fóco*, como tambem o ponto f) faremos $x = c$, e virá $y = \pm 2\left(\frac{ac + cc}{a}\right)$; logo será o dobro desta quantidade, ou $m''m''' = 4\left(\frac{ac + cc}{a}\right)$. Esta linha chama-se o *parametro* da hyperbola. Se a representarmos por p, teremos huma equaçaõ mais simples da curva . . . $yy = \frac{p}{a}(ax + xx)$.

Da equaçaõ $p = \frac{4ac + 4cc}{a} = 4c + \frac{4cc}{a}$ se de-

deduz que *o parametro do primeiro eixo da hyperbola he maior, que o quadruplo da distancia do vertice A ao fóco F.*

324 Se do ponto C meio de AB se levantar a perpendicular $DD' = 2CD$, tal que seja $CD^2 = Af \times FA = ac + cc$, será DD' o *segundo eixo* da hyperbola. Represente-se este por b, teremos $bb = 4ac + 4cc$; e substituindo na equaçaõ da curva, virá . . . $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$.

Vê-se pois que as tres equações da hyperbola sómente differem das tres correspondentes da ellipse nos sinais de cc e xx.

Da ultima equaçaõ achada se tira $yy\ (PM^2) : ax + xx\ (AP \times PB) :: bb\ (DD'^2) : aa\ (AB^2)$ Logo: *Na hyperbola os quadrados das ordenadas ao primeiro eixo saõ para os productos das suas abscissas, como o quadrado do segundo eixo he para o quadrado do primeiro*; e conseguintemente *os quadrados das ordenadas estaõ entre si como os productos das abscissas correspondentes.*

Quando $a = b$, a curva chama-se *hyperbola equilatera*, e a equaçaõ se torna em $yy = ax + xx$, a qual naõ differe da equaçaõ do circulo, senaõ no sinal de xx.

Por quanto he $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, e $bb = 4ac + 4cc$, será $ap = bb$, isto he $a : b :: b : p$. Logo o parametro do primeiro eixo he huma terceira proporcional ao primeiro e ao segundo eixo.

325 Se tirarmos por D a recta DA, no triangulo rectangulo DAC teremos $DA = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(ee + ac + \frac{1}{4}aa)} = e + \frac{1}{2}a = CF$. Logo, para acharmos os fócos quando forem dados os eixos, tomaremos $CF = DA$; e pelo contrario para acharmos o ſegundo eixo quando for dado o primeiro com os fócos, deſcreveremos do ponto A como centro, e com o intervallo CF hum arco, que cortará a perpendicular DD′ no ponto procurado D.

326 A deſcripçaõ da hyperbola depende pois de duas quantidades, a ſaber: ou dos dous eixos; ou do eixo maior e dos fócos; ou do eixo maior e do parametro; e pelo que havemos dito póde ſempre effeituar-ſe por algum dos methodos indicados. Se foſſe dado, por exemplo, o eixo maior com o parametro, procurariamos huma meia proporcional entre eſtas linhas, e teriamos o ſegundo eixo, o qual ſerviria para achar os fócos.

327 Se ſobre Mf (*Fig.* 45.) tomarmos a parte $MG = MF$, a perpendicular MT tirada de M ſobre FG ſerá tangente da hyperbola, iſto he, naõ encontrará a curva ſenaõ em hum ſó ponto M.

Porque ſe a encontra em algum outro ponto N de TM, tirando NF, Nf, e NG, ſerá $NF = NG$. Mas he $Nf < NG + Gf$, logo ſerá $Nf - NF < Gf$, iſto he, $Nf - NF < Mf - MF$; logo o ponto N naõ pertence á hyperbola.

Pela conſtrucçaõ $FMO = OMG = NMQ$. Logo ſe F for hum ponto luminoſo, os raios que delle ſahirem, e encontrarem a concavidade MAM′, ſe reflectiraõ como ſe partiſſem de f.

328

328 Por quanto temos (3. 6. Eucl.) fM $(z+a):MF\ (z)::fT\ (a+2c-FT):$ FT; ſerá $FT=\frac{2c+a}{2z+a}z=\ldots\ldots$

$$\frac{(2c+a)\frac{2cx+ac+ax}{a}}{(2c+a)\quad\frac{2x+a}{a}}=\frac{2cx+ac+ax}{2x+a};\text{ logo}$$

$PT=FT-c+x=\frac{ax+xx}{x+\frac{1}{2}a}$; valor da ſubtangente da hyperbola, a qual differe ſómente nos ſinaes da que ſe achou para a ellipſe.

329 He pois a diſtancia do vertice ao ponto em que a tangente encontra o eixo, ou $AT=$ $PT-AP=\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x}-x=\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$.

330 Eſta expreſſaõ moſtra, que ſem embargo de que os ramos da hyperbola ſe eſtendem até o infinito, com tudo as tangentes a cada hum dos ſeus pontos cortaõ o eixo em pontos T ſituados entre A e C. Porque ſe ſubſtituirmos em lugar de x todas as quantidades imaginaveis deſde o até o infinito, o valor de AT creſce ſómente deſde o até $\frac{1}{2}a$. Logo a tangente na extremidade infinita de cada hum dos ramos AM, AM′ paſſa pelo centro C; e como os ramos oppoſtos Bm, Bm' ſaõ perfeitamente iguais áquelles, e os pontos A e B eſtaõ em igual diſtancia de C, ſegue-ſe que as ditas tangentes tambem o ſaõ nas extremidades infinitas dos ramos Bm, Bm', como ſe repreſenta (*Fig.* 46.) nas linhas CX, CY.

331 Dá-se a estes tangentes o nome de *Asymptotas*, as quais, como se vê, saõ humas linhas, que partindo do centro se avezinhaõ cada vez mais da hyperbola, sem que possaõ encontralla senaõ em huma distancia infinita, e por tanto saõ os limites das tangentes.

Se pelo vertice A conduzirmos At parallela a PM, os triangulos semelhantes TAt, TPM daraõ PT $\left(\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x}\right)$: PM (y) :: AT $\left(\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}\right)$: $At = \frac{\frac{1}{2}ay}{a+x} = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{(ax+xx)}}{a+x}$; onde se vê, que fazendo x infinito, he $At = \frac{1}{2}b =$ CD. Logo, para determinar a posiçaõ das asymptotas, conduziremos por A as rectas AL, AL′, perpendiculares a CA, e iguais cada huma a CD; as linhas CL, CL′, conduzidas pelos pontos L, L′ e pelo centro C, seraõ as asymptotas da hyperbola, as quais se forem produzidas para a parte contraria, seraõ tambem as asymptotas da hyperbola opposta. Está claro, que na hyperbola equilatera o angulo LCL′ formado pelas asymptotas he recto.

332 Poisque he $CT = CA - AT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a+x}$, teremos esta proporçaõ CP : CA :: CA : CT, a qual póde servir para tirar huma tangente MT.

333 O triangulo rectangulo TPM dá MT $= \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{2}a+x\right)^2 + ax + xx\right)\frac{ax+xx}{\left(\frac{1}{2}a+x\right)^2}\right]}$.

334

334 Se tirarmos a normal MI (*Fig.*47.), teremos TP $\left(\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x}\right)$: PM (y) :: PM (y) : PI; logo a fubnormal PI $= \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a+x)$.

335 Para acharmos agora a equaçaõ ás coordenadas do fegundo eixo DD′, conduzamos a perpendicular MP′, e fazendo MP′ $= y'$, DP′ $= x'$, teremos $y = \frac{1}{2}b - x'$, e $x = y' - \frac{1}{2}a$. Subftituindo eftes valores na equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, virá $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - bx' + x'x')$, a qual naõ he femelhante á relativa ao primeiro eixo.

336 Se quizermos ter a equaçaõ em ordem a AB, contando as obfciffas do centro, fupporemos CP $= z$, e fubftituindo $z - \frac{1}{2}a$ em lugar de x, acharemos $yy = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$.

Se referirmos a curva ao fegundo eixo DD′, fazendo CP′ $= z'$, teremos $x' = \frac{1}{2}b - z'$, e fubftituindo na equaçaõ refpectiva (335), virá $y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

337 Reportando da mefma forte ao centro as exprefsões de PT, CT, PI, e MT, teremos PT $= \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, CT $= \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, PI $= \frac{bbz}{aa}$, e

MT $= \sqrt{\left[\left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}\right]}$.

Se

Se produzirmos MT até encontrar o ſegundo eixo em T′, os triangulos ſemelhantes TPM, TCT′ daraõ $CT' = \frac{CT \times PM}{PT} = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{CD^2}{CP'}$; logo CP′ : CD :: CD : CT′.

338 Toda a recta MCM′ (*Fig.*48.) que paſſa pelo centro, e termina de huma e outra parte na hyperbola, chama-ſe *diametro*. As rectas O*m* parallelas á tangente em M ſaõ ordenadas ao diametro; MO e OM′ ſaõ as ſuas abſciſſas.

Para moſtrarmos que as ordenadas *m*O tem as meſmas propriedades que tem as ordenadas MP, tirem-ſe *mp*, OQ perpendiculares ao eixo AB, e conduza-ſe *m*S parallela a AP. Seja $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; ſerá $AP = z - \frac{1}{2}a$, $BP = z + \frac{1}{2}a$, $Ap = k - g - \frac{1}{2}a$, $Bp = k - g + \frac{1}{2}a$.

Os triangulos ſemelhantes CPM, CQO daõ $QO = \frac{ky}{z}$; e os outros dous TPM, *m*SO daõ $SO = \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; logo $mp = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$. Porém (324) $pm^2 \times AP \cdot PB = PM^2 \times Ap \cdot pB$; logo ſubſtituindo, e reduzindo, teremos $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$.

No-

Notemos antes de paſſar adiante, que ſe tomarmos ſobre AB a parte CR tal que ſeja $CR^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$, e levantando a perpendicular RN′ terminada em N′ pela linha NN′ conduzida pelo centro parallelamente a TM, ſe fizermos CN = CN′; entaõ NN′ he o *diametro conjugado* de MM′, e huma terceira proporcional a MM′ e NN′ he o *parametro* do meſmo diametro MM′.

Supponhamos agora $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $CO = z'$, $Om = y'$; os triangulos ſemelhantes CPM, CQO daõ $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$, e os outros dous tambem ſemelhantes mSO, CN′R daõ $g^2 = y'y' \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$; logo ſubſtituindo os valores de g^2 e k' na equaçaõ $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, teremos $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, equaçaõ ſemelhante á das coordenadas do primeiro eixo.

339 Fazendo $y' = 0$, acharemos $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; logo a curva encontra a linha MM′ nos dous pontos oppoſtos M e M′ em diſtancia do centro igual a $\frac{1}{2}a'$; e aſſim todos os diametros ſe cortaõ no centro em duas partes iguais.

340 A equaçaõ $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$ moſtra, que ſe produzirmos mO de maneira que $Om' = Om$, o ponto m' pertencerá á curva; por

tanto cada diametro divide em duas partes iguaîs as rectas parallelas á tangente que passa pela origem do mesmo diametro.

341 Da equaçaõ $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$

se tira $y'y'$ (mO^2) : $z'z' - \frac{1}{4}a'a'$ ($MO \times OM'$) :: $b'b'$ (NN'^2) : $a'a'$ (MM'^2); logo *o quadrado de huma ordenada a qualquer diametro terminado na curva está para o producto das suas abscissas, como o quadrado do diametro conjugado está para o quadrado do primeiro diametro.*

342 Se do centro C (*Fig.* 49) abaixarmos sobre TM a perpendicular CF, os triangulos semelhantes CFT, TPM daraõ $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$, e os dous tambem semelhantes CRN', TPM daraõ CN' ou $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; logo $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$; e substituindo os valores achados (336, 337, e 338) teremos $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. Se produzirmos agora MT até a asymptota em I, será $MI = CN$, como abaixo se mostrará, e conseguintemente CIMN será hum parallelogrammo, cuja superficie $= CF \times MI = CF \times CN$; logo *o parallelogrammo construido sobre os diametros he igual ao rectangulo dos eixos.*

343 Os triangulos semelhantes TPM, CRN' daõ $RN' = \frac{PM \times CR}{PT} = \frac{bz}{a}$; e os dous triangu-

gulos rectangulos CPM, CRN′ daõ $CM^2 - CN'^2 = CP^2 + PM^2 - CR^2 - RN'^2$; ſubſtituindo pois os valores achados, teremos $CM^2 - CN^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Logo *a differença dos quadrados de dous diametros conjugados he ſempre a meſma, e igual á differença dos quadrados dos dous eixos.* Donde ſe ſegue, que na hyperbola equilatera hum diametro qualquer he igual ao ſeu conjugado.

344 Por quanto temos $CN^2 = CR^2 + RN'^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$, ſubſtituindo no valor de TM (337), acharemos $TM = CN\sqrt{\left(\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}\right)}$. Mas (*Fig.*47) os triangulos MPT, MP′T′ daõ $T'M = \frac{P'M \times TM}{PT} = \frac{CN \times z}{\sqrt{(zz - \frac{1}{4}aa)}}$; logo teremos $TM \times T'M = CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$, ſendo p' o parametro do diametro MM′, e conſeguintemente $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

345 Donde ſe ſegue, que para achar os eixos a fim de deſcrever a hyperbola, quando ſaõ dados os diametros conjugados com o angulo por elles comprehendido; tomaremos ſobre MC (*Fig.*50) a linha $MH = \frac{1}{2}p'$, e no meio I de CH levantaremos huma perpendicular IK, a qual cortará em K a linha MT′ conduzida por M parallelamente ao conjugado NN′. Do ponto K como centro e com o intervallo KC deſcreveremos hum circulo, o qual encontrará MT nos dous pontos T e T′; entaõ as linhas TC, CT′ tiradas por elles e pelo

centro, seraõ as direcções dos eixos; porque o angulo $T'CT$ he recto, e temos (Cor. 36. 3. Eucl.) $CM : TM :: T'M : MH$ ou $\frac{1}{2}p'$.

A grandeza dos eixos se determinará abaixando de M as perpendiculares MP, MP', e tomando huma meia proporcional CA (337) entre CP e CT, e outra CD entre CP' e CT'.

Naõ póde haver difficuldade em achar a soluçaõ analytica deste problema, depois do que havemos dito (317) a respeito da ellipse.

Da Hyperbola entre as Asymptotas.

346 A Hyperbola considerada em ordem ás asymptotas tem propriedades importantes, de que exporemos as principais, lembrando-nos primeiramente do que fica dito (331) sobre o modo de determinar as asymptotas.

Para referirmos cada hum dos pontos E da curva (*Fig.* 51) ás asymptotas CLO, CL'o, tiremos por E a linha EQ parallela a huma dellas; OEo parallela ao segundo eixo DD'; ES parallela a CLO; e pelo vertice A a linha AG parallela a CL'o. Seja $CA = \frac{1}{2}a$, $CD = AL = AL' = \frac{1}{2}b$, $CP = z$, $PE = y$, $AG = m$, $GL = n$, $CQ = t$, $QE = u$.

Os triangulos semelhantes CPO, CAL daõ $PO = Po = \frac{bz}{a}$; logo $EO = \frac{bz}{a} - y$, Eo =

$=\frac{bz}{a}+y$; donde vem $EO\times Eo=\frac{bbzz}{aa}-yy$ $=\frac{bbzz}{aa}-\frac{bb}{aa}(zz-\frac{1}{4}aa)=\frac{1}{4}bb$, isto he, $EO\times Eo=CD^2=AL^2$; propriedade que pertence a qualquer ponto E da hyperbola.

347 Os triangulos semelhantes QEO, ESo, e AGL daõ AL : EO :: AG : EQ, e AL : Eo :: GL : ES; logo $AL^2 : EO\times Eo :: AG\times GL : EQ\times ES$; mas $EO\times Eo=AL^2$; logo $ut=mn$, equaçaõ da hyperbola entre as asymptotas.

Donde se vê, que para o ponto A teremos $AG\times CG=AG\times GL$; logo $CG=GL$. Mas por causa do angulo recto A, o circulo descrito sobre CL ha de passar pelo ponto A; logo $CG=AG=GL$, isto he, $m=n$, e conseguintemente $ut=m^2$.

Este quadrado constante m^2, ou CG^2, ou $\frac{1}{4}(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb)$, a que o producto ut sempre he igual, chama-se a *potencia* da hyperbola.

348 Se pelo ponto E tirarmos de qualquer maneira huma recta REr terminada nas asymptotas, as partes RE, mr, interceptas entre a curva e as asymptotas, seraõ iguaes entre si.

Porque, tirando por m a linha hmH parallela a OEo, os triangulos semelhantes REO, RmH daõ ER : Rm :: EO : Hm, e os dous tambem semelhantes rhm, roE daõ $Er : mr :: Eo : mh$; logo $ER\times Er : Rm\times mr :: EO\times Eo : Hm\times mh$. Mas (347) $EO\times Eo=CD^2=Hm\times mh$; logo $ER\times Er=Rm\times mr$, ou $ER(Em+mr)=(ER+Em)mr$, e reduzindo, $ER=mr$.

349 Donde se segue, que huma tangente Tt, (*Fig.* 52) terminada nas asymptotas, he dividida em duas partes iguais no ponto do contacto M.

350 Se por M conduzirmos IMi parallela a DD', e tirarmos por qualquer ponto E a linha REr parallela á tangente Tt, e OEo parallela a DD'; os triangulos semelhantes TMI, REO daraõ $TM : MI :: RE : EO$, e os outros dous Mit, Eor daraõ Mt ou $TM : Mi :: Er : Eo$; logo $TM^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$, e por conseguinte (347) $TM^2 = RE \times Er$.

351 Tire-se pelo centro C o diametro CMV, o qual dividirá em duas partes iguais a linha Rr parallela a Tt, porque (349) passa pelo meio M de Tt; e seja $CM = \frac{1}{2}a'$, $TM = \frac{1}{2}q$, $CV = z'$, $VE = y'$. Os triangulos semelhantes CMT, CVR daraõ $VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; logo $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, e $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$. Substituindo estes valores na equaçaõ $RE \times Er = TM^2 = \frac{1}{4}qq$, como tambem o valor de $y'y'$ (338), teremos $q = b'$, e conseguintemente $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, ou, $MT = CN$, sendo CN o semidiametro conjugado de CM; logo (*Fig.* 49.) $MI = CN$, que he o que prometemos (342) demonstrar.

352 Para todas as rectas pois REr (*Fig.* 52) parallelas ao conjugado CN, temos $RE \times Er = CN^2$.

353 Donde se mostra, que muito facilmente podemos descrever a hyperbola por pontos, quando forem dados os dous semidiametros conjugados CM,

CM, CN (*Fig.*53) com o angulo por elles comprehendido. Porque, tirando pela origem M do ſemidiametro CM a linha TM*t* parallela a CN, e tomando de huma e outra parte de M as partes MT, M*t* iguais cada huma a CN, as linhas CT, C*t* (349, 351) ſeraõ as aſymptotas. E ſe pelo ponto M tirarmos arbitrariamente as rectas PMQ, PMQ que quizermos, e em cada huma tomarmos PO = MQ, todos os pontos O aſſim achados perteceráõ (348) á hyperbola. Cada hum dos pontos O póde depois ſervir para acharmos outros como V, V, &c., tirando as rectas ROS, ROS, &c., e fazendo SV = RO.

354 Com igual facilidade ſe deduz o methodo de deſcrever entre duas linhas dadas para aſymptotas huma hyperbola, que paſſe por hum ponto dado dentro dellas.

355 Finalmente, dividindo tanto o angulo das aſymptotas, como o ſeu ſupplemento, em duas partes iguais, acharemos as direcçóes dos dous eixos, cuja grandeza ſe determinará como ſe diſſe (345); e aſſim temos outro meio para reſolver a queſtaõ propoſta no meſmo lugar.

Da Parabola.

356 COnſideremos agora a curva, em que a diſtancia FM (*Fig.* 54) de cada hum dos ſeus pontos M ao ponto fixo F he igual á diſtancia MH do meſmo ponto a huma recta XZ dada de poſiçaõ.

Para acharmos a equaçaõ deſta curva, que ſe chama *Parabola*, tiremos ſobre XZ a perpendicular FV, e dividindo eſta em duas partes iguais

no

no ponto A, ſerá A hum ponto da parabola, porque AV = AF. Sirva eſte ponto, que ſe chama *o vertice*, de origem das abſciſſas, e ſeja AV ou AF $= c$, AP $= x$, PM $= y$; teremos MF $=$ MH $=$ PV $= c + x$, e FP $= \pm (x - c)$.

O triangulo rectangulo FPM dá $FP^2 + PM^2 = MF^2$, iſto he, $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; logo a equaçaõ da curva he $yy = 4cx$, a qual nos moſtra o ſeguinte.

1° Como temos $y = \pm \sqrt{4cx}$, ſegue-ſe que a curva tem dous ramos AM, AM′ perfeitamente iguais e ſemelhantes, hum de huma, e outro de outra parte da linha AFP, a qual ſe chama *o eixo*; e que os meſmos ramos ſe eſtendem até o infinito, porque creſcendo x, tambem creſce y.

2° Fazendo x negativo, temos $y = \pm \sqrt{-4cx}$, valor imaginario; logo a curva naõ paſſa para cima do ponto A.

3° Pondo $x = c$, temos $y = \pm 2c$, iſto he, o valor da ordenada que paſſa pelo fóco F, ou $Fm = 2c$; logo $mm' = 4c$: eſta linha chama-ſe o *parametro* do eixo da parabola. Aſſim *o parametro do eixo da parabola he quadruplo da diſtancia* AF *do vertice ao fóco.*

4° Seja p o parametro, teremos $4c = p$, e a equaçaõ da curva ſe mudará em . . . $yy = px$.

357 Por meio da equaçaõ facilmente ſe deſcreve a parabola por pontos, os quais ſe achaõ dando ſucceſſivamente a x muitos valores, e calculando os correſpondentes de y.

358

358 Tambem ſe póde deſcrever por pontos deſta maneira. Havendo eſcolhido o ponto A para vertice, e a linha VP por direcçaõ do eixo, tomem-ſe as partes AV, AF iguais cada huma a $\frac{1}{4}p$; ſerá F o fóco. Conduzaõ-ſe por cada ponto do eixo as perpendiculares MM′, e deſcrevendo do ponto F como centro e com o intervallo VP dous arcos, que cortem as perpendiculares em dous pontos M e M′, pertenceráõ eſtes á parabola; porque ſendo VH perpendicular ao eixo, he FM = VP = MH. A recta XVH chama-ſe a *directriz*.

359 Ultimamente a parabola póde deſcreverſe por movimento continuo, uſando de hum eſquadro VHf, e de hum fio FMf = fH, cujas extremidades ſe prendem em f, e no fóco F. Entaõ applicando a fH por meio do ponteiro M huma parte Mf do fio, ſe fizermos mover o outro lado do eſquadro ſobre a linha ZX, de maneira que o fio ſe conſerve ſempre eſtendido; o ponteiro deſcreverá a parabola MA.

360 A equaçaõ $yy = px$ moſtra, que para qualquer ponto M *o quadrado da ordenada* MP *he igual ao producto da abſciſſa correſpondente pelo parametro*; ou que *os quadrados das ordenadas eſtaõ entre ſi como as ſuas abſciſſas.*

A equaçaõ da ellipſe $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$, ſuppondo a infinito, reduz-ſe a $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = 4cx$, que he a equaçaõ da parabola. Logo *a parabola he huma ellipſe, cujo eixo maior he infinito.*

361 Se do ponto M (*Fig.*55) conduzirmos sobre FH a perpendicular MOT, esta será tangente da parabola.

Porque se encontra a curva em algum outro ponto N, tirando as linhas NF, NH, e NZ perpendicular a XZ, será NZ $=$ NF; mas por outra parte he NZ $<$ NH, NH $=$ NF, e por conseguinte NZ $<$ NF; logo o ponto N naõ pertence á curva.

362 O angulo FMO $=$ OMH $=$ fMN; logo os raios luminosos que sahirem de F, e encontrarem a concavidade M'AM, se reflectiráõ parallelamente ao eixo; e reciprocamente os parallelos ao eixo se reuniráõ no fóco F.

363 Por quanto HO $=$ OF, os triangulos HOM, TOF seraõ iguaes; logo FT $=$ MH $=$ PV $= x + c$, e conseguintemente PT $=$ FT $+$ FP $= 2x$. Logo *a subtangente* PT *da parabola he dupla da abscissa.*

364 Se por M tirarmos MI perpendicularmente á tangente MT, os triangulos semelhantes TPM, PMI daraõ

$$PI = \frac{PM^2}{PT} = \frac{yy}{2x} = \tfrac{1}{2}p.$$

Logo *a subnormal da parabola he a mesma em todos os pontos, e igual á ametade do parametro.*

365 As propriedades da parabola tem muitas applicaçoes nas Artes e Sciencias. Quem quizer vêr o seu uso na construcçaõ dos navios, póde consultar o nosso original.

366 Toda a linha MX (*Fig.* 56) parallela ao eixo QA chama-se hum *diametro*; o seu *parametro*

he

he em geral o quadruplo da diſtancia da origem M ao fóco; as ſuas *ordenadas* ſaõ as rectas mO parallelas á tangente em M; MO ſaõ as *abſciſſas*.

Para achar a equaçaõ ás coordenadas do diametro MX, tirem-ſe dos pontos m, M, O as linhas mp, MP, OQ perpendiculares ao eixo AP, e conduza-ſe mS parallela ao meſmo eixo. Seja $AP = x$, $PM = y$, $Qp = g$, $AQ = k$; teremos $Ap = k - g$.

Os triangulos ſemelhantes TPM, mSO daraõ $SO = \frac{gy}{2x}$; logo $pm = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$. Mas (360) he $pm^2 \times AP = PM^2 \times Ap$; logo $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Fazendo agora $MO = x'$, $mO = y'$, ſerá $x' = k - x = \frac{gg}{4x}$, ou $gg = 4xx'$. Mas o triangulo rectangulo mSO dá $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$; logo $(4x + p)\, x' = y'y'$. Sendo pois p' o parametro do diametro MX, iſto he, $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$, teremos $y'y' = p'x'$; equaçaõ ſemelhante á relativa ás coordenadas do eixo. Logo *o quadrado da ordenada* mo *a qualquer diametro* MX *he igual ao producto da abſciſſa pelo parametro do meſmo diametro*; e conſeguintemente *os quadrados das ordenadas ſaõ entre ſi como as abſciſſas correſpondentes*.

367 Do que havemos dito ſe ſegue, que para deſcrevermos a parabola, quando for dada a linha indefinida MX por diametro, com o ſeu parametro p', e o angulo que o meſmo diametro faz com

as

as ordenadas, tiraremos pela origem M huma linha NMT que faça com MX o angulo NMX igual ao angulo dado, e outra MF que faça com MT o angulo FMT $=$ NMX; entaõ tomando MF $= \frac{1}{4} p'$, o ponto F ſerá o fóco (362, e 366). Conduzindo pois por F huma linha TFQ parallela a MX até encontrar TM em T, ſerá TFQ a direcçaõ do eixo, cujo vertice A ſe determinará abaixando a perpendicular MP, e dividindo PT em duas partes iguais no ponto A (363). Tendo aſſim achado o fóco e o vertice, a curva ſe deſcreverá com facilidade (358, e 359).

Para darmos a ſoluçaõ analytica deſte problema, ſeja o angulo dado MOm $=$ MTP $= a$; e conſervando as outras denominações, no triangulo rectangulo MTP teremos $1 : tang.\ a :: PT\ (2x) : PM\ (\sqrt{px})$, e conſeguintemente $x = \frac{p}{4\, tang^2\, a}$; mas $p' = 4x + p$, logo $p = p' ſen^2 a$, e aſſim teremos o parametro. A origem A do eixo AL ſe determinará pelas equações $x = \frac{1}{4} p' coſ^2 a$, e $y = \pm \frac{1}{4} p' ſen\, 2a$.

368 As tres curvas de que havemos tratado, tem o nome de *Secções Conicas*, porque reſultaõ de huma pyramide conica cortada por hum plano. Por exemplo, ſe a pyramide conica CHI (*Fig.* 57) for cortada pelo plano AMm, de maneira que eſte encontre os dous lados CH e CI, temos a ellipſe AMmB: deve exceptuar-ſe unicamente o caſo em que o plano faça com CI hum angulo igual aquelle que o outro lado CH forma com a baſe, porque entaõ a ſecçaõ ſerá hum circulo.

Se ao contrario o plano naõ encontrar hum dos

la-

lados CH (*Fig.* 58), ſenaõ no prolongamento deſte, teremos a hyperbola.

Finalmente ſe o plano for parallelo a hum dos lados CH (*Fig.* 59), teremos a parabola.

Para o demonſtrar, concebamos a pyramide conica CHI (*Fig.* 57, 58) cortada por hum plano que paſſe pelo eixo; a ſecçaõ ſerá hum triangulo. Corte-ſe tambem a meſma pyramide por tres planos AM*m*, FMG, H*m*I perpendiculares ao triangulo, ſendo os dous ultimos parallelos á baſe da pyramide; as duas ſecçóes FMG, H*m*I ſeraõ circulos, os quais encontraõ a ſecçaõ AM*m* em M e *m*, e teraõ por diametro as interſecçóes FG, HI dos ſeus planos com o triangulo; e as interſecçóes PM, *pm* dos circulos com o plano MA*m* (19. 11. Eucl.) ſeraõ perpendiculares ao plano do triangulo, e conſeguintemente ſeraõ ordenadas communs dos circulos, e da ſecçaõ AM*m*.

Iſto poſto, os triangulos APG, A*p*I daõ AP : A*p* :: PG : *p*I, e os dous BFP, BH*p* daõ PB : *p*B :: FP : H*p*; logo AP $\times$ PB : A*p* $\times$ *p*B :: FP $\times$ PG : H*p* $\times$ *p*I, ou pela natureza do circulo, AP $\times$ PB : A*p* $\times$ *p*B :: PM^2 : *pm*^{2}. Eſtaõ pois os quadados das ordenadas da ſecçaõ AM*m* entre ſi como os productos das abſciſſas; e porque eſtas ſe achaõ de huma e outra parte da ordenada (*Fig.* 57), e da meſma parte (*Fig.* 58), AM*m* ſerá na *Fig.* 57 huma ellipſe, e na *Fig.* 58 ſerá huma hyperbola.

Na *Fig.* 59 temos pela propriedade do circulo PM^2 = FP $\times$ PG, e *pm*^{2} = H*p* $\times$ *p*I = FP $\times$ *p*I;

pI; logo $PM^2 : pm^2 :: PG : pI :: AP : Ap$, pelos triangulos ſemelhantes APG, ApI. Eſtaõ pois os quadrados das ordenadas entre ſi como as abſciſſas, e conſeguintemente a curva he huma parabola.

Reflexões ſobre as Equações das Secções Conicas.

369 TEm-ſe demonſtrado (309) que na ellipſe, ſendo x a abſciſſa CO (*Fig.* 41) contada do centro ſobre o diametro MM′, e y a ordenada mO parallela ao conjugado CN, a equaçaõ ás coordenadas dos diametros he $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, ſeja qual for o angulo comprehendido pelos diametros. Logo ſe por m conduzirmos mO′ parallela a MM′, a qual ſerá huma ordenada ao diametro NN′; fazendo $CO' = x'$, $mO' = y'$, teremos $y = x'$, e $x = y'$, e por conſequencia $yy = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - x'x')$. Donde ſe ſegue, que contando as abſciſſas do centro, a equaçaõ da ellipſe em ordem a qualquer diametro tem ſempre a meſma fórma, em quanto as ordenadas ſe tomarem parallelas ao diametro conjugado.

Se $b = a$, temos $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, a qual he a equaçaõ do circulo (285), no caſo de ſerem as ordenadas perpendiculares ao diametro; porque ſe forem obliquas, a equaçaõ pertence á ellipſe reportada aos diametros conjugados iguais.

Quan-

Quanto á hyperbola, ſendo x a abſciſſa CO (*Fig.* 48) contada do centro ſobre o diametro MM′ terminado na curva, e y a ordenada mO parallela ao conjugado NN′, teremos (338) $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$ por equaçaõ ás coordenadas do primeiro diametro, ſeja qual for o angulo comprehendido pelos diametros conjugados. Mas ſe por m' conduzirmos $m'O'$ parallela ao diametro CM, a qual ſerá huma ordenada ao diametro NN′; fazendo $CO' = x'$, e $m'O' = y'$, teremos $x' = y$, e $y' = x$, e conſeguintemente $y'y' = \frac{aa}{bb}(x'x' + \frac{1}{4}bb)$. Logo na hyperbola a equaçaõ ás coordenadas do diametro conjugado NN′ naõ he ſemelhante áquella que ſe acha para o diametro MM′ terminado na curva.

Na parabola, contando as abſciſſas da origem de hum diametro ſobre elle meſmo, e tomando as ordenadas parallelas á tangente no vertice do meſmo diametro, a equaçaõ (366) he ſempre $yy = px$, ſendo y a ordenada, x a abſciſſa, e p o parametro do diametro.

Em fim, na hyperbola entre as aſymptotas, contando as abſciſſas x do centro ſobre huma das aſymptotas, e tomando as ordenadas y parallelas á outra aſymptota, a equaçaõ he $xy = aa$, ſendo a a potencia da hyperbola.

370 He porém de advertir, que ſe huma das indeterminadas, y por exemplo, naõ ſe contar da meſma linha ſobre que ſe contaõ os x, poderemos ter huma equaçaõ ſemelhante ás mencionadas, a qual nem poriſſo pertença aos diametros conjuga-

dos

dos, no caſo de ſer a curva reſpectiva huma ellipſe, ou huma hyperbola; ou naõ exprima a relaçaõ entre as abſciſſas e as noſſas ordenadas, no caſo de ſer huma parabola. Sejaõ, por exemplo, CM′, CN (*Fig.* 60) dous ſemidiametros conjugados da ellipſe; ſuppondo CM′ $= \frac{1}{2}a$, CN $= \frac{1}{2}b$, CQ $=$ x, QM $= y$, a equaçaõ he $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$. Tire-ſe pelo centro C huma recta FCE, e pelo ponto B, tomado na diſtancia conhecida BC $= m$, conduza-ſe BF parallela a QM; ſuppondo CE $= z$, e CF $= n$, os triangulos ſemelhantes CBF, CQE daraõ $x = \frac{mz}{n}$; logo teremos $yy = \frac{bbmm}{aann}$ $\left(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz\right)$. Donde ſe vê, que eſta equaçaõ ainda que tenha a meſma fórma da relativa aos diametros conjugados, com tudo naõ lhes pertence; porque as abſciſſas z tomaõ-ſe ſobre CE, e as ordenadas y ou QM contaõ-ſe do ponto Q, onde a linha QM parallela a CN ſe encontra com CM′.

371 Segue-ſe pois, 1° que huma equaçaõ do ſegundo grão a duas indeterminadas, contando-ſe huma dellas da meſma linha ſobre que ſe conta a outra, pertencerá á ellipſe reportada aos diametros conjugados, ou ao circulo, quando nella naõ entrarem outras potencias das indeterminadas mais que os quadrados, e eſtes tiverem differentes ſinaes em differentes membros: bem entendido que o termo conhecido deve ter o ſinal + no membro em que eſtiver o quadrado da indeterminada com o ſi-

final —; porque a equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa - xx)$ naõ exprime linha possivel (98).

372 2° Se os quadrados das indeterminadas tiverem o mesmo final em differentes membros, e dellas naõ entrarem outras potencias mais que os quadrados, a equaçaõ pertencerá sempre á hyperbola reportada ou a hum diametro terminado na curva, ou ao seu conjugado, conforme o termo conhecido tiver o mesmo ou differente final do que tiverem os quadrados das indeterminadas.

373 3° Se a equaçaõ constar sómente de dous termos, dos quais hum seja o quadrado de huma indeterminada, e o outro seja o producto da outra indeterminada por huma quantidade conhecida, pertencerá á parabola reportada a hum dos diametros, quando os dous termos em differentes membros tiverem o mesmo final; porque se o tiverem differente, a equaçaõ naõ exprimirá linha possivel.

374 4° Em fim se a equaçaõ constar sómente de dous termos, dos quais hum seja o producto das duas indeterminadas, e o outro seja huma quantidade conhecida, exprimirá a hyperbola reportada ás asymptotas.

375 Quando huma equaçaõ a duas indeterminadas tiver as condições expostas, com facilidade se poderá construir a secçaõ conica a que pertencer.

Por exemplo, se tivermos a equaçaõ $ncd - qyy = gxx$, escreveremos primeiramente $qy^2 = ncd - gxx = g\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$, e depois $yy = \frac{g}{q}$

 (ncd

$\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$. Vê-se pois que a equaçaõ proposta pertence (309, e 371) a huma ellipse, na qual a razaõ dos quadrados dos dous diametros conjugados ou $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, e o quadrado do diametro sobre que se contaõ os x ou $a^2 = \frac{4ncd}{g}$. Destas duas equações se tiraõ os valores dos dous diametros conjugados, a saber $a = \sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, e $b = \sqrt{\frac{4ncd}{q}}$. E como o angulo por elles comprehendido he igual ao comprehendido pelas linhas x e y, o qual se suppõe conhecido pelo problema de que se houver deduzido a equaçaõ $ncd - qyy = gxx$; temos as tres cousas (316), com as quais podemos descrever a ellipse.

Isto mesmo se praticará nos outros casos. Em geral: Toda a equaçaõ do segundo gráo a duas indeterminadas, se exprime huma linha possivel, e naõ he resoluvel em dous factores do primeiro gráo da fórma $ax + by + c$, e $dx + fy + g$, pertence a huma secçaõ conica. Para o demonstrar, ensinaremos a reduzir qualquer equaçaõ desta natureza á fórma de alguma das equações que havemos considerado. Antes porém de entrarmos nesta materia, faremos para maior clareza as reflexões seguintes.

376 Por quanto os problemas resolvidos por Algebra conduzem sempre a huma ou mais equações, podemos considerar qualquer equaçaõ a duas interminadas u e t, como procedida de hum proble-

ma,

ma, em que as meſmas indeterminadas repreſentaſſem duas incognitas. E como dando ſucceſſivamente a huma das incognitas, a *u* por exemplo, muitos valores, e calculando pela equaçaõ os correſpondentes de *t*, naõ ha embaraço para marcar na linha AR (*Fig.* 60, 61, 62) os valores AP, AP, &c. que ſe derem a *u*, e tirar por P, P, &c. debaixo de hum angulo determinado as linhas PM, PM, &c parallelas entre ſi, e iguais aos valores calculados de *t*; vindo deſta ſorte os pontos M, M, &c. a formar huma curva, cuja natureza dependerá da razaõ que houver entre as linhas AP e PM, a qual ſe exprime pela equaçaõ de que ellas ſe deduziraõ: ſegue-ſe que a meſma equaçaõ exprime a natureza de huma curva, e por tanto ſeja qual for o problema, póde conſiderar-ſe a ſua equaçaõ como pertenecente a huma curva.

Imaginemos que a curva he huma ſecçaõ conica: eſtá claro que como ſe ignorava, ou podia ignorar-ſe, que detal uſo da equaçaõ reſultaſſe huma ſecçaõ conica, naõ ſe havia tratado de diſpor as linhas AP e PM de maneira, que tendo huma a ſua direcçaõ ſobre o diametro, a outra foſſe parallela á tangente no vertice delle, como era neceſſario para que a equaçaõ tiveſſe alguma das fórmas acima expoſtas. Pelo que póde a equaçaõ naõ ter nenhuma das meſmas fórmas, e ſem embargo pertencer a huma das ſecções conicas.

377 Vejamos agora como toda a equaçaõ do ſegundo grão a duas indeterminadas póde reduzir-ſe a alguma das fórmas que tem as equações das ſecções conicas em ordem ás linhas, a que as havemos reportado (369).

378 Para praticarmos pelo methodo que vamos a expôr, devemos lembrar-nos (192) de que o segundo termo de huma equaçaõ do segundo grão se faz desaparecer, igualando a incognita mais ou menos a ametade do coefficiente do segundo termo, conforme for positivo ou negativo, a huma nova incognita, havendo antes desembaraçado o quadrado da incognita.

Assim na equaçaõ $4x^2 + 12x = 9$, faremos $x + \frac{3}{2} = z$, e teremos a equivalente $zz = \frac{18}{4}$, em que naõ ha segundo termo. Se tivessemos $x^2 - 4x = 7$, fariamos $x - 2 = z$, e achariamos $zz = 11$.

379 Podemos tambem igualar a incognita augmentada ou diminuida da ametade do coefficiente do segundo termo, a huma nova incognita multiplicada ou dividida por huma quantidade arbitraria.

Por exemplo na equaçaõ $x^2 - 4x = 7$, fazendo $x - 2 = \frac{k}{n} z$, teremos $\frac{kk}{nn} zz = 11$, a qual dá para x o mesmo valor da operaçaõ precedente, seja k e n o que se quizer; porque sendo $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$, e $x - 2 = \frac{k}{n} z$, teremos como acima $x - 2 = \sqrt{11}$.

Methodo de reduzir ás Secções Conicas toda a equaçaõ indeterminada do ſegundo gráo.

380 SUpponhamos que a equaçaõ geral do ſegundo gráo a duas indeterminadas $dtt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$ pertence a huma curva MM (*Fig.* 60, 61), cujas coordenadas ſejaõ AP e PM. Para moſtrarmos que eſta curva he ſempre huma ſecçaõ conica, e enſinarmos o methodo de a conſtruir, ſimplifiquemos a equaçaõ, fazendo (378) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; teremos $4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)\,u + (cc - 4de)\,uu$. Suppondo para maior facilidade $ffdd - 4hd^3 = r$, $2cfd - 4ged = q$, e $cc - 4de = m$, a equaçaõ ſe reduz á fórma $4ddyy = r + qu + muu$, na qual m, q, r podem ſer quantidades poſitivas ou negativas.

Faça-ſe agora a meſma operaçaõ em ordem a u, dando á equaçaõ a fórma $uu + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, e (379) pondo $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (*); teremos $\frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, da qual ſe deduz $yy = \frac{qq}{16mn^2d^2}\left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$. Como

(*) Introduzimos a quantidade arbitraria n, a fim de reduzir directamente a equaçaõ aos diametros conjugados. Se igualaſſemos (378) ſimplesmente a x, a equaçaõ final eſtaria no caſo que havemos examinado (370).

Como q, n, e d estaõ no quadrado, os sinais da equaçaõ sómente mudaráõ, quando m ou r se tornarem de positivos em negativos. Porém a mudança de sinal em r naõ influe nos sinais de xx e yy; logo della naõ resulta mudança na curva. Quanto a m, se for negativo, teremos $yy = \frac{qq}{16mnndd}$ $\left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx\right)$. Logo a curva será huma hyperbola, quando m for positivo (372); e pelo contrario será huma ellipse, quando m ou $cc - 4de$ for negativo (371), isto he, quando $4de$ for maior que cc, tanto no caso de d e e serem ambos positivos, como no caso de serem ambos negativos.

381 *Para sabermos pois em que casos huma equaçaõ indeterminada do segundo gráo* dtt + cut + euu + fdt + geu + hdd = o, *pertence á ellipse ou á hyperbola, examinaremos se o quadrado* cc *do coefficiente do termo* ut *menos o quadruplo do producto* de *dos coefficientes de* tt *e* uu *dá huma quantidade positiva ou negativa; no primeiro caso a curva será hyperbola, e no segundo huma ellipse, com tanto que naõ seja* d = e, *porque entaõ a curva póde ser hum circulo, como logo mostraremos.*

Deve exceptuar-se desta regra o caso da ellipse, em que r for negativo e maior que $\frac{qq}{4m}$; porque entaõ $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ torna-se em $nn - \frac{4mrnn}{qq}$ ou $nn\left(1 - \frac{4mr}{qq}\right)$; a qual he negativa quando

for

for $\frac{4mr}{qq} > 1$, ou $r > \frac{qq}{4m}$, e conſeguintemente (371) a curva ſerá imaginaria.

Reſta agora enſinar o modo de conſtruir as curvas reconhecidas. Comecemos pella ellipſe, conſtruindo as duas equações reſpectivas $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, pois que m na ſuppoſiçaõ actual he negativo, e n póde ſuppor-ſe indifferentemente poſitivo ou negativo.

382 Quanto á primeira, conduza-ſe pela origem A dos u e t (*Fig.*60) a linha $AB = \frac{1}{2}f$ parallela ás linhas PM ou t, e tire-ſe BKI parallelamente á linha AR ſobre que ſe contaõ os u; ſerá $IM = t + \frac{1}{2}f$. Para termos pois $y = IM + \frac{cu}{2d}$, tome-ſe ſobre BI a linha BK de grandeza arbitraria, e conduzindo $KL = \frac{\frac{1}{2}c \cdot BK}{d}$ parallelamente a AB, ſe tirarmos pelos pontos B e L huma linha BLQ, teremos dous triangulos ſemelhantes BKL e BIQ, que daõ $IQ = \frac{cu}{2d}$; logo $QM = IM + IQ = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Donde ſe ve vê (370) que QLB deve ſer a direcçaõ de hum dos diametros, para que a equaçaõ pertença aos conjugados. Determinemos o centro.

A ſegunda equaçaõ $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ moſtra, que ſe ſobre AP tomarmos $AG = \frac{q}{2m}$, ſerá GP

$= u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; logo tirando por G a linha NGC parallela a PM, o ponto C ſerá a origem dos x, e conſeguintemente o centro da ellipſe. Com effeito, os x devem contar-ſe ſobre LQ, e pela equaçaõ $GP = \frac{qx}{2mn}$, quando $GP = o$, tambem $x = o$; logo os x começaõ ao meſmo tempo que as linhas GP; mas iſto ſómente póde ter lugar quando os x começarem em C; logo ſendo QM os y, as linhas CQ ſeraõ os x.

Da equaçaõ $GP = \frac{qx}{2mn} = \frac{AG \times CQ}{n}$ ſe tira $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mas, pela propriedade das parallelas, $BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; logo $n = BC$; iſto he, para que a noſſa equaçaõ pertença aos diametros conjugados, cujas direcções ſaõ QB e CN, deve introduzir-ſe por n o valor de BC, determinado pelas conſtrucções precedentes.

A grandeza dos diametros determina-ſe, comparando as duas equações $yy = \frac{qq}{16mddnn}\left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx\right)$ e $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, do que reſulta $a = \sqrt{\left(4nn + \frac{16mrnn}{qq}\right)}$, e $b = \sqrt{\left(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd}\right)}$. E como n, m, q, r, ſaõ quantidades conhecidas, teremos os valores

dos

dos diametros, com os quais e com o angulo comprehendido BCN, que ſe ſuppõe determinado nas operacões precedentes, deſcreveremos (316) a ellipſe a que pertence a noſſa equaçaõ.

383 Se $a = b$, e o angulo BCN $= 90°$, a curva ſerá hum circulo. Para determinarmos quando iſto tem lugar, 1º na noſſa equaçaõ ſupporemos $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, que dá $nn = \frac{qq}{16mdd} = BC^2$; 2º ſe o angulo BCD he recto, temos $BC^2 + CD^2 = BD^2 = AG^2$, ou $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqee}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, porque os triangulos ſemelhantes BCD, BLK daõ $CD = \frac{qe}{4md}$; logo he neceſſario que $m + ee = 4dd$, iſto he, $-ee + 4de + ee = 4dd$, ou $d = e$.

384 He pois manifeſto, que *para ſaber ſe a curva he circulo, ellipſe, ou hyperbola*, he eſcuſado attender aos tres ultimos termos fdt, geu, e hdd, da equaçaõ $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$: eſta averigoaçaõ depende ſómente dos tres primeiros termos, de maneira que ſe d, c, e e forem tais, que $cc - 4de$ ſeja poſitivo, a curva ſerá huma hyperbola; ſe pelo contrario for negativo, a curva ſerá huma ellipſe, exceptuando ſómente o caſo em que ſeja ao meſmo tempo $d = e$, iſto he em que os dous quadrados u^2 e t^2 tenhaõ o meſmo coefficiente, porque entaõ a curva ſerá hum circulo, ſe for recto o angulo das novas coordenadas.

385 Tudo o que temos dito, á excepçaõ do numero 383, ſe applica igualmente á hyperbola,

iſto

iſto he, á equaçaõ $yy = \frac{qq}{16mnndd} \cdot \left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$, fazendo a devida correcçaõ nos ſinais. Aſſim tornando a ler o precedente, e applicando-o á *Figura* 61, naõ ha outra mudança a fazer mais do que tirar AG para a parte oppoſta de AP, como indica a equaçaõ $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (380). Quanto ao mais, tudo he o meſmo, mudando a palavra *ellipſe* em *hyperbola*.

Nos caſos particulares as quantidades AG, BK, AB, KL (*Fig.* 60, 61) podem ter diſpoſiçaõ differente da que havemos repreſentado; porém tais mudanças ſeraõ ſempre indicadas pelos ſinais das quantidades d, c, f, m, q &c. nas equações $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que ſe formaõ para fazer deſaparecer o ſegundo termo.

386 Paſſemos a examinar os dous caſos que reſtaõ: a ſaber 1° quando $cc - 4de = 0$; 2° quando $d = 0$, e $e = 0$.

No primeiro caſo, iſto he quando $cc - 4de = 0$, ou quando os tres termos tt, ut, e uu formaõ hum quadrado perfeito, faremos deſaparecer o ſegundo termo em ordem a t, e teremos $yy = \frac{r + qu}{4dd}$. Se ſuppuzermos pois eſte ſegundo membro igual a huma nova indeterminada x multiplicada por hum numero arbitrario n, virá a equaçaõ $yy = nx$, a qual pertence (369) á parabola reportada a hum

dia-

diametro. Para a deſcrever, conſtruiremos as equações $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $\frac{r + qu}{4dd} = nx$. Como ja ſe conſtruio a primeira, applicando exactamente á *Figura* 62 o que ſe diſſe (382) a eſte reſpeito para a *Figura* 60, as linhas QM ſeraõ os y, e teremos BLQ pela direcçaõ do diametro, ſobre que devem contar-ſe os x.

A origem dos x, e conſeguintemente o vertice do diametro ſe determina recorrendo á ſegunda equaçaõ $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, a qual moſtra que ſe tomarmos para a parte contraria de AP a quantidade de $AG = \frac{r}{q}$, ſerá $GP = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$. Logo ſe por G conduzirmos GCD parallela a PM, o ponto de encontro C com QLB ſerá a origem dos x.

O parametro $n = \frac{q \cdot GP}{4d^2 \cdot CQ} = \frac{q \cdot AG}{4d^2 \cdot BC} = \frac{r}{4d^2 \cdot BC}$. Logo ſendo conhecido o parametro do diametro, com a origem C do meſmo diametro, e o angulo MQC das coordenadas, facilmente ſe conſtruirá a parabola (367).

387 Por quanto a equaçaõ geral pertence á parabola quando $c^2 = 4de$, ſegue-ſe que todas as vezes que faltar o producto ut, deve neceſſariamente faltar hum dos quadrados u^2 e t^2, para que a equaçaõ pertença á parabola; porque ſendo entaõ $c = 0$, a equaçaõ $cc = 4de$ moſtra, que d ou $e = 0$.

388

388 Se ambos os quadrados ſe acharem na equaçaõ, e faltar ut, a conſtrucçaõ (382) ſerá mais ſimples; porque neſte caſo $c = o$; logo KL $= o$ (*Fig.* 60, 61), e conſeguintemente BK ſerá hum diametro, cujas coordenadas ſeraõ parallelas aos u e t. Podemos tambem entaõ fazer deſaparecer o ſegundo termo em ordem a u ſem uſar de n, porque BD ou AG $\left(\frac{q}{2m}\right) =$ BC (n), e por conſequencia

$$u + \frac{q}{2m} = x.$$

Donde ſe ſegue, que no caſo preſente, alem das condições expoſtas (384), o angulo das coordenadas u e t deve ſer recto, para que a curva ſeja hum circulo.

389 Se houver ut na equaçaõ primitiva, e naõ aparecer outra potencia de u ſenaõ o quadrado depois de ſe fazer deſvanecer o ſegundo termo em ordem a t, entaõ naõ he neceſſario outra operaçaõ ſemelhante em ordem a u; mas nem poriſſo eſtamos diſpenſados de huma transformaçaõ, a qual conſiſte em ſuppor $u = \frac{lx}{n}$, ſendo $\frac{l}{n}$ huma fracçaõ, que ſe determinará de hum modo analogo ao que havemos enſinado (382), como abaixo moſtraremos.

390 Se dos tres termos t^2, ut, e u^2 faltar ſómente hum dos quadrados, a equaçaõ pertencerá ſempre á hyperbola, ou naõ exprimirá curva alguma; porque ſe for d ou $e = o$, a quantidade cc ſerá ſempre poſitiva (384).

391 Finalmente ſe faltarem ambos os quadrados t^2 e u^2, iſto he, ſe a equaçaõ tiver a fórma

gut

$gut + ht - ku - l = 0$, pertencerá á hyperbola entre as aſymptotas, como ſe vai a vêr na conſtrucçaõ ſeguinte.

Faça-ſe $t - \frac{k}{g} = y$; teremos a transformada $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$. Faça-ſe $u + \frac{h}{g} = x$; teremos $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, equaçaõ que pertence á hyperbola, cuja potencia (347) he $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$.

Conduzamos pois pela origem A (*Fig.* 63) dos u e t parallelamente a PM ou t, a linha AB $= \frac{k}{g}$, e depois por B a linha CBQ parallela a AP, teremos QM $= t - \frac{k}{g} = y$.

Produza-ſe AP para G até que ſeja AG $= \frac{h}{g}$, e tire-ſe GS parallela a PM, o ponto C de encontro com BQ ſerá o centro da hyperbola, cujas abſciſſas ſaõ as linhas CQ, e aſymptotas as linhas CQ, CS. Com eſtas e com a equaçaõ facilmente ſe deſcreverá a curva (354).

Se a equaçaõ naõ tiver os tres primeiros termos t^2, ut e u^2, pertencerá á linha recta, cuja conſtrucçaõ naõ tem difficuldade.

392 Aſſim, recapitulando o que temos dito, 1° toda a equaçaõ indeterminada do ſegundo gráo, ſe

ſe naõ ſe reſolve em dous factores do primeiro, exprime ſempre huma ſecçaõ conica, ou naõ exprime linha alguma poſſivel. 2° A curva he ellipſe, hyperbola, ou parabola, conforme for poſitivo, negativo, ou cifra o quadrado do coefficiente do producto ut das duas indeterminadas menos o quadruplo do producto dos coefficientes dos dous quadrados u^2 e t^2; e em particular póde ſer circulo no caſo de ſer negativo o producto, quando os coefficientes de u^2 e t^2 forem iguais entre ſi. 3° E para reduzirmos qualquer equaçaõ, que pertença a huma ſecçaõ conica, ás equações que havemos dado quando ſe tratou deſtas curvas, devemos praticar pelo modo que ſe enſinou (380, 386, 388, 389, e 391). Paſſemos a moſtrar o uſo das noſſas transformações.

Applicaçaõ á reſoluçaõ de alguns problemas indeterminados.

393 PRobl. I. *Achar a curva* DME (*Fig.*64) *tal que as diſtancias de cada hum dos ſeus pontos* M *a dous fixos* A *e* B *tenhaõ entre ſi a razaõ dada de* g : h.

Tire-ſe ſobre AB a perpendicular MP, e ſeja AP $= u$, PM $= t$, AB $= c$; ſerá BP $= u - c$.

Iſto ſuppoſto, os triangulos rectangulos APM BPM daõ AM $= \sqrt{(uu + tt)}$, e BM $= \sqrt{(uu - 2cu + cc + tt)}$. E como deve ſer AM : BM :: $g : h$, teremos $(g^2 - h^2)u^2 + (g^2 - h^2)tt -$

$2g^2cu$

$2g^2cu + g^2c^2 = 0$; equaçaõ que pertence ao circulo (384).

Para a reduzirmos á fórma $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, basta ſuppor primeiramente $t = y$, e teremos $uu - \frac{2g^2cu}{g^2 - h^2} = \frac{-g^2c^2}{g^2 - h^2} - yy$. Seja agora $u - \frac{g^2c}{g^2 - h^2} = x$; teremos $yy = \frac{h^2g^2c}{(g^2 - h^2)^2} - xx$. Comparando pois as duas equações, virá o valor do raio ou $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - h^2}$. Quanto á determinaçaõ do centro, que eſtá na linha AP, tome-ſe $AC = \frac{g^2c}{g^2 - h^2}$; ſerá $CP = u - \frac{g^2c}{g^2 - h^2} = x$. Deſcrevendo pois hum circulo do ponto C como centro e com o intervallo $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$, cada hum dos ſeus pontos M terá a propriedade de que ſe trata.

Podemos ainda mais facilmente achar o centro e o raio. Porque fazendo $y = 0$ na equaçaõ $uu - \frac{2g^2cu}{g^2 - h^2} = \frac{-g^2c^2}{g^2 - h^2} - yy$, teremos $u = \frac{g^2c}{g^2 - h^2} \pm \frac{ghc}{g^2 - h^2} = \frac{gc(g \pm h)}{g^2 - h^2}$, a qual dá $u = \frac{gc}{g + h} = AD$, e $u = \frac{gc}{g - h} = AE$; logo a ſemidifferença ou $\frac{DE}{2}$ determinará o centro, e o raio CE.

394 Probl. II. *Sendo dada a linha* AR (*Fig.*65) *achar fóra della todos os pontos* M, *tais que as rectas* MA,

MA, MR, *tiradas por cada hum delles para* A *e* R, *formem ſempre hum angulo dado.*

Abaixe-ſe a perpendicular MP, e ſeja o raio $= 1$, AP $= u$, PM $= t$, AR $= b$, a tangente do angulo dado, ou *tang* AMR $= m$; teremos PR $= b - u$.

Os triangulos rectangulos APM, RPM daõ *tang* AMP $= \frac{u}{t}$, e *tang* PMR $= \frac{b-u}{t}$; porém (Trig. 41) $tang\ (A + B) = \frac{R^2\ (tang\ A + tang\ B)}{R^2 - tang\ A\ tang\ B}$; logo teremos $m = \frac{\frac{u}{t} + \frac{b-u}{t}}{1 - \frac{u\,(b-u)}{t^2}}$, ou $mtt + muu - mbu - bt = 0$; equaçaõ a hum circulo, cujo raio e centro determinaremos da maneira ſeguinte.

Faça-ſe $t - \frac{b}{2m} = y$; virá $yy - \frac{bb}{4mm} - bu + uu = 0$. Seja $u - \frac{b}{2} = x$; teremos $yy = \frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm} - xx$; logo o raio $= \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm}\right)}$.

Levante-ſe pois do ponto A a perpendicular AB $= \frac{b}{2m}$, e tire-ſe BCQ parallela a AR; ſerá QM $= t - \frac{b}{2m} = y$. Tomando agora ſobre AR a parte AG $= \frac{b}{2}$, teremos GP $= u - \frac{b}{2} = x$.

Logo ſe tirarmos por G a linha GC parallela a PM, o ponto C ſerá o centro, e $AC = \sqrt{(AG^2 + GC^2)} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm}\right)}$ ſerá o raio.

Reduz-ſe pois a conſtrucçaõ a levantar do ponto G meio de AR a perpendicular $GC = \frac{b}{2m}$, e deſcrever hum circulo do centro C com o raio CA; todo o angulo AMR que tiver o vertice na circumferencia, e paſſar pelos pontos A e R, ſerá igual ao angulo dado.

Eſtá claro que para conſtruirmos $\frac{b}{2m}$, tiraremos huma recta AO, que faça com AB o angulo BAO igual ao angulo dado; entaõ o ponto do encontro C com a perpendicular GC ſerá o ponto procurado, porque (Trig. 164) no triangulo rectangulo ABC temos AB ou $GC = \frac{b}{2m}$.

Donde ſe ſegue, que em huma palavra ſe reduz tudo a tirar por A a linha AO que faça com AR hum angulo igual ao complemento do angulo dado; eſta cortará no ponto procurado C a perpendicular levantada do meio de AR.

395 Agora he facil de reſolver a queſtaõ ſeguinte: *Sendo dada a poſiçaõ de tres pontos* R, A, R′ (*Fig.* 66), *achar o ponto* M, *do qual ſe vejaõ as linhas* RA, AR′ *por angulos dados.*

Dividaõ-ſe as linhas RA, AR′ em duas partes iguais nos pontos G e G′, dos quais ſe levantem as perpendiculares GC e G′C′. Tirem-ſe por A as linhas AC, AC′, que façaõ com AR e

AR′ os angulos RAC, R′AC′ iguais cada hum ao complemento do angulo RMA, R′MA, por que ſe vê a linha correſpondente; e deſcrevendo dous circulos dos centros C e C′ com os raios CA, C′A, o ponto M de interſecçaõ ſerá o ponto procurado.

Eſte problema póde ſervir para repreſentar nas Cartas Topograficas a poſiçaõ de hum ponto, do qual ſe aviſtaõ tres objectos conhecidos.

Se os angulos obſervados RMA, R′MA foſſem iguais aos angulos RR′A, R′RA, o problema ſeria indeterminado; porque confundindo-ſe entaõ os dous circulos, cada hum dos pontos da circumferencia ſatisfaria á queſtaõ.

396 Probl. III. *Sendo dado o angulo que fazem entre ſi duas linhas* AZ, AT (*Fig.* 67), *achar as curvas, nas quais a diſtancia de cada hum dos ſeus pontos* M *a hum fixo* F *de* AZ *tem ſempre para a linha* MT, *tirada do meſmo ponto* M *para a recta* AT *parallelamente a* AZ, *a razaõ dada de* g : h.

Tiremos MP parallela a AT, e MS perpendicular a AZ. Seja $AP = u$, $PM = t$, $AF = c$, $sen\, MPS = p$, e $cos\, MPS = q$.

Iſto poſto, o triangulo rectangulo MPS dá $MS = pt$, e $PS = qt$; logo teremos $FS = qt - u + c$, e por conſequencia $MF = \surd(MS^2 + FS^2) = \surd(tt - 2qut + uu + 2qct - 2cu + cc)$, advertindo que $p^2 + q^2 = 1$. Mas deve ſer $MF : MT :: g : h$; logo teremos $h^2t^2 - 2qh^2ut + (h^2 - g^2)u^2 + 2ch^2qt - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$. Eſta equa-

equaçaõ, que comprehende todas as secções conicas (380), pertencerá (392) á ellipse ou á hyperbola, conforme for negativa ou positiva a quantidade $4h^2g^2 - 4p^2h^4$; e pertencerá á parabola, se for $4h^2g^2 - 4p^2h^4 = 0$, ou $g = ph$; e finalmente a curva será hum circulo, quando for $h^2 = h^2 - g^2$, isto he, quando $g = 0$, ou quando $h = \infty$, designando por este final o infinito.

Para construirmos a curva em cada hum destes casos, naõ temos mais do que imitar o que está feito (380 e seg.), como vamos a mostrar, applicando á hyperbola o que se executou na ellipse, isto he, reduzindo a nossa equaçaõ á fórma $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$.

Faça-se pois $t + cq - qu = y$; teremos por primeira transformaçaõ $yy + ccpp - 2cppu + ppuu - \frac{gg}{hh}uu = 0$, ou $hhyy + cchhpp - 2chhppu + kkuu = 0$, pondo (por abbreviar) $pphh - gg = kk$.

Fazendo agora $u - \frac{ch^2p^2}{k^2} = \frac{ch^2p^2x}{k^2n}$, virá

$$y^2 = -\frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2}\left(x^2 + \frac{n^2k^2}{p^2h^2} - n^2\right);$$

mas como na hyperbola $4h^2(g^2 - p^2h^2)$ deve ser positivo, faremos k^2 negativo, lembrando-nos da hypothese $k^2 = g^2 - p^2h^2$ a todo o tempo que se fizer a substituiçaõ; assim teremos $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2}$

$$\left(x^2 - \frac{n^2k^2}{p^2h^2} - n^2\right).$$

Esta equaçaõ sendo comparada com $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, dá $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2b^2p^4}{k^2n^2}$, e $\frac{1}{4}a^2 = \frac{n^2k^2}{p^2b^2} + n^2$, donde ſe tiraráõ os valores dos diametros conjugados a e b, os quaes ſaõ os meſmos eixos da hyperbola como logo ſe verá.

Para determinar a direcçaõ dos diametros, conſtruiremos primeiramente a equaçaõ $t + cq - qu = y$, continuando a imitar o que ſe fez (382). Conduziremos pois por A parallelamente a PM a linha AB $= cq$, e tirando BI parallela a AZ, tomaremos nella a parte BK; e conduzindo KL $= q$. BK parallela a PM, ſe tirarmos pelos pontos B e L huma linha BQ, ſerá QM $= y$.

Póde porém abbreviar-ſe eſta conſtrucçaõ, conduzindo immediatamente do ponto F a linha FB perpendicular a TA; porque ſendo o angulo FAB = APM, no triangulo rectangulo ABF temos AB $= cq$; logo ſeraõ os y perpendiculares á linha BQ, a qual por conſequencia ſerá a direcçaõ de hum dos eixos, e a do outro ſerá parallela a QM.

Quanto á determinaçaõ do centro, a ſegunda equaçaõ $u + \frac{cb^2p^2}{k^2} = \frac{cb^2p^2x}{k^2n}$ na hypotheſe de k^2 ſer negativo, moſtra que tomando da parte contraria dos u a quantidade AG $= \frac{cb^2p^2}{k^2}$, a linha GC parallela a PM, ou perpendicular a BQ, determinará a origem C dos x, e por conſequencia o centro. Na ellipſe ſeguiremos hum procedimento analogo.

Quan-

Quanto á parabola porém, como temos entaõ $g = ph$, e conſeguintemente $k^2 = o$, a equaçaõ achada entre y e u ſe torna em $y^2 + c^2p^2 - 2cp^2u = o$. Para a reduzirmos á fórma ordinaria, faça-ſe (386) $2cp^2u - c^2p^2 = nx$, e teremos $yy = nx$. Agora podemos deſcrever a curva, conſtruindo, a primeira equaçaõ $t + cq - qu = y$, como no caſo precedente; e a ſegunda $2cp^2u - c^2p^2 = nx$, ou $u - \frac{1}{2}c = \frac{nx}{2cp^2}$ de hum modo analogo ao do §. 386, tomando ſobre AP (*Fig.* 68) a parte $AG = \frac{1}{2}c$: aſſim a linha GC parallela a PM ſerá a linha dos x, os quais ſeraõ CQ, de maneira que CQ ſerá a direcçaõ do diametro, cujo vertice ſerá C, e n o ſeu parametro. Eſte ſe determinará pela ſegunda equaçaõ, que dá $n = \frac{2cp^2 \cdot GP}{CQ} = \frac{2c^2p^2}{BF}$; expreſſaõ que he toda conhecida, e ſe póde ſimplificar, advertindo que no triangulo rectangulo FAB temos $BF = cp$, e conſeguintemente $n = 2BF$.

397 Probl. IV. *Fazendo-ſe mover a recta dada* OH (*Fig.* 69) *dentro do angulo dado* OCH, *de maneira que as extremidades* O *e* H *ſe conſervem ſempre ſobre os lados do angulo; achar a curva que neſte movimento deſcreve hum ponto determinado* M *da meſma recta.*

Tiremos de hum ponto qualquer M da curva a linha MP parallela a CH; e ſeja $CP = u$, $PM = t$, $OM = g$, $MH = h$, $ſen\ MPO = p$, $coſ\ MPO = q$.

As

As parallelas CH, PM daõ $OP = \frac{gu}{h}$; más no triangulo OPM temos (Trig. 180) $MO^2 = OP^2 + PM^2 + 2OP \cdot PM \cdot cos\,OPM$; logo ferá $t^2 + \frac{2gq}{h}ut + \frac{g^2}{h^2}u^2 = g^2$, equaçaõ que pertence á ellipfe (381).

Seja pois $t + \frac{gqu}{h} = y$, e $u = \frac{x}{n}$; teremos $y^2 = \frac{g^2p^2}{h^2n^2}\left(\frac{h^2n^2}{p^2} - x^2\right)$, a qual fendo comparada com $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, dá $a = \frac{2hn}{p}$, e $b = 2g$.

Para determinar as direcções dos dous diametros conjugados, e o valor de n, tome-fe arbitrariamente CK, e conduza-fe $KL = \frac{gq \cdot CK}{h}$ parallelamente a PM; entaõ tirando CL, ferá $QM = PM + PQ = t + \frac{gqu}{h} = y$. Como pois os x devem contar-fe fobre CQ, e a equaçaõ $u = \frac{x}{n}$ moftra que os u e x começaõ ao mefmo tempo; o ponto C ferá o centro, e CQ, CH feraõ as direcções dos diametros. Mas he $n = \frac{x}{u} = \frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK} = CL$, fuppondo CK = ao raio; logo temos os valores dos diametros conjugados com o angulo OCH por elles comprehendido, e confeguinguintemente naõ póde haver difficuldade na descripçaõ da ellipse.

Se o angulo C for recto, teremos $y^2 = \frac{g^2}{h^2}$ $(h^2 - x^2)$; equaçaõ ás coordenadas da ellipse, cujos semieixos saõ g e h. Assim temos outro methodo de descrever a ellipse por movimento continuo.

Applicaçaõ dos mesmos principios á resoluçaõ de alguns problemas determinados.

398 A Soluçaõ do segundo problema indeterminado (394) servio para resolver outro determinado (395); e neste ultimo tacitamente suppuzemos incluidos mais dous indeterminados, cada hum da mesma especie do primeiro, os quais por consequencia se resolvéraõ do mesmo modo. A intersecçaõ de duas curvas, ou circulos, que eraõ nesse caso o *lugar* de cada hum dos dous problemas parciais, deu a soluçaõ do problema determinado. Tal he o procedimento que devemos seguir para resolver as questões, quando a equaçaõ final que exprime todas as condições do problema, passar do segundo gráo: Faremos uso de duas incognitas ainda nos casos em que huma basta, isto he, nos casos em que os problemas saõ determinados, e formaremos duas equações, cada huma das quais sendo construida separadamente com o mesmo vertice, a mesma linha de abscissas, e o mesmo angulo das coordenadas, dará huma curva, cujos pontos satisfaráõ todos á equaçaõ res-

pe-

pectiva. Entaõ ſe a queſtaõ he poſſivel, as duas curvas ſe encontraráõ em hum ou muitos pontos, conforme ella admitir huma ou muitas ſoluções, ou incluir muitos caſos dependentes dos meſmos dados, e raciocinios; e as coordenadas correſpondentes aos pontos de interſecçaõ ſeraõ os valores das incognitas.

Eſtá claro, que ſe as duas equações a duas indeterminadas naõ paſſarem do ſegundo gráo, a reſoluçaõ do problema, naõ dependerá ſenaõ, quando muito, da interſecçaõ de duas ſecções conicas. Porém neſtes meſmos caſos, ſe uſaſſemos de huma incognita ſómente, ou ſe por meio das duas equações eliminaſſemos huma das duas incognitas, a equaçaõ ſubiria ao terceiro gráo, e ordinariamente ao quarto. Se huma das equações, ou ambas ellas paſſarem do ſegundo gráo, a reſoluçaõ do problema dependerá de curvas mais elevadas que as ſecções conicas.

Paſſemos a dar exemplos, começando pela reſoluçaõ de alguns problemas que naõ paſſaõ do quarto gráo.

399 Probl. I. *Achar duas meias proporcionais* t *e* u *entre duas linhas dadas* a *e* b.

Sendo pela condiçaõ $\div\div a : t : u : b$, teremos $au = t^2$, e $bt = u^2$. Para conſtruir eſtas equações tirem-ſe duas linhas AX, AZ (*Fig.*70), perpendiculares entre ſi para maior ſimplicidade, e ſobre AZ como diametro e pelo vertice A deſcreva-ſe huma parabola (367), cujo parametro ſeja $= a$, e o angulo das coordenadas = XAZ; eſta curva ſerá o lugar da equaçaõ $au = t^2$, de maneira que ſendo AP $= u$, ſerá PM $= t$. Semelhantemente deſcreva-ſe va-se pelo vertice A, sobre o diametro AX, com o parametro b, e o angulo de coordenadas XAZ, outra parabola; será esta o lugar da equaçaõ $bt = u^2$, de sorte que sendo $AP' = t$, teremos $P'M' = u$. Mas he necessario que as duas equações tenhaõ lugar ao mesmo tempo, isto he, que os valores tanto de u como de t sejaõ os mesmos em ambas ellas; e isto sómente acontece no ponto de intersecçaõ M, como se vê tirando MP e MP parallelas a AX e AZ: logo os valores de u e t que satisfazem ao problema saõ as coordenadas AP e PM, correspondentes ao ponto de encontro M. Ainda que as curvas tambem se encontraõ no ponto A, comtudo he evidente que tal ponto naõ satisfaz, porque nelle he $u = 0$, e $t = 0$.

400 Estas equações depois de preparadas conduzem muitas vezes a construcções bem simples. Ajuntando, por exemplo, as duas equações $au = t^2$, e $bt = u^2$, temos $au + bt = u^2 + t^2$; equaçaõ ao circulo, se as coordenadas u e t forem perpendiculares entre si. E como o circulo he mais facil de descrever que a parabola, construiremos, com preferencia ao que fizemos, huma das primeiras equações, por exemplo $au = t^2$, e a ultima $au + bt = u^2 + t^2$, a qual se reduz a $y^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - x^2$, pelas hypotheses de $t - \frac{1}{2}b = y$, e $u - \frac{1}{2}a = x$. Para este effeito, tomaremos $AB = \frac{1}{2}b$, e tirando BQ parallela a AP, será $QM = y$. Tomaremos tambem $AO = \frac{1}{2}a$, e conduzindo OC parallela a AX, teremos $CQ = x$. Se descrevermos pois do ponto C com o raio $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} = AC$ hum circulo que corte a pa-

parabola em hum ponto M, feraõ MP e AP as duas meias proporcionais u e t.

401 Podemos variar muito eftas conftrucções; podemos, por exemplo, ajuntar huma das duas equações com a outra multiplicada por huma quantidade arbitraria $\frac{l}{n}$, pofitiva, ou negativa, e teremos $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$; equaçaõ que pertencerá á ellipfe, ou á hyperbola, conforme o valor que fe der a $\frac{l}{n}$; e affim podemos fazer a conftrucçaõ com huma deftas curvas, como fe fez com o circulo. Podemos tambem conftruir com ambas as curvas juntamente, ou com huma fómente combinada com o circulo, para o que daremos a $\frac{l}{n}$ valores convenientes, os quais fe determinaõ fem difficuldade (392).

402 Probl. II. *Dividir hum angulo ou arco dado* EO (*Fig.* 71) *em tres partes iguais.*

Seja EM a terça parte do arco dado, cujo centro he A. Tirem-fe as perpendiculares MP, OR fobre o raio AE, e fupponha-fe AE $= r$, OR $=$ *fen* EO $= d$, AR $=$ *cof* EO $= c$, AP $= u$, PM $= t$.

O triangulo rectangulo APM dá $u^2 + t^2 = r^2$; e os dous femelhantes APM, ARS daõ RS $= \frac{ct}{u}$. Produza-fe MP até encontrar a circumferencia

cia em V, será OMS $=$ AMP $=$ ASR $=$ OSM, e por consequencia OS $=$ OM $=$ MV $= 2t$. Mas OR $=$ OS $+$ SR; logo teremos $d = 2t + \frac{ct}{u}$, ou $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$, que pertence (391) á hyperbola. Como a primeira equação $t^2 = r^2 - u^2$ he a mesma do circulo EMO, não resta mais que construir a segunda. Para a reduzirmos pois a fórma $xy = aa$, faça-se primeiramente $\frac{1}{2}d - t = y$, e depois $u + \frac{1}{2}c = x$; e teremos $xy = \frac{1}{4}cd$ por equação da hyperbola entre as asymptotas.

Conduza-se por A a linha AB $= \frac{1}{2}d$ parallelamente a PM, e tirando QBC parallela a AP, teremos QM $= \frac{1}{2}d - t = y$; logo CQ será a direcção de huma asymptota. Produzindo depois AP para G de sorte que seja AG $= \frac{1}{2}c$, e tirando GC parallela a PM, será CQ $= u + \frac{1}{2}c = x$; logo C será o centro, e CQ, CG serão as asymptotas. A hyperbola descrita (354) entre ellas, a qual deve passar por A, como se deduz da equação $xy = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}d =$ CB $\times$ AB, cortará o circulo no ponto procurado M.

Quando o arco EO passar de 90°, faremos c negativo nas equações achadas; e quando o seu valor cahir entre 180° e 270°, como EOE′O′, mudaremos os sinais de c e d.

Se produzirmos GC e CB até que tenhamos CG′ $=$ CG, e CB′ $=$ CB; e tirando B′A′ e G′A′ parallelas respectivamente a CG′ e CB′, descrevermos entre as linhas CG′ e CB′ (produzidas) como asymptotas huma hyperbola que passe por A′; esta encontrará o circulo em dous pontos A′ e M′, do mesmo modo que a primeira o encontra em M

e

e M''. Destes quatro pontos o primeiro determina EM $= \frac{1}{3}$ EO; o segundo M' determina E'M' $=$ $\frac{1}{3}$ E'O $= \frac{1}{3}(180^\circ$ — EO); o terceiro M'' determina E'M'' $= \frac{1}{3}$ E O E'O' $= \frac{1}{3}(180^\circ +$ EO').

Com effeito, os arcos E'O e EO tem os mesmos seno e coseno com a differença unica de ser negativo o coseno de E'O, considerado como maior que 90°; logo acharemos a soluçaõ para o arco E'O, fazendo c negativo na soluçaõ de EO. Porém esta mudança, que altera sómente a segunda equaçaõ, muda a sua reduzida em $xy = -\frac{1}{4}cd$, que pertence á hyperbola A'M', e mostra por consequencia que a intersecçaõ M' deste ramo da hyperbola com o circulo dá a soluçaõ do caso presente: logo P'M' he o seno do arco procurado no segundo caso, e conseguintemente E'M' he este mesmo arco, ou E'M' $= \frac{1}{3}$ E'O.

Quanto á terceira soluçaõ, se ajuntarmos 180° a EO, isto he, se tomarmos E'O' $=$ EO, os arcos EO, e E O E'O tem os mesmos seno e coseno, com a differença que os do ultimo saõ negativos; logo teremos a soluçaõ que convem a este caso, fazendo c e d negativos. Porém esta mudança naõ altera a equaçaõ $xy = \frac{1}{4}cd$; logo a primeira hyperbola deve dar a soluçaõ deste terceiro caso na intersecçaõ M''. He pois P''M'' o seno do arco procurado neste caso, e conseguintemente E'M'' he este mesmo arco, ou E'M'' $= \frac{1}{3}$ E O E'O'.

Assim a mesma construcçaõ determina $\frac{1}{3}$ A, $\frac{1}{3}(180^\circ - \text{A})$, e $\frac{1}{3}(180^\circ + \text{A})$, sendo A o arco dado.

O ponto de intersecçaõ A', pelo qual a hyperbola se sujeita a passar, como he conhecido, naõ dá huma soluçaõ nova.

403 Se das duas equações a u e t eliminarmos t, virá a equaçaõ do terceiro gráo no caso irreduzivel $u^3 - \frac{3}{4} r^2 u - \frac{1}{4} cr^2 = 0$, a qual deve comprehender os tres casos que havemos examinado; logo a mesma equaçaõ deve ter tres raizes, a saber $u = AP = cos \frac{EO}{3}$, $u = AP' = cos \frac{180° - EO}{3}$, e $u = AP'' = cos \frac{180° + EO}{3}$.

404 Donde se segue, que podemos por meio das Taboas dos senos achar as tres raizes de huma equaçaõ do terceiro gráo no caso irreduzivel com huma approximaçaõ sufficiente e muito prompta. Porque, comparando a equaçaõ geral deste caso $u^3 - pu + q = 0$ com a do nosso problema, temos $\frac{3}{4} r^2 = p$, e $-\frac{1}{4} cr^2 = q$, as quais daõ $r = \sqrt{\frac{4}{3} p}$, e $c = \frac{-3q}{p}$. Se procurarmos pois nas Taboas o numero de gráos correspondente a $sen \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}$, suppondo o raio dellas igual á unidade, acharemos o complemento do arco EO; e ajuntando 90° ao mesmo numero de gráos, ou tirando este mesmo numero de 90°, conforme for q positivo ou negativo na equaçaõ, teremos o arco EO, que chamaremos A. Buscaremos logo nas Taboas os cosenos dos tres arcos $\frac{A}{3}$, $\frac{180° - A}{3}$, e

180°

$\frac{180^\circ + A}{3}$, os quais ſendo multiplicados por r ou $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, para ſe reduzir cada hum ao coſeno do arco correſpondente no circulo cujo raio he r, daraõ AP ou $u = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot cos\,\frac{A}{3}$, $u = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot cos\,\frac{180^\circ - A}{3}$, e $u = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot cos\,\frac{180^\circ + A}{3}$; bem entendido que ſe deve dar o ſinal — áquelles em que o arco paſſar de 90°. Eſtas operações podem facilitar-ſe por meio dos logarithmos.

405 Probl. III. *Sendo dada a poſiçaõ do ponto* D (*Fig.* 72) *a reſpeito de duas linhas* AR, AP, *que comprehendem hum angulo conhecido, tirar pelo dito ponto a recta* DP, *de maneira que a parte intercepta* RP *ſeja igual a huma linha dada* c.

Tiremos DS e RN perpendiculares a AP produzida, e DO parallela a AR. Seja $DO = r$, $DS = p$, $OS = q$, $AO = d$, $AP = u$, $AR = t$.

OS triangulos ſemelhantes DSO, RNA daõ $RN = \frac{pt}{r}$, $AN = \frac{qt}{r}$, e conſeguintemente NP $= \frac{qt}{r} + u$. Mas no triangulo rectangulo RNP temos $RN^2 + NP^2 = RP^2$; logo ſerá $\frac{q^2}{r^2}t^2 + \frac{2q}{r}ut + u^2 + \frac{p^2}{r^2}t^2 = c^2$, iſto he $t^2 + \frac{2q}{r}ut + u^2 = c^2$.

Alem

Alem diſſo, os triangulos ſemelhantes DOP, RAP daõ DO (r) : RA (t) :: OP $(d+u)$: AP (u), ou $ru = td + ut$. Temos pois duas equações, huma á ellipſe, e a outra á hyperbola, que ambas ſe devem conſtruir para reſolver o problema.

Quanto á primeira, faça-ſe como nos exemplos precedentes, $t + \frac{qu}{r} = y$, e $u = \frac{rx}{n}$; teremos $y^2 = \frac{p^2}{n^2}\left(\frac{c^2n^2}{p^2} - x^2\right)$, e por conſequencia os valores dos dous diametros conjugados a, e b ſeraõ $a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$. Tome-ſe pois ſobre AP a linha arbitraria AK, e tire-ſe KL $= \frac{q \cdot AK}{r}$ parallelamente a PM; teremos QM $= y$, e ſerá AQ a direcçaõ do diametro ſobre que devem contar-ſe os x; logo AQ $= x$. E como a equaçaõ $u = \frac{rx}{n}$ ſe torna em AP $= \frac{r \cdot AQ}{n}$, teremos $n = \frac{r \cdot AQ}{AP} = \frac{r \cdot AL}{AK} = AL$, ſuppondo AK $= r$. Aſſim conſtruindo huma ellipſe com os dous diametros conjugados $a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$, que comprehendaõ hum angulo igual a AQM, acharemos o lugar da primeira equaçaõ. Eſta ellipſe he a meſma que deſcreveria o meio de huma linha igual a 2RP, a qual ſe moveſſe ſem que as ſuas extremidades ſahiſſem dos lados AP, AR, como ſe póde ver, fazendo comparaçaõ com a ſoluçaõ da-

dada (397), e ſuppondo $g = h = c$. Quando o angulo RAP he recto, a ellipſe ſe torna em hum circulo deſcrito com o raio c.

Para conſtruir a ſegunda equaçaõ $ru - ut = dt$, faça-ſe $r - t = y'$, e $u + d = x'$; virá $x'y' = rd$. Tire-ſe por D a linha DTV parallela a AP; ſerá $VM = y'$. Conduza-ſe pelo meſmo ponto D a linha DO parallela a AT; ſerá $DV = x'$. Deſcrever-ſe-ha pois entre as linhas DO e DV como aſymptotas huma hyperbola que paſſe pelo ponto A, por ſer $x'y' = rd = AO \times AT$; ella encontrará a ellipſe em dous pontos M e M'; logo conduzindo por eſtes e por D as linhas MR, MR' parallelas a AP, e tirando DRP e DP'R', as partes PR e P'R' interceptas nos angulos RAP, R'AP' ſeraõ iguais á linha c.

Se a hyperbola oppoſta M''A'M''' (*Fig.* 73), deſcrita entre as aſymptotas produzidas, encontrar a ellipſe, determinará mais dous pontos M'', M''', os quais daraõ R'', R''' tais, que ſe por elles e por D tirarmos duas rectas, as partes comprehendidas dentro do angulo TAS ſeraõ iguais a c. Tal he em geral o methodo geometrico de reſolver os problemas determinados, que naõ paſſarem do quarto gráo.

406 O meſmo methodo póde ſervir ainda quando naõ ſe faça uſo de duas incognitas, com tanto porém que depois ſe introduza huma de novo. Por exemplo, ſe nos propuzeſſem eſte problema: *Achar hum cubo que tenha para outro conhecido* a^3 *a razaõ dada de* m : n; ſuppondo o lado do cubo procurado

$\delta \dot{o} = u$, teriamos $u^3 : a^3 :: m : n$, e por conſequencia $nu^3 = ma^3$.

Para conſtruirmos eſta equaçaõ, ſupporiamos $u^2 = at$, e teriamos $ntu = ma^2$, ou $tu = \frac{ma^2}{n}$. Deſcreveriamos pois a parabola que tem a equaçaõ $u^2 = at$, e a hyperbola a que pertence a equaçaõ $tu = \frac{ma^2}{n}$; a interſecçaõ das duas curvas daria os valores de u e t.

Multiplique-ſe porém a transformada por u, e ſubſtitua-ſe em lugar de u^2 o ſeu valor at; virá $t^2 = \frac{ma}{n} u$, equaçaõ á parabola, a qual ſe póde conſtruir juntamente com a outra $u^2 = at$. Advirta-ſe que eſtas equações ſaõ as meſmas que teriamos, ſe procuraſſemos duas meias proporcionais entre a e $\frac{ma}{n}$; aſſim podem conſtruir-ſe preciſamente como ſe enſinou (399).

407 Pela equaçaõ $nu^3 = ma^3$, a qual dá $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$, ſe vê que os radicais cubos podem conſtruir-ſe por meio das ſecções conicas. O meſmo ſe deve entender a reſpeito dos radicais do quarto gráo em que ſe contiverem radicais cubos, como por exemplo $\sqrt[4]{\left(a^3 \sqrt[3]{ab^2}\right)}$; porque ſe entraſſem ſómente radicais quadrados, como em $\sqrt[4]{\left(a^3 \sqrt{ab}\right)}$, ou quantidades racionais, a conſtrucçaõ ſe reduziria ſempre ao circulo. Com effeito no noſſo exem-

X plo

plo, tomando huma meia proporcional m entre a e b, teriamos $\sqrt[4]{a^3 m}$; e tomando outra meia proporcional n entre a e m, teriamos $\sqrt[4]{a^2 n^2}$, isto he $\sqrt{an}$, expressaõ de huma meia proporcional entre a e n.

408 Se a equaçaõ determinada constar de maior numero de termos, naõ deixará porisso de poder construir-se de hum modo analogo. Assim se tivermos $u^4 + au^3 + aqu^2 + a^2ru + sa^3 = 0$, sendo a, q, r, e s quantidades conhecidas, supporemos $u^2 = at$, e acharemos $at^2 + aut + qu^2 + aru + sa^2 = 0$, equaçaõ que pertence a huma secçaõ conica. Se a construirmos pois, e tambem a outra $u^2 = at$, as intersecções das duas curvas determinaráõ os differentes valores de u.

409 Póde acontecer que hum problema tenha muitas soluções, e sem embargo as curvas naõ cheguem a encontrar-se, quando se introduz do modo exposto huma nova equaçaõ. Para evitar este embaraço, daremos hum methodo que tem lugar em todos os casos.

Seja, por exemplo, $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$ a equaçaõ procedida de hum problema. Supporemos $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = a^2 t$, sendo t huma indeterminada, e a, p, q numeros ou linhas conhecidas. Esta equaçaõ, em que t naõ passa do primeiro gráo, póde construir-se com facilidade, dando a u successivamente muitos valores AP, AP, &c. (*Fig.* 74) e calculando os correspondentes de t, que tiraremos perpendiculares a AP para maior facilidade, como PM, PM &c. e com attençaõ aos sinais. Se procurarmos pois os pontos em que a curva encontra o eixo, teremos $u^3 - au^2 +$

pau

$pau - qa^2 = 0$, isto he, a equaçaõ proposta; logo as distancias AO, AO′, AO″, em que a curva encontra o eixo, seraõ os differentes valores de u. Querendo aqui usar de construcçaõ em lugar de calculo, daremos á equaçaõ a fórma $t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$, e construiremos (246) cada hum dos termos do segundo membro para cada hum dos valores de u.

410 Quando no problema entrar mais que huma incognita, podemos fazer uso da construcçaõ precedente, reduzindo todas as incognitas a huma unica pelo methodo dado (162 e seg.).

411 Se o problema for indeterminado, e huma das duas incognitas naõ passar do segundo gráo, poderemos sempre construir a equaçaõ dando á outra incognita, seja qual for o seu gráo, valores arbitrarios, e calculando os correspondentes da primeira incognita, na hypothese de que esta represente as ordenadas de huma curva, e aquella as suas abscissas. Se porém as duas incognitas passarem ambas do segundo gráo, será necessario para cada valor que se der a huma, achar os valores da outra pelo methodo que acabamos de ensinar. Naõ nos demoraremos mais nas construcções desta ultima especie, porque raras vezes se encontraõ.

412 Antes de concluirmos esta Secçaõ, mostraremos alguns usos mais da applicaçaõ das equações ás linhas curvas. Por quanto toda a equaçaõ a huma secçaõ conica he sempre do segundo gráo, e a equaçaõ mais geral deste gráo póde reduzir-se á fórma

ma

ma $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; ſegue-ſe que podemos ſempre fazer paſſar huma ſecçaõ conica por cinco pontos dados; com tanto que eſtes tres a tres naõ eſtejaõ em linha recta, porque huma ſecçaõ conica naõ póde encontrar huma recta em mais de dous pontos.

Com effeito ſejaõ A, B, C, D, E (*Fig.* 75) os cinco pontos dados. Se os referirmos á recta AD que paſſa por dous delles, entaõ conduzindo BF, CH, EG perpendiculares a AD para maior facilidade, as diſtancias AF, BF, AG, GE, AH, HC, AD poderáõ conſiderar-ſe como abſciſſas e ordenadas de huma curva, cuja equaçaõ he $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$. Porque ſeja $AF = m$, $BF = n$, $AG = m'$, $GE = n'$, $AH = m''$, $CH = n''$, $AD = m'''$, eſtá claro 1° que no ponto A temos $u = 0$, e $t = 0$, e conſeguintemente $h = 0$. 2° No ponto B temos $u = m$, $t = n$, e a equaçaõ ſe muda em

$$dm^2 + cmn + en^2 + fm + gn = 0.$$

3° No ponto E temos do meſmo modo

$$dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$$

4° No ponto C temos

$$dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$$

5° Ultimamente, no ponto D onde $t = 0$, temos

$$em''' + g = 0.$$

E como neſtas quatro equações entraõ todas as quantidades c, e, f, g em primeiro gráo, com facilidade ſe acharáõ os ſeus valores, os quais ſendo ſubſtituidos na equaçaõ $dt^2 + cut + eu^2 + ft +$

gu

$gu = 0$, a tornaráõ em outra, que ſerá diviſivel por d, e em que por conſequencia todos os termos teráõ coefficientes conhecidos; ſerá pois muito facil de conſtruir a ſecçaõ conica a que pertencer a meſma equaçaõ. No caſo de naõ ſerem dados mais que quatro pontos, hum dos coefficientes ſerá arbitrario; logo poderemos impôr huma condiçaõ como quizermos, duas ſe forem dados tres pontos ſómente, e aſſim por diante.

As linhas diſtinguem-ſe pelo gráo da ſua equaçaõ; aſſim a linha recta he linha da primeira ordem; as ſecções conicas ſaõ linhas da ſegunda ordem.

Por hum modo analogo ſe póde determinar a equaçaõ de huma linha da terceira ordem, que ſe ſujeite a paſſar por tantos pontos menos hum, quantos ſaõ os differentes termos que póde ter a equaçaõ geral deſta ordem a duas indeterminadas; e aſſim nas ordens ſuperiores.

413 O meſmo methodo póde ſervir para achar approximadamente a lei que obſervaõ entre ſi muitas quantidades conhecidas, e dependentes humas das outras por certas relações; e neſta applicaçaõ tem o nome de *Methodo das interpolações*. Supponhamos, por exemplo, que tres quantidades conhecidas CB, ED, GF (*Fig.* 76) dependem de outras tres AB, AD, AF; pertende-ſe achar a lei geral que une eſtas quantidades, de maneira que ſe poſſa determinar huma quantidade HI, intermedia ou vezinha das primeiras, a qual derive de AH, do meſmo modo que CB, DE &c. derivaõ de AB, AD &c.

De muitos modos ſe póde ſatisfazer a eſte problema, tomando huma equaçaõ a duas indeterminanadas u e t, a qual tenha pelo menos tantos termos differentes, quantas saõ as quantidades dadas, tais como CB, ED, GF. Mas entre todos elles o que mais facilita o uso que póde ter o dito methodo, he o considerar IH como ordenada, e AH como abscissa de huma curva, que passe pelos pontos dados C, E, G, &c., e na qual t seja huma funçaõ indeterminada da abscissa correspondente, da fórma $a + bu + cu^2 +$ &c., tomando tantos termos, quantos saõ os pontos C, E, G. Logo se suppuzermos (412) 1° $u = AB$, $t = CB$; 2° $u = AD$, $t = DE$; 3° $u = AF$, $t = FG$, e assim por diante, teremos tantas equações para determinar a, b, c, quantos saõ os pontos dados; e substituindo os valores em $t = a + bu + cu^2 +$ &c., acharemos a equaçaõ approximada da curva, que passa pelos pontos C, E, G, &c. Pondo entaõ por u a distancia AH, teremos o valor correspondente de t ou HI; e reciprocamente.

Seguindo o mesmo procedimento, podemos imitar o contorno ABCDEF (*Fig.* 77) de qualquer curva traçada ao acaso (282). Para isso abaixaremos dos differentes pontos A, B, C, D, &c. perpendiculares sobre a linha determinada XZ, que se toma por linha das abscissas, e acharemos, como acabamos de ensinar, a equaçaõ de huma curva que passe pelos mesmos pontos; por meio della pois se calcularáõ as perpendiculares intermedias com tanto maior approximaçaõ, quanto maior for o numero dos pontos A, B, C, D, &c. que houvermos tomado.

nadas u e t, a qual tenha pelo menos tantos termos differentes, quantas ſaõ as quantidades dadas, taes como CB, ED, GF. Mas entre todos elles o que mais facilita o uſo que póde ter o dito methodo, he o conſiderar IH como ordenada, e AH como abſciſſa de huma curva, que paſſe pelos pontos dados C, E, G, &c., e na qual t ſeja huma funçaõ indeterminada da abſciſſa correſpondente, da fórma $a + bu + cu^2 +$ &c., tomando tantos termos, quantos ſaõ os pontos C, E, G. Logo ſe ſuppozermos (412) 1° $u = AB$, $t = CB$; 2° $u = AD$, $t = DE$; 3° $u = AF$, $t = FG$, e aſſim por diante, teremos tantas equações para determinar a, b, c, quantos ſaõ os pontos dados; e ſubſtituindo os valores em $t = a + bu + cu^2 +$ &c., acharemos a equaçaõ approximada da curva, que paſſa pelos pontos C, E, G, &c. Pondo entaõ por u a diſtancia AH, teremos o valor correſpondente de t ou IH; e reciprocamente.

Seguindo o meſmo procedimento, podemos imitar o contorno ABCDEF (*Fig.* 77) de qualquer curva traçada ao acaſo (282). Para iſſo abaixaremos dos differentes pontos A, B, C, D, &c. perpendiculares ſobre a linha determinada XZ, que ſe toma por linha das abſciſſas, e acharemos, como acabamos de enſinar, a equaçaõ de huma curva que paſſe pelos meſmos pontos; por meio della pois ſe calcularaõ as perpendiculares intermedias com tanto maior approximaçaõ, quanto maior for o numero dos pontos A, B, C, D, &c. que houvermos tomado.

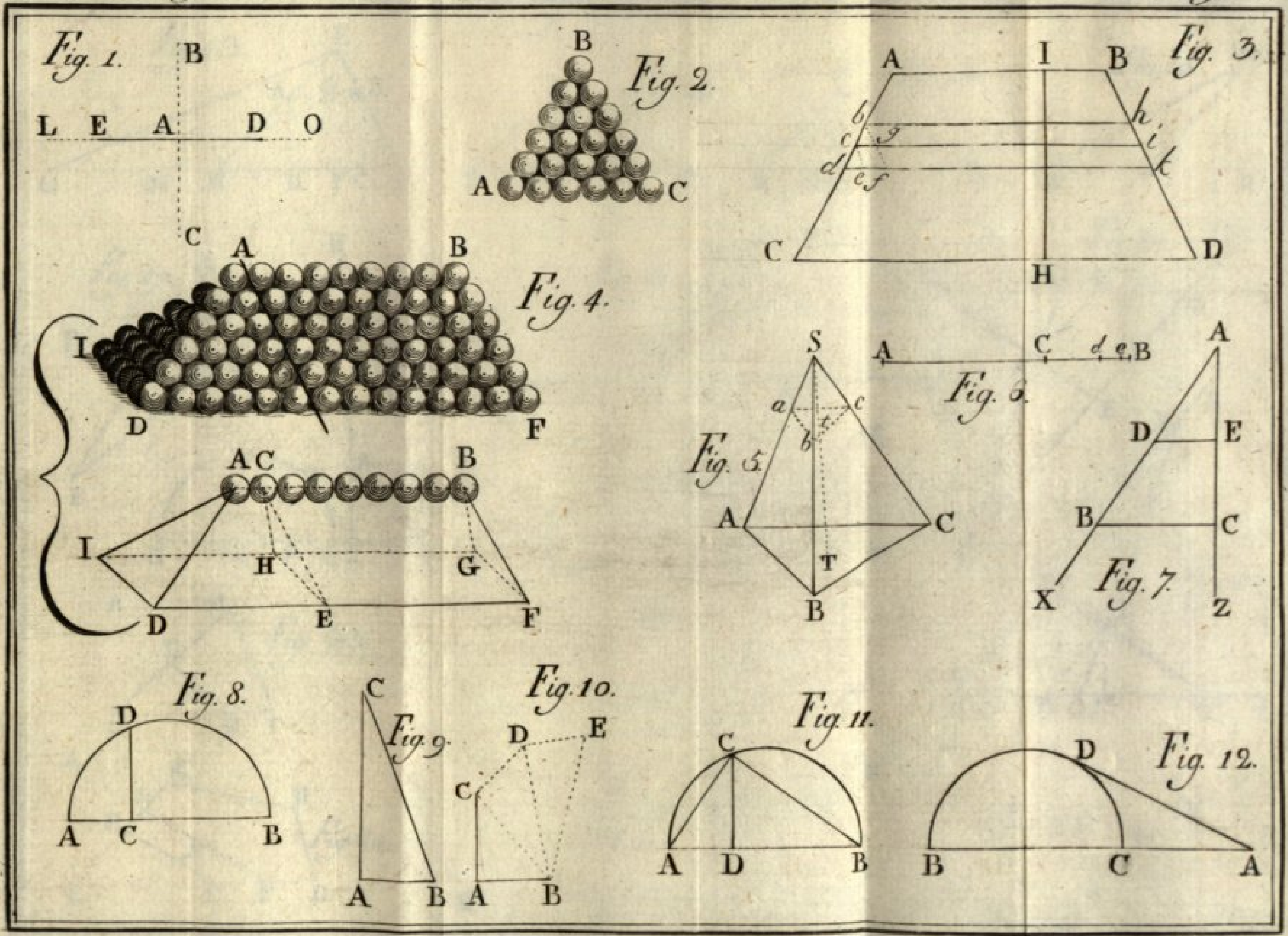


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Fig. 12.

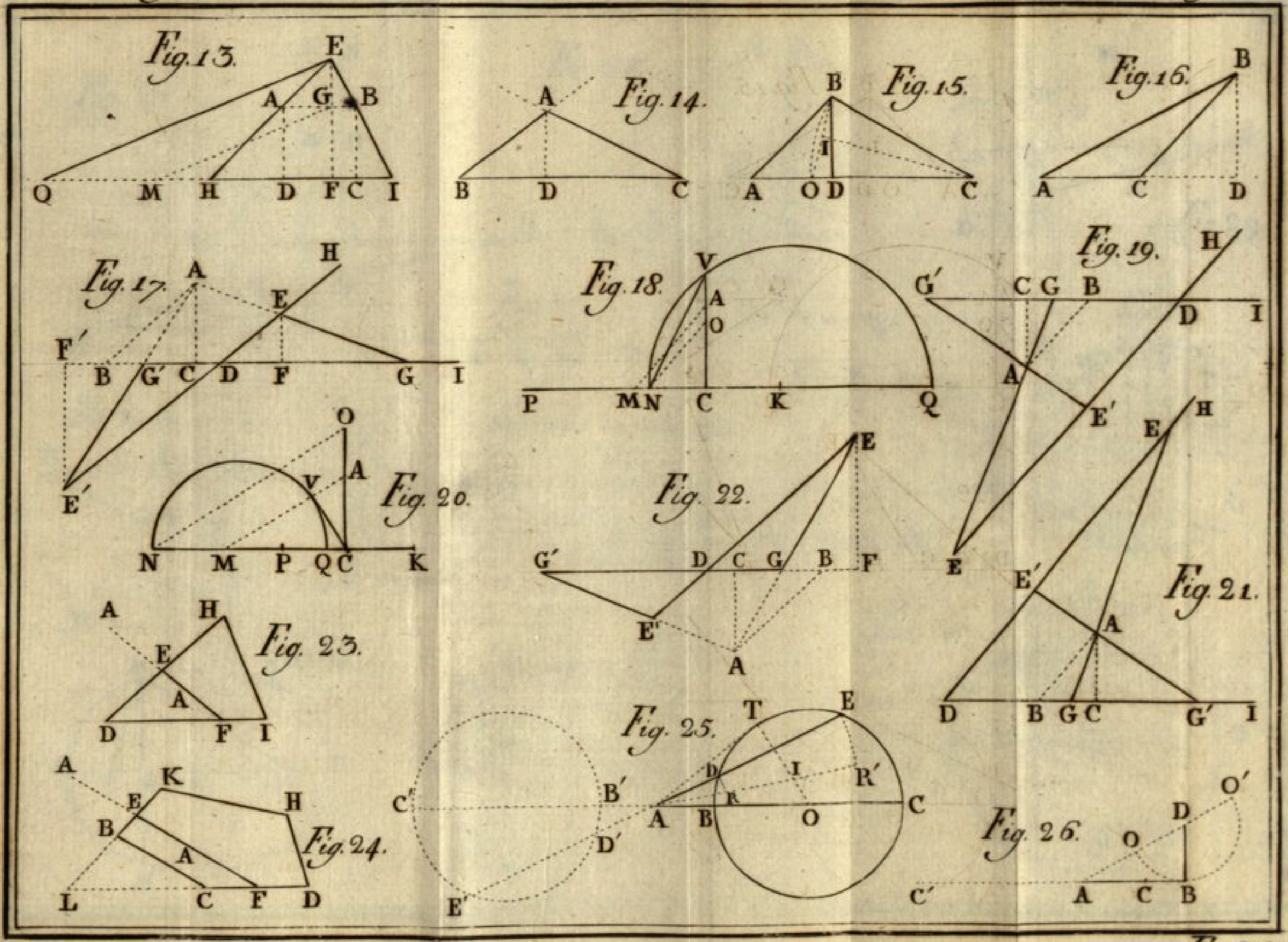


Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

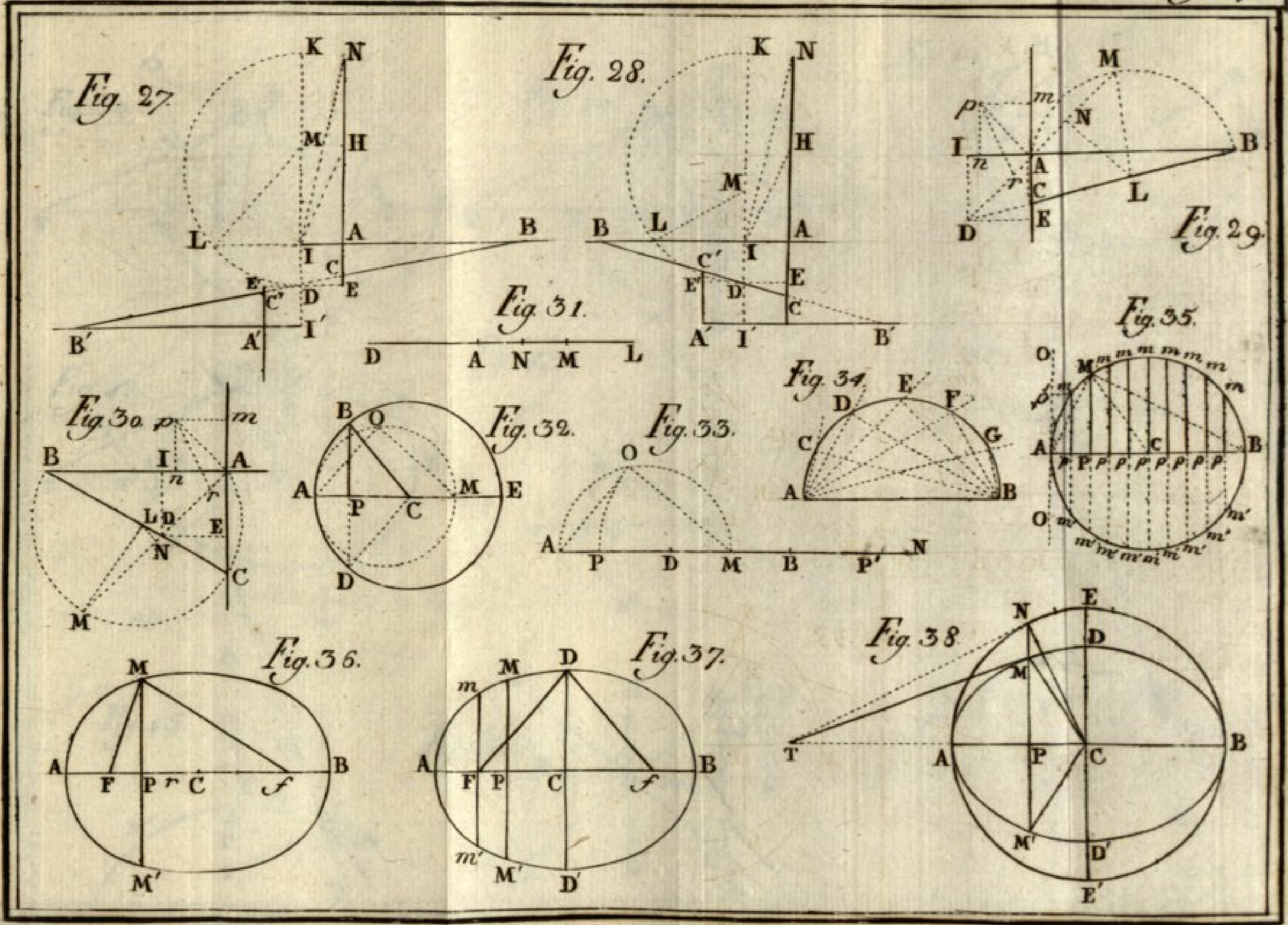
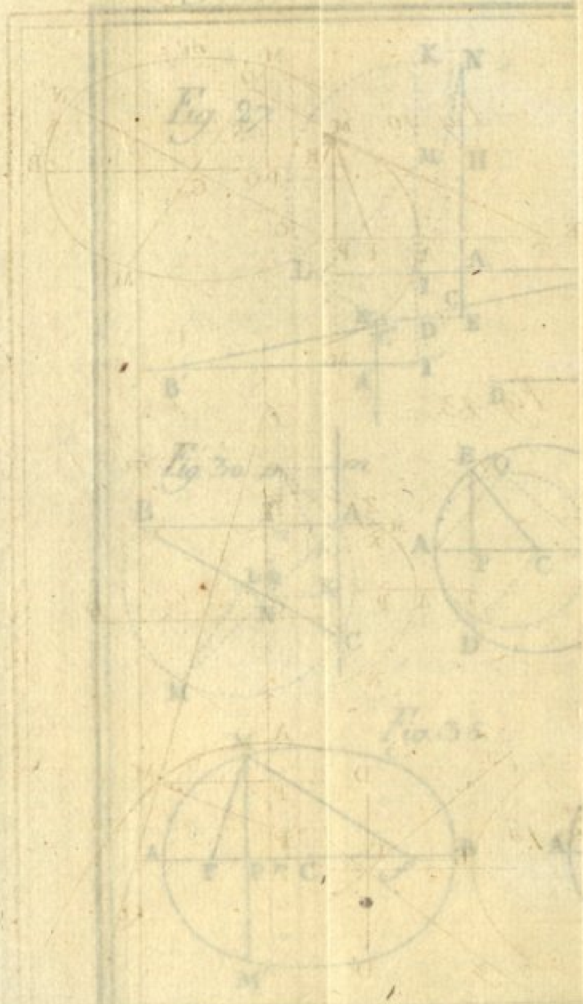


Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.

Algebra Tab. III



Algebra Est. IV.

Fig. 39.

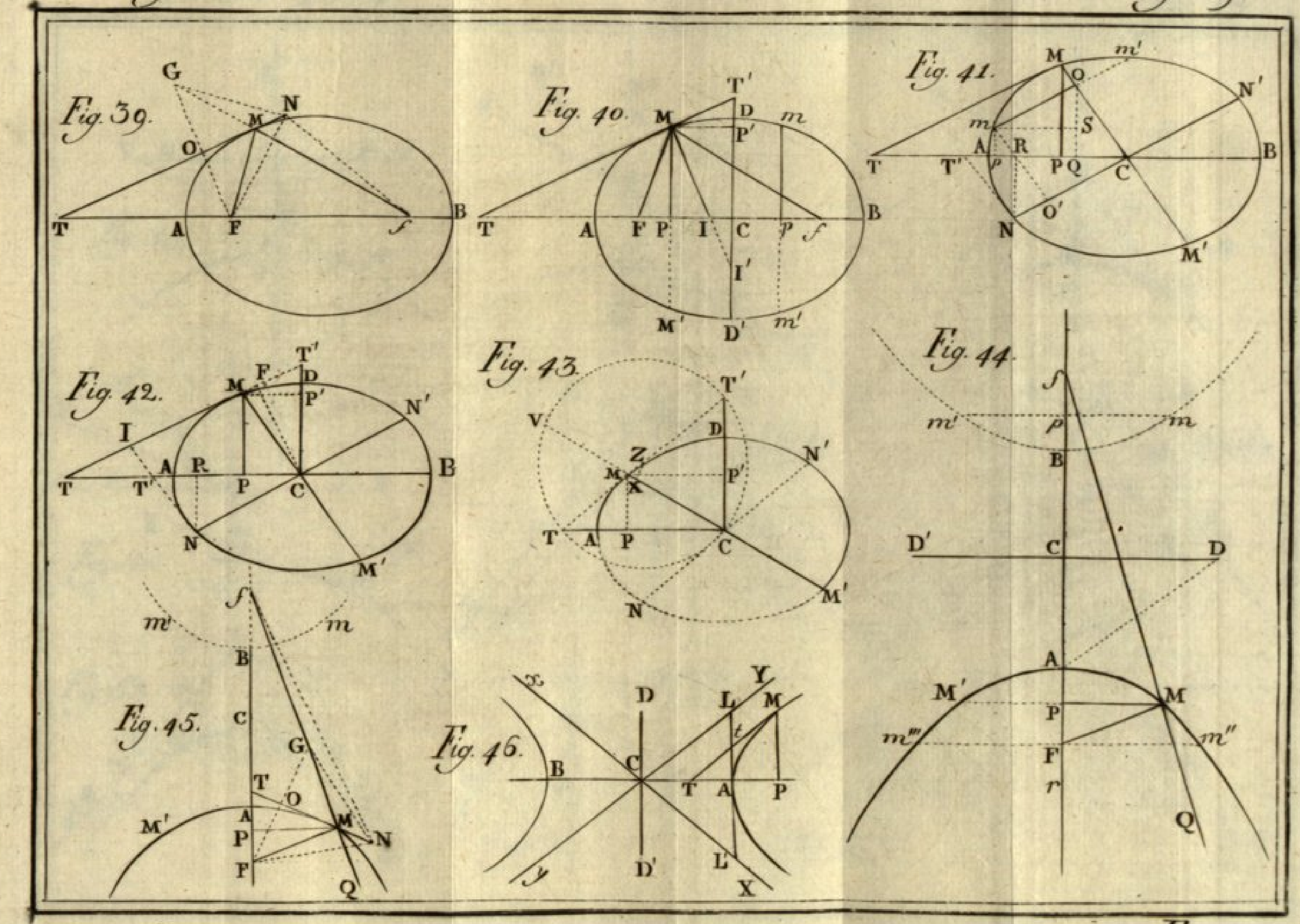


Fig. 46.

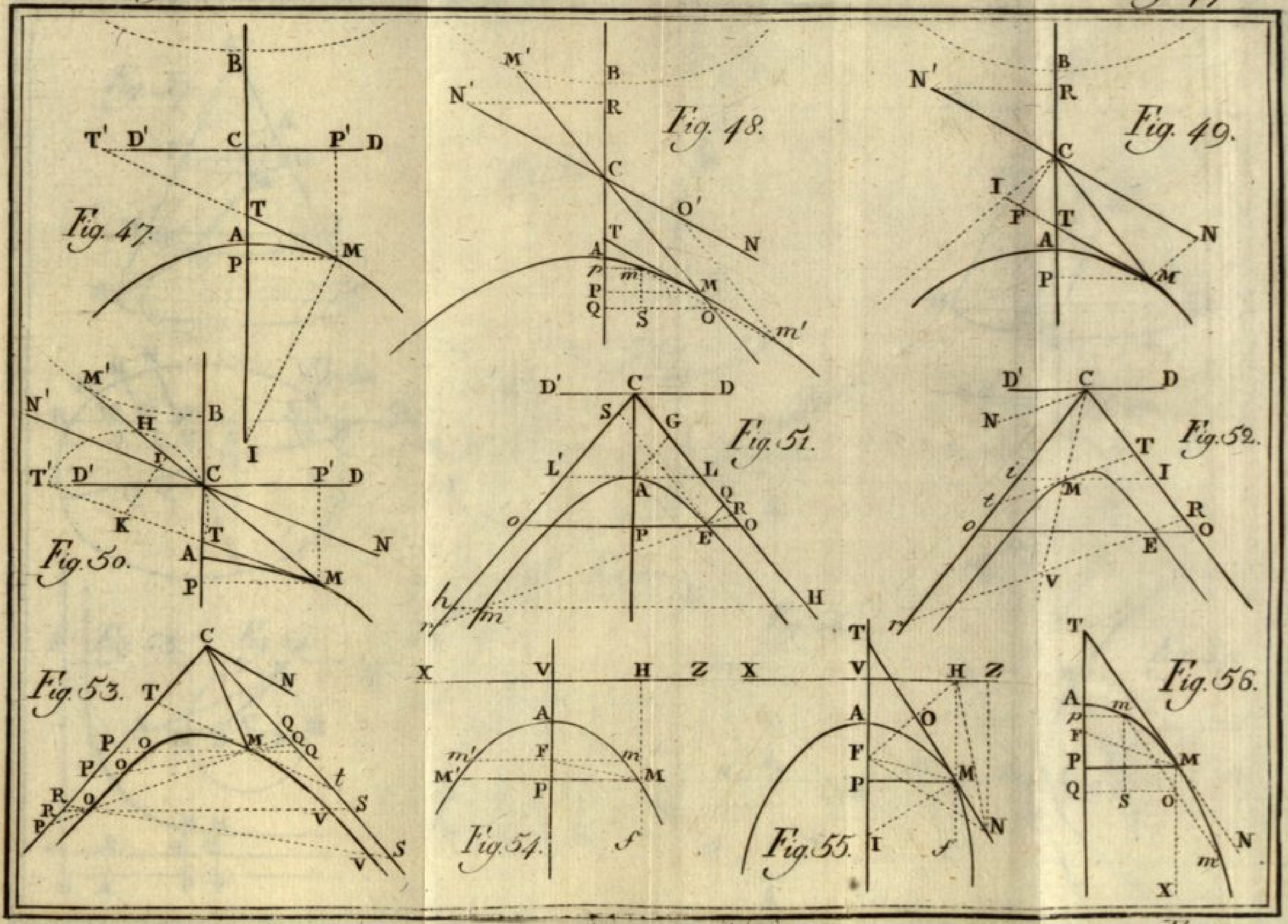
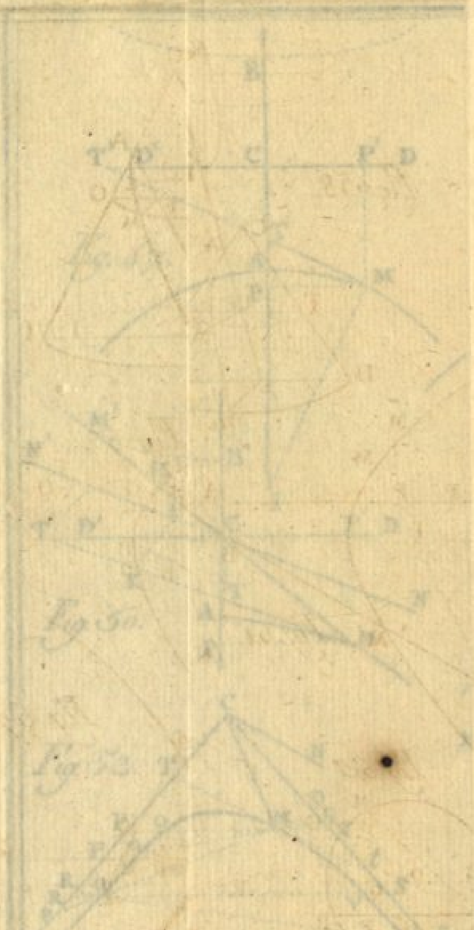


Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.

Algebra Tab. V



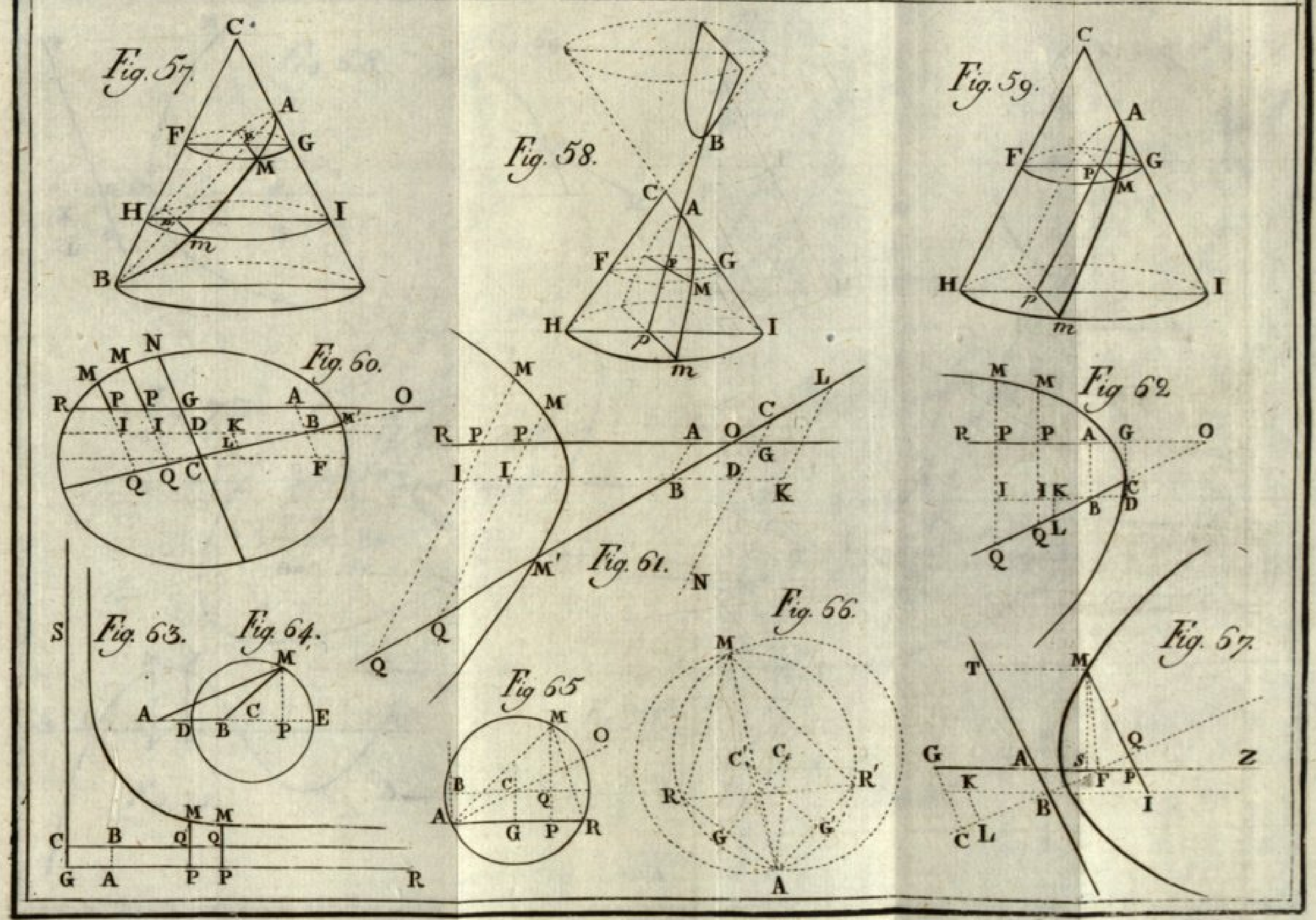
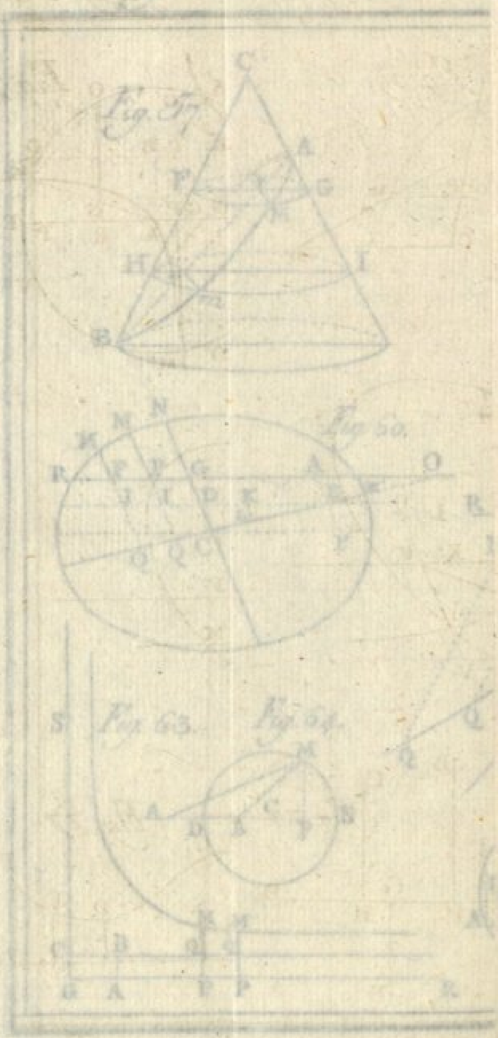


Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig 62
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig 65
Fig. 66.
Fig. 67.

Algebra Tab. VI.



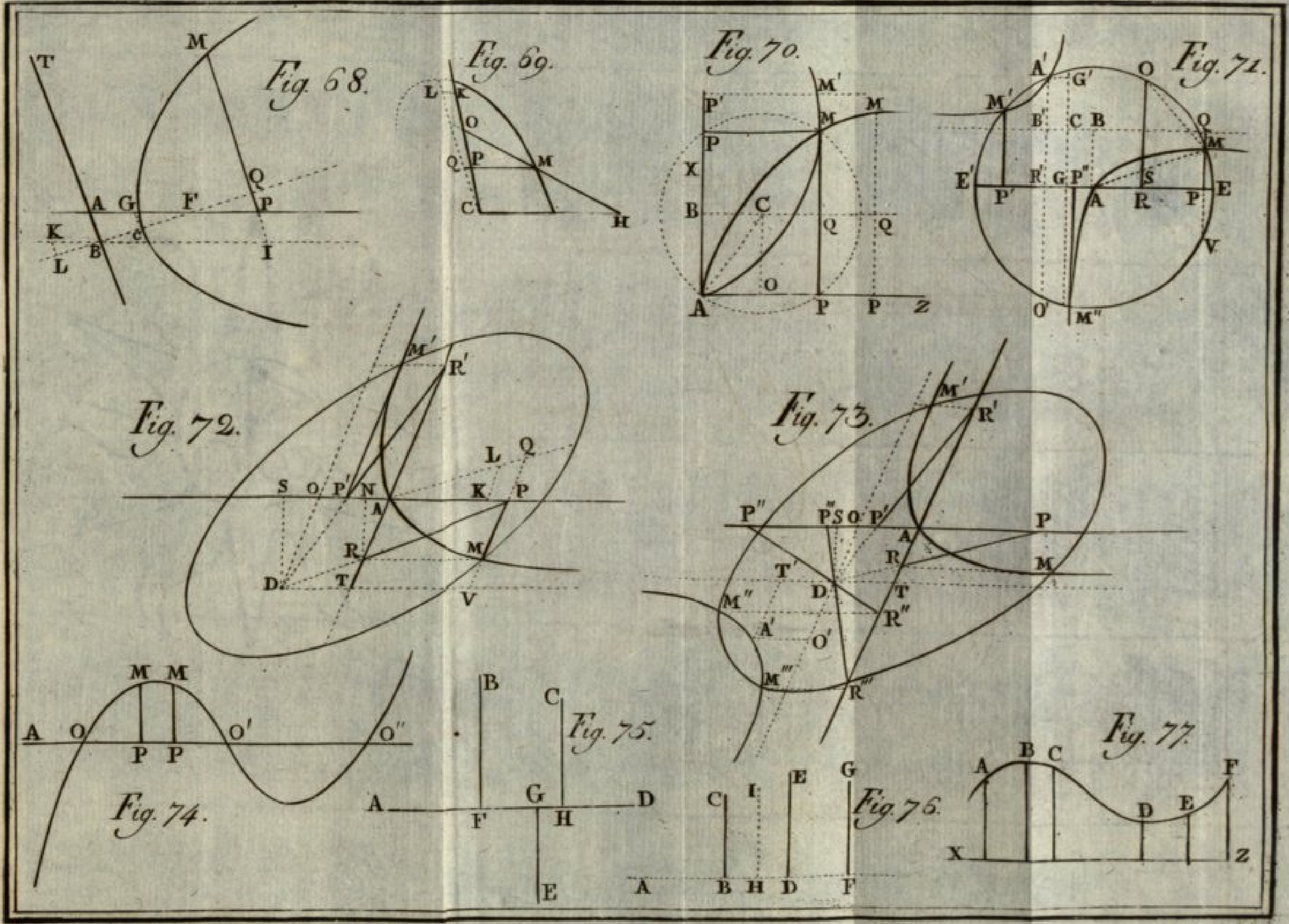


Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.

Algebra

DEVOUT
[illegible]

I