THEORIA MATHEMATICA

DAS

INTERFERENCIAS

POR

Bernardino Luiz Machado Guimarães

DOUTOR EM PHILOSOPHIA PELA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
E SOCIO EFFECTIVO DO INSTITUTO DA MESMA CIDADE

LIVRARIA DA UNIVERSIDADE

Sala
Gab. O.S.
Est.
Tab.
N.º 699

Est. 5
Prat. 5
Vol. 1
Nº 3983
Sala

JUSTICE GUIDE THE SCALES
OCTAVIANO SÁ
COIMBRA

Sala
Gab.
Est. O. S.
Tab.
N.º 699

Ao seu Mestre e Amigo,
o Illmo e Exmo Sr. Conse-
lheiro Antonio José
Rodrigues Vidal,

testemunho de muita

THEORIA MATHEMATICA

consideração, reconhe-

DAS

cimento e estima do

INTERFERENCIAS

autor

5
5
3983

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

APRESENTADA A

FACULDADE DE PHILOSOPHIA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

THEORIA MATHEMATICA

DAS

INTERFERENCIAS

POR

Bernardino Luiz Machado Guimarães

Doutor em Philosophia
e Socio effectivo do Instituto de Coimbra

BIBLIOTECA DA UNIVERSIDADE
COMPRA
COIMBRA

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1876

AO

ILLUSTRISSIMO E EXCELLENTISSIMO SENHOR

CONSELHEIRO

ANTONIO MARIA DE FONTES PEREIRA DE MELLO

INTRODUCÇÃO

Uma vibração simples, como todo movimento, tem de se definir, a cada instante, pela sua velocidade e direcção; em successivos instantes, pelas leis de suas velocidades e direcções.

A direcção, positiva ou negativa, ou simplesmente a direcção absoluta, determina-se pelos seus angulos com os eixos coordenados.

A lei das direcções é a da linha recta.

A velocidade e a lei das velocidades, sós ou com o sentido da direcção, representam-se por

$$v = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t_{,} + \varphi),$$

com signal ou sem elle (1), formula em que α, a velocidade maxima ou coefficiente de velocidade, resume

$$a 2 \pi N,$$

(1) O sentido da vibração póde exprimir-se indifferentemente nos angulos da direcção ou no signal da velocidade. Muitas vezes porém é mais commodo um ou outro modo.

— sendo a a amplitude de vibração, e N o numero de vibrações produzidas num segundo, o qual, quando a duração de cada movimento vibratorio é muito curta, se póde com approximação suppôr sempre inteiro—; em que t designa a variavel tempo; e em que φ, a phase do movimento, resume

$$\pm 2\pi\Psi,$$

— sendo Ψ a anomalia —, ou

$$\pm 2\pi N\theta,$$

— sendo θ um avanço ou atraso de tempo —, ou

$$\pm 2\pi \frac{x}{\lambda},$$

— sendo x um avanço ou atraso de espaço, e λ o comprimento d'onda —, ou

$$2\pi\left(\pm N\theta \pm \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(\pm r\theta \pm x),$$

— sendo r a rapidez ou velocidade de propagação—.

Está completamente definida a vibração.

Para sabermos a posição que tem, a cada momento, a materia vibrante, bastar-nos-á integrar, sem introduzir constante, a formula da velocidade. Por que teremos

$$\delta = -a\cos(2\pi N t + \varphi),$$

equação, cujo primeiro membro diz a distancia da posição actual da materia vibrante á sua posição intermedia de natural equilibrio.

Para conhecermos a força viva do movimento associado á materia bastar-nos-á produzir

$$\frac{1}{2} m v^2.$$

Por que teremos:

$$\frac{1}{2} m v^2 = i = \frac{1}{2} m \alpha^2 \operatorname{sen}^2 (2 \pi N t + \varphi),$$

a força viva ou intensidade de vibração,—como ellipticamente se diz—, a cada instante;

$$\int i\, dt = \frac{1}{2} m \alpha^2 \int \operatorname{sen}^2 (2 \pi N t + \varphi)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \alpha^2 \int \frac{1 - \cos 2\,(2 \pi N t + \varphi)}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \alpha^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\,(2 \pi N t + \varphi)}{2.\,2.\,2 \pi N} \right],$$

a intensidade num tempo indefinido;

$$\int_0^{\frac{1}{N}} i\,dt = \frac{1}{2} m\,\alpha^2 \left\{ \frac{1}{2N} - \frac{1}{2.2.2\pi N}\left[\operatorname{sen} 2(2\pi + \varphi) - \operatorname{sen} 2\varphi\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4} m\,\alpha^2 . \frac{1}{N},$$

a intensidade durante o tempo d'uma vibração,— tempo que se chama periodo, e é

$$T = \frac{1}{N};$$

finalmente

$$\int_0^1 i\,dt = \frac{1}{4} m\,\alpha^2,$$

a intensidade num segundo.

Quando se tracta das vibrações da mesma materia, póde exprimir-se-lhes a força viva comparada sómente pelo quadrado da velocidade maxima. Assim faremos.

Até aqui as vibrações simples têm sido sujeito.

Digamos o assumpto que nos offerecem. São as suas interferencias.

O problema mathematico das interferencias consiste na composição e decomposição das vibrações simples ligadas á mesma materia.

Taes vibrações podem alinhar-se todas rectilineamente; ou, de modo mais geral, dispôr-se num plano; ou, do modo mais geral, em quaesquer direcções do espaço.

Portanto as divisões do nosso trabalho.

CAPITULO PRIMEIRO

Vibrações na mesma direcção

SUMMARIO: — Composição de duas vibrações numa, e decomposição reciproca; composição de muitas vibrações numa, e decomposição inversa: vibrações de periodo egual ou desegual, da mesma ou differente phase, de egual ou desegual amplitude.

Neste caso, que é de todos o mais simples, os movimentos vibratorios compõem-se necessariamente na direcção, que têm, e decompõem-se, porque assim o queremos, noutros movimentos da mesma direcção. Aqui pois as vibrações componentes e resultantes seguem, durante qualquer tempo, a mesma lei rectilinea. Podemos suppol-as no eixo dos x, e assim definidas em direcção e lei das direcções.

Este primeiro problema acha-se portanto, e desde o principio, reduzido á só indagação das velocidades e suas leis. É ao que vamos proceder, desde as mais simples circumstancias da composição e decomposição, quando são eguaes a phase e a amplitude, até as mais complexas, então que uma e outra differem.

I

Antes de tractar, com toda a generalidade, a composição e decomposição das vibrações, vamos procurar a resultante de duas e as duas componentes d'uma.

Vibrações de egual periodo

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual amplitude:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi),$$

ás quaes corresponde (1) a força viva commum,

$$\int_0^t i\, dt = \alpha^2.$$

A velocidade resultante será

$$V = v_1 + v_2:$$

(1) Só fallaremos da lei das distancias da molecula vibrante, quando interessar.

isto é, se as vibrações componentes tinham o mesmo sentido,

$$V_1 = 2\alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

correspondendo-lhe a força viva,

$$\int_0^1 I_1\, dt = 4\alpha^2;$$

se não,

$$V_2 = 0,$$

correspondendo-lhe a intensidade,

$$\int_0^1 I_2\, dt = 0.$$

Neste caso a lei das velocidades resultantes é a mesma das componentes, a dos senos.

Decomposição. Este problema immediatamente se resolve pela reciprocidade necessaria das equações consignadas.

2.º De amplitude desegual:

Composição. Sejam as duas velocidades componentes

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

ás quaes correspondem respectivamente as intensidades,

$$\int_0^1 i_1\,dt = \alpha_1^2$$

e

$$\int_0^1 i_2\,dt = \alpha_2^2.$$

A velocidade resultante será

$$V = v_1 + v_2:$$

isto é, se os movimentos componentes tinham o mesmo sentido,

$$V_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \varphi),$$

correspondendo-lhe a intensidade,

$$\int_0^1 I_1\,dt = (\alpha_1 + \alpha_2)^2;$$

se não,

$$V_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \varphi),$$

correspondendo-lhe a intensidade

$$\int_0^1 I_2\,dt = (\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

A resultante segue tambem a lei dos senos.

Decomposição. Este problema é indeterminado, caso não seja offerecida alguma relação entre as amplitudes dos movimentos componentes.

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual amplitude:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi_1)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi_2);$$

ás quaes corresponde a só intensidade,

$$\int_0^1 i\,dt = \alpha^2.$$

A velocidade resultante será

$$V = v_1 + v_2$$

$$= \alpha [\operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi_1) \pm \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi_2)]$$

$$= \alpha [(\operatorname{sen} 2\pi N t \cos \varphi_1 + \cos 2\pi N t \operatorname{sen} \varphi_1) \pm (\operatorname{sen} 2\pi N t \cos \varphi_2 + \cos 2\pi N t \operatorname{sen} \varphi_2)]$$

$$= \alpha [\operatorname{sen} 2\pi N t (\cos \varphi_1 \pm \cos \varphi_2) + \cos 2\pi N t (\operatorname{sen} \varphi_1 \pm \operatorname{sen} \varphi_2)].$$

Ainda neste caso a velocidade resultante seguirá a lei dos senos, se for possivel estabelecer:

$$\operatorname{sen} \varphi_1 \pm \operatorname{sen} \varphi_2 = M \operatorname{sen} \psi$$

e

$$\cos \varphi_1 \pm \cos \varphi_2 = M \cos \psi.$$

Ora estas condições equivalem a

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi_1 \pm \operatorname{sen}\varphi_2}{\cos\varphi_1 \pm \cos\varphi_2} = tg\,\psi,$$

— o que sempre se póde admittir, qualquer que seja a grandeza do primeiro membro, porque o segundo, como tangente, acceita a que fôr —; e a

$$(\operatorname{sen}\varphi_1 \pm \operatorname{sen}\varphi_2)^2 + (\cos\varphi_1 \pm \cos\varphi_2)^2 = M^2,$$

ou

$$2 \pm 2\,(\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2) = M^2,$$

ou

$$2[1 \pm \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] = M^2,$$

— o que tambem é sempre possivel, porque o primeiro membro, jámais negativo, não desdiz da sua representação em quadrado —.

Logo a velocidade resultante, segundo a lei senosoidal,

$$V = M\alpha\,(\operatorname{sen} 2\pi N t \cos\psi + \cos 2\pi N t \operatorname{sen}\psi)$$

$$= M\alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \psi);$$

que,— assim como a nova phase se desdobra, se os movimentos componentes têm ou não o mesmo sentido, em duas

$$\psi_1 \text{ e } \psi_2;$$

e, dos factores da maxima velocidade resultante, o que é funcção das phases se representa em

$$M_1^2 = 2\,[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

ou

$$M_2^2 = 2\,[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$= 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)_1 -,$$

offerece do mesmo modo as duas determinações,

$$V_1 = 2\,\alpha \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(2\,\pi\,N\,t + \psi_1)$$

e

$$V_2 = 2\,\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) \operatorname{sen}(2\,\pi\,N\,t + \psi_2);$$

ás quaes correspondem as intensidades

$$\int_0^1 I_1\,dt = 4\,\alpha^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

e

$$\int_0^1 I_2\,dt = 4\,\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Discutamos estas forças vivas.

Sendo os movimentos componentes no mesmo sentido, a intensidade resultante será, no seu maximo valor,

$$4\,\alpha^2,$$

quadrupla de cada intensidade componente, quando

$$\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)=\pm 1,$$

ou

$$\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)=2\,n\,\frac{\pi}{2},$$

ou

$$\theta_1-\theta_2=2\,n\,\frac{1}{2\mathrm{N}},$$

ou

$$x_1-x_2=2\,n\,\frac{\lambda}{2},$$

ou, d'um modo geral,

$$(r\,\theta_1+x_1)-(r\,\theta_2+x_2)=2\,n\,\frac{\lambda}{2};$$

e será, no seu minimo valor, nulla, quando

$$\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)=0,$$

ou

$$\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)=(2\,n+1)\,\frac{\pi}{2},$$

ou

$$\theta_1-\theta_2=(2\,n+1)\,\frac{1}{2\mathrm{N}},$$

ou

$$x_1 - x_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2},$$

ou emfim

$$(r\theta_1 + x_1) - (r\theta_2 + x_2) = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Sendo oppostos os movimentos componentes, a intensidade resultante terá o seu maximo valor,

$$4\alpha^2,$$

quando

$$\text{sen}\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 1;$$

e o minimo, zéro, quando

$$\text{sen}\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

É pois o inverso do que ha pouco succedia.

Decomposição. Este problema, para obter solução, necessita mais uma relação entre as phases dos movimentos componentes.

2.º De amplitude desigual:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha_1 \text{ sen }(2\pi N t + \varphi_1)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha_2 \text{ sen }(2\pi N t + \varphi_2);$$

com as suas respectivas intensidades,

$$\int_0^1 i_1\, dt = \alpha_1{}^2$$

e

$$\int_0^1 i_2\, dt = \alpha^2.$$

Resultará a velocidade

$$V = v_1 + v_2$$

$$= \alpha_1 \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1) \pm \alpha_2 \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2)$$

$$= \operatorname{sen} 2\pi N t(\alpha_1 \cos\varphi_1 \pm \alpha_2 \cos\varphi_2) + \cos 2\pi N t(\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \pm \alpha_2 \operatorname{sen}\varphi_2),$$

que, nas legitimas hypotheses,

$$\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \pm \alpha_2 \operatorname{sen}\varphi_2 = M \operatorname{sen}\psi$$

e

$$\alpha_1 \cos\varphi_1 \pm \alpha_4 \cos\varphi_2 = M \cos\psi,$$

— legitimas pela realidade das suas consequencias,

$$\frac{\alpha_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \pm \alpha_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{\alpha_1 \cos\varphi_1 \pm \alpha_2 \cos\varphi_2} = tg\,\psi$$

e

$$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 \pm 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = M^2 —,$$

se transforma em

$$V = M \operatorname{sen}(2\pi N t + \psi),$$

segundo a lei dos senos,

Tambem aqui a velocidade resultante tem, conforme a identidade ou contrariedade dos sentidos nos movimentos componentes, duas determinações, e são

$$V_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,.\,\text{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \psi_1)$$

e

$$V_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,.\,\text{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \psi_2).$$

Seguem-se as respectivas forças vivas, num e noutro caso,

$$\int_0^1 I_1\,dt = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

e

$$\int_0^1 I_2\,dt = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Discutamol-as.

Sendo os movimentos componentes no mesmo sentido, a intensidade terá um valor maximo, quando

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$$

ou

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\,n\,\pi;$$

medio, quando

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

ou

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2\,n + 1)\frac{\pi}{2};$$

minimo, quando

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1,$$

ou

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi.$$

Dar-se-á o inverso, quanto aos valores maximos e minimos, conservando-se inalteravel a expressão dos valores medios, se forem oppostos os movimentos componentes.

Decomposição. Este problema exige mais duas equações entre as incognitas.

Será determinado, quando, por exemplo, forem dadas as duas phases do movimento componente.

Consideremos, pela importancia das suas applicações, o caso em que os movimentos procurados, no mesmo sentido, têm as phases

$$0 \text{ e } \frac{\pi}{2}.$$

Seja a velocidade dada

$$V = M \operatorname{sen}(2\pi N t + \psi);$$

com a sua competente intensidade,

$$\int_0^1 I\,dt = M^2.$$

Nem é preciso recorrer ás formulas estabelecidas.

Com effeito é

$$\operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}t + \psi) = \cos\psi \operatorname{sen} 2\pi \mathrm{N} t + \operatorname{sen}\psi \cos 2\pi \mathrm{N} t$$

$$= \cos\psi \operatorname{sen} 2\pi \mathrm{N} t + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\left(2\pi \mathrm{N}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Logo as velocidades componentes são

$$v_1 = \mathrm{M} \cos\psi \operatorname{sen} 2\pi \mathrm{N} t$$

e

$$v_2 = \mathrm{M} \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\left(2\pi \mathrm{N} t + \frac{\pi}{2}\right);$$

ás quaes correspondem as intensidades,

$$\int_0^1 i_1\, dt = \mathrm{M}^2 \cos^2\psi$$

e

$$\int_0^1 i_2\, dt = \mathrm{M}^2 \operatorname{sen}^2\psi,$$

como devia ser; porque, ao que vimos, a equação que liga a intensidade resultante ás componentes, quando a differença da phase dos movimentos componentes é

$$(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

tal equação é

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = \int_0^1 i_1\, dt + \int_0^1 i_2\, dt.$$

Vibrações de periodo desigual

Quando as vibrações são de periodo desegual, ainda a subdivisão pela egualdade ou desegualdade da amplitude dá, mas sem correspondencia, a subdivisão pela egualdade ou desegualdade dos coefficientes de velocidade.

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam as velocidades

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi)$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi);$$

Designando por n a differença entre o numero das vibrações, por segundo, dos dois movimentos periodicos componentes, poderemos ás velocidades dadas substituir

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}[2\pi N_2 t + (2\pi n t + \varphi)]$$

e

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi),$$

isto é, trocar os movimentos de periodo desigual por outros de egual periodo, ora concordantes, ora discordantes.

As vibrações concordam ou não no mesmo instante, conforme é então o mesmo ou contrario o signal das suas velocidades.

Quando as vibrações componentes têm originariamente o mesmo sentido, ha, entre as varias concordancias, uma que, sob o ponto de vista das phases, poderemos chamar perfeita, se

$$(2\pi nt+\varphi)-\varphi=2i\pi,$$

ou

$$2\pi nt=2i\pi,$$

ou

$$t=\frac{i}{n};$$

e tambem, entre as discordancias, uma perfeita, se

$$2\pi nt=(2i+1)\pi,$$

ou

$$t=\frac{2i+1}{2n},$$

sendo i um numero inteiro.

Donde o tempo decorrido, entre duas concordancias ou discordancias perfeita successivas,

$$\tau=\frac{1}{n};$$

e, entre uma concordancia e a disconcordancia immediata,

$$\tau'=\frac{1}{2n}.$$

Como, quando ha concordancia ou disconcordancia perfeita, temos

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}\left[2\pi N_2 \frac{i}{n} + (2\pi i + \varphi)\right]$$

e

$$v_2 = \alpha \operatorname{sen}\left(2\pi N_2 \frac{i}{n} + \varphi\right),$$

ou

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}\left[2\pi N_2 \frac{2i+1}{2n} + \left(2\pi \frac{2i+1}{2} + \varphi\right)\right]$$

e

$$v_2 = \alpha \operatorname{sen}\left(2\pi N_2 \frac{2i+1}{2n} + \varphi\right),$$

segue-se que, para se reproduzir a mesma concordancia ou disconcordancia perfeita, é preciso que

$$2\pi N_2 \theta = 2\pi i'_2$$

e

$$2\pi n \theta = 2\pi i'',$$

ou

$$N_2 \theta = i'_2$$

e

$$n \theta = i'',$$

ou

$$N_2 \theta = i'_2$$

e

$$N_1 \theta = i'_1,$$

sendo i_1', i_2' e i'' numeros inteiros.

Estas condições acham-se logo satisfeitas, quando θ é inteiro, o que era de esperar; mas, satisfeitas tambem, quando

$$\theta = \frac{1}{d},$$

sendo d um divisor commum de N_1 e N_2.

Logo o menor tempo decorrido entre duas concordancias ou discordancias perfeitas identicas, ou o tempo que leva a reproduzir-se uma concordancia ou discordancia perfeita, é

$$\theta = \frac{1}{D}$$

sendo D o maior divisor commum

Se as vibrações componentes se oppõem, é facil notar as inversões.

Suppostos os movimentos vibratorios do mesmo periodo e phase variavel a cada instante, a sua velocidade resultante será, como ficou estabelecido,

$$V_1 = 2\,a \cos \pi n t \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi_1),$$

se as vibrações vão originalmente no mesmo sentido; se não,

$$V_2 = 2\,a \operatorname{sen} \pi n t \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi_2),$$

sendo agora ψ_1 e ψ_2, não já constantes, mas funcções do tempo.

Já a velocidade segue uma lei mais complexa que a dos senos.

Ás velocidades corresponderão, a cada instante, as intensidades

$$I_1 = 4\,\alpha^2 \cos^2 \pi n t \operatorname{sen}^2 (2\pi N_2 t + \psi_1)$$

e

$$I_2 = 4\,\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \pi n t \operatorname{sen}^2 (2\pi N_2 t + \psi_2).$$

Discutamol-as.

A intensidade da primeira formula poderá ser maxima, o que só ficará dependendo do outro factor, quando

$$\cos \pi n t = \pm 1,$$

ou

$$\pi n t = i\pi,$$

ou

$$t = \frac{i}{n};$$

e minima, quando

$$\cos \pi n t = 0,$$

ou

$$\pi n t = (2i + 1)\frac{\pi}{2}$$

ou

$$t = \frac{2i+1}{2n}.$$

A outra intensidade, inversamente.

São, como era natural, os mesmos resultados já obtidos pela consideração das concordancias e disconcordancias perfeitas.

Decomposição. Não é possivel a decomposição d'uma vibração simples noutras de periodos diversos.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen} (2 \pi N_1 t + \varphi)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen} (2 \pi N_2 t + \varphi),$$

ou

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen} [2 \pi N_2 t + (2 \pi n t + \varphi)]$$

e

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen} (2 \pi N_2 t + \varphi).$$

Reproduz-se tudo o que ha pouco diziamos das concordancias e discordancias.

A velocidade resultante será, numa lei mais complexa que a dos senos,

$$V_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \cos 2 \pi n t} \,.\, \operatorname{sen} (2 \pi N_2 t + \psi_1),$$

ou

$$V_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2 \alpha_1 \alpha_2 \cos 2 \pi n t} \,.\, \operatorname{sen} (2 \pi N_2 t + \psi_2);$$

com a respectiva intensidade,

$$I_1 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \cos 2 \pi n t) \operatorname{sen}^2 (2 \pi N_2 t + \psi_1)$$

ou

$$I_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2 \alpha_1 \alpha_2 \cos 2 \pi n t) \operatorname{sen}^2 (2 \pi N_2 t + \psi_2).$$

A primeira intensidade terá um maximo possivel, se

$$\cos 2\pi n t = +1,$$

ou

$$2\pi n t = 2 i \pi,$$

ou

$$t = \frac{i}{n};$$

e um minimo, se

$$\cos 2\pi n t = -1,$$

ou

$$2\pi n t = (2i+1)\pi,$$

ou

$$t = \frac{2i+1}{2n}:$$

tudo, como ha pouco, o que devia succeder.

Inversamente a outra intensidade.

Decomposição. Não é possivel.

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi_1)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi_2),$$

ou

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}[2\pi N_2 t + (2\pi n t + \varphi_1)]$$

e

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi_2).$$

As concordancias perfeitas das vibrações, no mesmo sentido, são indicadas por

$$2\pi n t + \varphi_1 - \varphi_2 = 2 i \pi,$$

ou, sendo Ψ_1 e Ψ_2 as anomalias,

$$t = \frac{i - (\Psi_1 - \Psi_2)}{n};$$

e as discordancias perfeitas, por

$$2\pi nt + \varphi_1 - \varphi_2 = (2i+1)\pi,$$

ou

$$t = \frac{(2i+1) - 2(\Psi_1 - \Psi_2)}{2n}.$$

O inverso, quando as componentes são oppostas.

É facil ver que as concordancias e discordancias perfeitas se repetem ainda a tempos eguaes a

$$\theta = \frac{1}{D}.$$

A velocidade resultante por composição será, numa lei mais complexa que a dos senos,

$$V_1 = 2\alpha \cos\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi_1)$$

ou

$$V_2 = 2\alpha \operatorname{sen}\pi(nt + \Psi_2 - \Psi_1) \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi_2);$$

correspondendo-lhe a intensidade, a cada instante,

$$I_1 = 4\alpha^2 \cos^2\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) \operatorname{sen}^2(2\pi N_2 t + \psi_1)$$

ou

$$I_2 = 4\alpha^2 \operatorname{sen}^2\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) \operatorname{sen}^2(2\pi N_2 t + \psi_2).$$

A primeira intensidade terá um maximo possivel, se

$$\cos\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) = \pm 1,$$

ou

$$\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) = i\pi,$$

ou

$$t = \frac{i - (\Psi_1 - \Psi_2)}{n};$$

e um minimo, se

$$\cos\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) = 0,$$

ou

$$\pi(nt + \Psi_1 - \Psi_2) = (2i + 1)\frac{\pi}{2},$$

ou

$$t = \frac{(2i+1) - 2(\psi_1 - \psi_2)}{2n}.$$

Inversamente a outra intensidade.

Resultados já obtidos ás concordancias e disconcordancias perfeitas.

Decomposição. Não é possivel.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi_1)$$

e

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi_2),$$

ou

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen}[2\pi N_2 t + (2\pi nt + \varphi_1)]$$

e

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi_2).$$

A velocidade resultante será, numa lei mais complexa que a dos senos,

$$V_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos 2\pi(nt + \psi_1 - \psi_2)} \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi_1),$$

ou

$$V_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos 2\pi(nt + \psi_1 - \psi_2)} \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \psi_2);$$

correspondendo-lhe a intensidade, a cada instante,

$$I_1 = [\alpha_1^2 + \alpha^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos 2\pi(nt + \psi_1 - \psi_2)] \operatorname{sen}^2(2\pi N_2 t + \psi_1)$$

ou

$$I_2 = [\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos 2\pi(nt + \psi_1 - \psi_2)] \operatorname{sen}^2 (2\pi N_2 t + \psi_2).$$

Os maximos e minimos possiveis succedem-se a intervallos, como precedentemente.

Decomposição. Não é possivel.

II

Vamos agora occupar-nos da composição geral de muitas vibrações numa e da inversa decomposição.

Vibrações de egual periodo

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual amplitude:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

ás quaes corresponde a mesma intensidade,

$$\int_0^1 i\,dt = \alpha^2.$$

Resultará

$$V = v_1 + v_2 \ldots\ldots + v_p$$

$$= (\alpha \pm \alpha \ldots\ldots\ldots \pm \alpha) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

e

$$\int_0^1 I\,dt = (\alpha \pm \alpha \ldots\ldots \pm \alpha)^2.$$

Decomposição. Por um modo inverso.

2.º De amplitude desegual:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha_p \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

correspondendo-lhes as intensidades,

$$\int_0^1 i_1\,dt = \alpha_1^2,$$

$$\int_0^1 i_2\,dt = \alpha_2^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_0^1 i_p\,dt = \alpha_p^2.$$

Resultará

$$V = v_1 + v_2 \dots\dots + v_p$$

$$= (\alpha_1 \pm \alpha_2 \dots\dots \pm \alpha_p)\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi),$$

e

$$\int_0^1 \mathrm{I}\,dt = (\alpha_1 \pm \alpha_2 \dots\dots \pm \alpha_p)^2.$$

Decomposição. Indeterminada.

Vibrações de phase diversa:

1.º Da mesma amplitude:

Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi_1),$$

$$v_2 = \pm\,\alpha\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e

$$v_p = \pm\,\alpha\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi_p);$$

com a intensidade commum

$$\int_0^1 i\,dt = \alpha^2.$$

Podemos substituir a cada velocidade as suas componentes respectivas,

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \alpha \cos\varphi_1 \operatorname{sen} 2\pi N t \\ v_1'' &= \alpha \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\left(2\pi N t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2' &= \pm\, \alpha \cos\varphi_2 \operatorname{sen} 2\pi N t \\ v_2'' &= \pm\, \alpha \operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{sen}\left(2\pi N t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\},$$

....

....

e

$$\left.\begin{aligned} v_p' &= \pm\, \alpha \cos\varphi p \operatorname{sen} 2\pi N t \\ v_p'' &= \pm\, \alpha \operatorname{sen}\varphi p \operatorname{sen}\left(2\pi N t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\}.$$

As primeiras componentes resultam em

$$V' = \alpha\,(\cos\varphi_1 \pm \cos\varphi_2 \ldots\ldots \pm \cos\varphi p) \operatorname{sen} 2\pi N t$$

$$= \alpha\,(\Sigma \cos\varphi) \operatorname{sen} 2\pi N t,$$

e as segundas em

$$V'' = \alpha (\text{sen}\,\varphi_1 + \text{sen}\,\varphi_2 \,\ldots\ldots + \text{sen}\,\varphi_p)\,\text{sen}\left(2\,\pi\,N\,t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$= \alpha (\Sigma\,\text{sen}\,\varphi)\,\text{sen}\left(2\,\pi\,N\,t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Está pois o problema reduzido ao da só composição de duas velocidades.

Decomposição. Indeterminada.

2.º De amplitude desegual:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha_1\,\text{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \varphi_1),$$

$$v_2 = \pm\,\alpha_2\,\text{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \varphi_2),$$

....

....

e

$$v_p = \pm\,\alpha_p\,\text{sen}\,(2\,\pi\,N\,t + \varphi_p);$$

com as intensidades,

$$\int_0^1 i_1\,dt = \alpha_1^2,$$

$$\int_0^1 i_2\,dt = \alpha_2^2,$$

....

....

e

$$\int_0^1 i_p\,dt = \alpha_n^2.$$

As componentes duplicam-se respectivamente em

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \alpha_1 \cos \varphi_1 \operatorname{sen} 2 \pi N t \\ v_1'' &= \alpha_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen}\left(2 \pi N t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2' &= \pm \alpha_2 \cos \varphi_2 \operatorname{sen} 2 \pi N t \\ v_2'' &= \pm \alpha_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen}\left(2 \pi N t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\},$$

....

....

e

$$\left.\begin{aligned} v_p' &= \pm \alpha_p \cos \varphi_p \operatorname{sen} 2 \pi N t \\ v_p'' &= \pm \alpha_p \operatorname{sen} \varphi_p \operatorname{sen}\left(2 \pi N t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\}.$$

As componentes affins reunem-se em

$$V' = (\alpha_1 \cos \varphi_1 \pm \alpha_2 \cos \varphi_2 \ldots \pm \alpha_p \cos \varphi_p) \operatorname{sen} 2 \pi N t$$

$$= (\Sigma\, \alpha \cos \varphi) \operatorname{sen} 2 \pi N t,$$

e

$$V'' = (\alpha_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \pm \alpha_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \ldots \pm \alpha_p \operatorname{sen} \varphi_p) \operatorname{sen}\left(2 \pi N t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (\Sigma\, \alpha \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen}\left(2 \pi N t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Está portanto este problema reduzido tambem á só composição de duas velocidades.

Decomposição. Indeterminada.

Vibrações de periodo desegual

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam as velocidades componentes

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_p t + \varphi);$$

ou, sendo

$$N_1 - N_2 = n_1,$$

$$N_2 - N_3 = n_2,$$

....

....

e

$$N_{(p-1)} - N_p = n_{(p-1)},$$

as velocidades

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(n_1 + n_2 \ldots + n_p)t + \varphi]\}$$

$$= \alpha \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(\Sigma_1 n)t + \varphi]\},$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(n_2 + \ldots\ldots + n_p)t + \varphi]\},$$

$$= \pm \alpha \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(\Sigma_2 n)t + \varphi]\},$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_p t + \varphi).$$

Fica o problema reduzido ao da composição de muitas vibrações de periodo egual, phase diversa, em geral, e amplitude egual.

Decomposição. Impossivel.

2.º De coefficiente de velocidade:

Composição. As velocidades componentes,

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi),$$

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha_p \operatorname{sen}(2\pi N_p t + \varphi),$$

transformam-se em

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(\Sigma_1 n) t + \varphi)]\},$$

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(\Sigma_2 n) t + \varphi]\},$$

....

....

e

$$v_p = \alpha_p \operatorname{sen}(2\pi N_p t + \varphi),$$

que se podem compôr, como se fossem de periodo egual, phase diversa, em geral, e amplitude desegual.

Decomposição. Impossivel.

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. As velocidades,

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_1 t + \varphi_1),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_2 t + \varphi_2),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N_p t + \varphi_p),$$

transformam-se em

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}\{2\pi N_p t + [2\pi(\Sigma_1 n) t + \varphi_1]\},$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}\{2\pi N_p \mathrm{t} + [2\pi(\Sigma_2 n) t + \varphi_2]\},$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N_p t + \varphi_p),$$

que se já sabem compôr.

Decomposição. Impossivel.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

As velocidades,

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen} (2 \pi N_1 t + \varphi_1),$$

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen} (2 \pi N_2 t + \varphi_2),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha_p \operatorname{sen} (2 \pi N_p t + \varphi_p)$$

transformam-se em

$$v_1 = \alpha_1 \operatorname{sen} \{2 \pi N_p t + [2 \pi (\Sigma_1 n) t + \varphi_1]\},$$

$$v_2 = \pm \alpha_2 \operatorname{sen} \{2 \pi N_p t + [2 \pi (\Sigma_2 n) t + \varphi_2]\},$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha_p \operatorname{sen} (2 \pi N_p t + \varphi_p),$$

cuja composição é sabida.

Decomposição. Impossivel.

CAPITULO SEGUNDO

Vibrações no mesmo plano

SUMMARIO: — Composição de duas vibrações rectangulares numa, e decomposição inversa; composição de muitas vibraçõos obliquas numa, e decomposição reciproca: vibrações de periodo egual ou desegual, da mesma ou differente phase, de egual ou desegual amplitude.

Este capitulo, de certo mais complexo que o anterior, póde comtudo ser discutido menos longamente.

É o que julgamos ter conseguido pela interferencia da lei das distancias na determinação successiva das direcções dos movimentos componentes.

Parece-nos até haver assim simplificado e completado, a um tempo, as condições naturaes do problema.

Como antecedentemente, iremos resolvendo a composição e decomposição das vibrações pendulares em todas as suas maneiras, desde as mais simples até ás mais compositas.

Supporemos as vibrações situadas no plano dos eixos coordenados.

I

Vamos primeiramente determinar a resultante de duas vibrações rectangulares e as duas componentes rectangulares d'uma.

Vibrações de egual periodo

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas, segundo a lei dos senos,

$$v^{(x)} = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)$$

e

$$v^{(y)} = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

e as direcções das parallelas aos eixos coordenados,

$$\delta^{(y)} = \mp a \cos(2\pi N t + \varphi)$$

e

$$\delta^{(x)} = - a \cos(2\pi N t + \varphi).$$

A resultante terá as velocidades, segundo a lei senosoidal,

$$V = \sqrt{v^{(x)2} + v^{(y)2}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

as direcções, com o seu sentido, expressas em

$$\cos A^{(x)} = \frac{\alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}{\sqrt{2}\,.\,\alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$\cos A^{(y)} = \frac{\pm\, \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}{\sqrt{2}\,.\,\alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}},$$

sendo $A^{(x)}$ e $A^{(y)}$ os angulos da resultante com os eixos X e Y positivos; e a lei rectilinea das direcções,

$$\delta^{(y)} = \pm\, \delta^{(x)}$$

$$= tg\, 45^{\circ}\, \delta^{(x)}, tg\, 135^{\circ}\, \delta^{(x)}.$$

As intensidades das vibrações componentes e da resultante correlacionam-se em

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = 2\int_0^1 i\, dt.$$

Decomposição. Uma vibração poderá decompor-se em duas rectangulares de amplitudes eguaes, se formar com uma e outra componente angulos de 45°.

2.° De amplitude desegual:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas, segundo a lei dos senos,

$$v^{(x)} = \alpha^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)$$

e

$$v^{(y)} = \pm\, \alpha^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

e as direcções das parallelas aos eixos coordenados,

$$\delta^{(y)} = \mp\, a^{(y)} \cos(2\pi N t + \varphi)$$

e

$$\delta^{(x)} = -\, a^{(x)} \cos(2\pi N t + \varphi).$$

A resultante terá as velocidades, segundo a lei senosoidal,

$$V = \sqrt{v^{(x)2} + v^{(y)2}}$$

$$= \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}} \,.\, \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

as direcções, com o seu sentido, expressas em

$$\cos A^{(x)} = \frac{\alpha^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}} \,.\, \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}$$

$$= + \frac{\alpha^{(x)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}}},\ - \frac{\alpha^{(x)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}}}$$

e

$$\cos A^{(y)} = \frac{\pm\, \alpha^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}} \,.\, \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi)}$$

$$= \pm \frac{\alpha^{(y)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}}},\ \mp \frac{\alpha^{(y)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}}};$$

e a lei rectilinea das direcções,

$$\delta^{(y)} = \pm \frac{a^{(y)}}{a^{(x)}} \delta^{(x)}.$$

Relacionam-se as intensidades por

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = \int_0^1 i^{(x)}\, dt + \int_0^1 i^{(y)}\, dt.$$

Decomposição. Em geral, não é determinada. Torna-se tal, quando, por exemplo, as componentes se dirigem pelos eixos coordenados.

Então, como é conhecida, além da grandeza, a inclinação da resultante aos eixos, adquirem-se os coefficientes de velocidade, positivos ou negativos, por

$$\alpha^{(x)} = \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}} \cos A^{(x)}$$

e

$$\alpha^{(y)} = \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2}} \cos A^{(y)}.$$

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas, segundo a lei dos senos,

$$v^{(x)} = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi \mathrm{N} t + \varphi^{(x)})$$

e

$$v^{(y)} = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi \mathrm{N} t + \varphi^{(y)};$$

e as direcções designadas por

$$\delta^{(y)} = \mp a \cos(2\pi N t + \varphi^{(y)})$$

e

$$\delta^{(x)} = - a \cos(2\pi N t + \varphi^{(x)}).$$

A resultante terá as velocidades, que se não submettem á lei senosoidal,

$$V = a\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(x)}) + \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(y)})};$$

as direcções, com o seu sentido, dadas por

$$\cos A^{(x)} = \frac{\operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi^{(x)})}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(x)}) + \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(y)})}}$$

e

$$\cos A^{(y)} = \frac{\pm \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi^{(y)})}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(x)}) + \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(y)})}};$$

e a lei das direcções...... Procuremol-a.

As equações das distancias,

$$\delta^{(y)} = \mp a (\cos 2\pi N t \cos \varphi^{(y)} - \operatorname{sen} 2\pi N t \operatorname{sen} \varphi^{(y)})$$

e

$$\delta^{(x)} = - a (\cos 2\pi N t \cos \varphi^{(x)} - \operatorname{sen} 2\pi N t \operatorname{sen} \varphi^{(x)}),$$

substituem-se, feita a eliminação, por

$$\mp a \operatorname{sen} 2\pi N t = \frac{\delta^{(y)} \cos \varphi^{(x)} \mp \delta^{(x)} \cos \varphi^{(y)}}{\operatorname{sen}(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)})}$$

e

$$\mp a \cos 2\pi N t = \frac{\delta^{(y)} \operatorname{sen} \varphi^{(x)} \mp \delta^{(x)} \operatorname{sen} \varphi^{(y)}}{\operatorname{sen}(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)})}.$$

Portanto a lei das direcções formulada em

$$a^2 \operatorname{sen}^2 (\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}) = \delta^{(y)2} + \delta^{(x)2} \mp 2\,\delta^{(y)} \delta^{(x)} \cos(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}):$$

que, em geral, é a equação d'um ellipse, referida ao centro, cujo eixo maior fórma com o dos x a metade do angulo de

$$\operatorname{tg} 2\theta = \mp \infty,$$

ou um dos angulos

$$45^\circ,\ 135^\circ;$$

que, no caso particular de

$$\cos(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}) = 0,$$

ou

$$\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)} = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

se reduz a

$$a^2 = \delta^{(y)2} + \delta^{(x)2},$$

equação d'um circulo, de raio a, referido ao centro; e que, ainda particularmente, quando

$$\operatorname{sen}(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}) = 0,$$

ou

$$\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)} = m\,\pi,$$

se abaixa até

$$\delta^{(y)} = +\,\delta^{(x)}, -\delta^{(x)},$$

equação, já achada, d'uma linha recta.

Entre as intensidades componentes e a resultante ha a relação

$$\int_0^1 \mathrm{I}\,dt = 2\int_0^1 i\,dt.$$

Decomposição. Só possivel, quando a differença de phase das componentes for $m\,\pi$, e a resultante se inclinar para ellas de 45°.

2.° De amplitude desegual:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas,

$$v^{(x)} = \alpha^{(x)} \operatorname{sen}(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(x)})$$

e

$$v^{(y)} = \pm\,\alpha^{(y)} \operatorname{sen}(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(y)});$$

e as direcções,

$$\delta^{(y)} = \mp\,a^{(y)} \cos(2\,\pi\,\mathrm{N}\,\mathrm{t} + \varphi^{(y)})$$

e

$$\delta^{(x)} = -\,a^{(x)} \cos(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(x)}).$$

A resultante terá as velocidades, segundo uma lei composta,

$$\mathrm{V} = \sqrt{\alpha^{(x)2} \operatorname{sen}^2(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(x)}) + \alpha^{(y)2} \operatorname{sen}^2(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(y)})};$$

as direcções, com o seu sentido, expressas em

$$\cos A^{(x)} = \frac{\alpha^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi^{(x)})}{\sqrt{\alpha^{(x)2} \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(x)}) + \alpha^{(y)2} \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(y)})}},$$

e

$$\cos A^{(y)} = \frac{\pm \alpha^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi^{(y)})}{\sqrt{\alpha^{(x)2} \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(x)}) + \alpha^{(y)2} \operatorname{sen}^2(2\pi N t + \varphi^{(y)})}};$$

e a lei das direcções formulada: em geral, por

$$a^{(y)2}\, a^{(x)2} \operatorname{sen}^2(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)})$$

$$= a^{(x)2}\, \delta^{(y)2} + a^{(y)2}\, \delta^{(x)2} \mp 2\, a^{(x)}\, a^{(y)}\, \delta^{(x)}\, \delta^{(y)} \cos(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}),$$

equação d'uma ellipse, referida ao centro, cujo eixo maior fórma com o dos x a metade do angulo de

$$tg\, 2\theta = \pm \frac{2\, \alpha^{(x)}\, \alpha^{(y)}}{\alpha^{(y)2} - \alpha^{(x)2}} \cos(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)});$$

ou, quando

$$\cos(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}) = 0,$$

isto é,

$$\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)} = (2m + 1)\frac{\pi}{2},$$

por

$$a^{(y)2}\, a^{(x)2} = a^{(x)2}\, \delta^{(y)2} + a^{(y)2}\, \delta^{(x)2},$$

equação d'uma ellipse, referida ao centro e aos seus eixos;

ou, quando

$$\operatorname{sen}(\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)}) = 0,$$

isto é,

$$\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)} = m\pi,$$

por

$$\delta^{(y)} = +\frac{a^{(y)}}{a^{(x)}}\delta^{(x)},\ -\frac{a^{(y)}}{a^{(x)}}\delta^{(x)},$$

equação, já deduzida, d'uma linha recta.

Relação das intensidades:

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = \int_0^1 i^{(x)}\, dt + \int_0^1 i^{(y)}\, dt.$$

Decomposição. Possivel apenas, se a differença de phase das componentes fôr $m\pi$.

Vibrações de periodo desegual

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam definidas as vibrações componentes pelas velocidades,

$$v^{(x)} = \alpha \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}^{(x)} t + \varphi)$$

e

$$v^{(y)} = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi);$$

e pelas direcções,

$$\delta^{(y)} = \mp\, a^{(y)} \cos(2\pi N^{(y)} t + \varphi)$$

e

$$\delta^{(y)} = -\, a^{(x)} \cos(2\pi N^{(x)} t + \varphi),$$

ou

$$\delta^{(y)} = \mp\, a^{(y)} \cos(2\pi N^{(y)} t + \varphi)$$

e

$$\delta^{(x)} = -\, a^{(x)} \cos[2\pi N^{(y)} t + (2\pi nt + \varphi)].$$

A vibração resultante será definida pelas velocidades compostas,

$$V = a\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N^{(x)} t + \varphi) + \operatorname{sen}^2(2\pi N^{(y)} t + \varphi)};$$

pelas direcções, com o seu sentido,

$$\cos A^{(x)} = \frac{\operatorname{sen}(2\pi N^{(x)} t + \varphi)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N^{(x)} t + \varphi) + \operatorname{sen}^2(2\pi N^{(y)} t + \varphi)}}$$

$$\cos A^{(y)} = \frac{\pm \operatorname{sen}(2\pi N^{(y)} t + \varphi)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N^{(x)} t + \varphi) + \operatorname{sen}^2(2\pi N^{(y)} t + \varphi)}};$$

e pela lei das direcções,

$$a^{(y)2} a^{(x)2} \operatorname{sen}^2 2\pi nt = a^{(x)2} \delta^{(y)2} + a^{(y)2} \delta^{(x)2} \mp 2\, a^{(x)} a^{(y)} \delta^{(x)} \delta^{(y)} \cos 2\pi nt,$$

que é a equação d'uma ellipse que muda a cada instante.

Relação das intensidades:

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = 2\int_0^1 i\, dt.$$

Decomposição. Impossivel.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v^{(x)} = a^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}^{(x)} t + \varphi)$$

e

$$v^{(y)} = \pm\, a^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi);$$

e as direcções,

$$\delta^{(y)} = \pm\, a^{(y)} \cos(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi)$$

e

$$\delta^{(x)} = -\, a^{(x)} \cos[2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + (2\pi nt + \varphi)].$$

A resultante terá as velocidades compostas,

$$\mathrm{V} = \sqrt{a^{(x)2} \operatorname{sen}^2(2\pi \mathrm{N}_{(x)} t + \varphi) + a^{(y)2} \operatorname{sen}^2(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi)};$$

as direcções, com o seu sentido,

$$\cos \mathrm{A}^{(x)} = \frac{a^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}^{(x)} t + \varphi)}{\sqrt{a^{(x)2} \operatorname{sen}^2(2\pi \mathrm{N}^{(x)} t + \varphi) + a^{(y)2} \operatorname{sen}^2(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi)}}$$

e

$$\cos \mathrm{A}^{(y)} = \frac{\pm\, a^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi)}{\sqrt{a^{(x)2} \operatorname{sen}^2(2\pi \mathrm{N}^{(x)} t + \varphi) + a^{(y)2} \operatorname{sen}^2(2\pi \mathrm{N}^{(y)} t + \varphi)}};$$

e a mesma lei das direcções da resultante no caso anterior. Sómente agora, como póde succeder que, apesar de deseguaes os coefficientes de velocidade, sejam eguaes as amplitudes, a ellipse terá a particular determinação, em que o seu eixo maior se inclinará sempre ao dos x de 45° ou 135°,

$$a^2 \operatorname{sen}^2 2\pi nt = \delta^{(y)2} + \delta^{(x)2} \mp 2\,\delta^{(y)}\delta^{(x)} \cos 2\pi nt.$$

Relação das intensidades:

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = \int_0^1 i^{(x)}\, dt + \int_0^1 i^{(y)}\, dt.$$

Decomposição. Impossivel.

Vibrações de phase diversa:

1.° De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Nem a fazemos, por evidente, desde o que se disse no penultimo caso.

Decomposição. Impossivel.

2.° De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Analogamente á do penultimo caso.

Decomposição. Impossivel.

II

Tractaremos agora da composição de muitas vibrações obliquas numa só, e da inversa decomposição.

Vibrações de egual periodo

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

e as inclinações aos eixos positivos,

$$A_1^{(x)} \text{ e } A_1^{(y)},$$

$$A_2^{(x)} \text{ e } A_2^{(y)},$$

....

....

e

$$A_p^{(x)} \text{ e } A_p^{(y)}.$$

A cada vibração dada decompõe-se respectivamente a sua velocidade nas duas,

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(x)} &= \alpha \cos A_1^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_1^{(y)} &= \alpha \cos A_1^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2^{(x)} &= \pm\, \alpha \cos A_2^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_2^{(y)} &= \pm\, \alpha \cos A_2^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

....

....

e

$$\left.\begin{aligned} v_p^{(x)} &= \pm\, \alpha \cos A_p^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_p^{(y)} &= \pm\, \alpha \cos A_p^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\}.$$

As primeiras velocidades congeneres, todas na mesma direcção, ajunctam-se em

$$V^{(x)} = \alpha\,(\Sigma \cos A^{(x)}) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi),$$

e as segundas, tambem na mesma direcção, em

$$V^{(y)} = \alpha\,(\Sigma \cos A^{(y)}) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi).$$

A estas formulas de velocidade correspondem, por integração sem constante arbitraria, as de distancia.

Temos assim o problema reduzido á composição de só duas vibrações rectangulares.

Decomposição. Indeterminada.

2.° De amplitude desegual:

Composição. A unica differença do caso anterior é que, em vez de apparecer nas duas componentes rectangulares a que se reduzem todas,

$$\alpha \Sigma \cos A^{(x)} \text{ e } \alpha \Sigma \cos A^{(y)},$$

apparecerá

$$\Sigma \alpha \cos A^{(y)} \text{ e } \Sigma \alpha \cos A^{(y)}.$$

Decomposição. Indeterminada.

Vibrações de phase diversa:

1.° De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_p);$$

e as inclinações aos eixos positivos,

$$A_1^{(x)} \text{ e } A_1^{(y)},$$

$$A_2^{(x)} \text{ e } A_2^{(y)},$$

....

....

e

$$A_p^{(x)} \text{ e } A_p^{(y)}.$$

A velocidade de cada uma das vibrações decompõe-se respectivamente nas duas,

$$\left.\begin{aligned} v_1(x) &= \alpha \cos A_1(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1) \\ v_1(y) &= \alpha \cos A_1(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2(x) &= \pm \alpha \cos A_2(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2) \\ v_2(y) &= \pm \alpha \cos A_2(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2) \end{aligned}\right\},$$

. . . .

. . . .

e

$$\left.\begin{aligned} v_p(x) &= \pm \alpha \cos A_p(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_p) \\ v_p(y) &= \pm \alpha \cos A_p(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_p) \end{aligned}\right\}.$$

As primeiras velocidades congeneres, na direcção dos x, compõem-se, como é sabido, numa só; as outras, na direcção dos y, do mesmo modo: ficam pois só duas vibrações rectangulares.

Decomposição. Em geral, impossivel.

2.º De amplitude desegual:

Composição. Analogamente á de ha pouco.

Decomposição. Em geral, impossivel.

Vibrações de periodo desegual

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Julgamos escusado qualquer desenvolvimento.

A consideração da phase variavel resolve o problema pelo modo do penultimo caso.

Decomposição. Impossivel.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Proceder-se-á, considerando a phase variavel, como ultimamente.

Decomposição. Impossivel.

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Pelo ultimo processo.

Decomposição. Impossivel

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Pelo ultimo processo.

Decomposição. Impossivel.

CAPITULO TERCEIRO

Vibrações em todas as direcções

SUMMARIO: — Composição de tres vibrações rectangulares numa, e decomposição inversa; composição de muitas vibrações obliquas numa, e decomposição reciproca: vibrações de periodo egual ou desegual, da mesma ou differente phase, de egual ou desegual amplitude.

Applicaremos a este capitulo um processo analogo ao que precedentemente usámos.

As leis das distancias, se já não poderão valer-nos, uma a uma, hão de comtudo prestar-nos, combinadas, tanto como ha pouco.

Por ellas, como então, ficará o assumpto mais simples e talvez completo.

Não sabemos porque, esta ultima parte do problema da composição e decomposição das vibrações pendulares, a mais complexa de todas, tem sido menos cuidadosamente tractada de alguns, quasi inteiramente esquecida dos outros, e de todos, sem alguma razão, mal comprehendida e abalisada no seu alcance e importancia.

Cremos tel-a restaurado ao logar que lhe pertence.

I

Primeiramente a composição de tres vibrações rectangulares numa, e a decomposição inversa.

Vibrações de egual periodo

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas, segundo a lei dos senos,

$$v^{(x)} = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi),$$

$$v^{(y)} = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi)$$

e

$$v^{(z)} = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi);$$

e as direcções das parallelas aos eixos coordenados,

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(y)} &= \mp a \cos (2 \pi N t + \varphi) \\ \delta^{(z)} &= \mp a \cos (2 \pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(x)} &= - a \cos (2 \pi N t + \varphi) \\ \delta^{(z)} &= \mp a \cos (2 \pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(x)} &= - a \cos (2 \pi N t + \varphi) \\ \delta^{(y)} &= \mp a \cos (2 \pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\}.$$

A vibração resultante terá as velocidade, conformemente ainda á lei dos senos,

$$V = \alpha \sqrt{v(x)2 + v(y)2 + v(z)2}$$

$$= \alpha \sqrt{3} \,.\, \text{sen}\,(2\pi N t + \varphi)\,;$$

as direcções, com o seu sentido,

$$\cos A^{(x)} = +\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos A_{(y)} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{3}},$$

e

$$\cos A^{(z)} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{3}},$$

sendo $A^{(x)}$, $A^{(y)}$ e $A^{(z)}$ os angulos da resultante com os eixos X, Y e Z positivos; e a lei rectilinea das direcções,

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(y)} &= \pm\,\delta^{(x)} \\ \delta^{(z)} &= \pm\,\delta^{(x)} \end{aligned}\right\},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(y)} &= \text{tg}\ 46^{\circ}\,\delta^{(x)},\ \text{tg}\ 135^{\circ}\,\delta^{(x)} \\ \delta^{(x)} &= \text{tg}\ 45^{\circ}\,\delta^{(x)},\ \text{tg}\ 135^{\circ}\,\delta^{(x)} \end{aligned}\right\}.$$

As intensidades das vibrações componentes e da resultante correlacionam-se em

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = 3 \int_0^1 i\, dt.$$

Decomposição. Uma vibração poderá decompôr-se em tres rectangulares, de amplitudes eguaes, se as suas projecções sobre os planos das componentes formarem com ellas angulos de 45°.

2.° De amplitude desegual:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas, conforme á lei dos senos,

$$v^{(x)} = \alpha^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N} t + \varphi),$$

$$v^{(y)} = \pm\, \alpha^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N} t + \varphi)$$

e

$$v^{(z)} = \pm\, \alpha^{(z)} \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{N} t + \varphi);$$

e as direcções das parallelas aos eixos coordenados,

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(y)} &= \mp\, a^{(y)} \cos(2\pi \mathrm{N} t + \varphi) \\ \delta^{(z)} &= \mp\, a^{(z)} \cos(2\pi \mathrm{N} t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(x)} &= -\, a^{(x)} \cos(2\pi \mathrm{N} t + \varphi) \\ \delta^{(z)\prime} &= \mp\, a^{(z)} \cos(2\pi \mathrm{N} t + \varphi) \end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(x)} &= -\, a^{(x)} \cos(2\pi \mathrm{N} t + \varphi) \\ \delta^{(y)} &= \mp\, a^{(y)} \cos(2\pi \mathrm{N} t + \varphi) \end{aligned}\right\}.$$

A resultante terá as velocidades, tambem segundo a lei senosoidal,

$$V = \sqrt{v^{(x)2} + v^{(y)2} + v^{(z)2}}$$

$$= \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}} \,.\, \mathrm{sen}\,(2\pi N t + \varphi);$$

as direcções, com o sentido proprio,

$$\cos A^{(x)} = + \frac{\alpha^{(x)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}}}, - \frac{\alpha^{(x)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}}},$$

$$\cos A^{(y)} = \mp \frac{\alpha^{(y)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}}}, \mp \frac{\alpha^{(y)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}}}$$

e

$$\cos A^{(z)} = \pm \frac{\alpha^{(z)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}}}, \mp \frac{\alpha^{(z)}}{\sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}}};$$

e a lei rectilinea das direcções,

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(y)} &= \pm \frac{a^{(y)}}{a^{(x)}} \delta^{(x)} \\ \delta^{(z)} &= \pm \frac{a^{(z)}}{a^{(x)}} \delta^{(x)} \end{aligned}\right\}.$$

As intensidades relacionam-se por

$$\int_0^1 I\,dt = \int_0^1 i^{(x)}\,dt + \int_0^1 i^{(y)}\,dt + \int_0^1 i^{(z)}\,dt.$$

Decomposição. Regra geral, não é determinada. Póde sel-o, quando, por exemplo, as tres componentes se dirigem pelos eixos coordenados.

Em tal caso, como, além da grandeza, é sabida a inclinação da resultante aos eixos, obtêm-se os coefficientes de velocidade, positivos ou negativos, por

$$\alpha^{(x)} = \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}} \,.\, \cos A^{(x)},$$

$$\alpha^{(y)} = \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}} \,.\, \cos A^{(y)}$$

e

$$\alpha^{(z)} = \sqrt{\alpha^{(x)2} + \alpha^{(y)2} + \alpha^{(z)2}} \,.\, \cos A^{(z)}.$$

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades, positivas ou negativas, segundo a lei dos senos,

$$v^{(x)} = \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi^{(x)}),$$

$$v^{(y)} = \pm \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi^{(y)})$$

e

$$v^{(z)} = \pm \alpha \operatorname{sen} (2\pi N t + \varphi^{(z)});$$

e as direcções designadas por

$$\left.\begin{aligned} \delta^{(y)} &= \mp a \cos (2\pi N t + \varphi^{(y)}) \\ \delta^{(z)} &= \mp a \cos (2\pi N t + \varphi^{(z)}) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\delta^{(x)}&=-a\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(x)}\right)\\ \delta^{(z)}&=\mp a\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(z)}\right)\end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned}\delta^{(x)}&=-a\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(x)}\right)\\ \delta^{(y)}&=\mp a\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(y)}\right)\end{aligned}\right\}.$$

A resultante terá as velocidades complexas,

$$V=\alpha\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})};$$

as direcções, com o sentido proprio, dadas por

$$\cos A^{(x)}=\frac{\operatorname{sen}(2\pi Nt+\varphi^{(x)})}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}},$$

$$\cos A^{(y)}=\frac{\pm\operatorname{sen}(2\pi Nt+\varphi^{(y)})}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}}$$

e

$$\cos A^{(z)}=\frac{\pm\operatorname{sen}(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}};$$

e a lei das direcções,

$$\left.\begin{aligned}a^2\operatorname{sen}^2\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)&=\delta^{(y)2}+\delta^{(x)2}\mp 2\,\delta^{(y)}\delta^{(x)}\cos\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)\\ \delta^{(z)}&=\mp\frac{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(y)}-\varphi^{(z)}\right)}{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)}\delta^{(x)}+\frac{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(z)}\right)}{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)}\delta^{(y)}\end{aligned}\right\},$$

equações que representam, em geral, uma ellipse.

É facil vêr, quando

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^{(x)} - \varphi^{(y)} = m_1\,\pi \\ \pi^{(x)} - \varphi^{(z)} = m_2\,\pi\end{array}\right\},$$

d'onde

$$\varphi^{(y)} - \varphi^{(z)} = m'\,\pi.,$$

que a lei elliptica se transforma na rectilinea,

$$\delta(y) = \pm\,\delta(x),\ \delta(z) = \pm\,\delta(x)$$

As intensidades componentes formam com a resultante a equação,

$$\int_0^1 \mathrm{I}\,dt = 3\int_0^1 i\,dt.$$

Decomposição. Só possivel, quando a differença das phases, duas a duas, das componentes é um multiplo de π, e as projecções da resultante sobre os planos das componentes formam com ellas angulos de 45°.

2.° De amplitude desegual:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v^{(x)} = \alpha^{(x)}\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(x)})$$

$$v^{(y)} = \pm\,\alpha^{(y)}\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(y)})$$

e

$$v^{(z)} = \pm\,\alpha^{(z)}\,\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(z)});$$

e as direcções,

$$\left.\begin{array}{l}\delta^{(y)} = \mp\,a^{(y)}\cos\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(y)}) \\ \delta^{(z)} = \mp\,a^{(z)}\cos\,(2\,\pi\,\mathrm{N}\,t + \varphi^{(z)})\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\delta^{(x)} &= -a^{(x)}\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(x)}\right)\\ \delta^{(z)} &= \mp a^{(z)}\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(z)}\right)\end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned}\delta^{(x)} &= -a^{(x)}\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(x)}\right)\\ \delta^{(y)} &= \mp a^{(y)}\cos\left(2\pi Nt+\varphi^{(y)}\right)\end{aligned}\right\}.$$

A resultante terá as velocidades, segundo uma lei composta,

$$V=\sqrt{\alpha^{(x)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\alpha^{(y)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\alpha^{(z)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})};$$

as direcções, com o seu sentido,

$$\cos A^{(x)}=\frac{\alpha^{(x)}\operatorname{sen}(2\pi Nt+\varphi^{(x)})}{\sqrt{\alpha^{(x)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\alpha^{(y)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\alpha^{(z)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}},$$

$$\cos A^{(y)}=\frac{\pm\alpha^{(y)}\operatorname{sen}(2\pi Nt+\varphi^{(y)})}{\sqrt{\alpha^{(x)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\alpha^{(y)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\alpha^{(z)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}}$$

e

$$\cos A^{(z)}=\frac{\pm\alpha^{(z)}\operatorname{sen}(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}{\sqrt{\alpha^{(x)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(x)})+\alpha^{(y)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(y)})+\alpha^{(z)2}\operatorname{sen}^2(2\pi Nt+\varphi^{(z)})}};$$

e a lei elliptica, em geral, das direcções,

$$\left.\begin{aligned}&a^{(y)2}a^{(x)2}\operatorname{sen}^2\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)\\ &=a^{(x)2}\delta^{(y)2}+a^{(y)2}\delta^{(x)2}\mp 2\,a^{(x)}a^{(y)}\delta^{(x)}\delta^{(y)}\cos\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)\\ &\delta^{(z)}=\pm\frac{a^{(z)}}{a^{(x)}}\frac{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(y)}-\varphi^{(z)}\right)}{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)}\delta^{(x)}+\frac{a^{(z)}}{a^{(y)}}\frac{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(z)}\right)}{\operatorname{sen}\left(\varphi^{(x)}-\varphi^{(y)}\right)}\delta^{(y)}\end{aligned}\right\}.$$

. .

É facil ver que a ellipse, lei das direcções, quando

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) - \varphi(y) = m_1 \pi \\ \varphi(x) - \varphi(z) = m_2 \pi\end{array}\right\},$$

se transforma na recta,

$$\left.\begin{array}{l}\delta(y) = \pm \frac{a(y)}{a(x)} \delta(x) \\ \\ \delta(z) = \pm \frac{a(z)}{a(x)} \delta(x)\end{array}\right\}.$$

Relação entre as intensidades:

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = \int_0^1 i(x)\, dt + \int_0^1 i(y)\, dt + \int_0^1 i(z)\, dt.$$

Decomposição. Possivel, só quando a differença de phase das componentes, duas a duas, for multipla de π.

Vibrações de periodo desegual

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Sejam definidas as vibrações componentes pelas velocidades,

$$v(x) = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi \mathrm{N}(x) t + \varphi),$$

$$v(y) = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi \mathrm{N}(y) t + \varphi)$$

e

$$v(z) = \pm \alpha \operatorname{sen}(2\pi N(z)t + \varphi);$$

e pelas direcções,

$$\left.\begin{aligned} \delta(y) &= \mp a(y)\cos(2\pi N(y)t + \varphi) \\ \delta(z) &= \mp a(z)\cos(2\pi N(z)t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \delta(x) &= -a(x)\cos(2\pi N(x)t + \varphi) \\ \delta(z) &= \mp a(z)\cos(2\pi N(z)t + \varphi) \end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned} \delta(x) &= -a(x)\cos(2\pi N(x)t + \varphi) \\ \delta(y) &= \mp a(y)\cos(2\pi N(y)t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \delta(y) &= \mp a(y)\cos[2\pi N(z)t + (2\pi n_2 t + \varphi)] \\ \delta(z) &= \mp a(z)\cos(2\pi N(z)t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \delta(x) &= -a(x)\cos\{2\pi N(z)t + [2\pi(n_1 + n_2)t + \varphi]\} \\ \delta(z) &= -a(z)\cos(2\pi N(z)t + \varphi) \end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned} \delta(x) &= -a(x)\cos\{2\pi N(z)t + [2\pi(n_1 + n_2)t + \varphi]\} \\ \delta(y) &= \mp a(y)\cos[2\pi N(z)t + (2\pi n_2 t + \varphi)] \end{aligned}\right\}.$$

A resultante terá as velocidades compostas,

$$V = \alpha\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N(x)t + \varphi) + \operatorname{sen}^2(2\pi N(y)t + \varphi) + \operatorname{sen}^2(2\pi N(z)t + \varphi)};$$

as direcções, com o sentido proprio,

$$\cos A(x) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi N(x)t+\varphi)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N(x)t+\varphi)+\operatorname{sen}^2(2\pi N(y)t+\varphi)+\operatorname{sen}^2(2\pi N(z)t+\varphi)}},$$

$$\cos A(y) = \frac{\mp\operatorname{sen}(2\pi N(y)t+\varphi)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N(x)t+\varphi)+\operatorname{sen}^2(2\pi N(y))t+\varphi)+\operatorname{sen}^2(2\pi N(z)t+\varphi)}}$$

e

$$\cos A(z) = \frac{\mp\operatorname{sen}(2\pi N(z)t+\varphi)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2\pi N(x)t+\varphi)+\operatorname{sen}^2(2\pi N(y)t+\varphi)+\operatorname{sen}^2(2\pi N(z)t+\varphi)}};$$

e a lei das direcções,

$$\left.\begin{array}{l} a(y)^2 a(x)^2 \operatorname{sen}^2 2\pi n_1 t = a(x)^2 \delta(y)^2 + a(y)^2 \delta(x)^2 \mp 2a(x)a(y)\delta(x)\delta(y)\cos 2\pi n_1 t \\ \delta(z) = \mp \dfrac{a(z)}{a(x)} \dfrac{\operatorname{sen} 2\pi n_2 t}{\operatorname{sen} 2\pi n_1 t}\delta(x) + \dfrac{a(z)}{a(y)} \dfrac{\operatorname{sen} 2\pi(n_1+n_2)t}{\operatorname{sen} 2\pi n_1 t}\delta(y) \end{array}\right\},$$

equações d'uma ellipse que varía, a cada instante, na sua fórma e no seu plano.

Relação das intensidades:

$$\int_0^1 I\,dt = 3\int_0^1 i\,dt.$$

Decomposição. Impossivel.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v(x) = \alpha(x) \operatorname{sen}(2\pi N(x)t+\varphi),$$

$$v(y) = \pm\alpha(y) \operatorname{sen}(2\pi N(y)t+\varphi)$$

e

$$v(z) = \pm \alpha(z) \operatorname{sen} (2\pi N(z) t + \varphi);$$

e as direcções,

$$\left.\begin{array}{l} \delta(y) = \pm a(y) \cos [2\pi N(z) t + (2\pi n_2 t + \varphi)] \\ \delta(z) = \mp a(z) \cos (2\pi N(z) t + \varphi) \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(x) = - a(x) \cos \{2\pi N(z) t + [2\pi (n_1 + n_2) t + \varphi]\} \\ \delta(z) = \pm a(z) \cos (2\pi N(z) t + \varphi) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(x) = - a(x) \cos \{2\pi N(z) t + [2\pi (n_1 + n_2) t + \varphi]\} \\ \delta(y) = \pm a(y) \cos [2\pi N(z) t + (2\pi n_2 t + \varphi)] \end{array}\right\}.$$

A resultante terá as velocidades complexas,

$$V = \sqrt{\alpha(x)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(x) t + \varphi) + \alpha(y)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(y) t + \varphi) + \alpha(z)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(z) t + \varphi)};$$

as direcções,

$$\cos A(x) = \frac{\alpha(x) \operatorname{sen} (2\pi N(x) t + \varphi)}{\sqrt{\alpha(x)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(x) t + \varphi) + \alpha(y)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(y) t + \varphi) + \alpha(z)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(z) t + \varphi)}}$$

$$\cos A(y) = \frac{\pm \alpha(y) \operatorname{sen} (2\pi N(y) t + \varphi)}{\sqrt{\alpha(x)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(x) t + \varphi) + \alpha(y)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(y) t + \varphi) + \alpha(z)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(z) t + \varphi)}}$$

e

$$\cos A(z) = \frac{\pm \alpha(z) \operatorname{sen} (2\pi N(z) t + \varphi)}{\sqrt{\alpha(x)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(x) t + \varphi) + \alpha(y)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(y) t + \varphi) + \alpha(z)^2 \operatorname{sen}^2(2\pi N(z) t + \varphi)}};$$

e a mesma lei das direcções da resultante no caso anterior. Sómente agora póde succeder que essa lei se simplifique, quando eguaes as amplitudes, em

$$\left.\begin{aligned} a^2 \operatorname{sen}^2 2\pi n_1 t &= \delta(y)^2 + \delta(x)^2 \mp 2\,\delta(x)\,\delta(y) \cos 2\pi n_1 t \\ \delta(z) &= \mp \frac{\operatorname{sen} 2\pi n_2 t}{\operatorname{sen} 2\pi n_1 t}\,\delta(x) + \frac{\operatorname{sen} 2\pi (n_1 + n_2) t}{\operatorname{sen} 2\pi n_1 t}\,\delta(y) \end{aligned}\right\}.$$

Relação das intensidades:

$$\int_0^1 \mathrm{I}\, dt = \int_0^1 i(x)\, dt + \int_0^1 i(y)\, dt + \int_0^1 i(z)\, dt.$$

Decomposição. Impossivel.

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Seguir-se-ão os raciocinios do ultimo caso.

Decomposição. Impossivel.

2.º De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Analogamente á do penultimo caso.

Decomposição. Impossivel.

II

Resta occuparmo-nos, com toda a generalidade, da composição de muitas vibrações obliquas numa só, e da inversa decomposição.

Vibrações de egual periodo

Vibrações da mesma phase:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi),$$

....

....

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi);$$

e as inclinações aos eixos positivos,

$$A_1^{(x)},\ A_1^{(y)} \text{ e } A_1^{(z)},$$

$$A_2^{(x)},\ A_2^{(y)} \text{ e } A_2^{(z)},$$

....

....

$$A_p^{(x)},\ A_p^{(y)} \text{ e } A_p^{(z)}$$

Divide-se a velocidade de cada vibração pelas tres respectivas,

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(x)} &= \alpha \cos A_1^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_1^{(y)} &= \alpha \cos A_1^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_1^{(z)} &= \alpha \cos A_1^{(z)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2^{(x)} &= \pm\, \alpha \cos A_2^{(x)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_2^{(y)} &= \pm\, \alpha \cos A_2^{(y)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_2^{(z)} &= \pm\, \alpha \cos A_2^{(z)} \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\},$$

....

....

e

$$\left.\begin{aligned} v_p(x) &= \pm\, \alpha \cos A_p(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_p(y) &= \pm\, \alpha \cos A_p(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \\ v_p(z) &= \pm\, \alpha \cos A_p(z) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi) \end{aligned}\right\}.$$

As primeiras velocidades congeneres, na direcção do X, resumem-se em

$$V(x) = \alpha\,(\Sigma \cos A(x)) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

as segundas, na direcção do Y, em

$$V(y) = \alpha\,(\Sigma \cos A(y)) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi);$$

e as outras, na direcção do eixo Z, em

$$V(z) = \alpha\,(\Sigma \cos A(z)) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi).$$

A estas formulas de velocidade correspondem, por integração sem constante arbitraria, as de distancia.

Está portanto o problema reduzido á composição de tres vibrações rectangulares da mesma phase.

Decomposição. Indeterminada.

2.º De amplitude desegual:

Composição. Só differirá do caso anterior em que

$$\alpha\, \Sigma \cos A(x),\ \alpha\, \Sigma \cos A(y) \text{ e } \alpha\, \Sigma \cos A(z)$$

se mudará em

$$\Sigma\, \alpha \cos A(x),\ \Sigma\, \alpha \cos A(y) \text{ e } \Sigma\, \alpha \cos A(z).$$

Decomposição. Indeterminada.

Vibrações de phase diversa:

1.º De egual amplitude:

Composição. Tenham as vibrações componentes as velocidades,

$$v_1 = \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi_1),$$

$$v_2 = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi_2),$$

. . . .

. . . .

e

$$v_p = \pm \alpha \operatorname{sen} (2 \pi N t + \varphi_p);$$

e as inclinações aos eixos positivos,

$$A_1(x),\ A_1(y) \text{ e } A_1(z),$$

$$A_2(x),\ A_2(y) \text{ e } A_2(z),$$

. . . .

. . . .

e

$$A_p(x),\ A_p(y) \text{ e } A_p(z).$$

A velocidade de cada vibração decompõe-se respectivamente nas tres,

$$\left.\begin{aligned} v_1(x) &= \alpha \cos A_1(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1) \\ v_1(y) &= \alpha \cos A_1(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1) \\ v_1(z) &= \alpha \cos A_1(z) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_1) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2(x) &= \pm \alpha \cos A_2(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2) \\ v_2(y) &= \pm \alpha \cos A_2(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2) \\ v_2(z) &= \pm \alpha \cos A_2(z) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_2) \end{aligned}\right\},$$

....

....

e

$$\left.\begin{aligned} v_p(x) &= \pm \alpha \cos A_p(x) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_p) \\ v_p(y) &= \pm \alpha \cos A_p(y) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_p) \\ v_p(z) &= \pm \alpha \cos A_p(z) \operatorname{sen}(2\pi N t + \varphi_p) \end{aligned}\right\}.$$

As primeiras velocidades congeneres, na direcção dos x, compõem-se numa só; as segundas, na direcção dos y, tambem; e as ultimas, na direcção dos z, do mesmo modo: ficam pois sómente tres vibrações rectangulares.

Decomposição. Em geral, impossivel.

2.º De amplitude desegual:

Composição. Analoga á de ha pouco.

Decomposição. Em geral, impossivel.

Vibrações de periodo desegual

Vibrações da mesma phase:

1.° De egual coefficiente de velocidade:

Composição. A consideração da phase variavel resolve o problema pelo modo do penultimo caso.

Decomposição. Impossivel.

2.° De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Pela indicação expressa ultimamente.

Decomposição. Impossivel.

Vibrações de phase diversa:

1.° De egual coefficiente de velocidade:

Composição. Pelo ultimo processo.

Decomposição. Impossivel.

2.° De desegual coefficiente de velocidade:

Composição. Pelo ultimo processo.

Decomposição. Impossivel.

FIM.

LIVRARIA DA UNIVERSIDADE

INDICE

BIBLIOTECA GERAL DA UNIVERSIDADE
28 JAN 1957
COIMBRA

PRICE
PRICE
1 23456 78900 5

1876