

7

58

39

23

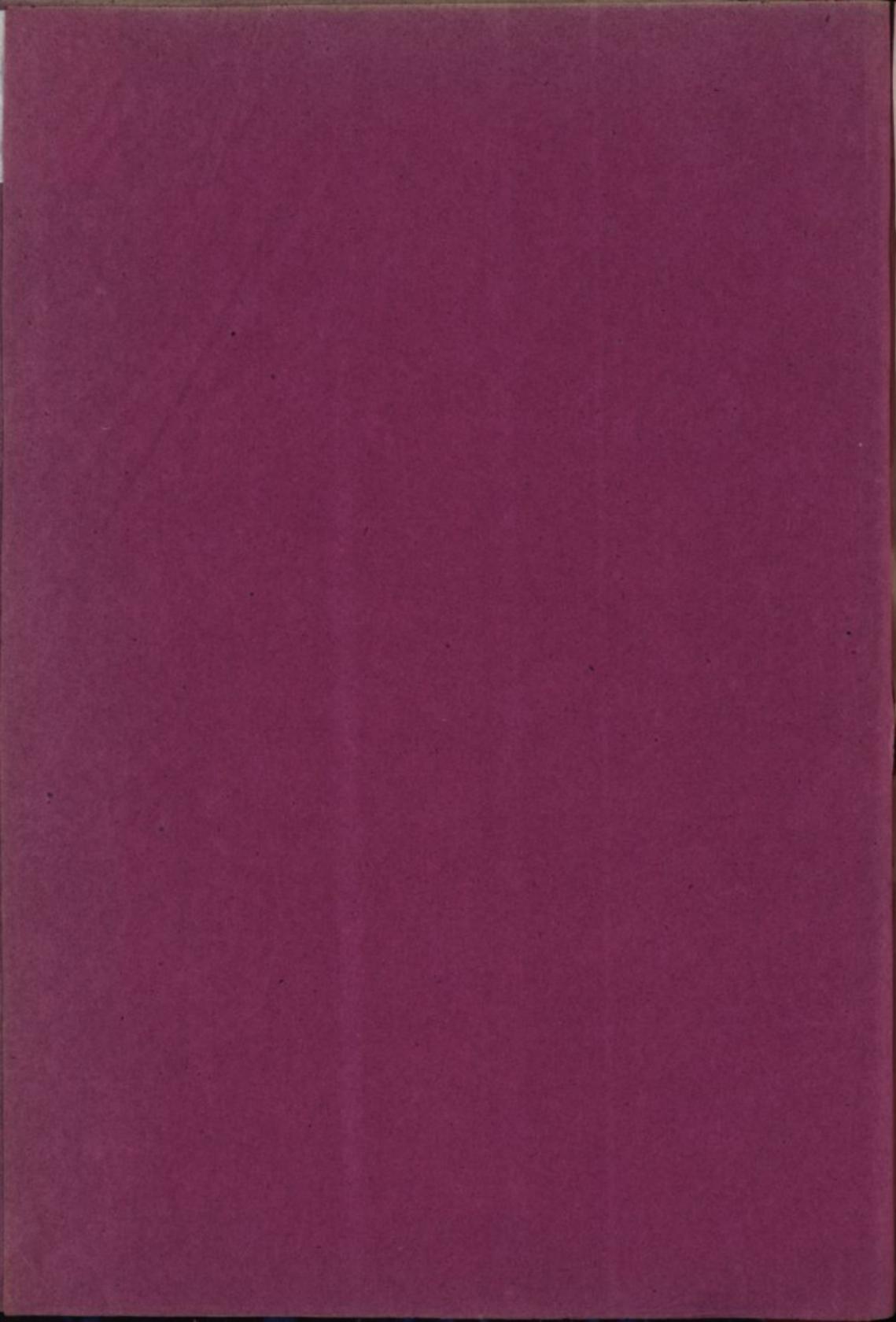
7

58

39

23

THE
HISTORY
OF
ASTRONOMY
IN
CHINA



ELEMENTOS

ASTRONOMIA

PELO CONSELHEIRO

THEOPHILUS ROSEIRO DE SOUSA PINTO

ELEMENTOS DE MATHEMATICA

DE

ASTRONOMIA

TOMO II

COIMBRA

IMPRESSA DA UNIVERSIDADE

1873

ALPHABETUM

Coeli enarrant gloriam Dei, et opera manuum ejus annuntiat firmamentum.

Ps. XVIII, 2.

ASTRONOMIA

TOMI II

7
58
39
23

ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

PELO CONSELHEIRO

RODRIGO RIBEIRO DE SOUSA PINTO

LENTE DE PRIMA JUBILADO DA FACULDADE DE MATHEMATICA

E DIRECTOR DO OBSERVATORIO ASTRONOMICO

DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

TOMO II



COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1873

ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

PELO CONSULHEIRO

RODRIGO RIBEIRO DE SOUZA PIETRO

LEITE DE PRIMA LIBRADO DA FACULDADE DE MATHEMATICA

E DIRECTOR DO OBSERVATORIO ASTRONOMICO

DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

TOMO II



COIMBRA

IMPRESSA DA UNIVERSIDADE

1873

ELEMENTOS

SEGUNDA PARTE

ASTRONOMIA

SEGUNDA PARTE

No primeira parte determinamos as posições dos planetas, e que se referem immediatamente as observações; descrevemos os instrumentos próprios para as fazer; e tractamos das correções que devam applicar-se aos resultados d'ellas.

Assim preparados, estudamos os movimentos dos corpos celestes: começando pelo estudo dos movimentos do Sol, que por sua importância merece para nós o primeiro lugar.

SEGUNDA PARTE

SECÇÃO PRIMEIRA

THEORIA DO SOL

CAPITULO I

Primeira determinação da orbita solar

1. Sejam: z_i , z^s , as distancias zenithaes meridianas dos bordos inferior e superior do Sol; r_i , r^s , as refrações correspondentes; ω a parallaxe de altura do centro; e D a colatitude do lugar da observação Chamando z a distancia zenithal meridiana apparente do centro do Sol e Δ a sua distancia polar, $90^\circ - d$, é (*)

$$z = \frac{z_i + z^s + r_i + r^s}{2}, \Delta = D + z - \omega \dots (1).$$

2. Seja t o intervallo de tempo sideral decorrido desde a passagem meridiana d'uma estrella, correcta da precessão, da aberração e da nutação, até a passagem seguinte do Sol. No instante da passagem do centro do Sol, ou ao meio dia verdadeiro, será

$$\text{AR} \ominus - \text{AR}^* = 15 t \cos \delta \dots (2).$$

(*) As distancias zenithaes observadas differem da meridiana, por ser uma tomada um pouco antes, e outra um pouco depois, da passagem meridiana. E as leituras não são rigorosamente as distancias zenithaes observadas, mas sim as projecções d'estas sobre o plano do limbo. É necessario pois reduzir as distancias lidas ás observadas, e estas á meridiana (P. 1.º nn. 129 e 130).

3. As equações (1) e (2) dão, para cada dia ao meio dia verdadeiro, a distancia polar do Sol, e a sua ascensão recta contada desde o plano horario da estrella.

Mas, como para fazer estas observações, se costuma tomar o instante em que o segmento luminoso, separado pelo fio do reticulo, se reduz a um ponto, as distancias zenithaes assim tomadas precisam d'uma correção, egual ao semi-diametro apparente f do fio, subtractiva de z^s e additiva a z_i ; e os toques no fio vertical precisam similhantemente d'outra correção, egual á semi-duração da passagem d'um ponto do Sol pelo fio.

Estas correções não alteram a distancia zenithal do centro, nem o tempo da sua passagem; mas o semi-diametro apparente será

$$\text{semid. app. } \Theta = \frac{z_i + r_i - z^s - r^s}{2} + f. \dots (3).$$

Se nas distancias zenithaes se tomarem os contactos externos do fio com os bordos, o termo f mudará de signal.

4. Applicando as fórmulas (1), (2), (3) ás observações feitas por Mathieu e Bouvard no anno de 1807, no Observatorio nacional de Paris, cuja latitude se suppõe de $48^\circ 50' 14''.0$, resulta a tabella seguinte, reduzida pelo sr. Folque á divisão sexagesimal (Folque, Astron.).

As declinações boreaes são precedidas do signal +, e as austraes do signal —.

As passagens da estrella são correctas das variações da precessão, aberração e nutação desde o primeiro de Janeiro de 1807, para considerar como invariaveis as suas coordenadas desde esse dia.

Datas	Diametro apparente do Sol	Declinação do Sol	Tempo decorrido desde a passagem meridiana da lyra até a seguinte do Sol
1806			
Dezembro			
18	32.34",59	-23°.24'.6",32	23.11.58",91
20	32.34",98	23.27.0",79	23.20.51",65
22	32.35",60	23.27.53",67	23.29.44",74
27	32.35",60	23.21.53",15	23.51.57",28
1807			
Janeiro			
1	32.35",60	23.4.11",83	0.14.6",37
2	32.35",60	22.59.14",30	0.18.2",65
9	32.35",21	22.12.4",45	0.49.16",35
10	32.35",21	22.3.32",89	0.53.37",97
11	32.35",02	21.54.34",98	0.57.58",98
25	32.32",42	19.6.54",62	1.57.41",39
28	32.31",81	17.21.24",08	2.10.13",84
Fevereiro			
3	32.29",99	16.42.0",21	2.34.43",85
7	32.28",60	15.29.36",50	2.50.50",67
11	14.13.13",98	3.6.44",61
13	32.26",40	13.33.29",47	3.14.36",79
15	32.25",59	12.52.56",87	3.22.26",89
16	32.25",20	12.32.20",65	3.26.19",13
26	32.20",60	8.56.40",00	4.4.34",61
Março			
1	32.19",20	7.48.59",63	4.15.51",29
3	32.18",20	7.3.21",34	4.23.19",97
17	32.10",81	1.35.29",55	5.14.55",59
19	32.9",19	0.48.6",61	5.22.12",95
20	32.8",80	0.24.24",61	5.25.51",37
21	32.8",61	-0.0.50",45	5.29.29",62
22	32.8",19	+0.22.52",95	5.33.7",69

Datas	Diametro aparente do Sol	Declinação do Sol	Tempo decorrido desde a passagem meridiana da lyra até á seguinte do Sol
1807			
Março			
23	32'. 7",61	+ 0°.46'.34",69	5 ^h .36'.45",68
25	32. 6 ,41	1 .33.48 ,30	5 .44. 1 ,56
Abril			
8	31.58 ,79	6 .52.41 ,05	6 .34.57 ,27
9	31.58 ,21	7 .20.36 ,29	6 .38.36 ,47
25	31.49 ,79	12 .58.23 ,76	7 .37.50 ,02
Maió			
1	14 .52.30 ,30	8 . 0.31 ,25
2	31.46 ,42	15 .10.37 ,71	8 . 4.19 ,86
16	31.40 ,39	18 .56.56 ,77	8 .58.41 ,64
17	31.40 ,00	19 .10.48 ,55	9 . 2.38 ,89
25	31.37 ,21	20 .50. 2 ,89	9 .34.35 ,85
27	31.36 ,40	21 .11.25 ,05	9 .47.40 ,46
Junho			
12	31.32 ,81	23 . 7.28 ,56	10 .48.19 ,44
13	31.32 ,61	23 .11.19 ,99	10 .52.28 ,19
20	31.31 ,61	23 .27.10 ,87	11 .21.34 ,16
22	31.31 ,61	23 .27.53 ,25	11 .29.51 ,30
24	31.31 ,41	23 .26.59 ,37	11 .38.10 ,35
Julho			
9	31.31 ,19	22 .28.23 ,38	12 .40.12 ,20
10	31.31 ,41	22 .21.12 ,75	12 .44.19 ,84
11	22 .13.45 ,99	12 .48.23 ,13
22	31.32 ,81	20 .26.52 ,99	13 .32.48 ,65
25	31.33 ,39	19 .50.39 ,80	13 .44.44 ,39
28	13 .56.34 ,94
Agosto			
10	31.37 ,41	15 .47.51 ,59	14 .46.53 ,07
11	31.37 ,80	15 .30.23 ,45	14 .50.41 ,08
12	31.38 ,19	15 .12.37 ,49	14 .54.28 ,40

Datas	Diametro aparente do Sol	Declinação do Sol	Tempo decorrido desde a passagem meridiana da Lyra até á seguinte do Sol
1807			
Agosto			
20	31.41,20	+12.42.12,21	15.24.27,16
23	31.42,59	11.42.18,57	15.35.33,39
Setembro			
1	31.43,98	10.42.25,42	16.0.0,00
3	31.47,39	7.49.24,38	16.15.46,54
4	31.48,00	7.27.20,91	16.19.24,00
16	31.55,59	2.55.6,64	17.2.37,22
17	31.56,59	2.31.55,06	17.6.12,61
21	31.57,40	0.58.53,71	17.20.34,20
22	0.35.30,01	17.24.9,68
23	+0.12.5,99	17.27.45,33
Outubro			
3	32.3,20	-3.42.4,56	18.3.52,50
4	32.3,59	4.5.18,93	18.7.30,66
19	32.12,01	9.45.0,90	19.2.52,48
20	32.12,60	10.6.45,22	19.6.38,16
25	32.15,19	11.53.8,57	19.25.36,91
Novembro			
2	14.33.34,00	19.57.10,31
3	14.52.38,98	20.0.33,24
Dezembro			
3	11.18,18	22.4.56,55
8	32.32,59	22.40.35,04	22.26.44,56
10	32.32,59	22.52.41,38	22.35.31,26
17	32.34,40	23.21.23,02	23.6.26,78
18	32.34,59	23.23.39,91	23.10.52,81
1808			
Janeiro			
4	32.35,21	22.49.25,78	0.26.16,89
6	32.35,21	22.36.53,73	0.35.4,03

5. O exame da tabella, mostra: que a declinação é negativa e decrescente desde 22 de Dezembro até 21 de Março, positiva e crescente desde 21 de Março até 22 de Junho, positiva e decrescente desde 22 de Junho até 23 de Setembro, negativa e crescente desde 23 de Setembro até 22 de Dezembro; que toca o seu maximo valor nas proximidades de 22 de Dezembro e 22 de Junho, sendo sensivelmente a mesma nestas duas epochas; que é nulla nas proximidades de 21 de Março e 23 de Setembro; e que toma valores sensivelmente eguaes nas epochas equidistantes das maximas declinações.

Em quanto ás ascensões rectas, vê-se: que vão crescendo desde 0^h até 24^h; e que as dos pontos, cujas declinações, ambas crescentes ou ambas decrescentes, são eguaes, differem entre si pouco mais ou menos 12^h.

Assim a orbita do Sol parece ser uma curva fechada plana, cujo plano passa pelo centro da terra. É o que mais rigorosamente iremos vendo.

6. Para achar as ascensões rectas e as declinações correspondentes a tempos differentes dos meios dias verdadeiros das observações, e para determinar os pontos notaveis da orbita, temos pela formula ordinaria da interpolação, parando nas differenças segundas:

$$\begin{array}{l} \text{Funções} \dots\dots\dots f, f', f'' \quad f' - f = \delta, \quad \frac{f'' - f'}{i' - i} = \delta', \quad \frac{\delta' - \delta}{i'' - i'} = \delta''; \\ \text{Raizes} \dots\dots\dots i, i', i'' \quad i' - i \end{array}$$

e, para a raiz t , a funcção

$$y = f + (t - i) \delta + (t - i)(t - i') \delta^2 \dots \dots (4).$$

D'esta equação tira-se:

1.º Para $y = 0 \dots \dots \dots t = i - \frac{f}{\delta + (t - i') \delta^2} \dots \dots (a)$

2.º Para y maximo, ou $\frac{dy}{dt} = 0, \dots t = \frac{i' + i}{2} - \frac{\delta}{2\delta^2}, y = f - (t - i)^2 \delta^2 \dots (b)$

3.º Movimento effectivo em uma unidade de tempo desde t até $t + 1$ $y' - y = \delta + (2t + 1 - i - i')\delta^2 \dots (c)$

4.º Movimento virtual em uma unidade de tempo $m = \frac{dy}{dt} = \delta + (2t - i - i')\delta^2 \dots (d)$

que para a epocha i é $m = \delta - (i + i')\delta^2 \dots (5)$

As formulas (b), applicadas ás tres declinações proximas, cujas differenças têm signaes contrarios, darão os instantes dos solsticios e as maximas declinações. A formula (a), applicada ás declinações quando mudam de signal, dará os instantes dos equinoccios.

7. Quando nos equinoccios as observações se fazem em dias consecutivos, é escusado attender ás differenças segundas.

Suppondo que se tomam duas declinações consecutivas, uma $+ d'$ correspondente ao tempo i' , outra $- d$ correspondente ao tempo i , e chamando α a ascensão recta do ponto equinoccial, e t o tempo da entrada do centro do sol 'nelle, teremos:

- Tempos do relógio i, t, i' ;
- AR do \odot , contadas do meridiano da estrella, A, α, A' ;
- Declinações do \odot $-d, o, d'$.

Então a formula (a), applicada ás declinações, e depois a formula (4) applicada ás ascensões rectas, darão:

$$\left. \begin{aligned} (b) \dots t = i + (i' - i) \frac{d}{d' + d} = \frac{id' + i'd}{d' + d} \\ (c) \dots \alpha = A + (A' - A) \frac{d}{d' + d} = \frac{Ad' + A'd}{d' + d} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

8. Se o relógio marca exactamente intervallos de tempo sideral, as diferenças de ascensão recta A, A' , são numeros da ultima columna da tabella. Mas se o relógio não estivesse bem regulado pelo tempo sideral, seria necessario reduzir estes numeros a diferenças de ascensão recta.

Sejam θ^h, θ'^h , dois intervallos entre as passagens meridianas consecutivas da estrella e do Sol, marcadas pelo relógio. O retardamento do Sol sobre a estrella será $i' - \theta$; e como $i' - i$ é o dia solar expresso em tempo do relógio, será $i' - i - (i' - \theta)$ o dia sideral expresso na mesma especie de tempo (*). Portanto é $\frac{24}{i' - i - (i' - \theta)} = F$ o factor de conversão de qualquer numero de horas do relógio em horas sideraes; e a ascensão recta da estrella, contada do ponto de γ , é, pela segunda formula (6),

$$AR_* = 24^h - \alpha = 24^h - F \frac{d'\theta + d\theta'}{d' + d}.$$

9. Costuma-se tomar o instante da passagem de γ pelo meridiano como origem do tempo sideral absoluto. Por isso, chamando T o tempo do relógio da passagem meridiana da estrella, o tempo do relógio correspondente ao tempo sideral absoluto 0 , que é o da passagem de γ , será

$$T + \frac{\alpha}{F} = T + \frac{d'\theta + d\theta'}{d' + d}.$$

E ficará assim conhecido o estado absoluto do relógio relativamente ao tempo sideral.

10. Supponhamos que a orbita é plana. Então, chamando ω a in-

(*) Para ver isto mais claramente, temos

$$i = 1.^{\text{a}} \text{ pass. da } * + \theta, \quad i' = 2.^{\text{a}} \text{ pass. da } * + \theta';$$

por conseguinte $i' - i = \text{dia sideral} + \theta - \theta'.$

clinação do plano d'ella sobre o do equador, ou a maxima declinação, e $15 (A - \alpha) = a$ a ascensão recta do Sol contada de γ , deve ser

$$\text{tang } \omega \text{ sen } \alpha = \text{tang } d \dots \dots \dots (7).$$

Portanto, se com as observações feitas nos equinoccios e nos solsticios determinarmos α e ω , como fica dicto nos numeros precedentes, e os substituímos nesta equação com os diversos valores de A deduzidos da ultima columna da tabella, os valores resultantes de d deverão coincidir com os da penultima columna. É com effeito o que acontece.

11. Em geral duas observações feitas em quaesquer epochas devem dar, por meio de formulas trigonometricas, os dois elementos α e ω .

Com effeito, chamando A e d , A' e d' , as duas ascensões rectas referidas á estrella de comparação e as declinações correspondentes, teremos

$$\text{tang } d = \text{tang } \omega \text{ sen } (A - \alpha), \quad \text{tang } d' = \text{tang } \omega \text{ sen } (A' - \alpha),$$

que dão

$$\frac{\text{sen } (A' - \alpha) - \text{sen } (A - \alpha)}{\text{sen } (A' - \alpha) + \text{sen } (A - \alpha)} = \frac{\text{tang } d' - \text{tang } d}{\text{tang } d' + \text{tang } d};$$

e por conseguinte, fazendo

$$\frac{A' + A}{2} - \alpha = k,$$

teremos :

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } k &= \text{tang } \left(\frac{A' - A}{2} \right) \frac{\text{sen } (d' + d)}{\text{sen } (d' - d)}, \\ \alpha &= \frac{A' + A}{2} - k, \quad \text{tang } \omega = \frac{\text{tang } d}{\text{sen } (A - \alpha)} = \frac{\text{tang } d'}{\text{sen } (A' - \alpha)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (8).$$

12. Se as observações se fizerem tão perto do equinoccio que se possam desprezar os cubos de $A - \alpha$, $A' - \alpha$, d' , d , a primeira das equações (8) dará

$$\alpha = \frac{A' + A}{2} - \frac{A' - A}{2} \frac{d' + d}{d' - d} = A - (A' - A) \frac{d}{d' - d};$$

que é a segunda formula (6), suppondo a declinação d negativa.

Estas observações feitas perto dos equinoccios são as mais proprias para determinar α ; assim como as feitas nos solsticios são as mais proprias para determinar ω : e por isso começamos no n.º 6 por usar d'ellas (*).

Exemplos

1.º Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 21 de Março de 1807, a tabella dá:

	d	A
0 ^h ,000000	0º. 0'.50'',45 austr.	5 ^h .29 ^m .29 ^s ,62
1,002524	0.22.52,95 bor.	5.33.7,69

E com estes numeros acha-se pelas formulas (6) do n.º 7, para o

(*) Com effeito, da equação (7) tiram-se

$$\delta\omega = \frac{\text{sen } 2\omega}{\text{sen } 2d} \cdot \delta d - \frac{\text{sen } 2\omega}{2} \cot a \cdot \delta a, \quad \delta a = \frac{\cot \omega}{\cos a \cos^2 d} \cdot \delta d.$$

A primeira d'estas mostra, que os erros da declinação e da ascensão recta influem muito na obliquidade, quando as observações são proximas dos equinoccios; e a segunda mostra, que o erro da declinação influe muito na determinação do tempo dos equinoccios, quando as observações são proximas dos solsticios.

equinoccio da Primavera.

$$t = 0^d,035533; \alpha = 5^h.29^m.37^s,35:$$

sendo t contado desde a epocha em tempo sideral.

2.º Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 23 de Setembro, a tabella dá:

	0',000000	0°.12'. 5'',99 bor.	17 ^h .27 ^m .45 ^s ,33
	10,025083	3 .42. 4 ,56 austr.	18 . 3 .52 ,50
/7	11,027608	4 . 5.18 ,93 austr.	18 . 4 .30 ,66

Com estes numeros acha-se, para o equinoccio do Outomno, pela formula (a) do n.º 6, e depois pela formula (4) do mesmo numero applicada ás ascensões rectas (*):

$$t = 0^d,514612, \alpha' = 17^h.29^m.35^s,94.$$

Com os dois primeiros as formulas (8) dariam $\alpha' = 17^h.29^m.36^s,76$.

3.º Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 20 de Dezembro de 1806, a tabella dá:

0,000000	23° 27'. 0'',79
2,006170	23 .27 .53 ,67
7,021593	23 .21 .53 ,15

(.) Se se attendesse ás diferenças terceiras, usando tambem da observação de 19 de Outubro, a formula

$$t = \frac{f}{\delta - (i' - t)\delta^2 + (i'' - t)(i' - t)\delta^3}$$

daria

$$t = 0^d,51594, \alpha' = 17^h.29^m.36^s,37.$$

E com estes numeros acha-se, pelas formulas (b),

$$t = 1^d,94506, \omega = 23^{\circ}.27'.53'',72.$$

Similhanamente, fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 20 de Junho de 1807, acha-se

$$t = 1^d,88595, \omega = 23^{\circ}.27'.53'',42.$$

4.º Se para determinar α e ω usarmos das observações feitas em epochas differentes dos equinoccios e dos solsticios, por exemplo das de 16 de Maio e 25 de Outubro, teremos

$$A = 8^h,978232, d = + 18^{\circ}.56'.56'',77,$$

$$A' = 19,426920, d = - 11.53.8,57.$$

E as formulas (8) do n.º 11 darão (*):

$$\alpha = 5^h.29^m.36^s,03; \omega = 23^{\circ}.27'.53'',67.$$

5.º Fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 22 de Dezembro de 1806, e desprezando as variações dos dias solares consecutivos, temos, para as ascensões rectas,

i0	5	10
A.....23,495760	23,865912	24,235104.

(*) Como tang k pertence aos dois arcos k e $180^{\circ} + k$, resultam para α dois valores α_1 e $\alpha_1 + 12^h$, correspondentes aos dois equinoccios. Tomar-se-ha por α o valor α_1 ou α_2 que der ω positivo; e por α' o outro.

E a formula (c) do n.º 6 dá o movimento em ascensão recta no dia solar, de 22 a 23 de Dezembro, $0^h,074107$.

Similhantermente acharemos que a variação da ascensão recta no dia solar de 16 a 17 de Setembro de 1807 é $0^h,059832$.

6.º Desprezando as variações dos dias solares consecutivos, e fazendo epocha no meio dia verdadeiro de 18 de Dezembro de 1807, a tabella dá:

$i \dots\dots 0$	17	19
A $\dots\dots 23,181336$	$24,438025$	$24,584153$.

E com estes numeros, tomando $f = 23,181336$, $y = 23,199697$, acha-se, em tempo solar, pela formula (4) do n.º 6,

$$t = \frac{y - f}{\delta - (i' - t) \delta^2} = 0^d,2463.$$

13. Chama-se *anno tropico* o intervallo de tempo, no fim do qual o Sol retoma a ascensão recta que tinha no principio. Este anno é pois de $365^d,2463$.

O mesmo anno expresso em tempo sideral deve ter mais um dia, porque a estrella volta á conjuncção em ascensão com o Sol depois de ter descripto mais uma circumferencia do que elle. Por isso temos

$$365,2463.1 \text{ dia sol.} = 366,2463.1 \text{ dia sid.};$$

d'onde resulta (*)

$$\text{dia sid.} = \text{dia sol.} - 235'',907 \text{ solares}$$

$$\text{dia sol.} = \text{dia sid.} + 236'',553 \text{ sideraes.}$$

(*) Adiante veremos que é mais exactamente o anno tropico $365^d,242264$; d'onde resulta:

$$\text{dia sid.} = \text{dia sol.} - 235'',9094 \text{ solares,}$$

$$\text{dia sol.} = \text{dia sid.} + 236'',5553 \text{ sideraes.}$$

Esta differença entre o dia solar e o sideral é, como deve ser, o valor medio das variações diurnas das ascensões rectas do Sol, calculadas pelo processo que se seguiu no exemplo 5.º E d'ella se deduz:

$$1'' \text{ med.} = 1'' \text{ sid.} + 0'',0027; 1' \text{ med.} = 1' \text{ sid.} + 0'',164.$$

14. Determinados o instante do equinoccio da Primavera, e a obliquidade da ecliptica, podem calcular-se as longitudes por qualquer das formulas (*):

$$\text{sen } l = \frac{\text{sen } d}{\text{sen } \omega}, \quad \text{cos } l = \text{cos } a \text{ cos } d, \quad \text{tang } l = \frac{\text{tang } a}{\text{cos } \omega}.$$

Devemos porém advertir que, em virtude de causas de que logo falaremos, o Sol não descreve uma curva perfeitamente plana. Por isso a projecção d'este astro na esphera celeste é dada: pela sua longitude contada no plano da ecliptica, do qual pouco se affasta, para o norte e para o sul, durante um anno; e pela sua pequena *latitude*.

(*) Na primeira formula influirão muito na longitude, perto dos solsticios, os erros da declinação; mas na segunda e na terceira não poderão influir consideravelmente os erros de ascensão recta e declinação. É o que mostram as respectivas equações differenciaes:

$$\delta l = \frac{\delta d}{\text{sen } \omega \text{ cos } a}, \quad \delta l = \delta a \text{ cos } \omega + \delta d \text{ cos } a \text{ sen } \omega, \quad \delta l = \frac{\delta a \text{ cos}^2 d}{\text{cos } \omega}.$$

Os erros tabulares influirão muito na primeira formula perto dos solsticios, e na segunda perto dos equinoccios. É o que mostram as respectivas equações differenciaes:

$$\delta_1 l = \frac{e \text{ tang } l}{M \text{ sen } 1''}, \quad \delta_1 l = -\frac{e \text{ cot } l}{M \text{ sen } 1''}, \quad \delta_1 l = \frac{e \text{ sen } 2l}{2 M \text{ sen } 1''};$$

sendo M o modulo dos logarithmos, $M = 0,43429448$.

Attendendo pois ás duas especies de erros, de observações e de táboas, parece mais seguro o uso da terceira formula.

D'ahi vem que, em rigor, quando se pretende determinar a obliquidade ω pelas observações, e quando se calcula a longitude por estas formulas, deve attender-se áquella latitude (*).

(*) 1. A equação

$$\text{sen } d = \text{sen } l \text{ sen } \omega \text{ cos } \lambda + \text{cos } \omega \text{ sen } \lambda$$

differenciada em ordem a d e λ , e fazendo depois $\lambda = 0$, dá (Fig. 1)

$$\delta d = \frac{\text{cos } \omega}{\text{cos } d} \cdot \delta \lambda = \Theta q - \text{SQ}.$$

Chamando pois $d_1 = \Theta q$ a declinação observada, e $\delta \lambda = \Theta S$ a latitude: a declinação, que deve empregar-se nas equações (8), será

$$d = d_1 - \frac{\text{cos } \omega}{\text{cos } d} \delta \lambda \dots \dots \dots (\alpha).$$

Similhantermente, differenciando em ordem a A , d , λ , a equação

$$\text{cos } (A_1 - \alpha) \text{ cos } d = \text{cos } l \text{ cos } \lambda.$$

e fazendo $\lambda = 0$, acharemos

$$\delta a = - \delta d \text{ cos } (A_1 - \alpha) \text{ tang } \omega = - \frac{\text{cos } (A_1 - \alpha) \text{ sen } \omega}{\text{cos } d} \cdot \delta \lambda.$$

E por isso, chamando A_1 a ascensão recta observada, devemos empregar nas mesmas formulas a ascensão recta

$$A = A_1 - \frac{\text{cos } (A_1 - \alpha) \text{ sen } \omega}{\text{cos } d} \cdot \delta \lambda \dots \dots \dots (\beta).$$

Nos solstícios é $d = \omega$, $A - \alpha = 90^\circ$,

o que dá $d = d_1 - \delta \lambda$, $A = A_1$;

e assim reduz-se 'nelles a correcção a subtrahir a latitude $\delta \lambda$ da declinação observada solsticial.

2. Quando da ascensão recta observada do Sol se quer deduzir a sua longitude

15. Examinando os valores das distancias do Sol á terra deduzidos da columna dos diametros apparentes da tabella, acharemos que: a distancia é minima ou *perigea* no principio de Janeiro; cresce, desde o principio de Janeiro até o principio de Julho, em que se torna máxima ou *apogea*; e diminue, desde o principio de Julho até o principio de Janeiro seguinte, passando, em ordem inversa, pelos valores que tivera 'naquelle primeiro semestre.

Se, tomando por unidade qualquer das distancias, forem r' , r'' as distancias perigea e apogea referidas a essa unidade, estas mesmas distancias referidas á media $\frac{r' + r''}{2}$ como unidade serão

$$\frac{r'}{r' + r''} \quad \frac{r''}{r' + r''};$$

$\sphericalangle S$, a formula $\text{tang } l_1 = \frac{\text{tang}(A_1 - \alpha)}{\cos \omega}$ dá $l_1 = \sphericalangle S'$; e é necessario passar da

longitude $\sphericalangle S'$ para $\sphericalangle S$, isto é, do triangulo $PS'P'$ para $P\Theta P'$. Ora differenciando, na hypothese de A constante, a formula

$$\cos \omega \text{ sen } l = \text{sen } \omega \text{ tang } \lambda + \cos l \text{ tang}(A_1 - \alpha),$$

e fazendo $\lambda = 0$, resulta

$$\delta l = \text{tang } \omega \cos l \cdot \delta \lambda.$$

Portanto dão a longitude as formulas:

$$\text{tang } l_1 = \frac{\text{tang}(A_1 - \alpha)}{\cos \omega}, \quad l = l_1 + \cos l_1 \text{ tang } \omega \cdot \delta \lambda \dots \dots \dots (\gamma).$$

Depois a latitude será dada mais exactamente pelas formulas

$$\text{sen } d = \text{sen } l \text{ sen } \omega, \quad \delta d = (d_1 - d) \frac{\cos d}{\cos \omega}.$$

ou

$$\text{dist. perig.} = 1 - \frac{r'' - r'}{r'' + r'}, \quad \text{dist. apog.} = 1 + \frac{r'' - r'}{r'' + r'}$$

Por exemplo, fazendo epocha no instante da passagem meridiana do Sol no dia 20 de Dezembro de 1806, as observações do diametro apparente, nesse dia e em 1 e 9 de Janeiro de 1807, chamando y o maximo diametro, dão:

Tempos	Δ	δ	δ^2
0,0000	+ 0'',62	+ 0'',0562	- 0'',00550:
11,0370	- 0,39	- 0,0486	
19,0614			

$$\text{d'onde } t = \frac{11^d,037}{2} - \frac{\delta}{2\delta^2} = 10^d,628; \quad y = 32'34'',98 + 0'',62 = 32'35'',60.$$

Similhantermente, chamando y' o minimo diametro, as observações de 24 de Junho, 9 e 10 de Julho de 1807 dão

$$t = 8^d,023; \quad y' = 31'31'',41 - 0'',94 = 31'30'',47.$$

Portanto, como os diametros apparentes estão entre si na razão inversa das distancias respectivas, teremos

$$\frac{r''}{r'} = \frac{325933}{315078}$$

e as distancias perigea e apogea referidas á media como unidade serão:

$$\text{dist. perig.} = 0,9831, \quad \text{dist. apog.} = 1,0169.$$

16. Tomando a differença de dia para dia entre as longitudes do Sol, ou, mais exactamente, interpolando essas longitudes, e tomando depois as differenças para intervallos de tempos constantes mais pequenos; e comparando entre si tanto essas differenças de longitude, como as distancias correspondentes aos meios dos intervallos respectivos: acha-se

que os movimentos angulares do Sol 'nestes intervallos são inversamente proporcionaes aos quadrados das distancias; de sorte que entre os raios

vectores e as velocidades angulares $\frac{dv}{dt}$ tem lugar a relação

$$\frac{r^2 dv}{dt} = 2c,$$

sendo $2c$ uma constante.

Mas $\frac{r^2 dv}{2}$ é o elemento da area descripta pelo raio vector;

logo $\text{area} = \frac{1}{2} \int r^2 dv = ct;$

o que dá a primeira lei de Kepler:

As areas descriptas pelo raio vector são proporcionaes aos tempos empregados em descrevel-as.

Como as variações dos movimentos angulares são mais rapidas que as dos diametros apparentes, e como 'nestes ha sempre a incerteza proveniente do effeito da irradiação, é melhor servir-nos, para o calculo das distancias, da lei que acabamos de achar. Assim, partindo d'um raio vector r correspondente á velocidade angular v , acharemos mais exactamente o raio vector r_1 , que corresponde á velocidade angular v_1 , pela formula

$$r_1 = r \cdot \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v_1}}.$$

17. Construindo uma curva, cujos raios vectores tenham entre si as mesmas razões que teem as distancias do Sol á terra, e comprehendam os mesmos angulos que comprehendam aquellas distancias, acharemos que ella parece ter a configuração d'uma ellipse.

Posto isto, se deduzirmos da tabella a longitude ω do Sol correspondente á minima distancia r' , e os valores dos diametros apparentes d' , d'' ou antes das velocidades angulares v' , v'' , correspondentes ás distancias minima e maxima r' , r'' , teremos, supposta a curva elliptica, e chamando

a , ae , $\tilde{\omega}$, o seu semi-eixo maior, a sua excentricidade, e a longitude do perigeu:

$$r' = a(1 - e), r'' = a(1 + e).$$

E os elementos da ellipse serão

$$\text{long. perig.} = \tilde{\omega}, a = \frac{r' + r''}{2}, e = \frac{r'' - r'}{r'' + r'} = \frac{d' - d''}{d' + d''} = \frac{\sqrt{v'} - \sqrt{v''}}{\sqrt{v'} + \sqrt{v''}}.$$

18. Se com estes elementos, e com as longitudes da tabella, calcularmos as distancias correspondentes a essas longitudes, pela equação da ellipse

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(l - \tilde{\omega})},$$

a coincidência dos seus valores com os deduzidos das observações, inscritas na tabella, deverá justificar a hypothese da ellipticidade da curva.

Por exemplo (n.º 15), em 20 de Dezembro de 1806, e 1 e 9 de Janeiro de 1807, interpolando, para $t = 10^d.628$, as longitudes da tabella (Astrón. de Folque): 267°, 9572; 280°, 2440; 288°, 3925: dão a longitude do perigeu

$$\tilde{\omega} = 279^\circ 48' 39'', 6.$$

E em 24 de Junho, 9 e 10 de Julho de 1807, interpolando, para $t = 8^d.023$, as longitudes da mesma tabella: 92°, 0553; 106°, 2724; 107°, 2355: dão a longitude do apogeu $\pi = 99^\circ 35' 2'', 4$,

ou a do perigeu $\tilde{\omega} = 279^\circ 35' 2'', 4$.

O meio d'estes valores é

$$\tilde{\omega} = 279^\circ 41' 51'', 0.$$

Teremos pois :

$$\omega = 279^{\circ}41'51'',0; e = \frac{r'' - r'}{r'' + r'} = 0,0169; a = 1.$$

Depois, calculando com os valores achados de ω , e , a , e com as longitudes da tabella, os valores das distancias, e comparando-os com os que se deduzem da mesma tabella, acharemos resultados pouco differentes.

Estes exemplos não devem considerar-se como dando resultados definitivos, mas como proprios para guiar na resolução dos problemas correspondentes, quando se tiverem observações mais exactas e numerosas.

A mesma comparação feita entre as distancias deduzidas das longitudes observadas pela ultima formula do n.º 16, e as deduzidas da equação da ellipse com os elementos: $a = 1,00041$; $e = 0,0168$; $\omega = 279^{\circ}3'16'',99$; dá, nas observações de Greenwich de 1775 (Astron. de Biot), o quadro seguinte. A columna dos movimentos diurnos d'elle foi calculada pela formula

$$\text{movim. diurno} = \frac{10,027379. l}{t};$$

sendo l as differenças dos numeros da columna das longitudes correspondentes aos dois dias de cada mez, e t os intervallos de tempo decimal das respectivas observações.

Greenwich Datas de 1775		Longitudes	Movim. diurno	Distancia observada	Distancia calculada	Excesso das ob- servadas
Janeiro	12 ^d . 8 ^b . 16699	292 ^o . 22685	} 1,01826	0,98448	0,98406	- 42
"	13 . 8 . 19699	293 , 24538				
Fevereiro	17 . 9 . 19107	328 , 72977	} 1,00725	0,98950	0,98949	+ 1
"	18 . 9 . 21785	329 , 73696				
Março	14 . 9 . 84099	353 , 76363	} 0,99380	0,99622	0,99585	+ 37
"	15 . 9 . 86635	354 , 75723				
Abril	28 . 0 . 98842	37 , 95372	} 0,97075	1,00800	1,00845	- 45
"	28 . 1 . 01477	38 , 92437				
Maio	15 . 1 . 44487	54 , 38637	} 0,96247	1,01234	1,01233	+ 1
"	16 . 1 . 47216	55 , 34397				
Junho	17 . 2 . 37845	85 , 98474	} 0,95449	1,01654	1,01680	- 26
"	18 . 2 . 40734	86 , 93937				
Julho	18 . 3 . 26473	115 , 55334	} 0,95440	1,01658	1,01647	+ 11
"	19 . 3 . 29259	116 , 50779				
Agosto	26 . 4 . 30145	152 , 89668	} 0,96606	1,01042	1,01003	+ 39
"	27 . 4 . 32684	153 , 86256				
Setembro	22 . 4 . 98087	179 , 24913	} 0,98060	1,00283	1,00286	- 3
"	23 . 5 . 00583	180 , 22950				
Outubro	24 . 5 . 82588	210 , 10671	} 1,00024	0,99303	0,99352	- 49
"	25 . 5 . 85258	212 , 90688				
Novembro	18 . 6 . 52053	237 , 03453	} 1,01152	0,98746	0,98763	- 16
"	20 . 6 . 57873	239 , 05791				
Dezembro	17 . 7 . 36289	265 , 47057	} 1,01836	0,98415	0,98403	+ 12
"	18 . 7 . 39371	266 , 48928				

0,98633

Por onde se vê que, differindo pouco, e irregularmente, os valores calculados dos observados, se deve reputar sensivelmente exacta a hypothese da ellipticidade.

A observação dá assim a segunda lei de Kepler, applicada ao movimento do Sol:

O Sol descreve uma ellipse no seu movimento relativo em volta da terra.

19. Para escrever commodamente as duas leis de Kepler, que ficam enunciadas, costuma usar-se d'um angulo auxiliar $NCP = u$ (Fig. 2), que faz a linha dos apsidés CP com a recta CN, tirada do centro C para o ponto N onde a ordenada SQ produzida encontra o circulo descripto sobre o diametro AP; circulo que se chama *excentrico*.

Por ser

$$\text{area SFP} : \text{area NFP} :: \text{SQ} : \text{NQ} :: b : a,$$

temos

$$\text{area NFP} = \frac{a}{b} \cdot \text{area SFP} = \text{area NCP} - \text{area NCF},$$

$$\text{ou} \quad \frac{a}{b} \cdot \text{area SFP} = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} ae \cdot a \text{ sen } u.$$

E, pela primeira lei de Kepler, chamando t o tempo correspondente á posição S do Sol, T o tempo periodico, ou o tempo que o Sol gasta em

voltar ao mesmo ponto da sua orbita, e fazendo $\frac{2\pi}{T} = n$, é

$$\text{SFP} = \pi ab \cdot \frac{t}{T} = \frac{1}{2} n ab t,$$

que, substituindo na precedente, dá

$$nt = u - e \text{ sen } u.$$

Tambem é $CQ = CF + FQ$, ou $a \cos u = ae + r \cos v$,

que, em virtude da equação da ellipse, $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$,

dá $r = a(1 - e \cos u)$.

Finalmente, a comparação d'estes dois valores de r dá

$$1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v},$$

da qual, resolvendo em ordem a $\cos u$, e formando a expressão $\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$

se tira

$$\text{tang } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \text{tang } \frac{1}{2} u.$$

20. Temos assim as tres equações:

$$\left. \begin{aligned} nt + \varepsilon - \tilde{\omega} &= u - e \sin u, \\ \text{tang } \frac{l - \tilde{\omega}}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ tang } \frac{u}{2}, \\ r &= a(1 - e \cos u); \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9),$$

equivalentes ás duas leis de Kepler, de que até aqui nos occupamos.

Chama-se 'nellas ε a *epocha*, isto é, a longitude media correspondente a um certo tempo, por exemplo ao primeiro de Janeiro de cada anno; e t o tempo decorrido desde essa origem.

O angulo auxiliar u é a *anomalia do excentrico*; o angulo $v = l - \bar{\omega}$ é a *anomalia verdadeira*; e o angulo $nt + \varepsilon - \bar{\omega}$, que descreveria um astro ficticio, chamado *Sol medio*, se, partindo do perigeu ao mesmo tempo que o Sol verdadeiro e movendo-se uniformemente, voltasse ao mesmo ponto no fim do tempo periodico T , é a *anomalia media*.

21. Se chamarmos *equação do centro* a differença

$$Q = v - (nt + \varepsilon - \bar{\omega}) = l - (nt + \varepsilon)$$

entre a anomalia verdadeira e a media, ou entre a longitude verdadeira e a media, a longitude elliptica do Sol será assim:

$$l = \varepsilon + nt + Q \dots \dots (10).$$

Pela eliminação, e pelo desenvolvimento em serie, as formulas (9) dão (*Mec. cel.* l. 2.^o n.^o 22, e *Th. an.* l. 2.^o n.^o 24), até a ordem de e^2 :

$$\left. \begin{aligned} u &= nt + \varepsilon - \bar{\omega} + e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}), \\ Q &= 2e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}), \\ r &= a \left[1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) - \frac{1}{2} e^2 \cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) \right]. \end{aligned} \right\} \dots (11).$$

22. Mostra-se na *Mechanica* que as duas leis de Kepler acima referidas são o resultado d'uma lei unica, a da *attracção*, que obra na razão inversa dos quadrados das distancias.

Adiante veremos que, por outra lei de Kepler: — *os quadrados dos tempos periodicos são proporcionaes aos cubos dos eixos maiores das orbitas.*

Esta terceira lei de Kepler, juncta ás outras duas, mostra que para as moléculas do Sol, dos planetas, e dos satellites relativamente aos quaes

ella se pôde verificar, a attracção é a mesma, isto é, que, a eguaes distancias, esta força é proporcional ás massas.

Emquanto á Lua, tambem se mostra, pela comparação do seu movimento com o que resulta da attracção terrestre transportada á distancia d'este satellite, que tem logar a mesma lei da attracção.

Portanto, podemos considerar como lei universal a seguinte:

O Sol, os planetas e os satellites attrahem-se reciprocamente na razão composta da razão directa das massas, e da inversa dos quadrados das distancias.

A investigação dos movimentos dos corpos celestes, devidos á attracção e ás impulsões primitivas, constitue um grande problema de Mechanica, cujas arbitrarias são funcções dos elementos das orbitas.

A astronomia theorica, tendo chegado pela comparação das primeiras observações á lei da attracção universal, e partindo d'ella, fornece as formulas pelas quaes se calculam as posições e os movimentos dos corpos celestes: a astronomia practica determina, pela discussão de boas e numerosas observações, as constantes que entram 'nessas formulas.

23. O exame das formulas analyticas, que dão os movimentos do Sol, mostra: que a parte principal d'elles é devida á acção reciproca do Sol e da terra, em virtude da qual a orbita relativa d'um d'estes corpos em volta do outro se considera como uma ellipse; e que os effeitos das acções da Lua e dos planetas se podem decompor em duas especies: uns taes, e tão lentos, que o movimento ainda se reduz commodamente á ellipse, modificando lenta e progressivamente as constantes d'esta, de modo que se attenda aos mesmos effeitos; outros que mais convém tomar como perturbações do movimento elliptico.

D'este modo a longitude do Sol, em qualquer tempo, representa-se pela expressão

$$\text{long } \Theta = \varepsilon + nt + P + Q \dots \dots (12).$$

Onde P designa a somma das perturbações; e ε , n , ω , e , são constantes, que soffrerão variações; assim como as soffrerão as constantes α , ω , que determinam a posição da ecliptica.

E em conformidade com esta formula são dispostas as taboas, que servem para calcular as longitudes.

24. Preparados com estas noções, tractemos agora de determinar com a maior exactidão, que for possivel, os elementos da orbita solar, e e as suas variações.

CAPITULO II

Determinação mais exacta da posição da ecliptica

I

Determinação mais exacta da obliquidade da ecliptica.

25. Na primeira approximação determinamos os elementos da orbita solar, ou usando de observações isoladas, ou de tantas, ligadas pela interpolação parabolica, quantas esta o permittia. Mas, como a orbita é uma ellipse, será mais exacto, para o mesmo fim, empregar maior numero de observações, ligando-as pela interpolação elliptica. É o que vamos fazer.

26. Da formula $\text{sen } \omega \text{ sen } l = \text{sen } d$

resulta $\delta d = \delta l \cdot \frac{\text{sen } \omega \cos l}{\cos d}$;

consequentemente é $\delta d < \delta l \cdot \text{tang } \omega \cos l$.

E como 12^b é o maior erro que se póde commetter em tempo, quando

se toma por instante do solsticio o da maxima distancia zenithal meridiana, a substituição por δl do maximo movimento do Sol em 12^h dá um limite superior de δd ,

$$\delta d < 30',6 \operatorname{tang} 23^\circ . 27' . 27'' \operatorname{sen} 30',6 < 0',12.$$

Portanto as taboas astronomicas, que suppõem a obliquidade já determinada com muito maior approximação, não podem conter, por parte d'este elemento, senão pequenos erros, que se corrigem por novas observações, do modo que vamos expor.

27. Sejam: δd o que falta a uma declinação d , observada poucos dias antes ou poucos dias depois do instante do solsticio, para ser a declinação solsticial ω ; e δl o que falta á longitude correspondente l para ser 90° : isto é, sejam

$$\delta d = \omega - d, \quad \delta l = 90^\circ - l.$$

A equação $\operatorname{sen} d = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \omega$

dá $\operatorname{sen} (\omega - \delta d) = \cos \delta l \operatorname{sen} \omega,$

ou $\operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} (\omega - \delta d) = 2 \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \delta l;$

e tirando d'esta δd , em serie ordenada relativamente ás potencias de δl , resulta (Fr. *Math. Pur.* p. iv, n.º 67, 3.º)

$$\delta d \operatorname{sen} 1'' = m - \frac{1}{2} m^2 \operatorname{tang} \omega + \frac{1}{6} m^3 (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \omega) + \dots \quad (13).$$

Escrevendo esta formula do modo seguinte

$$\begin{aligned} \delta d \text{ sen } 1'' &= m - \frac{1}{2} m^2 \text{ tang } \omega + \frac{1}{4} m^3 - \frac{1}{12} m^3 (1 - 6 \text{ tang}^2 \omega) \\ &= m - \frac{1}{2} m^2 \text{ tang } \omega \cos^2 \frac{1}{2} \delta l - \frac{1}{12} m^3 (1 - 6 \text{ tang}^2 \omega), \end{aligned}$$

e desprezando o ultimo termo, que para $\delta l = 20^\circ$ apenas dá $0'',04$, acha-se a formula de Mathieu (*)

$$\delta d \text{ sen } 1'' = m - \frac{1}{2} m^2 \text{ tang } \omega \cos^2 \frac{1}{2} \delta l. \dots \dots (14).$$

28. Estas formulas podem empregar-se com segurança ainda vinte dias antes e vinte depois do solsticio. Porque, se fosse 1^m o erro do tempo do solsticio dado pelas taboas, supposição actualmente muito exagerada, o erro e de δl , que d'elle resultaria, apenas daria em $\frac{m}{\text{sen } 1''}$ o erro $\text{tang } \omega \text{ sen } \delta l. e < 0'',37$ para $\delta l = 20^\circ$: e um pequeno erro c de ω dá

para a correcção δd o erro $\frac{2c \text{ sen}^2 \frac{1}{2} \delta l}{\cos^2 \omega}$, que é insensivel (**).

(*) Por ser

$$6 \text{ tang}^2 \omega - 1 < 0,11 \quad \text{e} \quad 1 + 3 \text{ tang}^2 \omega > 1,5,$$

vê-se que, por meio dos dois termos da formula (14) se aproveitam mais de $\frac{19}{20}$ do terceiro termo da formula (13), e se despreza apenas menos de $\frac{1}{20}$ d'elle.

(**) Se achassemos d pelas taboas, a influencia do erro da longitude em d

29. Supponhamos que se observam i declinações, que não distam mais de vinte dias do solstício; e que se calculam pelas formulas (13) ou (14) os i valores de δd , que lhes correspondem. A obliquidade será (*)

$$\omega = \frac{\Sigma (d + \delta d)}{i} \dots \dots \dots (15).$$

Nesta formula os erros de δd provenientes dos erros das taboas são muito pequenos, como acabamos de mostrar; a somma em Σd dos erros fortuitos das declinações d , que dá a observação, é com probabilidade da mesma ordem que cada um d'elles, e attenuada pelo divisor i ; e os erros permanentes, devidos ás imperfeições dos instrumentos, suppõe-se menores que os das observações, em que se fundaram as taboas que se pretende corrigir.

seria a mesma que em δd ; mas o erro c da obliquidade, daria $\frac{\delta d}{c} = \frac{\cos \omega \operatorname{sen} l}{\cos d}$, transmittindo-se a d quasi por inteiro na proximidade dos solstícios. Por isso determina-se d pela observação.

(*) Por ser nos dois solstícios, respectivamente,

$$\delta \omega = -\delta D - \delta z, \delta' \omega = \delta D + \delta z'$$

a semi-somma dos dois valores correspondentes da obliquidade é independente do erro da latitude.

II

Determinação mais exacta dos equinoccios

30. Se chamarmos, respectivamente, δz , δD , $\delta \omega$ os erros da distancia zenital, da colatitude geographica do lugar, e da obliquidade da ecliptica, e $\delta d = -\delta D - \delta z$ o da declinação: a formula $\text{sen } l = \frac{\text{sen } d}{\text{sen } \omega}$ dará

$$\delta l = \frac{-\delta D \cos d - \delta z \cos d - \delta \omega \text{ sen } d \cot \omega}{\cos l \text{ sen } \omega}.$$

31. Posto isto, supponhamos que, perto do equinoccio da primavera, se fazem duas observações, uma anterior ao instante do equinoccio, outra posterior e a igual distancia d'elle. Por serem $d' = -d$, $l' = 360 - l$, teremos para estas duas observações, respectivamente,

$$\delta l = \frac{-\delta D \cos d - \delta z \cos d - \delta \omega \text{ sen } d \cot \omega}{\cos l \text{ sen } \omega},$$

$$\delta l' = \frac{-\delta D \cos d - \delta z' \cos d + \delta \omega \text{ sen } d \cot \omega}{\cos l \text{ sen } \omega}.$$

logo
$$\delta l + \delta l' = \frac{-2 \delta D \cos d - (\delta z + \delta z') \cos d}{\cos l \text{ sen } \omega}.$$

Suponhamos tambem que se fazem duas observações equidistantes do equinoccio de outomno, sendo a distancia de cada uma a este segundo equinoccio igual á distancia ao equinoccio da primavera da correspondente feita perto d'aquelle primeiro equinoccio. Por serem $d_1 = -d$, $l_1 = 180^\circ + l$, teremos

$$\delta l_1 + \delta l'_1 = \frac{2\delta D \cos d + (\delta z_1 + \delta z'_1) \cos d}{\cos l \sin \omega}$$

Portanto

$$\delta l + \delta l' + \delta l_1 + \delta l'_1 = \frac{(\delta z'_1 - \delta z' + \delta z_1 - \delta z) \cos d}{\cos l \sin \omega}$$

O segundo membro d'esta equação é independente dos erros da latitude e da obliquidade; e tambem o é da parte principal das refrações e dos erros constantes do instrumento, por serem quasi eguaes entre si as distancias z e z' , z_1 e z'_1 ; consequentemente só influem nelle os erros commettidos no calculo das variações da refração, devidas á mudança do estado atmospherico, e os erros fortuitos commettidos nas observações das distancias zenithaes. Mas, podemos confiar tanto na taboa das refrações, por ser consideravel a altura $49^\circ 17' 34''$ do equador sobre o nosso horizonte, e é tão grande a exactidão das observações feitas com bons circulares, que o resultado d'aquellas duas causas de erro apenas póde ser actualmente d'alguns segundos.

32. Bem entendido isto, supponhamos que se determinam pela observação e pelo calculo muitas longitudes sensivelmente equidistantes dos equinoccios da primavera e do outomno.

Por que em uma pequena extensão são constantes, ou ao menos variam uniformemente os erros das longitudes, calculadas pelas taboas que se deduziram das formulas analyticas (n.º 23), o meio d'elles corresponde á epocha media (*). Se fizermos pois i observações, metade an-

(*) Da expressão da longitude tira-se

$$\delta' = \left\{ \begin{array}{l} (\delta n + \delta \varepsilon + 2\delta e) \left\{ \frac{\sin(nt + \varepsilon) \cos \omega - \cos(nt + \varepsilon) \sin \omega}{+ \frac{5}{2} e [\sin 2(nt + \varepsilon) \cos 2\omega - \cos 2(nt + \varepsilon) \sin 2\omega]} \right. \\ \left. + (\delta n + \delta \varepsilon - \delta \omega) \left\{ \frac{+ 2e [\cos(nt + \varepsilon) \cos \omega + \sin(nt + \varepsilon) \sin \omega]}{+ \frac{5}{2} e^2 [\cos 2(nt + \varepsilon) \cos 2\omega + \sin 2(nt + \varepsilon) \sin 2\omega]} \right. \right\} \end{array} \right\}$$

teriores, metade posteriores ao equinoccio da primavera, e i_1 observações, metade anteriores, metade posteriores ao equinoccio do outomno; e forem: t, t', t'', \dots os tempos das primeiras, e t_1, t'_1, t''_1, \dots os tempos das segundas; S_c a somma das longitudes calculadas para os primeiras tempos, e S_o a somma das observadas; $S_{1,c}$ a somma das longitudes calculadas para os segundos tempos, e $S_{1,o}$ a somma das observadas; teremos:

$$\text{Erro no tempo } \left(\frac{\sum t}{i} = \theta \right) \dots \dots \frac{S_c - S_o}{i},$$

$$\text{Erro no tempo } \left(\frac{\sum t_1}{i_1} = \theta_1 \right) \dots \dots \frac{S_{1,c} - S_{1,o}}{i_1}.$$

Finalmente, tirando estes erros das respectivas longitudes, calculadas pelas taboas para os tempos $\frac{\sum t}{i}, \frac{\sum t_1}{i_1}$, teremos as longitudes correctas para os mesmos tempos, e com ellas determinaremos mais exactamente os instantes dos equinoccios (*).

na qual pondo ± 1 por $\cos(nt + \varepsilon)$, e $nt + \varepsilon$ ou $\pi - (nt + \varepsilon)$ por $\sin(nt + \varepsilon)$, na proximidade dos dois equinoccios, resulta

$$\partial l = a + bt,$$

e por conseguinte

$$\frac{\sum \partial l}{i} = a + b \frac{\sum t}{i}.$$

(*) Fazendo $l = 0$ e chamando t_1 o tempo da passagem pelo equinoccio é

$$0 = \varepsilon + nt_1 + 2e \sin(nt_1 + \varepsilon - \bar{\omega}) + \dots,$$

que subtrahida da correctá

$$0 = \varepsilon + \delta\varepsilon + n(t_1 + \delta t_1) + 2e \sin[n(t_1 + \delta t_1) + \varepsilon + \delta\varepsilon - \bar{\omega}],$$

e desprezando $e\delta t_1$, e $e\delta t_2$, dá a correcção do tempo do equinoccio

$$\delta t_1 = - \frac{\delta\varepsilon}{n}.$$

*t_1 tempo calculado sobre a
fazendo a esta formula para o
valor de t_1, de e, etc.*

ε

33. Chamando $\delta\epsilon$, δn , as correcções da epocha e do movimento medio, as equações precedentes dão

$$\delta\epsilon + \theta \delta n = \frac{S_o - S_c}{i}, \quad \delta\epsilon + \theta_1 \delta n = \frac{S_{1o} - S_{1c}}{i_1},$$

das quaes se tira

$$\delta\epsilon = \frac{\frac{\theta_1}{i_1}(S_o - S_c) - \frac{\theta}{i}(S_{1o} - S_{1c})}{\theta_1 - \theta}.$$

E se as applicarmos a dois equinoccios distantes, teremos:

$$\delta n = \frac{\frac{S_{1o} - S_{1c}}{i_1} - \frac{S_o - S_c}{i}}{\theta_1 - \theta}.$$

34. Se o movimento medio se suppõe bem determinado, ou correcto anteriormente por observações feitas em equinoccios distantes; e se é igual o numero das observações em ambos os equinoccios: a semisomma dos valores de $\delta\epsilon$ dá

$$\delta\epsilon = \frac{\Sigma S_o - \Sigma S_c}{2i},$$

que (n.º 31) é independente dos erros de latitude e de obliquidade.

CAPITULO III

Do Calendario solar

35. Determinando com toda a precisão, pelo processo ensinado nos numeros precedentes, dois equinoccios consecutivos, teremos a grandeza do anno tropico, que já achamos approximadamente no n.º 13. Mas, como esta grandeza varia em virtude de mudanças periodicas e seculares, de que adiante tractaremos, seria necessario eliminar do anno tropico dado pela observação os effeitos d'ellas, para obter o valor do anno tropico medio.

O effeito das variações periodicas póde illudir-se comparando entre si dois equinoccios separados por muitos annos, e dividindo o intervallo comprehendido entre elles pelo numero dos annos. Na verdade deve ter-se compensado nos equinoccios intermedios grande parte d'estas desigualdades; e o que restar d'ellas entre os dois extremos ficará attenuado pelo grande divisor.

Mas, em quanto ás desigualdades seculares, é necessaria a comparação de muitos annos tropicos, já correctos das periodicas, para as determinar, e applical-as ao mesmo anno (*).

(*) Chamemos: t, t' as epochas de dois equinoccios da mesma especie, separados pelo numero n de annos; Θ o valor do anno tropico correspondente á epocha intermedia $\frac{t+t'}{2}$; e α o excesso de cada anno tropico sobre Θ .

$$\text{Será} \quad t' - t = n\Theta + \Sigma\alpha;$$

$$\text{e como é } \Sigma\alpha = 0, \text{ resulta} \quad \Theta = \frac{t' - t}{n}.$$

Para outro intervallo $t'' - t'$, será

$$\Theta' = \frac{t'' - t'}{n'}.$$

36. Com todos estes cuidados determinou Delambre a grandeza do anno tropico medio, que achou de $365^d,242264$ em 1800.

Este anno tropico suppõe o movimento medio diurno do Sol em longitude $n = 59',13883$.

Mas nem todos os astrônomos estão de accordo sobre a grandeza do anno tropico. Bessel, nas correções dos elementos das taboas solares de Delambre, o suppõe de $365^d,242220$; e Hansen, nas suas taboas, de $365^d,242204$ (*).

37. No uso civil convém, para commodidade, contar os annos por numeros inteiros de dias; mas de modo que as datas concordem, quanto for possivel, com as estações. Por isso é necessaria, de quando em quando, a introdução de dias addicionaes ou intercalares, a fim de corrigir o erro, que, para obter aquella vantagem, se tiver commettido.

38. Os antigos attribuiam ao anno valores muito differentes do verdadeiro; mas pela reforma, aconselhada por Sosigenes, astrôno de Alexandria, e ordenada por Julio Cesar, foi o valor do anno tropico fixado em $365,25$ numero que se ficou chamando por isso *anno juliano*.

Nesta supposição bastou que tres annos *communis* de 365^d se fizessem seguir por um *bissextus* de 366^d , para ficar no fim d'este compensado o erro de $0,75 = 18^h$ commettido naquelles. O dia intercalar ajunctou-se no fim do mez de Fevereiro, o qual é assim de 28^d nos annos *communis*, e de 29^d nos *bissextos*; annos que facilmente se distinguem uns dos outros, por ser divisivel por 4 a data dos *bissextos*, e não o ser a dos *communis*.

39. Em 1582, chegando a 10 dias para mais o erro do anno juliano, accumulado desde o anno 325 da nossa era, em que teve logar o Concilio de Nicéa, ordenou o Summo Pontifice Gregorio XIII, que o

E se for k o augmento annual do anno tropico, teremos

$$\Theta' = \Theta + k \left(\frac{t' + t}{2} - \frac{t' + t}{2} \right) = \Theta + k \left(\frac{t' - t}{2} \right).$$

logo

$$k = \frac{\Theta' - \Theta}{\frac{1}{2}(t' - t)}.$$

(*) Segundo Bessel, o anno tropico entre $1800 + t$ e $1800 + t + 1$ é

$$365^d,24222013 - t \cdot 0,00000006686.$$

Segundo Hansen, o anno tropico entre $1850 + t$ e $1860 + t + 1$ é

$$365^d,2422008 - t \cdot 0,00000006240.$$

dia 5 de Outubro d'esse anno fosse o dia 15; e, para evitar a repetição d'aquelle erro, determinou que, desde 1700 inclusivamente, d'entre cada quatro annos tropicos seculares, que deviam ser bissextos pela regra geral, se contassem tres por communs e o quarto por bissexto.

Ficam assim bissextos tão sómente os annos seculares, cuja parte secular, isto é, cujos algarismos á esquerda dos dois ultimos, é divisivel por 4; e são communs os outros.

Esta ultima correcção de $-\frac{3^d}{400} = -0^d,0075$ reduz o anno tro-

pico a $365^d,2425$, que differe apenas 0,000236 do valor $365^d,242264$ achado por Delambre. E como a differença produz $0^d,944$, ou quasi um dia em 4000 annos, seria facil, como lembra Biot, para epochas muito remotas, supprimindo mais um bissexto em 4000 annos, reduzir o anno a $365^d,24225$, differente apenas 0,000014 do de Delambre. Mas nem esta correcção é necessaria para os astrónomos actuaes, nem se póde asseverar que tenha a approximação, que se lhe suppõe, por causa da variabilidade da grandeza do anno tropico medio.

40. O, que fica exposto, mostra que um anno é bissexto: quando a sua parte não secular é divisivel por 4; ou quando esta parte é nulla, e a secular é divisivel por 4. De sorte que o Calendario gregoriano se resume nos seguintes resultados:

Sejam: m as duas ultimas letras á direita de um anno proposto; s as letras á esquerda d'estas; e $\left[\frac{a}{b}\right]$ o resto da divisão d'uma quantidade a por outra b . Teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } m > 0, \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{m}{4}\right] > 0 \\ \left[\frac{m}{4}\right] = 0 \end{array} \right. , \text{ o anno é } \left\{ \begin{array}{l} \text{commum} \\ \text{bissexto} \end{array} \right. \\ \\ \text{Se } m = 0, \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{s}{4}\right] > 0 \\ \left[\frac{s}{4}\right] = 0 \end{array} \right. , \text{ o anno é } \left\{ \begin{array}{l} \text{commum} \\ \text{bissexto} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

41. A reforma gregoriana foi adoptada logo pela maior parte dos povos europeus, em 1700 pelos protestantes de Allemanha, e em 1752 pelos Inglezes; mas até hoje ainda o não foi pelos Russos. Esta nação continúa a usar do anno juliano, mas indicando a correspondencia dos dois estylos nas suas relações com o resto da Europa. E por isso as suas datas têm de menos que as nossas 10^d desde 1582 até 1700, 11^d desde 1700 até 1800, 12^d desde 1800 até 1900: excesso, que se exprime pela formula

$$10^d + s - 16 - \frac{1}{4}(s - 16),$$

chamando $\frac{1}{4}(s - 16)$ a parte inteira do quociente da divisão de $s - 16$ por 4.

Assim, chamando τ qualquer data pelo estylo juliano em um dia, posterior a Fevereiro, de um anno cuja parte secular é s , as datas dos Russos, nas suas relações com o resto da Europa, são

$$\tau + 10 + s - 16 - \frac{1}{4}(s - 16);$$

sendo juliana a data superior á risca, e gregoriana a inferior.

42. A distribuição dos dias do anno por 12 mezes, uns de 31 dias, outros de 30 dias, e outros de 28 ou 29 dias; e a divisão de 52 semanas, com o resto de um ou dois dias: são tão conhecidos que nada mais diremos sobre ellas.

Limitar-nos-hemos a advertir que o primeiro dia do primeiro anno da nossa era foi um *sabbado*. O que fará conhecer qual é o dia da semana correspondente a qualquer anno, mez, e dia da era.

CAPITULO IV

Desigualdade dos dias, e estações

43. Em virtude da obliquidade da ecliptica, os raios solares caem nos diversos logares da terra mais ou menos obliquamente nas diversas epochas do anno; e por isso a intensidade da acção do calor solar, que influe na vegetação e em muitos phenomenos importantes, está ligada com aquellas epochas, e com a posição dos logares terrestres.

44. Em quanto á posição dos logares: dividiu-se a esphera terrestre em cinco zonas ou cintas, separadas umas das outras por circulos parallelos ao equador.

Chamaram-se: *zona torrida* a central, comprehendida entre os tropicos, isto é, entre 23°28' de latitude boreal e 23°28' de latitude austral; *zonas temperadas* as comprehendidas entre os tropicos e os circulos polares, isto é, entre 23°28' e 66°32' de latitude boreal, e entre 23°28' e 66°32' de latitude austral; e *zonas glaciaes* as duas extremas comprehendidas entre os circulos polares e os *polos terrestres*, isto é, entre 66°32' e 90° de latitude boreal, e entre 66°32' e 90° de latitude austral.

Na zona torrida, comprehendida entre os verdadeiros tropicos, o Sol passa duas vezes no anno pelo zenith de cada logar, excepto nos mesmos tropicos onde coincidem em uma só estas duas vezes. Nas zonas temperadas, onde a distancia dos seus parallelos limites aos pólos é igual á obliquidade da ecliptica, o Sol descreve em todo o anno uma parte do seu curso diurno sobre o horizonte, e outra debaixo do horizonte. Finalmente nas zonas glaciaes, que terminam nos pólos, ha uma parte do anno em que o Sol não se mergulha no horizonte, e outra em que não sobe acima d'elle.

45. As circumstancias do movimento diurno, relativas aos effeitos que ficam apontados, incluem-se na formula que dá o angulo horario,

$$\cos P = \frac{\cos z - \cos \Delta \cos D}{\text{sen } \Delta \text{ sen } D}$$

1.º Na passagem meridiana superior do Sol é

$$\cos P = 1, \text{ ou } z = \pm (\Delta - D).$$

Chamando d o seu semidiâmetro, o disco do Sol não passará acima do horizonte em quanto for $z - d > 90^\circ$; tocará-o sómente na subida, quando for $z - d = 90^\circ$; passará em parte acima do horizonte quando for $z - d < 90^\circ$, e todo quando for $z + d < 90^\circ$.

2.º Na passagem meridiana inferior é

$$\cos P = -1; \text{ ou } z = \Delta + D, \text{ ou } z = 360^\circ - (\Delta + D).$$

O disco do Sol terá uma parte acima do horizonte, em quanto for $z - d < 90^\circ$; o seu bordo superior tocará apenas o horizonte na descida, quando for $z - d = 90^\circ$; e estará algum tempo abaixo do horizonte, em quanto for $z - d > 90^\circ$.

3.º Quando o Sol estiver sobre o horizonte em uma parte da sua revolução diurna, e debaixo do horizonte em outra parte da mesma revolução, a formula precedente, fazendo $z = 90^\circ$, dará

$$\cos P = -\cot \Delta \cot D.$$

Não attendendo ao semi-diâmetro do Sol, serão $\frac{P}{15}$ a semi-duração do dia, e $12^h - \frac{P}{15}$ a semi-duração da noite.

46. Em virtude da refração menos parallaxe $r - p$, e do abaixamento crepuscular a , o Sol ainda é visível quando está abaixo do horizonte a quantidade $r - p$; e a sua luz ainda nos alumia quando o mesmo astro está abaixo do horizonte a quantidade a : effeito que póde considerar-se como se fosse devido a um augmento do semi-diâmetro do Sol egual á mesma quantidade.

Assim, se o pólo superior for o boreal, e o Sol estiver no hemi-

spherio austral, começará este astro a apparecer no horizonte, para os habitantes do paralelo cuja colatitude é D , quando $z = d - r + p$, ou $\Delta = D - r + p - d$, passar de $= 90^\circ$ a $< 90^\circ$, isto é, quando Δ passar de $= 90^\circ + D + d + r - p$ a $< 90^\circ + D + d + r - p$. E começará a haver alguma luz, quando Δ passar de $= 90^\circ + D + d + a$ a $< 90^\circ + D + d + a$.

Por exemplo, no paralelo boreal de colatitude $14^\circ 24'$, suppondo $3^\circ 36'$ a refração horizontal e $16'$ o semi-diametro do Sol: para que este astro esteja sobre o horizonte, deve verificar-se a condição, $\Delta < (90^\circ + 14^\circ 24' + 16' + 3^\circ 36' = 108^\circ 16')$. A esta condição correspondem os tempos > 28 de Janeiro e < 15 de Novembro, dentro dos quaes ella tem lugar: portanto só estará o Sol debaixo do horizonte nos dois mezes e meio decorridos desde 15 de Novembro até 28 de Janeiro. Sem a refração teriamos $\Delta < 104^\circ 40'$, o que daria o tempo > 10 de Fevereiro e < 2 de Novembro; de sorte que a refração fará anticipar $13'$ o apparecimento do Sol, e demorar outros tantos o seu desaparecimento.

Foi um phenomeno d'esta especie o que observaram em 1597 os tres Hollandezes, *Heemskerke*, *Barensz* e *Gerard de Veer* na nova Zembla, os quaes, achando-se na posição referida, depois de tres mezes de noite contínua, viram reaparecer o Sol no horizonte 14 dias mais cedo do que esperavam.

Vê-se pois que, em virtude do crepusculo e das grandes refrações horizontaes, produzidas pela atmosphaera frigidissima das regiões polares, deve 'nestas regiões durar o dia muito mais do que duraria sem aquellas causas. A claridade é além d'isso augmentada pela luz da Lua, quando este astro está sobre o horizonte, e pelos meteoros igneos, que são alli muito frequentes.

47. Chamando δz a refração menos a parallaxe, ou o abaixamento crepuscular, e fazendo $z = 90^\circ$, as formulas

$$\cos P = -\frac{\cos D \cos \Delta}{\sin D \sin \Delta}, \quad \cos P' = \frac{-\sin \delta z - \cos D \cos \Delta}{\sin D \sin \Delta},$$

darão P , P' , e consequentemente o effeito $P' - P$ de δz sobre o angulo horario. E tambem darão, pondo por δz o diametro do Sol, o tempo que o disco d'este astro emprega em emergir todo do horizonte, ou em immergir-se todo no horizonte.

Quando δz é pequena, póde $P' - P$ tirar-se da equação

$$\cos P - \cos P' = \frac{\text{sen } \delta z}{\text{sen } D \text{ sen } \Delta}$$

em serie ordenada relativamente ás potencias de $\frac{\text{sen } \delta z}{\text{sen } P \text{ sen } \Delta \text{ sen } D}$.

E tambem póde calcular-se $P' - P$ por approximações successivas, usando da transformada

$$\text{sen } \frac{P' - P}{2} = \frac{\text{sen } \delta z}{2 \text{ sen } \left(P + \frac{P' - P}{2} \right) \text{ sen } \Delta \text{ sen } D}$$

48. Quando δz é o abaixamento crepuscular a , que ordinariamente se suppõe de 17° a 18° ; chamando $\frac{c}{15}$ o crepusculo, as equações

$$\cos P = -\frac{\cos \Delta \cos D}{\text{sen } \Delta \text{ sen } D}, \quad \cos (P + c) = \frac{-\text{sen } a - \cos \Delta \cos D}{\text{sen } \Delta \text{ sen } D},$$

darão o crepusculo no lugar cuja colatitude é D , e para os dias do anno em que a distancia polar do Sol é Δ ; porque a primeira dará P e depois a segunda dará c .

CAPITULO V

**Mudanças da obliquidade da ecliptica;
e precessão dos equinoccios**

I

Exposição e medida d'estes phenomenos

49. Comparando entre si os valores da obliquidade da ecliptica determinada em epochas muito afastadas umas das outras, acha-se que, desde os tempos mais remotos até hoje, tem sido a obliquidade cada vez mais pequena; como se vê no quadro seguinte:

Datas	Logares da observação	Observadores	Obliquidade observada	Obliquidade calculada	Excesso da observada
			23°	23°	0°
-1100	China	Tchou-Koung	54',0332	51',9677	+2',0655
350	Marselha	Pytheas	49,3330	46,1168	+3,2162
250	Alexandria	Eratosthenes	45,6497	45,3165	+0,3332
50	China	Lieou-Hiang	45,6497	44,0567	+1,5930
+ 173	China	41,5495	42,2833	-0,7338
461	China	Tsou-Choug	38,8727	39,8841	-1,0114
629	China	Litchou-Foung	40,0682	38,2830	+1,7852
880	Arabia	Albatenius	35,6829	35,2163	+0,4666
1000	Cairo	Ebn-Jounis	34,4333	34,8340	-0,4007
1279	Pekin	Cocheou-King	32,0401	32,3749	-0,3348
1473	Samarkandia	Ulugbey	31,7998	31,0832	+0,7166

As observações d'este quadro (extrahido da Astron. de Biot, 3.^a ed. t. 4.^o pag. 90) mostram, que a obliquidade vai diminuindo. E, comparando os resultados, escriptos na quarta columna, com os da formula (n.^o 53), que dá a theoria da attracção, escriptos na quinta columna, acham-se na sexta columna differenças tão pequenas, e tão irregulares, que não podemos deixar de attribuil-as aos erros das observações, e de reputar como real aquella diminuição, e como exacta a formula dada pela theoria.

Esta diminuição era de $0'',52$ por anno em 1800, segundo Delambre; e de $0'',48$, segundo Bessel.

50. Convertendo em longitudes e latitudes as ascensões rectas e declinações das estrellas deduzidas de observações antigas, e comparando-as com as que se deduzem similhantemente das observações modernas, acha-se uma variação sensivel nas longitudes, as quaes têm successiva e quasi uniformemente augmentado desde os tempos mais remotos até hoje. As latitudes acham-se pouco differentes.

Assim a longitude da estrella α da *da espiga da Virgem* era

em 1760, segundo Bradley, $200^{\circ}.29'.39'',98$;

em 1802, segundo Maskeline, $201^{\circ}.4'.41'',12$:

por conseguinte variou de $35'.1'',14$ em 42 annos, ou de $50'',03$ annualmente.

Delambre, pela discussão de muitas observações, achou $50'',1$ para 1800; e depois Bessel $50'',2$.

D'este movimento resulta que o signo de *Aries*, que na epocha da invenção do Zodiaco devia coincidir com a constellação do mesmo nome, se tem atrazado d'ella, estando hoje na constellação *Pisces*.

51. A variação da obliquidade da ecliptica póde proceder da mudança de inclinação da ecliptica; ou da mudança de inclinação do equador; ou de ambas estas mudanças.

A ultima explicação é a que tem logar, como logo exporemos, e que a theoria indica.

52. A variação das longitudes poderia proceder do movimento de toda a esphera celeste em torno do eixo dos pólos da ecliptica; ou do movimento conico do eixo de rotação da terra em volta do eixo dos pólos da ecliptica.

Com effeito o primeiro d'estes movimentos augmentaria simultanea e igualmente as longitudes de todas as estrellas referidas ao equinoccio fixo: o segundo augmentaria do mesmo modo as longitudes, fazendo retrogradar o equinoccio, collocado sempre a 90° de distancia do circulo maximo que passa pelos dois pólos.

Mas a segunda explicação, além de ser muito mais simples, é tambem a que se conforma com os resultados da theoria da attracção, e que desde já admittiremos.

53. A theoria mostra que, se representarmos por CE_0 (Fig. 3) a ecliptica de 1750, e por $\gamma_0 Q_0$ o equador: a ecliptica movel em $1750 + t$, CE ; o equador γQ ; o equinoccio verdadeiro (γ); o nodo *descendente* C da ecliptica movel sobre a *fixa*; e o ponto γ_1 , da ecliptica movel, para o qual é $C\gamma_0 = C\gamma_1$, ponto que se póde tomar, com approximação sufficiente, como a projecção do equinoccio γ_0 de 1750 sobre a ecliptica movel de $1750 + t$, serão determinados pelas relações, que vamos expor.

Sejam

$$E_0 \gamma_0 Q_0 = \omega_0, E_0 \gamma Q = \omega, E(\gamma)Q = (\omega);$$

$$\gamma_0 \gamma = \psi, \gamma_1(\gamma) = (\psi),$$

$$\gamma(\gamma) = \alpha, C\gamma_0 = \Pi, \gamma C(\gamma) = \pi.$$

As formulas da Mechanica Celeste fazem conhecer immediatamente quatro das quantidades $\omega, \psi, \Pi, \pi, (\psi), (\omega), \alpha$, em funcção do tempo; e o triangulo $C\gamma(\gamma)$ faz depois conhecer as outras.

Estas funcções, apresentadas debaixo de fórma periodica, são, segundo Laplace, (Astron. de Biot, 3.^a ed. tom. 4.^o n.^o 114 e 154)

$$\psi = \begin{cases} 50'',412 t + 2^\circ.47'.57'',02 \\ + 3,830058 \text{ sen } (50'',412 t + 85^\circ.33'.57'',5) \\ - 6,617772 \text{ cos } 32'',1158 t - 1^\circ,581516 \text{ sen } 13'',9464 t \end{cases}$$

$$\omega = \begin{cases} 23^\circ.8'.32'',5 - 1^\circ,636884 \text{ cos } (58'',412 t + 85^\circ.33'.57'',5) \\ + 0,457443 \text{ cos } 13'',9464 t - 2^\circ,561724 \text{ sen } 32'',1158 t \end{cases}$$

$$(\psi) = \begin{cases} 50'',412 t - 1^\circ,285407 \text{ sen } 13'',9464 t \\ + 5^\circ,598342 \text{ sen}^2 16'',0579 t \end{cases}$$

$$(\omega) = \begin{cases} 23^\circ.28'.23'' - 9^\circ,929736 \text{ sen } 32'',1158 t \\ - 0,661788 \text{ sen}^2 6'',9732 t \end{cases}$$

54. Desenvolvendo as funcções periodicas em serie, até as segundas

potencias de t , como basta para as necessidades actuaes da astronomia, teremos, segundo usarmos d'estes dados, ou dos de Bessel (Astr. de Biot, tom. 4.º, n.ºs 114 e 154; e Bessel, tab. reg. pag. v):

$$\text{Segundo Laplace} \left\{ \begin{array}{l} \psi = 50'',28762 t - 0'',0001217939 t^2 \\ \omega = 23^\circ.28'.23'' + 0'',0000098423 t^2 \\ (\psi) = 50'',09914 t + 0'',0001221480 t^2 \\ (\omega) = 23^\circ.28''.23'' - 0'',52114 t - 0'',00000272294 t^2 \\ \alpha = + 0'',205484 t - 0'',0002659500 t^2 \\ \Pi = 171^\circ.4'.34'',53 - 8'',42312 t - 0'',0000647384 t^2 \\ \pi = + 0'',527523 t - 0'',0000040549 t^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Segundo Bessel} \left\{ \begin{array}{l} \psi = 50'',37572 t - 0,0001217945 t^2 \\ \omega = 23^\circ.28'.18'',0 + 0'',00000984233 t^2 \\ (\psi) = 50'',21129 t + 0'',0001221483 t^2 \\ (\omega) = 23^\circ.28'.18'',0 - 0'',48368 t - 0'',00000272295 t^2 \\ \alpha = 0'',17926 t - 0'',0002660394 \\ \Pi = 171^\circ.36'.9'',94 - 5'',23023 t - 0'',0000396166 t^2 \\ \pi = + 0'',48892 t - 0'',0000030665 t^2 \end{array} \right.$$

II

Influência no transporte das coordenadas

55. Posto isto, supponhamos que se dão as coordenadas a, d, d' de uma estrella S (Fig. 4), correspondentes ao tempo $1750^{\text{ann.}} + t$; e que se querem as coordenadas a', d', d' , correspondentes ao tempo $1750^{\text{ann.}} + t'$.

Na figura temos:

$$\text{Em } 1750 \dots a_0 = \mathcal{R}_0 A_0, d_0 = SA_0, l_0 = \mathcal{R}_0 L_0, \lambda_0 = SL_0,$$

$$\text{Em } 1750 + t \dots a = (\mathcal{R}) A, d = SA, l = (\mathcal{R}) L, \lambda = SL,$$

$$\text{Em } 1750 + t' \dots a' = (\mathcal{R}') A', d' = SA', l' = (\mathcal{R}') L', \lambda' = SL'.$$

Portanto:

$$1.^\circ \text{ Com } \mathcal{R}A = a + \alpha_t, d, E_0 \mathcal{R}Q = \omega_t,$$

calcularemos, pelas formulas (5 ou 7) do n.º 19 da 1.ª Parte,

$$\mathcal{R}L_0, SL_0 = \lambda_0, E_0 \mathcal{R}'Q' = \omega_{t'},$$

$$2.^\circ \text{ Com } \mathcal{R}'L_0 = \mathcal{R}L_0 + (\psi_{t'} - \psi_t) \lambda_0, E_0 \mathcal{R}'Q' = \omega_{t'},$$

calcularemos, pelas formulas (4 ou 6) da 1.ª Parte,

$$\mathcal{R}'A', SA';$$

e teremos as coordenadas

$$a' = (\gamma') A' = \gamma' A' - \alpha_t', \quad d' = SA'.$$

3.º Finalmente, se quizermos a longitude e a latitude para a mesma epocha $1750 + t'$, referidas á ecliptica apparente:

Com $a', d', E' (\gamma') Q' = (\omega) t'$,

culcaremos, pelas formulas citadas (1.º),

$$(\gamma') L' = l', \quad SL' = \lambda'.$$

Teremos assim o quadro seguinte:

Dados	Calculados	Formulas da 1.ª Parte, n.º 19
$a + \alpha_t, d, \omega_t$	l, λ_0	(5 ou 7)
$l + \psi_t' - \psi_t, \lambda_0, \omega_t'$	$a' + \alpha_t', d'$	(4 ou 6)
$a', d', (\omega) t'$	l', λ'	(5 ou 7)

56. Quando quizermos passar da longitude e da latitude d'uma estrella, correspondentes ao tempo 1750, para as correspondentes ao tempo $1750 + t$, poderemos fazel-o mais facilmente do seguinte modo :

Sejam $\gamma_0 L_0 = l_0, \quad SL_0 = \lambda_0,$

a longitude e a latitude para 1750.

Com $CL_0 = l_0 + \Pi_t, \lambda_0, E_0 CE = \pi_t,$

calcularemos CL, SL, pelas formulas (4) ou (6) do n.º 19 da 1.ª Parte; e teremos as coordenadas pedidas

$$l_t = CL - \Pi_t + (\psi)_t, \lambda_t.$$

57. Quando se querem transportar muitas estrellas d'um catalogo da epocha 1750 + t para outra epocha 1750 + t', é mais facil o processo seguinte:

No triangulo espherico $N\mathcal{R}\mathcal{R}'$, onde se conhecem as partes $N\mathcal{R}\mathcal{R}' = \omega_t, N\mathcal{R}'\mathcal{R} = 180^\circ - \omega_{t'}, \mathcal{R}\mathcal{R}' = \psi_{t'} - \psi_t$, podem calcular-se previamente $N\mathcal{R} = m, N\mathcal{R}' = m', \mathcal{R}NN' = i$, pelas formulas:

$$\text{sen}^2 i = \text{sen}^2 \frac{1}{2} (\omega_{t'} - \omega_t) + \text{sen } \omega_t \text{sen } \omega_{t'}, \text{sen}^2 \frac{1}{2} (\psi_{t'} - \psi_t),$$

$$\text{sen } m = \text{sen} (\psi_{t'} - \psi_t), \frac{\text{sen } \omega_{t'}}{\text{sen } i}, \text{sen } m' = \text{sen} (\psi_{t'} - \psi_t) \frac{\text{sen } \omega_t}{\text{sen } i}.$$

Depois, para cada estrella,

com $NA = m + \alpha_t + a, d, i,$

calculando NA', SA' (Part. 1.ª n.º 19, form. 4 ou 6),

ter-se-hão $a' = NA' - m' - \alpha_{t'}, d' = SA'.$

58. Em um pequeno intervallo de tempo, e relativamente a estrellas que não sejam muito proximas do pólo, podemos passar mais facilmente

das coordenadas em uma epocha para as coordenadas na outra epocha proxima, suppondo 'nesse intervallo as variações das coordenadas quantidades muito pequenas da primeira ordem.

Sendo a_t, d_t as coordenadas da estrella em 1750 + t , refiramos a ascensão recta ao equinoccio γ sobre a ecliptica fixa, tomando $a_t = a'_t + \alpha_t$.

Differenciando as formulas de transformação de coordenadas

$$\text{sen } d_t = \text{sen } l \text{ sen } \omega \text{ cos } \lambda + \text{cos } \omega \text{ sen } \lambda,$$

$$\text{cos } a_t \text{ cos } d_t = \text{cos } l \text{ cos } \lambda,$$

vem

$$\delta d_t \text{ cos } d_t = \delta l \text{ sen } \omega \text{ cos } \lambda + \delta \omega (\text{cos } \omega \text{ sen } l \text{ cos } \lambda - \text{sen } \omega \text{ sen } \lambda),$$

$$\delta a_t \text{ sen } a_t \text{ cos } d_t + \delta d_t \text{ cos } a_t \text{ sen } d_t = \delta l \text{ sen } l \text{ cos } \lambda;$$

a primeira das quaes, em virtude da segunda proposta, e de

$$\text{sen } a_t \text{ cos } d_t = \text{tang } a_t \text{ cos } a_t \text{ cos } d_t = \text{tang } a_t \text{ cos } l \text{ cos } \lambda$$

$$= \text{cos } \omega \text{ sen } l \text{ cos } \lambda - \text{sen } \omega \text{ sen } \lambda,$$

e a segunda, em virtude da primeira e de

$$\text{sen } l \text{ cos } \lambda = \text{cos } \omega \text{ sen } a_t \text{ cos } d_t + \text{sen } \omega \text{ sen } d_t,$$

se reduzem a :

$$(16) \dots \begin{cases} \delta d_t = \delta l \text{ cos } a_t \text{ sen } \omega + \delta \omega \text{ sen } a_t, \\ \delta a_t = \delta l (\text{cos } \omega - \text{sen } \omega \text{ tang } d_t \text{ sen } a_t) - \delta \omega \text{ tang } d_t \text{ cos } a_t. \end{cases}$$

Sendo pois: δt o intervalo entre as duas epochas; a'_t, d_t, ω , as coordenadas da estrella, e a obliquidade da ecliptica na primeira epocha; δl o augmento de longitude, igual á precessão $\delta \psi$; e $\delta \omega$ a variação da obliquidade, no mesmo intervalo: as formulas (16) dão $\delta d_t, \delta a_t$; e as novas coordenadas são

$$d_{t+\delta t} = d_t + \delta d_t, \quad a'_{t+\delta t} = a'_t + \delta a_t - \delta \alpha_t = a'_t + p_a \delta t,$$

sendo p_a a precessão annua.

59. Se, para abranger maior intervalo, quizermos aproveitar as quantidades da segunda ordem, podemos fazer o seguinte:

Sejam, até a segunda ordem, pela formula de Maclaurin:

$$a_t = a + \left(\frac{\delta a}{\delta t}\right) t + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 a}{\delta t^2}\right) t^2,$$

$$d_t = d + \left(\frac{\delta d}{\delta t}\right) t + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 d}{\delta t^2}\right) t^2.$$

Pelas formulas (16), são

$$\frac{\delta a}{\delta t} = (\cos \omega + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} a \operatorname{tang} d) \cdot \frac{\delta l}{\delta t} - \cos a \operatorname{tang} d \cdot \frac{\delta \omega}{\delta t},$$

$$\frac{\delta d}{\delta t} = \operatorname{sen} \omega \cos a \cdot \frac{\delta l}{\delta t} + \operatorname{sen} a \cdot \frac{\delta \omega}{\delta t}.$$

E, differenciando as expressões de a_t, d_t , o que dá

$$\frac{\delta a_t}{\delta t} = \left(\frac{\delta a}{\delta t}\right) + t \left(\frac{\delta^2 a}{\delta t^2}\right), \quad \frac{\delta d_t}{\delta t} = \left(\frac{\delta d}{\delta t}\right) + t \left(\frac{\delta^2 d}{\delta t^2}\right),$$

vê-se que, na ordem de aproximação a que nos referimos, as precessões annuas variam proporcionalmente ao tempo.

Portanto podemos passar das coordenadas a'_t, d'_t de $1750 + t$ para as coordenadas a'_t, d'_t de $1750 + t'$ pelo processo seguinte:

$$\text{Com} \quad a_t = a'_t + \alpha_t, \omega_t$$

calcularemos as precessões para $1750 + t$ pelas formulas

$$\frac{\delta a_t}{\delta t} = (\cos \omega_t + \text{sen } \omega_t \text{ sen } a_t \text{ tang } d_t) \frac{\delta \psi}{\delta t} - \cos a_t \text{ tang } d_t \frac{\delta \omega_t}{\delta t},$$

$$\frac{\delta d_t}{\delta t} = \text{sen } \omega_t \cos a_t \cdot \frac{\delta \psi_t}{\delta t} + \text{sen } a_t \cdot \frac{\delta \omega_t}{\delta t};$$

e com ellas acharemos os valores approximados da ascensão recta e da declinação, correspondentes á segunda epocha $1750 + t'$,

$$a_t = a_t + (t' - t) \cdot \frac{\delta a_t}{\delta t}, \quad d_t = d_t + (t' - t) \cdot \frac{\delta d_t}{\delta t}.$$

Depois com estes valores approximados calcularemos a precessão correspondente á segunda epocha, mudando t em t' nas expressões de

$$\frac{\delta a_t}{\delta t}, \frac{\delta d_t}{\delta t}.$$

Finalmente acharemos os valores mais approximados de a'_t e d'_t , ajunctando a a_t e d_t a somma das respectivas precessões desde $1750 + t$ até $1750 + t'$, isto é, a somma de $t' - t$ termos em progressão arithmetica, dos quaes $\frac{da_t}{dt}$ e $\frac{da_{t'}}{dt'}$ são os extremos; e referindo depois a ascensão

recta ao equinoccio de 1750 + t' . O que dará :

$$a'_{t'} = a'_t + \frac{t' - t}{2} \left(\frac{\delta a_t}{\delta t} + \frac{\delta a_{t'}}{\delta t'} \right) + \alpha_t - \alpha_{t'},$$

$$d_{t'} = d_t + \frac{t' - t}{2} \left(\frac{\delta d_t}{\delta t} + \frac{\delta d_{t'}}{\delta t'} \right).$$

60. Se o catalogo de estrellas dá as precessões annuas, p_a , p_d , para o tempo t , com as suas variações seculares, s_a , s_d ; e os movimentos proprios annuos, μ_a , μ_d ; teremos :

$$\frac{\delta a_t}{\delta t} = p_a + \frac{\delta \alpha}{\delta t}, \quad \frac{\delta a_{t'}}{\delta t'} = p_a + \frac{s_a}{100} \cdot (t' - t) + \frac{\delta \alpha}{\delta t'}$$

$$\frac{\delta d_t}{\delta t} = p_d, \quad \frac{\delta d_{t'}}{\delta t'} = p_d + \frac{s_d}{100} \cdot (t' - t);$$

E como, por ser $\alpha_t = at + bt^2$, ou $\frac{d\alpha_t}{dt} = a + 2bt$,

se vê que $\left(\frac{d\alpha_t}{dt} + \frac{d\alpha_{t'}}{dt'} \right) \left(\frac{t' - t}{2} \right)$ é a somma $\alpha_{t'} - \alpha_t$ de todas as variações de α desde t até t' , a substituição em $a'_{t'}$ e $d_{t'}$ dará :

$$a'_{t'} = a'_t + (t' - t) \left[p_a + \frac{s_a}{200} \cdot (t' - t) + \mu_a \right],$$

$$d_{t'} = d_t + (t' - t) \left[p_d + \frac{s_d}{200} \cdot (t' - t) + \mu_d \right].$$

Anno sideral; e invariabilidade do dia sideral

61. Em virtude da precessão dos equinoccios, o anno tropico medio differe do anno sideral, determinado pelo intervallo que decorre entre duas conjunções successivas em ascensão recta do Sol com uma estrella fixa.

Seja T o anno tropico medio, S o anno sideral, e (ψ) o movimento do ponto de Aries sobre a ecliptica durante o anno tropico.

O Sol anda $360^\circ - (\psi)$ durante o anno tropico, e 360° durante o anno sideral. Portanto:

$$360^\circ - (\psi) : 360^\circ :: T : S = \frac{360}{360 - (\psi)} \cdot T;$$

ou

$$S = T + \frac{T \cdot (\psi)}{360 - (\psi)}.$$

Por não variar a precessão proporcionalmente ao tempo, os annos tropicos são desiguaes.

A differença entre dois annos tropicos é igual á differença entre as precessões annuas respectivas, reduzida a tempo na razão de 360° por anno.

Assim, sendo $+0'',0002443 t$ o excesso da precessão annua correspondente a 1750 $+ t$ sobre a correspondente a 1750, será

$$-\frac{T.24.3600}{360.3600} \cdot 0,0002443 = -0'',005949 t$$

a differença dos annos tropicos respectivos.

62. Como os movimentos da ecliptica fazem deslocar sobre o equador o ponto equinoccial, e este deslocamento não é proporcional ao tempo, deve d'ahi resultar uma desigualdade no dia sideral, que póde ser sensível quando se comparam entre si dois dias muito distantes, ou quando se procura a influencia da sua accumulção em muitos dias.

Seja t um numero de annos julianos de 365⁴,25 medios; e i o numero correspondente de dias sideraes, eguaes ao que tinha logar em 1750, isto é, ao intervallo de tempo decorrido nesta epocha entre duas passagens meridianas consecutivas do equinoccio medio.

Temos assim $i = 365,25 t$;

e a expressão de α do n.º 54 reduz-se a

$$\alpha = \frac{0'',205484}{366,25} i - \frac{0'',00026595}{(366,25)^2} i^2 = ai - bi^2.$$

Durante a primeira revolução diurna do equinoccio sujeito ao movimento α , o movimento d'este equinoccio relativamente ao fixo de 1750 foi o valor de α correspondente a $i = 1$, isto é, foi o arco $a - b$. Se o mesmo equinoccio continuasse a mover-se uniformemente, teria em relação ao fixo o movimento $(a - b) i$ em i dias; e como o movimento do equinoccio medio, relativamente ao fixo de 1750, foi 'nesse tempo $ai - bi^2$, o movimento d'este equinoccio relativamente áquelle ficticio de movimento uniforme, cuja revolução diurna se tomou por unidade, é a differença dos dois, $(a - b) i - (ai - bi^2)$. Assim, designando c uma circum-

ferencia, o arco descripto em movimento diurno pelo equinoccio medio real é

$$A_i = ci - bi + bi^2.$$

E, chamando i' o numero de circumferencias e partes da circumferencia descriptas pelo equinoccio, é

$$ci' = ci - bi + bi^2.$$

63. Portanto, querendo saber quanto de dia sideral de $1750^{\text{ann.}} + i^d$ corresponde a um dia de 1750, mudaremos i em $i + 1$ na expressão de i' , e tomaremos a differença; o que dará a quantidade pedida

$$i'' - i' = 1 + \frac{2bi}{c}.$$

Inversamente, querendo saber quanto do dia de 1750 corresponde a um dia de $1750^{\text{ann.}} + i^d$, mudaremos i' em $i' + 1$ e i em $i + x$; o que;

tomando a differença
$$1 = x + \frac{b}{c} (2ix - x + x^2),$$

dará a quantidade procurada
$$x = \frac{c}{c + 2bi - b + bx}:$$

ou, suppondo $x=1$ no denominador do segundo membro, e desprezando os quadrados de $\frac{bi}{c}$,

$$x = 1 - \frac{2bi}{c}.$$

Para $i = 366,25.5000$ a expressão $\frac{2bi}{c}$ não chega a $\frac{1}{1800}$ de segundo: conseguintemente o dia sideral não tem soffrido variação apreciavel desde os tempos mais remotos até hoje.

64. A differença $x - 1$ accumulada em i dias, desde $i = 1$ até i , dá (*)

$$\Sigma x = i - \frac{bi(i+1)}{c}.$$

Para $i = 366,25.4000$ esta expressão é $4^m.43^s,75$; correcção pequena, mas á qual se attende nas taboas astronomicas.

(*) Estes i dias são contados desde o fim do primeiro até o fim do i . Se contassemos desde o principio do primeiro até o principio do i , sommaríamos desde $i = 0$ até $i - 1$; o que daria

$$i - \frac{bi(i-1)}{c}.$$

D'aqui provém a differença das formulas que se lêem nos n.ºs 111 e 112 do tom. 4.º da Astronomia de Biot. No primeiro d'elles contam-se os i dias desde o fim do primeiro dia até o fim do i , e no segundo desde o principio do primeiro dia até o principio do i .

CAPITULO VI

Da nutação

I

Exposição do phenomeno da nutação

65. Depois de applicar aos logares medios das estrellas a precessão de que acabamos de tractar, e a aberração de que adiante tractaremos, ainda as differenças entre estes resultados e os que dá a observação são tão sensiveis, e tão regulares, que não podem attribuir-se a erros fortuitos da observação ou do calculo.

Bradley, comparando umas com as outras as suas observações, seguidas por alguns annos, achou tal correlação entre estas differenças e as posições dos nodos da orbita lunar, que foi levado a admitir na obliquidade da ecliptica uma variação proporcional ao coseno da longitude do nodo ascendente da Lua, e na posição dos equinoccios uma variação proporcional ao seno da mesma longitude.

Com effeito, applicando ás ascensões rectas e ás declinações das estrellas a precessão e a aberração no sentido d'estas coordenadas; e tomando as differenças entre as ascensões rectas e declinações assim correctas e as observadas, acha-se que:

1.º Na mesma epocha todas as estrellas dão os mesmos valores do augmento da obliquidade $\delta\omega$, e da retrogradação dos equinoccios $\delta\psi$, deduzidos das equações (16) do n.º 58.

2.º Em epochas diversas, a mesma estrella dá valores de $\delta\omega$ e $\delta\psi$ que seguem, com differenças pouco sensiveis, a lei da variação dos cosenos e senos de Ω , isto é, que teem a fôrma

$$\delta\omega = A \cos \Omega, \quad \delta\psi = B \sin \Omega.$$

66. A theoria mostra que, mais rigorosamente, as correcções, de que tractamos, se compõem de termos periodicos dependentes da posição media dos nodos da orbita lunar; d'outros dependentes da posição do Sol na ecliptica; e d'outros finalmente, que dependem da posição da Lua na sua orbita: e assigna a fórma d'estes termos.

Os valores numericos dos coefficients devem ser dados pelas observações; mas, como os resultados d'ellas não têm sido conformes, os astrónomos não concordam a este respeito. São mais geralmente adoptados os valores de Brinckley, que entram nas formulas seguintes:

$$\delta\omega = \begin{cases} 9'',250 \cos \Omega - 0'',0903 \cos 2\Omega \\ + 0'',0900 \cos 2C + 0'',5447 \cos 2\Theta, \end{cases}$$

$$\delta\psi = \begin{cases} -17'',2985 \sin \Omega + 0'',2082 \sin 2\Omega \\ -0'',2074 \sin 2C - 1'',2550 \sin 2\Theta; \end{cases}$$

designando respectivamente Θ e C as longitudes do Sol e da Lua, e Ω a longitude media do nodo ascendente da orbita lunar (*).

67. As correcções, que das variações $\delta\omega$ e $\delta\psi$ resultam para as ascensões rectas e para as declinações são (form. 16 do n.º 57)

$$a' - a = (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{sen} a \operatorname{tang} d) \cdot \delta\psi - \cos a \operatorname{tang} d \cdot \delta\omega = M,$$

$$d' - d = \sin \omega \cos a \cdot \delta\psi + \sin a \cdot \delta\omega = N.$$

68. 'Nestas formulas attendemos sómente aos termos da primeira

(*) Segundo a theoria, o coefficiente do primeiro termo de $\delta\psi$ é o coefficiente do primeiro termo de $\delta\omega$ multiplicado por $-2 \cot 2\omega$; e os coefficientes dos outros termos de $\delta\psi$ são os dos termos correspondentes de $\delta\omega$ multiplicados por $-\cot \omega$ (Mem. da Ac. das Sc. de Paris, t. VII, pag. 249).

ordem em $\delta\omega$ e $\delta\psi$. Se quizermos attender aos da segunda ordem, teremos

$$a' - a = \begin{cases} M + \frac{\text{sen}^2 \omega}{2} \left(\frac{\text{sen } 2a}{2} + \cot \omega \cos a \text{ tang } d + \text{sen } 2a \text{ tang}^2 d \right) \cdot \delta\psi^2 \\ - \text{sen } \omega (\cos^2 a - \cot \omega \text{ sen } a \text{ tang } d + \cos 2a \text{ tang}^2 d) \cdot \delta\psi \delta\omega \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen } 2a}{2} + \text{sen } 2a \text{ tang}^2 d \right) \cdot \delta\omega^2, \end{cases}$$

$$d' - d = \begin{cases} N - \frac{\text{sen}^2 \omega \text{ sen } a}{2} (\cot \omega + \text{sen } a \text{ tang } d) \cdot \delta\psi^2 \\ + \text{sen } \omega \cos a (\cot \omega + \text{sen } a \text{ tang } d) \cdot \delta\psi \delta\omega \\ - \frac{\cos^2 a \text{ tang } d}{2} \cdot \delta\omega^2. \end{cases}$$

69. Separando o primeiro termo de cada uma das expressões de $\delta\omega$ e $\delta\psi$, que é o mais importante, sejam $\delta_1\omega$, $\delta_1\psi$, as partes respectivas de $\delta\omega$, $\delta\psi$, isto é

$$\delta_1\omega = m \cos \Omega, \quad \delta_1\psi = -n \text{ sen } \Omega;$$

e substituamos nas equações do n.º 67.

Se depois entre estas equações eliminarmos a longitude media Ω do nodo da orbita lunar, que no periodo de 18^{ann.} e 214^{dias} passa por todos os valores desde 0 até 360°, resultará uma equação entre $a' - a$ e $d' - d$, cujo logar geometrico será a serie das posições apparentes das estrellas referidas á sua posição media.

Projectando esta curva no céu; considerando como rectilíneos na superficie d'ella os dois arcos, aos quaes referiremos as coordenadas, um o arco de declinação que passa pelo logar medio, outro o arco do paral-

lelo que passa pelo mesmo logar; e attendendo a que $a' - a$ corresponde 'neste paralelo a $(a' - a) \cos d$: teremos

$$x = d' - d, y = (a' - a) \cos d;$$

ou $x = -n \operatorname{sen} \omega \cos a \operatorname{sen} \Omega + m \operatorname{sen} a \cos \Omega,$

$$y = -n \cos \omega \cos d \operatorname{sen} \Omega - n \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} a \operatorname{sen} d \operatorname{sen} \Omega - m \cos a \operatorname{sen} d \cos \Omega.$$

Depois eliminando $\cos \Omega$ e $\operatorname{sen} \Omega$ entre ellas, e fazendo

$$n (\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} d + \cos \omega \operatorname{sen} a \cos d) = A,$$

$$m (\operatorname{sen} a \cot \omega \cos d + \operatorname{sen} d) = B,$$

$$\cot \omega \cos d + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} d = C,$$

teremos:

$$\frac{(x \cos a \operatorname{sen} d + y \operatorname{sen} a)^2}{A^2} + \frac{(Cx - y \cos a)^2}{B^2} = 1;$$

equação da ellipse descripta pelo logar apparente do astro, em volta do seu logar medio cujas cordenadas são a e d , por ser negativa a expressão

$$\left. \begin{aligned} & 4 (B^2 \operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} d - A^2 C \cos a)^2 \\ & - 4 (B^2 \cos^2 a \operatorname{sen}^2 d + A^2 C^2) (B^2 \operatorname{sen}^2 a + A^2 \cos^2 a) \end{aligned} \right\} \\ = -4^2 A^2 B^2 (C \operatorname{sen} a + \cos^2 a \operatorname{sen} d)^2.$$

70. Se quizermos a curva descripta pelo pólo apparente em volta do pólo medio, faremos $d=90^\circ$ na equação precedente, ficando a arbitraria; o que dará

$$\frac{(x \cos a + y \operatorname{sen} a)^2}{n^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + \frac{(x \operatorname{sen} a - y \cos a)^2}{m^2} = 1.$$

Esta equação está referida ao centro, mas não aos eixos. Para a referir a elles, transformaremos as coordenadas, suppondo o novo eixo dos x' atraz do eixo dos x (Fig. 5), e para a parte dos $d' - d$, pelas formulas (Curso de Math. puras, Parte 2.^a n.º 233)

$$x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha = x', \quad x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = y'.$$

A simples inspecção d'estas formulas e da equação proposta mostra que, fazendo $\alpha = 90^\circ - a$, aquella equação se transforma na da ellipse referida aos eixos

$$\frac{y'^2}{n^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + \frac{x'^2}{m^2} = 1.$$

E como é $\sphericalangle p' = \sphericalangle p + pp' = a + \alpha = 90^\circ$,

vê-se que o novo eixo dos x' é o coluro dos solsticios. O que tambem se conheceria immediatamente fazendo a arbitraria $a = 90^\circ$ na equação proposta em x e y .

D'onde resulta que o pólo apparente descreve em volta do pólo medio uma ellipse, cujo semi-eixo maior, tomado sobre o coluro dos solsticios, é m , e cujo semi-eixo menor é

$$n \operatorname{sen} \omega = \frac{m \cos 2\omega}{\cos \omega}.$$

71. As expressões

$$x' = m \cos \Omega, \quad y' = -n \sin \omega \sin \Omega,$$

190° que são as de x, y , do n.º 69, quando nellas se supõem $d=0$ e $a=90$, dão lugar á construcção seguinte:

Sobre o eixo maior $pp' = 2m$ (Fig. 6) descrevamos um circulo; e supponhamos que o raio d'elle começa a retrogradar desde o coluro dos solsticios, com uma velocidade angular egual á do nodo medio da orbita da Lua, no momento em que este nodo coincide com o equinoccio da primavera.

Em qualquer posição PK do raio, será

$$Kpp' = 360^\circ - \Omega, \quad RP = m \cos \Omega = x',$$

$$tR = \frac{n \sin \omega}{m}, \quad RK = -n \sin \omega \sin \Omega = y';$$

consequentemente o ponto, onde a ordenada encontra a ellipse, será o pólo apparente.

72. Transformando os productos dos senos e cosenos de a e Ω em senos e cosenos de sommas e differenças, as expressões de $d' - d$ e $a' - a$ do n.º 69, fazendo

$$h = \frac{m + n \sin \omega}{2}, \quad k = \frac{m - n \sin \omega}{2}, \quad l = n \cos \omega,$$

tomam a fórma

$$d' - d = h \sin (a - \Omega) + k \sin (a + \Omega),$$

$$a - a' = l \sin \Omega + [h \sin (90^\circ + a - \Omega) + k \sin (90^\circ + a + \Omega)] \operatorname{tang} d:$$

completando-se as expressões rigorosas com termos semelhantes, nos quaes, em logar de Ω , apparecem respectivamente 2Θ , $2C$, 2Ω .

Para facilitar o calculo d'estas expressões, podem formar-se seis taboas geraes: de $h \text{ sen } x$, $k \text{ sen } x$, $l \text{ sen } x$, $h' \text{ sen } x$, $k' \text{ sen } x$, e $l' \text{ sen } x$.

Taes são as taboas geraes de nutação, que contem o *Connaissance des temps* para 1810.

Os coefficients analogos em Ω , 2Θ , $2C$, 2Ω , são

$$h = 8'',068 + \frac{\delta\omega''}{30000}, k = 1'',182 - \frac{\delta\omega''}{30000}, l = 15'',869 - \frac{\delta\omega''}{30000},$$

$$\begin{array}{lll} h' = 0,522 & , k' = 0,023 & , l' = 1,151 \\ h'' = 0,165 h' & , k'' = 0,165 k' & , l'' = 0,165 l' \\ h''' = -0,166 h' & , k''' = -0,166 k' & , l''' = -0,166 l' \end{array}$$

Das expressões de Peters, adoptadas no *nautical almanac*,

$$\delta\omega = 9'',2237 \cos \Omega - 0'',0895 \cos 2\Omega + 0'',5507 \cos 2\Theta,$$

$$\delta\psi = -17,2524 \text{ sen } \Omega + 0,2063 \text{ sen } 2\Omega - 1,2691 \text{ sen } 2\Theta,$$

resultam os coefficients analogos em Ω , 2Θ :

$$\begin{array}{lll} h = 8'',0456; k = 1'',1781; l = 15'',8263 \\ h' = 0,5279; k' = 0,0228; l' = 1,1642. \end{array}$$

73. As expressões completas, até a primeira ordem, de $a' - a$ e $d' - d$, (n.ºs 66 e 67) têm a fórma

$$a' - a = \cos \omega \delta\psi + \text{tang } d \cdot \Sigma (A_i \text{ sen } a \text{ sen } \alpha - B_i \text{ cos } a \text{ cos } \alpha),$$

$$d' - d = \Sigma (A_i \text{ cos } a \text{ sen } \alpha + B_i \text{ sen } a \text{ cos } \alpha),$$

sendo α cada uma das quantidades Ω , 2Ω , $2C$, 2Θ .

Fazendo $A_i \operatorname{sen} \alpha = M \operatorname{sen} (\alpha + x)$, $B_i \operatorname{cos} \alpha = M \operatorname{cos} (\alpha + x)$,

ou $\operatorname{tang} (\alpha + x) = \frac{A_i}{B_i} \operatorname{tang} \alpha$,

$$M = \sqrt{A_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + B_i^2 \operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{A_i \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + x)} = \frac{B_i \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} (\alpha + x)},$$

podemos dar a $a' - a$ e $d' - d$ a fórmula

$$a' - a = \operatorname{cos} \omega \cdot \delta \psi - \operatorname{tang} d \cdot \Sigma M \operatorname{cos} (\alpha + a + x),$$

$$d' - d = \Sigma M \operatorname{sen} (\alpha + a + x).$$

Esta transformação é vantajosa quando se querem as correcções da nutação para muitas estrellas.

II

Explicação dos phenomenos da precessão e nutação

74. Sem deduzir da theoria as expressões da obliquidade da ecliptica, da precessão, e da nutação, procuremos ao menos explicar como estes phenomenos estão ligados com as attracções do Sol, da Lua, e dos planetas, que os produzem.

Se a terra fosse espherica, a resultante de todas as acções do Sol sobre ella passaria pelo centro, e não alteraria a obliquidade da ecliptica, nem a direcção da linha dos equinoccios; mas, como não é espherica, a resultante não passa pelo centro, e altera aquelles elementos.

Supponhamos o espherioide terrestre decomposto na esphera inscripta, cujo diametro é o eixo dos pólos: e no menisco restante, cuja altura vae crescendo dos pólos para o equador. E para mais simplicidade supponhamos ainda este menisco reunido no equador; considerando assim a terra como composta da esphera inscripta, e d'um annel equatorial.

Por ser a acção do Sol, nas suas diversas posições, proporcional á massa e funcção das distancias, é claro que podemos representar a acção media d'este astro imaginando a sua massa repartida uniformemente por todos os pontos da sua orbita, e formando assim um annel ecliptico. O que reduz a questão de conhecer a acção media do Sol sobre o annel terrestre equatorial á de conhecer a acção do annel solar.

Posto isto, sejam (Fig. 7): EE' , QQ' as projecções celestes da ecliptica, e do equador; e \mathcal{V} a do equinoccio da primavera. Se considerarmos dois pontos do equador M , M' , equidistantes do equinoccio, é claro, attendendo á symmetria das duas partes superior e inferior do annel equatorial, que a acção do annel ecliptico sobre os elementos M , M' , decomposta perpendicularmente ao plano do annel equatorial, dá duas componentes eguaes, e em sentido opposto, dirigidas por MP e $M'P'$. Estas forças, combinadas com a de rotação da terra, dirigida por MQ e $Q'M'$, e levemente modificada pelas componentes equatorias, dá duas resultantes dirigidas por $\mathcal{V}'M$ e $M'\mathcal{V}''$, que ambas, com as symmetricas relativa-

mente ao equinoccio do outomno, tendem a imprimir ao nodo γ o movimento retrogado por $\gamma\gamma'\gamma''$; e das quaes a primeira tende a diminuir a inclinação da orbita $M\gamma E'$, como a segunda tende a augmentar a mesma inclinação $M\gamma E$.

O mesmo se pôde dizer a respeito dos outros elementos equidistantes da linha dos equinoccios; por conseguinte a inclinação fica constante, e os equinoccios retrogradam.

75. A differença entre as figuras do menisco e do supposto anel equatorial, e a necessidade de transportar no seu movimento a esphera inscripta, alteram a velocidade da retrogradação; mas não mudam as conclusões, que estabelecemos, em virtude das quaes a acção media do Sol, que sem a rotação da terra diminuiria a inclinação do equador sobre a ecliptica e não alteraria a direcção da linha dos equinoccios, sendo combinada com aquella rotação, passa a mobilidade para a linha dos equinoccios, que faz retrogradar, e a invariabilidade para a inclinação do equador sobre a ecliptica.

76. Se a Lua se movesse na ecliptica, a sua acção media produziria um effeito semelhante ao que produz a do Sol.

Para ter esta acção media, considerariamos a massa da Lua como distribuida uniformemente pela sua orbita, com o que attenderiamos ao effeito medio relativamente ás suas posições na orbita; e depois considerariamos esta massa como posta na ecliptica, formando um anel ecliptico de raio igual á distancia da Lua á terra, com o que attenderiamos ao effeito medio relativamente ás posições da orbita.

Portanto é em virtude das acções medias reunidas dos dois astros que têm logar os phenomenos referidos da invariabilidade da inclinação, e da precessão dos equinoccios.

77. Como a acção do Sol varia nas suas diversas posições, deve, em cada uma d'ellas, applicar-se ao effeito da acção media d'este astro uma equação dependente da sua longitude; e porque em cada uma das metades superior e inferior da sua orbita elle se acha, a respeito do menisco terrestre, em posições semelhantes ás que tem na outra metade, o periodo da equação, de que tractamos, que é a nutação solar, deve ser metade do tempo da revolução do Sol: o que explica a proportionalidade da nutação solar em longitude ao seno do dobro da longitude do Sol, e em obliquidade ao coseno do mesmo argumento.

Similhantermente, como a Lua não está sempre no mesmo ponto da sua orbita, e como o plano d'esta orbita varia de posição, á acção media lunar na ecliptica deve applicar-se uma equação, cujos termos dependam da posição da Lua na orbita lunar, e da posição d'essa orbita. Ora a po-

sição da orbita lunar só torna a ser a mesma relativamente ao menisco terrestre, quando o nodo lunar tem feito o seu gyro completo; d'onde resulta o termo principal da nutação lunar, que é proporcional ao seno da longitude do nodo da orbita da Lua na nutação em longitude, e ao coseno do mesmo argumento na nutação em obliquidade. E em quanto á posição da Lua na sua orbita, é claro que ella se acha, a respeito do menisco terrestre, nas mesmas posições na metade superior que na inferior; d'onde resulta na nutação em longitude o termo proporcional ao seno do dobro da longitude lunar, e na nutação em obliquidade o termo proporcional ao coseno do mesmo argumento.

78. Já vimos que a acção dos planetas perturba o movimento do Sol, e que o effeito d'esta acção depende das posições d'elles nas suas orbitas relativamente á terra. D'onde resulta naturalmente a divisão dos effeitos da acção do systema planetario sobre o movimento do Sol em *periodicos*, que devem accrescentar-se ás coordenadas ellipticas, e em *seculares*, que mais commodamente se referem aos elementos ellipticos.

Um d'estes effeitos é a variação da obliquidade da ecliptica sobre o equador, a qual, tendo logar desde o momento em que começa a acção que a produz, se compõem de termos proporcionaes ao tempo, e de outros proporcionaes ás potencias superiores do tempo. Além d'isso, como da mudança da ecliptica resulta a mudança da intersecção d'ella com o equador, a precessão apparente resulta da combinação do movimento de precessão sobre a ecliptica fixa, devido ás acções medias do Sol e da Lua, com a mudança do equinoccio, devida ao movimento da ecliptica apparente em relação á fixa.

79. A mudança da ecliptica apparente colloca a orbita do Sol a respeito da ecliptica fixa em circumstancias em parte analogas áquellas nas quaes está a orbita da Lua a respeito da ecliptica; por consequente ao effeito da acção do Sol sobre o menisco terrestre, qual teria logar se elle se movesse na ecliptica fixa, devem accrescentar-se equações dependentes da mudança de posição da ecliptica apparente. Porém, como esta mudança se opéra lentamente, é claro que as equações, de que tractamos, devem ter periodos immensamente maiores que o da nutação lunar.

D'onde resultam variações na obliquidade do equador sobre a ecliptica fixa, e na precessão dos equinoccios sobre a mesma ecliptica. Mas, começando estes effeitos a ter logar sómente depois que a acção dos planetas produz a mudança da ecliptica, que é a sua causa, vê-se que a velocidade d'elles deve ser nulla quando começa aquella acção, e que por isso os mesmos effeitos se devem compor sómente de termos proporcionaes ao quadrado do tempo, e ás potencias superiores.

80. As considerações, que acabamos de apresentar, explicam as variações $\omega - \omega_0$, ψ , $(\omega) - \omega_0$, (ψ) , de que tractamos no n.º 53, e as $\delta\omega$, $\delta\psi$ de que tractamos no n.º 66.

O complicado phenomeno da precessão, nutação, e mudança de obliquidade decompõe-se assim nos seguintes:

1.º Precessão sobre a ecliptica fixa, devida ás acções medias da Lua e do Sol sobre o espheroides terrestre.

2.º Mudança da inclinação da *ecliptica sobre o equador*, devida directamente á acção dos planetas sobre o Sol e sobre a terra; e variação que, em virtude d'esta mudança, soffre a precessão, e cujo effeito se deve accrescentar á precessão sobre a ecliptica fixa para ter a precessão apparente.

3.º Nutação periodica luni-solar, ou oscillação que produzem na inclinação do *equador sobre a ecliptica*, e na precessão, as variações da longitude do Sol, da longitude do nodo da orbita lunar, e da longitude da Lua.

Este effeito ajuncta-se como equação.

4.º Nutação secular, ou variações que produz nos mesmos elementos a mudança de posição da ecliptica, devida á acção dos planetas, e que são assim um effeito como reflectido da mesma acção.

Este effeito envolve-se nas expressões da obliquidade media, e da precessão.

CAPITULO VII

Determinação mais exacta da excentricidade da orbita solar

81. Para fazer concorrer muitas observações á determinação da excentricidade, usando da interpolação elliptica, sirvamo-nos das proximas da maxima equação do centro.

Diferenciando em ordem a t as equações do movimento elliptico (n.º 18),

$$nt = u - e \operatorname{sen} u,$$

$$e \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} u, \text{ ou } \frac{1+\cos v}{1+\cos u} = \frac{1-e}{1-e \cos u},$$

resulta
$$\frac{d(nt)}{dt} = \frac{du}{dt} (1 - e \cos u),$$

$$e \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} u} \cdot \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{1+\cos v}{1+\cos u} \cdot \frac{du}{dt},$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos u} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos u)^2} \cdot \frac{d(nt)}{dt}.$$

19

A condição de ser maxima a equação do centro dá

$$\frac{d(v - nt)}{dt} = 0, \text{ ou } \frac{dv}{dt} = \frac{d(nt)}{dt},$$

que substituída na equação precedente, a reduz a

$$1 = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos u)^2}, \text{ ou } \cos u = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{e},$$

$$e \cos v = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{e}.$$

82. Como estes valores de $\cos u$ e $\cos v$ são da ordem da excentricidade, o angulo u é um pouco menor que 90° , e o angulo v um pouco maior que 90° , na epocha da maxima equação do centro. Fazendo pois $u = 90^\circ - u'$, $v = 90^\circ + v'$, são u' , v' , arcos muito pequenos da ordem da excentricidade; e as expressões precedentes transformam-se em

$$\sin u' = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{e}, \quad \sin v' = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{e}.$$

Desenvolvendo estas expressões em serie até a terceira potencia de e , e exprimindo u' e v' em segundos, resulta, até essa ordem,

$$u' \text{ sen } 1'' = \frac{1}{4} e + \frac{37}{384} e^3,$$

$$v' \text{ sen } 1'' = \frac{3}{4} e + \frac{21}{128} e^3.$$

E porque, até a mesma ordem, é

$$v - nt = v' + u' + \frac{e \cos u'}{\text{sen } 1''} = v' + u' + \frac{e - \frac{1}{2} e \text{sen}^2 u'}{\text{sen } 1''} :$$

se 'nesta expressão substituirmos em lugar de v' , u' , $\text{sen } u'$, as suas expressões precedentes, resultará a maxima equação do centro

$$E = \frac{2e + \frac{88}{384} e^3}{\text{sen } 1''},$$

que dá

$$e = \frac{1}{2} E \text{sen } 1'' - \frac{11}{768} (E \text{sen } 1'')^3.$$

Finalmente, substituindo estes valores de u , v , $v - nt$ na primeira equação do movimento elliptico, resulta a expressão da anomalia media nt , que corresponde á maxima equação do centro,

$$nt = 90^\circ - \frac{5}{4} e - \frac{25}{384} e^3.$$

83. Se pelas observações se determinar a maxima equação do centro, a penultima formula precedente dará e com grande approximação, por serem os erros de E , proveniente d'ellas, attenuados pelo factor $\text{sen } 1''$.

Sejam: s , S (Fig. 8) as longitudes γFs , γFS , do Sol medio e do Sol verdadeiro no instante em que a equação do centro é maxima; s' , S' , as longitudes $\gamma Fs'$, $\gamma FS'$ dos mesmos sóes, d'ahi a seis mezes, proximamente, quando a equação do centro tornar a ser maxima; E a maxima equação do centro na primeira epocha; e β a parte da sua diminuição secular, correspondente ao intervallo decorrido entre as duas epochas. Teremos

$$E = S - s, E - \beta = s' - S',$$

e por conseguinte

$$E = \frac{s' - s - (S' - S) + \beta}{2},$$

sendo β apenas 0',0014.

84. Ainda que a equação do centro assim determinada não seja exactamente a maxima, por não ser provavel que as duas observações correspondam precisamente ao momento d'ella, com tudo approxima-se muito do seu verdadeiro valor; porque se vê facilmente, quer pela inspecção das taboas do Sol, quer pela formula

$$\frac{d(v - nt)}{d(nt)} = 2e \cos nt + \dots,$$

que, na proximidade da maxima equação do centro, onde nt differe pouco de 90° , as variações da anomalia influem em muito fraca proporção nas da equação do centro. Mas ainda se póde corrigir esta pequena differença, e aproveitar maior numero de observações pouco distantes da epocha da maxima equação, como vamos vêr.

Sejam: l a longitude do Sol, dada pelas taboas em um tempo proximo da epocha na qual a equação do centro é maxima, antes da passagem pelo apogeu; l' a longitude do Sol, dada pelas taboas, em um tempo proximo da epocha na qual tem logar o mesmo phenomeno, depois da passagem pelo apogeu; e $nt + \omega = M$, $nt' + \omega' = M'$, as longitudes medias nestes dois tempos. Se chamarmos: δM , $\delta M'$, o que falta ás longitudes medias dos dois tempos, para serem as correspondentes ás epochas da maxima equação do centro; e δE , $\delta E'$, o que falta ás duas equações do centro respectivas para serem as maximas: teremos nas epochas da maxima equação do centro, segundo as taboas:

$$\begin{array}{l} 1.^\text{a} \text{ epocha } \left\{ \begin{array}{l} \text{long. verd.} = l + \delta M + \delta E \\ \text{long. med.} = M + \delta M \end{array} \right. \\ 2.^\text{a} \text{ epocha } \left\{ \begin{array}{l} \text{long. verd.} = l' + \delta M' + \delta E' \\ \text{long. med.} = M' + \delta M' \end{array} \right. \end{array}$$

Logo:

$$1.ª \text{ epocha. . . . long. verd. — long. med.} = l - M \delta E,$$

$$2.ª \text{ epocha. . . . long. med. — long. verd.} = M' - l' - \delta E';$$

e por conseguinte

$$\text{maxima equação, } E = \frac{M' - M - (l' - l) - (\delta E' - \delta E) + \beta}{2} \dots (a).$$

85. Se a excentricidade e tem um pequeno erro de , os erros correspondentes da longitude são

$$dl = \frac{2 \text{ sen } nt}{\text{sen } 1''} \cdot de, \quad dl' = \frac{2 \text{ sen } nt'}{\text{sen } 1''} \cdot de,$$

que, perto da maxima equação, onde $\text{sen } nt$ e $\text{sen } nt'$ se approximam respectivamente de $+1$ e -1 (n.º 82), os coefficients de de elevam muito.

Em quanto a δE , cuja expressão (n.ºs 20 e 82) é

$$\delta E = \frac{2e}{\text{sen } 1''} (1 - \text{sen } nt) - \frac{5}{4} \cdot \frac{e^2}{\text{sen } 1''} \text{sen } 2nt. \dots,$$

o erro de da excentricidade dá

$$d(\delta E) = \frac{2}{\text{sen } 1''} (1 - \text{sen } nt) \cdot de - \frac{5}{2} \frac{e}{\text{sen } 1''} \text{sen } 2nt \cdot de. \dots$$

que, por serem, nas mesmas epochas, $\text{sen } nt$ e $\text{sen } 2nt$ muito proximos respectivamente de $+1$ e 0 , é uma pequena quantidade.

Finalmente, em quanto á influencia que um pequeno erro de ω póde ter em δE , a equação

$$d(\delta E) = 2e \cos(nt) \cdot d\omega \dots$$

mostra que o erro de δE não passa de $\frac{1}{30}$ de $d\omega$, e que é muito menor perto da epocha da maxima equação do centro.

Portanto, se na equação (a) substituirmos, em lugar de l , l' , dados pelas taboas, os seus valores S , S' , deduzidos da observação, para evitar a influencia dos erros das mesmas taboas provenientes do erro de e ; e em lugar de δE , $\delta E'$, substituirmos os seus valores achados pelas taboas, ou pelas suas expressões analyticas: teremos, com maior aproximação,

$$\text{max. eq.} = \frac{M' - M - (S' - S) + \beta}{2} - \frac{\delta E' - \delta E}{2} \dots (17).$$

86. Fazendo assim entrar na expressão da maxima equação do centro o movimento medio $M' - M$, e o movimento verdadeiro $S' - S$, dado pela observação; e as quantidades δE , $\delta E'$, que faltam ás respectivas equações do centro para serem as maximas, dadas pelas taboas: o meio entre os resultados de muitos pares de observações, que se fizerem concorrer para a determinação d'este elemento, dará o seu valor com maior exactidão,

$$\text{max. eq.} = \frac{\Sigma(M' - M) - \Sigma(S' - S) - \Sigma(\delta E' - \delta E)}{2n} + \frac{\beta}{2},$$

sendo $2n$ o numero total das observações.

CAPITULO VIII

**Determinação mais exacta do perigeu,
e sua variação**

I

Posição do perigeu

87. Se pelo methodo exposto no n.º 17 calcularmos a longitude perigéa em duas epochas muito afastadas uma da outra, acharemos que o perigeu muda consideravelmente em relação ao equinoccio.

A differença d'estas longitudes dividida pelo numero de annos tropicos decorridos entre as duas observações dá o movimento annuo tropico do perigeu. E como os erros das longitudes são tantos mais attenuados pela divisão quanto maior intervallo ha entre as observações, a imperfeição d'estas é em grande parte compensada pela sua distancia. D'onde resulta que o movimento annuo do perigeu assim determinado se póde tomar como tendo bastante approximação.

D'este modo as observações de Flamsteed e de Maskeline em 1690 e em 1775 dão

$$277^{\circ} 35',5170 \text{ e } 279^{\circ} 3',2832,$$

e por conseguinte o movimento annuo tropico do perigeu

$$m = 61'',95.$$

A theoria dá mais exactamente $m = 61'',9056432.$

88. Seja T o anno tropico medio; e A o anno anomalistico, isto é, o intervallo de tempo que o Sol gasta em voltar á mesma anomalia.

Em um anno anomalistico o Sol anda 360° em anomalia; e em um anno tropico anda $360^\circ - m$. Logo

$$360^\circ - m : 360^\circ :: T : A = \frac{360 T}{360 - m}$$

$$A = T + \frac{m T}{360} + \left(\frac{m}{360} \right)^2 T + \dots$$

Suppondo $T = 365^d, 242264$, e $m = 61'' , 9056432$,

resulta $A = 365^d, 259711$.

89. Achados assim A e m com bastante approximação, passemos a determinar mais exactamente a linha dos apsides, fazendo concorrer para isso muitas observações.

Segundo o que vimos no capitulo precedente, o apogeu está equidistante dos dois logares do Sol em que a equação do centro é maxima. depois de correcto o primeiro do movimento do apogeu no intervallo de tempo que o Sol emprega em passar d'elle para o segundo. Chamando pois: S, S' , as longitudes observadas perto da maxima equação do centro; t, t' , os tempos das observações; $\delta t, \delta t'$, as differenças entre estes tempos e as epochas da maxima equação; $\delta E, \delta E'$, o que falta ás equações do centro, correspondentes aos tempos das observações, para serem a maxima: teremos

$$\frac{\bar{\omega} + \bar{\omega}'}{2} = \frac{S + S' + n(\delta t + \delta t') + \delta E + \delta E'}{2} - 180^\circ,$$

valor da longitude do perigeu na epocha intermedia entre as duas $t + \delta t$ e $t' + \delta t'$.

E a longitude (ω) do perigeu, para uma epocha anterior Θ annos a esta, será

$$(\omega) = \frac{S + S' + n(\delta t + \delta t') + \delta E + \delta E'}{2} - 180^\circ - m \Theta.$$

Applicando pois esta equação a um numero i de pares de observações annuaes da mesma especie, teremos

$$(\omega) = \frac{\sum [S + S' + n(\delta t + \delta t') - 2m\Theta]}{2i} - 180^\circ.$$

Mas, como $\delta t'$ e δt não se podem obter com grande exactidão, por variarem muito pouco as equações do centro na proximidade da maxima, convém ainda usar do methodo seguinte.

90. Sejam: l, l' duas longitudes observadas, a primeira perto do perigeu, a segunda perto do apogeu; τ, τ' os tempos d'essas observações, dados pelo relógio; t, t' os tempos desconhecidos d'ellas, contados desde a passagem pelo perigeu.

Se entre as primeiras equações (9) do n.º 19

$$nt = u - e \operatorname{sen} u, \operatorname{tg} \frac{l - \omega}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u,$$

eliminassemos o angulo auxiliar u , resultaria uma equação $l - \omega = ft$; e como, chamando (ω) a longitude do perigeu no instante da passagem do Sol por elle, é $\omega = (\omega) + mt$ o seu valor no fim do intervallo t de poucos annos ou de fracção de anno, que separa o tempo correspondente a (ω) dos tempos das observações que se querem fazer concorrer para a determinação d'este elemento, ficaria

$$l - (\omega) - mt = f(t),$$

Similhantermente para uma observação proxima do apogeu teriamos

$$l' - (\omega) - mt' = f(t').$$

E conhecemos o intervallo de tempo θ decorrido entre as duas observações,

$$t' - t = \theta.$$

Portanto estas tres equações determinariam a longitude do perigeu ($\bar{\omega}$) no instante da passagem do Sol por esse ponto, assim como os intervallos de tempo t, t' decorridos entre aquella passagem e os instantes das duas observações; e subtraindo cada um d'esses intervallos do tempo da respectiva observação, teriamos tambem o tempo da passagem do Sol pelo perigeu.

91. Determinando assim muitos valores da longitude do perigeu e do tempo da passagem do Sol por este ponto, o meio termo entre esses valores daria mais exactamente os dois elementos.

A difficuldade reduz-se a eliminar u ; o que não se pode fazer senão pela desenvolução em series, por ser transcendente a primeira equação. Mas, quando as observações forem sufficientemente proximas do perigeu ou do apogeu, estas series tornar-se-hão muito convergentes; e bastará aproveitar as primeiras potencias das quantidades que nellas são muito pequenas. O que vamos fazer nos numeros seguintes.

92. Como $l - \bar{\omega}$ e u são quantidades muito pequenas na proximidade do apogeu, resulta, desprezando as potencias superiores d'ellas,

$$nt = u(1 - e), \quad l - \bar{\omega} = l - (\bar{\omega}) - mt = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot u = nt \cdot \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}.$$

Em quanto ao apogeu, sejam t', l' , o tempo d'uma observação feita perto d'este ponto, e a longitude respectiva.

O tempo d'essa observação, contado do instante da passagem pelo apogeu, é

$$t' - \frac{1}{2} A = (t);$$

e a longitude do apogeu no instante da observação é

$$l' = 180^\circ + \bar{\omega}' = 180^\circ + (\bar{\omega}) + mt'.$$

Se contarmos pois os angulos vectores desde o apogeu, para o que basta mudar e em $-e$, ficaremos nas mesmas circumstancias em que estavamos na observação proxima do perigeu; e teremos, como 'nella,

$$l' - \alpha = n(t) \cdot \frac{\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{1}{2}}}$$

ou

$$l' - 180^\circ - (\bar{\omega}) - mt' = \frac{nt'\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{1}{2}}} - n \frac{A \sqrt{1-e}}{2(1+e)^{\frac{1}{2}}}$$

Finalmente, eliminando t' e $(\bar{\omega})$ entre as tres equações que acabamos de formar,

$$(b) \dots \left\{ \begin{array}{l} t \left(1 + \frac{m(1-e)^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{1+e}} \right) = [l - (\bar{\omega})] \frac{(1-e)^{\frac{1}{2}}}{n\sqrt{1+e}}, \\ t' \left(1 + \frac{m(1+e)^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{1-e}} \right) = [l' - (\bar{\omega}) - 180^\circ] \frac{(1+e)^{\frac{1}{2}}}{n\sqrt{1-e}} + \frac{1}{2}A, \\ t' - t = \theta, \end{array} \right.$$

virá (*)

$$t = \frac{(1-e)^2}{4e} \left(\theta - \frac{A}{2} \right) + \frac{(1-e)^{\frac{3}{2}}}{4e} \cdot \frac{(m\theta + l + 180^\circ - l')}{n} \dots (18).$$

(*) Se quizessemos ter $(\bar{\omega})$ com maior approximação, poderiamns, chamando t_1 e t'_1 os primeiros valores achados de t e t' , escrever do modo seguinte as equações do n.º 90, ate á 3.ª ordem:

$$nt = u(1-e) + \frac{1}{6}eu^3 = u(1-e) + \frac{1}{6}e \left(\frac{nt_1}{1-e} \right)^3.$$

$$l - \bar{\omega} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} u - \frac{1}{6} \frac{e\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} u^3 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} u - \frac{1}{6} \frac{e\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{nt_1}{1-e} \right)^3.$$

93. Portanto: sendo $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ os tempos de i observações próximas do perigeu; $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \dots$ os tempos de i observações próximas do apogeu; t_1, t_2, t_3, \dots os valores de t_x calculados para cada um dos primeiros tempos pela formula (18); e $t' = t_1 + \theta'$, $t'' = t_1 + \theta''$, \dots os valores de $t^{(x)}$ para cada um dos segundos tempos: teremos os tempos das passagens pelo perigeu, e pelo apogeu.

$$\text{Passagem pelo perigeu} = \frac{\Sigma \tau_x - \Sigma t_x}{i}$$

$$\text{Pass. pelo apog.} = \frac{\Sigma \tau^{(x)} - \Sigma t^{(x)}}{i} + \frac{1}{2} A.$$

Depois a substituição de t ou t' nas equações (b) dará a longitude do perigeu no instante da passagem do Sol por elle.

Finalmente com os valores da longitude do perigeu assim achados pelo concurso de muitas observações, em epochas muito distantes, poderão determinar-se mais aproximadamente A e m . E por este processo se irão assim aperfeiçoando successivamente os elementos A, m, P, ω .

E fazendo

$$nt - \frac{1}{6} e \left(\frac{nt_1}{1-e} \right)^2 = nt_2, \quad l + \frac{1}{6} \frac{e\sqrt{1+e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{nt_1}{1-e} \right)^3 = l_2,$$

$$nt' + \frac{1}{6} e \left(\frac{n(t'_1 - \frac{1}{2} A)}{1+e} \right)^2 = nt'_2, \quad l' - \frac{1}{6} \frac{e\sqrt{1-e}}{(1+e)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{n(t'_1 - \frac{1}{2} A)}{1+e} \right)^3 = l'_2.$$

$$\theta_2 = l'_2 - l_2 = \theta + \frac{1}{6} \frac{e}{n} \left[\left(\frac{n(t'_1 - \frac{1}{2} A)}{1+e} \right)^3 + \left(\frac{nt_1}{1-e} \right)^3 \right].$$

achariamos t_2 pela formula (18), pondo 'nella l_2, l'_2 e θ_2 em logar de l, l' e θ .
Depois teriamos

$$t = t_2 + \frac{1}{6} \frac{e}{n} \left(\frac{nt_1}{1-e} \right)^3.$$

II

*Influencia da posição do perigeu na grandeza das estações
e do anno tropico.*

94. A duração das estações varia com a posição do perigeu. Porque, sendo primavera, estio, outomno e inverno os intervallos de tempo comprehendidos entre os instantes nos quaes as longitudes do Sol são respectivamente 0° , 90° , 180° , 270° , 360° , a estação durará mais ou menos, segundo se approximar menos ou mais do perigeu o intervalo que a comprehende. Actualmente as estações compõem-se do numero seguinte de dias:

Inverno.....	89 ^d . 1 ^h ,0
Primavera.....	92 .20,7
Estio.....	93 .14,4
Outomno.....	89 .17,8

95. Conhecida a posição do perigeu para um tempo dado, podemos facilmente saber quando este ponto teve, ou quando hade ter, outra posição, e calcular depois as differenças das estações 'nessa epocha: o que pôde ser util nas investigações chronologicas.

Para isso: chamando (ω) a longitude do perigeu em uma epocha dada, por exemplo, no principio de 1750; ω' a sua longitude em outra epocha; t o numero positivo ou negativo de annos posteriores ou anteriores que separam a segunda epocha da primeira; e m o movimento do perigeu em longitude: bastará fazer

$$t = \frac{\omega - (\omega')}{m}$$

ou antes
$$t = \frac{\bar{\omega} - (\bar{\omega})}{m + m't},$$

suppondo $\bar{\omega} = (\bar{\omega}) + mt + m't^2$. (*)

Assim é que procurando saber quando o perigeu coincidiu, ou coincidirá, com o equinoccio de primavera, com o solsticio de estio, com o equinoccio do outomno, ou com o solsticio de inverno, se fará na expressão de t , respectivamente,

$$\bar{\omega} = (0^\circ \text{ ou } 360^\circ), \bar{\omega} = 90^\circ, \bar{\omega} = 180^\circ, \bar{\omega} = 270^\circ.$$

96. O movimento do perigeu e a nutação fazem variar o anno tropico verdadeiro, e o tornam differente do anno tropico medio.

Consideremos o Sol verdadeiro no ponto S (Fig. 9), e o medio no ponto s; e seja $nt + \varepsilon - \bar{\omega}$ a anomalia media correspondente. A equação do centro será

$$Ss = Q = a \text{ sen } (nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + b \text{ sen } 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \dots$$

Quando o Sol medio volta á mesma posição tropica, completando-se o anno tropico medio, a variação $\delta\bar{\omega} = m$ da longitude do perigeu faz variar Q de

$$\delta Q = -m [a \cos (nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \dots];$$

e a longitude elliptica do Sol é

$$\mathcal{R}S' = \mathcal{R}S - ma \cos (nt + \varepsilon - \bar{\omega}).$$

(*) Segundo as taboas solares de Leverrier é

$$m = 61'',6995, m' = 0'',0001823,$$

contando t desde 1850.

Alem d'isso, durante o anno tropico medio, o equinoccio γ passa para γ' em virtude da nutação; e a longitude verdadeira, contada do equinoccio apparente é $\gamma'S'$.

Portanto o excesso da longitude verdadeira $\gamma'S'$ que o Sol tem no fim do anno tropico medio, sobre a longitude verdadeira γS , que tinha no principio do mesmo anno, é

$$\gamma\gamma' + SS' = \delta\psi + \delta Q;$$

e o anno tropico verdadeiro tem de menos que o medio o tempo necessario para que o movimento tropico do Sol em longitude seja $\delta\psi + \delta Q$.

97. Como as taboas do Sol dão a variação diurna da longitude verdadeira, na epocha de que se tracta, uma simples parte proporcional dará o tempo necessario para que o movimento tropico do Sol seja $\delta\psi + \delta Q$.

Chamando pois: Δl a variação diurna da longitude na epocha de que se tracta; δQ a variação da equação do centro devida ao movimento annuo m do perigeu, $\delta\psi$ a nutação em longitude; T o anno tropico medio; e T' o anno tropico verdadeiro: é

$$T' = T - 24^h \cdot \frac{\delta\psi + \delta Q}{\Delta l}.$$

Por exemplo, no 1.º de janeiro de 1863 ao meio dia medio, segundo as taboas de Hansen, é $nt + \varepsilon = 280^\circ 39' 41'' ,4$, e $\omega = 280^\circ 35' 5'' ,8$; o que dá $nt + \varepsilon - \omega = 4' 35'' ,6$, e $\delta Q = -2'' ,1$. E é $\delta\psi = 17'' ,2$, $\Delta l = 3668'' ,6$.

Logo

$$T' = T - 0^h ,0988.$$

CAPITULO IX

Correcção final de todos os elementos da orbita

98. Para achar a longitude da epocha, a posição do perigeu, a excentricidade e o medio movimento, determinámos separadamente com mais perfeição cada um d'estes elementos, aproveitando muitas observações feitas na vizinhança das epochas em que menos influem nelle os erros dos outros, e ligando-as pela interpoção elliptica.

Mas os elementos assim determinados, por maior que seja a sua exactidão, resentem-se mais ou menos da influencia reciproca d'uns nos outros; e por isso vamos corrigil-os simultaneamente pelo methodo das equações de condição, ou pelo methodo dos menores quadrados.

99. Seja (a, b, c, \dots, t) a funcção dos elementos a, b, c, \dots e do tempo t , que se sabe calcular, e que seria egual ao resultado L da observação, se esta fosse boa, e se os elementos fossem exactos. Mas supponhamos que os elementos carecem das correcções $\delta a, \delta b, \delta c, \dots$ que se podem tomar como muito pequenas da primeira ordem; e que a correcção da observação é δL . Então será

$$f(a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c, \dots, t) = L + \delta L,$$

$$\text{ou} \quad \frac{df}{da} \cdot \delta a + \frac{df}{db} \delta b + \frac{df}{dc} \delta c + \dots = L - f + \delta L,$$

$$\text{ou} \quad A\delta a + B\delta b + C\delta c + \dots = L - f + \delta L.$$

Fazendo muitas observações semelhantes, applicaremos o methodo

das equações de condição, ou o dos menores quadrados, a igual número de equações da forma

$$A\delta a + B\delta b + C\delta c + \dots + f - L = 0.$$

(Fr. *Math. Pur.* P. III, n.º 165).

100. Appliquemos o processo ás taboas do Sol.

Chamando L uma longitude do Sol observada, e correcta das perturbações, temos (n.º 20)

$$f = nt + \varepsilon + \Sigma a_i \text{ sen } i(nt + \varepsilon - \omega):$$

onde n continúa a representar o movimento medio em longitude, ε a longitude da epocha, e a excentricidade, ω a longitude do perigeu, e

$$a_1 \text{ sen } 1'' = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \dots, \quad a_2 \text{ sen } 1'' = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \dots$$

E serão:

$$\frac{df}{d\varepsilon} = 1, \quad \frac{df}{d(\varepsilon - \omega)} = \Sigma i a_i \text{ sen } 1'' \cos i(nt + \varepsilon - \omega),$$

$$\frac{df}{de} = \Sigma \frac{da_i}{de} \text{ sen } i(nt + \varepsilon - \omega).$$

1.º Se não tivermos taboas do Sol, calcularemos assim com os elementos approximados as quantidades

$$f, \quad \frac{df}{d(\varepsilon - \omega)} = A, \quad \frac{df}{de} = B,$$

e formaremos as equações de condição (*)

$$\delta\varepsilon + A\delta(\varepsilon - \bar{\omega}) + B\delta e + f - L = 0.$$

(*) A correcção $\delta\varepsilon$ envolve as correcções da linha dos equinoccios e do logar inicial do Sol medio, isto é, do logar do Sol correspondente ao tempo o .

Em quanto á correcção da longitude do perigeu: se chamarmos t_1 o tempo da passagem do Sol por este ponto, teremos

$$\delta\bar{\omega} = \delta\varepsilon + n\delta t_1,$$

que dá $\delta(\varepsilon - \bar{\omega}) = -n\delta t_1$.

E a correcção de longitude δl será

$$\delta l = \delta\varepsilon - \sum i\sigma_i \cos i(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) \operatorname{sen} i'l' \cdot n\delta t_1 + \sum \frac{d\sigma_i}{de} \operatorname{sen} i(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) \cdot \delta e:$$

que, chamando l e l' as longitudes calculada e observada, dá a equação de condição

$$l + \delta l - l' = 0.$$

Se quizessemos formar as equações de condição immediatamente em relação ás ascensões rectas, teríamos (n.º 108), fazendo $m = \tan^2 \frac{1}{2} \omega$.

$$\delta AR = \delta l (1 - 2m \cos 2i + 2m^2 \cos 4l \dots) - \frac{\operatorname{sen} 2l \delta m}{\operatorname{sen} i''} + \frac{m \operatorname{sen} 4l \delta m}{\operatorname{sen} i''} \dots$$

$$= \delta l (1 - 0,0862 \cos 2l + 0,0037 \cos 4l \dots) - 0,2166 \delta m (\operatorname{sen} 2l - 0,043 \operatorname{sen} 4l):$$

e chamando AR e AR' as ascensões rectas calculada e observada, as equações de condição seriam da fórma

$$AR + \delta AR - AR' = 0.$$

D'esta sorte determinaríamos conjunctamente o erro $\delta\omega$ da obliquidade.

2.º Se tivermos taboas do Sol, poderemos calcular por ellas a variação Δf da longitude correspondente a uma dada variação $\Delta(\varepsilon - \bar{\omega})$; e teremos

$$A = \frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \bar{\omega})}.$$

Similhantermente, sendo E a maxima equação do centro, calcularemos

$$B = \frac{\Delta f}{\Delta E} \cdot \frac{\Delta E}{\Delta e}, \quad \text{ou} \quad B \delta e = \frac{\Delta f}{\Delta E} \delta E.$$

E as equações de condição tomarão a fórma

$$\delta \varepsilon + \frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \bar{\omega})} \delta(\varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{\Delta f}{\Delta E} \delta E + f - L = 0.$$

No que supponmos

$$\frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \bar{\omega})} = \frac{\delta f}{\delta(\varepsilon - \bar{\omega})}, \quad \frac{\Delta f}{\Delta E} = \frac{\delta f}{\delta E}.$$

101. Supponhamos, por exemplo, que a anomalia media $nt + \varepsilon - \bar{\omega}$, correspondente ao tempo da observação, é 198° . Abrindo a taboas ix das taboas do Sol do sr. Monteiro, acha-se, depois de interpolar de $10'$ em $10'$, que as diferenças segundas da equação do centro são constantes, e que a $\Delta(\varepsilon - \bar{\omega}) = 10'$ de augmento da anomalia media corresponde a diminuição da equação do centro $\Delta f = -0',315$: logo

$$\frac{\Delta f}{\Delta(\varepsilon - \bar{\omega})} = -0',315.$$

Procurando na mesma taboa o logar onde é maxima a equação do centro, conhece-se que a variação secular de E é $0',286$; e procurando a variação secular da equação do centro correspondente á anomalia media 198° , acha-se $0',085$: logo

$$\frac{\Delta f}{\Delta E} = -\frac{0,085}{0,286} = -0,2972.$$

Teremos assim, para o tempo da observação de que se tracta, a equação de condição

$$\delta \varepsilon - 0,0315 \delta (\varepsilon - \bar{\omega}) - 0,2972 \delta E + f - L = 0.$$

E similhantemente formaremos as equações correspondentes aos tempos das outras observações.

As taboas de M. Leverrier dariam

$$\delta \varepsilon - 0,0314 \delta (\varepsilon - \bar{\omega}) - 0,2945 \delta E + f - L = 0.$$

102. Se o medio movimento n não fosse bem conhecido, como realmente é, seria necessario acrescentar a cada equação de condição o termo $t\delta n$, e usar de $\delta (nt + \varepsilon - \bar{\omega}) = t\delta n + \delta (\varepsilon - \bar{\omega})$ em logar de $\delta (\varepsilon - \bar{\omega})$; o que tornaria aquella equação em

$$\delta \varepsilon + t\delta n + A [t\delta n + \delta (\varepsilon - \bar{\omega})] + B\delta E + f - L = 0.$$

CAPITULO X

Tempo verdadeiro, tempo medio, e equação do tempo

103. Os dias solares verdadeiros differem dos medios por ser desigual o movimento do Sol na sua orbita, e por serem desiguaes as projecções dos arcos eguaes da ecliptica sobre o equador.

Sejam l a longitude do Sol, e a a sua ascensão recta.

Differenciando a expressão $\text{tang } a = \cos \omega \text{ tang } l$,

resulta
$$\delta a = \frac{\cos \omega}{\cos^2 d} \delta l.$$

Por onde se vê que: a partir dos equinoccios, onde $\cos d = 1$, é $\delta a < \delta l$; juncto dos solsticios, onde $\cos d = \cos \omega$, é $\delta a > \delta l$; e temos o quadro seguinte:

A	corresponde
$\cos d \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \sqrt{\cos \omega}$	$\delta a \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \delta l.$

Quando é $\cos d = \sqrt{\cos \omega}$, ou $\delta a = \delta l$, a differença $l - a$ toca o seu maximo; e substituindo em $\text{sen } a = \cot \omega \text{ tang } d$, resulta

$$\text{tang } a = \sqrt{\cos \omega} = \cot l, \text{ tang } (l - a) = \frac{1 - \cos \omega}{2\sqrt{\cos \omega}}.$$

104. Os astrónomos, querendo illudir a falta de uniformidade dos dias solares, procedente das duas causas referidas, sem comtudo se afa-

starem muito do uso civil, imaginam um *sol medio*, que, partindo do perigeu ao mesmo tempo que o Sol verdadeiro, e andando uniformemente, coincide com elle no mesmo ponto passada uma revolução solar anomalistica; e imaginam um *sol equatorial*, que, partindo do equinoccio ao mesmo tempo que o medio, se move com uma velocidade igual á d'este Sol, e o encontra no mesmo equinoccio no fim d'uma revolução solar tropica, de sorte que a ascensão recta do primeiro é sempre igual á longitude do segundo.

105. O angulo horario do Sol equatorial, convertido em tempo na razão de 15° por hora, é o *tempo medio*; o angulo horario do Sol verdadeiro, convertido em tempo do mesmo modo, é o *tempo verdadeiro*; e a differença d'estes dois tempos, que serve para converter um no outro, é a *equação do tempo*.

Vê-se pois que a *equação do tempo* é a differença entre as ascensões rectas do Sol equatorial e do Sol verdadeiro, isto é, a differença entre a longitude do Sol medio e a ascensão recta do Sol verdadeiro, convertida em tempo.

106. Para achar o valor da equação do tempo, sejam: M a longitude media do Sol; μ a ascensão recta $\mathcal{N}C$ do meridiano (Fig. 10), contada, como aquella longitude, do equinoccio medio; a a ascensão recta do Sol verdadeiro, contada do equinoccio apparente; e ψ a nutação em longitude.

Como a nutação desloca igualmente todos os pontos da terra, as intersecções C, C' do meridiano com o equador são o mesmo ponto physico, em qualquer posição d'estes dois circulos; e porque a intersecção I do equador medio com o verdadeiro, considerada como uma charneira em volta da qual girou o primeiro equador para tomar a posição do segundo, tambem é o mesmo ponto physico, temos $IC = IC'$.

Mas, se de \mathcal{N} abaixarmos sobre o equador verdadeiro o arco perpendicular $\mathcal{N}\mathcal{N}_1$, será $I\mathcal{N} = I\mathcal{N}_1$, por ser $\mathcal{N}\mathcal{N}_1$ muito pequeno; logo $\mathcal{N}C = \mathcal{N}_1C'$. E a ascensão recta do meridiano, referida ao equinoccio apparente, será

$$\mathcal{N}'C' = \mathcal{N}\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1C' = \psi \cos \omega + \mu.$$

Por tanto é claro que temos:

$$T. \text{ med.} = T = \frac{\mu - M}{15}, \quad T. \text{ verd.} = T' = \frac{\mu + \psi \cos \omega - a}{15},$$

Equação do tempo, $T' - T = E = \frac{\psi \cos \omega + M - a}{15}$.

107. Chamando Q a equação do centro, e P a somma das perturbações, é

$$l = M + \psi + Q + P,$$

o que substituído na equação do tempo dá

$$E = \frac{l - a + \psi \cos \omega - Q - P - \psi}{15}$$

108. A redução $l - a$ é pequena, e póde achar-se em serie convergente, como convém. Para isso temos

$$\frac{\operatorname{tang} l - \operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} l + \operatorname{tang} a} = \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \omega = m;$$

ou $\operatorname{sen}(l - a) = -m \operatorname{sen}(l - a - 2l),$

que dá (Franc. Math. Pur. P. iv, pag. 77)

$$l - a = \frac{m \operatorname{sen} 2l}{\operatorname{sen} 1''} - \frac{m^2 \operatorname{sen} 4l}{2 \operatorname{sen} 1''} + \dots$$

109. Substituindo a expressão de $l - a$ na de E, resulta emfim

$$E = - \frac{Q + P - \frac{m \operatorname{sen} 2l}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{m^2 \operatorname{sen} 4l}{2 \operatorname{sen} 1''} \dots + 2\psi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \omega}{15}$$

Esta formula, que póde reduzir-se a taboa, como fez Delambre na sua Astronomia, converte o tempo medio em verdadeiro, e inversamente, pelas equações

$$T' = T + E, T = T' - E.$$

110. Como os maximos valores de $l - a$, Q , P , ψ , são respectivamente: $2^{\circ}28',2$; $1^{\circ}55',3$; $0',7$; $0',3$: a equação do tempo é $< 17^m.40^s$.

E com effeito o seu maximo valor é actualmenté 16^m19^s .

111. A definição de tempo medio, como se deu no n.º 105, fixa o valor do tempo medio absoluto em qualquer instante dado, por exemplo no instante do equinoccio medio; e dá a quantidade, que se deve acrescentar a esse tempo para ter aquelle que corresponde a outro qualquer instante.

Com effeito, determinado o instante da passagem do Sol pelo perigeu, e a longitude d'este ponto, como se disse nos n.ºs 93 e 100, essa longitude será a ascensão recta do Sol equatorial no mesmo instante; e tirando-a da ascensão recta do meridiano, a differença, convertida em tempo na razão de 15° por hora, será o tempo medio. Acrescentando pois a este tempo o intervallo de tempo medio que deve decorrer desde o instante da passagem pelo perigeu até que o Sol medio percorra em longitude o complemento para 360° da longitude do perigeu, teremos o tempo medio absoluto correspondente ao instante do equinoccio medio.

Por exemplo, segundo o resultado de Delambre, deduzido de muitas observações do Sol de Maskeline, temos

Passagem pelo perigeu em 30 de dezembro de 1780	0,419449	temp. sid. app.
Eq. do ponto eq. medio em ascensão recta	— 827	
	0,41945727	temp. sid. med.
Longitude do perigeu convertida em tempo	0,754373	
29 de dezembro e	0,66508427	tempo medio
Tempo necessario para percorrer o complemento da longit. do perig. a 360° .	82,01978097	
Equinoccio medio, março de 1781.	21,68486524	

112. Calculando os valores da equação do tempo, acha-se que ella

é nulla quatro vezes no anno. O mesmo faz ver a comparação das posições dos tres astros, Sol verdadeiro, Sol medio, e Sol equatorial, das quaes resulta a differença da ascensão recta entre o primeiro e o terceiro, ou a equação do tempo.

Sejam S'_v o Sol verdadeiro, S''_m o Sol medió, e S'''_e o Sol equatorial, todos projectados no equador.

Desde os equinoccios até os solsticios vai S''_m adiante de S'''_e ; e o contrario desde os solsticios até os equinoccios. Desde o perigeu até o apogeu vai S'_v adiante de S''_m ; e o contrario desde o apogeu até o perigeu.

Temos assim os sóes na ordem seguinte:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Perigeu. } S'_v S''_m & \text{Equinoccios. } S''_m S'''_e \\ \text{Apog. } S'_v S''_m & \text{Solsticios } S'''_e S''_m \end{array} \right\}$$

113. Calculando o maximo valor de $S'''_e - S''_m$ (n.º 103) pela formula

$$\text{tang } (S'''_e - S''_m) = \frac{1 - \cos \omega}{2\sqrt{\cos \omega}},$$

e suppondo,

$$\omega = 23^\circ.27'.25'',$$

acha-se o maximo afastamento que podem ter os dois sóes,

$$S'''_e - S''_m = 2^\circ.28'.13''.0,$$

o qual tem logar, quando são

$$\text{tang } S'''_e = \cot S''_m = \sqrt{\cos \omega},$$

isto é, quando são

$$S'' = 43^{\circ}45'53'',5 \text{ e } S''' = 46^{\circ}14'6'',5.$$

Mas a maxima equação do centro $1^{\circ}55'18'',3$, ainda que tivesse logar em uma epocha tal que nella o Sol medio e o Sol verdadeiro ficassem equidistantes do solsticio, apenas daria para o maximo afastamento de S' e S'' ,

$$\text{tang} \frac{(S' - S'')}{2} = \frac{\text{tang } 57' 3'' 9,2}{\cos \omega}, \quad S' - S'' = 2^{\circ}5'41'',5$$

menor que o maximo afastamento de S'' e S''' . Logo entre cada equinoccio e o solsticio immediato deve sempre haver algum tempo em que S''' não esteja entre S'' e S' .

114. Attendendo ao que fica dicto nos dois numeros precedentes, vê-se que tem actualmente logar para todo o anno o seguinte quadro, no qual estão collocados os tres sóes segundo a sua ordem de precedencia, e se designam pelos numeros (0) os quatro casos em que S' deve encontrar S''' , isto é, em que deve ser nulla a equação do tempo:

Perig.	$S'' S' S''' -$	
Eq. da Prim.	$S'' S''' S' (0)$ 15 de abril
	$S' S' S''' +$ 14 de junho
Solst. do Estio.	$S''' S' S' -$	
Apogeu	$S''' S' S'' (0)$ 31 de agosto
Eq. do Outomno.	$S' S' S''' +$	
Solsticio do Inverno	$S' S' S'' (0)$ 24 de dezembro
Perig.	$S''' S'' S' -$	

Temos pois a equação do tempo: negativa e crescente desde 24 de dezembro até 11 de fevereiro seguinte, em que toca o maximo negativo — 14^m31^s : negativa e decrescente desde 11 de fevereiro até 15 de abril, em que é nulla: positiva e crescente desde 15 de abril até 13 de maio, em que toca o maximo positivo + 3^m53^s : positiva e decrescente desde 13 de maio até 14 de junho, em que é nulla pela segunda vez: negativa e crescente desde 14 de junho até 26 de julho, em que toca o maximo negativo — 6^m13^s : negativa e decrescente desde 26 de julho até 31 de agosto, em que é nulla pela terceira vez: positiva e decrescente desde 31 de agosto até 3 de novembro, em que toca o maximo positivo, e absoluto, + 16^m18^s : e finalmente positiva e decrescente desde 3 de novembro até 24 de dezembro, em que é nulla pela quarta vez.

O que dá o seguinte quadro :

Maximo neg.	— 14^m31^s	11 de fevereiro
Nulla	(0)	15 de abril
Maximo pos.	+ 3^m53^s	13 de maio
Nulla	(0)	14 de junho
Maximo neg.	— 6^m13^s	26 de julho
Nulla	(0)	31 de agosto
Maximo posit., absol.	+ 16^m18^s	3 de novembro
Nulla	(0)	24 de dezembro.

CAPITULO XI

Formação das taboas astronomicas

115. A longitude do perigeu no instante da passagem do Sol por este ponto (n.º 93) é a do Sol medio no mesmo tempo, segundo a convenção que definiu o lugar d'aquelle astro ficticio (n.º 104).

Se á longitude assim determinada ajunctarmos o movimento medio durante o intervallo de tempo decorrido desde o instante da passagem pelo perigeu até o principio do anno seguinte; e se á longitude do perigeu no mesmo instante accrescentarmos o movimento d'este ponto durante aquelle intervallo; teremos a longitude media do Sol, e a longitude do perigeu, no principio do anno.

Estas longitudes no principio do anno, que são o ponto de partida das taboas astronomicas, chamam-se: as *epochas*.

116. Em algumas taboas astronomicas as epochas correspondem ao instante do meio dia; em outras ao da meia noite: em umas ao dia 31 de dezembro do anno precedente, nos annos communs; e ao 1.º de janeiro do proprio anno, nos bissextos: e na maior parte das que actualmente servem, sempre ao 1.º de janeiro; havendo então duas taboas de movimentos desde a epocha, uma para os annos communs, outra para os bissextos, do mez de fevereiro por diante.

Em quanto á origem das anomalias, contam-se do perigeu em umas taboas, e do apogeu em outras. A primeira d'estas contagens substituiu a segunda, que era geralmente adoptada, para comprehender os cometas.

117. Nas taboas do Sol arranjadas pelo sr. J. Monteiro da Rocha as anomalias contam-se do perigeu; as epochas correspondem ao meio dia medio do 1.º de janeiro no meridiano do Observatorio de Coimbra; e os movimentos medios decompõem-se nos que têm logar desde o 1.º dia de janeiro até o 1.º dia do mez, e desde o 1.º dia do mez até o dia, as horas, os minutos e os segundos, para os quaes se querem a longitude media, a anomalia media, e os argumentos das perturbações.

As taboas que dão estas quantidades medias, isto é, que dão a

parte $\varepsilon + nt$ da formula (12) do n.º 23, e os argumentos da equação do centro, do raio vector elliptico, e das perturbações, são as I até VII.

118. Tendo determinado a longitude media, a longitude do perigeu, e os argumentos das perturbações, por meio das taboas que dão as epochas e os movimentos medios, formaremos as taboas da equação do centro Q, da parte elliptica da expressão do raio vector, e das perturbações.

119. As taboas da equação do centro, e do raio vector elliptico, são formadas com o argumento anomalia media $= A$, pelas formulas (*):

$$Q = \left\{ \begin{aligned} & \left(2e - \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{96}e^3 \right) \text{sen } A + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^3 \right) \text{sen } 2A \\ & + \left(\frac{13}{12}e^2 - \frac{43}{64}e^3 \right) \text{sen } 3A + \frac{103}{96}e^3 \text{sen } 4A + \frac{1097}{960}e^3 \text{sen } 5A, \end{aligned} \right.$$

$$r = \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{5}{192}e^3 \right) \cos A - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^3 \right) \cos 2A \\ & - \left(\frac{3}{8}e - \frac{45}{128}e^2 \right) \cos 3A - \frac{1}{3}e^3 \cos 4A - \frac{125}{384}e^3 \cos 5A. \end{aligned} \right.$$

Advertindo que, tanto nestas taboas, como nas das perturbações, se costumam ajunctar constantes, que tornam sempre positivas as funções respectivas, e cuja somma se tira, por compensação, no fim do calculo, ou previamente das longitudes medias.

Taes são as taboas IX e X do sr. Monteiro.

120. Da variação secular da excentricidade e , ou da variação secular da maxima equação do centro E , que está ligada com e pela relação

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{R''} \right) - \frac{11}{768} \left(\frac{E}{R''} \right)^3 - \frac{587}{983040} \left(\frac{E}{R''} \right)^5 - \frac{40583}{2642411520} \left(\frac{E}{R''} \right)^7,$$

(*) Nas taboas de Delambre aproveitam-se os termos até o em e^4 ; nas de Hansen até o em e^5 .

resultam as variações seculares de Q e r , que se inscrevem nas respectivas taboas ao lado de cada funcção.

A variação secular de E , para o numero t de annos julianos, desde 1750, dá (Mec. Cel. t. 3.º pag. 157)

$$\delta E = -t.0'',171793 - t^2.0'',0000068194.$$

121. As perturbações da longitude e do raio vector dependem das massas da Lua e dos planetas perturbadores, e das posições d'estes corpos e da terra.

Os planetas, a cuja acção mais importa attender, pela sua massa e pela sua distancia á terra, são Venus, Marte, Jupiter e Saturno.

Nas taboas do sr. Monteiro aproveitam-se unicamente os termos principaes das perturbações que dependem dos argumentos formados por combinações da longitude media da terra com as longitudes medias da Lua, de Venus, de Marte e de Jupiter; argumentos que 'nessas taboas têm os titulos de B, C, D, E, F, G, H, I, K, e dão as perturbações na taboa xi (*).

122. A somma da longitude media (n.º 117) com a equação do centro (n.ºs 119 e 120), e com as perturbações da longitude (n.º 121), dá a longitude verdadeira referida ao equinoccio medio.

A somma da distancia elliptica (n.ºs 119 e 120) com as perturbações da distancia (n.º 121) dá a distancia verdadeira.

123. As taboas, em que se acham as coordenadas do Sol com exactidão de segundos, devem ainda conter a sua latitude.

A latitude, que não chega a $0'',9$, depende tambem das posições dos planetas e da terra; mas o seu termo mais importante é proporcional ao seno da differença entre as longitudes da Lua e do nodo da orbita lunar.

As taboas solares, que hoje se reputam mais exactas, são as de Leverrier.

As de Hansen, cujos resultados pouco differem dos d'aquellas, têm uma disposição engenhosa que facilita consideravelmente o calculo.

(*) A analyse das taboas solares do Sr. Monteiro, e das modificações que ellas exigem em virtude das correccões indicadas por Bessel para as taboas de Delambre, pode ver-se no *Calculo das Ephemerides de Coimbra*, publicado em 1849.

CAPITULO XII

Do movimento da terra, e das suas consequencias

124. Vimos na primeira parte que o movimento diurno apparente dos astros se podia e devia explicar pelo movimento de rotação da terra.

O movimento annuo do Sol e as suas consequencias igualmente se podem explicar pelo movimento annuo de translação da terra.

Quando supponmos que a terra se move, os phenomenos passam-se como sendo real o movimento do Sol: se a velocidade de translação da terra é igual á apparente do Sol; se o eixo medio dos pólos, conservando a sua inclinação constante sobre a ecliptica, gyra em volta do eixo da ecliptica com uma velocidade igual á precessão dos equinoccios; e se o eixo apparente gyra em torno do medio em uma ellipse, conformemente com as leis da nutação.

125. A illumination e o aquecimento da terra nas diversas estações serão os mesmos, quer se supponha que a collocação do Sol nas respectivas posições relativamente ao equador é devida ao movimento d'este astro, quer se supponha que é devida ao movimento da terra. É o que mostram claramente as figuras (Fig. 11 e 12).

Com effeito, se o Sol se movesse na ecliptica, achar-se-hia nos dois solticios na direcção dos raios CT , CT' (Fig. 11); e os seus raios cairiam a prumo nos pontos T , T' dos tropicos, cujas verticaes o encontrassem.

Na hypothese do movimento da terra, esta, seis mezes depois de estar na posição que indica a figura 11, passará á posição da figura 12, na qual o eixo AB se conserva paralelo, e está no plano ΘAB da figura 11: portanto na figura 12 o raio CT' ficará opposto a CT ; e os pontos T , T' dos tropicos receberão a luz solar a prumo como acontecia na hypothese da immobildade da terra (Fig. 11).

Similhantermente se podem comparar nas duas hypotheses as explica-

ções da illuminação e do aquecimento no equador, e nos diversos parallelos.

Como a parte illuminada da terra é separada da escura pelo plano tirado pelo centro d'este corpo perpendicularmente ao seu raio vector, as diversas posições do Sol (n.ºs 42 e 43), combinadas com o movimento da rotação diurna da terra, mostram como se faz na superficie a distribuição da luz e do calor (Fig. 13 a 18).

126. A precessão dos equinoccios e a differença entre o anno tropico e o anno sideral explicam-se egualmente bem.

Se no equinoccio da Primavera o Sol está na direcção TQS da linha dos equinoccios (Fig. 19); se a terra se move depois na ecliptica no sentido TOO'; e se a linha dos equinoccios vai retrogradando em volta do eixo dos polos, de sorte que no fim do anno tropico tome a direcção T'Q'S, em que torna a acontecer o mesmo equinoccio: o angulo $STS' = TST'$ será a precessão annua dos equinoccios; e a terra deverá ainda percorrer este angulo, para que se complete o anno sideral; ou antes, deverá percorrer um angulo egual ao movimento de precessão durante o anno sideral.

127. Os dois movimentos de translação e de rotação da terra são uma consequencia muito simples das leis da Mechanica. Para que elles tenham logar basta que a terra recebesse primitivamente uma ou muitas impulsões, cuja resultante não passasse pelo seu centro de gravidade.

Então é sabido que o movimento de translação seria o mesmo que se as forças fossem transportadas ao centro de gravidade parallelamente a si mesmas; e o movimento de rotação o mesmo que se o centro de gravidade estivesse fixo.

128. Em quanto á rotação vimos na primeira parte (n.ºs 176 a 173) que não só a analogia e as considerações geologicas a tornavam muito verosimil, mas que provas directas demonstram a sua verdade.

Em quanto á translação da terra, não só a analogia, e a consideração da pequenez da terra relativamente ao Sol a tornam verosimil, mas adiante veremos que o phenomeno da aberração da luz estabelece directa e concludentemente a sua realidade.

CAPITULO XIII

Utilidade da theoria do Sol na Chronologia

129. Seja O a medida d'um phenomeno astronomico, dado por uma observação antiga, ou deduzido d'essa observação; e t o tempo, a que elle corresponde. E supponhamos que se conhece a relação analytica

$$O = ft \dots\dots\dots (a).$$

que liga o phenomeno com o tempo.

Se for dado o tempo, a que anda attribuida a observação, e quizermos verificar a exactidão d'essa data, calcularemos O pela equação (a) , e veremos se o resultado do calculo é conforme com o da observação.

Se for dado o phenomeno observado, e quizermos determinar o tempo da observação, resolveremos em ordem a t a equação (a) .

130. Para exemplo do grande auxilio que as provas astronomicas prestam ás investigações chronologicas, extrahiremos do n.º 421 do tomo 4.º da Astronomia de Biot a discussão de duas observações antiquissimas, que os missionarios citam como achadas nos livros chinezes, e feitas na cidade de Lo-yang.

A primeira d'estas observações foi feita por Tcheou-Koung, que, segundo os calculos de Freret e do P. Gaubil, vivia no anno de 1100 antes da era christã. Segundo ella, a sombra projectada ao meio dia, no solsticio de verão, por um gnomon de 8^p era de 1^p,5.

A segunda observação, feita no solsticio do inverno pelo mesmo principe, e com o mesmo gnomon, deu-lhe a sombra meridiana de 13^p.

Chamando pois z , z' , as distancias zenithaes do bordo superior do Sol dadas pelas duas observações; d , d' , os semidiametros do Sol; $r - p$

$r' - p'$, as refrações menos as parallaxes; z, z' as distancias zenithaes verdadeiras do centro: e suppondo que $0^m,76 + 25^\circ$ são a pressão e a temperatura que convém mais provavelmente ao nivel de Lo-yang e ao solsticio: teremos

$$\lg z_1 = \frac{1,5}{8}, \quad \lg z'_1 = \frac{13}{8}.$$

Logo

$z_1 \dots = 10^\circ 37' 10'' 77$	$z'_1 \dots = 58^\circ 23' 33'' 00$
$r - p = 9,04$	$r' - p' = 1\ 26,78$
$d \dots = 15\ 47,70$	$d' \dots = 16\ 14,03$
$z \dots = 10\ 53,751$	$z' \dots = 58\ 41,1381$

D'onde resultam

Latitude de Loy-ang $\dots \dots \dots \frac{z + z'}{2} = 34^\circ 47' 10'' 66,$

Obliquidade da ecliptica em 1100 $\dots \dots \dots \frac{z' - z}{2} = 23^\circ 54' 3,15.$

131. Em quanto á latitude, três observações feitas pelos missionarios em Ho-non-fou, que, segundo todos elles, era antes Lo-yang, deram-lhes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 34^\circ 52' 8'' \\ 34\ 46\ 15 \\ 34\ 43\ 15 \end{array} \right.$$

Meio $\dots 34\ 47\ 13$

que differre menos de $3''$ da que dão as duas observações do gnomon.

Em quanto á obliquidade, a expressão de (ω) do n.º 52 dá, para

$t = -(1750 + 1100) = -2850$, o valor $(\omega) = 23^{\circ}.51'.58''.03$, que differe menos de $2'.6''$ do que dão as duas observações do gnomon.

Esta coincidência prova a veracidade das duas observações referidas pelos missionarios, que alguns auctores quizeram pôr em duvida. Com effeito, se os missionarios podiam arranjar falsas observações chi-

nezas de modo que $\frac{z+z'}{2}$ fosse a latitude que lhes deram as suas pro-

prias observações, não podiam forjal-as de modo que dessem a obliqui-

dade $\frac{z'-z}{2}$ na epocha anterior de 2850 annos ao anno 1750; porque em

1712, quando estes missionarios observaram a latitude de Lo-yang, nem ainda se tinha pôr bem averiguado se a obliquidade era variavel, ou se era constante.

CAPITULO XIV

Da rotação do Sol

132. Observam-se muitas vezes no Sol manchas escuras de forma irregular, que, depois de se mostrarem como filetes no bordo oriental do astro, parecem percorrer o seu disco, com um periodo de arredondamento e outro de achatamento gradual, até que, no fim de quasi 14 dias, desaparecem do bordo occidental, tendo voltado á primeira figura de filetes.

Estes phenomenos explicam-se pela esphericidade do Sol e pela sua rotação de occidente para oriente, cujas circumstancias vamos estudar.

133. Na primeira parte vimos como, ou por observações absolutas, ou por observações differenciaes, se podem determinar as ascensões rectas e as declinações do centro do Sol e das manchas; e tambem como d'estas coordenadas se podem deduzir as longitudes e as latitudes geocentricas.

A fim de tornar mais facil o estudo de que tractamos, passemos das coordenadas geocentricas das manchas para as heliocentricas, isto é, referidas ao centro do Sol. A circumstancia de ser a distancia das manchas ao centro do Sol igual ao raio d'este astro facilita a passagem.

134. Sejam T, S, M, m os centros da terra e do Sol, a mancha, e a projecção d'esta na ecliptica.

E chamemos (Fig. 20):

$\gamma TS = \Theta$ a longitude do Sol,

$\gamma Tm = l$ a longitude geocentrica da mancha,

$MTm = \lambda$ a latitude geocentrica da mancha,

$\gamma'ST = \delta$ a longitude heliocentrica da terra,

$\gamma'Sm = l'$ a longitude heliocentrica da mancha,

$MSm = \lambda'$ a latitude heliocentrica da mancha,

$ST = R$ a distancia do Sol á terra,

Semid. apparente do Sol = Δ ,

$SM = r = R \text{ sen } \Delta$ o raio do Sol.

Nos triangulos MTS , MTm , STm , SMm , dos quaes o segundo e o quarto são rectangulos, conhecem-se, ou primitivamente, ou por deducção successiva, as partes: MS , ST , MTS ; MT , MTm ; mT , TS , mTS ; Sm ou Mm , SM . E deduzem-se d'elles as equações que servem para resolver o problema:

$$\cos T = \cos(l - \Theta) \cos \lambda, \text{ sen}(S + T) = \frac{R}{r} \text{sen } T,$$

$$MT = \frac{r \text{sen } S}{\text{sen } T}, \text{ MT sen } \lambda = r \text{sen } \lambda',$$

$$\text{sen}(\delta - l') = \frac{MT \cos \lambda}{r \cos \lambda'} \text{sen}(l - \Theta), \cos(\delta - l') = \frac{\cos S}{\cos \lambda'}$$

que dão as formulas:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos T &= \cos(l - \Theta) \cos \lambda, \text{ sen}(S + T) = \frac{\text{sen } T}{\text{sen } \Delta}, \\ \text{sen } \lambda' &= \frac{\text{sen } S \text{sen } \lambda}{\text{sen } T}, \text{ sen}(\delta - l') = \frac{\text{sen } S \text{sen}(l - \Theta) \cos \lambda}{\text{sen } T \cos \lambda'}, \\ \cos(\delta - l') &= \frac{\cos S}{\cos \lambda'}, l' = \delta - (\delta - l') = 180^\circ - \Theta - (\delta - l') \end{aligned} \right.$$

Mas, como $l - \Theta$ e λ são ângulos muito pequenos, que não passam de $16'$, estas formulas podem ainda simplificar-se na practica, e reduzir-se a:

$$\left\{ \begin{aligned} T^2 &= (l - \Theta)^2 + \lambda^2, \quad \text{sen } (S + T) = \frac{T \text{ sen } l''}{\text{sen } \Delta}, \\ \text{sen } \lambda' &= \frac{\lambda \text{ sen } S}{T}, \quad \text{sen } (\delta - l') = \frac{(l - \Theta) \text{ sen } S}{T \cos \lambda'}, \\ \cos (\delta - l') &= \frac{\cos S}{\cos \lambda'}, \quad l' = 180^\circ + \Theta - (\delta - l'). \end{aligned} \right.$$

O ponto onde está a mancha deve ser mais proximo de nós que o opposto na superficie do Sol; e porisso, d'entre os dois valores de $S + T$ que dá a segunda equação, devemos escolher o que fizer mais pequeno o valor de $\text{sen } S$.

135. Calculadas as longitudes e latitudes heliocentricas das manchas, podemos deduzir d'ellas as coordenadas angulares referidas ao eixo de rotação do Sol, ao seu equador, e ao nodo ascendente d'este sobre a ecliptica, do qual chamaremos Ω a longitude heliocentrica.

A segunda das formulas (2) do n.º 18 da primeira Parte, suppondo nella:

$$a = l' - \Omega$$

$$b = \lambda'$$

i = inclinação do equador solar sobre a ecliptica,

α = AR da mancha contada do nodo sobre o equador solar.

β = a sua declinação relativamente ao mesmo equador, a qual é constante para todas as posições de cada mancha:

dá

$$\begin{aligned} \text{sen } \beta &= \text{sen } \lambda' \cos i - \text{sen } (l' - \Omega) \cos \lambda' \text{ sen } i \\ &= \text{sen } \lambda' \cos i + \cos \lambda' \cos l' \text{ sen } \Omega \text{ sen } i - \cos \lambda' \text{ sen } l' \cos \Omega \text{ sen } i, \end{aligned}$$

que, fazendo

$$\frac{r \operatorname{sen} \beta}{\cos i} = C, \quad - \operatorname{tang} i \operatorname{sen} \Omega = A, \quad \operatorname{tang} i \cos \Omega = B,$$

$$r \operatorname{sen} \lambda' = z, \quad r \cos l' \cos \lambda' = x, \quad r \operatorname{sen} l' \cos \lambda' = y,$$

toma a forma

$$z = Ax + By + C.$$

Esta equação é a do plano do paralelo da mancha; e x , y , z são as coordenadas rectangulares da mancha referidas á linha dos equinoccios, á dos solsticios, e ao eixo da ecliptica, que se cortam no centro do Sol.

136. Reunindo muitas observações da mesma mancha, para cada uma das quaes se calcularão l' , λ' , como fica dicto, poderemos applicar-lhes o methodo das equações de condição, ou o dos menores quadrados, na determinação de A , B , C .

Depois as equações

$$\operatorname{tang} \Omega = -\frac{A}{B}, \quad \operatorname{tang} i = \sqrt{A^2 + B^2},$$

darão Ω e i , isto é, a posição do equador solar.

Para cada mancha, o valor de C é a distancia do centro do Sol ao ponto onde o seu paralelo corta o eixo da ecliptica, e β é a declinação do paralelo.

Para cada posição da mancha, a primeira das equações (18) do n.º 2 da primeira parte,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{sen} (l' - \Omega) \cos i + \operatorname{tang} \lambda' \operatorname{sen} i}{\cos (l' - \Omega)},$$

dará a sua AR referida ao equador solar e ao nodo.

137. Sejam α, α' , duas d'estas ascensões rectas d'uma mancha, e t, t' , os tempos correspondentes.

Suppondo o movimento de rotação uniforme, a formula

$$\Theta = (t' - t) \cdot \frac{360^\circ}{\alpha' - \alpha}$$

dará o tempo periodico da rotação do Sol.

Mas, porque os movimentos de translação da terra e de rotação do Sol são ambos de occidente para oriente, a revolução apparente ou synodica das manchas resulta da differença d'aquelles movimentos, e porisso é maior que a revolução periodica.

Uma mancha projectada na direcção do centro do Sol tornaria a projectar-se na mesma direcção no fim do seu tempo periodico, se a terra

não tivesse movimento em longitude. Seja $\delta l = 360^\circ \cdot \frac{\Theta}{365,25637}$ o mo-

vimento da terra em longitude siderica durante o tempo periodico. O movimento synodico da mancha no tempo Θ , foi $360^\circ - \delta l$; conseguintemente, se chamarmos Θ' a revolução synodica, será

$$\Theta' = \Theta \cdot \frac{360^\circ}{360^\circ - \delta l}$$

138. Combinando muitas observações de 29 manchas, M. Laugier concluiu que o periodo da rotação do Sol é $25^d,34$; e que em 1840 a inclinação do equador solar sobre a ecliptica era $i = 7^\circ 9' 12''$, e a longitude do nodo $\Omega = 75^\circ 8'$. Donde a revolução synodica de $27^d,23$.

Pela discussão de onze observações referidas por Lalande, achou Delambre numeros não muito differentes d'estes; e tambem não differem consideravelmente d'elles os que M. Faye recentemente deduziu das observações de M. Carrington e H. Sporer.

Constituição physica do Sol

139. Alem da sombra que constitue a parte interna das manchas, ha algumas vezes em volta d'ella uma penumbra menos carregada, e outras vezes a penumbra sómente; ao lado d'estas umas porções mais luminosas, a que se deu o nome de *faculas*; e em outras regiões uma especie de rugas brilhantes, que se chamaram *luculos*.

Outro phenomeno notavel é que nos eclipses totaes do Sol, além da coroa luminosa que cerca este astro, se apresentam protuberancias coradas de diferentes formas, e ás vezes como nuvens destacadas do disco solar.

Tem-se proposto diversas explicações d'estes phenomenos, as quaes não passam de hypotheses mais ou menos plausiveis. Diremos qual é hoje a mais seguida.

Suppõem-se o nucleo do Sol um corpo espherico escuro, solido ou liquido; e em volta d'elle tres atmospheras: a mais interior opaca e reflectora; a media gazosa e luminosa, chamada *photosphera*; a externa transparente.

As aberturas feitas nas duas primeiras explicam, por sua grandeza relativa e pela condensação dos bordos, a sombra, a penumbra e as faculas; os movimentos na segunda explicam os luculos; e finalmente as nuvens fluctuantes na terceira explicam o phenomeno, de que acabamos de fallar, observado nos eclipses totaes do Sol.

Luz Zodiacal

140. Observa-se, principalmente depois do occaso do Sol na proximidade do equinoccio da primavera, e antes do nascimento do Sol na proximidade do equinoccio do outomno, um fuso luminoso, chamado *luz zodiacal*, que semelha em intensidade a da via lactea, mas tirante na base a rosea-amarellada, e que se estende de sobre o horizonte, figurando um triangulo cujo vertice está a grande distancia.

O eixo da luz zodiacal parece passar pelo centro do Sol; e o seu plano coincidir, exacta ou proximamente, com a ecliptica.

Se esta luz provém d'uma zona de vapores abandonados primitivamente pelo Sol quando se condensou, se de corpos que circulam em volta do Sol, não se pode ainda saber; mas o que parece averiguado é que o phenomeno tem uma relação necessaria com a posição do Sol.

NOTA 1.^a*Sobre os climas*

141. Quando o Sol está no horizonte, é

$$\cos P = -\cot D \cot \Delta.$$

No maior dia, que tem lugar quando é $\Delta = 90^\circ - \omega$, será

$$\cot D = -\cos P \cot \omega.$$

Se quizermos pois que a duração d'elle seja $12^h + 2k$, isto é, que seja então

$$P = 15(6^h + k) = 90^\circ + 15k,$$

deverá ser

$$\cot D = \cot \omega \operatorname{sen} 15k.$$

142. Quando $D = 90$, é $k = 0$, ou o dia de 12^h .

Quando o Sol toca o horizonte na sua passagem inferior, é $P = 180^\circ$,

ou $\frac{P}{15} = 12$, e por conseguinte o dia de 24^h . E no paralelo, onde isso

tem lugar, é

$$15k = 90^\circ, \text{ ou } D = \omega.$$

Assim, entre $D = 90^\circ$ e $D = \omega$, a duração do maior dia fica entre 12^h e 24^h .

143. Os paralelos, em que os maiores dias variam meia hora, dividem este intervalo em 24 climas.

Portanto, fazendo

$$k = 15^m.i \text{ ou } 15k = 3^\circ 45'.i = hi,$$

o paralelo, que termina o clima i , será dado pelas formulas:

$$h = 3^\circ 45', \cot D = \cot \omega \text{ sen } hi.$$

144. Desde $D = \omega$ até $D = 0$, o Sol deixa por algum tempo de mergulhar-se no horizonte na passagem inferior.

Quando está no horizonte na passagem inferior, é (Fig. 21)

$$ZB = D + \Delta = 90^\circ.$$

No paralelo $D = \omega$ tem isto lugar, como vimos no (n.º 142), no maior dia do anno, isto é, quando é $\Delta = 90^\circ - \omega$, ou $\mathcal{V}\odot = l = 90^\circ$ (Fig. 22).

Nos outros dias do anno serão eguaes os dias correspondentes a $l = 90^\circ \pm p$. E como a mesma figura dá

$$\cos \Delta = \text{sen } \omega \text{ sen } l = \text{sen } \omega \cos p,$$

vê-se que, estando o Sol no horizonte, é

$$\text{sen } D = \text{sen } \omega \cos p.$$

145. Desde $l = 90^\circ - p$ até $l = 90^\circ + p$

o Sol estará sempre sobre o horizonte.

No polo, onde $D = 0$, e por conseguinte $p = 90^\circ$, o Sol estará seis mezes sobre o horizonte, desde $l = 0$ até $l = 180^\circ$.

Assim a duração da presença do Sol sobre o horizonte varia de um dia a seis mezes entre $D = \omega$ e $D = 0$.

146. Se dividirmos este intervallo em seis partes, e chamarmos m o movimento diurno do Sol, será no fim de cada uma d'ellas

$$p = 15mi',$$

e porisso $\text{sen } D = \text{sen } \omega \cos 15mi'$,

onde m se pode tomar por 1° .

147. Dividindo pois o hemispherio boreal em 24 climas desde $D = 90^\circ$ até $D = \omega$, e em 6 desde $D = \omega$ até $D = 0$, a primeira das formulas

$$\cot D = \cot \omega \text{ sen } (3^\circ 45' i) \dots (1),$$

$$\text{sen } D = \text{sen } \omega \cos (15mi') \dots (2),$$

dará os parallelos que terminam os primeiros, desde $i = 1$ até $i = 24$; e a segunda dará os parallelos que terminam os segundos, desde $i' = 1$ até $i' = 6$.

Nos primeiros o maior dia variará de meia hora de clima para clima. Nos segundos a duração da presença do Sol sobre o horizonte variará de um mez de clima para clima.

148. Fazendo o mesmo no hemispherio austral, ficará a terra dividida em 60 climas, dos quaes 12 são entre os polos e os circulos polares; e os outros 48 entre os circulos polares e o equador.

NOTA 2.^a*Sobre o minimo crepusculo.*

149. A grandeza e as circunstancias do crepusculo dependem da equação

$$4(\cos^2 \Delta \cos^2 D + \cos \Delta \cos D \operatorname{sen} a) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c + \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 \Delta \operatorname{sen}^2 D \operatorname{sen}^2 c = 0,$$

que resulta da eliminação de P entre as duas do n.º 48.

150. Quando na passagem pelo meridiano inferior a distancia do Sol ao horizonte é menor que o abaixamento crepuscular a , o crepusculo abrange toda a noite, de sorte que não ha intervallo de trevas entre os crepusculos da tarde e da manhan. Mas quando o crepusculo diminue, toca um minimo que vamos determinar.

151. Para evitar a resolução de equações, diferenciemos em ordem a Δ as duas do n.º 48,

$$\cos P = \cot \Delta \cot D, \quad \cos(P + c) = -\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D} - \cot \Delta \cot D,$$

tomando P e c por variaveis dependentes; façamos $\delta c = 0$; e dividamos a segunda equação diferencial pela primeira. Resultará

$$\frac{\operatorname{sen}(P + c)}{\operatorname{sen} P} = \frac{\operatorname{sen} a \cos \Delta + \cos D}{\cos D}.$$

Tirando das mesmas equações do n.º 48 as expressões de

$$2 \operatorname{sen}^{\frac{2}{2}} P, 2 \operatorname{cos}^{\frac{2}{2}} P, 2 \operatorname{sen}^{\frac{2}{2}} (P + c), 2 \operatorname{cos}^{\frac{2}{2}} (P + c),$$

e substituindo em

$$\frac{4 \operatorname{sen}^{\frac{2}{2}} (P + c) \operatorname{cos}^{\frac{2}{2}} (P + c)}{4 \operatorname{sen}^{\frac{2}{2}} P \operatorname{cos}^{\frac{2}{2}} P} = \frac{\operatorname{sen}^2 (P + c)}{\operatorname{sen}^2 P},$$

vem

$$\frac{\operatorname{sen}^2 (P + c)}{\operatorname{sen}^2 P} = \frac{[\operatorname{sen} a + \operatorname{cos} (\Delta - D)][\operatorname{sen} a + \operatorname{cos} (\Delta + D)]}{\operatorname{cos} (\Delta - D) \operatorname{cos} (\Delta + D)}.$$

Finalmente, igualando as duas expressões de $\frac{\operatorname{sen}^2 (P + c)}{\operatorname{sen}^2 P}$, resulta

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} \Delta \operatorname{cos} D}{\operatorname{cos}^2 D - \operatorname{sen}^2 \Delta} = \frac{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{cos}^2 \Delta + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} \Delta \operatorname{cos} D}{\operatorname{cos}^2 D},$$

ou $\operatorname{sen} a \operatorname{cos}^2 D + \operatorname{sen} a \operatorname{cos}^2 \Delta + 2 \operatorname{cos} \Delta \operatorname{cos} D = 0,$

que dá $\operatorname{cos} \Delta = \frac{\operatorname{cos} D}{\operatorname{sen} a} (-1 \pm \operatorname{cos} a):$

isto é, $\operatorname{cos} \Delta = -\operatorname{cos} D \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} a;$

e $\operatorname{cos} \Delta = -\operatorname{cos} D \cot^{\frac{1}{2}} a,$ ou $\operatorname{cos} D = -\operatorname{cos} \Delta \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} a.$

152. Se differenciássemos em ordem a D , e fizessemos $\delta c=0$, acharíamos os mesmos resultados.

Vê-se pois que, procurando o minimo crepusculo em ordem a Δ ou em ordem a D , se chega, em ambos os casos, á mesma equação do segundo grau, cujas raizes são

$$\cos \Delta = -\cos D \operatorname{tang} \frac{1}{2} a, \quad \cos \Delta = -\cos D \cot \frac{1}{2} a;$$

o que procede da symetria das equações propostas relativamente a Δ e D .

153. Da primeira e segunda, e da terceira, das equações do n.º 151 tiram-se:

$$\frac{\cos P - \cos (P+c)}{\cos P + \cos (P+c)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{tang} (P + \frac{1}{2} c) = -\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a + 2 \cos \Delta \cos D},$$

$$\frac{\operatorname{sen} (P+c) - \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} (P+c) + \operatorname{sen} P} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cot (P + \frac{1}{2} c) = \frac{\operatorname{sen} a \cos \Delta}{\operatorname{sen} a \cos \Delta + 2 \cos D};$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} c = -\frac{\operatorname{sen}^2 a \cos \Delta}{(\operatorname{sen} a + 2 \cos \Delta \cos D)(\operatorname{sen} a \cos \Delta + 2 \cos D)},$$

que, em virtude de $\cos \Delta = -\cos D \operatorname{tang} \frac{1}{2} a$, dá

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} c = \frac{2(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} a \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a \cos^2 D - 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cos^2 D)}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{tg} \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{2(\operatorname{sen} a - \cos^2 D \operatorname{sen} a)}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{tg} \frac{1}{2} a},$$

ou $\operatorname{sen} \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen} D}$.

Este valor tambem se deduz d'uma construcção geometrica muito simples, como se pode ver na Astr. de Schubert, t. 1.º, n.º 119.

154. Portanto ambos os systemas

$$\cos \Delta = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cos D, \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen} D},$$

$$\cos D = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cos \Delta, \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen} \Delta},$$

satisfazem ás condições $\frac{\delta c}{\delta \Delta} = 0, \quad \frac{\delta c}{\delta D} = 0$.

Mas, em ordem a Δ , a primeira equação do segundo systema daria

$$\cos^2 D < \cos^2 \Delta, \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}^2 D > \operatorname{sen}^2 \Delta, \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen}^2 \Delta} > \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen}^2 D};$$

além de que, deveria ser

$$\cos^2 D \cot^2 \frac{1}{2} a < \cos^2 66^\circ 32', 5,$$

isto é, D entre $86^\circ 23'$ e $93^\circ 37'$.

Em ordem a D , a primeira equação do primeiro systema daria

$$\cos^2 \Delta < \cos^2 D, \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}^2 \Delta > \operatorname{sen}^2 D, \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen}^2 D} > \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{\operatorname{sen}^2 \Delta};$$

além de que [deveria ser

$$\cos^2 \Delta < \tan^2 \frac{1}{2} a,$$

isto é, Δ entre $80^\circ 53'$ e $99^\circ 7'$.

Por conseguinte, quando se procura o minimo em ordem a Δ , o menor valor é dado pelo primeiro systema; e quando se procura o minimo em ordem a D , o menor valor é dado pelo segundo systema.

Em todo o caso a solução do problema exige que no logar e na occasião, de que se tracta, haja dia e noite (n.º 45).

Finalmente a segunda das formulas relativas ao minimo em ordem a Δ mostra que, no logar cuja colatitude é $D=90^\circ$, este minimo é menor que em todos os outros logares; e a primeira dá $\Delta=90^\circ$ para $D=90^\circ$. O mesmo mostram as formulas do minimo em ordem a D , com a mudança de Δ em D e D em Δ .

Portanto o minimo absoluto do crepusculo tem logar no equador nos dias dos equinoccios; e o seu valor é

$$\frac{c}{15} = \frac{a}{15}.$$

Sobre o problema do minimo crepusculo podem consultar-se a *Astronomia de Schubert*, t. 1.º, n.ºs 118 e 119, e a *Astronomia de Delambre*, t. 1.º, cap 4.º

SECÇÃO SEGUNDA

THEORIA DOS PLANETAS

CAPITULO I

155. O que dissemos na secção primeira predispõe a suppor que os movimentos dos planetas são regulados por leis semelhantes ás que presidem ao movimento relativo do Sol. Vamos em seguida estudal-os.

Os planetas, vistos da terra, aparentam, como já notámos, tal irregularidade de movimentos, que umas vezes parecem dirigir-se de occidente para oriente, outras em sentido contrario, e outras enfim não mudar de posição entre as estrellas; isto é, que umas vezes parecem *directos*, outras *retrogrados*, e outras *estacionarios*.

Mas, além d'estas apparencias communs a todos os planetas, ha outras, parte das quaes pertence exclusivamente ao grupo dos que se chamam *inferiores*, e parte ao dos chamados *superiores*. Começaremos por tractar separadamente de cada um d'estes grupos.

I

Planetas inferiores

156. Se, tendo observado pouco depois do pôr do Sol o occaso de Venus, que alguns dias antes não se via, repetirmos a observação nos dias seguintes, vel-o-hemos afastar-se successivamente do Sol, tornando-se mais e mais tempo visível sobre o horizonte; mas a velocidade do afastamento, depois de crescer por muitos dias, começará a diminuir, e chegará pôr fim a ser insensível. Partamos d'esse instante.

Depois de tocar assim o seu maximo desvio e parecer immovel relativamente ao Sol, o planeta começará a approximar-se d'este, até que, passado algum tempo, ficará envolvido nos raios solares, tornando-se invisível. Mas, decorridos alguns dias, apparecerá de manhã no oriente um pouco antes do Sol; e successivamente antecipará o seu nascimento, até que, no fim d'um intervallo igual ao precedente, se tornará outra vez immovel: apresentando d'este modo entre as duas digressões o movimento synodico regressivo, isto é, de oriente para occidente em relação ao Sol.

De novo se approximarâ então do Sol, antecipando cada vez menos o nascimento; e, passado algum tempo, envolver-se-ha outra vez nos raios solares. Depois desembaraçar-se-ha d'estes, e continuará, por outro intervallo igual, a apparecer no occidente, retardando cada vez mais o seu occaso sobre o occaso do Sol, até se tornar immovel relativamente a elle: apresentando-se assim como progressivo o seu movimento synodico entre as duas ultimas digressões, isto é, como de occidente para oriente em relação ao Sol.

As maximas elongações, isto é, os maximos desvios angulares relativamente ao Sol, variam de $44^{\circ}57'$ a $47^{\circ}48'$.

157. Na primeira metade do movimento regressivo synodico o planeta, que, visto por um telescópio, começa por apresentar-se quasi semi-

circular, vai cada vez brilhando menos, até se reduzir a um pequeno filete luminoso, e tornar-se por fim invisível. Na outra metade do mesmo movimento reproduzem-se eguaes circumstancias, mas em ordem inversa.

Na primeira metade do movimento synodico progressivo o planeta, começando por apparecer meio illuminado, como fica dicto, torna-se cada vez mais brilhante, até se apresentar como um circulo em todo o seu esplendor. Na outra metade do mesmo movimento repetem-se eguaes apparencias, mas em ordem inversa.

Em todas estas phases, que apresenta o disco do planeta, a convexidade do segmento illuminado fica voltada para a região onde está o Sol, e as pontas do crescente ficam voltadas para a região opposta. Assim, quando o planeta é visível de tarde, as pontas ficam voltadas para o oriente; e quando é visível de madrugada, ficam voltadas para o occidente.

158. O semidiametro apparente do planeta cresce na primeira metade do seu movimento regressivo, até se tornar maximo; e diminue, em ordem inversa, na outra metade. Continua a diminuir na primeira metade do movimento progressivo, até ser minimo; e cresce, em ordem inversa, na outra metade.

Os seus valores maximo e minimo tocam os limites $32''{,}4$ e $4''{,}7$.

159. As circumstancias do movimento de Venus que ficam descritas, passam-se como gyrando este corpo em volta do Sol em uma orbita interior á que descreve a terra em volta do mesmo centro. Mas as apparencias seriam as mesmas se o planeta gyrasse em volta do Sol em uma orbita de raio menor que o da orbita solar, e o systema d'elle e do Sol fosse transportado 'nesta ultima orbita.

160. Na segunda supposição o planeta descreveria em volta do Sol S (Fig. 23) a orbita $PP'P''P'''$, e esta orbita seria transportada na ecliptica com o Sol em volta da terra T.

Em P seria maxima a elongação occidental PTS; desde P o planeta approximar-se-ia do Sol, até a conjunção superior em P'; desde P' afastar-se-ia, até a maxima digressão oriental STP''; depois tornaria a approximar-se até a conjunção inferior em P''; e finalmente tornaria a afastar-se até voltar á maxima digressão occidental PTS.

161. Comparando os nascimentos e os occasos do planeta com os das estrellas; ou, mais exactamente, determinando as suas posições successivas no ceu, vistas da terra, por meio das ascensões rectas e declinações, reconhece-se que ha tambem retrogradações, estações, e movimentos directos relativamente ás estrellas.

O periodo da retrogradação de Venus relativamente ás estrellas é 42

dias, parte antes e parte depois da conjuncção inferior; e a elongação, no principio e no fim d'elle, é $28^{\circ}51'$. O periodo do seu movimento directo relativamente ás estrellas é de 542 dias, parte antes e parte depois da conjuncção superior. Com effeito ha duas posições nas quaes o planeta fica estacionario, para se tornar depois o seu movimento geocentrico de directo em retrogrado e inversamente. É o que mostra a mesma figura, onde se representaram os logares consecutivos P_2 e P_2' do planeta na sua orbita, e os correspondentes S e S' do Sol, na epocha em que o angulo P_2TP_2' , nullo em P'' e maximo $> STS'$ em P''' (u.^o 185), é igual a STS' ; de sorte que o movimento geral em volta de T , que transporta S a S' , repõem TP_2' em TP_2 , isto é, dá o movimento geocentrico nullo: e o mesmo se pode representar em P_2'' , á esquerda de TP''' .

Em quanto ao movimento synodico, de que tractámos no n.^o precedente, é: *mov. geoc. pl. — mov. sol.*, desde P_2'' até P_2 ; e — (*mov. geoc. pl. + mov. sol.*), desde P_2 até P_2'' . Mas, como a primeira d'estas expressões é negativa desde P_2'' até P e desde P'' até P_2 , a digressão synodica é d'occidente para oriente desde P até P'' , e d'oriente para occidente desde P'' até P ; o que tudo concorda com o que se disse no mesmo numero precedente.

162. Os phenomenos que referimos a Venus, como typo dos planetas inferiores, têm logar para Mercurio, e poderiam explicar-se do mesmo modo. Só ha differença nos numeros que os medem.

Assim, os diametros apparentes d'este planeta tocam o maximo $5'',64$ e o minimo $2'',49$.

A sua maxima elongação varia de $17^{\circ}36'$ até $28^{\circ}20'$.

O tempo da sua retrogradação relativamente ás estrellas é 22 dias; e a elongação no principio e no fim d'elle é 18° . O tempo do seu movimento directo é 94 dias.

Em virtude da pequenez das suas elongações, e da inferioridade da sua distancia ao Sol, este astro observa-se com difficuldade; e raras vezes sem auxilio de telescopio.

163. Suppondo as orbitas circulares, podem determinar-se com facilidade os raios d'ellas pelas maximas elongações, e tambem pelos maximos e minimos diametros apparentes.

Sejam (Fig. 23) ρ' , ρ , os raios SP, ST , das orbitas de Mercurio ou Venus, e do Sol; E a maxima elongação STP , ou STP'' ; D' o minimo diametro apparente em P' ; e D'' o maximo em P'' .

Das equações

$$\rho' = \rho \operatorname{sen} E, \rho' = \rho - TP''', \rho' = TP''' \cdot \frac{D''}{D'} - \rho,$$

resultam as formulas:

$$\rho' = \rho \operatorname{sen} E, \quad \rho' = \rho \frac{D'' - D'}{D'' + D'},$$

que determinam ρ' , quando se conhece E , ou quando se conhecem D' e D'' .

Applicando estas formulas aos dados precedentes, temos:

$$\text{Mercurio} \left\{ \begin{array}{l} E = 22^{\circ}58', D'' = 11'',28, D' = 4'',99, \\ \frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{sen} 22^{\circ}58' = \frac{6,29}{16,27} = 0,39, \end{array} \right.$$

$$\text{Venus} \left\{ \begin{array}{l} E = 46^{\circ}22', D'' = 59'',84, D' = 9'',62. \\ \frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{sen} 46^{\circ}22' = \frac{50,22}{69,46} = 0,72. \end{array} \right.$$

164. A concordancia d'estes resultados nos quatro pontos P , P' , P'' , P''' justifica nelles a hypothese, que admittimos, de circularidade ou quasi circularidade da orbita.

Para comparar nos outros pontos os diametros apparentes, que dá a observação, com aquelles que se deduzem da hypothese de circularidade da orbita, o triangulo STP_1 , fazendo $STP_1 = E_1$, $P_1T = R_1$, dá

$$\rho'^2 = \rho^2 + R_1^2 - 2\rho R_1 \cos E_1,$$

$$\text{ou} \quad R_1 = \rho \cos E_1 \pm \sqrt{\rho'^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2 E_1}.$$

E porque, chamando R' , R''' , as distancias TP' , TP''' , maxima e minima,

são

$$\rho = \frac{R' + R''}{2}, \quad \rho' = \frac{R' - R''}{2},$$

ou

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{R' - R''}{R' + R''} = \frac{D'' - D'}{D'' + D'};$$

e, chamando D_1 o diametro apparente que corresponde á distancia R_1 , é

$$\frac{R_1}{\rho - \rho'} = \frac{D''}{D_1};$$

a eliminação de R_1 dará

$$D_1 = \frac{2D''D'}{(D' + D'') \cos E_1 \pm \sqrt{(D'' - D')^2 - (D'' + D')^2 \sin^2 E_1}}.$$

Para cada elongação E_1 , o valor de D_1 , calculado por esta formula, deve concordar com aquelle que dá a observação, no caso de ser sensivelmente exacta a hypothese de circularidade da orbita.

Ainda que seja difficil a medição dos diametros apparentes, por causa da sua pequenez, e a da elongação, esta concordancia verifica-se com approximação sufficiente para justificar aquella hypothese.

II

Planetas superiores

165. Observando Marte desde que de madrugada começa a desembaraçar-se dos raios solares, vê-se que de dia para dia se vai antecipando o seu nascimento ao do Sol; e que a antecipação diaria umas vezes é maior, outras menor que a dos nascimentos das estrellas.

O exame attento das circumstancias d'esta antecipação faz conhecer que o planeta umas vezes tem movimento directo, outras movimento retrogrado, e outras é estacionario, relativamente ás estrellas; phenomenos que concordam com os que se observam nos planetas inferiores.

A duração do movimento retrogrado é de 73 dias, e a do movimento directo de 707 dias.

O movimento é directo entre a conjunção e a distancia angular 136° , tanto para occidente como para oriente d'ella; e é retrogrado no resto da revolução synodica, para oriente e occidente da opposição.

Relativamente ao Sol, o movimento do planeta é sempre regressivo, e por isso o seu nascimento, a sua passagem meridiana, e o seu occaso sempre se antecipam aos do Sol, umas vezes mais, outras menos.

166. Na hypothese do movimento do Sol em torno da terra, explicar-se-iam (Fig. 24) as circumstancias analogas áquellas que similhantemente se explicaram para os planetas inferiores, pelo systema de Tycho-Brahe, suppondo que o planeta se move em volta do Sol numa orbita de raio maior que a distancia do Sol á terra, e que esta orbita é transportada com o Sol na orbita solar.

Como o angulo SPT sempre é pequeno em Marte $\left[< \text{arc} \left(\text{sen} = \frac{p}{p'} \right) \right]$,

e ainda menor nos outros planetas superiores, uma grande parte do he-

hemispherio illuminado pertence sempre ao hemispherio visivel. Por isso o disco de Marte apenas se apresenta ovado quando o angulo P é mais consideravel, o que acontece nas quadraturas; em Jupiter esta deformação é pequenissima; e nos outros é insensivel: como logo melhor se verá.

Veremos que todas as apparencias, que ficam descriptas, se explicam egualmente, e com maior simplicidade, suppondo que tanto os planetas, como a terra, circulam em volta do Sol.

167. Os diametros apparentes dos planetas superiores, minimos na conjunção e maximos na opposição, são os seguintes (Astr. de Biot, 2.^a ed., § 3.^o, pag. 9):

	Minimo	Maximo
De Marte	3'',56	17'',07
De Jupiter	30'',13	44'',485
De Saturno	16,30	20,12
De Urano	3,69	4,11
De Neptuno		2'',7

168. Com os valores dos diametros apparentes minimo e maximo podemos calcular os raios das orbitas planetarias, suppostas circulares. Porque, usando das denominações precedentes, é (Fig. 24) em P' e P''' ,

$$\frac{TP'}{TP''} = \frac{D''}{D'} = \frac{\rho' + \rho}{\rho' - \rho},$$

ou

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{D'' + D'}{D'' - D'}.$$

Applicando esta formula aos dados do numero precedente, acharemos:

$$\text{Marte} \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{2063}{1351} = 1,53$$

$$\text{Jupiter} \quad \frac{p'}{p} = \frac{74,615}{14,355} = 5,20$$

$$\text{Saturno} \quad \frac{p'}{p} = \frac{36,42}{3,82} = 9,53$$

$$\text{Urano} \quad \frac{p'}{p} = \frac{7,80}{0,42} = 18,57.$$

169. No que dissemos relativamente aos planetas superiores, quando fallámos dos seus movimentos, se vê que as conjunções e as opposições correspondem respectivamente ás conjunções superiores e ás conjunções inferiores dos planetas inferiores; e que todos estes corpos são opacos, tornando-se visíveis pela luz solar que reflectem para a terra.

III

Phases e brilho dos planetas

170. *Phases.* As phases explicam-se suppondo que o planeta é opaco, e que o illumina a luz do Sol.

Nesta hypothese a parte do disco, que se vê, deve pertencer a ambas as regiões, illuminada e visível.

A curva de contacto do planeta com o cone circumscripto a elle e ao Sol separa a região illuminada da escura: e a curva do contacto do planeta com o cone circumscripto ao mesmo corpo e á terra separa a região visível da invisível. Mas, como os diametros do planeta, do Sol e da Terra são muito pequenos relativamente ás distancias do primeiro d'estes corpos aos outros dois, os cones circumscriptos podem tomar-se por cylindros, sendo então as porções illuminada e visível separadas respectivamente da escura e da invisível pelos planos perpendiculares no centro do planeta ás rectas que unem este ponto com os centros do Sol e da Terra.

Todos os phenomenos das phases passam-se de modo que esta explicação lhes é applicavel. Assim, em P''' (Fig. 23) é o planeta invisível; em P apresenta-se em semicirculo; em P' em circulo inteiro; e em P'' outra vez em semicirculo.

Só ha que descontar os effeitos da irradiação, que faz parecer um pouco maior a parte illuminada, e tanto mais, quanto maior é a porção de luz que recebe.

171. O plano tirado por P (Fig. 25) perpendicularmente a SP separa a parte illuminada prq da escura; e o perpendicular a TP separa a parte visível rqs da invisível. Da terra T sómente se vê a parte rq , illuminada e visível, pelo angulo optico rTq , que vamos determinar.

$$\text{É} \quad \text{tang } PTq = \frac{qk}{PT - kP} = \frac{r \cos p}{R - r \text{ sen } p};$$

designando r o raio do planeta, R a distancia á terra, e p a parallaxe annua SPT.

$$\text{É tambem} \quad \text{tang } PTr = \frac{r}{R};$$

$$\text{e finalmente} \quad rTq = PTq + PTr.$$

Por serem PTq , PTr pequenos angulos, nunca maiores que o semi-diametro apparente do astro $\frac{D}{2}$, podemos tomal-os pelas suas tangentes:

$$\text{será pois} \quad rTq = \frac{D}{2} \left(1 + \frac{\cos p}{1 - \frac{D}{2} \sin p} \right);$$

$$\text{ou} \quad rTq = \frac{D}{2} (1 + \cos p),$$

desprezando os quadrados de $\frac{D}{2}$.

Nas conjunções superiores dos planetas inferiores, e nas conjunções e opposições dos planetas superiores, é $\cos p = 1$; por conseguinte a terra recebe raios luminosos de todo o disco D . Nas conjunções inferiores dos planetas inferiores é $\cos p = -1$; e por isso o disco todo escuro.

Nos planetas inferiores cresce p desde 0 na conjunção superior, até 180° na inferior, e d'ahi até 360° na superior. D'onde resultam as phases respectivas, desde a completa illuminação até á inteira obscuração.

Nos planetas superiores a minima phase é dada pela maxima parallaxe annua,

$$\text{sen } p = \frac{p}{p'}$$

D'estas a maior é a relativa a Marte,

$$\text{sen } p = \frac{1}{1,52}, \text{ ou } \cos p = 0,75,$$

que dá

$$qTr = 1,75 \times \frac{1}{2} D = D - \frac{1}{8} D.$$

Por isso 'neste planeta percebe-se a pequena ellipticidade do disco; mas nos outros superiores, para os quaes é $\cos p$ bem mais proximo da unidade, a ellipticidade é insensivel.

Com effeito o observador vê o semicirculo limite externo (projectado na figura em rP) sobre o plano perpendicular em P a PT ; e projecta sobre o mesmo plano o semicirculo limite interno (projectado na figura em Pq). Por conseguinte o contorno exterior apparente é um semicirculo; e o interior é uma semi-ellipse, que tem $r \cos p$ por eixo menor. Quando $\cos p = 1$, esta semi-ellipse é um semicirculo, que com o primeiro completa o circulo; quando $\cos p$ é positivo e < 1 , a concavidade da semi-ellipse fica voltada para a do semicirculo; quando $\cos p = 0$, a semi-ellipse reduz-se ao semi-eixo maior; quando $\cos p$ é negativo e < 1 , a convexidade da semi-ellipse fica voltada para a concavidade do semi-circulo; e finalmente quando $\cos p = -1$, a semi-ellipse torna-se em um semicirculo, que coincide com o exterior, ficando escuro todo o disco.

172. *Brilho.* O maior brilho do planeta não tem logar na conjunção superior, onde a phase é maxima; porque, se a quantidade de luz

recebida pelo observador é directamente proporcional á phase, tambem é inversamente proporcional ao quadrado da distancia á terra. Esta quantidade é assim proporcional a

$$\frac{1 + \cos p}{R^2} = \frac{1 + \frac{\rho'^2 + R^2 - \rho^2}{2R\rho'}}{R^2} = \frac{\rho'^2 + R^2 - \rho^2 + 2\rho'R}{2\rho'R^2}.$$

A condição do maximo relativamente a R dá

$$R = -2\rho' + \sqrt{3\rho'^2 + \rho'^2}.$$

Por exemplo, para Venus é $\rho' = 0,723$, sendo $\rho = 1$; o que dá $R = 0,43$. E a elongação T, dada pela formula

$$\cos T = \frac{R^2 + 1 - \rho'^2}{2R}, \text{ ou } \cos \frac{1}{2} T = \sqrt{\frac{(R + 1 + \rho')(R + 1 - \rho')}{4R}},$$

é $T = 39^\circ 39'$, para este valor de R correspondente ao maximo brilho do planeta.

IV

Lei de Bode

173. Comparando entre si as distancias de Mercurio, Venus, Terra, Marte, Jupiter e Saturno ao Sol, suspeitou Kepler que existia algum planeta entre Marte e Jupiter; e Bode achou uma lei que sensivelmente as ligava.

Esta lei, desde a distancia de Venus inclusivamente, pôde exprimir-se pela formula

$$4 + 3 \cdot 2^{n-1};$$

devendo n tomar-se desde 1, e sendo unidade a decima parte do raio da orbita terrestre. A distancia do primeiro planeta, Mercurio, é 4.

Por esta formula as distancias seriam as seguintes:

4 7 10 16 28 52 100 196 388.

Ora os raios das orbitas de Mercurio, Venus, Terra, Marte, Ceres, Jupiter, Saturno, Urano, e Neptuno são:

3,9 7,2 10 15,2 27,7 52 95,4 191,8 300,4;

por conseguinte vê-se que os seis primeiros satisfazem á lei quasi exactamente, e o septimo e oitavo com pouca differença.

O nono afasta-se d'ella consideravelmente; mas, se notarmos que o

illustre geometra Leverrier, descobridor da existencia d'este planeta, lhe assignara o semi-eixo maior 361,5 bem mais conforme com a lei de Bode, e que é possível que as perturbações de Urano, attribuidas exclusivamente a Neptuno, não sejam porventura devidas só a elle, abster-nos-hemos de excluir desde já com segurança aquella distancia do numero das que se conformam com a mesma lei.

174. Como acabamos de dizer, o pequeno planeta Ceres, descoberto por Piazzì no principio do anno de 1801, satisfaz á lei de Bode. E tambem a não contradizem os outros 77 planetas telescopicos, que successivamente se têm descoberto até hoje na mesma região.

Adiante daremos a lista d'estes planetas, e faremos conhecer os elementos d'elles que se têm determinado.

175. No estado actual dos nossos conhecimentos sobre o systema do mundo devemos considerar como empirica e fortuita a lei de Bode; mas é possível que ella seja o resultado de leis harmonicas do universo, para nós ainda incompreensiveis.

CAPITULO II

Revoluções periodicas dos planetas

176. Sejam, em dias: T a revolução tropica da terra á roda do Sol; T' a revolução tropica do planeta á roda do Sol, e S a sua revolução synodica. Os movimentos diurnos respectivos serão:

$$\frac{360^\circ}{T}, \quad \frac{360^\circ}{T'}, \quad \frac{360^\circ}{S}.$$

Nos planetas inferiores é $\frac{360}{T'} > \frac{360}{T}$,

e $\frac{360^\circ}{S} = \frac{360^\circ}{T'} - \frac{360^\circ}{T}$.

Nos planetas superiores é $\frac{360^\circ}{T} > \frac{360^\circ}{T'}$,

$$e \quad \frac{360^\circ}{S} = \frac{360^\circ}{T} - \frac{360^\circ}{T'}$$

Por conseguinte :

$$\frac{360^\circ}{T'} = \frac{360^\circ}{T} \mp \frac{360^\circ}{S};$$

tendo logar o signal superior para os planetas superiores, e o signal inferior para os planetas inferiores. D'onde resulta

$$T' = \frac{TS}{S \mp T} \dots \dots (1).$$

177. Sejam : l, l' as longitudes heliocentricas do planeta nas epochas de duas conjuncções ou de duas opposições muito afastadas uma da outra; i o numero de revoluções tropicas, que têm decorrido entre ellas; e t o tempo que separa as duas observações. O movimento em longitude neste intervallo foi $360^\circ \cdot i + l' - l$; e por isso é

$$\frac{T'}{t} = \frac{360^\circ}{360^\circ \cdot i + l' - l},$$

que dá

$$T' = \frac{360^\circ \cdot t}{360^\circ \cdot i + l' - l} \dots \dots (2).$$

178. As longitudes l, l' podem obter-se pela observação; ou tambem pelas taboas do Sol, porque nas conjuncções e nas opposições as longitudes heliocentricas do planeta ou coincidem com as da terra ou differem d'ellas 180° .

O numero i acha-se facilmente, suppondo conhecida já com alguma approximação a revolução periodica do planeta.

179. Por exemplo, segundo as observações de Marte na opposição, feitas por Cassini em 1683, e por Santini em 1809, temos:

$$\begin{array}{r} 1683 \text{ abril, } 11^{\text{d}}0^{\text{h}}11^{\text{m}} \text{ t. m. Paris} \quad l = 201^{\circ}41'30'' \\ 1809 \text{ abril, } 8^{\text{d}}13^{\text{h}}12^{\text{m}}25'' \quad l' = 198 \text{ } 45 \text{ } 54,9 \\ l - l' = \quad \quad \quad 2 \text{ } 55 \text{ } 35,1 \end{array}$$

O intervallo das observações em dias é $46017^{\text{d}}, 54265$; e como a revolução synodica do planeta é proxivamente 780^{d} , o numero de revoluções synodicas neste intervallo é 59. D'onde resulta mais exactamente

$$S = \frac{46017^{\text{d}}, 54265}{59} = 779^{\text{d}}, 95835.$$

E com este valor de S acha-se (eq. 1)

$$T' = \frac{365,24225 \times 779,95835}{779,95835 - 365,24225} = 686^{\text{d}}, 91267.$$

Dividindo por este valor de T' o intervallo de tempo decorrido entre as duas observações $46017^{\text{d}}, 54265$, vê-se que é $i = 67$; e a equação (2) dá

$$T = \frac{360 \times 46017,54265}{360 \times 67 - 2,92642} = 686^{\text{d}}, 91234.$$

180. Se quizermos a revolução sideral, Θ , e chamarmos p a preces-

são diurna, $p = \frac{50'',25}{365} = \frac{50'',25}{365.3600}$, teremos

$$\frac{360^\circ}{T'} = \frac{360^\circ}{\Theta} + p;$$

o que neste exemplo dá

$$\Theta = \frac{360 \times T'}{360 - pT'} = 686^d,96247$$

(Astron. de Santini, n.º 219 e 220).

181. Advertiremos, como fizemos relativamente ao Sol, que, na determinação dos tempos periodicos e dos movimentos proprios, se devem comparar observações muito distantes, para que os erros d'ellas e os procedentes das desigualdades periodicas não influam sensivelmente nos resultados.

A comparação dos tempos periodicos, assim determinados em epochas muito distantes, mostrará se ha' nelles variações attendiveis.

182. Se ha' taboas do planeta de que se tracta, devem por ellas reduzir-se as longitudes observadas ás medias l, l' . Se não ha' taboas de que se possa usar, convirá, quanto for possivel, escolher occasiões em que a reducção seria commum. O que se consegue nas conjuncções e opposições que comprehendem um numero inteiro de annos.

Para isto, e para prever muitos phenomenos astronomicos importantes, convem achar periodos que estabeleçam a concordancia entre os movimentos da terra e dos planetas; isto é, periodos, depois dos quaes a terra e o planeta voltem á mesma posição relativa, e á mesma posição nas suas orbitas.

O que tudo se reduz a exprimir pela razão de dois numeros inteiros a razão dos movimentos annuos do planeta e da terra.

183. Sejam p, s , estes movimentos annuos; e supponhamos que, pelo processo do maior divisor commum, temos as seguintes operações:

$$s \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} p & r & r' & r'' & r''' & r^{IV} & r^V \\ \hline q & q' & q'' & q''' & q^{IV} & q^V & \dots \end{array} \right.$$

Serão:

$$s = pq + r, p = rq' + r', r = r'q'' + r'', r' = r''q''' + r''', \dots$$

Eliminando successivamente r , depois r' , depois r'' . . . resultam:

$$s = pq + r, sq' = p(qq' + 1) - r',$$

$$s(q'q'' + 1) = p(qq'q'' + q + q'') + r'',$$

$$s(q'q''q''' + q' + q''') = p(qq'q''q''' + q''q''' + qq' + 1) - r''',$$

$$s \left\{ \begin{array}{l} q'q''q'''q^{iv} + q'q'' + q'q^{iv} \\ + q'''q^{iv} + 1 \end{array} \right\} = p \left\{ \begin{array}{l} qq'q''q'''q^{iv} + qq'q'' + qq'q^{iv} + qq'''q^{iv} \\ + q''q'''q^{iv} + q + q'' + q^{iv} \end{array} \right\} + r^{iv}$$

$$s \left\{ \begin{array}{l} q'q''q'''q^{iv}q^v + q'q''q^{iv} \\ + q'q''q^{iv} + q'q^{iv}q^v + q'''q^{iv}q^v \\ + q' + q''' + q^v \end{array} \right\} = p \left\{ \begin{array}{l} qq'q''q'''q^{iv}q^v + qq'q''q^{iv} + qq'q''q^v \\ + qq'q^{iv}q^v + qq'''q^{iv}q^v + q''q'''q^{iv}q^v \\ + qq' + qq''' + qq^v + q''q''' + q''q^v \\ + q^{iv}q^v + 1 \end{array} \right\} - r^v.$$

Por exemplo, a razão

$$\frac{1660823115}{400008472}$$

dos movimentos tropicos de Mercurio e da terra durante um anno juliano dá:

(s)	(p)	(r)	(r')	(r'')	(r''')	(r ^{iv})
1660823115	400008472	60789225	35273122	25516103	9757019	6002065
	4	6	1	1	2	
	(q)	(q')	(q'')	(q''')	(q ^{iv})	

E teremos:

$$s = 4p + 60789225,$$

$$6s = 25p - 35273122,$$

$$7s = 29p + 25516103,$$

$$13s = 54p - 9757019,$$

$$33s = 137p + 6002065.$$

Assim os numeros 13 e 54 dão

$$\frac{s}{p} = \frac{54}{13} - \frac{9757019}{13p};$$

e porisso, em quanto Mercurio descreve no seu movimento tropico 54 vezes a orbita, a terra pouco mais descreve de 13 vezes a sua, e volta proximamente á conjuncção com Mercurio, de que tinha partido.

184. Para achar exactamente o tempo em que os dois corpos voltam á mesma posição relativa, faremos o seguinte:

Sejam n' e n os medios movimentos diurnos de Mercurio e da terra. A terra em 13 annos julianos descreverá o arco $13c + 356'',84$, e Mercurio o arco $54c - 30098'',05$. Portanto, depois de mais t dias, terão os dois corpos descripto respectivamente os arcos

$$13c + 356'',84 + nt, \quad 54c - 30098'',05 + n't;$$

de sorte que tornarão á mesma conjuncção, ou, em geral, á mesma posição relativa, quando fôr

$$356'',84 + nt = - 30098'',05 + n't,$$

isto é, depois do tempo

$$t = \frac{30098,05 + 356,84}{14732,56 - 3548,32} = 2^d,723.$$

Passados pois 13 annos julianos e $2^d,723$, Mercurio e a terra voltarão á mesma posição relativa, e quasi aos mesmos pontos das suas orbitas.

185. A comparação dos tempos periodicos com os raios das orbitas planetarias dá a equação

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3},$$

que é uma das leis geraes do movimento dos corpos celestes.

D'esta equação, combinada com $\frac{n'}{n} = \frac{T}{T'}$, resultam

$$\frac{n'}{n} = \frac{a\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}} \quad \frac{n'a'}{na} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}}$$

Por onde se vê que as velocidades angulares medias n' , e as effectivas $n'a'$, são tanto maiores quanto mais proximos do Sol estão os planetas.

Estações dos planetas

186. O movimento da terra, de que os phenomenos da aberração nos mostrará a realidade, é já para nós muito provavel; e porisso continuaremos a adoptar esta hypothese, explicando 'nella as apparencias das estações e retrogradações, que os planetas apresentam, quando se comparam as suas projecções no ceu com as das estrellas.

187. *Planetas inferiores.* Consideremos (Fig. 26 e 27) um planeta inferior nas suas conjuncções V, superior e inferior; projectando-se 'nellas na esphera celeste em v .

Um pouco antes, e um pouco depois da conjuncção superior (Fig. 26), as suas posições serão V' , V'' , e as da terra serão T' , T'' ; por conseguinte os movimentos apparentes geocentricos $v'T'v$, $v''T''v''$, que se projectam em $v'v$, $v''v''$ na esphera celeste, são *directos*.

Um pouco antes, e um pouco depois da conjuncção inferior (Fig. 27), por serem os arcos $V'V$, $V''V$, maiores que $T'T$, $T''T$ (n.º 185), os movimentos apparentes geocentricos $v'T'v$, $v''T''v''$, que se projectam na esphera celeste em $v'v$, $v''v''$, são *retrogradados*.

Na passagem dos movimentos de retrogradados para directos, e de directos para retrogradados, quando as posições do planeta são taes que, em duas consecutivas muito proximas, as rectas $V'T'$ ou $V''T''$ se conservam paralellas a si mesmas, tem logar as *estações*.

188. *Planetas superiores.* Consideremos agora um planeta superior na conjuncção, e na opposição, projectando-se em m na esphera celeste (Fig. 28 e 29).

Discorrendo como para os planetas inferiores, e attendendo na Fig. 29 a que (n.º 183) os arcos $M'M$, MM'' são menores que $T'T$, TT'' : veremos que, um pouco antes, e um pouco depois da conjuncção (Fig. 28), os movimentos geocentricos $m'T'm$, $m''T''m''$, são directos; que um pouco

antes, e um pouco depois da opposição (Fig. 29) os movimentos geocentricos $m'Tm$, $m''T''m''$ são retrogradados; e que, na separação entre os movimentos retrogradados e os directos, conservando-se paralelas a si mesmas as linhas $m'T'$, $m''T''$, em duas posições consecutivas muito próximas, terão lugar as *estações*.

189. Procuremos resolver analyticamente o problema de determinar as epochas das estações, e os arcos de retrogradação e de movimento directo. Para facilitar esta resolução, que não é necessario obter muito exactamente, supponhamos a orbita do planeta circular, assim como a da terra, e no plano da ecliptica.

Tomemos para eixo dos x (Fig. 30) a linha SX da opposição d'um planeta superior M , e para eixo dos y a perpendicular a ella, SY .

Chamando: ρ , ρ' , os raios das orbitas da terra e do planeta; n , n' , os movimentos medios d'estes corpos; t o tempo decorrido desde a opposição até a estação; e φ o semi-arco de retrogradação $m'T'm$: serão

$$x' = \rho' \cos n't, \quad x = \rho \cos nt, \quad y' = \rho' \sin n't, \quad y = \rho \sin nt,$$

$$e \quad \text{tang } \varphi = \frac{\rho \sin nt - \rho' \sin n't}{\rho' \cos n't - \rho \cos nt}.$$

A condição $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, que caracteriza o parallelismo da direcção de

$T'M'$ em dois tempos consecutivos extremamente proximos, e por conseguinte a epocha da estação, dará

$$\cos (n - n')t = \frac{n\rho^2 + n'\rho'^2}{(n+n')\rho\rho'};$$

$$\text{ou, por ser (n.º 185)} \quad \frac{n}{n'} = \frac{T'}{T} = \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\rho'^{\frac{3}{2}}},$$

$$\cos (n - n')t = \frac{\rho\sqrt{\rho'} + \rho'\sqrt{\rho}}{\rho\sqrt{\rho} + \rho'\sqrt{\rho'}} = \frac{\sqrt{\rho\rho'}}{\rho + \rho' - \sqrt{\rho\rho'}}.$$

Como t pode ser positivo ou negativo, para o mesmo coseno, vê-se que ha duas estações equidistantes da opposição, uma a oriente, outra a occidente d'ella.

190. No triangulo $ST'M'$, cujos angulos S , T' , M' , se chamam, respectivamente, *commutação*, *elongação*, e *parallaxe annua*, temos:

$$\operatorname{tang} \frac{T' - M'}{2} = \cot \frac{S}{2} \cdot \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho};$$

e consequentemente:

$$\operatorname{tang} T' = \operatorname{tang} \left(\frac{T' + M'}{2} + \frac{T' - M'}{2} \right) = \frac{\left(1 + \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \right) \cot \frac{1}{2} S}{1 - \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \cot^2 \frac{1}{2} S},$$

$$\operatorname{tang} M' = \operatorname{tang} \left(\frac{T' + M'}{2} - \frac{T' - M'}{2} \right) = \frac{\left(1 - \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \right) \cot \frac{1}{2} S}{1 + \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \cot^2 \frac{1}{2} S};$$

e porque é

$$\cot^2 \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos S}{1 - \cos S} = \frac{1 + \cos(n - n')t}{1 - \cos(n - n')t} = \frac{(\rho' + \rho)(\sqrt{\rho' + \rho})}{(\rho' - \rho)(\sqrt{\rho' - \rho})},$$

estas expressões reduzem-se a

$$\operatorname{tang} T' = -\frac{\rho'}{\sqrt{\rho(\rho' + \rho)}}, \quad \operatorname{tang} M' = \frac{\rho}{\sqrt{\rho'(\rho' + \rho)}}.$$

Achados os angulos T' , M' , é facil obter o semi-arco de retrogradação φ , pelas formulas:

$$\varphi = m'T'G - m,T'G = 180^\circ - T' - nt,$$

ou $\varphi = H = M' - n't;$

ou tambem substituindo o valor achado de t na expressão de $\text{tang } \varphi$ do numero precedente.

191. Nos planetas inferiores acham-se similhantemente (Fig. 31), depois da conjunção inferior,

	$\cos (n' - n)t = \frac{\rho' \sqrt{\rho} + \rho \sqrt{\rho'}}{\rho' \sqrt{\rho' + \rho} + \rho \sqrt{\rho}} = \frac{\sqrt{\rho \rho'}}{\rho' + \rho - \sqrt{\rho \rho'}}$
	$\text{tang } \varphi = \frac{\rho' \text{ sen } n't - \rho \text{ sen } nt}{\rho \text{ cos } nt - \rho' \text{ cos } n't}$
	$\text{tang } \frac{V' - T'}{2} = \frac{\rho - \rho'}{\rho' + \rho} \cot \frac{n' - n}{2} t,$
	$\text{tang } V' = - \frac{\rho}{\sqrt{\rho'(\rho + \rho')}}; \text{ tang } T' = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho(\rho + \rho')}};$
	$\varphi = 180^\circ - V' - n't,$
ou	$\varphi = T' - nt.$

192. Applicando estas formulas aos diversos planetas, e usando

dos respectivos movimentos medios e eixos maiores das orbitas, acham-se para elles os valores medios de $2t$ e 2φ :

Assim, com

$$n = 1295972'',38, \quad n' = 5381016'',20,$$

$$\rho = 1, \quad \rho' = 0,3870987,$$

sendo n , n' os movimentos medios da terra e de Mercurio em um anno juliano, as formulas do n.º 189 dão

$$2t = 22^{\circ}4,90, \quad T' = 18^{\circ}12', \quad 2\varphi = 13^{\circ}49'.$$

O quadro, que se acha na astronomia de Delambre, relativo aos diversos planetas, é o seguinte:

PLANETA	$2t$	T'	2φ
Mercurio	22 ^d ,90	18 ^o 12'	13 ^o 24'
Venus	42,16	28 51	15 22
Marte	72,76	136 12	14 41
Ceres	97,45	126 7	10 30
Jupiter	120,70	115 35	9 55
Saturno	137,61	108 47	6 47
Urano	151,70	103 15	3 45
Ao qual, suppondo 7872'',774 o movimento medio de Neptuno em um anno juliano, e $\rho' = 30,03696$, podemos acrescentar			
Neptuno	158,46	100 30	2 48

193. Como a expressão de $\text{tang } T'$ do n.º 190 dá

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{2} \text{tang}^2 T' (1 + \sqrt{1 + 4 \cot^2 T'}),$$

e o triangulo $SM'T'$ dá

$$\frac{M'T'}{\rho'} = \frac{\text{sen } (n - n')t}{\text{sen } T'},$$

vê-se que da observação das elongações na epocha das estações se podem deduzir por estas formulas, como primeira approximação, o raio ρ' da orbita d'um planeta superior, e a sua distancia á terra $M'T'$.

Similhantermente, para os planetas inferiores, teremos

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{2} \text{tang}^2 T' (1 + \sqrt{1 + 4 \cot^2 T'}),$$

$$\frac{V'T'}{\rho'} = \frac{\text{sen } (n' - n)t}{\text{sen } T'}.$$

Por exemplo, no dia 12 de janeiro de 1801, em que Ceres se tornou estacionario, a sua elongação observada por Piazzi, que o descobrira no 1.º do mesmo mez, era

$$T' = 122^\circ 37' 48'',$$

que substituido na expressão de $\frac{\rho'}{\rho}$ dá

$$\frac{\rho'}{\rho} = 3,2013.$$

Esta avaliação, ainda que inexacta, por causa da latitude do planeta e da ellipticidade da orbita, é bastante approximada do verdadeiro valor 2,76724 para servir de base a investigações mais perfeitas (Astr. de Biot, 3.^a edic., tom. v, pag. 325).

Do mesmo modo, suppondo para Mercurio $T' = 18^{\circ}12'$, acha-se

$$\frac{p'}{p} = 0,3872.$$

$\frac{p'}{p} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 T' (1 + \frac{1}{2} \cos^2 T)}}{\sqrt{1 - \cos^2 T}}$

Mercurio	0,3872	18 12'	43 34
Venus	0,3872	17 32	22 51
Marte	0,3872	16 51	14 31
Júpiter	0,3872	16 10	06 01
Saturno	0,3872	15 29	00 00
Uranus	0,3872	14 48	00 00
Neptunus	0,3872	14 07	00 00

CAPITULO III

I

Transformação de coordenadas

194. Para applicar as observações á determinação dos elementos das orbitas planetarias; para investigar as leis do movimento 'nestas orbitas; e para comparar os resultados das observações com os das taboas astronomicas: cumpre transformar as coordenadas geocentricas em heliocentricas; e reciprocamente.

Tomemos para plano dos xy o da ecliptica; para origem das coordenadas rectangulares o centro da terra; e para eixo dos x uma parallela á linha dos nodos tirada por este centro.

Chamemos X, Y as coordenadas geocentricas do Sol; x, y, z , as coordenadas geocentricas do planeta; L, R , a longitude geocentrica do Sol, e a sua distancia á terra; l, λ , a longitude e a latitude geocentricas do planeta; r, ρ , a distancia do planeta á terra, e a projecção d'esta distancia no plano da ecliptica; N a longitude do nodo ascendente da orbita. E designemos similhantemente pelas letras accentuadas x', y', z' , l', λ', r', ρ' , as coordenadas e distancias heliocentricas do planeta.

Teremos as seguintes equações:

$$(1) \dots \left\{ \begin{array}{l} x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z, \\ X = R \cos(L - N), \quad Y = R \operatorname{sen}(L - N), \\ x' = \rho' \cos(l' - N), \quad y' = \rho' \operatorname{sen}(l' - N), \quad z' = \rho' \operatorname{tg} \lambda', \quad \rho' = r' \cos \lambda', \\ x = \rho \cos(l - N), \quad y = \rho \operatorname{sen}(l - N), \quad z = \rho \operatorname{tg} \lambda, \quad \rho = r \cos \lambda. \end{array} \right.$$

195. Para fazer a transformação das coordenadas, de que se tracta, estas equações dão as seguintes:

$$\rho' \cos (l' - N) = \rho \cos (l - N) - R \cos (L - N),$$

$$\rho' \sin (l' - N) = \rho \sin (l - N) - R \sin (L - N),$$

$$\rho' \operatorname{tang} \lambda' = \rho \operatorname{tang} \lambda.$$

Eliminando ρ entre as duas primeiras d'ellas, vem

$$\rho' \sin (l - l') = \rho' \sin [l - L - (l' - L)] = R \sin (L - l);$$

que dá
$$\operatorname{tang} (l - L) = \frac{\rho' \sin (l' - L)}{R + \rho' \cos (l' - L)}.$$

Eliminando ρ' entre as mesmas equações, acha-se similhantemente

$$\operatorname{tang} (l' - L) = \frac{\rho \sin (l - L)}{\rho \cos (l - L) - R}.$$

E eliminando R , acha-se

$$\rho' \sin (l' - L) = \rho \sin (l - L).$$

Em quanto á parallaxe horizontal do planeta, é

$$\frac{\pi}{\operatorname{par} \Theta} = \frac{R}{r}, \text{ ou } \pi = \frac{R}{r} \operatorname{par} \Theta.$$

Portanto a transformação das coordenadas pôde fazer-se, respectivamente, pelos systemas seguintes:

$$(2) \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho = r \cos \lambda, \\ \operatorname{tang} (l' - L) = \frac{\rho \operatorname{sen} (l - L)}{\rho \cos (l - L) - R'}, \\ \rho' = \frac{\rho \operatorname{sen} (l - L)}{\operatorname{sen} (l' - L)}, \\ \operatorname{tang} \lambda' = \frac{\rho \operatorname{tang} \lambda}{\rho'}, \\ r' = \frac{\rho'}{\cos \lambda'}. \end{array} \right.$$

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho' = r' \cos \lambda', \\ \operatorname{tang} (l - L) = \frac{\rho' \operatorname{sen} (l' - L)}{\rho' \cos (l' - L) + R'}, \\ \rho = \frac{\rho' \operatorname{sen} (l' - L)}{\operatorname{sen} (l - L)}, \\ \operatorname{tang} \lambda = \frac{\rho' \operatorname{tang} \lambda'}{\rho}, \\ r = \frac{\rho}{\cos \lambda}; \end{array} \right.$$

$$\pi = \operatorname{par} \ominus \cdot \frac{R \operatorname{sen} (l - L) \cos \lambda}{\rho' \operatorname{sen} (l' - L)}.$$

O primeiro transforma successivamente as coordenadas geocentricas em heliocentricas; o segundo transforma as heliocentricas em geocentricas.

As formulas (3) são as do *calculo das Ephemerides*, n.º 36. Podem vêr-se outras para o mesmo fim nos n.ºs 37 e 38 do mesmo livro.

196. Em lugar da relação entre ρ e ρ' , que dão as terceiras equações dos systemas (2) e (3), podem empregar-se as seguintes, que se deduzem immediatamente do triangulo rectilineo comprehendido entre a terra, o Sol, e a projecção do planeta,

$$\left. \begin{aligned} \rho'^2 &= \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(l-L), \\ \rho^2 &= \rho'^2 + R^2 + 2R\rho' \cos(l'-L). \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

197. Tendo as coordenadas heliocentricas referidas ao plano da ecliptica, facilmente passaremos d'ellas para as referidas ao plano da orbita.

Sejam SP, SQ, SN, S \mathcal{N} (Fig. 32), as direcções do raio vector do planeta, da sua projecção na ecliptica, da linha dos nodos, e da linha dos equinoccios; sendo P, Q, N, \mathcal{N} , as intersecções d'estas rectas com a esphera celeste.

No triangulo espherico PNQ, rectangulo em Q, são

$$PQ = \lambda', \quad QN = l' - N, \quad PN = v - N, \quad \text{PNQ} = I;$$

sendo v contado no plano da orbita, a partir d'uma recta que faz com a linha dos nodos um angulo igual á longitude N do nodo; e I a inclinação da orbita.

Este triangulo dá

$$(5) \dots \left\{ \begin{aligned} \text{tang } \lambda' &= \text{tang } I \text{ sen } (l' - N), \\ \cot (v - N) &= \cos I \cot (l' - N). \end{aligned} \right.$$

Da segunda facilmente se tira, como no n.º 108 da primeira secção,

$$\text{sen } (v - l') = \text{tang}^2 I \text{ sen } [v - l' + 2(l' - N)],$$

$$\text{ou } \text{sen } (v - l') = - \text{tang}^2 I \text{ sen } [v - l' - 2(v - N)].$$

Por conseguinte a redução da ecliptica á orbita, e a da orbita á ecliptica, são:

$$\left. \begin{aligned} v - l &= \sum (\text{tang}^2 \frac{1}{2} I)^i \frac{\text{sen } 2i(l' - N)}{i}, \\ l - v &= \sum (-\text{tang}^2 \frac{1}{2} I)^i \frac{\text{sen } 2i(v - N)}{i}. \end{aligned} \right\} \dots (6).$$

198. A supposição de ser plana a orbita do planeta dispensa a observação d'uma das tres coordenadas, quando se conhece a posição do plano. Com effeito a observação da longitude e da latitude geocentricas dá a direcção da recta que une o centro da terra com o do planeta; e depois a intersecção d'esta recta com o plano da orbita deve assignar a posição do astro.

Para verificar isto, substituamos as expressões de y' e z' na equação do plano da orbita

$$z' = y' \text{ tang } I.$$

Resultará:

$$\rho \text{ tang } \lambda = [\rho \text{ sen } (l - N) - R \text{ sen } (L - N)] \text{ tang } I \dots (7),$$

que dará ρ , e por conseguinte r , quando se conhecerem l, λ, L, R, N, I .

199. O valor de ρ tirado da equação (7) podia dispensar a obser-

vação dos diâmetros apparentes, como acabamos de ver; mas nas orbitas muito pouco inclinadas á ecliptica é perigoso o uso d'esta formula para esse fim.

Póde porem determinar-se ρ com mais segurança observando outra vez o planeta depois de voltar á mesma posição, ou reduzindo a esta as observações feitas na sua proximidade; porque, sendo então os valores de ρ' e l' eguaes aos da primeira observação, as duas primeiras equações do n.º 195 darão

$$\rho \cos (l - N) - R \cos (L - N) = \rho_1 \cos (l_1 - N) - R_1 \cos (L_1 - N),$$

$$\rho \operatorname{sen} (l - N) - R \operatorname{sen} (L - N) = \rho_1 \operatorname{sen} (l_1 - N) - R_1 \operatorname{sen} (L_1 - N);$$

e por conseguinte

$$\rho = \frac{R \operatorname{sen} (l_1 - L) - R_1 \operatorname{sen} (l_1 - L_1)}{\operatorname{sen} (l_1 - l)},$$

$$\rho_1 = \frac{R \operatorname{sen} (l - L) - R_1 \operatorname{sen} (l - L_1)}{\operatorname{sen} (l_1 - l)}.$$

Se no intervallo t das observações o nodo tiver o movimento nt , poderemos ainda usar d'estas formulas, pondo' nellas $l_1 - nt$ e $L_1 - nt$ em lugar de l_1 , e de L_1 .

200. No caso de se observar o planeta quando está em conjunção superior com o Sol, é $l = L = l'$; e por conseguinte

$$\rho = \frac{R \operatorname{sen} (l' - N) \operatorname{tang} I}{\operatorname{sen} (l' - N) \operatorname{tang} I - \operatorname{tang} \lambda} = \frac{R \operatorname{sen} \lambda' \cos \lambda}{\operatorname{sen} (\lambda' - \lambda)}.$$

ou
$$r = R \frac{\text{sen } \lambda'}{\text{sen } (\lambda' - \lambda)};$$

e
$$\rho' = \rho \frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } \lambda'} = \frac{R \text{ sen } \lambda \cos \lambda'}{\text{sen } (\lambda' - \lambda)},$$

ou
$$r' = R \frac{\text{sen } \lambda}{\text{sen } (\lambda' - \lambda)}$$

Estas formulas applicam-se á conjuncção inferior, mudando no denominador λ em $-\lambda$; e á opposição, mudando R em $-R$ (Fig. 33, 34, 35).

Por onde se vê que, observando nas syzigias, e tendo determinado N e I , o calculo de r' e de v se fará com muita facilidade pela ultima formula e pelas formulas (5).

201. Se na equação do plano substituíssemos por z' , y' , as suas expressões em coordenadas angulares heliocentricas, $\rho' \text{ tang } \lambda'$, $\rho' \text{ sen } (l' - N)$, desapareceria ρ' . E assim devia ser; porque l' e λ' assignam a direcção do raio vector do planeta, deixando indeterminada a grandeza d'este raio, quer seja dada, quer não o seja, a posição do plano da orbita no qual elle está.

II

Posição do plano da orbita

202. Duas observações completas, convertidas as coordenadas em heliocentricas, dariam

$$\text{tang } \lambda' = \text{tang } I \text{ sen } (l' - N),$$

$$\text{tang } \lambda'' = \text{tang } I \text{ sen } (l'' - N);$$

das quaes se tiram, como no n.º 11 da primeira secção:

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } k &= \text{tang } \frac{l'' - l'}{2} \cdot \frac{\text{sen } (\lambda' + \lambda)}{\text{sen } (\lambda' - \lambda'')} \\ N &= \frac{l' + l''}{2} + k, \\ \text{tang } \varphi &= \frac{\text{tang } \lambda'}{\text{sen } (l' - N)} = \frac{\text{tang } \lambda''}{\text{sen } (l'' - N)}; \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

tendo o cuidado de pôr $l' - vt$ em lugar de l'' , no caso de ser attendivel o movimento proprio vt do nodo da orbita em longitude.

Mas convem determinar separadamente N , I , por observações feitas nas epochas respectivamente favoráveis; como fizemos para o Sol.

203. *Determinação dos nodos.* Se na equação (7) fizermos $\lambda = 0$, e substituírmos

$$\rho = \frac{R \operatorname{sen}(L - N)}{\operatorname{sen}(l - N)}$$

na terceira das equações (3), virá

$$r' \operatorname{sen}(l - N) = R \operatorname{sen}(L - l).$$

Quando o planeta voltar ao mesmo nodo, suppondo a orbita a mesma e fixo o nodo, teremos

$$r' \operatorname{sen}(l_1 - N) = R_1 \operatorname{sen}(L_1 - l_1);$$

e eliminando r' entre estas equações, acharemos

$$\frac{\operatorname{sen}(l_1 - N)}{\operatorname{sen}(l - N)} = \frac{R_1 \operatorname{sen}(L_1 - l_1)}{R \operatorname{sen}(L - l)},$$

que se resolve commodamente no systema

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1 \operatorname{sen}(L_1 - l_1)}{R \operatorname{sen}(L - l)} &= \operatorname{tang} \varphi, \\ \operatorname{tang} \left(N - \frac{l_1 + l}{2} \right) &= \operatorname{tang} (45^\circ + \varphi) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} (l_1 - l) \end{aligned} \right\} \dots (9).$$

..

A condição de ser r' positivo, applicada a

$$r' = R_1 \frac{\text{sen}(L_1 - l)}{\text{sen}(l_1 - N)} = R \frac{\text{sen}(L - l)}{\text{sen}(l - N)},$$

que depois pode dar r' , tiraria a ambiguidade dos dois valores N e $180 + N$, ambos correspondentes a $\text{tang } N$.

Se no intervallo t das duas observações fosse necessario attender ao movimento νt do nodo, bastaria para isso substituir $l_1 - t$ em lugar de l_1 , e $L_1 - \nu t$ em lugar de L_1 .

O valor de ν determinar-se-ha comparando dois valores de N determinados em epochas muito distantes uma da outra, e repartindo a differença d'elles pelo intervallo.

204. Se nos servissemos de passagens por dois nodos diversos, um ascendente, outro descendente, e suppozessesmos eguaes os dois raios vectores, deveriamos substituir $180 + N$, em lugar de N , na segunda das equações que nos deram $\text{tang } N$; d'onde resultaria a mesma expressão de $\text{tang } N$, só com a mudança de R_1 em $-R_1$.

205. Differenciando a equação

$$r' \text{sen}(l - N) = R \text{sen}(L - l)$$

em ordem a r' e N , resulta

$$\delta N = \text{tang}(l - N) \cdot \delta r'.$$

Por onde se vê que o erro de r' , ou da supposição de serem eguaes nas duas passagens os valores de r' , influirá tanto menos em N , quanto menor for $(l - N)$; e por conseguinte quanto menor for $\text{sen}(L - N)$, em virtude da equação (7).

Portanto as observações, feitas quando a epocha da passagem do planeta pelo nodo coincide com a da conjuncção ou com a da opposição, são as mais vantajosas para determinar a longitude do nodo N , que dão immediatamente.

206. Supponhamos que, determinando pela observação a latitude

do planeta na epocha da conjuncção ou da opposição, a achamos muito pequena

Se ha muitas observações vizinhas d'esta epocha, calcularemos pela interpolação o tempo correspondente á latitude nulla, que é o da passagem pelo nodo; e accrescentaremos á longitude heliocentrica do planeta na epocha da observação, isto é, á longitude do Sol na conjuncção, ou á longitude do Sol + 180° na opposição, o movimento heliocentrico do planeta em longitude durante o intervallo decorrido desde a conjuncção ou opposição até á passagem pelo nodo: sendo este movimento tirado das taboas; ou, pelo menos, calculado pelo medio movimento que dá a revolução sideral do planeta.

Teremos assim a longitude heliocentrica do planeta na occasião da passagem pelo nodo. E, se fizermos o mesmo em mais d'uma passagem, poderemos tambem verificar a opposição dos dois nodos, vistos do Sol, que deve dar-se, se a orbita do planeta é plana, como supponmos.

207. As passagens de Mercurio e de Venus pelo disco do Sol são especialmente proprias para determinar os instantes em que estes planetas atravessam a ecliptica.

Supponhamos que de observações feitas com um reticulo bem orientado se deduzem, na occasião da passagem: os tempos t, t' , da entrada e da sahida, em e, s (Fig. 36); as latitudes ep, sq ; e o movimento relativo em longitude pq . Com estes dados resolver-se-hão os triangulos rectangulos Nep, Nsq ; e determinar-se-hão Sp , o tempo da conjuncção Θ , e o da passagem pelo nodo T , suppondo o movimento uniforme.

Com effeito estes triangulos dão:

$$\overline{Np} = \frac{\overline{ep} \cdot \overline{pq}}{\overline{ep} - \overline{sq}}, \quad \overline{Nq} = \overline{Np} - \overline{pq}, \quad \overline{Ne} = \sqrt{\overline{Np}^2 + \overline{pe}^2},$$

$$\overline{se} = \frac{\overline{pq} \cdot \overline{Ne}}{\overline{Np}}, \quad \text{tang } eNp = \frac{\overline{pe}}{\overline{Np}}, \quad NS = \frac{\overline{Ne} - \frac{1}{2}\overline{se}}{\cos eNp},$$

$$\Theta = t + (t' - t) \cdot \frac{\overline{Sp}}{\overline{pq}}, \quad T = t + (t' - t) \cdot \frac{\overline{Np}}{\overline{pq}},$$

$$T - \Theta = (t' - t) \cdot \frac{\overline{NS}}{\overline{pq}}.$$

Conheceremos assim o tempo $T - \Theta$ decorrido desde a conjuncção até a passagem pelo nodo; e, ajunctando á longitude heliocentrica da terra, ou a $180^\circ + \text{long } \Theta$, o movimento heliocentrico do planeta em longitude, durante este tempo, teremos a longitude heliocentrica do nodo.

208. *Inclinação da orbita.* Se na equação (7) fizermos $L = N$, teremos

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } \lambda}{\text{sen } (l - L)}.$$

Esta formula dará pois a inclinação da orbita, quando se observar o planeta no instante em que a longitude do Sol é igual á do nodo.

Se ha um pequeno erro na longitude do nodo, a differenciação da formula precedente dá o erro de I ,

$$\delta I = \frac{1}{2} \text{sen } 2I \cot (l - L) \cdot \delta L.$$

Portanto, se o planeta se observar quando a sua elongação for proxima de 90° , um pequeno erro da longitude do nodo não influirá sensivelmente na inclinação da orbita.

Em quanto aos erros de latitude, a equação

$$\delta I = \frac{\text{sen } 2I}{\text{sen } 2\lambda} \delta \lambda = \frac{\cos^2 I}{\cos^2 \lambda \text{sen } (l - L)} \delta \lambda,$$

mostra que a sua influencia será tambem menos sensivel quando a elongação se approximar de 90° .

Raras vezes acontecerá que o planeta se observe no momento de ser $L = N$; mas, feitas muitas observaões nos tempos das quaes L diffira pouco de N , a interpolação dará o instante em que é $L = N$, e depois os valores de l e λ correspondentes a esse instante.

III

Determinação dos outros elementos da orbita

209. Conhecidos N e I , se calcularmos muitos raios vectores r' do planeta, e as longitudes correspondentes na orbita, pelas formulas (2) e (5) dos n.ºs 195 e 197, e construirmos graphicamente os logares geometricos determinados por estas coordenadas, acharemos que a orbita parece ser uma ellipse.

210. Procurando entre essas observações aquellas em que o movimento do astro é mais rapido ou mais vagaroso; e determinando pela interpolação as epochas do maximo e do minimo, e os valores correspondentes de v : teremos os instantes das passagens pelo perihelio e pelo aphelio, e as posições d'estes pontos; assim como a relação da ex-

centricidade para o semi-eixo, $e = \frac{r'' - r'}{r'' + r'}$, chamando r' , r'' os raios vectores perihelio e aphelio.

Determinados assim os elementos d'esta ellipse por algumas das observações, acharemos que a curva representa todas as outras observações. E formando taboas dos planetas, poderemos ulteriormente aperfeiçoar os mesmos elementos por meio de processos analogos aos empregados na primeira secção.

211. Se tivermos somente algumas observações feitas em uma porção restricta da orbita, como acontece no apparecimento de um astro novo, podemos determinar por quatro observações os quatro elementos n , ω , e , ϵ ; porque aquellas observações, comparadas com a segunda das equações do movimento elliptico, dão quatro equações de condição, entre as quaes se podem eliminar as quantidades, n , ω , e , ϵ .

A difficuldade está em fazer a eliminação; e por isso transcrevemos da Astronomia de Francoeur pag. 425 o processo empregado por Bouvard.

A segunda das equações do movimento elliptico, ou

$$v - \bar{\omega} = \varepsilon + nt - \bar{\omega} + 2e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}),$$

resolvida pelo methodo inverso das series em ordem a $\varepsilon + nt - \bar{\omega}$, dá

$$\varepsilon + nt = v - \left[2e \operatorname{sen}(v - \bar{\omega}) - \frac{3}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(v - \bar{\omega}) \right] \frac{1}{\operatorname{sen} 1''},$$

ou, desprezando para o planeta o termo em e^2 ,

$$\varepsilon + nt = v - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v - \bar{\omega}).$$

Portanto quatro observações do planeta darão as quatro equações de condição:

$$\varepsilon + nt_1 = v_1 - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v_1 - \bar{\omega}),$$

$$\varepsilon + nt = v - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v - \bar{\omega}),$$

$$\varepsilon + nt' = v' - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v' - \bar{\omega}),$$

$$\varepsilon + nt'' = v'' - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v'' - \bar{\omega}),$$

entre as quaes se tracta de eliminar n , $\bar{\omega}$, e , ε .

Fazendo

$$t - t_1 = \theta, \quad t' - t_1 = \theta', \quad t'' - t_1 = \theta'',$$

$$v - v_1 = a, \quad v' - v_1 = a', \quad v'' - v_1 = a'',$$

e subtraindo a primeira equação de cada uma das outras tres, resultam:

$$n\theta - a = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \left\{ 2 \operatorname{sen} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \cos (v_1 - \omega) \operatorname{sen} a \right\},$$

$$n'\theta' - a' = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \left\{ 2 \operatorname{sen} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' - \cos (v_1 - \omega) \operatorname{sen} a' \right\},$$

$$n''\theta'' - a'' = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \left\{ 2 \operatorname{sen} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a'' - \cos (v_1 - \omega) \operatorname{sen} a'' \right\}.$$

Dividindo a primeira d'estas equações por cada uma das outras,

e fazendo

$$M = \frac{n\theta - a}{n'\theta' - a'}, \quad N = \frac{n\theta - a}{n''\theta'' - a''},$$

resultam

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{2 \operatorname{tang} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} a}{2 \operatorname{tang} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' - \operatorname{sen} a'} \\ M = \frac{2 \operatorname{tang} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} a}{2 \operatorname{tang} (v_1 - \omega) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a'' - \operatorname{sen} a''} \end{array} \right.$$

que, eliminando $\text{tang}(\nu_1 - \omega)$, dão

$$\frac{M \text{sen } a' - \text{sen } a}{M \text{sen}^2 \frac{1}{2} a' - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{N \text{sen } a'' - \text{sen } a}{N \text{sen}^2 \frac{1}{2} a'' - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a}$$

Reduzindo esta equação ao mesmo denominador; fazendo

$$h = \text{sen } a \text{sen}^2 \frac{1}{2} a' - \text{sen } a' \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = 2 \text{sen } \frac{1}{2} a \text{sen } \frac{1}{2} a' \text{sen } \frac{1}{2} (a' - a),$$

$$i = \text{sen } a' \text{sen}^2 \frac{1}{2} a'' - \text{sen } a'' \text{sen}^2 \frac{1}{2} a' = 2 \text{sen } \frac{1}{2} a' \text{sen } \frac{1}{2} a'' \text{sen } \frac{1}{2} (a'' - a'),$$

$$k = \text{sen } a'' \text{sen}^2 \frac{1}{2} a - \text{sen } a \text{sen}^2 \frac{1}{2} a'' = -2 \text{sen } \frac{1}{2} a'' \text{sen } \frac{1}{2} a \text{sen } \frac{1}{2} (a'' - a);$$

e depois substituindo em lugar de M e N as suas expressões, resulta

$$(n\theta - a) \cdot [n(h\theta'' + k\theta' + i\theta) - ha'' - ka' - ia] = 0:$$

e como $n\theta - a$ não é nullo, por não o ser e , o segundo factor egualado a zero dá

$$n = \frac{a'' + \frac{k}{h} a' + \frac{i}{h} a}{\theta'' + \frac{k}{h} \theta' + \frac{i}{h} \theta}$$

Finalmente este valor de n substituído nas equações precedentes dará successivamente os valores de ω , e , ε .

Portanto, sendo

$$\theta = t - t_1, \theta' = t' - t_1, \theta'' = t'' - t_1,$$

$$a = v - v_1, a' = v' - v_1, a'' = v'' - v_1;$$

o systema de formulas, que resolve a questào, é:

$$A = -\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a'' \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a'' - a)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a' \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a' - a)}, \quad B = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a'' \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a'' - a')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a' - a)},$$

$$n = \frac{a'' + Aa' + Ba}{\theta'' + A\theta' + B\theta},$$

$$M = \frac{n\theta - a}{n\theta' - a'}, \quad N = \frac{n\theta - a}{n\theta'' - a''},$$

(10).

$$\operatorname{tang} (v_1 - \bar{\omega}) = \frac{M \operatorname{sen} a' - \operatorname{sen} a}{2(M \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a)} = \frac{N \operatorname{sen} a'' - \operatorname{sen} a}{2(N \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a'' - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a)},$$

$$\bar{\omega} = v_1 - (v_1 - \bar{\omega}), \quad e = -\frac{(n\theta - a) \operatorname{sen} 1''}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \cos (\frac{1}{2} a + v_1 - \bar{\omega})},$$

$$s = v_1 - nt_1 - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} (v_1 - \bar{\omega}) + \frac{3}{4} \frac{e^2}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2(v_1 - \bar{\omega});$$

Depois, se quizermos maior approximação, poderemos renovar o cal-

culo: substituindo, em lugar de a , fóra dos signaes periodicos,

$$a + \frac{3}{2} \frac{e^2}{\text{sen } 1''} \text{sen } a \cos [a + 2(v_1 - \bar{\omega})],$$

e similhantemente a respeito de a' e a'' ; e usando nestas expressões dos valores de e e $v_1 - \bar{\omega}$, que se acharam pela primeira approximação.

212. Mas, suppondo n bem conhecido, bastam tres equações para determinar os outros tres elementos; e as formulas tornam-se mais simples.

Temos então:

$$n\theta - a = -\frac{2e}{\text{sen } 1''} [\text{sen}(a + v_1 - \bar{\omega}) - \text{sen}(v_1 - \bar{\omega})],$$

$$(10) \quad n\theta' - a' = -\frac{2e}{\text{sen } 1''} [\text{sen}(a' + v_1 - \bar{\omega}) - \text{sen}(v_1 - \bar{\omega})],$$

$$\frac{n\theta - a}{n\theta' - a'} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} a \cos(\frac{1}{2} a + v_1 - \bar{\omega})}{\text{sen } \frac{1}{2} a' \cos(\frac{1}{2} a' + v_1 - \bar{\omega})},$$

ou

$$\frac{(n\theta - a) \text{sen } \frac{1}{2} a' - (n\theta' - a') \text{sen } \frac{1}{2} a}{(n\theta - a) \text{sen } \frac{1}{2} a' + (n\theta' - a') \text{sen } \frac{1}{2} a} = \text{tang } \frac{a' - a}{4} \text{ tang} \left(\frac{a' + a}{4} + v_1 - \bar{\omega} \right).$$

E ω , e , ε serão dados facilmente pelo systema seguinte de formulas:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(n\theta' - a') \operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{(n) - a} \operatorname{sen} \frac{1}{2} a' = \cos \varphi \\ \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi \cot \frac{a' - a}{4} = \operatorname{tang} \left[\frac{a' + a}{4} + v_1 - \omega \right], \\ e = - \frac{(n\theta - a) \operatorname{sen} 1''}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \cos (\frac{1}{2} a + v_1 - \omega)} = \frac{(n\theta' - a') \operatorname{sen} 1''}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a' \cos (\frac{1}{2} a' + v_1 - \omega)}, \\ \varepsilon = v_1 - nt_1 - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} (v_1 - \omega) + \frac{3}{4} \frac{e^2}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2(v_1 - \omega). \end{array} \right.$$

Depois, se for necessario, proceder-se-ha a outra approximação, como se disse no numero precedente.

213. Se a orbita é consideravelmente excentrica, convem empregar o processo seguinte.

Chamando $p = a(1 - e^2)$ o semi-parametro, tres observações dão

$$\frac{p}{r} - 1 = q = e \cos (v - \omega),$$

$$\frac{p}{r'} - 1 = q' = e \cos (v' - \omega),$$

$$\frac{p}{r''} - 1 = q'' = e \cos (v'' - \omega).$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por $\operatorname{sen} (v'' - v')$, a segunda por $-\operatorname{sen} (v'' - v)$, a terceira por $\operatorname{sen} (v' - v)$, e sommando, resulta

$$\left(\frac{p}{r} - 1 \right) \operatorname{sen} (v'' - v') - \left(\frac{p}{r'} - 1 \right) \operatorname{sen} (v'' - v) + \left(\frac{p}{r''} - 1 \right) \operatorname{sen} (v' - v) = 0;$$

e por conseguinte:

$$p = \frac{rr'r'' [\text{sen}(v'' - v') - \text{sen}(v'' - v) + \text{sen}(v' - v)]}{r'r'' \text{sen}(v'' - v') - rr' \text{sen}(v'' - v) + rr' \text{sen}(v' - v)} \dots (12).$$

As mesmas equações dão

$$\frac{q - q'}{q + q'} = \frac{\cos(v - \bar{\omega}) - \cos(v' - \bar{\omega})}{\cos(v - \bar{\omega}) + \cos(v' - \bar{\omega})};$$

e por conseguinte

$$\text{tang}\left(\bar{\omega} - \frac{v' + v}{2}\right) = \frac{q' - q}{q' + q} \cot \frac{v' - v}{2} \dots (13).$$

Finalmente

$$e = \frac{q}{\cos(v - \bar{\omega})} \dots (14).$$

A expressão de $\text{tang}\left(\bar{\omega} - \frac{v' + v}{2}\right)$ póde applicar-se a qualquer das combinações das observações duas a duas. E a expressão de e póde applicar-se a qualquer das observações.

Teremos depois

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad \cos(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) = \frac{p - r}{er} \dots (15),$$

das quaes a segunda tambem se póde applicar a qualquer das observações.

214. O denominador da expressão (12) de p é o dobro da área do triangulo comprehendido entre os tres pontos da ellipse. Se este denominador for muito pequeno, a formula

$$\delta \frac{h}{k} = \frac{1}{k} \delta h - \frac{h}{k} \cdot \frac{1}{k} \delta k$$

mostra que os erros dos dois termos pódem influir muito em p ; e porisso devem escolher-se as longitudes de modo que se evite, quanto for possível, esse inconveniente (Astr. de Santini, n.º 235).

215. Indicaremos aqui um processo, que pódem dar ao menos uma primeira approximação da grandeza do eixo maior, por meio da observação das diferenças entre as longitudes geocentricas do Sol e as do planeta; suppondo a orbita d'este circular (Astr. de Biot. 3.ª ed. pag. 326).

Sejam S , T , p (Fig. 37) as posições do Sol, da terra, e do planeta; e P a projecção orthogonal de p no plano da ecliptica.

O triangulo STP dá

$$\frac{r' \cos \lambda'}{R} = \frac{\text{sen } T}{\text{sen } (T + S)};$$

e para outra observação, será tambem

$$\frac{R \cos \lambda'}{R_1} = \frac{\text{sen } T_1}{\text{sen } (T_1 + S_1)};$$

designando R , R_1 os raios vectores da terra nas duas observações, e r' o raio da orbita do planeta.

Sejam: n' o medio movimento angular do planeta; (n) o movimento angular da terra, na occasião da observação; e t o intervallo de tempo decorrido entre as duas observações.

Será $S_1 - S = t[(n) - n']$;

ou, em virtude do n.º 185, que dá $n' = \frac{n}{r'^{\frac{1}{2}}}$, sendo n o medio movimento

angular da terra, e tomando por unidade de distancia a media distancia do Sol á terra,

$$S_1 - S = t \left[(n) - \frac{n}{r'^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Finalmente os triangulos pTP , pSP dão

$$\frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } \lambda'} = \frac{SP}{TP} = \frac{\text{sen } T}{\text{sen } S},$$

e para outra observação,

$$\frac{\text{tang } \lambda_1}{\text{tang } \lambda'_1} = \frac{\text{sen } T_1}{\text{sen } S_1}.$$

Assim o systema das cinco equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r' \cos \lambda'}{R} = \frac{\text{sen } T}{\text{sen } (T + S)}, \\ \frac{r' \cos \lambda'_1}{R_1} = \frac{\text{sen } T_1}{\text{sen } (T_1 + S_1)}, \\ S_1 - S = t \left[(n) - \frac{n}{r'^{\frac{1}{2}}} \right], \\ \text{tang } \lambda' = \text{tang } \lambda \frac{\text{sen } T}{\text{sen } S}, \\ \text{tang } \lambda'_1 = \text{tang } \lambda_1 \frac{\text{sen } T_1}{\text{sen } S_1}, \end{array} \right.$$

fará conhecer as cinco quantidades $S, S_1, \lambda', \lambda'_1, r'$, se a observação der as diferenças T, T_1 , das longitudes geocentricas do Sol e do planeta, e as latitudes geocentricas do planeta λ, λ_1 .

Se forem muito pequenas as latitudes heliocentricas, será mais facil usar de approximações successivas, suppondo na primeira $\cos \lambda' = 1, \cos \lambda'_1 = 1$, e depois achando novos valores de λ' e λ'_1 pelas duas ultimas.

Finalmente, com $l' = 180^\circ + L - S, l'_1 = 180^\circ + L_1 - S_1, \lambda', \lambda'_1$, as formulas do n.º 202 farão conhecer tambem a posição do plano da orbita.

Assim, na hypothese da circularidade, bastarão duas observações para determinar approximadamente o raio e a inclinação da orbita d'um planeta novo.

216. O exame dos movimentos dos planetas nas suas respectivas orbitas e a comparação das velocidades medias de uns com as dos outros, reproduz as leis de Kepler, cuja verdade ja tinhamos reconhecido nos n.ºs 18 e 19 para o Sol; e da mesma maneira que fallamos no n.º 22.

Assim os movimentos de todos os planetas satelitaes, ao menos propriamente, se tem as leis de Kepler:

- 1.º As áreas descritas pelos raios vectores dos planetas são proporcionaes aos tempos empregados em descrevel-as.
- 2.º Os planetas descrevem ellipses em torno do Sol, que é o foco d'ellas.
- 3.º Os quadrados dos tempos periodicos são proporcionaes aos cubos dos raios maiores das orbitas dos planetas.

217. Quando se introduzem nas formulas do movimento as leis de Kepler, se dá-se:

Que, em virtude da primeira d'ellas, a força, que retém os planetas nas suas orbitas, é dirigida para o Sol; e que é attractiva, por serem as orbitas concavas para o Sol;

Que, em virtude da segunda, a força attractiva é inversamente proportional aos quadrados das distancias ao Sol;

E que, em virtude da terceira, esta força é, para a mesma distancia, proportional á massa; isto é, que é a mesma para todas as moleculas dos planetas, suppondo que seja a sua natureza.

Portanto as tres leis de Kepler são consequencias d'uma só lei, que rege os movimentos planetarios, e que, segundo temos visto, tambem rege os movimentos dos outros corpos celestes:

IV

Leis de Kepler

216. O exame dos movimentos dos planetas nas suas respectivas orbitas, e a comparação das velocidades medias de uns com as dos outros, reproduz as leis de Kepler, cuja verdade já tinhamos reconhecido nos n.ºs 16 e 18 para o Sol; e dá a outra, de que fallamos no n.º 22.

Assim os movimentos de todos os planetas satisfazem, ao menos proximamente, ás tres leis de Kepler:

- 1.º *As áreas descriptas pelos raios vectores dos planetas são proporcionaes aos tempos empregados em descrevel-as.*
- 2.º *Os planetas descrevem ellipses em torno do Sol, que é o foco d'ellas.*
- 3.º *Os quadrados dos tempos periodicos são proporcionaes aos cubos dos eixos maiores das orbitas dos planetas.*

217. Quando se introduzem nas formulas do movimento as leis de Kepler, acha-se:

Que, em virtude da primeira d'ellas, a força, que retém os planetas nas suas orbitas, é dirigida para o Sol; e que é attractiva, por serem as orbitas concavas para o Sol:

Que, em virtude da segunda, a força attractiva é inversamente proporcional aos quadrados das distancias ao Sol:

E que, em virtude da terceira, esta força é, para a mesma distancia, proporcional á massa; isto é, que é a mesma para todas as moleculas dos planetas, qualquer que seja a sua natureza.

Portanto as tres leis de Kepler são consequencias d'uma só lei, que rege os movimentos planetarios, e que, segundo iremos vendo, tambem rege os movimentos dos outros corpos celestes:

A attracção é directamente proporcional ás massas, e inversamente proporcional aos quadrados das distancias dos corpos que se attrahem.

218. Como o movimento de cada planeta em torno do Sol é perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler não se verificam rigorosamente; mas, quando se descontam nos movimentos observados os effeitos d'essas perturbações, que as formulas da Mechanica Celeste fazem conhecer, o que fica d'elles satisfaz exactamente aquellas leis.

Por onde se vê que, se o movimento de cada planeta não fosse perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler seriam exactas; e que por isso a lei da attracção, consequencia d'ellas, é a unica e rigorosa, pela qual se regulam os movimentos planetarios.

218. Como o movimento de cada planeta em torno do Sol é perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler não se verificam rigorosamente; mas, quando se descontam nos movimentos observados os effeitos d'essas perturbações, que as formulas da Mechanica Celeste fazem conhecer, o que fica d'elles satisfaz exactamente aquellas leis.

218. Como o movimento de cada planeta em torno do Sol é perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler não se verificam rigorosamente; mas, para se descontarem nos movimentos observados os efeitos dessas perturbações, que as fórmulas da Mecânica Celeste fazem conhecer que são d'ellas satisfeitas exactamente aquellas leis. Por onde se vê que, se o movimento de cada planeta não fosse perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler seriam exactas; e que por isso se regulariam os movimentos planetarios e rigorosa, pela qual se regulariam os movimentos planetarios.

Correcção dos elementos da orbita

219. Depois que, pelos meios até aqui expostos, se tiverem determinado com bastante aproximação os elementos da orbita d'um planeta, e que, pelas formulas da Mecânica Celeste, se tiverem achado as perturbações das suas coordenadas, convirá aproveitar um grande numero de observações para a correcção simultanea de todos os elementos.

Para isto devem converter-se em longitudes e latitudes geocentricas as ascensões rectas e declinações, achadas pela observação, por meio das formulas de transformação, que se deram na primeira parte; depois as longitudes e latitudes geocentricas em heliocentricas, pelas formulas (2) do n.º 195; e finalmente estas em coordenadas referidas á orbita pelas formulas (5) do n.º 197. Então, discorrendo como no cap. IX da primeira secção, calcular-se-hão as correcções da ellipse planetaria.

220. Mas se, conhecendo por uma Ephemeride as coordenadas tabulares heliocentricas e geocentricas, quizermos estabelecer as equações de condição immediatamente sobre a comparação d'aquellas coordenadas com as geocentricas deduzidas da observação, as formulas (5) do n.º 197 darão:

$$\delta l' = \left[1 - \frac{\text{sen } 2(l' - N)}{\text{sen } 2(v - N)} \right] \delta N + \frac{\text{sen } 2(l' - N)}{\text{sen } 2(v - N)} \left[\delta v - \frac{1}{2} \text{tg } l \text{ sen } 2(v - N) \delta l \right],$$

$$\delta \lambda' = \frac{\text{sen } 2 \lambda'}{\text{sen } 2 l} \left[\delta l + \frac{1}{2} \text{sen } 2 l \cot(l' - N) (\delta l' - \delta N) \right].$$

As equações do movimento elliptico (n.º 19) dão:

$$\delta u = \frac{(t\delta n + n\delta t) \frac{\text{sen } u \delta e}{\text{sen } 1''}}{1 - e \cos u} = \frac{a(t\delta n + n\delta t)}{r'} + \frac{\text{sen}(v - \bar{\omega})}{\sqrt{1 - e^2}} \delta e;$$

$$\begin{aligned} \delta v &= \delta \bar{\omega} + \frac{\text{sen}(v - \bar{\omega})}{\text{sen } u} \delta u + \frac{\text{sen}(v - \bar{\omega})}{1 - e^2} \delta e \\ &= \delta \bar{\omega} + \frac{a^2}{r'^2} \sqrt{1 - e^2} (t\delta n + n\delta t) + \text{sen}(v - \bar{\omega}) \left(\frac{a}{r'} + \frac{1}{1 - e^2} \right) \delta e; \end{aligned}$$

$$\delta r' = \frac{r' \delta a}{a} - \frac{2r' e \delta e}{1 - e^2} + \frac{e}{a(1 - e^2)} r'^2 \text{sen}(v - \bar{\omega}) (\delta v - \delta \bar{\omega});$$

contando-se t desde a passagem pelo perihelio; e sendo, em virtude da terceira lei de Kepler, $\frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\delta n}{n}$.

Finalmente as formulas (3) do n.º 195 dão:

$$\delta \rho' = \cos \lambda' \delta r' - r' \text{sen } \lambda' \delta \lambda',$$

$$\delta l = \frac{\text{sen}(l - L)}{\text{sen}(l' - L)} \left[\cos(l' - l) \cdot \delta l' + \text{sen}(l' - l) \cdot \frac{\delta \rho'}{\rho'} \right],$$

$$\delta \lambda = \frac{\text{sen } 2\lambda}{\text{sen } 2\lambda'} \delta \lambda' + \frac{\text{sen } 2\lambda}{2} \left[\cot(l - L) \delta l - \cot(l' - L) \delta l' \right].$$

221. Portanto as formulas

$$\delta v = \delta \tilde{\omega} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r'^2} (t \delta n + n \delta t) + \left(\frac{a}{r'} + \frac{1}{1-e^2} \right) \frac{\text{sen}(v-\tilde{\omega})}{\text{sen } 1''} \delta e,$$

$$\delta r' = \frac{e}{a(1-e^2)} r'^2 \text{sen}(v-\tilde{\omega}) (\delta v - \delta \tilde{\omega}) - \frac{2}{3} \frac{r' \delta n}{n} - \frac{2r'e \delta e}{1-e^2},$$

$$\delta l' = \left(1 - \frac{\text{sen } 2(l'-N)}{\text{sen } 2(v-N)} \right) \delta N + \frac{\text{sen } 2(l'-N)}{\text{sen } 2(v-N)} \left(\delta v - \frac{1}{2} \text{tang } l \text{sen } 2(v-N) \delta l \right),$$

$$\delta \lambda' = \frac{\text{sen } 2 \lambda'}{\text{sen } 2 l} \left[\delta l + \frac{1}{2} \text{sen } 2 l \cot(l'-N) (\delta l' - \delta N) \right],$$

$$\delta \rho' = \cos \lambda' \delta r' - r' \text{sen } \lambda' \delta \lambda' \text{sen } 1'',$$

$$\delta l = \frac{\text{sen}(l-L)}{\text{sen}(l'-L)} \left[\cos(l-l) \delta l' + \text{sen}(l'-l) \frac{\delta \rho'}{\rho'} \right],$$

$$\delta \lambda = \frac{\text{sen } 2 \lambda}{\text{sen } 2 \lambda'} \delta \lambda' + \frac{\text{sen } 2 \lambda}{2} \left[\cot(l-L) \delta l - \cot(l'-L) \delta l' \right],$$

dão as equações de condição da forma

$$\delta l = A \delta N + B \delta l + C \delta n + D \delta t + E \delta \tilde{\omega} + F \delta e,$$

$$\delta \lambda = A' \delta N + B' \delta l + C' \delta n + D' \delta t + E' \delta \tilde{\omega} + F' \delta e.$$

222. Se houver duvida nas massas dos planetas de que dependem as perturbações, deveremos empregar as coordenadas taes quaes as dá a observação, e ajuntar a δv e $\delta r'$ os termos $\Sigma P \delta m$, nos quaes são P os coefficients das massas m nas expressões das respectivas perturbações.

CAPITULO IV

Apparencias, e rotaçãõ dos planetas

223. A observação do movimento periodico das manchas em alguns planetas, e do achatamento em quasi todos, são provas da rotaçãõ d'estes corpos de occidente para oriente, como no Sol e na terra.

Mercurio. A observação do corte que se nota em uma das extremidades do crescente luminoso mostra que a rotaçãõ d'este planeta se completa em $24^{\text{d}}5^{\text{m}}30^{\text{s}}$; e a direcção das bandas transversaes, suppostas por analogia parallelas ao equador, mostra que o eixo polar faz com a ecliptica o angulo de 70° (Schroeter). O achatamento, isto é, a differença entre os dois eixos dividida pelo equatorial, determinado por medidas

micrometricas feitas na passagem por diante do Sol em 1848, é $\frac{1}{28}$ (Daws).

Schroeter suppõe 'neste astro montanhas, das quaes as mais elevadas têm a altura $\frac{1}{126}$ do raio do planeta.

Venus. As manchas d'este planeta mostram que a sua rotaçãõ se completa em $23^{\text{h}}21^{\text{m}}19^{\text{s}}$; e que o eixo polar faz com a ecliptica o angulo de 75° (Schroeter). Ainda não se verificou nem mediu o seu achatamento; porque obsta a isso o grande brilho do planeta, e não se tem feito medições micrometricas nas raras passagens d'este por diante do Sol.

Schroeter supõe 'neste astro montanhas, que chegam até a altura $\frac{1}{140}$ do raio do planeta; e uma atmosphera, que produz na superficie d'elle a refração horizontal $30'34''$.

Marte. As manchas mostraram que a rotação do planeta se completa em $24^h39^m21^s,7$ (W. Herschel), ou em $24^h37^m23^s$ (Beer e Madler); e o seu eixo polar faz com a ecliptica o angulo de $61^{\circ}18'$ (W. Herschel).

O achatamento é $\frac{1}{39}$ (Arago).

A obliquidade do equador, pouco differente da do equador terrestre, indica a existencia de estações semelhantes ás terrestres. As manchas luminosas variaveis, que apparecem alternativamente nos polos e se desvanecem, segundo a posição do Sol, podem ser massas de neve accumuladas no inverno e derretidas no verão, e revelar a existencia d'uma atmosphera vaporosa sujeita a influencias meteorologicas (W. Herschel).

Este planeta distingue-se pela sua cor avermelhada.

Jupiter. As manchas mostram que a sua rotação se completa em $9^h55^m33^s,6$ (Schroeter), ou em $9^h55^m21^s,3$ (Airy); e o eixo polar, supposto perpendicular ao plano paralelo ás bandas, faz com a ecliptica um angulo

de 87° a 88° . O achatamento é $\frac{1}{18}$.

Este planeta tem bandas escuras, sensivelmente parallelas entre si, e quasi parallelas á ecliptica. As bandas são muito variaveis; e a sua variabilidade denuncia, segundo alguns astrônomos, a existencia d'uma atmosphera sujeita a grandes convulsões meteorologicas.

Saturno. Pela observação das bandas d'este planeta conheceu W. Herschel que a sua rotação se completa em $10^h16^m0^s,4$; e o seu eixo polar

faz com a ecliptica o angulo de $61^{\circ}30'$ (Hind), O achatamento é $\frac{1}{10}$ (Hind).

Este planeta é notavel pelo anel, de que adiante tractaremos.

Urano. Os eixos de Urano são desiguaes, e o polar é paralelo ao plano da ecliptica; o que indica a rotação d'este planeta perpendicularmente á ecliptica.

CAPITULO V

Da aberração

224. Supponhamos que a luz proveniente d'uma estrella S chega á terra T (Fig. 38), sendo Ts a sua velocidade, e TT_1 a da terra. Decompondo Ts nas duas Ts' e TT_1 , o raio luminoso só pode chocar a retina em virtude de Ts' , porque TT_1 não faria mais do que conservá-lo na mesma posição relativamente ao observador; e a estrella será vista pela direcção $S'T$.

Compondo pois a velocidade da luz Ts com a da terra Tt , tomada em sentido contrario, a direcção da resultante TS' será aquella pela qual o observador vê a estrella.

O angulo $S'TS$, feito pela direcção apparente $S'T$ com a verdadeira ST , é a aberração da luz da estrella.

225. Supponhamos agora que S é um astro que tem movimento proprio, de sorte que, em quanto o raio luminoso chega a T , elle descreve o espaço $S'S$ (Fig. 39). A velocidade do raio é a resultante da velocidade propria da luz e da velocidade do astro. Assim, compondo a velocidade do astro Ts'' com a propria da luz Ts , resultará a do raio luminoso Ts' , na direcção do qual o observador veria o astro, se não tivesse movimento proprio; mas, em virtude d'este movimento, vel-o-ha pela direcção TS' , que resulta de compor as velocidades Ts' , Tt , como se disse no numero precedente.

Portanto determinar a aberração reduz-se a compor em T a velocidade propria da luz, a do astro, e a da terra tomada em sentido contrario ao do seu movimento.

226. A velocidade da terra resulta das suas velocidades proprias de revolução em volta do Sol, e de rotação em torno do eixo polar; e tambem da velocidade de translação do systema planetario, se este systema se move.

Mas esta ultima velocidade, se existe, não poderá influir na aberração dos corpos do systema planetario, por ser commum aos planetas e á terra; e, em quanto ás estrellas, compor-se-ha com os seus movimentos proprios.

227. Restaria considerar o effeito da mudança que a atmosphaera e as lentes dos oculos operam na velocidade da luz que as atravessa.

Porém, attendendo a que, segundo as leis da optica, a alteração da velocidade da luz, na passagem do meio em que esta é emittida para aquelle em que está a retina, deve ser a mesma, quer haja quer não haja outros meios interpostos, parece-nos que aquella mudança não pode influir no valor da aberração. O que confirmam as experiencias de Arago (Astr. de Biot, 2.^a ed. tom. 3.^o pag. 91, e 3.^a ed. tom. 5.^o pag. 163).

228. Sejam: V' a velocidade da luz; $\frac{ds''}{dt}$ e $\frac{ds'''}{dt}$ as de revolução e de rotação da terra, $\frac{ds^{iv}}{dt}$ a do astro; e V a resultante.

Chamando X, Y, Z , com os respectivos accentos, os angulos que estas velocidades fazem com os eixos coordenados, teremos:

$$\left. \begin{aligned} V \cos X &= V' \cos X' - \frac{ds''}{dt} \cos X'' - \frac{ds'''}{dt} \cos X''' + \frac{ds^{iv}}{dt} \cos X^{iv}, \\ V \cos Y &= V' \cos Y' - \frac{ds''}{dt} \cos Y'' - \frac{ds'''}{dt} \cos Y''' + \frac{ds^{iv}}{dt} \cos Y^{iv}, \\ V \cos Z &= V' \cos Z' - \frac{ds''}{dt} \cos Z'' - \frac{ds'''}{dt} \cos Z''' + \frac{ds^{iv}}{dt} \cos Z^{iv} \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

229. Suppondo que a luz gasta 493^s,13 em percorrer a distancia media a do Sol á terra, e tomando o dia por unidade de tempo, é

$$1.^{\circ} \quad V' = \frac{86400a}{493,15}.$$

doã Em quanto a $\frac{ds''}{dt}$, as formulas do movimento elliptico (n.ºs 19 e 81)

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)^2} \cdot \frac{d(nt)}{dt} = \frac{n[1+e\cos(\Theta-\bar{\omega})]^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ae(1-e^2)\sin(\Theta-\bar{\omega})}{[1+e\cos(\Theta-\bar{\omega})]^2} \cdot \frac{d(\Theta-\bar{\omega})}{dt} = \frac{nae\sin(\Theta-\bar{\omega})}{\sqrt{1-e^2}},$$

e por conseguinte

$$2.^\circ \quad \frac{ds''}{dt} = \sqrt{\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\Theta^2}{dt^2}} = \frac{na\sqrt{1+2e\cos(\Theta-\bar{\omega})+e^2}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Do mesmo modo, para os planetas,

$$3.^\circ \quad \frac{ds^{iv}}{dt} = \frac{n'a'\sqrt{1+2e'\cos(v'-\bar{\omega}')+e'^2}}{\sqrt{1-e'^2}}.$$

E para os cometas, nos quaes é $e'=1$,

$$(3.^\circ)' \quad \frac{ds^{iv}}{dt} = \frac{2n'a'^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{2}(v'-\bar{\omega}')}{\sqrt{\frac{1}{2}p'}},$$

sendo $p'=2a'(1-e'^2)$ o parametro, quadruplo da distancia do vertice ao foco na parabola.

Finalmente, chamando ρ o raio terrestre, D' a colatitude geocêntrica do lugar do observador, e attendendo a que as velocidades effectivas estão na razão composta das angulares e dos raios,

$$3.^\circ \quad \frac{ds'''}{dt} = na \cdot \frac{T+1}{1} \cdot \frac{\rho \operatorname{sen} D'}{a}$$

ou

$$4.^\circ \quad \frac{ds'''}{dt} = n(T+1)\rho \operatorname{sen} D'$$

Nestas formulas são n , n' , os movimentos angulares diurnos sideraes de revolução da terra e do astro, e $T+1$ o anno sideral expresso em dias sideraes, isto é, T o mesmo anno expresso em dias solares.

230. Os angulos X , Y , Z , X' , Y' , Z' ,... dependem da escolha dos eixos. Tomemos para eixo dos xx a linha dos equinoccios; para eixo dos yy , no plano da ecliptica, a linha dos solsticios; e para eixo dos zz a perpendicular ao mesmo plano: sendo positivos os x para a parte d'aries, os y para a parte de cancer, e os z para a parte do polo boreal.

Então, chamando l , λ a longitude e a latitude geocentricas apparentes do astro; e l' , λ' , as suas longitude e latitude geocentricas verdadeiras; e designando pelas mesmas letras subplicas as longitudes e latitudes de R , s ; serão:

$$1.^\circ \quad \begin{cases} \cos X = \cos \lambda_1 \cos l_1, \cos Y = \cos \lambda_1 \operatorname{sen} l_1, \cos Z = \operatorname{sen} \lambda_1, \\ \cos X' = \cos \lambda_1' \cos l_1', \cos Y' = \cos \lambda_1' \operatorname{sen} l_1', \cos Z' = \operatorname{sen} \lambda_1'. \end{cases}$$

Em quanto a X'' , Y'' , Z'' : por se mover a terra no plano da ecliptica, são

$$Y'' = 90^\circ - X'', Z'' = 0.$$

Falta determinar X'' , para o que temos (Fig. 40),

$$\text{tang } T = \frac{rdv}{dr} = \frac{1 + e \cos(v - \pi)}{e \sin(v - \pi)},$$

sendo v e π as longitudes da terra e do perihelio.

E como T difere pouco de 90° , podemos tomar $90^\circ - T$ por $\cot T$, isto é

$$T = 90^\circ - \frac{R'' e \sin(v - \pi)}{1 + e \cos(v - \pi)},$$

$$\text{ou } X'' = 90^\circ - \frac{R'' e \sin(v - \pi)}{1 + e \cos(v - \pi)} + v = \Theta - 90^\circ - \frac{R'' e \sin(\Theta - \tilde{\omega})}{1 + e \cos(\Theta - \tilde{\omega})}.$$

Assim é

$$2.^\circ \quad X'' = \Theta - 90^\circ - \frac{R'' e \sin(\Theta - \tilde{\omega})}{1 + e \cos(\Theta - \tilde{\omega})}, \quad Y'' = 90^\circ - X'', \quad Z'' = 0.$$

Passemos a X^{IV} , Y^{IV} , Z^{IV} . Se chamarmos v' , π' , N , os angulos feitos pelo raio vector do planeta, pela distancia perihelia, e pela tangente com a linha dos nodos, o mesmo processo dará

$$N = 90^\circ + v' - \frac{R'' e' \sin(v' - \pi')}{1 + e' \cos(v' - \pi')}.$$

Sejam: CN (Fig. 41) a direcção da tangente; CN' a da sua projecção na ecliptica; $C\Omega$ a linha dos nodos; Cx e Cy os eixos dos xx e dos yy .

Chamando N' o angulo $N'CO$, Ω a longitude γCO do nodo, e i a inclinação da orbita acb : dos triangulos esfericos abc , adc , aec tiram-se

$$3.^{\circ} \quad \begin{cases} \cos Z^{iv} = \text{sen } N \text{ sen } i, \\ \cos Y^{iv} = \cos N \text{ sen } \Omega + \text{sen } N \cos \Omega \cos i, \\ \cos X^{iv} = \cos N \cos \Omega - \text{sen } N \text{ sen } \Omega \cos i, \end{cases}$$

que, junctas com a expressão de N , dão Z^{iv} , Y^{iv} , X^{iv} .

Finalmente, para achar Z''' , Y''' , X''' , basta fazer nestas formulas

$$N = 90^{\circ} + M, \Omega = 0, i = \omega,$$

sendo M a ascensão recta do meridiano: o que dará

$$4.^{\circ} \quad \cos X''' = -\text{sen } M, \cos Y''' = \cos M \cos \omega, \cos Z''' = \cos M \text{ sen } \omega.$$

231. Dados assim os elementos que entram nas equações (1), tratemos de combinal-as convenientemente.

A somma dos seus quadrados, o quociente da segunda pela primeira, e a terceira, attendendo a serem $l_1 = 180^{\circ} + l$, $l'_1 = 180^{\circ} + l'$, $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda'_1 = -\lambda'$, dão:

$$V^2 = \left\{ \begin{aligned} & \left(V' \cos \lambda' \cos l' + \frac{ds''}{dt} \cos X'' + \frac{ds'''}{dt} \cos X''' - \frac{ds^{iv}}{dt} \cos X^{iv} \right)^2 \\ & + \left(V' \cos \lambda' \text{sen } l' + \frac{ds''}{dt} \cos Y'' + \frac{ds'''}{dt} \cos Y''' - \frac{ds^{iv}}{dt} \cos Y^{iv} \right)^2 \\ & + \left(V' \text{sen } \lambda' + \frac{ds''}{dt} \cos Z'' + \frac{ds'''}{dt} \cos Z''' - \frac{ds^{iv}}{dt} \cos Z^{iv} \right)^2 \end{aligned} \right\},$$

$$\text{tang } l' + \frac{ds''}{V'dt} \cdot \frac{\cos Y''}{\cos \lambda' \cos l'} \dots$$

$$\text{tang } l = \frac{\text{tang } l' + \frac{ds''}{V'dt} \cdot \frac{\cos Y''}{\cos \lambda' \cos l'} \dots}{1 + \frac{ds''}{V'dt} \cdot \frac{\cos X''}{\cos \lambda' \cos l'} \dots},$$

$$\text{sen } \lambda = \frac{V'}{V} \text{sen } \lambda' + \frac{ds''}{V'dt} \cos Z'' \dots$$

Desprezando os quadrados de $\frac{ds''}{V'dt}$, e por conseguinte os de $l - l'$ e $\lambda - \lambda'$, que são da mesma ordem, estas equações reduzem-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = V' + \frac{ds''}{dt} \{ \cos \lambda' (\cos l' \cos X'' + \text{sen } l' \cos Y'') + \text{sen } \lambda' \cos Z' \} \dots \\ l - l' = + \frac{ds''}{V'dt} \cdot \frac{\cos Y'' \cos l' - \cos X'' \text{sen } l'}{\cos \lambda'} \dots \\ \lambda - \lambda' = - \frac{ds''}{V'dt} \{ \text{sen } \lambda' (\cos l' \cos X'' + \text{sen } l' \cos Y'') - \cos \lambda' \cos Z'' \} \dots \end{array} \right.$$

nas quaes é necessario substituir as expressões relativas a cada um dos termos, que se formaram nos n.ºs 229 e 230.

232. Começemos pela aberração devida ao movimento annuo da terra.

Pelo n.º 229, é

$$\frac{ds''}{V'dt} = \frac{493,15 \cdot n}{86400 \sqrt{1-e^2}} V' \sqrt{1 + 2e \cos(\Theta - \omega) + e^2},$$

ou, por ser

$$\frac{493,15 \cdot n}{86400 \sqrt{1-e^2}} = \frac{483,15}{86400 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{360 \cdot 3600}{365,25637} = 20'',2522 = k,$$

$$\frac{ds''}{V'dt} = k \sqrt{1 + 2e \cos(\Theta - \bar{\omega}) + e^2};$$

e pelo n.º 230, são:

$$\cos Y'' \cos l' - \cos X'' \sin l' = \sin(X'' - l') = -\cos\left(l' - \Theta + \frac{R'' e \sin(\Theta - \bar{\omega})}{1 + e \cos(\Theta - \bar{\omega})}\right),$$

$$\cos Y'' \sin l' + \cos X'' \cos l' = \cos(X'' - l') = -\sin\left(l' - \Theta + \frac{R'' e \sin(\Theta - \bar{\omega})}{1 + e \cos(\Theta - \bar{\omega})}\right),$$

$$Z'' = 90^\circ.$$

Portanto a aberração, de que se tracta, é

Em longitude:

$$(3) \dots \left. \begin{array}{l} \delta'' l = -\frac{k \sqrt{1 + 2e \cos(\Theta - \bar{\omega}) + e^2}}{\cos \lambda'} \cos\left(\Theta - l' - \frac{R'' e \sin(\Theta - \bar{\omega})}{1 + e \cos(\Theta - \bar{\omega})}\right), \\ \text{Em latitude:} \\ \delta'' \lambda = -k \sqrt{1 + 2e \cos(\Theta - \bar{\omega}) + e^2} \sin \lambda' \sin\left(\Theta - l' - \frac{R'' e \sin(\Theta - \bar{\omega})}{1 + e \cos(\Theta - \bar{\omega})}\right). \end{array} \right\}$$

233. Passemos á aberração devida ao movimento diurno da terra.

Chamando (ρ) o raio do equador, e c a excentricidade dos meridianos terrestres, é (Calc. das Eph. pag. 108)

$$\cot D' = (1 - c^2) \cot D, \text{ ou } \operatorname{sen} D' = \frac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{(1 - c^2) \cos^2 D + \operatorname{sen}^2 D}},$$

e conseguintemente,

$$\rho \operatorname{sen} D' = \frac{(\rho) \operatorname{sen} D}{\sqrt{1 - c^2 \cos^2 D}}.$$

Logo (n.º 229):

$$\frac{ds'''}{V dt} = \frac{493,15 n (T + 1) \rho}{86400 a} \operatorname{sen} D'$$

$$= \frac{493,15 n (T + 1) \operatorname{sen} \Pi}{86400 \sqrt{1 - c^2 \cos^2 D}} \operatorname{sen} D$$

$$= k (T + 1) \operatorname{sen} \Pi \sqrt{1 - e^2} \frac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{1 - c^2 \cos^2 D}},$$

onde Π designa a parallaxe horizontal do Sol:

$$\text{ou, suppondo } \Pi = 8'',5776 \frac{\rho}{(\rho)}, k (T + 1) \operatorname{sen} \Pi \sqrt{1 - e^2} = \chi,$$

$$\frac{ds'''}{V dt} = \chi \frac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{1 - c^2 \cos^2 D}}, \chi = 0'',30846 \frac{\rho}{(\rho)}.$$

Em virtude d'isto e do n.º 230, as aberrações diurnas em longitude e latitude serão:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \delta''' l = \chi \frac{\text{sen } D}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 D}} \cdot \frac{\cos M \cos \omega \cos l' + \text{sen } M \text{sen } l'}{\cos \lambda'}, \\ \delta''' \lambda = -\chi \frac{\text{sen } D}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 D}} \left[\frac{\text{sen } \lambda' (\text{sen } l' \cos M \cos \omega - \cos l' \text{sen } M)}{-\cos \lambda' \cos M \text{sen } \omega} \right]. \end{array} \right.$$

234. Finalmente occupemos-nos da aberração devida ao movimento dos planetas ou dos cometas.

Para os planetas, em virtude do (n.º 229), e attendendo á terceira lei de Kepler, é

$$\frac{ds^{iv}}{V'dt} = \frac{493,15 n' a' \sqrt{1 + 2e' \cos(v' - \omega') + e'^2}}{86400 a' \sqrt{1 - e'^2}}$$

$$= k \frac{\sqrt{a(1 - e^2)}}{\sqrt{a'(1 - e'^2)}} \cdot \sqrt{1 + 2e' \cos(v' - \omega') + e'^2}.$$

E para os cometas é:

$$\frac{ds^{iv}}{V'dt} = \frac{2k\sqrt{a(1 - e^2)}}{V^{\frac{1}{2}} p'} \cos \frac{1}{2}(v' - \omega').$$

Em virtude d'estes valores, e do n.º 230, as aberrações devidas ao mo-

vimento do astro serão

$$\delta^{iv}l = -k \sqrt{\frac{p'}{p' \sqrt{1 + 2e' \cos(v' - \omega') + e'^2}}} \left[\text{sen} N \cos i \cos(\Omega - l') + \cos N \text{sen}(\Omega - l') \right]$$

$$\delta^{iv}\lambda = -k \sqrt{\frac{p'}{p' \sqrt{1 + 2e' \cos(v' - \omega') + e'^2}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \lambda' \left(-\cos N \cos(\Omega - l') \right. \\ \left. + \text{sen } N \cos i \text{sen}(\Omega - l') \right) \\ \left. + \cos \lambda' \text{sen } N \text{sen } i \right\}.$$

Basta fazer nestas $e' = 1$, quando se tracta dos cometas.

Então, substituindo o valor de N (n.º 230), que para os cometas é exactamente $N = 90^\circ + v' - \frac{1}{2}(v' - \omega') = 90^\circ + \frac{1}{2}(v' + \omega')$, vem

$$(\delta^{iv}l) = -\frac{2k}{\cos \lambda'} \sqrt{\frac{p'}{p'} \cos \frac{v' - \omega'}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\Omega - l' + \frac{v' + \omega'}{2} \right) \\ - 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} i \cos(\Omega - l') \cos \frac{v' + \omega'}{2} \end{array} \right\}$$

$$(\delta^{iv}\lambda) = -2k \sqrt{\frac{p'}{p'} \cos \frac{v' - \omega'}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \lambda' \text{sen} \left(\Omega - l' + \frac{v' + \omega'}{2} \right) + \cos \lambda' \text{sen } i \cos \frac{v' + \omega'}{2} \\ - 2 \text{sen } \lambda' \text{sen}^2 \frac{1}{2} i \text{sen}(\Omega - l') \cos \frac{v' + \omega'}{2} \end{array} \right\}$$

Devendo estas aberrações empregar-se com signal contrario quando o movimento heliocentrico do astro for retrogrado.

235. Desprezando os quadrados das excentricidades das orbitas da terra e dos outros planetas, e pondo por N o seu valor (n.º 230), as expressões das aberrações devidas aos movimentos da terra e dos planetas, dos n.ºs 232 e 234, reduzem-se a:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \delta''l = -\frac{k}{\cos \lambda'} \left[\cos(\Theta - l') + e \cos(\omega - l') \right], \\ \delta''\lambda = -k \text{sen } \lambda' \left[\text{sen}(\Theta - l') + e \text{sen}(\omega - l') \right]. \end{array} \right.$$

..

$$(6) \dots \left\{ \begin{array}{l} \delta^{IV} l = -\frac{k}{\cos \lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\Omega + v' - l') - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i \cos(\Omega - l') \cos v' \\ + e' [\cos(\Omega + \omega' - l') - 2 e' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i \cos(\Omega - l') \cos \omega'] \end{array} \right\} \\ \delta^{IV} \lambda = -k \sqrt{\frac{a}{a'}} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{sen}(\Omega + v' + l') + \cos \lambda' \operatorname{sen} i \cos v' \\ - 2 \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i \operatorname{sen}(\Omega - l') \cos v' \\ + e' \left[\operatorname{sen} \lambda' \operatorname{sen}(\Omega + \omega' - l') + \cos \lambda' \operatorname{sen} i \cos \omega' \right. \\ \left. - 2 \operatorname{sen} \lambda' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i \operatorname{sen}(\Omega - l') \cos \omega' \right] \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

236. Como os catalogos de estrellas costumam dar as suas ascensões rectas e declinações, convem determinar as aberrações d'ellas no sentido d'estas coordenadas.

Para isso basta usar dos angulos X_1'' , Y_1'' , Z_1'' referidos á linha dos equinoccios, á projecção da linha dos solsticios no equador, e á perpendicular a este plano. Achar-se-hão estes angulos como se acharam X^{IV} , Y^{IV} , Z^{IV} , no n.º 230, fazendo $N = X''$, $\Omega = o$, $i = \omega$. O que dá

$$\cos X_1'' = \cos X'', \quad \cos Y_1'' = \operatorname{sen} X'' \cos \omega, \quad \cos Z_1'' = \operatorname{sen} X'' \operatorname{sen} \omega.$$

Então o valor de $\frac{ds''}{V dt}$ (n.º 232), e as formulas (2), nas quaes se devem suppor escriptos α , δ em logar de l , λ , e Y_1'' , Z_1'' , em logar de Y'' , Z'' , darão

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta a'' = \frac{k \sqrt{1 + 2e \cos(\Theta - \omega) + e^2}}{\cos d'} (\operatorname{sen} X'' \cos \omega \cos a' - \cos X'' \operatorname{sen} a'), \\ \delta d'' = -k \sqrt{1 + 2e \cos(\Theta - \omega) + e^2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} d' (\cos a' \cos X'' + \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} X'' \cos \omega) \\ - \cos d' \operatorname{sen} X'' \operatorname{sen} \omega \end{array} \right\}; \end{array} \right.$$

e limitando-nos aos termos em e , teremos (7)

$$\delta'' a = -k \frac{\cos \omega \cos a' \cos \Theta + \sin a' \sin \Theta + e (\cos \omega \cos a' \cos \bar{\omega} + \sin a' \sin \bar{\omega})}{\cos d'}$$

$$\delta'' d = -k \sin d' \left\{ \begin{array}{l} \cos a' \sin \Theta - \sin a' \cos \omega \cos \Theta + \cot d' \sin \omega \cos \Theta \\ + e [\cos a' \sin \bar{\omega} - \sin a' \cos \omega \cos \bar{\omega} + \cot d' \sin \omega \cos \bar{\omega}] \end{array} \right.$$

Estas formulas, reduzem-se a (3), quando se mudam a' e d' em l' e λ' , e se faz $\omega = 0$; como deve ser.

237. Se quizermos ainda attender aos termos da segunda ordem

em $\frac{ds''}{V dt}$, deveremos acrescentar ás formulas (6) os termos seguintes: (7)

A $\delta' a$:

$$+ \frac{k^2}{4 \cos^2 d'} [2 \cos \omega \cos 2a \sin 2\Theta - (1 + \cos^2 \omega) \sin 2a \cos 2\Theta].$$

A $\delta' d$:

$$- \frac{k^2}{8} \operatorname{tang} d (2 \cos \omega \sin 2a \sin 2\Theta + [(1 + \cos^2 \omega) \cos 2a - \sin^2 \omega] \cos 2\Theta).$$

Mas nesta ultima só aproveitamos os termos em que $\operatorname{tang} d$ é factor.

238. Para ter a aberração diurna em ascensão recta e declinação, basta fazer $\omega = 0$ nas formulas (4), e mudar l' , λ' em a' , d' , o que dá

$$\left. \begin{array}{l} \delta''' a = \chi \frac{\sin D}{\sqrt{1 - c^2 \cos^2 D}} \cdot \frac{\cos (M - a')}{\cos d'} \\ \delta''' d = \chi \frac{\sin D}{\sqrt{1 - c^2 \cos^2 D}} \cdot \sin d' \sin (M - a') \end{array} \right\} \dots (8).$$

239. Nas passagens meridianas, superiores e inferiores, são

$$\text{sen}(M - a') = 0, \text{cos}(M - a') = \pm 1.$$

Por isso é nulla a aberração diurna em declinação, e é $\pm \frac{0'',30846 \text{ sen } D}{\text{cos } d' \sqrt{1 - c^2 \text{cos}^2 D}}$

a aberração diurna em ascensão recta; pertencendo o signal + á passagem superior, e o signal - á inferior.

O tempo das passagens observado pode logo corrigir-se do effeito d'esta aberração, usando na formula (5) do n.º 113 da 1.ª Parte de

$C \mp \frac{0'',30846 \text{ sen } D}{\text{cos } d' \sqrt{1 - c^2 \text{cos}^2 D}}$ em logar de C, como se disse no n.º 114 da

mesma parte.

240. Para o Sol, fazendo $l' = \Theta$, $\lambda = 0$, as formulas (5) reduzem-se a

$$\Theta - \Theta' = -k[1 + e \text{cos}(\omega - \Theta)] \dots (9).$$

Se as taboas solares dão, como costumam dar, as longitudes do Sol já affectas da aberração, e as quizermos corrigir d'ella, será necessario ajuntar a Θ o numero $20'',25$, ou o que nas taboas se tirou por conta da aberração. É o que deve fazer-se quando se calculam os logares geocentricos dos planetas.

241. Se fizermos

$$\delta'' l' \cdot \text{cos } \lambda' + k e \text{cos}(\omega - l') = X,$$

$$\delta'' \lambda + k e \text{sen } \lambda' \text{sen}(\omega - l') = Y,$$

as equações (5) darão

$$X^2 + \frac{Y^2}{\text{sen}^2 \lambda'} = k^2.$$

Portanto, suppondo projectadas no céu como linhas rectas as diferenças $\delta''\lambda$ das latitudes verdadeira e apparente, e as diferenças $\delta''l \cos \lambda'$ das longitudes, referidas ao paralelo da estrella; e transportando a origem ao ponto, relativamente ao qual são $ke \cos (\omega - l')$ e $ke \sin \lambda' \sin (\omega - l')$ as coordenadas do logar verdadeiro: a curva descripta pelo logar apparente em volta do verdadeiro é uma ellipse, que tem por centro aquelle ponto, e por eixos ke e $ke \sin \lambda'$, o primeiro sobre o paralelo á ecliptica, e o segundo sobre o circulo da latitude.

Como $Y=0$, $X=0$ dão (eq. 5) $l' = \Theta + i. 180^\circ$, $l = \Theta + (2i+1). 90^\circ$, a estrella está nas extremidades do eixo maior nas epochas das conjunções e das opposições; e nas extremidades do eixo menor nas epochas das quadraturas.

242. Quando se calculam as coordenadas geocentricas d'um planeta com intervallos taes que se conheça o seu movimento geocentrico, é mais commodo achar a aberração d'elle pelo modo seguinte.

Segundo as leis que ficam expostas (n.º 225), devem compor-se as tres velocidades: a do planeta Tp (Fig. 42), a da luz Ts' , e a da terra tomada em sentido opposto Tt' .

Decomponhamos Tp nas duas, Tt igual á da terra, e Tq , que é o movimento geocentrico do planeta. Como Tt e Tt' se destruem, ficam só para compor as duas Ts' , Tq ; o que dá a resultante dirigida por TS'' .

Assim a aberração do planeta é o angulo $S''TS$ determinado pelo movimento geocentrico, em sentido contrario, SS'' .

Chamando pois R a distancia do planeta ao observador, tomada por unidade a media do Sol á terra; Θ o tempo que a luz gasta em percorrer a media distancia do Sol á terra; $\Delta a'$, $\Delta d'$, $\Delta l'$, $\Delta \lambda'$, os movimentos geocentricos durante cada unidade de tempo a que se refere Θ ; teremos evidentemente:

$$l - l' = -R\Theta . \Delta l', \quad \lambda - \lambda' = -R\Theta . \Delta \lambda' \dots (10), \quad -$$

$$a - a' = -R\Theta . \Delta a', \quad d - d' = -R\Theta . \Delta d' \dots (11).$$

242. Resumindo os resultados precedentes, calculam-se as aberrações pelas formulas seguintes:

ESTRELLAS

$$l - l' = \delta''l + \delta'''l, \lambda - \lambda' = \delta''\lambda + \delta'''\lambda \dots \text{form. (3' e 4);}$$

$$a - a' = \delta''a + \delta'''a, d - d' = \delta''d + \delta'''d \dots \text{form. (7 e 8)}$$

PLANETAS

$$l - l' = \delta''l + \delta'''l + \delta^{iv}l, \lambda - \lambda' = \delta''\lambda + \delta''' \lambda + \delta^{iv}\lambda \dots \left. \begin{array}{l} \text{form. (3', 4, 6)} \\ \text{ou form. (10)} \end{array} \right\}$$

$$a - a' = \delta a, d - d' = \delta d \dots \text{form. (11).}$$

244. O phenomeno da aberração explica-se tambem do modo seguinte, sem que se faça intervir explicitamente a composição das velocidades.

Supponhamos que a luz proveniente d'uma estrella S (Fig. 43) chega ao eixo do oculo em t , quando o observador está em a ; para o que deve ser tal a direcção at , que a razão $\frac{bt}{ab}$ seja a das velocidades da luz e da terra. Se a direcção do oculo se conservar parallelamente a at , em quanto a luz e o observador chegarem ambos a b , o raio estará sempre no mesmo eixo.

Com effeito, quando o observador estiver em qualquer ponto x , e o oculo na direcção xy , será $\frac{ax}{ab} = \frac{ty}{bt}$; e por isso o raio luminoso achar-se-ha em y .

Assim, quando o observador chegar a b , o eixo do oculo estará na direcção bs' ; e o astro, cuja luz o terá percorrido, parecerá achar-se nella, estando realmente na direcção bs .

E é evidente que a composição dos espaços $bt' = bt$ e ab , que podem representar as velocidades da luz, e da terra em sentido opposto ao do seu movimento, dá a direcção apparente bs' .

CAPITULO VI

Logares apparentes das estrellas

245. Se desprezarmos os termos em e das formulas (7), e, chamando α , δ , a ascensão recta e a declinação d'uma estrella, fizermos

$$A = -k \cos \omega \cos \Theta, \quad B = -k \sin \Theta,$$

$$15 a = \cos \alpha' \sec \delta', \quad 15 b = \sin \alpha' \sec \delta',$$

$$a' = \cos \delta' \operatorname{tang} \omega - \sin \alpha' \sin \delta', \quad b' = \sin \delta' \cos \alpha',$$

estas formulas serão:

$$\text{aberr. ann. em AR} = Aa + Bb$$

$$\text{aberr. ann. em DC} = A'a' + B'b'.$$

246. Seja p a precessão annua em longitude. Segundo o que vimos na segunda parte, n.º 58, as precessões annuas em AR e DC serão

$$p (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tang} \delta \sin \alpha), \quad p \cos \alpha \sin \omega.$$

Supponhamos que, por meio das AR e DC das estrellas, e das suas variações annuas achadas em um catalogo, se calculam os seus logares medios α' , δ' para o principio d'um anno, e se querem os apparentes para um dia d'esse anno, que dista do principio a fracção t de anno tropico. As suas ascensões rectas e declinações medias serão

$$\alpha' + pt (\cos \omega + \sen \omega \text{ tang } \delta' \sen \alpha'), \delta' + pt \cos \alpha' \sen \omega,$$

ou
$$\alpha' + 15 ct, \delta' + c't,$$

fazendo
$$15 c = p \cos \omega + p \sen \omega \text{ tang } \delta' \sen \alpha', c' = p \sen \omega \cos \alpha'.$$

247. Usando da mesma notação, e fazendo ainda

$$15 d = \cos \alpha' \text{ tang } \delta', d' = -\sen \alpha',$$

as formulas de nutação do n.º 67 da segunda parte serão

$$\text{nut. em AR} = \frac{c}{p} \delta\psi - d \cdot \delta\omega$$

$$\text{nut. em DC} = \frac{c'}{p} \delta\psi - d' \cdot \delta\omega.$$

Portanto, reunindo as duas correcções de precessão e nutação, que se devem applicar aos logares medios do principio do anno a que pertence

o dia proposto, para ter neste dia os logares affectos da precessão e da nutação, resulta a total:

$$\text{em AR} \quad c \cdot \left(t + \frac{\delta\psi}{p} \right) - d \cdot \delta\omega,$$

$$\text{em DC} \quad c' \cdot \left(t + \frac{\delta\psi}{p} \right) - d' \cdot \delta\omega;$$

ou, pondo

$$t + \frac{\delta\psi}{p} = C, \quad -\delta\omega = D,$$

$$\text{em AR} \quad Cc + Dd$$

$$\text{em DC} \quad Cc' + Dd'.$$

248. Finalmente ajuntando as correccões de aberração annua (n.º 245), e de precessão e nutação (n.º 247), temos as formulas

$$(1) \dots \begin{cases} \alpha = \frac{\alpha'}{15} + Aa + Bb + Cc + Dd + \frac{\mu}{15} t, \\ \delta = \delta' + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \mu' t; \end{cases}$$

sendo

$$(2) \dots \begin{cases} A = -k \cos \omega \cos \Theta, & 15 a = \cos \alpha' \sec \delta', & a' = \cos \delta' \operatorname{tang} \omega - \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{sen} \delta', \\ B = -k \operatorname{sen} \Theta, & 15 b = \operatorname{sen} \alpha' \sec \delta', & b' = \cos \alpha' \operatorname{sen} \delta', \\ C = t + \frac{\delta\psi}{p}, & 15 c = p \cos \omega + p \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{tang} \delta', & c' = p \operatorname{sen} \omega \cos \alpha', \\ D = -\delta\omega, & 15 d = \cos \alpha' \operatorname{tang} \delta', & d' = -\operatorname{sen} \alpha'; \end{cases}$$

e μ , μ' os movimentos propios em AR e DC.

Nestas formulas devem substituir-se por $\delta\psi$ e $\delta\omega$ as expressões dadas no n.º 66 da segunda parte, ou as mesmas com os coefficients numericos que se adoptarem.

Em rigor deveriam empregar-se os senos e cosenos de $\alpha' + 15 ct$ e $\delta' + c't$, em logar dos de α' e δ' , mas a differença dos resultados seria insensivel.

No *Nautical Almanac*, adoptando os coefficients de aberração e nutação do professor Peters, os factores A, B, C, D, são os seguintes:

$$\left. \begin{aligned} A &= -20'',4451 \cos \omega \cos \Theta, \\ B &= -20'',4451 \sin \Theta, \\ C &= t - 0,02519 \sin 2\Theta - 0,34241 \sin \Omega + 0,00410 \sin 2\Omega \\ &\quad - 0,00405 \sin 2C, \\ D &= -0'',5507 \cos 2\Theta - 9'',2237 \cos \Omega + 0,0895 \cos 2\Omega \\ &\quad - 0'',0885 \cos 2C; \end{aligned} \right\} \dots (3).$$

nos quaes Θ , C , Ω , representam a longitude do Sol, a da Lua, e a longitude media do nodo da orbita lunar.

249. Por meio das formulas (1), e dos valores (2) e (3) dos coefficients que nellas entram, acham-se os logares das estrellas affectos da precessão, da nutação, e da aberração annua. Se os logares medios forem bem determinados, e estas correções exactas, deverão as ascensões rectas e declinações das estrellas concordar com o que dão as observações meridianas, depois de despojar estas do effeito da aberração diurna, como se disse no n.º 239.

Para facilitar o calculo das correções costumam os catalogos de estrellas dar os logarithmos dos numeros a , b , c , d , a' , b' , c' , d' ; e o *Nautical Almanac* dá na pagina XX de cada mez os logarithmos dos numeros A, B, C, D.

No *Almanaque Nautico* de S. Fernando acham-se tambem estes ultimos numeros; masahi chamam-se A, B, C, D, segundo a nutação de Bessel, o que segundo a notação do catalogo da *British association* temos chamado C, D, A, B.

250. Se não ha os numeros $a, b, c, d, a', b', c', d'$, pode usar-se da transformação seguinte.

Fazendo

$$(4) \dots \begin{cases} Cp \cos \omega = f, & Cp \sin \omega = g \cos G, & D = g \sin G, \\ B = h \cos H, & A = h \sin H, & A = i \cot \omega, \end{cases}$$

as formulas (1) tomam a forma

$$(5) \dots \begin{cases} \alpha = \alpha' + f + g \sin(G + \alpha) \tan \delta + h \sin(H + \alpha) \sec \delta + t \mu, \\ \delta = \delta' + i \cos \delta + g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + t \mu'. \end{cases}$$

A lista dos logares apparentes de estrellas, que vem no *Nautical Almanac*, é precedida por uma taboa das constantes f, g, G, h, H, i para todo o anno. O que facilita o uso das formulas (5).

A lista dos logares apparentes do *Connaissance des Temps* é precedida de taboas tanto dos logarithmos dos numeros A, B, C, D , segundo a notação do catalogo da *British association*, como dos numeros f, g, G, h, H, i .

251. Finalmente, supponhamos que A_1, B_1, C_1, D_1 , são numeros maiores que os maximos valores negativos de A, B, C, D ; e a_1, b_1, c_1, d_1 , numeros maiores que os maximos valores negativos tanto de a, b, c, d , como de a', b', c', d' .

Fazendo

$$A + A_1 = E, \quad B + B_1 = F, \quad C + C_1 = G, \quad D + D_1 = H,$$

$$a + a_1 = e, \quad b + b_1 = f, \quad c + c_1 = g, \quad d + d_1 = h,$$

$$a' + a_1 = e', \quad b' + b_1 = f', \quad c' + c_1 = g', \quad d' + d_1 = h',$$

as formulas (1) darão

$$\frac{\alpha}{15} = \begin{cases} Ee + Ff + Gg + Hh - (A_1e + B_1f + C_1g + D_1h) \\ + A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 + D_1d_1 - (a_1E + b_1F + c_1G + d_1H) + \frac{\mu}{15}t \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} Ee' + Ff' + Gg' + Hh' - (A_1e' + B_1f' + C_1g' + D_1h') \\ + A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 + D_1d_1 - (a_1E + b_1F + c_1G + d_1H) + \mu't. \end{cases}$$

Seja M um limite superior dos numeros positivos

$$a_1E + b_1F + c_1G + d_1H, A_1e + B_1f + C_1g + D_1h, A_1e' + B_1f' + C_1g' + D_1h',$$

e L, l, l' as diferenças, isto é

$$a_1E + b_1F + c_1G + d_1H = M - L,$$

$$A_1e + B_1f + C_1g + D_1h = M - l,$$

$$A_1e' + B_1f' + C_1g' + D_1h' = M - l'.$$

Resultarão

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{\alpha'}{15} + Ee + Ff + Gg + Hh + L + l - (A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 + D_1d_1) - 2M + \frac{\mu}{15}t,$$

$$\delta = \delta' + Ee' + Ff' + Gg' + Hh' + L + l' - (A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 + D_1d_1) - 2M + \mu't.$$

Tal é o methodo proposto pelo astrónomo real de Greenwich (Mem. soc. Astr., vol. xvi), que tomou

$$A_1 = 25; B_1 = 25; C_1 = 1,2; D_1 = 25:$$

$$a_1 = 1,2; b_1 = 1,2; c_1 = 25; d_1 = 1,2; M = 210.$$

Substituindo estes numeros nas expressões precedentes, ficam

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{15} &= \frac{\alpha'}{15} + Ee + Ff + Gg + Hh + L + l - 300 + \frac{\mu}{15} t, \\ \delta &= \delta' + Ee' + Ff' + Gg' + Hh' + L + l' - 300 + \mu' t. \end{aligned} \right\} \dots (6).$$

Estas formulas têm sobre as do n.º 249 a vantagem de só exigir operações sobre numeros positivos, para as estrellas cuja distancia polar não é inferior a 3º45', com tanto que se tire no fim a constante 300.

No catalogo de estrellas deduzido das observações feitas em Greenwich nos doze annos de 1836 a 1847, dão-se os valores dos logarithmos de $e, f, g, h, e', f', g', h'$, e os valores de l, l' , para cada estrella. Na pagina XIX de cada mez do Nautical Almanac dão-se os valores dos logarithmos de E, F, G, H , e o valor de L .

Systema Planetario*Planetas principaes*

Mercurio	Terra	Jupiter	Urano
Venus	Marte	Saturno	Neptuno

Planetas telescopicos entre Marte e Jupiter

Ceres	Calliope	Ariane	Angelina
Pallas	Thalia	Nysa	Maximiliana
Juno	Themis	Eugenia	Maja
Vesta	Phocéa	Hestia	Asia
Astréa	Proserpina	Aglaia	Leto
Hebe	Euterpe	Doris	Hesperia
Iris	Bellona	Pales	Panopea
Flora	Amphitrite	Virginia	Niobe
Metis	Urania	Nemausa	Feronia
Hygie	Euphrosina	Europa	Clytia
Parthenope	Pomona	Calypso	Galathea
Victoria	Polymnia	Alexandra	Euridice
Egeria	Circe	Pandora	Freia
Irene	Leucothea	Melete	Frigga
Eunomia	Atalanta	Mnemosyne	Diana
Psyche	Fides	Concordia	Eurynome
Thetis	Leda	Olympia	Sapho
Melpomene	Laetitia	Danae	Terpsichore
Fortuna	Harmonia	Echo	Alcmene
Massalia	Daphne	Erato	Beatrix
Lutetia	Isis	Ausonia	Clio

No fim da terceira parte daremos os elementos das orbitas dos planetas e dos satellites.

ADVERTENCIA

Para a redacção do segundo volume, impresso em 1866, consultei principalmente, além da *Astronomia* de Biot, que sempre me guiou nos estudos astronómicos, as de Santini, Schubert, Delambre, Franconar e Loutol, as *Tabulas Regiomontanas* de Bessel, e a introdução ao *Catálogo de estrelas de Greenwich de 1840*.

Mais tarde a leitura da referida *urgencia* d'ou-
ADDIÇÕES tros interrompeu, suggerindo-me d'alguns melhoramentos,
 que effectuei, e das addições e notas que se seguem.

Coimbra, 27 de dezembro de 1873.

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.

Sistema Planetario

Planetas principales
ADVERTENCIA

Mercurio	Tierra	Jupiter	Urano
Venus	Marte	Saturno	Neptuno

Ceres	Columba	Aglaia	Angelina
Pallas	Thalia	Vesta	Maximiliana
Juno	Themis	Hygiea	Maja
Vesta	Euterpe	Asta	Asta
Asteria	Proserpina	Leto	Leto
Hecbe	Euterpe	Urania	Hesperia
Iola	Belona	Parquet	Parquet
Flora	Amphitrite	Nola	Nola
Hecbe	Grane	Feronia	Feronia
Hygie	Euprosina	Carla	Carla
Parthenope	Pomona	Galathea	Galathea
Vergina	Polixena	Perdita	Perdita
Agamemnon	Orion	Prax	Prax
Ireos	Leocadia	Yvonne	Yvonne
Samonia	Atalanta	Diana	Diana
Psyche	Fides	Euryome	Euryome
Thalia	Leda	Sepia	Sepia
V. Irenaeus	Laetitia	Terpsichore	Terpsichore
Polixena	Harmonia	Alzira	Alzira
Alzira	Daphne	Beatrice	Beatrice
Leucis	Isis	Autonia	Clia

No son de tercera serie Jarcinos, es el planeta de las órbitas de los planetas y de los satélites.

E. para obliquidades diferentes d'esta, bastará applicar a log A a correccão $2 \log A = 0.80000597$. Ju.

Emquanto ao primeiro processo, fazendo $90^\circ - \alpha = \beta$, a formula (7) do n.º 10, que determina a obliquidade por meio da ascensão recta e da declinação, sendo posta debaixo da forma $\cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \delta$, e desenvolvida em serie pela primeira das equações (6) do n.º 197, dá

ADVERTENCIA

Para a redacção do segundo volume, impresso em 1866, consultei principalmente, alem da Astronomia de Biot, que sempre me guiára nos estudos astronomicos, as de Santini, Schubert, Delambre, Francoeur e Loupot, as *Tabulae Regiomontanae* de Bessel, e a introduccção ao Catalogo de estrellas de Greenwich de 1849.

Mais tarde a leitura d'este trabalho, que a já referida urgencia d'outros interrompera, suggeriu-me a oportunidade d'alguns melhoramentos, que effectuei, e das addições e notas que se seguem.

Coimbra, 27 de dezembro de 1873.

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.

ADVERTENCIA

ADDIÇÕES E NOTAS

Aos numeros 25 e seguintes

I. Para determinar a obliquidade da ecliptica por observações proximas do solsticio pode usar-se das duas coordenadas que se observam; ou d'uma d'ellas, e da hypothese de se mover o Sol em uma certa curva.

Foi assim que, suppondo a curva parabolica, se determinaram os parametros pelas declinações observadas, e se obteve a primeira approximação da obliquidade, como se disse nos nn. 6 e 12. Depois, suppondo-a elliptica, tomaram-se como parametros os das taboas do Sol já formadas, decompondo a obliquidade em duas partes, das quaes: a principal é dada pelas observações da declinação e tem o erro d'estas; e a outra se tira das taboas, cujos erros não influem sensivelmente nella.

O uso da formula (13), que se applica neste segundo processo, pode tornar-se muito facil, formando os coefficients das potencias de $\text{sen}^2 \frac{1}{2} \delta L$, os quaes servirão para muitos annos.

Assim, tomando a obliquidade $23^{\circ}27'20''$, pode dar-se á formula a forma seguinte:

$$\omega = d + A \text{sen}^2 \frac{1}{2} \delta L - B \text{sen}^4 \frac{1}{2} \delta L + C \text{sen}^6 \frac{1}{2} \delta L; \quad \dots (a).$$

sendo : $\log A = 5,252832$; $\log B = 4,527585$; $\log C = 4,545946$

E, para obliquidades diferentes d'esta, bastará ajunctar a log A a correcção $\delta \log A = 0,00000597 \cdot \delta \omega$.

Emquanto ao primeiro processo, fazendo $90^\circ - a = \delta a$, a formula (7) do n.º 10, que determina a obliquidade por meio da ascensão recta e da declinação, sendo posta debaixo da forma $\cot \omega = \cos \delta a \cot d$, e desenvolvida em serie pela primeira das equações (6) do n.º 197, dá

$$\omega = d + \text{sen } 2d \text{ tang}^2 \frac{1}{2} \delta a + \frac{1}{2} \text{sen } 4d \text{ tang}^4 \frac{1}{2} \delta a \dots (b).$$

Como applicação d'estas formulas, sirva o exemplo, que vem na pag. 285 do vol. 1.º da traducção da Astronomia de Brunnow; que é uma observação feita por Bessel em 19 de junho de 1843. E, para calcular em ambas com os mesmos dados, usemos do valor de δL deduzido do de δa pela formula $\text{tang } \delta L = \cos \omega \text{ tang } \delta a$.

Teremos: $d = 23^\circ 26' 7'', 87$; $\delta a = 2^\circ 47' 21'', 9$; $\delta L = 2^\circ 33' 32'', 6$; $\delta \omega = 17''$. E acharemos pelas formulas (a) e (b):

	(a)		(b)
1.º termo.....	23°26' 7'',87	23°26' 7'',87
2.º »	1 29 ,26	1 29 ,23
3.º »	— 1		+ 2
ω	23 27 37 ,12.		23 27 37 ,12

Nestas formulas d é a declinação do Sol projectado na ecliptica, isto é (n.º 14, pag. 22),

$$d = d_1 - \frac{\cos \omega}{\cos d_1} \delta \lambda,$$

sendo d_1 a declinação observada.

No exemplo proposto esta observação dava $d_1 = 23^\circ 26' 8'', 57$, e a latitude $\delta \lambda$ do sol era $\delta \lambda = + 0'', 70$. Portanto $d = d_1 - 0'', 70 = 23^\circ 26' 7'', 87$.

A obliquidade, que estes calculos dão, é a apparente. Para ter a media, será necessario subtrahir da apparente a nutação em obliquidade, a qual se obtem: ou pelos valores da obliquidade apparente e da media que dá a Ephemeride, subtrahindo a segunda da primeira; ou directamente pelo calculo da expressão de $\delta \omega$ da pagina 71.

No mesmo exemplo é $\delta\omega = + 0'',05$; e por isso,

$$\text{obliq. media} = 23^{\circ}27'37'',12 - 0'',05 = 23^{\circ}27'37'',07.$$

A media ω_0 de muitos valores de ω assim determinados pode suppor-se correcta dos erros fortuitos de d e a ; só faltará corrigir dos erros constantes. Sejam Δd e Δa as correcções de a e d .

A equação (7) do n.º 10 será

$$\text{sen}(a + \Delta a) \text{ tang}(\omega + \Delta\omega) = \text{tang}(d + \Delta d),$$

$$\text{isto é, } \text{sen } a \text{ tang } \omega - \text{tang } d = \frac{\Delta d}{\cos^2 d} - \cos a \text{ tang } \omega \cdot \Delta a - \frac{\text{sen } a}{\cos^2 \omega} \Delta\omega,$$

$$\text{ou } (\text{sen } a \text{ tang } \omega - \text{tang } d) \frac{\cos^2 \omega}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } 2\omega}{\text{sen } 2d} \Delta d - \frac{1}{2} \cot a \text{ sen } 2\omega \cdot \Delta a - \Delta\omega = E.$$

Mas, chamando ω' a obliquidade dada por cada observação, é

$$\Delta\omega = \omega - \omega' = \omega - \omega_0 + \omega_0 - \omega' = \Delta\omega_0 + \omega_0 - \omega'.$$

Para ter pois os valores mais prováveis das constantes Δd , Δa , $\Delta\omega_0$, applicaremos o methodo dos menores quadrados ás equações

$$\omega_0 - \omega' + \Delta\omega_0 + \frac{1}{2} \cot a \text{ sen } 2\omega \cdot \Delta a - \frac{\text{sen } 2\omega}{\text{sen } 2d} \cdot \Delta d = E \dots (c),$$

nas quaes se conhecem a , d , $\omega_0 - \omega'$, pelas observações e pelos calculos precedentes, e são incognitas Δa , Δd , $\Delta\omega_0$.

II. Determinada a obliquidade da ecliptica por muitas observações proximas do solsticio, pode determinar-se a ascensão recta do Sol por outras feitas na proximidade dos equinoccios, usando da mesma equação (7), $\text{sen } a = \text{tang } d \cot \omega$.

Depois, a ascensão recta α d'uma estrella poderá determinar-se pelo

intervallo de tempo sideral $T - t$ decorrido desde a passagem meridiana d'ella até a seguinte do Sol, applicando á ascensão recta d'este no instante da sua passagem, e por conseguinte a T , a correccão (β) da pag. 22. E será

$$\alpha = a + t - T - \frac{\text{sen } \omega \cos a}{15 \cos d} \delta \lambda.$$

Os erros de a devidos aos fortuitos de d eliminam-se tomando a media de muitas observações.

Para attender aos constantes, usa-se da mesma equação differencial

$$\Delta a + \frac{2 \text{ tang } a}{\text{sen } 2 \omega} \cdot \Delta \omega - \frac{2 \text{ tang } a}{\text{sen } 2 d} \cdot \Delta d = E.$$

Portanto, chamando α_0 o valor medio de α dado por todas as observações, o que transformará Δa em

$$\Delta a = \Delta \alpha = \alpha - \alpha_0 + \alpha_0 - \alpha' = \Delta \alpha_0 + \alpha_0 - \alpha';$$

e applicando o methodo dos menores quadrados ás equações

$$\alpha_0 - \alpha' + \Delta \alpha_0 + \frac{2 \text{ tang } a}{\text{sen } 2 \omega} \cdot \Delta \omega - \frac{2 \text{ tang } a}{\text{sen } 2 d} \cdot \Delta d = E \dots \dots \dots (d);$$

teremos os valores mais provaveis de Δd , $\Delta \omega$, $\Delta \alpha_0$.

A equação (d) justifica a escolha de observações proximas dos equinoccios, por se vêr nella que então os erros de Δd e $\Delta \omega$ influem pouco em α . E mostra que, fazendo observações correspondentes, duas a duas, em epochas, nas quaes os valores de $\text{tang } a$ sejam eguaes e de signaes contrarios e $\text{sen } 2d$ do mesmo signal, a influencia d'aquelles erros desapparecerá no resultado medio de cada um d'esses pares. É o que tem logar quando as observações correspondentes são feitas uma antes d'um dos equinoccios, outra depois do outro, e a distancias respectivamente eguaes d'elles.

(Veja-se a traducção franceza da Astronomia de Brunnow, vol. 1.º, n.º 93 e 94.

Aos numeros 139 e 137

I. Tem mostrado as experiencias que a luz emittida pelos solidos incandescentes, quando se decompõem pela refração atravessando o prisma, apresenta um spectro continuo; que a emittida pelos vapores metallicos e pelos gazes permanentes apresenta um spectro listrado com riscas mais ou menos brilhantes, cujo numero e posição varia segundo a qualidade d'elles; e que, se os mesmos vapores, em vez de emittirem a luz, se empregam como meios através dos quaes passa a emittida por solidos incandescentes, as riscas brilhantes são substituidas por escuras, identicas em numero e posição com as primeiras.

Ora a comparação do spectro solar directo com os que fornecem os vapores metallicos mostra riscas escuras naquelle, correspondentes a alguns d'estes; e no spectro dos bordos do Sol, assim como no das protuberancias coradas, mostra as riscas brilhantes que pertencem ao hydrogenio. Conclue-se pois d'esta analyse que a photosphera deve conter particulas solidas incandescentes, que emittem a luz; e que, exteriormente a ellas, deve existir um involucro de vapores metallicos e gazes (*chromosphera*), no qual abunda relativamente o hydrogenio.

Se porém este involucro constitue propriamente uma atmosphera de gazes permanentes e vapores metallicos, formada pela supraposição de camadas regulares, como a nossa, é ponto ainda controverso. E d'essa controversia resulta que uns consideram as manchas como provenientes de lacunas feitas na photosphera, e outros como provenientes de nuvens condensadas na atmosphera solar.

II. Seja como for, é certo que as observações, seguidas com tenaz assiduidade por Laugier, Carrington e Spoerer, mostram:

1.º que a quasi totalidade das manchas apparece, a norte e a sul, entre 10º e 30º de latitude heliocentrica, sendo raras as que se observam fóra d'estas duas zonas;

2.º que o tempo da rotação de cada mancha depende da sua latitude. Carrington, Faye e Spoerer procuraram represental-o por meio das seguintes formulas empiricas, nas quaes designam ξ a velocidade angular diaria, e λ a latitude:

$$\begin{array}{l} \text{Carrington} \quad \xi = 14^{\circ}25' - 16' \text{sen}^{\frac{1}{4}} \lambda; \\ \text{Faye} \quad \xi = 12^{\circ} - 186' \text{sen}^2 \lambda; \\ \text{Spoerer} \quad \xi = 16^{\circ},8475 - 3^{\circ},3812 \text{sen} (\lambda + 41^{\circ}13'). \end{array}$$

III. Para determinar o tempo da rotação do sol pelas observações das manchas, é necessario reunir um grande numero d'ellas, e tomar a media dos resultados.

A expressão de Θ' do numero 137 é approximada. Rigorosamente deveria usar-se de $360^\circ - \delta\alpha$ em vez de $360^\circ - \delta l'$; sendo $\delta l'$ o movimento verdadeiro do sol em longitude no tempo Θ' , e calculando, para ter $\delta\alpha$, o valor de $\alpha + \delta\alpha$ pela formula

$$\operatorname{tang}(\alpha + \delta\alpha) = \operatorname{tang}(l' + \delta l' - \Omega) \cos i + \frac{\operatorname{tang} \beta \cos i}{\cos(l' + \delta l' - \Omega)}.$$

IV. As observações do sol são difficeis por causa da intensidade da sua luz. Por isso os observadores têm recorrido a diversos meios para diminuir aquella intensidade, na passagem pelo objectivo ou pelo ocular.

Os ultimos, de que se tem feito uso, são: os diaphragmas compostos de dois vidros, um branco, outro azul, talhados em fórma de cunha, sobrepostos, e collocados diante do ocular em uma corredeira por cujo movimento se gradúa a intensidade da luz que entra no olho; os de J. Herschel, que consistem em prismas de vidro, de tal sorte dispostos que parte da luz se refracta na primeira face, perpendicularmente á segunda por onde sae, e parte se reflecte para entrar no olho; e os polarisadores de Cavalleri de Monza e Merz, nos quaes a parte da luz que se polarisa pela reflexão em um prisma semelhante ao de Herschel ou em uma lamina de vidro corado, é depois reflectida, sempre com a inclinação da polarisação, em um ou dois espelhos negros, fixos e paralelos, e por fim, em um espelho movel, inclinando o qual a respeito dos fixos, se faz variar o plano de reflexão, quanto é necessario para que a intensidade da illuminação se enfraqueça até o grau conveniente.

Os oculares munidos d'estes diaphragmas são conhecidos pelo nome de *oculares helioscopicos*.

Sobre o que diz respeito á constituição physica do sol, podem ler-se os seguintes escriptos: Sechi — *Le Soleil*, 1870; Roscoe — *On spectrum analysis*, 1870; Respighi — *sulle osservazioni spettroscopiche del bordo e delle protuberanze solari*, 1871; Faye — *notices scientifiques de l'annuaire du bureau des longitudes*, 1873.

III. Para determinar o tempo da rotaçao do Sol pelas observações das manchas, é necessario figurar um grande numero de ellas e tomar a media dos resultados.

A expressão de ω do numero 137 é aproximada. Riquozosamente de-
 A expressão de ω do numero 137 é aproximada. Riquozosamente de-

Ao numero 211

Exemplo.

Tomemos para exemplo as quatro observações do Sol em Greenwich de
 2 de Janeiro, 2 d'Abril, 2 de Julho e 1 d'Outubro de 1856; calculando as

longitudes pela fórmula $\text{tang } l = \frac{\text{tang } a}{\cos \omega}$, e reduzindo ao equinoccio medio do

primeiro de Janeiro. Teremos, sendo o tempo medio :

$$\theta = 90^{\circ},99963; \theta' = 181^{\circ},99976; \theta'' = 272^{\circ},98991;$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 91^{\circ}35'12'',04 \\ = 91^{\circ},58657 \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} a' = 179^{\circ}20'52'',71 \\ = 179^{\circ},34798 \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} a'' = 267^{\circ}6'44'',88 \\ = 267^{\circ},11247 \end{array} \right\};$$

$$\frac{1}{2} a = 45^{\circ}47'36'',02; \frac{1}{2} a' = 89^{\circ}40'26'',35; \frac{1}{2} a'' = 133^{\circ}33'22'',44;$$

$$\frac{a' - a}{2} = p; \frac{a'' - a}{2} = p'; \frac{a'' - a'}{2} = p'';$$

Carrington
 Faye
 Spörer

1852
 1853
 1854
 1855
 1856
 1857
 1858
 1859
 1860
 1861
 1862
 1863
 1864
 1865
 1866
 1867
 1868
 1869
 1870

$p = 43^{\circ}52'50'',33$; $p' = 87^{\circ}45'46'',42$; $p'' = 43^{\circ}52'56'',08$:

$\text{sen } \frac{1}{2} a'' \dots 9.8601576 \dots 9.8601576$

$\text{sen } p' \dots 9.9996689 \quad \text{sen } p'' \dots 9.8408451$

$\text{Cl. sen } p \dots 0,1591675 \dots 0,1591675$

$\text{Cl. sen } \frac{1}{2} a' \quad 0,0000070 \quad \text{Cl. sen } \frac{1}{2} a \quad 0,1445841$

$0,0190010 \quad - \quad 0,0047543$

$A - 1,044722$

$B + 1,011007$

$Aa' - 187,36878$

$A\theta' - 190,13915$

$Ba + 92,59466$

$B\theta + 92,00127$

$a' + 267,11247$

$\theta'' + 272,98991$

$172,3383$

$174,8520$

$l \quad 172,3383 \dots 2,2363819$

$\text{Cl } 174,8520 \dots 7,7573294$

$ln \dots 9,9937113$

$n = \text{med. mov. sid.} = 0^{\circ},98562 = 59',1372 \dots$

$\text{Precess\~ao} \dots 23$

$\text{med. mov. diurno} \dots = 59',1395$

$\text{Delambre} \dots 59,1388$

$n\theta - a = -1,89551$; $n\theta' - a' = +0,03462$; $n\theta'' - a'' = +1,95184$

$l(n\theta - a) \dots 0,2777261 \dots 0,2777261 -$

$\text{Cl}(n\theta' - a') \quad 1,4606729 \quad \text{Cl}(n\theta'' - a'') \quad 9,7095558$

$IM \dots 1,7383990 \dots IN \dots 9,9872819 -$

$IM \dots 1,7383990$	—	$1,7383990$	—
$l \text{ sen } a'$	8.0561322	$\text{sen}^2 \frac{1}{2} a'$	9.9999860
	<hr/>		<hr/>
	9.7945312	—	$1,7383850$
	<hr/>		<hr/>
	$— 0,62306$		$— 54,75011$
	<hr/>		<hr/>
$— \text{sen } a$	$— 0,99965$	$— \text{sen}^2 \frac{1}{2} a$	$— 0,51384$
	<hr/>		<hr/>
	$1,62271$		$— 55,26395$
	<hr/>		<hr/>
$IN \dots 9.9872819$	—	9.9872819	—
$l \text{ sen } a''$	9.9994482	$\text{sen}^2 \frac{1}{2} a''$	9.7203152
	<hr/>		<hr/>
	9.9867301		9.7075971
	<hr/>		<hr/>
	$+ 0,96991$		$— 0,51003$
	<hr/>		<hr/>
$\text{sen } a$	$— 0,99965$	$\text{sen}^2 \frac{1}{2} a$	$— 0,51384$
	<hr/>		<hr/>
	$— 0,02974$		$— 1,02387$
	<hr/>		<hr/>
$(1,62271) \dots 0,2102409$		$l(0,02974) \dots 8.4733410$	
$Cl(2 \times 55,26395) \dots 7.9565281$		$Cl(2 \times 1,02387) \dots 9.6887252$	
	<hr/>		<hr/>
$l \text{ tg}(l_1 - \bar{\omega}) \dots 8.1667690$		8.1620662	
	$0^\circ.50.28'',0$		$0^\circ.49'.55'',4$
	<hr/>		<hr/>
Meio	$\dots 0^\circ.50'.11'',7$		
l_1	$\dots 281.21.27,7$		
	<hr/>		<hr/>
$\bar{\omega}$	$\dots 280.31.16,0$		
	<hr/>		<hr/>
Bessel	$\dots 280.27.54,1$		

$l(n^0 - a)' \dots\dots\dots 2,0558773$

sen 1' $\dots\dots\dots 6.4637261$

Cl sen $\frac{1}{2} a \dots\dots\dots 0,1445841$

Cl cos $\left(\frac{1}{2} a + l_1 - \bar{\omega} \right) \dots\dots\dots 0,1632279$

$l(\bar{k} e) \dots\dots\dots 8.8274154$

$\dots\dots\dots 0,067207$

$e \dots\dots\dots 0,01680$

Bessel $\dots\dots\dots 0,01677$

$\frac{l \text{ sen } (l_1 - \bar{\omega})}{\text{sen } 1''} \dots\dots\dots 3,4787962$

$l2e \dots\dots\dots 8.5263854$

$\dots\dots\dots 2,0051816$

$\dots\dots\dots - 1'.41'',2$

$- \text{mov. em } 14,0025 - 59.17,2$

$l_1 \dots\dots\dots 281.21.27,7$

$\dots\dots\dots 280.20.29,3$

$\dots\dots\dots - 20,0$

$\dots\dots\dots 280.20.9,3$

Bessel $\dots\dots\dots 280.20.9,5$

À pagina 153 no fim

A elongação $126^{\circ}7'$ do quadro daria

$$\frac{p'}{p} = 2,6005$$

Às paginas 193 e 198

Se, em vez de maxima parallaxe do Sol $8'',5776$, e da constante da aberração de Delambre $20'',2518$, se adoptarem os respectivos numeros de Le Verrier e Struve, $8'',856$ e $20'',4451$, deverá o coefficiente $0'',30847$

multiplicar-se por $\frac{8,856}{8,5776} \times \frac{20,4451}{20,2518} = 1,0423$,

o que o elevará a $0'',3215$.

À pagina 203!

No *Almanaque Nautico* de S. Fernando, que é redigido com exactidão escrupulosa, ajunctam-se ás expressões de α' e δ' os termos de segunda ordem

$$\frac{1}{2} t^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2 \delta}{dt^2}.$$

Se o catalogo de estrellas dá as variações seculares da precessão, s_{α} e s_{δ} , bastará tomar por estes termos os valores

$$t^2 \frac{s_{\alpha}}{200}, t^3 \frac{s_{\delta}}{200} \text{ (num. 59 e 60).}$$

À pagina 204

Desde 1876 o *Nautical Almanac* dá os logarithmos de A, B, C, D, nas paginas 301 a 308.

À pagina 205

O *Nautical Almanac* para 1876 dá, na pagina 309, os valores de f, G, H, e os logarithmos de g, h, i.

À pagina 207

Nos catalogos de estrellas, deduzidos das observações de Greenwich, continuam a dar-se os respectivos valores de $e, f, g, h,$ e e', f', g', h' . E na pagina 308 do *Nautical Almanac* para 1876 dão-se os logarithmos de E, F, G, H, e o valor de L.

À pagina 208

Alem dos planetas telescopicos mencionados, ha mais os seguintes, descubertos até 12 de setembro de 1871:

Semele	Aurora	Miriam	Felicitas
Silvia	Arethusa	Hera	Lydia
Thisbe	Clotho	Clymene	Ate
Julia	Egle	Minerva	Iphigenia
Antiope	Iantho	Artemisa	Amalthea
Egina	Dine	Dionea	Cassandra
Undina	Hecate	Hecuba	Lomia
Minerva			

(*Annuaire du bur. des long. pour 1873*).

E posteriormente, até 16 de agosto de 1873, foram descubertos outros que perfazem o numero de 134.

TABOA DAS MATERIAS

SECÇÃO PRIMEIRA

Theoria do Sol

	Pag.
CAP. I. PRIMEIRA DETERMINAÇÃO DA ORBITA SOLAR.....	8
I. Equinoccios, solsticios, e anno tropico.....	13
II. Leis de Kepler, perigeu e excentricidade; formulas do movimento elliptico.....	25
CAP. II. DETERMINAÇÃO MAIS EXACTA DA POSIÇÃO DA ECLIPTICA.....	33
I. Determinação mais exacta da obliquidade.....	ib.
II. Determinação mais exacta dos equinoccios.....	37
CAP. III. DO CALENDARIO SOLAR.....	41
CAP. IV. DESEGUALDADE DOS DIAS E ESTAÇÕES.....	45
Crepusculo.....	48
CAP. V. MUDANÇAS DA OBLIQUIDADE DA ECLIPTICA; E PRECESSÃO DOS EQUINOCIOS.....	49
I. Exposição e medida d'estes phenomenos.....	ib.
II. Influencia no transporte das coordenadas.....	54
III. Anno sideral; e invariabilidade do dia sideral.....	65
CAP. VI. DA NUTAÇÃO.....	65
I. Exposição dos phenomenos da nutaçã o.....	ib.
II. Explicação dos phenomenos da precessão e nutação.....	73
CAP. VII. DETERMINAÇÃO MAIS EXACTA DA EXCENTRICIDADE DA ORBITA.....	77
CAP. VIII. DETERMINAÇÃO MAIS EXACTA DO PERIGEU.....	83
I. Posição do perigeu.....	ib.
II. Influencia da posição do perigeu na grandeza das estações e do anno tropico.....	89
CAP. IX. CORRECÇÃO FINAL DE TODOS OS ELEMENTOS DA ORBITA.....	92

	Pag.
CAP. X. TEMPO VERDADEIRO, MEDIO, E EQUAÇÃO DO TEMPO	97
CAP. XI. FORMAÇÃO DAS TABOAS ASTRONOMICAS	104
CAP. XII. DO MOVIMENTO DA TERRA, E DAS SUAS CONSEQUENCIAS	107
CAP. XIII. UTILIDADE DA THEORIA DO SOL NA CHRONOLOGIA	109
CAP. XIV. DA ROTAÇÃO DO SOL	112
I. Determinação do equador solar, e do tempo da rotação.	<i>ib.</i>
II. Constituição physica do sol	117
Nota 1. ^a sobre os climas	118
Nota 2. ^a sobre o minimo crepusculo	121

SECÇÃO SEGUNDA

Theoria dos planetas

CAP. I. DIVISÃO DOS PLANETAS EM SUPERIORES E INFERIORES.	126
I. Planetas inferiores.	127
Elongações, semidiametros, e raios das orbitas.	129
II. Planetas superiores,	132
Semidiametros e distancias.	133
III. Phases e brilho dos planetas.	135
Phases.	<i>ib.</i>
Brilho.	137
IV. Lei de Bode.	139
CAP. II. I. REVOLUÇÕES PERIODICAS DOS PLANETAS	141
Revolução tropica	142
Revolução sideral	143
Periodos de concordancia	144
Velocidades angulares e effectivas.	147
II. Estações dos planetas.	148
Dos planetas superiores.	<i>ib.</i>
Dos planetas inferiores	151
Determinação do raio da orbita pelas elongações na epocha das estações,	153
CAP. III. DETERMINAÇÃO DA ORBITA	155
I. Transformação de coordenadas.	<i>ib.</i>
II. Posição do plano da orbita.	162
III. Determinação dos outros elementos	167
IV. Leis de Kepler.	178
V. Correccão dos elementos.	180
CAP. IV. APPARENCIAS E ROTAÇÃO DOS PLANETAS.	183
CAP. V. DA ABERRAÇÃO.	185

TABOA DAS MATERIAS

227

	Pag.
Exposição do phenomeno	ib.
Formulas para o calculo d'elle	186
Aberração {	191
	192
	194
Aberração em AR. e Decl.	196
Ellipse de aberração	198
Formulas de aberração dependentes do movimento geocentrico dos planetas.	199
Resumo das formulas da aberração; e outra explicação do phenomeno.	200
CAP. VI. LOGARES APPARENTES DAS ESTRELLAS,	201
Termos devidos á aberração, precessão e nutação.	ib.
Formula de Bessel.	203
Formulas d'Airy.	205
Lista dos planetas telescopicos	208

ADDIÇÕES E NOTAS

Aos numeros 25 e seguintes	212
Aos numeros 139 e 137	216
Ao numero 211	218
Á pagina 153	222
Ás paginas 193 e 198	ib.
Á pagina 204	223
Á pagina 205	ib.
Á pagina 207	ib.
Á pagina 208	224

ERRATAS

Pag.	Lin.	Erros	Emendas
35	7	$\cos^2 \frac{1}{2} l$	$\cos^2 \frac{1}{2} \delta l$
38	(.)	ω	$\bar{\omega}$
39	penult	$e \delta t_2$	$e \delta t_1$
42	penult.	1860	1850
52	3 sub.	$-9^\circ,929736$	$-0^\circ,929736$
56	11 e 12	$\gamma N N'; e \text{ sen}^2 i$	$\gamma N \gamma'; e \text{ sen}^2 \frac{1}{2} i$
"	12 e 13.	$\text{sen } \omega_{t'}; e \text{ sen } (\psi_{t'} - \psi_t),$	$\text{sen } \omega_{t'}; e \text{ sen } (\psi_{t'} - \psi_t).$
57	11	$\delta d \cos d_t$	$\delta d_t \cos d_t$
62	15	365,25 t	366,25 t
70	4	$d=0$	$d=90^\circ$
85	7	$-2m \ominus$	$-\delta E + \delta E' - 2m \ominus$
86	21	do apogeu	do perigeu
91	8	ψ	$\delta \psi$
95	4 sub	diferenças segundas	diferenças
95 e 96		0,315	0,313
100		} por: 754373; 66508427; 68486524 } leiam-se: 7754373; 64401997; 66380094	
101	8	adiante	atraz
102	3 sub	SS'S''	S'S'/S'''
105	15	$\frac{3}{8} e$	$\frac{3}{8} e^3$
121	15	$\cos P =$	$\cos P = -$
127	12, 9 sub	menos, mais	mais, menos
145	7	$+q''q'''$	$+qq'''+q''q'''$
"		» 1660823115	1660823113
146 e 147	"	30098,05	30098'',08
152	8	n.º 189	n.º 191
162	3	tang φ	tang. I
164	10 sub.	$\delta r'$	$\frac{\delta r'}{r'}$
175	18	$R \cos \lambda'$	$r' \cos \lambda'$
193	6	$\rho \text{ sen } D$	$(\rho) \text{ sen } D$
"	12 e 13	supprima-se:	$\frac{\rho}{(\rho)}$
197	8	formulas (6)	formulas (7)
200	12	para o que deve ser	sendo
201	4 sub	A', B'	A, B
204	12	0,34241	0,34243
206	1 e 2 sub.	- (+ (

Fig. 2.

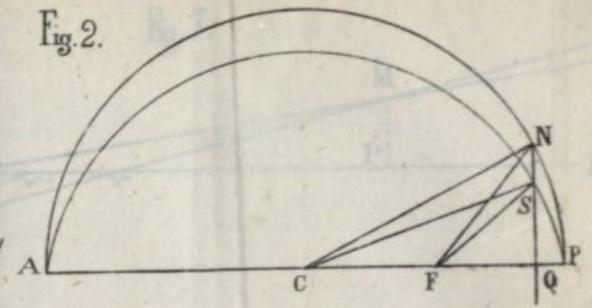


Fig. 1.

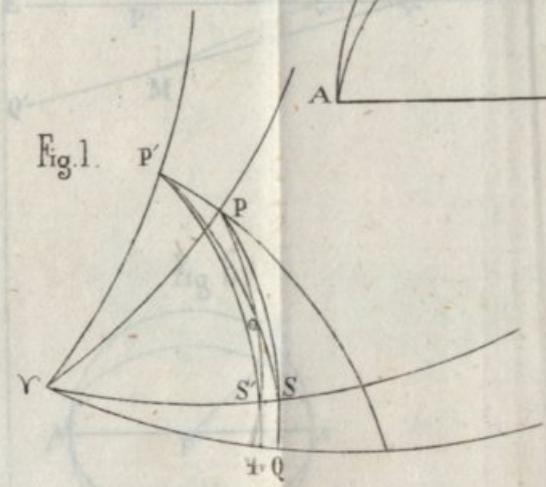


Fig. 3.

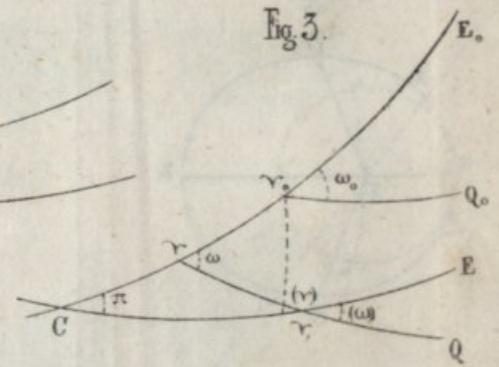


Fig. 5.

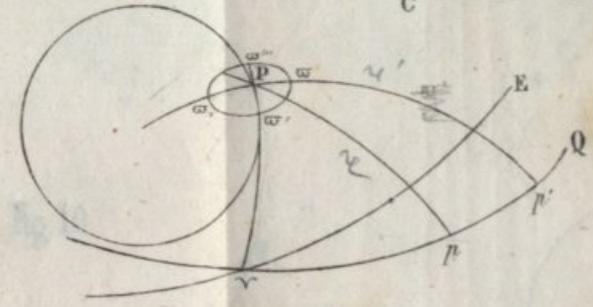
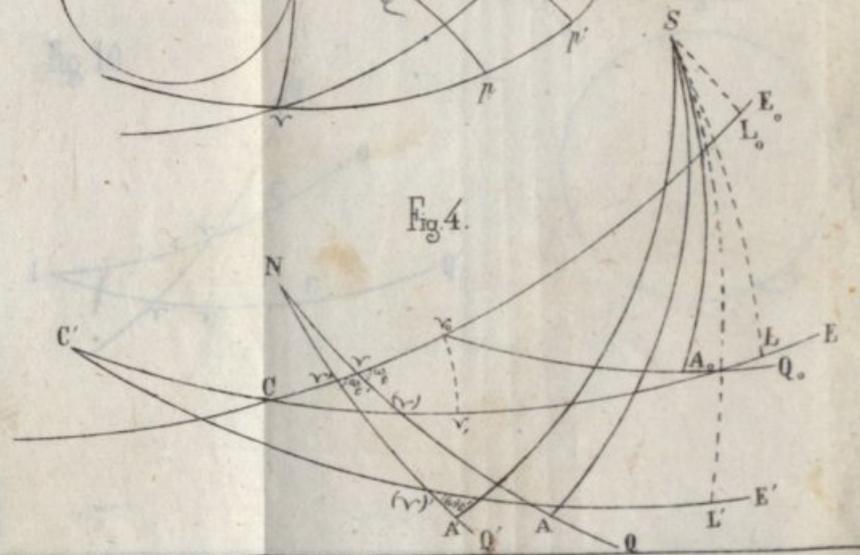


Fig. 4.





Exceder
 $\cos \frac{1}{2} \alpha$
 2.
 850
 $0^{\circ} 929736$
 $N \gamma = a \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$
 $\text{sen} \gamma = a \cos (\frac{1}{2} \alpha - \gamma)$
 $\cos \alpha$
 $\cos \alpha$
 $100, 25 \pm$
 $100 - 20^{\circ}$
 $2 \alpha - 2 \gamma = 2 \alpha - 2 \gamma$
 de perigos
 10
 diferenças
 7, 373
 sites
 $\frac{1}{2} \alpha$
 $\frac{1}{2} \alpha$
 $\frac{1}{2} \alpha$
 $\cos P$
 mais, menos
 $+ 79 + 79$
 1660823, 13
 30000, 08
 n. 101
 tang. 1
 $\frac{1}{2} \alpha$
 $\frac{1}{2} \alpha$
 $r' \cos \Gamma$
 $(\gamma) \cos \Gamma$
 $\frac{1}{2} \alpha$
 Formulas (7)
 2000
 A. 8
 0, 31243
 +

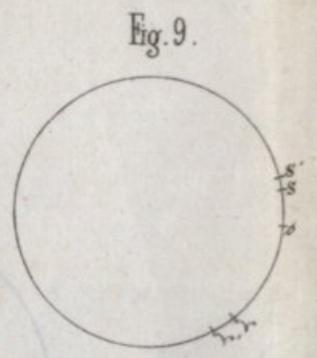
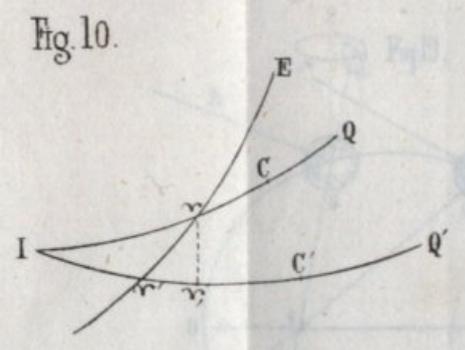
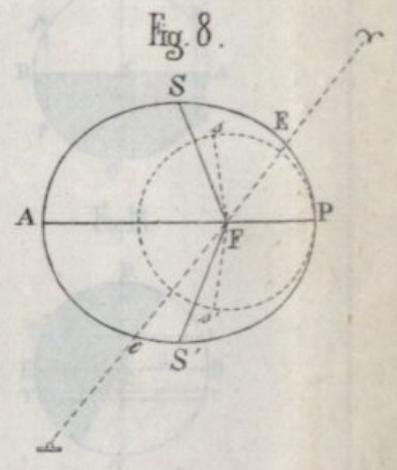
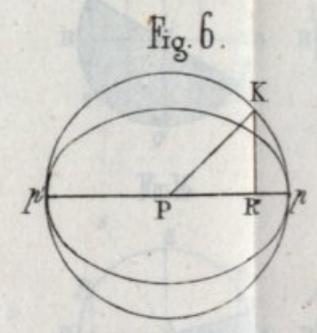
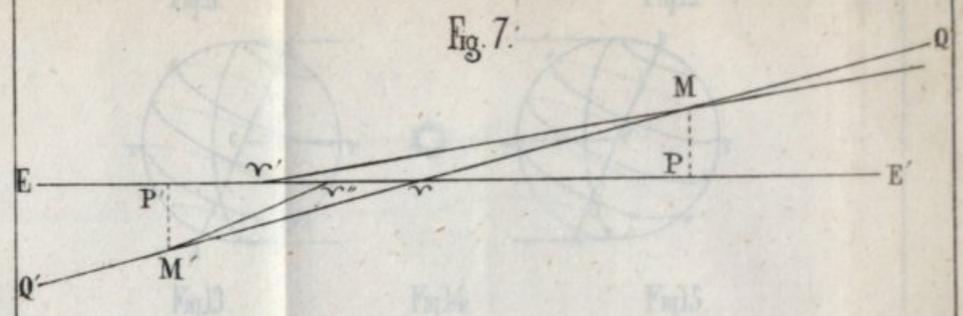


Fig 7

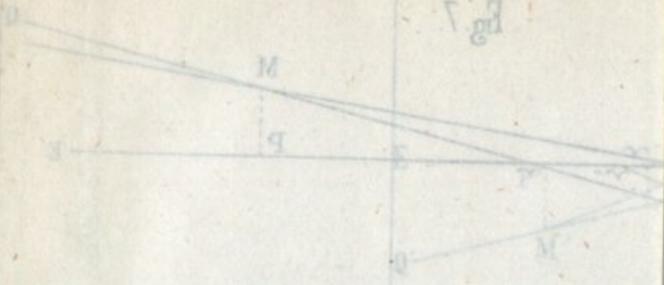


Fig 8



Fig 6



Fig 9

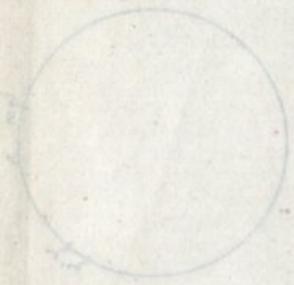


Fig 10



Fig.11.

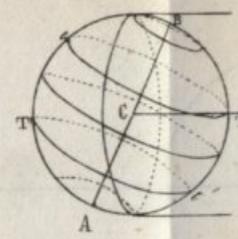


Fig.12.

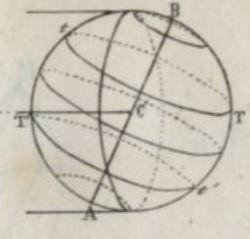


Fig.13.

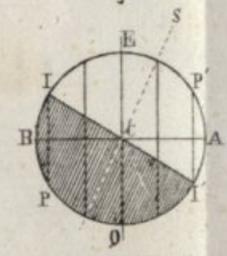


Fig.14.

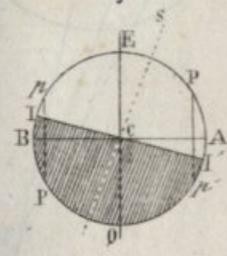


Fig.15.

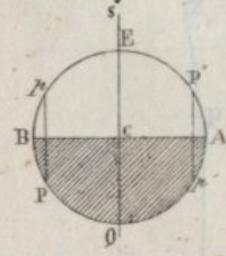


Fig.16.

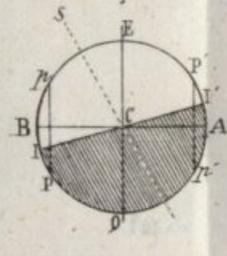


Fig.17.

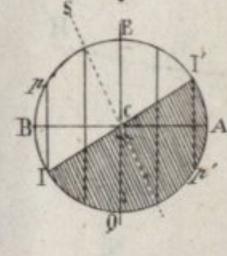


Fig.18.

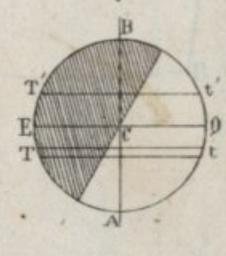


Fig.19.

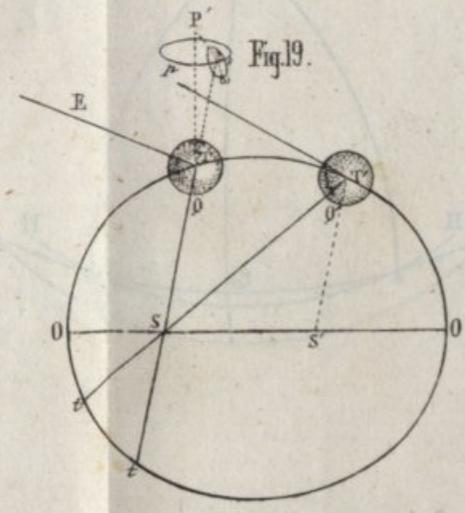


Fig. I



Fig. II



Fig. III



Fig. IV



Fig. V



Fig. VI



Fig. VII

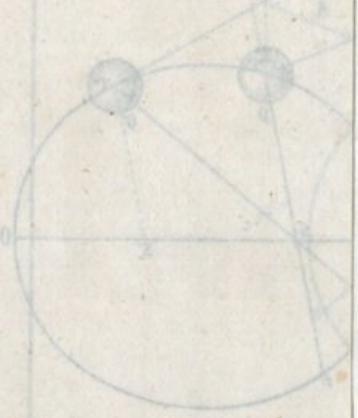


Fig. 20.

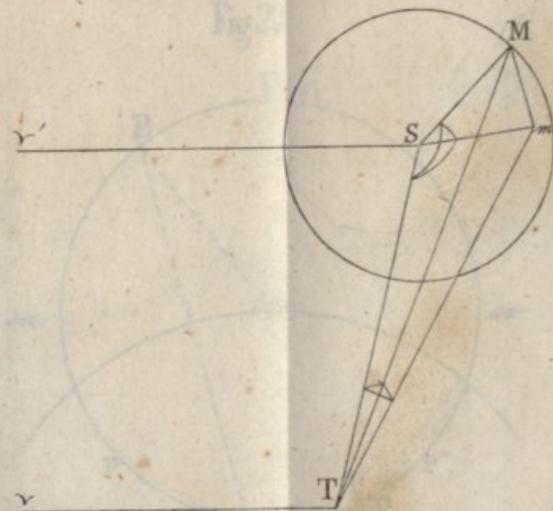


Fig. 21.



Fig. 22.

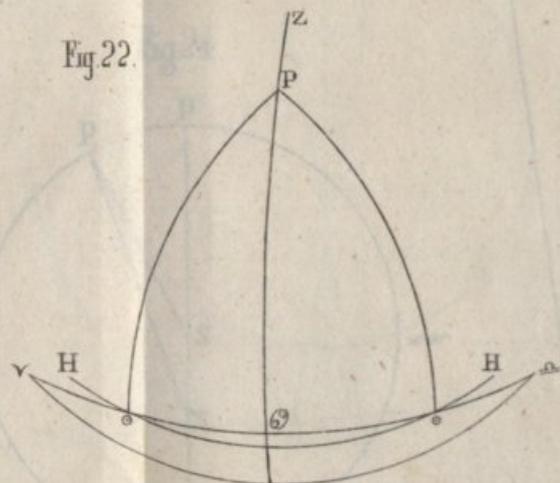


Fig 20



Fig 21



Fig 22

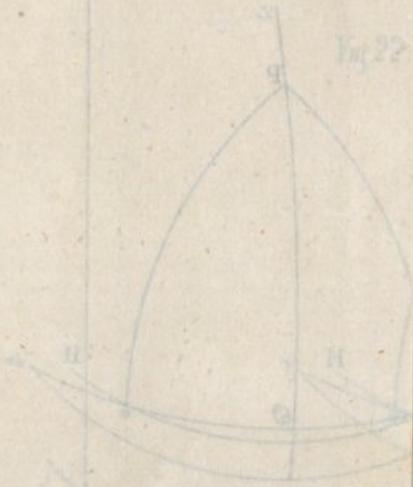


Fig 25



T

Fig 26



Fig 27

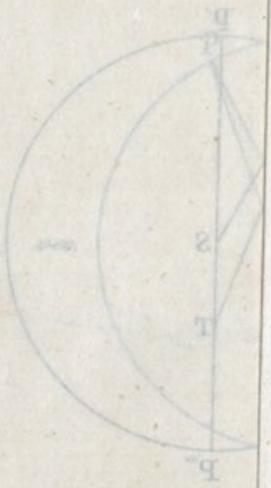


Fig. 26.

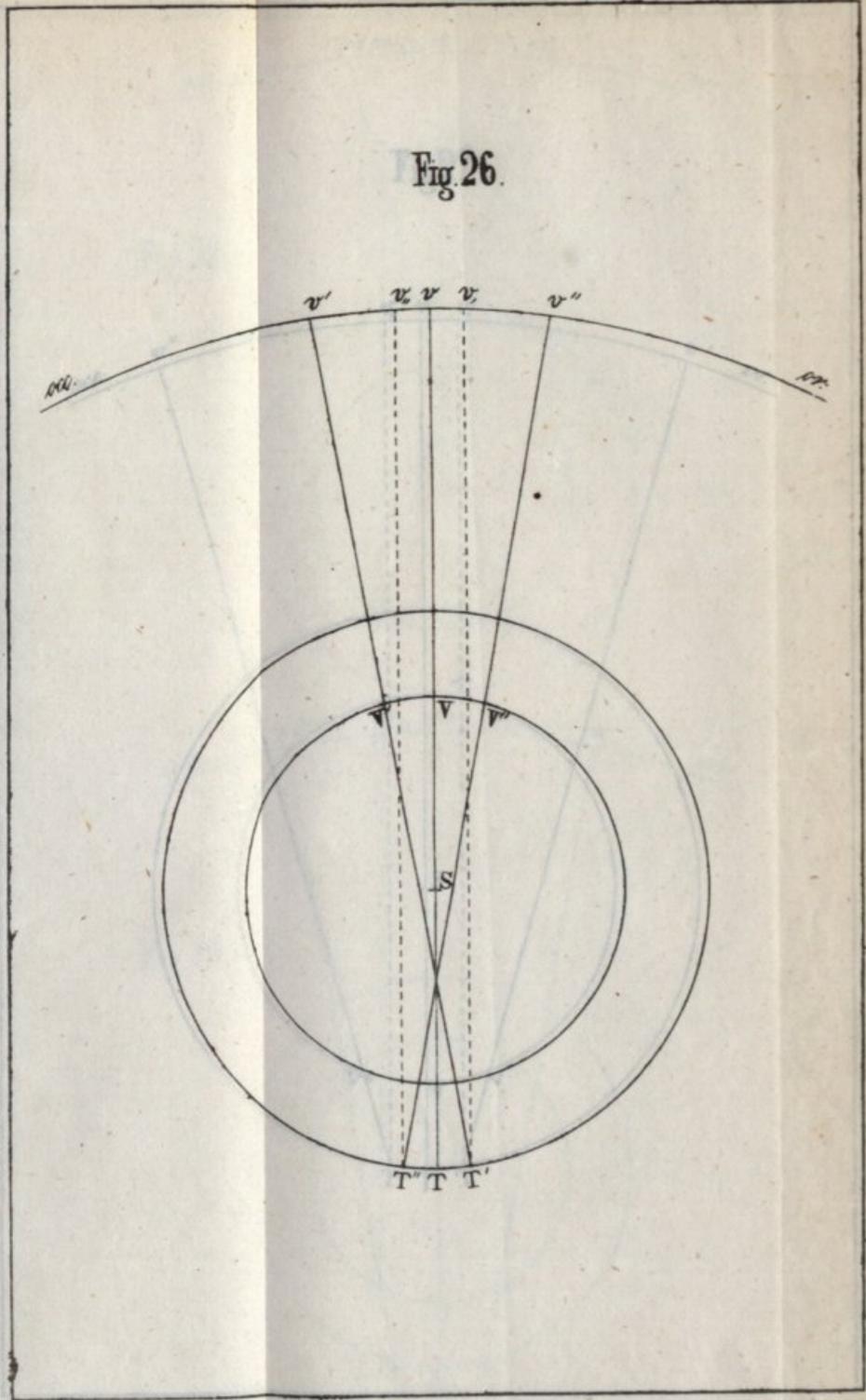


Fig 26

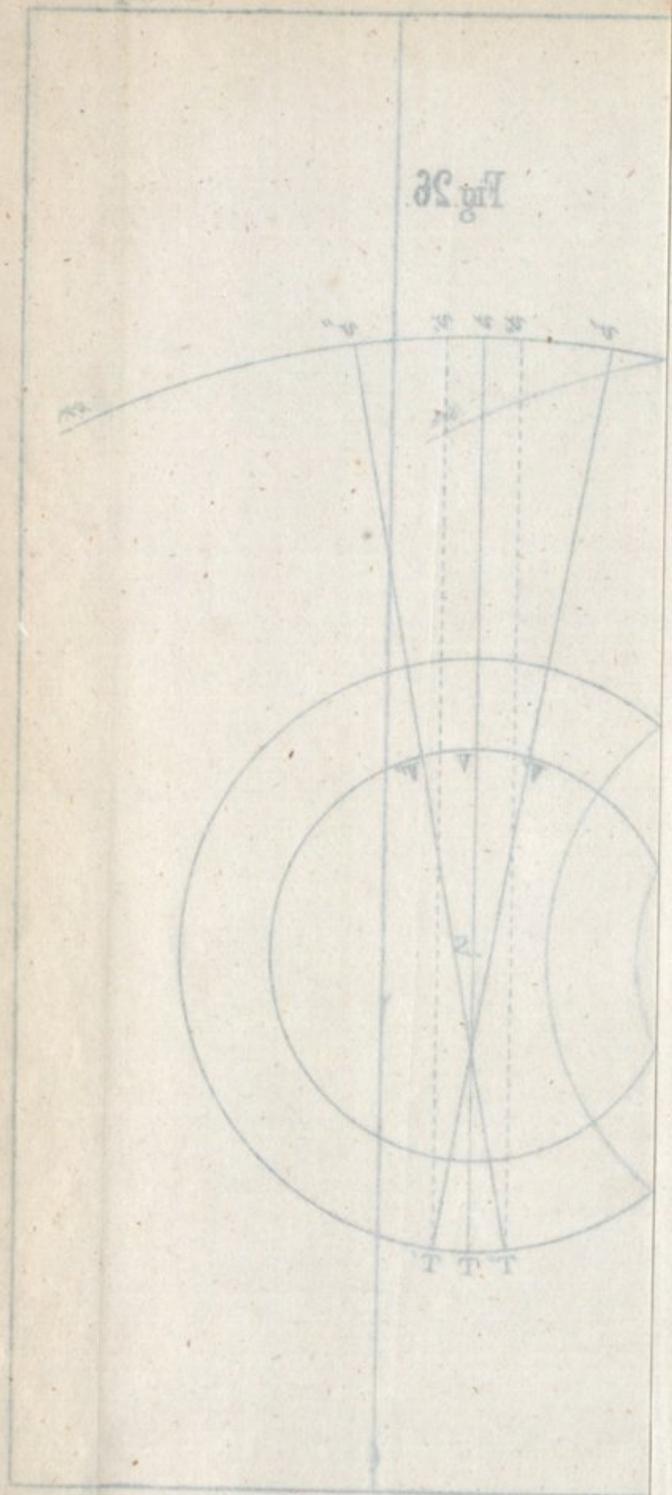


Fig. 37

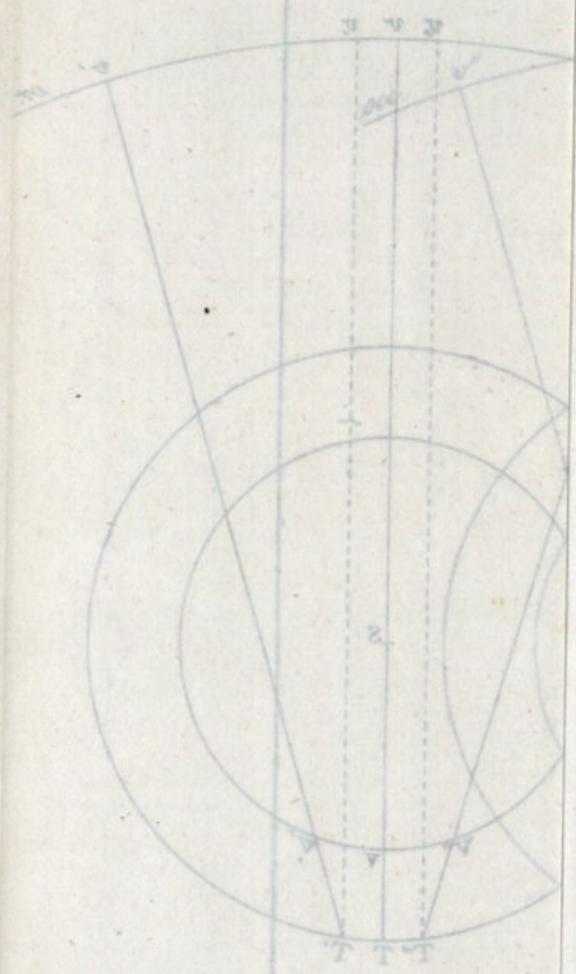


Fig. 28.

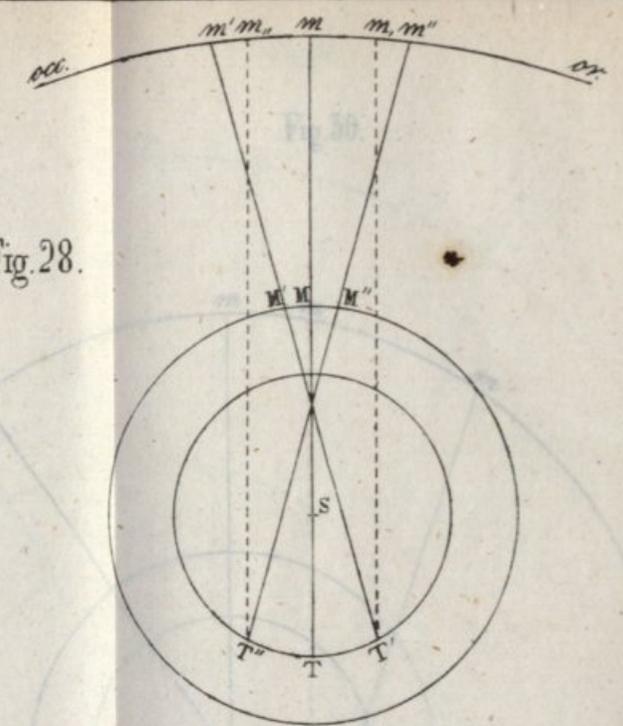
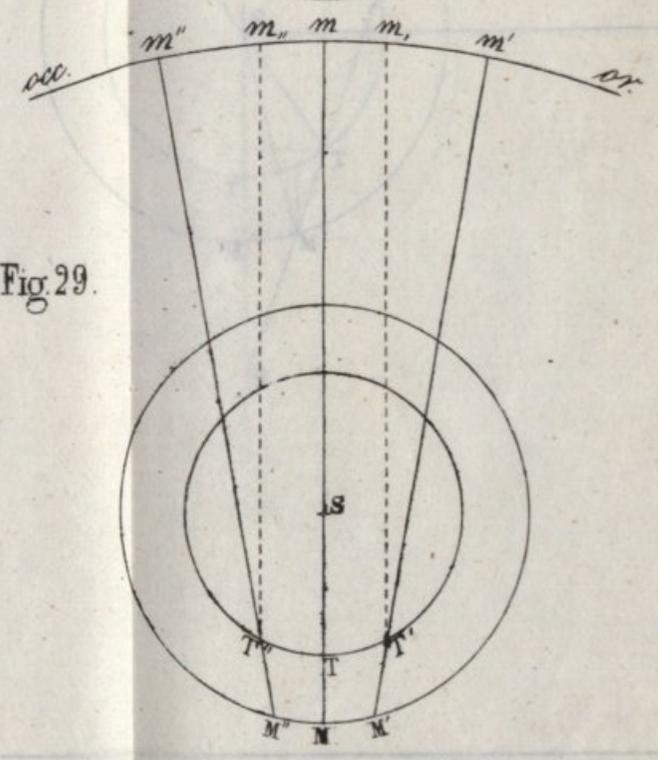
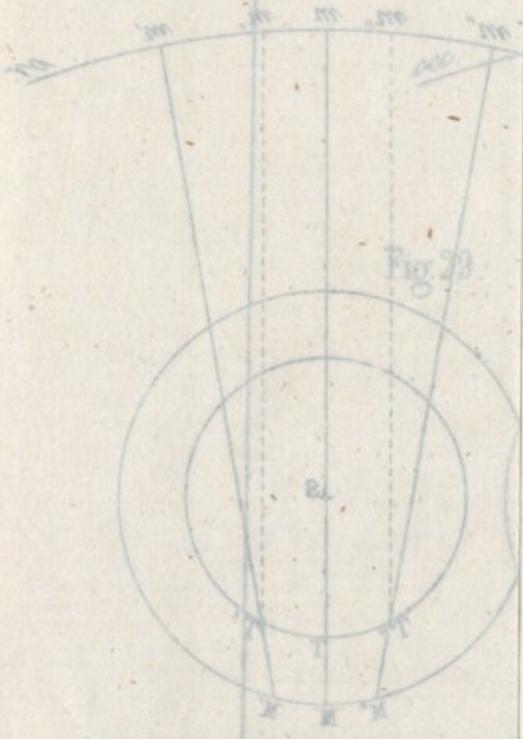
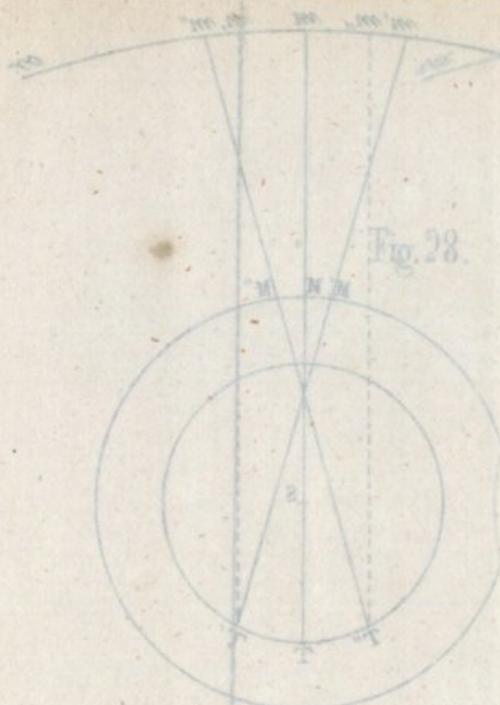
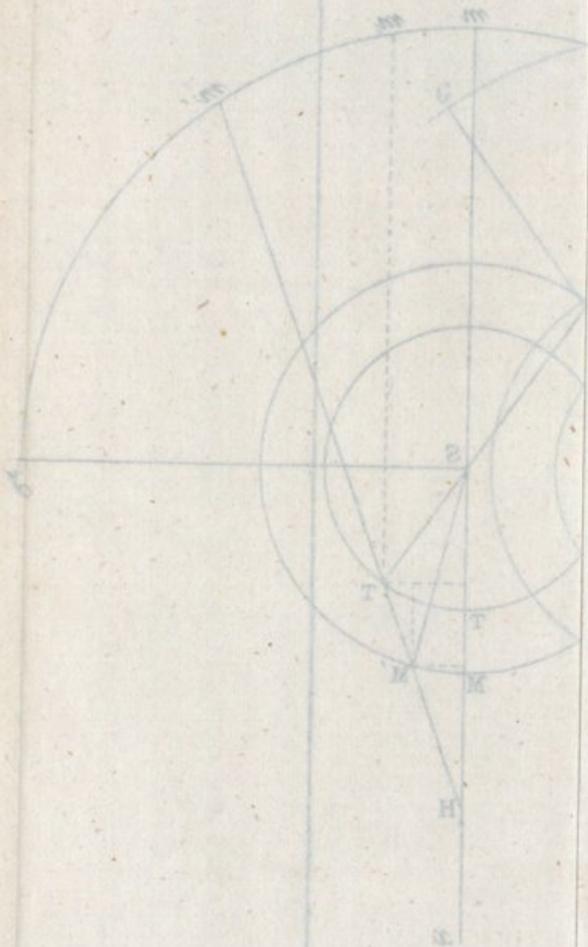
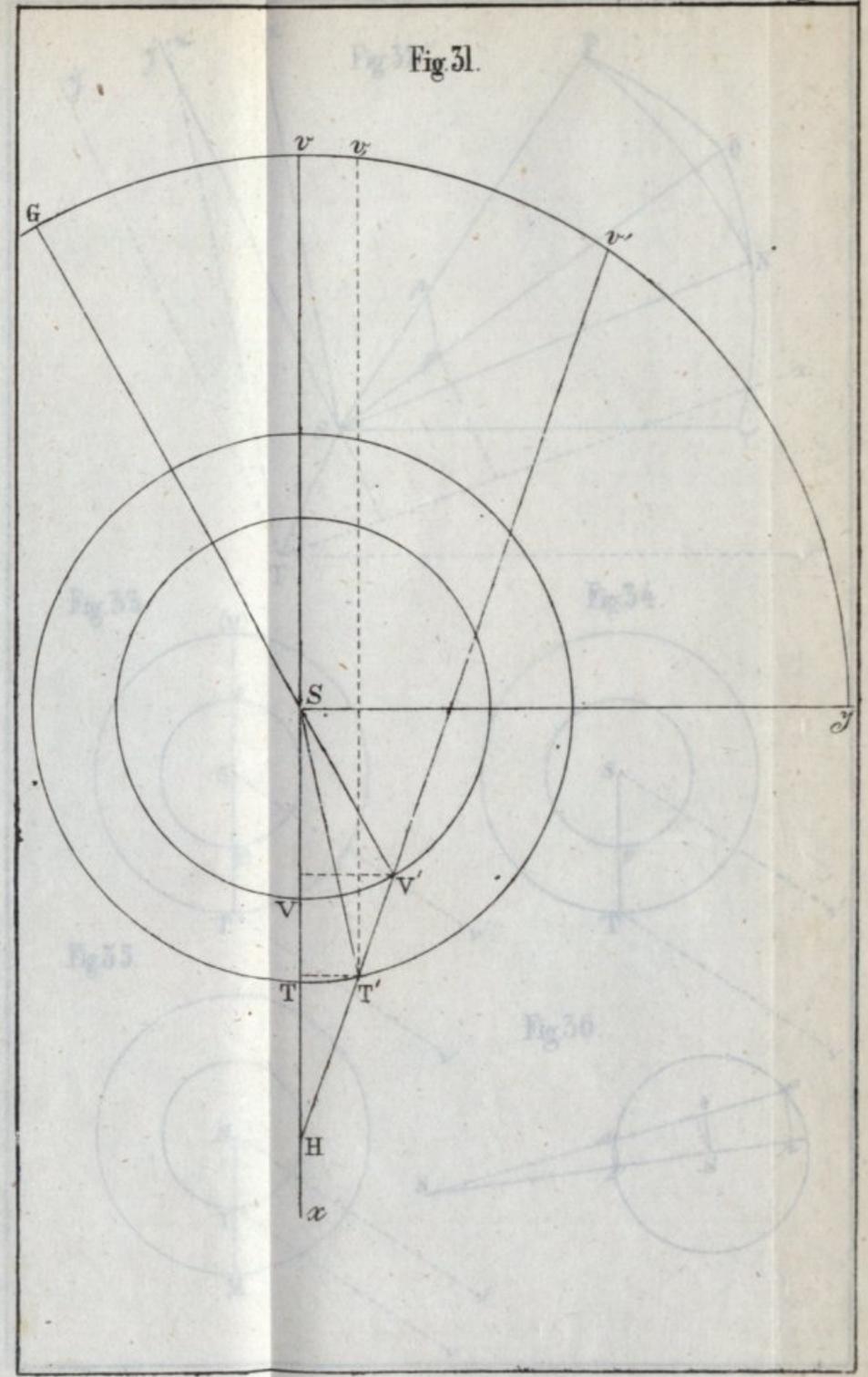


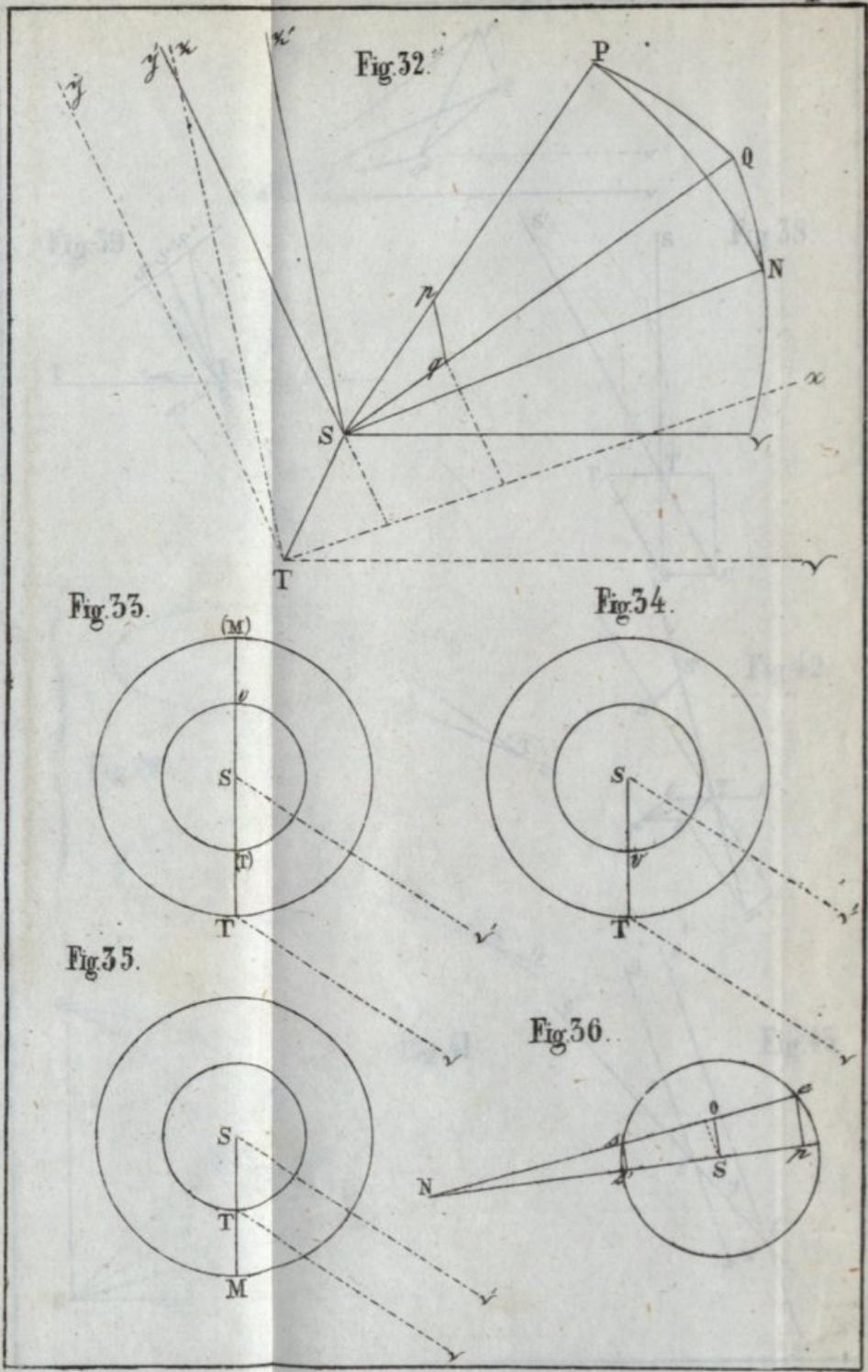
Fig. 29.











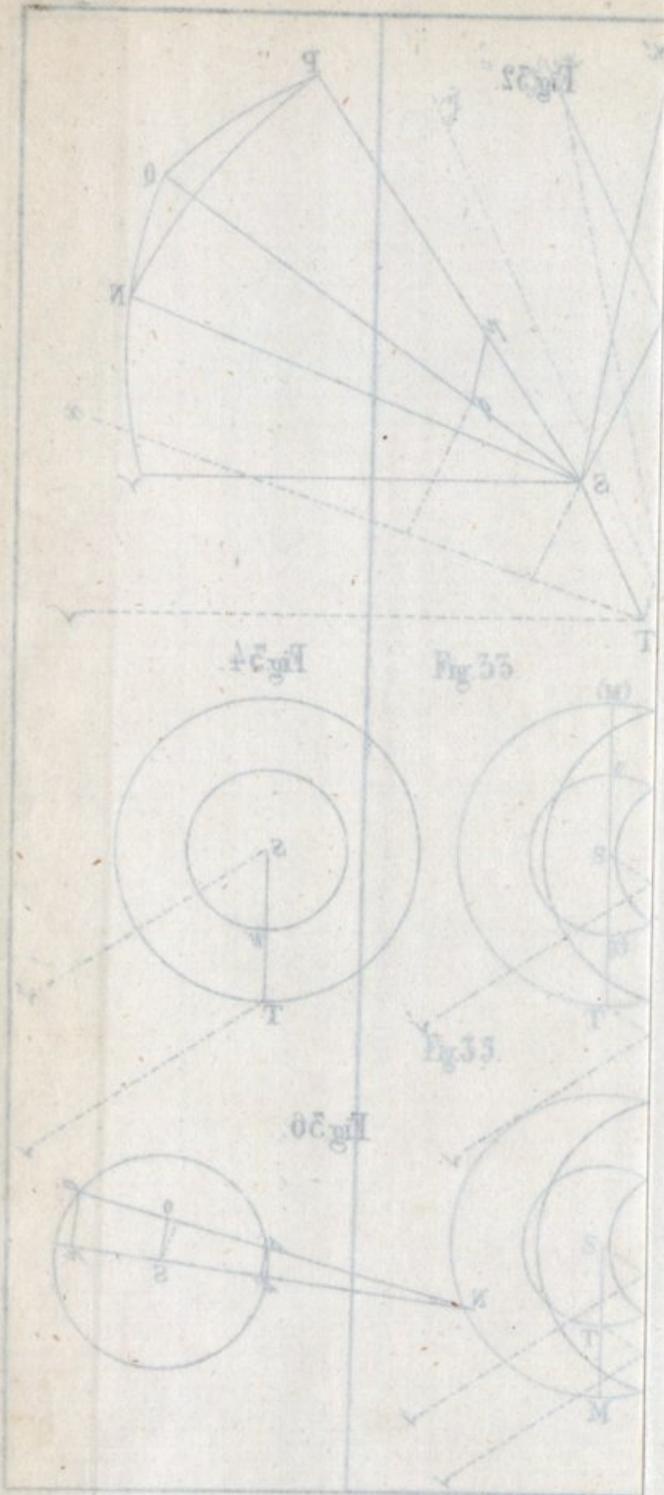


Fig. 37.

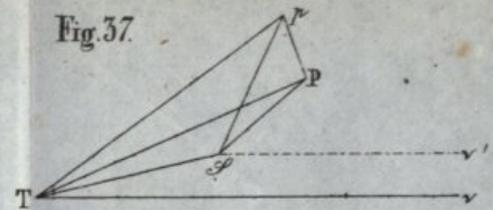


Fig. 39.

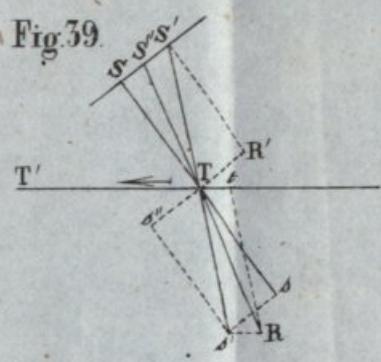


Fig. 38.

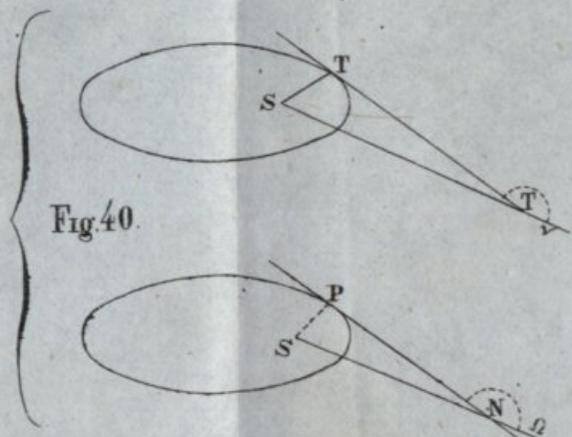
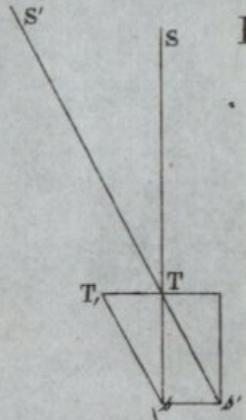


Fig. 40.

Fig. 42.

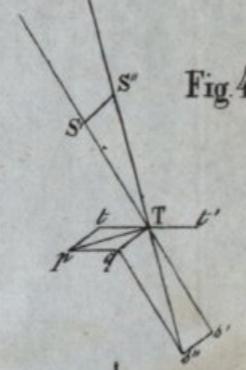


Fig. 41.

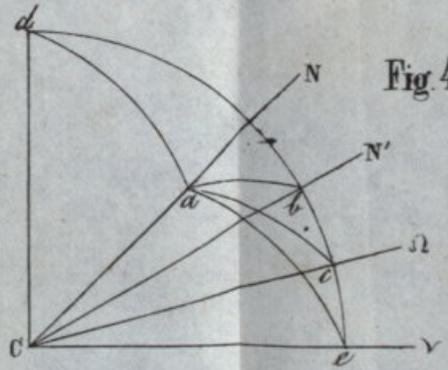


Fig. 43.

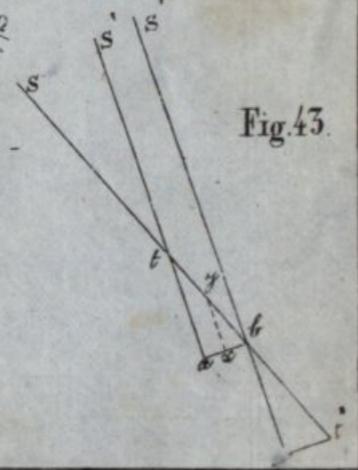


Fig 37

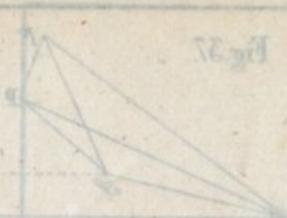


Fig 38



Fig 39



Fig 40



Fig 41

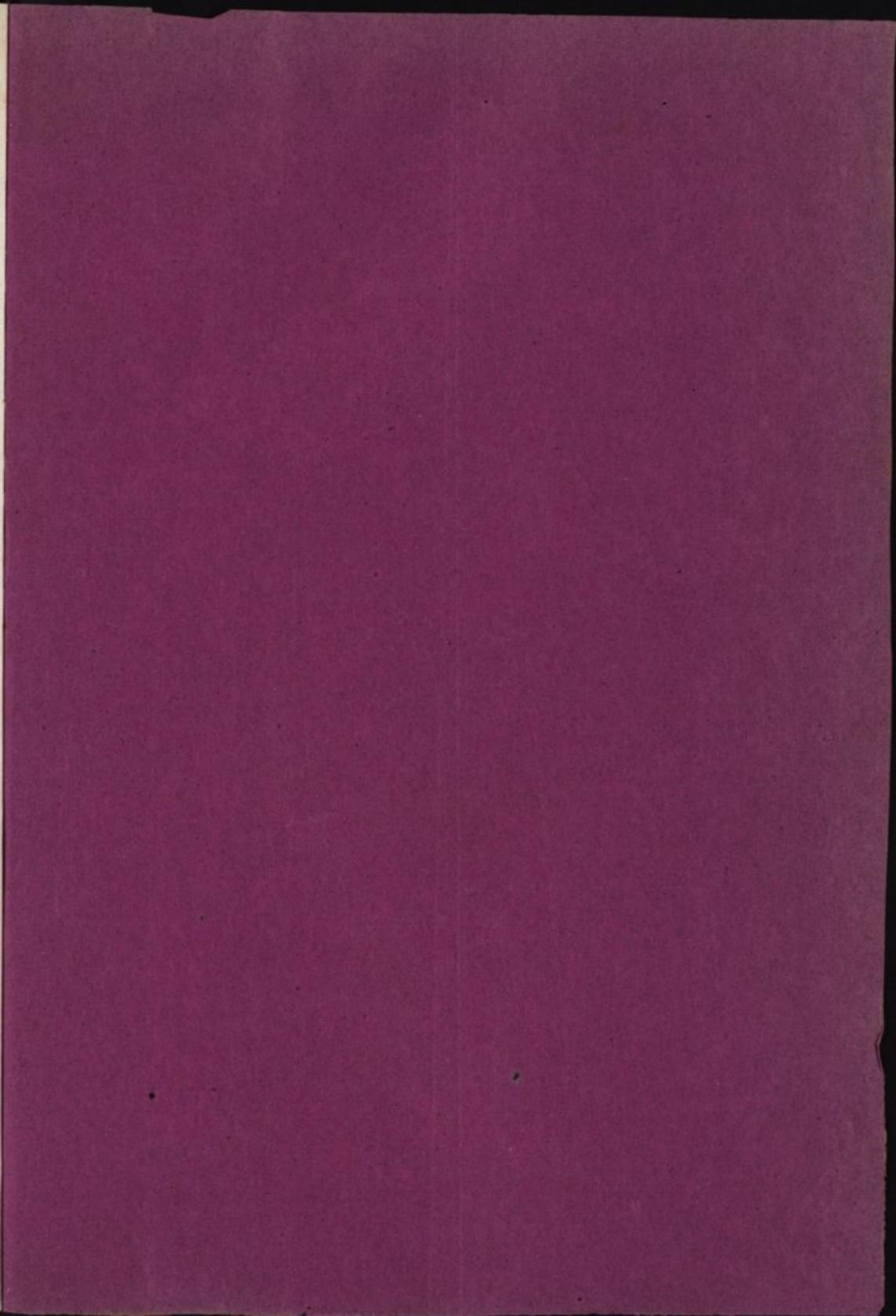


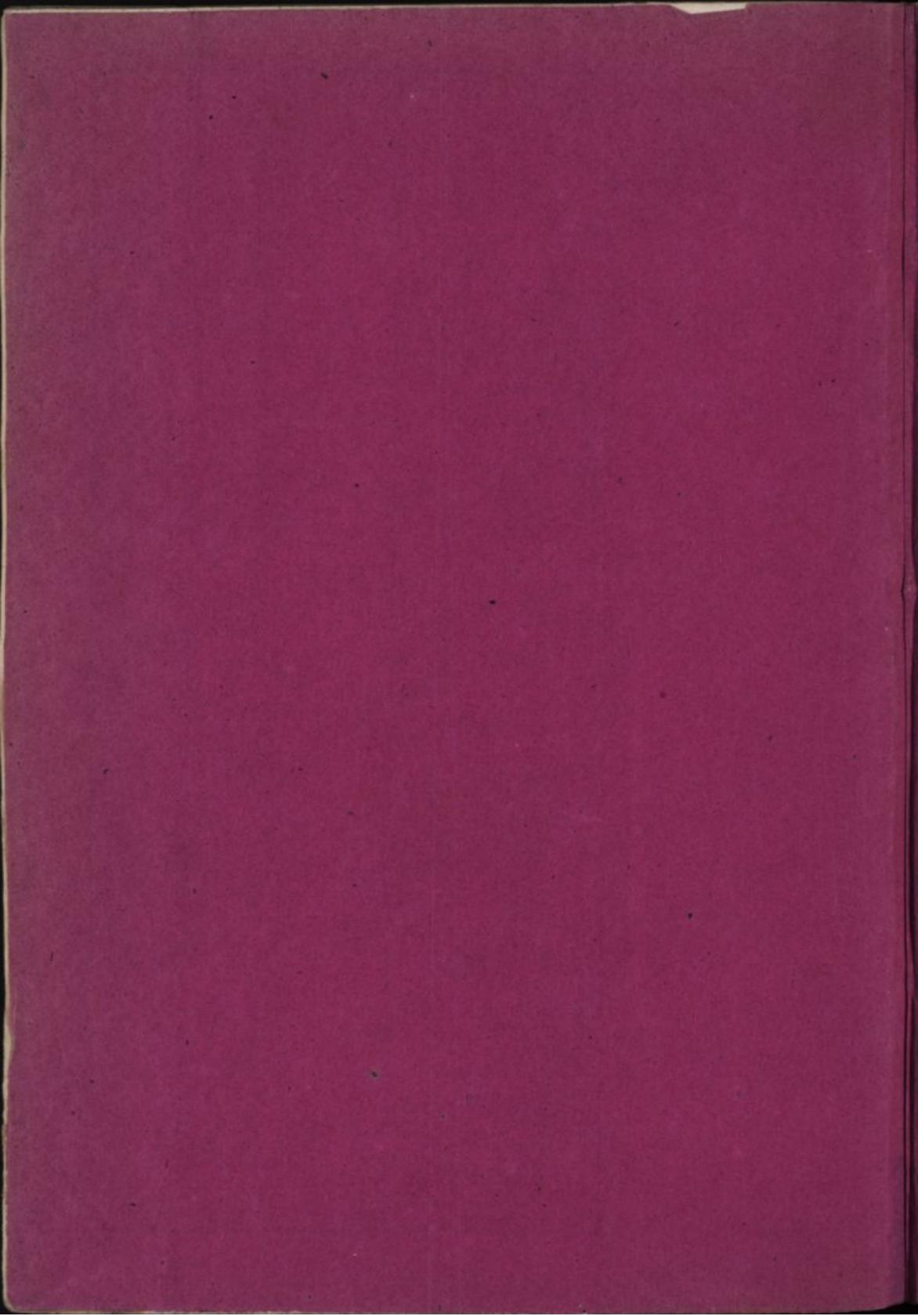
Fig 42

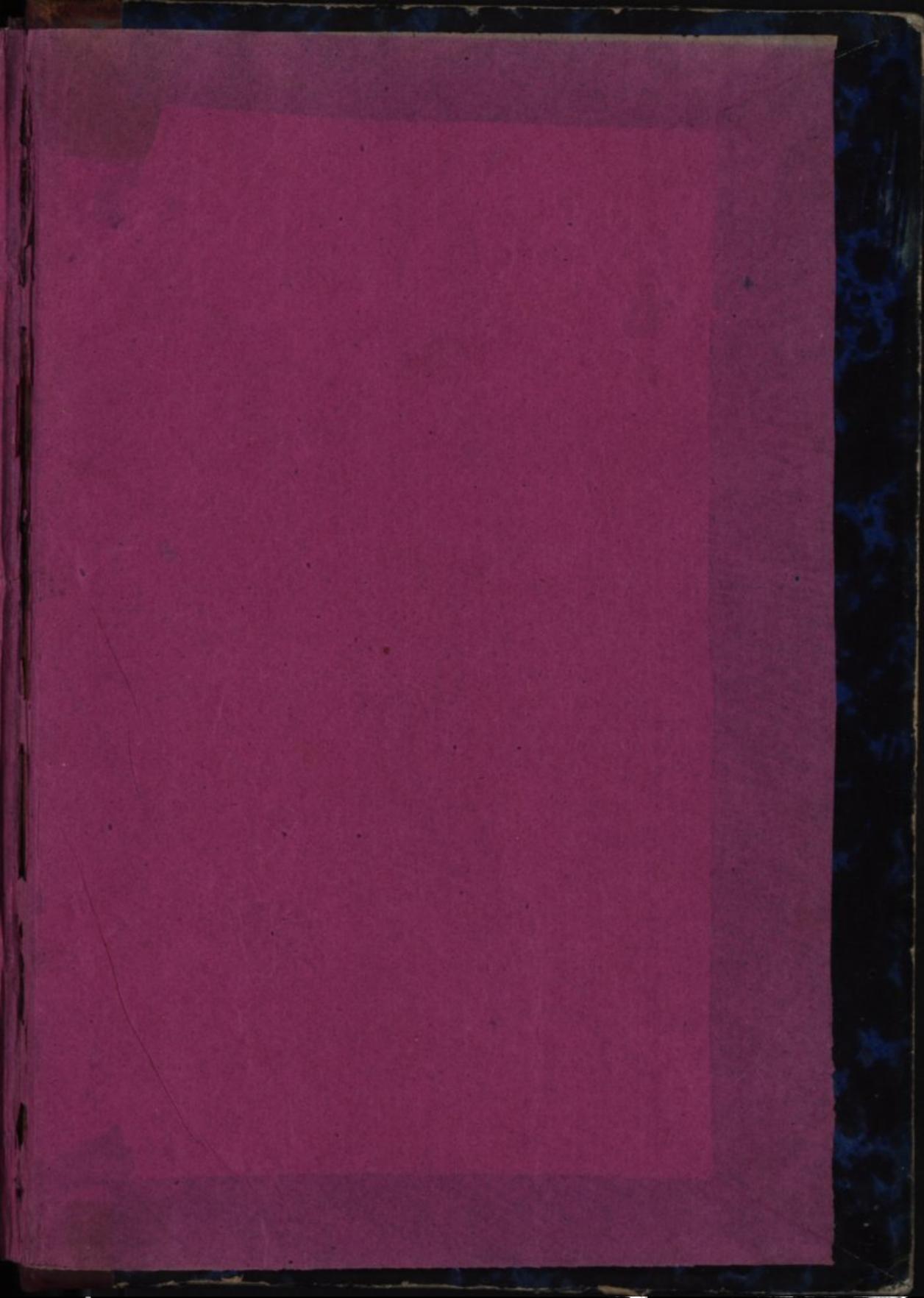


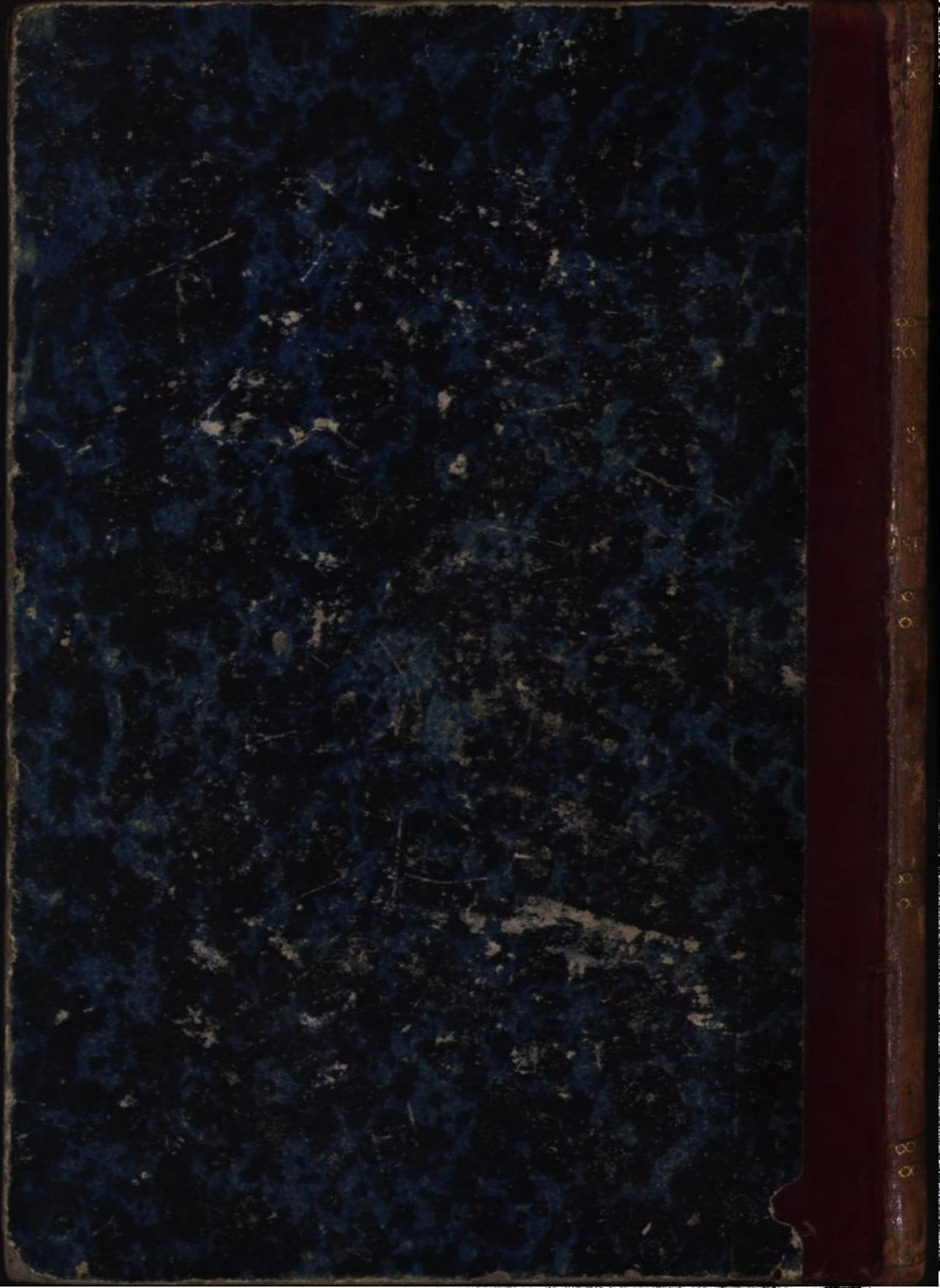
Fig 43











THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

PHYSICS DEPARTMENT

5500 UNIVERSITY AVENUE

CHICAGO, ILLINOIS 60637

TEL: 773-936-3700

FAX: 773-936-3700

WWW.PHYSICS.UCHICAGO.EDU

PHYSICS 310

LECTURE NOTES

BY

PROFESSOR

JOHN H. COOPER

PHYSICS DEPARTMENT

UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILLINOIS 60637

TEL: 773-936-3700

FAX: 773-936-3700

WWW.PHYSICS.UCHICAGO.EDU

PHYSICS 310

LECTURE NOTES

BY

PROFESSOR

JOHN H. COOPER

PHYSICS DEPARTMENT

UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILLINOIS 60637

TEL: 773-936-3700