# O INSTITUTO

*REVISTA CIENTÍFICA E LITERÁRIA*


VOLUME CXXX

COIMBRA — 1968

# ÍNDICE POR ARTIGOS

# O INSTITUTO

Composto e impresso nas oficinas da «Coimbra Editora, Limitada»

# O INSTITUTO

*REVISTA CIENTÍFICA E LITERÁRIA*

VOLUME CXXX

COIMBRA — 1968

# INSTITUTO DE COIMBRA

## DIRECÇÃO

# SOBRE A AXIOMÁTICA DA CONVEXIDADE

*Convexas foram, a bem dizer, quase todas as figuras de que se ocuparam os primeiros geómetras. Mas os conceitos geométricos relacionados com a convexidade — segmentos, polígonos, poliedros —, ao contrário dos que dependiam da noção de continuidade, não puseram aos pensadores gregos insuperáveis dificuldades lógicas, puderam-se ir inserindo naturalmente nas novas teorias que da geometria nasceram — geometria analítica, espaços vectoriais, topologia combinatória — e, talvez precisamente por isso, não sofreram nem tão cedo nem tão profundamente uma revisão crítica como a que, no campo dos fundamentos da análise, se foi efectuando durante todo o século XIX, das primeiras definições rigorosas de convergência às axiomatizações da topologia geral. Nem é menos característico o contraste entre os axiomas hilbertianos dos* Grundlagen der Geometrie, *cujo principal objectivo era reformular a geometria euclidiana e — a poucos anos de distância* (1) *— os dos* Grundzüge der Mengenlehre *de* HAUSDORFF, *que estabeleceram em bases tão gerais e tão fecundas a topologia geral.*

*Os referidos axiomas de* HILBERT *foram o ponto de partida de numerosos estudos que seria impossível resumir aqui* (2)*; de resto, por muito diversas orientações que tenham tomado* (3)*,*

---

(1) As primeiras edições são, respectivamente, de 1910 e 1914.

(2) Não deixem contudo de se citar os *Fundamentos de Geometría Proyectiva Superior* de REY PASTOR, tomados para tema do Curso de Geometria Superior professado na Universidade de Coimbra em 1942-43, que foram, ainda antes dos estudos que fizemos como bolseiro em Manchester e Roma, a origem remota deste trabalho.

(3) Ver a este respeito o artigo de BERNAYS citado na bibliografia.

*tanto quanto nos foi possível procurar, nenhum contém uma axiomatização da mera noção de convexidade e, salvo raras excepções, não se encontra na literatura dos últimos anos nenhum trabalho em que se fale de conjuntos convexos independentemente de alguma estrutura linear. É certo, por exemplo, que algumas vezes se tem definido convexidade em espaços métricos, como nos artigos de* STONE *e* MICHAEL *citados na bibliografia. Mas em ambos se recorre imediatamente a sistemas de pontos e números reais — ou elementos de um anel ordenado — que desempenham o papel das combinações lineares na teoria dos espaços vectoriais.*

*É outro o objectivo deste trabalho: trata-se de tomar como instrumento fundamental a noção de conjunto convexo e de a sujeitar a alguns axiomas que permitam reconstruir as mais importantes propriedades destes conjuntos que se possam exprimir em termos independentes de qualquer estrutura geométrica, topológica ou vectorial. Secundàriamente acontece que é possível definir a partir da noção de conjunto convexo os análogos de certos conceitos geométricos — e, poderia acrescentar-se, topológicos — mas só um destes conceitos é aqui examinado com certa minúcia: o de semiespaço, no terceiro capítulo.*

*No primeiro definem-se as estruturas de convexidade e estudam-se algumas propriedades gerais; no segundo, as operações de passagem de um conjunto ao seu envólucro convexo e de um par de conjuntos ao envólucro convexo da sua reunião, verificando-se que a primeira destas operações não é, antes da introdução de axiomas, suficiente para caracterizar a estrutura de convexidade. No terceiro capítulo, ainda sem axiomas, não foi impossível desenvolver uma pequena teoria dos semiespaços, paralelismo e hiperplanos, que naturalmente podem ter propriedades bastante diferentes das usuais, como no fim desse capítulo se assinala.*

*A partir do quarto capítulo introduzem-se sucessivamente três axiomas, estudam-se os seus problemas de compatibilidade e independência e analisam-se algumas simplificações que tal introdução permite nas questões levantadas nos capítulos anteriores. Demonstram-se por fim algumas propriedades impor-*

*tantes dos conjuntos convexos, em particular a que corresponde à sua habitual definição.*

*Se por um lado estes três axiomas nos deixam uma noção de convexidade ainda muito geral, por outro já excluem algumas teorias, do tipo das que consideram, em planos e espaços projectivos,* DEKKER, DE GROOT *e* VRIES *e* MARCHAUX (1), *cujos conjuntos convexos não satisfazem nenhum dos axiomas introduzidos.*

*Parece, finalmente, que este trabalho deveria ser continuado e completado em vários pontos. mas a conjuntura em que foi redigido não o aconselhava: a estes axiomas seguir-se-iam alguns do tipo dos axiomas de separação da topologia geral, com pares de pontos ou conjuntos convexos situáveis em semiespaços complementares, que permitiriam mostrar a convexidade dos conjuntos com um só ponto e caracterizar os conjuntos convexos como intersecções de semiespaços; outro ou outros axiomas eliminariam os semiespaços não orientados de que se fala no capítulo terceiro e parece que então se poderiam começar a estudar nestas estruturas de convexidade problemas de dimensão e de geometria elementar; para concluir, a existência de semiespaços abertos e fechados permitiria esboçar uma estrutura topológica. Restituir-se-ia talvez assim à noção de conjunto convexo uma posição comparável a que hoje ocupa, no cruzamento de disciplinas tão diversas como a teoria dos números e a topologia combinatória.*

*Convém dizer alguma coisa das notações empregadas.*

$O$ *é o conjunto vazio,* $\vee$ *a soma lógica e* $\wedge$ *o produto lógico,* $\setminus$ *a diferença de conjuntos e* $\mathfrak{S}(E)$ *o conjunto dos subconjuntos de* $E$; *distingue-se* $(A_i : i \in I)$, *sistema ou família de entidades* $A$, *de* $\{A_i : i \in I\}$, *classe ou conjunto de entidades da mesma espécie, porque no primeiro caso se tem em vista a transformação de* $i$ *para* $A_i$ *e no segundo apenas o contradomínio de uma transformação que se considera já biunívoca: quando se escreve* $\{A_i : i \in I\}$ *supõe-se pois que os*

(1) Ver a bibliografia.

$A_i$ *são distintos — mas não é impossível que alguma vez se tome uma noção pela outra. Não se exclui o caso de uma tal classe, por exemplo de subconjuntos de* E, *ser vazia, e convenciona-se então que a sua reunião é* O *e a sua intersecção é* E. N *representa o conjunto dos inteiros positivos e* Z *o de todos os inteiros.*

*Dado um corte num conjunto totalmente ordenado,* C, *isto é uma decomposição de* C *em dois conjuntos,* A *e* B, *tais que cada elemento de* A *precede todos os de* B, *chamam-se elementos maiores do corte os de* B *e menores os de* A. *Em conjuntos parcialmente ordenados distingue-se* o *elemento máximo, que segue todos os outros, de* um *elemento máximo, que apenas não é seguido de nenhum. E recorde-se finalmente que, chamando, como habitualmente, «indutivo», a um conjunto parcialmente ordenado,* P, *tal que os seus subconjuntos totalmente ordenados admitam maiorante em* P, *se pode deduzir do axioma de escolha que, num conjunto parcialmente ordenado indutivo não vazio, cada subconjunto totalmente ordenado é formado por elementos que precedem um mesmo elemento máximo; em particular cada elemento precede um elemento máximo.*

# CAPÍTULO I

## ESTRUTURAS DE CONVEXIDADE

### Estruturas e subestruturas

Consideremos um conjunto qualquer, E, que será designado por «o espaço» e uma classe qualquer, Γ, de subconjuntos de E, que se chamarão «conjuntos convexos». Não se excluem os casos triviais de E, ou Γ ou ambos serem vazios e em todo este trabalho as entidades representadas no mesmo contexto pelas letras E e Γ estarão sempre relacionadas do modo acima indicado, isto é, Γ designará sempre uma classe de subconjuntos de E.

**1.ª Definição:** *Chama-se «estrutura de convexidade» qualquer par* (E, Γ) *em que* E *seja um conjunto e* Γ *uma classe de subconjuntos de* E *chamados «conjuntos convexos».*

Tal estrutura será ainda designada por «a estrutura definida por Γ em E».

**2.ª Definição:** *Diz-se que duas estruturas de convexidade* (E, Γ) *e* (E′, Γ′), *«coincidem», ou «são iguais» ou «são a mesma estrutura» se* E *for igual a* E′ *e* Γ *a* Γ′ (1).

---

(1) Evidentemente, esta definição não é mais que a condição de igualdade de pares. Mas em cada ramo da matemática é costume chamar «igualdade» a certa relação de equivalência funda-

**3.ª Definição:** *Dadas duas estruturas de convexidade* $(E, \Gamma)$ *e* $(E', \Gamma')$, *diz-se que a segunda é «subestrutura» da primeira e que a primeira é «sobrestrutura» da segunda se* $E'$ *estiver contido em* $E$ *e* $\Gamma'$ *em* $\Gamma$. $E'$ *diz-se então o «subespaço» correspondente à subestrutura* $(E', \Gamma')$.

Uma estrutura e uma sua subestrutura podem ser definidas no mesmo espaço, isto é, pode em particular ser $E' = E$ e $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Neste caso particular usar-se-á ainda a terminologia seguinte.

**4.ª Definição:** *Diz-se que a estrutura de convexidade* $(E, \Gamma)$ *é «mais fina que» a estrutura de convexidade* $(E, \Gamma')$ — *e que* $(E, \Gamma')$ *é «menos fina que»* $(E, \Gamma')$ — *se* $\Gamma$ *contém* $\Gamma'$.

**5.ª Definição:** *Diz-se que a estrutura de convexidade* $(E, \Gamma)$ *é «estritamente mais fina» que a estrutura de convexidade* $(E, \Gamma')$ *se* $\Gamma$ *contém pròpriamente* $\Gamma'$.

Outro caso particular de subestruturas, que por vezes se terá de considerar, é o seguinte.

**6.ª Definição:** *Dada uma estrutura de convexidade* $(E, \Gamma)$ *e um subconjunto* $A$ *de* $E$, *chama-se, por abuso de linguagem, «subestrutura» de* $(E, \Gamma)$ *incluída em* $A$ *a estrutura de convexidade definida em* $A$ *pela subclasse de* $\Gamma$ *constituída pelos conjuntos convexos contidos em* $A$,

$$(A, \{C : C \in \Gamma \wedge C \subseteq A\})$$

---

mental entre conceitos que, enquanto se não sair desse ramo, terão sempre exactamente a mesma compreensão. Enunciar explìcitamente a presente definição é apenas afirmar que nenhuma relação mais fraca que a conhecida igualdade de pares irá desempenhar tal papel.

Esta estrutura de convexidade deve distinguir-se da que se considera na definição seguinte:

*7.ª* **Definição:** *Dada uma estrutura de convexidade* (E, Γ) *e um subconjunto,* A, *de* E, *chama-se «estrutura de convexidade induzida em* A *por* (E, Γ)*» a estrutura de convexidade definida em* A *pelas intersecções de* A *com os conjuntos convexos de* (E, Γ), *isto é*

$$(A, \{D : \bigvee_{C} (C \in \Gamma \wedge D = A \cap C)\})$$

**1.ª Proposição:** *A estrutura de convexidade induzida num subconjunto do espaço não é necessàriamente subestrutura da estrutura de convexidade que a induz.*

Com efeito, basta considerar o seguinte exemplo.

1.º Exemplo: Sendo a um objecto qualquer, seja

$$E = \{a\},$$

$$\Gamma = \{E\},$$

$$A = O.$$

Na estrutura de convexidade induzida em A, há um único conjunto convexo, o conjunto vazio, que não é convexo na subestrutura determinada por A.

Omitem-se, por demasiadamente evidentes, as demonstrações das proposições seguintes.

**2.ª Proposição:** *Entre estruturas de convexidade, as relações «ser mais fina que» e «ser menos fina que» são transitivas.*

**3.ª Proposição:** *Entre estruturas de convexidade, as relações «ser estritamente mais fina que» e «ser estri-*

*tamente menos fina que» são transitivas e anti--simétricas.*

**4.ª Proposição:** *Entre estruturas de convexidade, a relação «ser subestrutura de» é transitiva.*

**5.ª Proposição:** *É condição necessária e suficiente para que duas estruturas de convexidade sejam iguais que cada uma delas seja subestrutura — ou que seja sobrestrutura — da outra.*

**6.ª Proposição:** *É condição necessária e suficiente para que duas estruturas de convexidade, definidas no mesmo espaço, sejam iguais que cada uma delas seja mais fina — ou que seja menos fina — que a outra.*

**7.ª Proposição:** *Dada uma estrutura de convexidade e um subconjunto do espaço, a subestrutura da estrutura dada incluída nesse subconjunto é menos fina que a estrutura de convexidade nele induzida pela estrutura dada.*

Com efeito todo o conjunto convexo, C, contido em A é a intersecção de si próprio com A.

**8.ª Proposição:** *Dada uma estrutura de convexidade, e um subconjunto do espaço, é condição necessária e suficiente para que a subestrutura nele incluída seja igual à estrutura nele induzida, que as intersecções desse subconjunto com cada um dos conjuntos convexos da estrutura dada sejam todas convexas.*

Com efeito, conforme a proposição anterior e a proposição 6.ª, é necessário e suficiente que a estrutura de convexidade induzida em A seja menos fina que a subestrutura incluída em A, isto é, que qualquer $C \cap A$ seja convexa.

**Subestruturas incluídas**

**9.ª Proposição:** *Dada uma estrutura de convexidade, e dois subconjuntos do espaço, se um conjunto é convexo na subestrutura incluída num deles e está contido no outro é também convexo na subestrutura neste incluída.*

É consequência imediata da definição de subestrutura incluída num conjunto.

**10.ª Proposição:** *Dado um conjunto, e uma classe de estruturas de convexidade definidas em certos subconjuntos do conjunto dado e tais que, se um conjunto está contido em dois desses subconjuntos e é convexo na estrutura definida num deles, é também convexo na estrutura definida no outro, então existe uma estrutura de convexidade definida no conjunto dado e tal que as subestruturas incluídas naqueles subconjuntos coincidem com as estruturas dadas.*

Sejam E o conjunto dado e $(A_i, \Gamma_i)$, para $i \in I$, as estruturas dadas.

Ponhamos

$$\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i .$$

$\Gamma$ é uma classe de subconjuntos de E e portanto $(E, \Gamma)$ uma estrutura de convexidade definida em E. Na subestrutura de $(E, \Gamma)$ incluída em $A_i$ todos os conjuntos da família $\Gamma_i$ são convexos por pertencerem a $\Gamma$ e estarem contidos em $A_i$. E são os únicos com estas propriedades porque, se $C \in \Gamma$, pertence também a algum $\Gamma_h$ e, se está contido em $A_i$ pertence a $\Gamma_i$, quer seja $h = i$, quer seja, neste caso em virtude da hipótese do teorema, $h \neq i$. Fica pois demonstrada a 10.ª proposição.

**11.ª Proposição:** *A estrutura de convexidade construída na demonstração da proposição anterior é menos fina que qualquer estrutura de convexidade que satisfaça as mesmas condições.*

Isto é: se $(E, \Gamma')$ é tal que as suas subestruturas incluídas nos conjuntos $A_i$ coincidem com as estruturas $(A_i, \Gamma_i)$, é mais fina que $(E, \Gamma)$. Seja com efeito C um conjunto da classe $\Gamma$. C pertence a algum $\Gamma_i$ e, sendo $(A_i, \Gamma_i)$ a subestrutura de $(E, \Gamma')$ incluída em $A_i$, C é convexo em $(E, \Gamma')$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$ como se desejava provar.

**12.ª Proposição:** *É condição necessária e suficiente, para que a estrutura canstruída na demonstração da proposição 10.ª não seja a única que satisfaça as condições requeridas na mesma proposição, que todos os subconjuntos de que aí se trata sejam próprios.*

Com efeito, se algum deles, $A_0$, é igual a E, todos os conjuntos pertencentes a $\Gamma_i$, por estarem contidos em $A_0$, pertencem a $\Gamma_0$ e vem $\Gamma_0 = \Gamma$. Dada outra estrutura $(E, \Gamma')$ que satisfaça as condições da proposição 10.ª, a sua subestrutura incluída em $A_0$ deve ser $(A_0, \Gamma_0)$, isto é, $(E, \Gamma)$, de modo que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Mas todo o conjunto pertencente a $\Gamma'$ está contido em E de modo que deve pertencer a $\Gamma$ e vem $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Gamma' = \Gamma$. Coincidem portanto todas as estruturas que estão nas condições da proposição 10.ª

Recìprocamente, se todos os $A_i$ são próprios, algum subconjunto, $C_0$, de E — por exemplo o mesmo E — não está contido em nenhum $A_i$. Então a estrutura

$$(E, \Gamma \cup \{C_0\})$$

tem como subestruturas incluídas nos $A_i$ as próprias estruturas $(A_i, \Gamma_i)$ e está portanto nas condições da proposição 10.ª Mas esta estrutura é estritamente mais fina que $(E, \Gamma)$ porque $C_0$ não pertence a $\Gamma$. Fica assim demonstrada a 12.ª proposição.

## Subestruturas incluídas e conjuntos convexos máximos

**8.ª Definição:** *Chamam-se «conjuntos convexos máximos» de uma estrutura de convexidade os elementos máximos da classe, ordenada por inclusão, dos conjuntos convexos dessa estrutura.*

**13.ª Proposição:** *Ainda que haja conjuntos convexos, pode não haver conjuntos convexos máximos.*

Basta com efeito considerar o exemplo seguinte.

2.º Exemplo:

$E = N$, conjunto dos números naturais.

$\Gamma = \{[1, n] : n \in N\}$.

$[1, n]$ não é máximo porque está contido em $[1, n+1]$.

**14.ª Proposição:** *As subestruturas de uma estrutura de convexidade incluídas nos seus conjuntos convexos máximos satisfazem as condições seguintes:*

a) *nenhum dos correspondentes subespaços está contido noutro;*
b) *os referidos subespaços são convexos;*
c) *se um conjunto está contido nos subespaços correspondentes a duas dessas subestruturas e é convexo numa delas, é também convexo na outra.*

Trata-se, com efeito, de consequências imediatas da definição de conjunto convexo máximo, da de subestrutura incluída — definições 8.ª e 6.ª — e da proposição 9.ª

Recìprocamente verifica-se a proposição seguinte.

**15.ª Proposição:** *Dado um conjunto e uma classe de estruturas de convexidade definidas em certos subconjuntos do conjunto dado e tais que:*

a) *nenhum desses subconjuntos está contido noutro;*
b) *cada um desses subconjuntos é convexo na estrutura de convexidade nele definida;*
c) *se um conjunto está contido em dois dos referidos subconjuntos e é convexo na estrutura de convexidade definida num deles, é também convexo na definida no outro;*

*então existe uma estrutura de convexidade definida no conjunto dado na qual*

α) *os conjuntos convexos máximos são aqueles subconjuntos,*
β) *as subestruturas neles incluídas são as estruturas dadas.*

Sejam E o conjunto dado e $(M_i, \Gamma_i)$, para $i \in I$, as estruturas dadas. Em vista da condição b) e atendendo ao enunciado e à demonstração da proposição 10.ª, se pusermos

$$\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i,$$

obtemos uma estrutura de convexidade $(E, \Gamma)$ definida em E e que obedece já à condição β). Resta provar α).

Em primeiro lugar, qualquer $M_i$ é convexo nesta estrutura porque, conforme b), é convexo em $(M_i, \Gamma_i)$ e pertence portanto a $\Gamma_i$ e a $\Gamma$. Além disso não pode haver em $(E, \Gamma)$ conjuntos convexos máximos que não coincidam com algum $M_i$ porque, se C é convexo em $(E, \Gamma)$, pertence a algum $\Gamma_h$ e está contido portanto no respectivo $M_h$, que é também convexo. Finalmente C não pode ser sobreconjunto próprio de nenhum $M_i$ porque de outro modo teríamos

$$M_i \subseteq C \subseteq M_h$$

e, não podendo ser $h \neq i$ porque se contradiria a condição a), viria $h = i$ e $C = M_i$. Todos os $M_i$ são pois conjuntos convexos máximos e fica assim completa a demonstração da proposição 15.ª

**Condições de unicidade**

**16.ª Proposição:** *Entre as estruturas de convexidade que satisfazem as condições $\alpha$) e $\beta$) mencionadas na tese da proposição anterior existe uma única que satisfaz ainda a condição seguinte*

*$\gamma$) qualquer conjunto convexo está contido num conjunto convexo máximo*

*e tal estrutura coincide com a que se construiu na demonstração daquela proposição.*

Conforme a proposição 11.ª a estrutura $(E, \Gamma)$ construída na demonstração da proposição anterior é menos fina que qualquer outra que satisfaça a condição $\beta$). E é evidente que satisfaz $\gamma$). Por outro lado, se uma estrutura de convexidade satisfaz $\alpha$) e $\gamma$), qualquer dos seus conjuntos convexos está contido num $M_i$ e, se tal estrutura satisfaz ainda $\beta$), pertence a $\Gamma_i$ e portanto a $\Gamma$. Tal estrutura é então menos fina que $(E, \Gamma)$ e coincide portanto com ela como se desejava provar.

**17.ª Proposição:** *Se o conjunto dado na proposição 15.ª tem apenas um número finito de etementos, existe uma única estrutura de convexidade com as pro-*

*priedades* $\alpha$) *e* $\beta$), *a que se construiu na demonstração daquela proposição.*

Com efeito, neste caso, em qualquer estrutura de convexidade definida em E pode apenas haver um número finito de conjuntos convexos e, conforme uma proposição sobre conjuntos ordenados finitos citada na introdução, cada conjunto convexo, tem de estar contido num conjunto convexo máximo, aplicando-se então a proposição anterior.

**18.ª Proposição:** *Se na classe de estruturas de convexidade a que se refere a proposição 15.ª existe uma que seja definida no subconjunto vazio ou no próprio conjunto aí dado, a referida classe é formada apenas por essa estrutura e existe uma única estrutura de convexidade definida no conjunto dado que satisfaça as condições* $\alpha$) *e* $\beta$) *da mesma proposição.*

Com efeito, conservando as notações da referida proposição, se um dos $M_i$ é vazio ou coincide com E, a condição a) reduz a classe $\{M_i : i \in I\}$ a um conjunto com um só elemento, O ou E, respectivamente. Seja $(O, \Gamma)$ ou $(E, \Gamma)$ a correspondente estrutura de convexidade — no 1.º caso apenas pode ser $\Gamma = O$ ou $\Gamma = \{O\}$ — e $(E, \Gamma')$ outra estrutura de convexidade definida em E. Da condição $\alpha$) deduz-se que o único conjunto convexo máximo de $(E, \Gamma')$ é, conforme o caso, O ou E e em qualquer das hipóteses a condição $\beta$) implica $\Gamma' = \Gamma$ completando-se assim a demonstração da proposição 18.ª

**19.ª Proposição:** *Nenhuma das três condições de que tratam as proposições 17.ª e 18.ª é necessária para que seja única a estrutura de convexidade que verifica as condições* $\alpha$) *e* $\beta$).

Basta com efeito considerar o exemplo seguinte, em que E é infinito e nenhum dos $M_i$ é vazio, nem coincide com E.

3.º Exemplo:

$$E = N.$$

$$M_1 = N \setminus \{1\}\,;\ \Gamma_1 = \{M_1\}$$

$$M_2 = M \setminus \{2\}\,;\ \Gamma_2 = \{M_2\}$$

$$M_3 = \{1, 2\}\,;\ \Gamma_3 = \{M_3\}.$$

Se em $(N, \Gamma')$ os conjuntos convexos máximos são $M_1$, $M_2$ e $M_3$, e se são estes os únicos conjuntos convexos nas subestruturas de $(N, \Gamma')$ neles incluídas, qualquer outro, pertencente a $\Gamma'$, teria de possuir 1 para não estar incluído em $M_1$ e 2 para não estar incluído em $M_2$. Mas então conteria $M_3$, que não seria já máximo.

**20.ª Proposição:** *É condição necessária e suficiente, para que, com os mesmos dados da proposição 15.ª, haja mais de uma estrutura de convexidade que satisfaça as condições α) e β), que exista uma sucessão numerável de conjuntos, cada um deles pròpriamente incluído nos seguintes e tais que o primeiro não está contido em, e nem esse nem os restantes contêm, nenhum dos subconjuntos dados.*

Mantendo as notações da referida proposição, suponhamos em primeiro lugar que existe uma estrutura de convexidade $(E, \Gamma')$, definida em E que satisfaça α) e β) e seja tal que

$$\Gamma' \neq \Gamma = \bigcup_i \Gamma_i.$$

Se algum conjunto pertencente a $\Gamma$, por exemplo pertencente a $\Gamma_h$, não pertencesse a $\Gamma'$ tal conjunto não seria convexo na subestrutura de $(E, \Gamma')$ incluída em $M_h$ e tal subestrutura não coincidiria com $(M_h, \Gamma_h)$ contràriamente a β). Então algum conjunto, $C_1$, pertencente a $\Gamma'$ não pertence a $\Gamma$, nem portanto a nenhum dos $\Gamma_i$. $C_1$ não está contido em nenhum dos $M_i$ porque se o estivesse, por exemplo em $M_h$, na subestrutura de $(E, \Gamma')$ incluída em $M_h$ haveria um conjunto couvexo, $C_1$, não contido em $\Gamma_h$ contrariando-se igualmente $\beta$).

Por outro lado $C_1$ não pode, em vista da condição $\alpha$), ser conjunto convexo máximo de $(E, \Gamma')$ e existe um sobreconjunto próprio de $C_1$, $C_2$, também pertencente a $\Gamma'$. O mesmo raciocínio conduz a uma sucessão numerável de conjuntos

$$C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots$$

cada um deles pròpriamente contido nos restantes mas não contendo nenhum dos $M_i$ por estes, conforme $\alpha$), serem conjuntos convexos máximos de $(E, \Gamma')$.

Recìprocamente, dada uma tal sucessão de conjuntos, a estrutura de convexidade

$$(E, \Gamma \cup \{C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots\})$$

tem os mesmos conjuntos convexos máximos que $(E, \Gamma)$ porque nenhum $C_n$ é máximo e nenhum dos $M_i$ deixa de o ser por não estar contido em nenhum $C_n$. E porque nenhum dos $M_i$ contém $C_1$, nem portanto nenhum dos $C_n$, as subestruturas de $(E, \Gamma')$ incluídas nos $M_i$ continuam a ser as $(M_i, \Gamma_i)$ completando-se assim a demonstração.

## Estruturas induzidas

**21.ª Proposição:** *Dada uma estrutura de convexidade, dados dois subconjuntos do espaço e dado um conjunto convexo na estrutura induzida num deles, existe, na estrutura induzida no outro, um conjunto convexo cuja intersecção com o primeiro dos subconjuntos dados coincide com a intersecção do conjunto convexo primeiramente referido com o segundo dos subconjuntos.*

Por outras palavras, sendo A e A′ os subconjuntos e dado C convexo na estrutura induzida em A existe C′, convexo na estrutura induzida em A′, tal que

$$A \cap C' = A' \cap C.$$

Com efeito C é a intersecção de A com certo conjunto, D, convexo na estrutura dada e, pondo $C' = A' \cap D$, C′ é convexo na estrutura induzida em A′ e ambos os membros da igualdade anterior coincidem com $A \cap D \cap A'$.

22.ª **Proposição:** *Dada uma classe* $\{A_i : i \in I\}$ *de conjuntos onde estão definidas as estruturas de convexidade* $\{(A_i, \Gamma_i) : i \in I\}$ *é condição necessária e suficiente para que na reunião,* A, *de tais conjuntos se possa definir uma estrutura de convexidade* $(A, \Gamma)$ *tal que as estruturas por ela induzidas nos conjuntos* $A_i$ *coincidam com as estruturas dadas, que, para cada conjunto,* $C_i$, *convexo numa destas estruturas* $(A_i, \Gamma_i)$, *exista uma família,* $(C_j : j \in I)$, *constituída por um conjunto convexo de cada uma das mesmas estruturas e tal que, para todo o* j, $C_j$ *pertença a* $\Gamma_i$ *e que, para cada duas estruturas, coincidam as intersecções dos espaços de cada uma com os conjuntos da referida família correspondentes à outra.*

Isto é: deve ser, quaisquer que sejam i e j pertencentes a I,

a) $$A_i \cap C_j = C_i \cap A_j\,.$$

Que a condição é necessária [1] resulta de que o conjunto $C_i$ é da forma $A_i \cap C$ com $C \in \Gamma$ e de que a família

---

[1] Se $i \neq j$, a condição a) é trivial.

$(A_i \cap C : i \in I)$, por argumentos análogos aos da demonstração da proposição anterior, satisfaz a condição a). Que a condição é suficiente mostra-se pondo $\Gamma$ igual ao conjunto de *todas* as reuniões $C = \bigcup_{j \in I} C_j$ em que $(C_j : j \in I)$ é qualquer família de conjuntos convexos, cada um na sua das estruturas dadas, que satisfaça a condição a). Qualquer que seja essa reunião e qualquer que seja o conjunto $A_i$,

$$A_i \cap \bigcup_{j \in I} C_j = (A_i \cap C_i) \cup \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (A_i \cap C_j) =$$

$$= C_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (C_i \cap A_j) = C_i,$$

que é convexo em $A_i$, porque todas as parcelas da última reunião estão contidas em $C_i$. Recìprocamente, cada $C_0$ convexo em $A_i$ é intersecção de $A_i$ com a reunião dos conjuntos da família $(C_j : j \in I)$ em que $C_i = C_0$, cuja existência se postulou.

Se alguns dos conjuntos $A_i$ estão contidos noutros, a condição a) simplifica-se. Considere-se em primeiro lugar a nova forma da 21.ª proposição.

23.ª **Proposição:** *Dada uma estrutura de convexidade e dados dois subconjuntos,* A *e* A′, *do espaço, o primeiro deles contido no segundo, a estrutura induzida no primeiro pela estrutura dada coincide com a estrutura que a estrutura induzida no segundo conjunto induz no mesmo primeiro conjunto.*

Com efeito, da 21.ª proposição resulta agora que qualquer conjunto C convexo na subestrutura induzida em A, por ser igual a $C \cap A'$ é da forma $A \cap C'$ e recìprocamente.

24.ª **Proposição:** *Consideram-se duas famílias de conjuntos* $(A_i : i \in I)$ *e* $(A'_h : h \in H)$, *tais que para cada conjunto* $A_i$ *existe na segunda família um* *conjunto,* $A'_{h_i}$, *que o contém e suponha-se definida em cada um destes conjuntos uma estrutura de convexidade,* $(A_i, \Gamma_i)$ *com* $i \in I$ *ou* $(A'_h, \Gamma'_h)$ *com* $h \in H$. *É condição necessária e suficiente, para que na reunião de todos os conjuntos* $A_i$ *e* $A'_h$ *se possa definir uma estrutura de convexidade tal que as estruturas por ela induzidas nos conjuntos dados sejam as estruturas aí definidas, que se verifiquem ainda as duas seguintes condições:*

α) *cada estrutura* $(A_i, \Gamma_i)$ *coincide com a estrutura induzida em* $A_i$ *pela estrutura* $(A'_{h_i}, \Gamma'_{h_i})$,

β) *as estruturas* $(A'_h, \Gamma'_h)$ *satisfazem a condição necessária e suficiente da 22.ª proposição.*

Que estas condições são necessárias, resulta imediatamente das proposições 23.ª e 22.ª A prova de que são suficientes consiste em mostrar que, para a totalidade das estruturas $(A_i, \Gamma_i)$ e $(A'_h, \Gamma'_h)$ se verifica ainda a mesma condição da 22.ª proposição: trata-se de, partindo de um conjunto $C_i$ ou $C'_h$, construir uma família $(D_j : j \in J)$ com [1] $J = I \cup H$ tal que $D_i$ ou $D_h$ seja o conjunto $C_i$ ou $C'_h$ considerado e que essa família satisfaça a condição a) da 22.ª proposição. Se se parte de um conjunto $C'_{h_o}$, considere-se a família $(C'_h : h \in H)$ de que este conjunto é membro e defina-se $D_j$ por

$$\begin{cases} D_j = C'_j & \text{se} \quad j \in H \\ D_j = C'_{h_j} \cap A_j & \text{se} \quad j \in I \end{cases}$$

de modo que $D_{h_o} = C'_{h_o}$; se se parte de um ponto $C_{i_o}$, a condição α) mostra que $C_{i_o} = C'_{h_{i_o}} \cap A_{i_o}$ e, considerando a família $(C'_h : h \in H)$ de que é membro $C'_{h_{i_o}}$, define-se

(1) Supõe-se, o que é legítimo, $I \cap H = O$.

anàlogamente $D_j$ de modo que vem $D_{i_o} = C'_{h_{i_o}} \cap A_{i_n} = C_{i_o}$. Em ambos os casos, quaisquer que sejam os índices h e j, pertendentes ambos a H,

$$A'_h \cap D_j = A'_h \cap C'_j = C'_h \cap A'_j = D_h \cap A'_j,$$

quaisquer que sejam i de I e j de H,

$$A_i \cap D_j = A_i \cap A'_{h_i} \cap C'_j = A_i \cap C'_{h_i} \cap A'_j = D_i \cap A'_j$$

e, quaisquer que sejam os índices i e j pertencentes a I,

$$A_i \cap D_j = A_i \cap A'_{h_i} \cap C'_{h_j} \cap A_j = A_i \cap C'_{h_i} \cap A'_{h_j} \cap A_j = D_i \cap A_j$$

como faltava provar.

**25.ª Proposição:** *A estrutura de convexidade* $(A, \Gamma)$ *construída na 22.ª proposição é a mais fina das estruturas definidas no mesmo espaço e tais que as subestruturas por ela induzidas nos conjuntos* $A_i$ *dados coincidem com as respectivas estruturas* $(A_i, \Gamma_i)$.

Com efeito, como na demonstração da 22.ª proposição, vê-se que qualquer conjunto C convexo numa estrutura que satisfaça as presentes condições intersecta os $A_i$ segundo uma família $(A_i \cap C : i \in I)$ de conjuntos convexos nas respectivas estruturas $(A_i, \Gamma_i)$ para os quais se verifica a condição a) da 22.ª proposição e cuja reunião é C. C é portanto convexo em $(A, \Gamma)$ e é esta portanto a mais fina das referidas estruturas.

As outras, se existem, podem ser obtidas do seguinte modo.

**26.ª Proposição:** *Na demonstração da proposição 22.ª, pode substituir-se o conjunto,* $\Gamma$, *de todas as* *reuniões* $C = \bigcup_{j \in I} C_j$ *correspondentes a famílias* $(C_j : j \in I)$ *nas condições aí indicadas por um seu subconjunto próprio,* $\Gamma'$*, desde que nas correspondentes famílias figurem todos os conjuntos* $C_i$ *convexos em todas as estruturas* $(A_i, \Gamma_i)$ *dadas.*

Com efeito, como se viu, a intersecção $C \cap A_i$ é igual a $C_i$ e a hipótese do teorema implica então que a subestrutura induzida por $(A, \Gamma)$ em $A_i$ é $(A_i, \Gamma_i)$.

## Subestruturas induzidas e conjuntos convexos máximos

27.ª **Proposição:** *Dado um conjunto,* E, *e uma classe de estruturas de convexidade* $(A_i, \Gamma_i)$ *definidas em certos subconjuntos,* $A_i$*, do conjunto dado e tais que*

a) *nenhum desses subconjuntos está contido noutro,*
b) *cada um desses subconjuntos é convexo na estrutura de convexidade nele definida,*
c) *qualquer conjunto convexo numa das estruturas dadas intersecta os subconjuntos em que as outras estão definidas segundo conjuntos convexos nessas respectivas estruturas,*
d) *se um conjunto é convexo na estrutura de convexidade definida num dos subconjuntos dados, existe uma família* $(C_j : j \in I)$ *de conjuntos convexos nas respectivas estruturas* $(A_i, \Gamma_i)$ *e tais que, para cada dois desses conjuntos coincidem as intersecções de cada um com o espaço em que o outro está definido,*

*então existe uma estrutura de convexidade definida no conjunto,* E, *dado na qual*

$\alpha$) *os subconjuntos dados são os conjuntos convexos máximos e* β) *as estruturas neles induzidas coincidem com as estruturas dadas.*

A estrutura $(E, \Gamma)$ define-se do seguinte modo. Para cada conjunto $C_i$ de $\Gamma_i$, em particular para $A_i$, considera-se a família $(C_j : j \in I)$ definida por $C_j = C_i \cap A_j$. $C_j$ é convexo em $A_j$ de acordo com a condição c) e

$$C_j \cap A_h = C_i \cap A_j \cap A_h = C_i \cap A_h \cap A_j = C_h \cap A_j$$

de modo que se verifica a igualdade a) da 22.ª proposição. Sendo $\Gamma$ constituído pelas reuniões $C = \bigcup_{j \in I} C_j$ correspondentes a todas as famílias $(C_j : j \in I)$ que se acabam de considerar e sendo $A = \bigcup_{j \in I} A_i$, $(A, \Gamma)$ é uma das estruturas de convexidade consideradas na 25.ª proposição e induz em cada $A_i$ a respectiva estrutura $(A_i, \Gamma_i)$. O mesmo sucede portanto à estrutura $(E, \Gamma)$ provando-se assim β). Que os conjuntos $A_i$ são os conjuntos convexos máximos de $(E, \Gamma)$, prova-se com o facto de qualquer daquelas reuniões C, se for construída a partir do conjunto $C_i$, estar contida em $A_i$ e com a condição a) que estabelece que nenhum destes conjuntos está contido noutro.

### Condição de unicidade

**28.ª Proposição:** *É condição necessária e suficiente para que a estrutura de convexidade* $(A, \Gamma)$ *construída na 22.ª proposição seja a única estrutura tal que as estruturas por ela induzidas nos coujuntos* $A_i : i \in I$ *aí dados coincidem com as estruturas* $(A_i, \Gamma_i)$ *neles definidas que, qualquer que seja a família* $(C_j : j \in I)$ *constituída como ali se indicou, existe um índice,* h, *tal que, para qualquer outra família* $(C'_j : j \in I)$ *constituída da mesmo modo, o conjunto convexo* *correspondente a esse índice seja diferente do da família dada.*

Isto é, $C'_h \neq C_h$. Com efeito, se há outra estrutura de convexidade $(A, \Gamma')$, ela é, conforme a 25.ª proposição, menos fina que $(A, \Gamma)$ e existe um conjunto, $C$, de $\Gamma$, que não figura em $\Gamma'$ e é a reunião $\bigcup_{j \in I} C_j$ correspondente a uma família $(C_j : j \in I)$. Se a condição do presente teorema se verificasse, sendo h o índice correspondente a tal família, na estrutura induzida por $(A, \Gamma')$ em $A_h$ os conjuntos convexos seriam os $C'_h$ que figuram nas outras famílias $(C'_j : j \in I)$, todos diferentes de $C_h$ de modo que esta subestrutura induzida não coincidiria, por ser estritamente menos fina, com $(A_h, \Gamma_h)$. A condição é pois suficiente. Suponha-se agora que a estrutura $(A, \Gamma)$ é única e que a condição não se verifica. Haveria então uma família $(D_j : j \in I)$, tal que, para todo o j, $D_j$ coincidiria com o conjunto correspondente ao mesmo índice em outra das famílias $(C_j : j \in I)$ que dão origem a $\Gamma$. As reuniões dos conjuntos de cada uma destas famílias também pertenceriam a $\Gamma$ de modo que, sendo $D = \bigcup_{j \in I} D_j$, a estrutura $(A, \Gamma \setminus \{D\})$ induziria em todos os $A_i$ a mesma subestrutura $(A_i, \Gamma_i)$ que $(A, \Gamma)$.

CAPÍTULO II

# ENVÓLUCROS CONVEXOS

## Propriedades da operação de passagem ao envólucro convexo

Considere-se uma estrutura de convexidade $(E, \Gamma)$ e sejam A e B subconjuntos de E.

**1.ª Definição:** *Chama-se «envólucro convexo» de um subconjunto do espaço a intersecção de todos os conjuntos convexos que o contêm.*

O envólucro convexo de A será representado por

$$\hat{A}.$$

Quando o sinal que indica a operação de passagem ao envólucro convexo se tiver de aplicar a uma expressão mais longa que uma só letra, será colocado como expoente de um parêntese que envolva toda a expressão, por exemplo,

$$(A \cup B)^{\wedge}.$$

**1.ª Proposição:** *Qualquer conjunto está contido no seu envólucro convexo:*

$$A \subseteq \hat{A}.$$

2.ª **Proposição:** *Se um conjunto convexo contém um conjunto qualquer, contém também o seu envólucro convexo:*

$$\text{se} \quad A \subseteq C \in \Gamma, \ \hat{A} \subseteq C.$$

São corolários imediatos as quatro proposições seguintes.

3.ª **Proposição:** *Se um conjunto é convexo, coincide com o seu envólucro convexo:*

$$\text{se} \quad C \in \Gamma, \ \hat{C} = C.$$

4.ª **Proposição:** *Se uma intersecção de conjuntos convexos contém um conjunto, contém também o seu envólucro convexo.*

5.ª **Proposição:** *Se um conjunto é uma intersecção de conjuntos convexos, coincide com o seu envólucro convexo.*

6.ª **Proposição:** *A operação de passagem ao envólucro convexo é involutiva:*

$$\hat{\hat{A}} = \hat{A}.$$

Note-se que esta propriedade não depende de se supor que sejam convexas todas as intersecções de conjuntos convexos — tal hipótese será adiante introduzida como o segundo dos axiomas de convexidade.

7.ª **Proposição:** *A operação de passagem ao envólucro convexo é crescente em sentido lato a respeito da relação de inclusão:*

$$\text{se} \quad A \subseteq B, \ \hat{A} \subseteq \hat{B}.$$

Porque todo o convexo que contém B contém A.

**8.ª Proposição:** *Uma reunião de conjuntos está contida na reunião dos seus envólucros convexos, que está contida no envólucro convexo daquela. E este envólucro coincide com o da reunião daqueles envólucros:*

a) $$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \hat{A}_i \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\wedge} = \left(\bigcup_{i \in I} \hat{A}_i\right)^{\wedge}.$$

A primeira relação de inclusão deduz-se da 1.ª proposição; da 7.ª, que qualquer dos $\hat{A}_i$ está contido no terceiro dos conjuntos indicados, de modo que o mesmo sucede à sua reunião, e que o referido terceiro conjunto está contido no quarto. Da 4.ª proposição e de a intersecção de conjuntos convexos $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\wedge}$ conter $\bigcup_{i \in I} \hat{A}_i$ se deduz então que também o quarto conjunto está contido no terceiro. Em particular

b) $$A \cup B \subseteq \hat{A} \cup \hat{B} \subseteq (A \cup B)^{\wedge} = (\hat{A} \cup \hat{B})^{\wedge}.$$

**9.ª Proposição:** *Uma intersecção de conjuntos está contida no seu envólucro convexo, que está contido na intersecção dos envólucros convexos dos conjuntos dados. E esta intersecção coincide com o seu envólucro convexo:*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\wedge} \subseteq \bigcap_{i \in I} \hat{A}_i = (\bigcap_{i \in I} \hat{A}_i).$$

A primeira relação de inclusão deduz-se da 1.ª proposição, a segunda, da 7.ª e a relação de igualdade, da 5.ª Em particular,

$$A \cap B \subseteq (A \cap B)^{\wedge} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B} = (\hat{A} \cap \hat{B})^{\wedge}.$$

**10.ª Proposição:** *É condição necessária e suficiente para que um conjunto seja intersecção de conjuntos convexos, que coincida com o seu envólucro convexo.*

É consequência da definição e da 5.ª proposição.

A proposição anterior afirma que a operação de passagem ao envólucro convexo

$$A \overset{\varkappa}{\rightarrow} \hat{A}$$

caracteriza a classe das intersecções de conjuntos convexos. Mas não caracteriza a classe, $\Gamma$, dos conjuntos convexos como se pode inferir dos seguintes exemplos em que $(E, \Gamma)$ e $(E, \Gamma')$ são duas estruturas de convexidade diferentes que dão origem à mesma operação $\varkappa$.

1.º Exemplo:

$E = O.$

$\Gamma = O, \Gamma' = \{O\}.$

Em qualquer dos casos, $\varkappa(O) = O$.

2.º Exemplo:

$E = \{a, b, c\}.$

$\Gamma = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \Gamma' = \mathcal{S}(E).$

Em qualquer dos casos, qualquer que seja A, $\varkappa(A) = A$.

Há dois casos extremos — e triviais — de estruturas de convexidade, a que se referem as proposições seguintes:

**11.ª Proposição:** *Se não há conjuntos convexos, o envólucro convexo de qualquer conjunto é o espaço.*

**12.ª Proposição:** *Se todos os conjuntos são convexos, o envólucro convexo de qualquer conjunto é ele próprio.*

**Passagem ao envólucro convexo e subestruturas.**

Sejam $(E, \Gamma)$ uma estrutura de convexidade, $(E, \Gamma')$ e $(E, \Gamma'')$ estruturas respectivamente menos fina e mais fina que $(E, \Gamma)$ e A um subconjunto de E. Designem-se por $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa_A$ e $\varkappa_A^*$, respectivamente, as operações de passagem ao envólucro convexo nas estruturas $(E, \Gamma')$ e $(E, \Gamma'')$, na estrutura induzida por $(E, \Gamma)$ em A e na subestrutura de $(E, \Gamma)$ incluída em A. Seja B um subconjunto de A.

**13.ª Proposição:** *O envólucro convexo de um subconjunto numa dada estrutura de convexidade está contido nos envólucros convexos do mesmo subconjunto nas estruturas menos finas e contém os seus envólucros convexos nas estruturas mais finas:*

$$\varkappa'(A) \supseteq \hat{A} \supseteq \varkappa''(A)$$

A demonstração é óbvia.

**14.ª Proposição:** *O envólucro convexo de um subconjunto de um subespaço numa dada estrutura de convexidade contém o envólucro convexo do mesmo subconjunto na estrutura induzida no dado subespaço:*

$$\text{se} \quad B \subseteq A, \ \varkappa_A(B) \subseteq \hat{B}$$

Com efeito, se $p \in \varkappa_A(B)$, pertence também a A e, qualquer que seja C de $\Gamma$,

$$C \supseteq B \Longrightarrow C \cap A \supseteq B \Longrightarrow \varkappa_A(B) \subseteq C \cap A \Longrightarrow p \in C \cap A \Longrightarrow p \in C$$

de modo que $p \in \hat{B}$.

**15.ª Proposição:** *Não se verifica em geral a relação de inclusão oposta à da proposição anterior.*

Basta considerar o seguinte exemplo.

3.º Exemplo:

$E = \{a, b\}$, $A = \{a\}$, $B = O$.

$\Gamma = \{\{b\}, \{a, b\}\}$.

$\Gamma_A = \{C \cap A : C \in \Gamma\} = \{O, \{a\}\}$.

$\hat{B} = \{b\}$, $\varkappa_A(B) = O$.

**16.ª Proposição:** *A intersecção de um subespaço de uma estrutura de convexidade com o envólucro convexo de um subconjunto do subespaço na estrutura dada está contida no envólucro convexo do mesmo subconjunto na subestrutura incluída no referido subespaço:*

$$A \cap \hat{B} \subseteq \varkappa_A^*(B).$$

Com efeito, se um ponto pertence a $\hat{B}$, esse ponto pertence a todos os convexos do espaço que contêm B, em particular a todos os que estão simultâneamente contidos em A. Se existe algum conjunto nestas condições a intersecção de todos eles é $\varkappa_A^*(B)$. que contém então $\hat{B}$ e $A \cap \hat{B}$. Se nenhum existe, a intersecção dos mesmos conjuntos, como subconjuntos de E, é E, ao passo que $\varkappa_A^*(B)$ designa A; mas neste caso também $A \cap \hat{B} \subseteq \varkappa_A^*(B)$.

**17.ª Proposição:** *Não se verifica em geral a relação de inclusão oposta à da proposição anterior.*

Basta considerar os seguintes exemplos.

3.º Exemplo (Continuação):

$$\Gamma_A^* = \{C : A \supseteq C \in \Gamma\} = O.$$

$$A \cap \hat{B} = O, \quad \text{mas} \quad \varkappa_A^*(B) = A = \{a\}.$$

4.º Exemplo:

$$E \;= \{a, b\},\; A = \{a\},\; B = O.$$

$$\Gamma \;= \{\{a\}, \{b\}\}.$$

$$\Gamma_A^* = \{\{a\}\}.$$

$$\hat{B} \;= O,\; A \cap \hat{B} = O \quad \text{mas} \quad \varkappa_A^*(B) = \{a\}.$$

Considerem-se finalmente dois casos particulares importantes da 8.ª proposição.

**18.ª Proposição:** *Se a reunião de conjuntos a que se refere a 8.ª proposição for uma intersecção de conjuntos convexos, todos os quatro conjuntos que figuram na fórmula a) são iguais; se a reunião dos envólucros convexos dos conjuntos dados for uma intersecção de conjuntos convexos, são iguais os três últimos conjuntos da referida fórmula.*

Consequências imediatas da 5.ª proposição.

**A operação $\sigma$**

**2.ª Definição:** *Dados dois conjuntos,* A *e* B. *de uma estrutura de convexidade, o envólucro convexo da sua reunião será designado por* $A \sigma B$:

$$A \sigma B = (A \cup B)^\wedge.$$

**19.ª Proposição:** *Quaisquer que sejam os conjuntos* A *e* B, *verificam-se as propriedades seguintes.*

$c_1$) $A \,\sigma\, A = \hat{A}$,

$c_2$) $A \,\sigma\, O = \hat{A}$,

$c_3$) $A \,\sigma\, E = E$,

$c_4$) $A \,\sigma\, B \supseteq A \cup B$.

**20.ª Proposição:** *A operação* $\sigma$ *é comutativa.*

**21.ª Proposição:** *Se um conjunto convexo, ou uma intersecção de conjuntos convexos, contém* A *e* B, *contém ainda* $A \,\sigma\, B$.

Consequências das proposições 2.ª e 4.ª

**22.ª Proposição:** *Dados três conjuntos,* $A_1$, $A_2$ *e* $A_3$, *o envólucro convexo da sua reunião é* $A_1 \,\sigma\, (A_2 \,\sigma\, A_3)$:

$$A_1 \,\sigma\, (A_2 \,\sigma\, A_3) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^\wedge$$

Com efeito, conforme a proposição anterior, se C contém $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, contém $A_2 \cup A_3$, $A_2 \,\sigma\, A_3$, $A_1 \cup (A_2 \,\sigma\, A_3)$ e $A_1 \,\sigma\, (A_2 \,\sigma\, A_3)$ de modo que este conjunto está incluído em $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^\wedge$. Recìprocamente $A_1 \,\sigma\, (A_2 \,\sigma\, A_3)$ contém, conforme a 1.ª proposição, $A_1$ e $A_2 \,\sigma\, A_3$, contém então $A_1$, $A_2$ e $A_3$, isto é, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ e, sendo uma intersecção de conjuntos convexos, contém $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^\wedge$.

**23.ª Proposição:** *A operação* $\sigma$ *é associativa.*

Como na proposição anterior, pode mostrar-se que $(A_1 \,\sigma\, A_2) \,\sigma\, A_3 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^\wedge$.

**24.ª Proposição:** *Se um dos conjuntos* $A_1$, $A_2$ *e* $A_3$ *estiver contido noutro, na expressão* $A_1 \sigma A_2 \sigma A_3$ *pode suprimir-se esse conjunto — e o sinal* $\sigma$ *que o precede ou segue.*

Dada a comutatividade da operação, pode supor-se que $A_1 \subseteq A_2$. A conclusão vem da 22.ª proposição.

Em particular pode aplicar-se esta regra para simplificar expressões em que apareçam conjuntos vazios ou repetidos.

**25.ª Proposição:** *A operação* $\sigma$ *é crescente em sentido lato a respeito da relação de inclusão e de qualquer dos seus dados, ou de ambos:*

se $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$, $A \sigma B$ está contido em $A' \sigma B$, $A \sigma B'$ e $A' \sigma B'$.

Consequência da 7.ª proposição.

**26.ª Proposição:** *Na operação* $\sigma$ *pode substituir-se qualquer dos dados, ou ambos, pelo seu envólucro convexo:*

$$A \sigma B = \hat{A} \sigma B = A \sigma \hat{B} = \hat{A} \sigma \hat{B}.$$

Da fórmula b) resulta que o primeiro destes conjuntos coincide com o último e os restantes, conforme a proposição anterior, estão compreendidos entre eles.

**27.ª Proposição:** *Se a reunião de dois conjuntos,* A *e* B *for uma intersecção de conjuntos convexos, coincide com* $A \sigma B$.

Consequência da 18.ª proposição.

A operação $\sigma$ vai agora ser generalizada.

**3.ª Definição:** *Dada uma família* $(A_i : i \in I)$ *de subconjuntos de uma estrutura de convexidade, o envólucro convexo da reunião desses conjuntos representa-se por* $\sum_{i \in I} A_i$:

$$\sum_{i \in I} A_i = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^{\wedge}.$$

**28.ª Proposição:** *Se algum dos conjuntos* $A_i$ *é o espaço, o mesmo sucede a* $\sum_{i \in I} A_i$.

**29.ª Proposição:** *Sendo* $\pi(i)$ *uma permutação do conjunto dos índices,* I,

$$\sum_{i \in I} A_{\pi(i)} = \sum_{i \in I} A_i.$$

É a generalização da 20.ª proposição e deduz-se de

$$\bigcup_{i \in I} A_{\pi(i)} = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

**30.ª Proposição:** *Se* J *é um subconjunto de* I *tal que cada conjunto da subfamília* $(A_i : i \in I \setminus J)$ *está contido em algum conjunto da subfamília* $(A_i : i \in J)$,

$$\sum_{i \in I} A_i = \sum_{j \in J} A_j.$$

Com efeito $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$ pois para cada i existe um $j(i)$ — igual a i se $i \in J$ — tal que $A_i \subseteq A_{j(i)}$.

**31.ª Proposição:** *A operação* $\sum_{i \in I}$ *é crescente em sentido lato a respeito da relação de inclusão:*

se, qualquer que seja i, $A_i \subseteq A'_i$, $\sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} A'_i$.

**32.ª Proposição:** *Na operação* $\sum_{i \in I}$ *pode substituir-se qualquer dos dados, ou alguns ou todos eles, pelo respectivo envólucro convexo.*

Com efeito a fórmula a) mostra que

$$\sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} \hat{A}_i$$

e se apenas algum ou alguns dos $A_i$ forem substituídos pelos seus envólucros convexos, obtém-se um conjunto compreendido entre estes dois.

**33.ª Proposição:** *Se a reunião* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *for uma intersecção de conjuntos convexos, coincide com* $\sum_{i \in I} A_i$.

Consequência da 18.ª proposição.

**34.ª Proposição:** *Dado um conjunto* A *e uma família de conjuntos* $(B_i : i \in I)$,

$$A \sigma \bigcup_{i \in I} B_i = \sum_{i \in I} (A \cup B_i) = \sum_{i \in I} (A \sigma B_i) = A \sigma \sum_{i \in I} B_i.$$

Com efeito

$$A \sigma \bigcup_{i \in I} B_i = \Big(A \cup \bigcup_{i \in I} B_i\Big)^{\wedge} = \Big[\bigcup_{i \in I} (A \cup B_i)\Big]^{\wedge} =$$

$$= \sum_{i \in I} (A \cup B_i) = \sum_{i \in I} (A \sigma B_i)$$

vindo a última igualdade da proposição 32.ª Por outro lado da 26.ª vem que

$$A \sigma \bigcup_{i \in I} B_i = A \sigma \sum_{i \in I} B_i.$$

Verifica-se ainda em geral a proposição seguinte, que estabelece uma desigualdade oposta a outra que, em certos casos, se deduzirá do terceiro dos axiomas a introduzir.

**35.ª Proposição:** *Nas mesmas condições da proposição anterior*

$$A \,\sigma \bigcup_{i \in I} B_i \supseteq \bigcup_{i \in I} (A \,\sigma\, B_i).$$

Registe-se finalmente uma propriedade muito simples da operação $\sigma$ que no capítulo quinto desempenhará certo papel.

**36.ª Proposição:** *Quaisquer que sejam os conjuntos* A, B, C *e* D, *se* A *e* B *estão contidos em* $C \,\sigma\, D$, *o mesmo sucede a* $A \,\sigma\, B$.

É uma consequência da 21.ª proposição.

CAPÍTULO III

# SEMIESPAÇOS

## Semiespaços e classes de inclusão

1.ª **Definição**: *Chama-se «semiespaço» qualquer conjunto convexo, não vazio nem coincidente com o espaço todo, cujo complementar também seja convexo.*

1.ª **Proposição**: *O complementar de um semiespaço é outro semiespaço.*

Necessàriamente outro porque no espaço vazio não há semiespaços.

Quando daqui em diante se disser que uma proposição se deduz de outra por dualidade, isso significará que ela resulta de análogo processo dedutivo aplicado agora aos semiespaços complementares daqueles de que trata a proposição.

2.ª **Proposição**: *Não pode haver semiespaços num espaço com menos de dois pontos.*

2.ª **Definição**: *Chama-se «classe de inclusão» determinada por um semiespaço ao conjunto de todos os semiespaços que o contêm ou nele estão contidos.*

Assim, a classe de inclusão definida pelo semiespaço $S_0$ é

$$\mathfrak{J}(S_0) = \{S : S \subseteq S_0 \vee S \supseteq S_0\}$$

em que a variável S designa um semiespaço. Em geral usar-se-á $\mathfrak{I}$ com este significado e $\Sigma$ para designar, salvo menção contrária, o conjunto dos semiespaços de E.

1.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b\},\ \Gamma = \{\{a\}, \{b\}\},\ \Sigma = \Gamma,\ \mathfrak{I}(\{a\}) = \{\{a\}\}.$$

**3.ª Proposição:** *Cada semiespaço pertence à classe de inclusão determinada por si próprio.*

**4.ª Proposição:** *Nenhuma classe de inclusão é vazia.*

**5.ª Proposição:** *As classes de inclusão determinadas por um semiespaço e pelo seu complementar são disjuntas.*

Sendo $\overline{S}_0$ o complementar de $S_0$ e S o suposto semiespaço comum a $\mathfrak{I}(S_0)$ e $\mathfrak{I}(\overline{S}_0)$ as relações $\overline{S}_0 \subseteq S \subseteq S_0$, $S_0 \subseteq S \subseteq \overline{S}_0$, $S_0 \subseteq S \supseteq \overline{S}_0$ e $S_0 \supseteq S \subseteq \overline{S}_0$ implicariam, respectivamente, $S_0 = E$, $S_0 = O$, $S = E$ e $S = O$, contra a definição de semiespaço.

**6.ª Proposição:** *Se um semiespaço pertence à classe de inclusão determinada por outro, este pertence à que aquele determina.*

A relação que consiste em o semiespaço S pertencer à classe de inclusão determinada por S′, adiante designada por $S \pi S'$ é pois reflexiva e simétrica. Que não é em geral transitiva, pode ver-se com o seguinte exemplo.

2.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c\},$$

$$\Gamma = \Sigma = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

$$\mathfrak{I}(\{a\}) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

$$\mathfrak{I}(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

$$\{b\} \, \pi \, \{a, b\}, \ \{a, b\} \, \pi \, \{a\}.$$

Mas não é já verdade que $\{b\} \, \pi \, \{a\}$.

**7.ª Proposição:** *Se um espaço tem menos de três pontos a relação $\pi$ é transitiva.*

De facto, se há semiespaços, são dois, constituídos como no exemplo 1.º, e, não se verificando nenhuma relação de inclusão entre semiespaços distintos, a transitividade é trivial.

**8.ª Proposição:** *Se um par de semiespaços satisfaz a relação $\pi$, o mesmo sucede ao par formado pelos seus complementares.*

As proposições seguintes ocupam-se de uma classe de semiespaços em que a relação $\pi$ é transitiva.

**3.ª Definição:** *Chama-se «simples» qualquer semiespaço cuja classe de inclusão contenha as dos semiespaços que lhe pertencem.*

Isto é, $S_0$ é simples se, qualquer que seja o semiespaço $S'$,

$$S' \in \mathfrak{I}(S_0) \Longrightarrow \mathfrak{I}(S') \subseteq \mathfrak{I}(S_0)$$

ou, de outro modo, se

$$S' \, \pi \, S_0 \Longrightarrow \mathfrak{I}(S') \subseteq \mathfrak{I}(S_0)$$

ou ainda se, quaisquer que sejam os semiespaços S e S′, se verificam as implicações

a)
$$S \subseteq S' \supseteq S_0 \Longrightarrow (S \subseteq S_0 \vee S \supseteq S_0)$$
$$S \supseteq S' \subseteq S_0 \Longrightarrow (S \subseteq S_0 \vee S \supseteq S_0)$$

além de implicações análogas — por si verdadeiras — cujas hipóteses são $S \subseteq S' \subseteq S_0$ e $S \supseteq S' \supseteq S_0$.

2.º Exemplo (Continuação):

Nenhum dos semiespaços é simples: $\{a\}$ porque

$$\{b\} \subseteq \{a, b\} \supseteq \{a\}$$

mas nem $\{b\} \subseteq \{a\}$ nem $\{a\} \subseteq b$, $\{a, b\}$ porque

$$\{a, c\} \supseteq \{a\} \subseteq \{a, b\}$$

mas também não é verdade que $\{a, c\} \, \pi \, \{a, b\}$ e anàlogamente nos restantes casos.

**9.ª Proposição:** *Dados três semiespaços, se o primeiro pertence à classe de inclusão do segundo e o segundo à do terceiro e se o primeiro ou o terceiro é simples, também o primeiro pertence à classe de inclusão do terceiro.*

Isto é, se $S_0 \, \pi \, S_1 \, \pi \, S_2$ e se $S_0$ ou $S_2$ é simples, $S_0 \, \pi \, S_2$.
Com efeito, se $S_1 \in \mathfrak{J}(S_0)$ e $S_0$ é simples, $\mathfrak{J}(S_1) \subseteq \mathfrak{J}(S_0)$ e como $S_2 \in \mathfrak{J}(S_1)$, $S_2 \in \mathfrak{J}(S_0)$, isto é, $S_0 \, \pi \, S_2$.

**10.ª Proposição:** *Entre semiespaços simples, a relação* $\pi$ *é transitiva.*

**11.ª Proposição:** *O complementar de um semiespaço simples é simples.*

Com efeito, se $S \subseteq S' \supseteq E \setminus S_0$, $E \setminus S \supseteq E \setminus S' \subseteq S_0$ e, sendo $S_0$ simples, $E \setminus S \, \pi \, S_0$ donde, pela 6.ª proposição, $S \, \pi \, E \setminus S_0$. Anàlogamente se $S \supseteq S' \subseteq E \setminus S_0$, verificando-se portanto as implicações a).

**12.ª Proposição:** *Dados dois semiespaços simples, o primeiro pertence à classe de inclusão determinada pelo segundo se e só se ambas as classes de inclusão por eles determinadas são iguais.*

Se $S_0 \, \pi \, S_1$ com $S_0$ e $S_1$ simples, da 3.ª definição se deduz que $\mathfrak{J}(S_0) = \mathfrak{J}(S_1)$. Recìprocamente, se $\mathfrak{J}(S_0) = \mathfrak{J}(S_1)$, conforme a 3.ª proposição, $S_0 \in \mathfrak{J}(S_1)$, isto é, $S_0 \, \pi \, S_1$.

Sendo a relação $\pi$, no conjunto dos semiespaços simples, reflexiva, simétrica e transitiva, decompõe-o em classes de equivalência *modulo* $\pi$. À proposição anterior pode então dar-se a forma do seguinte escólio.

**13.ª Proposição:** *Semiespaços simples equivalentes* modulo $\pi$ *pertencem à mesma classe de inclusão e recìprocamente.*

**14.ª Proposição:** *O conjunto dos semiespaços simples de uma classe de inclusão é totalmente ordenado por inclusão.*

Com efeito, se $S_0$ e $S_2$, ambos simples, pertencem a $\mathfrak{J}(S_1)$, de acordo com a 9.ª proposição $S_0 \, \pi \, S_2$ de modo que $S_0 \subseteq S_2$ ou $S_2 \subseteq S_0$.

## Orientações

*4.ª* **Definição:** *Chamam-se «orientações» do espaço as classes de inclusão determinadas pelos semiespaços simples.*

**5.ª Definição:** *Chama-se «orientação oposta» a uma dada orientação a orientação definida por qualquer dos complementares dos semiespaços simples pertencentes a essa orientação.*

Que a definição é consistente resulta imediatamente das proposições 8.ª e 12.ª

**15.ª Proposição:** *Cada semiespaço pertence quando muito a uma orientação.*

Com efeito se $S_1$ pertence às orientações determinadas pelos semiespaços simples $S_0$ e $S_2$, é $S_0 \pi S_1 \pi S_2$ de modo que $\mathfrak{I}(S_0) = \mathfrak{I}(S_2)$ — proposições 9.ª e 12.ª — isto é as duas orientações coincidem.

**16.ª Proposição:** *Dada uma classe de inclusão e uma orientação, ou não têm elementos comuns ou a primeira está contida na segunda.*

Com efeito, se algum semiespaço é comum, conforme a definição 3.ª, todos os semiespaços da classe de inclusão pertencem à orientação dada.

A relação $\pi$ decompõe então, não só o conjunto dos semiespaços simples em classes de equivalência *modulo* $\pi$, mas também o conjunto de todos os semiespaços em diversas orientações, cada uma delas correspondente a uma das referidas classes de equivalência *modulo* $\pi$ — à que nela está incluída — e numa outra classe formada pelos semiespaços restantes, a que se refere a definição seguinte.

**6.ª Definição:** *Chamam-se «orientados» os semiespaços pertencentes a alguma orientação, «não-orientados» ou «de orientação nula» os restantes.*

Os semiespaços não-orientados são então aqueles cuja classe de inclusão não contém nenhum semiespaço simples.

Quando se falar dum semiespaço com uma dada orientação, exclui-se a orientação nula.

**17.ª Proposição:** *O complementar de um semiespaço orientado é orientado com a orientação oposta.*

**18.ª Proposição:** *O complementar de um semiespaço não-orientado é não-orientado.*

**19.ª Proposição:** *A intersecção de dois semiespaços com orientações diferentes, ou de um semiespaço orientado com outro não-orientado, não contém nenhum semiespaço.*

Porque tal semiespaço pertenceria às classes de inclusão dos semiespaços dados, que são disjuntas, no primeiro caso em vista da 15.ª proposição e no segundo em vista da 16.ª Por dualidade:

**20.ª Proposição:** *A reunião de dois semiespaços com orientações diferentes, ou de um semiespaço orientado com outro não-orientado, não está contida em nenhum semiespaço.*

3.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d, e\},$$

$$\Gamma = \Sigma = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, d, e\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}\}.$$

As relações de inclusão que se verificam entre estes semiespaços são apenas as seguintes:

$$\{a, c\} \subseteq \{a, c, d\} \supseteq \{a, d\} \subseteq \{a, d, e\}$$

e as duais

$$\{b, d, e\} \supseteq \{b, e\} \subseteq \{b, c, e\} \supseteq \{b, c\}.$$

Nenhum destes oito semiespaços é portanto simples. Pelo contrário são trivialmente simples os semiespaços $\{a, b\}$ e $\{c, d, e\}$ que não contêm nem estão contidos em nenhum outro e as únicas orientações do espaço são $\{\{a, b\}\}$ e $\{\{c, d, e\}\}$. Há semiespaços orientados que intersectam semiespaços não-orientados mas, conforme a 18.ª proposição, as intersecções não contêm nenhum semiespaço. De acordo com a proposição seguinte cada semiespaço não-orientado intersecta ambos os semiespaços orientados por serem complementares. Finalmente o número de pontos deste espaço é mínimo em certo sentido que a proposição 26.ª indicará.

**21.ª Proposição:** *Qualquer semiespaço não-orientado ou de orientação diferente mas não oposta à de um dado semiespaço intersecta tanto este semiespaço como o seu complementar.*

Aliás estaria contido num destes dois últimos semiespaços e pertenceria portanto à sua classe de inclusão e, segundo a 16.ª proposição, à sua orientação.

**22.ª Proposição:** *Qualquer semiespaço não-orientado é membro de uma família de quatro semiespaços distintos, igualmente não-orientados e tais que o segundo contém o primeiro e o terceiro e este está contido no quarto.*

Como S não é orientado, não é simples e existem dois semiespaços, $S_1$ e $S_2$, tais que $S_1 \supseteq S_2 \subseteq S$, $S_1$ não está contido em S e S não está contido em $S_1$, ou então que $S_1 \supseteq S_2 \subseteq S$, $S_1$ não está contido em S e S não está contido em $S_1$. Em qualquer dos casos $S \neq S_1 \neq S_2 \neq S$. Consideremos a primeira hipótese. Como $S_2$ também não é simples porque então seria S orientado, existem dois semiespaços tais que $T_1 \subseteq T_2 \supseteq S_2$ ou $T_1 \supseteq T_2 \subseteq S_2$, $T_1$ não está contido em $S_2$ e $S_2$ não está contido em $T_1$. Consideremos o primeiro caso e vejamos se $T_1 \subseteq T_2 \supseteq S_2 \subseteq S$ é uma família nas condições desejadas. Como acima, $T_1 \neq T_2$, $T_2 \neq S_2$ e $S_2 \neq T_1$. Se $T_2 \neq S \neq T_1$ obtém-se a conclusão desejada. Se $T_1 = S$ basta considerar a família $S \subseteq T_2 \supseteq S_2 \subseteq S_1$ em que também $S_1 \neq T_2$, aliás $S \subseteq S_1$, e $S \neq T_2$ porque $S = T_1$. Se $T_2 = S$, considere-se a família $T_1 \subseteq S \supseteq S_2 \subseteq S_1$ em que $T_1 \neq S$ porque $S = T_2$ e $T_1 \neq S_1$, aliás $T_1 \supseteq S_2$. No segundo caso, como $T_2 \subseteq S_2 \subseteq S_1$ pode considerar-se a família $T_2 \subseteq S_1 \supseteq S_2 \subseteq S$. $T_2 \neq S_1$ por estar pròpriamente contido em $S_2$ e pelo mesmo motivo $T_2 \neq S$. Na segunda hipótese, argumentos análogos em que se invertesse o sentido das desigualdades conduziriam a uma família de quatro semiespaços distintos em que o segundo estivesse contido no primeiro e no terceiro e este contivesse o quarto. Invertendo-se a numeração dos semiespaços, obtinha-se a mesma conclusão da primeira hipótese.

23.ª **Proposição:** *Se a classe dos semiespaços não-orientados tem apenas os quatro elementos referidos na proposição anterior, a única outra possível relação de inclusão entre tais semiespaços é estar o primeiro contido no quarto.*

Com efeito, se se verificasse, além de $S_1 \subseteq S_2 \supseteq S_3 \subseteq S_4$, ainda $S_1 \subseteq S_3$, $S_1 \supseteq S_3$, $S_2 \subseteq S_4$, $S_2 \supseteq S_4$ ou $S_1 \supseteq S_4$, seriam respectivamente $S_1$ o mínimo, $S_3$ o mínimo, $S_4$ o máximo, $S_2$ o máximo e $S_2$ o máximo dos quatro semiespaços. E, não havendo outros semiespaços não-orientados, nem relações de inclusão entre estes e semiespaços orientados, tais semiespaços mínimos ou máximos seriam simples e a classe dos semiespaços não-orientados seria antes uma outra orientação.

24.ª **Proposição:** *Num espaço em que há semiespaços não-orientados, há pelo menos seis.*

Dos quatro semiespaços a que se refere a proposição anterior, só o primeiro e o último podem ser complementares e a tese deduz-se então imediatamente da 18.ª proposição.

**25.ª Proposição:** *Num espaço em que há semiespaços orientados há pelo menos dois.*

**26.ª Proposição:** *Num espaço com menos de três pontos não pode haver semiespaços não-orientados.*

Se há só dois pontos, só pode haver dois semiespaços, que são orientados; com menos de dois pontos não há semiespaços — proposição 2.ª

**27.ª Proposição:** *Num espaço com menos de cinco pontos não pode haver semiespaços orientados e não-orientados.*

Os semiespaços não-orientados que haja não podem ter só um ponto, aliás as suas intersecções com um semiespaço orientado, que não são vazias por força da 19.ª proposição, seriam constituídas por esses únicos pontos, isto é, os referidos semiespaços seriam orientados. Também não podem ter três pontos porque os seus complementares teriam um ou nenhum e então seriam orientados ou não seriam semiespaços. Mas com semiespaços constituídos todos por dois pontos não é possível verificar-se a tese da 22.ª proposição.

O número mínimo de pontos indicado em cada uma das proposições 25.ª, 26.ª e 27.ª não pode ser aumentado conforme se vê pelos exemplos 1.º, 2.º e 3.º E o número de semiespaços qne figuram neste último exemplo só pode ser diminuído se o espaço tiver mais pontos.

**28.ª Proposição:** *Num espaço com cinco pontos em que haja semiespaços orientados e não-orientados há pelo menos dez semiespaços.*

Conforme as proposições 24.ª e 25.ª há pelo menos oito semiespaços, seis não-orientados e dois orientados. Mas para haver seis semiespaços não orientados é necessário que um deles — conforme se viu na demonstração daquela 24.ª proposição — pertença a uma família de quatro semiespaços em que o primeiro seja complementar do quarto. Por outro lado, como se disse no princípio da demonstração da proposição anterior, estes semiespaços têm de possuir pelo menos dois pontos. Sendo, para fixar ideias $\{a, b\}$ o primeiro e $\{c, d, e\}$ o quarto, o terceiro teria dois destes três elementos, por exemplo c e d. Mas o segundo teria então quatro elementos, a, b, c e d, e o seu complementar um só elemento, o que não pode ser.

Mas num espaço com seis pontos já pode haver, nas condições indicadas, apenas oito semiespaços como se vê pelo exemplo seguinte.

4.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d, e, f\};$$

$$\Gamma = \Sigma = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{a, c, e\}, \{b, d, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e, f\}, \{c, d, e\, f\}\}.$$

Os semiespaços não-orientados são os que figuram na seguinte família:

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\} \supset \{c, d\} \subset \{c, d, e, f\} \supset \{e, f\} \subset \subset \{a, b, e, f\} \supset \{a, b\}$$

e são orientados os dois restantes.

**29.ª Proposição:** *Se uma reunião ou uma intersecção de semiespaços simples for um semiespaço, será também simples e tanto essa reunião ou intersecção* *como os semiespaços dados pertencerão à mesma orientação.*

Seja $(T_i : i \in I)$ uma família de semiespaços simples e sejam $S'$ e $S$ dois semiespaços tais que

$$S' \subseteq S \supseteq \bigcup_{i \in I} T_i.$$

Então, qualquer que seja o índice j, $S' \subseteq S \supseteq T_j$ e, sendo $T_j$ simples, $S' \subseteq T_j$ ou $S' \supseteq T_j$. Se existe um índice j tal que $S' \subseteq T_j$, então $S' \subseteq \bigcup_i T_i$; de contrário qualquer que seja j, $S' \supseteq T_j$ e portanto $S' \supseteq \bigcup_i T_i$.

Suponha-se agora que $S' \supseteq S \subseteq \bigcup_i T_i$. Qualquer que seja j, $T_j \subseteq \bigcup_i T_i \supseteq S$ e, sendo $T_j$ simples, $S \supseteq T_j$ ou $S \subseteq T_j$. Se, para todos os valores de j, $S'$ contivesse $T_j$, conteria $\bigcup_i T_i$; de contrário existiria um j tal que $S'$ não contivesse $T_j$, de modo que, para esse mesmo índice, S não conteria $T_j$, donde $S \subseteq S_j$. Mas de $S' \supseteq S \subseteq T_j$ vem $S' \supseteq T_j$, o que, por hipótese, se excluiu, ou $S' \subseteq T_j$ donde $S' \subseteq \bigcup_i T_i$. Em todos os casos se concluiu pois que $S'$ contém ou está contido em $\bigcup_i T_i$, como se desejava e, como qualquer $T_j$ pertence à classe de inclusão de $\bigcup_i T_i$, todos têm a mesma orientação. Anàlogamente, por dualidade, se demonstraria a parte da proposição que se refere à intersecção de semiespaços simples.

**Hiperplanos**

**7.ª Definição:** *Dado um corte no conjunto totalmente ordenado dos semiespaços simples duma orientação, chama-se «hiperplano» associado a esse corte ao conjunto formado pelos pontos que pertencem a* *todos os semiespaços maiores do corte e não pertencem a nenhum dos menores.*

Por outras palavras, sendo $\Theta$ o conjunto dos semiespaços simples duma orientação e $(\Theta_1, \Theta_2)$ o corte — isto é, uma decomposição,

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2, \ \Theta_1 \cap \Theta_2 = O,$$

com $\Theta_1$ ou $\Theta_2$, mas não ambos, eventualmente vazios e $T_1 \subset T_2$ se $T_1 \in \Theta_1$ e $T_2 \in \Theta_2$ — o hiperplano associado a $(\Theta_1, \Theta_2)$ é

b) $$H = \bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 \setminus \bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1.$$

**30.ª Proposição:** *Nenhum hiperplano é igual a todo o espaço.*

Como $\Theta_2$ não pode ter elementos iguais a E, nem $\Theta_1$ elementos vazios, para ser $H = E$ teriam de ser vazias ambas estas classes, o que não pode ser.

**31.ª Proposição:** *Os hiperplanos associados a cortes correspondentes em orientações opostas são iguais.*

A cada corte no conjunto $\Theta$ dos semiespaços simples duma orientação corresponde um corte no conjunto $\Theta'$ dos seus complementares:

$$\Theta' = \Theta_1' \cup \Theta_2'$$

com

$$\Theta_1' = \{E \setminus T_2 : T_2 \in \Theta_2\}$$

e

$$\Theta_2' = \{E \setminus T_1 : T_1 \in \Theta_1\}.$$

O hiperplano associado a $(\Theta_1', \Theta_2')$ é

$$\bigcap_{T_2' \in \Theta_2'} T_2' \setminus \bigcup_{T_1' \in \Theta_1'} T_1' = \bigcap_{T_1 \in \Theta_1} (E \setminus T_1) \setminus \bigcup_{T_2 \in \Theta_2} (E \setminus T_2) =$$

$$= \bigcap_{T_1 \in \Theta_1} (E \setminus T_1) \setminus \left(E \setminus \bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2\right) = \bigcap_{T_1 \in \Theta_1} (E \setminus T_1) \cap \bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 =$$

$$= \bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 \cap \left(E \setminus \bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1\right) = H,$$

como se pretende.

**32.ª Proposição:** *Hiperplanos associados a cortes distintos de uma mesma orientação são disjuntos.*

Porque, sendo os cortes distintos, há um semiespaço simples que é maior num deles e menor no outro e então o hiperplano associado ao primeiro destes cortes está contido naquele semiespaço, que, pelo contrário, não possui nenhum ponto do hiperplano associado ao segundo corte.

Uma consequência imediata é a seguinte:

**33.ª Proposição:** *Numa dada orientação, é biunívoca a correspondência estabelecida pela 7.ª definição entre o conjunto dos hiperplanos não vazios e o dos cortes a que esses hiperplanos se associam.*

Mas um conjunto pode ser o hiperplano associado a cortes distintos em orientações diversas, quer seja vazio quer não. Um caso trivial é o que refere a 31.ª proposição. Outro é o do exemplo seguinte.

5.º Exemplo:

$E = \{a, b, c, d, e\}$

$\Gamma = \{\{a, b, c\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{d, e\}\}.$

Todos os conjuntos convexos são semiespaços simples e há quatro orientações:

$$\{b, c, d\} \supset \{b, d\} \quad , \quad \{a, b, c\} \supset \{a, b\}$$

e as suas opostas. Na primeira destas orientações há três cortes $(\Theta_1, \Theta_2)$:

$$\big(\{\{b, c, d\}, \{b, d\}\}, O\big), \big(\{\{b, d\}\}, \{\{b, c, d\}\}\big)$$
$$\text{e } \big(O, \{\{b, c, d\}, \{b, d\}\}\big)$$

a que correspondem, segundo a fórmula da alínea b), os hiperplanos $\{a, e\}$, $\{c\}$ e $\{b, d\}$. Anàlogamente, para a segunda das orientações indicadas, há três hiperplanos, $\{d, e\}$, $\{c\}$ e $\{a, b\}$, de modo que $\{c\}$ é hiperplano associado a quatro cortes, um em cada uma das orientações do espaço.

**34.ª Proposição:** *O conjunto constituído por todos os hiperplanos — ou por todos os hiperplanos não vazios — associados aos cortes do conjunto dos semiespaços simples de uma orientação é uma decomposição do espaço.*

Isto é, a reunião de todos esses hiperplanos, que, conforme a 32.ª proposição são dois a dois disjuntos, é o espaço todo.

Com efeito, dado um ponto do espaço, há um corte em que os semiespaços menores são os que não possuem esse ponto e os maiores os que o possuem pertencendo pois o ponto dado ao hiperplano que lhe está associado e que não é portanto vazio. Consideram-se também é claro, como se disse e se efectuou no exemplo anterior, os casos extremos dos cortes $(\Theta, O)$ e $(O, \Theta)$, a que correspondem os hiperplanos $E \setminus \bigcup_{T \in \Theta} T$ e $\bigcap_{T \in \Theta} T$.

Os cortes $(\Theta_1, \Theta_2)$ que definem os hiperplanos de uma orientação podem ser de quatro tipos diferentes conforme $\Theta_1$ tem ou não elemento máximo e $\Theta_2$ tem ou não elemento mínimo. A definição de hiperplano — a 7.ª definição — é válida em qualquer dos casos mas a fórmula b) pode tomar aspectos mais simples: sendo $U_1$ o máximo dos semiespaços simples menores, isto é, o elemento máximo de $\Theta_1$, vem

$$H = \bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 \setminus U_1,$$

sendo $U_2$ o mínimo dos semiespaços maiores, vem

$$H = U_2 \setminus \bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1$$

e, finalmente, existindo $U_1$ e $U_2$, é

$$H = U_2 \setminus U_1,$$

o que em particular se verifica se os espaços simples $U_1$ e $U_2$ forem consecutivos no conjunto totalmente ordenado $\Theta$.

Evidentemente, qualquer semiespaço simples, T, com a orientação considerada pode dar origem a cortes em que exista o máximo dos semiespaços simples menores, $U_1$ ou o mínimo dos semiespaços simples maiores, $U_2$. Basta pôr no primeiro caso,

$$\Theta_1 = \{T_1 : T_1 \subseteq T\}, \ \Theta_2 = \{T_2 : T \subset T_2\}$$

vindo $U_1 = T$, e, no segundo,

$$\Theta_1 = \{T_1 : T_1 \subset T\}, \ \Theta_2 = \{T_2 : T \subseteq T_2\}$$

sendo agora $T = U_2$.

**Semiespaços compostos**

**8.ª Definição**: *Chamam-se semiespaços «compostos» os semiespaços orientados que não são simples.*

A razão deste nome aparecerá adiante.

Considere-se o conjunto dos semiespaços, simples ou compostos, de uma dada orientação e um corte $(\Theta_1, \Theta_2)$, no conjunto, $\Theta$, dos semiespaços simples dessa mesma orientação.

**9.ª Definição**: *Diz-se que um semiespaço (orientado) está «associado» a um corte no conjunto dos semiespaços simples da sua orientação se ele separa, em sentido restrito, o conjunto dos semiespaços maiores do dos menores.*

Isto é, S está associado a $(\Theta_1\ \Theta_2)$ se qualquer que seja $T_1$ de $\Theta_9$ e qualquer que seja $T_2$ de $\Theta_2$,

$$T_1 \subset S \subset T_2.$$

**35.ª Proposição**: *Os semiespaços associados a um corte são compostos.*

**36.ª Proposição**: *A cada semiespaço composto corresponde um único corte a que está associado e a sua intersecção com o respectivo hiperplano nãa é vazia nem coincide com esse hiperplano, que portanto não é vazio.*

Considere-se, sendo S o semiespaço dado, o conjunto, $\Theta$, dos semiespaços simples com a mesma orientação. Qualquer destes semiespaços, T, conforme a 12.ª proposição e as definições 4.ª e 2.ª, ou contém S ou está contido em S, não podendo ter simultâneamente ambas as propriedades por ser S composto. Sendo $\Theta_1$ o conjunto dos que estão contidos em S e $\Theta_2$

o dos restantes, $(\Theta_1, \Theta_2)$ é um corte a que S está evidentemente associado e não pode haver outro, $(\Theta_1^*, \Theta_2^*)$, nas mesmas condições porque então algum T pertenceria a $\Theta_1^* \cap \Theta_2$ ou a $\Theta_1 \cap \Theta_2^*$ e coincidiria com S, o que não pode ser por ser S composto. Sendo

$$H = \bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 \setminus \bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1,$$

como o conjunto diminuendo contém S, $S \cap H = S \setminus \bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1$ e, se esta diferença fosse vazia, S, como semiespaço igual a uma reunião de semiespaços simples seria, conforme a 29.ª proposição, também simples. Por outro lado, se fosse $S \cap H = H$, viria $H \subseteq S$, mas como $\bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1 \subseteq S$, como $\bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 \subseteq H \cup \bigcup_{T_1 \in \Theta_1} T_1$ e como $\bigcap_{T_2 \in \Theta_2} T_2 \supseteq S$, seria S igual a esta intersecção, contrariando do mesmo modo a 29.ª proposição.

**10.ª Definição**: *O hiperplano, não vazio, cuja existência se provou na proposição anterior diz-se «tangente» ao semiespaço composto* S.

O hiperplano construído, a partir de um dado ponto, na demonstração da 34.ª proposição também se pode chamar «tangente» ao ponto aí considerado; a existência de hiperplanos tangentes a outros conjuntos exige, para que não sejam vazios, a intervenção de axiomas a introduzir nos capítulos seguintes.

Considere-se agora, dado o corte $(\Theta_1, \Theta_2)$ no conjunto dos semiespaços simples de uma dada orientação, o conjunto $\Sigma^1$ formado pelos semiespaços que lhe estão associados e seja $\overline{\Sigma}^1$ o conjunto dos complementares dos elementos de $\Sigma^1$. $(E = \Sigma^1 \cup \overline{\Sigma}^1)$ é uma subestrutura da estrutura de convexidade $(E, \Gamma)$ na qual todos os conjuntos convexos são semiespaços. Repetindo para esta subestrutura o que se vem dizendo no presente capítulo, adoptam-se as seguintes designações.

**Semiespaços de ordem superior**

**11.ª Definição:** *As classes de inclusão, os semiespaços simples, as orientações e os semiespaços não-orientados da subestrutura de convexidade cujos conjuntos convexos são os semiespaços associados a um corte no conjunto dos semiespaços simples de uma dada orientação e os complementares de tais semiespaços chamam-se respectivamente «classes de inclusão de 2.ª ordem», «semiespaços de 2.ª ordem», «orientações de 2.ª ordem» e «semiespaços sem orientação de 2.ª ordem».*

As construções feitas e as proposições demonstradas no presente capítulo podem agora aplicar-se *mutatis mutandis* às entidades que se acabam de definir. Em particular no conjunto totalmente ordenado formado pelos semiespaços de 2.ª ordem que pertencem a determinada orientação de 2.ª ordem poderão considerar-se cortes $(\Theta_1^1, \Theta_2^1)$ a que estarão associados «hiperplanos de 2.ª ordem» e, anàlogamente ao caso considerado na 9.ª definição, certos semiespaços que não são de 2.ª ordem. Sendo agora $\Sigma^2$ o subconjunto de $\Sigma^1$ constituído pelos semiespaços associados a $(\Theta_1^1, \Theta_2^1)$, pode repetir-se a partir deste corte o que se disse de $(\Theta_1, \Theta_2)$ obtendo-se eventualmente classes de inclusão de 3.ª ordem, semiespaços de 3.ª ordem com ou sem orientações de 3.ª ordem e assim sucessivamente. Nem é impossível, em certos casos, continuar o processo transfinitamente nem, com algum abuso de linguagem, fazê-lo começar pela ordem 0. Por este lado se, apesar do que se disse na 3.ª definição, se considerarem como semiespaços de ordem 0 — posto que sejam convexos — o conjunto vazio e o espaço todo, dos três cortes possíveis, $(O, \{O, E\})$, $(\{O\}, \{E\})$ e $(\{O, E\}, O)$, só o segundo admite semiespaços associados, que são todos os semiespaços da estrutura $(E, \Gamma)$; os semiespaços de ordem seguinte à ordem zero são então aqueles que na definição 3.ª se chamaram semiespaços simples e que se consideram agora também semiespaços de 1.ª ordem. Pelo outro lado, para um ordinal, $\gamma$, qualquer, contanto que existam semiespaços simples nas estruturas de convexidade $(E, \Sigma^\alpha \cup \bar{\Sigma}^\alpha)$ adiante indicadas, a definição dos semiespaços de ordem $\gamma$ faz-se pelo seguinte processo de recorrência transfinita.

**12.ª Definição:** *Seja* $(E, \Gamma)$ *uma estrutura de convexidade,* $\gamma$ *um ordinal fixo* $\geqslant 2$, $\alpha$ *um ordinal do intervalo* $[1, \gamma]$, $(\Sigma^\alpha : 2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma)$ *uma família de classes de semiespaços e* $((\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha) : 1 \leqslant \alpha < \gamma)$ *uma família de pares de classes de semiespaços que satisfaçam as seguintes condições:*

$c_1$) $\Theta_1^1 \cup \Theta_2^1$ *é o conjunto dos semiespaços simples duma orientação de* $(E, \Gamma)$;

$d_\alpha$) *Para* $1 \leqslant \alpha < \gamma$, $\Theta_1^\alpha \cap \Theta_2^\alpha = O$;

$e_\alpha$) *Para* $1 \leqslant \alpha < \gamma$, *se* $T_1 \in \Theta_1^\alpha$ e $T_2 \in \Theta_2^\alpha$, $T_1 \subseteq T_2$;

$f_\alpha$) *Sendo* $\alpha$ *um ordinal de primeira espécie pertencente ao intervalo* $[2, \gamma]$, $\Sigma^\alpha$ *é o conjunto dos semiespaços associados ao corte* $(\Theta_1^{\alpha-1}, \Theta_2^{\alpha-1})$ *definido pelas condições* $c_1$) *ou* $c_\alpha$), $d_\alpha$) *e* $e_\alpha$);

$g_\alpha$) *Para* $2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma$, $\bar{\Sigma}^\alpha$ *é o conjunto dos semiespaços complementares dos semiespaços de* $\Sigma^\alpha$;

$c_\alpha$) *Para* $2 \leqslant \alpha < \gamma$, $\Theta_1^\alpha \cup \Theta_2^\alpha$ *é o conjunto dos semiespaços simples duma orientação da subestrutura* $(E, \Sigma^\alpha \cup \bar{\Sigma}^\alpha)$ *de* $(E, \Gamma)$ *representada por um semiespaço de* $\Sigma^\alpha$;

$f_\beta$) *Sendo* $\beta$ *um ordinal de segunda espécie pertencente ao intervalo* $[2, \gamma]$,

$$\Sigma^\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} \Sigma^\alpha .$$

*Então chamam-se «semiespaços de ordem $\gamma$», «classes de inclusão de ordem $\gamma$» e «orientações de ordem $\gamma$», respectivamente, os semiespaços simples, as classes de inclusão e as orientações da subestrutura* $(E, \Sigma^\gamma \cup \bar{\Sigma}^\gamma)$.

O processo de recorrência a que se aludiu consiste pois em escolher o corte $(\Theta_1^1, \Theta_2^1)$ de acordo com $c_1$), $d_1$) e $e_1$), determinar as classes $\Sigma^2$ por $f_2$) e $\bar{\Sigma}^2$ por $g_2$), definir os semiespaços, classes de inclusão e orientações de 2.ª ordem, escolher depois uma orientação de 2.ª ordem e um corte $(\Theta_1^2, \Theta_2^2)$ conforme $c_2$), $d_2$) e $e_2$), determinar $\Sigma^3$ e $\bar{\Sigma}^3$ por $f_3$) e $g_3$), definir os conceitos respeitantes à 3.ª ordem, e assim por diante, fazendo reiniciar o processo por meio de $f_\beta$) quando ele se suspenda diante de algum ordinal de segunda espécie.

Como se referiu, para que se chegue de facto a algum semiespaço de ordem $\gamma$ é necessário que, para todo o $\alpha$ do intervalo $[1, \gamma]$ existam semiespaços simples nas subestruturas $(E, \Sigma^\alpha \cup \bar{\Sigma}^\alpha)$ correspondentes aos cortes $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$ escolhidos; não podem em particular ser $\Sigma^\alpha$ nem $\Theta_1^\alpha \cup \Theta_2^\alpha$ vazios, o que é aliás exigido pela 4.ª proposição e pela 4.ª definição.

Seguem-se algumas propriedades das classes e cortes que figuram na definição de um determinado semiespaço de ordem $\gamma$.

**37.ª Proposição:** *Para $\alpha \geqslant 2$, cada classe de inclusão da subestrutura de convexidade $(E, \Sigma^\alpha \cup \bar{\Sigma}^\alpha)$ acima referida está contida em $\Sigma^\alpha$ ou em $\bar{\Sigma}^\alpha$.*

Porque não podem valer as relações de inclusão entre elementos de $\Sigma^\alpha$ e elementos de $\bar{\Sigma}^\alpha$. Suponhamos primeiro que $\alpha$ é de primeira espécie e que os semiespaços de $\Sigma^\alpha$ estão associados a um corte $(\Theta_1^{\alpha-1}, \Theta_1^{\alpha-1})$ em que $\Theta_1^{\alpha-1}$ não é vazia e seja $T_1$ um semiespaço de $\Theta_1^{\alpha-1}$, simples na subestrutura $(E, \Sigma^{\alpha-1} \cup \bar{\Sigma}^{\alpha-1})$. Seja R um elemento de $\Sigma^\alpha$ e $\bar{S}$ um de $\bar{\Sigma}^\alpha$ de modo que também $S = E \setminus \bar{S} \in \Sigma^\alpha$ e tanto R como S contêm $T_1$. Quer $R \subseteq \bar{S}$, quer $R \supseteq \bar{S}$, $\bar{S}$ pertenceria à classe de inclusão de R e portanto — 16.ª proposição — à orientação de $T_1$. Mas $\bar{S} \subseteq \bar{T}_1 = E \setminus T_1$ e pertence à orientação de $\bar{T}_1$, contra o que afirma a **5.ª** proposição. Anàlogamente, se $\Theta_2^{\alpha-1}$ não é vazia, sendo $T_2$ um dos seus elementos e designando R e S do mesmo modo semiespaços de $\Sigma^\alpha$, tanto R como S estão contidos em $T_2$. Quer $R \subseteq \bar{S}$, quer $R \supseteq \bar{S}$, segue-se uma contradição semelhante à do caso anterior com $T_2$ em lugar de $T_1$. Finalmente, se $\alpha$ é de segunda espécie, conforme $f_\alpha)$ $\Sigma^\alpha \subseteq \Sigma^2$ donde $\bar{\Sigma}^\alpha \subseteq \bar{\Sigma}^2$ e já ficou provado que não há relações de inclusão entre elementos de $\Sigma^2$ e elementos de $\bar{\Sigma}^2$ — naturalmente, para $\alpha = 2$, em vez da subestrutura $(E, \Sigma^{\alpha-1} \cup \bar{\Sigma}^{\alpha-1})$ considerar-se-ia a estrutura $(E, \Gamma)$.

**38.ª Proposição:** *Se $2 \leqslant \alpha < \gamma$, $\Sigma^\gamma$ está contida em $\Sigma^\alpha$ e $\bar{\Sigma}^\gamma$ em $\bar{\Sigma}^\alpha$.*

Quanto a $\Sigma^\gamma$, se $\gamma$ é de segunda espécie, basta considerar a condição $f_\gamma)$ da 12.ª definição; se $\gamma$ é de primeira espécie, $\Sigma^\gamma$ é formada por semiespaços associados a $(\Theta_1^{\gamma-1}, \Theta_2^{\gamma-1})$ e todos eles pertencem à orientação correspondente a esse corte, determinada por certo semiespaço da subestrutura $(E. \Sigma^{\gamma-1} \cup \bar{\Sigma}^{\gamma-1})$ que, comforme $c_{\gamma-1})$, é elemento de $\Sigma^{\gamma-1}$. Da proposição anterior vem pois que $\Sigma^\gamma \subseteq \Sigma^{\gamma-1}$ e, repetindo o argumento chega-se a $\Sigma^\gamma \subseteq \Sigma^2$ ou a $\Sigma^\gamma \subseteq \Sigma^\beta$ com $\beta$ de segunda espécie e a conclusão vem então de $f_\beta)$. A segunda parte da tese deduz-se imediatamente da primeira.

**39.ª Proposição:** *Sendo $1 \leqslant \alpha < \gamma$, cada classe de inclusão de ordem $\gamma$ está contida numa orientação de ordem $\alpha$.*

Se a classe de inclusão de ordem $\gamma$ for determinada por um semiespaço pertencente a $\Sigma^\gamma$, estará, conforme a **37.ª** proposição, contida em $\Sigma^{\gamma}$, logo, conforme a proposição anterior, em $\Sigma^{\alpha+1}$. Mas esta classe está contida em certa orientação de $(E, \Sigma^{\alpha} \cup \overline{\Sigma}^{\alpha})$—de $(E, \Gamma)$ se $\alpha = 1$. Se a classe de inclusão de ordem $\gamma$ for determinada por um semiespaço $\overline{T}$ de $\overline{\Sigma}^{\gamma}$, será constituída pelos complementares dos semiespaços da classe de inclusão de ordem $\gamma$ a que pertence o complementar T, de $\overline{T}$ (8.ª proposição). Ora esta classe está contida na orientação de ordem $\alpha$ determinada em $(E, \Sigma^{\alpha} \cup \overline{\Sigma}^{\alpha})$ por T, que pertence a $\Sigma$, e a orientação de ordem $\alpha$ determinada na mesma subestrutura por $\overline{T}$ contém a classe de inclusão de ordem $\gamma$ determinada pelo mesmo $\overline{T}$.

Nas proposições seguintes já eventualmente figuram cortes $(\Theta_1^{\alpha}, \Theta_2^{\alpha})$ e classes $\Sigma^{\alpha}$ correspondentes a diversos semiespaços distintos de ordem $\gamma$.

**40.ª Proposição:** *A ordem de um semiespaço é um ordinal determinado.*

Se o semiespaço S admite duas ordens $\gamma$ e $\gamma'$ com $\gamma' < \gamma$, sejam $(\Sigma'^{\alpha} : 2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma')$ e $(\Sigma^{\alpha} : 2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma)$ as famílias de classes de semiespaços a que se refere a 12.ª definição. Seja $\alpha_0$ o mínimo ordinal $\alpha$ tal que $\Sigma^{\alpha} \neq \Sigma'^{\alpha}$ — ou, se para $\alpha \leqslant \gamma'$, $\Sigma^{\alpha} = \Sigma'^{\alpha}$, seja $\alpha_0 = \gamma' + 1$. Se $\alpha_0$ fosse de segunda espécie, de $\Sigma^{\alpha} = \Sigma'^{\alpha}$ para $\alpha < \alpha_0$ viria, conforme $f_{\alpha_0}$), $\Sigma^{\alpha_0} = \Sigma'^{\alpha_0}$, o que contrariaria a definição de $\alpha_0$. É então $\alpha_0$ de primeira espécie e as subestruturas $(E, \Sigma'^{\alpha_0-1} \cup \overline{\Sigma}'^{\alpha_0-1})$ e $(E, \Sigma^{\alpha_0-1} \cup \Sigma^{\alpha_0-1})$ coincidem. Como $\alpha_0 - 1 \leqslant \gamma' < \gamma$, $\alpha_0 \leqslant \gamma' < \gamma$ e $S \in \Sigma^{\gamma} \subseteq \Sigma^{\alpha_0}$, classe constituída pelos semiespaços associados a certo corte em certa orientação de $(E, \Sigma^{\alpha_0-1} \cup \overline{\Sigma}^{\alpha_0-1})$. S é pois nesta subestrutura, conforme a 35.ª proposição um semiespaço orientado composto e o corte $(\Theta_1^{\alpha_0-1}, \Theta_2^{\alpha_0-1})$ a que se associa é único — 36.ª proposição. O mesmo se pode dizer de $\Sigma'^{\alpha_0}$ e então vem $\Sigma^{\alpha_0} = \Sigma'^{\alpha_0}$ contra a definição de $\alpha_0$. Note-se que se for $\alpha_0 = 2$ a prova continua válida com a subestrutura $(E, \Sigma^{\alpha_0-1} \cup \overline{\Sigma}^{\alpha_0-1})$ substituída pela estrutura $(E, \Gamma)$.

Tendo-se visto que é $\gamma' = \gamma$, a mesma demonstração da proposição anterior serve para provar a seguinte. Note-se que o caso de ser $\alpha_0 = \gamma + 1$, em que perderiam sentido os últimos argumentos, corresponde justamente à tese a demonstrar.

**41.ª Proposição:** *Para cada semiespaço de ordem $\gamma$ é unìvocamente determinada a família de classes $(\Sigma^\alpha : 2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma)$ que figuram na definição da sua ordem.*

**42.ª Proposição:** *Para cada semiespaço de ordem $\gamma$ é unìvocamente determinada a família de cortes $((\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha) : 1 \leqslant \alpha < \gamma)$ que figura na definição da sua ordem.*

Sendo S o semiespaço dado, de ordem $\gamma$, e $\alpha < \gamma$, $S \in \Sigma^{\alpha+1}$ e está portanto associado a um corte $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$, na subestrutura $(E, \Sigma^\alpha \cup \bar{\Sigma}^\alpha)$, que, segundo a proposição anterior, é unìvocamente determinada. É pois composto nesta subestrutura — 35.ª proposição — e o corte $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$ é único conforme a proposição 36.ª

## Hiperplanos de ordem superior

**13.ª Definição:** *Com as mesmas notações da definição anterior, chama-se «hiperplano de ordem $\gamma$» associado a um corte $(\Theta_1^\gamma, \Theta_2^\gamma)$ no conjunto totalmente ordenado dos semiespaços de ordem $\gamma$ pertencentes a uma orientação de ordem $\gamma$ de $(E, \Gamma)$* — isto é, a um corte no conjunto totalmente ordenado dos semiespaços simples duma orientação de $(E, \Sigma^\gamma \cup \bar{\Sigma}^\gamma)$ — *ao conjunto*

$$H^\gamma = \bigcap_{T_2 \in \Theta_2^\gamma} T_2 \setminus \bigcup_{T_1 \in \Theta_1^\gamma} T_1.$$

*Mutatis mutandis,* as proposições 31.ª e 34.ª podem aplicar-se a hiperplanos de ordem $\gamma$ superior a 1. Do mesmo modo à 36.ª proposição corresponde agora a seguinte.

**43.ª Proposição:** *Dado um semiespaço,* S, *de ordem* $\gamma$, *nenhuma das intersecções de* S *com os hiperplanos associados aos cortes* $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$, *com* $1 \leqslant \alpha < \gamma$, *que figuram na definição da ordem de* S *é igual ao próprio hiperplano nem vazio, de modo que esses hiperplanos não são vazios.*

Com efeito, como se viu na demonstração da 42.ª proposição, S é composto na estrutura $(E, \Sigma^\alpha \cup \bar{\Sigma}^\alpha)$ e está aí associado a um corte $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$. Conforme a 36.ª proposição, sendo $H^\alpha$ o hiperplano — de ordem $\alpha$ — associado a esse corte é $S \cap H^\alpha \neq H^\alpha$ e não vazio.

**44.ª Proposição:** *Sendo* $1 \leqslant \alpha < \gamma$, *cada hiperplano de ordem* $\gamma$ *está contido em pelo menos um hiperplano de ordem* $\alpha$.

O hiperplano de ordem $\gamma$, $H^\gamma$, é definido por um corte $(\Theta_1^\gamma, \Theta_2^\gamma)$ no conjunto totalmente ordenado dos semiespaços de ordem $\gamma$ de uma orientação de ordem $\gamma$. Esta orientação pode ser determinada por um semiespaço pertencente a $\Sigma^\gamma$ ou a $\bar{\Sigma}^\gamma$, mas, em vista da 31.ª proposição, que, como se disse, é aqui aplicável, basta considerar o caso de ser determinada por um semiespaço de $\Sigma^\gamma$ de modo que todos os semiespaços de $\Theta_1^\gamma \cup \Theta_2^\gamma$ pertencem a $\Sigma^\gamma$ e a certo $\Sigma^{\alpha+1}$ em que $\Sigma^\gamma$ está contida. Estão todos pois associados a certo corte $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$ e, considerando as três classes $\Theta_1^\alpha$, $\Theta_1^\gamma \cup \Theta_2^\gamma$ e $\Theta_2^\alpha$, vê-se que qualquer semiespaço da primeira está contido em qualquer da segunda e qualquer semiespaço da segunda em qualquer da terceira. Então

$$\bigcap_{T_2 \in \Theta_2^\alpha} T_2 \supseteq \bigcap_{T_2 \in \Theta_2^\gamma} T_2 \quad \text{e} \quad \bigcup_{T_1 \in \Theta_1^\alpha} T_1 \subseteq \bigcup_{T_1 \in \Theta_1^\gamma} T_1$$

de modo que o hiperplano $H^\gamma$ está contido no hiperplano associado ao corte $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$.

**45.ª Proposição:** *Quaisquer que sejam o semiespaço,* S, *de ordem* $\gamma$ *e os ordinais* $\alpha$ *e* $\beta$ *tais que* $1 \leqslant \alpha < \gamma$, *e* $1 \leqslant \beta \leqslant \gamma$, S *é a reunião da reunião dos semiespaços menores, da ordem* $\alpha$, *do corte* $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$ *que figuram na definição da ordem de* S *com um semiespaço da estrutura induzida no hiperplano* $H^\alpha$ *associado a esse corte pela subestrutura* $(E, \Sigma^\beta \cup \overline{\Sigma}^\beta)$ *da estrutura dada [pela estrutura dada, se* $\beta = 1$*].*

Com efeito, como $S \in \Sigma^{\alpha+1}$ e está associado ao corte $(\Theta_1^\alpha, \Theta_2^\alpha)$, vem

$$S = \bigcup_{T_1 \in \Theta_1^\alpha} T_1 \cup (S \cap H^\alpha)$$

e, por outro lado, como $S \in \Sigma^\gamma$, $S \in \Sigma^\beta \cap \overline{\Sigma}^\beta$, o mesmo sucedendo ao complementar, $\overline{S}$, de S, de modo que $S \cap H^\alpha$ e $\overline{S} \cap H^\alpha$, não vazios nem iguais a $H^\alpha$ conforme a 43.ª proposição, são semiespaços da referida estrutura induzida [se $\beta = 1$, tanto S com $\overline{S}$ pertencem a $\Gamma$].

No entanto nada se pode em geral acrescentar sobre a ordem dos semiespaços $S \cap H^\alpha$ e $\overline{S} \cap H^\alpha$, que podem mesmo não ser orientados.

6.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d\},$$

$$\Gamma = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, E\}.$$

Todos os conjuntos convexos salvo O, {b}, {c}, {d} e E são semiespaços orientados e há duas orientações:

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$$

e a oposta. Só $\{a\}$ e o seu complementar são semiespaços simples e os cortes possíveis no conjunto dos semiespaços simples da orientação indicada são

$$(O, \{\{a\}\}) \quad \text{e} \quad (\{\{a\}\}, O),$$

a que correspondem os hiperplanos $\{a\}$ e $\{b, c, d\}$. Não há semiespaços associados ao primeiro destes cortes, mas ao segundo associam-se três: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{a, d\}$. Vem pois

$$\Sigma^2 \cup \overline{\Sigma}^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

e, não se verificando relações de inclusão entre os elementos de $\Sigma^2 \cup \overline{\Sigma}^2$, na subestrutura $(E, \Sigma^2 \cup \overline{\Sigma}^2)$ todos os semiespaços são simples. Todos são pois semiespaços de segunda ordem. Consideremos por exemplo o semiespaço $\{a, b\}$ associado ao corte $(\{\{a\}\}, O)$. As estruturas induzidas em $H = \{b, c, d\}$ pela estrutura dada $(E, \Gamma)$ e pela subestrutura $(E, \Sigma^2 \cup \overline{\Sigma}^2)$ são, respectivamente,

$$(H, \{O, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, H\})$$

e

$$(H. \{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\})$$

e $\{b\}$ é realmente um semiespaço em qualquer destas estruturas vindo $\{a, b\}$ igual à reunião deste semiespaço com a reunião, $\{a\}$ dos semiespaços menores do corte $(\{a\}, O)$. Mas, nem num nem noutro caso tem $\{b\}$ ordem determinada, por não ser orientado, como fàcilmente se vê. Note-se ainda que neste exemplo não surge o caso geral de ser $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Outro exemplo mais usual de semiespaços de 2.ª ordem é o seguinte.

7.º Exemplo:

Seja E o conjunto dos pontos de um plano, $R^2$, e $\Gamma$ a classe dos conjuntos convexos desse plano no sentido usual de conjuntos que, com cada dois pontos, contêm o segmento que os une. Seja S um semiespaço de $(R^2, \Gamma)$ e p um ponto de S e demonstrem-se certas propriedades de S,

h) *Das rectas que passam por* p *só uma pode, como conjunto de pontos, estar contida em* S, aliás todo o plano estaria contido em S.

i) *Se uma recta passa por* p *e* S *não a contém, contém uma e uma só das semi-rectas com origem em* p. Com efeito, se houvesse pontos de $R^2 \setminus S$ em ambas as semi-rectas, p não pertenceria a S.

j) *Se uma recta passa por* p *e* S *não a contém, existe nela um ponto,* $p_0$, *pertencente ou não a* S, *tal que das semi-rectas com origem em* $p_0$ *uma está contida em* S *e outra em* $R^2 \setminus S$. Orientando a recta no sentido da semi-recta de origem p que está contida em S, $p_0$ é o extremo inferior dos pontos que pertencem a S.

l) *Cada semiespaço de* $(R^2, \Gamma)$ *contém o interior de um semiplano* — isto é, o semiplano sem a recta de origem — *e o seu complementar contém o interior do semiplano oposto.*

Considerem-se duas rectas distintas que passem por p e não estejam contidas em S e sejam $p_0$ e $p'_0$ as correspondentes origens comuns de semi-rectas contidas em e disjuntas de S. Há duas rectas com esta propriedade como se viu nas alíneas h) a j). Podem acontecer três casos: p, $p_0$ e $p'_0$ distintos, $p_0 \neq p = p'_0$ e $p_0 = p = p'_0$. Tanto no segundo como no terceiro caso há duas semi-rectas de direcções distintas e origem em p que estão contidas em S — no segundo caso uma destas semi-rectas está contida na que tem origem em $p_0$ e passa por p. Sobre cada uma das semi-rectas marquem-se dois pontos distintos e distintos de p, a e b e a′ e b′, respectivamente, de modo que a e a′ sejam, em cada uma das semi-rectas, os mais próximos de p. Todos estes quatro pontos pertencem a S de modo que estão contidos em S os segmentos $\overline{ab'}$ e $\overline{a'b}$. Sendo q o ponto de intersecção de tais segmentos, como lhes é interior, os pontos $q_0$ e $q_0^*$ que, conforme a alínea j) são, sobre as rectas ab′ e a′b, origem comum de semi-rectas contidas em e disjuntas de S não podem coincidir com q de modo que se volta a cair no primeiro caso. Regressando às notações de tal caso, considerem-se as rectas $p_0 p'_0$, $p p_0$ e $p p'_0$ que dividem o plano em sete regiões a numerar de $Q_1$ a $Q_7$ de modo que $Q_1$ seja o interior do triângulo de vértices p, $p_0$ e $p'_0$, $Q_2$, $Q_4$ e $Q_6$, respectivamente, os interiores dos ângulos verticalmente opostos aos ângulos $p_0 p p'_0$, $p p_0 p'_0$ e $p_0 p'_0 p$ e $Q_3$, $Q_5$ e $Q_7$ os interiores das regiões adjacentes a $Q_2$ e $Q_4$, $Q_4$ e $Q_6$ e $Q_6$ e $Q_2$. Por outras palavras, as regiões ficam numeradas pela ordem por que se situam em redor do triângulo no sentido $p p_0 p'_0$ a partir do ângulo verticalmente oposto a $p_0 p p'_0$.

Atendendo a que as semi-rectas de origens em $p_0$ e $p'_0$ que têm o ponto p estão contidas em S e em $R^2 \setminus S$ as semi-rectas opostas, que fazem parte da fronteira de $Q_5$ — ressalvada a dúvida quanto aos pontos $p_0$ e $p'_0$ — vê-se que $Q_1$ e $Q_2$ estão contidas em S e $Q_5$ em $R^2 \setminus S$. Seja r um ponto de $Q_4$ e t o ponto médio do segmento $\overline{p_0 p'_0}$. Como r e t estão de lados opostos da recta $p p_0$, a recta r t, a partir de r, intersecta sucessivamente, num ponto $s \neq p_0$, a semi-recta de $p p_0$ de origem em $p_0$ que está contida em $R^2 \setminus S$, depois em t o interior do lado $\overline{p_0 p'_0}$ do triângulo e depois em certo ponto, u, o interior do lado $\overline{p p'_0}$ do mesmo triângulo. Como $u \in S$, se r pertencesse a S, o mesmo sucederia a todo o segmento $\overline{r u}$, o que não pode ser porque $s \in R^2 \setminus S$. Toda a região $Q_4$ — e anàlogamente $Q_6$ — está contida em $R^2 \setminus S$, o mesmo sucedendo ao semiplano aberto de origem em $p_0 p'_0$ que não tem p visto ser formado por $Q_4$, $Q_5$, $Q_6$ e pelas duas semi-rectas da fronteira de $Q_5$.

Seja agora v um ponto de $Q_3$ e conduza-se por v uma paralela a $p_0 p'_0$, que intersecte $p p_0$ em certo ponto x pertencente a S. A semi-recta de origem v que passa pelo ponto médio, z, de $\overline{p_0 x}$, também pertencente a S, intersecta $p_0 p'_0$ e o semiplano aberto mencionado no parágrafo anterior. Se v pertencesse a $R^2 \setminus S$, o mesmo sucederia a z, logo $Q_2$ — e anàlogamente $Q_7$ — está contida em S e o mesmo sucede ao semiplano formado por $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ e $Q_7$ e pelas semi-rectas que separam estas regiões.

m) *Cada semiespaço de* $(R^2, \Gamma)$ *é constituído por um semiplano aberto ou fechado ou pela reunião de um semiplano aberto com uma semi-recta, aberta ou fechada, da sua recta de origem.*

Semiplanos abertos ou fechados são evidentemente semiespaços. Fora destes casos, se o semiespaço tem algum ponto da recta de origem, contém, conforme a alínea j) uma semi-recta dessa recta, estando a semi-recta oposta contida no seu complementar. E o conjunto assim formado é, como fàcilmente se vê, um semiespaço de $R^2$.

n) *Se um semiespaço de* $(R^2, \Gamma)$ *está contido noutro, as respectivas rectas de origem são paralelas e os respectivos semiplanos estão orientados no mesmo sentido.*

o) *Dados dois semiespaços de* $(R^2, \Gamma)$ *com rectas de origem paralelas e semiplanos orientados no mesmo sentido, um deles está contido no outro se se verificar uma das seguintes condições:*

$\alpha$) *as rectas de origem são distintas,*

$\beta$) *as rectas de origem coincidem e um dos semiplanos é aberto,*

$\gamma$) *as rectas de origem coincidem e um dos semiplanos é fechado,*

$\delta$) *As rectas de origem coincidem e as semi-rectas da recta de origem que fazem parte dos semiespaços estão dirigidas no mesmo sentido.*

p) *Um semiespaço de* $(R^2, \Gamma)$ *é simples se e só se é aberto ou fechado,* aliás estaria contido no respectivo semiplano fechado, o qual contém o semiespaço formado pela reunião do respectivo semiplano aberto com a semi-recta da recta de origem oposta à que faz parte do semiespaço dado.

q) *Cada orientação de* $(R^2, \Gamma)$ *é constituída pelos semiespaços que têm rectas de origem paralelas e semiplanos dirigidos no mesmo sentido.*

r) *Para cada corte no conjunto dos semiespaços simples de uma orientação existe o máximo dos semiespaços menores ou o mínimo dos semiespaços maiores.*

Como no conjunto dos semiespaços simples de cada orientação, totalmente ordenado por inclusão, cada semiplano fechado é imediatamente precedido de um aberto e cada aberto imediatamente seguido de um fechado, o corte pode ser efectuado imediatamente antes de um semiplano aberto, que é então o mínimo dos semiespaços maiores, imediatamente depois de um semiplano fechado, que será o máximo dos semiespaços menores, ou entre um semiplano aberto e o respectivo semiplano fechado, que neste caso são o máximo dos semiespaços menores e o mínimo dos maiores.

Na subestrutura da estrutura dada definida pelos semiespaços associados a um corte e pelos seus complementares — isto é, por todos os semiespaços nem abertos nem fechados que têm uma mesma recta de origem — todos os semiespaços são simples e agrupam-se em quatro orientações distintas e caracterizadas pelos sentidos do semiplano e da semi-recta que constituem cada semiespaço. Os hiperplanos de 1.ª ordem associados a cada corte são as respectivas rectas de origem; os hiperplanos de 2.ª ordem contidos em cada uma destas rectas são os seus pontos, que são ao mesmo tempo hiperplanos de 1.ª ordem nas estruturas induzidas pela estrutura dada nas referidas rectas.

A simplicidade da usual estrutura de convexidade de $R^2$ depende de certos factos que em geral se não verificam, em particular: não haver semiespaços não orientados; haver para cada corte um máximo semiespaço menor ou um mínimo semiespaço maior de modo que, salvo o caso de coincidirem, o respectivo hiperplano, não vazio, é a diferença entre dois semiespaços; finalmente nenhum hiperplano poder estar associado a dois cortes em orientações diferentes mas não opostas.

CAPÍTULO IV

# O AXIOMA DE REUNIÃO

Chamaremos «*axioma de reunião*», ou «*axioma* $\mathfrak{R}$» à condição seguinte:

**Axioma** $\mathfrak{R}$: *Se uma classe de conjuntos convexos for totalmente ordenada por inclusão, a reunião dos conjuntos que a constituem é ainda um conjunto convexo.*

**1.ª Proposição:** *Se se verifica o axioma de reunião, o conjunto vazio é convexo, de modo que a classe dos conjuntos convexos não é vazia.*

Considera-se com efeito abrangida pelo axioma $\mathfrak{R}$ a classe vazia de conjuntos convexos.

Seguem-se exemplos triviais de verificação e não-verificação do axioma $\mathfrak{R}$.

1.º Exemplo:

$$E = O, \Gamma = \{O\}.$$

2.º Exemplo:

$$E = O, \Gamma = O.$$

**2.ª Proposição:** *Se todas as classes, não vazias, de conjuntos convexos totalmente ordenadas por inclusão* *possuírem elemento máximo e se o conjunto vazio for convexo, verifica-se o axioma de reunião.*

Com efeito, se a classe de conjuntos convexos totalmente ordenada por inclusão é vazia, a reunião é O, convexo; de contrário é o seu elemento máximo, também convexo.

3.ª **Proposição:** *Se todas as classes de conjuntos convexos totalmente ordenadas por inclusão têm apenas um número finito de elementos e se o conjunto vazio é convexo, verifica-se o axioma de reunião.*

Porque então cada classe totalmente ordenada de conjuntos convexos que não seja vazia possui um elemento máximo.

4.ª **Proposição:** *Se há apenas um número finito de conjuntos convexos e entre eles figura o conjunto vazio, verifica-se o axioma de reunião.*

**O axioma de reunião, as estruturas e as subestruturas induzidas**

5.ª **Proposição:** *Para que uma estrutura de convexidade satisfaça o axioma de reunião, não é necessário que todas as suas subestruturas tenham, nem suficiente que alguma tenha, a mesma propriedade.*

O enunciado desta proposição significa que existem pares de estruturas de convexidade

$$((E, \Gamma), (E', \Gamma')),$$

tais que a primeira é subestrutura da segunda e que só uma delas verifica o axioma $\mathfrak{R}$. Basta com efeito considerar os dois exemplos seguintes.

3.º Exemplo:

$$E = O,\ \Gamma = \{O\}.$$

$$E' = O,\ \Gamma' = O.$$

Estas estruturas já foram consideradas nos exemplos 1.º e 2.º

4.º Exemplo:

$$E = N,\ \Gamma = \{0,\ \{1\},\ \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}, \ldots\}.$$

$$E_{,} = O,\ \Gamma' = \{0\}.$$

A segunda destas estruturas satisfaz o axioma de reunião como já se viu. Que a primeira o não satisfaz, verifica-se considerando a classe de conjuntos convexos totalmente ordenada por inclusão

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \ldots \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \ldots$$

cuja reunião, N, não é convexa.

6.ª **Proposição:** *Se numa estrutura de convexidade se verifica o axioma de reunião, o mesmo sucede nas suas subestruturas incluídas nos diversos subconjuntos do espaço.*

Com efeito, uma família, totalmente ordenada por inclusão, de conjuntos convexos da subestrutura incluída em A é ainda uma família com as mesmas propriedades na estrutura dada. A reunião dos conjuntos que a constituem é pois convexa e está ainda incluída em A. Não se verifica uma propriedade análoga para estruturas induzidas, como se vê pelo seguinte exemplo.

5.º Exemplo:

$$E = Z,$$

$$\Gamma = \{0, \{1, -1\}, \{1, 2, -2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n, -n\}, \ldots\}$$

$$A = N.$$

Na estrutura de convexidade $(E, \Gamma)$ verifica-se o axioma de reunião porque as únicas classes totalmente ordenadas por inclusão, de conjuntos convexos são, além da classe vazia, do tipo

$$O \subseteq \{1, 2, \ldots, n, -n\}$$

e pode aplicar-se então a 3.ª proposição.

Mas a estrutura induzida em A é uma das que se consideraram no 4.º exemplo e já aí se viu que não satisfazia o axioma $\mathfrak{R}$.

**7.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de reunião, a classe dos conjuntos convexos, totalmente ordenada por inclusão, constitui um conjunto parcialmente ordenado indutivo.*

Com efeito o axioma de reunião implica que cada parte totalmente ordenada daquele conjunto parcialmente ordenado admite um maiorante no próprio conjunto: a sua reunião.

Da proposição anterior e das propriedades dos conjuntos parcialmente ordenados indutivos que se mencionaram na introdução deduzem-se imediatamente as seguintes proposições.

**8.ª Proposição:** *Numa estrutura de convexidade que satisfaça o axioma de reunião, dada uma classe de conjuntos convexos totalmente ordenada por inclusão, existe um conjunto convexo máximo que os contém.*

**9.ª Proposição:** *Numa estrutura de convexidade que satisfaça o axioma de reunião, qualquer conjunto convexo está contido num conjunto convexo máximo.*

No capítulo I, proposições 13.ª e seguintes, estudaram-se propriedades dos conjuntos convexos máximos, em particular relações entre uma estrutura de convexidade e as subestruturas incluídas nos seus conjuntos convexos máximos. Nessas relações o papel do axioma $\mathfrak{R}$ é o seguinte. Em primeiro lugar, da proposição 16.ª desse capítulo deduz-se esta:

**10.ª Proposição:** *Com os dados da 15.ª proposição do primeiro capítulo, entre as estruturas de convexidade que satisfazem as condições* $\alpha$) *e* $\beta$) *aí mencionadas, há quando muito uma que verifique o axioma de reunião, a qual nesse caso coincide com a que se construiu na demonstração da mesma proposição. E a verificação do axioma só será possível quando todas as estruturas de convexidade dadas o verificarem.*

A última parte da proposição é consequência da 6.ª proposição. Mas não se trata de uma condição suficiente como se deduz do seguinte exemplo.

6.º Exemplo:

$E = Z$.

A família de conjuntos $(M_i : i \in I)$ é agora, com $n \in N$, dada por

$$M_n = \{1, 2, ..., n, -n\}.$$

Na estrutura $(M_n, \Gamma_n)$, é

$$\Gamma_n = \{O, \{1\}, \{1, 2\}, ..., \{1, 2, ..., n\}, M_n\}.$$

Esta estrutura, qualquer que seja n, verifica o axioma de reunião como se vê pela 4.ª proposição. Mas na estrutura $(E, \bigcup_{n \in N} \Gamma_n)$ existe a classe totalmente ordenada de conjuntos convexos

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq ... \subseteq \{1, 2, ..., n\} \subseteq ...$$

cuja reunião não é convexa.

Pelo contrário, no caso da reconstituição de uma estrutura de convexidade a partir de estruturas induzidas em vários subespaços, é destas para a estrutura definida em todo o espaço que se transmite a propriedade de verificarem o axioma de reunião.

**11.ª Proposição:** *Com os dados da 22.ª proposição do primeiro capítulo, se as estruturas de convexidade* $(A_i, \Gamma_i)$ *satisfazem a condição necessária e suficiente aí mencionada e verificam, todas elas, o axioma de reunião, a estrutura* $(A, \Gamma)$ *construída na demonstração da mesma proposição também satisfaz esse axioma.*

$\Gamma$ é o conjunto das reuniões $\bigcup_{j \in I} C_j$ em que a família $(C_j : j \in I)$ é constituída por conjuntos tais que $C_j \in \Gamma_j$ e que, quaisquer que sejam i e j,

a) $$A_i \cap C_j = A_j \cap C_i.$$

Seja $\{\mathfrak{F}_h : h \in H\}$ a classe de todas estas famílias e $U_h$ a reunião $\bigcup_{i \in I} C_{ih}$ correspondente à família $\mathfrak{F}_h$. Viu se na demonstração daquela 22.ª proposição que era

$$A_i \cap \bigcup_{j \in I} C_{jh} = C_{ih}.$$

Logo, se $U_{h_1} \subseteq U_{h_2}$, para cada índice i, $C_{ih_1} \subseteq C_{ih_2}$ e, dada uma classe $\{U_{h_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ totalmente ordenada por inclusão, as correspondentes classes $\{C_{ih_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ têm, para todos os valores de i, a mesma propriedade. Se as estruturas $(A_i, \Gamma_i)$ verificam o axioma $\mathfrak{R}$, as reuniões $C_i^* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_{ih_\lambda}$ são conjuntos convexos nas mesmas respectivas estruturas. Vejamos que também satisfazem a condição a):

$$A_i \cap C_j^* = A_i \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_{jh_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_i \cap C_{jh_\lambda}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_i \cap C_{ih_\lambda})$$

porque, por hipótese, os conjuntos $C_{jh_\lambda}$ satisfazem a condição a). Prosseguindo, vem

$$A_i \cap C_j^* = A_j \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_{ih_\lambda} = A_j \cap C_i^* .$$

Então $(C_i^* : i \in I)$ é uma das famílias $\mathfrak{F}_h$ e $C^* = \bigcup_{i \in I} C_i^*$ um dos conjuntos convexos da estrutura $(A, \Gamma)$. Mas

$$C^* = \bigcup_{i \in I} C_i^* = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_{ih_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{i \in I} C_{ih_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{h_\lambda}$$

de modo que a estrutura $(A, \Gamma)$ também satisfaz $\mathfrak{R}$.

**O axioma de reunião e os semiespaços simples**

**12.ª Proposição:** *Se se verifica o axioma de reunião, a reunião de qualquer classe de semiespaços sim-*

*ples de uma mesma orientação é um conjunto convexo.*

É consequência da 14.ª proposição do capítulo anterior. Mas a referida reunião não é necessàriamente um semiespaço, como se vê pelo seguinte exemplo.

7.º Exemplo:

$$E = N$$

$$\Gamma = \{\{2\}, \{2,3\}, \ldots, \{2,3,\ldots,n\}, \ldots, \{2,3,\ldots,n,\ldots\},$$
$$\{1,3,4,\ldots\}, \{1,4,5,\ldots\}, \ldots, \{1,n,n+1,\ldots\}, \ldots\}.$$

Todos os conjuntos convexos são semiespaços salvo $\{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e as classes de conjuntos convexos totalmente ordenadas por inclusão são subclasses de

$$\{2\} \subseteq \{2,3\} \subseteq \ldots \subseteq \{2,3,\ldots,n\} \subseteq \ldots \subseteq \{2,3,\ldots,n \ldots\}$$

ou de

$$\ldots, \{1, n+1, n+2, \ldots\} \subseteq \ldots \subseteq \{1,4,5,\ldots\} \subseteq \{1,3,4,\ldots\}.$$

Fàcilmente se vê que se verifica o axioma de reunião.

CAPÍTULO V

# O AXIOMA DE INTERSECÇÃO

## O axioma de intersecção e o de reunião

Chamaremos «axioma de intersecção» ou «axioma $\mathfrak{J}$» a condição seguinte.

**Axioma $\mathfrak{J}$:** *Dada uma qualquer classe de conjuntos convexos, a intersecção desses conjuntos é convexa.*

Considera-se abrangida por esta condição a intersecção de uma classe vazia de conjuntos convexos. Donde a proposição seguinte.

**1.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, o espaço é um conjunto convexo.*

**2.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, a classe dos conjuntos convexos não é vazia.*

**3.ª Proposição:** *Se o espaço é convexo, se os conjuntos convexos são em número finito e se a intersecção de dois conjuntos convexos distintos é convexa, verifica-se o axioma de intersecção.*

Basta recorrer a uma indução óbvia.

Exemplos triviais de verificação e não-verificação do axioma de intersecção são os exemplos 1.º e 2.º do capítulo anterior. No 1.º exemplo, em virtude da proposição anterior, no 2.º porque não se verifica a 1.ª proposição deste capítulo.

**4.ª Proposição:** *Os axiomas de intersecção e reunião são independentes um do outro.*

Acabou de se ver que se podem verificar ou não verificar conjuntamente. Os restantes casos aparecem nos exemplos seguintes.

1.º Exemplo:

$$E = \{a\}, \Gamma = \{O\}.$$

Não se verifica o axioma de intersecção porque E não é convexo mas verifica-se o axioma $\mathfrak{R}$ conforme a 3.ª proposição do capítulo anterior.

2.º Exemplo:

$$E = \{a\}, \Gamma = \{E\}.$$

Verifica-se o axioma de intersecção porque uma classe de conjuntos convexos, ou é vazia, ou é constituída apenas pelo conjunto E e em qualquer dos casos a intersecção dos conjuntos que a constituem é E, convexo. Mas não se verifica o axioma $\mathfrak{R}$ conforme a 1.ª proposição deste capítulo.

**5.ª Proposição:** *Sendo o espaço convexo, se não se verifica o axioma de intersecção, ou existem dois conjuntos convexos nenhum dos quais está contido no outro, ou existe uma classe de conjuntos convexos totalmente ordenada por inclusão com uma infinidade de elementos distintos.*

Com efeito, se, dados dois conjuntos convexos, sempre um deles estiver contido no outro, formarão todos uma classe totalmente ordenada por inclusão. Qualquer classe de conjuntos convexos terá a mesma propriedade e, se todas tivessem só um número finito de elementos distintos, verificar-se-ia o axioma de intersecção.

**6.ª Proposição:** *Sendo o espaço convexo e com menos de dois pontos verifica-se o axioma de intersecção.*

Com menos de dois pontos não há dois subconjuntos nenhum dos quais esteja contido no outro. Nem evidentemente uma infinidade de subconjuntos distintos.

### O axioma de intersecção, as subestruturas e as estruturas induzidas

**7.ª Proposição:** *Para que numa estrutura de convexidade se verifique o axioma de intersecção, não é necessário que todas as suas subestruturas tenham, nem suficiente que alguma tenha, a mesma propriedade.*

O significado desta proposição é semelhante ao da 5.ª do capítulo anterior e basta, anàlogamente, considerar os dois exemplos seguintes.

3.º Exemplo:

$$E = O,\ \Gamma = \{O\}.$$

$$E' = O,\ \Gamma' = O.$$

Estas estruturas já foram examinadas a seguir à primeira proposição deste capítulo.

4.º Exemplo:

$$E = \{a, b\},\ \Gamma = \{\{a\}. \{b\}\}.$$

$$E' = \{a\},\ \Gamma' = \{E'\}.$$

A segunda destas estruturas já foi considerada no 2.º exemplo. A primeira não verifica o axioma de intersecção porque, por exemplo, $\{a\} \cap \{b\}$ não é convexo.

**8.ª Proposição:** *Verificando-se numa estrutura de convexidade o axioma de intersecção, o mesmo sucede na subestrutura incluída e na estrutura induzida em qualquer subconjunto do espaço, contanto que naquela subestrutura haja conjuntos convexos.*

Sendo A o subespaço a considerar na estrutura $(E, \Gamma)$, qualquer classe não vazia de conjuntos convexos incluídos em A tem por intersecção um conjunto convexo com a mesma propriedade e qualquer classe de conjuntos do tipo $A \cap C_i$ em que, para $i \in I$, $C_i \in \Gamma$ tem por intersecção o conjunto $A \cap \bigcap_{i \in I} C_i$ em que também $\bigcap_{i \in I} C_i \in \Gamma$.

**9.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, é condição necessária e suficiente para que a subestrutura incluída num conjunto* A *coincida com a estrutura nele induzida, que esse conjunto,* A, *seja convexo.*

Se é convexo verifica-se a condição necessária e suficiente da 8.ª proposição do primeiro capítulo e se ela se verifica, $A = A \cap E$ é convexo.

A introdução do axioma de intersecção simplifica o problema da reconstituição de uma estrutura de convexidade a partir das subestruturas incluídas nos seus conjuntos convexos máximos. Com efeito, da 1.ª proposição deduz-se que nas estruturas que verifiquem este axioma só há um conjunto convexo máximo, o espaço. Mais pormenorizadamente é verdadeira a proposição seguinte.

**10.ª Proposição:** *Com os dados da 15.ª proposição do primeiro capítulo, entre as estruturas de convexi-*

*dade que satisfazem as condições* $\alpha$) *e* $\beta$) *aí mencionadas, há quando muito uma que verifique o axioma de intersecção e isto sucede quando e só quando apenas é dada uma estrutura de convexidade, definida em todo o conjunto dado e obedecendo já ao axioma de intersecção; a estrutura de convexidade construída na demonstração da mesma 15.ª proposição coincide então com a estrutura dada.*

A construção a que se aludiu conduz pois em geral a uma estrutura de convexidade que não verifica o axioma de intersecção, como no seguinte exemplo elementar.

5.º Exemplo:

$$E = \{a, b\}.$$

$$A_1 = \{a\},\ \Gamma_1 = \{A_1\}.$$

$$A_2 = \{b\},\ \Gamma_2 = \{A_2\}.$$

Nas estruturas dadas verifica-se o axioma de intersecção, mas não na estrutura $(A_1 \cup A_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Como no capítulo anterior, o caso das estruturas induzidas é diferente.

**11.ª Proposição:** *Com os dados da 22.ª proposição do primeiro capítulo, se as estruturas de convexidade* $(A_i, \Gamma_i)$ *satisfazem a condição necessária e suficiente aí mencionada e verificam, todas elas, o axioma de intersecção, a estrutura* $(A, \Gamma)$ *construída na demonstração da mesma proposição também satisfaz esse axioma.*

Com as mesmas notações que se usaram na demonstração da 11.ª proposição do capítulo anterior, sendo $\{\mathfrak{F}_{h_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ uma classe de famílias $(C_j : j \in I)$ que satisfazem a condição a) aí referida, e sendo $U_{h_\lambda}$ a reunião $\bigcup_{i \in I} C_{ih_\lambda}$ correspondente à família $\mathfrak{F}_{h_\lambda}$, isto é, um dos conjuntos convexos da estrutura $(A, \Gamma)$, vem

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_{h_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{i \in I} C_{ih_\lambda} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_{ih_\lambda}.$$

Designando por $C_i^*$ a intersecção $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_{ih_\lambda}$, que é um conjunto convexo de $(A_i, \Gamma_i)$ porque se supôs que esta estrutura satisfazia o axioma de intersecção, veja-se que $(C_j^* : j \in I)$ verifica a referida condição a). Com efeito,

$$A_i \cap C_j^* = A_i \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_{jh_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_i \cap C_{jh_\lambda}) =$$

$$= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_j \cap C_{ih_\lambda})$$

porque a família $(C_{jh_\lambda} : j \in I)$ satisfaz a mesma condição. Prosseguindo vem

$$A_i \cap C_j^* = A_j \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_{ih_\lambda} = A_j \cap C_i^*$$

como se desejava. Então $\bigcup_{i \in I} C_i^*$ é um conjunto convexo de $(A, \Gamma)$ e o mesmo sucede, como se desejava, à intersecção $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_{h_\lambda}$.

**O axioma de intersecção e os envólucros convexos**

A introdução do axioma de intersecção simplifica e sistematiza notàvelmente as noções introduzidas no segundo capítulo. Por exemplo, a 4.ª proposição desse capítulo passa a significar o mesmo que a 2.ª, a 5.ª o mesmo que a 3.ª e esta admite, em certo sentido, como recíproca a proposição seguinte.

**12.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, todo o envólucro convexo é convexo.*

À 10.ª proposição daquele capítulo corresponde agora a seguinte.

**13.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, é condição necessária e suficiente para que um conjunto seja convexo, que coincida com o seu envólucro convexo.*

A operação $\varkappa$ de passagem ao envólucro convexo caracteriza agora a classe $\Gamma$ dos conjuntos convexos, visto que esta coincide com a das intersecções de tais conjuntos. É então possível definir uma estrutura de convexidade a partir da respectiva operacão $\varkappa$, utilizando apenas as propriedades enunciadas nas proposições 1.ª, 6.ª e 7.ª do capítulo segundo.

**14.ª Proposição:** *Dado um operador $\varkappa$ que a cada parte do conjunto* E *faz corresponder uma parte do mesmo conjunto e que verifica as seguintes condições:*

$b_1$) *o resultado da aplicação de $\varkappa$ a um conjunto contém esse conjunto, isto é:*

$$\varkappa(A) \supseteq A$$

$b_2$) *$\varkappa$ é idempotente, isto é:*

$$\varkappa[\varkappa(A)] = \varkappa(A),$$

$b_3$) *$\varkappa$ é crescente em sentido lato relativamente à inclusão de conjuntos, isto é:*

$$se\ A \subseteq B,\ \varkappa(A) \subseteq \varkappa(B),$$

*então existe uma única estrutura de convexidade definida em* E *que satisfaça o axioma de intersecção e em que o operador dado coincida com o de passagem ao envólucro convexo.*

Vejamos que uma estrutura de convexidade com as propriedades indicadas é aquela em que

$$\Gamma = \{X : \varkappa(X) = X\}.$$

Seja $\{C_i : i \in I\}$ uma classe de conjuntos convexos nesta estrutura, isto é, tais que $\varkappa(C_i) = C_i$. Como para cada valor de i, $\bigcap_i C_i \subseteq C_i$, $\varkappa(\bigcap_i C_i) \subseteq \varkappa(C_i) = C_i$ e portanto $\varkappa(\bigcap_i C_i) \subseteq \bigcap_i C_i$. Mas da condição $b_1$) resulta que estes conjuntos são iguais e verifica-se o axioma de intersecção na estrutura $(E, \Gamma)$. Por outro lado nesta estrutura $\hat{A}$ é a intersecção de todos os X que satisfazem a $\varkappa(X) = X \supseteq A$. Para todos estes conjuntos, de $b_3$) vem $\varkappa(X) \supseteq \varkappa(A)$, donde $X \supseteq \varkappa(A)$ e $\hat{A} \supseteq \varkappa(A)$. Mas de $b_1$) e $b_2$) deduz-se que $\varkappa(A)$ é um dos referidos conjuntos X de modo que $\hat{A} \subseteq \varkappa(A)$ e $\hat{A} = \varkappa(A)$ como se desejava. Finalmente, se houvesse outra estrutura $(E, \tilde{\Gamma})$ nas mesmas condições com $\Gamma \neq \tilde{\Gamma}$, sendo C um conjunto pertencente a $\Gamma$ mas não a $\tilde{\Gamma}$ e designando por $\hat{C}$ e $\tilde{\hat{C}}$ e os seus envólucros convexos nas duas estruturas, iguais porque ambos iguais a $\varkappa(C)$, a 13.ª proposição daria $\hat{C} = C$ e $\tilde{\hat{C}} \neq C$, o que é absurdo.

Note-se que a condição $b_1$) poderia ser substituída por outra aparentemente mais fraca — $\varkappa[\varkappa(A)] \subseteq \varkappa(A)$ — mas que não se pode dispensar como se verifica por meio do exemplo seguinte.

6.º Exemplo:

$E = \{a, b\}$.

Se $X \subseteq E$, $\varkappa(X) = E$ excepto no seguinte caso

$$\varkappa(O) = \{a\}.$$

Se uma estrutura de convexidade satisfizesse o axioma de intersecção e a condição $\hat{X} = \varkappa(X)$ para todo o X, da proposição 13.ª viria $\Gamma = \{E\}$ donde $\hat{X} = E$ para todo o X, contra a definição de $\varkappa(O)$.

Às proposições 18.ª e 33.ª do capítulo segundo correspondem as seguintes.

**15.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, se uma reunião de conjuntos,* $\bigcup_i A_i$, *for convexa, serão iguais todos os conjuntos que figuram na fórmula* a) *do capítulo segundo, isto é,*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \hat{A}_i = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^{\wedge} = \Big(\bigcup_{i \in I} \hat{A}_i\Big)^{\wedge};$$

*se apenas for convexa a reunião dos seus envólucros convexos, serão iguais apenas os três últimos.*

**16.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção, se uma reunião de conjuntos,* $\bigcup_i A_i$, *for convexa, coincide com* $\sum_i A_i$.

**O axioma de intersecção e a operação $\sigma$**

Também esta operação pode servir para caracterizar uma estrutura de convexidade a partir das propriedades expressas na alínea c) da 19.ª proposição e na 36.ª proposição do capítulo segundo.

**17.ª Proposição:** *Dada uma operação, $\theta$, com dois dados e um resultado, todos subconjuntos de* E, *que verifique as seguintes propriedades:*

$c_1$) *quaisquer que sejam os subconjuntos* A *e* B *de* E,

$$A \theta B \supseteq A \cup B$$

$c_2$) *quaisquer que sejam os subconjuntos* A, B, C *e* D, *se* A *e* B *estão contidos em* $C \theta D$, *o mesmo sucede a* $A \theta B$,

*existe uma única estrutura de convexidade definida em* E *que verifique o axioma de intersecção e seja tal que a operação $\sigma$ correspondente a essa estrutura coincida com a operação, $\theta$, dada.*

Dada a operação $\theta$ com as propriedades indicadas, defina-se

$$\varkappa(A) = A \theta O$$

e mostre-se que esta operação $\varkappa$ satisfaz as condições $b_1$), $b_2$) e $b_2$) referidas na 14.ª proposição. Quanto a $b_1$), $\varkappa(A) = A \theta O \supseteq A \cup O$ em virtude de $c_1$). Quanto a $b_2$), $\varkappa[\varkappa(A)] = \varkappa(A) \theta O = (A \theta O) \theta O \supseteq A \theta O$ pelo mesmo motivo; mas, de $c_2$), atendendo a que $A \theta O$ e O estão contidos em $A \theta O$, vem $(A \theta O) \theta O \subseteq A \theta O$ donde $\varkappa[\varkappa(A)] = \varkappa(A)$. Quanto a $b_3$), a conclusão vem igualmente de $c_2$), atendendo a que tanto O como, se $A \subseteq B$, A estão contidos em $B \theta O$. Então, como se viu na proposição 14.ª, a classe dos conjuntos X tais que $\sigma(X) = X$, isto é, a classe $\Gamma = \{X : X \theta O = X\}$, define em E uma estrutura de convexidade em que $\hat{X} = \varkappa(X) = X \theta O$. Nessa estrutura $A \sigma B = (A \cup B) \theta O \supseteq A \theta B$ porque tanto A como B estão contidos em $A \cup B$ e portanto em $(A \cup B) \theta O$; mas como $A \cup B$ e O estão contidos em $A \theta B$, o mesmo sucede a $A \sigma B$ e vem, como se desejava, $\sigma = \theta$. Veja-se agora que nesta estrutura se verifica o axioma de intersecção: dada uma classe $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos convexos, como na demonstração da 14.ª proposição, o conjunto convexo $(\bigcap_{i \in I} C_i)\,\theta\, O$ está, em vista de $c_2$), contido em cada um dos conjuntos $C_i \,\theta\, O$ e portanto na intersecção $\bigcap_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} (C_i \,\theta\, O)$; mas $\bigcap_{i \in I} C_i$ também está contida, em vista de $c_1$), em $(\bigcap_{i \in I} C_i)\,\theta\, O$. Estes dois conjuntos coincidem e $\bigcap_{i \in I} C_i$ é convexa verificando-se o axioma de intersecção. Resta provar que não pode haver outra estrutura $(E, \ddot{\Gamma})$, com $\Gamma \neq \ddot{\Gamma}$, em que a correspondente operação $\sigma$, $\ddot{\sigma}$, coincida com $\theta$ e que satisfaça igualmente a $\mathfrak{J}$. Seja $C$ um conjunto pertencente a $\Gamma$. $C = \hat{C} = C \sigma O = C \,\theta\, O$. Mas $C \,\theta\, O = C \,\ddot{\sigma}\, O$, igual ainda, porque se supõe que $(E, \ddot{\Gamma})$ satisfaz o axioma de intersecção, a $\ddot{C} \in \ddot{\Gamma}$. Então $\Gamma \subseteq \ddot{\Gamma}$, e recìprocamente, de modo que as duas estruturas coincidem.

## O axioma de intersecção e os semiespaços

**18.ª Proposição:** *Se se verifica o axioma de intersecção, a intersecção de qualquer classe de semiespaços é um conjunto convexo.*

Mas não é necessàriamente um semiespaço — como se vê pelo seguinte exemplo, análogo ao 7.º exemplo do capítulo anterior — mesmo que se trate de semiespaços simples de uma mesma orientação.

7.º Exemplo:

$E = N$

$\Gamma = \{O, \{1\}, \{2\}, \{2.3\}, \dots \{2, 3, \dots, n\}, \dots, \{1, 3, 4, \dots\},$
$\{1, 4, 5, \dots\}, \dots, \{1, n, n+1, \dots\}, \dots, E\}.$

Numa intersecção de conjuntos convexos, se há conjuntos da família

$$O, \{2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{2, 3, \ldots, n\}, \ldots$$

podem substituir-se todos pelo menor deles; do mesmo modo se há conjuntos da família

$$E, \{1, 3, 4, \ldots\}, \{1, 4, 5, \ldots\}, \ldots, \{1, n, n+1, \ldots\}, \ldots$$

A intersecção reduz-se pois a uma intersecção de um dos tipos seguintes, em que $m \geqslant 2$, $n \geqslant 3$.

$$\{1\} \cap \{2, 3, \ldots, m\} \cap \{1, n, n+1, \ldots\},$$

$$\{1\} \cap O \cap \{1, n, n+1, \ldots\},$$

$$\{1\} \cap \{2, 3, \ldots, m\},$$

$$\{1\} \cap O,$$

$$\{2, 3, \ldots, m\} \cap \{1, n, n+1, \ldots\},$$

$$O \cap \{1, n, n+1, \ldots\},$$

$$\{1\} \cap \{1, n, n+1, \ldots\},$$

ou a um único conjunto convexo. Em qualquer dos casos é convexa mas, se for $\{1\}$, não é um semiespaço. E é $\{1\}$ por exemplo, a intersecção

$$\{1, 3, 4, \ldots\} \cap \{1, 4, 5, \ldots\} \cap \ldots \cap \{1, n, n+1, \ldots\} \cap \ldots$$

de semiespaços simples igualmente orientados.

**19.ª Proposição:** *Verificando-se o axioma de intersecção não há semiespaços ou o conjunto vazio é convexo.*

Como intersecção de um semiespaço com o seu complementar.

## CAPÍTULO VI

## CONSEQUÊNCIAS DOS DOIS PRIMEIROS AXIOMAS

Em todo este capítulo suporemos verificados os axiomas de reunião e de intersecção.

### Consequências quanto aos semiespaços

**1.ª Proposição:** *Uma reunião de semiespaços simples de uma mesma orientação é, ou um semiespaço simples igualmente orientado, ou o espaço.*

Conforme a 12.ª proposição do quarto capítulo, tal reunião é um conjunto convexo, cujo complementar é a intersecção dos semiespaços complementares dos semiespaços dados, logo convexo. A reunião dada, se $\neq$ E, é pois um semiespaço, que já na 29.ª proposição do capítulo terceiro se viu ser então simples e igualmente orientado.

**2.ª Proposição:** *Uma intersecção de semiespaços simples de uma mesma orientação é, ou um semiespaço simples e igualmente orientado, ou o conjunto vazio.*

A demonstração é semelhante à da proposição anterior, usando a 18.ª proposição do capítulo quinto, depois a 17.ª do terceiro para se provar que o complementar da intersecção dada é reunião de semiespaços pertencentes à orientação oposta, e finalmente a 12.ª do capítulo quarto e a 29.ª do terceiro.

Em particular verificam-se as proposições seguintes.

**3.ª Proposição:** *A intersecção de todos os semiespaços simples duma orientação que contêm — ou contêm pròpriamente — um conjunto,* A, *não vazio é todo o espaço ou um semiespaço simples e igualmente orientado que contém o referido conjunto* A.

**4.ª Proposição:** *A reunião de todos os semiespaços simples duma orientação que estão contidos — ou estão pròpriamente contidos — num conjunto,* A, *diferente do espaço é o conjunto vazio ou um semiespaço simples e igualmente orientado que está contido no referido conjunto* A.

Considerando em vez de A o complementar de A, obtém-se uma variante da proposição anterior.

**5.ª Proposição:** *A reunião de todos os semiespaços simples duma orientação que não intersectam um conjunto não vazio é o conjunto vazio ou um semiespaço simples, igualmente orientado, que também não intersecta o referido conjunto.*

As considerações precedentes podem aplicar-se em particular ao caso em que A é um semiespaço S. Se a orientação dada não é a de S, a reunião e a intersecção referidas nas proposições 4.ª e 3.ª são respectivamente o conjunto vazio e o espaço todo porque nenhum dos semiespaços da orientação dada pode conter nem estar contido em S. Se se trata da orientação de S, obtêm-se os semiespaços a que se refere a definição seguinte.

**1.ª Definição:** *Sendo* S *um semiespaço, designam-se por* $S^+$ *e* $S^-$, *a intersecção de todos os semiespaços simples orientados como* S *e que o contêm pròpria-*

*mente e a reunião de todos os semiespaços simples com a orientação de S que nele estão pròpriamente contidos. A notação estende-se ao caso de S ser vazio ou todo o espaço.*

**6.ª Proposição:** *Conforme a orientação de que se trata, $O^+$ é o seu mínimo semiespaço simples, se existir, aliás vazio; $E^-$, anàlogamente, é o máximo semiespaço simples ou o espaço.*

Os conjuntos $S^-$ e $S^+$ mesmo que S seja um semiespaço simples, podem ser distintos de S ou coincidir, um ou ambos com S.

1.º Exemplo:

$$E = Z$$

$\Gamma$ é o conjunto de todos os subconjuntos de E de um dos tipos A (m, n), B (m), C (m, m'), D (m', n') e E (n'), com m, m', n e n' naturais ou nulos, a seguir definidos

$$A(m, m') = \{m, m+1, \ldots, n\} \quad \text{com} \quad 1 \leqslant m \leqslant n$$

$$B(m) = \{m, m+1, \ldots\} \quad \text{com} \quad 1 \leqslant m$$

$$C(m\, m') = \{\ldots, -m'-1, -m'\} \cup \{m, m+1, \ldots\} \quad \text{com} \quad 1 \leqslant m, 0 \leqslant m'$$

$$D(m', n') = \{-n', \ldots, -m'-1, -m'\} \quad \text{com} \quad 0 \leqslant m' \leqslant n'$$

$$E(m') = \{\ldots, -m'-1, -m'\} \quad \text{com} \quad 0 \leqslant m'.$$

Vejamos quais são os semiespaços desta estrutura de convexidade. $Z \setminus A(m, n)$ só é convexo se $m = 1$ e $Z \setminus A(1, n) = C(n+1, 0)$, $Z \setminus B(m)$ só é convexo se $m = 1$ e $Z \setminus B(1) = E(0)$, $Z \setminus C(m, m')$ só é convexo se $m = 1$ ou $m' = 0$ sendo $Z \setminus C(1, m') = D(0, m'-1)$ e $Z \setminus C(m, 0) = A(1, m-1)$, $Z \setminus D(m', n')$ só é convexo se $m' = 0$ e

$Z \setminus D(0, n') = C(1, n'+1)$ e $Z \setminus E(m')$ só é convexo se $m' = 0$ sendo $Z \setminus E(0) = B(1)$. Os semiespaços são pois os conjuntos $A(1, n)$, $B(1)$, $C(1, m')$ e os seus complementares, respectivamente $C(n+1, 0)$, $E(0)$ e $D(0, m'-1)$.

Para se investigar se na estrutura de convexidade se verifica o axioma de reunião, convém elaborar uma lista dos pares de conjuntos convexos diferentes de 0 e E que satisfazem a relação de inclusão. Desde que os inteiros não negativos $m_1$, $m_2$, $n_1$, $n_2$, $m'_1$, $m'_2$, $n'_1$ e $n'_2$ satisfaçam a certas desigualdades que não vale a pena indicar são válidas relações dos tipos seguintes e só destes

$$A(m_1, n_1) \subseteq A(m_2, n_2)$$

$$A(m_1, n_1) \subseteq B(m_2)$$

$$A(m_1, n_1) \subseteq C(m_2, m'_2)$$

$$B(m_1) \subseteq B(m_2)$$

$$B(m_1) \subseteq C(m_2, m'_2)$$

$$C(m_1, m'_1) \subseteq C(m_2, m'_2)$$

$$D(m'_1, n'_1) \subseteq C(m_2, m'_2)$$

$$D(m'_1, n'_1) \subseteq E(m'_2)$$

$$E(m'_1) \subseteq C(m_2, m'_2)$$

$$E(m'_1) \subseteq E(m'_2).$$

Então, numa classe de conjuntos convexos totalmente ordenada por inclusão, se houver um conjunto do tipo $C(m, n)$ todos os que o contêm serão do mesmo tipo; não havendo conjuntos do tipo $C(m, n)$ mas havendo algum do tipo $B(m)$ ou do tipo $E(m')$ — e necessàriamente de um único destes tipos — todos os que o contêm serão ainda do mesmo tipo; finalmente, não havendo nenhum conjunto de nenhum dos tipos $B(m)$, $C(m, m')$ e $E(m')$, a classe só pode conter conjuntos ou do tipo $A(m, n)$ ou do tipo

$D(m', n')$. O axioma $\mathfrak{R}$ verificar-se-á então se uma classe totalmente ordenada de conjuntos de um único daqueles cinco tipos admitir como reunião um conjunto convexo. Fàcilmente se vê que, se essa classe só possui conjuntos do tipo $A(m, n)$, a sua reunião é do mesmo tipo ou do tipo $B(m)$ e que têm uma propriedade análoga os conjuntos de tipo $D(m', n')$ e $E(m')$. Por outro lado, uma reunião de conjuntos do tipo $B(m)$ — ou do tipo $C(m, m')$, ou do tipo $E(m')$ — é um conjunto do mesmo tipo, ficando assim provada a verificação do axioma $\mathfrak{R}$.

Quanto ao axioma de intersecção, comece-se por observar que as intersecções de conjuntos do tipo $A(m, n)$ são vazias ou conjuntos do mesmo tipo e que o mesmo se passa com os conjuntos de tipo $B(m)$, $D(m', n')$ ou $E(m')$. As intersecções de conjuntos de tipo $C(m, m')$ ou são vazias ou de um dos tipos $B(m)$, $C(m, m')$ e $E(m')$. Deste modo, para se provar que qualquer intersecção de conjuntos convexos é convexa, basta considerar o caso das intersecções em que há, quando muito um conjunto de cada um dos cinco tipos. Mas se figuram na intersecção um conjunto de um dos tipos $A(m, n)$ ou $B(m)$ e outro de um dos tipos $D(m', n')$ ou $E(m')$ a intersecção é vazia, por outro lado uma intersecção do tipo $A(m_1, n_1) \cap B(m_2)$ é vazia ou do tipo $B(m)$ e uma intersecção do tipo $D(m'_1, n'_1) \cap E(m'_2)$ é vazia ou do tipo $E(m')$. Os vários casos de intersecções de conjuntos em que figure quando muito um de cada tipo conduzem a um resultado vazio a não ser talvez quando se reduzem a um dos quatro casos seguintes: $A(m_1, n_1) \cap C(m_2, m'_2)$, $B(m_1) \cap C(m_2, m'_2)$, $D(m'_1, n'_1) \cap C(m_2, m'_2)$ e $E(m'_1) \cap C(m_2, m'_2)$. Nestes quatro casos o resultado é, respectivamente, vazio ou do tipo $A(m, n)$, do tipo $B(m)$, vazio ou do tipo $D(m', n')$ e do tipo $E(m')$ ficando assim provado que se verifica o axioma de intersecção.

Considere-se agora o semiespaço $S = B(1) = N$, que é simples como se pode verificar pela lista de relações de inclusão. Os semiespaços que nele estão pròpriamente contidos são todos os A (1, n), cuja reunião é B (1). Os semiespaços que o contêm pròpriamente são os C (1, m'), cuja intersecção é ainda B (1). É pois $S^- = S = S^+$.

2.º Exemplo:

$$E = N$$

$\Gamma$ é a classe constituída pelos conjuntos O, {1}, {2}, {1, 2} e por todos os dos tipos seguintes

$$A(m, n) = \{m, m+1, \ldots, n\} \quad \text{com} \quad 3 \leqslant m \leqslant n$$

$$B(m) = \{m, m+1, \ldots\} \quad \text{com} \quad 3 \leqslant m$$

$$C(m) = \{2, m, m+1, \ldots\} \quad \text{com} \quad 3 \leqslant m$$

$$D(m) = \{1, 2, m, m+1, \ldots\} \quad \text{com} \quad 3 \leqslant m.$$

D (3) = E. Anàlogamente ao que se fez no exemplo anterior, as relações de inclusão possíveis — excluídos O e E — são

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\} \quad e \quad \{1\} \subseteq \{1, 2\},$$

$\{2\} \subseteq C(m)$ e $\{1, 2\} \subseteq D(m)$ para todos os valores de m, e, quando $m_1$, $m_2$, $n_1$ e $n_2$ satisfazem certas condições, que A ($m_1$, $n_1$) pode estar contido em A ($m_2$, $n_2$), B ($m_2$), C ($m_2$) ou D ($m_2$), que B ($m_1$) pode estar contido em B ($m_2$), C ($m_2$) ou D ($m_2$), que C ($m_1$) pode estar contido em C ($m_2$) ou D ($m_2$) e que D ($m_1$) pode estar contido em D ($m_2$). Por outro lado, reuniões de conjuntos que sejam todos do tipo A (m, n) são do mesmo tipo ou do tipo B (m), reuniões de conjuntos que sejam todos do tipo B (m) — ou do tipo C (m) ou do tipo D (m) — dão conjuntos do mesmo tipo. Então, se numa classe, totalmente ordenada por inclusão, houver conjuntos do tipo D (m), a reunião desses conjuntos é do mesmo tipo, logo convexa; se não houver conjuntos do tipo D (m) mas houver ou um conjunto do tipo C (m) ou o conjunto {1, 2}, a reunião é do tipo C (m) ou {1, 2}; não havendo conjuntos de nenhum dos três tipos já considerados, se figurarem na classe dada ou $\{1\}$ ou $\{2\}$ ou um conjunto do tipo B (m) a reunião será $\{1\}$ ou $\{2\}$ ou um conjunto do tipo B (m); finalmente, se houver só conjuntos do tipo A (m, n) a reunião será do mesmo tipo ou do tipo B (m). Verifica-se portanto $\mathfrak{R}$.

Quanto às intersecções, note-se que se um dos conjuntos dados for O, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ ou A (m, n), quaisquer que sejam os restantes, a intersecção é convexa e que, se houver conjuntos de um só dos tipos B (m), C (m) e D (m), a intersecção será, respectivamente, vazia ou do tipo B (m), $\{2\}$ ou dc tipo C (m), $\{1, 2\}$ ou do tipo D (m). Note-se ainda que a intersecção de um conjunto do tipo B (m) com um conjunto do tipo C (m) ou D (m) é sempre do tipo B (m) e que a de um conjunto do tipo D (m) com um do tipo C (m) é sempre deste tipo. Esgotam-se assim todos os casos de intersecções de conjuntos convexos e verifica-se o axioma de intersecção.

Os semiespaços, todos simples, são $\{1\}$, $\{1, 2\}$ e os conjuntos do tipo A (3, n) com os seus complementares C (3), B (3) e D (n + 1). Pondo $S = B(3)$, só um semiespaço contém pròpriamente S, $C(3) = S^+$ e estão pròpriamente contidos em S todos os A (3, n) cuja reunião é $S = S^-$.

3.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d\}.$$

$$\Gamma = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, E\}.$$

$\mathfrak{R}$ verifica-se pelas razões indicadas na 3.ª proposição do quarto capítulo e $\mathfrak{J}$, como pacientemente se pode verificar, recorrendo à 3.ª proposição do capítulo anterior. Os semiespaços são $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ e os seus complementares. Para $S = \{a, b\}$, vem $S^- = \{a\}$ e $S^+ = \{a, b, c\}$.

**7.ª Proposição:** *Para qualquer semiespaço, S, $S^-$ é ou o conjunto vazio ou um semiespaço simples contido* *em* S *e* $S^+$ *é ou o espaço ou um semiespaço simples que contém* S.

Consequência das proposições 3.ª e 4.ª

**8.ª Proposição:** *O complementar de* $S^+$ *é* $(E \setminus S)^-$ *e o complementar de* $S^-$ *é* $(E \setminus S)^+$.

Com efeito, pondo $\overline{S} = E \setminus S$ e designando por $T_2$ um qualquer semiespaço simples que contenha pròpriamente S e por $\overline{T}_2$ o seu complementar, os semiespaços simples $\overline{T}_2$ são precisamente todos os que estão pròpriamente contidos em $\overline{S}$ de modo que

$$E \setminus S^+ = E \setminus \bigcap_{T_2 \supset S} T_2 = \bigcup_{T_2 \supset S} (E \setminus T_2) =$$

$$\bigcup_{\overline{T}_2 \subset \overline{S}} \overline{T}_2 = \overline{S}^- = (E / S)^-$$

e anàlogamente para $E \setminus S^-$.

**2.ª Definição:** *Um semiespaço,* S, *diz-se «fechado» se coincide com* $S^+$, *«aberto» se coincide com* $S^-$. *A definição estende-se aos casos em que* S *é vazio ou o espaço.*

O espaço é sempre fechado e só é aberto se não existe, na orientação considerada, semiespaço máximo. Anàlogamente para o conjunto vazio.

**9.ª Proposição:** *Um semiespaço aberto ou fechado é simples.*

Da 7.ª proposição deduz-se que, se S é fechado, como é distinto de E e coincidente com $S^+$, é um semiespaço simples. E anàlogamente no caso de S ser aberto.

**10.ª Proposição:** *O complementar de um semiespaço fechado é um semiespaço aberto e reciprocamente.*

Se $S = S^+$, $E \setminus S = E \setminus S^+ = (E \setminus S)^-$ conforme a 8.ª proposição e anàlogamente no caso de ser $S = S^-$.

**11.ª Proposição:** *Sendo* S *um semiespaço, se* $S^+$ *é aberto, é também fechado; se* $S^-$ *é fechado, é também aberto.*

Quanto a $S^+$, se $S^+ = S$, S, ou $S^+$, é fechado, quer seja ou não aberto Suponha-se então que $S^+ \supset S$. Se o semiespaço simples T está contido pròpriamente em $S^+$, está contido em S (¹), aliás conteria S pròpriamente e conteria $S^+$. Recìprocamente, se T está contido em S, está pròpriamente contido em $S^+$ porque $S \subset S^+$. São então equivalentes as condições $T \subset S^+$ e $T \subseteq S$ e

$$S^{+-} = \bigcup_{T \subset S^+} T = \bigcup_{T \subseteq S} T \subseteq S \subset S^+$$

$S^+$ não é pois aberto neste caso e se é aberto está-se no caso anterior e é fechado. Anàlogamente para $S^-$.

**12.ª Proposição:** *A proposição anterior é ainda válida no caso de* S *ser vazio ou todo o espaço.*

Por exemplo, se $S = E$, $S^+ = E = E^+$, fechado; se $S = O$, $S^+ = O^+$ é vazio ou o semiespaço simples mínimo, fechado no primeiro caso e não aberto no segundo porque $O^{+-} = O \neq O^+$. Anàlogamente para $S^-$.

**13.ª Proposição:** *Se na classe dos semiespaços simples orientados como* S *não há semiespaços pròpria-*

---

(¹) Note-se que, se $S^+ = E$, não há semiespaços simples que contenham S pròpriamente e T, simples, está ainda contido em S.

*mente contidos em* S *ou se há um que é o maior deles,* $S^-$ *é distinto de* S, *isto é,* S *não é aberto.*

**14.ª Proposição:** *Se na classe dos semiespaços simples orientados como* S *não há semiespaços que contenham* S *pròpriamente ou se há um que é o menor deles,* $S^+$ *é distinto de* S, *isto é,* S *não é fechado.*

Com efeito, nas primeiras hipóteses destas proposições é $S^- = O$ e $S^+ = E$, nas segundas $S^-$ e $S^+$ são, respectivamente, esse maior e esse menor semiespaço.

**15.ª Proposição:** *Se numa orientação há dois semiespaços simples, consecutivos quanto à relação de inclusão,* $T_1$ *e* $T_2$, *com* $T_1 \subset T_2$, *é* $T_1{}^+ = T_2$ *e* $T_2{}^- = T_1$ *de modo que nem* $T_1$ *é fechado nem* $T_2$ *é aberto.*

**3.ª Definição:** *Dado um semiespaço simples,* T, *de uma orientação, diz-se que a orientação é «densa em* T*» se* T *é aberto ou fechado. Diz-se que uma orientação é «densa» se é densa em todos os seus semiespaços simples.*

**4.ª Definição:** *Dado um semiespaço simples,* T, *de uma orientação, diz-se que a orientação é «completa em* T*» se* T *não é ao mesmo tempo aberto e fechado. Diz-se que uma orientação é «completa» se é completa em todos os seus semiespaços simples.*

**16.ª Proposição:** *Se se verificarem as hipóteses das proposições 13.ª e 14.ª, a orientação é densa e completa no semiespaço, que agora se supõe simples,* S.

**17.ª Proposição:** *Uma orientação em que há apenas um número finito de semiespaços simples não é densa mas é completa.*

**18.ª Proposição:** *Numa orientação densa e completa, todo o semiespaço simples é ou aberto ou fechado.*

**19.ª Proposição:** *Numa orientação densa, $S^+$ é fechado e $S^-$ aberto. A proposição vale quer S seja semiespaço, ou vazio, ou o espaço.*

Consequência das proposições 11.ª e 12.ª se $S^+$ e $S^-$ são semiespaços. Se $S^+ = E$, $S^{++} = E$ e $S^+$ é fechado. Se $S^+ = O$, $S = O = O^+$ e $S^+$ também é fechado. Anàlogamente para $S^-$.

**20.ª Proposição:** *Na classe dos semiespaços simples duma orientação densa e completa, cada semiespaço aberto é, quanto à relação de inclusão, imediatamente seguido por um semiespaço fechado excepto se se tratar do semiespaço máximo; cada semiespaço fechado é imediatamente precedido por um semiespaço aberto excepto se se tratar do semiespaço mínimo.*

Considere-se um semiespaço, $T_1$, aberto. $T_1 = T_1^-$, logo $T_1 \neq T_1^+$ e $T_1^+$ é E ou outro semiespaço simples, $T_2$, imediatamente posterior a $T_1$ de modo que $T_2^- = T_1 \neq T_2$, donde $T_2 = T_2^+$. Recìprocamente, partindo de $T_2^+ = T_2$, chega-se a $T_2^- \neq O$ ou, pondo $T_1 = T_2^-$, a $T_1 = T_1^-$.

**21.ª Proposição:** *Se uma orientação é densa em* T, *o mesmo sucede à oposta em* $\overline{T}$. *Anàlogamente se a orientação for completa em* T.

Consequências da 10.ª proposição.

**Consequências quanto aos hiperplanos**

Dado um corte $(\Theta_1, \Theta_2)$ no conjunto dos semiespaços simples duma orientação, a reunião, $U_1$, dos semiespaços menores e a intersecção, $U_2$, dos maiores, salvo os casos extremos de serem vazias ou abrangerem todo o espaço, são ainda semiespaços simples da mesma orientação, que têm de pertencer a $\Theta_1$ ou a $\Theta_2$, mas nunca a ambas estas classes. Como $U_1$ deve estar contida em $U_2$, há sete casos possíveis:

a₁) $U_1 = O$, donde $\Theta_1 = O$ e $U_2 = O$. O hiperplano associado a $(\Theta_1, \Theta_2)$ é vazio.

a₂) $O = U_1 \subset U_1 = O^+ \neq E$. $\Theta_1$ é do mesmo modo vazia, mas $U_2$ é agora um semiespaço de $\Theta_2$ e pode escrever-se $\Theta_1 = \{T : T \subset U_2\}$ e $\Theta_2 = \{T : T \supseteq U_2\}$ em que a variável T representa um semiespaço simples da orientação dada. O correspondente hiperplano é $U_2 \neq O$.

a₃) $U_1 = U_2 \in \Theta_1$ e diferente de O e de E. Pode escrever-se $\Theta_1 = \{T : T \subseteq U_1\}$ e $\Theta_2 = \{T : T \supset U_1\}$ e o hiperplano associado a $(\Theta_1, \Theta_2)$ é vazio. $U_1$ é fechado.

a₄) $U_1 = U_2 \in \Theta_2$ e diferente de O e de E. Pode escrever-se $\Theta_1 = \{T : T \subset U_1\}$ e $\Theta_2 = \{T : T \supseteq U_1\}$ e do mesmo modo o hiperplano é vazio. $U_1$ é aberto.

a₅) $O \neq U_1 \subset U_2 \neq E$. $U_1 \in \Theta_1$ e $U_2 \in \Theta_2$. $U_1$ e $U_2$ são semiespaços simples consecutivos na orientação dada, tanto se pode pôr $\Theta_1 = \{T : T \subseteq U_1\}$ e $\Theta_2 = \{T : T \supset U_1\}$ como $\Theta_1 = \{T : T \subset U_2\}$ e $\Theta_2 = \{T : T \supseteq U_2\}$ e o hiperplano, não vazio, é $U_2 \setminus U_1$. $U_1$ não é fechado nem $U_2$ aberto.

a₆) $O \neq E^- = U_1 \subset U_2 = E$. $\Theta_2 = O$ e $U_1$ é um semiespaço pertencente a $\Theta_1$. $\Theta_1 = \{T : T \subseteq U_1\}$ e $\Theta_2 = \{T : T \supset U_1\}$. O hiperplano é $E \setminus U_1 \neq O$.

a₇) $U_1 = E$ e $U_2 = E$ donde $\Theta_2 = O$. O correspondente hiperplano é vazio.

Da análise destes casos deduzem-se duas proposições.

**22.ª Proposição:** *Qualquer hiperplano não vazio está associado a um corte em que os semiespaços sim-*

*ples menores são os que estão contidos em determinado semiespaço simples e os maiores os que contêm pròpriamente esse semiespaço ou a um corte em que os semiespaços menores são os que estão pròpriamente contidos em certo semiespaço simples e os maiores os que o contêm.*

23.ª **Proposição:** *Para cada orientação, salvo eventualmente o caso dos hiperplanos extremos, iguais ao semiespaço simples mínimo e ao complementar do semiespaço simples máximo — se tais semiespaços existirem —, todo o hiperplano não vazio está associado a um corte entre dois semiespaços simples consecutivos, o menor não fechado e o maior não aberto, e é igual à diferença entre esses semiespaços.*

Recìprocamente, como sucede independentemente da verificação dos axiomas $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{R}$, a diferença entre dois semiespaços simples consecutivos é um hiperplano não vazio.

24.ª **Proposição:** *Numa orientação densa, salvo o caso dos hiperplanos extremos mencionado na proposição anterior, todo o hiperplano não vazio é diferença entre dois semiespaços consecutivos, o maior fechado e o menor aberto.*

Já na 10.ª definição do capítulo terceiro se tratou de hiperplanos não vazios tangentes a semiespaços compostos da mesma orientação e também nesse lugar se referiu que o hiperplano não vazio construído, a partir de um dado ponto, na demonstração da 34.ª proposição do mesmo capítulo se poderia chamar tangente ao ponto considerado.

A introdução dos axiomas $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{R}$ permite retomar o problema da existência de hiperplanos tangentes não vazios em condições mais gerais.

5.ª **Definição:** *Dado um semiespaço composto,* S, *chama-se «hiperplano tangente a* S*» ou «hiperplano* *fronteiro de* S» *a diferença* $S^+ \setminus S^-$. *A definição pode estender-se, em relação a cada orientação, aos casos em que* S *é vazio ou é todo o espaço.*

**25.ª Proposição:** *Para cada orientação, o hiperplano tangente ao espaço é o complementar do semiespaço simples máximo,* $E^-$, *se tal semiespaço existe. Aliás é vazio.*

**26.ª Proposição:** *Para cada orientação o hiperplano tangente ao conjunto vazio é o semiespaço simples mínimo,* $O^+$, *se tal semiespaço existe. Aliás é vazio.*

**27.ª Proposição:** *A 5.ª definição deste capítulo coincide com a 10.ª do capítulo terceiro.*

Com efeito, se S é composto, os semiespaços simples que contêm S são precisamente os que contêm S pròpriamente.

Conforme a 36.ª proposição do capítulo terceiro, o hiperplano tangente a um semiespaço composto intersecta-o e não é vazio. O caso dos semiespaços simples é diferente. Em primeiro lugar porque se o semiespaço, T, não é aberto nem fechado, $T^+ \setminus T^-$ não é um hiperplano mas a reunião de dois hiperplanos disjuntos, $T^+ \setminus T$ e $T \setminus T^-$, ambos legítimos pretendentes ao título de hiperplano tangente; em segundo lugar porque se T é aberto e fechado, $T^+ \setminus T^-$ é vazio. Por isso se considera apenas o caso seguinte.

6.ª Definição: *Dada uma orientação densa e completa no seu semiespaço simples* T, *chama-se «hiperplano tangente a» ou «fronteiro de* T» *a diferença* $T^+ \setminus T^-$.

**28.ª Proposição:** *Sendo* T *um semiespaço simples duma orientação densa e completa em* T, *o hiperplano* *tangente a T é um hiperplano não vazio e intersecta T se e só se T é fechado, estando neste caso contido em T.*

Como a orientação é densa, $T^+ \setminus T^-$ é $T^+ \setminus T$ ou $T \setminus T^-$, portanto um hiperplano, não vazio porque a orientação é completa. A sua intersecção com T é vazia no primeiro caso — T aberto — e igual ao próprio hiperplano no segundo — T fechado.

**29.ª Proposição:** *Numa orientação densa os hiperplanos tangentes a semiespaços simples consecutivos são iguais.*

Sendo $T_1$ e $T_2$ semiespaços simples consecutivos, $T_1{}^+ = T_2$ e $T_1$ não é fechado, de modo que é aberto, $T_1{}^- = T_1$, e $T_1{}^+ \setminus T_1{}^- = T_2 \setminus T_1$. Anàlogamente se vê que $T_2{}^+ \setminus T_2{}^- = T_2 \setminus T_1$.

**30.ª Proposição:** *Sendo T um semiespaço simples duma orientação densa e completa em T, salvo o caso de T ser o semiespaço simples máximo ou mínimo, o hiperplano tangente a T é a diferença entre um semiespaço fechado e um semiespaço aberto.*

Consequência das proposições 24.ª e 28.ª

***7.ª Definição:*** *Dada uma orientação densa e completa e dado um conjunto, A, não vazio nem igual ao espaço, chama-se «hiperplano tangente superiormente a A na orientação referida» ao hiperplano tangente à intersecção de todos os semiespaços simples dessa orientação que contêm A.*

Esta intersecção, como se viu na 3.ª proposição, é todo o espaço ou um semiespaço simples. Anàlogamente, em vista da 5.ª proposição, quanto à definição seguinte.

8.ª **Definição**: *Dada uma orientação densa e completa e dado um conjunto,* A, *não vazio nem igual ao espaço, chama-se «hiperplano tangente inferiormente a* A *na orientação referida» ao hiperplano tangente à reunião de todos os semiespaços simples dessa orientação que não intersectam* A.

31.ª **Proposição**: *Hiperplanos tangentes a semiespaços complementares são iguais.*

Com efeito, conforme a 8.ª proposição,

$$S^+ = E \setminus (E \setminus S^+) = E \setminus (E \setminus S)^-,$$

$$S^- = E \setminus (E \setminus S^-) = E \setminus (E \setminus S)^+$$

e

$$S^+ \setminus S^- = [E \setminus (E \setminus S)^-] \setminus [E \setminus (E \setminus S)^+] =$$

$$= (E - S)^+ \setminus (E - S)^-.$$

Note-se que, sendo S e $E \setminus S$ semiespaços de orientações opostas, se subentende que os expoentes + e — se referem, num dos membros a uma orientação e no outro a outra. Com este esclarecimento sobre o significado de igualdades como $E^+ \setminus E^- = O^+ \setminus O^-$, a proposição continua válida quando S é vazio ou o espaço.

Daqui em diante supõe-se que as orientações são densas e completas.

32.ª **Proposição**: *O hiperplano tangente inferiormente a* A *coincide com o hiperplano tangente superiormente a* A *na orientação oposta.*

De facto

$$\bigcup_{T \cap A = O} T = E \setminus (E \setminus \bigcup_{T \subseteq E \setminus A} T) = E \setminus \bigcap_{T \subseteq E \setminus A} (E \setminus T) =$$

$$= E \setminus \bigcap_{\bar{T} \supseteq A} \bar{T}$$

em que $\overline{T} = E \setminus T$. A reunião dos semiespaços que não intersectam A é pois complementar da intersecção dos semiespaços, da orientação oposta, que contêm A e a conclusão resulta da proposição anterior, atendendo ao esclarecimento final no caso de estes conjuntos serem O e E.

**33.ª Proposição:** *Sendo* A *um semiespaço, o hiperplano tangente superiormente a* A *coincide com o hiperplano fronteiro de* A *referido na definição 5.ª ou 6.ª*

Se A é um semiespaço simples, a intersecção dos semiespaços simples que contêm A é A. Se A é composto, a mesma intersecção é $A^+$, fechado conforme a proposição 19.ª Então $A^{++} = A^+$ e $A^{+-}$ é vazio ou o espaço ou um semiespaço simples imediatamente anterior a $A^+$. Se $A^{+-} = O$, não há semiespaços simples pròpriamente contidos em $A^+$, nem portanto em A; $A^- = O$ e $A^{++} \setminus A^{+-} = A^+ \setminus A^-$. Se $A^{+-} = E$, $A^+ = E$ de modo que A contém qualquer semiespaço simples. Então, tanto $A^-$ como $A^{+-}$ são a reunião de todos os semiespaços simples de orientação dada e, como $A^{++} = E$, vem $A^{++} / A^{+-} = A^+ \setminus A^-$, o que se pretendia provar.

**34.ª Proposição:** *Sendo* A *um semiespaço, o hiperplano tangente inferiormente a* A *é o semiespaço simples mínimo, se tal semiespaço existir ou o conjunto vazio.*

**35.ª Proposição:** *Sendo* A *um conjunto com um só elemento os hiperplanos tangentes superiormente e inferiormente a* A *coincidem e coincidem com o hiperplano tangente ao ponto que se referir a seguir à 10.ª definição do capítulo terceiro.*

Como A tem só um ponto, qualquer semiespaço simples, ou contém A, ou não intersecta A de modo que a intersecção e a reunião a partir das quais se definem os hiperplanos tangentes superiormente e inferiormente são semiespaços simples, distintos porque um contém A e o outro não intersecta A, consecutivos quanto à relação de inclusão — ou, eventualmente, o espaço e o semiespaço simples máximo ou o semiespaço simples mínimo e o conjunto vazio. Em qualquer dos casos, como a orientação é densa, de acordo com a 29.ª proposição, coincidem os hiperplanos tangentes a ambos esses semiespaços ou conjuntos. E como o corte definido por esses semiespaços consecutivos — ou pelo semiespaço simples máximo e pelo espaço, ou pelo conjunto vazio e pelo semiespaço mínimo — coincide com o corte a que se associava o hiperplano tangente ao ponto dado, como no capítulo terceiro se definiu, também esse hiperplano coincide com os outros dois.

Considere-se finalmente a seguinte consequência importante, embora elementar, dos axiomas $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{I}$.

**36.ª Proposição:** *Todo o hiperplano é convexo.*

CAPÍTULO VII

# O AXIOMA DE TOTALIZAÇÃO

## Diversas formas deste axioma

Chama-se «*axioma de totalização*» — porque algumas das suas consequências, aliás dependentes também do axioma de intersecção, estabelecerão que certas reuniões de conjuntos convexos são convexas — ou «axioma $\mathfrak{T}$» a condição seguinte:

**Axioma $\mathfrak{T}$:** *Se um conjunto convexo está contido na reunião de uma classe não vazia de conjuntos convexos, nesta reunião está também contido um conjunto convexo que contém a reunião do primeiro com a intersecção dos conjuntos convexos da referida classe.*

Isto é, sendo $C_0$ convexo e $\{C_i : i \in I\}$ com $I \neq O$ uma classe de conjuntos, se $C_0 \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} C_i$, existe um conjunto convexo, C, tal que

$$\bigcup_{i \in I} C_i \supseteq C \supseteq C_0 \cup \bigcap_{i \in I} C_i.$$

**1.ª Proposição:** *É equivalente ao axioma de totalização a condição seguinte:*

$t_1$) *Dados um conjunto convexo e uma classe não vazia de conjuntos convexos nenhum dos quais* *contém o conjunto dado, se este conjunto está contido na reunião dos conjuntos pertencentes à referida classe, nessa reunião está também contido um conjunto convexo que contém a reunião do primeiro com a intersecção dos conjuntos convexos daquela classe.*

É óbvio que o axioma $\mathfrak{T}$ implica $t_1$). Recìprocamente, com as mesmas notações da proposição anterior salva a restrição de 0 não pertencer a I, dados $C_0$ e $\{C_i : i \in I\}$ com $C_0 \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$, a tese do axioma $\mathfrak{T}$ é consequência de $t_1$) se nenhum dos conjuntos $C_i$ contém $C_0$; se, por exemplo, $C_0 \subseteq C_{i_0}$, o próprio conjunto $C_{i_0}$ pode desempenhar o papel de C.

A condição $t_1$) pode simplificar a verificação do axioma $\mathfrak{T}$ por dispensar a consideração dos casos em que algum dos $C_i$ contém $C_0$, em particular dos casos em que $C_0$ é vazio ou tem um só ponto — porque, assim, estando contido em $\bigcup_{i \in I} C_i$, está contido em algum dos $C_i$ — ou em que um dos $C_i$ é todo o espaço. E evidentemente também não é necessário considerar os casos em que $\bigcup_{i \in I} C_i$ for convexa.

**2.ª Proposição:** *É condição necessária, mas não suficiente, para que seja válido numa estrutura de convexidade o axioma de totalização que se verifique a condição seguinte:*

$t_2$) *Dados um conjunto convexo e uma classe não vazia de conjuntos convexos tais que, de todos os conjuntos dados, nenhum está contido noutro, se o primeiro conjunto está contido na reunião dos da referida classe, nessa reunião está também contido um conjunto convexo que contém a reunião daquele primeiro conjunto com a intersecção dos conjuntos pertencentes à classe dada.*

É óbvio que o axioma $\mathfrak{T}$ implica $t_2$). Que a recíproca não é verdadeira, deduz-se do exemplo seguinte:

1.º Exemplo:

$$E = N$$

$$\Gamma = \{\{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \ldots, \{1, 3, 4, \ldots, m\}, \ldots, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots, \{1, 2, 3, \ldots, n\}, \ldots, N \setminus \{1\}\},$$

onde m e n designam números naturais. Não é válido o axioma $\mathfrak{T}$ porque

$$N \setminus \{1\} \subseteq \{1, 2\} \cup \{1, 3\} \cup \{1, 3, 4\} \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \{1, 3, 4, \ldots m\} \cup \ldots$$

mas nenhum conjunto convexo contém

$$N \setminus \{1\} \cup (\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{1, 3, 4\} \cap \ldots$$
$$\ldots \cap \{1, 3, 4, \ldots, m\} \cap \ldots) = (N \setminus \{1\}) \cup \{1\} = N.$$

Verifica-se no entanto a condição $t_2$) porque uma classe de conjuntos convexos tais que nenhum deles esteja contido noutro só pode ser constituída por $N \setminus \{1\}$, por um conjunto do tipo $\{1, 3, 4, \ldots, m\}$ e por um conjunto do tipo $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ com $n < m$. O primeiro destes conjuntos não está contido na reunião dos outros dois;

$$\{1, 3, 4, \ldots, m\} \subseteq (N \setminus \{1\}) \cup \{1, 2, 3, \ldots, n\} = N$$

mas

$$\{1, 3, 4, \ldots, m\} \cup [(N \setminus \{1\}) \cap \{1, 2, 3, \ldots, n\}] =$$
$$= \{1, 3, 4, \ldots, m\} \cup \{2, 3, \ldots, n\} = \{1, 2, 3, \ldots, m\},$$

que é convexo; anàlogamente

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq (N \setminus \{1\}) \cup \{1, 3, 4, \ldots, m\} = N,$$

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \cup [(N \setminus \{1\}) \cap \{1, 3, 4, \ldots, m\}] =$$

$$= \{1, 2, 3, \ldots, m\}.$$

Adiante se verá que, em presença de outro axioma, já $t_2$) é equivalente ao axioma $\mathfrak{T}$.

3.ª **Proposição:** *São equivalentes ao axioma de totalização as condições seguintes:*

$t_3$) *Dados um conjunto,* A, *e uma classe, não vazia, de conjuntos,* $\{B_i : i \in I\}$, *cuja reunião,* $\bigcup_{i \in I} B_i$, *é convexa, qualquer que seja a família,* $(C_i : i \in I)$, *de conjuntos convexos que contenham as respectivas reuniões* $A \cup B_i$, *existe um subconjunto convexo,* C, *da reunião,* $\bigcup_{i \in I} C_i$, *dos conjuntos dessa família que contém a reunião,* $A \cup \bigcup_{i \in I} B_i$, *de todos os conjuntos dados;*

$t_4$) *Dados um conjunto,* A, *e uma classe, não vazia, de conjuntos,* $\{B_i : i \in I\}$, *tais que todos estes conjuntos são dois a dois disjuntos e que a reunião,* $\bigcup_{i \in I} B_i$, *dos conjuntos da classe dada é convexa, qualquer que seja a família,* $(C_i : i \in I)$ *de conjuntos convexos que contenham as respectivas reuniões* $A \cup B_i$, *existe um subconjunto convexo,* C, *da reunião,* $\bigcup_{i \in I} C_i$, *dos conjuntos dessa família que contém a reunião,* $A \cup \bigcup_{i \in I} B_i$, *de todos os conjuntos dados.*

Mostre-se primeiro que o axioma $\mathfrak{T}$ implica $t_3$). Dados $A$ e $\{B_i : i \in I\}$ nas condições de $t_3$), vê-se que $A \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i$ e que $\bigcup_{i \in I} B_i$ é um conjunto convexo contido em $\bigcup_{i \in I} C_i$. $(C_i : i \in I)$ é uma família e não uma classe de conjuntos convexos mas a classe $\Gamma^*$ constituída pelos conjuntos, $C^*$, que são membros de $(C_i : i \in I)$ é também formada por conjuntos convexos cuja reunião e intersecção coincidem com $\bigcup_{i \in I} C_i$ e $\bigcap_{i \in I} C_i$. Então $\bigcup_{i \in I} B_i$ e $\Gamma^*$ estão nas condições da hipótese do axioma $\mathfrak{T}$ e existe um subconjunto convexo da reunião dos conjuntos $C^*$, isto é, de $\bigcup_{i \in I} C_i$ que contém $\bigcap_{i \in I} C_i \cup \bigcup_{i \in I} B_i$, contendo portanto $A \cup \bigcup_{i \in I} B_i$.

Que $t_2$) implica $t_4$), é óbvio, restando provar que $t_4$) implica o axioma $\mathfrak{T}$. Dados $C_0$ e $\{C_i : i \in I\}$ com $C_0 \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$, ponha-se $A^* = \bigcap_{i \in I} C_i$ e $\Delta^* = \{C_i : i \in I\} \cup \{C_0 \setminus C_i : i \in I\}$. Considere-se agora, para cada ponto $c$ de $C_0$, o conjunto $B^*(c)$ formado pela intersecção de todos os conjuntos pertencentes a $\Delta^*$ que possuem o ponto $c$: note-se que existe pelo menos um tal conjunto porque $c \in C_0 \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$ e que, pelo mesmo motivo sempre $B^*(c) \subseteq C_0$, vindo $\bigcup_{c \in C_0} B^*(c) = C_0$. Se $c_1$ e $c_2$ são pontos distintos de $C_0$, $B^*(c_1)$ e $B^*(c_2)$ ou coincidem ou são disjuntos; com efeito, se $B^*(c_1) \neq B^*(c_2)$ e, para fixar ideias, existe um ponto, $p$, pertencente a $B^*(c_1)$ mas não a $B^*(c_2)$, existe um conjunto $B_2^* \in \Delta^*$ tal que $c_2 \in B_2^*$, $p \in C_0 \setminus B_2^*$ e também $c_1 \in C_0 \setminus B_2^*$ — aliás $c_1$ pertenceria a $B_2^*$, $B^*(c_1)$ estaria contido em $B_2^*$ e não teria o ponto $p$ — de modo que $B^*(c_1) \subseteq C_0 \setminus B_2^*$, $B^*(c_2) \subseteq B_2^*$ e $B^*(c_1) \cap B^*(c_2) = O$. Considere-se agora a classe $\Delta = \{B : \bigvee_{c} B = B^*(c)\}$ e ponha-se $A = A^* \setminus C_0$. Os conjuntos pertencentes a $\Delta$ e o conjunto $A$ são dois a dois disjuntos e cada conjunto $B = B^*(c)$ está contido pelo menos em um dos conjuntos $C_i$. Seja $C_{i_B}$ um dos tais conjuntos. $C_{i_B}$ contém $\bigcap_{i \in I} C_i \cup B = A^* \cup B \supseteq A \cup B$. Se se verifica $t_4)$, como $A$, $\Delta$ e $(C_{i_B} : B \in \Delta)$ são um conjunto, uma classe de conjuntos e uma família de conjuntos convexos nas requeridas condições, existe um subconjunto convexo de $\bigcup_{B \in \Delta} C_{i_B}$, $C$, que contém $A \cup \bigcup_{B \in \Delta} B$. Então também

$$\bigcup_{i \in I} C_i \supseteq C \supseteq A \cup \bigcup_{B \in \Delta} B = (A^* \setminus C_0) \cup \bigcup_{c \in C_0} B^*(c) =$$

$$= (A^* \setminus C_0) \cup C_0 = A^* \cup C_0$$

donde

$$\bigcup_{i \in I} C_i \supseteq C \supseteq \bigcap_{i \in I} C_i \cup C_0$$

como se desejava provar.

**4.ª Proposição:** *Se o espaço tem menos de três pontos, verifica-se o axioma de totalização.*

Neste caso, recordando as considerações que seguem a demonstração da 1.ª proposição, $C_0$ é vazio, ou tem um só ponto, ou é todo o espaço. Nos dois primeiros casos está contido em um dos conjuntos $C_i$; no último a reunião destes conjuntos é também todo o espaço e é convexa.

**5.ª Proposição:** *Se na estrutura de convexidade há menos de três conjuntos convexos, verifica-se o axioma de totalização.*

Recorrendo à condição $t_1)$, vê-se que neste caso a sua hipótese é sempre falsa de modo que a condição se verifica.

**Independência em relação aos axiomas anteriores**

**6.ª Proposição:** *Os axiomas de reunião, intersecção e totalização são completamente independentes.*

Isto é, há exemplos dos oito casos possíveis de verificação ou não-verificação de cada um dos axiomas. Como se viu no começo do capítulo quinto, os dois primeiros exemplos desse capítulo e os dois primeiros do anterior abrangem os quatro casos de verificação e não-verificação dos axiomas $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{J}$ e em todos eles se verifica o axioma $\mathfrak{T}$ por força da proposição anterior. Exemplos dos quatro casos restantes em que o axioma $\mathfrak{T}$ não se verifica são os seguintes.

1.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d\}.$$

$$\Gamma = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}.$$

Esta estrutura satisfaz o axioma de reunião em virtude da 4.ª proposição do capítulo quarto e o axioma de intersecção como se vê recorrendo à 3.ª proposição do capítulo quarto. Pondo $C_1 = \{a, b\}$, $C_2 = \{a, c\}$ e $C_0 = \{b, c\}$ vê-se que não é válido o axioma $\mathfrak{T}$.

2.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d, e\}.$$

$$\Gamma = \{\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, E\}.$$

Conforme a 1.ª proposição do capítulo quarto não se verifica o axioma de reunião; a verificação de $\mathfrak{J}$ pode observar-se como no exemplo anterior e a não-verificação de $\mathfrak{T}$ pondo $C_1 = \{a, b, d\}$, $C_2 = \{a, c, d\}$ e $C_0 = \{b, c, d\}$.

3.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c\}.$$

$$\Gamma = \{O, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

O axioma de reunião é satisfeito em virtude da 4.ª proposição do capítulo quarto; o axioma de intersecção não se verifica porque E não é convexo, nem o axioma $\mathfrak{T}$ como se vê pondo $C_1 = \{a, b\}$, $C_2 = \{a, c\}$ e $C_0 = \{b, c\}$.

4.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c\}.$$

$$\Gamma = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

É análogo ao anterior, só diferindo por não ser válido o axioma de reunião visto não ser O convexo.

**O axioma de totalização, as subestruturas e as estruturas induzidas**

**7.ª Proposição:** *Para que se verifique o axioma de totalização não é necessário que o mesmo suceda em todas as suas subestruturas nem suficiente que se verifique em alguma.*

Com notações análogas às da 5.ª proposição do capítulo quarto e da 7.ª do quinto, basta considerar os exemplos seguintes.

5.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c\}, \ \Gamma = \mathfrak{S}(E),$$

$$E' = \{a, b, c\},$$

$$\Gamma' = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

A primeira destas estruturas satisfaz evidentemente ao axioma de totalização; a segunda, que não satisfaz, já foi considerada no exemplo anterior.

6.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c\},$$

$$\Gamma = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

$$E' = \{a, b, c\},$$

$$\Gamma' = \{\{a, b\}\}.$$

A primeira destas estruturas acaba de ser considerada no exemplo anterior; a segunda satisfaz ao axioma de totalização em vista da 5.ª proposição.

**8.ª Proposição:** *Se numa estrutura de convexidade se verifica o axioma de totalização, o mesmo sucede nas subestruturas incluídas nos diversos subconjuntos do espaço.*

Com efeito, dados um conjunto convexo e uma classe de conjuntos convexos da subestrutura incluída no subespaço E', tais conjuntos são também convexos na estrutura de convexidade definida em E e o conjunto convexo C que, segundo o axioma $\mathfrak{T}$, aí existe e satisfaz certas relações de inclusão é também convexo e satisfaz na subestrutura incluída em E' as mesmas relações porque está contido na reunião dos conjuntos da classe dada, que está contida em E'.

**9.ª Proposição:** *Para subestruturas induzidas, não se verifica propriedade análoga à da proposição anterior.*

Basta com efeito considerar o seguinte exemplo.

7.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$\Gamma = \{\{a, b, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, f\}\}$$

$$E' = \{a, b, c\}.$$

A subestrutura induzida em E′ é definida pela classe $\Gamma' = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ e já no 4.º exemplo se viu que o axioma $\mathfrak{T}$ não era satisfeito. Mas em $(E, \Gamma)$ nenhum conjunto convexo pode estar contido na reunião de uma classe de conjuntos convexos sem estar contido num desses conjuntos: é portanto sempre falsa a hipótese de $t_1$) verificando-se essa condição.

**Consequências do axioma de totalização**

**10.ª Proposição:** *Dados três conjuntos convexos,* $C_0$, $C_1$ *e* $C_2$, *se dois deles estão contidos na reunião dos restantes — por exemplo* $C_1 \subseteq C_2 \cup C_3$ *e* $C_2 \subseteq C_1 \cup C_3$ *— estas duas reuniões, que são iguais, contêm um conjunto convexo que contém a reunião desses conjuntos,* $C_1 \cup C_2$.

De facto, se $C_1 \subseteq C_2 \cup C_3$ e $C_2 \subseteq C_1 \cup C_3$, ambas estas reuniões coincidem com $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ e do axioma de totalização se deduz que existe um subconjunto convexo, C, de $C_2 \cup C_3$ que contém $C_1 \cup (C_2 \cap C_3)$. Mas este conjunto vem sucessivamente igual a $(C_1 \cup C_2) \cap (C_1 \cup C_3)$, a $(C_1 \cup C_2) \cap (C_2 \cup C_3)$ e a $C_2 \cup (C_1 \cap C_3)$, contendo por isso $C_2$ e $C_1 \cup C_2$ e sendo então igual a este conjunto.

**11.ª Proposição:** *Se cada um de três conjuntos convexos estiver contido na reunião dos outros, estas três reuniões, que são iguais, são um conjunto convexo.*

A conclusão da proposição anterior completa-se agora com $C_1 \cup C_2 = C_2 \cup C_3$ vindo portanto estes conjuntos iguais a C, convexo. Note-se que, independentemente do axioma de totalização, a reunião dos três conjuntos é convexa se, além da hipótese da proposição anterior, um dos três conjuntos estiver contido noutro: por exemplo, se $C_1 \subseteq C_2$, $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 = C_2$ e $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = C_2$, convexo.

**12.ª Proposição:** *Mesmo em presença dos axiomas de reunião e intersecção, não é possível deduzir do axioma de totalização uma proposição análoga à anterior mas relativa a quatro conjuntos convexos.*

Basta considerar o exemplo seguinte.

8.º EXEMPLO:

$$E = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\Gamma = \{O, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, E\}.$$

O axioma de reunião é válido em consequência da 4.ª proposição do capítulo quarto e o de intersecção pode verificar-se usando a 3.ª do quinto. Para o axioma de totalização pode utilizar-se a 1.ª proposição deste capítulo e ver que a hipótese da condição $t_1$) que aí figura só é satisfeita quando $C_0 = \{a, b, d\}$ ou $C_0 = \{a, c, d\}$; no primeiro caso a classe $\{C_i : i \in I\}$ é constituída por $\{a, b\}$ e $\{a, d\}$ ou $\{a, c, d\}$ ou ambos estes conjuntos e em qualquer hipótese $\bigcap_{i \in I} C_i = \{a\} \subseteq C_0$ podendo pôr-se $C = C_0$. O segundo caso, $C_0 = \{a, c, d\}$ é análogo. Atendendo às considerações que precedem esta proposição, vê-se que o único caso em que, de três conjuntos convexos, nenhum está contido noutro é o da classe $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$; mas também nenhum destes três conjuntos está contido na reunião dos outros dois e nunca se verifica a hipótese da proposição anterior senão nos casos triviais. Há no entanto quatro conjuntos convexos, {a, b}, {a, c}, {a, b, d} e {a, c, d}, cada um contido na reunião dos restantes, cuja reunião não é convexa.

Embora este exemplo se refira a uma estrutura de convexidade arbitràriamente definida num conjunto finito, pode reproduzir-se uma situação inteiramente análoga com a noção usual de convexidade de conjuntos de pontos do plano. Faça-se corresponder ao ponto a o interior de um semicírculo, aos pontos b e c as extremidades do diâmetro que é parte da sua fronteira e ao ponto d um ponto qualquer da sua semicircunferência; substitua-se {a} pelo referido interior do semicírculo e os restantes conjuntos convexos com dois e três pontos pelas reuniões deste interior com o correspondente ou os correspondentes pontos da sua fronteira. Fàcilmente se verifica que estes conjuntos são convexos no sentido usual mas que a reunião de todos eles não o é pois precisaria de incluir todos os pontos do diâmetro bc.

**13.ª Proposição:** *Dados três conjuntos quaisquer,* $A_1$, $A_2$ *e* $A_3$, *se as reuniões de um deles com os outros dois,* $A_1 \cup A_2$ *e* $A_1 \cup A_3$, *forem convexas, qualquer que seja o conjunto convexo,* $C_2$, *que contenha a reunião desses outros conjuntos,* $A_2 \cup A_3$, *existe um conjunto convexo,* C, *tal que*

$$A_1 \cup C_2 \supseteq C \supseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

Basta utilizar a condição $t_3$) pondo $A = A_3$, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, e $C_1 = A_1 \cup A_3$ e atendendo a que $C_2 \supseteq A_2 \cup A_3$. Nestas condições $C_1 \cup C_2 = A_1 \cup A_3 \cup C_2 = A_1 \cup C_2$.

**14.ª Proposição:** *Dados três conjuntos quaisquer, se as três reuniões que se podem formar tomando esses conjuntos dois a dois forem convexas, o mesmo sucede à reunião de todos.*

Isto é, se $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cup A_3$ e $A_2 \cup A_3$ forem convexas, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ também o é. Trata-se de uma consequência da proposição anterior, atendendo a que se pode agora pôr $C_2 = A_2 \cup A_3$.

**15.ª Proposição:** *Dada uma classe de conjuntos, se forem convexas todas as reuniões de dois quaisquer — distintos — desses conjuntos, também serão convexas todas as reuniões de mais de dois desses conjuntos, desde que em número finito e não todos iguais.*

Seja $\{A_i : i \in I\}$ a classe dada e considere-se a reunião de um número finito, $\geqslant 2$, desses conjuntos, excluído já o caso de todos serem iguais:

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_n}.$$

Se $n = 2$, a reunião é convexa pela hipótese da proposição. Suponha-se a tese demonstrada para $n \leqslant m$ e considere-se a reunião $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{m+1}}$. Se os conjuntos $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{m+1}}$ são todos iguais, nada há a provar; se alguns são iguais mas não todos, cai-se na hipótese da indução; se são todos distintos, $(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{m-1}}) \cup A_{i_m}$ e $(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{m-1}}) \cup A_{i_{m+1}}$ são convexas pela hipótese da indução e $A_{i_m} \cup A_{i_{m+1}}$ é convexa pela hipótese do teorema. Então, da proposição anterior deduz-se que $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{m+1}}$ é também convexa. Note-se que se a classe dada tem menos de dois elementos tanto a tese como a hipótese da proposição se verificam trivialmente.

**16.ª Proposição:** *Para reuniões de uma infinidade de conjuntos não se verifica uma propriedade análoga à anterior.*

Basta com efeito considerar o seguinte exemplo.

9.º EXEMPLO:

$$E = N$$

$$\Gamma = \{\{1, 2, \ldots, n\} : n \in N\}.$$

Recorrendo à condição $t_1$) vê-se que o axioma de totalização é válido nesta estrutura de convexidade por falta de pares de conjuntos convexos entre os quais não valha uma relação de inclusão. Pela mesma razão a reunião de dois conjuntos da classe $\Gamma$ é sempre convexa. Mas a reunião de todos os conjuntos dessa classe não o é.

# CAPÍTULO VIII

## CONSEQUÊNCIAS DOS TRÊS AXIOMAS

### Consequências dos axiomas de intersecção e totalização

**1.ª Proposição:** *Dados um conjunto* A *e uma classe, não vazia, de conjuntos,* $\{B_i : i \in I\}$, *cuja reunião,* $\bigcup_{i \in I} B_i$ *é convexa,*

a) $$A \sigma \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (A \sigma B_i).$$

Da 12.ª proposição do capítulo quinto deduz-se que $A \sigma B_i$ é convexo e da fórmula c) do capítulo segundo que $A \sigma B_i$ contém $A \cup B_i$. Sendo $\bigcup_{i \in I} B_i$ convexa, a condição $t_3$) do capítulo anterior implica que $\bigcup_{i \in I} (A \sigma B_i)$ contém um conjunto convexo, C, que contém $A \cup \bigcup_{i \in I} B_i$ e portanto também — 2.ª proposição do capítulo segundo — $(A \cup \bigcup_{i \in I} B_i)^\wedge = A \sigma \bigcup_{i \in I} B_i$.

**2.ª Proposição:** *Com as mesmas hipóteses da proposição anterior,*

$$A \sigma \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \sigma B_i).$$

Porque cada um dos conjuntos reunidos no segundo membro está contido no conjunto do primeiro membro desta igualdade em vista da 25.ª proposição do capítulo segundo.

**3.ª Proposição:** *Com as mesmas hipóteses das proposições anteriores,* $\bigcup_{i \in I} (A \sigma B_i)$ *é convexa.*

É uma consequência imediata da proposição anterior e da 12.ª do capítulo quinto.

As duas proposições anteriores estabelecem, respectivamente, que a operação $\sigma$ é distributiva em relação a qualquer reunião convexa de conjuntos e que o facto de uma reunião de conjuntos ser convexa não se altera quando se aplica, quer aos conjuntos dados, quer à sua reunião, um operador do tipo $A \sigma$.

**4.ª Proposição:** *Dadas duas classes, não vazias, de conjuntos* $\{A_i : i \in I\}$ *e* $\{B_j : j \in J\}$ *cujas reuniões sejam convexas*

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \sigma (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \sigma B_j).$$

Com efeito da 2.ª proposição deduz-se primeiro que

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \sigma (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} [(\bigcup_{i \in I} A_i) \sigma B_j]$$

e, atendendo à propriedade comutativa da operação $\sigma$ — 20.ª proposição do capítulo segundo — vem o mesmo conjunto igual a

$$\bigcup_{j \in J} (B_j \sigma \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} (B_j \sigma A_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \sigma B_j).$$

O significado elementar desta proposição é que, dadas duas figuras convexas, A e B, o envólucro convexo, $A \sigma B$, da sua reunião coincide com a figura formada pela reunião de todos os segmentos que unem pontos da primeira com pontos da segunda — ou, se A se reduz a um ponto, com o cone de vértice A e base B.

**5.ª Proposição:** *Qualquer que seja a decomposição de um conjunto convexo numa reunião de subconjuntos, ele coincide com a reunião dos envólucros convexos das reuniões desses subconjuntos tomados dois a dois.*

Se se trata do conjunto vazio expresso como reunião de uma classe vazia, a proposição é evidente. De contrário, se $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ é convexo, é, conforme as proposições 13.ª do capítulo quinto e 19.ª do capítulo segundo, igual a

$$A = \hat{A} = A \,\sigma\, A = (\bigcup_{i \in I} A_i)\, \sigma\, (\bigcup_{j \in I} A_j)$$

e, conforme a proposição anterior,

$$A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in I} (A_i \,\sigma\, A_j),$$

podendo ainda, se I tiver mais de um elemento, acrescentar-se — visto que $A_{i_1} \sigma A_{i_1} = \hat{A}_{i_1} \subseteq (A_{i_1} \cup A_{i_2})^\wedge = A_{i_1} \sigma A_{i_2}$ — que

$$A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{i \neq j \in I} (A_i \,\sigma\, A_j).$$

Elementarmente, se um conjunto é convexo, coincide com a reunião dos segmentos que unem os seus pontos dois a dois. Mas a recíproca não é verdadeira como a seguir se diz.

**6.ª Proposição:** *Dos axiomas de intersecção e totalização não se deduz que, dada uma classe de conjuntos, se se formarem os envólucros convexos de todas as reuniões desses conjuntos dois a dois, a reunião de todos esses envólucros seja convexa.*

Basta considerar o exemplo seguinte.

1.º Exemplo:

$$E = N,$$

$$\Gamma = \{\{2, 3, ..., n\} : n \in N\} \cup \{N\}.$$

Como no 9.º exemplo do capítulo anterior pode-se verificar a validade do axioma de totalização e é também óbvia a do de intersecção. Considerando a classe $\Gamma$ e designando por m um elemento de N, $\{2, 3, ..., m\} \sigma \{2, 3, ..., n\} = \{2, 3, ..., \max\{m, n\}\} \in \Gamma$. Mas a reunião de todos os conjuntos do tipo $\{2, 3, ..., n\}$ é $\{2, 3, ..., n, ...\}$, que não é convexo.

7.ª **Proposição:** *Dada uma classe, não vazia, de conjuntos, se a sua reunião contém os envólucros convexos de todas as reuniões que se podem formar com dois desses conjuntos, contém também os envólucros convexos de todas as reuniões de um número finito desses conjuntos.*

Se a classe dada tem um só conjunto, $A_1$, a hipótese da proposição estabelece que $A_1 \supseteq A_1 \sigma A_1 = \hat{A}_1$ — fórmula $c_1$) do capítulo quinto — de modo que $A_1 = \hat{A}_1$ que é convexo conforme a 12.ª proposição do mesmo capítulo. Suponha-se a tese provada quando se tratar de reuniões de $n \leqslant m$ conjuntos — para $m = 2$ a tese é evidente — e considere-se o envólucro convexo duma reunião de $m + 1$ conjuntos da classe $\{A_i : i \in I\}$:

$$A = A_{i_1} \sigma A_{i_2} \sigma \ldots \sigma A_{i_{m+1}}.$$

Tal conjunto é, conforme as proposições 23.ª e 20.ª do capítulo segundo, igual a

$$A_{i_{m+1}} \sigma (A_{i_1} \sigma A_{i_2} \sigma \ldots \sigma A_{i_m})$$

sendo $A_{i_1} \sigma A_{i_2} \sigma \ldots \sigma A_{i_m} = B$ convexo de acordo com uma proposição que há pouco se citou. Ora este conjunto pode escrever-se como reunião dos conjuntos $\{p\}$, com $p \in B$, constituídos pelos seus próprios pontos um a um. Se B é vazio, $A = A_{i_{m+1}} \sigma O = A_{i_{m+1}} \sigma A_{i_{m+1}}$, que está contido em $\bigcup_{i \in I} A_i$ pela hipótese da proposição. Se $B \neq O$, a 3.ª proposição dá

$$A_{i_{m+1}} \sigma (A_{i_1} \sigma \ldots \sigma A_{i_{m+1}}) = A_{i_{m+1}} \sigma \bigcup_{p \in B} \{p\} =$$

$$= \bigcup_{p \in B} (A_{i_{m+1}} \sigma \{p\}) \subseteq \bigcup_{p \in B} (A_{i_{m+1}} \sigma A_{i_p})$$

em que $A_{i_p}$ designa um dos conjuntos $A_i$ a que pertence p. Ora esta última reunião, pela hipótese da proposição está contida em $\bigcup_{i \in I} A_i$.

**8.ª Proposição:** *Se a reunião de um número finito de conjuntos contém os envólucros convexos de todas as reuniões que se podem formar com dois desses conjuntos, tal reunião é convexa.*

Porque, conforme a proposição anterior, sendo $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ os conjuntos dados, $A_1 \sigma A_2 \sigma \ldots \sigma A_n$, que é convexo, está contido em $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e coincide portanto com esta reunião.

A proposição que se acaba de deduzir não se pode, sem a intervenção do axioma de reunião, generalizar para reuniões de uma infinidade de conjuntos, como fàcilmente se observa no 1.º exemplo supra.

## Consequências dos três axiomas

**9.ª Proposição:** *Dada uma classe, não vazia, de conjuntos a sua reunião é convexa se contém todos os envólucros convexos das reuniões que se podem formar com dois quaisquer desses conjuntos.*

Isto é, se $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq \bigcup_{i_1 \in I} \bigcup_{i_2 \in I} (A_{i_1} \sigma A_{i_2})$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ é convexa. Considere-se com efeito a classe $\Delta$ formada por todos os conjuntos, L, que têm as três propriedades seguintes:

b) $L \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

c) L é uma reunião de conjuntos da forma $A_{i(1)} \sigma A_{i(2)} \sigma \ldots \sigma A_{i(n)}$ em que os índices i (1), i (2), ..., i (n), em número finito, pertencem a I

d) L é convexo.

Ordenada por inclusão, $\Delta$ forma um conjunto parcialmente ordenado, que é indutivo porque a reunião dos conjuntos L pertencentes a uma subclasse de $\Delta$ totalmente ordenada por inclusão satisfaz ainda evidentemente as condições b) e c) e também, em vista do axioma de reunião, a condição d). $\Delta$ possui então um elemento, $L_m$, máximo. Se $L_m = \bigcup_{i \in I} A_i$, fica provada esta proposição. Como I não é vazio, existe pelo menos um conjunto $A_i$ e, para qualquer deles, $\hat{A}_i = A_i \sigma A_i$ — fórmula $c_1$) do capítulo quinto — é um dos conjuntos L de $\Delta$: então se $L_m = O$, $\hat{A}_i = O$ donde $A_i = O$, e $L_m = \bigcup_{i \in I} A_i$ ficando também provada a proposição. Seja pois $L_m$ não vazio e diferente de $\bigcup_{i \in I} A_i$, $p_0$ um elemento de $\bigcup_{i \in I} A_i \setminus L_m$ e $A_{i_0}$ um dos conjuntos $A_i$ a que pertence $p_0$. Conforme a condição c)

$$L_m = \bigcup_{h \in H} [A_{i(h,1)} \sigma A_{i(h,2)} \sigma \ldots \sigma A_{i(h,n_h)}]$$

em que $H \neq O$. De acordo com a 3.ª proposição

$$A_{i_0} \sigma L_m = A_{i_0} \sigma \bigcup_{h \in H} [A_{i(h,1)} \sigma \ldots \sigma A_{i(h,n_h)}] =$$

$$= \bigcup_{h \in H} [A_{i_0} \sigma A_{i(h,1)} \sigma \ldots \sigma A_{i(h,n_h)}].$$

Ora, segundo a 7.ª proposição, da hipótese desta deduz-se que esta reunião está contida em $\bigcup_{i \in I} A_i$. $A_{i_0} \sigma L_m$ satisfaz então a condição b) e, evidentemente, a condição c). Que se trata de um conjunto convexo resulta da própria expressão $A_{i_0} \sigma L_m$ e da 12.ª proposição do capítulo quinto. Portanto $A_{i_0} \sigma L_m$ pertence a $\Delta$ e contém $L_m$. Mas $A_{i_0} \sigma L_m \supseteq A_{i_0} \ni p_0 \notin L_m$ de modo que é absurda a hipótese de ser o conjunto máximo $L_m$ distinto de $\bigcup_{i \in I} A_i$. Ora neste caso, como já se disse, a proposição é verdadeira.

**10.ª Proposição:** *Dada uma classe não vazia de conjuntos, se as reuniões de dois quaisquer desses conjuntos são convexas, a reunião de todos também o é.*

Consequência imediata da proposição anterior, visto que se a reunião de dois conjuntos é convexa, coincide com o seu envólucro convexo.

**11.ª Proposição:** *Os axiomas de reunião e intersecção, mas não o de totalização, são consequências da condição seguinte:*

e) *Dada uma classe não vazia de conjuntos, a sua reunião é convexa se e só se contém os envólucros convexos de todas as reuniões que se podem formar com esses conjuntos tomados dois a dois.*

Quanto ao axioma de reunião, dada uma classe de conjuntos convexos, $\{C_i : i \in I\}$, totalmente ordenada por inclusão, quaisquer que sejam os conjuntos $C_j$ e $C_l$ a ela pertencentes, se por exemplo $C_j \subseteq C_l$, $C_j \cup C_l = C_l$ e $C_j \sigma C_l \subseteq C_l$ conforme a proposição 21.ª do capítulo segundo, de modo que a reunião de todos os conjuntos $C_i$ contém qualquer envólucro convexo $C_j \sigma C_l$ e é portanto convexa. Quanto ao axioma de intersecção, dada a classe $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos convexos, seja $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ e $\{p : p \in C\}$ o conjunto dos pontos de C. $C = \bigcup_{p \in C} \{p\}$ e quaisquer que sejam os conjuntos $\{p_1\}$, $\{p_2\}$ e $C_i$, $\{p_1\} \cup \{p_2\}$ e, conforme a proposição acima referida, $\{p_1\} \sigma \{p_2\}$ estão contidos em $C_i$. Então $\{p_i\} \sigma \{p_2\} \subseteq C$ e C é convexo. Que não se verifica o axioma $\mathfrak{T}$ pode observar-se no seguinte exemplo.

2.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$\Gamma = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, e\}, E\}.$$

Para se mostrar que se verifica a condição e) comece-se por provar que, dada uma qualquer reunião de conjuntos, $\bigcup_{i \in I} A_i$, ela é convexa se contém todos os envólucros convexos $A_{i_1} \sigma A_{i_2}$, das reuniões de dois desses conjuntos. Observe-se primeiro que coincidem com E todos os envólucros convexos dos seus subconjuntos excepto os seguintes

$\hat{O} = O;$

$\{a\}^\wedge = \{a\}$, $\{b\}^\wedge = \{b\}$, $\{c\}^\wedge = \{c\}$;

$\{b, c\}^\wedge = \{b, c\}$;

$\{d\}^\wedge = \{a, b\}^\wedge = \{a, d\}^\wedge = \{b, d\}^\wedge = \{a, b, d\}^\wedge = \{a, b, d\}$;

$\{e\}^\wedge = \{a, c\}^\wedge = \{a, e\}^\wedge = \{c, e\}^\wedge = \{a, c, e\}^\wedge = \{a, c, e\}$.

Portanto, se $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ contém $\{f\}$. ou $\{b, e\}$, ou $\{c, d\}$, ou $\{d, e\}$, e se contém todos os $A_{i_1} \sigma A_{i_2}$, como algum $A_i$ possui o ponto f ou alguma reunião $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ contêm $\{b, c\}$, ou $\{c, d\}$, ou $\{d, e\}$, e o respectivo $A_{i_1} \sigma A_{i_2} = E$, vem $A = E$, convexo. Resta considerar os casos em que $A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ mas, se possui d, não tem c nem e, e, se tem e, não possui b nem d — isto é, os casos em que A está contido em $\{a, b, d\}$, $\{a, c, e\}$ ou $\{a, b, c\}$. No primeiro caso, se A contém $\{d\}$

ou {a, b} e contém todos os $A_{i_1} \sigma A_{i_2}$, contém {a, b, d} e é convexo, aliás $A = \{a\}$ ou $A = \{b\}$ e é também convexo; anàlogamente no caso de A estar contido em {a, c, e}. Se $A \subseteq \{a, b, c\}$ e contém todos os $A_{i_1} \sigma A_{i_2}$ não pode conter {a, b} nem {a, c}, cujos envólucros convexos não estão contidos em A; é então A igual a {a}, {b}, {c} ou {b, c} e convexo em qualquer destes casos. Para se provar que, recìprocamente, se $\bigcup_{i \in I} A_i$ é convexa, contém todos os $A_{i_1} \sigma A_{i_2}$, basta verificar que o axioma de intersecção é válido nesta estrutura de convexidade e atender à proposição 21.ª do capítulo segundo. Finalmente, para se ver que o axioma de totalização se não verifica, basta considerar os conjuntos $C_0 = \{b, c\}$, $C_1 = \{a, b, d\}$ e $C_2 = \{a, c, e\}$, tais que $C_0 \subseteq C_1 \cup C_2 = \{a, b, c, d, e\}$ mas que esta reunião não contém nenhum conjunto convexo que contenha $C_0 \cup (C_1 \cap C_2) = \{a, b, c\}$, cujo envólucro convexo é E. Note-se ainda que nesta estrutura de convexidade também se verifica o axioma de reunião.

### Os problemas dos semiespaços

No final do capítulo terceiro assinalaram-se algumas das principais diferenças entre as estruturas de convexidade aqui estudadas e noção usual de convexidade. Dos três problemas aí postos, o segundo ficou esclarecido, no capítulo sexto, com a introdução dos axiomas de reunião e intersecção.

Quanto aos outros problemas, considerem-se os seguintes exemplos.

3.º EXEMPLO:

$E = \{a, b, c, d, e, f\}$.

$\Gamma = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{a, c, e\}, \{b, d, f\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e, f\}, \{c, d, e, f\}, E\}$.

Trata-se essencialmente do 4.º exemplo do capítulo terceiro em que se fizeram pertencer à classe dos conjuntos convexos ainda os conjuntos O, E e todas as intersecções dos primitivos conjuntos convexos de modo que se verificassem, como não é difícil observar, o axioma de intersecção e, pelo argumento habitual, o de reunião. Como além de O e E os novos conjuntos convexos apenas têm um ou dois pontos não há novos semiespaços e continua a haver, como naquele exemplo, semiespaços orientados e não orientados. Vejamos que se verifica porém o axioma de totalização. Para simplificar note-se que nesta estrutura de convexidade há certas simetrias. Com efeito, supondo que o espaço é o conjunto dos vértices de um octaedro regular em que *a* se opõe a *b*, *c* a *d* e *e* a *f*, os conjuntos convexos serão o conjunto vazio e o espaço, os que têm apenas um ponto, os que são formados por quatro vértices situados num dos planos de simetria do octaedro, os que são constituídos pelos vértices de duas determinadas faces opostas, $\{a, c, e\}$ e $\{b, d, f\}$, os que são formados por dois vértices de uma dessas faces e os que englobam dois vértices opostos. Deste modo a estrutura de convexidade fica invariante se se trocar cada vértice com o seu oposto ou se se permutarem circularmente os vértices de uma daquelas faces e, correspondentemente, os da sua oposta. Se não se verificasse o axioma de totalização, a intersecção $\bigcap_{i \in I} C_i$ que aí se considera não poderia ser vazia e poderia supôr-se, em virtude das simetrias apontadas, que possuía o elemento a. Os eventuais conjuntos $C_i$ pertenceriam pois à classe

$\{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{a, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e, f\} \}$.

Se em $\{C_i : i \in I\}$ há apenas conjuntos com 1, 2 ou 3 elementos, não sendo a sua reunião convexa é $\{a, b, c\}$, $\{a, b, e\}$ ou $\{a, b, c, e\}$, vindo em qualquer dos casos $\bigcap_{i \in I} C_i = \{a\}$ pois se em $\{C_i : i \in I\}$ apenas figurassem $\{a, c, e\}$ e $\{a, c\}$ ou $\{a, e\}$ a reunião seria $\{a, c, e\}$, convexa. Mas nos três casos apontados a referida $\bigcup_{i \in I} C_i$ não contém conjuntos convexos $C_0$, sem o elemento a, salvo, no primeiro caso, {b} e {c}, no segundo, {b} e {e} e, no terceiro, {b}, {c}, {e} e {c, e}. De qualquer modo a reunião $C_0 \cup \bigcap_{i \in I} C_i$ é convexa.

Se em $\{C_i : i \in I\}$ figura o conjunto {a, b, c, d} e se a reunião dos conjuntos desta classe não é convexa, só pode ser {a, b, c, d, e} vindo $\bigcap_{i \in I} C_i = \{a\}$ ou $= \{a, c\}$. No primeiro caso essa reunião pode conter sete conjuntos, $C_0$, sem elemento a: {b}, {c}, {d}, {e}, {b. d}, {c, d} e {c, e}, mas as respectivas reuniões $C_0 \cup \bigcap_{i \in I} C_i$ estão contidas em {a, b, c, d} ou {a, c, e}. No segundo caso é preciso considerar as reuniões de {a, c} não só com aqueles sete conjuntos que não possuem a mas também com todos os outros $C_0$ contidos em {a, b, c, d, e} e que não contenham {a, c}, isto é com {a}, {a, b} e {a, e}. Mas as respectivas reuniões continuam a estar contidas em {a, b, c, d} ou {a, c, e}. Se em vez de {a, b, c, d} se considerasse o conjunto {a, b, e, f}, as conclusões seriam análogas — bastaria trocar d com f e c com e. Verifica-se pois, como se desejava provar, o axioma de totalização.

4.º Exemplo:

$$E = \{a, b, c, d, e\}.$$

$$\Gamma = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}, E\}.$$

Trata-se essencialmente do 5.º exemplo do capítulo terceiro, com a diferença de se incluirem na classe dos conjuntos convexos O, E e as intersecções dos primitivos conjuntos convexos de modo que, como no exemplo anterior se verifiquem os axiomas $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{I}$. Também como no exemplo anterior, não tendo os novos conjuntos convexos mais de dois pontos, não há novos semiespaços e são portanto os mesmos os hiperplanos. Para se provar a validade do axioma de totalização, convém notar que esta estrutura de convexidade se não altera por uma permutação circular das letras a, b, d e e, podendo fàcilmente ver-se esta simetria se estes pontos forem os vértices de um quadrado e c o seu centro. Mas esta simetria conduz agora a duas hipóteses: ou o conjunto não vazio $\bigcap_{i \in I} C_i$ possui um vértice do quadrado, a por exemplo, ou possui o centro, c.

A marcha da demonstração é, de resto, semelhante à do exemplo anterior e bastará esboçá-la. Na primeira hipótese a classe dos conjuntos convexos, distintos de E, que possuem a é $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}\}$. $\bigcup_{i \in I} C_i$ é $\{a, b, e\}$ ou $\{a, b, c, e\}$; $\bigcap_{i \in I} C_i$ é $\{a\}$ no primeiro caso e $\{a\}$ ou $\{a, c\}$ no segundo.

$C_0$ poderá ser $\{b\}$ ou $\{e\}$, ou ainda $\{c\}$, $\{b, c\}$, $\{c, e\}$, ou ainda $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, e\}$. De qualquer modo $C_0 \cup \bigcap_{i \in I} C_i$ está contida em $\{a, b\}$, $\{a, e\}$ ou $\{a, b, c\}$, $\{a, c, e\}$. Na segunda hipótese a classe $\{C_i : i \in I\}$ é extraída de $\{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$; $\bigcup_{i \in I} C_i$, para não ser convexa é $\{a, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, c, d, e\}$ ou $\{b, c, d, e\}$. Por motivos de simetria basta considerar os casos em que coincide com $\{a, c, d\}$ ou $\{a, b, c, d\}$, vindo $\bigcap_{i \in I} C_i = \{c\}$ no primeiro e a $\{c\}$, ou $\{b, c\}$, no segundo. $C_0$ poderá ser, respectivamente, $\{a\}$, $\{d\}$ ou ainda $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, d\}$, ou ainda $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{c, d\}$, $\{b, c, d\}$. $C_0 \cup \bigcap_{i \in I} C_i$ vem de qualquer modo contida em $\{a, c\}$, $\{c, d\}$, no primeiro caso ou em $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$ no segundo.

Os exemplos anteriores mostram pois que, mesmo em presença dos três axiomas aqui estudados, que não só são compatíveis com, mas também implicam a definição usual de convexidade, continuam abertos o primeiro e o terceiro dos problemas que no fim do terceiro capítulo se enunciaram.

# NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

## Obras citadas na Introdução


Paul Brrnays: «Die Mannigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung geometrischer Axiomensysteme», págs. 1 a 15 de *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics*, Amsterdam, 1959.

Dadid Dekker: *Convex regions in projective N-space*, American Mathematical Monthly, LXII (1955), 430-431.

J. de Groot & H. de Vries: *Convex sets in projective space*, Compositio Mathematica, XIII (1958), 113-118.

F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1900.

André Marchaud: *Convexitè et connexité linéaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, CCXLVIII (1959), 2843--2844, CCXLIX (1959), 2141-2143.

Ernest Michael: *Convex structures and continuous selections*, Canadian Journal of Mathematics, XI (1959), 556-575.

M. H. Stone: *Postulates for the barycentric calculus*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, (4) XXIX (1949), 25-30.


## Sobre a matéria dos Capítulos II e V

Uma operação geométrica de certo modo análoga à de passagem ao envólucro convexo — mas relativa à noção de subespaço — é referida em:


D. A. Higgs: *Maps of Geometries*, Journal of the London Mathematical Society, XLI (1966), 612-618.


## Sobre a matéria dos Capítulos III e VI

A noção de semiespaço agora introduzida pode relacionar-se com a de «semiespaço no ponto p» definível em espaços vectoriais. Ver por exemplo:


J. W. Ellis: *A general separation theorem*, Duke Mathematical Journal, XIX (1952), 417-421.

P. C. HAMMER: *Maximal convex sets,* Ibidem, XXII (1955), 103-106.

Neste último artigo aparecem, mas essencialmente em espaços vectoriais, algumas das ideias aqui desenvolvidas: a de substituir por intersecções de semiespaços «obtidos uns dos outros por translacção» os usuais hiperplanos tangentes ou de suporte de um conjunto e a de considerar as reuniões de semiespaços abertos com semiespaços da estrutura induzida no hiperplano fronteiro.

**Sobre a matéria dos Capítulos VII e VIII**

Uma propriedade análoga à distributividade da operação $\sigma$ em relação a certas reuniões de conjuntos, que se deduziu aqui do axioma de totalização, é a que figura, com o nome de (P 4), no supracitado artigo de ELLIS. Mas, por um lado, como axioma num contexto mais geral, aplicável a diversos teoremas de separação, por outro em conjunção com uma propriedade (P 5), do tipo dos axiomas de incidência da geometria elementar.

# DOCUMENTOS SOBRE A *RESTAURAÇÃO*

*Continuado do vol. 129.º, pág. 274*

## 1653 — FEVEREIRO — 10

Visconde amigo Eu El Rey uos enuiò mvito saudar como aquelle q̃ amo. He forçado buscar effeitos de cujo proçedido se possa sustentar quatro mil infantes, oitoçentos cauallos e hua armada consideravel, que tudo e ainda muito mais he necessario para assistir nesta corte, e a guardar e deffender no tempo presente pois consiste nella a conseruaçaõ do Reyno. E considerando eu que os bens da coroa e ordeñs estaõ primeiro obrigados ao seruiço da Coroa q̃ os patrimoniais de cada hum, e que estes se achaõ tam carregados com as deçimas e mais contrebuiçoẽs q̃ pagaõ para a guerra, e que minha fasenda naõ tem outro effeito liure que poder applicar a esta despesa mais que o quinto dos asucares, e outros de menor consideraçaõ q̃ todos tenho applicados sem me ficar algum; fui seruido resoluer, q̃ os comendadores e donatarios paguem o quinto (incluindose nelle a deçima) do rendimento de suas comendas e qvaisqver beñs das ordeñs, e de todos os q̃ possuirem da coroa emqvanto durar a occasiaõ q̃ se espera, tendo por çerto de quem os donatarios e comendadores saõ q̃ naõ só pella obrigaçaõ dos beñs que fica appontada, mas pellas mayores que concorrem em suas pessoas, que como saõ as q̃ mais trato, saõ as q̃ por esta causa tem mayor lugar em minha afeiçaõ, folgaraõ m.^to^ de largar aquella parte tam necessaria para conseruar o todo, e deffender cõ ellas suas honrras, suas uidas, e sua propria terra, entendendo que assy como o trabalho e necessidades do Reyno lhe saõ causa desta despesa, o descanço e o socego que Ds. lhes daria lha restituirá como acrecentamento das merces que desejo e determino fazerlhes. Encomendouos muito q̃ considerando estas razoẽs com a atençaõ q̃ todas pedem, e o q̃ deueis a quem sois e à memoria daquelles de quem descendeis, reçebais esta resoluçaõ minha com tanto contentamento q̃ sejais exemplo dos mais como espero de uos, e uos mereçe a estimaçaõ que faço de vossa pessoa. Escrita em Lix.ª a *10* de feuereiro de *1653.*

*Rey*

Para o Visconde de uilla noua de serueira

1653 — FEVEREIRO — 22

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquele que amo. Com esta carta se vos remetteraõ duas que me escreueo Manoel Lopez Brandaõ gouernador do Castello de Vianna sobre o excesso que entende cometter o juiz de fora Tavares em prender dous soldados do Castello; Encomendouos que inteirado do que contem estas cartas, emformado particularmente do que passou nestas prizoẽs procureis accomodar estas dicensoẽs de modo que fazendosse o que for justiça seja por uia e ordem dos ministros a que tocar. Escrita em Lx.ª a *22* de feu.ʳᵒ *653.*

*Rey*

O Conde de Prado — Jorge de Mello

P.ª o g. das armas da Prou. do Minho.

1653 — FEVEREIRO — 25

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar, como aquelle q̃ amo. Por cartas de 14 de Março de *644.* 16 de feuereiro de *650,* e 18, de Dez.º de *52.* Vos ordeney fizesseis aualiar as obras q̃ Gaspar Lobato de Lancoẽs tem feito no castello delapella de q̃ he Alcayde Mór francisco Vieira Guedes, e satisfeito do q̃ ellas importassem, fosse francisco Vieira metido de posse do dito castello, o qval ora me fez a petiçaõ q̃ se vos remettera cõ esta carta, e a copia das citadas, pedindo em rezaõ do q̃ nella apponta se faça a aualiaçaõ das ditas obras por officiaes de fora da terra, q̃ bem o entendaõ, e o em q̃ se aualiarem se pague pella via q̃ da petiçaõ vereis; encomendouos que tanto q̃ receberdes esta carta ordeneis q̃ logo se aualiem estas obras por officiaes de fora da terra, estando presente o Veedor geral, e a parte, ou seu procurador, e sendo satisfeito Gaspar Lobato do q̃ se lhe deuer, fareis meter de posse o dito Castello a francisco Vieira dandosse com isso fim a suas duuidas; e auisarmeeis logo de como se comprio, e executou esta ordem para o ter entendido. Escrita em Lx.a a *25* de feu.ro de *653.*

*Rey*

O Conde de Prado Jorge de Mello

Para o Gou.or das Armas dentre Douro, e Minho

1653 — FEVEREIRO — 28

Visconde amigo Eu El Rey vos enuio m.to saudar, como aquelle q̃ amo. Hauendo uisto a vossa carta de 4. de Dezembro proximo passado, em q̃ me representastes as miserias e necessidades q̃ padecem os soldados do

Castello Santiago da Villa de Viana por falta dos pagamentos, e mais rezoẽs q̃ referis, Me pareçeo dizeruos, q̃ ao Cons.º da fazenda mando ordenar com nouos apertos, q̃ procure q̃ estes pagamentos se façaõ com a pontualidade q̃ he justo haja, nos semelhantes, em rezaõ de seruirem em praça fechada. Escrita em Lx.ª a 28 de feu.ʳᵒ de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado Pedro Cesar de meneses

Para o Gou.ᵒʳ das armas dentre douro e minho

1653 — MARÇO — 4

Vixconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Sem embargo do que me reprezentaes em carta de *5* do passado; hey por bem deis a execuçaõ o que uos mandei ordenar por carta de *23* de Janeiro sobre fazerdes recolher separadamente nos almaseñs da fortaleza da Villa de Vianna huã boa partida de moniçoẽs das que se uos remetem todos os Annos para prouimento das fronteiras e a quantidade dellas q̃ for, e as razoẽs que tive para tomar aquella rezoluçaõ entendereis do papel que será em companhia desta carta. Escrita em Lix.ª a 4 de Março de *1653*.

*Rey*

P.ª o Vixconde de Villa noua de Ceru.ʳª

1653 — MARÇO — 19

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Com esta carta se uos remetera huã petiçaõ de gregorio ferreira Machado, em que pelas rasões que nella aponta pretende ser occupado no posto de Governador da comarca de Guimarães no tocante as cousas da milicia; Encomendo uos que uendo a sua petiçaõ me informeis de tudo o q̃ refere, e pede nella com uosso parecer, para com isso lhe poder mandar deferir como mais convenha a meu serviço. E com a uossa informaçaõ, me tornareis a remeter a mesma petiçaõ. Escrita em Lx.ª 19 de Março de *1653.*

*Rey*

O Conde de Prado          Pedro Cesar de meneses

P.ª o Gou.ᵒʳ das armas da Prou.ᶜᵃ do Minho

1653 — MARÇO — 20

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.ᵗᵒ saudar, como aquelle q̃ amo. Com esta carta se vos remettera huã petiçaõ de Izabel Gli (?) veuua moradora em Agoa leuada, freguesia de Passos termo da Villa dos Arcos, em q̃ pellas rezoẽs q̃ nella apponta, pede lhe escuze de ser soldado auxiliar a françisco seu filho unico; encomendouos q̃ vendo a dita petiçaõ, e tomando as informaçoẽs q̃ julgardes por necessarias prouejais o q̃ vos parecer mais conueniente no requerim.ᵗᵒ desta molher. Escrita em Lx.ª a *20* de Março de *1653.*

*Rey*

O Marques Almirante          Jorge de Mello

Para o Gou.ᵒʳ das Armas dentre douro e minho

1653 — ABRIL — 19

Vizconde amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por duplicados auizos se tem entendido que o inimigo tem junto e uay juntando gente em Monterrey e preuenido grande quantidade de estacas e outros petrechos e que o intento uerdadeiro destas preuencões he para fabricar e presidiar hũ forte no sitio de Villarelho que fica na Raya junto a praca de Chaues, e porque eu mando encarregar a Joanne Mendez de Vasconcellos gouernador das armas daquella Prouincia de Tras os montes procure por todos os meos q̃ forem possiueis impedirlho para estoruar o dano que poderia fazer a praca de Chaues, e aquella Prouincia se se fortificasse naquelle sitio, e elle naõ o podera fazer sóo com o poder que ha na Prouinçia, Vos encomendo que quoando tiuerdes auizo seu de que he tempo de o soccorrerdes, o facaes com o mayor numero de infantaria e cauallaria que for possiuel tirar dessa Prouincia e tam a tempo que possa chegar este socorro na occasiaõ para que for necessario, e tendo este negocio da qualidade de que he naõ vos encarrego a execuçaõ desta ordem com palauras de mayor aperto, tendo por certo que a cumprireis tam inteiram.te e que me haja por bem seruido de Vos, e tenha muito q̃ Vos aggradecer. Escrita em Lx.a 19 de Abril de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado      Pedro Cesar de meneses

P.a o g.or das armas da Prou.a do Mynho

1653 — ABRIL — 29

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Vi a uossa carta de 2 de Jan.ro proximo passado, em que apontais as razões porq̃ deuia ser prouido Domingos Mendes Aranha que esta gouernando a praça da Insoa, na companhia de que he Capitaõ Rodrigo Pereira Stomajor Alcaide mór de Caminha e darlhe a elle o soldo que ate gora gozou com a dita companhia; e porque nesta forma (conformandome com o q̃ uos pareceo) lhe tenho mandado passar os despachos, me pareceo auisaruolo para q̃ o tenhais entendido; e que a patente q̃ mandei passar a Domingos Mendes Aranha leua declaraçaõ, que a praça da Insoa, que se ha de guarnecer com a dita companhia, ha de ficar subordinada ao gouernador de Caminha na forma que esteue ategora. Escrita em Lix.a 29 de Abril de *1653*.

*Rey*

O Conde de Prado O Marques Almirante

P.a o gou.or das armas da Prou.ca do Minho

1653 — ABRIL — 30

Visconde amigo. Eu el Rey uos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Porq.to tenho encarregado ao Dezembargador Francisco Botelho de Abreu a auerigua-çaõ dos Capitulos que contra o Mestre de Campo fran.co Peres da Silua deraõ os officiais da Camara da Villa de Moncaõ, e a das queixas que delle fizeraõ as Camaras das Villas de Valença, Valadares, e Melgaço e os officiais da guerra, que seruem nessa Prou.ca cujo papel me enviastes com a uossa carta de 21 de Jan.ro proximo passado, dando me conta dellas. Vos encomendo ordeneis ao Mestre de campo fran.co Peres da Silua, senão saya da praça de Viana, para onde o mandastes ir ate outra ordem minha em contr.o Escrita em Lx.a *30* de Abril de 1653.

*Rey*

O Marques Almirante O Conde de Prado

P.a o gou.or das armas da Prou.ca de Entre Douro, e minho

1653 — MAIO — 15

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Hoje foi Deos seruido leuar para si o Principe Dom Theodosio meu sobretodos m.to amado, e presado filho, de que me acho com a pena, e sentim.to que facilm.te podeis considerar. E pareceome mandaruolo auisar para q̃ tendoo entendido ordeneis que pelos Cabos, e officiais da guerra q̃ seruem nessa Prou.ca se facaõ as demonstracões de sentim.to que em semelhantes casos se costuma. Escrita em Alcantara a 15 de Maio de 1653.

*Rey*

P.a o gou.or das armas da Prou.ca do Minho

1652 — MAIO — 24

Dom Joaõ per graça de Deos Rey de Portugal, e dos Algarues daquem e dalem Mar em Africa, senhor da Guiné &.a faço saber a vos Dom Diogo de Lima Bisconde de Villa noua da Serueira, do meu Cons.o e gouernador das Armas da Prouinçia de entre Douro e Minho, que no Cons.º de minha faz.ª se uio a uossa carta que por elle me escreuestes, em oito de Mayo corrente, em que reprezentais as neçessidades que padeçem os officiaes e soldados do Castello saõ Tiago da villa de Vianna por lhe faltar ha muito tempo, o pagamento de seus soccorros, e o q̃ obrais em razaõ disso, q̃ he o que se deue esperar do zello com q̃ proçedeis em meu seruiço. E logo se tratou de mandar procurar dinheiro para se acodir a este soccorro, para o qval enuiareis ordem para se cobrar o primeiro qvartel da consignaçaõ q̃ se tem dado na Alfandegua desta çidade, para paguam.^to dos ditos soldados que uinda se cobrará. El Rey nosso s.^or o Mandou por Ruy de Moura Tellez do seu Cons.º de Estado e vedor de sua faz.ª Feliciano Machado fez em Lx.ª a vinte e qvatro de Mayo de mil e seisçentos sincoenta e dous annos. Gaspar de Abreu a fez escreuer.

*Ruy de Moura*

1653 — MAIO — 25

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.^to saudar como aquelle q̃ amo. A gregorio ferreira Machado de Eça fui seruido nomear por gouernador da Comarca de Guimarães no tocante as cousas da milicia. De que me pareçeo auisaruos para q̃ o tenhais entendido. Escrita em Alcantara 25 de Maio de 1653.

*Rey*

O Marques Almirante — Saluador Correa de Sáa i Beneuides

P.ª o Gou.^or das armas da Prou.^ca do Minho

1653 — MAIO — 31

Bisconde Amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Por ser informado de alguãs inqvietaçoẽs de Francisco de Azeuedo Coutinho, irmão de Vasco de Azeuedo Coutinho dessa Prouinçia, cauzado da muita ociosidade com que dizem uiue. Vos encomendo muito e mando, o remetaes ligo a esta Corte, auizando de sua chegada a ella, para dispor da pessoa desse fidalgo, como for seruido, e o mandar para parte onde possa mereçer as honras e merçes deuidas a sua qualidade, sem a queixa e escandalo, q̃ de presente se affirma ha de seu modo de uiuer. Escritta em Lisboa a 31. de Maio de 653.

*Rey*

P.ª o Bisconde de V.ª Noua

1653 — JUNHO — 6

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar, como aquelle q̃ amo. Em dous do corrente chegou aqui o correo q̃ despachastes com a vossa carta de 28. do passado, e com q̃ enuiastes a q̃ Joanne Mendez vos escreueo, pedindouos o soccorreseis, e a copia da com q̃ lhe respondestes aduertindoo dos auizos q̃ ultimam.te hauieis tido de Galisa, e das espias q̃ tinheis metido naquelle Reyno para alcançar com mais certeza os mouimentos do inimigo p.ª q̃ tendo noticia de q̃ elle puxa pella gente de guerra q̃ tem na vossa opposiçaõ para Monte Rey o soccorrerdes logo, com quatro centos Infantes, e quarenta cauallos, e pareçeome dizeruos q̃ nisto tendes procedido, como convinha, e mvito conforme a confiança q̃ Eu faço de vossa pessoa, e do zelo com q̃ attendeis a meu seruiço, encomendouos mvito, q̃ na conformidade de que escreuestes a Joane Mendez, lhe enuieis o soccorro com grande promptidaõ logo que tiuerdes segundo auizo seu, para o fazerdes de que entenda q̃ o inimigo o quer cometter. Escrita em Lx.ª a *6* de Junho de *653*.

*Rey*

Fran.co de Sousa Coutinho

Saluador Correa de Saa i beneuides

Para o Gou.or das Armas da Prou.ca dentre Douro e Minho.

1653 — JUNHO — 17

Visconde amigo Eu El Rey vos enuio mvito saudar, como aquelle q̃ amo. Com esta carta se vos remettera huã petiçaõ do Mestre de campo francisco Peres da Silua, em q̃ pellas rezoẽs q̃ apponta, pede que sem embargo da deuassa q̃ de seus procedimentos se tem mandado tirar, possa assistir na praça de Saluaterra, e gouernala, pois o fazelo naõ impede o curso da Justiça. Encomendouos que vendo, e considerando a dita petiçaõ, prouejaes na materia do q̃ ella conthem, como vos parecer justiça, e formais conueniente a meu seruiço. Escrita em Lx.ª a 17 de Junho de 1653.

*Rey*

O Conde de Soure

Pedro Cesar de Meneses

Para o Gou.or das armas do Minho

1653 — JUNHO — 19

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Eu fuy seruido mandar fixar editaes em 5. do corrente, q̃ todos os officiaes da guerra q̃ tivessem postos nas fronteiras deste Rn.º e se achassem nesta corte, e tiuessem acabado ou naõ o tempo das licencas com q̃ vieraõ, e se lhes concedeo prorrogandolhas, se recolhessem logo as fronteiras, e fossem exercitar os seus postos, sendo obrigados a enviar certidoẽs de q̃ se presentou cada hum na sua prouincia do Veedor geral della dentro de 15 dias contados do da data do Edital, com cominação aos q̃ assi o naõ comprissem, e naõ enuiassem as certidoẽs a Secretaria do meu Cons.º de guerra, demais de se lhes prouer logo seus postos, se procederia contra elles com a demonstraçaõ de castigo q̃ Eu fosse seruido, e pareceome auisaruolo, e mandaruos, q̃ na conformidade desta minha resoluçaõ, para os postos daquelles q̃ encorreraõ na pena della, me proponhaes os sogeitos q̃ estiuerem a caber nelles, com relaçaõ de seus seruiços na forma das ordeñs dadas. Escrita em Lx.ª a 19 de Junho de *1653*.

*Rey*

Franc.co de Sousa Coutinho

Saluador Correa de Saa i beneuides

Para o Gou.or das Armas de entre Douro e minho.

1653 — JUNHO — 29

Visconde amigo Eu ElRey vos enuio muito saudar, como aquelle q̃ amo. Mando a essa fronteira do Minho o Dezembargador francisco Botelho de Abreu a deuassar dos procedimentos de francisco Peres da Sylua Mestre de Campo do terço dessa Prouinçia, e porq̃ elle pede Meirinho e homeñs q̃ o acompanhem, q̃ tenho por cousa escusada entre soldados, Me pareçeo encomendaruos, e ordenaruos, mandeis pellos officiaes militares assistir a este Dezembargador em qvanto estiuer occupado na deligencia, para q̃ obre nella, como conuem a meu seruiço. Escrita em Lx.ª a 29 de Junho de 1653.

*Rey*

Saluador Correa de Sáa i beneuides

Pedro Cesar de Menezes

Para o Gou.or das Armas dentre Douro e Minho

1653 — JULHO — 8

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar, como aquelle q̃ amo. Encomendouos, e mando, q̃ nas proposicoẽs q̃ me fizerdes declareis sempre o tempo, q̃ os nomeados ouuerem seruido por fees de officios, aduertindouos, que sem isto se vos naõ respondera as vossas consultas e vos fareis q̃ esta carta se registe nos liuros da Veedoria dessa Prouinçia, e manifestar nas pracas della esta minha resoluçaõ para a todos ser notorio, o q̃ por ella ordeno, e mando. Escrita em L.ª a 8 de Julho de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado

Saluador Correa de Saa i benauides

Para o Gou.or das armas do Minho

1653 — JULHO — 10

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que Amo. Com carta uossa de 30 do passado se reçebeo a que tiuestes de Pº de faria gouernador do Castelo de Crasto Laboreiro; porque uos fez auizo do modo com que elle e seus soldados fizerão a prizaõ do

Gouernador, e Abade de Lobios, e outras pessoas, que por contemplaçaõ do gouern.[or] daquella prouincia tratauão introduzir pratica neste Reyno muito contra meu seruiço e auizaes tinheis mandado uir ahi os prezos, para com elles se fazerem as deligençias que tiuesseis por neçessarias te se descobrirem os portuguezes, que com elles costumauão communicar; E porque este negocio em q̃ tanto uai ao Reyno, he da importançia q̃ sabeis, e he preçizamente neçessario aueriguarse a uerdade, e substançia delle p.[a] conforme ao que se alcançar se acudir com remedio aqvilo que o pedir; Vos encomendo mvito que logo que reçeberdes esta carta (se ainda o naõ ouuerdes feito) ordeneis que os presos seiaõ examinados com todo o aperto, para que declarem os confidentes que tinhaõ dessa banda, que he o prinçipal intento, com que uos mandei encarregar aquella prisaõ; e de tudo o que disserem, e rezultar da deligençia, se faraõ autos que me remetereis com breuidade, aduertindo que rezultando culpa contra algum Portuguez, o prendereis logo antes que se possa auzentar. O cuidado com que dispuzestes este negoçio he m.[to] proprio de quem sois, e conforme ao q̃ sempre costumaes ter em meu seruico, Agardeçouolo m.[to] e da minha parte o fareis a P.[o] de faria certificandoo que plo que obrou nesta occasiaõ lhe mandarei fazer a merçe que ouuer lugar.

Escrita em Lix.[a] a *10* de Julho de 653.

*Rey*

P.[a] o Gou.[or] das Armas da prou.[a] de Entre douro e minho.

1653 — AGOSTO — 19

Vizconde amigo. Eu ElRey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Por outra carta minha de 9 de

Outubro do anno de 651 vos mandei auizar (como tambem se fez aos mais gouernadores das armas) da resolucaõ que fuy seruido tomar em ordem a naõ ser prouido em posto de guerra pessoa algua sem primeiro mostrar folha corrida porque conste que naõ esta obrigada a justiça nem cometeo crime de que esteja por liurar ordenando que nas proposicoẽs que se me fizessem se declarasse assy e que estauaõ habeis para entrar em meu seruiço, E porque tenho entendido que esta ordem se naõ obserua, e que no comprimento della ha omissaõ de que rezultaõ grandes inconvenientes a meu seruiço, e a boa administraçaõ da justiça por ser contra o que dispoem as leys do Reyno que naõ permittem que seja prouido em posto quem tiuer semelhante impedimento, Vos encomendo, e mando facaes que daqvi em diante pello que vos toca se obserue inuiolavelmente a ordem que sobre este particular tenho dado porque succedendo o contrario o estranharey muito, e demais de mandar depor os prouidos a todo o tempo que conste estaõ criminosos se uzara com elles da demonstracaõ de castigo que parecer a respeito da culpa que lhes achar. Escrita em Lx.ª 19 de Agosto de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado Pedro Cesar de Meneses

P.ª o G.ºʳ das armas da Prou.ª do Minho

1653 — AGOSTO — 31

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Considerando os inconvenientes que se seguem de, os Governadores, e mais ministros q̃ me seruem assi no Reino, como fora delle (cujos officios naõ saõ perpetuos) se ualerem de certidoes, instrumentos de testemunhas, cartas das camaras, e de outras pessoas sobre seus procedim.[tos] Hey por bem que daqui em diante senaõ aceite papel algũ desta qualidade em nenhum de meus tribunais (ainda q̃ se diga que naõ he procurado plos tais Ministros) durando o tempo de seus gouernos, e acabados elles, senaõ bastar o testemunho de suas residencias procuraraõ os que lhes bem estiuer. E porque conuem tenhais entendido esta minha resolucaõ, me pareceo fazermos della este auizo. Escrita em Lix.[a] 31 de Agosto de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado

Saluador Correa de Saa i benauides

P.[a] o Gou.[or] das armas da Prou.[ca] do Minho

1653 — SETEMBRO — 5

Vizconde amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquele que amo; Por conuir atalharse o dano que se segue de se hauer dar liberdade aos escrauos fugitiuos que se passaõ de hũ Reyno para outro, e de que se seruem todos pella falta que ha de gente de seruiço; Com attençaõ a isto e a que a hospitalidade senaõ deue permittir geralm.[te] em tempo de guerra, nem em preiuizo de terseiros; fuy seruido resoluer que os escrauos que se passarem para este Reyno se tomem por captiuos para meu seruiço, dandosse me conta em chegando para que com isto se euite o naõ uirem, nem fugirem. E pareceome auizaruos desta minha resoluçaõ para que na forma della facaes se proçeda daqui em diante pello que vos toca e esta carta se registara onde conuier para que a todo tempo conste do que por ella ordeno. Escrita em Lx.ª 5 de Set.ʳᵒ de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado Pedro Cesar de Meneses

P.ª o G.ᵒʳ das armas da Prou.ª do Minho.

1653 — SETEMBRO — 30

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. O mestre de Campo Manoel Lopes Brandaõ Gouernador do Castello de Viana me pedio lhe fizesse m.ᶜᵉ de lhe conceder l.ᵉª por tempo de dous meses para uir a esta corte acodir a algũs negocios q̃ diz tem nella de m.ᵗª importancia; E porq̃ tenho por justificadas as rasões perq̃ pede esta licença me pareceo ordenaruos lha concedais em meu nome pelo tempo que pede naõ hauendo inconveniente que obrigue ao contrario; e uos emq.ᵗᵒ durar sua auzencia encarregareis aquelle gouerno a pessoa de maior confiança, e fidelidade que uos parecer. Escrita em Lx.ª 30 de Setembro de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de Meneses

P.ª o Gou.ᵒʳ das armas da Prou.ᶜª do Minho

1653 — OUTUBRO — 10

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle q̃ amo. Tenho conuocado Cortes para esta cidade, que creo começaraõ a uinte do corrente, e determino jurar nellas o prinçipe Dom A$^{o}$ meu sobre todos mvito amado e prezado filho; e porque pla ocupação que de prezente tendes, naõ podeis uir a ellas; vos encomendo façais uosso procurador huã das pessoas que tem uoto p.$^{a}$ em uosso nome poder jurar e assistir às Cortes. Escrita em Lix$^{a}$ a *10* de Outr.$^{o}$ de *1653*.

*Rey*

P.$^{a}$ o Visconde de Villa noua.

1653 — OUTUBRO — 17

Bisconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Ao Vedor g.$^{al}$ dessa Prouinçia tenho comettido certa deligençia muito de meu seruiço, que pende dos liuros da Contadoria e Veedoria, e posto que de seu zelo e actiuidade fio o fara com todo o cuidado, quis tambem que corresse por uossa conta, o de lho applicardes, para que com mais atençaõ se empregue no negoceo, e satisfaça com a breuidade que tanto se lhe encomenda por carta particular. Escrita em Lixboa a 17 de Outt.$^{ro}$ de 653.

*Rey*

P.$^{a}$ o Bisconde de V.$^{a}$ Noua

1653 — NOVEMBRO — 5

Bisconde amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Sobre o L.$^{do}$ Belchior Salazar de Carualho jviz de fora de Guimaraẽs, por ordem que tinha da Rellaçaõ do Porto, naõ hauer querido remetter ao auditor da gente dessa prouinçia, Francisco Gomes de Brito, culpado numa resistençia, e Antonio Francisco, em algũs latrocinios, que se queriaõ valler do priuilegio de soldados, sem o serem, e os tinha presos na cadea da mesma Villa de Guimaraẽs, fui informado, o mandareis ameaçar com emprazamentos e prizoẽs, em caso, que elle naõ desse cumprimento a avoccatoria do auditor, remetendolhe os delinquentes. E porque, estando o negoçeo nesses termos, vos naõ toccaua proçeder na forma que me dizem, uos quiz aduertir, como por esta o faço, vos naõ torneis a intrometter, na administração da justiça, e deixeis correr os termos della, plos ministros a que pertençe, conforme o regimento, q̃ para semelhantes materias mandey dar. Escritta em Lisboa a 5 de Novembro de 653.

*Rey*

P.ª o Bisconde de Villa noua.

1653 — NOVEMBRO — 6

Bisconde Amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Por se me reprezentarem as queixas que ha na Villa de Barcellos do gouernador della Francisco Pereira Pinto, e particularmente a resistencia que elle, e Joaõ da Cunha Sargento mor cõ hum mulato seu tambor fizerão ao Lecenceado Manoel da Fonseca Tinoco Ouuidor da mesma Comarca, de que sahio ferido. Houue por bem fossem prezos, e remetidos a cadea da Rellação do Porto. E fiando de uos fareis esta diligencia cõ todo o segredo, a bom modo: me pareceo cometeruola (como por esta o faço) aduertindouos me hauerei por mal seruido se não surtir effeito. E se entenderdes ser mais conueniente para o ter, que a de a execuçaõ outro qualquer ministro, dispois de lhe encomendardes a cautella que tanto he necessaria em semelhantes negocios; me auizareis de seu nome, que se tomarã em lembrança, para que em cazo que não a ponha por obra; mande proceder contra elle como me parecer mais iustiça. Escritta em Lx.ª a *6* de Nouembro de 653.

*Rey*

P.ª o Bisconde de Villa noua.

1653 — NOVEMBRO — 28

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como Aquelle que Amo. Reçebeosse huã carta uossa em companhia de outra da Condeça de Cresçente que uos escreueo pella parte de Caminha, e auisaes que a reposta que lhe dereis fora reformar as ordeñs que tenheis passado para senaõ admittir com ella correspondençia, ou communicação alguã; e posto que emquanto uos ahi assistiz farão pouco dano suas cartas, me pareçeo conueniente o que dispuzestes, e uolo agardeço, nas mais fronteiras ha semelhante cuidado. Escrita em Lix.ª a *28* de Nouembro de *1653.*

*Rey*

P.ª o Vixconde de Villa noua de Cerur.ª

1652 — NOVEMBRO — 29

Visconde Amigo. Eu o Prinçipe vos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Tenho mandado leuantar quatro mil Infantes para assistirem nesta Corte e sua vezinhança, e tres mil mais para guarnição da Armada que tenho mandado fazer. E porque estes se haõ de fazer nas Comarcas de Ribatejo, pareçeo que os outros se deuiaõ fazer nas prouinçias mais distantes, e couberaõ a essa pla menor repartiçaõ, mil e trezentos: Encomendo-uos que logo que reçeberdes esta carta, e o regimento das leuas, os mandeis leuantar a tempo, que possaõ ser nesta Corte nos primeiros de M.[co] q̃ vem, e os hireis remetendo em tropas na forma costumada à ordem de Dom Aluaro de Abranches Mestre de Campo general junto à pessoa de El Rey meu s.[or] e pay. Para esta despesa se vos remetem em comp.[a] desta carta treze mil crusados e plas tropas q̃ forem uindo hireis auizando da despesa q̃ se faz com os socorros que p hora sahirá dos ditos treze mil cruzados p.[a] se uos prouer de outro dr.[o] sem faltar aquella qvantia neçessaria para as pagas dos soldados; e se uos pareçer conueniente remetelos por Mar o fareis p. Vianna. Escrita em Lix.[a] a 29 de Nour.[o] de *1652.*

*Principe*

P.[a] o Visconde de Villa noua de Ceru.[ra]

1653 — NOVEMBRO — 30

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.[to] saudar como aquelle q̃ amo. Antonio de Sousa Donatario do lugar de Val de Perdizes que está prisioneiro na Corunha, me representou os trabalhos, e incomodidades, que está padecendo naquella prisão ha qvatro annos, sem auer meio para conseguir liberdade; e que so agora com occasião da prisão que nessa Prou.[ca] se fez na pessoa de Dom Goncallo de Araujo Gouernador de Lobeos lhe disserão que o trocariaõ por elle. E porque Antonio de Souza por sua qvalidade, zelo, e seruiço he merecedor de todo o fauor. Vos encomendo procureis que o seu troco se effeitue logo por este gouernador para q̃ por meio delle, possa conseguir a liberdade q̃ pretende. Escrita em Lx.ª *30* de Nou.ʳᵒ de *1653*.

*Rey*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de Meneses

P.ª o Gou.ᵒʳ das armas da Prou.ᶜᵃ do Minho

1653 — DEZEMBRO — 20

Vixconde amigo. Eu El Rei uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Se qvizerdes acompanhar na jornada que a Viscondeca uossa molher me dizem faz a esta Corte a curarse de seus achaques, uos conçedo por esta carta liçença para o poderdes fazer aduertindo q̃ haueis de tornar a continuar o gouerno dessa prouinçia, que uos tenho encarregado. Escrita em Lix.ª a 20 de Dez.ʳᵒ de *1653*.

*Rey*

P.ª o Visconde de Villa Noua de Ceru.ᵃᵃ

1653 — DEZEMBRO — 24

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Luis de Magalhais que uindo do Maranhaõ, aonde seruio de Gou.ᵒʳ foi rendido de oito naos de Dunquerque, e Biscaya q̃ andauaõ a corso nesta costa, e leuado à Galiza aonde esta ha tres meses, me pedio lhe fizesse merce conceder p.ª seu troco à Simaõ de Mendoca

Arraes, que foi feito prision.$^{ro}$ em Tanger e por assi o pedirem os Ministros del Rey de Castella daquelle Reino. E porq̃ eu tenho dado para troco do capitaõ Joaõ Paes de Carualho q̃ ha m.$^{tos}$ annos esta prezo em Seuilha a Simaõ de Mendoca, e para este effeito o mandei leuar a Eluas, e por esta rasão senaõ poder trocar por elle Luis de Magalhais vos encomendo, o encarrego m.$^{to}$ procureis buscar algũ prisioneiro q̃ haja nessa prou$^{ca}$ p.$^{a}$ se trocar por elle Luis de Magalhais. E vos tereis cuidado de me auizar logo da diligencia q̃ nisto fizerdes. Escrita em Lx.$^{a}$ 24 de Dez.$^{ro}$ de 1653.

*Rey*

Dom Alu.$^{o}$ de Abranches
de Cam.$^{ra}$

Pedro Cesar de Meneses

P.$^{a}$ o Gou.$^{or}$ das armas da Prou.$^{ca}$ do minho

1653 — DEZEMBRO — 27

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.$^{to}$ saudar, como aquelle q̃ amo. O Sargento mor Manoel Ferreira Banha, e o capitaõ Manoel de Bulhoões, o Alferes Francisco Domingues e Joaõ de Mello, me representaraõ, q̃ uindo de meu seruiço do Maranhaõ, para este Reyno, com temporal arribaraõ ao de Galiza, donde foraõ prisioneiros, e o sargento mor afiançado veo a trattar de seus trocos pedindome se fizessem por outros castelhanos prisioneiros, encomendouos, e hei por muy encarregado, procureis por essa parte de vossa jurisdicaõ, qvanto antes for possiuel effeituar este troco com outros prisioneiros Castelhanos, ou Galegos de iguaes postos, para q̃ os nossos consiguaõ sua liberdade, e possaõ uir continuar meu seruico. Escrita em Lix.ª a 27 de Dez.ʳᵒ de 1653.

*Rey*

O Conde de Prado Pedro Cesar de Meneses

Para o Visconde Gou.ᵒʳ das Armas do Minho

1653 — DEZEMBRO — 31

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar, como aquelle q̃ amo. Dos sogeitos q̃ me propusestes para capitaõ da comp.ª de Infanteria, q̃ nessa frontr.ª do Minho uagou por falecim.ᵗᵒ de Pedro Roiz de Sousa, fuy seruido nomear ao Alferes Manoel Loureiro de Figueiredo prim.ʳᵒ proposto por Vos, de q̃ lhe tenho mandado passar patente, e pareçeome auisaruolo para q̃ o tenhaes entendido, Escrita em Lx.ª a *31* de Dez.ʳᵒ de *1653*.

*Rey*

O Conde de Prado

Saluador Correa de Saa i Benauides

P.ª o Gou.ᵒʳ das Armas dentre douro e Minho

1653 — DEZEMBRO — 31

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Vi a uossa carta de 9 do corrente, em que me propusestes a Ant.ᵒ de Barros de Vasconcellos p.ª Capitão da companhia de infantaria de soldados auxiliares que se hade formar na com.[ca] de Guimaraẽs; e porq̃ fui seruido nomealo p.[a] ella, e mandarlhe passar patente desta comp.[a] me pareceo auizaruolo p[a] que o tenhais entendido. Escrita em Lx.[a] 31 de Dez.[ro] de *1653*.

*Rey*

O Conde de Prado

Saluador Correa de Saa i Beneuides

P.[a] o Gou.[or] das armas da Prou.[ca] do Minho

1653 — DEZEMBRO — 31

Visconde amigo. Eu o Principe uos enuio m.[to] saudar como aquelle q̃ amo. Fui informado que a maior parte da gente das ordenanças do Reino esta desarmada, e porq̃ conuem saber que armas ha, de que qvalidade, e as q̃ faltaõ, resolui se faça Domingo que se contaraõ 19 do mes de Jan.[ro] proximo q̃ uem, mostra geral em todo o Reino para se saber assi com mais certeza as armas que ha, a qualidade dellas, e as q̃ faltaõ assi dos auxiliares como da gente da ordenança; e que de cada mostra se faça liuro com declaraçaõ, e confrontaçaõ das armas que ficara na Camara do lugar, e se remetera por copia ao Cons.[o] de guerra. E uos encomendo, e mando que no dia referido, facais se cumpra esta resolucaõ inuiolauelm.[te] em toda essa Prou[ca], e que se publiquem bandos contra quem comprar as ditas armas as pessoas q̃ são obrigadas a telas; e auizarme heis logo de como se cumprio, e executou esta ordem, e as copias dos liuros das mostras enuiareis dirigidas ao Cons.[o] de guerra com toda a maior breuidade possiuel, aduertindo tambem que nas pracas em q̃ ouuer soldados pagos para guarnicão dellas ou tendoos por alojamento no mesmo dia hão de tomar, e arrimar as armas, para que não se possa a gente da ordenança ualer dellas por emprestimo para a mostra g.[al] Escrita em Lx.[a] *31* de Dez.[ro] de *1653*.

*Principe*

O Conde de Prado

Saluador Correa de Saa i benauides

P.[a] o Gou.[or] das armas da Prou.[ca] do Minho

1654 — JANEIRO — 9

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Em carta uossa de 26 de Outubro do anno passado auisais das diligencias que fizestes com o Abbade e mais pessoas que prendestes por uos parecer tenhaõ neste Reyno comonicaçaõ em dano de meu seruiço, e de como contra Elle senão achou cousa algũa porq̃ mereção mais larga prisão da que te agora tem padecido. E porq̃ fui seruido conformarme com o q̃ uos parece naquella carta hey por bem que em conformidade da que nella se contem, executeis a soltura daquelles homeñs. Escrita em Lix.[a] a 9 de Janeiro de *1654*.

*Rey*

Para o Visconde de uilla noua de Seru.[ra]

1654 — JANEIRO — 23

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar, como aquelle que amo: Viosse o que na uossa de 17 de

Nouembro do anno passado de 653; em reposta de outra minha, de 6 do mesmo me reprezentastes, a fauor de Francisco Pereira Pinto Gouernador da comarca de Barcellos, do Sargento mor João da Cunha Soutomaior, e de hum seu atambor, que uos hauia encarregado, remete seis prezos a Rellação do Porto, pla resistencia feita ao ouuidor, da mesma Comarca, e naõ obstante as razoeñs, que apontastes; por hauer outras muytas informaçoeñs, de Menistros fidedignos, tomadas sobre o cazo, q̃ encontraõ a suspençaõ, do que acerca delle, tenho resoluto, vos encomendo mvito, e mando, deis toda a ajuda, e assistencia de offisiais, da guerra, que forem nesessarios, para que a prizão, desses delinquentes, se consigua, como tenho mandado escrita em Saluaterra a 23 de Janeiro de 654.

*Rey*

Para o Visconde de V.ª noua.

1654 — JANEIRO — 31

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.^to^ saudar como aquelle q̃ amo. Vi a uossa carta de 16. de Dezembro proximo passado, em que me dais conta da reformaçaõ que fizestes a Antonio Carneiro Capitaõ de huã das companhias da ordenança da Villa do Conde por graues queixas que achastes de seus procedimentos; Da eleiçaõ que tambem fizestes de outro Capitaõ na forma do Regim.^to^, saindo eleito por mais uotos Manoel do Couto de Azeuedo caualleiro do habido de Santiago. E do aggrauo que em rasaõ della tirou para a Relaçaõ do Porto o Capitaõ reformado Antonio Carneiro; E porque a cauza da reformaçaõ deste Capitaõ, e eleiçaõ de Manoel do Couto de Azeuedo pende por appellaçaõ no juizo da Assessoria do meu Cons.º de guerra, e nelle se tem mandado ajuntar os autos das queixas de Ant.º Carneiro q̃ accusais; me pareceo ordenaruos (como o faço) os enuieis logo, para q̃ com as noticias delles se possa tomar nesta matrª. a determinaçaõ que for justiça. Escrita em Lx.ª *31* de Jan.ʳᵒ de *1654*.

*Rey*

Saluador Correa de Saa i Benauides

Pedro Cesar de Meneses

P.ª o Gou.ᵒʳ das armas da Prou.ᶜª do Minho

1654 — JANEIRO — 31

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Encomendouos que quoando me propuserdes sogeitos para os postos de guerra dessa Prouincia, mandeis com as proposições as fees dos officios dos propostos para que uendosse tudo na Contadoria geral dde guerra desta Corte antes de se me consultarem pello meu Con.ᵒ de guerra, cessem as duuidas que de ordinario se poem nella a registar as patentes dos prouidos, por não terem os annos de seruiço, e os mais requesitos que dispoem o Regimento. Escrita em Lx.ª 31 de Jan.ʳᵒ 654.

*Rey*

O Marques Almirante

Pedro Cesar de Meneses

P.ª o G.ᵒʳ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — FEVEREIRO — 12

Visconde de Villa noua da Cerueira Amigo. Eu El Rey uos enuio m.$^{to}$ saudar, como aquelle que amo. Tenho entendido, que hauendo prezo, o l.$^{do}$ Joaõ Montt.$^{ro}$ de Miranda Juis de fora de Ponte de Lima a Manoel Pereyra Barreto, se lhe impedira, por uossa uia leuallo a Cadea, sem embargo, de uos requerer q̃ estaua culpado, em huma resistencia, e que na forma da lei nouicima, naõ podia gozar do preuilegio de foro de soldado. E porq̃ naõ sou, seruido, de semelhantes crimes ficarem sem castigo; vos encomendo m.$^{to}$ e mando façais logo restituir outra ues, Manoel Pereira prezo ao mesmo julgador. Escrita em Almeirin a 12 de Feuereiro de 654.

*Rey*

Para o Visconde de V.$^{a}$ noua.

1654 — FEVEREIRO — 19

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.$^{to}$ saudar, como aquelle q̃ amo. Recebeosse a vossa carta de 14 de Dezembro proximo passado, em q̃ me dais conta dos motiuos q̃ tivestes para mandar formar huã junta do corregedor da Comarca de Vianna, Auditor da gente de guerra dessa Prouincia, juizes de fora das Villas de Barcellos, e Ponte de Lima, para nella se sentencear huã deuassa, q̃ dizeis esta tirada, sobre a queixa q̃ os officiaes da Camara de Guimaraes, fizeraõ de francisco de Abreu Soares Sargento mor da quellla comarca, e hauendo uisto tudo o q̃ sobre este particular referis, e o mais, q̃ se conthem na vossa carta, e na do gouernador da Comarca de Guimaraes, Gregorio Ferreira Machado, q̃ com ella enuiastes, em q̃ se queixa da omissaõ com q̃ os officiaes da Camara da Villa de Guimaraes, se tem auido na formatura das companhias dos Auxiliares da quella comarca, (de q̃ fico aduertido) me pareceo ordenaruos, q̃ suspendais qualquer procedim.[to] que se aja procedido da junta, e remetais todos os autos, proçessos, e deuassa ao meu Conselho de Guerra, dando as rezoẽs q̃ tiuestes para o tal procedimento, tocando uos so o desentençear os delictos dos soldados pagos com o vosso Auditor, dando appellaçaõ, e aggrauo para o mesmo Cons.[o] aonde Eu os mandarey uer, e prouer no caso como conuier a milhor administraçaõ da justiça. Escrita em Lx.[a] a 19 de feuereiro de 1654.

*Rey*

Pedro Cesar de meneses

Para o gou.[or] das Armas da Prou.[a] Dentre Douro, e Minho.

1654 — FEVEREIRO — 19

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle q̃ amo. Por até Agora se não hauer declarado a q̃ julgadores toca passar as cartas de seguro aos officiaes, e soldados Auxiliares (que gozaõ dos priuilegios de pagos) nos crimes de que se liuraõ, ante seus juizes priuatiuos por euitar as duuidas q̃ nisto podem auer fuy seruido resoluer, e declarar, q̃ os Auditores geraes das Prouincias haõ de passar as taes cartas de seguro nos casos em q̃ o podem fazer os Corregedores das comarcas, e nos mais o juiz Assessor do meu Cons.[o] de guerra a que haõ de vir as appellacoẽs, como entendereis da copia do Aluara q̃ sobre este particular mandey passar, e se vos remette, para o fazerdes registar nas cabeças das comarcas dessa Prouincia de vossa jurisdiçaõ, para q̃ possa vir a notícia de todos o q̃ por elle ordeno. Escrita em Lx.ª a 19 de feu.ʳᵒ de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Saa i benauides

Pedro Cesar de Meneses

Para o Gou.ᵒʳ das Armas da Prou.ª dentre Douro e Minho.

1654 — FEVEREIRO — 28

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Por conuir muito a meu seruiço conseruarse, e fauorecerse a criaçaõ dos cauallos para a defensaõ do Reino e se sustentar a guerra. E por este respeito ser justo que aos superintendentes da criaçaõ, se lhes faça algũ fauor, para q̃ obrigados delle, naõ faltem à sua obrigaçaõ, e acudaõ a ella com melhor animo, e todo o cuidado. Hey por bem que os tais superintendentes naõ seiaõ obrigados a apparecer nos alardos, e mostras dos exercicios militares; e so o serão a ir as occasioẽs de guerra, qvando as ouuer. De que me pareceo auizaruos, para que tendo entendido esta minha resoluçaõ ordeneis pela parte q̃ nos tocar, que assi se execute e na conformidade della se proceda daqvi em diante. Escrita em Lx.ª 28 de feu.ʳᵒ de 654.

*Rey*

O Marques Almirante

Pedro Cesar de meneses

P.ª o gou.ᵒʳ das armas da Prou.ᶜª do Minho

1654 — MARÇO — 5

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Por cartas de 17 e 24 de Dezembro do anno passado uos mandei ordenar tratasseis da liberdade de Luis de Magalhães, do sargento mor Manoel ferreira Banha, do Capitão Manoel de Bulhoẽs e do Alferez francisco Domingues, e Joaõ de Mello, que uindo do Maranhaõ foraõ rendidos de hvñs nauios de Umquerque e leuados a Galiza onde estaõ, trocandoos por os presioneiros Castelhanos que o foraõ e estaõ nessa Prouinçia. E porque naõ se sabe que se haja executado aquella ordem, nem a que tambem se deu para se tratar da troca de Antonio de Souza donatario de Val de perdizes, antes se entendeo da petiçaõ que se vos remettera com esta carta, e se me presentou em nome do Capitaõ Diogo Nauarro e dos mais presioneiros que estaõ no Castello de Braga que estando padecendo aly neçessidades pretendem que por algua uia se trate do seu troco e liberdade, e he justo que assy seja; Vos encomendo procureis trocalos pellos presioneiros Portugueses de que acima se faz mençaõ e por quaesquer outros porque se possa effectuar o seu troco na forma das ordeñs que estaõ dadas para elles. Escrita em Lx.ª 5 de M.ᶜᵒ de 1654.

*Rey*

O Marques Almirante

Pedro Cesar de Meneses

P.ª o G.ᵒʳ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — MARÇO — 7

Bisconde Amigo. Eu El Rey uos inuio mvito saudar como aquelle que amo. Eraõ ia em Outubro prox.º passado os crimes de Manoel Pereira Fagundes, Assenço Leitaõ, Simaõ Pereira do Lago, e Domingos Leitaõ, filhos que ficaraõ de Gonçalo Pereira da Silua, e moradores na V.ª de Viana fos do Lima, de tanto escandalo; plo excesso cõ q̃ se cometeraõ; que plo Dez.º do Paço fui seruido mandallos prender; o que se naõ conseguio ate agora plas auzencias, e rezistencias q̃ fizeraõ a minhas iustiças, querendo dar execuçaõ a esta ordem: e porque de nouo assentaraõ praça de soldados para mais liuremente continuarem cõ os excessos q̃ costumaõ: Vos encomendo m.ᵗᵒ, e mando; q̃ cõ a cautella que este negocio pede, os façaes prender, e prezos ordennareis uenhaõ para a cadea da Rellaçaõ do Porto; onde se procedera na materia como parecer mais justo.

Escritta em Lx.ª a 7 de Março de *654*.

*Rey*

P.ª o Bisconde de V.ª noua da Seruʳᵃ

1654 — MARÇO — 13

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle que amo. Tenho resoluto que os cauallos que se tomarem para a remonta da cauallaria se comprem a seus donos pello justo preço e naõ se concertando os ministros que os tomarem com o dono do cauallo escolha cada hum delles huã pessoa que o aualie e naõ concordando as duas pessoas no preço que se deue dar por elle, elejaõ terceira, e pello que determinarem os tres se pague naõ abaixando do menor preço nem subindo do mayor dos louuados, E porque conuem muito a meu seruiço que assy se cumpra vos encomendo facaes que pontualm.ᵗᵉ se execute nessa Prouincia e que esta carta se registe na Contadoria g.ᵃˡ e nas Camaras dos lugares cabeça de

Comarca para que sempre haja memoria de que esta dada ordem para se cumprir por quem tocar.

Escrita em Lx.ª 13 de Março de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Saa
i benauides

Pedro Cesar de menezes

P.ª o g.ºʳ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — MARÇO — 13

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Por ser informado que estando Joaõ de Pina Velozo seruindo na Prou.ᶜᵃ da Beira no partido em que Dom Rodrigo de Castro gouerna as armas, com praça assentada de soldado, se passou a seruir a essa Prouᶜᵃ, e o esta fazendo nella na companhia do Capitaõ Fernaõ Leite Pina; E que por se auer auzentado sem l.ᶜᵃ, se procede contra seus irmãos por esta ausencia; E desejando eu atalhar a uexaçaõ que se lhes faz, vos encomendo q̃ constandouos que este soldado está seruindo nessa Prou.ᶜᵃ; o facais logo prender, e remeter a Dom Rodrigo para q̃ torne a continuar o seruiço naquelle partido na companhia, em q̃ nelle tinha assentado praça, antes q̃ passasse a seruir a essa Prou.ᶜᵃ Escrita em Lx.ª 13 de Março de *1654*.

*Rey*

Saluador Correa de Saa
i benauides

Pedro Cesar de menezes

P.ª o Gou.ºʳ das armas da Prou.ᶜᵃ de Entre Douro, e Minho.

1654 — MARÇO — 13

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Muito tempo ha que vos mandei remeter huas cartas de queixas contra os proçedimentos do gouernador da comarca de Barçellos e porque naõ tendes satisfeito a ordem que se vos deu e conuem mvito a meu seruiço e a boa administraçaõ da justiça terse entendido se as queixas foraõ justas ou injustas, vos encomendo satisfacaes logo aquella deligençia. Escrita em Lx.ª *13* de Março de 1654.

*Rey*

O Marques Almirante Pedro Cesar de meneses

P.ª o Vizconde g.$^{or}$ das armas da Prou.ª do Minho.

1654 — MARÇO — 13

Vizconde amigo. Eu El Rey vos inuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Por mvitas ueses tenho mandado aduirtir aos Ministros da guerra senaõ entromentaõ nas materias da iustiça, e gouerno politico das Camaras, e porq̃ sou informado q̃ ategora se naõ abstiueraõ deste exçesso, e conuem mvito a meu seruiço q̃ de nenhuã man.$^{ra}$ se intrometaõ nestas materias daqvi em diante, me pareçeo aduirtiruolo para q̃ assim o cumprais plo q̃ uos toca, e facais q̃ na mesma forma se cumpra plos Capitais Mores das pracas dessa Prouincia, e para q̃ aia sempre memoria de q̃ esta dada esta ordem, fareis q̃ esta carta se registe na Contadoria geral, e nas Camaras cabeça das Comarcas de uossa jurisdicaõ, auizandome de como assi se cumprio. Escrita em Lisboa *13* de Março de *1654*.

*Rey*

Saluador Correa de Saa
i benauides

Pedro Cesar de meneses

P.ª o gou.or das armas da Prou.ca do Minho

1654 — MARÇO — 20

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Hontẽ dia de saõ Joseph chegou aqvi o auizo que trouxe o Mestre de campo Andre Vidal de que os Portugueses que faziaõ a guerra em Pernambuco ganharaõ por forca de armas as fortificacões do Arrecife daquella Capitania, e a todas as mais pracas que os Olandezes occupauaõ no Brazil, ficando todas as daquelle Estado a minha obediencia, e uieraõ juntamente as capitulacoẽs com que se fez a ultima entrega, E como contentamento de me presuadir e ter por certo que neste felix successo se conheçe e experimenta com mayores euidencias a prouidencia e misericordia com que Deos nosso snor attende e fauorece a recuperaçaõ de tudo o que toca a este Reyno, e sua conseruaçaõ, rendendo a sua deuina Magestade as deuidas graças, me pareçeo mandaruos despachar este correo com este auizo e esta breuidade para que uos com a mesma facaes nessa fronteira todas as demonstracoẽs de festa, e alegria que em semelhantes occasioẽs se costumaõ fazer, procurando que estas nouas cheguem aos Castelhanos por todas as uias que tiuerdes por conueniente, e a Rellaçaõ do sucesso, e capitulacoẽs com que se fez a ultima entrega se fica pondo em limpo e copiando para se vos enuiarem como se fara. Escrita em Lx.ª *20* de M.ᶜᵒ de *654*.

*Rey*

P.ª o g.ᵒʳ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — MARÇO — 28

Bisconde de Villa noua de Ceru.ʳᵃ Amigo; Eu El Rey vos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Pella carta de que se uos remete copia que mandey escreuer aos Mros. das Juntas geraes de Guimaraẽs, Braga, Viana e Barcellos, vereis o que lhe ordeno em rezaõ da lancam.ᵗᵒ da decima dereita com que nestas Cortes se assentou contrebuisse o Rn.ᵒ para sua deffensa, e que o fundam.ᵗᵒ que ouue para se aceitar foy que lancandosse ajustada m.ᵗᵉ e dandosse justo ualor aos fruitos como se me reprezentou por meus vassallos, hauia de importar m.ᵗᵒ mais de hum milhão e trezentos mil $z.ᵒˢ E porque tenho encomendado aos supperintendentes das ditas Com.ᶜᵃˢ o effeito destes lancam.ᵗᵒˢ e que seja sem se diminuir na quantia que importauaõ os que estauaõ feitos, a que ainda Respeito do ajustam.ᵗᵒ e justo vallor dos fruitos se podera dar mayoria, e lhe ordeno que se conuier para se conseguir o negocio se valha de vos para que assistaes a elle, me pareçeo encarregaruos que tendo auizo seu trateis logo com todo bom modo e suauidade se faca meu ser.ᶜᵒ dandose comprim.ᵗᵒ ao que pella dita carta ordeno, significando aos mros. das Juntas quanto isto conuẽ ao bem comũ para conservaçaõ do Rn.ᵒ e qvietaçaõ de meus vassallos que he o que trago diante dos olhos. Escripta em Lx.ª a 28 de m.^co^ de 1654.

*Rey*

Dom Alu.º de Abranches
de Cam.^ra^

Para o Gou.^or^ das Armas da Prou.^ca^ do Minho

1654 — MARÇO — 31

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle que amo. No cap.º *14* dos que se me offereceraõ nestas Cortes por parte da Cidade de Miranda se me pedio mandasse que aos officiaes da guerra de Thenente e Alferez para cima inclusiue senaõ dem cazas nem alojam.^tos^ e os paguem por seu dinheiro, querendoos, e que os pagadores satisfaçaõ aos donos das cazas nos pagamentos que fizerem o que dellas se lhes deuer; E porque fuy seruido resoluer que aos officiaes da miliçia se lhes naõ dem cazas sem as pagarem ficando para este effeito na maõ dos pagadores o que for necessario de seu soldo; me pareçeo auizaruolo, e ordenaruos facaes que na forma desta minha resolucaõ se proceda daqvi em diante nessa Prouinçia aduertindo que terey descontentamento de senaõ executar pontualm.^te^ Escrita em Lx.ª *31* de M.^co^ de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Sáa
i benauides

Pedro Cesar de menezes

P.ª o g.^or^ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — MARÇO — 31

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.[to] saudar, como aquelle q̃ amo. Por parte do Estado do pouos do Reyno se me pedio q̃ na conformidade do Cap.[o] 31. q̃ presentaraõ em Cortes, q̃ o Real dagoa q̃ alguñs imposeraõ sobre sy voluntaria m.[te] para sua propria defensa, e outras conueniencias, mandasse q̃ se naõ diuirta contra uontade dos Moradores, e se gaste no a q̃ se aplicou, e o q̃ o Reyno offereçeo nas primeiras Cortes, se guarde seu Regim.[to] e se naõ altere, e que pellos Prouedores das Comarcas, e justiças dos mesmos lugares se arrecade cada anno, naõ auendo Ministros nem superintendentes particulares p.[a] sua recadaçaõ. E porq̃ fuy seruido resoluer, q̃ o dinheiro procedido dos reaes dagoa, de q̃ o dito Cap.[o] tratta das praças tam vezinhas da Raya q̃ naõ tenhaõ outras q̃ as cubram se despenda nas mesmas praças, com ordem do Gou.[or] das Armas da Prouincia, q̃ lhe mãdara Engenheiro por cuja planta se trabalhe; e que nas mais praças, q̃ tiuerem outras q̃ as cubraõ, se guarde o q̃ tenho resoluto, e me pareceo auisaruos desta minha resoluçaõ para q̃ tendoa entendido façais pello q̃ uos toca, q̃ na forma della se proçeda, ordenando q̃ esta carta se registe nos liuros das camaras dessa Prouincia, e onde mais conuier p.[a] q̃ sempre conste o q̃ por ella mando. Escrita em Lx.[a] a *31* de M[co] de *1654*.

*Rey*

Saluador Correa de Saa
i benauides

Pedro Cesar de meneses

Para o Gou.[or] das Armas dentre Douro e Minho

1654 — MARÇO — 31

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Os tres Estados do Reyno me pedirañ em Cortes que os Capitaẽs mores das ordenanças sejañ somente por tres annos o nañ forem os Alcaides mores porque de serem estes cargos prepetuos se seguem grandes opressões aos pouos. E porque eu fuy seruido hauelo assy por bem, e que acabados os tres annos se lhes tome residençia (como ja o resolui) e se nomeem outros, me pareçeo auizaruolo para o terdes entendido, e fazerdes que esta carta se registe nos liuros das Camaras cabeça das comarcas dessa Prouincia e onde mais conuier para que sempre haja noticia desta minha resoluçañ. Escrita em Lx.ª 31 de Março de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Saa
i beneuides

Pedro Cesar de meneses

P.ª o g.ºʳ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — MARÇO — 31

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar, como aquelle q̃ amo. Tendo resoluto por decreto de *10* de Out.º proximo passado q̃ se tomasse cada tres annos residencia aos gouernadores das armas das Prouincias, e mais Cabos de guerra de todo o R.º e pedindome de nouo os tres Estados delle em Cortes pelo cap.º 29. dellas, que se tome residencia aos Gou.ʳᵉˢ das armas, e aos das praças, assi como se toma aos Visorreys da India, e Capitaẽs de Africa;

e que a mesma se tome aos Capitaẽs mores. Vedores gerais, e mais officiais da Vedoria; e Coudeis mores. Houue por bem que na forma daquella resoluçaõ, e deste capitulo, se faça assi daqvi em diante. De que me pareceo auizaruos para q̃ a tenhais entendido, e façais registar nos liuros da Contadoria g.[al] dessa Prou[ca] para a todo o Tempo constar della. Escrita em Lx.[a] *31* de Março de *1654.*

*Rey*

Saluador Correa de Sáa
i benauides

Pedro Cesar de meneses

P.[a] o gou.[or] das armas da Prou[ca] do Minho

1654 — ABRIL — 18

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.[to] saudar como aquelle q̃ amo. Entendi q̃ prendendo o C.[or] da comarca de Viana por ordem minha a Fran.[co] P.[ra] Pinto cap.[ro] mor de Barcellos querendo traselo a cadea da R.[cam] do Porto na conformidade q̃ eu tinha mandado lho impidireis pondo a porta da cadea dose soldados p.[a] onaõ deixarem sair, e entendi maes q̃ remetendouos o c.[or] do crime daquella R.[cam] uma carta minha em q̃ uos mandaua dar ainda e fauor aquella prisaõ afim de q̃ naõ impidiseis ser leuado o preso e recebendoa uos, acresentareis maes uinte homẽs a guarda da cadea. Outrosi entendi q̃ mandando ao iuis de fora de Ponte de Lima prendesse a Joaõ da Cunha querendoo fazer lho impidireis sendouos presente naõ soo as culpas destes homẽs mas tendouos encargado suas prisões; e porq̃ o procedim.[to] q̃ nisto tivestes he m.[to] encontrado com o q̃ deueis a quem soes e ao posto de q̃ uos encargei me pareçeo extranhar isto m.[to] e diseruos q̃ me hey por m.[to] mal seruido de uos. Logo q̃ receberdes esta carta tirareis da guarda da cadea os soldados q̃ lhe mandastes por, e enuiareis logo preso a cadea do Porto a Joaõ da Cunha q̃ sei tinheis e me disem tendes ainda em uossa casa, e estae m.[to] certo q̃ se dilatares por qualquer tempo a execusaõ desta minha ordem hey de tomar disso m.[to] maior desprazer do com q̃ me deixa o procedim.[to] com q̃ uos ouuestes nesta occasiaõ. Escrita em Alcantara a 18 de Abril de 654.

*Rey*

P.[a] o Visconde de Villa noua de Serueira

1659 — MAIO — 9

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar, como aquelle que amo. Tendo respeito à idade e achaques com que se acha Manoel Lopes Brandaõ, gou.[or] do Castello de Vianna; fuy seruido nomearlhe successor. E porque he razaõ que venha a esta corte tratar de seus despachos, e de outros negocios que diz que tem, e pedem sua assistençia. Vos ordeno que em meu nome lhe concedaes a licença necessaria, para vir tanto que largar o gouerno do dito Castello á pessoa que lhe vay succeder. Escrita em Lx.[a] a 9 de Mayo de 659.

*Raynha*

Ruy de Moura    Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1654 — MAIO — 20

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Vy as uossas cartas de 22 de Marco e 8 de Abril com os boletiñs do gou.$^{or}$ de Galiza sobre a troca de Luis de Magalhaes e outros presioneiros que o foraõ no nauio que uinha do Maranhaõ e Antonio de Souza de Val de perdizes com outros presioneiros Castelhanos que estaõ desta banda, e as repostas q̃ fizestes aos taes boletiñs, e o que em rezaõ deste negoceo appontaes. E pareceome dizeruos que deueis responder em outro boletim que ja que elles querem regular a Luis de magalhaes e seus companheiros uindo naufragados do Maranhaõ por presioneiros dos da conuencaõ que esta feita para os que se aprisionaõ nesta guerra, uos lhe remetteis em seu troco (como o fareis) os prisioneiros que elles pediraõ por elles, que saõ o Capitaõ Diogo Nauarro, Joaõ Baptista Butican, francisco de Groua, P.$^{o}$ Caualhero, e o cabo de esquadra do Capitaõ fuente fria comque fica liure Luis de Magalhaẽs da obrigaçaõ que fez de tornar a prizaõ de que saio com seus companheiros senaõ tiuesse effeito este troco em que naõ se fallou em Simaõ de Mendoça aduertindolhes que ainda que de antes se tinha pedido em troco por Luis de Magalhaẽs como se reffere no boletim de 31 de março se hauia feito no de 9 de Nouembro, por antes estar resoluto que se trocasse por o Capitaõ francisco Paez de Carualho que se fez presioneiro nas Indias e ha doze annos esta prezo em Seuilha e para este effeito remetido Simaõ de Mendoça a Eluas donde passou a Castella para effectuar o seu troco ou tornar a prizaõ, de nenhua maneira se podia dar em troco de Luis de Magalhaẽs, nem alterarse a resolucaõ que se tinha tomado estando Simaõ de Mendoca na juridiçaõ do Gou.$^{or}$ das armas de Alentejo em que Vos uos naõ podieis intrometer, e que elles reconhecendo a justificaçaõ desta rezaõ pediraõ tanto despois pellos presioneiros do nauio do Maranhaõ os que se lhe daõ, e procurareis tambem que uenha Antonio de Souza por troco do s.[r] de Lobeos como elles dizem em hũ destes boletiñs, o enuiariaõ, aduertindolhes tambem que Simaõ de Mendoça satisfara a sua obrigaçaõ pella parte por donde se lhe conçedeo licença para ir effectuar o seu troco, e que se o naõ fizer pella mesma parte se tomara a satisfacaõ que parecer em que uos naõ podeis intrometer sendo aquella differente jurisdiçaõ da uossa. Escrita em Lx.[a] *20* de Maio de 1654.

*Rey*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de menezes

P.[a] o g.[or] das armas da Prou.[a] do Minho

1654 — MAIO — 21

Bisconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.[to] saudar, como aquelle q̃ amo. Viraõsse as uossas cartas, em que me dais conta das Alfandegas, que por ordem uossa se abriraõ, nas V.[as] de Arcos, e Melgaço e porque para se rezoluer esta materia, que he da importancia que uos deve ser bem prezente, he primeiro necessario, saber as rezoẽns que uos moueraõ, para o pordes, em execuçaõ, e as ordeñs que tiuestes para assim o fazerdes, me inuiareis logo mvito por menor as copeas das que se uos mandaraõ, porque fazendosse deligencia, nos tribunais a q̃ tocaua expediruollas, senaõ acha nelle, memoria nenhuã de esta mat.[ria] escriptta em Alcantara a 21 de Maio de 654.

*Rey*

Para o Bisconde de V.[a] noua

1654 — MAIO — 23

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.[to] saudar como aquelle q̃ amo. Sou informado, que do dinheiro das terças, que mando entregar para os fortificacoẽs das praças fronteiras a Castella, se tem despendido em cada hũ anno desaseis contos de rs, em rasão do que he de crer teraõ crecido m.[to] as obras; e porq̃ eu quero saber o q̃ esta feito, e despendido em cada Prou[ca] assim do dinheiro das tercas, como do Real dagoa applicado as fortificacões; Vos encomendo e mando me facais de tudo huã relacaõ, plo que toca a essa Prou[ca] com toda a distinçaõ, e separaçaõ, para q̃ della se possa ver com clareza, o que se tem despendido deste din.[ro], e obrado com elle. Escrita em Lx[a] 23 de Maio de 1654.

*Rey*

O C[de] de uilar maior

Saluador Correa de Sáa
i benauides

P.[a] o gou.[or] das armas da Prou[ca] do Minho

1654 — MAIO — 23

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por ser informado que Manoel de Souza de Abreu Gouernador da praça de Villa noua de Cerueira nas palauras que teue com o lecenciado Antonio Gomez dos Reys juis de fora nella sobre materias de seu offiçio, excedeo os termos da cortezia com que he bem se tratem os ministros da justiça, dando com isto occasiaõ a que outros, ualendosse deste roim exemplo possaõ fazer o mesmo, uos encomendo lhe aduirtaes que daqvi em diante se haja com julgadores mais modesto e com toda a qvietaçaõ porque do contrario me hauerey por mal seruido delle. Escrita em Lx.ª 23 de Maio de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Sáa
i benauides

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Gou.^or das armas da Prou.ª do Minho

1659 — MAIO — 26

Bisconde Gou.^or amigo. Eu El Rey uos enuio m.^to saudar como aquelle q̃ amo. Por decreto de 14 de Jan.^ro deste anno, fuy seruido ordenar, q̃ toda a decima dessa Prou.ª se gastasse na guerra della por assy o pedirem as necessidades, q̃ ahy se padeciaõ. espera q̃ haja toda a boa forma na arrecadaçaõ deste effeito, fuy seruido resoluer, em 14 do corrente. Que os Thesour.^os gerais das comarcas dessa Prou.ª entregassem todo o dinhr.º procedido das decimas, assy Ecc.^as como seculares ao Pag.^or g.^al della e na mesma forma os Thesour.^os dos Cabbidos, e com conhecimentos em forma do Pag.^or g.^al lhe ficariaõ as entregas correntes, p.ª suas contas. como ficauaõ qvando as faziaõ aos assentistas. e q̃ o uedor g.^al fosse obrigado em fim de cada mes enuiar a junta dos trez estados huã certidaõ do dr.º q̃ recebeo o Pagador, com o treslado das addiçoẽs de receita; pera aqvi se remeter ao registo geral, e hauer a conta e rezaõ nelle necess.ª Do q̃ uos faço auiso, p.ª na forma referida, o fazerdes e deixardes executar, m.to pontualm.te. Escrita em Lx.ª a 26 de Mayo de 659.

*Raynha*

Dom Pedro de meneses

P.ª o Bisconde de Villa noua da Ceru.ra gou.or das armas da Prou.ª do Minho

1654 — MAIO — 30

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Hauendome o superintendente da Contadoria geral de guerra desta Corte dado conta da omissaõ com q̃ o Vedor geral dessa Prou.ca Antonio de Salinas, se tem hauido no comprimento da ordem que lhe passou para mandar relaçaõ, e listas (na conformidade de hũa ordẽ minha) dos cabos, e officiais de guerra q̃ seruem nessa Prou.ca, e dos soldos q̃ uencẽ, sem ate gora o hauer feito, nem serem bastantes as lembranças que para isso lhe fez por algũas ueses; Me pareceo encomendaruos o mandeis logo emprasar por o Ministro a que tocas fazer esta diligencia, para q̃ do dia q̃ se lhe fizer o emprazamento a vinte dias logo segvintes se uenha apresentar no meu Concelho de guerra, p.ª nelle dar uocalm.te a razaõ, porq̃ naõ comprio a ordem do superintendente da contadoria geral: E vos lhe mandareis por nota em seu soldo; e me auizareis do dia em que se lhe fez a notificaçaõ para o ter entendido. Escrita em Lx.ª *30* de Maio de *1654.*

*Rey*

O Conde de Prado

O Cde de uilar maior

P.ª o Gou.or das armas da Proуca do Minho

1654 — JUNHO — 8

Vizconde amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Os auizos que de proximo se tiueraõ dos mouimentos que ha em Castella e das pazes feitas entre Ingrezes, e Olandeses e do poder que cada huã destas naçoẽs tem preuenido no mar obrigaõ a que se esteja com todo o cuidado, e particularmente nos portos maritimos deste Reyno, E pareceome mandaruolo aduertir para que procureis que no de Vianna e Caminha, e nos demais de uossa jurisdiçaõ haja toda a preuençaõ e uigilancia que conuem, e assy uolo hey por mui encomendado. Escrita em Lx.ª *8* de Junho de *1654*.

*Rey*

O Marques Almirante     O C.$^{de}$ de Cantanhede

P.ª o g.$^{or}$ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — JUNHO — 10

Bisconde amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. A atrocidade do caso do homem que outros a titulo de soldados, fraudulentamente, mataram a noite de 2. de Março passado no Concelho de Baiam, cauzou, dessa banda, o escandalo que vos devia ser presente por via do L.$^{do}$ Gaspar d'Abreu de Freitas corregedor e provedor da comarca do Porto, plo avizo que m'escreveo vos fezera. E porque convem muito naõ faltar a justiça, de sua parte, com a demonstraçam que semelhantes excessos merecem, vos encomendo mvito e mando, façaes a diligencia possivel, por serem prezos os homicidas (q̃ s'entende andam nessa fronteira) e remetidos logo a cadea da Rellaçam do Porto. E da mesma man.[ra] vos hei por mui encarregado ordenneis ao juiz de fora de Monsam Alexandre da Costa auditor da praça de Salvaterra, que com motivo de s'achar fixada, na parede dos armazeĩs della, a maõ do morto com hum quarteto escritto em papel, prendeo a Innacio Çalema soldado por presvnçam que delle achou, o tenha a abom recado ate ser remetido, na forma referida, para a cadea do Porto com os mais aggressores Manoel Alurs. soldado e Domingos Antonio caminheiro e outros tanto que forem achados. De novo vos torno a recomendar a puntual execuçam e brevidade desta diligencia, posto que de vosso zelo fio, naõ seria necessario, por ser materia tanto do serviço de Deos e meu naõ dissimular o castigo dos culpados. Escritta em Alcantara a 10. de Junho de 654 — A mesma diligencia ordenareis se faça por ser prezo e remetido a cadea do Porto, o capitam de Melgaço, Manoel Barbeita a q̃ o morto, dizem, havia dado com hum pao, mais de quatro annos, antes, e o juiz de fora de Monsam, avizou ter pronunciado, a esse respeito, pla mesma morte.

*Rey*

P.[a] o Bisc.[de] de V[a] nova

1654 — JUNHO — 11

Visconde de Villa noua de Cerueira amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como Aquelle que Amo. Encomendouos vejaes a copia do decreto que mandei passar ajunta dos tres estados em 11 de Agosto do anno passado sobre naõ hauer primeira plana em meus Exerçitos, e se pagar aos offiçiaes e soldados com igualdade qvando o dr.º naõ chegue, p.ª que por uossa parte o executeis muito pontual, e inteiramente, e façais registar nos liuros e pastas q̃ conuier para que uenha a notiçia de todos e senaõ possa allegar ignorancia em tempo algum. Escrita em Alcantara a *11* de Junho de 1654.

*Rey*

P.ª o Visconde de Villa Noua de Ceru.ra

*Copia*

A Junta dos tres Estados tenha entendido, que em observancia do Cap.º 35 do Vèdor g.l se ha de pagar a gente de guerra daqui por diante sem ventagẽ, ou diferença dos Cabos mayores aos soldados razos: em tal forma, que quãdo se fizer pagamento, hade ser igualm.te a todos, começando pelos soldados, e naõ chegando o dinhr.º, se hade fazer rateo a todos, naõ usando a q̃ chamaõ prim.ra plana, naõ havendo precedencia, ou ventagem de hũ a outro sojeito. Advertindo, q̃ o Gou.or das armas, ou a qualquer outra pessoa, q̃ alterar esta resoluçaõ minha, se porá logo sequestro em toda sua faz.da, e sob a mesma pena mo avisará o Pagador, e mais pessoas, a q.m toca fazer semelhantes pagam.tos Nesta conformidade se passem pela junta os despachos necessarios. Em Lx.ª a 11 de Ag.º de 1653.

1654 — JUNHO — 12

Vizconde amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Vy a uossa carta de *23* do mez de Março proximo passado em que me destes conta de hauer em 9. do mesmo amanhecido na praca de Saluaterra huã maõ de hũ homẽ pregada na parede do Almazem de fronte do corpo da guarda com a copla de que enuiastes a copia e de se hauer alcancado pello que constou da deuaca que tirou o juiz de fora daquella praça, e mais deligencias que fizestes ser a maõ de hũ soldado que matou o Capitaõ Manoel de Barbeite do padraõ para cuja prizaõ tinheis dado ao ordẽs necessarias. E porque conuem m.[to] que naõ fique sem castigo hũ cazo tam atros, como he este, uos encomendo, e mando facaes todas as deligencias que forem possiueis por prender este Capitaõ, e os mais compliçes nelle para se proceder contra elles como for justiça, auizandome do que nisto obrardes para o ter entendido; e tambem mando ordenar ao Auditor geral da gente de guerra desta Corte que procurando saber se algum dos delinquentes anda nella o prenda e faca por a bom recado. Escrita em Lx.[a] *12* de Junho de 1654.

*Rey*

O Conde de Prado

O C.[de] de uilar maior

P.[a] o g.[or] das armas da Prou.[a] do Minho

1654 — JUNHO — 16

Vizconde amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Com boas consideracões de meu seruiço, e do bem comum do Reyno, e por cabedal distinado para a guerra naõ permittir fazeremse tam grandes despezas como atte agora se tem feito com os soldos dos tres mil crusados que se da aos Gouernadores das armas das Prouincias fuy seruido resoluer que elles naõ gozem daqui em diante mais de sincoenta mil r. de soldo por mez. e pareceome auizaruos desta minha resolucaõ para que tendoa entendido façaes que esta carta se registe nos liuros da Veedoria, e Contadoria g.[al] dessa Prouincia e me auizeis de como assy se cumprio. Escrita em Lx.[a] 16 de Junho de 1654.

*Rey*

O C.[de] de Prado

O C.[de] de uilar maior

P.[a] o g.[or] das armas da Prou.[a] do Minho

1654 — JUNHO — 22

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.[to] saudar, como aquelle q̃ amo. Tenho noticia q̃ alguns soldados, e officiaes da Milicia, com pretexto de saberem se vaõ mal, ou bem despachadas as fazendas comq̃ os Almocreues de ordinario caminhaõ pellas estradas publicas, (na volta desta deligencia, q̃ lhes naõ toca) fazem alguñs descaminhos, e roubos aos passageiros, de q̃ se segue grande damno assy a elles, como as pessoas cujas saõ as mercadorias; E porq̃ conuem m.[to] remedearense as queixas, q̃ cada hora ha destas desordeñs. Vos encomendo, e hei por muy encarregado, procureis se tenha nisto particular cuidado, e vigilancia, e para q̃ a todos seja notorio, facais publicar nos lugares, e praças de vossa jurisdiçaõ, q̃ nenhum soldado, ou official da Milicia entenda com os Almocreues, ou outras quaisquer pessoas, q̃ caminharem com mercadorias, nem lhes impidaõ fazerem suas jornadas, para assim cessarem as taes queixas, e damnos, porq̃ para se valer se pagaraõ os direitos a minha fazenda, se criaraõ os Ministros, e guardas della, a quem toca a aueriguaçaõ deste negocio, com cominaçaõ q̃ contra os q̃ naõ obedecerem, mandarey proceder com o castigo q̃ merecerem. Escrita em Alcantara a 22 de Junho de 1654.

*Rey*

Saluador correa de sáa
i benauides

Pedro Cesar de meneses

Para o Gou.or das Armas dentre Douro e Minho

1654 — JUNHO — 26

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Por carta de *31* de Março proximo passado, vos mandei auisar da resoluçaõ que fui seruido tomar no cap.o 31 dos que por parte dos pouos se me representaraõ nestas ultimas Cortes, para que o dinh.ro do Real dagoa que elles impuzeraõ sobre si senaõ diuertisse contra uontade dos moradores, e se gastasse no aq̃ se applicou, despendendosse na fortificaçaõ dos mesmos lugares que estiuessem vesinhos a raya, e naõ tiuessem outras praças, que os cobrissem; E porque sou informado que neste din.ro ha algũs descaminhos, a que convem atalhar. Hey por bem que o procedido dos reaes dagoa dessa Prou.ca se ponha em deposito, e se naõ despenda deste dinheiro cousa alguã sem ordem do Gou.or das armas della, e nas obras que elle determinar mandando as ver por Engenheiros como tenho resoluto; e que em nenhũ cazo tenhaõ as Camaras administraçaõ, nem jurisdiçaõ alguã neste dinheiro. E vos pla parte q̃ uos tocar ordenareis q̃ assi se execute. Escrita em Lx.ª 26 de Junho de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Sáa
i benauides

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Gou.$^{or}$ das armas da Prou$^{ca}$ do Minho

1654 — JUNHO — 29

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Hauendo uisto a uossa carta de 9 do presente, e entendido della e da do Alcaide mor da praça de Caminha que juntam.$^{te}$ enuiastes as noticias que por quella parte se tem alcançado dos mouimentos que faz o inimigo com intento de obrar alguã façaõ nessa Prouinçia, me pareceo dizeruos que disto, e do mais que refferis na uossa carta fico aduertido. Escrita em Lx.ª *24* de Junho de 1654.

*Rey*

Saluador Correa de Saá
i benauides

Dom Alu.º de Abranches
de Cam$^{ra}$

P.ª o g.$^{or}$ das armas da Prou.ª do Minho

1654 — JUNHO — 30

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.[to] saudar como aquelle q̃ amo. Por os danos q̃ tem causado a meu seruiço as entradas em Castella. Hey por bem senaõ façaõ daqvi em diante sob pena de cazo maior sem licença minha dada por escrito que se me pedira quando ouuer occasiaõ que o mereça; saluo para ir tirar ao inimigo alguã preza que leue do R.[no] e nesta occasiaõ naõ so lha poderaõ tirar, mas fazer lhe todo o dano e trazer lhe tudo o que puderem; e saluo outrosi qvando forem tomar lingoa, mas neste cazo, senaõ tomara ao inimigo cousa alguã, e so se tratara do effeito a que se uay E pareceome mandar uos auisar logo da resoluçaõ referida, para que plo que toca a esse partido se execute, e cumpra inuiolauelmente. E para que haja sempre rasaõ, e memoria della, fareis que esta carta se registe nos liuros do soldo dessa Prou[ca] auisandome, de que assi se cumprio. Escrita em Lx.[a] 30 de Jvnho de 1654.

*Rey*

O Conde de Prado

O C.[de] de uilar maior

P.[a] o g.[or] da Prou[ca] do Minho

1654 — JULHO — 9

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.[to] saudar, como aquelle q̃ amo. Hauendo uisto a vossa carta de 9 do mes de junho proximo passado, e as rezoẽs, q̃ tiuestes para naõ executardes a ordem, por q̃ vos mandey emprazasseis a Antonio de Salinas Veedor geral dessa Prouincia, q̃ pareçesse no meu Cons.º de guerra, a dar a rezaõ porq̃ naõ satisfes às ordeñs q̃ lhe enuiou o Supperintendente da Contadoria geral, em q̃ lhe pedio rellaçaõ dos Cabos, e officiaes q̃ nella seruem, Me pareceo dizeruos, q̃ Hey por bem suspendais na execuçaõ da dita ordem. Escrita em Lx.ª a 9 de Julho de 1654.

*Rey*

O C.de de uilar maior     Pedro Cesar de menezes

Para o gou.or das Armas do Minho

1654 — JULHO — 9

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar, como aquelle q̃ amo. Hauendo uisto a vossa carta de 17. do passado, em q̃ me destes conta, de q̃ a junta de gente, q̃ o inimigo fazia e do effeito, para q̃ Vos diziaõ q era, sem o conseguir, nem o intentar, a tornaua a desfazer, e o mais q̃ referis, me pareçeo dizeruos q̃ de tudo fico aduertido, e com isso se escusa irem os dous cabos q̃ eu mandaua a essa fronteira, nesta occasiaõ. Escrita em Alcantara a 9 de Julho de 1654.

*Rey*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

Para o Gou.or das Armas do Minho

1654 — JULHO — 11

Bisconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.[to] saudar, como aquelle que amo. Viraõse as uossas cartas, em que refferis as rezoeñs, que uos mouerão, para sem embargo, daque fui seruido, mandaruos escreuer, em 12 de Feuereiro, proximo passado, que entregasseis, Manoel Pereira Barreto, ao L.[do] Joaõ Mont.[ro] de Miranda, Juis de fora de Ponte de Lima, que hauia prezo; o naõ fazerdes; E porque se me naõ reprezenta, cauza bastante, para naõ executardes logo, e com a pontualidade, que he justo, a ordem que sobre esta materia, seuos expedio, tanto que receberdes esta, a dareis a execuçaõ, entregando o prezo, ao mesmo julgador; e para daqui em diante, ficareis, com aduertencia, do modo em q̃ deueis tomar, e mandarme semelhantes informaçoeñs. Escrita em Lix.[a] a 11 de Julho de 1654.

*Rey*

Para o Bisconde

1654 — JULHO — 14

Bisconde de Villa noua amigo. Eu El Rey vos enuio mvito saudar como aquelle que amo. Por ser informado do pouco fundamento que teuestes, para com menos causa do que as occasioẽs o pediam, cometerdes, por termos pouco ajustados, a execuçaõ de alguãs diligençias ao Corregedor da Comarca de Vianna fora do destritto della, naõ faltando outros ministros da justiça, mais desocupados, que como auditores da gente de guerra, ou o auditor geral della, o puderaõ fazer; volo qviz aduertir, como por esta o faço, paraque o naõ occupeis, outra vez em cousa alguã. E porque naõ sou seruido, que aos Corregedores, e mais ministros, selhes perca o respeito; me pareçeo dizeruos, que quando se lhes naõ guarde, noutra forma o mandarei estranhar. Escritta em Lix.ª a 14 de Julho de 654.

*Rey*

P.ª o Bisconde de V.ª noua

1654 — JULHO — 14

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio mvito saudar. Mandey considerar se seria conueniente deixar entrar no Reyno os homeñs da nascaõ q̃ uem fogidos de Castella, e porq̃ naõ conuem admitir cá esta gente, por mvitas rasoẽs que naõ he necessario referir, ordenareis que os naõ recebaõ, e uindo algum dos mais ricos e poderosos daquella parte, me dareis conta antes de o admitirdes, porq̃ podera auer nelle taes rasoẽs q̃ conuenha deixalo entrar. Escrita em Lix.ª a *14* de Julho de *1654.*

*Rey*

Para o Visconde de uilla noua de Serueira

1654 — JULHO — 21

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Para Capitaõ da comp.ª de infantaria, de que o era no terço dessa Prou.ca Manoel de Barbeita do Padrão, para a qval me propusestes sogeitos, fui seruido nomear dos propostos a Andre de Abreu de

Cuniga; De q̃ me pareceo auizaruos p.ª q̃ o tenhais entendido. Escrita em Lisboa *21* de Julho de 1654.

*Rey*

O C.^de^ de uilar maior

Dom Alu. de Abranches
de Cam.^ra^

P.ª o Gou.^or^ das armas da Prou.^ca^ do Minho

1654 — JULHO — 24

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio m.^to^ saudar, como aquelle q̃ amo. Encomendouos, q̃ logo, q receberdes esta carta, ordeneis ao gouernador da fortaleza de Viana e aos capitaes dos castellos, e praças maritimas de vossa jurisdiçaõ, me inuiem huã rellaçaõ da Artelharia, e monicoẽs q̃ ha nelles, e das q̃ parecer saõ necessarias para sua deffensa, com toda a distincçaõ, e clareza, porq̃ o quero ter entendido. Escrita em Lx.ª a 24 de Julho de 1654.

*Rey*

O Conde de Prado

Saluador Correa de Sáa
i benauides

Para o Gou.^or^ das Armas de Entre Douro e Minho

## 1654 — AGOSTO — 8

Visconde amigo. Eu El Rey vos envio muito saudar como daquelle q̃ amo. Preguntães em carta de 12 do corrente o como vos haveis de haver com a gente de Naçáo que vem de Castella, supposto que não pedem liçença para entrar, e depois de entrados terá inconveniente mandalos voltar senão forem dos muito ricos e poderosos q̃ não os para que vos dei permissão e pareçeo dizervos que nem hum deveis deixar entrar como vos ordenei a vos e aos mais governadores das armas e quando vos pareça que vem algum que se deva admittir na conformidade da minha ordem mo avizareis primr. tendo para isso lugar e se o não tiverdes sempre se uai a ganhar em não admittir no Rn.º gente desta qualidade. Escrita em Lix. a 8 de Agosto de 1654.

*Rey*

P.ª o Bisconde de Villa noua de Ceru.ª

## 1654 — SETEMBRO — 5

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar. Hauendo uisto a carta que me escreuestes appontando as rezões que uos mouerão a suspenderdes a execução da ordem que mandei dar para a extinção da primeira plana da gente de guerra dessa Prouincia e considerando os graues inconuenientes que poderáo resultar a meu seruiço de se executar aquella ordem; fui seruido resoluer que ella náo tenha effeito e que as primeiras planas se continuem na forma em que se fez atte gora como o tenho mandado aduertir a Junta dos tres Estados de que me pareçeo auizaruos tambem para o terdes entendido. Escrita em Lx.ª 5 de Set.ro de 1654.

*Rey*

Cde de uilar maior

Jorge de Mello

P.ª o Vizconde Go.or das armas d Minho

1654 — SETEMBRO — 12

Bisconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.º saudar aquelle que amo. Por ser tão importante a expulção dos ciganos para bem do Reino e com esse fundamento ter mandado por vezes fossem de todo lançados delle para as conquistas me pareceo significaruolo e aduertiruos façais logo prender todos os ciganos que se acharem nesse destricto concorrendo de nossa parte com a deligencia necessaria porq̃. segundo a noticia que tenho que muitos delles andão ocultos nas fronteiras constandome despois que na uossa ficarão alguns uolo mandarei estranhar. E porque na mesma forma tenho mandado escreuer aos mais Governadores das armas e convem que para milhor acerto sobre a deligencia em todas as partes a hum tempo a tereis em segredo athé vinte e sinco do prezente mez para com o recato e dicimulação que conuem a mandardes fazer ordenamdo que em sendo prezos seião logo trazidos recado para as Cadeas do Limoeiro com Rellação do numero delles dirigida pla Secretaria das merces e do Expediente para por ella se me dar conta e rezoluer na materia o q̃ for servido. E assim hireis continuando prendendo todos os ciganos de que tiuerdes noticia e remetendoos ao Limoeiro. Escritta em Lix.ª a 12 de Settembro de 654.

*Rey*

Para o Bisconde

1659 — SETEMBRO — 27

Visconde Amigo: Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Por parte de João Nunes da Cunha se me pedio licenca para poder vir a esta Corte. E porq̃ lha concedi volo auizo por esta carta para que o tenhaes entendido Escrita em Lix.ª a 27 de Setr.º de 1659.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Cerv.ʳª

1654 — SETEMBRO — 30

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Havendo entendido da carta que me escrevestes as rasões que uos obrigão a pedir licença para uir a esta corte; com attencão a ellas fui seruido concederuola por tempo de dous meses Deque me pareceo auisaruos para que o tenhais entendido e possais vsar della logo e quando uos parecer E porque a Dom Francisco de Azevedo que se acha nessa Prouincia mando encarregar o gouerno das armas della emq.ᵗᵒ durar a uossa ausencia lhe fareis auizo logo que uos quizerdes partir para ir tomar entrega delle; e as aduertencias que uos parecerem necessarias para melhor poder comprir com as obrigacões desta occupação. Escrita em Lx.ª 30 de Setembro de 1654.

*Rey*

O Conde de Prado

P.ª o Gou.ᵒʳ das armas da Prou.ᶜᵃ do Minho

O Conde de Soure

1659 — FEVEREIRO — 6

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Com esta carta se uos remetera copia de hua petição que aquy me fez João Baptista Caldeira em que se queixa da morte de de seu Irmão o Mestre de Campo Francisco Peres da Silva e dos que derão fauer a fogida da Cadea do delinquente com as razões e circunstancias q̃ o vereis da dita petição e porque a culpa do matador (sobre ser tão grave) se acrescentou muito com a sua fogida da Cadea e conuem a meu seruiço euitar tão roim exemplo como da dissimulação della pode resultar vos ordeno que com toda a deligencia e cautella façaes com que o delinquente seja outra vez prezo e remetido a muito bõ reccado à cadea do Limoeiro desta Cidade e se tire exacta deuaça dos cazos da morte e da fogida da Cadea por ministro de toda a satisfação e inteireza do qual ordenareis que prenda os culpados e os remeta a esta Corte na forma fica dito do delinquente e uos me enuiareis os proprios autos pollo meu Conselho de guerra para os mandar ver e sentenciar como o cazo o merecer. E se uos parecer e ao ministro que tirar a devaça que antes de comessar conuem prender alguãs pessoas para mais segurança do negocio e aueriguação da verdade o executareis assy dandome conta particullar de tudo o que se for obrando nesta materia.

Escrita em Lx.ª a 6 de feu.º de 659.

*Raynha*

Dom Alv.ʳᵒ de Abranches de Cam.ʳᵃ

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de Villa nova de Cerueira

1659 — MARÇO — 10

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Miguel de Oliveira me representou hauerme servido des annos nas armadas da Companhia geral do Comercio do Brazil e nas Campanhas dos annos passados de seiscentos cincoenta E sete e cincoenta E oito. Pedindome o nomease em hũa Companhia de Infantaria para me hir seruir com Ella a essa Prouincia. Encomendouos muito, que conforme seus seruiços e prestimo o ocupeis nos postos a que estiuer a caber. Escrita em Lx.ª a 10 de Março de 659.

*Raynha*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

Para o visconde de villa noua de Cerveira

1659 — MAIO — 24

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por parte de João Ferreira morador na Cidade de Braga se me prezentou a peticão e papeis que cõ esta carta se vos Remetão em que pretende liurarse de o fazerem soldado pago pellas proprias rasões porque já foi escuzo de auxiliar, pella Camara da mesma Cidade; E porque se hé como dis, tem rasão no seu Requerimento, Vos ordeno que uendo a dita petição e papeis e achando ser uerdade o que Refere o façaes dezobrigar de soldado pago, ficandoô na ordenança em que exercita ô posto de Cabo de squadra. Escrita em Lix.ª a 24 de Mayo de 659.

*Raynha*

Ruy de Moura

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de V.ª Noua da Ceruera

1659 — MAIO — 31

Visconde amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar, como aquelle q̃ amo, O Lecençeado Manoel Pereira Gomez Cirurgião mor do terço do Mestre de Campo Dom Pedro de Almeyda no Exercito de Alentejo, me representou os seruiços q̃ me tem feito nas campanhas q̃ ouue naquella Prouincia, e sitios de Badajoz, e Elvas, a satisfação com q̃ os fes; E pede o mande prouer no cargo de Cirurgião mor do Exercito dessa Provincia do Minho, E antes de lhe deferir, me pareceo dizeruos, e mandaruos, me auizeis se ha nelle este lugar, e outros sogeitos da mesma profissão, q̃ o mereção mandem seus papeis ao meu conselho de guerra para se verem, e se me consultar na forma do estillo. Escritta em Lx.ª a 31 de Mayo de 1659.

*Raynha*

Ruy de Moura

Pedro Cesar de meneses

Para o Gou.or das Armas do Minho

1659 — JUNHO — 4

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar, como aquelle que amo. João Nunes da Cunha, antes que da ultima vez partisse para essa Prouincia, me fez o papel de q̃ com esta carta se uos enuia copia, sobre particulares da mesma Prouincia, E couzas de que necessitta o Ex.to della; e porque aqui se não pode tomar ajustada resolução nas materias de que trata, Vos ordeno, que fazendo juntar os Cabos do mesmo Exercito que custumão voltar, com João Nunes da Cunha, e ouuindoos sobre o que conthem o dito papel, resoluais, Executeis o que Virdes que he mais conueniente a meu seruiço, dandome conta do que fizerdes para o terdes entendido. Escrita em Lx.ª a 4 de Junho de 659.

*Raynha*

Fran.co de sousa coutinho

Dom Alb. Abranches de Cam.ra

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — JUNHO — 7

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como Aquelle q̃ amo. A Camara do Porto auiza ter dispendido na leva do Terço q̃ levantou p. Essa fronteira os dez mil procedidos do seu donativo dos uinhos que estava Consignados ao pagamento dos Assentistas do pão de Monição. Encomendouos que ou do dinheiro de juro que compra a Mizericordia daquella cidade, q̃ tenha de entregar ao pagador geral dessa prouincia onde qualquer outro effeito dos q̃ tenho Consignado para formatura desse exercito e despeza dessa guerra mandeis pagar Aos Asentistas aquella quantia em lugar daque a Camara despendeo e segundo as informações que aqui se tem haverá naquelles effeitos dinh.º cahido p.ra este pagamento. Escrita em Lx.ª a 7 de Junho de 1659.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.

1659 — JUNHO — 7

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. O Conde de Misquitella em carta de 26 do passado escreve, entendera por auizo de hum confidente que o Inimigo tinha intento de ir sobre a Praça de Melgaço. Auizolo, para que ponhaes naquella Praça o cuidado, que de vós espero. Escrita em Lix.ª a 7 de Junho de 1659.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru ra

1659 — JUNHO — 10

Visconde Amigo: Eu El Rey vos enuio m.[to] saudar, como aquelle q̃. amo. João Nunes da Cunha me escreveo a carta, de que Vos mando remeter Copia com esta. E porque o q̃ me propoem não toca à sua occupação, se não à Vossa; Vos encomendo considereis o que contem aquella carta e me digaes em cada hum dos pontos della o que Vos parecer conveniente. Escrita em Lix.[a] a 10 de Junho de 1659.

*Raynha*

P.[a] o Visconde de Villa noua de Ceru.[ra]

1659 — JUNHO — 14

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar ccmo aquelle que amo. Recebi a vossa carta de vinte quatro do mez passado, em que avizastes de se haverem feito os trocos dos presioneiros que tinhamos em Galiza pellos do Inimigo que Estauão nessa Prouincia e na de Tras os Montes, onde o conde de Mesquitella duuidara entregar os daquella Prouincia athe uer resposta minha. E pareceome dizeruos que lhe mando escrever que logo remeta a Galiza os tres Capitaes hum Ajudante de Thenente, E quatro soldados que dizeis estarem presioneiros naquella Prouincia pois em seu lugar tinhão vindo outros tantos para essa, E não conuinha faltarse a palaura que nos boletins se tinha dado E a Vós vos encomendo muito, que procureis quanto vos for possivel, que os trocos se fação geraes, aduirtindo ao Inimigo, que assy se fez em Alentejo, donde mandey hir todos os presioneiros de Castella, (que era grande numero) pollos poucos Portuguezes que lá estavão, não reparando nem nos rendidos à Merce, posto que se ouuessem sogeitado a todo o tratamento que se lhe fizesse. Escrita em Lx.ª a 14 de Junho de 659.

*Raynha*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — JUNHO — 19

Visconde amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Viusse a vossa Carta de dous do Corrente em q̃ me propondes sogeitos para Thenente de Mestre de Campo General desse exercito; e porque tenho nomeado para este posto Manoel Nunes Leitão (com o q̃ resou a vossa nomeação) me pareçeo auisaruos para o terdes entendido. Escrita em Lx.ª 19 de Junho de 659.

*Raynha*

Fran.co de sousa coutinho

Dom Alu. Abranches de Cam.ra

P.ª Visconde de Villa Noua de Cerueira

1659 — JUNHO — 20

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Pedro Fullão de Spier, fidalgo, francez, E Cavaleiro da ordem de Christo, me tem seruido de annos a esta parte, com muita satisfação E vallor, E se acha atrazado nos postos, e por essa couza empenhado, e falto de Cabedal. Ordenouos que nas primeiras Companhias de Cauallo q̃ Vagarem nessa Prouincia, mo consulteis na forma costumada fazendo declaração desta minha ordem. Escrita em Lx.ª a 20 de Junho de 659.

*Raynha*

O Conde de Prado

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — JUNHO — 28

Bisconde Amigo. Ev El Rey vos inuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Plos crimes q̃ Miguel Madureira, seu filho e quatro criados seus, tem cometido no lugar de Canellas; E particularmente pla morte q̃ deu ao Reitor do mesmo luguar, fuy seruido ordenar, fossem prezos, E porque se presume que estes delinquentes se tenhão valido do previlegio de Soldados e estejão servindo nesse Ex. ou Prouincia; Vos encomendo muito e mando ordeneis se fação mui exactas deligencias por elles; e achando-os os mandeis pôr a bom Recado prezos e medeis conta pla Secretaria do Expediente de como o tendes executado. Escrita em Lix.ª a 28 de Junho de 659.

*Raynha*

P.ª o Bisconde

1659 — JUNHO — (?)

Visconde amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar, como aquelle q̃ amo. Tendo consideração ao q̃ o Mestre de Campo Aluaro de Azeuedo Barreto, e seus irmãos, me representarão, q̃ no Citio da praça de Monção no Conuento de São Francisco tinhão duas irmãs humã professa que faleceo durante o citio e outra recolhida, sem ser obrigada a clausula, ficou desamparada de quem tratte della, sendo moça donzella e arriscada em poder do inimigo, a qual não queria entregar, sem lhe mandarem en refens a Agueda Pereira e sua filha, molher de Manoel Pereira q̃ ficou em Monção por ser homem velho me pedirão mandasse por em effeito esta troqua E por me parecer justo seu requerim.[to] me pareceo encomendaruos como por esta carta o faço q̃ logo effeitueis este troco mandando a dita Agueda Pereira e sua filha para Monção e por ellas vir a dita moça irmã de Alvaro de Azevedo q̃ assi he meu serviço. Escrita em Lisboa a de Junho de 1569.

*Raynha*

O Conde de Prado
Para o Gov.[or] das Armas do Minho

Pedro Cesar de meneses

1659 — JULHO — 9

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Receby a Vossa carta de des do mez passado, com que enuiastes relação, da gente armas, e moniçöes cõ que se acha a Praça de Villa de Conde. E porque na carta que uos mandey escreuer, E a que cõ a Vossa respondeis, Vos ordeney me auisasseis que me constaua o prezidio da dita Praça E o de que necessitaua para ficar com toda a segurança, E a este Ultimo ponto não satisfizestes. Vos ordeno me auizeis com toda a breuidade E clareza, do que sera necessario prouer a aquella Praça, para se depor o cuidado que pode dar no estado em que se acha. Escrita em Lx.ª a 9 de Julho de 659.

*Raynha*

O C.[de] de Cantanhede

Fran.[co] de sousa coutinho

Para o Visconde de Villa noua de Cerveira

1659 — JULHO — 15

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo, O Conde da Feira me escreueo que Vos lhe hauieis recomendado o socorro que devia ter prestes para Vollo Remeter, com outro auizo Vosso, seo Inimigo entrasse por essa Prouincia; E que o mesmo lhe escrevera tambem o Conde de Mesquitella; Pedindome declaração de a qual das Prouinçias hauia de enuiar o socorro; E porque o Inimigo não poderá entrar cõ exercitos por ambas as Prouinçias nem conuem que as outras fiquem expostas ao perigo de o Inimigo (vzando de destresa) mostrar que quer acometer hua, Venha ao entrar por outra; mando escreuer aos Condes, da Feira, e Misquitella, que Vos não pessão o socorro senão no cazo em que com iffeito, Veja qualquer delles que o Inimigo entra cõ exercito formado pella sua Prouinçia e a mesma ordem haueis Vos de guardar em lhes pedir a elles os socorros no cazo que o Inimigo entre pella Vossa cõ exercito; escrita em Lx.ª a *15* de Julho de 1659.

*Raynha*

O Conde de Odemira

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de V.ª noua da Ceruera

1659 — JULHO — 19

Visconde amigo, Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. O Presidente, e Religiosos do Convento de nossa Snra de Jesus desta Cidade, me prezentarão a petição e Certidão, que com esta se Vos Remetera. Encomendouos que Vendoa, lhe deffirais ao que pedem, como Vos parecer justiça, e mais conuier a meu seruiço. Escrita em Lix.ª a *19* de Julho de 1659.

*Raynha*

Dom Alu.º de Abranches de Cam.ʳᵃ

O Conde de Prado

Para o visconde Governador da Prouincia do Minho

1659 — JULHO — 30

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Sou informado que dos soldados que Vierão das Ilhas, são fogidos muitos de suas Companhias, em grande danno de meu seruiço porque não sô se fica perdendo a grande despesa que se fez nas leuas, E Viagem para este Reino mas faltando nas fronteiras em tempo que tão necessarios são nellas; E porque conuem remediar este danno na melhor forma que for possivel. Vos ordeno que com toda a deligencia facaes Vigiar sobre as embarcações que dos portos dessa Prouincia sahirem, se levão alguns dos ditos soldados e os que se acharem façaes reconduzir ao exerçito de Alentejo, sem nenhũa dillação e o mesmo cuidado fareis ter nos que quizerem sentar praça de novo, ou residirem nessa Prouincia. Escrita em Lix.ª a *30* de Julho de 1659.

*Raynha*

Fran.$^{co}$ de sousa coutinho

Dom Alu.º de Abranches de Cam.$^{ra}$

P.ª o Visconde de V.ª Noua da Ceruera

1659 — JULHO — 30

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio m.$^{to}$ saudar como aquelle q̃ amo. Fuy informado que a Infantaria, que mandei leuantar na Ilhas para seruir no ex.$^{to}$ da Prouincia de Alentejo, fugia della, e se hia embarcas em differentes portos p.ª passar à Sua Terra. Encomendouos tenhaes cuidado de mandar visitar as embarcações, que sairem desses portos para as Ilhas, e recolher, e prender os soldados, que nellas forem achados, auizandome dos que são para os mandar remeter ao Exercito. Escrita em Lx.ª a 30 de Julho de 1659.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.$^{ra}$

1659 — JULHO — 3

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Francisco Marinho Deça que nessa Prouincia me tem servido em Varios postos, me pedio o mandasse acrescentar aos que esta a caber. E porque eu desejo acomodar este sogeito pollo bem que me tem seruido nessa Prouincia e em outras partes. Vos ordeno mo proponhães em algum posto se o ouuer Vago, ou nos que Vagarem E lhe possão seruir de acrescentamento, fazendo relação de seus seruiços E desta minha ordem. Escrita em Lx.ª a 3 de Julho de 659.

*Raynha*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — AGOSTO — 9

Bisconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Hauendo El Rey meu s.r e pay q̃ Deos tem, uisto as razoẽns q̃ por parte de Donna Maria da Guama Soutomayor se llhe representarão, para lhe conceder a licença que pedia para passar ao Reino di Galiza; fuy seruido mandarlhe expedir aluara para a passagem; limitandose Nelle leuaria soomente o fato de seu uzo, e hum mes de tempo. E porq̃ Donna Maria, se não valleo antão di esta licença cagora fas o mesmo Requerimento; Me pareceo Remetervolo; para que entendendo, não ha inconuiniente na materia a deixeis passar livremente na forma q̃ se declaraua No aluara Refferido. Escrita em Lix.ª a 19 de Ag.to de 659.

*Raynha*

P.ª o Bisconde

1659 — AGOSTO — 10

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Reçebi a Vossa carta de des do mez passado, com que enuiastes outra que Vos hauia escrito o Dez.or Antonio Lobo de Torneo, e o auto que mandou fazer contra Fran.co de Freitas e francisco Ribeiro, Clerigos de Guimaraes, que tirarão do tormento a hũ soldado que por fogir hauia incorrido no bando que se executaua. E porque o cazo he de muy roim exemplo a meu serviço e conuem que nelle haja a demonstracão qe he justo; mando encomendar muito ao Cabb.o de Braga o castigo que deue dar a estes clerigos, auizandome para o ter entendido. E Vós fareis o mesmo para me ser prezente por Vossa Via. Escrita em Lx.ª a 10 de Agosto de 659.

*Raynha*

O C.de de Cantanhede

O Conde de Prado

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — AGOSTO — 11

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo, os officiais da Camara da Villa de Espozende, me escreverão a carta que com esta se vos remete, em q̃ (como della vereis) Pedemselhes não tire gente da dita Villa E seu termo por a que tem ser pouca para sua deffensa. Ordenouos que vendo a dita carta, E a certidão que com ella enviarão E se Vos remete façaes por acomodar aquelles poucos na melhor forma que for possivel, para que sẽ risco nem queixa sua, se acuda ao que mais conuier a meu seruiço. E a Camara mando escreuer recorra a Vós para lhe diffrirdes como o estado das couzas o permittir. Escrita em Lx.ª a 11 de Agosto de 659.

*Raynha*

O C.de de Cantanhede

O Conde de Prado

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — AGOSTO — 12

Visconde amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo logo que reçeberdes esta carta remetereis a ordem do Conde de Miranda Governador da Relação E armas do Porto huma comp.ª de Infantaria do terco da mesma Cidade, porque a hade embarcar No galeão q̃ hade remeter aeste posto. Escrita em Lx.ª a 12 de Agosto de 1659.

*Raynha*

P.ª o Visconde Gor.r das Armas do minho

1659 — AGOSTO — 25

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Jorge Morato me fez a petição que com esta carta se vos remeterá, em que Pretende lhe conceda patente de Capitão de Infantaria ad honorem Encomendouos, que Vendo a dita petição E papeis que com ella presentou, me informeis deste requerimento, com Vosso pareçer p.ª lhe mandar diffirir como for seruido. Escrita em Lx.ª a 25 de Agosto de 659.

*Raynha*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — AGOSTO — 30

Visconde Amigo Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. os officiaes da Camara da Cidade do Porto me escreverão dandome conta de vos hauerem remetido com que me seruem para sua deffensa e dessa Prouincia, posto que desarmado, por lhe não havere chegado as armas neçessarias na forma do asçento da criação do mesmo terço, Pedindome Vos mandasse ordenar trattasseis muito da conseruação delle fazendo cõ que sirua vnido para melhor se poder auentajar em meu seruiço deixandoos correr cõ as pagas do mesmo terço na forma que esta acrescentado. E porque estes Vassallos tem rasão no q̃ pedem Vos ordeno que assy pontualmente. E as armas que faltão nessa Prouincia tenho mandado se remetão a ella no mayor numero que for possivel. Escrita em Lix.ª a 30 de Agosto de 1659.

*Raynha*

Fran.co de sousa coutinho

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de V.ª Noua da Ceruera

1659 — SETEMBRO — 16

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. P. Fullon de Sampier, (allegando não haver nessa Prouincia Companhia de Cauallos em que mo poderdes consultar como Volo havia ordenado) me pede o terço de Auxiliares da Comarca de Barcellos, que esta sem mestre de Campo; E porque aqui se não tem noticia dos sogeitos que ahi ha capazes deste posto, E q̃ o petendão Vos encomendo muito, me informeis dos que se Vos offerecerem a preposito E de seruiços para este E os mais terços de Auxiliares dessa Prouincia, para os mandar tomar em lembrança para quando se tratar de seus prouimentos. E a esta ordem satisfareis o mais em breve que for possiuel. Escrita em Lix.ª a 16 de Setr.º de 659.

*Raynha*

O Marques Almirante

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

## 1659 — SETEMBRO — 4

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por parte de Manoel de Oliueira Pimentel se me representou, que estando gouernando o Castello de Lindozo (que se formou e reparou a custa da sua faz.ª) fora nomeado por Capitão de hũa das Companhias do terço com q̃ me serve a Cidade do Porto, onde Vindo tomar posse E entrega della com Vossa ordem, lhe nomearei na sua auzencia successor no dito Castello, sendo que a sua tenção fora seruir nelle com a dita Companhia, athe se lhe aualiarẽ E pagarem as obras que hauia feito à sua custa como se lhe ordenâra E prometêra; Pedindome lhe mandar restetuir o gouerno do dito Castello para seruir nelle com a mesma Companhia, ou sem Ella athe se lhe pagarem as obras que nelle fez, o qual requerimento Veo apadrinhado com a carta dos officiaẽs da Camara da Villa de Soajo, que com esta se Vos remete, em que se pedem o mesmo q̃ Manoel de Oliveira Pimentel, apontando as conueniencias que disso resultarão, a meu seruiço bem E conservação daquelles Vassalos. E porque neste negocio, se não pode tomar a justada resolução sem informação Vossa, Vos ordeno que com toda a breuidade na mandeis do que passa nesta materia, juntamente com Vosso parecer, para mandar rezoluer o que mais conuier a meu seruiço. Escrita em Lx.ª 4 de Setr.º de 659.

*Raynha*

O C.de de Cantanhede

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — SETEMBRO — 27

Visconde Amigo. Eu El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. o Prouinçial, e mais, Relligiozos da prouinçia de santo Antonio, me fizerão a petição que cõ esta se uos remete, Encomendouos que vendoa e o que mais conuem a forteficação da praca de Caminha, me informeis sobre o particular de que tratão na petição. Escrita em Lix.ª a 27 de Setr.º de 1659.

*Raynha*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de V.ª noua da Ceruera

1660 — JANEIRO — 24

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Ja por outras cartas minhas uos mandei agradeçer o cuidado com q̃ me remeteis os auizos de Castella, agora faço o mesmo a estes que enuiastes. Por aqui se diz uulgarmente, que o mestre de campo gn.[1] dessa guerra era chegado com hum grosso de infanteria, e Caualaria, mas Eu o não crejo emquanto não reçebo auizo vosso. Escrita em Lx.ª a 24 de Jan.º de 1660.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua Ceru.ª

1660 — (M.º?) — 7

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Recebeusse a uossa de 29 do passado com o tratado impresso da paz entre frança e Castella; Agradecouos m.to o cuidado de mo remeterdes, e o auizo de não hauer da parte do inimigo mouimento nessas fronteiras e quando o haja espero mo auizeis. Escrita em Lx.ª a 7 de m.º 660.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.ª

1660 — ABRIL — 29

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ Amo. Em carta de 17 do corrente auizaes de as preuenções que por essa parte faz o Inimigo mostrarem sahirá a Campanha com breuidade, referiz o poder com que se acha, e o que tendes para lhe fazer opposição lembrandome mande passar a essa fronteira os cabos della que se achão nesta corte, que mande nomear mestres de Campo para os terços de auxiliares de Guimarães e Barcelos e pediz mais uos mande remeter o Terço do Porto e algumas moniçoes e armas de que tendes necessidade e que a Comarca de Guimarães nam acode os quinhentos homens da sua promessa por lhe faltar confirmação da forma em que os offereceo; E primeiro que tudo agradeçouos o cuidado em que estaes na defensa dessa prouincia, e com que a tendes disposto, para qualquer inuazão, que o Inimigo quizer fazer, e espero de quem sois, fazer nas occaziões, quando as haja, o que deveis ás obrigações com q̃ naçestes e a estimaçao que faço de uossa pessoa, e dezeio que tenho de auer, e a uossa caza, com todo o acrescentamento; Aos Cabos mando fazer auizo, com todo o aperto, E ao cons.º de guerra mando logo me enuie a consulta sobre os mestres de campo daquelles Terços, e ao gou.r do Porto faça passar a essa fronteira o que hâ pago naquella Cidade, e ter pronpto o de auxiliares para marchar com o primeiro auizo nosso. Ha poucos dias que se uos remeterão algumas moniçōes, e se fica fazendo deligençia por se uos remeterem mais e algumas armas. Nam sey que se deua aqui reposta à Camara de Guimarães de nenhum negoçio e o que hauia que lhe dizer sobre esta offerta se fez hâ ja dias. Encomendouos me escrevaes nisto com mais Clareza p.ª mandar logo o q̃ mais conuier a meu serui.º Escrita em Lix.ª a 29 de Abril de 1660.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Cerue.ra

1660 — JULHO — 9

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Por ser justo que assy como he igual a todos a utilidade da sertificação desta Cidade, o seja tambem o trabalho della Fuy seruido resoluer q̃ concorressem a elle toda a Sorte de Moradores sem exceição de algum; e q̃ por sua qualidade idade ou por outra qualquer razão, não podesem trabalhar pessoalmente desem em seu lugar cada hum hũ gastador que trabalhasse o mesmo tempo; e para melhor se poder executar esta resolução sem as confusōes q̃ se costumão exprimentar em cazos semelhantes resolui mais q̃ o trabalho se repartisse, pellas freguesias emcarregando cada hũa a hũa pessoa de toda a autoridade, Respeito e zello de meu Seruiço, que pello Rol das confissões facão lista de todas as pessoas, que não são obrigadas as Companhias para trabalharem na dita obra ou mandarem trabalhar na maneira

Refferida ajudandose primeiro em tudo com o Conde de Cantanhede Governador das armas desta Corte e Comarcas da Estremadura a cujo cargo estão as fortificações dellas; e de quem hão de guardar as ordens. Sobre este particular; e porq̃ fio de Vos e do zello com q̃ me seruis que neste negoceo obrareis como conuem Volo hey por emcarregado nas freguesias São Lourenço e São Christovão; e Vos encomendo muito a execução delle como couza de tanta importançia e em que consiste a deffensa principal deste Reyno estando certo q̃ hey de ter por seruiço muy particular o q̃ me fizerdes na fortificação desta Cidade, e Se necessitardes de algumas ordens; de como deueis proçeder Se Vos darão pello meu Conselho de Guerra com auiso Vosso. escrita em Lx.ª a 9 de Julho de 660.

*Raynha*

Ruy de Moura

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de Villa noua de Cerueira

1660 — FEVEREIRO — 24

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como Aquelle q̃ amo. Tenho razão particular para uos encomendar muito apartadamente façaes ter toda a Cautella e Vigia nas praças dessa prouincia q̃ ficão fronteiras ao Inimigo, preuendoas de gente moniçṍes e de pessoas muito de Vossa confiança, e uos não aduirto o modo porque os haueis de dispor porq̃ o fio de uosso cuidado, a prudencia e uão este correio a mais, que a leuamos este auizo. Escrita em Lx.ª a 24 de fev.º de 1660.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa Noua de Ceru.ª

1660 — ABRIL — 9

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como Aquelle que Amo. Certo estou e assi mo mostra a experiencia, que uos não descuidareis de me auizar das prevenções e mouimentos, que o Inimigo fizer por essa parte, plo que se colhe das cartas deste uosso correspondente pareçe tem o inimigo tensõs de fazer campanha, e assi o escreve o Conde de São João pello que alcançou na prouincia de tras os montes; O que importa he façais dispor tudo o necess.[rio]; para qualquer occazião que se offereça e assi o espero do uosso cuidado e dos Cabos que me seruem Nesse exercito. Escrita em Lx.[a] a 9 de Abril de 1660.

*Raynha*

P.[a] o Visconde de Villa noua de Ceru.[a]

1660 — MARÇO — 20

Visconde Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Recebeose a Vossa carta de dezanoue do mez passado, com que enuiastes a que Vos hauia escrito o Mestre de Campo Diogo de Brito Coutinho, auizandouos da occasião que se teve com o Inimigo na Campanha de Valença com reputacão de minhas armas. E perda de gente morta E presioneira do Inimigo. E hauendo Visto as ditas cartas, me pareço agradeceruos por esta (como o faço) o cuidado com que estaes do cumpreamento de Vossas obrigações. É que o mestre de Campo Diogo de Brito Coutinho, E aos Capitães Antonio Gomes de Abreu e Jeronimo da Silva, mando escrever as cartas que com esta se Vos remettem para lhas dardes aggradecendolhe o bem q̃ se ouuerão na dita ocasião.

E Vós me auizareis dos mais officiaes que nella se acharão, E a que Vos parece que deuo mandar escreuer. Escrita em Lx.ª a 20 de Março de 660.

*Raynha*

O Conde de Prado

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1654 — JULHO — 21

Visconde Amigo. Ev El Rey nos enuio m.to saudar como aquelle q̃ amo. Vi a uossa carta de 25 de Junho passado, em que me dais conta de uos hauerdes recolhido da frontr.ª (com occasião de o inimigo se hauer desfeito da junta de gente da Ordenança q̃ fazia, e suspendido a marcha dos terços cõ q̃ o intentaua fazer) a tratar do ajustamento dos auxiliares, e ordenancas de algũas Villas dessa Prou.ca E do intento com q̃ ficaueis (acabada esta deligencia) de ir correr os portos de mar de uossa jurisdicão e preuenir nelles o q̃ for necess.ro e possiuel para sua defensa. E pareceo me dizeruos que de tudo fico aduertido, E que uos agradeço m.to o cuidado com q̃ atendeis à defensa dessa Prou.ca e tratais de ter preuenidas, e na boa ordem, que conuem as cousas necessarias para ella, De que me acho com toda a satisfação. Escrita em Lx.ª 21 de Julho de 1654

*Rey*

O Conde de Prado
P.ª o Gou.or das armas da Prou.ca do Minho

O Conde de Soure

1654 — JUNHO — 14

Vizconde amigo. Eu El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo. No ordinario e por hum correo que ueo em deligencia de uinte legoas se receberão tres cartas uossas de 2-4 e 6 do prezente com os auizos que Vos tinhão chegado do poder q̃ o inimigo tinha junto e hia juntando para fazer hua Attalaya de fronde de Monção a tiro do seu forte do Aytona representando a falta de officiaes com que Vos achaueis para uos assistirem e ajudarem nesta occasião sem Vos podores ualer dos julgadores dessa Prouincia por não comprirem as ordẽns que lhes daes, como o hauia feito o Correg. dessa Comarca de Vianna mas que lhe enuiastes para acudir a Moncão a dispor as carruagens e o mais que fosse necess.$^{ro}$ e p.$^{a}$ prender o Sargento mor da Com.$^{ca}$ de Barcellos culpado na resistencia feita ao Ouuidor della. E hauendo uisto todos estes papeis, e considerado o q̃ elles contem me pareçeo dizeruos que ao Gou.$^{or}$ das armas de Tras os montes mando ordenar Vos Soccorra com tudo o que lhe pedirdes ou com o mais que lhe for possivel e que demais disto faca a diversos que puder ao inimigo e a carta para Joanne Mendez de Vasconcellos uay com esta para que llha remetaes da qual se Vos enuia tambem a copia para terdes entendido a forma em que se lhe da esta ordem. E Vós puxareis pella gente da Prouincia e com ella e com o soccorro de Tras os montes com todo o cuidado, e cautella ireis dispondo e preuenindo o que for necessario para estorvar os effeitos dos desenhos do inimigo com tam bom conselho e tam boas consideracões que não se erre no que tanto conuem acertar e confio do uosso zelo e prudencia e do amor com q̃ attendeis a meu seruiço que tudo se conseguirá felixm.$^{te}$ para eu ter muito q̃ Vos aggradecer. Para se suprir na melhor forma que for possivel a falta de officiaes com que vos achaes tenho mandado dar ordem ao Mestre de campo Belchior de Lemos do Britto e a Acçenso Alz Barreto q̃ atte gora seruio de Thenente de Mestre de campo g.[l] na Prou.[a] de Tras os montes que breuem.[te] saião desta corte e selles não presentar nessa praca de Moncão para os occupardes no que entenderdes melhor poderão seruir nesta occasião e emquanto ahy assistirem fareis que sejão socorridos com o seu soldo e para os saltos do caminho lhes mandei liurar aqui cem crusados de q̃ lhe fiz merçe por uia de ajuda de custo e se Belchior de Lemos não puder partir com a breuidade q̃ se lhe ordena irá com Accento Alzo Capitão João de amorim Gou.[or] do forte da Luzia extramuros deluas.

Tambem se uos remette com esta carta outra minha para o Correg.[or] dessa Comarca de Vianna em que estranhandolhe por agora som.[te] o grande excesso q̃ cometeo em não cumprir as ordens que lhe destes, e deixar de passar logo a essa praca de Moncão p.[a] acudir ao que Vos lhe ordenasseis em occasião de semelhante aperto lhe mando ordenar q̃ logo logo que receber a carta q̃ uay p.[a] elle se parta e ua fazer o q̃ Vos lhe ordenardes e for necess.[ro] nesta occasião auizandome logo da rezão porq̃ não cumpriu as uossas ordens para que tendoa entendido possa mandar proceder contra elle com a mayor demonstração de castigo que merecer.

Escrita em Alcantara a 14 de Junho de 1654.

*Rey*

Dom Alu.[o] Abranches de Cam.[ra]

Pedro Cesar de meneses

P.[a] o G.[or] das armas da Prou.[a] do Minho

1654 — JULHO — 21

Vizconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Vy as uossas cartas de 29 e 30 do mez passaod em que me destes conta da cauza que teue o inimigo para a grande junta de gente que tornou a fazer e a lojouna Campanha mea legoa da praca de Saluaterra e do bom sucesso com que sem embargo de se achar com tanto poder arruinastes as trincheiras que hauia feito, e por onde intentava fazer hua Attalaya junto a mesma praca ficando tam vesinhas aos fortes que tem opostos a ella e debaixo da artelharia e mosquetaria delles; E porque esta acção he muy propria do que deuo esperar da confianca que faco de uossa pessoa e do Zelo com que attendeis a tudo o que toca a meu seruico e procuraes os mayores acertos delle nas couzas da guerra, e administracão da justica que correm por uossa conta me pareçeo dizeruos que faco della toda a estimacão; e que ao Capitão Bertolomeu Pereyra de castro que aduertis ficou passado hua balla de mosquete pello braco direito mando aggrarecer o que obrou nesta occasião; e Vos de minha parte aggradecereis tambem aos mais cabos e officiaes que entenderdes merecem este fauor o bem que se ouverão nella. Escrita em Lx.ª 21 de Julho de 1654

*Rey*

O Conde de Prado

O Conde de Soure

P.ʳᵃ g. das armas da Prou.ª do Minho

1659 — JULHO — 29

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como Aquelle q̃ amo. Pella uossa carta de 24 do Corrente entendy o bom suççesso com q̃ conseguistes o intento de a Camara de Amarante concorrer com a Comarca de Guimaraes no partido donatiuo q̃ lhe tocaua p.ª pagamento da gente de guerra com q̃ me serue; E pareçeume agardeçemolo porq̃ pla qualidade do seruiço e plo exemplo q̃ dá aos mais lugares dessa Prouincia he digno de toda a estimação. Escrita em Lx.ª a 29 de Julho de 659

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.ª

1659 — MAIO — 3

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio m.^to saudar como aquelle q̃ amo. Aos Dezembargadores Antonio Lobo do Torneyo e Jorge Pinto de Almeyda mando escreuer na forma, que appontaes na Vossa carta de 18 do passado: e agradeço-Vos o cuidado, com que estaes, de que elles fação o que deuem, imitandouos a Vos no seu tanto, que bastará para fazerem sua obrigação. Pella Junta dos tres Estados mando aduertir a João Nunes da Cunha como os despachos, q̃ leuou, lhe não dão jurisdição, em prejuizo da Vossa; e que a que Vos toca deueis, e podeis exercitar sem impedimento algum. Hua das razões, que tive para mandar a essa Prouincia, de mais de seu grande Zelo, inteligencia e actividade, e satisfação com q̃ delle me siruo, foi entender, q̃ ambos serieis a mesma cousa; porque assim o pede meu seru.[co] e o parentesco, que ha entre Vós : Encomendouos muito Seja assim.

Escrita em Lix.[a] a 3 de Mayo de 1659

*Raynha*

P. o Visconde de Villa noua de Ceru.[ra]

1659 — ABRIL — 8

Bisconde Gouernador Amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Como a experiencia tem mostrado a preciza necessidade que neste Reyno se padeçe de Cavallaria; para poder deffender-se das inuazoeñs do inimigo; se procurou ia em uida de El Rey meu S.[r] E pay q̃ Deos tem com grande cuidado; dispor as Condellarias das Comarcas em tal forma; q̃ bastasem para dellas se tirarem as remontas, e não ser necessario ualler de Cauallos estrangeiros porem porque de tempos a esta p.[te] se tem achado grande deminuição nas criações; procedida de ordinario da Omissão e descuido dos Supperintendentes; e as guerras que nestes anos passados houve nas fronteiras, tem consumido a maior p.[te] da Caualaria; conuindo q̃ para o Refforço das tropas ua a criação em maior agmento. Me pareçeo ser o meio Mais efficax assy para remedear os danos passados como para euitar os futuros; mandar significar aos Gouernadores das Armas, o gosto q̃ leuarey de elles, tomarem muito a sua conta fazer guardar com gr.[de] uigilancia o Regimento q̃ se fez para a mesma criação; e terem muito particullar atenção a q̃ os supperintendentes procedão nesta materia como conuem; Ordennando lhes iuntam.[te] que uagando alguns dos q̃ actualmente seruem; escolhão da Comarca em q̃ o tal supperintendente seruia tres sugeitos idoneos para esta ocupação que me proporão pla junta da Criação q̃

Rezide Nesta Corte para eu delles escolher o q̃ fosse seruido. E porq̃ espero q̃ plo q nos toccar executeis esta minha Rezulução com o Zello q̃ deueis; dandome conta do que neste Negocio se uos offereçer pla mesma junta por donde se uos respondera; Vos quiz mandar fazer este auizo; de q̃ fico com toda a memoria para uos aggradecer o bem q̃ No particullar obrares. Escrita em Lix.ª a 8 de Abril de 659

*Raynha*

P.ª o Bisconde

1659 — MARÇO — 11

Bisconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Per carta que se recebeo de João Nunez da Cunha que enuiey a essa Prouincia a cousas precissas de meu seru.º entendy o que auieis disposto p.ª elle poder executar as ordens que leuou minhas não só pello que toca á refformação da Vedoria E formadas desp.ªˢ do dinhr.º destinado aos gastos da guerra, mas nas mostras que ha de passar a Caualaria E Iffantaria p.ª se euitarem os descaminhos que se entende ha nestes particulares; Agradeçouos tudo o que em rezão disto tendes obrado que he muy conforme a confiança que faço de uossa pessoa E Zelo, Espero Continueis nisto E no mais que se for offerecendo de man.ʳᵃ que as cousas da Prouincia fiquem com a ordem E assento que conuem a conseruação della; Escripta em Lx.ª a 11 de m.ᶜᵒ de 659.

*Raynha*

O Marques Almirante

Para o Bisconde Gou.ᵒʳ das Armas da Prouincia do minho

## 1659 — FEVEREIRO — 1

Bisconde amigo. Ev El Rey, uos enuio m.[to] Saudar como aquelle q̃ amo. João Nunes da Cunha Gou.[or] das armas de Setuual e Ministro da Junta dos trez estados uay a essa Prou.[a] ajudar o Socorro da Praça de Monção e de Saluaterra, a quem encarreguey mandasse fazer algũas delligencias tocantes a meu Seru.[o] Como he o fazer tomar contas de todos os effeitos tocantes as fortificaçõens das Praças dessa Prou.[cia] e dando forma conueniente, a cobraça e despeza delles, como dispoem o Regim.[to] applicando todo p.[a] se hauer de continuar a fortificação em duas Praças q̃ mais conuenha p.[a] se trabalhar nellas, e acabar a fortificação antes q̃ Se de princípio a outras; Ajustando com nosco, quais sejão; E q̃ outro sy Reforme a Vedoria gl dessa Prou.[cia] assy de Vedor geral como de mais officiaes della, comunicando o, com mosco; do q̃ uos auizo, fiando de uosso Zello, e cuidado, ajustareis tudo, como de uos se espera e conuem a meu seruiço. Escrita em Lx.[a] em pr.[o] de feu.[ro] de 659.

*Raynha*

P.[a] o Bisconde Gou.[or] das armas da Prou.[cia] do Minho

Dom pedro de mens.

## 1659 — JANEIRO — 31

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo, Receby a Vossa carta de Vinte hum deste mez, em que me auizastes do que intentaueis fazer em soccorro das Praças citiadas. Pareceome agradeceruos muito (como o faço) o zello, E cuidado com que Vos empregães em meu seruiço, e Vos dispondes com tão desigual poder acometer o Inimigo que he tudo muy proprio de quem sois, E do Vosso grande Valor, medeante o qual, espero em Devs, que Vos hauerá dado hum felice successo. E porque (como mo auizaes) conuem que nessa Prouincia haja mais armas de fogo, mando Vir de Alentejo dous mil Mosquetes E arcabuzes, dos que se tomarão ao Inimigo, para se Vos remeterem em companhia dc socorro de gẽte com que a ella ha de passar João Nunes da Cunha, e Vós ordenareis que se repartão como Vos pareçer que se tenha boa conta com Ellas, polla falta nestes Reinos ha de armas desta qualidade. Escrita em Lix.ª a 31 de Jan.ʳᵒ de 659

*Raynha*

O Conde de Soure
Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

Pedro Cesar de meneses

1659 — JUNHO — 18

Visconde Amigo. Eu El Rey Vos enuio m.ᵗᵒ saudar como aquelle q̃ amo. Pela Vossa carta de 10 do Corrente, e pelo papel, que com ella Remetestes, entendi as preuenções do Inimigo por essa parte, e os auisos de Castella que recebestes por hum confidente, com quem Vos comunicaes. O cuidado, com que estaes de alcançar o poder, e disposições do Inimigo, e de tudo, o que pode ser de prejuizo ao Reyno, Vos agradeço muito; e espero o continueis daqui em deante. He verdade, que o Inimigo publicou em 8 de Mayo suspenção de armas com França por tempo de dous meses, que se acabão em 8 do q̃ Vem: E ainda que isto costuma ser disposição proxima p.ª a paz, não recebi ate agora auiso de estar ajustada, antes pareçe ha nouidade naquella materia, se são verdade.os os Ultimos auisos, q̃ se receberão sobre Ellas. Do q̃ mais alcançares sobre esta materia, tereis cuidado de me auisar, pois he da importancia q̃ sabeis. Escrita em Lix.a a 18 de Junho de 1659

*Raynha*

P.a o Visconde de Villa noua de Ceru.ra

1659 — OUTUBRO — 28

Visconde Amigo: Eu El Rey Vos enuio m.to saudar, como aquelle q̃ amo. Vy a declaração do Nauio francéz, que me remetestes plo ordinario passado: e agradeçouos o cuidado; com que procurastes aquella noticia, que em parte se conforma com outras, q̃ Receby por cartas de Paroi, e de São João da Luz. Escrita em Lix.a a 28 de Outr.o de 1659.

*Raynha*

P.a o Visconde de Villa noua de Ceru.ra

1659 — NOVEMBRO — 10

Visconde Amigo. Eu El Rey Vos enuio m.to saudar, como aquelle, q̃ amo. Com a vossa carta de 2 do Corrente se recebeo a relaião impressa da entrada q̃ fez em Madrid o Marichal Duque de Agramont e posto q̃ tenho entendido partira de São João da Luz a 13 do passado, não tinha entendido sua chegada. Agradeço-vos aquelle cuidado, e Vos agradecerey o q̃ tiuerdes de me auizar de tudo, o que se offerecer dessa parte, que possa ser de importancia aos negocios do Reyno. Escrita em Lix.ª a 10 de Nour. de 1659

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.ʳª

1659 — AGOSTO — 20

Visconde Amigo: Eu El Rey Vos enuio m.ᵗᵒ saudar, como aquelle q̃ amo. Pela Vossa carta de 12 do Corrente auisaes, como Francisco de Saa Secretario da Embaxada de Inglaterra fora aprizionado de hum Nauio de Ostende Vindo p.ª este Reyno em companhia de outros Portuguezes: e ainda q̃ senti este successo, hauia tantos dias, que Franc.ᶜᵒ de Saá tinha partido, que se podião esperar de sua tardança outros peores. A noua de Antonio Vas Religioso da Companhia, hauer fugido para Castella em seguimento de Dom Fernando, se tinha aqui já recebido por carta do Conde de Soure meu Embax.ᵒʳ em França se dahy se offerecer outra nouidade Vos agradecerey enuiardesma, como Vos agradeço o cuidado, com que me auisastes desta. Escrita em Lix.ª a 20 de Agosto de 1659

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.ª

1659 — JULHO — 1

Visconde Amigo. Eu El Rey Vos enuio m.ᵗᵒ saudar, como aquelle q̃ amo. Com a Vossa carta de 25 do passado recebi o avizo do Correspondente do Gouernador de

Crasto Laboreiro, com a noticia da tregua de França com Castella, e das preuenções, que fazem por essa parte para esta Campanha. O tratado da paz de França com Castella não está ajustado, e conforme ao auizo, ainda ha duuidas, que uencer. O que França pedio para Portugal forão dez annos de tregua, que se lhe não concederão, e não sei, nem creyo, que pedisse outra cousa, e m.[to] menos o que sem nenhũa Verosimilidade diz este auizo. As preuenções para Alentejo, porque me preguntaes, são até agora m.[to] lentas. De tudo o que souberes no tocante á paz de França, como nas preuenções contra este Reyno. Vos encomendo me auizeis; porque ambos estes Nég.[cos] são de muita consideração. Escrita em Lix.[a] ao pr.[o] de Julho de 1659.

*Raynha*

P.[a] o Visconde de Villa noua de Ceru.[ra]

1659 — JULHO — 16

Visconde de Villa noua de Cerueira. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que Amo. Com a uossa carta de 2 do corrente recebi o auizo do Correspondente sobre a paz de frança e sobre o estado das couzas de Castella, e me perguntaes o fundamento que podem ter as Nouas da paz. O Ultimo auizo que recebi de Pariz, que tem data de 21 do passado diz que a paz não estava ajustada, e o Conde de Soure ficaua com Confiança de poderem estes Reinos ter alguma parte nella. O 3.[o] do Porto mando marchar a essa frontr.[a] como me auizaes. Escrita em Lx.[a] a 16 de Julho de 1659.

*Raynha*

P.[a] o Visconde de Villa noua de Ceru.[a]

1659 — JUNHO — 7

Visconde Amigo. Eu El Rey Vos enuio muito, saudar como aquelle que amo. Receby a Vossa carta de treze do mez passado, em que auizastes do estado em que estavão as fortificações das Praças dessa Prouincia, em que se trabalhaua com todo o callor. E pareceome agradecer-uos muito. (Como o faço) o zello e feruor com que Vos haueis em tudo o que pertence a meu seruiço E cumprimento de Vossas obrigações que são os motiuos que me asseguräo o cuidado com que procurareis, que muy sedo se acabem de por em deffensa, por se acazo o Inimigo as acometer.

Escrita em Lx.ª a 7 de Junho de 659

*Raynha*

Dom Alu.º de Abranches de Cam.ʳᵃ

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — JULHO — 30

Visconde amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. com a uossa carta de 16 do passado remeteis hum auizo q̃ tiuestes do correspondente do gou.ºʳ de Crasto Laboreiro com noticias de Castella e das preuenções do inimigo em Galiza. Tambem Auizães a nouidade q̃ se offereceo sobre a gente com q̃ me queria seruir a Comarca de Guimarães, aqui ja se uos respondeo com ocazião de outra carta uossa mais moderna. O cuidado com que conseruães as correspondençia em Galiza e com q̃ me Remeteis os auizos della, uos agradeço.

Escrita em Lx.ª a 30 de Julho 659.

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.ʳᵃ

1659 — NOVEMBRO — 25

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como Aquelle que amo. Segundo o que Veio desta uossa carta de *14* do Corrente foi errada a informação que se me deo do estado dessa prouincia, As uossas razões me parecem m.ᵗᵒ justificadas, e me conformo com ellas, encomendandouos muito façaes trabalhar ese inuerno na fortificação das praças, formação de Auxiliares, tratem de Artelharia, e nas mais couzas necessarias, p.ʳᵃ poder sahir o ex.ᵗᵒ, que se conuier fazelo na primauera, se ache prompto p.ª isso, e fio eu de uosso cuidado e do zello com q̃ me seruis, que quanto se puder se hade fazer por conseguir este intento. Escrita em Lix.ª a 25 de nour.º de 1659

*Raynha*

P.ª o Visconde de Villa noua de Ceru.ª

1659 — JULHO — 19

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Recebi a Vossa carta de sete do prezente, em que auizastes da pouca Infantaria com que Vos achaueis para cobrir as Praças dessa Prouincia, E do que se tinha obrado nas fortificações das praças della. E pareceome dizeruos, que o Conde de Miranda, E Camara da Cidade do Porto, mando escreuer, Vos remetão o terço com que me serue para sua deffensa e da Prouincia. E Vos ordeno, que com este soccorro, E com o mais poder com que Vos achardes, trateis da deffensa della como entenderdes que conũe a meu seru.º E que o mesmo fações nas obras das fortificações das Praças, acodindose logo E aho mesmo tempo, a todos as que for possivel, E com mayor callôr âs mais expostas ao perigo, assy do mar, como da Campanha. E fio de Vosso Zello, Vallor E prudencia que disporeis tudo de sorte que correspondais a grande confiança E estimação q̃ faço de Vossa pessoa. Escrita em Lx.ª, a 19 de Julho de 659

*Raynha*

Fran.co de sousa coutinho

O Conde de Prado

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira.

1659 — JANEIRO — 29

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por se achar muito atrazada a fortificação das Praças dessa Prouincia, e ser necessario tratar dellas com mayor callor, E saberse o que se tem trabalhado em cada hũa. Vos ordeno, que Vejães as ditas fortificações, E deis as ordens necessarias, para que se continuem com todo o cuidado, procurandose ponhão em sua perfeição, o mais em breue que for possiuel, Valendouos para esse effeito, da ajuda, E parecer, de João nunes da Cunha, Gouernador das armas de Setuual, que por me seruir Vay a essa Prouincia, com a gente de socorro que a ella enuio, o qual, como ministro da junta dos tres Estados hade buscar todos os meyos de acrescentar os effeitos E consignações para as fortificações, como lho encarreguey E creyo que o fará. Escrita em Lx.ª a 29 de Jan.^ro^ de 659.

*Raynha*

O Conde de Soure

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — AGOSTO — 10

Visconde Amigo. Eu El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Havẽdo visto a Vossa carta de dous do mez passado, com que auizastes das noticias que por todas as partes Vos chegavão das preuenções que o Inimigo fazia em Galiza: do muito que se tẽ trabalhado nas fortificações dessa Prouincia, particular mente na de Caminha. E do forte que determinaueis fazer junto de Valença: Vos ordeno que este façaes logo obrar cõ toda a breuidade E callor, por aquella Praça ser mais exposta que todas âs Inuazões do Inimigo. Aos officiães da Camara da Villa de Caminha mando escrever a carta que com esta se Vos remete para lha fazerdes dar agradecendolhe o Zello e fidelidade cõ que se expuzerão a obrar a fortificação daquella Praça. E Vós de minha parte fareis o mesmo aos officiaes da Camara dos outros lugares que se fortificão e tratão de sua conseruação e deffensa.

Escrita em Lx.ª a 10 de Agosto de 659.

*Raynha*

O C.de de Cantanhede

O Conde de Prado

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1659 — ABRIL — 5

Bisconde amigo. Ev El Rey uos inuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Porq̃ com a inuazão que o inimigo tem feito por essa Prouincia se necessita de q̃ as Praças della esteião com preuenção necessaria, para se poderem defender; e a Villa de Caminha se acha de prez.te muito desmantellada, e assy em maior Risco. Vos encomendo Muito: q̃ com todo o cuidado E dilligencia procureis q̃ se fortifique na milhor forma q̃ for possivel. Escrita em Lix.ª a 5 de Abril de 659.

*Raynha*

P.ª o Bisconde

1657 — SETEMBRO — 5

Bisconde amigo. Ev. El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por uarias cartas das Camaras d.Essa Prouincia, e da Nobreza della, e por outras muitas vias me tem chegado, a grande assistencia, e trabalho, com que nesta inuazão, q̃ o inimigo, tem procurado fazer nessa Fronteira, tratardes de o reprimir, com tanto Valor, e asserto q̃ foi a cauza de se hauer enfreado de maneira que não forão por diante os grandes danos q̃ ameaçaua o desigual poder, com que entrou nella, despendendo muito de uossa fazenda para sustentar q̃ os Soldados não largassem o Eixercito como muitos pretenderão fazer, e tratando da conseruação e gouerno delle, como se deuia esperar de Vós. E porque deste seruiço fico com toda a deuida satisfação me pareceo agradeceruolo, como merece esta fineza e certificaruos q̃ todas as q̃ fizerdes em meu Seruiço me serão sempre muy prezentes para q̃ nas occaziões de uossos acressentamentos, m'acheis sempre com esta lembrança. Escrita em Lix.ª a 5 de Settembro de 657

*Raynha*

P.ª o Bisconde d.e Villa Noua da Cerueira

1657 — JULHO — 24

Visconde amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Da vossa carta de tres do corrente fico entendendo a prompta disposição, cuidado, E desvello com que Vos empregães em meu Seruiço, pondovos em campanha com Vossos criados, logo que Soubestes que o Inimigo tinha entrado segunda vez nessa prouincia: Que com a Nobreza que depois se Vos juntou, Vos fostes âquartelar duas legoas delle, E que ficaueis persistindo neste sitio, em oposição de Seus intentos: E convocando â mais gente nobre da prouincia (que entendieis Vos não faltarâ nenhuã) e fazendo todas as mais diligencias, esforsos, e dispendios de Vossa fazenda, que se deixão considerar das obrigações com que nascestes, acção a que Vos dispusestes. E empenho da occazião: Que neste tempo recebestes a carta que Vos mandey escreuer em Vinte e Sete de Junho proximo passado, e que ficaueis obrando quanto, Vos era possiuel para os bons successos de minhas armas. E me pareceo agradeceruos Como ficaueis de continuar nella. Escrita em Lx.ª a 24 de Julho 1657.

*Raynha*

O Conde de Prado

Saluador Correia de Sáa j benauide

P.ª o Visconde de Villa Nova da Serueira

1657 — AGOSTO — 4

Visconde amigo. Ev El Rey vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Receberaose as Vossas cartas de quinze e dezasete de Julho proximo passado, porque me representasteis as razões que Vos moverão a aceitar o Governo desse exercito, do numero de gente que elle constaua E do Inimigo, da falta de dinheiro, poluora, e moniçõcs que tinheis, e vltima mente que o Inimigo se tinha leuantado dos primeiros quarteis, E que se forteficará em distancia de mea legoa rio abaxo, entre Villa nova e Vallenca: o que tinheis alcançado de Seu intento, e do sitio que tomastes em Sua opposicão. E me pareceo agradecervos, como por esta o faço ô prompto Zelo de meu seruiço com que Vos dispusestes a suprir a falta de Dom Alvaro de Abranches, e dizervos que na aceitação desse gouerno (por seu impidimento) procedestes como de Vos deuo esperar Sempre E que ao mais tenho mandado acodir, com a diligencia, e cuidado que pede a occasião tendo por certo que em quanto o Conde de Castel melhor não chegar a essa prouincia (para a qual o nomeey por Gouernador das Armas) como depois acodireis ao que se offerecer de meu seruiço como te gora a fisestes. Escrita em Lx.ª a 4 de Agosto de 657

*Raynha*

Saluador Correia de Sáa j benauide

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de Villa Nova

1657 — SETEMBRO — 10

Visconde amigo. Ev El Rey uos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Por carta de treze de Agosto proximo passado, do Conde de Castel milhor, Gouernador das Armas dessa Prouincia de entre Douro, e Minho, entendi o zello, cuidado, e boa deligencia com q̃ me seruistes no tempo que se formaua o Exercito, hauendo sido, o mais eficaz meu para a gente se ajuntar, ajudando a sustentarse com Vossa industria, e fazenda, E com a mesma hauerdes socorrido a praça de Valença por alguãs Vezes com refrescos e mantimentos, animando os soldados, e moradores, que estauão nella, emquanto o inimigo se não leuantou de sua Vezinhança, e tomardes a Vosso cargo ir gouernando o Exercito, precedendo para isso ordens, e ajustamentos com Dom Aluaro de Abranches, E porq̃ tudo he conforme Ev o esperaua de Vossa qualidade, e pessoa, me pareceo agradeceruolo, (como por esta carta o faço) e dizeruos q̃ me ha de ser sempre presente este seruico e os mais q̃ me haueis feito, em tudo o q̃ correo por Vossa conta, para Vos fazer toda a merce que ouuer lugar, quando tratardes de Vossos despachos, e acrecentam.[tos] Escrita em Lx.[a] a *10* de Setembro de 1657.

*Raynha*

O Conde de Odmira

O C.[de] uilar maior

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1657 — JUNHO — 27

Visconde Amigo. Eu El Rey Vos enuio m.[to] saudar, como aquelle, que amo. Tornou o Inimigo, como sabeis, a entrar com exercito nessa Prouincia, e se da pr.[a] vez fostes acudirlhe de tão longe, espero, q̃ melhor o hajaes feito estando tão perto. A gente paga he muito pouca, E com a Auxiliar tendes tanta mão, que tenho por certo a faça crecer, E animar muito a Vossa deligencia, e a assistencia, que espero fa:aes a Dom Aluaro, E à Prouincia em ocazião tão apertada, como esta, que por esta razão, e por quem sois, vos obriga a Seruirme tambem, como sempre o fizestes, e como o fizerão uossos passados aos Senhores Reys meus predecessores. Será muito particular, e me ficará sempre na memoria tudo o q̃ espero façaes nesta occazião. Escrita em Lx.[a] a 27 de Junho de 1657.

*Raynha*

P. o Visconde de Villa Noua da Ceru.[ra]

1658 — DEZEMBRO — 23

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar, como aquelle que amo. Recebi duas cartas uossas, de quatro de seis deste mez, em que me destes conta do socorro que se introduzio nas Praças de monção e Saluaterra, E deligencias que despois fez o Inimigo por difficultar a entrada de outros; E pareceome agradeceruos muito (como o faço) a fineza com q̃ em tudo me seruis, que he o mesmo que espero de quem sois, E do empenho grande que tendes na conservação destes Reinos. E para os socorros se continuarem. Vos tenho mandado remeter todo o dinheiro que he possiuel. Escrita em Lx.ª a 23 de Dez.ʳᵒ de 658.

*Raynha*

O Conde de Soure

Pedro Cesar de menezes

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1658 — NOVEMBRO — 24

Visconde Amigo. Ev El Rey uos enuio muito saudar como aquelle que amo. Polla grande confiança E estimação que sempre fiz de Vossa pessoa, E pollo muito que nestes Ultimos anos acrescentastes os motiuos que a isso me obrigão nos particulares seruiços que me fizestes, ouue por bem de Vos nomear no Gouerno das armas dessa Prouincia E Exercito, como o Vereis da patente que com esta carta se Vos enuia. E espero que com Vossa pessoa, zello, E vallor, melhorem muito as couzas e successos dessa Prouincia, E para assy o poderdes fazer, Vos mando acodir com o dinheiro que em outra carta da data desta se Vos auiza, E se continuará o mais que for possivel. escrita em Lx.ª a 24 de nouembro, de 658

*Raynha*

O Conde de Soure

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1658 — DEZEMBRO — 5

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle q̃ amo. Nuno da Cunha de Atayde, me escreueo a carta de que com esta se Vos enuia copia, em que auizando o estado em q̃ se achauão as Praças de Monção, E saluaterra, aponta algũas couzas de que conuem que tenhaes noticia; E assy uos encomendo muito, que reconhecendo o que se conthem na dita carta, procureis quanto Vos for possiuel soccorrer Monção, E atalhar os dannos que Nuno da Cunha reçea. E fio de Vosso Zello e prudencia, que nisto, e em todo o mais que entenderdes que conũe a meu seruiço procedereis com o cuidado E desuelo com que o tendes feito em tudo o que Vos Encarreguey. Escrita em Lx.ª a 5 de Dez.º de 658.

*Raynha*

O Marquez Almirante

Ruy de Moura

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

1658 — OUTUBRO — 19

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo. Por o Inimigo infestar cõ groso poder os lugares que lhe ficão Vezinhos nessa Prouincia, e conuir que lhe faça â oposição que for possiuel para se lhe estrouar o intento; e que o Conde de Castel milhor por estar tão longe desta corte não perca as occasiões que se lhe oferecerem, na dilação de me dar conta e ter Resolução minha, lhe mando es Creuer que ouuidouos a Vós, e ao Conde de Miranda obre o que lhe parecer mais conueniente, Pello que Vos encomendo muito que nas occasiões, em que o Conde necessitar de Vossa parecer e Vollo pedir, lho deis na forma que uirdes que conuem mais a meu seruiço, escrita em Lix.ª 19 de oitubr.º de 658

*Raynha*

O Marques Almirante

O C.de de Cantanhede

Para o Vis Conde de Villa Noua da Serueira

1658 — JUNHO — 19

Vis Conde amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar Como aquelle que amo, Reçebi a Vossa Carta do trez do prezente, E sinti muito o descontentamento que nella me reprezentastes, A patente de Nuno da Cunha de aTaide, mando Recolher e fazer outra, as mais deligencias das de Vaças que pedieis, hej por escuzadas pella grande serteza e satisfacão com que estou de Vossa pessoa, e a grande estimação que faço della, E da Vossa Caza Escrita em Lixa a 19 de Junho de 1658.

*Raynha*

O Conde de Soure

Pedro Cesar de meneses

P.ª o Visconde de V.ª Noua de Seruera

1658 — OUTUBRO — 12

Visconde Amigo. Eu El Rey Vos enuio muito saudar, como aquelle q̃ amo. o Conde de Castel melhor, me auizou do Vallor com que Vos ouuestes na occasião que ahy se teue com o Inimigo, em dezassete do mez passado; E ainda que eu tinha tantas razões de assy o esperar de Vosso Zello, E de quem sois, me pareço com tudo agradeceruolo muito (como o faço) E dizeruos, que este e os mais seruiços que me tendes feito, me hão de ser sempre presentes, para folgar muito de Vos fazer a honra, E merce que mereceis. Escrita em Lx.ª a 12 de Out.º de 658.

*Raynha*

O Marq̃ Mordomo mor

O Conde de Odemjra

Para o Visconde de Villa noua

1658 — OUTUBRO — 11

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo. o Conde de Castel milhor, me deu conta particullar, do zello E promptidão, com que em Vos auizando, o soccorrestes, não só com a gente do Vossos lugares que Vos pedio, mas com Vossa pessoa, criados, e familiares, E do Vallor com que Vos hauieis nas occasiões que se offereciāo com o Inimigo. E posto que tudo o referido he muy proprio do gramde Zello, E do muito que sois interessado na conseruação destes Reinos, me pareceo contudo agradeceruolo muito (como o faço) significandouos que foy este seruiço digno da grande estimação que faço de Vossa pessoa, E qualidade. Escrita em Lx.ª a 11 de Outubro de 658.

*Raynha*

O Marq̃ Mordomo mor

O Conde de Odmira

Para o Visconde de Villa noua

1659 — SETEMBRO — 12

Visconde Amigo. Ev El Rey Vos enuio muito saudar como aquelle que amo. O Sargento mor Simão Madeira, que a essa Prouincia foy de socorro na occasião passada, faz m.ᵗᵃ falta para o Exerciuo do seu posto. Ordenouos que tanto que esta receberdes o façães logo Vir para esta Corte, em Vertude desta minha ordem. Escrita em Lx.ª a 12 de Setembro de 659.

*Raynha*

O Marques Almirante

Pedro Cesar de meneses

Para o Visconde de Villa noua de Cerueira

*(Continua).*

EDUARDO BRAZÃO

# A INSCRIÇÃO HEBRAICA DE GOUVEIA *

Durante os trabalhos de demolição de um núcleo de velhas casas que ladeavam uma rua estreita conhecida desde há muito por Rua Nova e há pouco oficializada em revista toponímica, — classificação que recorda a presença de uma comunidade judaica formada por «cristãos-novos» — foi descoberta uma lápida com caracteres hebraicos no dia 30 de Novembro de 1967.

Já há muito se pensava ter existido em Gouveia uma numerosa e forte comunidade de judeus. O estilo de muitos portais daquele bairro e a designação de Rua Nova a uma das artérias do mesmo faziam recordar imediatamente a existência de judeus convertidos. De facto, em muitas cidades e vilas do nosso país há ruas com o mesmo nome em atenção aos cristãos-novos que haviam vivido nas imediações das mesmas.

Todavia, faltam-nos informações escritas alusivas à presença de judeus naquela vila beirã. Ao passo que acerca de judiarias em Belmonte, Guarda, Covilhã, etc.,

---

* Os elementos de ordem arqueológica relativos à lápida que fornecemos ao longo deste artigo foram-nos gentilmente cedidos pelo rev. Padre António Nogueira Gonçalves, que igualmente nos ofertou a gravura que ilustra o mesmo. Queremos aqui testemunhar-lhe o nosso vivo agradecimento por todas as ajudas que nos deu na elaboração deste modesto trabalho.

À Imprensa de Coimbra que gentilmente cedeu a composição hebraica necessária para este artigo endereçamos uma palavra de muita gratidão.

para falar só de localidades não muito distantes de Gouveia, possuímos várias notícias, sobre Gouveia, até à data, pouco conhecemos sobre o assunto.

A única referência (e é a cristãos-novos já) encontramo-la em Alexandre Herculano, na obra *História da origem e estabelecimento da Inquisição* (1), que nos fornece um relato bastante pormenorizado da profanação de uma imagem da Virgem e de outras querelas, frequentes naquele tempo, entre cristãos-novos e cristãos-velhos. No final deste artigo apresentaremos o texto na íntegra (2).

## A lápida hebraica de Gouveia

E voltemos à inscrição hebraica. Trata-se de um bloco de pedra granítica, sem arestas, em forma de paralelepípedo com as seguintes medidas: comprimento — 1,10; altura — 0,315; espessura — 0,21. A superfície foi levemente rebaixada para se gravar nesse espaço a inscrição. O rebaixo é delimitado por um traço (de 0,96 por 0,27). Depois, outros traços separam os espaços interlineares.

A lápida encontrava-se num armário de uma casa, encastrado em parede que possìvelmente servia de torça ou padieira do mesmo.

Tendo-se verificado a existência de uma inscrição na referida pedra, foi ordenado que se recolhesse para o «Pátio do Museu» anexo ao edifício dos Paços do Concelho, para resguardo e defesa de qualquer perigo de destruição e ainda para se proceder à interpretação dos caracteres insculpidos. Essa medida ficou-se devendo ao

---

(1) T. I, l. III, págs. 206-234.

(2) Já depois de concluído este artigo fomos à Torre do Tombo procurar outras referências à presença de judeus em Gouveia. Na *Chancelaria de D. Manuel* encontrámos vários elementos que apresentaremos na última parte deste trabalho.

Sr. Dr. Manuel Tavares Ferreira, ilustre presidente da Câmara Municipal de Gouveia, a quem queremos agradecer as várias informações que nos deu sobre a descoberta da lápida.

Passado pouco tempo já se sabia que se tratava de uma inscrição hebraica e formulava-se a hipótese de a lápida ter sobrepujado o portal da entrada de uma sinagoga local. Tudo isto viria depois a ser confirmado pela própria análise do texto a que procedemos logo que tivemos em nossa posse a reprodução fotográfica. Não podia ser de outra maneira, pois numa pedra de granito fino nunca se incluiria uma inscrição deste género para embelezar a parte interna da torça ou padieira dum armário tão modesto de uma simples casa de habitação.

Em 21 de Dezembro deslocámo-nos à vila de Gouveia, para ver de perto a famosa lápida. Ficámos surpreendidos com o óptimo estado de conservação em que se encontra e com a maneira tão nítida e legível como as letras ainda estão. A escrita em caracteres quadrados, bem delineados, é de uma perfeição admirável. O tempo e as vicissitudes dos séculos não foram capazes de fazer perder a frescura inicial da pedra, excepto, evidentemente, um certo desgaste e a existência de três orifícios por onde passavam os pregos de suporte que prendiam a lápida à parede. As letras, contudo, pouco sofreram com isso, e só na última linha, apenas.

No dia 9 de Janeiro de 1968 saía a primeira notícia a público acerca da inscrição hebraica de Gouveia (1).

---

(1) A primeira notícia acerca da sensacional descoberta da lápida com a inscrição hebraica de Gouveia apareceu no jornal *Diário de Coimbra*, de 9 de Janeiro, que apresentou também a sua tradução e reproduziu uma gravura da mesma, que fornecemos àquele periódico. Depois, outros jornais, quer diários quer semanários, aludiram ao caso.

No jornal *Novidades*, de 15 de Janeiro, publicámos um breve artigo preliminar na secção «Letras e Artes» ilustrado com uma gravura da lápida.

## Tradução da inscrição

Trata-se de três passagens bíblicas, uma do Profeta Ageu e duas de Isaías (¹). Há apenas duas palavras que não são bíblicas. Mais adiante nos referiremos a elas, quando falarmos da datação cronológica. Apresentamos, primeiramente, a tradução:

Linha 1 — A GLÓRIA DESTA ÚLTIMA CASA SERÁ MAIOR DO QUE A DA PRIMEIRA,

Linha 2 — DIZ O SENHOR DOS EXÉRCITOS (Ageu 2,9). *(CONCLUÍDA* OU *E FOI CONCLUÍDA)* A CASA DA NOSSA SANTIFICAÇÃO E DA NOSSA GLÓRIA (Isaías 64, 10).

Linha 3 — *(NO ANO)* E OS RESGATADOS DO SENHOR VOLTARÃO E VIRÃO PARA SIÃO EM ALEGRIA *(257)* (Isaías 35,10 = 51,11).

Na linha 2 não é bem claro se se deve ler וְנִשְׁלָם e neste caso teríamos o particípio nifal (ou וְנִשְׁלַם, e seria o perfeito nifal); ou se se deve ler מְשֻׁלָּם e neste caso teríamos

---

(¹) Já conhecíamos outras inscrições bíblicas descobertas em Portugal, que possìvelmente pertenceram a sinagogas: a de *Belmonte* do ano de 1217, descoberta em 1910, com uma passagem de Habacuc (2,20); duas de *Lisboa*, de 1260 e de 1307, respectivamente, com passagens do Salmo 5, 8 e dos Salmos 118, 20; 100, 4; 3, 1; 1 R. 8, 2; Prov. 8, 34. Preparamos para publicar brevemente um trabalho sobre as Inscrições Hebraicas em Portugal. O único feito até agora é da autoria de Samuel Schwartz, *Inscrições Hebraicas em Portugal*, em *Arqueologia e História*, I (1922), págs. 124-168.

A inscrição hebraica de Gouveia

o particípio pual, mais correcto e clássico. Todavia, inclinamo-nos para ונשלם e não para משלם.

Esta tradução que fizemos é literal. No contexto das obras dos Profetas Ageu e Isaías, a tradução alude explìcitamente ao Templo de Jerusalém. Como veremos mais adiante, o autor da inscrição aplicou à sinagoga local as palavras daqueles hagiógrafos. A Bíblia de Jerusalém, uma das melhores que hoje possuímos, traduz assim os textos bíblicos no contexto profético: *linha 1* — A glória futura deste Templo ultrapassará a primeira; *linha 2* — Diz o Senhor dos exércitos (Ageu 2,9). O nosso Templo santo e magnífico (Isaías 64, 10); *linha 3* — E os resgatados do Senhor voltarão e chegarão a Sião, exultando de alegria (Isaías 35,10 = 51,11).

## Texto vocalizado

Como é natural, a inscrição hebraica de Gouveia não é vocalizada, nem apresenta quaisquer sinais masoréticos. Foi entre o século VI e VIII que duas notáveis Escolas Judaicas, também chamadas Academias, a de Tiberíades e a de Babilónia, inventaram vogais e sinais de leitura, que ainda hoje se revestem de uma importância muito grande, principalmente para quem não está muito familiarizado com a Língua Santa. O Texto Bíblico vocalizado e anotado com grande variedade de sinais é conhecido por Texto Masorético (1).

Eis o texto consonântico da lápida agora munido de vogais e outros sinais masoréticos:

---

(1) Dá-se o nome de masorético porque os sinais de leitura e as vogais, inventadas nas Academias de Tiberíades e de Babilónia, se chamam *masoras*.

**Linha 1**

גָּדוֹל יִהְיֶה כְּבוֹד הַבַּיִת הַזֶּה הָאַחֲרוֹן מִן־הָרִאשׁוֹן

**Linha 2**

אָמַר יְהוָה צְבָאוֹת * וְנִשְׁלָם (וְנִשְׁלַם ou מְשֻׁלָּם)
בֵּית קָדְשֵׁנוּ וְתִפְאַרְתֵּנוּ *

**Linha 3**

(בִּשְׁנַת) וּפְדוּיֵי יְהוָה יְשׁוּבוּן וּבָאוּ צִיּוֹן בְּרִנָּה *

**Interpretação**

Como dissemos, trata-se de três passagens bíblicas tiradas dos Livros de Ageu e de Isaías. Convém, por conseguinte, considerar o texto da inscrição sob o ponto de vista exegético, para assim compreendermos a razão por que foi aproveitado para servir de texto desta lápida.

**A passagem de Ageu**

O profeta Ageu inaugurou o último período do profetismo em Israel, precisamente aquele que se situa na fase pós-exílica. Antes do exílio (586 a. C.), a pregação profética incidida prevalentemente sobre o tema da *conversão;* durante o desterro babilónico a preocupação dos profetas que acompanharam o povo hebraico no cativeiro era entregar-lhes uma *mensagem de consolação e de esperança;* agora, no período pós-exílico, a ideia de *restauração* era a nota dominante. Tinha surgido uma nova era em Israel. Uma nova comunidade renascera na Terra dos Pais, graças ao edito de Ciro (em 538) que tornara possível o regresso do povo judaico à pátria.

As breves exortações de Ageu (apenas dois modestos capítulos ao todo) datam do tempo que vai de Agosto a Setembro de 520. A ocasião da pregação do profeta foi a seguinte: os primeiro judeus chegados de Babilónia para reconstruir o Templo, depressa perderam a coragem, desinteressando-se a pouco e pouco de empreenderem a ingente realização. E é então que Ageu e Zacarias procuram lançar no espírito de seus contemporâneos coragem e incutir-lhes ânimo, especialmente a Zorobabel, governador do distrito de Jerusalém, e ao sumo-sacerdote Josué.

«É este o objecto dos quatro pequenos discursos que compõem o livro: porque o Templo continua em ruínas, Deus feriu os produtos da terra, mas a sua reconstrução inaugurará uma era de prosperidade; apesar da sua aparência modesta, este novo Templo eclipsará a glória do antigo, e o poder é prometido a Zorobabel, o eleito de Deus. Assim se cristaliza em torno do santuário e do descendente de David a esperança messiânica que Zacarias irá apresentar mais claramente ainda» ([1]).

De facto, o Templo tornara-se a partir de Ezequiel um tema messiânico central. É neste segundo Templo, que Herodes (37-4 a. C.) há-de restaurar, que Jesus Cristo entrará mais tarde. O versículo 9 completo diz assim: *A glória deste último Templo será maior do que a do primeiro, diz o Senhor dos exércitos, e neste lugar darei a paz, oráculo do Senhor dos exércitos.*

Como se vê, estas palavras do profeta Ageu foram aplicadas à sinagoga local de Gouveia, também ela lugar onde brilha a glória do Senhor, por ocasião da sua inauguração, certamente, pelo que depois será acrescentado.

---

([1]) *Bíblia de Jerusalém* (num só volume), Paris, 1961, pág. 986.

## As passagens de Isaías

Comecemos pela de 64,10. Os capítulos 63-65 do livro intitulado do profeta Isaías têm um acento marcadamente apocalíptico. Mais concretamente, no capítulo 64 o profeta implora a Deus o perdão para os pecados do seu povo, culpado do estado de desolação e de miséria em que se encontra a cidade santa e o seu Templo sagrado. É então que escreve estas palavras: «*O nosso Templo de santidade e de glória* (isto é, santo e glorioso) onde rezaram os nossos antepassados foi destruído pelo fogo; tudo o que fazia as nossas delícias transformou-se em ruínas.»

Na inscrição foram apenas aproveitadas as primeiras palavras do versículo que servem de aposto: *A glória desta última Casa será maior do que a da primeira, a Casa da nossa santificação e da nossa glória (= a nossa Casa santa e gloriosa).*

Os capítulos 35 e 51 de Isaías são autênticos poemas, em que se canta a libertação do cativeiro e o regresso à pátria em júbilo e alegria. Embora pertençam a duas fases distintas da obra de Isaías, contudo o seu conteúdo é muito semelhante.

Ao longo dos versículos de ambos estes capítulos, o profeta celebra o retorno a Sião e a felicidade do povo que novamente pode contemplar a sua terra com suas colinas e cidades e, particularmente, Jerusalém, lugar onde habita Deus dum modo muito especial.

O versículo completo diz assim: *E os resgatados do Senhor voltarão e virão para Sião em alegria; e uma felicidade eterna transformará os seus rostos; alegria e contentamento os acompanharão; a dor e o pranto terão terminado para sempre.*»

O Salmo 126 evoca a mesma ideia de regozijo e de triunfo, pelo facto de o Senhor ter resgatado o seu povo, libertando-o do jugo do exílio, e de o ter conduzido novamente a Sião, o país que dera aos Pais.

Para a solenidade da inauguração da sinagoga, estas palavras de conforto e de recordação de libertação e retorno a Israel apropriavam-se admiràvelmente. Devemos pensar que nessa altura já se dera a expulsão dos judeus de Espanha (1492) e muito brevemente o mesmo aconteceria entre nós.

As sinagogas, lugares de encontro das comunidades judaicas na diáspora, em que se prestava a Deus o culto semanal do sábado, ficavam orientadas para Jerusalém ([1]). Compreende-se, perfeitamente, pois que ao abrir-se ao culto mais esta sinagoga se pensasse em Sião e no seu Templo, de que aquelas eram o substituto em tudo, excepto no que respeita a sacrifícios.

Em conclusão, o autor da inscrição aplicou à sinagoga três passagens bíblicas de Ageu e de Isaías, nas quais se põem em evidência a ideia do Templo, com a sua glória e magnificência, e a de Sião para onde o Senhor, depois do êxodo e do exílio, conduziu o seu povo, lugar de encontro da família judaica no futuro. No sentido primitivo daquelas passagens está subjacente um conteúdo messiânico muito rico, que agora não nos propomos analisar.

## Data da inscrição

É costume as inscrições judaicas apresentarem a data em que foram feitas. Para isso, sobrepõem-se traços verticais ou oblíquos a algumas das consoantes do texto. Esses traços indicam-nos que, além do seu valor literal próprio, essas letras marcadas por aqueles sinais, possuem ainda valor numérico.

---

([1]) O único exemplar de sinagoga antiga existente entre nós é a de Tomar. Foi graças aos cuidados do Eng. Samuel Schwarz que se reconstituiu aquele recinto sagrado dos judeus, hoje museu Luso-hebraico Abraão Zacuto. Na fase primitiva estava orientada para Jerusalém, como ainda hoje se pode ver.

Em hebraico, como nas outras línguas semíticas, não existem os numerais. São as próprias consoantes do alfabeto que são utilizadas para tal fim. Assim, por exemplo, a primeira letra do alfabeto hebraico, o א, vale 1; a letra ב vale 2, etc. No fundo, trata-se de algo convencional, pois não se segue uma ordem determinada até à última letra do alfabeto.

A inscrição de Gouveia fornece-nos na última palavra, que traduzimos «em alegria» ( ברנה ), a data da sua composição.

As quatro consoantes ה, נ, ר, ב, têm a sobrepô-las quatro tracinhos ligeiramente oblíquos, o que é indicativo de que além de valor literal possuem também valor numérico. O ב vale 2; o ר vale 200; o נ vale 50; e o ה vale 5. Somando, obtém-se o número 257, o que equivale a 5257, pois o algarismo dos milhares omite-se por regra. Ainda hoje isso se faz no hebraico moderno.

O autor da lápida indicara já ao longo do texto que se tratava da conclusão da construção da Casa de Deus (= sinagoga). Intercalara no meio do texto bíblico as palavras ונשלם (ou משלם) e בשנת, que traduzimos por: *concluída* (ou *e foi concluída*) *no ano*. Agora na última palavra dá-nos o ano: 5257. Quer dizer, a sinagoga foi acabada de construir em 5257.

Não quer isto significar que deva necessàriamente aproveitar-se a última palavra de uma inscrição para a datação cronológica. Muitas vezes, são letras ao longo do texto que são encimadas de tracinhos. O que importa é que haja consoantes, cuja soma prefaça o ano que se pretende determinar.

Ora, este ano 5257 da criação equivale a 1496 da era cristã. A sinagoga de Gouveia foi, pois, inaugurada nessa data, pouco tempo antes da emanação do decreto de expulsão dos judeus de Portugal por D. Manuel I, em 5 de Dezembro de 1496. Foi, pois, certamente uma das últimas, se não a última, a ser construída no nosso país antes dessa data.

## DOCUMENTOS

### I. Alexandre Herculano sobre os desacatos entre cristãos-novos e cristãos-velhos de Gouveia (1)

Como dissemos no início deste trabalho, Alexandre Herculano refere-se a uma questão grave surgida entre cristãos-novos e cristãos-velhos em Gouveia e a vários desacatos e querelas entre ambos os grupos. Na origem coloca o ultraje de enforcamento feito a uma imagem de Nossa Senhora, muita querida aos habitantes da terra.

A profanação foi logo atribuída a três judeus que foram presos e conduzidos a Lisboa. Foram depois julgados e condenados à morte pela Inquisição.

Mais tarde, veio a saber-se que o crime fora praticado por um malfeitor que, por espírito de vingança, havia provocado o desacato para dele acusar os seus ex-patrões.

Tendo-se sabido tal coisa, veio depois a ser condenado esse malfeitor, chamado Barbuda.

Mais nos diz Herculano acerca do clima de ódio e de intriga que reinava em Gouveia, dos tumultos e rixas que constantemente surgiam naquela vila.

É por conseguinte um documento importante que nos testifica a existência de uma comunidade de cristãos-novos em Gouveia. Estava-se entre 1528 e 1530.

### O ultraje à imagem da Virgem

«*Ao passo que occorriam estes successos, em que apparecia a influencia da Inquisição castelhana, verificavam-se outros factos inteiramente domesticos, que tendiam aos mesmos fins. Nas povoações onde a gente*

---

(1) A. Herculano, *História da origem e estabelecimento da Inquisição*, 2.ª ed., t. I, l. III, págs. 206-234.

*hebrea constituia a parte mais importante e opulenta do logar era onde mais ameaçador se manifestava o espirito de perseguição. Pelas scenas que naquella epocha se passavam por alguns districtos se póde fazer idéa do que succederia geralmente. Uma imagem da Virgem, venerada em* Gouveia *e com a qual, segundo parece, o povo tinha particular devoção, appareceu indignamente ultrajada* (1).

*A devassa que se tirou ácerca daquelle acto sacrilego deu o resultado que o leitor facilmente prevê. Esse escandalo fora obra dos christãos-novos. Acharam-se tres culpados, dous dos quaes, sendo presos, foram remetidos para a corte. Não tardou a correr a voz de que estavam para ser absolvidos e postos em liberdade. Dizia-se então geralmente que os conversos haviam constituido uma vasta associação para mutuamente se ajudarem com os immensos recursos que lhes davam as riquezas de uns, a illustração de outros, a astucia de muitos e o temer vigilante de todos. Ao mesmo tempo accusava-se a magistratura de corrupção, para que nunca passassem por innocentes os réus absolvidos depois de um processo ordinario por crimes contra a igreja.*

## Carta dos juízes municipais ao rei

*Esta opinião comum agitava os animos em* Gouveia, *e os juizes municipaes dirigiram ao rei uma carta em que exprimiam as violentas suspeitas que o povo concebera ou, antes, que lhe tinham feito conceber ácerca dos dous indicados. Por estas comarcas — diziam elles — affirmam os christãos-novos que hão-de despender avultadas sommas para os livrarem e que provarão que o delicto foi perpetrado por christãos-velhos. Para isto buscam malfeitores e homens infames, pobres ou mal morigerados, que vão testemunhar por dinheiro o que elles quizerem*

---

(1) *Carta do Dr. Selaya,* Março de 1528, G. 2, M. 1, n.º 46.

*tanto a favor dos indiciados, como contra outrem. O povo está resolvido a ir pedir justiça a vossa alteza ou abandonar esta terra. Em tempos antigos os judeus, antes de convertidos, enforcaram a imagem de S. Maria na forca desta villa, como consta já a vossa alteza. A agitação é grande e, antes que suceda alguma cousa que seja em desserviço de Deus e de vossa alteza, paguem os culpados seu crime. Avisamos disto vossa alteza em descargo de nossas consciencias* (1).

## Receio de falsos testemunhos

*O temor de que do processo intentado resultasse passar o crime dos réus para os accusadores é evidente nesta carta. Temperava-se aquella manifestação de medo com as vagas ameaças de tumultos populares. Os factos gerais mencionados nesta carta, onde transluzem graves apprehensões, por uma parte, o odio profundo, por outra, não é facil dizer com certeza até que ponto seriam verdadeiros. Que os conversos tractassem de organizar os meios de resistencia à perseguição que viam pullular de toda a parte é altamente provável, e que, para defenderem os seus co-religionarios, offendendo ao mesmo tempo os inimigos, não fossem demasiado escrupulosos na escolha dos instrumentos que empregavam, também é assás crivel. Mas, por outra parte, não o é menos que os seus adversarios mandassem occultamente perpetrar desacatos para lhos attribuirem. Era um expediente obvio, de que a intolerancia não devia esquecer-se. Pelo que, porém, toca às testemunhas nos processos, se as que depunham a favor dos christãos-novos podiam ser corruptas e perjuras, porque o não seriam as que testemunhavam contra elles? Além das peitas, a que tanto estes como aquelles podiam*

(1) Cartas dos juízes ordinários de *Gouveia* de 8 de Nov. de 1528: Corpo Chronol. P. 1, M. 41, n.º 108 no Arch. Nac.

*recorrer, os christãos-velhos tinham outros meios de corrupção não menos poderosos, o odio geral das multidões contra a raça hebreia e a hypocrisia, que facilmente persuadiria aos ignorantes a legitimidade do perjurio, quando se tractasse de perder os inimigos da fé.*

*Na terrivel questão que naquella epocha se debatia, os resultados dos depoimentos judiciaes não devem merecer grande consideração à historia, quando aliás, se não firmarem noutra ordem de testemunhos ou não tiverem a seu favor razões de congruencia. Além do abuso das fórmulas de processo, a que, em todos tempos e em todos os paizes, as parcialidades irritadas umas contra as outras costumam recorrer, a legislação daquella epocha dá-nos, tambem, um documento irrefragavel de que o desprezo pela santidade do juramento se tinha tornado então demasiado vulgar* (1).

*As suspeitas, nesta parte, deviam, de efeito, ser mutuas; porque, se os christão-velhos accusavam os novos de empregarem testemunhas falsas para se defenderem, estes accusavam-nos a eles do mesmo expediente para os criminarem* («plurimis falsis testimoniis morti tradiderunt, facta, ut dictum est, inter testes conjuratione»: *dizem os dois jurisconsultos Parisio e Veroi na consulta que lhes mandou fazer Clemente VII sobre a materia da Inquisição)* (2), *e nós vamos ver que a affirmativa dos conversos vem sempre por uma accusação vaga.*

### A condenação dos três réus

*Era então (1528) nuncio e legado* a latere *em Lisboa D. Martinho de Portugal, que, tendo ido por embaixador a Roma em 1525, para substituir D. Miguel da Silva, e*

---

(1) *Orden. Manuel.*, l. I, tít. 44, § 1.

(2) *Symmicta*, vol. 31, f. 229. Veja-se também o *Memoriale*, ibid., f. 12.

*sendo, tambem, revocado em 1527, Clemente VII encarregara de exercer aquelas funcções na corte do seu proprio soberano* (1).

*A causa dos três réus, o terceiro dos quaes parece ter sido pouco depois apprehendido, foi-lhe devolvida. D. Martinho era homem sem moral e sem crenças, para que a religião não passava de um instrumento politico e que, até, não recuaria diante da idea de um assassinio para quaisquer fins* (2). *Não lhe tolia isso, segundo parece, o zelo pela exaltação da fé e perseguição das heresias, zelo cujo verdadeiro valor poderemos melhor apreciar nos seus actos como agente de D. João III em Roma.*

*Não acharam nelle os christãos-novos favor ou misericordia. Apresentam-se como accusadores dos réus dous habitantes, Richarte Henriques e um certo Barbuda, e foi tal o numero das testemunhas a favor da accusação que, apesar dos receios manifestados pelos juizes* daquella villa *sobre os meios de corrupção de que os christãos-novos dispunham, os conversos não encontraram bastantes malfeitores e individuos mal morigerados para lhes contraporem. Condemnados à morte, os três infelizes expiraram no meio das chammas abraçados com o crucifixo e invocando o nome de Christo até o ultimo suspiro* (3).

---

(1) *Corpo Chronol.*, P. I. M. 32, n.os 56 e 60 — Maço de Bullas, n.º 10 e M. 11 de dictas n.º 20. — Gav. 7, M. 11, n.º 4 no Arch. Nac.

(2) Estas graves accusações que fazemos aqui serão plenamente justificadas pela correspondencia original de D. Martinho, quando, anos depois, foi, de novo, embaixador em Roma, sobre o negocio do estabelecimento da Inquisição.

(3) «Tandem traditi sunt igni et in Christum D. N. usque ad ultimum anhelitum inspirantes, sanctoque crucifixo adherentes vitae suae extremum clauserunt diem»: *Memoriale,* l. cit., f. 15.

## Novas suspeitas — Barbuda é denunciado

*Antes, porém, do desfecho desse terrivel drama, novas e graves suspeitas se haviam suscitado contra varios outros habitantes* daquella villa. *Expediram-se ordens de captura, e alguns delles foram presos e remettidos para a corte. Eram pessoas abastadas, e um magistrado de Coimbra que fora enviado aquella diligencia, receiando que os libertassem pelo caminho, mandou-os carregados de algemas. Da devassa que então se tirou resultava o mesmo que se achara dos que já haviam sido presos. Eram judeus, como antes de baptisados* (1).

*Felizmente para elles, o seu processo devolveu-se ao tribunal ecclesiastico ordinario, por ter, pouco depois, cessado a legacia de D. Martinho de Portugal. Provou-se alli até a evidencia que um grande numero de testemunhas de accusação tinham sido corrompidas e jurado falso. Queimados solemnemente os depoimentos delles, foram soltos os presos. Só não consta que fossem punidos os que haviam mentido à sua propria consciencia* (2).

*Não tardaram muitos anos que uma rixa suscitada entre Richarte Henriques e Barbuda viesse explicar porque os os três christãos-novos condemnados ao supplicio das chamas haviam morrido abraçados com a imagem do Salvador. Henriques accusou publicamente o seu consorcio de ter sido elle quem commetera o desacato, quebrando a imagem da Virgem. As numerosas testemunhas de accusação eram falsas. Os parentes e amigos das vic-*

---

(1) «Tirei devassa assy sobre estes como sobre os que lá na corte estão: consta... serem judeus como o eram antes que os fizessem christãos. La mando todo. E por serem pessoas riquas e correrem risquo em irem desattados, mandey com elles o meirinho, etc.»: *Carta do Licenciado Sebastião Duarte a el-rei:* 16 de Setembro de 1529: *Corpo Chronol.*, P. 1, M. 4, n.º 84 no Arch. Nac.

(2) *Memoriale*, l. cit., f. 16.

*timas recorreram então ao tribunal supremo do rei. Barbud foi preso e conduzido ao carcere da corte, donde dentro em pouco lhe deram fuga, ou elle pôde evadir-se. Sopitou-se o negocio por causa do grande numero de testemunhas compromettidas ou, se acreditamos o que diziam os christãos-novos, por motivos mais ignobeis ainda* (1). *Podiam ter acertado com judeus occultos: accertaram com judeus sinceramente convertidos: o fanatismo é que não o comprehendia.*

## Clima de anarquia entre os habitantes de Gouveia

*Estes factos, que parece devem ter, ao menos, modificado a opinião popular em* Gouveia, *não fizeram senão irritar mais os animos. O systema das denuncias e processos judiciaes era expediente moroso e de incerto resultado. Não bastavam a tantos odios, nem o remoto theatro dos patibulos e fogueiras de Lisboa, nem a affronta e o exterminio de uma ou outra familia, de um ou outro individuo. Os instigadores da perseguição impelliam a plebe a practicar os maiores excessos. Durante parte do ano 1530 representaram-se em* Gouveia *continuas scenas de anarchia. Muitas vezes, pelas horas mortas da noite, sentiam-se os dobres do sino e da igreja matriz. A este signal ajunctava-se o povo e, marchando em tumulto, soltava de vez em quando uma voz que dizia:* «Justiça que manda fazer el-rei nosso senhor em taes e taes herejes», *proferindo os nomes de muitos christãos-novos. Immediatamente uma nuvem de pedras era arrojada contra as portas, janelas e telhados das victimas designadas. Os individuos assim votados às brutalidades da gentalla ousavam mais sair da sua habitação. Debalde o juiz de fóra mandou prohibir estes tumultos, ameaçando com severos*

---

(1) *Ibid.*, f. 15 v.

*castigos os perturbadores da paz publica. Provavelmente, sabiam que isso não passava de van ameaça, e as assuadas redobraram de violencia. Não ficaram, porem, ahi. O zelo dos defensores do altar, aquecido pelas orgias nocturnas, tinha crescido. Fingiram cartas regias e breves do nuncio, imitando com tal arte as assignaturas, que facilmente illudiam qualquer. Nestes diplomas forjados auctorizavam-se os christãos-velhos a prenderem os conversos que lhes parecesse e a abrirem devassas ácerca delles, a julgá-los e, até, a condemná-los ao supplicio das chammas. Munidos destes diplomas absurdos, procuraram varios mercadores mais credulos e mais timidos e extorquiam-lhes grossas sommas, além de muitos pannos e telas primorosas, asseverando-lhes que, se não dessem o que delles exigiam, seriam presos, julgados e punidos por um crime de judaísmo. Houve alguns mais audazes que pugnaram judicialmente contra taes vexames; mas o muito que poderam obter foi passar-se-lhes um instrumento authentico dos tumultos populares, deixando-se-lhes o triste recurso de se queixarem a D. João III das violencias de que eram victimas»* [1].

Numa tradição local muito antiga encontramos uma alusão à referência de Herculano acrescida de vários elementos de outra proveniência que completam a notícia daquele historiador: «*Da antiga judiaria, hoje Bairro da Biqueira, restam algumas casas velhíssimas, e uma capelinha com a invocação de Santa Cruz ou Vera Cruz, ligada à história das perseguições. A ela se refere Alexandre Herculano na sua obra* Do estabelecimento de Inquisição em Portugal, *contando-nos que certo dia, pela manhã, apareceu enfocada em dois paus, uma imagem de N.ª Senhora muito querida aos habitantes de Gouveia e pertencente à igreja de S. Pedro. Causou o facto, como é de calcular,*

---

[1] *Instrumentum de Injuriis et Tumultibus in oppido Gouvea*, etc.: *Symmicta*, vol. 31, f. 102 e segs.

*grande indignação, logo se levantando o brado unissono da profanação ser de atribuir a três israelitas, imediatamente presos e conduzidos a Lisboa, onde dois foram justiçados depois julgados pela Inquisição, conseguindo o terceiro, a muito custo e movendo poderosas influências, ser amnistiado. Mais tarde, porém, veio a saber-se ter sido a profanação cometida por dois malfeitores, empregados dos judeus que, por espírito de vingança haviam levado a efeito o desacato para dele acusarem os seus ex-patrões. A justiça de el-Rei caiu sobre eles e, condenando-os, reparou de certo modo, embora tardiamente, o crime que eles tinham cometido»* (1).

Por último, apresentamos uma breve mas curiosa alusão a judeus, que reflecte muito possìvelmente a sua presença em Gouveia.

Existe na Torre do Tombo um maço de manuscritos acerca do convento do Espírito Santo, em Gouveia, onde há uma referência à Fonte dos Judeus do seguinte teor: *«Inventario do que ficou por morte de Diogo Alvares, morador em Gouveia, onde há os bens de raiz seguintes: uns na caza, onde vivem seus herdeiros; outros no castello; uma vinha a S.ta M.a do Porto; outra no m.mo sitio; outra à Lagea das Chans; uma horta à Fonte dos Judeus; outra no Oiteiro...»* (M. 20, n.º 1). Seria interessante agora identificar todos estes sítios, o que não fizemos ainda. Para isto, como para uma apresentação completa da presença judaica em Gouveia, seria necessário preparar uma monografia da terra, o que realmente se impõe, dado o interesse e valor histórico que aquela vila possui.

---

(1) *Anuário Comercial de 1964*, vol. III, pág. 1218. Vid. também *Dicionário Corográfico de Portugal* de Américo Costa, art. Gouveia, págs. 1297; e *Portugal (Dicionário Histórico* de Esteves Pereira — Guilherme Rodrigues), vol. III, pág. 820.

## II. Na Chancelaria de D. Manuel I: privilégios aos cristãos-novos

O *Índice da Chancelaria de D. Manuel* fala da existência de cristãos-novos nas seguintes terras do reino: Arganil, Azamor, Barcelos, Borba, Cabeço de Vide, Çafim, Campo Maior, Castro Daire, Crato, Elvas, *Gouveia,* Guarda, Moura, Olivença, Pinhel, Sabugal, Souzel, Tavira, Tomar, Trancoso, Vila do Conde, Vila Flor, Vila de S. João da Pesqueira, Vila Viçosa e Vinhais ([1]).

Acerca da comunidade de Gouveia fornece-nos a *Chancelaria de D. Manuel* dois documentos em que são concedidos privilégios aos cristãos-novos da vila de Gouveia em razão de queixas feitas por ela ([2]). Emitidos em Évora, em 1520, fazem saber que é necessário usar de medidas tolerantes para com os cristãos-novos e não colocá-los numa situação de desigualdade em relação aos outros moradores da terra: «... *E ben asy vos mamdamos que daqui em diante aquamdo quer que se nesa vyla ouver de dar algũa apresemtadoria asy de casas como de roupa e quaesquer outras cosas se tenha tall maneira que os cristãos-novos sirvam em ella iguallmente soldo a livra como os cristanos (sic) velhos e que nom careguem mais sobre eles que sobre os ditos cristãos velhos*».

O primeiro documento trata do privilégio de isenção de impostos aos cristãos-novos, caso não esteja presente um deles ao lançarem-se tais impostos. Também trata da imposição que os cristãos-velhos faziam de exigir àqueles

---

([1]) *Índice da Chancelaria de D. Manuel I,* fls. 166-168.

O *Índice da Chancelaria de D. João II (Comuns),* fls. 20-23, refere as seguintes comunas de judeus: Avis, Bragança, Chaves, Elvas, Extremoz, Évora, Faro, Lagos, Lisboa, Moura, Santarém, Serpa, Setúbal e Viana. Como se vê, não aparece mencionada a de Gouveia.

([2]) *Chancelaria de D. Manuel I,* liv. 44, fl. 6.

que fossem apenas eles a concorrer para a hospedagem de estranhos com casas e roupas.

O segundo documento, aludindo igualmente a certas queixas feitas pelos cristãos-novos, determina que também eles sejam julgados idóneos para entrar nas eleições para cargos municipais e exercê-los caso sejam eleitos, bem como que não sejam constrangidos a certos serviços.

Numa palavra, são dois documentos que nos confirmam a existência de judeus (convertidos) em Gouveia, em 1520, e nos quais transparece claramente a política de tolerância seguida por D. Manuel apesar do decreto de expulsão de 1496 (1).

1. Aos cristãos novos da vila de Gouvea privilégio pera que se nom levem fyntas sem ser presente huum cristão novo (2).

*Dom Manuel etc. ffazemos saber a vós juizes de Govea e a quaesquer corregedores juizes e justiças a quem esta nosa carta ffor mostrada e o conhecimento dela pertemcer que os cristãos novos moradores nesa vyla e seu termo se nos emvyarom agravar dizemdo que quamdo se nesa vyla da alguũa aposentadoria sendo eles poucos e os christãos velhos muytos toda ou a mayor parte da dita apresemtadoria se lança a eles pedymdonos que a ela lhe desemos algũa provisam pera que na dita aposentadoria servisem hygualmente soldo a livra como lhe coubese e que bem asy recebyam agravo polos lamçadores das ffyntas* (3) *e taixas desa vyla porque quamto quer que se lamçam sempre a eles a mayor parte pydimdonos que*

---

(1) Vid. J. Mendes dos Remédios, *Os Judeus em Portugal*, Coimbra, 1895, págs. 275-321.

(2) Ao Sr. P. Doutor Avelino de Jesus da Costa deixo aqui o meu sincero agradecimento pelas sugestões que me deu acerca dos dois documentos.

(3) No texto *ffruytas*.

*mamdasemos que quamdo quer que se algũa ffinta* (1) *ou taixa se ouver de lançar nesa vyla fose presemte ao lançar delas algum cristão novo com os lamçadores pera rrequerer por sua parte. E porque nos delo praz vos mamdamos que daqui em diamte quamdo quer que nesa vyla se ouver de lamçar algũa ffinta ou taixa se nom lamce sen ser presemte algum cristão novo com os lamçadores o qual será emlegido polos cristãos novos ppera estar por sua parte ao lamçar das ditas fintas* (1) *e taixas. E bem asy vos mamdamos que daqui em diamte aquamdo quer que se nesa vyla ouver de dar alguũa aposemtadoria asy de casas como de roupa e quaesquer outras cosas se tenha tall maneira que os cristãos novos sirvam em ella iguallmente soldo a livra como os cristianos (sic) velhos e que nom careguem mais sobre eles que sobre os ditos cristãos velhos. Notefficamolo asy pera* [*que*] *o cumpraes. Dada em Evora aos II de Setembro, Symão de Matos o ffez, de mil he bc e vynte anos (= 1520).*

2. As cristãos novos da vylla de Gouvea privilégio pera que non vam con presos nem con dinheiros etc.

*Dom Manuel etc. fazemos saber a vós juizes da vyla de Govea e a todos os corregedores juizes e justiças a que esta nosa carta ffor mostrada e o conhecimento dela pertemcer que os cristãos novos moradores na dita vyla nos emvyaram dizer que posto que eles sejam autos e soficiemtes para emtrarem nas ymliçomes (sic) dos officios do concelho os nom metiam nelas pedimdonos que ouvesemos por bem que eles pudesem emtrar* (2) *nas ditas enliçomes e servir nos ditos officios. E visto per nos seu dizer e pedir per esta nos praz que quamdo quer que* (3)

---

(1) No texto *ffruytas.*

(2) No texto *entrarar.*

(3) No texto *quer que* é repetido.

*se fizerem as ditas emliçomes pera os officios do concelho desa vyla eles posam emtrar e ser metidos nelas pera servirem nos ditos officios scil. aqueles que fforem autos e sofficiemtes pera servirem nos ditos cargos e cada hum segumdo o officio que neles couber e pera que for emligido. E outrosy queremos por lhe ffazermos graça e mercê que daqui em diamte os cristãos novos moradores nesa vyla e termo eles nem neñum deles seyam costramgidos a yrem com nenũns presos nem aos gardarem nem tyrarem nenũns rroes de dinheiro que se na dita vyla haya de tirar nem menos seyam yurados porque avemos por bem e queremos que das sobreditas cosas seyam escusos e nom seyam costramgidos a servirem nelas porem pagaram pera a bolsa se se pera elas ffizer. E vos mamdamos a todos em yerall e a cada uum em especiall que o compraes e gardees e ffaçaes comprir e guardar asy e per a maneira que se em esta nosa carta contem. Dada em Evora a II de Setembro, Symão de Matos a ffez, de mil e bc e vynte anos (= 1520).*

MANUEL AUGUSTO RODRIGUES