CURSO COMPLETO

DE

MATHEMATICAS PURAS.

CURSO COMPLETO

DE

MATHEMATICAS PURAS.

CURSO COMPLETO

DE

MATHEMATICAS PURAS,

POR

L.=B. Francoeur:

NOVAMENTE TRADUZIDO, CORRECTO E AUGMENTADO

PELOS

LENTES CATHEDRATICOS DA FACULDADE DE MATHEMATICA
NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA,

FRANCISCO DE CASTRO FREIRE,

E

RODRIGO RIBEIRO DE SOUSA PINTO.

PARTE 3.ª

ALGEBRA SUPERIOR
E
GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO.

Da Facul.de
Para uso das Aulas.

COIMBRA,
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

1856.

ALGEBRA SUPERIOR

I. DAS COMBINAÇÕES E POTENCIAS.

Permutações e Combinações.

1. CHamam-se Arranjos *ou* Permutações *todas as collecções que se obtem, dispondo uns adiante dos outros, em todas as ordens differentes, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, ... um determinado numero de objectos. Quando expressamente não dissermos o contrário, supporemos que o mesmo objecto não entra mais que uma vez em cada collecção.* Assim *abc*, *bac*, *cba*, *bca*, são 4 permutações de 3 letras tomadas 3 a 3. Para designarmos o numero de todas as permutações possiveis de m letras p a p escreveremos $[m\ Pp]$. (*)

Chamam-se Combinações *todas as collecções que se obtem, dispondo uns adiante dos outros, e em todas as ordens differentes,* 2 *a* 2, 3 *a* 3, 4 *a* 4, ... *um determinado numero de objectos, de maneira que um d'elles pelo menos seja differente n'uma qualquer das collecções comparada com cada uma das outras. Quando expressamente não dissermos o contrário, supporemos que o mesmo objecto não entra mais*

(*) Alguns authores fazem distincção entre *arranjos* e *permutações*, reservando este último nome para designar os arranjos de p letras entre si, ou p a p: julgâmos porêm desnecessaria tal distincção.

que uma vez em cada collecção. Assim abc, abd, bcd, acd são 4 combinações de 4 letras 3 a 3. Para designarmos o numero de todas as combinações possiveis de m letras p a p escreveremos $[mCp]$.

Problema 1.º *Achar o numero* y *de todas as permutações de* m *letras* a, b, c, d, ... *tomadas* p *a* p, *ou* $y=[mPp]$.

Visto que no enunciado do problema se não faz distincção alguma entre as m letras a, b, c, d......., que pertendemos permutar, podêmos concluir, que entre todas as permutações possiveis haverá um certo numero d'ellas que começarão pela letra a, outras tantas que começarão pela letra b, outras tantas pela letra c, etc. Por conseguinte, se determinarmos o numero φ de todas as que começam pela letra a, será o numero total das permutações

$$y=[mPp]=m\varphi\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Para achar este numero φ consideremos, que obteriamos facilmente as permutações p a p em que a letra a é inicial, se soubessemos permutar de todas as maneiras possiveis $p-1$ a $p-1$ as $m-1$ letras b, c, d, ..., e puzessemos depois a letra a na frente de cada uma d'estas collecções. Na verdade se por este modo alguma das permutações, em que a é inicial, fosse omittida ou repetida, seguir-se-hia que, supprimindo a letra a na frente de cada um dos termos, haveria o mesmo erro de omissão ou repetição nas permutações das $m-1$ letras $p-1$ a $p-1$; o que é contra o supposto. D'aqui se segue que o numero φ de todas as permutações de m letras p a p, em que a é inicial, é o mesmo que o de todas as permutações das $m-1$ letras $p-1$ a $p-1$: ou

$$\varphi=[(m-1)\ P\,(p-1)].$$

E por tanto, substituindo em (1), será

$$y=[mPp]=m\,[(m-1)\,P\,(p-1)]\dots\dots\dots\dots (2)$$

Esta fórmula, fazendo depender o numero de todas as permutações de m letras p a p do numero de todas as permutações de $m-1$ letras $p-1$ a $p-1$, resolve o problema: para o que basta advertir que o numero de m letras permutadas 1 a 1 é m. Assim:

1.° Para achar o numero y'' das permutações de m letras 2 a 2; como o numero φ de $m-1$ letras permutadas 1 a 1 é $m-1$, temos $\varphi = m-1$, e

$$y'' = m(m-1).$$

2.° Para achar o numero y''' de todas as permutações de m letras 3 a 3; como n'este caso, φ é o numero de permutações de $m-1$ letras 2 a 2, numero que se deduz do valor precedente de y'', mudando m em $m-1$; será $\varphi = (m-1)(m-2)$, e

$$y''' = m(m-1)(m-2).$$

3.° Pelo mesmo estilo se acha, que o numero de permutações de m letras 4 a 4 é

$$y^{\text{IV}} = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

E assim por diante.

Notando agora, que para passar de uma d'estas equações para a seguinte basta mudar m em $m-1$, e multiplicar depois por m, o que equival a ajunctar aos factores m, $m-1$, ... o inteiro immediatamente inferior ao último factor precedente: concluiremos que, para p letras, o último factor será $m-(p-1)$; e por conseguinte teremos

$$y^{(p)} = [mPp] = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)\ldots\ldots(a)$$

O numero de factores é p.

Applicando a fórmula (a) vê-se, que 9 objectos podem permutar-se 4 a 4 de tantos modos differentes, quantos são indicados pelo producto dos 4 factores 9.8.7.6, ou que $[9P4] = 3024$. Este numero mostra tambem todas as differentes maneiras, por que 9 pessoas podem occupar 4 logares.

Fazendo em (a) $m = p$, obteremos o numero z de todos os arranjos de p letras entre si, ou p a p, e virá

$$z = [pPp] = p.(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1 = 1.2.3\ldots\ldots p \qquad (b)$$

Assim o numero de todas as permutações das 7 notas da eschala musical entre si é $= 1.2.3 \ldots 7 = 5040$; e se contarmos os semitonos será $= 1.2.3 \ldots 12 = 479001600$.

Problema 2.° *Achar o numero* x *de todas as combinações de* m *letras* p *a* p.

Imaginemos estas x combinações effectuadas e escriptas seguidamente em linha horizontal: escrevam-se depois por baixo da 1.ª combinação, e formando com ella uma columna vertical, todas as permutações p a p das p letras daquella combinação. O numero z dos termos d'esta columna será dado pela equação (b).

Da 2.ª combinação resultará tambem, pela mesma fórma, uma columna vertical de z termos contendo todas as permutações p a p das p letras d'essa combinação, uma das quaes letras pelo menos é differente das que entram na columna antecedente.

Da 3.ª combinação resultará tambem uma columna de z termos differentes dos outros das columnas precedentes. E assim por diante.

Obter-se-ha por esta maneira uma tabella composta de x columnas, contendo cada uma z termos de p letras, e dando por tudo xz resultados, que constituem evidentemente todas as permutações possiveis das m letras p a p, sem omissão ou repetição alguma. Sendo $y^{(p)}$ o numero d'estas permutações dado pela equação (a), será pois

$$xz = y^{(p)}, \text{ ou } x = \frac{y^{(p)}}{z} = \frac{[mPp]}{[pPp]},$$

isto é,

$$x = [mCp] = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p} \ldots\ldots (c)$$

Para usarmos d'esta fórmula advertiremos, que o numerador é formado pela serie de p factores que vão diminuindo successivamente de uma unidade, desde o inteiro m dado até ao inteiro $m-p+1$. O denominador é formado pela serie de factores dos numeros inteiros desde 1 até ao numero p.

Como por sua natureza x deve ser numero inteiro, concluiremos:

que a fórmula (*a*) *deve ser exactamente divisivel por* (*b*). Isto mesmo se demonstra *a priori*. (Nota 1.ª)

2. Designando por x' o numero de combinações de m objectos q a q, temos

$$x' = [m\,\mathrm{C}q] = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-q+1)}{1\,.\;2\,.\;3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,q}.$$

Se for $p > q$, todos os factores d'esta última equação entrarão na equação (*c*), que por isso se poderá escrever

$$x = x'\,\frac{(m-q)\,(m-q-1)\,\ldots\,(m-p+1)}{(q+1)\,(q+2)\,\ldots\ldots\ldots\,p},$$

e nos leva ás seguintes considerações.

I. Para que seja $x = x'$, é necessario, que os factores do numerador da fracção, pela qual x' se acha multiplicado, formem o mesmo producto que os do denominador; e assim, tomando estes em ordem inversa, deveremos ter

$$(m-q)\,(m-q-1)\,\ldots\,(m-p+1) = p\,(p-1)\,\ldots\,(q+1).$$

Como estes dous membros tem um numero egual de factores continuos e decrescentes, se cada um dos factores de um lado não fosse egual ao que occupa o mesmo logar do outro lado, não seria possivel a egualdade, por que, supprimindo então os factores communs, ficariam de um lado factores todos maiores que do outro. É necessario por tanto, que seja $m-q=p$ para ser $x = x'$; donde resulta o seguinte theorema:

$$[m\,\mathrm{C}p] = [m\,\mathrm{C}q] \quad \text{quando for } m = p + q.$$

Assim 100 letras tomadas 88 a 88, e tomadas 12 a 12, dão o mesmo numero. Com effeito $[100\,\mathrm{C}\,88]$ tem por numerador $100.99\,..\,89.88\,..\,13$, e por denominador $1.2\,\ldots\,12.13\,\ldots\,88$; supprimindo pois os facto-

res communs $13.14 \ldots 88$, resta $\frac{100.99 \ldots\ldots 89}{1.2 \ldots\ldots .12} = [100\,C\,12]$.
Esta consideração serve para facilitar os calculos da fórmula (c), quando for $p > \frac{1}{2}m$. Acha-se mais depressa $[100\,C\,4]$ do que $[100\,C\,96] = 3921225$.

D'aqui se conclue, que *se escrevermos successivamente os numeros de combinações de* m *letras* 1 *a* 1, 2 *a* 2, 3 *a* 3, *hão-de reproduzir-se os mesmos valores em ordem retrograda, passado o termo do meio.* Sendo, por ex.°, 8 as letras, estes valores são 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. (Veja-se a taboada que vae adiante com a inscripção — *Coefficientes do Binomio ou Numeros de combinações* —)

II. Supponhamos $q = p - 1$; n'este caso x só tem um factor mais que x', e é

$$x = x' \frac{m - p + 1}{p}, \text{ ou } [m\,C\,p] = \Big[m\,C(p-1)\Big] \frac{m-p+1}{p} \ldots (d)$$

1.° Daqui se tira uma regra, que serve para deduzir successivamente uns dos outros os numeros de combinações de m letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3.... *Escrevam-se as fracções* $\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \ldots$ *e multiplique-se cada uma pelo producto de todas as antecedentes.* Por ex.°, sendo 8 as letras que temos de combinar, escreveremos $\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{5}{4}$, e virá $8;\ 8 \times \frac{7}{2} = 28;\ 28\,\frac{6}{3} = 56;\ \ldots\ldots$ Por este modo se acha que 8 numeros da lotaria formam 8 *azes*, 28 *duques*, 56 *ternos*, 70 *quadras* e 56 *quinas*; e que 80 numeros formam 90 *azes*, 4005 *duques*, 117480 *ternos*, 2555190 *quadras*, 43949268 *quinas*.

2.° Os factores successivos $m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \ldots$ tem os numeradores decrescentes e os denominadores crescentes: em quanto forem >1, o producto augmentará; e diminuirá pelo contrário logo que a ordem i do termo for tal que venha

$$\frac{m-i+1}{i} < 1, \text{ ou } i > \frac{m+1}{2},$$

devendo então começar a apparecer os mesmos productos em ordem retrograda, como acima dissemos.

1.° *Caso*, m *par* $=2\alpha$. Então é $i>\alpha+\frac{1}{2}$; e por conseguinte os termos crescem até á ordem $i=\alpha$, na qual o último factor é $\frac{\alpha+1}{\alpha}$, sendo este termo $[m\,C\frac{1}{2}m]$ ou

$$\frac{2\alpha(2\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots2\alpha}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha},$$

o qual se fórma escrevendo no denominador a serie natural $1.2\ldots\ldots\alpha$, e continuando-a no numerador até 2α. Multiplicando ambos os termos por $1.2.3\ldots\ldots\alpha$, vem

$$M=\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots2\alpha}{(1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha)^2},$$

onde os factores pares, que no numerador vem alternados com os impares, são $2.4.6\ldots\ldots2\alpha=2^{\alpha}\times1.2.3.4\ldots\ldots\alpha$; e por conseguinte o *termo medio maior que todos os outros* é

$$M=[m\,C\tfrac{1}{2}m]=2^{\frac{1}{2}(m)}\,\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(m-1)}{1.2\,3\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}m}.$$

2.° *Caso*, *m impar* $=2\alpha+1$. N'este caso é $i>\alpha+1$; e por conseguinte os termos só começam a decrescer quando i excede $\alpha+1$; e como no termo d'esta ordem o último factor se reduz a $\frac{\alpha+1}{\alpha+1}=1$, este termo é egual ao precedente, vindo assim a repetir-se nas ordens α e $\alpha+1$, ou $\frac{1}{2}(m\mp1)$. Fazendo pois $i=\alpha$, teremos para *os dois termos medios, maiores que todos os outros*, e correspondentes a $[m\,C\frac{1}{2}(m\mp1)]$,

$$M = \frac{(2\alpha+1)\times 2\alpha\times\ldots(\alpha+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots\alpha} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots\ldots(2\alpha+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots\alpha}.$$

Practicando, como no 1.° caso, acharemos

$$M = [m\,C\tfrac{1}{2}(m \mp 1)] = 2^{\frac{1}{2}(m-1)}\frac{1.3.5.7\ldots\ldots\ldots\ldots m}{1.2.3.4\ldots\ldots\frac{1}{2}(m+1)}.$$

Applicando as fórmulas, que achámos por os dois casos, vê-se, que os maiores numeros de combinações que é possivel fazer com 18 e 19 letras são

$$M = [18\,C\,9] = 2^{9}\frac{1.3.5\ldots\ldots 17}{1.2.5\ldots\ldots 9} = 48620;$$

$$M = [19\,C\,9] = [19\,C\,10] = 92378.$$

3.° Da equação (d) tira-se

$$x + x' = x'\frac{m+1}{p} = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\ldots\frac{m-p+2}{p},$$

attendendo a que suppuzemos $x' = [m\,C(p-1)]$. Comparando este valor de $x+x'$ com a equação (c), vem

$$[(m+1)\,Cp] = [m\,Cp] + [m\,C(p-1)]\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Por meio d'esta fórmula, e por simples addição, se deduzem as combinações de $m+1$ letras conhecidas as de m letras; e por ella se formou *a taboada seguinte, chamada Triangulo arithmetico de Pascal, na qual cada um dos numeros é a somma do termo correspondente superior e do que fica á esquerda deste na linha precedente.*

Temos, por ex.°,
na 7.ª linha...... 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Para formar a 8.ª linha tomaremos $7+1=8$, $21+7=28$, $35+21=56$, $35+35=70$, etc.

N'esta lei explica-se o apparecimento dos mesmos termos em ordem inversa, por que basta que se dê n'uma linha para que tenha logar na seguinte.

Além d'este meio que acabâmos de indicar, podemos deduzir os termos da mesma linha uns dos outros, ou successivamente (1.°), ou usando da fórmula (*c*) que é o seu *termo geral.*

COEFFICIENTES DO BINOMIO,

ou

Numero de Combinações.

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1.	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756
0	1 a 1	2 a 2	3 a 3	4 a 4	5 a 5	6 a 6	7 a 7	8 a 8	9 a 9	10 a 10

III. Designando por $1, m, a, b, c, \ldots b, a, m, 1$ os numeros de uma linha, serão, fórm. (e), os da seguinte

$$1, 1+m, m+a, a+b, \ldots a+m, m+1, 1,$$

na qual a somma dos termos das ordens pares é

$$1+m+a+b+c+d \ldots\ldots m+1,$$

que é a mesma dos termos das ordens impares, e tambem a mesma que a somma dos termos da linha precedente. Sommando pois todos os termos da linha $m+1$, teremos o dôbro da somma da linha m. Ora a 2.ª linha da taboada é $1+2+1=4=2^2$, e por conseguinte as linhas seguintes terão por somma $2^3, 2^4, \ldots 2^m$. Logo: *a somma das combinações de* m *letras é* 2^m *; a somma dos termos das ordens, ou pares, ou impares, é* 2^{m-1} *; e esta somma é a mesma que a das combinações de* m — 1 *letras.*

3. Supponhamos que, tendo separado m letras $a, b, c, d, \ldots$ em dois grupos, um contendo m' d'estas letras, e o outro m'' das restantes, sendo assim $m=m'+m''$: se pede o numero de todas as combinações p a p formadas de p' das letras do primeiro grupo e de p'' das do segundo, sendo $p=p'+p''$.

Para isto, façamos todas as combinações das primeiras p' a p', e as das segundas p'' a p''. Os numeros d'estas combinações serão respectivamente $[m'Cp']$ e $[m''Cp'']$. Se reunirmos dous a dous cada um dos resultados das 1.as com cada um dos das 2.as, p' letras de uma parte, reunidas com p'' letras da outra, formarão p letras; e é claro que estes systemas reunidos resolverão a questão proposta. O numero de todas estas combinações será pois

$$X=[m'Cp']\times[m''Cp''] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

I. Em quantas combinações de m letras $a, b, c, \ldots\ldots$ entra a letra a? Temos $m'=p'=1$, e $X=[(m-1)C(p-1)]$.

II. Em quantas combinações entra a sem b, e b sem a? Temos $m'=2$, $p'=1$, logo $X=2\times[(m-2)C(p-1)]$.

III. Em quantas entra a com b? Temos $m'=p'=2$, e

$$X=[(m-2)\,C\,(p-2)].$$

IV. Em quantas não entra nem a, nem b? Temos $m'=2$, $p'=0$, e $X=[(m-2)\,Cp]$.

V. Em quantas das combinações de m letras p a p entram só duas das tres letras a, b, c? Temos $m'=3$, $p'=2$, e

$$X=3\times[(m-3)\,C\,(p-2)].$$

VI. Em quantas das 210 combinações de 10 letras 4 a 4 não entra nenhuma das tres letras a, b, c? Em quantas entra uma só? Em quantas duas? Em quantas entram todas tres? Applicando a fórmula acharemos:

1.° Nenhuma das tres letras...... $[3C0]\times[7C4]=1\times35=$ 35

2.° Uma só.................. $[3C1]\times[7C3]=3\times35=$ 105

3.° Duas...................... $[3C2]\times[7C2]=3\times21=$ 63

4.° Todas tres...... .... $[3C3]\times[7C1]=1\times7=$ 7

Numero total das combinações.......................... 210

4. Pedindo-se o número de permutações p a p de m letras dentre m' designadas, bastará tomar cada uma das X combinações precedentes e permutar as p letras que n'ellas entram. Assim, designando por Y o número das permutações pedidas, teremos

$$Y=X\times1.2.3\ldots\ldots p.$$

5. *Para effectuar com facilidade todas as permutações possiveis* p *a* p *de* m *letras*, procederemos da maneira seguinte.

Tendo escripto na ordem alphabetica as m letras $a, b, c, \ldots . u, v$, separemos d'ellas as $p-1$ últimas letras $i, k, \ldots . . u, v$. Colloquemos depois a 1.ª d'estas letras separadas i em frente de cada uma das primeiras $m-p+1$ letras $a, b, c \ldots . . . h$, formando assim as seguintes permutações 2 a 2,

$$ia, ib, ic, \ldots \ldots \ldots ih.$$

Mudemos por fim, e successivamente, i em $a, b, c, \ldots . . . h$, tendo o cuidado de mudar tambem a em i, b em $i, \ldots . h$ em i, nos termos em que assim for necessario para que se não repita a mesma letra. Por esta fórma conseguiremos obter todas as permutações 2 a 2 das $m-p+2$ letras $i, a, b, \ldots . h$, tornando-se cada uma d'ellas inicial o mesmo numero de vezes $m-p+1$ (n.º 1.º).

Feito isto, colloquemos a 2.ª letra separada k em frente de todos os resultados precedentes, formando assim as seguintes permutações 3 a 3,

$$kia, \ldots . , kih, kai, \ldots . . kah, kba, \ldots . kbh, \ldots .;$$

Mudando depois successivamente k em $i, a, b, \ldots . h$, com a advertencia que acima fizemos, obteremos todas as permutações 3 a 3 das $m-p+3$ letras $k, i, a, b, \ldots . h$.

E proseguindo sempre pelo mesmo estilo, até chegar a collocar a última das letras separadas v, na frente de todas as permutações $p-1$ a $p-1$ das $m-1$ letras restantes; e fazendo depois a mudança successiva de v em $u \ldots . k, i, a, b \ldots . h$, com a advertencia indicada, obteremos finalmente todas as permutações das m letras p a p.

Por ex.º, para permutar 3 a 3 as 5 letras a, b, c, d, e, separe-se d e e, e pondo d em frente de cada uma das tres a, b, c, vem

$$da, db, dc;$$

mudando depois successivamente d em a, b, c, com a devida advertencia, obtem-se todos os arranjos 2 a 2 das 4 letras a, b, c, d, *da*, *db*, *dc*, *ad*, *ab*, *ac*, *ba*, *bd*, *bc*, *ca*, *cb*, *cd*.

Pondo por fim *e* em frente de cada um d'estes termos o que dá *eda*, *edb*, ... e mudando depois *e* em *a*, *b*, *c*, *d*, obteremos os 60 arranjos pedidos (*).

6. *Para effectuar com facilidade todas as combinações possiveis de* m *letras* p *a* p, empregaremos o processo seguinte.

Escrevam-se primeiro em linha e na ordem alphabetica todas as *m* letras; e teremos todas as suas combinações 1 a 1.

Escrevam-se depois n'outra linha, adiante de cada uma d'estas letras, successivamente todas as que se seguem a essa letra na 1.ª linha; e por esta fórma obteremos todas as combinações das *m* letras 2 a 2. Por que por esta maneira é evidente que não é possivel omittir-se qualquer combinação, nem tão pouco repetirem-se duas.

Continue-se sempre, por este modo, a escrever, adiante de cada uma das combinações já obtidas, successivamente todas as letras que se seguem na 1.ª linha á ultima letra d'esta combinação; e por esta fórma chegaremos a obter pela razão apontada, todas as combinações das *m* letras *p* a *p*.

Por ex.°, para effectuar todas as combinações 4 a 4 das 5 letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, teremos seguidamente:

Combinações 1 a 1 .... *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

2 a 2 .... *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bc*, *bd*, *be*, *cd*, *ce*, *de*.

3 a 3 .... *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*.

4 a 4 .... *abcd*, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*.

(*) Esta theoria serve para achar o *logogrypho* e *anagramma* das palavras. Estas bagatellas, aliás trabalhosas, conduzem muitas vezes a resultados notaveis. A' pergunta feita por Pilatos a Jesus-Christo: *Quid est veritas?* responde o anagramma: *est vir qui adest*. Em *Frere Jacques Clement*, o assassino de Henrique III, acha-se letra por letra: *C'est l'enfer qui m'a créé*.

Todos os termos, em que entra a última letra e, nas combinações que tem o mesmo numero de letras, não fornecem termo algum para as combinações seguintes, em que entra mais uma letra.

Desenvolvimento das potencias de um polynomio.

7. Se no producto de m factores binomios

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots\ldots$$

fizermos $a=b=c=\ldots$, este producto se tornará em $(x+a)^m$. Por conseguinte para achar o desenvolvimento da potencia m de um binomio, podemos effectuar o producto acima indicado, e tornar depois eguaes os 2.os termos a, b, c, ...; conseguindo por este processo reconhecer a lei que observam os diversos termos do producto, antes de se practicar a reducção. Ora já vimos (*Alg. El.* n.º 104, V) que este producto é da fórma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}\ldots + Nx^{m-n} + \ldots + abcd\ldots;$$

sendo A a somma $a+b+c+\ldots\ldots$ dos 2.os termos dos factores binomios; B a somma dos seus productos 2 a 2, $ab+ac+ad\ldots$; C a dos productos 3 a 3, $abc+abd+\ldots\ldots$; etc.

Fazendo $a=b=c=\ldots$, todos os termos de A se tornam eguaes a a; os de $B=a^2$; os de $C=a^3$; .... os de $N=a^n$. Logo:

A torna-se em a repetido m vezes, ou $A=ma$.

B torna-se em a^2 repetido tantas vezes quantos são os productos 2 a 2, ou $B=a^2\,[mC2]=m\dfrac{(m-1)}{2}a^2$.

C torna-se em a^3 repetido tantas vezes quantos são os productos 3 a 3, ou $C=a^3\,[mC3]=m\left(\dfrac{m-1}{2}\right)\left(\dfrac{m-2}{3}\right)a^3$.

E assim por diante a respeito dos factores consecutivos; de sorte que para o termo Nx^{m-n} de uma ordem qualquer n, será $N=[mCn]\,a^n$.

O último termo é a^m.

D'aqui resulta a fórmula geral descoberta por Newton:

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^m = x^m + ma\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}a^2x^{m-2}\\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3} + \ldots + a^m.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(g)$$

Se designarmos por T_n um termo qualquer da ordem n, será o termo seguinte T_{n+1} correspondente á ordem $n+1$, ou que tem n termos antes de si,

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots n}a^n x^{m-n} = [mCn]\,a^n x^{m-n}\ldots(h)$$

Esta expressão é o *termo geral* da fórmula (g); e chama-se assim, por que, fazendo n'ella successivamente $n=1, 2, 3, \ldots$, podemos deduzir todos os termos da fórmula, começando no segundo.

Para obter o desenvolvimento de $(x-a)^m$ basta mudar nas fórmulas (g) e (h) a em $-a$, isto é, basta tomar com o signal contrário os termos em que a está elevado a potencias impares. Teremos assim

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}\\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3a^{m-3} + \ldots\ldots \pm a^m\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(i)$$

8. *As fórmulas* (g) *e* (i) *compõe-se de* $m+1$ *termos, e os coefficientes são todos numeros inteiros*; na taboada da pag. 9 encontram-se estes coefficientes para as diversas potencias até á 20.ª

Os expoentes de a vão crescendo successivamente de uma unidade desde o termo em que a se torna na unidade ou a^0, até ao último, em que a está elevado á potencia m. Os de x decrescem desde o 1.° termo em que x está elevado á potencia m até ao último, em que x se torna na unidade ou x.° Em cada termo a somma dos expoentes de a e x é sempre $= m$. D'aqui podemos concluir (pag. 6, 1.°) a seguinte regra para deduzir um termo qualquer da serie do seu precedente:

Multiplique-se o termo precedente por $\frac{a}{x}$ *e pelo expoente* a *que n'elle se acha elevado* x; *e divida-se depois pelo numero, que designa na serie a ordem d'este termo.*

É assim, que no seguinte ex.° poderemos achar consecutivamente os termos da serie do desenvolvimento de $(x+a)^9$, obtendo

$$(x \pm a)^9 = x^9 \pm 9ax^8 + 36a^2x^7 \pm 84a^3x^6 + 126a^4x^5 \pm 126a^5x^4 + \ldots$$

Se o binomio não estiver reduzido á fórma mais simples $x \pm a$, não temos mais do que substituir nas fórmulas (g) e (i) por x e por a os termos que lhes equivalem. Assim para achar o desenvolvimento de $(2b^3-5c^3)^9$, faremos na equação precedente $x = 2b^3$, $a = -5c^3$, e usando dos signaes inferiores, virá

$$(2b^3-5c^3)^9 = 2^9b^{27} - 9.5c^3 2^8 b^{24} + 36\times 5^2 c^6 2^7 b^{21} \ldots$$
$$= 512b^{27} - 45\times 256c^3b^{24} + 36\times 25 \times 128c^6b^{21} -$$

Finalmente, pelo que já fica dicto, advertiremos ainda que nas fórmulas (g) e (i):

1.° Depois do termo medio, apparecem os mesmos coefficientes em ordem retrograda; e os coefficientes equidistantes dos termos extremos são eguaes. Estes coefficientes crescem até ao termo medio, cujo valor se acha nas pag. 7 e 8.

2.° Cada um dos coefficientes da potencia m sommado com o seguinte, dá o coefficiente do termo da mesma ordem que o d'este último, no desenvolvimento da potencia $(m+1)$ Veja-se pag. 8.

3.° A somma de todos os coefficientes da potencia m é $= 2^m =$ á somma dos coefficientes de todas as ordens, pares ou impares, na potencia $(m+1)$ como se viu (pag. 10.) Na verdade fazendo $x = a = 1$, a equação (g) reduz-se a $2^m =$ á somma de todos os coefficientes.

4.° Quando $x=1$ e $a=z$, as equações (g) e (i) tornam-se em

$$(1\pm z)^m=1\pm mz+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}z^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots\pm z^m\ldots(l)$$

Sendo esta expressão muito mais simples, costuma reduzir-se a ella o desenvolvimento das potencias dos binomios. Se tivermos $(A\pm B)^m$, dividiremos a expressão dentro do binomio por A, a fim de reduzir o 1.° termo á unidade; e multiplicaremos depois por A^m para que não fique alterada a expressão, que virá assim transformada em $A^m\left(1\pm\frac{B}{A}\right)^m$. Fazendo $\frac{B}{A}=z$, podemos àpplicar a fórmula (l). Assim para $(2a+3b^8)$, reduziremos esta expressão a $(2a)^8\left(1+\frac{3b}{2a}\right)^8$, e faremos $z=\frac{3b}{2a}$.

Para applicar depois a fórmula com mais facilidade, formaremos os productos consecutivos dos factores m, $\frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{3}(m-2)$, $\frac{1}{4}(m-3)$, como se ensinou (pag. 6.), até á ordem $\frac{1}{2}m$ quando m é par, ou até á ordem $\frac{m-1}{2}$ quando m é impar; e obteremos assim os coefficientes do desenvolvimento, que depois terão de multiplicar-se pelas potencias crescentes de z. No exemplo de cima, tendo formado as fracções $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, acharemos pelas multiplicações successivas os coefficientes 8, 28, 56, 70; e como o último é o termo medio, serão os seguintes 56, 28, 8. Distribuindo convenientemente as potencias crescentes z, z^2, z^3, ...; multiplicando tudo por $256.\,a^8$; e pondo finalmente por z a fracção que esta letra representa: vem

$$(2a+3b)^8=256\,.\,a^8+3072.\,a^7b+16128.\,a^6b^2+48384.\,a^5b^3$$
$$+90720.\,a^4b^4+108864\,.\,a^3b^5+\ldots\ldots\ldots$$

9. Para obtermos o desenvolvimento da potencia inteira de um polynomio qualquer da fórma

$$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m,$$

podemos servir-nos das fórmulas precedentes do desenvolvimento de um binomio, pondo $b+c+d+\ldots = x$. Antes de expormos o methodo de achar o termo geral d'este desenvolvimento, convem primeiro dar outra fórma á expressão (h) do n.° 7, multiplicando ambos os seus termos por $1.2.3\ldots(m-n)$. Então o numerador tornar-se-ha o producto dos inteiros seguidos desde 1 até m, e a expressão (h) se mudará em

$$T_{n+1} = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)}a^n x^{m-n}\ldots\ldots\ldots(m)$$

A vantagem d'esta fórmula, sôbre a sua equivalente, consiste, em fornecer *todos* os termos do desenvolvimento de $(x+a)$ dando a n os valores successivos $0, 1, 2, 3, \ldots m$, debaixo *da convenção de não se attender ao factor* $1.2.3\ldots \mathrm{n}$, *quando se suppuzer* $\mathrm{n}=0$, *nem ao factor* $1.2.3\ldots(\mathrm{m}-\mathrm{n})$ *quando for* $\mathrm{n}=\mathrm{m}$.

Posto isto, e fazendo, como acima dicemos, $x=b+c+d+\ldots$, a potencia dada será egual a $(a+x)^m$, e o seu termo geral em que entra a^n, será dado pela fórmula (m), ou

$$(1)\ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)}a^n\, a^{m-n}.$$

Ponhamos $y=c+d+e\ldots$; será $x^{m-n}=(b+y)^{m-n}$, e se desenvolvermos esta última potencia, o seu termo geral, em que entra $b^{n'}$, será, pela fórmula (m),

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n'\times 1.2.3\ldots(m-n-n')}b^{n'}y^{m-n-n'}.$$

Se substituirmos agora esta quantidade em logar de x^{m-n} em (1), o resultado representará o termo geral do desenvolvimento da potencia do polynomio, em que entra $a^n b^{n'}$. Este resultado, simplificando a fracção, será

$$(2)\ldots\ldots \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots n'\times 1.2.3\ldots(m-n-n')}a^n b^{n'} y^{m-n-n'}.$$

Pondo depois $z=d+e+\ldots.$, teremos $y^{m-n-n'}=(c+z)^{m-n-n'}$ e o termo geral do desenvolvimento d'esta última potencia, em que entra $c^{n''}$ será

$$\frac{1.2.3.\ldots.(m-n-n')}{1.2.3..n''\times1.2.3..(m-n-n'-n'')}c^{n''}z^{m-n-n'-n''}.$$

Substituindo agora em (2) esta última expressão, em logar de $y^{m-n-n'}$, obteremos, feitas as simplificações, o termo geral do desenvolvimento da potencia do polynomio em que entra $a^nb^{n'}c^{n''}$, ou

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3..n\times1.2.3..n'\times1.2.3..n''\times1.2..(m-n-n'-n'')}a^nb^{n'}c^{n''}z^{m-n-n'-n''}.$$

Sem ser necessario ir mais adiante, já d'aqui podemos concluir, que se designarmos por N o termo geral do desenvolvimento de $(a+b+c+..)^m$, será este termo geral

$$N=\frac{1.2.3.\ldots\ldots m}{1.2.3..n\times1.2.3..n'\times1.2.3..n''\times..}a^nb^{n'}c^{n''}d^{n'''}\ldots,$$

sendo n, n', n'', ... inteiros qnaesquer, que satisfaçam á condição $n+n'+n''+\ldots.=m$. Para deduzir pois d'esta fórmula todos os termos do desenvolvimento pedido, deveremos procurar todos os systemas de valores inteiros e positivos, que podem satisfazer a esta equação de condição, e de os substituir depois successivamente na fórmula; tendo o cuidado, como já advertimos, de não attender no denominador do coefficiente numerico, aos factores que terminariam em *zero*.

Em $(a+b+c)^{10}$, por ex.°, um dos termos é

$$\frac{1.2.3\ldots.10}{1.2.3.4.5\times1.2.3\times1.2}a^5b^3c^2=2520.\,a^5b^3c^2;$$

e este mesmo coefficiente será o dos termos $a^3b^2c^5, a^2b^3c^5, \ldots\ldots$

10. Temos até aqui supposto que *o expoente* m *é um numero inteiro e positivo.* Passâmos agora a mostrar, que as fórmulas que achámos, são applicaveis ao caso de ser m numero *negativo*, *fraccionario*, *irracional*, ou *transcendente.* E para isso, bastará mostrar que o binomio $(1 \pm z)^m$ tem o desenvolvimento (l) do n.° 8, em todos estes casos; por que como já vimos sempre é possivel reduzir a esta fórma o desenvolvimento de $(x \pm a)^m$, e por consequencia o de qualquer polynomio da forma $(a + b + c + \ldots)^m$

Designando por m e n quaesquer grandezas, e pondo

$$x = 1 \pm mz + \tfrac{1}{2} m (m - 1) z^2 \pm \text{etc.},$$

$$y = 1 \pm nz + \tfrac{1}{2} n (n - 1) z^2 \pm \text{etc.};$$

teremos, fazendo $p = m + n$,

$$xy = 1 \pm pz + \tfrac{1}{2} p (p - 1) z^2 \pm \text{etc.}$$

Para achar este resultado, que se verifica pela multiplicação efectiva do valor de x pelo de y, não é necessario recorrer a esta multiplicação, que não nos indicaria facilmente a lei dos termos da serie. E só bastará advertir, que, sendo m e n quaesquer grandezas, se nós conhecessemos duas expressões em que entrassem respectivamente m e n, ás quaes competissem os desenvolvimentos de x e y, e a cujo producto competisse o desenvolvimento de xy; poderiamos concluir que este ultimo desenvolvimento teria logar em todos os casos, e com a fórma que lhe suppuzemos. Com effeito, devendo deduzir-se este desenvolvimento da multiplicação dos dois polynomios, que são a expressão de x e y, e sendo as regras da multiplicação dos polynomios independentes das grandezas que se possam attribuir ás letras dos factores; está claro que a fórma do desenvolvimento será sempre a mesma, em quanto a dos factores tambem o for. Por ex.°, o termo que contém z^2 em xy, deve ser o producto de certos termos de x e y, termos que serão os mesmos quaesquer que sejam os valores de m e n; e se este producto em um caso for $\frac{1}{2} p\ (p - 1) z^2$, está claro que será o mesmo em todos os mais casos.

Ora já vimos que sendo m e n inteiros positivos é $x = (1 \pm z)^m$, e $y = (1 \pm z)^n$, e que é então

$$xy = (1 \pm z)^{m+n} = (1 \pm z)^p = 1 \pm pz + \tfrac{1}{2} p (p-1) z^2 \pm \text{etc.};$$

donde concluiremos, que xy tem, em todos os casos, a fórma que lhe suppuzemos.

Posto isto:

1.° *Se* m *é inteiro e tem o signal negativo:* como n é quantidade arbitrária, podemos suppor $n = +m$, tornando-se então n inteiro e positivo, e por conseguinte $y = (1 \pm z)^n$. E como esta hypothese torna $p = 0$, a 3.ª equação se reduzirá a $xy = 1$, ou $x = y^{-1} = (1 \pm z)^{-n} = (1 \pm z)^{-m}$. Teremos pois

$$(1 \mp z)^{-m} = 1 \pm mz + \frac{m(m+1)}{1 \,.\, 2} z^2 \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^3 + \ldots\ldots$$

$$T_{q+1} = \pm \frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+q-1)}{1 \quad 2 \quad 3 \ldots. \quad q} z^q = [(q+m-1)Cq] z^q$$

$$= [(q+m-1)\,C\,(m-1)] z^q = \frac{(q+1)(q+2)\ldots.\,(q+m-1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots\ldots (m-1)} z^q.$$

Acharemos assim, por este termo geral, para

$(x \pm a)^{-1}$ coeffic.	1	$\mp$ 1	+ 1	$\mp$ 1	+ 1 ....
$(x \pm a)^{-2}$	1	$\mp$ 2	+ 3	$\mp$ 4	+ 5 ....
$(x \pm a)^{-3}$	1	$\mp$ 3	+ 6	$\mp$ 10	+ 15 ....
$(x \pm a)^{-3}$	1	$\mp$ 4	+ 10	$\mp$ 20	+ 35 ....

A taboada da pag. 9 dá, nas columnas verticaes, a lei d'estes numeros.

2.° *Se* m *é fraccionario (positivo ou negativo):* façamos $n = m$, será $p = 2m$ e $xy = x^2$; logo

$$x^2 = 1 + 2mz + \frac{2m(2m-1)}{1 \,.\, 2} z^2 + \text{etc.}$$

Multiplicando esta equação por $x = 1 + mz + \text{etc.}$, vem

$$x^3 = 1 + 3mz + \frac{3m(3m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

Tornando a multiplicar por x, vem

$$x^4 = 1 + 4mz + \frac{4m(4m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.}$$

Donde concluiremos, em geral,

$$x^k = 1 + kmz + \frac{km(km-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \text{etc.},$$

qualquer que seja o inteiro k.

Por tanto se k for o denominador da fracção $m = \frac{l}{k}$, ou $km = l$, será

$$x^k = 1 + lz + l\frac{l-1}{2} z^2 + \text{etc.} = (1+z)^l,$$

por ser l um inteiro, positivo ou negativo, conforme m é positivo ou negativo. Temos pois

$$x^k = (1+z)^{km}, \text{ e } x = (1+z)^m.$$

3.° *Se* m *é irracional, ou comprehende expressões transcendentes, taes como logarithmos, exponenciaes, arcos de circulo, senos, cosenos* etc. Suppondo que n e h são dous numeros entre os quaes m está comprehendido, cada um dos termos de $x = 1 + mz + \text{etc.}\ldots$ estará comprehendido entre os seus correspondentes das series $(1+z)^n$ e $(1+z)^h$; e é claro que x estará entre estas duas expressões, que podem differir entre si tão pouco como se quizer.

Como pois $(1+z)^n$ póde approximar-se indefinidamente de x á medida que n se approximar de m: se chamarmos α a differença, será $(1+z)^n = x + \alpha$. Do mesmo modo se chamarmos β a differença entre $(1+z)^n$ e $(1+z)^m$, teremos $(1+z)^n = (1+z)^m + \beta$. Logo $x+\alpha = (1+z)^m + \beta$; e como α e β são quantidades que se podem tornar tão pequenas como se quizer, teremos por fim (Alg. El. n.° 120) $x = (1+z)^m$.

4.° *Se m é imaginario:* sujeitam-se convencionalmente estas expressões ás mesmas regras das quantidades reaes; visto que não é possivel nem formar uma idea exacta de um calculo, cujos elementos seriam symbolos que não representam grandeza alguma; nem por consequencia dar demonstração a tal respeito (Alg. Elem. n.° 136). (Nota 2.ª)

11. Tendo visto que as fórmulas (g) e (i) tem logar qualquer que seja o valor de m, passemos a applical-a a alguns exemplos.

I. Para desenvolver $\dfrac{a}{\alpha + \beta x} = \dfrac{a}{\alpha} \times \dfrac{1}{1+kx}\left(\text{fazendo } k = \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, desenvolva-se em serie $(1+kx)^{-1}$ pela fórmula (l).
Os coefficientes tem por factores -1, $\frac{1}{2}(-1-1)$, $\frac{1}{3}(-1-2)$, ... os quaes são todos $= -1$; os productos são alternadamente $+1$, -1: donde resulta a progressão por quociente

$$1 - kx + k^2x^2 - k^3x^3 \ldots\text{, cuja razão é } -kx.$$

Logo $$\frac{a}{\alpha+\beta x} = \frac{a}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3 x^3}{\alpha^3} \ldots\ldots \pm \frac{\beta^n x^n}{a^n} \ldots\ldots\right).$$

II. Para $\sqrt{(a^2 \pm x^2)}$, escreva-se

$$a\sqrt{\left(1 \pm \frac{x^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{(1 \pm y^2)} = a(1 \pm y^2)^{\frac{1}{2}},$$

fazendo $x = ay$. Para achar a potencia $\frac{1}{2}$ de $(1 \pm y^2)$ formemos os factores dos coefficientes, a saber: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)$, $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-2)$, ou $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$; os productos são fracções cujos numeradores são os factores impares 1.3.5.7...., e os denominadores os factores pares 2.4.6.8....
Logo:

$$\sqrt{1 \pm y^2} = 1 \pm \frac{y^2}{2} - \frac{1.y^4}{2.4} \pm \frac{1.3y^6}{2.4.6} - \frac{1.3.5y^8}{2.4.6.8} \pm \dots$$

$$\sqrt{a^2 \pm x^2} = a\left(1 \pm \frac{x^2}{2a^2} - \frac{1.x^4}{2.4a^4} \pm \frac{1.3x^6}{2.4.6a^6} - \frac{1.3.5x^8}{2.4.6.8a^8} \pm \dots\right)$$

III. **Do mesmo modo se obterá**

$$(1 \pm y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1.y^2}{2} + \frac{1.3.y^4}{2.4} \mp \frac{1.3.5y^6}{2.4.6.} + \frac{1.3.5.7y^8}{2.4.6.8.} \mp \dots\dots$$

$$(a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1.3x^4}{2.4a^4} \mp \frac{1.3.5x^6}{2.4.6a^6} + \frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8a^8} \mp \dots\right).$$

$$(1 \pm x)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 \text{ etc.}$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3.5}{2.4}x^2 \mp \frac{3.5.7}{2.4.6}x^3 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}x^4 \text{ etc.}$$

$$\sqrt[3]{a+x} = \sqrt[3]{a}\left(1 + \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} + \frac{5x^3}{81a^3} - \frac{10x^4}{243a^4} + \frac{22x^5}{729a^5} \dots\right).$$

$$\sqrt[3]{1-y^3} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \frac{10y^{12}}{243} - \frac{22y^{15}}{729} - \dots\dots,$$

$$(1-a)^{-2} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 \dots\dots + (n+1)a^n \dots$$

12. Todos os coefficientes do desenvolvimento de $(x+a)^m$, quando m for primo, são multiplos de m, abstrahindo dos de x^m e a^m; com effeito a equação (c) dá

$$1.2.3 \dots p \times [mCp] = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1).$$

Ora, sendo o 2.° membro multiplo de m, tambem o 1.° o deve ser, e como suppuzemos m primo e $>p$, deve por conseguinte m dividir $[mCp]$.

Do mesmo modo se mostra que todos os coefficientes de $(a+b+c\,..)^m$ são multiplos de m, excepto a^m, b^m, c^m, ...

Designando pois por k um inteiro, teremos

$$(a+b+c\,..)^m = a^m + b^m + c^m \,....\, + mk.$$

Se fizermos $1 = a = b = c$ . . . . , sendo h o numero de termos do polynomio, acharemos $h^m = h + mk$; donde se tira $h^m - h =$ um multiplo de m, ou $\frac{h\,(h^{m-1}-1)}{m} =$ inteiro. Logo, se um numero primo m não for divisor exacto de h, sel-o ha de $(h^{m-1} - 1)$. Este é o theorema de Fermat (Vej. *Addit. ás notas da Arithm.* pag. 276.), que se enuncia da maneira seguinte:

Se o inteiro h *não for multiplo do numero primo* m, *o resto da divisão de* h^{m-1} *por* m *será a unidade.*

Este theorema ainda se póde enunciar d'outro modo. Como $m-1$ é um numero par, fazendo $m - 1 = 2q$, será

$$h^{m-1} - 1 = (h^q - 1) = (h^q + 1),$$

e por conseguinte deve m dividir um destes factores. Logo: quando m fôr um numero primo > 2, e não dividir h, o resto da divisão de $h^{\frac{m-1}{2}}$ por m será ± 1.

Extracção das raizes de qualquer grão dos numeros e dos polynomios.

13. Na Arithmetica (n.° 70) demos uma regra geral para a extracção das raizes dos gráos superiores ao terceiro, e indicámos a razão da mesma regra, que póde agora ser mais bem entendida com o exemplo seguinte.

Para acharmos a raiz 4.ª de 548464, designemos por A a 4.ª potencia mais elevada contida neste numero, por a as dezenas, e por b as unidades da sua raiz. Como

$$A = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

o 1.° termo a^4 é a 4.ª potencia do algarismo das dezenas, e por isso deve acabar por quatro zeros á direita. Separando pois os quatro algarismos 8464, vê-se que 54 contém a 4.ª potencia do algarismo das dezenas, consideradas como simples unidades; e como 16 é a 4.ª potencia mais elevada comprehendida em 54, fica evidente que 2, raiz 4.ª de 16, é o algarismo das dezenas.

Diminuindo 16 de 54, e repondo os algarismos separados, o resto 388464 contém as outras quatro partes de $(a+b)^4$, ou $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Mas como $4a^3b$ acaba em tres zeros, que provém do factor a^3, por isso separando os tres algarismos 464, o resto 388 conterá 4 vezes o producto das unidades b pelo cubo do algarismo 2 das dezenas, consideradas como simples unidades, ou $4 \times 8 \times b = 32b$, e além disto os milhares provenientes de $6a^2b + \ldots\ldots\ldots$ O quociente 10 de 388 dividido por 32 será pois $\overline{\overline{>}}\, b$; mas passando á verificação, isto é, formando, como abaixo se vê, o producto $b\,(4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3)$, reconhece-se que é necessario reduzir b a 7, seguindo nisto um processo analogo ao que empregámos nas extracções das raizes quadradas e cubicas; e será a raiz 27 exacta até ás unidades.

Querendo levar a approximação mais adiante, junctem-se quatro zeros, dos quaes se separem tres, e divida-se 170230 por $4\,a'^3$, fazendo $a' = 27$. E como $4a'^3 = 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3$, vê-se que para formar este divisor basta ajunctar $6a^2b + 8ab^2 + 3b^3$ á parte do producto de cima, comprehendido entre parentheses. Feito o calculo pela maneira abaixo indicada, acha-se para 2.° divisor o numero 78732, que dá 2 para a primeira letra decimal da raiz.

54 . 8464	27,2		
16	32 1.° divisor .. $4a^3$		53063
388 . 464	168	$6a^2b$	168
371 . 441	392	$4ab^2$ .. 2 vezes ..	784
17 . 0230	343	b^3 .. 3 vezes ..	1029
	53063×7=371 441	2.° divisor	78732=4.27³

Este processo, tão commodo para achar cada um dos divisores parciaes, é geral, qualquer que for o grão da raiz, que se pertende extrahir.

14. Por meio das taboas dos logarithmos fazem-se estas extracções com muito maior facilidade, mas ha o inconveniente de se não poder obter uma approximação além dos limites das mesmas taboas. N'este caso usaremos dos processos seguintes.

I. As series (II. pag. 23.) servem para a extracção das raizes com grande approximação. Assim para obter $\sqrt{N}$, decomponha-se N em dous quadrados a^2 e $\pm x^2$, das quaes o 1.° seja muito grande em relação ao 2.°; então $\sqrt{N}=\sqrt{(a^2 \pm x^2)}=(a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}$ virá expresso n'uma serie convergente (Alg. n.° 106).

Se, por ex.°, nos pedirem $\sqrt{8}$, decompondo 8 em 9—1, tomaremos

$$a=3 \text{ e } x=1, \text{ e virá } \sqrt{8}=\sqrt{(9-1)}=(3^2-1)^{\frac{1}{2}}=3\left(1-\tfrac{1}{18}-\tfrac{1}{648}-\ldots\right).$$

Para tornar a serie mais rapidamente convergente, tomem-se os tres primeiros termos da serie, que sommam 2,829, e compare-se o seu quadrado com 8; acharemos $8=(2{,}829)^2-0{,}003241$, d'onde

$$\sqrt{8}=2{,}829\sqrt{\left(1-\frac{3241}{8003241}\right)}=2{,}8284271247462\ldots\ldots$$

E como $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, tomando ametade, achar-se-ha

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ 35623\ 731\ldots\ldots$$

As taboas dos logarithmos dão a 1.ª approximação, que depois se continúa pelo processo que acabâmos de indicar.

II. Supponhamos que é conhecido um valor approximado a da raiz m de N; e seja b a differença entre N e a^m; teremos

$$N=a^m \pm b, \sqrt[m]{N}=a \pm z,$$

sendo z a correcção que deve receber a, e por conseguinte tanto z como

b numeros pequenos. Como $a^m \pm b = (a \pm z)^m$, desenvolvendo, e representando por m, A', A'',.... os coefficientes da serie, teremos

$$b = z\,(ma^{m-1} \pm A'z\,a^{m-2} + A''z^2\,a^{m-3} \pm \ldots\ldots).$$

N'uma primeira approximação, basta attender ao 1.° termo da serie, e vem $b = mz\,a^{m-1}$; d'este deduz-se o valor de z, o qual substituido no termo $\pm A'z\,a^{m-2}$, e desprezando os seguintes, dá

$$z = \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)\,b} = \pm\, 2a \times \frac{N - a^m}{(m+1)\,a^m + (m-1)\,N},$$

eliminando $b = \pm (N - a^m)$. Logo $\sqrt[m]{N} = a \pm z$ torna-se em

$$\sqrt[m]{N} = a \times \frac{(m+1)\,N + (m-1)\,a^m}{(m-1)\,N + (m+1)\,a^m};$$

d'onde $\quad \sqrt{N} = a \times \dfrac{3\,N + a^2}{N + 3a^2}, \; \sqrt[3]{N} = a \times \dfrac{2N + a^3}{N + 2a^3},$

$$\sqrt[4]{N} = a \times \frac{5N + 3a^4}{3N + 5a^4}, \; \sqrt[5]{N} = a \times \frac{3N + 2a^5}{2N + 3a^5}, \text{ etc.}$$

Querendo, por ex.° $\sqrt{65}$, toma-se $a = 8$, d'onde

$$\sqrt{65} = 8 \times \frac{195 + 64}{65 + 192} = \frac{2072}{257} = 8{,}062257,$$

valor exacto até á 5.ª casa da dizima.

15. Para completarmos a doutrina expendida na Algebra elementar (n.os 142. e seg.) sôbre a extracção das raizes quadradas e cubicas dos polynomios, indicaremos tambem aqui as regras da extracção das raizes de qualquer ordem dos mesmos polynomios.

Suppondo que o polynomio dado X é a potencia m de um polynomio desconhecido $Y = y + y_{(1)} + y_{(2)} + \ldots\ldots$ e que ambos estes polynomios estão ordenados segundo as potencias decrescentes da mesma letra a, demonstra-se facilmente, como a respeito das raizes quadradas e cubicas, que: *o maior termo* y *da raiz procurada se achará extrahindo a raiz* m *do maior termo do polynomio* X.

Achado este 1.° termo, facilmente se obterá o 2.°; para resolvermos porém a questão na maior generalidade, daremos a regra para obter um termo qualquer $y_{(n)}$ da raiz, quando forem conhecidos os n termos precedentes.

Seja u a somma dos termos já achados, e v a dos termos desconhecidos; sendo então $X = (u+v)^m$, teremos desenvolvendo

$$X = u^m + mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + k'u^{m-3}v^3 + \text{etc.}$$

designando por k, k', k'', ... os coefficientes do desenvolvimento deste binomio. D'esta equação tira-se

$$X - u^m = mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + \ldots\ldots$$

O 1.° membro d'esta equação é a differença entre o polynomio dado e a potencia m da parte achada da raiz. O 2.° termo vai servir-nos para descubrir o *maior termo* $y_{(n)}$ da parte desconhecida v.

Com effeito, desenvolvendo u^{m-1}, o maior termo do desenvolvimento será y^{m-1}, e sendo $y_{(n)}$ o maior termo de v, será $my^{m-1}\,y_{(n)}$ o maior termo do producto $mu^{m-1}v$. Do mesmo modo se vê, que os maiores termos nos desenvolvimentos dos productos seguintes, serão respectivamente $ky^{m-2}\,y^2_{(n)}$, $k'y^{m-3}\,y^3_{(n)}$, ...

Reflectindo agora, que n'estes termos maiores dos productos successivos, vae seguidamente diminuindo de uma unidade o expoente de y, e crescendo o de $y_{(n)}$, e que em $y_{(n)}$ entra a letra a com expoente menor do que em y: concluiremos que $my^{m-1}\,y_{(n)}$ é o termo maior do 2.° membro da equação.

Logo, se do polynomio dado X subtrahirmos a potencia m da parte u achada da raiz, o maior termo do resto será egual a m vezes a potencia $m-1$ do maior do termo y da raiz, multiplicada pelo maior termo da parte da raiz desconhecida. E por conseguinte, se dividirmos o maior termo do resto pela potencia $m-1$ do maior termo da raiz, acharemos mais um termo para a mesma raiz.

De tudo isto se deduz a regra seguinte para a extracção das raizes dos polynomios, depois de achado o 1.° termo y:

Para ter o 2.° termo $y_{(1)}$, subtraia-se do polynomio X a potencia m do 1.° termo y da raiz, e divida-se depois o maior termo do resto por my^{m-1}.

Para ter o 3.° termo $y_{(2)}$, subtraia-se de X a potencia m de $y+y_{(1)}$, e divida-se depois o maior termo do resto por my^{m-1}.

Em geral para obter o termo $y_{(n)}$ subtraia-se de X a potencia m de $y+y_{(1)}+\ldots y_{(n-1)}$, e divida-se depois o maior termo do resto por my^{m-1}.

Dos numeros figurados.

16. Dá-se este nome aos numeros seguintes:

1.ª ordem	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1....
2.ª	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10....
3.ª	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55....
4.ª	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220....
5.ª	1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.	715....
6.ª	1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792.	1287.	2002....
7.ª	1.	7.	28.	84.	210.	462.	924.	1716.	3003.	5005....

N'esta taboada *cada termo é a somma dos dois que lhe ficam, um immediatamente á esquerda, outra acima.*

Por ex.°, $2002=1287+715$.

Comparando a formação d'estes numeros com os da taboa de pag. 9. vê-se, que são os mesmos, porém dispostos em ordem differente. Uma linha da taboada da pag. 9., por ex.° 1, 7, 21, 35, ... acha-se aqui em diagonal, ou figurando a hypothenusa do triangulo rectangulo isosceles, cujo vertice é a 1.ª letra, e cujos lados se tomam na 1.ª linha e na 1.ª columna. Por conseguinte o valor de um termo qualquer, que está na linha p e ao mesmo tempo na hypothenusa m, é $T=[mC(p-1)]$.

Tomemos duas linhas consecutivas:

ordem $(p-1)$......1, a,........q, r, s, t, v.....,
ordem p...........1, A,........Q, R, S, T,.... ;
teremos.. $A=1+a$,.... $R=Q+r$, $S=R+s$, $T=S+t$,...

1.° Considerando uma hypothenusa, vê-se que os seus termos se adiantam uma casa nas linhas das ordens consecutivas, como T e v. Se T fôr o termo n na linha ou ordem p, v será o termo $n+1$ na linha ou ordem precedente $p-1$. O outro termo da hypothenusa, na linha ou ordem $p-2$, será o termo $n+2$. E por conseguinte, se na ordem p o termo da hypothenusa fôr n, será

na ordem $(p-1)$............................ $n+1$
na ordem $(p-2)$ $n+2$
....
na 2.ª ordem ou na ordem $[(p-(p-2))]$ $n+(p-2)$

Designando pois por m o termo da 2.ª ordem que pertence á hypothenusa, e que é o numero d'ella, este deverá occupar a casa $n+p-2$, isto é, será

$$m=n+p-2;$$

a equação $T=[mC(p-1)]$ réduz-se (pag. 5) a

$$T=[(n+p-2)\ C\ (p-1)]=[(n+p-2)\ C\ (n-1)], \ldots\ldots (n)$$

ou

$$T=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}\ldots\frac{n+p-2}{p-1}$$

$$=\frac{p}{1}.\frac{p+1}{2}.\frac{p+2}{3}\ldots\frac{n+p-2}{n-1},$$

desenvolvendo pela equação (c), p. 4, e escrevendo os factores do numerador em ordem inversa. Confórme for $p <$ ou $> n$, assim se usará com preferencia da 1.ª ou 2.ª d'estas expressões do *termo geral* T. N'ellas se verifica tambem, que o termo n da ordem p é o mesmo que o termo p da ordem n.

Fazendo $p = 3, 4, 5 \ldots$ acha-se

3.ª ordem, $1.3.6.10 \ldots T = \frac{1}{2}n(n+1) = [(n+1)C2]$
4.ª ....., $1.4.10.20 \ldots T = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2) = [(n+2)C3]$
5.ª ....., $1.5.15.35 \ldots T = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) = [(n+3)C4]$.

2.° Comparando os termos T, t e S, acha-se

$$T = [mC(p-1)],\ t = [(m-1)C(p-2)],\ S = [(m-1)C(p-1)].$$

Desenvolvendo e reduzindo (equação (c) p. 4.) vem

$$T = \frac{n+p-2}{n-1} \times S = \frac{n+p-2}{p-1} \times t \ldots (o).$$

Por meio d'estas fórmulas se deduzem uns dos outros, e seguidamente, os termos, que formam tanto a linha p como a columna n. Por ex., para $p = 6$, vem $T = \frac{n+4}{n-1}S$; fazendo $n = 2, 3, 4 \ldots$ achão-se os factores $\frac{6}{1}, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4} \ldots$, cada um dos quaes multiplicado pelo termo respectivo S da 6.ª ordem, dá o termo seguinte T. Para $n = 7$, vem $T = \frac{p+5}{p-1} \times t$; e fazendo $p = 2, 3, 4, \ldots$ acham-se os factores $\frac{7}{1}, \frac{8}{2}, \frac{9}{3} \ldots$ que servem para passar de um termo t da 7.ª columna para o seguinte T da 8.ª

3.° Acha-se que a somma de dous termos das casas $n-1$ e n da 3.ª ordem é n^2; *logo a somma de dous numeros successivos da 3.ª ordem é um quadrado perfeito, e todo o quadrado póde decompôr-se em dous numeros da 3.ª ordem*. Assim 121 quadrado de 11, é a somma de 55 e 66, que são os termos 10.° e 11.° da 3.ª ordem.

4.° Sommando os valores A, ... R, S, T.... (p. 31.) vem $T = 1 + a \ldots\ldots + r + s + t$; logo qualquer termo T é egual á somma de todos os da ordem precedente, até ao termo t que está na mesma columna; ou antes, *o termo geral da ordem* p *é o termo sommatorio da ordem* p — 1. Assim para obter o termo sommatorio dos n primeiros termos da ordem p, mudaremos p em $p+1$ na equação (n), o que dá

$$\Sigma = [(n+p-1)\,Cp] = [(n+p-1)\,C(n-1)].$$

Para a 7.ª ordem, por ex., $\Sigma = [(n+6)\,C7]$; a 7.ª serie, parando no 9.° termo, somma $[15C7] = 6435$.

5.° Do mesmo modo se veria, que *um termo qualquer da taboada é a somma dos termos da columna precedente até aquella ordem*; o que é tambem um resultado de ser *a columna* p *formada dos mesmos numeros que a ordem* p, porque estes termos são, dous a dous, aquelles que se reproduzem na mesma hypothenusa, por estarem equidistantes dos extremos.

17. Temos até aqui tomado para origem da nossa taboada a serie 1.1.1.1; se porém, em logar d'ella, tomarmos $1 . \delta . \delta . \delta \ldots\ldots$ e a sujeitarmos á mesma geração: a 2.ª ordem será a equidifferença $1, 1+\delta, 1+2\delta, 1+3\delta, \ldots\ldots$; e assim nas outras ordens, como se vê na seguinte taboada; da qual a precedente não é mais do que um caso particular.

1.ª ordem	1.	δ.	δ.	δ.	$\delta \ldots$;
2.ª	1.	$1+\delta$.	$1+2\delta$.	$1+3\delta$.	$1+4\delta \ldots$
3.ª	1.	$2+\delta$.	$3+3\delta$.	$4+6\delta$.	$5+10\delta \ldots$;
4.ª	1.	$3+\delta$.	$6+4\delta$.	$10+10\delta$.	$15+20\delta \ldots$;
5.ª	1.	$4+\delta$.	$10+5\delta$.	$20+15\delta$.	$35+35\delta \ldots$;
6.ª	1.	$5+\delta$.	$15+6\delta$.	$35+21\delta$.	$70+56\delta \ldots$;

É evidente que todos os termos tem a fórma $T = A + B\delta$, e comparando estes numeros com os da 1.ª taboada, acha-se que A é o termo da mesma casa n na ordem precedente $p-1$, e que o factor B é o termo da mesma ordem p na casa precedente $n-1$: assim

$$T = \text{ao termo } n \text{ da ordem } p-1 + [\text{o termo } (n-1) \text{ da ordem } p]\,\delta,$$

$$T = (n-1)\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{3}\cdots\frac{n+p-3}{p-1}\cdot\left(\frac{p-1}{n-1}+\delta\right).$$

Tal é o *termo geral* d'esta ultima taboada. *O termo sommatorio* Σ *da ordem* p, *é o termo geral da ordem* $p+1$, como antecedentemente. Por ex., $p=3$, dá na 3.ª ordem,

$$T = n + \tfrac{1}{2}n\delta(n-1),\ \Sigma = \tfrac{1}{2}n(n+1)[1+\tfrac{1}{3}\delta(n-1)].$$

Toma-se, por ex., na 1.ª serie $\delta = 2$, e os quadrados 1 . 4 . 9 . 16 . . derivam da progressão impar 1 . 3 . 5 . 7 . . . . . ; toma-se na 2.ª $\delta = 3$, etc.

1. 2. 2. 2. 2. . . .	1. 3. 3. 3. 3. . . .	1. 4. 4. 4. .
1. 3. 5. 7. 9. . . .	1. 4. 7. 10. 13. . .	1. 5. 9. 13. . .
1. 4. 9. 16. 25. . . .	1. 5. 12. 22. 35. . . .	1. 6. 15. 28. . .
$T = n^2$	$T = n\cdot\dfrac{3n-1}{2}$	$T = n(2n-1)$
$\Sigma = n\cdot\dfrac{n+1}{2}\cdot\dfrac{2n+1}{3}$	$\Sigma = n^2\cdot\dfrac{n+1}{2}$	$\Sigma = n\cdot\dfrac{n+1}{2}\cdot\dfrac{4n-1}{3}$.

23

18. Se dividirmos o lado *al* (fig. 1.) do triangulo *alm* em $n-1$ partes iguaes, nos pontos b, d, f, ... e tirarmos bc, de, fg . . . . pa-

rallelas á base lm, estes comprimentos crescerão como os numeros $1.2.3.4....$ Marcando um ponto em a, 2 em b e c, 3 sôbre de, 4 sôbre fg.... : a somma d'estes pontos, a contar de a, é successivamente $1.3.6.10....$; e o triangulo alm contém tantos d'estes pontos, quantos são designados pelo termo n pertencente a estes numeros na 3.ª ordem, os quaes por esta razão se chamão *triangulares*. Quando o triangulo é equilatero, estes pontos são equidistantes.

Do mesmo modo, se em um polygono de m lados, tirarmos diagonaes de um dos angulos a, e dividirmos estas linhas e os lados do angulo a em $n-1$ partes eguaes: unindo por meio de rectas os pontos notados com o mesmo numero, formar-se-hão $n-1$ polygonos com o angulo a commum, e $m-2$ lados parallelos. Estes lados crescem como $1.2.3.4....$ Se collocarmos um ponto em cada um dos angulos, outro no meio dos lados parallelos do 2.° polygono, 2 pontos em cada um dos lados do 3.°, etc.: estes lados conterão 1, 2, 3,.... pontos mais, e cada um dos perimetros dos $m-2$ lados parallelos terá $m-2$ pontos mais do que o precedente. Fazendo $\delta = m-2$, a área do polygono conterá pois uma quantidade de pontos (equidistantes, quando a figura for regular) designada pelo termo n da serie da 3.ª ordem, que se deduz de $1\delta.2\delta.3\delta..$ É por esta razão que se denominaram *Quadrados*, *Pentagonos*, *Hexagonos*.... os numeros d'estas series, de que démos os termos geral e sommatorio, suppondo $\delta = 2, 3, 4$, ou $m = 4, 5, 6....$ Em geral chamam-se *numeros polygonos*, todos os da 3.ª ordem, porque podem ser equidistantes e contidos em uma figura polygona.

Raciocinando pelo mesmo theor a respeito de um angulo triedro, ver-se-ha que a serie $1.4.10.20....$ representa o numero de pontos que n'elle se podem assentar sôbre planos parallelos, d'onde lhes resultou a denominação de numeros *Pyramidaes*.

Os numeros *polyedros*, compõe as series da 4.ª ordem, da qual nós sabemos já determinar os termos geral e sommatorio, fazendo $p = 4$ e 5.

A analogia conduziu á generalisação d'estas noções, e chamam-se *numeros figurados* todos os que estão sujeitos á lei do n.° 17, e comprehendidos na taboada precedente, ainda que não saibamos realmente representar todos estes numeros por figuras de Geometria, passada a 4.ª ordem.

Arranjos e Combinações quando as letras não são todas differentes.

19. Effectue-se a multiplicação do polynomio $a+b+c+\ldots$ por si mesmo muitas vezes successivas, tendo o cuidado de escrever primeiro, em cada um dos termos obtidos, a letra que serviu de multiplicador, e de conservar nos seus logares as letras do multiplicando. Teremos

$$A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; a+b+c+\ldots\ldots$$

$$ \; a+b+c+\ldots\ldots$$

$$B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} aa+ab+ac+\ldots\ldots \\ ba+bb+bc+\ldots\ldots \\ ca+cb+cc+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline a+b+c+\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} C \ldots\ldots \; aaa+aab+aac\ldots+aba+abb+abc\ldots+aca+acb\ldots \\ baa+bab+bac\ldots+bba+bbb+bbc\ldots+bca+bcb\ldots \\ caa+cab+cac\ldots+cba\ldots \text{ e assim por diante.} \end{array}$$

O producto B é formado dos arranjos 2 a 2 das letras a, b, c, ... podendo cada uma d'ellas entrar 1, 2 vezes em cada termo. O producto C é formado dos arranjos 3 a 3 das mesmas letras, podendo a mesma letra entrar 1, 2, 3, vezes em cada termo. E assim por diante.

E na verdade, para que, por ex.° alguns arranjos 3 a 3 em que a é inicial, se repetissem ou omittissem em C, seria necessario que houvesse a mesma repetição ou ommissão nos termos de B, que resultariam supprimindo a inicial a.

Sendo m o numero das letras do polynomio, vê-se que B tem m termos em cada linha, e m linhas; e por conseguinte os arranjos 2 a 2 são m^2.

O producto C tem m linhas cada uma com m^2 termos, e por conseguinte os arranjos 3 a 3 são m^3.

Em geral *o numero dos arranjos de* m *letras* n *a* n, *nos quaes cada letra póde entrar até* n *vezes, é* m^n. *Neste caso póde ser* $n > m$.

Por ex.° 9 algarismos tomados 4 a 4, dão 9^4, ou 6561 numeros differentes.

A somma de arranjos de m letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, ... n a n, é

$$m + m^2 + \dots. m^n, \text{ ou } m\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Por ex.° a somma de 5 algarismos 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, é $= \frac{5}{4}(5^3-1) = 155$.

Se tivermos n dados A, B, C, ... com f faces marcadas com as letras a, b, c, ... ; um lance destes dados produzirá um systema tal como *abacc*. Se tomarmos o 1.° dado A, e lhe fizermos appresentar successivamente as suas diversas faces, sem bulir nos outros dados, resultarão daquelle systema f arranjos differentes; e como se póde fazer o mesmo para cada um dos arranjos dos outros dados: vê-se, que os n dados produzem f vezes mais resultados que os outros $(n-1)$ dados B, C, ...

Por conseguinte 2 dados dão f^2 resultados; 3 dados dão f^3; 4 dados f^4; e em geral n dados com f faces dão f^n resultados diversos. Advirta-se que se consideram differentes os resultados identicos, quando resultam de dados differentes.

Se o 1.° dado tiver f faces, o 2.° f', o 3.° f'', o numero dos resultados será $f \times f' \times f'' \times \dots$

20. Vejamos agora a maneira, pela qual se podem distribuir por m logares vagos A, B, C, ... m letras, de maneira, que α logares sejam occupados pela letra a, β logares pela letra b, etc.

É manifesto, que para distribuir as α letras a, basta tomar α logares A, B, C, ... e collocar n'elles as mesmas letras a; o que é possivel fazer de tantos modos differentes, quantas são as combinações α a α dos m logares A, B, C, ... ; e por conseguinte $[mC\alpha]$ designa as maneiras differentes por que α letras a se podem distribuir por m logares vagos.

Feito isto, restam de cada distribuição $m-\alpha$ logares vagos, dos quaes β podem ser occupados pela letra b, de todas as maneiras indicadas por $[(m-\alpha)C\beta]$. Por conseguinte o producto $[mC\alpha] \times [(m-\alpha)C\beta]$, mostra de quantos modos se podem distribuir α letras a, e β letras b por m logares vagos.

Nos $m-\alpha-\beta$ logares, que ficam ainda por occupar, podemos distribuir γ letras c, de todas as maneiras indicadas por $[(m-\alpha-\beta)C\gamma]$. E assim por diante até que não fique logar algum vago, o que acontece quando se chega a uma combinação de fórma $[\upsilon C \upsilon] = 1$.

Por conseguinte o producto

$$[mC\alpha]\times[(m-\alpha)C\beta]\times[(m-\alpha-\beta)C\gamma]\times\ldots\ldots$$

mostra de quantas maneiras os m logares vagos podem ser occupados por α letras a, por β letras b, por γ letras c. Este producto é o mesmo numero que na pag. 19. representa o coefficiente do termo geral do desenvolvimento do polynomio, termo qne designámos por N.

Se tivermos pois um producto da fórma $a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\ldots$ *no qual* a *é* α *vezes factor,* b *é* β *vezes,* c *é* γ *vezes .... o numero de todos os modos possiveis por que estes factores podem estar distribuidos será o coefficiente da expressão* N, da pag. 19., sendo $m=\alpha+\beta+\gamma\ldots\ldots$

Por ex.°, os 10 factores $a^4\,b^3\,c^2d$ formam um numero de arranjos designado por $\dfrac{1.2.3\ldots\ldots10}{1.2.3.4\times1.2.3.\times1.2}=12600.$

As 7 letras do nome *Antonio* podem arranjar-se de 1260 maneiras differentes.

21. Multipliquemos agora muitas vezes successivas por si mesmo o polynomio $a+b+c\ldots.$ tomando por factor de um termo a, b, c, ... só os termos do multiplicando, que estão na mesma columna, ou á sua esquerda.

$$\begin{array}{ll}
\text{A}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a+b+c+d\ldots\ldots\ldots \\
 & \underline{a+b+c+d\ldots\ldots\ldots} \\
\text{B}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} aa+bb+cc+dd\ldots\ldots \\ \quad+ab+bc+cd\ldots\ldots\ldots \\ \qquad+ac+bd\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad+ad\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \\
\text{C}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} aaa+bbb+ccc+ddd\ldots\ldots \\ \quad+abb+bcc+cdd\ldots\ldots \\ \quad+aab+acc+bdd\ldots\ldots \\ \qquad+bbc+add\ldots\ldots \\ \qquad+abc+ccd\ldots\ldots \\ \qquad+aac+\text{etc.} \end{array}\right.
\end{array}$$

É facil de ver que o producto B é formado de todas as combinações 2 a 2 das m letras do polynomio, podendo cada uma d'ellas entrar

1, 2 vezes em cada termo; porquanto, pelo modo como fizemos as multiplicações, se rejeitaram todos os arranjos 2 a 2 em que entravam as mesmas letras.

Do mesmo modo se vê, que o producto C é formado das combinações 3 a 3, em que a mesma letra póde entrar 1, 2, 3, vezes no mesmo termo. E assim por diante.

Em quanto ao numero d'estas combinações, cada uma das columnas do producto contém tantos termos quantos ha na columna, que lhe fica á esquerda, do mesmo producto, e na que lhe fica superior, do producto precedente.

Se os numeros dos termos das columnas de um producto forem

$$1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ldots\ldots,$$

os do producto seguinte serão

$$1+\alpha,\ 1+\alpha+\beta,\ 1+\alpha+\beta+\gamma,\ \ldots\ldots\ldots$$

Esta última serie deduz-se da precedente pela lei dos numeros figurados (n.° 17.): e por conseguinte, para as combinações 2 a 2 as columnas successivas contém 1 . 2 . 3 . 4 . . termos; para as combinações 3 a 3 contém 1.3.6.10 . . . . ; e finalmente para as p a p, contém a serie da ordem p. .

O numero total das combinações, ou dos termos de um producto, é a somma da serie, continuada até á 2.ª, 3.ª, 4.ª. . . . columna, conforme houverem 1, 2, 3, ... letras para combinar. Sendo n as letras é necessario sommar os n 1.^{os} termos da ordem p, o que, segundo vimos, equival (n.° 16, 4.°) a tomar o termo n da ordem $p+1$. Logo:

O numero, que tem o logar n *na ordem* p+1, *é o das combinações de* n *letras* p *a* p, *admittindo que a mesma letra póde entrar* 1, 2, 3, . . n *vezes nas differentes combinações.*

Basta pois, para achar o termo geral, mudar p em $p+1$ na equação (n) pag. 31.; e teremos

$$T_{p+1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots p}=\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots n-1}\ldots\ (p)$$

n póde ser $>$, $=$, $<p$.

Por ex.º 10 letras 4 a 4 dão 715 combinações; 4 letras 10 a 10 dão 286.

Vê-se tambem que n letras tomadas p a p, e $p+1$ letras tomadas $n-1$ a $n-1$ dão o mesmo numero de combinações, por quanto substituindo n por $p+1$, e p por $n-1$, o valor de T_{p+1} fica o mesmo.

A equação (p) resolve tambem, mudando p em n, e n em p, o seguinte problema: Ha um certo numero de espheras de p côres differentes, *brancas*, *vermelhas*, *pretas*, ... e dá-se convencionalmente a cada uma d'estas côres a significação de uma qualificação, como *bom*, *sufficiente*, *máo*. Um certo numero n de juizes escolhem, cada um, uma esphera de cór conforme á sua opinião. Pergunta-se quantas combinações póde appresentar o resultado?

Os numeros da taboada da pag. 30. resolvem a questão, tomando as linhas 1.ª, 2.ª, 3.ª, ... conforme houver espheras de 1, 2, 3,.... côres; e tomando nessa linha os termos das casas 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª...., conforme os juizes forem 1, 2, 3, ... Com effeito, supponhamos effectuadas todas as combinações no caso das espheras de 1, 2, 3 côres, até ao termo 6 da 3.ª linha, e busquemos o termo seguinte 10, para o caso de 3 côres e 3 juizes. Formem-se primeiro as combinações seguintes, em que entram as espheras brancas:

3 br., 2 br. e 1 neg., 1 br. e 2 neg., 1 br. 1 neg. 1 ver., 2 br. 1 ver., 1 br. 2 ver.;

depois as combinações em que não entram espheras brancas:

3 neg., 3 ver., 2 ver. 1 neg., 2 neg. 1 ver.

Ora d'estas 10 combinações, as 6 primeiras estão designadas na taboada pelo numero á esquerda de 10, por que supprimindo em todas ellas uma esphera branca, teremos todas as combinações de duas espheras com 3 côres, que são 6; e o algarismo 4, que fica por cima de 10, dá o numero das combinações de 3 espheras de duas côres. Vê-se pois que os numeros da taboada, que pertendemos formar, tem a mesma geração que os da taboada de pag. 30., por ser cada um d'elles egual á somma do que lhe fica á esquerda e do que lhe fica superior. Não differem por conseguinte uma da outra, e temos

$$T_{p+1} = [(n+p-1)\,Cn] = [(n+p-1)\,C(p-1)] \ldots \; (q)$$

No caso de $p=3$, será

$$T = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

O desenvolvimento de $(a+b+c\ldots)^p$ consta (n.° 9) de tantos termos da fórma $Fa^{n}b^{n'}c^{n''}\ldots$, quantos são os inteiros differentes, que se podem tomar para expoentes n, n', n'', com tanto que a sua somma seja $=p$. Logo o numero total dos termos é egual ao das combinações p a p, que é possivel formar com as m letras a, b, c, ... dando-lhe todos os expoentes possiveis inteiros desde zero até p. E por conseguinte:

O numero dos termos da potencia p *do polynomio* $a+b+c+\ldots$ *é designado tambem pela expressão* (p) *de* T_{p+1}.

Para obter a somma das combinações de n letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, ... p a p, devemos ajunctar o numero que tem o logar n nas ordens successivas 1, 2, 3, ... $p+1$ da taboada de pag. 30, ou a columna n, cuja somma, segundo vimos, é o numero $n+1$ da ordem $p+1$. Mude-se pois n em $n+1$ na equação (p), e designando por Σ a somma pedida, será

$$\Sigma = [(n+p)\,Cp] - 1 = [(n+p)\,Cn] - 1;$$

correspondendo a unidade subtractiva ás combinações zero a zero, que n'este caso devemos omittir.

Por ex.°, 5 letras combinadas de 1 a 1, ... até 4 a 4, ou 4 letras de 1 a 1, até 5 a 5, dão o resultado

$$\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} - 1 = 125.$$

Querendo as combinações desde p a p até p' a p', applicar-se-ha duas vezes a fórmula aos numeros p e p', e diminuir-se-ha o primeiro resultado do último. Assim 5 letras tomadas desde 4 a 4 até 6 a 6 dão $461 - 125 = 336$ combinações.

22. *Para achar todas as combinações das* α letras a, β letras b, ... *do monomio* $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$ .. 1 a 1, 2 a 2, .. p a p, *sendo* $p = \alpha + \beta + \gamma ..$; notando que a póde ter todos os expoentes desde 1 até α; que b póde ter todos desde 1 até β; etc.....: vê-se que a questão se reduz a achar todos os divisores de $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$...... que formam os termos do producto (*vej. Addit. ás notas da Arith.* pag. 271)

$$(1 + a + a^2 + \ldots .\ a^\alpha)\,(1 + b + b^2 + \ldots .\ b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots .\ c^\gamma)\,..;$$

e por conseguinte o numero das combinações, que se pede, é

$$(1 + \alpha)\,(1 + \beta)(1 + \gamma) \ldots\ldots\ -1$$

Por ex.°, $a^5\ b^4\ c^3\ d^2$ tem 360 divisores (6 . 5 . 4 . 3) comprehendendo n'elles a unidade; por conseguinte de 359 maneiras se podem combinar os factores 1 a 1, 2 a 2, ... etc.

Querendo sómente *o numero de termos em que entra* a, como os outros são os divisores de $b^\beta\ c^\gamma$...., em numero $(1 + \beta)(1 + \gamma)$; teremos, subtrahindo, o resto $\alpha(1 + \beta)(1 + \gamma)$.... que é o numero pedido. Isto equivaleria a ajunctar a todas as combinações sem a, os factores a, a^2, a^3, ...

Querendo saber entre os divisores de $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$.... quantos comprehendem $a^m\ b^n$, tomem-se os divisores de $c^\gamma\ d^\delta$......, cujo numero é $(1 + \gamma)(1 + \delta)$...., e multiplique-se cada um por $a^m\ b^n$; como este producto exprime a somma de todos os productos em que entra $a^m\ b^n$, será o factor $(1 + \gamma)(1 + \delta)$.... o numero pedido.

Noções sóbre as Probabilidades.

23. Um acontecimento, que depende do acaso, diz-se *provavel* na razão do valor e quantidade dos casos em que póde realizar-se. Dous ou

mais acontecimentos dizem-se *igualmente possiveis* quando ha os mesmos motivos para que se realizem tanto uns como outros. *O gráo de probabilidade* de um acontecimento, avalia-se comparando o numero de casos em que póde dar-se com o numero total de todos os casos egualmente possiveis. Por isso:

A probabilidade mede-se por uma fracção, que tem por denominador a somma de todos os casos egualmente possiveis, e por numerador o numero dos casos favoraveis.

Querendo que dous dados, cujas faces tem inscriptos os numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, appresentem os numeros 5 e 2; como n'este caso ha só duas combinações que dão os dous numeros que se desejam, entre 36 egualmente possiveis: segue-se que a probabilidade é expressa por $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Se quizessemos que apparecessem dous pontos que sommassem 7, como ha então tres casos duplos favoraveis 5 e 2, 6 e 1, 4 e 3, entre os 36 egualmente possiveis, teremos por probabilidade $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. D'onde se vê, que ha 1 a apostar contra 5, em como virão numeros que deem esta somma.

Se a fracção por onde se avalia a probabilidade é $>\frac{1}{2}$ diremos, que o acontecimento que se deseja é *mais provavel*. Se a fracção é $=\frac{1}{2}$ diremos que é *incerto*, podendo indifferentemente apostar-se pró ou contra. Se a fracção é $=1$, diremos que o acontecimento é *certo*, por que n'este caso todos os acontecimentos possiveis são favoraveis. Em todos os casos a somma das probabilidades, pró e contra um acontecimento, deve dar a unidade.

Façamos algumas applicações d'estes principios. N'um baralho de m cartas, se houver p de uma qualidade designada, qual é a probabilidade de tirar m' que sejam d'esta especie? O numero dos casos possiveis é $[mCm']$, o dos casos favoraveis é $[pCm']$; logo a probabilidade é $\frac{[pCm']}{[mCm']}$. Por ex.°, n'um baralho de 52 cartas ha 13 de copas; tirando 3 cartas ao acaso, a probabilidade de saírem todas 3 de copas é $\frac{[13C3]}{[52C3]}=\frac{286}{22100}$, quasi $\frac{1}{77}$.

A roda da lotaria contém m numeros dos quaes se tiram p; um jogador comprou m'; qual é a probabilidade de lhe saírem precisamente p'? O numero total das sortes é $[m\,Cp]$; e é este o denominador que se procura. Já se vio (n.° 3) que o numero dos casos favoraveis, isto é, o numerador pedido tem por expressão

$$X = [(m - m')\,C\,(p - p')]\,[m'Cp'].$$

Na Lotaria de França $m = 90$, $p = 5$, e por conseguinte o denominador é $[90\,C5] = 43949268$. Se um jogador comprou 20 numeros, por ex.º, temos $m' = 20$; e então querendo que sáia *precisamente* um dos p' seguintes, teremos

numero	X	*probabilidade.*
$1 = p'$	$20\,[70C4]$	0,4172
$2 = p'$, ...	$20\,\frac{19}{2}\,[70C3]$	0,2367
$3 = p'$, ...	$20 . \frac{19}{2} . \frac{18}{3}\,[70C2]$	0,0626
$4 = p'$, ...	$70\,[20C4]$	0,0077
$5 = p'$, ...	$[20C5]$	0,0003.

Querendo que ao menos sáia um numero, isto é, que sáia 1, 2, 3, 4, ou 5, tome-se a somma 0,7245. Para que ao menos sáiam dous, sommem-se os resultados precedentes menos o 1.º, e a probabilidade será 0,3073. E se não quizermos numero algum, faça-se $p' = 0$, ou tome-se o complemento de 0,7245 para a unidade, e acharemos 0,2755.

24. Suppondo que dous acontecimentos A e A$'$ são produzidos respectivamente por p, p' causas; e que não se não realizam por outras q, q'; e admittindo que estes acontecimentos são independentes um do outro, podendo dar-se conjuncta ou separadamente: pergunta-se quaes as probabilidades dos differentes casos?

Para resolver esta questão, comparem-se estes dous acontecimentos aos resultados que podem provir de dous dados, um com $p + q$ faces pintadas, p de branco e q de negro; o outro com $p' + q'$ faces pintadas p' de vermelho e q' de azul. O acontecimento A será realizado quando appareça uma das p faces brancas, e não o será quando appareça uma das q faces negras. O acontecimento A$'$ terá logar quando appareça uma das p' faces vermelhas, e não o terá quando vier uma das q' faces azues.

O numero total dos casos (n.° 19) é $(p+q)(p'+q')$. Se quizermos que appareçam conjunctamente uma face negra e uma vermelha, isto é, se quizermos que tenha logar o acontecimento A' sem A; como as q faces negras, e as p' vermelhas, dão qp' combinações, será este o numero dos casos favoraveis, e a probabilidade pedida

$$\frac{qp'}{(p+q)(p'+q')}=\frac{q}{p+q}\times\frac{p'}{p'+q'}.$$

Procedendo do mesmo modo nos outros casos, achariamos, como n'este, que a expressão da probabilidade pedida é o producto das probabilidades relativas a cada um dos acontecimentos designados. Logo:

Se os acontecimentos forem independentes uns dos outros, a probabilidade de acontecerem conjunctamente é o producto de todas as probabilidades relativas a cada um em separado.

Este theorema *das probabilidades compostas*, posto que se ache aqui sómente demonstrado para o caso dos dous acontecimentos, póde por um raciocinio identico estender-se a um 3.° acontecimento A'', ou a um 3.° dado de $p''+q''$ faces; e assim por diante, justificando-se por este modo a generalidade em que o enunciámos.

Se lançando dous dados de seis faces, quizermos que appareça 4 e 1, qual é aprobabilidade do successo? Considerando sómente um dado, ha seis casos, dos quaes dous são favoraveis (4 ou 1), sendo por tanto a probabilidade simples $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; mas acontecendo esse 1.° caso, é ainda necessario que o 2.° dado apresente o outro ponto (1 ou 4), cuja probabilidade simples é $\frac{1}{6}$; será por tanto aprobabilidade procurada $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$, resultado que achariamos tambem, se comparassemos os 2 casos favoraveis com os 36 casos possiveis.

As probabilidades, á medida que se compõe, attenuam-se, por isso mesmo que resultam do producto de muitos factores <1. Se um homem tido por verdadeiro, attesta um facto que vio, póde avaluar-se em $\frac{9}{10}$ a probabilidade de não querer enganar e de não ter sido induzido a erro pelos sentidos. Mas se este homem houve o facto de uma testemunha egualmente veridica, já então a probabilidade é sómente $\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{81}{100}$, quasi $\frac{4}{5}$. Se houverem assim 20 intermediarios, a probabilidade será apenas $(\frac{9}{10})^{20}$, isto é $<\frac{1}{8}$: póde pois apostar-se 7 contra 1 em como o facto transmittido é falso, posto que todos os intermediarios sejam testemunhas egualmente verdadeiras.

Póde comparar-se esta diminuição da probabilidade com a extincção da claridade dos objectos, vistos atravez de muitos pedaços de vidro.

25. O resultado ou producto das probabilidades simples eguaes, é uma potencia desta quantidade, e por isso facilmente podemos resolver a questão seguinte: Se p causas produzem um acontecimento A, e se q o impedem, qual é a probabilidade de fazer apparecer k vezes o acontecimento A em n lances?

É claro que a probabilidade simples, em cada lance, a favor de A é $\frac{p}{p+q}$; e $\frac{q}{p+q}$ a probabilidade contra. Se o acontecimento se realiza k vezes, teremos a potencia k da primeira fracção; e se não tem logar, os outros $n-k$ lances darão a potencia $n-k$ da segunda. Da multiplicação d'estas duas potencias resulta a probabilidade composta

$$z=\frac{p^k\,q^{n-k}}{(p+q)^n},$$

a qual exprime, que, em n lances, A acontecerá precisamente k vezes, tendo fixado previamente a ordem de succesão dos acontecimentos. Sendo porém esta ordem arbitrária, deve z repetir-se tantas vezes, quantas se puderem combinar estes resultados, a saber as k vezes que tem logar o acontecimento A, com as $n-k$ em que não se realiza; o que é representado por $[nCk]$. Logo $z\times[nCk]$ é a probabilidade de que A acontecerá k vezes em n lances, sem designar aquelles em que deverá realizar-se.

Se quizermos que A aconteça n vezes pelo menos, mudaremos n'esta expressão successivemente k em k, $k+1$, $k+2$, ... até n, e sommaremos os resultados. N'este caso o denominador da probabilidade pedida é $(p+q)^n$. Para obtermos o numerador, desenvolveremos este binomio, e pararemos no termo em que entra p^k, o qual se tomará com o coefficiente, ou sem elle, conforme se quizer attender, ou não, ás k ordens em que A se realiza em k lances.

E se quizermos, que A não aconteça menos de k vezes, nem mais de k' vezes, em n lances, sommaremos todos os termos em que p tem os expoentes k, $k+1$, ... k'.

Por ex.°, se um dado de 6 faces tiver duas que sejam favoraveis a um jogador, e for necessario para que este ganhe, que em 4 lances deite 3 vezes uma ou outra (ou que em um só lance de 4 dados 3 faces lhe sejam favoraveis), pergunta-se qual é a probabilidade do ganho? N'este caso, $p=2$, $q=4$, e $(p+q)^4=6^4=1296$. Temos pois

$p^4=16$ lances que apresentam 4 vezes uma das faces favoraveis.
$+4p^3q=128$ 3
$+6p^2q^2=384$ 2
$+4pq^3=512$ 1
$+\quad q^4=256$ 0

Somma $=1296=(p+q)^4$, denominador das probabilidades.

Logo a probabilidade de saír *precisamente* 3 vezes um dos casos favoraveis é $\frac{128}{1296}=\frac{8}{81}$. E se devem acontecer em uma ordem designada, divida-se pelo coefficiente 4, e virá $\frac{2}{81}$. Em fim a somma dos dous primeiros numeros dá $\frac{144}{1296}=\frac{1}{9}$, que é a probabilidade de apparecerem pelo menos 3 vezes as faces favoraveis.

Qual é o *partido* de dois jogadores M e N de egual fôrça, faltando 6 pontos a M e 4 a N para ganhar o jogo?

A somma dos pontos é 10; e por isso elevando $p+q$ á 9.ª potencia, reservem-se para M os 4 primeiros termos (em que o menor expoente de p é 6), e guardem-se para N os outros 6 termos; faça-se depois $p=q=1$. Acharemos os dois resultados 130 e 382, cuja somma total é 512. O partido de M, ou a probabilidade que elle tem de ganhar é $\frac{130}{512}$; e o de N é $\frac{382}{512}$. Sendo necessario acabar com a partida sem a levar ao fim, os abonos deveriam ser repartidos entre M e N na razão de 130 para 382, quasi na razão de 1 para 3; e é tambem este o preço por que M e N deveriam vender a sua pertenção aos abonos, no caso de transmittirem os seus direitos.

Quando a fôrça dos jogadores é, por ex.º, como 3 para 2, isto é quando M ganha a N ordinariamente 3 partidas sôbre 5, ou quando M dá 1 ponto de partido para egualar as fôrças, o calculo é o mesmo, fazendo $p=3$, $q=2$. N'este caso acha-se que o partido de M é para o de N proximamente :: 14:15.

26. Succede muitas vezes que as causas de um acontecimento são tão occultas, ou se modificam de uma maneira tão variada, que é impossivel destacal-as e calcular-lhes o numero: n'este caso são inapplicaveis os principios precedentes. Consulta-se então a experiencia, para verificar se os acontecimentos são sujeitos a um curso periodico, do qual se possa conjecturar com verosimilhança, que a causa desconhecida, que faz com que elles appareçam tantas vezes debaixo de uma ordem regular, continuando a obrar

sobre elles, os reproduzirá na mesma ordem. O numero d'estes periodos substitue-se ao das causas nos calculos das probabilidades. Se um dado, lançado dez vezes seguidas, appresentou 9 vezes a face a, póde conjecturar-se, que ha na acção que o lança, na sua figura ou substancia, alguma causa occulta, que produz a volta da face a as 9 vezes. Se 100 provas appresentarem tambem 90 vezes esta face a, a probabilidade $\frac{9}{10}$ favoravel a esta volta adquire uma grande fôrça, que se augmenta á medida que as provas multiplicadas confirmam esta supposição; de sorte que se fosse possivel fazer um numero infinito de provas, e todas concordassem em dar 9 vezes sobre 10 a face a, concluiriamos a *certeza* da hypothese.

É d'esta maneira que a experiencia comprovou os factos seguintes, cujas causas é impossivel assignar.

1.° O numero de casamentos contrahidos em um paiz, durante um tempo determinado, é para o numero de nascimentos e para a população proximamente :: 3:14:396.

2.° A 15 nascimentos do sexo feminino correspondem 16 do masculino.

3.° A população, os nascimentos, os obitos, e os casamentos são :: 2037615 : 71896 : 67700 : 15345, por anno; e approximadamente, os nascimentos são $\frac{1}{28}$, os obitos $\frac{1}{30}$, e os casamentos $\frac{1}{132}$ da população. O excesso $\frac{1}{420}$ dos nascimentos sôbre os obitos é o accrescimo annuo da população.

4.° A duração das gerações de pai a filho é de 33 annos.

5.° O numero dos mortos do sexo masculino é para o do sexo feminino :: 24:23; e n'um paiz qualquer o numero dos vivos do 1.° sexo é para os do 2.° :: 33:29.

6.° Os obitos do sexo masculino são $\frac{1}{58}$ e os do fiminino $\frac{1}{61}$ da população. Em Pariz, a totalidade dos obitos chega só a $\frac{1}{32}$ do numero dos habitantes; estes obitos elevam-se annualmente a 27585 termo medio, e os nascimentos a 32324.

7.° A ametade de toda a população tem menos de 25 annos, e todos os 25 annos se renova uma ametade.

8.° Em França o numero da população é para o numero dos casamentos :: 127,63:1. A duração da vida media é actualmente de $36\frac{2}{3}$ annos.

É debaixo d'estas considerações que se estabelecem as Taboas de população e de mortalidade: póde consultar-se a este respeito o *Annuaire du Bureau des Longitudes.*

Nada mais accrescentaremos sobre a doutrina de probabilidades, que é tão extensa, que faz objecto de Tractados especiaes.

Vej. os de Laplace, Lacroix, Condorcet, Duvillard, Poisson etc.

II. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.

Composição das equações.

27. DEpois de transposta e reduzida, *toda a equação a uma só incognita tem a fórma*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \ldots\ldots\ldots (1);$$

na qual x é a incognita, n um inteiro, e A_0, A_1, A_2, ... A_n numeros conhecidos positivos, negativos ou zero.

Chama-se *Raiz* qualquer quantidade a, que substituida por x reduz o polynomio (1) a zero, ou que satisfaz á condição

$$A_0a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}a + A_n = 0.$$

Tome-se arbitrariamente um numero a, e divida-se o polynomio (1) por $x - a$, até que se obtenha um resto R que não contenha x, o que sempre é possivel, por ser o divisor do 1.° grão. Multiplicando o quociente, que será da fórma

$$A_0x^{n-1} + A'_1x^{n-2} + \ldots\ldots A'_{n-1},$$

por $x - a$; e ajunctando R ao producto: deverá reproduzir-se *identicamente* o dividendo (1).

Fazendo o cálculo, e designando (*) a expressão (1) por $f(x)$, vem

$$fx = A_0x^n + \left.\begin{matrix}A'_1\\ -aA_0\end{matrix}\right| x^{n-1} + \left.\begin{matrix}A'_2\\ -aA'_1\end{matrix}\right| x^{n-2} + \left.\begin{matrix}A'_3\\ -aA'_2\end{matrix}\right| x^{n-3} \ldots + \left.\begin{matrix}A'_{n-1}\\ -aA'_{n-2}\end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix}R\\ -aA'_{n-1}\end{matrix}\right. .$$

E como n'esta expressão devem achar-se todos os termos do polynomio $f(x)$, vê-se que o factor A_1 de x^{n-1} no polynomio, deve ser egual ao factor $A'_1 - aA_0$ de x^{n-1} no cálculo que effectuámos. Pela mesma razão deverão ser

$$A_2 = A'_2 - aA'_1,\ A_3 = A'_3 - aA'_2,\ \ldots.\ A_n = R - aA'_{n-1}.$$

Transpondo os termos negativos, temos

$$A'_1 = A_1 + aA_0,\ A'_2 = A_2 + aA'_1,\ \ldots R = A_n + aA'_{n-1} \ldots\ldots \quad (2)$$

Por meio d'estas equações podemos deduzir uns dos outros, sucessivamente, os coefficientes A'_1, A'_2, A'_3, ... e o resto R; e da sua fórma se deduz a seguinte lei:

Cada um dos coefficientes, e o resto, é formado do coefficiente da mesma ordem em f(x), *mais do producto do coefficiente precedente multiplicado por* a.

(*) Toda a expressão analytica em que entra x chama-se funcção de x. *Funcções algebricas* são aquellas que não exigem operações de algebra senão até ás extracções de raizes inclusivamente; as *funcções transcendentes* comprehendem logarithmos, exponenciaes, arcos de circulo, senos, cosenos.. Não se exprimem, debaixo da funcção, senão aquellas quantidades das quaes depende a solução dos problemas que nos propomos resolver. Assim $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$.. designam fórmulas em que a letra x está combinada de differentes maneiras; $f(x)$ e $f(z)$, com o mesmo sinal f, indicam expressões nas quaes x e z se acham combinadas da mesma maneira, de sorte que se tornam identicas quando se muda x em z. Por ex., $f(\sqrt{z}+a)$ significa que existe uma funcção $f(x)$ na qual por x se substituio $\sqrt{z}+a$. Do mesmo modo $F(x^2+y^2)$ indica que se substituio z por x^2+y^2 em uma funcção $F(z)$.

Querendo, por ex.°, dividir $4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11$ por $x-2$, acharemos o quociente $4x^4-2x^3+2x^2-3x+3$, e o resto -5.

Como effeito, tendo escripto o 1.° termo do quociente $4x^4$, acharemos, segundo a lei indicada,

para coefficiente de x^3 ...... $-10+4\times2=-2$

............de x^2....... $6-2\times2=+2$

............de x....... $-7+2\times2=-3$

para coefficiente do ultimo termo $9-3\times2=3$

para resto.................... $-11+3\times2=-5$.

Podemos obter tambem os coefficientes $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ e o resto R, eliminando-os das equações (2), o que dá

$$A'_1=A_0a+A_1,\ A'_2=A_0a^2+A_1a+A_2,\ A'_3=A_0a^3+A_1a^2+A_2a+A_3, \ldots$$

$$R=A_0a^n+A_1a^{n-1}+A_2a^{n-2}+\ldots\ldots A_{n-1}a+A_n=f(a).$$

Da lei que seguem estes coefficientes, e o resto, deduz-se a regra seguinte:

Para formar um coefficiente qualquer da ordem i *no quociente: tomem-se os* i *primeiros termos de* f(x); *substituam-se n'elles* x *por* a; *e supprimam-se as potencias de* a *communs a todos os termos. Para formar o resto mude-se* x *em* a *no polynomio proposto, que se tornará* f(a).

Da expressão precedente de R tiraremos as seguintes consequencias:

1.° *Se for* a *raiz da equação* (1), *sendo então* f(a) = R = 0, *será* fx *divisivel por* x — a.

2.° *Reciprocamente, se* f(x) *for divisivel por* x — a, *como a divisão se faz exactamente, será* R = 0, *e por conseguinte a substituição de* a *reduzirá* f(x) *a zero, isto é, será a raiz da equação.*

28. Supponhamos por agora demonstrado, *que toda a equação a uma incognita tem uma raiz pelo menos*, objecto de que adiante nos occuparemos; e na equação (1) façamos $A_0=1$, o que nada tira á generalidade da

mesma equação, por isso que a podiamos ter divido toda por este coefficiente de x^n.

Se a é raiz da equação temos identicamente

$$fx=(x-a)\,Q,$$

sendo Q um polynomio do grão x^{n-1}.

Se b é raiz da equação $Q=0$, $x-b$ deve dividir Q, e será $Q=(x-b)\,Q'$, e

$$fx=(x-a)\,(x-b)\,Q'.$$

Se c é a raiz da equação $Q'=0$, será do mesmo modo $Q'=(x-c)\,Q''$, e

$$fx=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,Q''.$$

Como os grãos dos quocientes successivos Q, Q', Q'', ... se vão abaixando successivamente por cada factor binomio que se põe em evidencia, é claro que feitas $n-1$ divisões, devemos chegar a um quociente $x-l$ do 1.° grão. Admittindo pois que toda a equação tem uma raiz, podemos tirar a conclusão seguinte:

Todo o polynomio f(x) *do grão* n *é formado do producto de* n *factores binomios do* 1.° *grão; e teremos sempre*

$$fx=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,\ldots\ldots\,(x-l).$$

Esta equação é identica, e a dissimilhança dos dous membros desappareceria, logo que se effectuassem as multiplicações indicadas. E como $f(x)$ se torna nullo, quando por x se substitue qualquer dos numeros, a, b, c, ... concluiremos tambem, que:

Toda a equação $f(x)=0$ *tem* n *raizes, que são, com signaes contrarios, os segundos termos dor seus* n *factores binomios.*

Passemos agora a mostrar, que o *polynomio* $f(x)$ *não póde ser de-*

composto em outros factores $(x - a')(x - b') \ldots (x - l')$, *sendo as quantidades* $a', b', \ldots l'$, *todas ou em parte, differentes de* $a, b, \ldots l$.

E para isto mostremos primeiro, que *se o binomio* $x - h$ *dividir exactamente o producto de dous polynomios* A *e* B *racionaes e inteiros* (*) *em ordem a* x, *um d'estes polynomios, pelo menos, será divisivel por* $x - h$. Supponhamos com effeito, que dividindo A e B por $x - h$, resultam os quocientes A' e B', e os restos numericos α e β, sendo

$$A = A'(x - h) + \alpha, \quad B = B'(x - h) + \beta.$$

Formando o producto AB, acha-se que $x - h$ é factor de todos o seus termos, menos do producto numerico $\alpha\beta$, o qual não póde ser divisivel por $x - h$; e por conseguinte AB tambem o não poderá ser, em quanto ou α ou β não forem nullos.

Posto isto, sendo $fx = (x - a)Q$, se suppuzermos que $x - a'$ divide $f(x)$, será forçoso que seja Q divisivel por $x - a'$ visto que $x - a$ o não póde ser. O mesmo diremos de Q' em $Q = (x - b)Q'$; e assim por diante até ao último factor $x - l$, o qual não sendo divisivel por $x - a'$, mostra que $x - a'$ não póde ser divisor de $f(x)$. O mesmo se mostra a respeito de $x - b'$, $x - c'$, ... Logo:

1.° *Qualquer polynomio* $f(x)$, *da ordem* n, *sómente se póde resolver em um systema unico de* n *factores binomios do primeiro grão, e a equação* $f(x) = 0$ *admitte sómente* n *raizes.*

2.° Toda a fracção $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, que se torna $\dfrac{0}{0}$ quando se faz $x = a$, tem $x - a$, ou uma potencia de $x = a$, por factor commum dos seus dous termos $f(x)$, φx. Para se obter o valor da fracção, supprimam-se primeiro os factores communs $x - a$, e faça-se depois $x = a$; d'onde resultará *um valor finito, nullo, ou infinito*, confórme $x - a$ estiver elevado á mesma potencia nos dous termos, ou a potencia mais elevada no numerador ou no denominador.

3.° Se as duas equações $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ tiverem uma mesma raiz a, $x - a$ será o seu factor commum. Deste modo

$$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0, \quad x^3 - 37x - 84 = 0,$$

(*) Entendemos aqui por *polynomios racionaes e inteiros*, *aquelles em cuja expressão não entram as incognitas em nenhum denominador, nem debaixo de radical algum.*

tem $x+3$ por factor, o qual se obtem pelo methodo do divisor commum. A coexistencia d'estas duas equações seria absurda, se não existisse um factor commum entre ellas. E se este factor fosse do 2.° gráo, as equações teriam duas raizes, que seriam as unicas que satisfariam ao problema, etc.

4.° Empregando a divisão, podemos abaixar no gráo n de uma equação um numero de unidades egual ao das raizes conhecidas, por isso que a indagação das raizes se reduz á dos factores binomios. Os factores do 2.° gráo são em numero $\frac{1}{2}n(n-1)$ (n.° 1), porque resultam das combinações 2 a 2 dos do 1.°: os do 3.° gráo são em numero $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$, etc.

29. Como a equação proposta

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots A_{n-1}\,x + A_n = 0$$

é o producto de $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)$, segue-se do que se vio (*Alg. El.* n.° 104, V) que:

1.° *O coefficiente* A_1 *do* 2.° *termo é a somma de todas as raizes* a, b, c, ... l *tomadas com signaes contrarios.*

2.° *O coefficiente* A_2 *do* 3.° *termo é a somma dos productos* 2 *a* 2 *destas raizes.*

3.° *O coefficiente* A_3 *do* 4.° *termo é a somma dos productos* 3 *a* 3 *tomados com signaes contrarios* .... *E assim por diante sendo o coefficiente* A_i *do termo* $i+1$ *a somma dos productos* i *a* i *tomados com o mesmo ou differente signal, segundo é* i *par ou impar.*

4.° Finalmente, *o ultimo termo* A_n *é o producto de todas as raizes, quando* n *é par; e este producto com o signal contrario, quando* n *é impar.*

Transformação das Equações.

30. Com a simples mudança de letras nos coefficientes, a equação (1) póde escrever-se

$$f(x) = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots + tx + u = 0 \ldots\ldots (3)$$

1.° Se quizermos transformar esta equação n'outra, cujas raizes y sejam h vezes maiores que x, façamos

$$y = hx, \text{ ou } x = \frac{y}{h};$$

e virá

$$f\left(\frac{y}{h}\right) = \frac{ky^n}{h^n} + \frac{py^{n-1}}{h^{n-1}} + \frac{qy^{n-2}}{h^{n-2}} + \ldots\ldots \frac{ty}{h} + u = 0;$$

ou, multiplicando por h^n,

$$ky^n + phy^{n-1} + qh^2y^{n-2} + \ldots\ldots th^{n-1}y + uh^n = 0.$$

Esta última equação deduz-se muito facilmente de (3), mudando x em y, e multiplicando os termos successivos por h^0, h^1, h^2, ... h^n.

É facil de verificar, que por este processo as raizes da equação $f\left(\frac{y}{h}\right) = 0$ são h vezes maiores que as da proposta (3). Com effeito, suppondo que α é uma raiz d'esta última equação, teremos $f(\alpha) = 0$; mas o 1.° membro da transformada reduz-se tambem a $f(\alpha)$, quando se substitue n'ella $h\alpha$ por y; logo $h\alpha$ é uma raiz da transformada.

2.° Se a equação proposta (3) tiver coefficientes fraccionarios, podemos sempre desembaraçal-a d'elles por meio da reducção ao mesmo denominador. Depois suppondo $h = k$, isto é, fazendo $x = \frac{y}{k}$, a transformada é divisivel por k, e torna-se em

$$y^n + py^{n-1} + qky^{n-2} \ldots\ldots uk^{n-1} = 0;$$

logo: *para desembaraçar uma equação dos coefficientes fracionarios reduza-se ao mesmo denominador; e querendo desembaraçar tambem o 1.° termo do seu coefficiente* k, *faça-se* $x = \frac{y}{k}$, o que equival a supprimir k no 1.° termo de (3), e a multiplicar successivamente, a partir do 2.° termo, os coefficientes por k^0, k^1, k^2, ... k^{n-1}.

Seja, por ex.°, a equação

$$x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{5}{6}x^2 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{7}{2} = 0\,;$$

multiplicando-a por 12, vem

$$12x^4 - 8x^3 + 10^2 - 9x - 42 = 0\,;$$

fazendo depois $x = \frac{1}{12}y$, ou multiplicando os coefficientes 10, 9, e 42 respectivamente por 12, 12^2, 12^3, vem

$$y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0.$$

3.° *Se quizermos transformar a equação* (3) *n'outra cujas raizes* y *sejam* h *vezes menores* é facil de ver, pelo que fica dito, que *devemos pôr*

$$x = hy,$$

o que equival a mudar na proposta x em y, e dividir successivamente os coefficientes por h^0, h^1, h^2, ... h^n. Este processo póde dar logar á á introducção de coefficientes fraccionarios.

Fazendo $x = 12y$ na equação $x^3 - 144x = 10368$, resulta a equação mais simples $y^3 - y = 6$ e com as raizes 12 vezes menores.

31. *Se quizermos uma equação, cujas raizes tenham de menos a quantidade* i *que as da equação* (3), *faça-se* $x = i + y$.

Pondo $i + y$ em vez de x em todos os termos de $f(x)$, a transformada de (3) será

$$k(i+y)^n + p(i+y)^{n-1} + q(i+y)^{n-2} + \ldots\ldots\ t(i+y) + u = 0.$$

Sem ser necessario effectuar a desenvolução dos binomios que entram nos diversos termos, resulta da lei conhecida (n.° 8) que seguem os termos da fórmula de Newton, que se esta equação se ordenar relativamente ás potencias crescentes de y, será da fórma

$$A + By + Cy^2 + \ldots\ldots ky^n = 0,$$

equação na qual é:

$A = fi$, ou o polynomio, quando n'elle se muda x em i;

$B = \frac{f'i}{1}$, designando por $f'i$ o resultado que se obtém multiplicando cada termo de A pelo expoente de i, e diminuindo este expoente d'uma unidade; resultado a que se dá o nome de DERIVADA de A;

$C = \frac{f''i}{1.2}$, designando por $f''i$ a derivada de B;

$D = \frac{f'''i}{1.2.3}$, designando por $f'''i$ a derivada de C;

E assim por diante.

Por este modo podemos compor os coefficientes da transformada, sabendo-os deduzir uns dos outros, isto é,

$$fi + yf'i + \frac{y^2}{2}f''i + \frac{y^3}{2.3}f'''i + \ldots + ky^n = 0,$$

$$fi = ki^n + pi^{n-1} + qi^{n-2} + \ldots\ldots + ti + u,$$

$$f'i = nki^{n-1} + (n-1)pi^{n-2} + (n-2)qi^{n-3} \ldots + t,$$

$$f''i = n(n-1)ki^{n-2} + (n-1)(n-2)pi^{n-3} + \ldots + \text{etc.}$$

Querendo, por ex.°, fazer $x=2+y$ em

$$fx=x^3-5x^2+x+7=0,$$

teremos, por ser $i=2$,

$$fi=i^3-5i^2+i+7=-3,$$

$$f'i=3i^2-10i+1\,..=-7,$$

$$f''i=6i-10\,.....=\quad 2;$$

e por conseguinte será a transformada

$$-3-7y+y^2+y^3=0.$$

Se, pelo contrário, quizermos, que todas as raizes da transformada tenham de mais a quantidade i *que as da proposta, faça-se* $x=y-i$.

O cálculo n'este caso é como o precedente, só com a differença de se mudar i em $-i$, ou de tomar com signal contrário as potencias impares de i.

Do que fica dicto conclue-se, que se n'uma funcção $\varphi(x)$ racional, algebrica e inteira, se mudar x em $x\pm h$, será

$$\varphi(x\pm h)=\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)\pm h\varphi'(x)+\dfrac{h^2}{1.2}\varphi''(x)\\ \pm\dfrac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\,..\,\dfrac{h^m}{1.2.3..\,m}\varphi^m(x)\end{array}\right\}\,......\,(A)$$

Esta fórmula descoberta pelo Geometra inglez *Taylor*, e que adiante demonstraremos para uma funcção qualquer de x, é conhecida pelo denominação de *fórmula de Taylor* (*).

32. O processo da pag. 51. é muito commodo para achar os coefficientes fi, $f'i$, $f''i$, ... da transformada. Com effeito, divida-se $f(x)$ por $x-i$, e sejam T o quociente e t o resto d'esta divisão. Divida-se de-

---

(*) Vê-se na equação (A), que se ordenarmos qualquer funcção $\varphi(x \pm h)$ em ordem ás potencias crescentes de h, será, n'este desenvolvimento, o coefficiente da primeira potencia de h a derivada da funcção φx.

Por meio d'esta consideração se demonstra muito facilmente o seguinte theorema, de que ainda na Algebra superior teremos de fazer uso.

A derivada de um producto de muitos factores é egual á somma algebrica de todos os productos, que se formam multiplicando a derivada de cada factor pelo producto dos outros factores.

Sejam U, V, X, Y, ... funcções de x; se em cada um d'elles mudarmos x em $x \pm h$, tornar-se-hão respectivamente em

$$U \pm U'h + U''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$V \pm V'h + V''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$X \pm X'h + X''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$Y \pm Y'h + Y''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

Logo, para obter a derivada do producto UVXY...., é necessario formar o producto d'estas quantidades, e a derivada será o coefficiente da primeira potencia de h n'este producto. Ora é evidente que para obter este coefficiente, se deve multiplicar o coefficiente de h em cada um d'estes factores pelos termos dos outros em que não entra h, e sommar depois algebricamente os resultados. A derivada do producto UVXY ...... será pois

$$\pm U'VXY \pm V'UXY \ldots \pm X'UVY \ldots \pm Y'UVX \ldots \pm \ldots\ldots,$$

como se pertendia demonstrar.

pois T por $x-i$, e sejam U o quociente e u o resto. Divida-se U por $x-i$, e sejam V o quociente e v o resto. E assim por diante. Teremos

$$fx=\mathrm{T}(x-i)+t\,,\ \mathrm{T}=\mathrm{U}(x-i)+u\,,\ \mathrm{U}=\mathrm{V}(x-i)+v\,,\ \ldots\ldots$$

Eliminando successivamente T, U, V, ... acha-se

$$fx=t+u(x-i)+v(x-i)^2+\ldots\ k(x-i)^n\,;$$

onde se vê, que os coefficientes da tranformada na qual é $y=x-i$, são os restos t, u, v.... das divisões successivas por $x-i$, sendo o último coefficiente k o último quociente. E como pelo processo da pag. 51. estes restos se obtém facilmente, o cálculo toma a fórma do ex.° seguinte, no qual se suppoz $y=x-3$.

$$\text{Proposta}\ldots\ldots\ 2x^4-7x^3-12x^2+4x+129=0$$

$$\text{Factor }3\ldots\ \begin{cases}2-1\quad-15\quad-41+6\\ 2+5\qquad 0\quad-41\\ 2+11\quad+33\\ 2+17\end{cases}$$

$$\text{Transformada } 2y^4+17y^3+33y^2-41y+6=0.$$

Os quatro 1.os numeros da 1.a linha 2, —1, —15, —41, são os coefficientes successivos do 1.° quociente T. Os tres 1.os da 2.a linha, são os coefficientes do 2.° quociente U. Os dous 1.os da 3.a são os de V. etc. Cada linha tem um termo de menos que a precedente. O último termo de cada linha é o resto da divisão por $x-3$; assim $t=6$, $u=-41$, $v=33$, $w=17$. O último quociente 2 é $=k$. Apparecem por este modo os coefficientes pedidos em ordem inversa. (*)

(*) Quando i é uma fracção $\frac{h}{l}$, torna-se mais simples o cálculo do modo que passâmos a ver. Supponhâmos

$$x=\frac{x'}{l}\,,\ x'=x''+h\,,\ x''=ly\,:$$

Quando se busca a transformada em $y=x-1$, sendo então $i=1$, reduz-se o cálculo a simples addicções, segundo a lei da pag. 30. Eis aqui dous exemplos:

---

eliminando d'estas equações x' e x'' acha-se

$$x=y+\frac{h}{l}.$$

Logo podemos compor a transformada em ordem a y, satisfazendo successivamente ás tres equações, isto é: tornando, pela 1.ª, as raizes l vezes maiores (n.º 30. 1.º); diminuindo-as pela 2.ª de h; e finalmente tornando, pela 3.ª, as raizes l vezes menores (n.º 30, 3.º)

No seguinte exemplo, em que se busca a transformada em $x-\frac{2}{3}$ correspondente á equação

$$2x^4-5x^3+7x^2-4x+2=0,$$

se indica o processo d'este cálculo.

Coefficientes .... $2-5+7-4+2.$

Potencias do denominador .... $1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81.$

Transformada em x' .... $2x'^4-15x'^3+63x'^2-108x'+162.$

$$\text{Factor } 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 2-11+41-26+110. \\ 2-7+27+28 \\ 2-3+21 \\ 2+1 \end{cases}$$

Transformada em $x''=x-2$ ...... $2x''^4+x''^3+21x''^2+28x''+110.$

Transformada em $y=x-\frac{2}{3}$ $\quad 2y^4+\frac{1}{3}y^3+\frac{21}{9}y^2+\frac{28}{27}y+\frac{110}{81}$

$$x^3-12x^2+41x-29=0 \qquad x^4-6x^3+7x^2-7x+7=0$$

$$\begin{array}{llll} 1 & -11 & +30 & +1 \\ 1 & -10 & +20 & \\ \hline 1 & -9 & & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} 1 & -5 & +2 & -5+2 \\ 1 & -4 & -2 & -7 \\ \hline 1 & -3 & -5 & \end{array}$$

$$y^3-9y^2+20y+1=0 \qquad y^4-2y^3-5y^2-7y+2=0.$$

33. A transformação da proposta (3) em $x=y+i$, sendo i uma arbitrária, póde servir-nos para desembaraçar a equação de alguns dos seus termos, determinando a arbitrária n'este sentido. Assim:

1.° *Para desembaraçar a equação do seu 2.° termo*, tendo achado a transformada

$$\left.\begin{array}{l|l|l} ky^n+nik & y^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)i^2k & y^{n-2}\ldots+ki^n \;\;+u \\ \quad+p & \quad+\;\;(n-1)ip & \qquad\qquad+pi^{n-1} \\ & \qquad\qquad\quad+q & \qquad\qquad+\ldots\ldots \end{array}\right\}=0,$$

façamos depois
$$nik+p=0;$$

e resultará
$$i=-\frac{p}{nk},\; x=y-\frac{p}{nk}.$$

D'onde se deduz a regra seguinte: *mude-se* x *em* y, *menos o coefficiente* p *do* 2.° *termo, dividido pelo producto do coefficiente* k *do* 1.° *termo*

Emprega-se principalmente este cálculo, quando l é 10, ou alguma das suas potencias. Assim, querendo achar a transformada em $y=x-0,2$ na equação de cima, teremos

Productos dos coefficientes pelas potencias de 10, $2-50+700-4000+20000$

$$\text{Factores } 2\ldots\ldots \begin{cases} 2-46+608-2784+14432 \\ 2-42+524-1736 \\ 2-38+448 \end{cases}$$

Transformada em $x'-2$ .... $2-34+448-1736+14432$

Transformada em $x'-0,2$..... $2y^4-3,4y^3+4,48y^2-1,736y+1,4432=0.$

pelo grão da equação, bem entendido que p e k devem entrar com os seus signaes respectivos. (*)

Abbrevia-se muito o cálculo, elevando á potencia n a expressão $x+\frac{p}{nk}=y$, desenvolvendo o 1.° membro, e multiplicando por k. Por este modo obtem-se o valor dos dois 1.^{os} termos da proposta kx^n+px^{n-1}, o qual substituido n'ella, faz com que os termos, em que entra x sejam de ordem menos elevada, tornando-se depois mais facil a transformação.

Por ex.°, na equação $x^3-6x^2+4x-7=0$, pondo, segundo a regra, $x-2=y$, e elevando esta expressão ao cubo, vem

$$x^3-6x^2=y^3-12x+8,$$

e substituindo na proposta, vem

$$y^3-8x+1=0, \text{ ou } y^3-8y-15=0.$$

(*) A condição que faz desaparecer o 2.° termo, equival á de tornar nulla a somma das raizes (n.° 29., 1.°), d'onde podêmos concluir que pela regra dada se augmentam todas as raizes com uma quantidade tal, que a somma das suas partes negativas se torna egual á das positivas.

Com effeito, mudar x em $y-\frac{p}{nk}$, equival a augmentar as raizes $a, b, c, \ldots l$ da primitiva da quantidade $\frac{p}{nk}$, sendo assim as raizes da transformada

$$a+\frac{p}{nk},\ b+\frac{p}{nk}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, +\frac{p}{nk}.$$

Sommando estas raizes, e advertindo, que é

$$a+b+c+\ldots+l=-\frac{p}{k},$$

vem com effeito

$$a+b+c+\ldots\ldots l+\frac{np}{nk}=-\frac{p}{k}+\frac{p}{k}=0.$$

2.° *Para fazer desapparecer ao mesmo tempo o 2.° termo da equação* (3) *e o coefficiente* k *do* 1.° *termo, é facil de ver, que deve fazer-se*

$$x = \frac{y-p}{nk}. \; (*)$$

(*) Para desembaraçar do 2.° termo, deve fazer-se (1.°)

$$x = z - \frac{p}{nk};$$

e depois, para desembaraçar do coefficiente k, podemos fazer (30, 3.°)

$$z = \frac{y}{nk};$$

la por onde se vê que satisfaz ambas as condições a hypothese unica

$$x = \frac{y}{nk} - \frac{p}{nk} = \frac{y-p}{nk}.$$

Com effeito fazendo na equação (3) $x = z + i$, resulta a transformada

$$kz^n + (nik + p)z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + ki^n = 0,$$

cujo 2.° termo se anniquila pela hypothese

$$i = -\frac{p}{nk};$$

en e fica, não attendo aos signaes,

$$kz^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{p^n}{k^{n-1}\,n^n} = 0.$$

en Reduzindo ao mesmo dominador, vem

$$k^n n^n z^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0;$$

e desembaraçando do coefficiente do 1.° termo pela hypothese $z = \frac{y}{nk}$, resulta em fim a transformada sem o 2.° termo e sem o coefficiente do 1.°

3.° *Para fazer desapparecer o 3.° termo da equação é necessario pôr*

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)i^2k+(n-1)ip+q=0.$$

Desta equação do 2.° gráo deduzem-se, em geral, dous valores para i; e por conseguinte póde-se fazer desapparecer o 3.° termo por duas substituições de x differentes.

4.° *Para fazer desapparecer o 4.°, 5.°, 6.° .... termos, é necessario resolver uma equação do 3.°, 4.°, 5.° .... gráos.*

5.° *Finalmente, para fazer desapparecer o último termo, é necessario fazer*

$$ki^n+pi^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+u=0:$$

mas isto equival a resolver a equação proposta; e com effeito, como nesse caso a transformada deve ter uma raiz nulla $y=0$, é então $x=i$. (*)

34. Usam-se muitas vezes as transformações seguintes:

1.° Fazer $x=-y$. *Os termos em que entram potencias impares mudam de signal; as raizes positivas tornam-se negativas, e reciprocamente.*

2.° Suppor $x=\dfrac{1}{y}$. *As raizes tornam-se reciprocas; as maiores de* x *correspondem ás menores de* y, *e as menores de* x *ás maiores de* y. Como os factores x, x^2, x^3, .. são substituidos pelos divisores y, y^2, y^3, . ., se multiplicarmos a equação por y^n, aquelles factores serão substituidos por y^{n-1}, y^{n-2}, ...; e ella tornar-se-ha, invertendo os termos, em

$$uy^n+ty^{n-1}+\ldots\ldots+qy^2+py+k=0,$$

ou, dividindo pelo último termo u da proposta,

(*) Cumpre notar, que não é possivel por transformações successivas, fazer desaparecer primeiro um termo, depois outro, e assim por diante: porque cada uma destas operações faria tornar a apparecer o termo que precedentemente se annulára. Com effeito, se na equação

$$x^n+qx^{n-2}+\ldots=0;$$

$$y^n + \frac{t}{u}y^{n-1} + \ldots . \frac{q}{u}y^2 + \frac{p}{u}y + \frac{k}{u} = 0.$$

35. Em geral, *transformar uma equação* $fx = 0$, reduz-se a compor outra $F(y) = 0$, cujas raizes tenham com as de x uma relação dada por uma equação entre x e y, ou $\varphi(x, y) = 0$. A difficuldade do problema consiste toda em saber eliminar x d'esta última equação, por meio da proposta, problema de que adiante nos occuparemos.

Limites das raizes.

36. *Chama-se* limite superior das raizes *da equação* $f(x) = 0$ *uma quantidade qualquer maior que a maior d'ellas ;* e limite inferior *qualquer quantidade menor que a menor d'ellas.*

Quando o 1.° termo kx^n de fx tiver o signal positivo, *todo o numero* l *que, substituido por* x, *em* fx, *der um resultado positivo, será limite superior, quando qualquer numero*$>l$ *estiver no mesmo caso* : por que então nenhum valor$>l$ resolve a equação.

A indagação dos limites, como veremos, é uma questão muito interessante para a resolução das equações, e por isso começaremos por indicar os seguintes methodos para achar o limite superior.

1.° METHODO. Se fx não tiver termos negativos, será zero um limite superior das suas raizes, por que qualquer valor positivo, que se substitua por x, não poderá reduzir fx a zero, e por conseguinte esta expressão não terá raizes positivas.

---

que já se acha desembaraçada do 2.° termo, fizermos $x = y + i$, virá

$$(y+i)^n + q(y+i)^{n-2} + \ldots = 0;$$

ou, desenvolvendo,

$$y^n + niy^{n-1} + [\tfrac{1}{2}n(n-1)i^2 + q]y^{n+2} + \text{etc.} = 0;$$

onde se vê, que o valor de i, que faria desapparecer o termo com y^{n-2}, será differente de zero, e que por conseguinte tornaria a apparecer o termo com y^{n-1}.

Se houver termos positivos e negativos, advertiremos que sendo, como é sabido, quando i é numero inteiro e positivo,

$$\frac{x^i-1}{x-1}=x^{i-1}+x^{i-2}+x^{i-3}+\ldots\ldots+x+1,$$

será

$$x^i=(x-1)x^{i-1}+(x-1)x^{i-2}+(x-1)x^{i-3}\ldots\ldots+(x-1)+1.$$

Applicando este desenvolvimento a todos os termos positivos de

$$fx=kx^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots u,$$

e suppondo, como é sempre permittido, que kx^n é positivo, temos

$$\begin{array}{l|l|l|l}
k(x-1)x^{n-1}\begin{array}{l}+k\\+p\end{array} & (x-1)x^{n-2}\begin{array}{l}+k\\+p\\+q\end{array} & (x-1)x^{n-3}\ldots\begin{array}{l}+k\\+p\\+q\\+\text{etc.}\end{array} & (x-1)\begin{array}{l}+k\\+p\\+q\\+\text{etc.}\end{array}
\end{array}$$

Aos termos negativos conservaremos a sua fórma, e assental-os-hemos nas columnas em que x se acha elevado ao mesmo expoente. Assim um termo $-sx^h$ ficará na columna $(x-1)x^h$; e x^h terá por coefficiente

$$(k+p+q\ldots\ldots)(x-1)-s,$$

sendo o coefficiente de $(x-1)$ a somma dos coefficientes positivos que precedem s.

Vê-se pois, que para dar a x um valor tal que torne o coefficiente de x^h sempre positivo, é necessario fazer

$$(k+p+q\ldots\ldots)(x-1)\geqq s,$$

ou
$$x \underset{>}{=} 1+\frac{s}{k+p+q+\ldots\ldots}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (M).$$

Fazendo o mesmo em todas as columnas, em que entrarem coefficientes negativos; e tomando, dentre todas as expressões (M) assim formadas, a maior d'ellas l: é manifesto que $x =$ ou $> l$, tornará todo o polynomio positivo; e que por conseguinte será l o limite superior das raizes, visto que nem l, nem qualquer valor maior que l, podem reduzir fx a zero. Logo:

Para achar o limite superior das raizes da equação $fx=0$, *divida-se cada um dos coefficientes negativos de* fx, *incluindo os que multiplicam* x^0, *pela somma de todos os coefficientes positivos que o precedem; a maior das fracções que assim se obtiver, sommada com a unidade, será o limite pedido.*

Assim na equação $4x^5-8x^4+23x^3+105x^2-80x+11=0$, temos as fracções $\frac{8}{4}=2$, e $\frac{80}{4+23+105}$, das quaes a primeira, que é maior, mostra que todas as raizes são $<2+1$ ou 3.

Este methodo applica-se com vantagem, quando o 1.° termo negativo é precedido de muitos termos positivos, e os menores coefficientes negativos precedem os maiores.

Suppondo que s é o maior coefficiente negativo do equação $fx=0$, a expressão

$$1+\frac{s}{k}$$

não será menor que a maior das expressões (M). Logo, se dividirmos toda a equação por k:

O maior coefficiente negativo de uma equação $fx=0$, *tomado com o signal positivo, e augmentado com a unidade, é um limite superior das suas raizes.*

Esta expressão mais simples, e que se obtém immediatamente, torna-se preferivel quando se não pertende achar um limite baixo.

2.° METHODO Limitemos-nos ao 1.° termo, e aos termos negativos de fx, isto é, consideremos a expressão

$$x^n - Fx^{n-f} \mp Gx^{n-g} \mp Hx^{n-h} \mp \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Seja α um numero, que substituido por x, torne esta expressão positiva, ou

$$\alpha^n > F\alpha^{n-f} + G\alpha^{n-g} + H\alpha^{n-h} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ou, dividindo tudo por α^n,

$$1 > \frac{F}{\alpha^f} + \frac{G}{\alpha^g} + \frac{H}{\alpha^h} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

É claro que todo o numero $> \alpha$ satisfaz a esta condição; por conseguinte como nem α, nem os numeros $> \alpha$ podem tornar fx nullo, por isso que a parte positiva de fx, de que prescindimos, accresce a α^n; podemos tirar a conclusão seguinte:

Qualquer numero l, *que substituido por* x, *tornar o* 1.° *termo de* fx *maior que a somma dos termos negativos, é limite superior.* (*)

(*) Alguns authores dizem, que para se obter o limite superior das raizes de uma equação, se deve achar para x um numero l, que torne *o* 1.° *termo maior que a somma de todos os outros*, mas isto não é exacto. Com effeito, designando por P a somma dos termos positivos, e por N a dos negativos, se tivermos n'um caso

$$\alpha^n > P - N, \text{ ou } 1 > \frac{P-N}{\alpha^n},$$

não poderemos concluir, que esta relação terá logar para os numeros maiores que α, em consequencia das compensações, que se podem dar entre os termos de P e de N. Com effeito na equação

$$x^4 + x^3 - 30x^2 - 2x + 168 = 0,$$

da qual são raizes os numeros 3 e 4, acha-se que o valor $x = 2,3$, que evidentemente não é limite superior, faz com tudo com que seja $x^4 >$ a somma dos outros termos, ou

$$(2,3)^4 = 27,9841 > 180,167 - 163,3.$$

Deduzamos da relação (2) um valor de α. Entre os numeros

$$\sqrt[f]{F},\ \sqrt[g]{G},\ \sqrt[h]{H},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

existe um maior do que os outros. Supponhamos que é o 2.°, e representemol-o por i; será

$$\sqrt[g]{G}=i>\sqrt[f]{F}\text{ e}>\sqrt[h]{H},\quad G=i^g,\ F<i^f,\ H<i^h.$$

Substituamos em (2) G por i^g, F por i^f, H por i^h; o 2.° membro ficará $> F\alpha^{n-f}+G\alpha^{n-g}+H\alpha^{n-h}$; e se tomarmos α^n maior que elle, subsistirá *a fortiori* a condição (2). Temos pois de satisfazer agora á condição

$$x^n>i^f x^{n-f}+i^g x^{n-g}+i^h x^{n-h}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se ajunctarmos ao 2.° membro os termos que completam o polynomio, teremos outra condição, que involve as precedentes,

$$x^n>ix^{n-1}+i^2x^{n-2}+i^3x^{n-3}+\ldots\ldots+i^n,$$

ou
$$x^n>\left(i\frac{x^n-i^n}{x-i}=\frac{ix^n}{x-i}-\frac{i^{n+1}}{x-i}\right).$$

Contentando-nos com buscar os limites entre os numeros maiores que i, será $x>i$, e por conseguinte negativo o último termo $-\dfrac{i^{n+1}}{x-i}$. Supprimindo este termo, com o que se augmenta o 2.° membro, teremos nova condição, em que se involvem todas as precedentes, e será

$$x^n \underset{>}{=} \frac{ix^n}{x-i}, \text{ ou } x-i \underset{>}{=} i, \text{ ou } x \underset{>}{=} 2i, \text{ isto é}, x \underset{>}{=} 2\sqrt[g]{G}.$$

Logo: *O dobro do maior numero que se achar, extrahindo de cada coefficiente negativo uma raiz do grão designado pelo numero dos termos precedentes, é um limite superior das raizes.*

Na equação $\quad x^4-2x^3-20x^2+3x-11=0$

tomando $\sqrt[1]{2}$, $\sqrt[2]{20}$, $\sqrt[4]{11}$, como o 2.° d'estes numeros é o maior, e proximamente 5, será 10 um limite superior. Pelo 1.° theorema do methodo precedente achariamos $\frac{20}{1}+1=21$; e pelo 2.° achariamos tambem 21 para limite superior.

3.° Methodo. Faça-se $x=l+y$, sendo l um numero qualquer positivo; a equação $fx=0$ tornar-se-ha (n.° 31)

$$fl+yf'l+\tfrac{1}{2}y^2f''l+\ldots\ldots\ldots+ky^n=0.$$

Ora, se acharmos para l um valor tal, que torne fl, $f'l$; $f''l$, ... positivos, como todos os coefficientes da transformada ficam tendo os signaes tambem positivos, nenhum numero positivo que se substitua por y, lhe poderá satisfazer; e por conseguinte os valores reaes de x correspondem aos valores negativos de $y=x-l$, devendo por isso ser $l>x$. Logo:

Todo o numero, que substituido por x *em* fx *e em todas as suas derivadas, der resultados positivos, é um limite superior de* x.

No último ex.° as derivadas são

$$4x^3-6x^2-40x+3,\; 12x^2-12x-40,\; 24x-12;$$

e ve-se, que $x=6$ torna todos estes polynomios positivos, e por conseguinte 6 é um limite superior, mais baixo que o achado precedentemente.

Cabe aqui observar, que, se mudarmos os signaes das potencias impares da transformada, isto é, se fizermos $x = l - y$, as raizes x mudarão de signal, e se tornarão, de negativas que eram, em positivas. Logo: *Para transformar uma equação* $fx = 0$ *n'outra* $Fy = 0$, *que não tenha nenhuma raiz negativa, faremos* $x = l - y$, *sendo* l *um limite superior das raizes* x.

37. Mudando x em $-x$ em $fx = 0$, isto é, mudando os signaes das potencias impares, as raizes positivas tornar-se-hão negativas, e reciprocamente. Se buscarmos pois o novo limite superior l', as raizes negativas de $fx = 0$ estarão entre $-l'$ e 0, e as positivas entre 0 e l. Por esta maneira se reconhece, que no nosso último exemplo todas as raizes estão comprehendidas entre -4 e 6.

38. Fazendo $x = \frac{1}{z}$ em $fx = 0$, as maiores raizes de z corresponderão ás menores de x. Se procurarmos pois o limite superior h das raizes de z, teremos $z < h$, $x > \frac{1}{h}$. Será pois $\frac{1}{h}$ o *limite inferior das raizes positivas de* x.

Para obter h podemos empregar qualquer dos methodos do n.° 36.

39. Seja s o maior coefficiente de signal contrario ao do último termo da equação

$$kx^n + px^{n-1} + \ldots\ldots u = 0.$$

Fazendo-se $x = \frac{1}{z}$, esta equação se transforma em

$$uz^n + \ldots\ldots + pz + k = 0,$$

ficando sempre o signal de s contrario ao de u. Será pois $1 + \frac{s}{u}$ o limite superior da transformada, ou $z < 1 + \frac{s}{u}$; e por conseguinte $x > \frac{u}{u+s}$. Logo, *acha-se immediatamente um limite inferior das raizes positivas d'uma equação, dividindo o seu último termo pela somma, que se obtem junctando este ultimo termo com o maior dos coefficientes de signal contário ao d'elle.*

Todas as raizes positivas de fx estão pois comprehendidas entre $\frac{u}{u+s}$ e l.

Passando das raizes negativas para as positivas (n.° 37), podemos applicar depois a estas os dois theoremas precedentes, e obter assim o limite inferior das raizes negativas.

40. Supponhamos fx ordenada segundo as potencias decrescentes de x,

$$fx = kx^n + px^{n-1} + \ldots.$$

Se o 1.° termo kx^n é positivo, limitando-nos a elle, e aos termos negativos de fx, temos a expressão

$$kx^n - Fx^{n-f} - Gx^{n-g} \ldots = kx^n\left(1 - \frac{F}{kx^f} - \frac{G}{kx^g} - \ldots\right).$$

Ora já vimos que podemos obter um limite superior l de x, que torne esta expressão positiva; e vê-se agora, que todo os numeros$>l$, substituidos por x, augmentarão o seu valor, e a conservarão sempre positiva, bem como a expressão fx, visto que os termos positivos de que prescindimos, accrescem a kx^n. Podemos pois obter resultados sempre crescentes e positivos.

Se o 1.° termo kx^n for negativo, comparando-o com os termos positivos, acharemos do mesmo modo, que se podem obter resultados sempre crescentes e negativos.

Supponhamos agora fx ordenada segundo as potencias ascendentes de x, ou

$$fx = u + tx \ldots\ldots px^{n-1} + kx^n.$$

Fazendo $x = \frac{1}{z}$ vem

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n}\left(uz^n + tuz^{n-1} + \ldots\ldots k\right).$$

O valor $z = l$, que dá ao resultado o signal de u, corresponde a $x = \frac{1}{l}$ que produz o mesmo effeito em fx. Logo:

É sempre possivel achar valores de x taes que deem á expressão fx o signal do 1.° termo, quer a serie seja crescente, quer seja decrescente.

41. Concluiremos demonstrando um theorema muito importante, que já póde ter sido previsto, e de que teremos ainda de fazer uso.

É sempre possivel dar a x uma serie de valores crescentes α, β, γ, ..., tão proximos, que os valores que resultam para o polynomio fx sejam tão vizinhos como se quizer, ou a sua differença menor que qualquer grandeza assignavel.

Supponhamos primeiro, que em fx entram sómente termos positivos, e que tendo-se dado a x um valor α, se muda depois α em $\alpha+i$. Subtrahindo o 1.° resultado do 2.°, vem

$$f(\alpha+i)-f\alpha=i(f'\alpha+\tfrac{1}{2}if''\alpha+\text{etc.})$$

Para dar a i um valor tal que torne esta differença menor que qualquer quantidade assignavel h, é necessario que seja

$$i(f'\alpha+\tfrac{1}{2}if''\alpha+\ldots\ldots)<h;$$

ou, fazendo $i=1$ dentro do parenthesis,

$$i(f'\alpha+\tfrac{1}{2}f''\alpha+\ldots\ldots)<h,$$

por isso que devendo suppor-se $i<1$, esta condição comprehende a antecedente. Vê-se pois que a condição póde ser preenchida, pondo, como é sempre possivel,

$$i=\frac{h}{<f'\alpha+\frac{1}{2}f''\alpha+\ldots\ldots}.$$

Tomando este valor i, e fazendo depois $x=(\alpha+i)+i'$, obteremos, pelo mesmo theor, um 3.° resultado que differirá do 2.° menos de h. E assim por diante.

No caso de fx conter termos negativos, applicariamos o que acabâmos de dizer á reunião dos termos positivos; e como os termos negativos diminuem ainda mais a grandeza dos resultados, com mais forte razão differirão de uma quantidade menor que h.

Finalmente, se a somma dos termos negativos excedesse a dos positivos, teriamos então de applicar aos primeiros o raciocinio de cima.

Raizes Commensuraveis.

42. *Se na equação*

$$fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots u = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

todos os coefficientes forem inteiros, e $k=1$, *não poderá haver raiz alguma fraccionaria.*

Com effeito, se fosse $x = \frac{a}{b}$, sendo a e b primos entre si, teriamos

$$\frac{a^n}{b^n} + \frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots \frac{ta}{b} + u = 0,$$

d'onde se deduziria

$$\frac{a^n}{b} = -\left(pa^{n-1} + qba^{n-2} + \ldots\ldots ub^{n-1}\right),$$

o que é absurdo, por quanto sendo o 1.º membro uma fracção irreductivel, não póde ser egual ao 2.º que é um numero inteiro.

Por conseguinte, quando fizermos $y = kx$, para desembaraçar a equação (1) do coefficiente k (n.º 30, 2.º) sem que os outros coefficientes deixem de ser inteiros, y não terá raizes fraccionarias.

Pelo que respeita ás raizes de fx, serão, ou deixarão de ser inteiras, conforme as raizes inteiras de fy forem, ou não forem, multiplas de k. Por este modo a indagação das raizes fraccionarias de x vem a depender da indagação das raizes inteiras da transformada em y.

43. Usando das mesmas notações do n.° 27, e em virtude do que ahi se disse, entre os coefficientes de $f(x)$, e os do quociente de $f(x)$ dividido por $x - a$, existem as relações seguintes:

$$A'_1 = A_1 + a A_0,\ A'_2 = A_2 + a A'_1,\ A'_3 = A_3 + a A'_2, \ldots\ R = A_n + a A'_{n-1}$$

das quaes se deduzem

$$-A_0 = \frac{A_1 - A'_1}{a},\ -A'_1 = \frac{A_2 - A'_2}{a}, \ldots -A'_{n-2} = \frac{A_{n-1} - A'_{n-1}}{a},$$

$$-A'_{n-1} = \frac{A_n - R}{a}.$$

Se a for uma raiz da equação, será $R = 0$, e n'esse caso podemos servir-nos das últimas equações para calcular successivamente, mas em ordem retrograda, os coefficientes A'_{n-1}, $A'_{n-2}, \ldots \ldots A'_1$, A_0.
E como estes coefficientes resultaram da divisão de fx por $x - a$, os seus valores serão numeros inteiros.

Do que acabâmos de dizer, deduzem-se os seguintes caracteres *para reconhecer, que um numero inteiro a é raiz de uma equação* $fx=0$, *cujos coefficientes são inteiros. Este numero deve dividir:*

1.° *O último termo da equação.*

2.° *A somma que se obtem, junctando ao quociente d'esta divisão o coefficiente da* 1.ª *potencia da incognita.*

3.° *A somma resultante do quociente d'esta* 2.ª *divisão, mais do coefficiente da* 2.ª *potencia da incognita.*

E finalmente a somma de cada um dos coefficientes da proposta, mais o último quociente obtido na divisão precedente.

Segundo se vê nas expressões de cima, estes quocientes são, com signaes contrários, os coefficientes successivos do quociente de fx dividida por $x - a$; e o último d'estes quocientes é $- A_0$.

Se estas condições, a que deve satisfazer toda a raiz inteira de $fx = 0$, se derem a respeito de um numero qualquer a, este numero será raiz da equação: por quanto buscando o quociente de fx dividida por $x - a$, pelo processo do n.° 27, acham-se reproduzidos os coefficientes A'_1, A'_2, .. A_{n-1}, e chega-se a um resto nullo.

44. Procederemos da maneira seguinte para obter as raizes inteiras de $fx = 0$.

Calculem-se os limites das raizes positivas e negativas d'esta equação; procurem-se depois os divisores do ultimo termo, e escrevam-se em linha horizontal aquelles d'estes divisores, tanto positivos como negativos, que forem comprehendidos entre estes limites respectivos; escrevam-se por baixo, e tambem em linha horizontal, os quocientes: sujeitem-se estes quocientes ás provas prescriptas nas equações de cima: se algum destes divisores conduzir a algum quociente fraccionario, rejeite-se, por que não póde ser raiz.

Como o divisor ± 1 do último termo, dá quocientes sempre inteiros, é necessario chegar até ao último termo para ver se ± 1 póde ser raiz. É porém mais simples substituir ± 1 na proposta, segundo o processo da pag. 52.

Sirva para 1.° ex.° a equação

$$2x^5 + 3x^4 - 31x^3 + 3x^2 - 43x + 210 = 0,$$

na qual o último termo $210 = 2.3.5.7.$ tem por divisores

$$\pm(1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, \ldots\ldots).$$

Como $+7$ e -8 são os limites das raizes da equação, rejeitaremos todos os divisores que estão fóra d'estes limites, bem como ± 1, que immediatamente se vê que não póde convir. Dispõe-se depois o cálculo pela fórma abaixo indicada. Marcaram-se com o signal » os divisores que não satisfazem; e julgou-se desnecessario escrever as somas e differenças, que dão os dividendos. E designaram-se por t', s', q', p', .. k os coefficientes A'_n, A'_{n-1}, A'_{n-2}, ... A_0.

$a =$	2	3	5	6	-2	-3	-5	-6	-7
$-t' =$	105	70	42	35	-105	-70	-42	-35	-30
$(-43 - t') : a = -s' =$	31	9	»	»	$+74$	»	$+17$	$+13$	»
$(+3 - s') : a = -q' =$	17	4			»		-4	»	
$(-31 - q') : a = -p' =$	-7	-9					$+7$		
$(+3 - p') : a = -k' =$	-2	-2					-2		

A proposta tem pois sómente tres raizes inteiras $+2, +3, -5$. O quociente da divisão por $x-2$ tem por coefficientes os numeros collocados por baixo do divisor 2, isto é,

$$2x^4+7x^3-17x^2-31x-105.$$

Esta expressão dividida por $x-3$, dá

$$2x^3+13x^2+22x-35.$$

E finalmente esta última, dividida por $x+5$, dá

$$2x^2+3x+7.$$

E são estes os tres factores da proposta

Eis aqui mais dous exemplos:

$x^3+3x^2-8x+10=0$					$8x^3-7x^2-63x+36=0$							
$a=$	2	-2	-5	-10	9	6	4	3	2	-2	-3	-4
$-t'=$	5	-5	-2	-1 ...	4	6	9	12	18	-18	-12	-9
$-s'=$	»	»	2	» ...	»	»	»	-17	»	»	$+25$	18
$-k=$	...	...	-1	...	»	...	...	-8	...	...	»	»

Na 1.ª equação o factor $x+5$ dá o quociente x^2-2x+2.

Na 2.ª só se experimentam os divisores de 36 que estão entre os limites -5 e $+10$; o divisor é $x-3$, e o quociente $8x^2+17x-12$.

Podem resolver-se por este methodo os seguintes problemas.

I. Pede-se um numero N com tres algarismos x, y, z, taes que: 1.º o seu producto seja 54; 2.º que o algarismo do meio seja $\frac{1}{6}$ da somma dos outros dous; 3.º finalmente, que diminuindo 594 do numero N, o resto seja expresso pelos mesmos algarismos em ordem inversa.

Como $$N=100x+10y+z,$$

temos $$xyz=54,\ 6y=x+z,\ 100z+10y+x=N-594.$$

A 3.ª equação reduz-se a $x - z = 6$; eliminando y das duas 1.as vem $x^2z + xz^2 = 324$; e finalmente, pondo $z + 6$ em lugar de x, apparece $z^3 + 9z^2 + 18z = 162$. Ora x, y, z, são numeros inteiros, e pelo methodo exposto acha-se $z = 3$, d'onde se deduz $x = 9$, $y = 2$, e $N = 923$.

II. Qual é a base x do systema de numeração no qual o numero 538 é expresso pelos caracteres (4123)?

É necessario achar a raiz inteira e positiva da equação

$$4x^3 + 1x^2 + 2x + 3 = 538;$$

esta raiz é $x = 5$. Vej. *Not.* 1.ª *da Arith.* pag. 267.

Em geral, se A for expresso por n algarismos $a, b, c, \ldots\ldots i$, a base x do systema é dada pela equação

$$ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \ldots = A - i,$$

equação que só tem, como se verá, uma raiz positiva, a qual deve ser inteira, $e > a, b, c \ldots\ldots i$.

45. Quando o último termo tem muitos divisores, comprehendidos entre os limites das raizes, o cálculo torna-se longo; póde porém abbreviar-se pelo seguinte meio.

Se a é raiz inteira da equação $fx = 0$, cujos coefficientes se suppõe inteiros, o quociente Q de fx por $x - a$ será tambem inteiro, qualquer que seja x. Se pois tomarmos por x um inteiro qualquer α, deverá ser $\dfrac{f\alpha}{\alpha - a} =$ inteiro.

Podemos pois reconhecer, se um dos divisores a do último termo é, ou não, raiz inteira da equação, tomando a differença entre α e este divisor, e vendo depois se esta differença divide, ou não, $f\alpha$, isto é, o numero que resulta de substituição de α por x em fx. Todo o divisor que não satisfazer á condição exigida deverá excluir-se, e sómente se applicará o processo geral aos outros divisores do último termo, d'entre os quaes se podem ainda fazer novas exclusões, tomando outro numero α.

Ora, como o methodo exposto exige, que se faça $x = \pm 1$ em fx, para verificar se ± 1 são raizes da equação, podemos approveitar os valores $f(\pm 1)$, vindo n'este caso a tomar $\alpha = \pm 1$.

Assim no 1.° ex.° do n.° 44, experimentemos os 9 divisores, que

ficaram comprehendidos entre os limites das raizes; fazendo $x = \alpha = 1$, vem
$$f(+1) = 144,$$
e
$$\alpha - a = 1-2,\ 1-3,\ 1-5,\ 1-6,\ 1+2,\ 1+3,\ 1+5,\ 1+6,\ 1+7,$$
e como
$$1-2,\ 1-3,\ 1-5,\ 1+2,\ 1+3,\ 1+5,$$
são os unicos divisores de 144, concluiremos que dentre os 9 divisores, só podem ser raizes da equação os 6 seguintes
$$2,\ 3,\ 5,\ -2,\ -3,\ -5.$$

46. Procuremos agora *os factores commensuraveis do 2.° grão* da equação $fx = 0$.

Sendo
$$x^2 + px + q$$
um dos factores; e
$$x^{n-2} + p'x^{n-3} + q'x^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
o quociente resultante da divisão de fx por este factor: teremos a equação identica
$$fx = (x^2 + px + q)(x^{n-2} + p'x^{n-3} + q'x^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots),$$
na qual, além de p e q, ha mais $n-2$ coefficientes desconhecidos.

Executando a multiplicação, e egualando os coefficientes das mesmas potencias de x nos dous membros, como no n.° 27., teremos n equações; das quaes eliminando os $n-2$ coefficientes $p', q', \ldots\ldots$, restarão duas equações entre p e q; e depois só uma em p ou q, a qual deverá ser do grão $\frac{1}{2}n(n-1)$, numero das n combinações 2 a 2 dos factores binomios do 1.° grão.

Se fx tiver factores racionaes do 2.° grão, a última equação em p ou q terá pelo menos uma raiz commensuravel. N'este caso, conhecido um valor de p ou q, uma das equações entre p e q dará q, ou p, e viremos por fim a conhecer $x^2 + px + q$.

Por ex.°, a equação

$$x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q'),$$

dá

$$p + p' = 0\ ,\ q + pp' + q' = -3\ ,\ p'q + pq' = -12\ ,\ qq' = 5.$$

As duas primeiras equações dão os valores de p' e q', os quaes substituidos nas outras duas, conduzem ás equações, entre p e q,

$$2pq + 3p - p^3 = 12\ ,\ q^2 + q(3 - p^2) + 5 = 0,$$

das quaes eliminando q, vem

$$p^6 - 6p^4 - 11p^2 = 144,$$

que dá

$$p = 3\ ,\ -3;\ \text{e depois}\ q = 5\ ,\ 1;$$

vindo a obter-se por este modo os factores

$$(x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 1).$$

Raizes eguaes.

47. Quando o polynomio fx tem p factores eguaes a $x - a$; q eguaes a $x - b$; ......: toma a fórma

$$fx = (x - a)^p (x - b)^q \ldots (x - k)(x - l), \ldots \quad \text{(A)}$$

e n'este caso diz-se que a equação $fx = 0$ tem p raizes eguaes a a, q eguaes a b, ...

Dada uma equação $fx = 0$, vejamos a maneira de reconhecer, se tem raizes eguaes, isto é, se póde tomar a fórma (A).

Suppondo primeiro $p = q = \ldots = 1$: como a equação (A) é identica, podemos em ambos os membros substituir por x, $x+y$; o que dá, desenvolvendo o 1.° membro (n.° 31),

$$fx+yf'x+\tfrac{1}{2}y^2f''x\ldots=(y+x-a)\,(y+x-b)\,(y+x-c)\ldots$$

N.° 1.° membro, as derivadas successivas $f'x$, $f''x$, ... são polynomios conhecidos.

No 2.° membro, os factores podem considerar-se como binomios, dos quaes y é a primeira parte em todos elles; e as 2.as partes são sucessivamente $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... O producto d'estes factores, assim considerados, terá pois a fórma indicada na *Alg. El.* n.° 104, V, e conseguintemente:

O coefficiente de y^{n-1} será a somma de todas as 2.as partes $x-a$, $x-b$, $x-c$, ...

O coefficiente de y^{n-2} será a somma dos productos d'estas 2.as partes 2 a 2.

O coefficiente de y^{n-3} será a somma dos productos das mesmas 2.as partes 3 a 3.

E assim por diante.

Logo:

1.° fx, coefficiente de y^0, é o producto de todos estes n binomios, ou a expressão (A).

2.° $f'x$, coefficiente de $y^{n-(n-1)}$, é a somma dos seus productos $n-1$ a $n-1$, os quaes se formam supprimindo successivamente, no producto (A), cada um dos factores binomios, e sommando todos os reresultados.

3.° $f''x$, é a somma dos productos $n-2$ a $n-2$, etc.

Posto isto, como suppuzemos $p=1$, terá fx um factor unico egual $x-a$.

E $f'x$ conterá tambem este factor em todos os termos, menos um; e por isso, se designarmos por Q e R polynomios não divisiveis por $x-a$, será

$$f'x=(x-a)Q+R;$$

d'onde se vê que $f'x$ não é divisivel por $x-a$.

O mesmo diremos dos outros factores desiguaes de fx; e por conseguinte:

Se o polynomio fx *não tem factores eguaes*, fx *e* $f'x$ *não terão divisor commum.*

48. Suppouhamos agora, que (A) contém factores de fórma $(x-a)^p$, sendo $p>1$. Para formar $f'x$, será necessario supprimir primeiramente cada um dos factores $x-a$, d'onde resultarão p termos eguaes, que terão todos por factores $(x-a)^{p-1}$. Depois de ommittidos todos estes factores, será ainda necessario ír ommittindo sucessivamente os outros factores $x-b$, $x-c$..; e os termos resultantes terão todos por factor $(x-a)^p$. Assim terá $f'x$ a fórma

$$p\,(x-a)^{p-1}\,P'+(x-a)^p\,Q',$$

sendo P' e Q' expressões não divisiveis por $x-a$.

O mesmo diremos dos outros factores eguaes, e por conseguinte:

Se fx *tem factores eguaes*, fx *e* $f'x$ *terão um divisor commum, que é o producto de todos os factores eguaes de* fx, *elevado cada um a uma potencia menor de uma unidade.*

49. Sendo pois dada uma equação $fx=0$, formaremos a sua derivada $f'x$, e procederemos á indagação do maior divisor commum entre fx e $f'x$. Se o não houver, concluiremos que a proposta não tem raizes eguaes. Se porém apparecer um divisor commum F, a proposta terá raizes eguaes; e o divisor, posto que appareça debaixo da fórma de um polynomio, poderá tomar a fórma

$$F=(x-a)^{p-1}\,(x-b)^{q-1}\,\ldots\ldots$$

Dividindo fx por F, o quociente Q será composto de todos os factores de fx, desembaraçados dos expoentes, ou

$$Q=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\,\ldots\ldots\ldots$$

50. *Todas as vezes que* $fx=0$ *tiver raizes eguaes, podemos fazer depender a sua resolução da de uma serie de equações, das quaes a primeira só admitte as raizes simples da proposta; a segunda as raizes duplas* (isto é, as raizes que entram duas vezes); *a terceira as raizes triplas*, etc.: e isto pelo processo seguinte.

Sejam α, β, γ, ... os productos dos factores binomios, que

..

entram em $fx=0$ com os expoentes $1, 2, 3 \ldots\ldots$; sendo assim

$$fx=\alpha^1.\beta^2.\gamma^3.\delta^4\ldots\ldots\ldots$$

Designemos por F o maior divisor commum entre fx e $f'x$; por G o de F e F'; por H o de G e G' etc.; e por $p, q, r, s, t.$ os quocientes exactos successivos de cada um dos divisores communs pelo seguinte. Teremos o quadro seguinte, no qual suppomos que 5 é o maior numero de vezes que a mesma raiz entra na proposta, ou que a equação $I=0$ só tem raizes simples.

$$\left.\begin{array}{l} fx=\alpha^1.\beta^2.\gamma^3.\delta^4.\varepsilon^5.\text{etc.} \\ F=\quad\beta.\gamma^2.\delta^3.\varepsilon^4.\text{etc.} \\ G=\quad\gamma.\delta^2.\varepsilon^3.\text{etc.} \\ H=\quad\delta.\varepsilon^2\ldots \\ I=\quad\varepsilon\ldots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} q=\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon \\ r=\beta.\gamma.\delta.\varepsilon \\ s=\gamma.\delta.\varepsilon \\ t=\delta.\varepsilon \\ u=\varepsilon \end{array} \quad \begin{array}{l} \dfrac{q}{r}=\alpha=0. \\ \dfrac{r}{s}=\beta=0. \\ \dfrac{s}{t}=\gamma=0. \\ \dfrac{t}{u}=\delta=0. \\ \dfrac{u}{I}=\varepsilon=0. \end{array}$$

D'onde se vê, que por meio de tres systemas de operações, a saber: uma serie d'operações do maior divisor commum, e duas series de divisões, se consegue separar successivamente os factores $\alpha.\ \beta, \gamma, \ldots,$ que sendo egualados successivamente a zero, dão, o primeiro as raizes simples, o segundo as raizes duplas, etc.

Se na proposta faltar algum dos factores, que suppuzemos, β por ex.°, basta suppor $\beta=1$, d'onde resulta então $s=r$, e $\dfrac{r}{s}=1$, caracter por onde se reconhece a auzencia, em fx, do factor da ordem correspondente áquelle que este quociente é destinado a dar.

Cumpre ainda advertir que o gráo de $\alpha=0$ exprime o numero das raizes simples da proposta; o gráo de $\beta=0$, o numero das raizes duplas; o de $\gamma=0$ o das triplas, etc.; e a resolução completa d'estas equações faz conhecer as differentes especies de raizes simples, duplas, triplas, etc.

Applicações d'esta theoria (*).

I. Para a equação

$$fx = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0,$$

cuja derivada é

$$f'x = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12 = 0,$$

(*) Para abbreviar o calculo do divisor commum, póde servir a regra seguinte, pela qual se obtem immediatamente *o resto da divisão de* $f'x$ *por* fx- *Multipliquem-se os coefficientes de* fx, *a contar do* 3.°, *por* 2, 3, 4 .... *vezes o coefficiente do* 1.° *termo de* $f'x$: *multipliquem-se os coefficientes de* $f'x$, *a contar do* 2.°, *pelo coefficiente do* 2.° *termo de* fx: *diminuam-se estes productos, pela sua ordem*, 2 *a* 2. Obter-se-ha assim os coefficientes do resto do gráo $m-2$.

Por ex.°	$fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4$				
coefficientes de $f'x$	$+5$	-4	$+12$	-8	$+4$
producto dos coefficientes de fx por 10, 15, 20, 25		$+40$	-60	$+80$	-100
producto dos coefficientes de fx' por -1		$+4$	-12	$+8$	-4
differença		$+36$	-48	$+72$	-96
resto da divisão, supprimindo o factor 12,		$3x^3$	$-4x^2$	$+6x$	-8

Quando fx não tem segundo termo, a parte snbtractiva é nulla, e a regra reduz-se a multiplicar os coefficientes de fx por 2, 3, 4, ... Por ex.°

	$fx = 3x^4 + 0.x^3 - 35x^2 + 44x + 4$			
coefficiente de $fx' =$	$+12$	$+0$	-70	$+44$
producto dos coefficientes de fx por 2, 3, 4		-70	$+132$	$+16$
resto da divisão, supprimindo o factor 2,		$35x^2$	$-66x$	$-8.$

Acabando a operação, achar-se-ha o divisor commum $x-2$, e a proposta $=(x-2)^2(3x^2+12x+1)$.

Para demonstrar esta regra, effectue-se a divisão de $kx^m + px^{m-1} + qx^{m-2}$ pela sua derivada $mkx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \dots$, depois de se haver introduzido o factor m^2k no dividendo, a fim de se obter um quociente inteiro. O resto, da ordem x^{m-2}, é

$$x^{m-2}[2mkq - p(m-1)p] + x^{m-3}[3mkr - p(m-2)q] + \dots\dots$$

(Veja-se a nota a pag. 87.)

temos, formando o quadro

$$
\begin{array}{l}
fx = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 \\
F = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \ldots \\
G = x^2 + 2x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\
H = x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
I = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\left\}
\begin{array}{l}
q = x^2 - x - 2 \\
r = x^2 - x - 2 \\
s = x + 1 \\
t = x + 1
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\dfrac{q}{r} = \alpha = 1, \\
\dfrac{r}{s} = \beta = x - 2, \\
\dfrac{s}{t} = \gamma = 1, \\
\dfrac{t}{1} = \delta = x + 1.
\end{array}
$$

Logo: $$fx = (x-2)^2 (x+1)^4.$$

II. Para

$$fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4,$$

acharemos pelo mesmo processo

$$fx = (x-1)(x^2+2)^2.$$

III. Para

$$fx = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9,$$

acharemos

$$fx = (x+1)(x+3)^2(x-1)^3.$$

51. Para verificar se uma raiz inteira a é dupla, tripla, quadrupla, etc. basta ensaiar muitas vezes successivas a divisão por $x - a$, segundo o processo da pag. 51. Porém sómente se tentará o cálculo, quando os coefficientes tomados em ordem retrogada forem divisiveis por a^i, a^{i-1},

a^{i-2}, ... sendo i o expoente de $x-a$ em fx. A razão disto é, por que a^i deve ser divisor do último termo de fx; a^{i-1} do último termo da derivada $f'x$, ou do penultimo de fxa; $^{i-2}$ do último em $f''x$, ou do antepenultimo em fx; etc.

Eliminação.

52. Sejam A, B, ..., a, b, ... funcções de y, e

$$Z = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots\dots, \quad T = ax^n + bx^{n-1} + \dots\dots$$

dous polynomios, que contém sómente potencias inteiras e positivas de x e y, e que tratâmos de tornar nullas por meio de systemas conjugados de valores de x e y.

Se fosse conhecido um dos valores convenientes de y, $y = \beta$, substituindo-o nas equações propostas, estas não teriam outra incognita, além de x, e seriam satisfeitas por um mesmo valor $x = \alpha$: logo os polynomios Z e T seriam divisiveis por $x - \alpha$, e teriam conseguintemente um divisor commum D funcção de x. Achado este divisor commum, a equação $D = 0$ dá os valores de x que combinados com $y = \beta$, satisfazem ás equações $Z = 0$, $T = 0$. Se não houver divisor commum, o valor $y = \beta$ não poderá satisfazer ás propostas.

Teremos pois de buscar o maior divisor commum entre Z e T (*Alg. El.* n.º 109.), como se y fosse conhecido, levando o cálculo até se obter um resto final Y, que só contenha y. As raizes da equação $Y = 0$, por introduzirem a condição de haver um divisor commum D entre Z e T, darão todos os valores de y, que podem satifazer á proposta; e a equação $D = 0$ fará conhecer depois os valores de x, que se conjugam successivamente com os de y para o mesmo fim.

Suppondo pois que é $m =$ ou $> n$, divida-se Z por T, depois de multiplicar, se for necessario para evitar fracções (*Alg. El.* n.º 109.), Z por um factor M, que torne AM divisivel por a (*), funcção em geral de y. Desi-

(*) Se os gráos m e n forem eguaes, M será $= a$, ou sómente o factor de a que não entra em A (Arith. n.º 39). Se $m = n + 1$, M será o quadrado de a, gnando por Q e R o quociente inteiro e o resto, ambos funcções de x e y, virá

$$MZ = QT + R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Esta equação é *identica*, sem quebrados nem irracionalidades, e por conseguinte tem logar para todos e quaesquer valores que se substituam por x e y. Supponhamos que os valores $x = \alpha$, $y = \beta$, são os convenites para tornar Z e T nullos: n'este caso, tambem R o será, e teremos

$$R = 0, \; T = 0.$$

E se os dous numeros substituidos por x e y em R e T tornarem estes polynomios nullos, será então $MZ = 0$, isto é, ou $M = 0$, ou $Z = 0$.

Por conseguinte as soluções do systema $T = 0$, $R = 0$, convém tanto a $Z = 0$ com $T = 0$, como a $M = 0$ com $T = 0$; e reciprocamente Logo:

se em logar das equações...... $Z = 0$, $T = 0$,

lançarmos mão das equações... $T = 0$, $R = 0$,

obteremos todos os systemas conjugados de valores pedidos, e além disso *outras soluções estranhas á questão*, que dão $M = 0$ e $T = 0$. E posto que o problema não admitta estas soluções estranhas, torna-se comtudo por este modo mais simples, por que o gráo de R é menor que n.

---

ou d'este factor. Se $m = n + 2$, M será o cubo, e assim por diante. D'este modo evitâmos o estar a multiplicar continuamente de novo os restos parciaes, e obtem-se um ultimo resto, em que x está elevado quando muito ao gráo $n - 1$. Assim no caso de ser $m = n + 1$, e $M = a^2$, o quociente é

$$Q = Aax + (aB - Ab) = a(Ax + B) - Ab.$$

Compondo directamente esta expressão do quociente, multiplicando-a por T, e subtraindo-a de a^2Z, desapparecem os dous primeiros termos, e vem logo o resto R.

Quando T não tem 2.° termo, ou quando a é factor d'este termo, a regra simplifica-se, porque então basta multiplicar Z por a, em vez de a^2, sendo $m = n + 1$.

Continuando o cálculo do divisor commum de Z por T, e designando, pela mesma fórma, por M', M''.... os factores proprios para tornar possiveis as divisões parciaes sucessivas; e por Q', Q'', ... e R', R'',.. os quocientes successivos e restos correspondentes: obteremos as indentidades

$$M'T = Q'R + R',\ M''R = Q''R' + R'',\ M'''R' = Q'''R'' + R''', \ldots$$

das quaes se conclue, como acima, que:

se em logar das equações $T=0$ e $R=0$, $R=0$ e $R'=0$, $R'=0$ e $R''=0$,..

lançarmos mão das equações $R=0$ e $R'=0$, $R'=0$ e $R''=0$, $R''=0$ e $R'''=0$,

obteremos todos os systemas conjugados dos valores pedidos, e além disso as outras soluções extranhas.

Como o gráo de x se vae abaixando gradualmente, chegar-se-ha a um *resto final* Y, em que não entrará x. Sendo pois mV o dividendo, e D o divisor, que em geral é do 1.° gráo em x, teremos

$$mV = Dq + Y, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

donde se deduzem as equações

$$D = 0,\ Y = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

que encerram todas as soluções pedidas, e além d'estas as que tornam nullos os factores introduzidos conjunctamente com os divisores correspondentes, i. é, M com T, M' com R, M'' com R',...... As raizes da equação $Y=0$, em que só entra a incognita Y, substituidas em $D=0$, farão conhecer os valores de x que satisfazem ás propostas; sendo porém necessario desembaraçar primeiramente Y das raizes extranhas, pelo modo que adiante diremos.

I. Ex.° Sejam as equações

$$2x^2 - y^2 + 1 = 0,\ x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0.$$

Dividindo a 1.ª pela 2.ª, o quociente é 2; e o resto, desembaraçado do factor 3, é

$$D = 2xy - y^2 - 3.$$

Multiplicando o divisor por $4y^2$, e dividindo por D, o quociente é

$$2xy - 5y^2 + 3;$$

e o resto é

$$Y = -y^4 + 8y^2 + 9 = 0.$$

Para resolver esta equação faça-se $y^2 = z$, e será $z^2 - 8z = 9$, d'onde se deduz $z = 9$ e $z = -1$; e por conseguinte $y = \pm 3$, e $y = \pm \sqrt{-1}$. Finalmente, substituindo em $D = 0$, teremos para x os valores correspondentes

$$x = \pm 2,\ x = \mp \sqrt{-1}.$$

II. Ex.º Sejam as equações

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 = 0,\ x^2 - y^2 = 0.$$

Procedendo do mesmo modo, acha-se

$$D = 2xy - 2y^2 + 1,\ Y = 4y^2 - 1;$$

logo $\qquad y = -x = \pm \tfrac{1}{2}.$

Em geral, todas as vezes que P, Q, p, q, forem funcções de y, as equações

$$x^2 + Px + Q = 0,\ x^2 + px + q = 0,$$

dão

$$(P - p)x + Q - q = 0,\ (Q - q)^2 + q(P - p)^2 = p(Q - q)(P - p).$$

III. Ex.° Sejam

$$x^3+x^2-xy^2-y^2=0\,,\ 2x^2-x(4y-1)-2y^2+y=0.$$

O 1.° resto é

$$D=(16y^2-2y-1)x+8y^3-6y^2-y\,;$$

multiplicando o divisor por $(16y^2-2y-1)$, e dividindo por D, chegaremos ao resto

$$Y=32y^3\,(4y^3-12y^2+3y+1)=0\,,$$

do qual se tira primeiramente $y=0$ e $y=\frac{1}{2}$ (n.° 42); e, abaixando depois o gráo da equação, $y=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{33})$. Finalmente, substituindo em $D=0$, obteremos os valores correspondentes $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$, $x=-1$.

53. Na applicação do methodo do divisor commum ao processo da eliminação das equações cumpre fazer as observações seguintes:

1.° Se for Z o producto de dois factores, i. é, $Z=P\times Q$, como Z não póde ser nullo sem que P ou Q o sejam (n.° 28) o problema divide-se em dous:

$$P=0 \text{ com } T=0\,,\ Q=0 \text{ como } T=0.$$

Estes dous systemas encerram todas as soluções pedidas, e são mais simples que a proposta.

E se Z e T se puderem decompor em diversos factores, o problema se dividirá em outros tantos, quantas forem as combinações possiveis dos factores de Z com os de T.

Por ex.°, as equações

$$x^2-2yx-3y^2+y=0\,,\ x^2-y^2=0\,,$$

como $x^2-y^2=(x-y)\,(x+y)$, decompõe-se nos dous systemas

$$x-y=0 \text{ com a } 1.^a, \text{ e } x+y=0 \text{ com a } 1.^a,$$

dos quaes o 1.° dá $y=x$, e depois $x=0$, $x=\frac{1}{4}$; e o 2.° dá $y=-x=0$.

2.° Na hypothese do caso precedente, póde acontecer que P contenha só y; e nesse caso deve P dividir cada um dos coefficientes das potencias de x em Z (*Alg. El.* n.° 109, III.) E como uma parte das soluções será dada então pela combinação de P=0 com T=0, e a outra parte por Q=0 com T=0, segue-se; que *não podemos n'este caso supprimir, como no processo do divisor commum, os factores, que só contiverem* y; ou antes, que podemos supprimil-os, tractando-os separadamente.

Por ex.°, nas equações

$$x^2+x(y-3)+y^2-3y+2=0,\ x^2-2x+y^2-y=0,$$

chega-se ao resto $(y-1)(x-2)$. Antes de passar á segunda divisão, supprimir-se-ha o factor $y-1$, suppondo porém $y=1$, o que dá $x=0$ e $x=2$. Continuando depois o cálculo com o resto $x-2$, obter-se-ha o resto final $y^2-y=0$, que dá $y=0$ e $y=1$, correspondentes a $x=2$.

3.° Antes de procedermos á multiplicação de um dividendo por algum dos factores M, M′, M″, ... devemos verificar primeiro, pelo methodo dos divisores communs, se o divisor tem por factor de todos os seus termos M, M′, ... ou os seus divisores; por que em tal caso deveria supprimir-se esse factor do divisor, e tractal-o separadamente, como nos casos precedentes.

Por ex.°, nas equações

$$x^3-x^2y+x(y-6)+y^2-4=0,\ x^2-xy-4=0,$$

obtem-se na primeira divisão o quociente x, e o resto $x(y-2)+y^2-4$, o qual tem $y-2$ por factor. Devemos então pôr $y=2$ no divisor, que se torna em x^2-2x-4, e dá $x=1\pm\sqrt{5}$. E continuando o cálculo com o outro factor, chega-se á equação final $y^2+3y=0$, donde se tira $y=0$ e $y=-3$, correspondentes a $x=-2$ e $x=1$.

Nas equações

$$x^3-(3y-6)\,x^2+(3y^2-12y+8)\,x-y^3+6y^2-8y=0\,,$$

$$x^2+(2y+2)\,x+y^2+2y=0\,,$$

obtem-se pela 1.ª divisão o resto $3xy(y-1)+y^3+3y^2-4y$, que tem os factores y e $y-1$, e por isso faremos primeiro $y=0$, e $y=1$; d'onde resultam os valores $x=0$ e $x=-2$ correspondentes a $y=0$; e $x=-1$ e $x=-3$ correspondentes a $y=1$. Supprimidos os factores, o resto que passa a divisor, torna-se em $3x+y+4$; e feito o cálculo acha-se a equação final $y^2-y-2=0$, que dá os valores $y=2$ e $y=1$ correspondentes a $x=-2$ e $x=-1$. Por onde se vê que o problema dá seis soluções.

4.° Finalmente, se existir um factor commum D entre Z e T, $Z=P\times D$, $T=Q\times D$, como $D=0$ torna estes productos nullos, esta equação dará uma das incognitas, tomando a outra arbitrariamente. Por conseguinte *neste caso o problema é indeterminado, admittindo uma infinidade de soluções.*

As soluções das equações $P=0$ e $Q=0$, que são em numero limitado, satisfazem tambem á questão.

Assim nas equações

$$(y-4)\,x^2-y+4=0\,,\; x^3-x^2-xy+y=0\,,$$

que tem o factor commum $x-1$, o valor $x=1$ reduz a proposta a zero, qualquer que seja y. De mais os quocientes da divisão por $x-1$

são $$(y-4)(x+1)=0\,,\; x^2-y=0\,,$$

as quaes, além das infinitas soluções, que acabâmos de obter, dão ainda $y=1$ e $y=4$ correspondentes a $x=-1$, $x=\pm 2$.

54. Para desembaraçar $Y=0$ das raizes extranhas bastará dividir Y pelos factores M, M', M'', ... , por isso que ellas tornam nullos alguns d'estes factores, que sómente encerram y. (*) Consulte-se, para

(*) Ha uma excepção accidental, quando $y=\lambda$ raiz da equação $M=0$ reduz T a um valor numerico, por quanto nenhum valor de x póde tornar nulmaior desenvolvimento, uma memoria de M. Cirodde sôbre a *theoria da eliminação* entre duas equações de um gráo qualquer entre duas incognitas.

55. Quando da combinação das equações $Z=0$, $T=0$, se puder obter um resultado mais simples, deve empregar-se este com preferencia a $Z=0$.

Sommando as equações do 1.° ex.° de pag. 89, e resolvendo-as em ordem a y, que na somma chega apenas ao 1.° gráo, obtem-se as soluções immediatamente.

Tambem póde algumas vezes tornar-se mais commodo o processo de eliminação ordenando Z e T relativamente a y.

Quando Z e T são do mesmo gráo m, eliminando x^m, como se fosse uma simples incognita abaixa-se uma das equações ao gráo $m-1$.

56. Sôbre a regra dada a pag. 86 cumpre fazer as seguintes advertencias, relativas aos casos em que Y e D se reduzem a zero, ou tem um valor numerico.

1.ª *Quando o resto* Y *se reduz a zero.* Então D é factor commum de Z e T, caso que já examinámos no n.° 53, 4.° *O problema é indeterminado.*

2.ª *Quando* Y *é um numero.* Neste caso V e D não podem tornar-se nullos ao mesmo tempo (eq. 2); logo nenhum dos valores de x e y póde satisfazer ás propostas, que exprimem então condições contradictorias e por isso *o prablema é absurdo.* É o que se verifica nas equações

$$3x^2-6xy+3y^2-1=0\,,\ 2x^2-4xy+2y^2+1=0.$$

Se em duas equações, cuja coexistencia é impossivel, e em que entra uma só incognita, taes como

$$3z^2-1=0\,,\ 2z^2+1=0\,,$$

fizermos $z=x+y$, ou $z=y$, ou z egual a quaesquer outras funcções de

---

los ao mesmo tempo M e T; logo nem $y-\lambda$, nem por conseguinte M, póde dividir Y; o factor M não introduziu a raiz estranha $y=\lambda$. O mesmo diremos de M' relativamente a R, de M'' a R' etc. Este caso é facil de reconhecer, quando por acaso se achar, que Y não é divisivel por M, ou M', etc.

x e y, é evidente que as equações resultantes serão tambem incompativeis.

3.ª *Quando o divisor* D *se torna nullo para uma raiz* $y=\lambda$ *da equação* $Y=0$. Então $y-\lambda$ é factor de D; e já se viu que é necessario supprimir este factor, e tractal-o separadamente (pag. 92.).

Se no último ex.º do n.º 53, 3.º deixassemos de supprimir os factores y e $y-1$ do 1.º resto, chegar-se-hia á equação final

$$y^6-3y^5+y^4+3y^3-2y^2=0,$$

cujas raizes são $y=0$, $y=1$, $y=1$, $y=-1$, $y=2$. As tres primeiras dariam logar á circunstancia de que estâmos tractando.

4.ª *Quando o último divisor* D *se torna em um numero* δ, *para* $y=\lambda$. Dividindo D por $y-\lambda$, e sendo K o quociente e L o resto, temos

$$D=(y-\lambda)K+L.$$

Como $y=\lambda$ dá um valor numerico δ a D, x não entra em L; e por que deve ser ao mesmo tempo $D=0$, $Y=0$, o valor $y=\lambda$ corresponde a x infinito, unica maneira de tornar D nullo.

Assim as equações

$$y^3x^3+xy^3(y-1)-1=0,\ y^2x^2+y^3-y^2-1=0,$$

tem por valor final $y^2(y-1)=0$, e por último divisor $xy-1=0$; vindo $y=1$ a corresponder a $x=1$, e $y=0$ a $x=\infty$.

57. Se tivessemos tres equações entre as tres incognitas x, y e z, para se obter *a equação final* em x, isto é, a equação que admitisse todos os valores da incognita x, susceptiveis de satisfazerem ás tres equações propostas conjunctamente com certos valores de y e z: deveriamos, considerando uma d'ellas, x por exemplo, como conhecida, eliminar primeiro y entre as tres equações duas a duas, pelo methodo precedente; o que nos levaria a duas equações entre x e z, ás quaes se applicaria o mesmo methodo para eliminar z.

O mesmo raciocinio empregaremos para 4 equações a 4 incognitas, etc. Sendo por ex.° as tres equações

$$x^2+z^2-2y=0\,,\ x^2+y^2=2\,,\ z^2x=1.$$

Eliminando y entre estas equações duas a duas, vem por a fim a equação

$$z^4+2xz^2+5x^2=8\,,\ z^2x=1.$$

Eliminando depois z d'estas equações, vem a equação final em x

$$5x^4-6x^2+1=0,$$

que dá $x=\pm 1$, e $x=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$. Com estas quatro raizes de x, obteremos as de z por meio da equação $z^2x=1$; e depois as de y por qual quer das 1.as duas propostas.

Sôbre a existencia das Raizes.

58. Consideremos a funcção

$$fx=px^n+qx^{n-1}+\ldots\ldots+u,$$

na qual é p um coefficiente positivo. Construindo (fig. 1), sôbre os eixos rectangulares Ax, Ay, a curva MM′M″. . . . cuja equação é $y=fx$; a cada uma das abscissas corresponderá uma unica coordenada, e por conseguinte: *qualquer parallela ao eixo* Ay *corta a curva n'um ponto unico; a curva é um traço continuo, que se extende ao infinito, tanto para a direita como para a esquerda, sem nós, nem ramos duplos, podendo ter differentes inflexões.* Dá-se-lhe o nome de curva parabolica, pela analogia que tem com a parabola, cuja equação é $y=ax^2$.

Quando a curva corta o eixo dos x em algum ponto k, a abscissa Ak d'este ponto corresponde a $y=0$, e é por conseguinte raiz da equação $fx=0$. As raizes positivas dão as abscissas dos pontos de secção collocados á direita da origem A; as negativas dão as que ficam á esquerda. Uma ordenada positiva PM marca um ponto M da curva situado para a parte de cima do eixo Ax; uma negativa P'M' marca um ponto M' para a parte debaixo.

Para que a uma abscissa Ak raiz da equação $fx=0$, se succeda outra Ak', é necessario que o arco, inflectindo-se, se approxime do eixo Ax, o que produz as ondulações que se notam na fig. 1; ás inflexões que não chegam ao eixo, não podem ser produzidas pelas raizes reaes.

Como a fórma da curva determina as raizes, e como nos diversos pontos a direcção do arco é a mesma da tangente, busquemos as inclinações das tangentes sôbre o eixo dos x.

Sejam BMM' (fig. 2) um arco da curva, cuja equação é $y=fx$; M e M' dous pontos d'este arco; x e y as coordenadas de M; $x+h$, $y+k$ as de M'; A$p=x$, PM$=y$, PP'$=h$, QM'$=k$.

Substituindo em $y=fx$, x por $x+h$, teremos (n.° 31)

$$y+k=fx+hf'x+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

d'onde

$$\frac{k}{h}=f'x+\tfrac{1}{2}hf''x+\tfrac{1}{6}h^2f'''+\ldots\ldots \quad (2)$$

Ora, se resolvermos o triangulo rectangulo QMM', e designarmos por S o angulo que a secante M'MS faz com o eixo Ax, teremos

$$\text{tang S}=\frac{\text{QM}'}{\text{QM}}=\frac{k}{h};$$

logo a expressão (2) é o valor de tang S. Porém quanto mais h diminue, mais se approxima esta expressão de $f'x$, e ao mesmo tempo tende S a tornar-se no angulo T, que a tangente tirada pelo ponto M faz com Ax.

Será pois, no limite,

$$\text{tang T}=f'x=\textit{derivada do polynomio } fx.$$

Por tanto, se fizermos passar x por todos os gráos de grandeza comprehendidos entre AP e AP' (fig. 1), os differentes valores de $f'x$ exprimirão os das tangentes de todos os angulos T, que formam com os eixos dos x as tangentes successivas do arco MM'. Estes angulos são agudos (do lado direito) quando $f'x$ tem o signal + (como no arco BM, fig. 2.); e obtusos quando $f'x$ tem o signal — (como em OM fig. 1). A tangente é parallela ao eixo dos x em O, o', O', O'', quando é $f'x=0$. As inflexões da curva resultam das variações do signal que experimenta $f'x$.

Como pela natureza de fx nenhum valor de x póde tornar este polynomio infinito, em nenhum ponto póde a tangente ser perpendicular ao eixo dos x; nem por conseguinte póde ter logar na curva uma *reversão* como na fig. 3.

59. Como o triangulo rectangulo HMQ (fig. 2.) dá $HQ=hf'x$, será a ordenada do ponto H da tangente, que tem $x+h$ por abscissa,

$$P'H=fx+hf'x.$$

Substituindo este valor na expressão (1), que dá a ordenada do ponto M da curva, vem

$$P'M'=y+k=P'H+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\text{etc.};$$

e como h póde tornar-se tão pequeno como se quizer, o signal da quantidade, que no último membro tem de ajunctar-se a P'H, vem a depender do signal de $\frac{1}{2}h^2f''x$, ou antes do signal de $f''x$, por ser h^2 essencialmente positivo.

Por conseguinte, nos pontos vizinhos de M, será a ordenada P'M' da curva maior ou menor que a ordenada P'H da tangente, conforme $f''x$ for positiva ou negativa; e isto tanto para a direita como para a esquerda do ponto M, por isso que o signal de h nada influe.

Logo: *a curva, nos pontos vizinhos de um logar determinado por um valor dado a* x, *terá voltada para cima a sua concavidade ou a sua convexidade, isto é, terá as ordenadas dos mesmos pontos, para uma e outra parte, maiores ou menores que as ordenadas correspondentes da tangente, naquelle logar, conforme* f''x *tiver o signal + ou —.*

Tudo quanto acaba de dizer-se convém igualmente ao caso em que o arco fica situado para a parte debaixo do eixo dos x, o que se demonstra por um raciocinio identico. E de mais, se mudarmos y em $y_{,}-i$, a equação $y=fx$ tornar-se-ha em $y_{,}=fx+i$, a qual só terá differença da primeira no último termo que, em vez de u, será $u+i$, conservando por isso os mesmos valores para as derivadas $f'x$, $f''x$, ...: ora, como esta transformação equival a fazer descer o eixo dos x parallelamente a si mesmo a uma distancia arbitrária i, podemos sempre suppor, que por este modo todas as ondulações da curva passaram para cima do novo eixo dos x; e então applica-se a todas o theorema enunciado. $y/$

Querendo comparar o arco da curva com eixo dos x, é facil de ver, que o theorema precedente se reduz ao seguinte:

O arco volta a sua concavidade para o eixo quando fx *e* $f''x$ *são de signaes contrarios, e a sua convexidade quando os signaes são os mesmos.*

60. O ponto I (fig. 5.) em que um arco convexo se une com um arco concavo chama-se *ponto de inflexão.* A abscissa x d'este ponto devendo ficar na passagem de $f''x$ de positiva para negativa, deve ser raiz de $f''x=0$. Com effeito, no ponto I de inflexão, a tangente fica entre os dous arcos que ella corta e toca n'este ponto I; suppondo pois $f''x=0$, ou nullo o 3.° termo de (1), vem

$$y+k=fx+hf'x+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\tfrac{1}{24}h^4f^{IV}x+\ldots.$$

$$=\mathrm{P'H}+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\tfrac{1}{24}h^4f^{IV}x+\ldots;$$

e como h se póde tornar tam pequeno como se quizer, o signal da quantidade que tem de ajunctar-se a P'H, é o do seu 1.° termo $\frac{1}{6}h^3f'''x$, o qual muda com o de h. Por tanto, segundo se tomar o ponto vizinho de M para a direita ou para a esquerda, assim a ordenada da tangente será maior ou menor que a da curva, ficando por este modo o arco situado para a parte de cima da tangente do lado do ponto M de contacto, e para baixo do outro lado: caracter proprio da inflexão, que não tería logar, se não fosse $f''x=0$.

Logo para obter as abscissas dos pontos de inflexão, bastará resolver a equação $f''x=0$, cujas raizes determinam estes pontos que são os de separação das inflexões. Os valores de $f'x$ correspondentes a estas raizes, determinarão as inclinações das tangentes n'estes pontos.

61. Em cada ondulação da curva ha um ponto O, O', ... fig. (1) em que a tangente fica parallela ao eixo dos x, e em que a ordenada é *maxima* ou *minima*, isto é, maior ou menor do que as que lhe ficam

vizinhas de ambos os lados. As raizes das equações $f'x=0$ são as abscissas d'estes pontos.

Para distinguir o *maximo do minimo* advertiremos, que devendo a ordenada maxima, positiva ou negativa, pertencer a um arco concavo para o eixo dos x, nesse caso serão differentes os signaes de fx e $f''x$; e serão, pelo contrario, estes signaes os mesmos no caso do minimo, em que a ordenada corresponde a um arco convexo.

E com effeito, sendo $f'x=0$, fica a serie (1) privada do seu 2.º termo, e a ordenada PM′ (fig. 2) da curva se reduz a

$$PM'=fx+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\text{etc.}=\text{á ordenada } PM+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\text{etc.}\ldots \quad (3)$$

Porém se h é muito pequeno, esta serie toma o signal de $f''x$, quer h seja positivo quer negativo: assim quando fx e $f''x$ tem o mesmo signal, as ordenadas, á direita e á esquerda de PM, são maiores que esta ordenada, e succede o contrario quando os signaes são differentes.

Logo: *tanto no caso do maximo positivo, como do negativo, são* fx *e* f″x *de signaes contrarios; no caso do minimo, os signaes são os mesmos.*

Appliquemos esta theoria á equação

$$y=fx=x^4-\tfrac{16}{3}x^3+\tfrac{19}{2}x^2-6x+\tfrac{5}{6};$$

da qual se deduz

$$f'x=4x^3-16x^2+19x-6,\ f''x=12x^2-32x+19.$$

Fazendo $f'x=0$, resulta $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=2$; e applicando estas raizes sôbre o eixo Ax (fig. 4) de A para P, P′, e P″, obteremos as coordenadas, correspondentes aos maximos e minimos,

$$PO=-\tfrac{15}{48},\ P'O'=+\tfrac{13}{48},\ P''O''=+\tfrac{1}{6}.$$

Como $x=0$ dá $AB=\frac{5}{6}$, a curva passa em BOO′O″...... Resolvendo a equação $f''x=0$, obtem-se para abscissas dos pontos I e I′ de inflexão, AQ$=0{,}89$, AQ′$=1{,}77$. E como os valores de x menores que 0,89 dão $f''x$ positiva, será $f''x$ negativa para todos os pontos da curva desde I até I'; positiva para todos os outros. Haverá pois um maximo negativo em O, e um positivo em O', por isso que, para esses pontos, fx e $f''x$ tem signaes contrarios; e um minimo positivo em O'', para o qual estas expressões tem os mesmos signaes.

As duas raizes reaes, da equação $fx = 0$, AD = 1 e AC, determinam os dois pontos C e D de secção com o eixo; as outras duas são imaginarias.

62. As raizes da equação $f'x = 0$ são as abscissas dos pontos da curva em que a tangente é horizontal, e acabámos de ver que esses pontos tem a sua ordenada maxima ou minima conforme os signaes de fx e $f''x$. Mas se, além disto, alguma d'estas raizes tornar $f''x = 0$, não haverá então maximo nem minimo, porém uma inflexão horizontal como na fig. 5. Com effeito, sendo nesse caso a parte do desenvolvimento, que tem de ajunctar-se á ordenada PM, $\frac{1}{6}h^3 f'''x + \ldots$, e mudando o 1.° termo de signal com o de h, o arco é concavo de um lado do ponto M de contacto, e convexo do outro. E por que este valor de x dá ao mesmo tempo $f'x = 0$, $f''x = 0$, a 1.ª d'estas equações tem duas raizes eguaes; e assim corresponde este caso á circunstancia de se fundirem duas ondulações successivas n'uma só, em consequencia do desvanecimento do arco que liga um maximo ao seguinte, e pela coincidencia de um com outro, bem como das suas tangentes. f'''

Tambem poderia acontecer que $f'''x$ fosse nulla; então a parte additiva a PM na expressão (3) sería $\frac{1}{12}h^4 fx^{\text{IV}} + \ldots$, a qual, conservando o mesmo signal de ambos os lados do contacto, daria um maximo ou minimo, conforme o signal — ou + de $f^{\text{IV}}x$. N'este caso tres ondulações da curva se fundiriam n'uma só. $f^{\text{IV}}x$

Em geral para ter um maximo ou um minimo, correspondentes á tangente horizontal, é necessario, que a 1.ª derivada, que se não torna nulla com a raiz de $f'x = 0$, seja de ordem par; e pelo signal d'esta derivada se distingue o maximo do minimo. E para que a raiz de $f''x = 0$ indique uma inflexão, é necessario que a 1.ª derivada de $f''x$, que se não torna nulla com a mesma raiz, seja de ordem impar.

Da natureza da curva parabolica segue-se: que uma convexidade deve succeder a uma concavidade, e reciprocamente; um maximo positivo a um maximo negativo, quando o arco corta o eixo dos x, ou a um minimo positivo, quando o não corta; um minimo negativo, ou um maximo positivo, a um maximo negativo. Isto porém não tem logar, quando a curva tiver uma tangente horizontal ao ponto mesmo de inflexão (fig. 5), o que acontece quando forem conjunctamente $f'x=0$ e $f''x=0$, por que então este *ponto singular* partecipa ao mesmo tempo da propriedade de maximo e de minimo. E se além disto for tambem $f'''x=0$, concluir-se-ha que o ponto equival a tres fundidos n'um só. E assim por diante.

Se a tangente é obliqua ao eixo dos x, $f'x$ não é nulla; e se então for $f''x=0$ haverá, como já vimos, uma inflexão: porém esta inflexão desapparece quando a mesma raiz d'esta equação torna $f'''x=0$, o que indica que duas ondulações se fundiram n'uma só. E se $f^{IV}x=0$, torna a apparecer a inflexão, etc. N'uma palavra todas as circumstancias enunciadas no caso da tangente horizontal, podem ainda realisar-se, quando é obliqua, pelo desvanecimento de algumas ondulações.

63. Do que temos exposto segue-se, que se duas abscissas AP, AP' (fig. 1) derem para fx dous resultados de signaes contrarios PM, P'M', como os pontos M e M' estão um para cima, e outro para baixo do eixo $x'x$, e o arco deve caminhar d'um d'estes pontos para o outro por um traço continuo, é forçoso que a curva corte o eixo em um ponto k intermedio. E póde tambem acontecer, que n'este intervallo PP' tenha a curva ondulações, e forme 3, 5, 7 ...... intersecções com eixo, como se vê no arco pontoado das fig. 8 e 9, no qual a curva passa de m para M, cortando o eixo um numero impar de vezes.

Quando duas abscissas AP, AP'' (fig. 1.) dão para fx resultados do mesmo signal PM, P''M'', indicam que os dous pontos M e M'' da curva estão situados da mesma parte do eixo $x'x$, e que, por conseguinte, o arco que une estes dous pontos não corta o eixo; excepto se o arco for ondulado, por que então póde cortal-o tambem em 2, 4, 6, ... pontos, como no arco pontoado de m para M (fig. 6 e 7).

Não se deve considerar como excepção do numero par ou impar de intersecções da curva com eixo $x'x$, o caso em que ella só tocasse este eixo (fig. 10.); por que então o valor $x=a$ da abscissa do ponto k de contacto, tornaria conjunctamente $fx=0$ e $f'x=0$, e por conseguinte $fx=0$ teria uma raiz a dupla, e o factor $(x-a)^2$; de sórte que viriam a ser dous pontos de secção do arco MkM' que se achariam reunidos n'um só, devendo este ponto de contacto k contar-se por duas intersecções. E se $x=a$ tornasse além disso $f''x=0$, o ponto unico de secção e de contacto corresponderia a uma raiz tripla de $fx=0$, a uma inflexão de MkM', e se contaria por tres em consequencia do factor $(x-a)^3$. Em geral, se fx tivesse o factor $(x-a)^m$, o ponto correspondente á raiz $x=a$ deveria contar-se por m pontos de secção, por que todas as derivadas até $f^{m-1}x$ seriam nullas, e a curva teria realmente m intersecções reunidas n'uma só.

Logo: *Se dous valores substituidos por* x *em* fx *derem resultados de signaes contrários, a equação* fx = 0 *terá, entre estes valores, raizes em numero impar, e pelo menos sempre uma raiz intermedia: se os resultados tiverem o mesmo signal, positivo ou negativo, os valores substituidos não comprehenderão nenhuma raiz, ou comprehenderão um numero d'ellas par.*

64. Posto isto, examinemos os dous casos do grão par e impar.

I. *Quando a equação* fx *for do grão par* n, se tomarmos por x o limite AP (fig. 6 e 7) das raizes positivas, sendo então o 1.° termo kx^n, do polynomio fx, positivo e maior que a somma dos termos negativos, fx, ou a ordenada PM, será positiva. As derivadas $f'x$ e $f''x$ tambem serão evidentemente positivas; e por conseguinte a tangente aos pontos da curva desde M até ao infinito fará um angulo agudo MTP com o eixo Ax, e será concava para cima, desviando-se cada vez mais d'este eixo. Se tomarmos porém por x o limite Ap das raizes negativas, tambem n'este caso fx e $f''x$ serão positivas, por que os expoentes n e $n-2$ do 1.° termo d'estes polynomios são pares; logo a curva tambem será concava até ao infinito, desviando-se continuamente para a parte de cima do eixo Ax. Porém $f'x$ será negativa, por que $n-1$ é impar; e a tangente, aos pontos da curva desde m até ao infinito, fará por isso um angulo obtuso MtP com Ax.

Ora, *se o ultimo termo de* fx *for negativo*, $-u$, fazendo $x=0$, y tornar-se-ha em $-u$, quantidade que se construirá applicando o comprimento $AB = -u$ (fig. 6.) para a parte debaixo da origem A. Assim a curva passará pelos tres pontos m, B e M, e cortará o eixo ao menos uma vez em k' á esquerda, e uma vez em k á direita; ou poderá, cortar tambem o eixo em 3, 5, 7 ...... pontos de cada lado, como se representa na linha pontoada.

Logo: *toda a equação de grão par, cujo ultimo termo for negativo, terá um numero impar de raizes positivas e outro numero impar d'ellas negativas, sendo pelo menos uma raiz positiva e outra negativa.*

Se porém *o ultimo termo de* fx *for positivo*, $+u$, fazendo $x=0$, y tornar-se-ha em $+u$, quantidade que se construirá applicando $AB = u$ (fig. 7.) para a parte de cima da origem A. A curva passará pelos tres pontos m, B e M, situados para a parte de cima do eixo $x'x$, podendo ter logar ou ondulações que não cheguem a encontrar eixo, ou intersecções, as quaes serão sempre em numero par, tanto pera a direita como para a esquerda, como se vê na linha pontoada.

Logo: *toda a equação de grão par, cujo ultimo termo for positivo, ou não terá raiz alguma real, ou as terá em numero par, tanto positivas, como negativas.*

II. *Quando* fx *for do gráo impar* n, ainda tem logar o que se disse a respeito da fórma da curva do lado dos x positivos; desde o ponto M (fig. 8 e 9) ella continuará a ser concava, desviando-se sempre do eixo Ax até ao infinito, e fazendo as tangentes angulos agudos com o mesmo eixo. Mas se tomarmos por x o limite Ap das raizes negativas, como o expoente n do 1.° termo de fx, e o expoente $n-2$ do 1.° termo de $f''x$, são impares, estes primeiros termos serão negativos, resultando por isso uma ordenada negativa pm, e um arco convexo para a parte de cima. Além disto no ponto m situado para baixo, a tangente fará um angulo agudo com os x, por que o expoente $n-1$ do 1.° termo de $f'x$ é par.

Se o último termo de fx for negativo, $-u$, $x=0$ dá $y=-u$, que se construe applicando AB$=-u$ (fig. 8) para a parte debaixo da origem A; a curva caminhará pois de m para B, depois para M. Donde se vê que póde não cortar o eixo $x'x$ no espaço Ax', e que ao menos o cortará uma vez entre A e P. As intersecções que resultarem das ondulações serão em numero par de x' para A, e impar de A para P.

Logo: *toda a equação de gráo impar, cujo último termo for negativo terá sempre um numero impar de raizes positivas* (*uma pelo menos*); *e ou não terá raizes negativas, ou as terá em numero par.*

Se porém o último termo de fx for positivo, $+u$, deverá tomar-se AB$=u$ (fig. 9) para cima da origem; a curva caminhará pois de m para B e para M; cortará o eixo entre A e p em um numero impar de pontos; poderá não encontrar este eixo desde A até P, e se o encontrar, será em um numero par de pontos.

Logo: *toda a equação de gráo impar cujo ultimo termo for positivo, terá um numero impar de raizes negativas* (*uma pelo menos*); *e ou não terá raizes positivas, ou as terá em numero par.*

O caso de ser a curva tangente ao eixo dos x não faz excepção, por que já se viu que então a equação $fx=0$ tem raizes eguaes, e que se devem contar estas raizes como correspondentes a um egual numero de pontos communs á curva e ao eixo.

Se dividirmos por x^i a equação

$$kx^n+\ldots qx^i-rx^{i-1}-sx^{i-2}-\ldots-u=0,$$

obteremos

$$kx^{n-i}+\ldots+q=\frac{r}{x}+\frac{s}{x^2}+\ldots+\frac{u}{x^i}.$$

Ora, sendo negativo o último termo da proposta, esta terá uma raiz positiva $x = \alpha$, que tornará eguaes os dous membros da última equação. Se dermos a x um valor maior ou menor que α, a egualdade dos dous membros tornar-se-ha impossivel, por que um d'elles augmentará, diminuindo o outro.

Logo: *Quando uma equação, depois de ordenada, constar de termos positivos, seguidos d'outros termos todos negativos, não terá mais do que uma raiz positiva, e as outras raizes serão negativas ou imaginarias.*

65. Vimos no n.° precedente, que sendo par o grão de uma equação, deve ella ter as suas raizes reaes em numero par, ou não ter nenhuma; e que sendo o grão impar, as raizes reaes devem ser em numero impar. Por conseguinte, *as raizes imaginarias de uma equação são sempre em numero par; e uma equação que não tem raiz real, é necessariamente do grão par, e tem o último termo positivo.*

Se todas as raizes da equação $f'x = 0$ forem reaes, a curva terá $n-1$ tangentes horizontaes e $n-1$ ondulações. Se cada um d'estes arcos cortar o eixo dos x, as n raizes da equação $fx = 0$ tambem serão reaes; e como então não ha senão maximos alternadamente positivos e negativos, todas as raizes de $f'x = 0$ darão signaes differentes a fx e $f''x$, e o producto d'estas funcções será negativo.

Porém as raizes reaes de $fx = 0$ serão substituidas por outras imaginarias aos pares, quando não houver estas ondulações duplas, i. é, quando os maximos forem substituidos por minimos, e a ondulação não chegar a tocar o eixo.

E quando a equação $f'x = 0$ tiver raizes imaginarias, que sempre serão em numero par, a curva cuja equação é $y = fx$ perderá outras tantas ondulações, e $fx = 0$ outros tantos pares de raizes reaes.

Logo, em geral: *a equação* $fx = 0$ *terá tantas raizes imaginarias quantas* $f'x = 0$, *ou um numero ainda maior, isto é, tantas quantas tiver* $f'x = 0$, *e além d'estas quantas forem as raizes reaes d'esta ultima equação, que tornem* fx *e* $f''x$ *do mesmo signal*; por que havendo minimo n'estes casos, faltarão aos pares as intersecções da curva com o eixo dos x.

Se a equação $fx = 0$ tiver todas as suas raizes reaes, as equações $f'x = 0$, $f''x = 0$, tambem as terão da mesma especie; a reciproca d'esta proposição não é verdadeira.

66. Da analyse de uma equação $fx = 0$, facilmente, se podem deduzir as formas que tomará a curva cuja equação é $y = fx$:

1.° Se a equação do 3.° grão é da forma $y = kx^3 + px^2 + qx + r$, os ramos da curva que ella representa, extendem-se indefinidamente, e tomam a disposição indicada nas fig. 8 e 9.

Se as raizes da equação $f'x=0$, que n'este caso é do 2.° gráo, são reaes, a curva tem duas tangentes horizontaes e duas ondulações. Se o eixo xx' (fig. 11) cortar estas duas ondulações, a equação $fx=0$ terá as suas tres raizes reaes; porém se este eixo, como AA' ou BB' por ex.°, as não cortar, a equação só terá real uma raiz, a qual será positiva ou negativa conforme o último termo r tiver o signal — ou +. Entre estes dous casos comprehende-se o de ser o eixo xx' tangente a uma das ondulações, e então $fx=0$, $f'x=0$ terão uma raiz commum α, e $(x-\alpha)^2$ será factor de fx. Se for $fx=(x-\alpha)^3$ as duas ondulações se fundirão em uma só, a curva terá a fórma MkM'' da fig. 10, e será tangente ao eixo no ponto de inflexão k.

Se porém a equação $f'x=0$ tiver ambas as raizes imaginarias, a curva não terá ondulações e tomará a fórma da fig. 12. A equação proposta só terá real uma raiz, de signal contrario ao do último termo r.

2.° Se a equação for do 4.° gráo $y=kx^4+\ldots\ldots\ldots$, a derivada $f'x=0$ será do 3.°; e se as suas tres raizes forem reaes, a curva terá tres ondulações (fig. 13.). O eixo dos x póde cortal-as todas, e então a equação $fx=0$ terá reaes todas as suas 4 raizes; ou cortar só uma, como AO', e terá só duas reaes; ou finalmente não cortar nenhuma, como BB', e não terá nenhuma real. A curva terá dous pontos de inflexão dados pelas raizes reaes da equação $f''x=0$.

Se a equação $f'x=0$ tiver só real uma raiz, e a equação $f''x=0$ as não tiver d'esta especie, a curva não terá inflexão, e sómente terá uma ondulação (fig. 6), a qual ou cortará o eixo só em dous pontos, ou não o encontrará, e assim terá duas raizes reaes, ou quatro imaginárias.

3.° Se a equação for do 5.° gráo, a curva tomará a fórma da fig. 14, se $f'x=0$ tiver as 4 raizes reaes; a da fig. 11, se tiver sómente duas; ou finalmente a da fig. 12, se todas as 4 raizes forem imaginarias.

Finalmente, proseguindo n'esta analyse a respeito das equações de gráos mais elevados, convencer-nos-hemos, sem nos servirmos do theorema do n.° 28, que toda a equação tem pelo menos uma raiz real, excepto o caso de ser de gráo par e ter o último termo positivo. Mais adiante provaremos, que, ainda mesmo n'este caso, existe *um symbolo algebrico*, *uma funcção dos coefficientes*, que substituido por x deve reduzir fx a zero; e por este modo ficaremos certos de que toda a equação tem uma raiz real ou imaginaria, e por conseguinte, pelo n.° 28, que sendo do gráo n terá precisamente n raizes.

67. Sejam $a, b, \ldots\ldots -a', -b', \ldots\ldots$ as raizes reaes de uma equação $fx=T(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x+a')(x+b')\ldots\ldots\ldots=0$, na

qual suppomos, que $T=0$ não tem raizes reaes, e que por conseguinte o polynomio T é de grão par, e tem o seu último termo positivo. Como o último termo de $fx=0$ é o producto do de T por $-a, -b, \ldots +a', +b', \ldots$, o seu signal depende de ser par ou impar o numero dos factores negativos. Logo o último termo de uma equação é positivo ou negativo, conforme fôr par ou impar o numero das raizes positivas, seja qualquer que for, por outra parte, o numero das negativas e das imaginarias.

68. Supponhamos, que tendo resolvido a equação $f'x=0$, chegámos a distinguir os maximos dos minimos na curva representada por $y=fx$, por meio da comparação dos signaes de fx e $f''x$, relativos aos valores de x que são raizes de $f'x=0$; e que estas raizes correspondem a M maximos e m minimos.

Posto isto, imaginemos que um ponto movel partindo do infinito negativo, descreve a curva caminhando para o infinito positivo. Durante um immenso intervallo d'este transito, o movel não encontrará o eixo, por que só nas proximidades da origem, é que principiarão as ondulações. Passado um maximo, o ponto caminhará para o eixo, e chegará a cortal-o, excepto se, curvando-se, a linha der logar a um minimo, por que então cada minimo destruirá uma intersecção indicada pelo maximo vizinho. Disto se conclue que a expressão $M-m+1$ representa o numero das intersecções, isto é, o das raizes reaes da equação $fx=0$; e accrescentâmos o termo $+1$, por que no movimento do movel não mettemos em conta a intersecção que precede ao 1.° maximo, ou a que succede ao último. Se for $M=m$, isto é, se houver tantos maximos como minimos, a equação terá só uma raiz real, e será por conseguinte de grão impar. Se não houver minimo, póde acontecer que não haja senão um maximo; e a equação terá então só duas raizes reaes, será do grão par, e o maximo será negativo. Finalmente se não houver maximo, não poderá haver mais do que um minimo, nem raiz alguma real; a equação é do grão par, e o minimo é positivo.

Raizes incommensuraveis.

69. *Methodo de Newton.* Depois de havermos desembaraçado a proposta $fx=0$ das suas raizes tanto eguaes, como commensuraveis, vejamos como se podem achar as raizes irracionaes. Supponhamos que se chegou a obter um valor approximado γ d'uma d'estas raizes, comprehendida entre os valores α e θ; fazendo $x=\gamma$ em fx, pelo signal do re-

sultado (n.° 63.) se reconhecerá se a raiz está comprehendida entre α e γ, ou entre γ e θ. Dêmos que está entre α e γ; tomando $x=\beta$, numero comprehendido entre os dous últimos, tambem viremos a saber pelo signal do resultado, se a raiz está entre α e β, ou entre β e γ. Por este estilo vamos estreitando cada vez mais os limites, e approximando-nos indefinidamente do valor da raiz.

Este processo laborioso torna-se impraticavel, quando se exigem grandes approximações; e sómente se emprega *para se obter um numero* α, *que diffira do valor de* x *menos de* $\frac{1}{10}$.

Designando o erro por y, será $x=\alpha+y$, e substituindo em $fx=0$, virá (n.° 31)

$$f(\alpha+y)=f\alpha+yf'\alpha+\frac{y^2}{1.2}f''\alpha+\ldots+ky^m=0.$$

Mas como y se suppõe $<\frac{1}{10}$, e α não entra como denominador em nenhuma d'estas funcções, que são os valores de fx e das suas derivadas quando se põe $x=\alpha$: a regra de Newton consiste em considerar y^2, y^3,.. como quantidades muito pequenas, que se podem desprezar; o que reduz a transformada aos termos $f\alpha+yf'\alpha$, e dá

$$y=\frac{-f\alpha}{f'\alpha}=-\frac{k\alpha^n+p\alpha^{n-1}+\ldots\ldots.t\alpha+u}{nk\alpha^{n-1}+p(n-1)\alpha^{n-2}+\ldots.t}.$$

Chamando s a esta fracção, ou antes ao seu valor approximado, $y=s$ dá $x=\alpha+s$ para 2.ª approximação. Fazendo $\alpha+s=\alpha_{,}$, e designando por $y_{,}$ a nova correcção, esta será dada por uma expressão identica á de y, só com a differença de se dever substituir $\alpha_{,}$ em vez de α, o que dá $x=\alpha+s+y_{,}$. E assim successivamente.

Por ex., se na equação

$$x^3-2x-5=0,$$

fizermos $x=2$ e $x=3$, pelos resultados -1 e $+16$ viremos no conhecimento da existencia de uma raiz entre 2 e 3, que mais se approxima de 2 do que de 3. Se fizermos depois $x=2,1$ virá o resultado 0,061, o qual mostra que 2,1 é maior que x e mais vizinho da raiz que o numero 2. Pondo $\alpha=2,1$, a correcção é

$$s = \frac{\alpha^3 - 2\alpha - 5}{3\alpha^2 - 2} = -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054.$$

Contentando-nos pois com a 1.ª approximação até ás decimas-millionesimas, será $x = 2,0946$. Tomando por α este último valor de x, virá

$$s = -\frac{0,000541550536}{11,16204748} = -0,00004851.$$

Já d'aqui se vê que a 4.ª decimal do valor de x na 1.ª approximação está errada, e que é $x = 2,09455149$. Por este processo conseguiremos corrigir successivamente as últimas decimaes, e obter maiores approximações.

Conservando o termo y^2 no desenvolvimento, virá

$$y = \frac{-f\alpha}{f'\alpha + \frac{1}{2}yf''\alpha};$$

expressão de que se fará uso, substituindo, pelo y que entra no denominador do 2.° membro, a 1.ª correcção s; e assim se obterá um valor mais approximado. No exemplo de cima substituindo por y o valor $s = -0,0054$ em $\frac{1}{2}yf''\alpha$, acha-se $-0,034$; e por denominador da fracção $11,196$: d'onde se conclue $y = 0,0054483$, quantidade que só tem errada a última decimal.

Tomemos para 2.° exemplo a equação

$$x^3 - x^2 + 2x = 3,$$

que tem uma raiz comprehendida entre os numeros 1,2 e 1,3, os quaes substituidos dão os resultados $-0,312$ e $+0,107$. Tomando $\alpha = 1,3$, vem $y = -\frac{0,107}{4,47} = -0,02$, e $x = 1,28$. E porque é $\frac{1}{2}yf''\alpha = (3\alpha - 1)y = 2,9\ y = -0,058$, o denominador torna-se em $4,47 - 0,058 = 4,412$; logo $y = -0,0242$ e $x = 1,2758$. Toma-se depois $\alpha = 1,276$, e continua-se com a approximação.

70. Cumpre advertir, que, em certos casos, não póde ter logar

o methodo de Newton, porque nos levaria a resultados menos exactos.

Com effeito construindo, como no n.º 58, a curva parabolica (fig. 1.) cuja equação é $y = fx$, as raizes da equação $fx = 0$ serão representadas pelas abscissas dos ponto k, k', ... de intersecção d'esta curva com o eixo Ax. Seja $x = AP = \alpha$ um valor approximado da raiz $Ak = a$ (fig. 15 e 16): será a ordenada $PM = f\alpha$, e a tangente do angulo T, que faz com Ax a tangente ao ponto M, será $= f'\alpha$ (n.º 58) Resolvendo o triangulo TPM, e designando por s à *subtangente* TP, vem

$$TP \operatorname{tang} T = PM = f\alpha,\ s = \frac{f\alpha}{f'\alpha};\ \text{e finalmente } AT = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}.$$

É este o novo valor approximado de $AK = a$, seguindo o methodo de Newton, o qual como acaba de ver-se, se reduz a substituir pelo arco Mk a sua tangente MT, na indagação do ponto de secção k com o eixo. Obtida esta 2.ª approximação AT, busca-se por meio d'ella outra tangente $M'T'$, da qual se deduz um novo valor AT' mais approximado. E assim por diante.

Porém se os pontos T, T', ... obtidos d'esta maneira não se approximarem continuadamente do ponto k, o methodo não deve ser empregado. Assim, se tomassemos por valor aproximado α a abscissa Ap (fig. 15.) correspondente ao ponto m vizinho do maximo, é claro que a tangente mt tirada por esse ponto, longe de conduzir a um valor mais approximado de Ak, poderia dar uma subtangente quasi infinita. Se tomassemos por α a abscissa Ap' correspondente ao ponto m', tambem vizinho do ponto O, mas para o outro lado, a subtangente sería dirigida em sentido contrário. D'aqui se vê pois que a fórma e posição do arco mM, relativamente ao eixo, podem fazer com que falhe o methodo, o qual por isso, e para ser abonado nos seus resultados, deve ser sujeito ás seguintes condições.

1.ª *É necessario que entre os limites α e β não esteja comprehendida mais do que uma raiz.* Por que, se houvessem muitas raizes entre α e β a curva, cortando o eixo em muitos pontos intermedios entre estes limites, faria ondulações, e não teriamos meio de saber, se o ponto da curva correspondente á abscissa α que substituimos por x, sería ou não proprio para conduzir a um valor mais approximado de a. É isto o que se acha representado na fig. 1, na qual os limites Ap, Ap' não nos dão a conhecer se é ou não possivel approximar de Ak e Ak'.

2.ª *Devem rejeitar-se os valores de* x *entre α e β, que tornam* *nullas as derivadas $f'x$ e $f''x$.* Por que então haveria n'este intervallo um maximo ou um minimo, ou alguma inflexão (n.^{os} 60 e 61.) em cujas circumstancias o methodo de Newton é evidentemente defeituoso.

Adiante ensinaremos o processo para achar os limites α e β, e o meio de reconhecer se n'elles se dá esta segunda condição.

3.ª *Achados os dous limites α e β, para progredir na approximação só se deve lançar mão d'aquelle que tornar fx e $f''x$ do mesmo signal.* As fig. 15, 16, 17 e 18 representam as differentes posições que póde tomar o arco, conforme voltar para cima a sua convexidade ou a sua concavidade. A raiz é $Ak=a$; AP e Ap são os limites α e β entre os quaes só ella esta comprehendida; a subtangente PT é a correcção s, que dá o methodo, relativa ao limite $AP=\alpha$. É evidente porém, que, para se applicar o methodo com segurança, é necessario, que o pé T da tangente se ache entre o da ordenada P e o ponto k da secção com o eixo: logo a curva deve ser convexa d'esde k até M, ou (n.° 59.) por outra, deve o signal da ordenada fx ser o mesmo que o de $f''x$, para a abscissa $AP=x=\alpha$; e é este o limite que devemos preferir nas approximações subsequentes.

Da inspecção das fig. 15 e 18 se vê, que depois de preferido, pela consideração dos signaes entre os dous limites, o limite $\alpha>a$, todas as approximações successivas serão sempre $>a$: descendo continuadamente para esta raiz a. Se pelo contrario tivessemos preferido o limite $\alpha<a$ (fig. 16 e 17), subir-se-hia para o valor de a por uma serie de approximações todas $<a$.

71. Posto isto, eis em summa o caminho que devemos seguir: 1.° *buscar dois limites α e β entre os quaes não haja mais do que uma raiz:* 2.° *estreitar estes limites, até nos certificarmos, que não comprehendem nenhuma das raizes das equações $f'x=0$, $f''x=0$:* 3.° *tomar por fim, para primeira approximação, aquelles dos dous limites α ou β, que substituido por x em em fx e $f''x$, der resultados com o mesmo signal.*

Seguindo depois o processo indicado, chegaremos a obter o valor s, ou a correcção que deve junctar-se, com o seu signal, a α para se obter a 2.ª approximação $\alpha+s$. Ésta, tomada para novo valor de α, servirá para acharmos a 3.ª; e assim por diante.

É evidente que podemos prescindir de tomar o valor de s, tal qual o dá o cálculo, e que podemos substituir-lhe outro menos complicado, *com tanto que corresponda a um ponto* T *comprehendido entre* P *e* k. Tendo-o pois reduzido a dizima, basta conservar as letras que se julgarem necessarias para a raiz, afim de não complicar inutilmente os cálculos seguintes. Para isto torna-se indispensavel *o conhecimento dos gráos de approximação de cada correcção.*

Ora, se pelo ponto m, correspondente ao 2.° limite $Ap=\beta$, se tirar uma parallela mq á tangente MT, o limite Aq ficará na parte concava da curva, e o ponto k estará visivelmente entre os pés T e q. Mas o triangulo mpq dá $pq = \frac{pm}{\tang q} = -\frac{f\beta}{f'\alpha}$, com o signal —, por que $f\beta$ é negativa; logo $Aq = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}$. Temos assim dous limites conhecidos, entre os quaes cahe a raiz pedida, a saber

$$\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha},\ \beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}.$$

No valor de α' devemos conservar sómente as letras de dizima communs com as de β', e obteremos assim as letras exactas da 2.ª approximação. É preciso tambem ter cuidado em affectar as differentes quantidades que entram n'estas expressões com os signaes competentes. A approximação, lenta ao principio, torna-se muito convergente para a, logo que se chegam a obter 3 ou 4 letras de dizima para a raiz. Fourier demonstrou a lei d'esta approximação na sua *Analyse das equações determinadas.*

Sirva-nos outra vez de exemplo a equação $x^3 - 2x - 5 = 0$, que dá $f'x = 3x^2 - 2$, e $f''x = 6x$. Já vimos, que a raiz está entre os limites 2 e 2,1. As raizes da equação $f'x = 0$ não estão comprehendidas entre estes limites. Finalmente $x = \alpha = 2{,}1$ torna do mesmo signal, e positivas, as expressões fx e $f''x$. Devemos pois preferir o limite $> a$. Temos tambem

$$f\alpha = +0{,}061,\ f'\alpha = +11{,}23,\ \text{e } s = -0{,}00543;$$

logo $\alpha' = 2{,}09457$. Tomando $\beta = 2{,}09$ por ser $2{,}09 < a$, como se reconhece vendo, que este valor dá $f\beta = -0{,}050671$: virá $\frac{f\beta}{f'\alpha} = -0{,}00451$, $\beta' = 2{,}09451$. Concluiremos pois que as quatro primeiras decimaes estão exactas, e que é $x = 2{,}0945$.

Com este novo valor de α acharemos

$$f\alpha = +0{,}00054155,\ f'\alpha = +11{,}16204748,\ \text{e } s = -0{,}000048517;$$

logo $\alpha' = 2{,}094551483$. E tomando $\beta = 2{,}0945$ por ser $2{,}0945 < a$, como se reconhece, vendo que este valor dá

$$f\beta = -0{,}00057459 : \text{virá } \frac{f\beta}{f'\alpha} = -0{,}0005148,\ \beta' = 2{,}09455148.$$

Por este modo temos obtido já oito letras de dizima exactas.

Á medida que o numero vae tendo mais letras, tambem o cálculo se torna mais longo; póde porém abbreviar-se da maneira seguinte. O valor approximado de x da-nos fx, $f'x$, e $s = -\frac{fx}{f'x}$. Para levar o cálculo mais longe, deve por x substituir-se $x_1 = x + s$ em fx, $f'x$, $f''x$, d'onde resulta o seguinte desenvolvimento que, em razão da pequenez do numero s, se reduziu aos primeiros termos:

$$fx' = fx + sf'x + \tfrac{1}{2}s^2f''x,\ f'x_1 = f'x + sf''x.$$

Temos pois um meio facil de concluir o cálculo, como passâmos a mostrar servindo-nos do exemplo de cima. Pondo $\alpha = 2{,}1$ achámos $f\alpha = 0{,}061$, $f'\alpha = 11{,}23$, $f''\alpha = 12{,}6$, e $s = 0{,}0054$; para levar approximação mais adiante bastará fazer $\alpha_1 = \alpha - 0{,}0054$, o que dá

$$f\alpha_1 = 0{,}061 - 0{,}0054 \times 11{,}23 + (0{,}0054)^2 \times 6{,}3 = 0{,}0005417,$$

$$f'\alpha_1 = 11{,}23 - 0{,}0054 \times 12{,}6 = 11{,}16196,$$

$$s' = -\frac{f\alpha_1}{f'\alpha_1} = -0{,}00004853.$$

72. *Methodo de Lagrange.* A verdadeira difficuldade, e aquillo que, primeiro que tudo, importa conhecer para achar as raizes de uma equação, é o *logar das raizes*, isto é, uma serie de numeros taes, que entre dous d'elles tomados consecutivamente não possa existir mais do que uma d'estas raizes.

Quando por x se substitue uma serie de numeros $p, q, r, s, t, \ldots$ e se acham tantos resultados successivos de signaes contrários, quantas são as n unidades do gráo da raiz, todas as raizes são reaes, e o logar de cada uma d'ellas fica determinado. Porém, fóra d'este caso, não se póde saber ao certo o numero das raizes reaes e os seus limites, sendo possivel que, entre os numeros que substituidos por x deram resultados de signaes contrários, se comprehendam 3, 5, 7, raizes, e que entre os que deram resultados dos mesmos signaes, se comprehendam 2, 4, 6,..... (n.° 63) É necessario pois escolher uma serie de substituições tam proximas, que entre duas successivas não possa haver mais do que uma raiz intermedia, para ficarmos na certeza de que *existe uma só raiz entre os numeros consecutivos, que substituidos dão resultados de signaes contrários; e que, pelo contrário, não existe nenhuma entre os numeros consecutivos que dão resultados do mesmo signal.*

Sejam a e b duas raizes comprehendidas entre os limites α e λ, e supponhamos, que estes quatro numeros, escriptos pela ordem de grandeza crescente, são α, a, b, λ: teremos evidentemente $\lambda - \alpha > b - a$, e será esta a condição necessária para que a e b estejam comprehendidos entre α e λ. Por tanto, se a differença entre os dous limites não for maior que a differença entre as raizes, só uma d'ellas, quando muito, poderá ficar entre os mesmos limites. D'onde se segue, que *se for δ menor que a menor differença entre as raizes, e se partindo do limite inferior* l', *substituirmos por* x *os numeros* l', $l'+\delta$, $l'+2\delta$, ... *até ao limite superior* l, *obteremos tantos resultados de signaes contrarios, quantas são as raizes reaes.* Cada mudança de signal nos resultados mostra, que existe uma só raiz entre os numeros substituidos; e a permanencia de signal mostra, que não existe nenhuma.

Para obter δ formaremos uma equação, da qual sejam raizes as differenças entre as raizes da proposta tomadas duas a duas. Para isso, *designando por* y *a differença de uma raiz* x *a outra qualquer da proposta*, e mudando x em $x+y$, teremos

$$fx + yf'x + \tfrac{1}{2}y^2 f''x + \ldots\ldots = 0,$$

equação que, por ser $fx = 0$, se parte, dividindo a segunda por y, nas duas

$$fx = 0,\ f'x + \tfrac{1}{2}yf''x + \tfrac{1}{6}y^2f'''x + \ldots\ldots ky^{n-1} = 0.$$

Eliminando x entre estas duas equações a duas incognitas x e y (n.° 52), virá uma equação $Fy = 0$ a qual se chama *equação ás differenças*, por que n'ella y representa a differença entre uma raiz qualquer x e as outras da proposta. O gráo d'esta equação é $n(n-1)$, por que é este o numero de arranjos 2 a 2 das n raizes de x.

Sendo $a, b, c, \ldots\ldots$ as raizes da proposta, as differenças entre ellas, $a-b, b-a, b-c, c-b, \ldots\ldots$ são eguaes duas a duas e de signaes contrarios; de sorte que designando uma d'ellas por x, teremos $y=\pm x$, e qualquer d'estes dous valores de y tornará $Fy=0$. Disto se segue, que Fy *deve conter sómente potencias pares de* y; e que por consequencia se póde decompor em factores da fórma

$$(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)\ldots\ldots(y^2-\lambda^2).$$

Suppondo pois $y^2=z$, teremos assim a equação *do quadrado das differenças*, $\varphi z=0$, na qual a incognita z é o quadrado de todas as differenças entre as raizes de x.

73. Como já sabemos (n.° 38.) achar um numero i menor que qualquer das raizes positivas z de $\varphi z=0$, isto é, $i<z=y^2$ ou $\sqrt{i}<y$: podemos tomar para differença δ, entre os numeros que temos de subtituir por x, $\sqrt{i}$ ou qualquer numero positivo menor. E por que as funcções Fy, φz tem os mesmos coefficientes, i é tambem o limite inferior de y, e será $i<y$; de maneira que podemos tomar $\delta=i$. Attendendo porém a que é necessario fazer tantas mais substituições desde l' até l, quanto δ for mais pequeno, devemos, para brevidade do cálculo, tomar δ o maior possivel. Assim quando for $i>1$, tomar-se-ha $\delta=i$, e, se quizermos, poderemos substituir os numeros naturaes $0, 1, 2, 3, \ldots.$ Porém quando for $i<1$, deve tomar-se $\delta=\sqrt{i}$.

As substituições dos numeros fraccionarios e irracionaes podem evitar-se de maneira seguinte:

1.° Sabemos (*Arith.* n.° 63) achar um numero que diffira de $\sqrt{i}$ menos que uma dada fracção, $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$ por ex.°. Tomaremos pois uma fracção $\frac{g}{h}$ que diffira de $\sqrt{i}$, para menos, do $\frac{1}{h}$, e far-se-ha $\delta=\frac{g}{h}$. Para h deve escolher-se um numero que não torne δ muito differente de $\sqrt{i}$, e que não seja muito grande, a fim de não complicar os cálculos.

2.° Em logar de substituirmos $0, \frac{g}{h}, \frac{2g}{h}, \ldots\ldots$ em vez de x, podemos tornar tanto as raizes, como as suas differenças, h vezes maiores (n.° 30, 1.°) pondo $x=\frac{t}{h}$; em vez de t teremos de substituir na transformada $0, g, 2g, 3g, \ldots$, ou antes os numeros $0, 1, 2, 3, \ldots$ Por este modo *sabemos transformar as equações em outras, nas quaes não ha mais do que uma raiz, comprehendida entre dous inteiros successivos.*

Note-se, que i se deduz de Fy, e que é escusado formar φz. De mais, como fazendo desapparecer o 2.° termo de $fx=0$ (n.° 33.), todas as raizes ficam augmentadas da mesma quantidade, e conservam entre si as mesmas differenças, será melhor deduzir Fy d'esta transformada.

74. Ex.° 1.° Na equação $x^3-2x=5$, apenas conhecemos uma das raizes (pag. 112). Para ver se as outras duas são reaes, mudemos x em $x+y$, e virá $3x^2-2+3xy+y^2=0$. Eliminando x entre as duas equações, vem $y^6-12y^4+36y^2+643=0$.

Para achar o limite inferior de y, faça-se $y^2=\dfrac{1}{v}$, e virá

$643v^3+36v^2-12v+1=0$, d'onde $v<1+\frac{17}{679}$, e por conseguinte $v<1$, e $y>1=\delta$. Fazendo $x=-4, =-3, =-2, =-1, =0, =1, =2, =3, =4$ entre os limites de x, vem os resultados -61, $-26, -9, -4, -5, -6, -1, +16, +51$, os quaes mostram que as outras duas raizes são imaginarias, e que ha só real, a que já tinhamos achado, e que está comprehendida entre 2 e 3.

Ex.° 2.° A equação $x^3-12x^2+41x-29=0$ dá

$$3x^2-24x+41+(3x-12)\,y+y^2=0;$$

das quaes eliminando x, vem $y^6-42y^4+441y^2=49$. Fazendo depois $y^2=\dfrac{1}{v}$, acha-se

$$49v^3-441v^2+42v-1=0,$$

d'onde $v<10$, $y>\sqrt{\frac{1}{10}}>\frac{1}{4}=\delta$. Pondo $x=\dfrac{t}{4}$ resulta

$$t^3-48t^2+656t=1856,$$

equação, que entre dous inteiros successivos não tem mais do que uma raiz. Fazendo $t=0, 1, 2, \ldots\ldots$ ver-se-ha que t está entre 3 e 4, entre 21 e 22, entre 22 e 23; logo x está entre $\frac{3}{4}$ e 1, $\frac{21}{4}$ e $\frac{22}{4}$, $\frac{22}{4}$ e $\frac{23}{4}$, existindo assim duas raizes entre 5 e 6, que não se teriam reconhecido sem este cálculo.

Ex.º 3.º Finalmente na equação $x^3 - x^2 - 2x + 1$, como $x = 0, = 1, = 2, \ldots$ dá os resultados $+1, -1, +1$, e pela mudança de x em $-x$, os numeros 1 e 2 dão resultados de signaes contrarios, fica conhecido o logar das tres raizes, escusando-se a equação ás differenças. Todavia esta equação é $y^6 - 14y^4 + 49y^2 - 49 = 0$, e d'ellas se deduziria $y > 1$ e $\delta = 1$, pelo processo seguido.

Esta theoria, aliás completa, clara e sem excepção, tem o inconveniente de exigir cálculos excessivamente longos, tornando-se por isso as operações quasi impraticaveis. Lagrange deu outro methodo mais facil, que adiante expenderemos, por meio do qual se leva a approximação mais longe.

75. *Regra de Descartes.* N'uma equação $fx = 0$, depois de ordenada, chamaremos *permanencia* a successão de dous signaes similhantes, e *variação* a de dous signaes differentes. N'esta intelligencia, a regra de Descartes, por meio da qual se póde conhecer o maior numero das raizes *positivas*, e o maior numero das raizes *negativas*, que a equação póde conter, enuncia-se da seguinte maneira:

Toda a equação completa tem QUANDO MUITO *tantas raizes positivas, quantas são as variações, e tantas negativas, quantas as permanencias.*

Com effeito, toda a equação $fx = 0$ póde considerar-se como resultando do producto da multiplicação de um polynomio Fx, formado de todos os factores binomios imaginarios da equação, pelos factores $x - a$, $x - b$, $x - c, \ldots$ $x + a'$, $x + b'$, $x + c', \ldots$ correspondentes ás raizes reaes $a, b, c, \ldots\ldots -a', -b', -c', \ldots\ldots$ Vejamos pois, por que modo estes factores binomios reaes introduzem tanto as variações, como as permanencias.

E como esta analyse deve ser independente dos valores numericos dos coefficientes, sómente attenderemos aos signaes dos termos do polynomio, os quaes, para fixar as idêas, supporemos que se succedem na ordem

$$+ - - + - - - + - + + + + - + - +.$$

1.º Passando á multiplicação por $x - a$, para introduzir uma raiz positiva a, devemos multiplicar primeiro por x; e depois por $-a$;

e sommar os productos parciaes, os quaes tem signaes contrarios, recuando o segundo um logar para a direita, a fim de ordenar a equação: isto é,

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
+ & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + & \\
 & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - & - & - & + & - & + & - \\
\hline
+ & - & i & + & - & i & i & + & - & + & i & i & i & - & + & - & + & -
\end{array}$$

Quando os dous signaes correspondentes são os mesmos, conservam-se taes no producto; no caso contrario, como o signal é *incerto* em quanto não entrar em consideração a grandeza dos coefficientes, assenta-se, para indicar esta circunstancia, a letra i.

Como os dous productos parciaes tem signaes contrarios, a letra i accusa sempre uma permanencia no multiplicando; e como toda a permanencia deve terminar n'uma variação, qualquer numero dos i, par ou impar, deve ter a fórma

$$\pm i\, i\, i \ldots\ldots\ldots i \mp \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Para que estes i dessem o maior numero de permanencias, sería necessario suppor, que todos elles tinham, ou o signal $+$, ou o signal $-$; e em ambos estes casos, que são os mais desfavoraveis, se vê que a introducção de uma raiz positiva real, traz, pelo menos, uma variação de mais no producto.

Fica por este modo provada a primeira parte da regra enunciada, a saber, que *toda a equação completa tem*, *quando muito*, *tantas raizes positivas*, *quantas são as variações.* Com effeito, bástava que tivesse uma só d'estas raizes de mais do que o numero das variações, para haver pelo menos uma raiz positiva real, que não teria introduzido variação, o que não póde ser, pelo que acabâmos de mostrar.

E cumpre advertir que esta primeira parte de regra tem logar, ainda que a equação seja *incompleta.* Na verdade, a equação póde ser incompleta, ou por que o multiplicando o é, e nesse caso subsiste ainda a demonstração; ou por que a somma dos termos dos productos parciaes, á qual correspondem alguns dos i, se torna nulla, e estes i devem então supprimir-se. Mas d'esta supressão o que, n'este caso, póde resultar, é a diminuição do maior numero de permanençias, o que não influe na regra.

2.° Multipliquemos agora o polynomio Fx por $x+a'$, para introduzir uma raiz negativa a'. Teremos o typo seguinte

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
+ & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + & \\
 & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + \\
\hline
+ & i & - & i & i & - & - & i & i & i & + & + & + & i & i & i & i & +
\end{array}$$

no qual se recuou tambem o 2.° producto parcial um logar para a direita, a fim de ordenar a equação.

Como os dous productos parciaes são compostos dos mesmos signaes, a letra i accusa sempre uma variação no multiplicando; e como um numero par de variações tem os mesmos signaes extremos, e um numero impar de variações tem signaes differentes, segue-se: que, qualquer numero de i successivos estará entre os mesmos signaes, se este numero for par; e entre signaes differentes, se o mesmo numero for impar.

a) Seja, em um dado logar, o numero dos i par, e representado por $2n$. Estes i estarão escriptos como se segue,

$$\pm\, i\; i\; i \ldots\ldots\ldots\ldots i\; i \pm \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Ora o numero dos signaes em β é $2n+2$, os quaes darão um numero total $2n+1$ de variações e permanencias; mas como os signaes extremos são os mesmos, o numero das variações será par, e por consequencia ou será $2n$, ou $2n-2$, $2n-4$, ... 0, que são os numeros pares contidos em $2n+1$. Logo:

Um numero par de i *successivos póde dar, quando muito, tantas variações quantos são os* i, *ou então duas, quatro, ... de menos.*

b) Seja agora, n'outro logar, o numero dos i impar, e representado por $2n+1$. Estes i estarão escriptos como se segue,

$$\pm\, i\; i\; i \ldots\ldots\ldots i \mp \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta')$$

Ora o numero dos signaes em (β') é $2n+3$, os quaes darão um numero total $2n+2$ de variações e permanencias; mas como os signaes extremos são differentes, o numero das variações será impar, e por consequencia ou será $2n+1$, ou $2n-1$, $2n-3$, ... 1, que são os numeros impares contidos em $2n+2$. Logo:

Um numero impar de i *successivos póde dar, quando muito, tantas variações, quantos são* i, *ou então duas, quatro, ... de menos.*

Quer o numero dos i seja par, quer seja impar, vê-se por tanto, que a introducção de uma raiz negativa real não dá mais variações que o numero dos i, isto é, mais variações dos que as que existiam no polynomio Fx. Ora, como por outra parte, o producto tem mais um termo do que o polynomio, conclue-se que *a raiz negativa produz, pelo menos, mais uma permanencia.*

Fica assim provada a 2.ª parte da regra enunciada, a saber, que *toda a equação completa, tem, quando muito, tantas raizes negativas quantas são as premanencias.* Com effeito bastava que tivesse uma só d'estas raizes de mais do que o numero das permanencias, para haver, pelo menos, uma raiz negativa real, que não teria introduzido permanencia, o que não póde ser, como acaba de mostrar-se.

Se a equação for incompleta, póde esta última proposição não ter logar; por quanto, podendo esta circunstancia provir, como já dissemos, de ser nulla a somma dos termos dos productos parciaes correspondente a alguns dos i, que tem então de supprimir-se, póde por esse motivo acontecer, que a raiz negativa, longe de introduzir alguma permanencia, diminua pelo contrario as que havia em Fx. N'este caso, para que a regra se possa applicar, é necessario, afim de completar a equação, restabelecer os termos que faltam, affectando as potencias de x correspondentes com o coefficiente ± 0.

Por exemplo na equação incompleta

$$x^4 - 5x^2 + 8x - 6 = 0,$$

que tem duas raizes, uma *positiva*, outra *negativa*, como não ha senão variações de signal, pareceria que não deveria haver *nenhuma* raiz negativa. Restabelecendo porém o termo em x^3, vem

$$x^4 \pm 0x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0,$$

equação que encerra uma permanencia, quer se tome o coefficiente 0 com o signal $+$, quer se tome com o signal $-$.

76. Designando por P o numero das raizes positivas, por p o das permanencias, e por v o das variações, fica demonstrado que é

$$1.^\circ \quad P = \text{ou} < v, \qquad 2.^\circ \quad N = \text{ou} < p,$$

sendo N o numero das raizes negativas. Ora sendo todas as raizes reaes, teremos, por isso que a proposta é do grão n e tem ao todo $n+1$ termos,

$$P + N = n,\ n = p + v,\ P + N = v + p.$$

Comparando P com v, consideremos as tres circunstancias, P>, ou<, ou $=v$. A 1.ª já se viu (1.°) que não podia ter logar; a 2.ª poderia dar-se, se fosse por compensação $N > p$, o que tambem não póde ser (2.°); por conseguinte

$$P = v,\ \text{e}\ N = p.$$

Logo, *n'uma equação cujas raizes são todas reaes, ha precisamente tantas raizes positivas quantas variações, e tantas negativas quantas permanencias.*

77. A regra de Descartes serve, em muitos casos, para reconhecer se uma equação tem raizes imaginarias, poupando-nos aos longos calculos da equação ás differenças.

1.° Quando na equação $fx = 0$ faltar um dos termos correspondentes á pontencia i de x, completar-se-ha, como dissemos, accrescentando o termo $\pm 0.x^i$; e contar-se-hão as variações e permanencias nos dous casos de ser o coefficiente $+0$ e -0. Se os termos em x^{i-1} e x^{i-2} tiverem signaes contrarios, o numero das variações e permanencias será o mesmo em ambos os casos, e por isso póde assignar-se qual é o maior numero possivel de raizes positivas e negativas: se porém tiverem os mesmos signaes, a contradicção a que dão logar os dous resultados differentes, attesta a existencia de raizes imaginárias. Assim na equação incompleta $x^3 + 2x - 5 = 0$, que se completa escrevendo $x^3 \pm 0.\ x^2 + 2x - 5 = 0$, temos n'um caso 2 permanencias e uma variação, e n'outra 3 variações; o que é contradictorio.

Logo, *quando falta um termo entre dous do mesmo signal, a proposta tem raizes imaginarias.*

2.° *Uma equação em que faltam muitos termos successivos não póde ter as suas raizes reaes.* Deduz-se do theorema precedente.

3.° Se, multiplicando o 1.° membro da proposta $fx = 0$ por

$(x+a)$, pudermos determinar a de maneira, que o numero das variações do producto exceda em mais de uma unidade o das variações de fx, ou que este producto tenha menos variações do que fx: a equação proposta terá raizes imaginarias. Por que, se todas as raizes de $fx=0$ fossem reaes, esta equação teria tantas raizes positivas quantas variações, e por conseguinte a transformada $fx(x+a)=0$, deveria ter só uma variação mais do que a proposta, se a fosse positivo, e tantas variações como ella, se fosse negativo.

Na equação $x^3-3x^2+12x-4=0$ as tres variações fazem presumir a existencia de tres raizes positivas. Multiplicando por $x+a$, resulta

$$x^4+(a-3)\,x^3+(12-3a)\,x^2+(12a-4)\,x-4a=0.$$

Pondo $a=3\frac{1}{2}$, os quatro primeiros termos ficam positivos, e por conseguinte a proposta terá duas raizes imaginarias.

4.° Mudando x em $y+h$, e $y'+h'$, $fx=0$ transformar-se-ha em $\mathrm{F}y=0$, e $\Phi y'=0$. Supponhamos que $\varphi y'$ tem de menos uma variação que $\mathrm{F}y$. Para que isto aconteça, quando forem reaes todos os valores de x, é necessario que $\mathrm{F}y=0$ tenha positiva uma das suas raizes α, a qual corresponda a outra negativa, ou $-\alpha'$, em $\varphi y'=0$; e será então

$$x=\alpha+h=-\alpha'+h'.$$

Logo x terá uma raiz entre h e h'. Como isto acontece a respeito de todas as variações que houver de menos em $\varphi y'$, x terá outras tantas raizes entre h e h'; e por conseguinte, se pela theoria dos limites, se achar que não existem todas estas raizes de x, concluiremos que a equação tem raizes imaginarias.

Por exemplo, pondo $x=y+2$ e $y'+3$, em $x^3-4x^2-2x+17=0$, vem as duas

$$y^3+2y^2-6y+5=0\,,\ y'^3+5y'^2+y'+2=0\,;$$

e como a 2.ª tem de menos duas variações, póde presumir-se que ha na proposta dous valores de x entre 2 e 3. Mas por uma parte, o limite inferior de y (n.° 38) dá $y>\frac{5}{11}$; e por outra fazendo $y=-y''$, o limite inferior de y'', dá $y''>\frac{2}{3}$, ou por ser $y=y'+1=-y''+1$, $y<\frac{1}{3}$. E como os dous limites de y são incompativeis, conclue-se que x tem duas raizes imaginárias. Se os limites não fossem contradictorios, ainda que se ficava na incerteza a respeito da existencia das duas raizes entre 2 e 3, tinha-se ao menos conseguido estreitar os seus limites.

5.° Se todas as raizes da equação $fx=0$ são reaes, os quadrados das suas differenças são todos positivos, logo:

Para que uma equação $fx=0$ *tenha todas as raizes reaes, é necessario, que na equação correspondente ao quadrado das differenças não haja permanencias.*

78. *Methodo de Fourier.* Dada uma equação $fx=0$ do gráo n, tomem-se as suas derivadas successivas, e escrevam-se na ordem inversa $f^{(n)}, f^{(n-1)}, \ldots\ldots f'', f', f$. Se em cada um d'estes polynomios substituirmos por x um numero a arbitrario, positivo ou negativo, obter-se-ha um resultado numerico com o signal $+$ ou $-$. Escrevam-se consecutivamente, e por sua ordem, os signaes assim obtidos debaixo das funcções correspondentes, formando-se por este modo uma linha de signaes que designaremos por A.

Tomando depois $x=b>a$, forme-se, pelo mesmo theor, outra linha de signaes, que se escreverão debaixo dos precedentes, e cuja totalidade designaremos por B. E assim por diante.

Tracta-se de comparar as *variações* de signaes n'estas diversas series.

Designemos por φx um polynomio d'estes qualquer. Tomem-se por x tres valores muito vizinhos $a-\delta$, a, $a+\delta$; ter-se-ha

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a-\delta) &= \varphi a-\delta\varphi' a+\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a-\tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a\ldots \\ \varphi a &= \varphi a \\ \varphi(a+\delta) &= \varphi a+\delta\varphi' a+\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a+\tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a\ldots \end{aligned}\right\}(1)$$

Analysemos os seguintes casos:

1.° Suppondo que φa não é nullo, como δ se póde tornar tam pequeno como se quizer, poderemos tomal-o tal, que os tres resultados tenham todos o signal de φa, visto que o 1.° termo se póde tomar maior que a somma dos seguintes, que tem signal contrário. Logo, *poderemos dar a* x *valores crescentes, que vão entre si differindo tam pouco, que cada uma das funcções* $f^{(n)}, \ldots f'', f', f$ *conserve o seu primeiro signal, em quanto se não tornar nulla.*

2.° Se φa for nullo, isto é, se a for uma das raizes da equação

$\varphi x=0$, será nullo o 1.° termo das series (1), e os resultados terão os signaes do termo seguinte $\mp\delta\varphi'a$. Por conseguinte, em quanto for $x<a$, o signal de φx é o mesmo do producto $-\delta\times\varphi'a$, isto é, contrário ao de $\varphi'a$; as avessas, quando for $x>a$, o signal é o de $\varphi'a$; vindo por este modo os dous resultados a ter signaes differentes. Logo, *se alguma d'estas funcções vier a passar por zero, mudará immediatamente de signal o resultado subsequente, que lhe é respectivo.*

Se pois nas funcções $f^{(n)}, \ldots f'', f', f$, formos substituindo por x valores crescentes muito vizinhos, os signaes de cada uma permanecerão os mesmos, até se chegar a um valor $x=a$, que torne nulla alguma d'estas funcções, que designaremos por φx; por que então, sómente para esta última, haverá mudança de signal. N'este estado teremos uma d'estas duas disposições

$$\begin{array}{lcccl}
 & f^{(n)} \ldots\ldots \varphi' \; \varphi \ldots\ldots & \text{ou} & f^{(n)} \ldots \varphi' \; \varphi \ldots\ldots \\
x<a \ldots\ldots & + - + \ldots & & \ldots + - - \ldots \\
x=a \ldots\ldots & + \; 0 \; + \ldots & & \ldots + \; 0 \; - \ldots \\
x>a \ldots\ldots & + + + \ldots & & \ldots + + - \ldots
\end{array}$$

pelas quaes se vê, que *se* φx *passar por zero*, a variação *que existia, correspondente a* φ' *e* φ, *é substituida por uma* permanencia. Os outros signaes, correspondentes ás outras funcções, ficam os mesmos antes e depois de $x=a$.

Se os signaes da columna que fica á direita de φ, forem os mesmos que os de φ', a serie que resulta de $x<a$, tem uma segunda variação, ao passo que a que provém de $x>a$ tem uma permanencia; por conseguinte, *n'este caso, desapparecerão simultaneamente duas variações.*

Porém se os signaes da mesma columna, que fica á direita de φ, forem contrários aos de φ', terá a 1.ª serie uma variação e uma permanencia, e a 3.ª uma permanencia e uma variação; por onde se vê, que *n'este caso não desapparecerá variação alguma, e sómente a variação mudará um logar para a esquerda.*

Se $x=a$ for uma raiz de $fx=0$, o que acabâmos de dizer só em parte se applica á funcção fx, por isso que ella não tem columna á direita. *Então, na passagem de* fx *por zero, somente desapparecerá uma variação.*

Se passado o valor $x=a$, continuarmos a dar a x valores crescentes muito proximos, conservar-se-ha a nova serie de signaes, até apparecer alguma funcção que se torne nulla. E assim por diante.

3.° Se φa e $\varphi' a$ forem conjunctamente nullos, isto é, se a for raiz das equações $\varphi x = 0$ e $\varphi' x = 0$, então as series (1) tornam-se em

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(a-\delta) = \frac{1}{2}\delta^2\varphi''a - \frac{1}{6}\delta^3\varphi'''a + \text{etc.} \\ \varphi a = 0 \\ \varphi(a+\delta) = \frac{1}{2}\delta^2\varphi''a + \frac{1}{6}\delta^3\varphi'''a + \text{etc.} \end{array}\right\} (2)$$

Como os resultados tem os signaes do 1.° termo dos desenvolvimentos, isto é, os mesmos signaes que $\varphi''a$ tanto para $x<a$, como para $x>a$; e como a φa corresponde zero: vem n'este caso a depender tudo do signal de $\varphi''a$. Porém φ' e φ'' estão nas mesmas circunstancias que φ e φ' no caso antecedente; por quanto, sendo

$$\varphi'(a \mp \delta) = \varphi' a \mp \delta\varphi''a + \ldots\ldots = \mp\delta\varphi''a + \ldots\ldots,$$

por ser $\varphi' a = 0$, terá φ' um signal contrário ao de φ'', quando for $x<a$; e terá φ' o mesmo signal que φ'', quando for $x>a$. Resultam por isso as duas disposições seguintes:

	$f^{(n)} \ldots\ldots \varphi'' \; \varphi' \; \varphi$.. ou	$f^{(n)} \ldots\ldots \varphi'' \; \varphi' \; \varphi \ldots\ldots$
$x<a$	.... $+ - + +$	...... $+ - + -$ ....
$x=a$	.... $+ \; 0 \; 0 \; +$	...... $+ \; 0 \; 0 \; -$ ....
$x>a$	.... $+ + + +$	...... $+ + + -$ ....

pelas quaes se vê, que as duas variações que havia no 1.° caso se tornam no último em permanencias; e que por isso, *quando* φx *e* $\varphi' x$ *passam conjunctamente por zero, perdem-se duas variações.*

Aqui não é necessario examinar quaes são os signaes das columnas á direita de φ, por quanto quer sejam positivos, quer negativos, não alteram, nos dous casos, a mudança do numero das variações ou das permanencias.

Tam pouco póde ter logar a hypothese de ser $fx = 0$; porque, devendo então ser tambem $f'x = 0$, teria fx raizes eguaes, o que não é possivel, por termos suposto fx já desembaraçada dos seus factores eguaes (n.° 50).

4.° Se tres funcções successivas φ, φ', φ'' forem nullas quando

$x = a$, prova-se por um raciocinio identico, que, se for $x < a$, haverá 4 ou 3 variações, conforme o signal da columna seguinte: e, se for $x > a$, haverá ou uma só, ou nenhuma variação: de sórte que *desapparecerão 4 ou 2 variações.*

$$
\begin{array}{llll}
 & f^{(n)} \ldots\ldots \varphi''' \; \varphi'' \; \varphi' \; \varphi \ldots & \text{ou} & f^{(n)} \ldots\ldots \varphi''' \; \varphi'' \; \varphi' \; \varphi \ldots \\
x < a & \ldots\ldots\ldots + \; - \; + \; - \; - & & \ldots\ldots\ldots + \; - \; + \; - \; + \ldots \\
x = a & \ldots\ldots\ldots + \; 0 \; 0 \; 0 \; - & & \ldots\ldots\ldots + \; 0 \; 0 \; 0 \; + \ldots \\
x > a & \ldots\ldots\ldots + \; + \; + \; + \; - & & \ldots\ldots\ldots + \; + \; + \; + \; + \ldots
\end{array}
$$

5.° Finalmente se o valor $x = a$ tornar nullas 4, 5,.... funcções, os desenvolvimentos (1) perderão outros tantos termos iniciaes, e o 1.° termo será affectado do signal $+$ quando o numero dos zeros for par; e dos signaes $\mp$ quando o numero dos zeros for impar. Cada zero corresponderá a uma variação, quando for $x < a$; e a uma permannecia, quando for $x > a$: de sórte que *as variações desapparecerão sempre aos pares.* Por conseguinte, se for par o numero z de zeros consecutivos, desapparecerão z variações; e se for z impar, desaparecerão $z \pm 1$, devendo escrever-se $+$, quando o signal que precede estes zeros é o mesmo que o que se lhes segue, e $-$ no caso contrário.

Suppondo dada, no seguinte exemplo, a serie media correspondente a $x = a$, obtem-se as outras duas pelo processo seguinte, a que Fourier deu o nome de *regra do signal duplo.* A primeira fórma-se assentando, por cima de cada zero, um signal contrario ao que lhe fica á esquerda; e a terceira, assentando por baixo de cada zero o mesmo signal, que lhe fica tambem á esquerda. Por este modo apparecem tantas variações para $x < a$, quantas permanencias para $x > a$. Nas columnas onde não entrám zeros, conservam-se os signaes da serie media.

$$
\begin{array}{l}
x < a + + - + - + - - + - + + + \;\; 8 \; var. \\
x = a + + \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 - - \; 0 \; 0 \; 0 + + \\
x > a + + + + + + - - - - - + + \;\; 2 \; var.
\end{array}
$$

N'este exemplo, na passagem por $x = a$, desapparecem 6 variações.

79. Do que fica dito no n.° precedente segue-se pois, que se dermos a x um valor α, d'onde resulte uma certa serie de signaes, e fizer-

mos depois crescer x por gradações successivas: os resultados conservarão os mesmos signaes, em quanto se não chegar a um valor $x=a$, que torne nulla alguma das funcções $f^{(n)}$, ... f'', f', f. Se a funcção que se torna nulla for fx, o valor correspondente de x fará desapparecer uma só variação. Porém se, em vez d'ella, for nulla alguma das suas derivadas, ou desapparecerão duas variações, ou pelo menos uma passará um logar para a esquerda. Poderiam desapparecer 2, 4, 6, ... variações conjunctamente no caso de haver mais derivadas successivas tambem nullas conjunctamente. Todas as vezes que x passar pelos valores r, r', r'', ... das raizes de $fx=0$, as variações desapparecerão uma a uma, ao passo que as raizes das equações $f'x=0$, $f''x=0$, ... as deixam subsistir, ou as fazem desapparecer 2 a 2. Em todo o caso, *se uma vez se perder uma variação, não poderá tornar a apparecer nas series resultantes de valores crescentes dados a* x.

Nenhuma d'estas funcções φ póde passar por zero, sem que, substituindo n'ella, e na funcção precedente φ', um numero pouco menor que a raiz de $\varphi x=0$, appareçam resultados com signaes contrarios, por modo que esta variação se possa mudar n'uma permanencia logo depois de passada esta raiz.

Como os 1.os termos dos polynomios $f^{(n)}$, ... f'', f', f são alternadamente do gráo par e impar, se fizermos $x=-\infty$ ou simplesmente $x=$ ao limite $-l'$ das raizes negativas de $fx=0$, $f'=0$, ... obteremos resultados com signaes alternadamente positivos e negativos, ou n variações, por isso que em cada polynomio o 1.° termo será maior que a somma de todos os termos de signaes contrarios.

Se fizermos porém $x=\infty$, ou simplesmente $x=$ ao limite l das raizes positivas, todos os resultados virão com os signaes positivos, e só haverá permanencias. Portanto, se dermos a x valores crescentes desde $-l'$ até l, desapparecerão todas as variações.

Reciprocamente se houver dous numeros $-l'$ e l, d'um dos quaes resultem sómente variações e do outro permanencias, poderemos concluir que estes numeros são os limites de todas as raizes das equações $fx=0$, $f'x=0$, ... Porque, devendo qualquer raiz d'estas equações introduzir permanencias, ou pelo menos mudar o logar das variações, nenhum numero que não estiver entre $-l'$ e l póde produzir este effeito. E aqui se nos offerece uma nova prova de que todo o numero l que tornar positivos os polynomios f, f', f'', ... $f^{(n)}$ é limite superior das raizes da equação $fx=0$, vindo assim o theorema do pag. 71. a obter uma demonstração nova e mais extensa.

Representando por $2i$ o numero das raizes imaginarias de $fx=0$, será $n-2i$ o das reaes que estão comprehendidas entre $-l'$ e l. Se dermos a x valores crescentes muito vizinhos, entre estes limites, as n variações da 1.ª serie de signaes irão desapparecendo até á última. E como as raizes reaes r, r', r'', ... fazem desapparecer as variações uma a uma, desapparecerão aos pares as outras $2i$ variações, em consequencia de se tornarem nullas as diversas derivadas f, f', f'', ... Por meio d'estas substituições successivas vimos pois no conhecimento da existencia das raizes reaes e do seu numero.

80. Do que fica dito póde deduzir-se, e com mais extensão, a *Regra dos signaes de Descartes.* Com effeito, fazendo $x=0$, a linha dos signaes *será a mesma dos signaes successivos de* fx; porque então cada uma das funcções fica reduzida ao seu último termo, a qual, segundo já se viu, é o producto por 1. 2. 3...... dos coefficientes respectivos de fx tomados em ordem retrograda. Esta serie de signaes resultantes de $x=0$ terá pois as mesmas variações e permanencias que fx. Seja v o numero das primeiras, $n-v$ o das segundas. Passando de $x=0$ para $x=l$, a 1.ª serie perderá as suas v variações; e se a equação $fx=0$ tiver todas as raizes reaes, v d'ellas serão positivas. Do mesmo modo passando de $x=-l'$ para $x=0$, perder-se-hão $n-v$ variações, por isso que a $x=-l'$ correspondem n variações; e haverá por tanto $n-v$ raizes negativas, isto é, tantas quantas são as permanencias que ha em fx. Se a proposta tiver porém raizes imaginarias, as variações, que as indicam, desapparecerão aos pares. Logo:

Toda a equação que tiver todas as suas raizes reaes, terá precisamente tantas variações quantas são as raizes positivas; e tantas permanencias quantas são as raizes negativas (*). *E se tiver raizes imaginarias, terá* v $-$ 2i *raizes positivas, e* p$-$2i' *raizes negativas, sendo* v *o numero das variações, e* p *o das permanencias do polynomio,* i *e* i' *numeros inteiros.*

(*) *Se em uma equação* fx $=0$ *faltar algum dos seus termos, e os dous termos entre os quaes elle falta, tiverem os mesmos signaes, a equação terá raizes imaginarias.* Porque se em fx houver dous termos seguidos $qx^{h}+sx^{h-2}$, e fizermos $x=0$ em todas as derivadas, a serie dos termos consecutivos conterá $+0+$, que dá os signaes $+\underset{+}{\overset{-}{0}}+$, caracter por onde se reconhece a existencia das raizes imaginarias.

81. Por este theor fica demonstrado que, se por x substituirmos a e b em todas as funcções, e escrevermos os signaes dos resultados em duas series correspondentes A e B, sendo $a < b$:

1.° Não haverá nunca mais variações em B do que em A.

2.° Se o numero das variações for o mesmo em A e B, a proposta não terá raizes entre a e b.

3.° Se houver em B duas variações de menos do que em A, a proposta ou tem duas raizes reaes entre a e b; ou em vez d'ellas, tem duas imaginarias. No 1.° caso poderemos separar as raizes substituindo numeros intermedios que façam desapparecer as variações uma a uma, o que no 2.° caso se torna impraticavel.

5.° Se na serie B houver tres variações de menos que em A, ou existirão 3 raizes reaes entre a e b, ou haverá uma só, sendo as outras duas imaginárias. Empregar-se-hão processos especiaes para reconhecer estas circunstancias.

E assim por diante.

6.° O valor de x que, posto não seja raiz da equação $fx = 0$, faz perder duas variações, passando por augmentos continuos de a para b, indica a existencia de raizes imaginárias; torna nullas algumas derivadas, quando os signaes da precedente e da seguinte são os mesmos; e póde tambem anniquilar conjunctamente duas d'estas funcções successivas. A equação $fx = 0$ terá dous pares de raizes imaginárias, quando desapparecerem 4 variações, por serem nullas 3 ou 4 derivadas consecutivas. Finalmente, *suppondo sempre que as substituições se fazem por augmentos continuos*, haverá na equação tantos pares de raizes imaginárias, quantas forem as vezes que se perderem duas variações.

82. Como a substituição de numeros rigorosamente continuos não é realisavel, practicaremos como se segue:

1.° Substituir-se-hão arbitrariamente quaesquer numeros tomados entre um numero l', d'onde resultem sómente variações, e entre outro l, d'onde só resultem permanencias: estes numeros l' e l, como já dissemos, serão os limites entre os quaes estão comprehendidas as raizes. Apezar de se tomarem grandes intervallos, acontece muitas vezes que entre os numeros assi m substituidos arbitrariamente não existem raizes, e é então necessario tomar intervallos ainda maiores, empregando tentativas que nos dispensem de cálculos inuteis.

2.° Quando o valor $x = a$ der na serie A dos signaes um ou muitos zeros successivos, formar-se-hão as series correspondentes a $a - \delta$, e a $a + \delta$, pela regra dos signaes duplos (pag. 126); comparar-se-ha a 1.ª com a serie que precede A a fim de achar as raizes $< a$; e a 2.ª com a que se segue a A, a fim de achar as raizes $>a$; finalmente comparar-se-hão as duas series correspondentes a $a-\delta$ e $a+\delta$, a fim de achar as raizes imaginárias, que são indicadas pelo numero par de variações, que desapparecem na passagem d'uma para outra.

Ex.° 1.° Da equação $fx=x^5+x+1=0$, que dá $f'=5x^4+1$, $f''=20x^3$, ... resulta o seguinte quadro, no qual se fez uso da regra do signal duplo relativamente aos termos nullos da serie correspondente a $x=0$:

$$\begin{array}{llcccccc l}
 & & f^{V} & f^{IV} & f''' & f'' & f' & f & \\
x=-1 & \ldots\ldots & + & - & + & - & + & - & 5 \textit{ vari.} \\
x=0 & \ldots\ldots & + & \underset{+}{\overset{-}{0}} & \underset{+}{\overset{+}{0}} & \underset{+}{\overset{-}{0}} & + & + & 4 \text{ ou } 0 \textit{ vari.}
\end{array}$$

Vê-se por este quadro, que existe uma raiz real entre -1 e 0, e que as 4 variações que desappareceram desde $x<0$ até $x>0$ indicam a existencia de 4 raizes imaginárias. A curva que representa a equação $y=fx$ é a de fig. 12.

Ex.° 2.° Da equação $fx=x^4-4x^3-3x+23=0$, que dá

$$f'x=4x^3-12x^2-3,\ f''=12x^2-24x,\ \ldots\ldots$$

resulta o quadro

$$\begin{array}{llccccc l}
 & & f^{IV} & f''' & f'' & f' & f & \\
x=0 & \ldots\ldots & + & - & \underset{-}{\overset{+}{0}} & - & + & 2 \text{ ou } 4 \textit{ vari.} \\
x=1 & \ldots\ldots & + & \underset{+}{\overset{-}{0}} & - & - & + & 2 \textit{ vari.} \\
x=2 & \ldots\ldots & + & + & \underset{+}{\overset{-}{0}} & - & + & 2 \textit{ vari.} \\
x=3 & \ldots\ldots & + & + & + & - & - & 1 \textit{ vari.} \\
x=4 & \ldots\ldots & + & + & + & + & + & 0 \textit{ vari.}
\end{array}$$

As duas variações que desapparecem desde $x<0$ até $x>0$ indicam a existencia de 2 raizes imaginárias; os zeros que se encontram nas series correspondentes a $x=1$, e $x=2$ não fazem desapparecer nenhuma variação, porque *cada um dos zeros fica entre dous signaes differentes.* Além disto ha uma raiz entre 2 e 3, e outra entre 3 e 4, ás quaes applicaremos os methodos de approximação. A curva correspondente a esta equação $y=fx$ é representada na fig. 20 por MOM'.

83. Se entre os dous numeros a e b existir apenas uma raiz, havendo por conseguinte a perda de uma só variação de A para B, podemos applicar a esta raiz o methodo de approximação de Newton; tendo porém cuidado de satisfazer primeiro ás condições prescriptas naquelle methodo (pag. 110.), de que f' e f'' não mudem da signal de a até b, o que equival a ser a última variação perdida precisamente na última columna f. Então todos os signaes de A e B são os mesmos, excepto o último. No ex.° precedente tem isto logar entre 2 e 3.

Se a variação desapparecer porém antes do último termo das series, f' e f'' não satisfarão á condição exigida; e então será necessario substituir numeros intermedios entre a e b, para que, estreitado o espaço que contém a raiz, não haja n'elle nem inflexão nem tangente horizontal á curva $y=fx$, e recaiâmos no 1.° caso.

Assim no último exemplo, querendo approximar-nos da raiz que fica entre 3 e 4, como ha mudança de signal em f'; e como resolvendo a equação $f'x=0$, se vê que ella tem só real uma raiz entre 3 e 3,1: devemos estreitar os limites de $fx=0$ entre 3.1 e 4. Fazendo depois $x=4$, valor que dá os mesmos signaes a f' e f'', obteremos $f'''=61$, $f=11$, $s=-0{,}02$, e $x=3{,}8$ na primeira approximação. Fazendo depois $x=3{,}8$, vem $f'=43{,}208$, $f=0{,}6256$, $s=-0{,}01448$. d'onde finalmente resulta o novo valor mais approximado $x=3{,}78552$; E assim por diante, sendo s a correcção dada pelo methodo de Newton.

84. No caso de se perderem duas variações de A até B, cumpre ainda indagar, se ha com effeito duas raizes entre a e b. Esta discussão abranje tres casos.

Se, comparando da direita para a esquerda os signaes correspondentes das duas series, depararmos com dous signaes contrarios debaixo da mesma funcção, ahi será uma variação substituida logo por uma permanencia, devendo mais adiante perder-se a segunda variação. Se esta perda tiver logar nos últimos signaes, poderão dar-se os dous 1.^{os} casos seguintes, n'um dos quaes ambas as variações se perdem nos tres últimos signaes; e no outro perde-se a 1.^{a} antes de f';

	1.º CASO (*) .. $f'' \; f' \; f$	2.º CASO ... $f''' f'' f' f$
$x=a$....	$++-$ ... $+-+$	$++$ .... $+--+$
$x=b$....	$++-$ ... $+++$	$++$ .... $++++$

O 3.º caso será aquelle em que ambas as variações se perdem antes dos últimos signaes.

Consideremos estes tres casos na curva parabolica MOM′ (fig. 19 e 20), cuja equação é $y=fx$, e que está comprehendida entre as abscissas $AP=a$, $AP'=b$.

1.º caso. Como $f'a$ e $f'b$ tem signaes contrários, e estas derivadas representam os valores das tangentes dos angulos T e T′ que fazem com o eixo dos x as rectas MT e M′T′, que tocam a curva nos pontos M e M′, cujas abscissas são a e b, vê-se que um d'estes angulos é agudo para o eixo e o outro obtuso. E como $f'x$ não perde senão uma variação, $f'x=0$ apenas terá uma raiz entre a e b, isto é, a curva $y=fx$ terá n'om ponto intermedio O uma só tangente parallela aos x. Por outra parte $f''x$ não perde variação, e conserva n'este intervallo o signal positivo; o que indica que a curva é concava para a parte superior (n.º 59.) As fig. 19 e 20 representam a forma d'esta porção do arco, sendo O o ponto em que $f'x$ passa por zero, do positivo ao negativo.

Se a curva cortar o eixo no intervallo PP′ (fig. 20) terá duas raizes reaes Ak e Ak': no caso contrário (fig. 19) estas raizes serão imaginárias, e as tangentes aos diversos pontos do arco MOM′ se inclinarão então cada vez mais sôbre o eixo de M para O, ponto em que se dá o parallelismo, levantando-sa depois em sentido opposto para M′. A natureza concava do arco, faz com que elle fique comprehendido no angulo formado pelas suas tangentes em M e M′. Ve-se pois que se o vertice B (fig. 19) d'este angulo ficar para a parte de cima do eixo, a curva não poderá cortal-o; e as raizes entre P e P′ serão com certeza imaginárias.

/e

Mas as subtangentes em M e M′ são

$$PP = S_1 = -\frac{fa}{f'a},\; P'T' = S_2 = -\frac{fb}{f'b};\; \ldots (1)$$

(*) Póde acontecer que os signaes de fa e fb sejam conjunctamente negativos, isto é, contrarios áquelles que aqui indicâmos: este caso porém não exige um exame especial, bastará fazer girar a fig. 19 e 20 de maneira que estas figuras fiquem, por meio de uma revolução em volta do eixo dos x, para a parte debaixo, e então tudo é similhante ao que fica exposto no texto.

das quaes a 1.ª é positiva porque $f'a$ tem o signal —, e a 2.ª negativa. Logo, abstrahindo dos signaes, *se uma das subtangentes, ou a somma das duas, egualar, ou exceder, o intervallo* b — a, *as duas raizes presumidas serão imaginárias.*

Não tendo logar esta circunstancia, haverá incerteza a respeito da natureza das raizes, que então poderão ser reaes ou imaginárias, por isso que a curva, entre P e P', póde ou cortar o eixo, ou não o encontrar; e nesse caso practicaremos de uma das seguintes maneiras.

Consideraremos os limites a e b como muito desviados para a solução da questão, e tomando por isso em vez de x um numero qualquer intermedio a', veremos se a serie dos signaes, comparada com A e B, faz desapparecer as variações uma a uma; porque então haverá duas raizes reaes, uma entre a e a', e a outra entre a' e b. E se as duas variações se perderem ainda entre a e a', calcularemos a subtangente correspondente a $x = a'$, a fim de verificarmos se a regra precedente tem logar.

Ou então practicaremos, como se já estivesse decidido que as raizes intermedias são reaes, e quizessemos approximal-as cada vez mais pelo methodo de Newton; por que nesse caso viriamos a obter duas novas subtangentes, cuja somma poderia exceder $b - a$.

E como ao passo que nos approximâmos do minimo correspondente ao ponto O, as tangentes tendem a tornar-se parallelas ao eixo, e começam as subtangentes a ser muito grandes, podemos por meio d'esta circunstancia verificar a regra de cima. Se as raizes forem imaginárias, depressa se virá nesse conhecimento pelo valor das subtangentes $> b - a$.

Pelo contrário, se as raizes são reaes, as tangentes não augmentam indefinidamente, os valores de x começam a convergir pora dous termos que são as raizes pedidas Ak e Ak'; e com facilidade se achará um valor medio, que, substituido por x, separe estas duas raizes.

2.° CASO. Como fa e $f''a$ tem signaes contrarios, e $f''x$ perde uma variação, a equação $f''x = 0$ terá uma raiz entre a e b. Sendo então $f''x$ e $f''b$ de signaes contrários, e passando $f''x$ por zero n'este intervallo, o arco será convexo para a parte superior em m (fig. 19) no 1.° limite A$p = a$, e concavo no 2.° AP$' = b$, havendo no mesmo intervallo um ponto d'inflexão I, cuja abscissa Aq é a raiz de $f''x = 0$. Por meio das tangentes não podemos resolver a difficuldade, porque a tangente mt não póde satisfazer ás condições prescriptas. Cumpre por isso estreitar primeiro o intervallo, a fim de que a inflexão não fique n'elle comprehendida; o que se consegue substituindo por x outro valor intermedio a', conducente ao fim proposto. Feito isto a questão fica reduzida á do 1.° caso.

Se a curva tivesse a figura MIM (fig. 5), na qual a inflexão está precisamente no ponto em que a tangente é horizontal, não seria possivel estreitar o intervallo de modo, que se evitasse, que as derivadas f'' não tivessem signaes contrários. Porém como então f' e f'' são conjunctamente nullos, as equações $f'x=0$ e $f''x=0$ teriam uma raiz commum; e estariamos em um dos casos das raizes eguaes. As raizes procuradas seriam imaginárias, excepto se o ponto I de inflexão coincidisse com o da secção da curva com o eixo, caso em que sería tambem $fx=0$, e em que a proposta tería por conseguinte raizes eguaes.

3.° Caso. Se a comparação das series A e B manifestar a perda das duas variações, antes de chegar á última columna, e se a variação desapparecer, por ex.°, desde f''', devemos tractar a equação $f'''x=0$, e indagar se tem duas raizes entre a e b. Se as não tiver, a equação $f'''x=0$, terá tambem duas raizes imaginárias indicadas pelas duas variações perdidas; porquanto, não podendo a tangente ao arco da curva, cuja equação é $y=f''x$, tornar-se horizontal entre a e b por não ser $f'''x$ nulla, o arco não terá maximo n'este intervallo. Do mesmo modo se reconhece, que as equações $f'x=0$ e $fx=0$ tem duas raizes tambem imaginárias correspondentes.

Porém se $f''x=0$ tiver duas raizes reaes entre a e b, a curva $y=f''x$ terá neste intervallo duas tangentes horizontaes, e tomará a fórma da fig. 21, appresentando duas ondulações, com um maximo e um minimo. O intervallo de a e b é então muito grande, e deve diminuir-se, até que as inflexões não sejam n'elle comprehendidas, e haja só um minimo. Examinar-se-ha então se a equação $f'''x=0$ tem duas raizes reaes entre os novos limítes, mais estreitos, a e b. Indagar-se-ha depois se a curva cuja equação é $y=f'x$ tem ou não duas secções com eixo; e o mesmo a respeito da curva $y=fx$. Basta que as duas raizes procuradas sejam imaginárias para uma das equações .... $f'''x=0$, $f''x=0$, $f'x=0$, para o serem tambem para as seguintes.

N'esta theoria suppomos sempre que a equação de que se tracta, está desembaraçada das suas raizes eguaes, e por isso devemos primeiro, que tudo verificar se a equação $f''x=0$ tem ou não raizes d'esta especie. Como porém a indagação das raizes eguaes demande um cálculo extenso (n.° 50), convem evital-o, e não o empregar sem que se torne necessario. É esta uma das vantagens do methodo de Fourier, por que sendo o caso das raizes eguaes excepcional, sómente se entra na sua indagação, quando accidentalmente se torna indispensavel.

85. Só nos resta agora vêr, o que se deve practicar nos casos de desapparecerem mais de duas variações de a até b. Facilmente se comprehende que, estreitandó estes limites, as variações desapparecerão ou uma

a uma, ou duas a duas, e assim voltaremos aos casos já tractados. Poderia porém acontecer que para um valor de x entre a e b, muitas derivadàs se tornassem nullas, e viriamos então a achar muitos zeros successivos na serie dos signaes correspondentes a um numero intermedio a', como no caso da pag. 133; e então desappareceriam 4, 6, ... variações ao mesmo tempo, as quaes indicariam a existencia de outras tantas raizes imaginárias. Facilmente se reconhece este caso, porque estas derivadas tem então factores communs, os quaes, egualados a zero, dão o valor de x que produz estes zeros successivos, e torna evidente a existencia das raizes imaginárias.

86. Passemos a applicar estes principios a differentes exemplos.

I. $fx = x^3 - 5x + 3$, $f' = 3x^2 - 5$, $f'' = 6x$, $f''' = 6$.

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & f''' & f'' & f' & f & \\
x = -3 & \ldots\ldots & + & - & + & - & 3 \textit{ vari.} \\
-2 & \ldots\ldots & + & - & + & + & 2 \textit{ vari.} \\
0 & \ldots\ldots & + & \overset{-}{\underset{+}{0}} & - & + & 2 \textit{ vari.} \\
+1 & \ldots\ldots & + & + & - & - & 1 \textit{ vari.} \\
+2 & \ldots\ldots & + & + & + & + & 0 \textit{ vari.}
\end{array}
$$

A equação proposta tem tres raizes reaes entre -3 e -2; 0 e 1; 1 e 2. A curva é representada pela fig. 11.

II. $fx = x^3 - x^2 + 2x - 3$, $f' = 3x^2 - 2x + 2$, etc.

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & ''' & '' & ' & & \\
x = 0 & \ldots\ldots & + & - & + & - & 3 \textit{ vari.} \\
1 & \ldots\ldots & + & + & + & - & 1 \textit{ vari.} \\
2 & \ldots\ldots & + & + & + & + & 0 \textit{ vari.}
\end{array}
$$

A proposta tem uma raiz entre 1 e 2; procurando as que ficam entre 0 e 1 vê-se que são imaginárias; porque as duas variações perdem-se desde f', e a equação $f'x = 0$ não tem raizes reaes. A curva é representada na fig. 12,

III. $fx = x^4 - 6x^3 + 40x^3 + 60x^2 - x - 1.$

$$\begin{array}{rl} x = -1 \ldots & + - + - + - + \ 6 \textit{ vari.} \\ -0{,}5 \ldots & + - + + + - + \ 4 \textit{ vari.} \\ 0 \ldots & + - 0 + + - - \ 3 \textit{ vari.} \\ 1 \ldots & + 0 - 0 + + + \ 2 \textit{ vari.} \\ 2 \ldots & + + 0 - + + + \ 2 \textit{ vari.} \\ 3 \ldots & + + + + + + + \ 0 \textit{ vari.} \end{array}$$

Se omittissimos $x = -\frac{1}{2}$, desapparecerião 3 variações de -1 até 0, o que mostra ser necessario tomar este intermedio.

Como os resultados zero ficam entre signaes contrarios, nada nos dizem sôbre a existencia das raizes imaginárias (pag. 129.). Ha uma raiz entre $-\frac{1}{2}$ e 0, e outra entre 0 e 1; que são $x = -0{,}13$ e $x = +0{,}12$.. Passemos ás outras quatro que se presumem entre -1 e $\frac{1}{2}$, e entre 2 e 3. As duas variações perdem-se desde f'', e por isso devemos fazer $f''x = 0$: porém antes de tudo é necessario averiguar se esta equação tem raizes eguaes, como na verdade tem, por quanto

$$f'' = 30(x^2 - 2x - 2)^2, \ f''' = 120(x - 1)(x^2 - 2x - 2).$$

A curva cuja equação é $y = f''x$ toca o eixo no ponto que tem por abscissas as raizes da equação $x^2 - 2x - 2 = 0$, a saber, $x = 1 \pm \sqrt{3}$ (v. fig. 22), por causa das raizes duplas. Se empregassemos pois estes valores de x para deduzirmos a serie de signaes d'estas funcções, achariamos dous zeros successivos, e por conseguinte pela regra dos signaes duplos se veria que haviam de desapparecer duas variações, por mais vizinhos das raizes que se tomassem os dous limites, os quaes não sendo communs com $f'x = 0$, provam que esta última equação não tem raizes reaes entre -1 e $-0{,}5$, nem entre 2 e 3: logo a equação proposta está no mesmo caso.

IV. Para $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$, $f' = 4x^3 - 12x^2$ etc.

$$\begin{array}{rl} x = -1 \ldots & + - + - + \ 4 \textit{ vari.} \\ 0 \ldots & + - + + + \ 2 \textit{ vari.} \\ 1 \ldots & + 0 - 0 + \ 2 \textit{ vari.} \\ 2 \ldots & + + + - + \ 2 \textit{ vari.} \\ 3 \ldots & + + + + + \ 0 \textit{ vari.} \end{array}$$

Ha razão para crer que as raizes entram aos pares entre 0 e -1, e entre 2 e 3. Procurando estas últimas, acha-se $S_1 = \frac{2}{6}$ e $S_2 = -\frac{2}{12}$, cuja somma é $\frac{1}{2} < 1$, e fica duvidosa a existencia das duas raizes intermedias; as raizes approximadas são $x = 2{,}4$ e $2{,}8$. Substituindo acha-se:

$$x = 2{,}4 \ldots\ldots + + + -3{,}024 + 0{,}0416$$

$$2{,}8 \ldots\ldots + + + + 5{,}328 + 0{,}2976.$$

Logo $S_1 = 0{,}01$, $S_2 = -0{,}06$, $x = 2{,}41$ e $x = 2{,}94$. Como as subtangentes longe de augmentarem, decrescem, approximando-se do minimo, vê-se que as raizes são reaes. Para separal-as, tome-se uma media tal, como

$$x = 2{,}5 \ldots\ldots + + + - -$$

ficando assim postas em evidencia as duas raizes, ás quaes applicaremos o methodo de approximação. As raizes entre 0 e -1 tambem são reaes, As raizes da equação proposta são

$$x = 1 \pm \sqrt{2} = 1 \pm 1{,}41421 \ldots, \text{ e } x = 1 \pm \sqrt{3} = 1 \pm 1{,}73205 \ldots$$

A curva $y = fx$ tem pouco mais ou menos a fórma da fig. 13.

87. *Theorema de M. Sturm.* Procede-se, pelo methodo do divisor commum, á investigação dos factores eguaes de fx (n.° 47) tendo o cuidado de *mudar o signal dos restos consecutivos* antes de se tomarem para divisores; isto é, divide-se fx por $f'x$; depois $f'x$ pelo primeiro resto com o signal trocado; e assim por diante. Por este modo obter-se-ha uma serie de polynomios de gráos decrescentes, cada um dos quaes é alternadamente dividendo e divisor, taes como (*)

(*) O mais longo de todos estes calculos é o que dá o resto da divisão de fx por $f'x$; porém a nota da pag. 85 dá uma regra, pela qual se abbrevia muito esta operação.

$$fx, f'x, \ldots\ldots Fx, \varphi x, \psi x, \ldots\ldots V \ldots\ldots (M).$$

Cada um d'estes termos é o resto, com o signal trocado, que resulta da divisão entre os dous termos que lhe ficam á esquerda; e o último V é um numero, que sempre será differente de zero, se suppuzermos a equação $fx = 0$ desembaraçada das suas raizes eguaes (n.° 49.).

Substitua-se em todos estes polynomios por x um numero a qualquer, e escrevam-se em linha os signaes successivos dos resultados que se obtiverem; faça-se o mesmo com outro numero b, e assentem-se os signaes dos resultados em correspondencia com os primeiros. Posto isto, o theorema, que se pertende demonstrar, enuncia-se assim:

Se for $b > a$ *a segunda serie de signaes terá de menos tantas variações, quantas são as raizes reaes da equação* $fx = 0$, *comprehendidas entre* a *e* b. *Se as duas series tiverem um numero egual de variações, não haverá raiz alguma real entre estes dous numeros.*

1.° Já se demonstrou (pag. 123), que se fizermos crescer x por augmentos successivos de a até b, qualquer dos polynomios φx dará resultados do mesmo signal em quanto se não tornar nullo; porém que se $x = \alpha$ tornar $\varphi\alpha = 0$, φx mudará de signal; e que o signal de φx será contrário ao de $\varphi' x$ em quanto for $x < \alpha$, e será o mesmo quando for $x > \alpha$.

2.° *Dous polynomios successivos* (M) *não podem ser conjunctamente nullos.* Porque das tres funcções successivas Fx, φx, ψx, uma é dividendo, outra divisor, e a última resto com signal trocado, sendo por isso

$$Fx = Q \times \varphi x - \psi x.$$

Se houvesse pois um valor $x = \alpha$ que tornasse $\varphi a = \psi a = 0$, tambem sería $F\alpha = 0$, isto é, tambem sería nullo o polynomio Fx que precede φx, e assim a respeito dos outros successivamente até $f'x$ e fx: d'onde se seguiria que fx teria factores eguaes, o que é contra a nossa hypothese. Do mesmo modo se vê, que $F\alpha = \varphi\alpha = 0$, daria $\psi a = 0$, e todas as funcções seguintes seriam por conseguinte nullas, incluindo V, o que tambem não póde ser.

3.° *Todo o polynomio, que se tornar nullo, fica entre dous resultados de signaes contrarios.* Porque se for $\varphi\alpha = 0$, será $F\alpha = -\psi\alpha$, e os tres polynomios terão os signaes $+ 0 -$, ou $- 0 +$. Se fizermos pois crescer x de a até b por augmentos contínuos, a passagem por zero de qualquer d'estes polynomios não alterará o numero das variações, porque comparando as duas series antes e depois de $x = \alpha$, vê-se que dão

$+--$, e $++-$; ou $--+$, e $-++$.

Vejamos porém o que a contece no último e no 1.° polynomio, os quaes não ficam, como os outros, entre dous signaes. Em quanto a V, que é um numero, não muda nunca de signal. Em quanto a fx, já sabemos que se for $f\alpha=0$, o signal de fx que era contrário ao de $f'x$ quando $x<\alpha$, se torna no de $f'x$, quando $x>\alpha$, e que por este modo uma variação se muda n'uma permanencia.

Continuando a dar successivamente valores crescentes a δx, poderá $f'x$ vir tambem a passar por zero e mudar de signal, sem que por isso se altere o numero das variações, como já se demonstrou. Tornando pois fx e $f'x$ a ter signaes contrarios, poderá fx passar de novo por zero, e fazer desapparecer uma nova variação. E assim por diante.

Fica portanto demonstrado o theorema, visto que o desapparecimento das variações, de uma serie para outra, só póde provir de se tornar $fx=0$, em consequencia de valores successivos dados a x desde a até b.

Cumpre advertir, que podemos, sem alterar estas consequencias, *multiplicar ou dividir* qualquer dos polynomios *por um numero positivo*, evitando assim por meio d'estes factores os coefficientes fraccionarios.

88. Passemos agora á applicação do theorema. Faça-se $x=0$ em todos os polynomios (M), a fim de se obter para cada funcção o signal do seu último termo, e formar assim a serie correspondente. Faça-se depois $x=$ ao *limite superior* l das raizes positivas, o qual, como se sabe, dá aos polynomios o signal do seu 1.° termo, como se se fizesse $x=\infty$. Faça-se depois $x=$ ao limite $-l'$ das raizes negativas, o qual dará os mesmos signaes que $x=-\infty$.

Contem-se depois as variações de cada uma das tres series resultantes; e se vier algum resultado zero, substitua-se indefferentemente por um dos signaes $+$ ou $-$, ou não se attenda a elle, visto que um zero cahe sempre entre signaes contrários. D'aqui se concluirá que a proposta $fx=0$ tem tantas raizes negativas, quantas são as variações perdidas na passagem de $-l'$ para 0; e tantas positivas quantas são as variações perdidas desde 0 até l.

Para separar estas raizes umas das outras, substituiremos os numeros intermedios, que se irão approximando até que as variações desappareçam uma a uma; e para se proceder com mais ordem, substitua-se por x primeiro zero, e depois numeros crescentes, tanto positivos como negativos, até se chegar ás series de signaes que coincidem com as correspondentes a $+\infty$ e $-\infty$; por que assim se manifestarão por si mesmos os dous limites das raizes.

Ex.° I. $fx = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = 0$, dá

$f' = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6, \; -13x^2 + 68x - 74,$

$-792x + 1141 \quad , +1892293,$

$x = 0$ .... + — — + + 2 *vari.*

1 .... + — — + + 2 *vari.*

2 .... + + + — + 2 *vari.*

4 .... + + — — + 2 *vari.*

Não ha raiz nenhuma negativa, nem>4: e como em todo este intervallo se não perde nenhuma variação, as quatro raizes são imaginárias.

II. Ex.° $fx = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$, dá $f' = 5x^4 + 3x^2 + 4x$,

$-x^3 - 3x^2 - 5, \; -16x^2 + 7x - 25, \; -3x - 19 + 6400.$

$x = -4$ .... — + + — + + 3 *vari.*

—2 .... — + — — — + 3 *vari.*

—1 .... + + — — — + 2 *vari.*

—0 .... + 0 — — — + 2 *vari.*

+1 .... + + — — — + 2 *vari.*

Não podem haver raizes senão entre — 4 e + 1, e como só se perde uma variação, ha apenas uma raiz real, que fica entre — 1 e — 2.

III. Ex.° $fx = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$, dá

$2x^2 - 6x^3 + x + 3, \; 5x^2 - 10x - 7, \; x - 1, \; +12$

$x = -1$ .... + — + — + 4 *vari.*

0 .... + + — — + 2 *vari.*

1 .... + 0 — 0 + 2 *vari.*

2 .... + — — + + 2 *vari.*

3 .... + + + + + 0 *vari.*

Ha duas raizes entre 0 e — 1, e duas entre 2 e 3.

Este theorema de M. Sturm é muito notavel e merece figurar nos Elementos d'Algebra. É evidente a analogia que tem com o de Fourier, e o proprio auctor confessa que se serviu d'aquelle nas suas investigações. Comtudo este methodo é incompleto, porque não nos indica o meio de separar uma das outras as raizes que não se acham isoladas entre os numeros substituidos, sendo ainda necessario para isso recorrer a novas substituições; nem tão pouco nos ensina a achar raizes cada vez mais approximadas.

89. *Methodo de M. Budan.* Se na equação $fx=0$ fizermos $x=a+y$, a transformada, que facilmente se obtem pelo processo de pag. 59, terá por incognita $y=x-a$. Do mesmo modo obteremos outras transformadas, cujas incognitas serão $z=x-b$, $t=x-c$, sendo a, b, c.... quaesquer numeros crescentes. Estas transformadas podem facilmente deduzir-se umas das outras, pondo $b=a+\alpha$, $c=b+\beta$, ...; e substituindo, na 1.ª transformada em $y=x-a$, por y a expressão

$$y-\alpha=x-(a+\alpha)=x-b=z;$$

depois n'esta última por z a expressão

$$z-\beta=x-(b+\beta)=x-c=t;$$

e assim por diante.

Feito isto, admittamos por um pouco que todas as raizes de $fx=0$ são reaes. Então, tanto n'esta equação, como nas transformadas, o numero das raizes positivas será egual ao das variações (n.° 76). Se em $fx=0$ houver porém raizes entre 0 e a, estas tornar-se-hão negativas na transformada em $y=x-a$, e em consequencia disto perder-se-hão tantas variações na última quantas forem as raizes, que ha na proposta, entre 0 e a. Assim, se a proposta e a transformada em $x-a$ tiverem o mesmo numero de variações, não haverá raiz alguma entre 0 e a; haverá uma só, se a transformada perder uma variação; 2, 3, 4, ... raizes, se desapparecerem 2, 3, 4.... variações. Pela mesma razão, na transformada em $z=y-\alpha$, quantas forem as variações perdidas na passagem da tranformada em y para a transformoda em z, tantas raizes y haverá entre 0 e α, isto é, tantas raizes quantas são as de $fx=0$ entre a e b, porque $b=a+\alpha$. E assim consecutivamente. Para obter o numero das raizes negativas, mudar-se-ha x em $-x$ em $fx=0$, e investigar-se-ha o numero das raizes positivas da transformada.

Mas se a proposta tiver raizes imaginárias, estas consequencias não tem logar; e por isso quando desapparecem duas variações póde entrar em dúvida se esta perda é devida á existencia de duas raizes intermedias, ou se essas raizes são substituidas por duas imaginárias. A perda de tres variações põe em dúvida se são tres, ou só uma, as raizes reaes; etc.

Segundo M. Budan, é necessario neste caso introduzir fracções que estreitem os intervallos, por modo que se possam separar as duas raizes intermedias, quando existam; o que se reconhece pela perda das variações uma a uma. Se estas raizes forem muito proximas, de modo que, por ex.°, só diffiram na 2.ª decimal, sómente haverá certeza de as haver separado, quando o intervallo entre os numeros $0, a, b, c, \ldots$ for de uma centesima. Porém, não fallando no trabalho que dão estes cálculos, como a separação das raizes é impossivel, quando não existem, póde levar-se muito longe, e debalde, a approximação, sem haver um indicio da não existencia das mesmas raizes. Não é possivel destruir esta objecção contra o methodo, exceptuando alguns casos particulares em que M. Budan resolve a difficuldade, a qual fica em pé para todos os outros casos; razão porque este methodo não satisfaz geralmente.

Eis aqui como o seu auctor o applica á approximação das raizes. Tiram-se, successivamente da equação $fx=0$ pelo processo da pag. 59, todas as transformadas em $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... até se chegar a uma equação que tenha sómente signaes positivos; pelo número das variações perdidas sabe-se quantas raizes *podem existir* entre os numeros $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ d'onde se deduz o inteiro contido em cada uma d'ellas. Se a transformada em $x-a$ tiver zero por último termo, $x-a$ será factor de fx (n.° 27); e quando muitos dos últimos termos das transformadas forem nullos conjunctamente, a raiz a será multipla; vindo por este modo a reconhecer-se todas as raizes inteiras eguaes e desiguaes. Quando existirem estas raizes, dividir-se-ha fx por $x-a$ tantas vezes, quantos forem os últimos termos nullos, e depois se applicará o methodo ao quociente, a fim de obter as raizes fraccionarias.

Designemos por (0), (1), (2), ... as transformadas em $x-0$, $x-1$, $x-2$, etc.

Então na equação $x^4-6x^3+16x^2-24x+16=0$, teremos

$$\begin{array}{llllll} (0)\ldots\ldots & 1 & -6 & +16 & -24 & +16 \\ (1)\ldots\ldots & 1 & -2 & +\ 4 & -\ 6 & +\ 3 \\ (2)\ldots\ldots & 1 & +2 & +\ 4 & \ \ 0 & \ \ 0 \end{array}$$

Por onde se vê, que fx é divisivel por $(x-2)^2$; e como o quociente é $(x-1)^2+2(x-1)+4=0$, equação cujas raizes são imaginárias, vê-se que a proposta só tem duas raizes eguaes, e as outras imaginárias.

Na equaçao $x^4-8x^3-16x-2=0$, limitando-nos ás transformadas em que se perdem variações, que são as que basta tractar, teremos

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
(0)\ldots\ldots & 1 & 0 & -\ 8 & -\ 16 & -12 & 1\ vari. \\
(3)\ldots\ldots & 1 & +12 & +46 & +\ 44 & -51 & 1\ vari. \\
(4)\ldots\ldots & 1 & +16 & +88 & +176 & +52 & 0\ vari.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrrrrrl}
\text{Mudando } x \text{ em } -x & (0)\ldots\ldots & 1 & 0 & -\ 8 & +\ 16 & -12 & 3\ vari. \\
& (1)\ldots\ldots & 1 & +\ 4 & -\ 2 & +\ \ 4 & -\ 3 & 3\ vari. \\
& (2)\ldots\ldots & 1 & +\ 8 & +16 & +\ 16 & +\ 4 & 0\ vari.
\end{array}
$$

Onde se vê que ha uma raiz entre 3 e 4; e que entre -1 e -2 podem haver 3, ou talvez uma só real e duas imaginárias.

Conhecido o inteiro a de cada raiz, para achar o algarismo a' das decimas, a'' das centesimas, etc.: supponhâmos

$$x-a=\tfrac{1}{10}x',\ x'-a'=\tfrac{1}{10}x'',\ x''-a''=\tfrac{1}{10}x''',\ \text{etc.},$$

o que dará

$$x=a+\tfrac{1}{10}a'+\tfrac{1}{1000}a''+\text{etc.}$$

Ora, sendo a o maior inteiro contido em x, é $x-a<1$ e $x'<10$; sendo tambem a' o maior inteiro contido em x', é $x'-a'<1$, e $x''<10$; e assim por diante. Logo todos os inteiros $a', a'', a''', \ldots\ldots$ contidos em $x', x'', x''', \ldots\ldots$ são <10, e formam as letras successivas de dizima no valor de x.

Depois de achar a transformada em $x-a$, que perde uma variação, e faz conhecer o inteiro a da raiz, passar-se-ha á composição da transformada em x', a qual se obtem, segundo se deduz da equação $x-a=\frac{1}{10}x'$, multiplicando por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$ os respectivos coefficientes da equação em $x-a$. D'esta equação em x', se deduzirão as transformadas em $x'-1$, $x'-2$, ..., das quaes aquella $x'-a'$, que perder uma variação, dará o algarismo $a'<10$ das decimas. Multiplicando de novo os coefficientes successivos da transformada em $x'-a'$ por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots\ldots$ passaremos para a transformada em x'', d'onde se deduzirão as transformadas em $x''-1$, $x''-2\ldots\ldots$ das quaes aquella $x''-a''$ que perder uma variação dará o algarismos $a''<10$ das centesimas. E assim para as decimaes subsequentes.

Advirta-se que se, em vez de pararmos com o cálculo na transformada que dá uma variação de menos, o continuassemos até á transformada em $x'-10=10[x-(a+1)]$, os coefficientes d'esta equação seriam os productos por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots\ldots$ dos coefficientes da transformada em $x-(a+1)$; e podemos por isso servir-nos deste meio para prova da exactidão dos cálculos.

No ex.° precedente, supprimindo as transformadas inuteis, teremos para a raiz entre 3 e 4

eq. em x'	(0)	1	$+120$	$+4600$	$+44090$	-510000
	(6)	1	$+144$	$+6976$	$+113024$	-53184
	(7)	1	$+148$	$+7414$	$+127412$	$+66961$
	(10)	1	$+160$	$+8800$	$+176000$	$+520000$

D'aqui se conclue que x' está entre 6 e 7, logo $x=3,6$. A equação (10) sendo o mesmo que a equação (4) de cima, multiplicados os seus coefficientes por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots\ldots$, serve de prova aos calculos. Para achar as centesimas das raizes, empregar-se-hia outra vez a equação (6), multiplicando os seus coefficientes por aquelles factores, e viría a transformada em x'' etc.

Por este processo se acharia $x=3,64575$.

Do mesmo modo se acharia a raiz comprehendida entre -1 e -2. As outras duas raizes são imaginárias.

Este methodo de approximação, posto que geral, é longo e menos commodo que os outros, que por isso são preferiveis. Emprega-se com vantagem para separar as raizes, quando se acham muitas comprehendidas entre dous inteiros successivos: porque então as variações que se perdiam ao mesmo tempo na passagem de uma transformada para a seguinte, começam a não desapparecer senão uma depois d'outra, logo que se chega á primeira letra de dizima que não é commum a estas raizes. Isto se vê no ex.° seguinte etc.

$$x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$$

$$\begin{array}{llr}
 & (0)\ldots\ 1-4+\ 1+\ 6+2 & 2\ vari. \\
 & (1)\ldots\ 1\quad 0-5\quad 0+6 & 2\ vari. \\
 & (2)\ldots\ 1+4+\ 1-\ 6+2 & 2\ vari. \\
 & (3)\ldots\ 1+8+19+12+2 & 0\ vari. \\
\text{Mudando } x \text{ em } -x & (0)\ldots\ 1+4+\ 1-\ 6+2 & 2\ vari. \\
 & (1)\ldots\ 1+8+19+12+2 & 0\ vari.
\end{array}$$

Podem haver duas raizes entre 2 e 3, e outras duas entre 0 e -1. Para verificar e approximar os seus valores, far-se-ha $x-2=\frac{1}{10}x'$, para achar as raizes entre 2 e 3: e resultará

$$\begin{array}{lr}
(0)\ldots\ 1+40+\ 100-6000+20000 & 2\ vari. \\
(4)\ldots\ 1+56+\ 676-3024+\ \ 416 & 2\ vari. \\
(5)\ldots\ 1+60+\ 850-1500-\ 1875 & 1\ vari. \\
(7)\ldots\ 1+68+1234-2152-\ \ 979 & 1\ vari. \\
(8)\ldots\ 1+72+1444+5328+\ 2976 & 0\ vari.
\end{array}$$

Existem por tanto duas raizes de x entre 2 e 3, a saber $x=2,4\ldots$ e $x=2,7$. Levaremos a approximação mais longe, partindo das equações (4) e (7); e buscando primeiro as centesimas, depois as millesimas.... acharemos $x=2,414\ldots$ e $2,732$.

Em quanto ás raizes que se presume existirem entre 0 e -1, tomaremos a equação (0) depois de haver mudado x em $-x$, e como accidentalmente esta equação é a mesma que (3), e conduz ás transformadas acima, a dizima é a mesma, e $x=-0,414\ldots$ e $x=0,732\ldots$

Veja-se a nota que termina a Algebra de *M. Bourdon.*

Raizes Imaginárias.

90. Sujeitando, por convenção, os symbolos da fórma $a+b\sqrt{-1}$, em que a e b designam quantidades reaes, ás operações algebricas, *vamos mostrar que os resultados podem sempre reduzir-se á forma* $a+b\sqrt{-1}$. Com effeito:

[1] $(a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1}$;

[2] $(a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1}$;

[3] $(a+b\sqrt{-1})\times(a'+b'\sqrt{-1})=(aa'-bb')+(ab'+a'b)\sqrt{-1}$;

[4] $$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$$
$$+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1}.$$

O desenvolvimento da $(a+b\sqrt{-1})^n$, obtem-se pela fórmula do binomio, que dá

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^n=a^n\left[1+\frac{n}{1}\,\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right.$$

$$-\frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}\,\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}$$

$$\left.+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\,\frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}\right];$$

e reunindo os termos affectos de $\sqrt{-1}$,

$$(a+b\sqrt{-1})^n$$

$$=a^n\left[1-\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\,\frac{b^2}{a^2}+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\,\frac{b^4}{a^4}-\text{etc.}\right]$$

$$+a^n\left[\frac{n}{1}\,\frac{b}{a}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}\,\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}\right]\sqrt{-1}$$

Para obter o desenvolvimento de $(a-b\sqrt{-1})^n$ bastará mudar b em $-b$ no resultado precedente; vindo sómente por este motivo a haver mudança no signal do coefficiente de $a^n\sqrt{-1}$, em cujos termos entra b elevado a potencias impares. Se fizermos pois

$$p=1-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\frac{b^4}{a^4}-\text{etc.},$$

$$q=\frac{n}{1}\frac{b}{a}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}\frac{b^3}{a^3}+\text{etc.},$$

será

$$[5]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a+b\sqrt{-1})^n=p+q\sqrt{-1},$$

$$[6]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a-b\sqrt{-1})^n=p-q\sqrt{-1}.$$

Se nestas últimas fórmulas for n inteiro positivo, as series representadas por p e q serão limitadas, e p e q quantidades finitas. Se n for porém negativo ou fraccionario, as series serão illimitadas.

Para reduzir a expressão radical

$$\sqrt[n]{a\pm b\sqrt{-1}}$$

á fórma $p\pm q\sqrt{-1}$, substituil-a-hemos pela potencia fraccionaria $(a\pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$, que se desenvolve do modo que acabâmos de dizer. A Algebra não fornece outro methodo geral para esta transformação; e só quando n for potencia de 2, se póde effectuar sem socorro das series.

Consideremos primeiro os dous radicaes do 2.° gráo

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\ \text{ e }\ \sqrt{a-b\sqrt{-1}}.$$

Pondo $\quad k=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}\,,\ \ldots\ldots\ (a)$

$$l=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}\,,\ \ldots\ldots\ (b)$$

teremos, elevando estas quantidades ao quadrado,

$$k^2 = 2a + 2\sqrt{a^2+b^2},$$

$$l^2 = 2a - 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

Qualquer que seja o signal de a, o valor de k^2 é positivo; pelo contrário o de l^2 é sempre negativo. D'estas egualdades tira-se

$$k = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}},\ l = \sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\ \ldots\ldots (c)$$

Ora as equações (a) e (b) dão

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \frac{k+l}{2},\ \sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \frac{k-l}{2};$$

substituindo pois por k e l os valores (c), vem finalmente

[7] $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$$

[8] $$\sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$$

Se considerarmos agora as expressões radicaes

$$\sqrt[4]{a\pm b\sqrt{-1}},\ \sqrt[8]{a\pm b\sqrt{-1}},\ \sqrt[16]{a\pm b\sqrt{-1}}, \text{ etc.},$$

nas quaes os indices das raizes são potencias de 2: reconhecer-se-ha, que a extracção de cada uma d'estas raizes póde ser substituida por extracções successivas da raiz quadrada; e por consequencia as fórmulas [7] e [8], sendo-lhes applicadas repetidamente, reduzirão por fim estas espressões á fórma $p \pm q\sqrt{-1}$.

Se no polynomio $kx^n + px^{n-1} + \ldots$ fizermos $x = a \pm b\sqrt{-1}$, cada um dos termos desenvolvido terá a fórma $p \pm q\sqrt{-1}$, e por conseguinte tambem o polynomio terá a mesma fórma.

Effectuando a multiplicação de 3, 4, 5 .... factores imaginários da fórma $a \pm b\sqrt{-1}$, obteremos tambem um producto das mesma fórma.

91. Supponhâmos que $x = a + b\sqrt{-1}$ é uma das raizes da equação $fx = 0$. Substituindo por x este valor na proposta, virá, pelo que se acaba de ver, uma expressão da fórma $P + Q\sqrt{-1} = 0$, a qual só póde ser satisfeita pondo $P = 0$, $Q = 0$, visto que a parte real não se póde destruir com a imaginária. Se tivessemos posto $x = a - b\sqrt{-1}$, fx tornar-se-hia em $P - Q\sqrt{-1}$; pois, segundo já dissemos, só haveria mudança no valor Q, em que entram as potencias impares de b, e que por isso mudaria de signal. Mas como P e Q são nullos, a substituição d'este 2.° valor de x tornaria $fx = 0$; e por isso os *valores conjugados* $a \pm b\sqrt{-1}$ são ambos raizes da proposta, e fx é divisivel por $(x - a)^2 + b^2$, producto dos dous factores do 1.° grão. Logo:

Se $a + b\sqrt{-1}$ *for uma das raizes de* $fx = 0$, *tambem* $a - b\sqrt{-1}$ *o será, e a proposta terá um factor do 2.° grão da fórma* $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.

92. *Uma equação de qualquer grão, com coefficientes reaes ou imaginários da fórma* $a + b\sqrt{-1}$, *tem sempre pelo menos uma raiz real ou imaginária d'esta forma.*

A demonstração que deu Legendre d'este theorema (*Theorie des Nombres*, I. pag. 175) é com pouca differença a seguinte.

I. Comecemos por mostrar a verdade do theorema a respeito das equações binomias

$$x^m \pm 1 = 0,\ x^m \pm \sqrt{-1} = 0.$$

1.° Qualquer que seja m, a equação $x^m - 1 = 0$ é evidentemente satisfeita pelo valor $x = 1$.

Se m é impar, $x^m + 1 = 0$ sel-o-ha por $x = -1$.

2.° Se m é par, terá a fórma $m = 2^n p$, sendo p um numero impar; mas $x^{2^n p} = \left(x^{2^n}\right)^p$; se pudermos pois achar um valor de x, real ou imaginário que satisfaça á equação $x^{2^n} = -1$, este valor verificará necessariamente

$$\left(x^{2^n}\right)^p = -1, \text{ ou } x^m + 1 = 0.$$

Ora da equação $x^{2^n} = -1$ tira-se $x = \sqrt[2^n]{-1}$, valor que, segundo se viu na Arithmetica, se acha extrahindo n raizes quadradas successivas a -1. Mas a primeira raiz é $\pm\sqrt{-1}$; e como a raiz quadrada de uma expressão da forma $a \pm b\sqrt{-1}$ é tambem desta fórma, segue-se, que a raiz do grão 2^n de -1, ainda terá a mesma fórma; e que a equação $x^m + 1 = 0$ terá uma raiz da fórma $a + b\sqrt{-1}$, quando m for par.

3.° Se m é impar terá a fórma $4n + 1$ ou $4n + 3$. Ora se elevarmos sucessivamente, á 1.ª, 2.ª, 3.ª . . . . potencia, a expressão $+\sqrt{-1}$, acharemos periodicamente os seguintes valores

$$+\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1,$$

donde se deduzem as quatro fórmulas seguintes:

$$(+\sqrt{-1})^{4n} = +1, \; (+\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1},$$

$$(+\sqrt{-1})^{4n+2} = -1, \; (+\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

Do mesmo modo se deduzem as quatro seguintes

$$(-\sqrt{-1})^{4n} = +1, \; (-\sqrt{-1})^{4n+1} = -\sqrt{-1},$$

$$(-\sqrt{-1})^{4n+2} = -1, \; (-\sqrt{-1})^{4n+3} = +\sqrt{-1}.$$

Sendo pois

$$(-\sqrt{-1})^{4n+1} = -\sqrt{-1}, \; (+\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1},$$

vê-se que satisfaremos á proposta $x^m + \sqrt{-1} = 0$, pondo $x = -\sqrt{-1}$, ou $x = +\sqrt{-1}$, conforme for m egual a $4n+1$ ou a $4n+3$.

Se m for par, pondo como acima $m = 2^n p$, e raciocinando do mesmo modo, acharemos que a equação $x^m + \sqrt{-1} = 0$ terá uma raiz da fórma $a + b\sqrt{-1}$, se pudermos obter para x um valor da mesma fórma que satisfaça á equação

$$x^{2^n} = -\sqrt{-1}\text{, ou } = +\sqrt{-1},$$

conforme for p egual a $4n+1$ ou $4n+3$. Mas as raizes quadradas de $\pm\sqrt{-1}$ são da fórma $a + b\sqrt{-1}$; logo tambem o será a raiz do gráo 2^n de $\pm\sqrt{-1}$.

4.° Pelo mesmo theor se mostrará que a equação $x^m - \sqrt{-1} = 0$ tem uma raiz da fórma $a + b\sqrt{-1}$.

II. Passando agora a um polynomio qualquer $fx = 0$, supponhamos que não tem raiz alguma da fórma $x = a + b\sqrt{-1}$. Ponhamos pois $x = a + b\sqrt{-1} + \alpha z$, sendo α uma quantidade susceptivel de se tornar menor que qualquer quantidade assignavel, e z uma indeterminada, de que podemos dispor convenientemente. Para effectuar a substituição d'este valor de x na proposta, mudaremos primeiro x em $x + h$, o que dará (n.° 31)

$$fx + f'(x)h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots + h^m,$$

e substituiremos depois x por $a + b\sqrt{-1}$, e h por αz. O 1.° termo fx tornar-se-ha, como já vimos, em $c + d\sqrt{-1}$, não podendo c e d tornar-se nullos, visto que $a + b\sqrt{-1}$ se suppõe não ser raiz da proposta; algumas das derivadas de fx podem ser nullas. Suppondo que $f^m(x)$ é a 1.ª derivada que se não anniquila pela substituição de $a + b\sqrt{-1}$ em vez de x, e designando por $c' + d'\sqrt{-1}$ o valor que toma então o quociente d'esta derivada por $1.2.3\ldots\ldots m$; teremos, representando por $P + Q\sqrt{-1}$ aquillo em que se torna fx pela substituição de

$$x = a + b\sqrt{-1} + \alpha z,$$

$$P + Q\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1} + (c' + d'\sqrt{-1})\alpha^m z^m + G\alpha^{m+1} z^{m+1},$$

designando, por simplificação, por $G\alpha^{m+1} z^{m+1}$ a somma de todos os termos, em que αz entre n'uma potencia superior a m.

Como z é indeterminado, podemos dar-lhe, como vimos acima, um valor da fórma $a+b\sqrt{-1}$, tal como $z^m = \pm 1$, e separando conjunctactamente as partes reaes e as imaginárias, virá

$$P = c \pm c'\alpha^m + G'\alpha^{m+1},$$

$$Q = d \pm d'\alpha^m + G''\alpha^{m+1},$$

d'onde se deduz facilmente

$$P^2 + Q^2 = c^2 + d^2 \pm 2(cc' + dd')\alpha^m + K\alpha^{m+1},$$

ou antes

$$P^2 + Q^2 = c^2 + d^2 + \{\pm 2(cc' + dd') + K\alpha\}\alpha^m.$$

Como α se póde tornar tam pequeno como se quizer, é evidente que podemos dar a $K\alpha$ um valor tal, que o signal da quantidade que está entre os colchetes, tenha o signal do 1.º termo $\pm(cc'+dd')$. Logo tomando aquelle dos signaes $+$ e $-$ que for contrário ao do binomio $cc'+dd'$, o que equival a pôr $z^m = +1$, ou $z^m = -1$, teremos

$$P^2 + Q^2 < c^2 + d^2.$$

Se fosse $cc' + dd' = 0$, começariamos o mesmo cálculo, pondo $z^m = \pm\sqrt{-1}$, o que daria

$$P = c \mp d'\alpha^m + G_1\alpha^{m+1}$$

$$Q = d \pm c'\alpha^m + G_2\alpha^{m+1},$$

d'onde

$$P^2 + Q^2 = c^2 + d^2 \mp 2(cd' - dc')\alpha^m + K_1\alpha^{m+1},$$

Pondo $z^m = +\sqrt{-1}$ ou $z^m = -\sqrt{-1}$, conforme $cd' - dc'$ fosse negativo ou positivo, poderiamos tomar, como em cima, α tam pequeno, que tornasse negativa a somma de todos os termos que se seguem a $c^2 + d^2$; e teriamos ainda n'este caso

$$P^2 + Q^2 < c^2 + d^2.$$

Por outra parte tambem não poderia ser $cd' - dc'$ nullo, por quanto, como suppômos tambem $cc' + dd' = 0$, resultaria

$$(cc' + dd')^2 + (cd' - dc')^2 = 0,$$

ou

$$c^2c'^2 + d^2d'^2 + c^2d'^2 + d^2c'^2 = (c^2 + d^2)(c'^2 + d'^2) = 0;$$

condição que exige, que seja ao mesmo tempo:

ou $$c = 0, \ d = 0,$$

o que é contra a hypothese;

ou $$c' = 0, \ d' = 0,$$

e então sería $f^m(a + b\sqrt{-1}) = 0$, tambem contra o que suppuzemos.

Fica pois demonstrado, que se um valor $a + b\sqrt{-1}$ de x, que reduz fx a $c + d\sqrt{-1}$, não for raiz da equação $fx = 0$, podemos sempre achar outro valor $x = a + b\sqrt{-1} + \alpha z$, tal, que dê a fx um desenvolvimento da fórma $P + Q\sqrt{-1}$, sendo $P^2 + Q^2 < c^2 + d^2$. Podemos depois dar outro valor a x da mesma fórma, d'onde resulte para fx um desenvolvimento $P' + Q'\sqrt{-1}$, sendo $P'^2 + Q'^2 < P^2 + Q^2$. E assim por diante.

Vê-se pois, que o binomio essencialmente positivo $P^2 + Q^2$ póde ir decrescendo por tal modo, que, chegue ao minimo *zero*; e nesse estado haverá um valor $x = A + B\sqrt{-1}$, que, dando a fx o desenvolvimento $p + q\sqrt{-1}$, e tornando $p^2 + q^2 = 0$ e por conseguinte $p = 0$ e $q = 0$, será por isso raiz da equação $fx = 0$. Logo:

1.° *A equação* $fx = 0$ *terá sempre uma raiz da fórma* $a + b\sqrt{-1}$, *e por conseguinte outra da fórma* $a - b\sqrt{-1}$, *e um factor real do 2.°*

grão da fórma $(x-a)^2+b^2$. *Com tudo se for* $b=0$ *a raiz será real, e não existirá a sua conjugada.*

2.° *Toda a equação de grão par póde sempre ser decomposta em factores reaes do 2.° grão. O mesmo se dirá das equações de grão impar, tendo porém estas demais um factor binomio do 1.° grão.*

3.° *Toda a funcção imaginária póde reduzir-se á fórma* $a \pm b\sqrt{-1}$; por que egualando-a a z, poderemos por meio de transposições e elevações a potencias, eliminar d'esta equação todos os radicaes, e chegar assim a uma equação $fz=0$, cujas raizes da fórma $a\pm b\sqrt{-1}$ serão os valores da funcção proposta.

93. Vejamos agora a maneira de calcular as raizes imaginárias contidas na equação $fx=0$.

1.° Substituindo na proposta por x o valor $a+b\sqrt{-1}$, obteremos uma expressão da fórma $P+Q\sqrt{-1}=0$, da qual se deduz $P=0$ e $Q=0$. Estes polynomios P e Q, obtem-se muito facilmente, como já vimos, desenvolvendo pela fórma de Taylor (n.° 31) a expressão $f(a+b\sqrt{-1})$; d'onde nos resultará, supprimindo o factor commum b de todos os termos de Q,

$$fa-\frac{b^2}{1.2}f''a+\frac{b^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}a-\text{etc.}=0,$$

$$f'a-\frac{b^2}{1.2.3}f'''a+\frac{b^4}{1.2.3.4.5}f^{\text{V}}a-\text{etc.}=0.$$

Eliminando b^2 entre estas duas equações, virá uma equação em a, que se tractará pelo processo da pag. 77, e dará todas as raizes commensuraveis. Com estes valores de a acharemos os correspondentes de b^2, e finalmente as raizes imaginárias da fórma $x=a\pm b\sqrt{-1}$.

Por ex.° a equação

$$x^4-3x^2-12x+40=0,$$

dá

$$a^4-3a^2-12a+40-(6a^2-3)b^2+b^4=0,$$

$$4a^3-6a-12-4ab^2=0.$$

Eliminando b^2 vem a equação final

$$16a^6 - 24a^4 - 151a^2 - 36 = 0,$$

cujas raizes commensuraveis $a = +2$, $a = -2$, dão $b^2 = 1$, $b^2 = 4$, resultando por conseguinte $x = 2 \pm \sqrt{-1}$ e $x = -2 \pm 2\sqrt{-1}$. Assim a proposta terá a fórma

$$[(x-2)+1][(x+2)^2+4)] = (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x + 8).$$

2.° Quando a equação final em a não tem raiz commensuravel, esta theoria só dá os valores de a e b por approximação.

N'este caso podemos applicar o *methodo de Newton* (n.° 69) para obter resultados cada vez mais approximados. Assim tendo achado, pela theoria precedente, os valores a e b de quaesquer numeros reaes comprehendidos entre os limites conhecidos das raizes, faremos $x = a + b\sqrt{-1}$, e substituindo este valor em $fx = 0$, apparecerá uma expressão da fórma $c + d\sqrt{-1}$. Tomando depois uma quantidade y tam pequena, que possam desprezar-se sem erro sensivel as potencias superiores á mais baixa; e pondo $x = a + b\sqrt{-1} + y$ em $fx = 0$, virá uma expressão da fórma

$$f(a + b\sqrt{-1} + y) = c + d\sqrt{-1} + y(c' + d'\sqrt{-1}) = 0.$$

Tirando d'esta equação o valor de y, e substituindo-o em $x + a + b\sqrt{-1} + y$, teremos um valor de x mais approximado.

Com este 2.° valor de x procederemos do mesmo modo para obter 2.ª approximação. E assim por diante.

Por ex.°, na equação

$$fx = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0,$$

tome-se primeiro $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})$, e resultará

$$fx=\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{-1}).$$

Pondo depois

$$x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}+y,$$

vem

$$\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{-1}-y(1-\tfrac{7}{2}\sqrt{-1})=0;$$

d'onde se deduz

$$y=0{,}09+0{,}05\sqrt{-1}.$$

Teremos pois na 1.ª approximação

$$x=0{,}59+0{,}55\sqrt{-1}.$$

Pondo agora $\quad x=0{,}59+0{,}55\sqrt{-1}+y,$

resulta

$$-0{,}0009+0{,}056\sqrt{-1}-y(-0{,}5032+4{,}047\sqrt{-1}),$$

ou

$$y=-\frac{0{,}2271-0{,}0245\sqrt{-1}}{16,6302}=-0{,}0137+0{,}0015\sqrt{-1},$$

e

$$x=0{,}5763+0{,}5515\sqrt{-1}.$$

E assim por diante.

Se no desenvolvimento de fx a potencia mais baixa de y não for a primeira, deve entender-se a respeito de y^i o que fica dito a respeito de y, sendo i o menor expoente de y. N'este caso será necessario extrahir uma raiz do grão i.

III. Resolução das equações particulares.

Abaixamento das Equações.

94. Supponhamos que duas equações $fx=0$, $\varphi x=0$ tem as raizes communs a, b, c, ... Os factores $x-a$, $x-b$, $x-c$...... tambem lhes serão communs, e o producto d'estes factores será o maior divisor commum entre fx e φx. Para obter pois aquellas raizes, procuraremos o maior divisor commum D entre as duas funcções, e resolvendo a equação $D=0$, as suas raizes serão as pedidas. Dividindo depois fx por D, e designando por $f_{\prime}x$ o quociente, as outras raizes da equação $fx=0$ serão as da equação $f_{\prime}x=0$.

Posto isto, vejamos por que maneira se póde *abaixar o gráo de uma equação*

$$fx=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

quando é conhecida a relação $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{x}')=0$ *entre duas das suas raizes* x *e* x'.

Como x e x' são raizes da proposta, teremos as tres equações

$$fx=0,\ fx'=0,\ \varphi(x,x')=0.$$

Tirando da última equação o valor de x', e substituindo-o na 2.ª, ficarão as duas em x, que devem coexistir,

$$fx=0,\ \mathrm{F}(x)=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

As raizes communs das equações (2) são as raizes de (1), que satisfazem á condição dada $\varphi(x,x')=0$. Procuremos pois o maior divisor commum D entre os 1.os membros das equações (2); as raizes communs x serão contidas na equação $D=0$; e estas poderão substituir-se em $\varphi(x,x')=0$ para dar as outras da proposta. Dividindo depois fx pelo producto de todos os factores correspondentes ás raizes acima achadas, virá a equação final com o gráo abaixado.

Por ex.°, suppondo que entre as duas raizes x e x' de

$$x^3 - 37x - 84 = 0,$$

se dá a relação $1 = x' + 2x$, teremos as tres equações

$$x^3 - 37x - 84 = 0, \quad x'^3 - 37x' - 84 = 0, \quad 1 = x' + 2x,$$

das quaes resultam as duas

$$x^3 - 37x - 84 = 0, \; 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0,$$

que tem o divisor commum $x + 3$, o qual egualado a zero dá $x = -3$. Esta raiz substituida na relação $1 = x' + 2x$, dá $x' = 7$. Dividindo pois a proposta por $(x + 3)(x - 7)$, resulta a equação $x + 4 = 0$, que dá a 3.ª raiz $x = -4$.

95. Se em logar da relação $\varphi(x, x') = 0$ entre duas das raizes, fosse dada uma relação entre um numero qualquer de raizes, deviamos tractar cada uma destas como uma incognita distincta; formar as equações resultantes da sua substituição na proposta; junctar estas novas equações ás que exprimem a relação dada; e eliminar depois todas as incognitas excepto uma, que se conservará conjunctamente em duas das equações, as quaes por conseguinte admittirão um divisor commum. Este, segundo o grão de que for, fará conhecer uma ou mais raizes comprehendidas na relação dada.

96. Chamam-se *equações reciprocas*, aquellas cujos termos equidistantes dos extremos tem o mesmo coefficiente, como

$$fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots qx^2 + px + k = 0 \;\ldots\ldots (3)$$

Se α for uma raiz d'esta equação, tambem $\frac{1}{\alpha}$ o será, por isso que substituindo os dous valores, e supprimindo os denominadores, apparecem os mesmos resultados. Nestas equações pois *as raizes vem conjugadas aos pares com dous valores reciprocos*, e d'ahi lhes provém o nome com que costumam ser designadas. A propriedade que as caracteriza, exprime-se analyticamente por meio da equação

$$fx = x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vejamos como n'estas equações se póde abaixar o seu grão; e consideremos os dous casos de serem ellas do grão impar ou do grão par.

1.º caso. *Grão impar.* Como o numero $n+1$ dos termos da equação (3) é par, o coefficiente do termo medio se repetirá, e o valor $x=-1$ será manifestamente raiz da equação. N'este caso -1 é a unica das raizes que não vem conjugada com outra reciproca, sendo ella mesma a sua reciproca. Se dividirmos pois $fx=0$ por $x+1$ (pelo processo do n.° 27), e designarmos o quociente por $\mathrm{F}x=0$, esta equação de grão par será tambem reciproca, por isso que as suas raizes o são. Isto mesmo se demonstra directamente; por que, mudando x em $\frac{1}{x}$ na equação identica $fx=(x+1)\,\mathrm{F}x$, multiplicando por x^n, e attendendo a ser $fx=x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$: virá

$$fx=\left(\frac{1}{x}+1\right)x^n\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=(x+1)\,x^{n-1}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right):$$

egualando as duas expressões de fx, deduz-se

$$\mathrm{F}x=x^{n-1}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right),$$

que é o caracter proprio das equações reciprocas.

Assim a equação reciproca

$$3x^9-10x^8+2x^7+13x^6-8x^5-8x^4+13x^3+2x^2-10x+3=0,$$

dividida por $(x+1)$, abaixa-se á equação tambem reciproca

$$3x^8-13x^7+15x^6-2x^5-6x^4-2x^3+15x^2-13x+3=0.$$

2.° caso. *Grão par.* O coefficiente do termo medio P não se repete. Mudemos n em $2m$ na equação (3), e dividamos por x^m. Reunindo depois os termos de coefficientes eguaes, virá

$$k(x^m+x^{-m})+p(x^{m-1}+x^{-(m-1)})+q(x^{m-2}+x^{-(m-2)})+\ldots\ldots \mathrm{P}=0.$$

Supponhamos $z=x+x^{-1}$; e eliminando x entre esta equação e a proposta, virá a transformada em z; e depois de resolvida, acharemos x por meio da equação

$$x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}z^2-1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Para fazer a eliminação, temos evidentemente

$$(x^{i-1}+x^{-(i-1)})(x+x^{-1})=x^i+x^{-i}+x^{i-2}+x^{-(i-2)},$$

d'onde se tira

$$x^i+x^{-i}=(x^{i-1}+x^{-(i-1)})\,z-(x^{i-2}+x^{-(i-2)}).$$

Fazendo successivamente $i=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ vem

$$\begin{array}{ll}
x^1+x^{-1}=z & x^2+x^{-2}=z^2-2 \quad , \\
x^3+x^{-3}=z^3-3z & x^4+x^{-4}=z^4-4z^2+2, \\
x^5+x^{-5}=z^5-5z^3+5z & x^6+x^{-6}=z^6-6z^4+9z^2-2, \\
\qquad \text{etc.} &
\end{array}$$

Em geral cada uma d'estas expressões é a somma das duas precedentes multiplicadas, a immediata por z, e a outra por -1. Podemos pois deduzir a equação geral

$$x^i+x^{-i}=z^i-iz^{i-2}+\frac{i(i-3)}{2}z^{i-4}-\frac{i(i-4)(i-5)}{2.3}z^{i-6}$$

$$+\frac{i(i-5)(i-6)(i-7)}{2.3.4}z^{i-8}, \text{ etc.}\ldots\ldots\ldots (5)$$

Qualquer dos termos T se deduz do precedente S por meio da relação

$$T = -\frac{(i-2h+1)(i-2h+2)}{h(i-h)z^2}S,$$

designando por h o numero dos termos que precedem T. Não nos demoraremos com a demonstração d'esta theoria, que se funda nos mesmos principios que as das series dos senos e cosenos d'arcos multiplos, de que adiante nos occuparemos.

Vê-se pois, que, por este processo, as equações do gráo $2m$ ficam abaixadas ao gráo m.

No ex.° já tractado, em que a proposta do gráo 9.°, depois de abaixada ao 8.°, é

$$3x^8-13x^7+15x^6-2x^5-6x^4-2x^3+15x^2-13x+3=0,$$

temos, que esta equação se muda em

$$3(x^4+x^{-4})-13(x^3+x^{-3})+15(x^2+x^{-2})-2(x+x^{-1})-6=0,$$

a qual se transforma em

$$3z^4-13z^3+3z^2+37z-30=0,$$

cujas raizes são $z=1,\ 2,\ 3,\ -\frac{5}{3}$; e d'onde se deduz depois

$$x=1\pm 0,\ \tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),\ \tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}),\ -\tfrac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11}).$$

Equações binomias. Raizes da Unidade.

97. As equações binomias são todas as que podem reduzir-se á fórma

$$x^m=\pm A,\ \text{ou}\ x^m\mp A=0,$$

sendo A uma quantidade qualquer conhecida e positiva.

Consideremos primeiro as equações da fórma $x^m = A$. Pondo $k = \sqrt[m]{A}$, ou $k^m = A$, vem $x^m - k^m = 0$; e se fizermos $x = ky$, virá $y^m - 1 = 0$. D'onde se vê que para resolver a proposta, bastará resolver a equação $y^m - 1 = 0$, e multiplicar por k as raizes y obtidas. Assim, *para qualquer raiz do gráo* m *resultam* m *valores differentes, que se obtém multiplicando a raiz arithmetica* $\sqrt[m]{A}$ *pelas* m *raizes da unidade.*

Por uma operação similhante $x^m = -A$ se reduz a $x^m + k^m = 0$, e depois a $y^m + 1 = 0$.

Como $y = 1$ satisfaz á equação $y^m - 1 = 0$, dividamos esta por $y - 1$. Resultará a seguinte equação reciproca, susceptivel de abaixamento (n.° 96),

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots\ldots + y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Se m for impar, como nem $y^m - 1 = 0$, póde ter raizes negativas, nem a equação (1) as póde ter positivas, a proposta não terá mais do que uma raiz real.

Se m for par, $y = \pm 1$ satisfaz á equação $y^m - 1 = 0$, a qual é divisivel por $y^2 - 1$, dando em resultado (n.° 96)

$$y^{m-2} + y^{m-4} + \ldots\ldots + y^2 + 1 = 0.$$

E como esta equação só tem expoentes pares e os termos todos positivos, não terá raizes positivas nem negativas; e por conseguinte a proposta só terá reaes as raizes $y = \pm 1$.

N'este caso, como é $m = 2n$, virá $y^{2n} - 1 = (y^n - 1)(y^n + 1)$, e a proposta partir-se-ha em duas.

Assim $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$, dá

$$y = 1, \; y = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).$$

A equação $y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$ dá $y = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{-1}$.

98. Se α for uma das raizes da equação $y^m - 1 = 0$, teremos $\alpha^m = 1$, e por conseguinte $\alpha^{mp} = 1$, sendo p um numero qualquer inteiro positivo ou negativo. Temos pois que $y = \alpha^p$ satisfaz tambem á proposta, isto é, que

se α for uma raiz, tambem α^p o será. D'isto resulta que serão raizes da equação $y^m - 1 = 0$ todos os numeros da serie infinita

$$\ldots\ldots \alpha^{-4}, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \ldots\ldots \quad (2)$$

1.° Se tomarmos $p > m$, dividindo por m, teremos $p = mq + i$, sendo $i < m$; e será $\alpha^p = \alpha^{mq+i} = \alpha^{mq} \times \alpha^i = \alpha^i$, por ser $\alpha^{mq} = 1$. Por conseguinte, logo que p passar além de m, reproduzir-se-hão os mesmos valores pela mesma ordem; e o periodo reduzir-se-ha a

$$(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2.° Se p for negativo, será $\alpha^{-p} = \alpha^{m-p} = \alpha^{2m-p} =$ etc., por ser $\alpha^m = 1$ Podemos pois substituir pelo expoente $-p$ a expressão $mk - p$: por onde se vê que os expoentes negativos reproduzem os mesmos numeros que os positivos, e na mesma ordem. Por conseguinte:

Os valores (2) *são taes, que se tomarmos um d'elles qualquer, e os* m $-$ 1 *seguintes ou precedentes, formar-se-ha um periodo, que se reproduz indefinidamente nos dous sentidos.* Além d'isto a equação $\alpha^p = \alpha^q$ é satisfeita não só quando $p = q$, mas ainda em alguns casos em que p e q são deseguaes; porque, dividindo por α^q, vem $\alpha^{p-q} - 1 = 0$. Para ser $\alpha^p = \alpha^q$ basta pois que α seja raiz da equação $y^{p-q} - 1 = 0$.

99. Passemos agora a examinar, se os m termos do periodo (3) são com effeito deseguaes; e para isso vejamos se é possivel que seja $\alpha^p = \alpha^q$, sendo p e $q < m$. Para que isto tenha logar é necessario, que α, raiz da equação $y^m - 1 = 0$, tambem o seja de $y^n - 1 = 0$, pondo $p - q = n$; o que importa, em que estas equações tenham um divisor commum, que, egualado a zero, dê $y = \alpha$. Busquemos este factor pelo methodo sabido (*Alg. El.* n.° 109). Divida-se primeiro y^{m-1} por $y^n - 1$, e resultarão os restos

$$y^{m-n} - 1,\ y^{m-2n} - 1, \ldots\ldots y^i - 1,$$

sendo i o excesso de m sôbre o maior multiplo de n que n'elles se contém. Divida-se depois $y^n - 1$ por este último resto $y^i - 1$, d'onde resultará outro resto $y^l - 1$, sendo l o excesso de n sôbre o maior multiplo de i, que n'elle se contém etc. N'uma palavra, procede-se como se buscassemos o factor commum entre m e n.

1.° *Se* m *for numero primo*, o commum divisor entre m e n será a unidade; e o de $y^m - 1$ e $y^n - 1$ é $y - 1$. Por conseguinte só o valor $\alpha = 1$ póde tornar $\alpha^p = \alpha^q$; *todos os termos do periodo são deseguaes;* uma só raiz imaginária α dá, pelas suas potencias α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots\ldots \alpha^m$ ou 1, todas as outras raizes.

2.° *Se* m *for o producto de dous factores primos* l *e* h, ou $m = lh$: ponhamos $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, e sejam β e γ as raizes d'estas equações, differentes de $+1$, isto é, $\beta^l = 1$, $\gamma^h = 1$. Teremos pois

$$\beta^{lh} = \gamma^{lh} = (\beta\gamma)^{lh} = 1, \text{ ou } \beta^m = \gamma^m = (\beta\gamma)^m = 1;$$

e conseguintemente serão β, γ, $\beta\gamma$ raizes de $y^m - 1 = 0$. Por tanto $(\beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots\ldots \beta^l)$ formarão um periodo de l termos distinctos; e as m potencias de β não conterão mais do que l numeros differentes, que em $(\beta, \beta^2, \ldots\ldots \beta^m)$ se repetirão h vezes. Do mesmo modo se prova, que em $(\gamma, \gamma^2, \ldots\ldots \gamma^m)$ haverá l periodos com h termos differentes.

Em quanto a $(\beta\gamma, \beta^2\gamma^2, \ldots\ldots \beta^m\gamma^m)$, vamos provar que formam um periodo com m termos differentes, que são por conseguinte as m raizes pedidas. Com effeito para que podesse ter logar a egualdade $(\beta\gamma)^p = (\beta\gamma)^q$, ou $(\beta\ )^{p-q} - 1 = 0$, sería necessario que $\beta\gamma$ fosse raiz commum a $y^{p-q} - 1 = 0$ e $y^m - 1 = 0$, equações que não podem ter por factores senão y^{l-1}, ou $y^h - 1$, por ser $m = lh$. Teriamos pois $\beta^l\gamma^l = 1$, e por conseguinte $\gamma^l = 1$, por ser $\beta^l = 1$; e como temos tambem $\gamma^h = 1$, haveria entre l e h outro factor além da unidade, o que é contra a hypothese. Logo se tomarmos $\alpha = \beta\gamma$, o periodo será $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^m)$, e todos os seus m termos serão differentes.

Como temos $\beta^l = \gamma^h = 1$, vê-se que podemos abaixar em $\beta^p\gamma^p$ o expoente p até ser menor do que l relativamente a β, e menor do que h relativamente a γ, tirando de p todos os multiplos de l ou h. D'este
/c modo $\beta^b\gamma^c$ representa o termo geral do periodo das raizes, sendo b e c os restos da divisão de p por l e h.

Logo para obter, no caso de que se tracta, todas as raizes de $y^m - 1 = 0$, buscar-se-ha β e γ, isto é, uma das raizes, differentes de $+1$, das equações $y^l - 1 = 0$ e $y^h - 1 = 0$; depois formar-se-ha $\beta^b\gamma^c$ tomando por b e c todas as combinações dos numeros, de 1 até l para b, e de 1 até h para c.

Quando for $l = 2$, tomar-se-ha $\beta = -1$.

3.° *Se* m *for o producto* l h i *de tres numeros primos*, provar-se-ha do mesmo modo, que devemos pôr $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, $y^i - 1 = 0$, e buscar para cada uma d'estas equações uma raiz differente de $+1$. Com o producto $\beta\gamma\delta$ d'estas tres raizes formaremos depois as quantidades $\beta^b\gamma^c\delta^d$, sendo b, c, d as combinações dos numeros $1, 2, 3 \ldots\ldots$ até l, k, i.

E assim a respeito de maior numero de factores primos.

4.° *Se o expoente* m *tiver a fórma* h^k, *sendo* h *um numero primo*, raciocinaremos como no seguinte ex.°, em que se pedem as raizes da equação

$$y^{3^4} - 1 = y^{81} - 1 = 0.$$

Ponha-se $y^3 - 1 = 0$, e seja θ uma raiz imaginaria d'esta equação. Extrahindo-lhe as raizes 1.ª, 3.ª, 9ª e 27ª, isto é, formando as expressões θ, $\sqrt[3]{\theta}$, $\sqrt[9]{\theta}$, $\sqrt[27]{\theta}$, teremos obtido outras tantas soluções da proposta, por que é $\theta^3 = 1$, e θ^{81} comprehende todas as potencias de θ^3 até 4.ª ordem. Pela mesma razão o producto $\theta \cdot \sqrt[3]{\theta} \cdot \sqrt[9]{\theta} \cdot \sqrt[27]{\theta} = \alpha$ será raiz de $y^{81} - 1 = 0$. Ora α, α^2, α^3, ... α^{81} são quantidades todas differentes, porque aliás α sería uma raiz commum a $y^{81} - 1 = 0$ e $y^i - 1 = 0$, o que suppõe a existencia de um factor commum entre estas equações, que não póde ser outro senão $y^3 - 1 = 0$; e então, sendo α raiz d'esta última equação, será $\alpha^3 = 1$, ou $\theta^3 \cdot \theta \cdot \sqrt[3]{\theta} \cdot \sqrt[9]{\theta} = 1$. Elevando á 9.ª potencia, viria $\theta = 1$, contra a hypothese. Logo α, α^2, α^3, ... α^{81} são as 81 raizes da proposta.

Em geral para resolver $y^m - 1 = 0$ quando for $m = h^k$, faça-se $y^h - 1 = 0$; e buscando uma raiz θ d'esta equação, differente de $+1$, extráiam-se-lhe as differentes raizes, cujos grãos i sejam determinados por $i = h.^\circ\ h^1\ h^2 \ldots\ldots h^{k-1}$, de modo que se formem os k resultados β, γ, ... designados por $\sqrt[i]{\theta}$. Todos elles serão raizes de $y^m - 1 = 0$, bem como o seu producto $\alpha = \beta\gamma\delta \ldots$; e os termos α, α^2, $\alpha^3 \ldots\ \alpha^m$ serão as m raizes procuradas.

5.° *Se for* $m = h^k l^i$, teremos de resolver as duas equações $y^h - 1 = 0$, $y^l - 1 = 0$; depois multiplicar entre si todas as raizes d'estas equações, e egualar o producto a α. Sejam β e γ as raizes, differentes de $+1$, de cada uma das equações; e faça-se

$$\beta' = \sqrt[h]{\beta},\ \beta'' = \sqrt[h]{\beta'},\ \beta''' = \sqrt[h]{\beta''},\ \ldots\ \gamma' = \sqrt[l]{\gamma},\ \gamma'' = \sqrt[l]{\gamma'},\ \gamma''' = \sqrt[l]{\gamma''},\ \ldots$$

Teremos

$$\alpha = \beta \cdot \beta' \cdot \beta'' \ldots\ldots \times \gamma \cdot \gamma' \cdot \gamma'' \ldots\ldots$$

Ex.º I. Na equação

$$y^6 - 1 = y^{2\times 3} - 1 = 0$$

faça-se $\qquad y^2 - 1 = 0,\ y^3 - 1 = 0;$

teremos $\qquad \beta = -1,\ \gamma = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3});$

depois $\quad \alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}),\ \alpha^2 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}),\ \alpha^3 = -1$, etc.

e $\qquad y = \pm 1,\ \tfrac{1}{2}(\pm\sqrt{-3}),\ -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).$

Ex.º II. Na equação

$$y^{12} - 1 = y^{4\times 3} - 1 = 0,$$

faça-se $\qquad y^4 - 1 = y^{2^2} - 1 = 0,\ y^3 - 1 = 0;$

teremos $\qquad \beta = -1 \times \sqrt{-1},\ \gamma = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3});$

d'onde $\quad \alpha = \tfrac{1}{2}(\sqrt{-1} - \sqrt{3}),\ \alpha^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}),\ \alpha^3 = \sqrt{-1}$, etc.

e por conseguinte

$$y = \pm 1,\ \pm\sqrt{-1},\ \pm\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}),\ \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{-1} \pm \sqrt{3}).$$

100. Como $y = \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots.$, teremos em virtude da equação (1) do n.º 97.

$$1 + \alpha + \alpha^2 \ldots + \alpha^{m-1} = 0,\ 1 + \alpha^2 + \alpha^4 \ldots + \alpha^{2m-2} = 0,\ 1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \ldots = 0,$$

ou $\qquad S_1 = S_2 = S_3 \ldots\ldots = S_l = 0,\ S_m = m,$

designando por S_k a somma das potencias k de todas as raizes, sendo k um inteiro não divisivel por m, S_m é a somma de todas as equações.

101. Temos tractado até aqui de resolver a equação $y^m - 1 = 0$ no caso de ser m numero primo, ou producto de numeros primos. Passaremos agora á resolução completa das equações da fórma $y^m \pm 1 = 0$, servindo-nos das linhas trigonometricas, e remettendo o leitor, para maiores individuações, á nota XIV da *Resol. num. des equat.*

Já vimos (*Geom. An.* n.° 209) que, se fizermos $\cos x = p$, cada um dos cosenos successivos dos arcos $2x$, $3x$, $4x$, ... se obtém multiplicando os dous precedentes por $2p$ e -1, e sommando-os depois. Para tornar mais evidente a lei que seguem os resultados, empreguemos o seguinte artificio.

Faça-se $$2\cos x = y + y^{-1}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

da lei indicada segue-se, que, para obter $\cos 2x$, devemos multiplicar $\cos x$, ou $\frac{1}{2}(y+y^{-1})$, por $y+y^{-1} = 2\cos x = 2p$, e subtrahir $\cos 0\, x = 1$. Por este modo, acha-se

$$2\cos 2x = y^2 + y^{-2},$$

e pelo mesmo theor

$$2\cos 3x = y^3 + y^{-3},$$

$$2\cos 4x = y^4 + y^{-4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mostremos que os resultados seguintes procedem na mesma lei, fazendo ver, que se ella se verificar a respeito de dous gráos consecutivos $m-2$, $m-1$, terá logar tambem para o gráo m. Com effeito, sendo

$$2\cos(m-2)x = y^{m-2} + y^{-(m-2)},\quad 2\cos(m-1)x = y^{m-1} + y^{-(m-1)},$$

se multiplicarmos a 2.ª equação por $y + y^{-1}$, e subtrahirmos a 1.ª, virá

$$2\cos mx = y^m + y^{-m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Das equações (1) e (2) deduzem-se respectivamente (*)

$$y^2-2y\cos x+1=0\ ,\ y^{2m}-2y^m\cos mx+1=0\ \ldots\ldots\ (3).$$

Se $\cos x$ for conhecido, teremos, por meio d'estas equações, y e depois $\cos mx$. Podemos pois, usando d'ellas, e sem passar pelos valores intermedios $\cos 3x$, $\cos 4x$, ... achar o termo geral $\cos mx$ da serie dos cosenos; e até poderiamos servir-nos d'estas equações para a construcção das taboas; mas o cálculo viria complicado com imaginarios.

Suppondo formadas as taboas dos senos, se procurarmos n'ellas os valores de $\cos x$ e $\cos mx$, e os substituirmos nas equações (3), só n'ellas entrará a incognita y, devendo ter por isso uma raiz commum $y=\alpha$. E como estas equações são reciprocas, concluiremos tambem, que haverá outra raiz $y=\frac{1}{\alpha}$; e havendo assim entre as mesmas equações duas raizes

(*) Resolvendo as equações (3), acha-se

$$y=\cos x\pm \operatorname{sen} x\sqrt{-1}\ ,\ y^m=\cos mx\pm \operatorname{sen} mx\sqrt{-1}\ ;$$

d'onde se deduz

$$(\cos x\pm \operatorname{sen} x\sqrt{-1})^m=\cos mx+\operatorname{sen} mx\sqrt{-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

Se m for negativo, ainda esta fórmula terá logar; porque $(\cos x+\operatorname{sen} x\sqrt{-1})^{-m}$ reduz-se a

$$\frac{1}{(\cos x+\operatorname{sen} x\sqrt{-1})^m}=\frac{1}{\cos mx+\operatorname{sen} mx\sqrt{-1}},$$

ou, multiplicando os dous termos da última fracção por $(\cos mx-\operatorname{sen} mx\sqrt{-1})$

$$(\cos x+\operatorname{sen} x\sqrt{-})1^{-m}=\frac{\cos mx-\operatorname{sen} mx\sqrt{-1}}{\cos^2 mx+\operatorname{sen}^2 mx}$$

$$=\cos(-mx)+\operatorname{sen}(-mx)\sqrt{-1}.$$

communs, a 1.ª será divisor da 2.ª. Logo, suppondo $mx = \varphi$, é necessario, qualquer que seja φ, que

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{m}\right) + 1 \text{ divida } y^{2m} - 2y^m\cos\varphi + 1 \ldots\ldots \quad (4)$$

Se m for fraccionario, e da fórma $\frac{n}{m}$, sendo n um inteiro positivo ou negativo: $(\cos x \pm \text{sen}\, x\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ reduzir-se-ha a $(\cos nx + \text{sen}\, nx\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$, expressão que vamos ver se é ou não possivel reduzir á fórma $(\cos z + \text{sen}\, z\sqrt{-1})$.

Se é possivel, teremos

$$\cos nx + \text{sen}\, nx\sqrt{-1} = \cos mz + \text{sen}\, mz\sqrt{-1},$$

de maneira que nx e mz deverão ter o mesmo seno e o mesmo coseno. Isto exige que seja

$$mz - nx = 2k\pi, \text{ ou } z = \frac{nx + 2k\pi}{m};$$

logo

$$(\cos x + \text{sen}\, x\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{nx + 2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{nx + 2k\pi}{m}\sqrt{-1}.$$

Vê-se pois que a fórmula (a) não é verdadeira no caso do expoente fraccionario. Advertindo porém, que é

$$\cos\frac{nx + 2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{nx + 2k\pi}{m}\sqrt{-1}$$

$$= \left(\cos\frac{nx}{m} + \text{sen}\frac{nx}{m}\sqrt{-1}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}\right)$$

concluiremos, que ainda no caso do expoente fraccionario $\frac{n}{m}$, poderemos applicar a fórmula, como se fosse inteiro; mas será necessario multiplicar o resultado, isto é, a determinação arithmetica de $(\cos x + \text{sen}\, x\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ pela expressão $\cos\frac{2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}$, que, segundo veremos no n.° seguinte, representa as m raizes do gráo m da unidade. Por conseguinte, *n'este ultimo caso, o theorema é ainda verdadeiro, se nos limitarmos só á determinação arithmetica.*

102. Para tornar applicavel este theorema, devido a *Moivre*, á resolução das equações, de que tractâmos, faça-se $\varphi = k\pi$, sendo ainda π a semicircumferencia e k um inteiro qualquer. O valor de $\cos\varphi$ será então $+1$ ou -1, conforme k for par ou impar; e como o 2.° trinomio se torna em

$$y^{2m} \mp 2y^m + 1 = (y^m \mp 1)^2,$$

vê-se, que

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) + 1 \text{ divide } y^m \pm 1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

advertindo que *o inteiro* k *é* par *para* $y^m - 1$, *e* impar *para* $y^m + 1$.

Se o 1.° trinomio for um quadrado, tomar-se-ha para divisor a sua raiz; e como nesse caso é o coseno $= \pm 1$, os valores de k serão $0, m, 2m, \ldots\ldots$; e o factor reduz-se a $y \pm 1$.

As raizes de $y^m \pm 1 = 0$ ficam pois comprehendidas em

$$y = \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) \pm \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Se fizermos $y = \frac{x}{a}$, veremos que

$$x^2 - 2ax\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) + a^2 \text{ divide } x^m \mp a^m, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

e que as raizes das equações $x^m \mp a^m = 0$ se comprehendem em

$$x = a\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) \pm a\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Mostremos agora que as equações $y^m \pm 1 = 0$ tem só m raizes differentes.

Em quanto o inteiro k não exceder a m, o arco $\frac{k\pi}{m}$ crescerá sem exceder a semicircumferencia; os cosenos d'estes arcos tem todos valores deseguaes, e obtem-se por conseguinte m factores differentes do 2.º gráo (5), que representaremos por A, B, C.... L, M. Seja i um inteiro qualquer $<m$; os numeros $m+i$, $m-i$ serão conjunctamente, ou pares, ou impares. Se fizermos pois $k=m\pm i$, o arco torna-se em $\frac{k\pi}{m}=\pi\pm\frac{i\pi}{m}$, cujos valores pertencem a arcos com o mesmo coseno; e d'aqui resulta, que o factor trinomio (5) tem o mesmo valor para $k=m-i$, e para $k=m+i$. Assim, se tomarmos por k todos os numeros, ou pares, ou impares, até m, acharemos, passado este valor, os mesmos factores do 2.º gráo em ordem retrograda M, L...... C, B, A.

Quando os valores de k excederem $2m$, como então se lhes póde dar a fórma $2qm+i$, o arco $\frac{k\pi}{m}$ torna-se em $2q\pi+\frac{i\pi}{m}$, ao qual corresponde um coseno já achado. Vimos por isso a recair, segundo a mesma ordem nos factores A, B,...... L, M, M, L,...... B, A.

Logo, *é inutil dar a* k *valores* > m.

Passemos ás considerações sobre m.

1.º *Se* m *é par:* os valores $\frac{1}{2}m\pm i$ são conjunctamente pares ou impares; e $k=\frac{1}{2}m\pm i$ dá os arcos $\frac{k\pi}{m}=\frac{1}{2}\pi\pm\frac{i\pi}{m}$, cujos cosenos são eguaes com signaes contrarios, e têm por valores $\mp$ sen $\frac{i\pi}{m}$. Logo, *quando* m *é par, não se fará* k$>\frac{1}{2}$m, *porém tomar-se-hão os cosenos com o duplo signal* $\pm$.

2.º *Se* m *é impar:* um dos numeros $m-i$ e i é par, outro impar; e por isso teremos de excluir um d'elles para valor de k, segundo a equação for $y^m+1=0$ ou $y^m-1=0$. Suppondo pois $i<\frac{1}{2}m$, seja $k=m-i$; teremos $\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)=\cos\left(\pi-\frac{i\pi}{m}\right)=-\cos\left(\frac{i\pi}{m}\right)$; d'onde se conclue, que se k exceder $\frac{1}{2}m$, os cosenos do factor trinomio (5) são, com signal contrário, os mesmos que os correspondentes ao valor $k=i=m-(m-i)$, que foi excluido, e que é $<\frac{1}{2}m$. N'este caso devemos por tanto *fazer* $k=0,1,2,3,\ldots.\ \frac{1}{2}m$, *e obteremos assim arcos* $<\frac{1}{2}\pi$, *cujos cosenos convirão ao trimonio* (5), *devendo porém mudar, de dous em dous termos, o signal do coseno.*

Exemplos.

Para a equação $y^4+1=0$, k deve ser impar. Fazendo $k=1$, tomos $\cos(\frac{1}{4}\pi=45°)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, o qual tomado com os signaes $\pm$, dá

$$y^4+1=(y^2+y\sqrt{2}+1)\cdot(y^2-y\sqrt{2}+1)=0.$$

Do mesmo modo

$$x^4+a^4=(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)=0.$$

Para a equação $y^6+1=0$: $k=1$ dá $\cos(\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, que se tomará com os signaes $\pm$; $k=3$, dá $\cos(\frac{1}{2}\pi)=0$. Logo

$$y^6+1=(y^2+y\sqrt{3}+1)(y^2-y\sqrt{3}+1)(y^2+1)=0.$$

Na equação $y^6-1=0$, faça-se $k=0,\ 2$; os cosenos de zero e de $\frac{1}{3}\pi$ são 1 e $\frac{1}{2}$, que tomados com os signaes $\pm$, dão

$$y^6-1=(y+1)(y-1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)=0.$$

$$y^4-1=(y^2-1)(y^2+1)=(y+1)(y-1)(y^2+1)=0.$$

$$y^8-1=(y^4+1)(y^4-1)=(y^2+y\sqrt{2}+1)(y^2-y\sqrt{2}+1)(y^2-1)(y^2+1).$$

Na equação $y^9-1=0$, devemos fazer $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, e tomar os cosenos das ordens pares com signaes contrarios, isto é,

$$1,\ -\cos 20°,\ +\cos 40°,\ -\cos 60°,\ +\cos 80°.$$

Os factores, além de $y-1$ e y^2+y+1, são

$$(y^2+1{,}879\ldots y+1)(y^2-1{,}532\ldots y+1)(y^2-0{,}347\ldots y+1);$$

e acha-se

$$y^9-1=(y-1)(y^2+y+1)(y^6+y^3+1)=0.$$

Para a equação $y^9+1=0$, practicaremos do mesmo modo, tomando com signal contrario os cos. das ordens pares, o que equival a mudar na equação de cima os signaes de todos os 2.^{os} termos dos factores; e resultará

$$y^9+1=(y+1)(y^2-y+1)(y^6-y^3+1)=0.$$

E com effeito é manifesto que basta mudar y em $-y$.

103. Facilmente se póde resolver em ordem a t a equação

$$k\cos mt+p\cos(m-1)t+q\cos(m-2)t+\ldots\ldots+\text{P}=0.$$

Por quanto suppondo $2\cos t=x+x^{-1}$, temos (n.° 101)

$$k(x^m+x^{-m})+p(x^{m-1}+x^{-(m-1)})+\ldots\ldots\ \text{P}=0,$$

equação de que já nos occupámos a pag. 160. Podiamos tambem desinvolver os cosenos dos arcos multiplos em ordem ás potencias ascendentes dos cos. d'arcos simples, por meio das fórmulas, que adiante demonstraremos.

104. A proposição (5) é conhecida pela denominação do *Theorema de Cotes;* porque foi este sabio quem a descobriu debaixo de uma fórma geometrica.

Com o raio $\text{A}r=a$ (fig. 24, 24 rep.) descreva-se o circulo ACHL, e o diametro AH, passando por um ponto arbitrario O; a contar do ponto A divida-se a circumferencia em $2m$ partes eguaes Aa, aB, Bb, ... sendo cada uma $=\dfrac{\pi}{m}$; tirem-se finalmente raios vectores do ponto O para os pontos de divisão. O raio tirado para um ponto qualquer C fórma, com a perpendicular CP sobre o diametro, o triangulo COP do qual, fazendo o angulo $\text{CRA}=\alpha$, $\text{OR}=x$, se deduz

$$CP = a \operatorname{sen} \alpha\,,\ RP = a \cos\alpha\,,\ OP = a \cos\alpha - x\,;$$

logo

$$OC^2 = x^2 - 2ax \cos\alpha + a^2 = OC \times OL.$$

Se o arco AC contiver k divisões, teremos $\alpha = \frac{k\pi}{m}$; e sendo o trinomio, expressão de OC^2, factor de $x^m \mp a^m$ conforme k for par ou impar, vê-se que os raios vectores tirados n'um caso para as divisões pares, e no outro para as impares, constituem os factores da equação $x^m \mp a^m = 0$. $OA = a - x$, e $OH = a + x$ correspondem aos factores reaes do 1.° gráo.

Designemos por Z, Z', Z'', .. os raios tirados para as divisões pares; e por z, z', z'', ... os que vão ter ás impares; será

$$z \,.\, z' \,.\, z'' \ldots\ldots = a^m + x^m,$$ quer O seja interno quer externo.

$$Z \,.\, Z' \,.\, Z'' \ldots = a^m - x^m,$$ quando O for interno (fig. 24.).

$$Z \,.\, Z' \,.\, Z'' \ldots = x^m - a^m,$$ quando O for externo (fig. 24 *rep.*)

Equações trinomias.

105. Consideremos as equações da fórma

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0\,,$$

nas quaes um dos expoentes de x é duplo do outro. Fazendo $x^n = z$, vem

$$Az^2 + Bz + C = 0.$$

1.° *Se as duas raizes d'esta ultima equação forem reaes*, f e g por ex.°, temos de resolver as duas equações binomias $x^n = f$, $x^n = g$.

Querendo, por ex.°, achar dous numeros taes que o seu producto seja 10, e a somma dos cubos 133, temos

$$x^3+\left(\frac{10}{x}\right)^3=133\text{, ou } x^6-133\,x^3+1000=0.$$

Fazendo $x^3=z$, vem

$$z^2-133z+1000=0,$$

que dá $z=8$, $z=125$; d'onde resultam as duas equações binomias

$$x^3=8\text{, } x^3=125.$$

Da primeira resulta (n.° 98) $x=2$, $x=2\alpha$, $x=2\alpha^2$,

e da segunda $x=5$, $x=5\alpha$, $x=5\alpha^2$,

sendo α uma raiz cubica imaginaria da unidade.

2.° *Se as raizes forem eguaes*, temos $B^2-4AC=0$; e como então a proposta é um quadrado exacto da fórma $(ax^n+b)^2=0$, recáe-se n'uma equação binomia.

Querendo, por ex.°, achar um numero tal, que dividindo o dobro por 3, e 3 pelo dobro, seja a somma das 4.as potencias egual a 2; temos

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{2x}\right)^4=2\text{, ou } (16x^4-81)^2=0;$$

e como as raizes de $y^4-1=0$, são ± 1 e $\sqrt{-1}$, teremos

$$x=\pm\tfrac{3}{2},\ x=\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{-1}.$$

3.° Finalmente, *se as raizes forem imaginarias*, ou $B^2-4AC<0$, faremos $Ax^{2n}=Cy^{2n}$, o que torna a proposta em

$$y^{2n}+\frac{B}{\sqrt{(AC)}}y^n+1=0.$$

Esta equação é comparavel com o 2.° trinomio de (4) do n.° 101; porque sendo o coefficiente de $y^n < 2$, por ser $B^2 < 4AC$, póde representar um arco cujo coseno seja ametade d'este factor, e que se determinará por logarithmos por meio da equação

$$\cos\varphi = -\frac{B}{2\sqrt{AC}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

Vê-se pois que a transformada é divisivel por $y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + 1 = 0$, tomando por φ todos os arcos cujo coseno é dado pela equação (9), isto é, os arcos $\varphi < \pi$ dados pelas taboas e além d'elles os arcos $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi, \dots\dots\dots \varphi + 2k\pi$, sendo k um inteiro qualquer. Se fizermos $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, todos os factores, que se buscam, ficarão comprehendidos na fórmula

$$x^2\sqrt[n]{A} - 2x\sqrt[2n]{AC}.\cos\psi + \sqrt[n]{C} = 0 \dots\dots\dots \quad (10)$$

É inutil tomar $k > n$, porque $k = qn + i$ dá o arco $2q\pi + \frac{\varphi + 2i\pi}{n}$, e por isso, supprimindo as circumferencias $2q\pi$, teriamos de tomar o cos. do arco já achado para $k = i < n$, e tornariamos assim a encontrar os mesmos factores.

Ex.° I. Na equação

$$x^6 - 2x^3 + 1 = 0,$$

sendo $A = C = 1$, $B = -2$, $n = 3$, acha-se $\cos\varphi = 1$, e os arcos $\psi = 0°$, $120°$, $240°$. Temos pois tres factores da fórma

$$x^2 - 2x\cos\psi + 1 = 0;$$

e como $\cos\psi$ tem por valores 1, $-\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$, $-\cos 60° = -\frac{1}{2}$, acham-se para factores

$$x^2-2x+1\,,\; x^2+x+1\,,$$

sendo o último factor duplo. Logo

$$x^4-2x^3+1=(x-1)^2\,(x^2+x+1)^2=(x^3-1)^2=0.$$

Ex.º II. Na equação

$$x^4+x^2+25=0\,,$$

teremos $A=B=1$, $C=25$, $n=2$, e $\cos\varphi=-\frac{1}{10}$: as taboas dão em consequencia do signal $-$, $\varphi=95^\circ\,44'20''$ cuja ametade ψ é $47^\circ 52' 10''$; ajunctando 180°, teremos um arco, cujo coseno é o mesmo que o precedente com signal contrario.

Substituindo no 2.º termo da fórmula geral (10), o cálculo em frente dá -3 por coefficiente d'um dos factores. Logo estes factores são $x^2\pm 3x+5$.

$\cos\psi$	$\overline{1},8266074$
2	$0,3010300-$
$\sqrt[4]{5}$	0.3494850
3	$0,4771224-$
	-3

Raizes das expressões complicadas com Radicaes.

106. Supponhamos que $a+\sqrt{b}$ é um quadrado, e busquemos a sua raiz. Esta raiz deve ter em geral a fórma $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; mas se for $x=f^2$, tomará a fórma particular $f+\sqrt{y}$. Teremos pois

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},\text{ ou } x+y+2\sqrt{(xy)}=a+\sqrt{b};$$

e por conseguinte, separando a equação em duas como na pag. 149,

$$x+y=a,\; 2\sqrt{(xy)}=\sqrt{b}.$$

Para eliminar x e y d'estas equações, elevem-se ao quadrado, e subtraiam-se uma da outra, o que dará

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = a^2 - b.$$

Para que x e y sejam racionaes, deve $a^2 - b$ ser um quadrado exacto, que designaremos por k^2. Assim $a^2 - b = k^2$, $x - y = k$, e $x + y = a$ resolverão a questão, dando

$$k = \sqrt{a^2 - b},\ x = \tfrac{1}{2}(a+k),\ y = \tfrac{1}{2}(a-k).$$

Por ex.°, querendo achar a raiz quadrada de $4 + 2\sqrt{3}$, temos

$$a = 4,\ b = 12,\ a^2 - b = k^2 = 4,\ k = 2,\ x = 3,\ y = 1,$$

e por conseguinte a raiz pedida é $\pm(1 + \sqrt{3})$.

Do mesmo modo se acha

$$\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})} = \pm(1 - \sqrt{3}).$$

$\sqrt{-1-12\sqrt{-2}}$

$$\sqrt{(-1 \times 2\sqrt{2})} = \pm(1 + \sqrt{-2}).$$

107. Se $a + \sqrt{b}$ for um cubo, supponha-se

$$\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = (x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z},$$

sendo z uma indeterminada de que podemos dispor convenientemente. Elevando ao cubo, e comparando os termos racionaes, acha-se

$$a = z(x^3 + 3xy),\ \sqrt{b} = z\sqrt{y}(3x^2 + y);$$

quadrando, e subtrahindo depois uma da outra estas equações, teremos

$$a^2 - b = z^2[(x^3 + 3xy)^2 - (3x^2\sqrt{y} + \sqrt{y})^2].$$

Como o factor de z^2 é a differença de dous quadrados, e se reduz a

$$(x+\sqrt{y})^2 \times (x-\sqrt{y})^2 = (x^2-y)^2,$$

a última equação tomará a fórma

$$\frac{a^2-b}{z^2} = (x^2-y)^3.$$

Para que x e y sejam racionaes, deve o 1.° membro ser cubo exacto; e será sempre facil determinar z de modo que satisfaça a esta condição, quando mais não seja, suppondo $z=(a^2-b)^2$. Se a^2-b for um cubo exacto, far-se-ha $z=1$. Em geral deve decompor-se a^2-b em factores primos, sendo facil distinguir quaes d'elles devem ser aproveitados ou rejeitados, para se obter um cubo exacto. Por este modo a relação entre z e k será dada pela equação

$$k=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{z^2}},\ x^2-y=k,\ a=zx(x^2+3y),$$

das quaes resultam

$$y=x^2-k,\ 4zx^3-3kxz=a.$$

A última equação dá x, aproveitando sómente as raizes racionaes; a outra dá y, e por este modo se obtem a raiz pedida.

Querendo achar a raiz cubica de

$$10+6\sqrt{3},$$

como $a=10$, $b=108$, $a^2-b=8$; será $z=1$, e $k=-2$.

Logo $x=1$, $y=3$, e finalmente $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$.

Do mesmo modo se acha

$$\sqrt[3]{(8+4\sqrt{5})}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}(1+\sqrt{5}).$$

108. Em geral fazendo

$$\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[n]{z},$$

e empregando os mesmos raciocinios, se determinariam x, y e z no caso de ser $a+\sqrt{b}$ uma potencia do grão n reductivel á fórma supposta.

109. Quando as expressões complicadas com radicaes tivessem fórma differente, da que temos supposto, não bastaria substituir pelos radicaes, que entram n'ellas, os seus valores approximados, porque então viriamos a desprezar os valores imaginarios, de que os radicaes são susceptiveis. Assim em logar de $\sqrt[n]{A}$, devemos substituir $\alpha\sqrt[n]{A}$, $\alpha^2\sqrt[n]{A}$ ... tomando (n.° 98) $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots$ para raizes da equação $y^n-1=0$.

Se for $$x=a\sqrt[n]{g}+b\sqrt[n]{g^2}+c\sqrt[n]{g^3}+\ldots\ldots$$

basta fazer $$y^n=g,\quad x=ay+by^2+cy^3+\ldots\ldots$$

e eliminar y entre estas duas equações. Todas as raizes da equação final em x serão os valores pedidos de x. Havendo uma funcção fx complicada com radicaes, taes como $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$......, para se obterem todos os valores de fx, faça-se $y^n=A$, $t^m=B$,...... e em logar dos radicaes introduzam-se os n valores de y, os m de t, ... combinados entre si de todos os modos possiveis.

Para fazer desapparecer os radicaes, funcções de x, que entram n'uma dada funcção, represente-se cada um d'estes radicaes por uma nova incognita, e eliminem-se depois pelos methodos ordinarios.

Assim na equação

$$x-\sqrt[3]{x}-2\sqrt{(x+1)}=0,$$

faça-se $x=z^3$, $x+1=y^2$, e teremos $x-z-2y=0$. Eliminando y, vem

$$4x+4=x^2-2xz+z^2,\ \text{e}\ z^3-x=0.$$

Eliminando depois z, chega-se á equação final

$$x^6-12x^5+34x^4+8x^3-167x^2-192x-64=0,$$

da qual se deduzem logo $x=8$, $x=-1$; e são estas as duas soluções reaes. Pelo que respeita ás 4 raizes que ainda faltam, são ellas o resultado da combinação dos valores das raizes imaginarias dos radicaes quadrados e cubicos da proposta.

Equações do terceiro grão.

110. Toda a equação do 3.° grão, a uma só incognita, desembaraçada do 2.° termo e do coefficiente do 1.° (pag. 64.), póde reduzir-se

á fórma $$x^3+px+q=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pondo $x=y+z$, a proposta se transformará em

$$(3yz+p)(y+z)+y^3+z^3+q=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Como x se póde decompor na somma de dous numeros por infinitas maneiras, podemos assignar, como nos convier, ou o producto d'elles, ou a sua differença, ou a sua razão, etc. Podemos pois tornar nullo o 1.° factor, d'onde resulta

$$yz=-\tfrac{1}{3}p,\ y^3+z^3=-q.$$

Estas duas equações mostram que a somma de y^3 e z^3 é egual $-q$, e o seu producto egual a $-(\frac{1}{3}p)^3$; isto é, que as incognitas y^3 e z^3 são as raizes t e t' da equação do 2.° grão *Alg. El.* n.° 145, 3.°)

$$t^2+qt=\tfrac{1}{3}p^3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

á qual se dá o nome de *reduzida*. Achados t e t' teremos $y^3=t$, $z^3=t'$, e sendo 1, α, α^2, as tres raizes cubicas da unidade (n.° 98) virá

$$y=\sqrt[3]{t},\ \alpha\sqrt[3]{t},\ \alpha^2\sqrt[3]{t},\ z=\sqrt[3]{t'},\ \alpha\sqrt[3]{t'},\ \alpha^2\sqrt[3]{t'}.$$

Parece á primeira vista, que estes valores substituidos dous a dous na equação $x=y+z$, darão 9 raizes em vez das 3 que competem á proposta. Advertindo porém, que em vez da equação $yz=-\frac{1}{3}p$ se empregou o seu cubo, e se triplicou por isso o numero das raizes: fica manifesto que só devemos sommar aquelles valores de y e z, cujo producto for $=-\frac{1}{3}p=\sqrt[3]{tt'}$, porque sendo o 2.° membro da equação (3) egual a $-tt'$, é a sua raiz cubica egual a $\frac{1}{3}p$.

Como $\alpha^3=1$, é facil de ver que das 9 combinações só devemos aproveitar

$$x=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t'},\ x=\alpha\sqrt[3]{t}+\alpha^2\sqrt[3]{t'},\ x=\alpha^2\sqrt[3]{t}+\alpha\sqrt[3]{t'}.$$

Substituindo por α e α^2 os seus valores $-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$, n.° 97), e fazendo, para abbreviar,

$$s=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t'},\ d=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{t'}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

teremos

$$x=s,\ x=-\tfrac{1}{2}(s\pm d\sqrt{-3}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Logo *para resolver a equação* (1) *do* 3.° *grão, é necessario resolver primeiro a sua reduzida* (2), *e introduzir as raizes* t e t' *d'esta nas fórmulas* (4) *e* (5).

Ex.° I. A equação

$$x^3+6x=7$$

dá $p=6$, $q=-7$; e a reduzida

$$t^2-7t=8;$$

d'esta última tíra-se $t=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$, $t=8$, $t'=-1$: logo

$$s=1,\ d=3,\ x=1,\ x=-\tfrac{1}{2}(1\pm 3\sqrt{-3}.$$

Ex.° II. A equação

$$y^3-3y^2+12y=4$$

dá $\quad y=0{,}362165,\ y=1{,}318918\pm 1{,}761176\sqrt{-3}.$

Ex.° III. A equação

$$x^3-3x=18$$

dá $\quad x=3,\ x=-\tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{-15}).$

Ex.° IV. A equação

$$x^3-27x+54=0,$$

dá $\quad x=-6,\ x=3,\ x=3.$

111. As equações do 3.° gráo podem resolver-se por meio das taboas dos logarithmos, empregando o processo indicado na P. II. p. 189, a fim de obter as raizes t e t' da reduzida.

Sendo p *positivo*, toma-se $\qquad \tang\varphi=\dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{q}$

d'onde $\quad t=\sqrt{(\tfrac{1}{3}p)^3}\ \tang\tfrac{1}{2}\varphi,\qquad t'=-\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{\tang\frac{1}{2}\varphi}$

depois $\sqrt[3]{t}=\sqrt{(\frac{1}{3}p)}\times\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}$ $\qquad \sqrt[3]{t'}=-\frac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}}$

Sendo p *negativo* toma-se $\qquad \text{sen}\,\varphi=\frac{2\sqrt{(-\frac{1}{3}p)^3}}{q}$

$\sin^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2}$

d'onde resulta $\sqrt[3]{t}=-\sqrt{(\frac{1}{3}p)}\times\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}$, $\sqrt[3]{t'}=-\frac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}}$.

Achadas as raizes cubicas de t e t', deduzem-se os valores de s e d, e conseguintemente os de x.

Por ex.°, na equação $x^3+9x+6=0$, temos $p=9$, $q=+6$; e como se dá o 1.° caso,

2....	0,3010300				
3....	0,4771213				
$\sqrt{3}$..	0,2385606	.....	0,2385606	....	0,2385606—
6....	—0,7781513	$\sqrt[3]{\text{tang}}$	$\bar{1}$,9204798	....—	$\bar{1}$,9204798
Tang φ....	0,2385606	1.°....	0,1590404	2.°..	0,3180808—

$\varphi=60°$, $\varphi=30.°$ log. tang $=\bar{1},7914394$

1.° termo 1,442250

2.° .... —2,080083

$s=x=-0,637833$, $d=3,522333$

$x=+0,318916\pm1,761166\sqrt{-3}$.

Do mesmo modo, na equação $x^3-2x-5=0$ temos $p=2$, $q=-5$. Executado um calculo similhante, com attenção porém a que se dá o 2.° caso, achariamos

$$x=-1,04726\pm0,655835\sqrt{-3}.$$

112. *Se as duas raizes* t *e* t' *da reduzida forem reaes*, tambem $\sqrt[3]{t}$ e $\sqrt[3]{t'}$ o serão, bem como s e d; e então das fórmulas (5) se conclue, que *a proposta só tem uma raiz real*. Com tudo se for $t=t'$, teremos $d=0$, e os tres valores de x reaes, sendo dous eguaes á metade do 3.° com o signal contrário. É o que tem logar no Ex.° IV. pag. 183.

Porém *se as raizes da reduzida forem imaginárias*, como as expressões (5) ficam complicadas com imaginários, parece que nenhuma das raizes é real, contra o que já se demonstrou (n.° 64, II). Esta circunstancia, que se dá precisamente quando *as tres raizes da proposta são reaes*, tem offerecido grandes embaraços aos analystas, que não sabendo achar estas raizes, chamaram a este *caso irreduzivel*. Para que elle tenha logar é necessario, que seja $27q^2+4p^3<0$, isto é, que p seja negativo, e $-4p^3>27q^2$.

Se representarmos os valores de t e t' por $a\pm b\sqrt{-1}$, a raiz cubica, ou a potencia $\frac{1}{3}$, se poderá desenvolver em serie. Sem executar o cálculo, é manifesto que n'estas series só poderão apparecer imaginarios os termos em que $b\sqrt{-1}$ estiver elevado a potencias impares: e como as duas series se deduzem uma da outra mudando b em $-b$, é evidente que ambas se acham comprehendidas na fórma $P\pm Q\sqrt{-1}$, cuja somma é $s=2P$, e a differença $d=2Q\sqrt{-1}$. Logo as equações (5) se reduzem ás seguintes expressões reaes

$$x=2P,\ x=-P\pm Q\sqrt{3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Temos pois feito ver, que as raizes são reaes, precisamente quando as equações (5) as appresentam debaixo de fórma imaginária. Este caso, realmente singular, provém de que na hypothese d'onde partimos

$$x=y+z,\ yz=-\tfrac{1}{3}p,$$

não ha condição alguma, pela qual se exprima que com effeito y e z são reaes; e do cálculo exposto se deixa ver, que estas quantidades são imaginárias quando as tres raizes são reaes. Para as obter desenvolver-se-ha em serie $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, e dando ao desenvolvimento a fórma $P+Q\sqrt{-1}$, conheceremos as quantidades P e Q, que se substituirão nas equações (6).

113. Como este methodo não é proprio para nos dar a conhecer as raizes, empregaremos para isso os seguintes que são preferiveis.

1.° Conhecida uma das raizes a, para obter as outras duas dividiremos a proposta por $x-a$; o resto a^3+ap+q é nullo por hypothese, e o quociente do 2.° gráo x^2+ax+a^2+p, egualado a zero, dá

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{-p-\tfrac{3}{4}a^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(7)$$

Se a 1.ª raiz a for real, para que as outras duas tambem o sejam, é necessario e basta que p seja negativo e $>\frac{3}{4}a^2$. Faça-se pois $-p=p'$, e designe-se por δ a differença positiva $\delta=p'-\frac{3}{4}a^2$. Para discutirmos o caso que nos occupa, eliminemos a entre esta equação e $q=-a^3+ap'$, a fim de tornar a relação entre p' e q independente de a. A equação final póde escrever-se

$$4p'^3-27q^2=4\delta(4\delta-3p')^2;$$

e como δ é positivo, é evidente que as raizes sómente poderão ser reaes sendo p negativo, e $-4p^3>27q^2$, condições que tornam imaginárias as raizes da reduzida, em conformidade do que dissemos.

Para achar as raizes n'este caso, reduza-se primeiro a -1 o coefficiente do 2.° termo da equação (1) $x^3-p'x+q=0$, tomando $x=-z\sqrt{p'}$. Dividindo pela raiz quadrada de p'^3, a transformada muda-se em

$$z^3-z-\frac{q}{\sqrt{p'^3}}=0.$$

Ora na hypothese de ser

$$4p'^3>27q^2,\ \text{ou}\ \frac{4}{27}>\frac{q^2}{p'^3},\ \text{ou}\ \frac{2}{\sqrt{27}}>\frac{q}{\sqrt{p'^3}},$$

prova-se, que se fizermos $z=\sqrt{\frac{4}{3}}$ o resultado será positivo. E como, fazendo $z=1$, apparece um resultado negativo, conclue-se que existe uma raiz entre 1 e $\sqrt{\dfrac{4}{3}}=1{,}1547$.

Faça-se $z=1+v$, e será $v<0{,}1547$; n'uma primeira approximação poderemos desprezar v^3, e teremos

$$2v+3v^2=\frac{q}{\sqrt{p'^3}}$$

Tomando a raiz positiva d'esta equação teremos z, e consecutivamente

$$x=-\frac{1}{3}\sqrt{p'}\left(2+\sqrt{1+\frac{3q}{p'\sqrt{p'}}}\right).$$

Semelhantemente para a equação $x^3-p'x-q=0$, tomando $x=z\sqrt{p'}$, acharemos o mesmo valor numerico de x mas com signal contrário.

Teremos pois o valor approximado

$$x=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{p'}\left(2+\sqrt{1+\frac{3q}{p'\sqrt{p'}}}\right),\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

devendo escolher dentre os dous signaes aquelle que for contrário ao do último termo q; e procederemos depois a uma segunda approximação pelos methodos ordinarios.

A expressão (7) equivalente a

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\delta}$$

dá depois as outras duas raizes.

Assim na equação $x^3-5x+3=0$, temos $x=-z\sqrt{5}$, d'onde resulta

$$z^3-z=\frac{3}{5\sqrt{5}},$$

e por conseguinte

$$x=-\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\left(2+\sqrt{1+\frac{9}{5\sqrt{5}}}\right)=-\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\,.\,3{,}343=-2{,}492;$$

e por fim

$$x = -2{,}490862,\ x = 1{,}834245,\ x = 0{,}6566166.$$

2.° Querendo empregar os logarithmos, usaremos com preferencia do methodo seguinte.

Fazendo no theorema (4) n.° 101, $m = 3$, temos, suppondo o raio egual á unidade, que

$$y^2 - 2y\cos\tfrac{1}{3}\varphi + 1 \text{ divide } y^6 - 2y^3\cos\varphi + 1.$$

Na equação $x^3 - px + q = 0$, na qual se dá a p o signal $-$, por que tractâmos o caso de ser $27q^2 + 4p^3 < 0$, tome-se

$$x = m(y + y^{-1});$$

virá $$m^3(y^3 + y^{-3}) + (3m^3 - pm)(y + y^{-1}) + q = 0;$$

e fazendo desapparecer o 2.° termo pela hypothese $m = \sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, será

$$y^6 + \frac{qy^3}{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}} + 1 = 0.$$

E como no caso presente t é imaginário na equação (3), sendo $(\frac{1}{2}q)^2 < (\frac{1}{3}p)^3$, podemos achar um arco φ, cujo coseno seja metade do factor de y^3, visto que esta metade é <1; isto é,

$$\cos\varphi = \frac{-q}{2\cdot\frac{1}{3}p\sqrt{(\frac{1}{3}p)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

A proposta acha-se então reduzida ao 2.° trinomio do theorema, e é divisivel por $y^2 - 2y\cos\frac{1}{3}\varphi + 1 = 0$. Dividindo por y, temos

$$y+y^{-1}=2\cos\tfrac{1}{3}\varphi\,;$$

e como $x=m(y+y^{-1})$, será

$$x=2\sqrt{(\tfrac{1}{3}p)}\cos\tfrac{1}{3}\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

O arco φ acha-se calculando a equação (9) por meio dos logarithmos. Tomar-se-ha o seu terço, ao qual se ajunctará 120° e 240°, por que além do arco achado nas taboas, podemos tomar os arcos $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$, aos quaes corresponde o mesmo coseno. A equação (10), na qual $\cos\frac{1}{3}\varphi$ toma tres valores differentes, determinará as tres raizes reaes.

Na equação $x^3-5x-3=0$, é $p=5$, $q=-3$, $\cos\varphi=\dfrac{3}{2\times\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$. O cálculo em frente dá $\varphi=45°48'9''$, cujo terço é 15° 16′ 3″. Ajunctaremos 120° e 240°, e tomaremos os seus cosenos, que são os mesmos que

5	0,6989700
3 ..—	04,771213
diff ...	0,2218487
metade.	0.1109243
2	0.3010300
den. —	0,6338030
3 ...+	0,4771213
cos φ ..	$\bar{1}$,8433153

$$\cos 15°\ 16'\ 3'',\ -\mathrm{sen}\ 43°\ 16'\ 3'',\ -\cos 75\ 16'\ 3''$$

Com os dados de cima, temos por fim

$2\sqrt{\frac{5}{3}}$	0.4119543	0,4119543	0,4119543
$\cos\frac{1}{3}\varphi$	$\bar{1}$,9843955	$\bar{1}$,8515032 —	$\bar{1}$,4053576 —
x	0,3963498	0,2634575 —	$\bar{1}$,8173119
$x=$	2,490862	—1,834245	—0,6566166

Equações do quarto gráo.

114. As equações do quarto gráo a uma incognita, depois de reduzidas á fórma

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

podem resolver-se por um processo similhante ao que fica exposto para o 3.° gráo. Considerando x decomposto em duas partes y e z, isto é $x=y+z$, teremos

$$\left.\begin{array}{l} y^4+(6z^2+p)\,y^2+(z^4+pz^2+qz+r) \\ +\,4zy^3+(4z^3+2pz+q)\,y \end{array}\right\}=0.$$

Como a relação entre y e z deixa uma d'estas quantidades arbitrárias, podemos egualar a zero a 2.ª linha da equação precedente, na qual só entram as potencias impares de y, e virá

$$y^2=-z^2-\frac{p}{z}-\frac{q}{4z}\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Eliminando y^2, a transformada torna-se em

$$z^6+\tfrac{1}{2}pz^4+\tfrac{1}{16}(p^2-4r)\,z^2-\tfrac{1}{64}q^2=0.$$

equação na qual só entram potencias pares de z. Faça-se pois, para simplificar, $z^2=\frac{1}{4}t$; e teremos

$$t^3+2pt^2+(p^2-4r)\,t-q^2=0\dots\dots\dots\dots \quad (\mathrm{A})$$

Esta equação, do terceiro gráo, é n'este caso a *reduzida;* e como deve ter necessariamente uma raiz positiva e real, designando-a por t, teremos

$$z=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{t},$$

expressão em que o signal é arbitrário.

Substituindo este valor de z em $x=y+z$ e em (1), vem

$$x=y\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{t},\quad y^2=\tfrac{1}{4}\left(-t-2p\mp\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)\dots\dots\dots \quad (2)$$

Acha-se por fim, tendo attenção á correspondencia dos siguaes, e eliminando y,

$$\left.\begin{array}{l} x=+\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p-\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)} \\ x=-\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p+\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)} \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

É necessario pois: *resolver a reduzida* (A); *achar uma raiz positiva* t; *e substituir esta raiz nas fórmulas* (B), *as quaes darão os quatro valores de* x.

Exemplo I. Na equação

$$2x^4-19x^2+24x=\frac{23}{8},$$

a reduzida é $\qquad t^3-19t^2+96t=144;$

uma das raizes $t=3$ dá

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\sqrt{(4-2\sqrt{3})},\ x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{(4+2\sqrt{3})};$$

e como (pag. 178) é $\qquad \sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=1\pm\sqrt{3},$

será finalmente $\qquad x=1\pm\sqrt{3},\ x=-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Ex.° II. Na equação

$$x^4-x+1=0,$$

é $\qquad t^3-4t=1;$

logo $t=2,114907\ldots$, d'onde se tira

$$x = -0{,}7271360 \pm 0{,}9341099\sqrt{-1},$$

$$x = +0{,}7272360 \pm 0{,}4300139\sqrt{-1}.$$

115. Se nas equações (B) substituissemos por t outra qualquer raiz da reduzida, não se obteriam valores differentes para x, mas prefere-se a raiz positiva t ás outras duas t' e t'' para commodidade dos calculos. E com effeito exprimindo estes valores (B) em funcção das tres raizes teremos

$$t + t' + t'' = -2p,\ t \,.\, t' \,.\, t'' = q^2.$$

A 1.ª dá $$t' + t'' = -2p - t,$$

e a 2.ª dá $$\pm\sqrt{(t't'')} = \frac{q}{\sqrt{t}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

sendo t, t', t'', independentes do signal de q, por entrar só q^2 na reduzida (A), mas devendo usar-se do signal superior, ou inferior, conforme for q positivo ou negativo.

Logo: para q positivo será

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{t} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}t' + \tfrac{1}{4}t'' - \tfrac{1}{2}\sqrt{t't''}\right)};$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ou antes} & x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \mp \sqrt{t''}); \\ \text{e, do mesmo modo,} & x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \pm \sqrt{t''}) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.)$$

E para q negativo será

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{t} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}t' + \tfrac{1}{4}t'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{t't''}\right)};$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ou antes} & x=\tfrac{1}{2}\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}),\\ \text{e do mesmo modo} & x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\mp\sqrt{t''}).\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(5)$$

Advirta-se que, em qualquer dos dous casos, as equações (4) e (5) são symetricas em t, t', t'', isto é, que as expressões dão os mesmos quatro valores, quando uma d'estas letras se muda na outra. Logo, sendo as equações (4) e (5) as mesmas que as equações (B) debaixo d'outra fórma, as equações (B) não dão mais de 4 raizes.

As equações (4) e (5) tem a vantagem de indicar a natureza das raizes de x. Porque:

1.° *Se a reduzida tiver as tres raizes reaes*, como o seu producto $t.t'.t''=q^2$ é positivo, tem de ser forçosamente duas negativas, ou todas tres positivas. No 1.° caso $\sqrt{t}$ e $\sqrt{t'}$ são imaginárias, e por conseguinte serão imaginarios todos os quatro valores de x. No 2.°, $\sqrt{t}$, $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$ são reaes, e as quatro raizes da proposta tambem o serão.

Logo: *Quando a reduzida se achar no caso irreduzivel, a proposta terá as quatro raizes conjunctamente reaes ou imaginárias, conforme forem os tres valores* t *todos positivos, ou só um positivo e os outros negativos.*

Acontecendo n'este 2.° caso ser $t'=t''$, como dous dos valores de x contém a differença dos radicaes $\sqrt{t'}$ e $\sqrt{t''}$, os imaginarios destroem-se entre si, e a proposta fica com duas raizes reaes e eguaes, e duas imaginárias.

2.° *Se a reduzida tiver só uma raiz* t *real*, como t é positivo, $\sqrt{t}$ é real. Além disto designando t' e t'' por $a\pm b\sqrt{-1}$, será

$$\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}\pm\sqrt{(a-b\sqrt{-1})};$$

e, quadrando,

$$(\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''})^2=2a\pm2\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

O último radical é manifestamente real e $>a$; e por conseguinte o quadrado tem dous valores reaes, um positivo, outro negativo. Extrahindo pois a raiz, que é $\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}$, temos de uma parte uma quantidade real da fórma $\sqrt{A}$, e da outra uma imaginária da fórma $\sqrt{-B}$.

Logo, revertendo para os valores precedentes de x, vê-se claramente que, *se a reduzida tiver sómente uma raiz t real*, *esta será positiva*, *e a proposta terá duas raizes reaes e duas imaginárias.*

IV. Funcções Symetricas.

Cálculo das funcções symetricas das raizes das equações.

116. *Diz-se* funcção symetrica, ou invariavel, *aquella que não soffre alteração alguma, quando as letras que n'ella entram se mudam umas nas outras.* Taes são, por ex.°, a^2+b^2, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a+b+\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, que permanecem as mesmas, quando se põe a por b, e b por a. Os coefficientes dos diversos termos de uma equação $fx=0$ tambem são funcções symetricas das raizes $a, b, c, \ldots\ldots$ (n.° 29)

Representaremos por S_k a somma das potencias do grão k das raizes da proposta, ou $S_k=a^k+b^k+c^k+\ldots\ldots$; e por $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots\ldots]$ a funcção symetrica que tem um termo da fórma $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$, e na qual se obtém os outros termos mudando cada uma das letras $a, b, c, \ldots$ em todas as outras successivamente.

Posto isto, passemos a mostrar que, *apezar de não serem conhecidas as raizes* a, b, c, ... *da equação*

$$fx=x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots\ldots+p_{m-1}x+p_m=0,$$

podemos sempre achar as quantidades S_k *e* $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots\ldots]$ *em funcção dos coefficientes* $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ *da proposta.*

1.ª Parte. Dividindo por

$$fx=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$$

a derivada (n.° 47, 2.°) d'esta mesma funcção, ou

$$f'x=(x-b)(x-c)\ \ldots\ldots+(x-a)(x-c)\ldots\ldots+\text{etc.},$$

acha-se

$$\frac{mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}+\ldots+p_{m-1}}{x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+p_m}=\frac{1}{(x-a)}+\frac{1}{(x-b)}+\frac{1}{(x-c)}\ldots(1)$$

Desenvolvendo $(x-a)^{-1}$ temos (n.° 11, I)

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\ldots.$$

Mudando consecutivamente a em b, c, d, ..., e sommando estes resultados, o segundo membro da equação (1) torna-se em

$$\frac{m}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\ldots\ldots$$

Multiplicando toda a equação por $x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots+p_m$, vem

$$mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}+\text{etc.}=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} mx^{m-1}+S_1 & x^{m-2}+S_2 & x^{m-3}+S_3 & x^{m-4}\ldots\text{etc.} & \ldots+S_l & x^{m-l-1} \\ \quad +mp_1 & \quad +p_1S_1 & \quad +p_1S_2 & & \ldots+p_1S_{l-1} & \\ & \quad +mp_2 & \quad +p_2S_1 & & \ldots+p_2S_{l-2} & \\ & & \quad +mp_3 & & \ldots+p_3S_{l-3} & \end{array}$$

O 1.° membro tem m termos; o 2.° tem infinitos; e cada uma das $m+1$ linhas horizontães de coefficientes tem o seu 1.° termo affastado uma casa mais para a direita que a linha antecedente.

Comparando os coefficientes das mesmas potencias de x n'estas duas identidades, transpondo e reduzindo, achar-se-ha (*)

(*) Todas as vezes que duas funcções identicas, desenvolvidas em ordem ás potencias de x, nos levarem a uma equação da fórma

$$A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots=P+Qx+Rx^2+\ldots\ldots$$

sendo A, B, C, ... P, Q, R, ... coefficientes independentes de x

..

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases} S_1 + p_1 = 0, \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0, \\ S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{m-1} + p_1 S_{m-2} + p_2 S_{m-3} + \ldots + (m-1)\, p_{m-1} = 0. \end{cases}$$

Equações por meio das quaes será facil calcular successivamente $S_1, S_2, \ldots S_{m-1}$ em funcção dos coefficientes $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$

Passadas estas $m - 1$ equações, o 1.º membro não tem termos comparaveis com os do 2.º, e apparecem equações da fórma

$$(\mathrm{B}) \ldots\ S_l + p_1 S_{l-1} + p_2 S_{l-2} + \ldots\ldots + p_m S_{l-m} = 0,$$

sendo l um inteiro $=$ ou $> m$. Quando for $l = m$, póde substituir-se o termo $p_m S_0$ por mp_m, por ser $S_0 = a^0 + b^0 + \ldots\ldots = m$; e n'esse caso a equação (B) ainda se acha comprehendida na mesma lei das equações (A). Achado S_m, podemos, successivamente, pela equação (B) achar as relações seguintes $S_{m+1}, S_{m+2} \ldots\ldots$ em funcções dos coefficientes da proposta (1).

Para determinar a somma das potencias negativas, o meio mais simples é mudar na proposta (1) x em $\dfrac{1}{x}$, e procurar depois pelas fórmulas (A) e (B) as sommas das potencias positivas das raizes da transformada.

Exemplos.

Na equação

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

é evidente, por isso que a equação subsiste para quaesquer valores dados a x, que haverá entre estes coefficientes as relações

$$A = P,\quad B = Q,\quad C = R,\ \ldots\ldots$$

Adiante, no methodo dos coefficientes indeterminados, nos serviremos d'esta propriedade.

temos $p_1 = -3$, $p_2 = 2$, $p_3 = -1$: o que nos dá, em virtude de (A)

$$S_1 = 3\,,\ S_2 = 5\,,\ S_3 = 12\,;$$

e em virtude de (B) a continuação da serie, cujos termos, como d'ella se deprehende, se vão formando do producto dos tres precedentes multiplicados respectivamente por $3, -2, 1$. Começando pois desde $S_0 = 3$, teremos a serie

$$3, 3, 5, 12, 29, 68, 158, 367, 853, 1983, 4610, 10717, 24914, 57918.$$

Para obter a somma das potencias negativas d'esta mesma equação, achariamos, advertindo que os coefficientes da transformada em $\frac{1}{x}$ são $1, -3, 2$,

$$3\,,\ 2\,,\ -2\,,\ -7\,,\ -6\,,\ 7\,,\ 25\,,\ 23\,,\ -22\,,\ -88\,\ldots\ldots$$

Na equação $x^m - 1 = 0$, acha-se por estas formulas, como a pag. 166,

$$S_1 = S_2 = S_3 = \ldots\ldots\ S_{m-1} = 0\,,\ S_0 = S_m = S_{m+1} = \ldots = m.$$

2.ª Parte. Multiplicando uma pela outra as duas sommas

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \ldots\ldots\ldots,$$

$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + \ldots\ldots\ldots,$$

o producto conterá termos de duas especies: 1.° a somma de todas as potencias $\alpha + \beta$ das raizes: 2.° a somma de todos os productos, que se formam combinando a potencia α de uma raiz qualquer com a potencia β d'outra raiz. Ora como a primeira somma se designa, segundo a notação adoptada, por $S_{\alpha+\beta}$; e a segunda por $[a^\alpha b^\beta]$, teremos

$$S_{\alpha+\beta}+[a^{\alpha}b^{\beta}]=S^{\alpha}S^{\beta},$$

d'onde se deduz, no caso das funcções duplas,

$$[a^{\alpha}b^{\beta}]=S_{\alpha}S_{\beta}-S_{\alpha+\beta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}.$$

Multiplicando entre si as tres sommas

$$S_{\alpha}=a^{\alpha}+b^{\alpha}+c^{\alpha}\ldots\ldots,$$

$$S_{\beta}=a^{\beta}+b^{\beta}+c^{\beta}\ldots\ldots$$

$$S_{\gamma}=a^{\gamma}+b^{\gamma}+c^{\gamma}\ldots\ldots$$

acha-se uma funcção symetrica, cujos termos são comprehendidos n'uma das cinco fórmas seguintes:

$$a^{\alpha+\beta+\gamma},\ a^{\alpha+\beta}b^{\gamma},\ a^{\alpha+\gamma}b^{\beta},\ a^{\beta+\gamma}b^{\alpha},\ a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma};$$

logo, segundo as notações adoptadas, teremos

$$\left.\begin{array}{l} S_{\alpha+\beta+\gamma}+[a^{\alpha+\beta}b^{\gamma}]+[a^{\alpha+\gamma}b^{\beta}] \\ \qquad +[a^{\beta+\gamma}b^{\alpha}]+[a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}] \end{array}\right\}=S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma}.$$

Mas, em virtude das fórmulas (D), é

$$[a^{\alpha+\beta}b^{\gamma}]=S_{\alpha+\beta}S_{\gamma}-S_{\gamma+\beta+\gamma},$$

$$[a^{\alpha+\gamma}b^{\beta}]=S_{\alpha+\gamma}S_{\beta}-S_{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$[a^{\beta+\gamma}b^{\alpha}]=S_{\beta+\gamma}S_{\alpha}-S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Substituindo estes valores na equação precedente, e tirando d'ella depois o valor $S_{\alpha+\beta+\gamma}$, obtem-se, para as funcções triplas,

$$[a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}]=S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma}-S_{\alpha+\beta}S_{\gamma}-S_{\alpha+\gamma}S_{\beta}-S_{\beta+\gamma}S_{\alpha}+2S_{\alpha+\beta+\gamma}\ldots\quad(E)$$

Por meio d'este processo muito simples podemos passar para os casos das funcções quadruplas, quintuplas, etc.

Cumpre porém advertir que estas expressões precisam ser modificadas, quando alguns dos expoentes α, β, γ, ... forem eguaes. Com effeito uma somma qualquer $[a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}]$, na qual cada termo tem n letras, compõe-se formando todos os arranjos n a n das m letras a, b, c, ... e dando respectivamente ás n letras de cada um d'elles os expoentes α, β, γ......; sendo o numero dos termos $[m\,Pn]$. Ora, suppondo que n'um termo a letra a tem o expoente α, e b o expoente β, haverá necessariamente outro termo que não differirá daquelle, senão na permutação de a em b; logo os dous termos tornar-se-hão eguaes se for $\alpha=\beta$. N'este caso a somma total dos termos differentes será ametade daquelle que é dado pelas fórmulas.

Se houver tres expoentes eguaes $\alpha=\beta=\gamma$, é claro que cada um dos termos differentes da fórmula será repetido n'ella tantas vezes quantas são os arranjos tres a tres com tres letras; logo para ter sómente a somma dos termos differentes, é preciso dividir as fórmulas geraes por 2×3.

Em geral se for p o numero dos expoentes eguaes, é necessario dividir as fórmulas por $2\times3\ldots\ldots\times p$.

Applicação á resolução numerica das equações.

117. Supponhamos já achados, relativamente a uma equação dada, os valores S_1, S_2, ... S_l. Quanto maior for a em relação ás outras raizes b, c, ... tanto mais S_l tenderá para tornar-se egual ao seu 1.º termo a^l, e S_{l-1} a a^{l-1}; e por conseguinte será proximamente $S_l : S_{l-1}=a$. Por tanto, *na serie* S_1, S_2, ... S_l, *o quociente da divisão de cada um dos termos pels seu antecedente, approximar-se-ha cada vez mais da raiz superior* a, *ao passo que o indice* k *for mais elevado.*

Poderiamos pelo mesmo theor obter a menor raiz (n.° 34, 2.°).

Esta proposição póde ter excepções no caso dos imaginarios. Por quanto, seja

$$x = \alpha \pm \beta \sqrt{-1};$$

e faça-se $\alpha = \lambda \cos\varphi$, $\beta = \lambda \operatorname{sen}\varphi$, hypotheses permittidas, por isso que, dando

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2, \ \operatorname{tang}t\ \varphi = \frac{\beta}{\alpha},$$

podemos d'estas equações concluir λ e o arco α em todos os casos. Temos pois

$$x = \lambda\,(\cos\varphi \pm \operatorname{sen}\varphi \sqrt{-1}),$$

d'onde se tira (nota a pag. 168)

$$(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})^l = \lambda^l (\cos k\varphi \pm \operatorname{sen} k\varphi \sqrt{-1}).$$

Suppondo pois a existencia das raizes imaginarias haverá em S_l um termo $2\lambda^l \cos k\varphi$. É necessario por tanto que $\lambda = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ seja menor que a maior raiz a, para que se possa verificar o theorema precedente.

No 1.° ex.° de pag. 197 temos $S_{13} = 57918$, $S_{12} = 24914$, o quociente $\frac{57918}{24914} = 2,3247177$ é um valor approximado de x.

118. Appliquemos agora o calculo das funcções symetricas á indagação das equações ao quadrado das differenças.

Supponhamos que á equação $fx = 0$, cujas raizes são a, b, c, ... corresponde á equação ao quadrado das differenças

$$Fz = z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \ldots\ldots + U = 0\,,$$

cujos coefficientes incognitos P, Q, R, ... U pretendemos determinar.

Temos

$$(x-a)^l = x^l - lax^{l-1} + A'a^2x^{l-2} - A''a^3x^{l-3} \ldots \pm a^l,$$

$$(x-b)^l = x^l - lbx^{l-1} + A'b^2x^{l-2} - A''b^3x^{l-3} \ldots \pm b^l,$$

$$(x-c)^l = x^l - lcx^{l-1} + \text{etc.}$$

Estas equações são em numero m; os coefficientes A', A'', ... são dados pela desenvolução dos binomios elevados á potencia l.

Os 2.^{os} membros d'estas equações sommados dão em resultado

$$mx^l - lS_1\, x^{l-1} + A'\, S_2 x^{l-2} - A''S_3 x^{l-3} + \ldots\ldots \pm S_l.$$

Mudando pois successivamente x em a, b, c, ... virão as sommas totaes respectivas

$$(a-b)^l + (a-c)^l \ldots\ldots = ma^l - lS_1\, a^{l-1} + \ldots \pm S_l$$
$$(b-a)^l + (b-c)^l \ldots\ldots = mb^l - lS_1\, b^{l-1} + \ldots \pm S_l$$
$$(c-a)^l + \text{etc.}$$

Sommemos estas últimas equações:

O 1.° membro torna-se na somma das potencias l *das differenças de todas as raizes, subtrahidas duas a duas;*

O 2.° membro torna-se em

$$mS_l - lS_1\, S_{l-1} + A'S_2\, S_{l-2} - A''S_3\, S_{l-3} + \ldots \pm mS_l.$$

Se l for impar nada se póde deduzir d'esta fórmula, porque no 1.° membro as differenças são eguaes duas a duas com signaes contrários, e as suas potencias l destroem-se reciprocamente. O 2.° membro é formado de termos taes, que os que ficam equidistantes dos extremos tem os mesmos coefficientes e os mesmos indices para S, com signaes contrários. Assim ambos os membros se reduzem a zero, e temos $0 = 0$.

Porém se l for par, no 1.° membro as potencias das differenças $(a - b)^l$, $(b - a)^l$, etc. são eguaes duas a duas com os mesmos signaes, e podem sommar-se; no 2.° membro tambem podem sommar-se os termos equidistantes dos extremos, por serem eguaes dous a dous e terem os mesmos signaes, ficando só o termo medio, que não tem outro egual. Por tanto dividindo por dous toda a equação assim reduzida, os seus termos se simplificam, e só o termo medio do 2.° membro tem o factor $\frac{1}{2}$.

Se fizermos pois $l = 2i$, o 1.° membro se reduzirá á somma das potencias $2i$ das differenças das raizes, ou á das potencias i dos quadrados d'estas differenças, somma que representaremos por f_i. Por outra parte, designando por $2i$, A', A'', ... os coefficientes do binomio para o expoente $2i$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} f_i = mS_{2i} - 2iS_1 S_{2i-1} + A'S_2 S_{(2i-2)} - A''S_3 S_{(2i-3)} \ldots\ldots \\ \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots\ldots(i+1)}{2.3.4\ldots\ldots 2i} \times (S_i)^2 \ldots\ldots \end{array}\right\} (N).$$

Os coefficientes $2i$, A', A'', ... tem por valores os numeros da linha $2i$ da tabella de pag. 9; deve porém parar-se no termo medio, e tomar a sua ametade. Estes factores tem os seguintes valores, para

$i = 1$ 1, 1

$i = 2$ 1, 4, 3

$i = 3$ 1, 6, 15, 10

$i = 4$ 1, 8, 28, 56, 35

$i = 5$ 1, 10, 45, 120, 210, 126

$i = 6$ .... 1, 12, 66, 220, 495, 792, 462, etc.

D'onde se conclue

$f_1 = mS_2 - (S_1)^2$	$f_4 = mS_8 - 8S_1S_7 \ldots + 35(S_4)^2$
$f_2 = mS_4 - 4S_1S_3 + 3(S_2)^2$	$f_5 = mS_{10} - 10S_1S_9 \ldots + 126(S_5)^2$
$f_3 = mS_6 - 6S_1S_5 + 15S_2S_4 - 10(S_3)^2$	$f_6 = mS_{12} - 12S_1S_{11} \ldots + 462(S_6)^2$

Posto isto, depois de haver achado a serie S_0, S_1, $S_2 \ldots$ e fazendo $i=1$, deduziremos da equação (N) os valores de $(a-b)^2+(a-c)^2+\ldots$; e assim obteremos a somma f_1 das 1.^as potencias das raizes de $Fz=0$. Fazendo depois $i=2$, acharemos $(a-b)^4+(a-c)^4\ldots$, ou f_2; etc. Em geral a equação (N) dará a somma f_i das potencias i das raizes da equação ao quadrado das differenças.

Finalmente as equações (A) de pag. 196 applicadas a esta equação dão os coefficientes da equação ao quadrado das differenças

$$P=-f_1,\ Q=-\tfrac{1}{2}(Pf_1+f_2),\ R=-\tfrac{1}{3}(Qf_1+Pf_2+f_3)\ldots$$

O calculo dos f deve continuar-se até ao indice $n=\frac{1}{2}m(m-1)$ gráo de $Fz=0$, e o de S até a um indice duplo.

Por exemplo na equação geral do 3.º gráo

$$x^3+qx+r=0,$$

a serie S_0, $S_1 \ldots\ldots$ torna-se em

$$3,\ 0,\ -2q,\ -3r,\ 2q^2,\ 5qr,\ -2q^3+3r^2,$$

que dá $\quad f_1=-6q,\ f_2=18q^2,\ f_3=-66q_3-81r^2;$

logo $\quad P=6q,\ Q=9q^2,\ R=27r^2+4q^3,$

são os coefficientes da equação ao quadrado das differenças para o 3.º gráo. Na *Resolution numér.* de Lagrange, n.^os 38, 39 e nota III, se encontram as fórmulas para o 4.º e 5.º gráo.

Applicação ás Equações do segundo gráo.

119. Se a e b forem as raizes desconhecidas da equação

$$x^2+px+q=0:$$

as relações sabidas entre as mesmas raizes

$$a+b=-p, \quad ab=q,$$

conduzir-nos-hiam de novo, pela eliminação de a e b, a equações do 2.° gráo, as quaes por isso, como já em outra parte fizemos ver, não nos seriam de utilidade para achar as mesmas raizes

Supponhamos porem que entre a e b há uma relação

$$z=a+mb,$$

em que m é arbitrario, e z uma incognita, que tractâmos de determinar de modo que a eliminação de a e b entre ella e a relação $a+b=-p$ nos conduza a equações do 1.° gráo.

Em virtude da symetria que ha entre as raizes das equações, além da relação $z=a+mb$, deve existir a relação $z=b+ma$; e por conseguinte o valor de z é dado tambem pela equação do 2.° gráo

$$[z-(a+mb)]\,[z-(b+ma)]=0.$$

Para que esta equação nos possa approveitar é necessario que se reduza á fórma $z^2=k$, de maneira que d'ella se deduza o valor de z por uma simples extracção de raiz quadrada. Vê-se que isto se consegue pondo $m=-1$, d'onde resulta

$$z^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=S_2-2q;$$

e como (pag. 196.) $S_2 = p^2 - 2q$, teremos finalmente

$$z = a - b = \pm \sqrt{(p^2 - 4q)},\ a + b = -p,$$

equações das quaes se deduzem as duas raizes a e b.

Applicação ás Equações do terceiro gráo.

120. Supponhamos, que entre as tres raizes desconhecidas a, b, c da equação do 3.° gráo

$$x^3 + px + q = 0,$$

se dá a relação

$$z = a + mb + nc, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

na qual m e n são quantidades arbitrárias. Pela permutação das letras a, b, c umas nas outras, resultam da relação (1) outras cinco, d'onde provém uma equação em z do 6.° gráo. Esta equação não nos poderá pois em geral ser de utilidade; e sómente o será, se em virtude da arbitrariedade de m e n, reduzirmos a equação em z á fórma

$$z^6 + Az^3 + B = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

que se resolve á maneira das do 2.° gráo (n.° 105), isto é, a uma fórma tal, que as suas seis raizes sejam eguaes a dous numeros z', z'', multiplicados respectivamente pelas tres raizes cubicas da unidade. Para isso é necessário que, designando por z', z'', as raizes cubicas dos dous valores de z^3,

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

e por 1, α, α^2, as da unidade, os seis valores que resultam da permutação das letras a, b, c, no trinomio, satisfaçam ás equações,

$$\left.\begin{cases} z' = a + mb + nc \\ \alpha z' = b + mc + na \\ \alpha^2 z' = c + ma + nb \end{cases}\right| \left.\begin{aligned} z'' &= a + nb + mc \\ \alpha^2 z'' &= b + nc + ma \\ \alpha\, z'' &= c + na + mb \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Vejamos se podemos determinar agora m e n de modo que estas seis equações tenham logar. Multiplicando $\alpha z'$ por α^2, e advertindo que é $\alpha^3 = 1$, vem

$$z' = \alpha^2 b + m\alpha^2 c + n\alpha^2 a = a + mb + nc.$$

Para ter logar a identidade é necessario, que sejam eguaes os coefficientes respectivos de a, b, c, isto é,

$$\alpha^2 = m,\; m\alpha^2 = n,\; n\alpha^2 = 1,$$

d'onde se tira $$m = \alpha^2,\; n = \alpha.$$

Substituindo estes valores nas seis equações (4), vê-se que ellas resultam de

$$z' = a + \alpha c + \alpha^2 b,\; z'' = a + \alpha b + \alpha^2 c \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

multiplicando estas por α, e α^2. Tomando pois $m = \alpha^2$, $n = \alpha$, o trinomio (1) terá seis valores, que elevados ao cubo, só darão os dous valores differentes z'^3 e z''^3; por serem 1 os cubos de α e α^2.

Fica pois demonstrado que os seis valores (4), pondo n'elles $m = \alpha^2$ e $n = \alpha$, são raizes da equação (2), á qual se póde dar a fórma

$$(z^3 - z'^3)(z^3 - z''^3) = z^6 - (z'^3 + z''^3)\, z^3 + z'^3 z''^3 = 0.$$

Resta agora determinar A e B, isto é,

$$\text{A} = -(z'^3 + z''^3),\quad \text{B} = (z' z'')^3;$$

porque se pudermos determinar A e B em funcção dos coefficientes p e q, teremos pela equação (3) os valores de z^3, cujas raizes cubicas z' e z''

serão conhecidas. As equações (5) e a relação $a+b+c=0$, que tem logar por ser nullo o 2.° termo da equação (1), darão pois a, b, c.

Desenvolva-se o cubo de $z'=a+\alpha c+\alpha^2 b$, e, advertindo que é $\alpha^3=1$, virá

$$z'^3=S_3+6abc+3\alpha(a^2c+b^2a+c^2b)+3\alpha^2(a^2b+c^2a+b^2c).$$

Mudando n'esta expressão b em c obtem-se z''^3; sommando os dous resultados, e em consequencia de ser

$$abc=-q,\ S_1=0,\ \alpha+\alpha^2=-1,\ [a^2b]=S_1S_2-S_3,\ S_3=-3q,$$

acha-se

$$A=-2S_3+12q-3(\alpha+\alpha^2)[a^2b]=-5S_3+12q=27q.$$

Por outra parte, por ser

$$S_2=-2p,\ [ab]=p,\ \alpha+\alpha^2=-1,$$

acha-se $$z'z''=S_2+(\alpha+\alpha^2)[ab]=-3p;$$

e por consequencia o cubo

$$B=-27p^3.$$

Teremos pois

$$u=-27\left(\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)=z^3.$$

E como n'esta equação os factores de 27 são as raizes t' e t'' da equação $t^2+qt=(\frac{1}{3}p)^3$, teremos $z^3=27t$.

Eliminando a, b, c entre as equações (5) e a equação

$$a+b+c=0,$$

teremos

$$3a = z' + z'',\ 3b = \alpha z' + \alpha^2 z'',\ 3c = \alpha^2 z' + \alpha z'';$$

e como
$$z' = 3\sqrt[3]{t'},\ z'' = 3\sqrt[3]{t''},$$

tornâmos a achar os valores do n.° 110.

Applicação ás Equações do quarto gráo.

121. Na equação do 4.° gráo

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

não estabeleceremos, em analogia com o 2.° e 3.° gráo, a relação $z = a + lb + mc + md$, da qual, feitas as permutações, resultariam 24 valores de z; mas sim a relação

$$z = a + b + m(c + d),$$

da qual só resultam seis permutações. E se n'esta fizermos $m = -1$,

virá
$$z = a + b - c - d,$$

relação, que dá seis valores eguaes dous a dous com signaes contrários. Logo a raiz z será dada por uma equação do 6.° gráo da fórma

$$z^6 + Az^4 + Bz^2 + C = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (6)$$

na qual todas as potencias são pares, não resultando dos seis valores mais de tres quadrados differentes.

Desenvolvendo o quadrado temos

$$(a + b - c - d)^2 = (a + b + c + d)^2 - 4(ac + ad + bc + bd),$$

Como na equação (1) falta o 2.° termo, será nulla a 1.ª parte do 2.° membro da equação precedente. E por isso ajunctando n'elle e subtrahindo $4\ (ab + cd)$; advertindo que é $[ab] = p$; e permutando na equação resultante b em c, e b em d: acharemos

$$(a + b - c - d)^2 = -4p + 4\,(ab + cd),$$

$$(a + c - b - d)^2 = -4p + 4\,(ac + bd),$$

$$(a + d - c - b)^2 = -4p + 4\,(cd + bc);$$

e são estes os valores dos tres quadrados z^2 de (6).

Podemos simplificar os calculos pondo $u = \frac{1}{4}z^2 + p$,

porque então os valores de u serão

$$ab + cd,\ ac + bd,\ cd + bc.$$

Formemos a equação que tem estas tres raizes. Como temos

$$S_1 = 0,\ S_2 = -2p,\ S_3 = -3q,\ S_4 = 2p^2 - 4r,$$

$$S_5 = 5pq,\ S_6 = -2p^3 + 6pr + 3q^2;$$

empregando a fórmula (E) de pag. 199, e dividindo por 2 ou por 6, quando assim dever ser em consequencia da advertencia que alí fizemos, acha-se que:

1.° A somma dos binomios é $[ab] = p$;

2.° A somma dos seus productos 2 a 2 é

$$[a^2\ b\ c] = S_4 - \tfrac{1}{2}S_2{}^2 = -4r;$$

3,° O producto dos tres binomios é

$$abcd \times S_2 + [a^2b^2c^2] = rS_2 + \tfrac{1}{6}S_2^3 - \tfrac{1}{2}S_4 S_2 + \tfrac{1}{3}S_6$$
$$= -4pr + q^2.$$

Temos por tanto

$$u^3 - pu^2 - 4ru + 4pr - q^2 = 0,$$

ou, restituindo $\frac{1}{4}z^2 + p$ por u,

$$z^6 + 8pz^4 + 16z^2(p^2 - 4r) - 64q^2 = 0.$$

Depois de conhecidos os tres valores de z^2, e as suas raizes $\pm(z, z', z'')$ é necessario eliminar a, b, c, das equações

$$S_1 = a + b + c + d = 0, \ a + c - b - d = z',$$

$$a + b - c - d = z, \ a + d - b - c = z''.$$

Estas equações, sommadas duas a duas, dão as tres

$$a + b = \tfrac{1}{2}z, \ a + c = \tfrac{1}{2}z', \ a + d = z'',$$

cuja somma dá

$$a = \tfrac{1}{4}(z + z' + z'');$$

podemos por conseguinte obter tambem b, c, d em funcção de z, z', z''. Tomando agora estas quantidades com o duplo signal $\pm$, temos 8 raizes em vez de 4; e assim deve ser, porque, dependendo a equação em z de q^2 e não de q, o signal de q fica arbitrario. O producto das tres últimas equações é, por ser $-a = b + c + d$,

$$\tfrac{1}{8}zz'z'' = a^3 + a^2(b + c + d) + [abc] = -q,$$

e tem, como se vê, signal contrário ao de q. Resultam por isso, como a pag. 192, os dous systemas seguintes para q positivo, $x=\frac{1}{4}(z\pm z'\mp z'')$, $x=\frac{1}{4}(-z\pm z'\pm z'')$;

para q negativo, $x=\frac{1}{4}(z\pm z'\pm z'')$, $x=\frac{1}{4}(-z\mp z'\pm z'')$.

Applicação á Eliminação.

122. N'uma equação entre x e y, se for m a somma dos expoentes, que affectam estas incognitas no termo que a tem maior, diz-se que m é o gráo d'essa equação.

Posto isto, sejam

$$x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots+p_m=0=Z,$$

$$x^n+q_1x^{n-1}+\ldots\ldots+q_n=0=T,$$

duas equações entre x e y, uma do gráo m e outra do gráo n: sendo assim cada um dos coefficientes uma funcção de y, cujo gráo é quando muito do 1.° em p_1 e q_1, do 2.° em p_2 e q_2, etc. Supponhamos a equação $T=0$ resolvida em ordem a x, e designemos por a, b, c, ... k as suas n raizes. Esta equação equivalerá a

$$T=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-k)=0,$$

de maneira que podemos substituir ao systema das equações propostas os n systemas

$$\left.\begin{matrix}x-a=0\\Z=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x-b=0\\Z=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x-c=0\\Z=0\end{matrix}\right\}\ldots\ldots$$

Se em cada um d'estes systemas tirarmos da 1.ª equação o valor de x e o substituirmos na 2.ª, obteremos a equação final em y d'esse systema: e por conseguinte, multiplicando essas equações finaes membro a membro, formaremos a do systema das propostas. Esta equação é pois

$$\left.\begin{array}{r}(a^m+p_1a^{m-1}+\ldots p_m)\,(b^m+p_1b^{m-1}+\ldots+p_m)\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k^m+p_1k^{m-1}+\ldots+p_m)=0\end{array}\right\}\ldots(7)$$

Ora, posto que $a, b, c, \ldots\ldots k$ sejam funcções desconhecidas de y, é possivel formar esta equação, porque sendo o seu primeiro membro uma funcção symetrica e racional d'estas raizes, póde exprimir-se em funcção racional dos coefficientes de $T=0$.

Por exemplo, para eliminar x entre as equações

$$x^3y-3x+1=0\,,\; x^2(y-1)+x-2=0\,,$$

teremos, suppondo que a e b são as raizes da 2.ª,

$$(a^3y-3a+1)\,(b^3y-3b+1)=0\,,$$

ou, effectuando as multiplicações indicadas,

$$a^3b^3y^2+yS_3-3abyS_2+9ab-3S_1+1=0.$$

E como da 2.ª equação proposta se tira

$$S_1=\frac{-1}{y-1},\; ab=\frac{-2}{y-1},\; S_2=\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{4}{y-1},$$

estes valores, substituidos na última equação, nos conduzem facilmente á equação final do 3.° gráo em y.

123. Os calculos que exige este methodo, por muito longos, são de pouca utilidade práctica, mas podemos achar por meio d'elles, mui simplesmente, o limite do gráo da equação final.

Com effeito o termo geral da equação (7) póde ser representado por

$$p_\alpha a^{m-\alpha} p_\beta b^{m-\beta} \ldots\ldots p_\mu k^{m-\mu} = p_\alpha p_\beta \ldots p_\mu a^{m-\alpha} b^{m-\beta} \ldots k^{m-\mu};$$

e como a equação (7) é symetrica, deve conter todos os termos que se deduzem da precedente, mudando as quantidades $a, b, c, \ldots\ldots$ umas nas outras, isto é,

$$p_\alpha p_\beta \ldots\ldots p_\mu [a^{m-\alpha} b^{m-\beta} \ldots k^{m-\mu} \ldots\ldots] \quad (8)$$

Avaliemos o limite do gráo d'esta funcção. Primeiramente o producto $p_\alpha p_\beta \ldots\ldots p_\mu$ é quando muito do gráo $\alpha + \beta + \ldots + \mu$; em segundo logar, remontando ás fórmulas que dão os valores de $[a^\alpha b^\beta]$, $[a^\alpha b^\beta c^\gamma]$, .. vê-se que a somma dos indices de S em cada termo é egual á somma dos expoentes que tem as letras $a, b, c, \ldots\ldots$ em cada termo d'estas funcções; e como resulta das fórmulas (A) de pag. 196 que o indice de S é precisamente egual ao indice mais elevado dos coefficientes de proposta: vê-se, que $[a^{m-\alpha} b^{m-\beta} \ldots\ldots k^{m-\mu}]$ é quando muito do gráo

$$m-\alpha+m-\beta+\ldots\ldots m-\mu = mn-(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\mu);$$

logo a funcção (8), e por conseguinte a equação final, é quando muito do gráo mn. Assim:

O gráo da equação final, que resulta da eliminação d'uma incognita entre duas equações d'um gráo qualquer a duas incognitas, não póde exceder o producto dos gráos das equações propostas.

Ve-ja sobre a extensão d'este theorema uma *Memoria* de Poisson, no n.° XI. do *Journal Polytechnique.*

V. FRACÇÕES CONTINUAS.

Geração e propriedades.

124. Para achar o valor approximado de uma quantidade x, que não póde exprimir-se por um numero inteiro, procure-se o maior inteiro y contido n'essa quantidade, e seja x' uma nova quantidade > 1, tal que dê

$$x = y + \frac{1}{x'}.$$

Represente-se depois por y' o maior inteiro contido em x', e tome-se

$$x' = y' + \frac{1}{x''}.$$

Proseguindo por este theor, e representando por y'', y''', ... os maiores inteiros contidos em x'', x''', ..., sendo todas estas quantidades >0, obteremos as equações (A), da qual resultará, por meio de substituições, o valor de x debaixo da fórma (B), que se chama *fracção continua.*

$$(A)\left\{\begin{array}{l} x = y + \dfrac{1}{x'}, \\ x' = y' + \dfrac{1}{x''}, \\ x'' = y'' + \dfrac{1}{x'''}, \\ \text{etc.} \end{array}\right. \qquad (B)\left\{ x = y + \cfrac{1}{y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''' + \cfrac{1}{y^{\text{IV}} + \text{etc.}}}}}\right.$$

Vê-se pois que: *FRACÇÃO CONTÍNUA é uma expressão composta de um numero inteiro, que póde ser nullo, mais de uma fracção cujo nu-*

merador é a unidade e cujo denominador é um numero inteiro, augmentado de uma fracção cujo numerador é a unidade e cujo denominador é um numero inteiro, augmentado de uma fracção . . . . . e assim por diante.

Os inteiros y, y', y'' . . . . . . são os termos da *fracção continua*, a qual, para abbreviar, escreveremos de maneira seguinte

$$x = y\,,\ y'\,,\ y''\,,\ y'''\,, \ldots\ldots$$

125. *Para passar d'este valor de* **x** *para outro expresso n'uma fracção ordinaria, procederemos como no exemplo seguinte*

$$x = 2\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 2\,,\ 4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}\ldots\ldots$$

Reduzindo á mesma denominação o divisor final $2 + \frac{1}{4}$, temos $\frac{9}{4}$. A unidade dividida por $\frac{9}{4}$ dá $\frac{4}{9}$, e a fracção torna-se em

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{9}}}.$$

Continuando a operar da mesma maneira, reduz-se o divisor final $3 + \frac{4}{9}$ a $\frac{31}{9}$ e vem $1 : \frac{31}{9} = \frac{9}{31}$; tornando-se assim a fracção em

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{9}{31}} = 2 + 1 : \tfrac{40}{31} = 2 + \tfrac{31}{40} = \tfrac{111}{40}.$$

O andamento do cálculo é exactamente o mesmo que no n.° 30 da Arith. Nos exemplos seguintes, onde a primeira linha encerra os termos da fracção contínua, practica-se d'esta maneira:

Debaixo do último termo escreve-se a unidade, e procedendo sempre da direita para a esquerda, multiplica-se cada um dos termos pelo numero escripto por baixo, e somma-se com o que fica á direita d'este último; a somma assenta-se depois na casa á esquerda. O último numero obtido, dividido pelo que o precede, é o valor da fracção.

$$\begin{array}{l|l} x = 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4 & x = 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4 \\ 111,\ 40,\ 31,\ 9,\ 4,\ 1 & 617,\ 182,\ 71,\ 40,\ 31,\ 9,\ 4,\ 1 \end{array}$$

Temos pois no 1.° exemplo $x = \frac{111}{40}$, e no 2.° $x = \frac{617}{182}$.

126. Se a fracção for contínua ao infinito, parar-se-ha n'um dos termos, desprezando todos os seguintes, e obter-se-ha então sómente um valor approximado de x. Se desprezarmos x' nas equações (A), tomando $x = y$, x torna-se *menor* do que devia ser; se desprezarmos x'', x' torna-se *menor* doque devia ser, e por consequencia x *maior;* se desprezarmos x''', x'' torna-se *menor*, x' *maior*, e x *menor;* e assim por diante. Em geral:

O valor da fracção contínua é maior ou menor que x, *confórme parâmos com ella n'um termo da ordem par, ou n'um da ordem impar.*

Se pararmos com a fracção successivamente no 1.° termo y, no 2.° y', no 3.° y''....., os resultados serão pois alternadamente $<x$ e $>x$, e x ficará assim comprehendido entre dous resultados consecutivos, aos quaes se dá o nome de fracções *convergentes ou reduzidas.*

Representando por

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'},\ \frac{d}{d'} \ldots\ \frac{m}{m'},\ \frac{n}{n'},\ \frac{p}{p'},\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

as convergentes nas quaes se toma consecutivamente por último termo,

$$y,\ y',\ y'',\ y''',\ \ldots\ldots y^{i-2},\ y^{i-1},\ y^{i}:$$

teremos

$$\frac{a}{a'}=\frac{y}{1},\ \frac{b}{b'}=\frac{yy'+1}{y'},\ \frac{c}{c'}=\frac{yy'y''+y''+y}{y'y''+1}=\frac{by''+a}{b'y''+a'}.$$

Para obter a convergente seguinte $\frac{d}{d'}$, bastará em $\frac{c}{c'}$ mudar y'' em $y''+\frac{1}{y'''}$; e $x=y\,,\,y'\,,\,y''$, se tornará então em

$$x=y\,,\,y',\,y'',\,y'''.$$

Teremos assim

$$d=by''+a+\frac{b}{y'''}=\frac{cy'''+b}{y'''},$$

$$d'=\frac{c'y'''+b'}{y'''};$$

e por conseguinte

$$\frac{d}{d'}=\frac{cy'''+b}{c'y'''+b'}.$$

Comparando o valor das duas convergentes successivas, vê-se, que:

O numerador de uma convergente deduz-se, multiplicando os numeradores das duas precedentes, respectivamente, por 1 *e pelo termo final, e sommando depois os productos; o denominador deduz-se por uma lei analoga.*

Esta lei é geral para todas as convergentes (C), por isso que para passar d'uma para a seguinte se emprega um cálculo similhante, que só differe nos accentos. Será por tanto em geral

$$p=ny^i+m\,,\ p'=n'y^i+m', \dots\dots\dots\dots \quad (D)$$

$$\frac{p}{p'}=\frac{ny^i+m}{n'y^i+m'}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (E).$$

Formadas pois as duas primeiras convergentes podem, por ésta fórmula, obter-se seguidamente todas as outras. Assim

$$x=2\,,\,1\,,3,\;2,\;4,\text{ dá }\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{11}{4},\frac{25}{9},\frac{111}{40},$$

fracções que são alternadamente $<$ e $>$ x, sendo $\frac{111}{40}$ o valor exacto de x. Este processo offerece um novo meio de obter este valor.

127. Eliminando y' entre as equações (D), resulta

$$pn'-p'n=-(nm'-n'm)\,,$$

d'onde se conclue, que:

A differença dos productos encruzados dos termos de duas convergentes consecutivas é constantemente o mesmo com signaes contrarios.

Ora como esta differença é 1 para as duas 1.^{as}

$$\frac{a}{a'}=\frac{y}{1}\,,\;\frac{b}{b'}=\frac{yy'+1}{y'}\,,$$

segue-se, que em geral, será

$$pn'-p'n=\pm 1\,,\;\frac{p}{p'}-\frac{n}{n'}=\pm\frac{1}{p'n'}\,\ldots\ldots\ldots\;\text{(F)},$$

devendo tomar-se o signal $+$, quando y_i e $\frac{p}{p'}$ são da ordem par, e então é $\frac{p}{p'}>\frac{n}{n'}$; e o signal $-$ no caso contrário (*).

(*) As differenças entre as convergentes successivas são

$$\frac{b}{b'}-\frac{a}{a'}=\frac{1}{a'b'},\frac{c}{c'}-\frac{b}{b'}=-\frac{1}{b'c'},\ldots\frac{p}{p'}-\frac{n}{n'},=\pm\frac{1}{p'n'}\ldots\ldots$$

e por isso a somma de todas estas equações reduz-se a

$$\frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}+\frac{1}{a'b'}+\frac{1}{b'c'}+\ldots\ldots\pm\frac{1}{p'n'}$$

128. Das equações precedentes deduzem-se as seguintes consequencias:

1.° Como os divisores communs de p e p' deveriam na 1.ª das equa-(F) dividir tambem a unidade, vê-se que p e p' são primos entre si, bem como p e n, p' e n'. Logo, *as convergentes são irreduziveis.*

2.° Se na equação (E) substituirmos por y^i o valor total z da fracção continua, tomada desde o termo y^i até ao último $z = y^i, y^{i+1}, y^{i+2}, \ldots$, virá manifestamente em vez de uma convergente, o valor exacto de x, a saber:

$$x = \frac{nz+m}{n'z+m'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

A este valor (G) dá-se o nome de *fracção completa.*

3.° Para obter os erros δ' e δ de cada uma das convergentes $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, subtrahi-las-hemos de x, e virá

$$\delta' = \frac{\pm z}{m'(n'z+m')}, \quad \delta = \frac{\mp 1}{n'(n'z+m')} \ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

Estas differenças apparecem com signaes contrarios, por isso que o valor de x se acha entre as duas convergentes. Como a 2.ª é menor do que a primeira, por ser $m' < n'$ e $z > 1$, x fica mais proximo de $\frac{m}{n'}$, do que de $\frac{m}{m'}$. Logo *as convergentes successivas vão-se approximando, cada vez mais, do valor de* x, *ora por defeito, ora por excesso. E d'ahi lhe proveio a denominação.*

4.° Como (H) são os erros δ' e δ de duas convergentes consecutivas $\frac{m}{m'}$, e $\frac{n}{n'}$; e por ser $z>1$: será

Por este estilo se obtem a desenvolução do valor exacto de x quando $\frac{p}{p'}$ for a última convergente; e uma expressão do valor approximado de x quando a fracção se continúa indefinidamente. No nosso ex.

$$\frac{111}{40} = x = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{36} - \frac{1}{360}.$$

$$\frac{1}{n'(n'z+n')} < \frac{1}{n'(n'+m')};$$

e

$$\mp\delta = \mp\left(x - \frac{n}{n'}\right) < \frac{1}{n'(n'+m')} \ldots\ldots\ldots \text{(K)}$$

Logo, *o erro que se commette parando n'uma convergente* $\frac{n}{n'}$ *é menor que a unidade dividida pelo producto do denominador* n' *da mesma convergente, multiplicado pela somma* $n'+m'$ *d'este mesmo denominador e do denominador da fracção antecedente.*

No ex.º de cima temos as convergentes successivas $\frac{11}{4}$ e $\frac{25}{9}$; e se pararmos na última, o erro não chegará a $\frac{1}{9(9+4)}, = \frac{1}{117}$.

Se desprezarmos m', com o que se augmenta o valor de (K), teremos

$$\delta < \frac{1}{n'^2},$$

e por conseguinte, *qualquer convergente dá um valor de* x *approximado, com um erro menor do que a unidade dividida pelo quadrado do seu denominador.*

No mesmo ex.º, a convergente $\frac{25}{9}$ não chega a ter de erro $\frac{1}{81}$.

129. Sejam

$$\frac{h}{h'}, \frac{k}{k'}, \frac{l}{l'}, \ldots\ldots$$

fracções quaesquer crescentes: a differença entre as extremas será maior do que a que existe entre uma d'ellas e a intermedia.

Supponhamos mais que h, k', l, l' satisfazem á condição

$$lk' - hl' = 1;$$

teremos

$$\frac{l}{l'}-\frac{h}{h'}=\frac{1}{l'h'}>\frac{kh'-k'h}{k'h'} \text{ e} > \frac{lk'-kl'}{k'l'}.$$

Como estes numeradores são inteiros e positivos o seu menor valor é a unidade. D'onde resulta,

$$l'h'<k'h' \text{ e} <k'l';$$

ou, supprimindo os factores communs,

$$k'>l' \text{ e} > h';$$

e por conseguinte k' é o maior dos tres denominadores. Do mesmo modo invertendo as tres fracções, o que dá os termos decrescentes $\frac{h'}{h}$, $\frac{k'}{k}$, $\frac{l'}{l}$, vê-se que é

$$k>l \text{ e} >h.$$

Temos pois que a fracção intermedia é mais complicada do que as duas extremas.

Portanto, como x fica entre $\frac{m}{m'}$, e $\frac{n}{n'}$, sería necessario para que a fracção $\frac{k}{k'}$ fosse mais proxima de x do que qualquer das duas convergentes, que ella caisse entre estas, e fosse por conseguinte mais composta. Logo *qualquer das convergentes é mais proxima de* x *que outra qualquer fracção com termos mais simples.*

Componhamos com as convergentes $\frac{m}{m'}$ e $\frac{n}{n'}$ as duas fracções

$$\frac{h}{h'}=\frac{m+(t-1)n}{m'+(t-1)n'},\ \frac{l}{l'}=\frac{m+tn}{m'+tn'},$$

designando por t os valores 1, 2, 3, ... até y, que é o inteiro contido na convergente. Teremos pela substituição successiva dos valores de t

$$\frac{m}{m'},\ \frac{m+n}{m'+n'},\ \frac{m+2n}{m'+2n'},\ldots\ldots,\ \frac{m+y'n}{m'+y'n'}=\frac{p}{p'}\ \ldots\ldots\ \text{(L)}$$

Porém, qualquer que seja o inteiro t, é

$$\frac{l}{l'}-\frac{h}{h'}=\frac{\pm 1}{h'l'}:$$

logo as fracções (L) são irreduziveis (1.°); approximão-se do valor de x mais do que outra qualquer menos composta; e, porque as suas differenças consecutivas tem o mesmo signal, estas fracções crescem desde a 1.ª até á última, sendo todas $<x$, se as extremas forem impares; no caso contrário, decrescem sendo todas $>x$; finalmente o erro δ de uma d'ellas $\frac{l}{l'}$ é $<\frac{1}{h'l'}$, por isso que x fica entre as duas fracções $\frac{l}{l'}$ e $\frac{h}{h'}$.

Podemos por conseguinte inserir entre as *convergentes principaes* (C) y^{i-1} fracções, que gozem das mesmas propriedades. Estas *convergentes intermedias* repartem-se em duas series: umas, que inseridas entre as principaes de ordem impar são ascendentes; outras que, ficando entre as principaes de ordem par, são descendentes para x. Formam-se sommando termo por termo, y' vezes successivas, as convergentes $\frac{m}{m'}$ e $\frac{n}{n'}$.

No exemplo do n.° 125 temos..... $x=2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4$

Convergentes principaes........... $\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{11}{4},\ \frac{25}{9},\ \frac{111}{40}.$

Das duas primeiras $\frac{2}{1}$ e $\frac{3}{1}$ deduzem-se as duas intermedias $\frac{5}{2}$ e $\frac{8}{3}$; a 3.ª coincidiria com a 3.ª convergente principal $\frac{11}{4}$. Das duas seguintes $\frac{11}{4}$ e $\frac{25}{9}$ resultariam $\frac{36}{13}$, $\frac{61}{22}$, $\frac{86}{31}$, $\frac{111}{40}$. Combinando agora a 2.ª com a 3.ª e a 4.ª com a 5.ª, obteriamos outra serie a qual não seria limitada. As series são

$$\left(\frac{2}{1}\right),\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \left(\frac{11}{4}\right),\ \frac{36}{13},\ \frac{61}{22},\ \frac{86}{31},\ <x=\left(\frac{111}{40}\right)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right),\ \frac{14}{5},\ \left(\frac{25}{9}\right),\ \frac{136}{49},\ \frac{247}{89},\ \frac{358}{129},\ \frac{469}{169}>x.$$

Podemos junctar a estas series de fracções $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$, das quaes a primeira sendo sempre mais pequena, e a segunda sempre maior do que qualquer quantidade, satisfazem ás mesmas condições que as convergentes.

Applicação ás Equações determinadas do 1.° gráo.

130. Para reduzir a fracção continua o valor de x na equação

$$Ax = B,$$

devemos, em conformidade do que dissemos no n.° 124, extrahir o inteiro y contido em $\frac{B}{A}$, pondo

$$x = \frac{B}{A} = y + \frac{R}{A} = y + \frac{1}{x'},$$

ou designando por y o quociente e por R o resto da divisão de B por A. Depois

$$x' = \frac{A}{R} = y' + \frac{R'}{R} = y' + \frac{1}{x''},$$

$$x'' = \frac{R}{R'} = y'' + \frac{R''}{R'} = y'' + \frac{1}{x'''},$$

$$x''' = \text{etc.}$$

Logo $x = y + \cfrac{1}{y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''' \text{ etc.}}}} = y, y', y'', y''', \ldots\ldots\ldots$

Como se vê n'esta operação, os termos da fracção continua são os quecientes successivos que se obtém pelo cálculo do divisor commum entre A e B. Esta fracção é sempre finita.

Para a equação

$$2645x = 9752$$

temos

$$9752 \left|\frac{2645}{3}\right|\frac{1817}{1}\left|\frac{838}{2}\right|\frac{161}{5}\left|\frac{23}{7}\right., \ x = \frac{424}{115} = 3\ ,\ 1,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 7.$$

Por meio das fórmulas (E) e (L) obteremos as seguintes convergentes principaes intermedias, a saber;

$$\left(\frac{0}{1}\right), \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \left(\frac{3}{1}\right), \frac{7}{2}, \left(\frac{11}{3}\right), \frac{70}{19}, \frac{129}{35}, \frac{188}{51}, \ldots\ldots\ldots < x = \frac{424}{115},$$

$$\left(\frac{0}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \frac{15}{4}, \frac{26}{7}, \frac{37}{10}, \frac{48}{13}, \left(\frac{59}{16}\right), \frac{483}{131}, \frac{907}{246}, \ldots < x.$$

A fracção $\frac{27}{7}$ tem um valor mais proximo de x que outra qualquer mais simples; o erro é menor que $\frac{1}{49}$.

Do mesmo modo se acha para $x = \frac{409}{119} = 3\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ 7$,

$$\left(\frac{3}{1}\right), \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \left(\frac{24}{7}\right), \frac{79}{23}, \frac{134}{39}, \ldots < x;\ \left(\frac{7}{2}\right), \frac{31}{9}, \left(\frac{55}{16}\right), \frac{464}{135} \ldots > x.$$

Estamos pois em estado de resolver a seguinte questão: *Dada uma fracção, achar outra mais simples, cujo valor se approxime d'ella mais do que outra qualquer fracção menos composta que ellas.*

131. Façamos algumas applicações d'esta doutrina.

I. *A razão da circumferencia para o diametro* é representada, como já achámos, por

$$\pi = 3,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6 \ldots\ldots;$$

e a fracção contínua equivalente á parte decimal dá (veja-se *Compl. d'Algebra de* Lacroix, p. 289. 6.ª edição)

$$\pi = 3\ ,\ 7,\ 15\ ,\ 1\ ,\ 292\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ 14 \ldots\ldots$$

d'onde se deduzem as convergentes principaes e intermedias, das quaes fazem parte as razões determinadas por Archimedes e Adriano Metius:

$$\left(\frac{3}{1}\right), \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{133}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \left(\frac{333}{106}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots < \pi$$

$$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \left(\frac{22}{7}\right), \frac{355}{113}, \left(\frac{104348}{32215}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots > \pi$$

II. *O anno solar tropico*, ou o tempo que o sol gasta em voltar ao mesmo equinocio é de 365^d, 2422181, (Veja-se *Astron. pratique* pag. 88). Dando ao anno civil sómente 365 dias, o equinocio, ao fim de quatro annos, voltaria quasi um dia mais tarde, de sorte que para o ajustar com a verdadeira data, sería necessario dar 366 dias ao 4.° anno, que se chama *bissexto;* e foi isto, que Julio Cesar ordenou no seu *Calendario Juliano*, suppondo o anno de $365^d \frac{1}{4}$. Esta supposição porém não é ainda exacta, porque produz um erro contrário, fazendo anticipar o anno civil ao anno solar. Este erro foi em parte remediado no *Calendario Gregoriano*, no qual se manda supprimir tres bissextos seculares sobre quatro, i. é, intercalar 97 dias em 400 annos. A fim de apreciar este systema, tractemos pela nossa theoria a fracção $\frac{2422181}{1000000}$, da qual, convertida em fracção contínua, se deduz

$$x = 0, 4, 7, 1, 3, 1, 1, 2.$$

e as convergentes $\ldots\ldots\ldots \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{39}{161}, \frac{70}{289} \ldots\ldots\ldots$

Tomemos, por ex.°, a fracção $\frac{8}{33}$, i é, supponhamos o anno solar de $365^d \frac{8}{33}$. Para ajustar o anno civil com este periodo sería necessario intercalar 8 dias em 33 annos, dando de 4 em 4 annos mais um dia ao anno civil, collocando porém o 8.° bissexto no fim de cinco annos. Começar-se-hia depois um novo periodo de 33 annos. Era este o systema dos antigos Persas.

Cumpre notar, que não se achando a fracção $\frac{97}{400}$ entre as convergentes poder-se-hia ter adoptado outra intercalação mais approximada do que a adoptada no Calendario Gregoriano. O erro porém que d'ahi resulta é de pequena importancia. (Veja-se a *Uranographie*).

III. O mez lunar synodico é de $29^d,5305887$; o mez solar é de $30^d,4368535$; a razão x d'estes numeros convertida em fracção continua, dá as convergentes

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{34}{43}\right), \frac{101}{98}, \frac{168}{163}, \ldots < x; \left(\frac{33}{32}\right), \left(\frac{67}{65}\right), \frac{235}{228} \ldots > x.$$

Se considerarmos por ex.° $\frac{235}{228}$ como valor de x, é o mesmo que suppor que 235 mezes lunares correspondem a 228, ou 19 vezes 12 mezes solares; é pois necessario em 19 annos intercalar mais 7 mezes lunares, para que o sol e a lua venham a achar-se nas mesmas posições relativas. Posto isto, se formassemos 19 taboas indicando as datas das phases lunares, estas taboas annunciariam a sua volta durante todos os periodos de 19 annos, tomando estas taboas na sua ordem de successão. Foi isto o que practicou Methon entre os Gregos, cujo calendario era luni-solar, e que chamavam este periodo *cyclo-solar*, e *aureo numero* aquelle que designava qual dos 19 calendarios se devia empregar em cada um dos annos.

Applicações ás Equações indeterminadas do primeiro grão.

132. Já vimos (*Alg. El.* n.° 126) que basta conhecer uma solução $x=\alpha$, $y=6$, em numeros inteiros, da equação

$$ax+by=c, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

para concluir qualquer outra. Os valores de x e y

$$x=\alpha+bt, \quad y=6-at,$$

fórmam equidifferenças, cuja razão é b para x, e $-a$ para y.

A theoria das fracções continuas offerece-nos um meio muito simples de achar os numeros α e 6, como passâmos a ver.

Resolva-se $\frac{a}{b}$ em convergentes, e seja $\frac{p}{p'}$ a penultima, que precede a fracção proposta. Viu-se ((F) n.° 127) que

$$ap' - bp = \pm 1 \text{; d'onde } ap'c - bpc = \pm c, \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

devendo empregar-se os signaes $+$ ou $-$, conforme a fracção continua, tomada na sua totalidade, *tiver um numero par ou impar de termos.*

As equações (b) mostram que (a) fica satisfeita, tomando, no caso de ter logar

o signal superior,.................. $\alpha = p'c$, $\quad \beta = -pc$;

o signal inferior,.................. $\alpha = -p'c$, $\quad \beta = pc$.

Logo para obter em numeros inteiros a solução da equação (a): *resolva-se* $\frac{a}{b}$ *em fracção continua; procure-se a convergente* $\frac{p}{p'}$ *que precede aquella fracção; forme-se com estes dados a equação* $ap' - pb = \pm 1$; *depois multiplique-se esta por* c; *e compare-se o resultado termo a termo com a proposta* (a).

Seja por ex.° a equação $\quad 105x - 43y = 17.$

O methodo do divisor commum dá

105	43	19	5	4	1
	2	2	3	1	4
22	9	4	1	1	

$$\frac{105}{43} = 2, 2, 3, 1, 4; \quad \frac{22}{9} = 2, 2, 3, 1.$$

A última fracção obtem-se supprimindo o termo 4, e empregando o processo exposto na *Arith.* n.° 30.

Das duas fracções $\frac{105}{43}$, $\frac{22}{9}$, deduz-se, attendendo a que a fracção continua tem 5 termos,

$$105 \cdot 9 - 43 \cdot 12 = -1:$$

multiplicando ambos os membros d'esta equação por -17, vem

$$43 \cdot 22 \cdot 17 - 105 \cdot 9 \cdot 17 = 17;$$

e comparando com a proposta acha-se $\alpha = -9 \cdot 17$, $\beta = 22 \cdot 17$, e por conseguinte

$$x = -153 + 43t\,;\ y = -374 + 105t.$$

Podem tambem servir de exercicio d'esta applicação os exemplos citados a pag. 202 da P. I.

O problema de Chronologia, em que se pede o anno x, cujo *cyclo solar é* c, *e o aureo numero é* n, reduz-se a procurar um inteiro x, que dividido por 28 e 19 dê os restos $c-9$ e $n-1$. O processo do n.° 129 da *Alg. El.* dá o seguinte valor

$$x = 56\,(c-n) + c + 75 + 532t.$$

É pois ao cabo de 532 annos que os mesmos numeros c e n voltam ambos periodicamente: esta duração tem o nome de *periodo dyonisiano* (Veja-se a *Uranographie*).

Querendo além disto, que o numero x tenha de mais a *indicção* i, isto é, que x dividido por 15 dê o resto $i-3$, teremos o *periodo juliano* de 7980 annos imaginado por Scaligero; e acharemos

$$x = 4845c + 4200n - 1064i + 3267 + 7980t.$$

Applicação ás equações do segundo gráo.

133. Quando ou todos, ou os últimos termos de uma fracção contínua voltam successivamente na mesma ordem, *a fracção contínua* diz-se *periodica.* É *periodica simples* quando o periodo começa logo no primeiro termo da fracção; é *periodica mixta*, quando assim não começa.

A respeito das fracções contínuas periodicas há dous theoremas importantes, que estão ligados com as equações do 2.° gráo, e que passâmos a demonstrar.

134. THEOREMA I. *Toda a fracção periodica contínua é uma das raizes de uma equação do 2.° gráo, de coefficientes racionaes.*

1.° Supponhamos que a fracção contínua é *simples*, e que os seus termos tem a seguinte disposição.

$$a, b, \ldots\ldots n, a, b, \ldots\ldots n, a, b \ldots\ldots n \ldots\ldots$$

Designando por x o valor d'esta fracção contínua, vamos demonstrar que será

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{x}}}}$$

isto é, que sendo x_{i-1} e x_i duas reduzidas, das quaes a segunda tem um periodo mais que a primeira, ou

$$x_i = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{x_{i-1}}}}}$$

a differença $x_i - x_{i-1}$ tenderá indefidamente para o limite 0, quando x_i tender para o limite x.

Para isso, seja $\frac{r}{r'}$ o valor de uma reduzida, composta de um certo numero de termos; e $\frac{p}{p'}$ e $\frac{q}{q'}$ as duas convergentes, que immediatamente a precedem: será

$$\frac{r}{r'} = \frac{qn+p}{q'n+p'}.$$

Ora se representarmos por k o valor de um periodo, obteremos o valor da reduzida $\frac{v}{v'}$, que contém um periodo mais, mudando n em $n + \frac{1}{k}$ na expressão de $\frac{r}{r'}$, o que dará

$$\frac{v}{v'}=\frac{q\left(n+\frac{1}{k}\right)+p}{q'\left(n+\frac{1}{k}\right)+p'}=\frac{rk+q}{r'k+q'};$$

e por conseguinte

$$\frac{v}{v'}-\frac{r}{r'}=\frac{qr'-rq'}{r'(r'k+q')}=\frac{\pm 1}{r'(r'k+q')}:$$

d'onde se conclue, que estas duas reduzidas $\frac{r}{r'}$ e $\frac{v}{v'}$ tendem a tornar-se eguaes, á medida que o numero dos periodos que as compõe tende a tornar-se maior que qualquer grandeza assignavel. Assim se designarmos uma d'ellas por x_i, o a outra por x_{i-1}, teremos $x_i=x_{i-1}+\delta$, sendo δ uma variavel, que vae diminuindo até zero. Poderemos por tanto escrever

$$x_i=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x_i-\delta}}}}.$$

Mas, como podemos approximar x_i quanto quizermos do valor x da fracção continua proposta, tomando um numero tam grande como quizermos; e como então δ vae continuamente decrescendo para o seu limite zero: vê-se (*Alg. El.* n.° 120), que é verdadeira n'este caso a equação (a).

Posto isto, e designando por $\frac{n}{n'}$ a reduzida que dá o valor do periodo; e por $\frac{m}{m'}$ a convergente que immediatamente a precede; teremos (n.° 128)

$$x=\frac{nx+m}{n'x+m'},$$

ou

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; n'x^2+(m'-n)x-m=0;$$

por onde se vê, que o valor de uma fracção contínua periodica *simples* é raiz de uma equação do 2.° grão de coefficientes commensuraveis.

Como n'esta equação há uma permanencia e uma variação, uma das raizes é positiva e a outra é negativa (n.° 76); e por isso deve a última rejeitar-se, e a primeira será o valor da fracção contínua total. Por ex.°, na fracção contínua periodica *simples*

$$x=3,\,1,\,2,\,3,\,1,\,2,\,3,\,1,\,2,\,\ldots\ldots\ldots$$

formando as reduzidas successivas, vem

$$\frac{1}{0},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{11}{3};$$

e por conseguinte será

$$\frac{11x+4}{3x+1}=x,\text{ ou } x=\frac{5+\sqrt{37}}{3}.$$

2.° Supponhamos agora, que a fracção contínua é periodica *mixta* e que seus termos tem a seguinte disposição:

$$p,\,q,\ldots\ldots\ldots v,\,a,\,b,\,\ldots\ldots\,n,\,a,\,b\,\ldots\ldots\,n,\ldots\ldots$$

Seja y o valor total da fracção contínua; e x o da sua parte periodica, teremos

$$y = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{v + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Designando pois por $\frac{v}{v'}$ a reduzida, que dá o valor da parte não periodica, e por $\frac{u}{u'}$ a convergente, que a precede, será

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y = \frac{vx+u}{v'x+u'};$$

mas, segundo se acaba de mostrar (1.°), é

$$x = \frac{nx+m}{n'x+m'}:$$

logo, eliminando x entre estas duas últimas equações, virá uma equação do 2.° gráo em y, com coefficientes racionaes; o que completa a demonstração d'este 1.° theorema.

Se ambas as raízes da equação forem positivas, para distinguir qual dos valores de y é aquelle, que dá o valor da fracção contínua periodica mixta, calcular-se-ha primeiro a raiz positiva da equação (b), e será este o valor, que deve substituir-se por x na equação (c).

135. THEOREMA II. Reciprocamente, *as raizes incommensuraveis de uma equação do 2.° gráo com coefficientes racionaes, são expressas por fracções contínuas periodicas.*

1.° Consideremos em primeiro logar a equação do 2.° gráo da fórma

$$(d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ax^2 + bx - c = 0,$$

cujas raizes tem signaes contrários, e cujos coefficientes a e c são numeros inteiros positivos, e b um inteiro positivo ou negativo.

Limitemos-nos, por hora, á raiz positiva d'esta equação, cuja expressão é

$$(e) \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{n}}{2a},$$

pondo $n = b^2 + 4ac$.

Para desenvolver esta raiz em fracção contínua, procurar-se-ha em primeiro logar o maior inteiro n'ella contido, e representando-o por α, far-se-há

$$x = \alpha + \frac{1}{x'};$$

e depois tractar-se-ha de achar o inteiro contido em x'. Ora sendo $\alpha + \frac{1}{x'}$ uma das raizes da equação (d), a substituição d'esta quantidade, em logar de x, deverá satisfazer á mesma equação, dando

$$a\left(\alpha + \frac{1}{x'}\right)^2 + \quad b\left(\alpha + \frac{1}{x'}\right) - c = 0,$$

donde se tira

$$(f) \ldots\ldots\ldots \quad (a\alpha^2 + b\alpha - c)\, x'^2 + (2a\alpha + b)\, x' + a = 0.$$

Se substituissemos as duas raizes d'esta equação na relação $x = \alpha + \frac{1}{x'}$, obteriamos as duas raizes da proposta (d); mas como estas raizes tem signaes contrarios, é forçoso que sejam tambem contrarios os signaes dos valores de x', raizes da equação (f).

Desembaraçando em (f) x'^2 do seu coefficiente, o último termo da transformada $\dfrac{a}{a\alpha^2+b\alpha-c}$ será por conseguinte negativo; e como a é positivo, vê-se que deve ser $a\alpha^2+b\alpha-c$ um inteiro negativo.

Façamos pois

$$a\alpha^2+b\alpha-c=-a',\quad 2a\alpha+b=-b',$$

sendo a' um inteiro positivo, e b' um inteiro positivo ou negativo. A equação (f) tornar-se-ha

$$(g)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a'x'^2+b'x'-a=0,$$

cuja raiz positiva é

$$x'=\frac{-b'+\sqrt{b'^2+4aa'}}{2a'}=\frac{-b'+\sqrt{n}}{2a'},$$

por ser

$$b'^2+4aa'=(2a\alpha+b)^2-4a(a\alpha^2+b\alpha-c)=b^2+4ac=n.$$

Designemos por α' o maior inteiro contido no valor de x', e façamos

$$x'=\alpha'+\frac{1}{x''}.$$

Para determinar x'', substituamos este valor de x' em (g), o que nos dará uma nova equação, que facilmente se reduzirá á fórma

$$a''x''^2+b''x''-a'=0.$$

Esta equação terá tambem as suas duas raizes de signaes contrarios; e os seus coefficientes a'' e b'' serão ligados pela relação

$$b''^2 + 4a'a'' = b'^2 + 4aa' = n,$$

que se obtém, como a analoga entre os coefficientes de (d).

Proseguindo por este theor, obteremos successivamente uma serie d'equações da fórma

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

$$a'x'^2 + b'x' - a = 0,$$

$$a''x''^2 + b'x'' - a' = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i - a_{i-1} = 0,$$

cujos coefficientes são numeros inteiros ligados pelas relações

$$(h)\dots\dots\dots\dots \begin{cases} b^2 + 4ac = n, \\ b'^2 + 4aa' = n, \\ b''^2 + 4a'a'' = n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_i^2 + 4a_{i-1}a_i = n; \end{cases}$$

e a raiz positiva x da equação (d) terá por expressão

$$x = \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \dots\dots\dots\dots\dots;$$

sendo $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots\dots\dots$ os maiores inteiros contidos nos valores de $x, x', x'', \dots\dots\dots$

Para fazer ver que esta fracção contínua é periodica, basta provar que uma das transformadas é identica com uma das precedentes, por isso que então as duas equações terão as mesmas raizes.

Ora das relações (h) resulta que os coefficientes a, a', a'', ... são menores que $\frac{n}{4}$; e que os valores absolutos (positivos ou negativos) de b, b', b'', ... são menores que $\sqrt{n}$: por conseguinte, designando por h o maior inteiro contido em $\frac{n}{4}$, e por k o valor inteiro de $\sqrt{n}$, é facil mostrar que, passado, quando muito, um numero d'equações egual a $2hk$, a transformada seguinte terá necessariamente os seus dous primeiros coefficientes identicos com os dous primeiros de uma das equações precedentes. Com effeito, escrevendo cada um dos $2k$ numeros ± 1, ± 2, ± 3, ... $\pm k$ sucessivamente á direita dos h numeros $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots h$, vê-se que não é possivel formar com os dous coefficientes mais do que $2hk$ combinações differentes. Posto isto, é forçoso que os terceiros termos das duas equações sejam tambem eguaes; por que, sendo estas equações da fórma

$$a_i x_i^2 + b_i x_i - a_{i-1} = 0,$$

$$a_{i+p} x^2_{i+p} + b_{i+p} x_{i+p} - a_{i+p-1} = 0;$$

e sendo, por hypothese, $a_i = a_{i+p}$, $b_i = b_{i+p}$: das relações

$$n = b^2_i + 4a_{i-1} a_i = b^2_{i+p} + 4a_{i+p-1} a_{i+p},$$

deduz-se

$$a_{i-1} = a_{i+p-1}.$$

Logo as duas equações são identicas; e por conseguite a raiz positiva da equação (d) terá por expressão uma fracção contínua periodica.

Mudando x em $-x$ na proposta (d), vê-se que a sua raiz negativa, que corresponde á raiz positiva da transformada, goza da mesma propriedade.

2.° Consideremos agora uma equação do 2.° gráo em que as suas raizes são ambas positivas. Estas raizes devem ser deseguaes, por isso que as suppuzemos incommensuraveis; e, para maior precisão, distinguiremos os dous casos, em que a differença d'estas raizes é maior ou menor que a unidade.

a) No 1.° caso, as raizes da equação $ax^2 - bx + c = 0$ não podem ficar ambas comprehendidas entre os mesmos inteiros consecutivos. Chamando α e $\alpha + 1$ os dous inteiros consecutivos, entre os quaes fica comprehendida a raiz maior, a mais pequena será $< \alpha$; e por consequencia, se substituirmos x por $\alpha + \frac{1}{x'}$ na equação $ax^2 - bx + c = 0$, resultará uma nova equação em x', que terá uma das raizes positivas e maior que a unidade, e a outra negativa. Estas raizes, de signaes contrarios, serão expressas por fracções contínuas periodicas; e substituindo successivamente por x' cada um d'estes valores na expressão $\alpha + \frac{1}{x'}$ obteremos fracções contínuas tambem periodicas, que serão a expressão dos valores das raizes da proposta.

b) No 2.° caso, os valores das raizes da equação $ax^2 - bx + c = 0$, podem ficar ambos comprehendidos entre os inteiros consecutivos α e $\alpha + 1$; n'este caso a transformada em x' tem ambas as raizes positivas e maiores que a unidade Se as raizes d'esta transformada ainda ficarem comprehendidas entre dous inteiros consecutivos α' e $\alpha' + 1$, substituindo $\alpha' + \frac{1}{x''}$ por x', obteremos uma transformada em x'' cujas raizes serão ainda positivas. Continuando porém com o cálculo das transformadas successivas, ha-de forçosamente chegar-se a uma equação, cujas raizes não ficarão ambas comprehendidas entre os mesmos numeros consecutivos; aliás as raizes da proposta $ax^2 - bx + c = 0$ seriam eguaes, porque teriam por expressão a mesma fracção contínua. As raizes da transformada seguinte tendo raizes de signaes contrarios, serão expressas por fracções contínuas periodicas; e por conseguinte as raizes da proposta serão tambem expressas em fracções da mesma especie.

Se as raizes da proposta forem ambas negativas, mudando x em $-x$, virá uma transformada com ambas as raizes positivas, que é o caso que acabâmos de tractar.

Fica assim demonstrado com toda a generalidade o theorema proposto, que é devido a *Lagrange*; a demonstração porém que deu este illustre geometra é menos simples, que a precedente que *Mr. Gerono* publicou nos — *Nouvelles annales de Mathématiques. I* —

/3VI/ IV. METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS.

Decomposição das Fracções racionaes.

136. Se for dada uma equação da fórma

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots=0,$$

na qual os coefficientes A, B, C...., são constantes, e x uma quantidade variavel, susceptivel de passar por todos os valores, será

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ \text{etc.}$$

qualquer que seja o numero de termos da equação proposta.

Com effeito, devendo esta equação ter logar, qualquer que seja o valor de x: quando for $x=0$, será $A=0$, e

$$Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots=0.,$$

Dividindo esta última equação por x, virá

$$B+Cx+Dx^2+\ldots\ldots=0;$$

d'onde se deduz $B=0$, empregando o mesmo raciocinio pelo qual concluimos que era $A=0$. Continuando a raciocinar do mesmo modo, acharemos successivamente

$$C=0,\ D=0,\ \text{etc.}$$

Posto isto, supponhamos a existencia de duas funcções F e φ de x

identicas, isto é, de duas funcções, que apenas differem entre si pela maneira, por que se acham expressas algebricamente. Se por artificios analyticos conseguirmos desonvolver F e φ em ordem a x, de maneira que a equação $F = \varphi$ se torne em

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

deduziremos d'esta

$$(a - A) + (b - B)x + (c - C)x^2 + (d - D)x^3 + \ldots\ldots = 0.$$

e pelo theorema demonstrado,

$$a = A,\ b = B,\ c = C,\ d = D,\ \ldots\ldots$$

Sendo pois dada uma funcção F de x, a qual presumimos que póde ter um desnevolvimento designado φ, contendo coefficientes constantes, porém desconhecidos, A, B, C, ... podemos achar estes facilmente pelo processo seguinte.

1.° Escreveremos a identidade $F = \varphi$, designando F a funcção proposta, e φ o desenvolvimento presumido debaixo de uma fórma conveniente, e contendo os coefficientes desconhecidos A, B, C, ...

2.° Por cálculos appropriados transformaremos a equação $F = \varphi$ em outra ordenada segundo as potencias de x.

3.° Igualaremos entre si os termos affectos das mesmas potencias pe x.

4.° Finalmente procederemos á eliminação entre estas equações a fim de deduzir d'ellas os valores desconhecidos das constantes A, B, C, ...

Cumpre ainda advertir, que, se da eliminação indicada se deduzirem resultados absurdos, devemos concluir, que a funcção F não é susceptivel do desenvolvimente presumido φ.

Passemos a applicar este principio a differentes exemplos.

137. Sendo N o numerador, e D o denominador de uma fracção racional, é sempre possivel abaixar por meio da divisão o gráo do polynomio N em ordem a x até se tornar inferior ao de D; e conside-

rando por isso a fracção $\frac{N}{D}$ já reduzida a este estado, tractemos de decompol-a n'outras das quaes ella seja a somma.

Seja $D = P \times Q$, designando P e Q polynomios primos entre si dos gráos p e q, e supponhamos

$$\frac{N}{D} = \frac{Ax^{q-1} + Bx^{q-2} + \ldots + L}{Q} + \frac{A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots + L'}{P}.$$

A fim de reduzir ao mesmo denominador $D = P \times Q$, multiplicaremos $Ax^{q-1} + Bx^{q-2} + \ldots\ldots$ por P, e $A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots$ por Q; e obteremos assim productos do gráo $p + q - 1$, os quaes formarão um *polynomio completo* de um gráo inferior ao de D em uma unidade. Depois, como N é, quando muito, do mesmo gráo $p + q - 1$, comparando cada um dos termos do numerador N com os do mesmo gráo do numerador do 2.° membro, deduzir-se-hão $p + q$ equações entre os coefficientes desconhecidos A, A′, B, B′, ... cujo numero é evidentemente $p + q$, e como as incognitas A, B, ... L, A′, B′, ... L′ não sobem do 1.° gráo, facilmente se acharão os seus valores. Vê-se pois que não só a decomposição presumida é legitima, mas tambem que o cálculo nos fornece meios para obter os coefficientes desconhecidos.

Quando P e Q forem susceptiveis de se decomporem em factores primos, substituiremos cada uma das fracções do 2.° membro da equação de cima, por outras formadas por estes mesmos principios.

A regra para decompor uma fracção racional proposta reduz-se pois á seguinte:

Busquem-se os factores, primos entre si, do denominador da fracção proposta; eguale-se esta a uma serie d'outras fracções que tenham os mesmos factores por denominadores, e cujos numeradores sejam respectivamente de um gráo inferior em uma unidade. Feito isto, e reduzindo todas as fracções ao mesmo denominador D, *egualem-se entre si os coefficientes das mesmas potencias de* x, *e deduzam-se d'estas equações os coefficientes desconhecidos.*

Egualando D a zero a fim de o resolver em factores simples, podem dar-se os dous casos, ou de serem alguns eguaes, ou de serem todos os factores deseguaes. Examinemos separadamente estes dous casos.

1.° Caso. Se for

$$D=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots$$

poremos

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots,$$

e tractaremos de determinar A, B, C, ... pelo processo, que acaba de expôr-se.

Seja, por ex.°,

$$D=(x-a)(x-b)\text{, e } N=kx+l,$$

teremos $$\frac{kx+l}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b},$$

d'onde $$kx+l=A(x-b)+B(x-a)$$

$$=(A+B)\,x-Ab-Ba.$$

Por tanto $$k=A+B,\ -l=Ab+Ba;$$

e finalmente $$A=-\frac{ka+l}{b-a},\ B=\frac{kb+l}{b-a}.$$

Applicando estas fórmulas á fracção $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$, e advertindo, que a e b são as raizes 2 e -1 do seu denominador egualado a zero, e que é $k=-4$, e $l=2$, obteremos

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2}=\frac{-2}{x+1}-\frac{2}{x-2}.$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a(a+x)}+\frac{1}{2a(a-x)}.$$

Pondo

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x},$$

acharemos, applicando a regra,

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{2a^2(a+x)}+\frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

Se D tiver factores binomios imaginarios, ainda se póde applicar o mesmo methodo; é porém preferivel em muitos casos decompôr D em factores trinomios x^2+px+q, e a proposta em fracções da fórma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Assim para a fracção

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1},$$

acha-se $$C=\frac{3}{2},\ B=A=-\frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo para

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x-1}$$

acha-se $$-A=B=C=\frac{1}{3}.$$

2.° Caso. Se algum dos factores de D tiver a fórma $(x-a)^i$, o termo correspondente terá a fórma $\dfrac{Ax^{i-1}+Bx^{i-2}+\ldots}{(x-a)}$, e esta expressão tambem susceptivel de decomposição, poderá transformar-se na somma equivalente

$$\frac{A}{(x-a)^i}+\frac{B}{(x-a)^{i-1}}+\frac{C}{(x-a)^{i-2}}+\ldots\ldots+\frac{L}{x-a}.$$

Esta equivalencia verifica-se, reduzindo ao mesmo denominador a segunda expressão, e vendo que apparece um numerador com a fórma da primeira e com egual numero de constantes desconhecidas.

Assim pondo

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1},$$

vem

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}.$$

Do mesmo modo se achará

$$\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+x-1}.$$

Ainda que este processo é applicavel ao caso de serem imaginarios os factores eguaes do denominador, é com tudo preferivel reunil-os em factores reaes do 2.° grão, debaixo da fórma $(x^2+px+q)^i$, sendo então $Ax^{2i-1}+Bx^{2i-2}+\ldots.$ o numerador das fracções correspondentes; ou antes podemos tomar a somma equivalente

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^i}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{i-1}}+\ldots+\frac{Kx+L}{x^2+px+q}.$$

Por ex.°, fazendo

$$\frac{1}{(1+x)\,x^2\,(x^2+2)\,(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}+\frac{Hx+I}{x^2+1},$$

acharemos

$$A=\frac{1}{12},\ B=-C=\frac{1}{2},\ D=-E=\frac{1}{6},\ F=-G=\frac{1}{2},\ H=-I=\frac{1}{4}.$$

138. O uso frequente, que se faz da decomposição das fracções racionaes, torna muito util o methodo seguinte, por meio do qual se abreviam as operações.

1.° Caso. *Factores desiguaes.* Sejam $D=(x-a)\,S$, designando por S um producto de factores todos differentes de $(x-a)$. A derivada d'esta expressão é [n.° 31 (*)]

$$D'=S+(x-a)\,S'.$$

Posto isto, façamos

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{P}{S},\ \text{ou}\ N=AS+P\,(x-a);$$

e vejâmos a maneira de determinar a constante A, sendo desconhecido o polynomio P.

Se fizermos $x=a$, e designarmos por n e d' as quantidades em que se tornam N e D' em virtude d'esta hypothese, teremos $d'=S$, $n=AS$, e por conseguinte

$$A=\frac{n}{S}=\frac{n}{d'}$$

Logo, *para obter o numerador* A *da fracção componente de que* x — a *é denominador*, *tome-se a derivada* D' *de* D, *e faça-se* x = a *em* $\frac{N}{D'}$ (*).

Vê-se do mesmo modo, que sendo $D = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots.$ se obterão os numeradores de $\frac{B}{x-b}$, $\frac{C}{x-c}$, ... fazendo successivamente $x = b$, $x = c$, ... em $\frac{N}{D'}$.

Por ex.°

$$\frac{-5x^2-5x+6}{x^4-2x^3-x^2+2x} \text{ dá } \frac{N}{D'} = \frac{-5x^2-5x+6}{4x^3-6x^2-2x+2};$$

e como temos $D = (x-1)(x+1)(x-2)\,x$, se fizermos na última expressão $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 0$, virão os resultados 2, — 1, — 4 e 3, e a proposta tornar-se-ha em

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x}.$$

(*) Se o factor de D tiver a fórma $px+q$ em vez de $x-a$, a fracção componente é

$$\frac{A}{px+q} = \frac{1}{p}\,\frac{A}{x+\frac{q}{p}} = \frac{A'}{x+\frac{q}{p}}, \text{ fazendo } A = A'p.$$

Devemos pois fazer $x = -\frac{q}{p}$ em $\frac{N}{D'}$; mas para obter o numerador A da fracção é necessario multiplicar o resultado pelo coefficiente p de x. Por ex.° para

$$\frac{6+23x}{2-x-6x^2} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{3x+2}$$

deve substituir-se $x = \frac{1}{2}$ e $x = -\frac{2}{3}$ em $\frac{N}{D'} = \frac{6+23x}{-1-12x}$, e multiplicar depois os resultados por -2 e $+3$; d'onde resulta $A = 5$, $B = -4$.

Para a fracção $\frac{1}{z^6-1}$ temos $\frac{N}{D'}=\frac{1}{6z^5}$; mas (pag. 172)

$$z^6-1=(z+1)(z-1)(z^2-z+1)(z^2+z+1).$$

A respeito dos dous primeiros factores faz-se $z=\pm 1$ e resulta $\pm\frac{1}{6}$. O terceiro factor dá $z=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$, d'onde se tira

$$\frac{N}{D'}=\frac{2^5}{6(1\pm\sqrt{-3})^5}=\frac{32}{6(16\mp 16\sqrt{-3})}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{12},$$

sendo facil achar depois as duas fracções componentes, as quaes sommadas se reduzem á fracção unica $\frac{1}{6}\frac{z-2}{z^2-z+1}$. Finalmente o 4.° factor de D mostra, que basta mudar z em $-z$ n'este último resultado. Logo

$$\frac{1}{z^6-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}+\frac{z-2}{z^2-z+1}-\frac{z+2}{z^2+z+1}\right).$$

2.° Caso. *Factores eguaes.* Seja $D=(x-a)^i$. Mudando x em $a+h$ em N e D, e continuando a designar pelas letras pequenas as expressões designadas pelas letras grandes correspondentes, quando nellas se faz $x=a$: aquelles polynomios N e D tornar-se-hão (n.° 31)

$$\text{N em } n+n'h+\tfrac{1}{2}n''h^2+\tfrac{1}{6}n'''h^3+\ldots\ldots,\ \text{D em } h^i.$$

Dividindo o 1.° desinvolvimento pelo 2.°, e pondo $x-a$ por h, vem

$$\frac{N}{D}=\frac{n}{(x-a)^i}+\frac{n'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\frac{1}{2}n''}{(x-a)^{i-2}}+\ldots\ldots$$

Por este modo *a proposta decompõe-se em geral em* i *fracções, cujos numeradores são as expressões em que se tornam* N, N', $\frac{1}{2}$ N''. . . . *quando* *nellas se faz* $x = a$; *e cujos denominadores são* $(x-a)^i$, $(x-a)^{i-1}$, etc.

Assim em $\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}$, como as derivadas successivas do numerador são $6x-7$ e 6, fazendo $x=1$, obtem-se 2, -1 e 3 para numeradores das fracções componentes, isto é,

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}$$

Se o denominador tiver outros factores além de $(x-a)$, isto é, se for $D=(x-a)S$, sendo S uma quantidade conhecida não divisivel por $(x-a)$, poremos

$$\frac{N}{D} = \frac{F}{(x-a)^i} + \frac{P}{S}, \text{ ou } N = P(x-a)^i + FS \ldots. (1)$$

Mudemos x em $a+y$ nesta equação identica, e desinvolvamol-a (n.° 31). Virá

$$n + n'y + \tfrac{1}{2}n''y^2 + \ldots = \begin{cases} y^i(p + p'y + \tfrac{1}{2}p''y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ + (f + f'y + \tfrac{1}{2}f''y^2 + \ldots)(s + s'y + \tfrac{1}{4}s''y^2 + \ldots), \end{cases}$$

e comparando de ambas as partes os coefficientes das mesmas potencias de y (n.° 136), acharemos

$$\left.\begin{array}{l} n = fs,\ n' = f's + fs',\ n'' = f''s + 2f's' + fs'', \ldots \\ n^{(l)} = sf^{(l)} + ls'f^{(l-1)} + \tfrac{1}{2}l(l_{-1})s''f^{(l-2)} + \ldots + fs^{(l)} \end{array}\right\}(2)$$

Por meio d'estas equações acharemos f, f', f'', ... e por conseguinte o desinvolvimento da 1.ª parte

$$\frac{F}{(x-a)^i}=\frac{f}{(x-a)^i}+\frac{f'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\frac{1}{2}f''}{(x-a)^{i-2}}+\ldots\ldots$$

precisamente como se a fracção proposta contivesse no denominador sómente $(x-a)^i$.

Esta equação dá

$$F=f+f'\times(x-a)+\tfrac{1}{2}f''\times(x-a)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

e pela equação (1) teremos

$$P=\frac{N-FS}{(x-a)^i}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Seja, por ex.°,

$$\frac{N}{D}=\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}.$$

Fazendo $x=1$ em $S=x^2+x$, em S', em S'', ... e em N, em N', em N'', ...; teremos

$$s=2,\ s'=3,\ s''=2,\ n=4,\ n'=4,\ n''=10,$$

e por conseguinte

$$4=2f,\ 4=2f'+3f,\ 10=2f''+6f'+2f;$$

e finalmente

$$f=2\,,\ f'=-1\,,\ \tfrac{1}{2}f''=3\,,\ \mathrm{F}=2-(x-1)+3\ (x-1)^2=3x^2-7x+6.$$

O producto FS, subtrahido de N, dá

$$2x^4-9x^3+15x^2-11x+3,$$

expressão, que dividida por $(x-1)^3$, dá $\mathrm{P}=2x-3$.

Resta agora unicamente decompôr pelo 1.° processo $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}=\frac{2x-3}{x^2+x}$.

Para isso, pondo $x=-1$ e $x=0$ em $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}'}=\frac{2x-3}{2x+1}$, obteremos os numeradores 5 e -3, e será finalmente

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x}.$$

Cumpre advertir, que neste ex.° seria mais breve começar por determinar as duas últimas fracções, fazendo $x=-1$ e $x=0$ em $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}'}$, e achariamos

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{\mathrm{F}}{(x-1)^3}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Transpondo estas duas últimas fracções, e reduzindo, acha-se

$$\frac{\mathrm{F}}{(x-1)^3}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3},$$

a qual, por ter eguaes os factores do denominador, facilmente se decompõe.

Do mesmo modo em

$$\frac{N}{D}=\frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6},$$

como $D=(x+1)^2(x-2)(x-3)$, faremos $x=2$ e $x=3$ em $\frac{N}{D'}$, e obteremos depois as fracções $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$, as quaes, subtrahidas da proposta, dão $\frac{F}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$. Esta se decomporá pelo processo acima indicado, e como $f=-1$, e $f'=1$, teremos por fim de tudo

$$\frac{N}{D}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}.$$

Sôbre a convergencia das Series.

139. Tendo de fazer applicação do methodo dos coefficientes indeterminados á desinvolução das funcções em series, é necessario dar previamente as regras necessarias para saber quando estas series podem representar o valor approximado das mesmas funcções, e que numero de termos das mesmas series é necessario approveitar para se obter um certo gráo de approximação.

Chamam-se series *convergentes* as que satisfazem á condição de convergir a somma dos seus termos cada vez mais para um limite, á medida que se toma um maior numero de termos: este limite chama-se tambem *somma* da serie. As series, que não satisfazem a esta condição, chamam-se *divergentes* por contraposição. Sómente nos é permittido tomar a somma dos n primeiros termos de uma serie pelo valor approximado da sua totalidade, quando esta serie for convergente. É facil conhecer, se os termos decrescem, quando se dá *o termo geral*, que é a expressão analytica do termo da ordem n: podem porém os termos decrescer sem que por isso se deva concluir, que a serie é convergente. Por exemplo, cahiriamos em erro suppondo convergente a serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\ldots\ldots$$

na qual o termo geral $\frac{1}{n}$ indica, que os termos convergem para zero, á medida que n cresce.

Para tornar o erro evidente, basta advertir, que, se a contar do termo n, sommarmos os n termos seguintes, teremos uma somma $>\frac{1}{2}$; com effeito esta somma é

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\ldots\ldots+\frac{1}{2n},$$

e, como os termos são decrescentes, será evidentemente $>\frac{1}{2n}\times n>\frac{1}{2}$.

Ora, se distribuirmos os termos da serie em grupos pela fórma seguinte

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots+\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}:$$

todas as sommas entre parenthesis serão, pelo que acabâmos de ver, $>\frac{1}{2}$; será pois a serie composta de infinitas partes todas $>\frac{1}{2}$, e por conseguinte a somma dos seus termos não terá limite.

140. Supponhamos convergente a serie

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\text{etc.};$$

e designemos por S_n a somma dos seus n primeiros termos, sendo assim

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots u_{n-1},$$

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots u_{n-1} + u_n,$$

$$S_{n+2} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots u_{n-1} + u_n + u_{n+1},$$

etc.

A definição da convergencia exige, que para um valor de n sufficientemente grande, as sommas S_n, S_{n+1}, S_{n+2} se approximem, quanto se quizer, de um certo limite S; d'onde se segue que as differenças entre estas sommas se poderão tornar tam pequenas, como se quizer, escolhendo u sufficientemente grande. Ora as differenças entre S_n e cada uma das sommas seguintes são respectivamente

$$S_{n+1} - S_n = u_n, \; S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$

$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \text{ etc.};$$

logo, limitando-nos por ora a attender sómente á differença $S_{n+1} - S_n$, podemos concluir que, se tomarmos n sufficientemente grande, todos os termos de u_n por diante deverão ser tam pequenos como se quizer.

Esta condição é simples e de facil verificação, mas já vimos no n.° antecedente que não é bastante; e como, o que acaba de dizer-se da differença $S_{n+1} - S_n$, se applica da mesma maneira ás differenças $S_{n+2} - S_n$, $S_{n+3} - S_n$, etc., podemos concluir como condições egualmente necessarias, que as sommas

$$u_n + u_{n+1}, \; u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \text{ etc.}$$

consideradas cada uma per si, e com qualquer numero de termos, se tornem tam pequenas como se quizer, para valores de n muito consideraveis. Com estas novas condições é certa a convergencia: por que então escolhendo n sufficientemente grande, differirão as sommas S_n, S_{n+1}, etc umas das outras tam pouco como se quizer, e por conseguinte ha um limite, de que ellas se approximarão quanto se quizer.

Appliquemos estes principios á serie

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots\ldots$$

cujo termo geral é ax^n. Tomando primeiramente só este termo, e sommando-o depois consecutivamente com os dous, tres, quatro, . . . seguintes, obteremos as expressões

$$ax^n, \quad ax^n + ax^{n+1} = ax^n\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right),$$

$$ax^n + ax^{n+1} + ax^{n+2} = ax^n\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right), \text{ etc.}$$

Onde se vê, que, sendo $x<1$, as sommas se tornam cada vez mais pequenas e tendem para zero, á medida que n augmenta; logo a serie satisfaz ás condições de convergencia quando x é <1.

Estes mesmos principios fazem ver, que a serie, de que tractámos no n.° precedente,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\frac{1}{n},$$

não satisfaz ás condições de convergencia, a pezar de que o termo geral $\frac{1}{n}$ vae decrescendo, ao passo que n augmenta.

141. Em geral é assaz difficultoso verificar todas as condições de convergencia: e por isso daremos em seguimento alguns theoremas, que abrangem casos bastante numerosos, em que se manifesta a convergencia.

THEOREMA I. *Dada a serie*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1},$$

na qual todos os termos, de certa ordem em diante, são todos positivos, e em que os valores de u *muito grandes fazem convergir a razão*

$$F = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

para um limite L: *será a serie convergente, ou divergente, conforme este limite* L *for* $<$*ou*$>$ 1,

Supponhamos primeiro $L < 1$, e tomemos um numero qualquer l intermedio entre L e 1, sendo $L < l < 1$. Por isso que F converge para L á medida que n augmenta, segue-se, que, passada uma ordem n sufficientemente grande, se approximará o factor F tanto quanto se quizer, de L, e se tornará por conseguinte $< l$. Logo será $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l$, ou

$$u_{n+1} < l u_n,\ u_{n+2} < l u_{n+1},\ u_{n+3} < l u_{n+2},\ \text{etc.}$$

e, *a fortiori*,

$$u_{n+1} < l u_n,\ u_{n+2} < l^2 u_n,\ u_{n+3} < l^3 u_n,\ \text{etc.}:$$

assim, os termos u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, etc. são respectivamente menores, que os da progressão geometrica $u_n\ (l + l^2 + l^3 + \text{etc.})$. Ora, por ser $l < 1$, a somma d'esta progressão decresce indefinidamente com u_n; logo com mais forte razão decresce indefinidamente $U - S_n$, e por isso é convergente a serie U.

Por um raciocinio similhante se prova, que sendo $L > 1$, serão os termos $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\ldots$ maiores que os de uma progressão geometrica $u_n\ (l + l^2 + l^3 + \text{etc.})$, cuja razão l sendo > 1, conduz a termos tam grandes como se quizer; e por conseguinte, para valores muito grandes de n, não poderão os termos da serie U differir de zero tam pouco como se quizer. Vê-se pois que neste caso é impossivel a convergencia da serie.

Applicando esta regra á serie do binomio $(x+a)^m$, segue-se do valor ((h) pag. 15), e da relação ((d) pag. 6), que é

$$F=\frac{m-n}{n+1}\cdot\frac{x}{a}.$$

Ora quanto mais n cresce, tanto mais se aproxima F do limite $\frac{x}{a}$, o qual elle toca quando é $n=\infty$. Donde concluiremos, que a fórmula do binomio será convergente ou divergente, conforme for $x <$ou$> a$.

As duas transformações seguintes são adaptadas para augmentar a convergencia d'esta serie

$$x+a=\frac{x}{1-\frac{a}{x+a}}=\frac{2a}{1-\frac{x-a}{x+a}};$$

$$(x+a)^m=x^m\left(1-\frac{a}{x+a}\right)^{-m}=2^m a^m\left(1-\frac{x-a}{x+a}\right)^{-m};$$

$$(x+a)^m=x^m\left\{1+m\left(\frac{a}{x+a}\right)+m\frac{m+1}{2}\left(\frac{a}{x+a}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$=2^m a^m\left\{1+m\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+m\frac{m+1}{2}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

Veja-se para a lei d'estes coefficientes a pag. 14.

Na serie

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

o termo geral $\dfrac{x^n}{1.2\ldots.n}$ dá $F=\dfrac{x}{n+1}$, cujo limite é zero quando $n=\infty$. Por conseguinte a serie é convergente.

142. THEOREMA II. *Na serie*

u

$$U=u_0+u_1+\cancel{v}_2+\ldots\ldots v_n+\text{etc.},$$

cujos termos são todos positivos, de certa ordem por diante: se, para valores de n *muito grandes, a raiz*

$$F=\sqrt[n]{u_n}$$

convergir para um limite L, *a serie será convergente ou divergente, conforme for* $L<$ *ou* >1.

Se os termos, de certa ordem por diante, em logar de positivos fossem negativos, o theorema teria logar a respeito de $-U$.

Supponhamos primeiro $L<1$, e tomemos tambem uma quantidade l comprehendida entre L e 1. Como, na conformidade do enunciado, se póde tomar n bastante grande, para que a raiz F se approxime de L quanto se quizer, e se torne por conseguinte $<l^n$, será

$$u_n<l^n,\ u_{n+1}<l^{n+1},\ u_{n+2}<l^{n+2},\ \text{etc.}$$

Logo os termos da serie $v_n+v_{n+1}+\text{etc.}$ serão menores que os da progressão geometrica $l^n+l^{n+1}+l^{n+2}+\text{etc.}$; e como esta progressão, por ser $l<1$, decresce indefinidamente, com mais razão decrescerá $U-S_n$; e por tanto a serie U será convergente.

Suppondo agora $L>1$, provar-se-ha por um raciocinio analogo ao precedente, attendendo a que é $l<L$, que a serie é divergente.

Cumpre advertir, que os dous theoremas, que se acabam de demonstrar, não admittem incerteza sôbre a convergencia da serie U, senão quando for $L=1$. Neste caso a questão é muitas vezes difficil de resolver. (*Nota* 3.ª).

143. THEOREMA III. *Se uma serie da forma*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n$$

tiver termos positivos e negativos, e se mudando estes para positivos, a nova serie for convergente, tambem a serie U será convergente.

Designemos por L a somma dos termos positivos da serie U, a contar de um termo qualquer v_n, e por l a dos termos negativos, sendo assim

$$L - l = v_n + v_{n+1} + \text{etc.},$$

Ora, visto que, tornando positivos todos os termos de serie U, esta é convergente, podemos tomar n bastante grande para que $L + l$ seja uma quantidade tam pequena como se quizer; logo, e com mais forte razão, o mesmo se dirá de $L - l$; e por conseguinte a serie U será convergente.

Assim na serie

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} - \text{etc.},$$

achâmos, tornando todos os termos positivos,

$$U_n = \frac{x^{2n-1}}{2.3..(2n-1)},\ U_{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{2.3..2n(2n+1)},\ F = \frac{x^2}{2n(2n+1)};$$

e como $n = \infty$ dá $F = 0$, a serie é convergente. Além d'isto, pondo $F < 1$, acha-se $x^2 < 4n^2 + 2n$; e por conseguinte tomando $4n^2 > x^2$, ou $n > \frac{1}{2}x$, vê-se que os termos decrescem da ordem $\frac{1}{2}x$ em diante.

144. THEOREMA IV. *Toda a serie da forma*

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \text{etc.} \ldots\ldots \pm v_n \mp \text{etc.}$$

cujos termos tem alternadamente os signaes + e —, é convergente, quando estes termos decrescem continuamente para o limite zero.

Consideremos um termo qualquer d'esta serie, cujos signaes são alternados, e designemol-o por $\pm a$, e os seguintes por $\mp b \pm c \pm$ etc. Se tomassemos a somma dos termos que precedem a pelo valor approximado da serie inteira, o erro δ seria

$$\delta = \pm a \mp b \pm c + \text{etc.},$$

expressão que se póde escrever debaixo das duas fórmas seguintes:

$$\delta = \pm[(a-b)+(c-d)+\text{etc.}],$$

$$\delta = \pm[a-(b-c)-(d-e)-\text{etc.}].$$

Como, por hypothese, os termos $a, b, c, \ldots$ vão decrescendo, todas as quantidades entre parenthesis são positivas: logo, pela 1.ª fórmula, vê-se que δ tem o mesmo signal que $\pm a$; e pela 2.ª, que o valor numerico de δ é $<a$. Ora, tomando um termo a assaz distante, será tam pequeno como se quizer; e por conseguinte o mesmo diremos, *a fortiori*, do erro δ. Logo a serie dada é convergente.

Assim a serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

é convergente, posto que o não seja quando todos os termos são positivos.

145. Quando uma serie é convergente, e sommâmos um certo numero dos seus termos para obter um valor approximado da serie inteira, convém muito obter um limite do erro. Quando a serie está no caso que considerámos no Theorema IV, acabâmos de ver, que o erro é sempre menor do que o 1.º termo dos que se desprezam. A única regra geral porém que, para os outros casos, se póde dar para obter este limite, consiste em comparar a serie assim como se fez nos Theoremas I e II, com uma progressão geometrica decrescente; e quando se tiver reconhecido, que, parando n'um certo termo, diminuem os termos seguintes da serie mais rapidamente que os correspondentes da progressão geometrica, poderemos concluir, que o erro é inferior á somma dos termos da progres-

são. Por ex.° na serie

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\ldots\frac{x^n}{1.2\ldots n},$$

no qual o termo em x^{n+1} se fórma multiplicando o precedente por x e dividindo-o por $n+1$: se tomarmos n tal, que seja $x<n+1$, teremos a certeza de que os termos da serie

$$\frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n}+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n(n+1)}+\text{etc.}$$

decrescerão mais rapidamente, que os de uma progressão geometrica, cujo 1.° termo fosse o mesmo que o d'esta serie, e a razão $\frac{x}{n+1}$. Logo se na serie proposta tomarmos por último o termo em x^{n-1}, o erro δ será menor que a somma d'esta progressão; e acharemos

$$\delta<\frac{(n+1)x^n}{1.2\ldots n(n+1-x)}.$$

Series Recurrentes.

146. Toda a fracção racional, ordenada segundo as potencias crescentes de x, cujo numerador N se reduziu a ser de um gráo menos elevado que o do denominador D, e á qual podemos sempre dar a fórma

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{a+bx+cx^2+\ldots\, hx^{i-i}}{1+\alpha x+\beta x^2+\ldots\,\theta x^i},$$

póde desenvolver-se por meio da divisão n'uma serie infinita são. Por ex., na serie

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots;$$

por isso que, do processo da divisão, não podem resultar para o quociente potencias negativas nem fraccionarias de x.

Em logar porém de determinarmos os coefficientes A, B, C, ... pela divisão, podemos usar com preferencia do methodo dos coefficientes indeterminados que põe em evidencia a lei d'estes coefficientes.

Consideremos primeiro a fracção

$$\frac{a}{1+\alpha x}:$$

e ponhamos

$$\frac{a}{1+\alpha x} = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

Multiplicando ambos os membros por $1+\alpha x$, vem

$$a = A + \left.\begin{matrix} B \\ +A\alpha \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} C \\ +B\alpha \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} D \\ +C\alpha \end{matrix}\right| \begin{matrix} x^3 + \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots \end{matrix}$$

d'onde resultam, comparando separadamente os termos em que entram potencias eguaes de x, as equações

$$a = A,\ B + A\alpha = 0,\ C + B\alpha = 0,\ \text{etc.}$$

que dão

$$A = a,\ B = -\alpha A,\ C = -\alpha B,\ \text{etc.}$$

Logo, se multiplicarmos um coefficiente qualquer por $-\alpha$ obteremos o seguinte; ou, por outras palavras, cada termo da serie é o producto do termo precedente por $-\alpha x$. N'este caso pois a serie é uma simples progressão geometrica.

Passemos agóra á fracção

$$\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}.$$

Pondo do mesmo modo

$$\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots,$$

e multiplicando ambos os membros por $1+\alpha x+\beta x^2$, acharemos

$$a+bx=A+\left.\begin{array}{l}B\\+A\alpha\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}C\\+B\alpha\\+A\beta\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}D\\+C\alpha\\+B\beta\end{array}\right|x^3+\begin{array}{l}\ldots\ldots\\+\ldots\ldots\\+\ldots\ldots\end{array}$$

e depois

$$A=a,\ B+A\alpha=b,\ C+B\alpha+A\beta=0,\ D+C\alpha+B\beta=0,\ \text{etc.}$$

d'onde se deduzem

$$A=a,\ B=b-A\alpha,\ C=-A\beta-B\alpha,\ D=-B\beta-C\alpha,\ldots$$

Logo, do 3.° termo em diante, cada coefficiente é a somma dos dous precedentes multiplicados respectivamente por $-\beta$ e $-\alpha$; ou cada termo da serié é a somma dos dous precedentes multiplicados respectivamente por $-\beta x^2$ e $-\alpha x$.

Se puzessemos ainda

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots\ldots,$$

veriamos pelo mesmo theor, que qualquer termo, do 4.° em diante, se compunha dos tres precedentes multiplicados respectivamente por $-\gamma x^3$, $-\beta x^2$, $-\alpha x$.

Por onde finalmente se póde concluir, que em geral uma fracção da fórma

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots\quad hx^{i-1}}{1+\alpha x+\beta x^2+\ldots\ldots+\iota x^{i-1}+\theta x^i},$$

deve gerar uma serie, cada termo da qual, do termo $i+1$ em diante, se comporá dos i precedentes multiplicados respectivamente por, $-\theta x^i$ $-\iota x^{i-1}$, $\ldots\ldots$ $-\beta x^2$, $-\alpha x$.

Chamam-se *Recurrentes* todas as series assim formadas; e *Eschala de relação* a reunião dos factores respectivos pelos quaes se devem multiplicar muitos termos consecutivos para se obter o termo seguinte. Por ex.°, os senos e cosenos d'arcos equidifferentes, e as sommas das potencias das raizes das equações formam series recurrentes.

147. *Dada a serie recurrente e a eschala de relação é facil achar a fracção generatriz.*

Com effeito, seja

$$S=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots$$

a serie dada, e supponhamos primeiro para fixar idêas, que a eschala de relação é $[px^3,\ qx^2,\ rx]$. Como esta eschala contém tres termso, a fracção generatriz será da fórma

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3},$$

cuja eschala de relação, segundo vimos, é $[-\gamma x^3, -\beta x^2, -\alpha x]$. Teremos pois, comparando,

$$\alpha=-r,\ \beta=-q,\ \gamma=-p;$$

e só restará determinar as quantidades a, b, c. Para isso poremos

$$\frac{a+bx+cx^2}{1-rx-qx^2-px^3}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\text{etc.},$$

d'onde resulta, attendendo sómente aos tres primeiros termos,

$$a+bx+cx^2=\mathrm{A}+\left.\begin{matrix}\mathrm{B}\\-\mathrm{A}r\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}\mathrm{C}\\-\mathrm{B}r\\-\mathrm{A}q\end{matrix}\right|x^2.$$

Comparando agora os coefficientes das differentes potencias de x, determinaremos a, b, c, e obteremos finalmente a fracção generatriz

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{A}+(\mathrm{B}-\mathrm{A}r)x+(\mathrm{C}-\mathrm{B}r-\mathrm{A}q)x^2}{1-rx-qx^2-px^3}.$$

Em geral, se designarmos por A_0, A_1, A_2, ... A_n os coefficientes successivos da serie recurrente, e por p_1, p_2, p_3 ...... p_n os coefficientes de x, x^2, x^3, ... na eschala de relação, será

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{A}_0+(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_0p_1)x+(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1p_1-\mathrm{A}_0p_2)x^2+..(\mathrm{A}_{n-1}-\mathrm{A}_{n-2}p_1-\mathrm{A}_{n-3}p_2..-\mathrm{A}_0p_{n-1})x^{n-1}}{1-p_1x-p_2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-p_nx^n}.$$

Por ex.º na serie

$$\mathrm{S}=1+x+2x^2+\tfrac{3}{2}x^3+\ldots\ldots$$

cuja eschala de relação é $[-\frac{1}{2}x^3, x^2, \frac{1}{2}x]$, temos 3/

$$\mathrm{A}_0=1,\ \mathrm{A}_1=1,\ \mathrm{A}_2=2,\ p_3=-\tfrac{1}{2},\ p_2=1,\ p_1=\tfrac{1}{2};$$

e por conseguinte será 2/

$$\mathrm{S}=\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3}.$$

148. *Para achar o termo geral* T, *isto é, o termo de serie recurrente, que tem* n *antes de si*, procuraremos decompor a fracção generatriz em fracções simples, cujos denominadores sejam os factores do 1.° gráo do denominador da fracção proposta.

Seja pois

$$A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

a serie recurrente, cuja eschala da relação é dada, e que tem por fracção generatriz

$$F=\frac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots+tx^{i-1}}{1+\alpha x+\beta x^2+\ldots\ldots\ldots\theta x^i}\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Mudando no denominador de (2) x em $\frac{1}{y}$, e egualando a zero, teremos de resolver a equação

$$y^i+\alpha y^{i-1}+6y^{i-2}+\ldots\ldots+\theta=0.$$

1.° Suppondo que são desiguaes as raizes $k, k', k'', \ldots\ldots k^{(i)}$ d'esta equação, teremos

$$y^i+\alpha y^{i-1}+6y^{i-2}-\ldots+\theta=(y-k)(y-k')(y-k'')\ldots(y-k^{(i)}),$$

podendo estas raizes ser reaes ou imaginarias, racionaes ou irracionaes, negativas ou zero. Repondo $\frac{1}{y}$ por x, virá

$$1+\alpha x+\beta x^2+\ldots+\theta x^i\ldots=(1-kx)(1-k'x)(1-k''x)\ldots(1-k^{(i)}x);$$

e por conseguinte teremos

$$F=\frac{K}{1-kx}+\frac{K'}{1-k'x}+\frac{K''}{1-k''x}+\ldots\frac{K^{(i)}}{1-kx^{(i)}}\ldots\ldots (3)$$

determinando os coefficientes K, K', ... $K^{(i)}$ pelo methodo de pag. 244.

Podendo cada uma d'estas i fracções componentes de F desinvolver-se n'uma progressão geometrica, a serie (1) será a somma, termo por termo, d'estas progressões; e por conseguinte o termo geral T será a somma dos seus termos geraes, ou

$$T = (Kk^n + K'k'^n + \ldots\ldots K^{(i)}k^{(i)^n})\, x^n \ldots\ldots\ldots (4).$$

Logo, *para achar o termo geral* T *da serie recurrente proposta, e decompor esta serie em progressões geometricas de que ella seja a somma, devemos: egualar a zero o denominador da fracção generatriz; mudar n'ella* x *em* $\frac{1}{y}$; *e buscar as raizes* k, k', k'', ... $k^{(i)}$ *da equação*

$$y^i + \alpha y^{i-1} + \beta y^{i-2} + \ldots\ldots \epsilon^i = 0.$$

Estas raizes, tomadas com signal contrário, serão os factores de x *nos denominadores das fracções componentes* (3); *e as razões das progressões serão* kx, k'x ..... $k^{(i)}x$. *Determinando por fim os numeradores* K, K', ... $K^{(i)}$ *teremos todos os elementos para calcular* T *pela fórmula* (4).

Applicando esta regra ao ex.° do n.° precedente, temos

$$\frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2}{1 - \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3} = \frac{2}{1 - x} + \frac{\frac{1}{3}}{1 + x} - \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2}x}.$$

Logo a serie $1 + x + 2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \ldots\ldots$, cuja eschala de relação é $[-\frac{1}{2}x^3, x^2, \frac{1}{2}x]$ tem por termo geral

$$T = \tfrac{1}{3}x^n (6 \pm 1 - (\tfrac{1}{2})^{n-2}).$$

2.° Se a equação

$$y^i + \alpha y^{i-1} + \beta y^{i-2} + \ldots\ldots \theta^i = 0,$$

tiver raizes eguaes, isto é, factores da fórma geral $(y-r)^l$, é necessario introduzir na equação (3), além das fracções correspondentes aos factores deseguaes, outras fracções da fórma (v. pag. 246)

$$\frac{L^{(1)}}{(1-rx)^l}+\frac{L^{(2)}}{(1-rx)^{l-1}}\ldots\ldots\frac{L^{(l-1)}}{(1-rx)^2}+\frac{L^{(l)}}{1-rx}\ldots\ldots(5)$$

Mas, pela fórmula do binomio, temos

$$L(1-rx)^{-l}=L\left(1+lrx+l\frac{l+1}{2}r^2x^2+l\frac{l+1}{2}\cdot\frac{l+2}{3}r^3x^3+\ldots\ldots\right),$$

cujo termo geral t é

$$t=L\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+l-1)}{1.2.3\ldots\ldots l-1}r^nx^n;\ldots\ldots(6)$$

logo para obter o termo geral T da somma de todas as fracções (5), devemos fazer successivamente $l=1$, $l=2$, $l=3$, ... e sommar; o que dá

$$T=\left\{L^{(l)}+L^{(l-1)}(n+1)+L^{(l-2)}(n+1)\frac{n+2}{2}+L^{(l-3)}(n+1)\frac{(n+2)}{2}\frac{(n+3)}{3}+.\right\}r^nx^n$$

Assim na serie recurrente

$$-1+\frac{7}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{49}{8}x^3+\frac{73}{16}x^4+\ldots\ldots,$$

cuja eschala de relação é $\left[\frac{1}{2}x^4,-\frac{3}{2}x^3,\frac{1}{2}x^2,\frac{3}{2}x\right]$.

temos

$$\frac{-1+5x-\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3}{1-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4}=\frac{-\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{4}{3}}{1+x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

e por conseguinte

$$T=\left(-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \mp \frac{4}{3}+n+2\right)x^n,$$

usando do signal $\mp$ conforme for n par ou impar.

149. Os factores constantes K, K′, ... $K^{(i)}$ podem obter-se sem recorrer á decomposição em fracções. Por quanto, sendo conhecidos os termos iniciaes $A+Bx+Cx^2+\ldots$ da serie (1), bem como as raizes k, k', ... $k^{(i)}$, se fizermos successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$, ... na expressão (4) de T, reproduzir-se-hão estes termos successivos, isto é

$$A=K+K'+\ldots K^{(i)},\ B=Kk+K'k'+\ldots K^{(i)}k^{(i)},\ C=Kk^2+K'k'^2+\ldots K^{(i)}k^{(i)2}\ldots$$

No caso das raizes k, k', ... serem deseguaes, podemos estabelecer por este modo i destas equações, que nos servirão para determinar i constantes k, k', ... , que n'ellas entram no 1.° grão.

E no caso de conter o denominador de F factores eguaes da fórma $(1-rx)^t$, existirão, além dos termos Kk^n, $K'k'^n$ . . correspondentes aos factores deseguaes, outros cuja somma se comprehende na equação (6) fazendo $t=1$, $t=2$, $t=3$, ...; e é evidente que estes ultimos termos se encerram na expressão

$$(a'+b'n+c'n^2+\ldots f'n^{t-1})r^nx^n,$$

sendo a', b', c', ... f' quantidades desconhecidas, que se podem obter pelo methodo precedente, formando tantas equações quantas são as indeterminadas.

Exemplos:

1.° Tornando ao exemplo dos dous n.^{os} precedentes, temos n'elles $k=1$, $k'=-1$, $k''=\frac{1}{2}$, e

$$T=[K(\tfrac{1}{2})^n+K'(-1)^n]\,x^n.$$

Fazendo $n=0$, $n=1$, $n=2$, e comparando com os termos respectivos da serie $1+x+2x^2\ldots$ vem as equações

$$K+K'+K''=1,\ K-K'+\tfrac{1}{2}K''=1,\ K+K'+\tfrac{1}{4}K''=2,$$

d'onde se deduz

$$K=2,\ K'=\frac{1}{3},\ K''=-\frac{4}{3},$$

que dá para T o valor achado precedentemente.

2.° A serie recurrente

$$3+6x+\frac{39}{4}x^2+\ldots\ldots,$$

cuja fracção generatriz é

$$\frac{6(2-2x-x^2)}{4-12x+9x^2-2x^3},$$

dá

$$0=y^3-3y^2+\tfrac{9}{4}y-\tfrac{1}{2}=(y-2)(y-\tfrac{1}{2})^2.$$

A fracção resultante do factor $y-2$ é $\dfrac{K}{1-2x}$, cujo termo geral é $K.2^n x^n$. As correspondentes a $(y-\frac{1}{2})^2$ dão

$$(a'+b'n)(\tfrac{1}{2}x)^n,$$

e por conseguinte

$$T = [2^n K + (\tfrac{1}{2})^n (a' + b'n)] x^n.$$

Fazendo $n = 0, 1, 2$, vem

$$3 = K + a',\ 6 = 2K + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}b',\ \tfrac{39}{4} = 4K + \tfrac{1}{4}a' + \tfrac{1}{2}b';$$

logo $K = 2$, $a' = 1$, $b' = 3$, $T = x^n \left(2^{n+1} + \dfrac{1+3n}{2^n}\right)$.

150. *Para achar a somma d'um determinado numero de termos consecutivos d'uma serie recurrente*, procederemos da seguinte maneira.

Supponhamos que a eschala de relação tem tres termos, que designaremos simplesmente pelas letras p, q, r; e sejam

$$A + B + C + D + \ldots\ldots + K + L + M + N$$

os termos da serie, cuja somma se pede.

Pela natureza da serie temos

$$D = Ap + Bq + Cr$$

$$E = Bp + Cq + Dr$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N = Kp + Lq + Mr.$$

Sommando estas equações vem

$$(D + E + \ldots N) = (A + B + \ldots K)p + (B + C + \ldots L)q + (C + D + \ldots M)r.$$

Designando pois por S a somma pedida, a equação precedente tornar-se-ha

$$S-A-B-C=(S-L-M-N)p+(S-A-M-N)q+(S-A-B-N)r;$$

d'onde se deduz facilmente

$$S=\frac{A+B+C-r(A+B+N)-q(A+M+N)-p(L+M+N).}{1-r-p-q.}$$

Se tivessemos, por ex.°, uma serie recurrente, cuja eschala de relação contivesse tres termos, e na qual sendo 1, 2, 3, os tres primeiros termos, fosse o 4.° egual ao dobro do 3.° mais a somma dos dous primeiros; o 5.° egual ao dobro do 4.° mais a somma do 3.° e do 2.°; e assim por diante: será o desinvolvimento d'esta serie

$$1, 2, 3, 9, 23, 58, 148, 377, 960, 2445, 6227, \ldots.$$

Para obter agora a somma dos onze primeiros termos, fariamos na fórmula de cima

$$A=1, B=2, C=3, p=1, q=1, r=2, N=6227, M=2445, L=960,$$

o que dará

$$S=\frac{6-2\times6230-8673-9632}{2}=10253.$$

151. Terminaremos a theoria das series recurrentes, expondo o methodo de Lagrange *para reconhecer se uma serie dada é recurrente.*

Seja a serie dada

$$S=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

Indaguemos se ella poderá provir d'uma fracção da fórma $\dfrac{a}{1+\alpha x}$, e ponhamos $S=\dfrac{a}{1+\alpha x}$. D'aqui resulta

$$\frac{1}{S}=\frac{1+\alpha x}{a}=\frac{1}{a}+\frac{\alpha}{a}x;$$

logo n'este caso o quociente de 1 pela serie S deverá ser exacto e da fórma $p+qx$; e a fracção generatriz será

$$S=\frac{1}{p+qx}.$$

Se a divisão não terminar no 2.° termo, a serie não será recurrente, ou provirá d'uma fracção mais complicada.

Ponhamos $S=\dfrac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}$; teremos

$$\frac{1}{S}=\frac{1+\alpha x+\beta x^2}{a+bx}=p+qx+\frac{a'x^2}{a+bx},$$

Logo se dividirmos 1 por S, e pararmos nos termos da fórma $p+qx$, o resto será divisivel por x^2. Designando por $S_1 x^2$ este resto, que será uma serie da fórma

$$A_1 x^2+B_1 x^3+C_1 x^4+\text{etc.},$$

teremos

$$\frac{1}{S}=px+qx+\frac{S_1x^2}{S}=p+qx+\frac{a'x^2}{a+bx},$$

d'onde se deduz

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a'}{a+bx}=p_1+q_1x:$$

isto é, deve a divisão terminar tambem no 2.° termo; e teremos, para achar a fracção generatriz, as duas equações

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S_1}{S}x^2,\ \frac{S}{S_1}=p_1+q_1x,$$

donde se tira

$$S=\frac{1}{p+qx+\cfrac{x^2}{p^1+q^1x^2}};$$

e por conseguinte a fracção generatriz será

$$S=\frac{p_1+q_1x}{(p+qx)(p_1+q_1x)+x^2}.$$

Supponhamos que o quociente de S por S_1 não é ainda p_1+q_1x: se a serie for recurrente, será d'uma ordem superior á segunda. Examinemos se poderá ser

$$S=\frac{a+bx+cx^2}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3},$$

d'onde se deduz

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}x^2.$$

N'este caso o quociente de 1 por S, passados os termos $p+qx$, deve dar no resto uma serie, cujos termos conterão todos x^2; e se designarmos este resto por S_1x^2, deveremos ter $\frac{S_1}{S}=\frac{a'+b'x}{a+bx+cx^2}$.

Esta egualdade dá

$$\frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{a''}{a'+b'x}x^2;$$

logo, designando por S_2x^2 a serie que apparece de resto depois dos termos p_1+q_1x, deveremos ter $\frac{S_2}{S_1}=\frac{a''}{a'+b'x}$.

D'esta última equação deduz-se

$$\frac{S_1}{S_2}=p_2+q_2x;$$

e como as operações devem terminar aqui, teremos para reverter á fracção generatriz, as equações

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S_1}{S}x^2,\ \frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{S_2}{S_1}x^2,\ \frac{S_1}{S_2}=p_2+q_2x,$$

d'onde se deduzem

$$S=\frac{1}{p+qx+\frac{S_1}{S}x^2},\ \frac{S_1}{S}=\frac{1}{p_1+q_1x+\frac{S_2}{S_1}x^2},\ \frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{p_2+q_2x}.$$

Feitas as substituições convenientes, forma-se com facilidade a fracção egual a S.

Vê-se pois, sem ser necessario progredir mais, que as operações successivas pelas quaes se acham os quocientes $p+qx$, p_1+q_1x, p_2+q_2x, etc., e se reverte depois para a fracção generatriz, tem uma analogia manifesta com as operações que indicámos para reduzir uma fracção ordinaria em fracção contínua, e para reverter depois á fracção ordinaria; e por isso as regras geraes que démos para estas soluções, se applicarão com facilidade á resolução da questão que nos occupa. Se a serie for recurrente, devemos chegar a uma divisão que dará um quociente exacto da fórma $p+qx$.

Supponhamos que se quer saber, se a serie dos numeros naturaes 1, 2, 3, etc. é, ou não, recurrente. Em vez desta serie numerica, ponhamos

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$$

Fazendo as operações acima indicadas, teremos:

Divisão de 1 *por* S.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \\
\underline{-1-2x-3x^2-4x^3-\text{etc.}} & \overline{1-2x} \\
\quad -2x^2-3x^2-4x^3-5x^4-\text{etc.} & \\
\quad \underline{+2x+4x^2+6x^3+8x^4+\text{etc.}} & \\
\qquad x^2+2x^3+3x^4+\text{etc.}=S_1x^2 &
\end{array}$$

Divisão de S *por* S_1.

$$\begin{array}{l|l}
1+2x+3x^2+4x^2+\text{etc.} & 1+2x+3x^3+4x^2+\text{etc.} \\
\underline{-1-3x-3x^2-4x^3-\text{etc.}} & \overline{\quad 1 \quad} \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Temos pois $\quad \dfrac{1}{S}=1-2x+\dfrac{S_1}{S}x^2,\ \dfrac{S_1}{S}=1:$

d'onde

$$S=\frac{1}{1-2x+\dfrac{S_1}{S}x^2},\ \frac{S_1}{S}=1;$$

e por conseguinte

$$S=\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Series exponenciaes e logarithmicas.

152. Passando agora a resolver em series as *funcções transcendentes*, começaremos pela *exponencial* a^x. Pondo $a = 1 + y$, temos, pela fórmula do binomio,

$$(1+y)^x = 1 + xy + x\frac{x-1}{2}y^2 + \ldots + x\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2\ .\ 3\ldots\ldots n}y^n \ldots$$

Como o único termo em que não entra x é 1, e todos os expoentes de x são inteiros e positivos, ésta serie, ordenada segundo as potencias ascendentes de x, será da fórma

$$a^x = 1 + kx + Ax^2 + Bx^3 \ldots + Pa^{n-1} + Qx^n \ldots \quad (1)$$

Para achar o termo kx é necessario recorrer ao termo geral. Ora é evidente que para tomar nelle o termo do producto em que x entre só no primeiro grão, só se devem conservar os segundos termos dos factores binomios, resultando assim o producto

$$\frac{x\times -1\times -2\times \ldots \times -(n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}y^n = \pm y^n\frac{x}{n},$$

usando do signal $+$ quando n for impar, e do signal $-$ quando for par. A reunião de todos estes productos é egual a kx, e por conseguinte será

$$k = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \ldots\ldots \pm \frac{y^n}{n}; \ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

e como $y = a - 1$, fica assim determinado o coefficiente k.

Para achar os outros coefficientes A, B, C, ... notaremos, que estas constantes não devem mudar de valor, quando x se tornar em z em (1), sendo por isso,

$$a^z = 1 + kz + Az^2 + Bz^3 + Cz^4 + \ldots + Qz^n \ldots$$

Subtrahindo d'esta a equação (1), e fazendo $z = x + i$, vem

$$a^z - a^x = a^x . a^i - a^x = a^x(a^i - 1) = (z - x)\,[k + A(z + x) + B(z^2 + zx + x^2) + Q(z^{n-1} + z^{n-2}x \ldots + x^{n-1}) \ldots]$$

Ora, como pela equação (1) é $a^i - 1 = ki + Ai^2 + \ldots$, ambos os membros da última equação são divisiveis por $i = z - x$; logo

$$a^x(k + Ai + \ldots) = k + A(z + x) + B(z^2 + zx + x^2) + \ldots.$$

Fazendo agora a arbitrária $i = 0$, ou $z = x$, e substituindo a^x pelo seu valor, dado na equação (1), acharemos

$$(1 + kx + Ax^2 + Bx^3 + \ldots Px^{n-1})\,k = k + 2Ax + 3Bx^2 + \ldots nQx^{n-1} \ldots;$$

d'onde se deduz

$$2A = k^2,\ 3B = kA,\ 4C = kB,\ \ldots\ nQ = kP \ldots$$

A última equação mostra; que *um coefficiente qualquer* Q *é igual ao producto do precedente, multiplicado por* k, *e dividido pelo numero* n *que indica a sua ordem.*

Substituindo os valores de A, B, C, ... vem finalmente

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{2.3} \ldots + \frac{k^nx^n}{2.3..n} \ldots \quad (A)$$

153. A equação (2) dá k em funcção de y, e por conseguinte em funcção tambem de a. Querendo porém, dado k, achar a, faremos $x=1$ em (A), e virá

$$a=1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

As series (2) e (3) são o desenvolvimento da equação, que exprime em termos finitos a ligação de a com k, a qual passâmos a determinar. Faça-se na serie (3) $k=1$, e designando por e o valor que toma então a base a, será

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots\ldots$$

Este numero é facil de calcular, como se vê em frente, por isso que cada um dos termos, pela natureza da serie, é egual ao precedente dividido successivamente por 3, 4, 5.. Mas por outra parte, sendo x uma quantidade arbitrária, podemos fazer $kx=1$ em (A), o que tornará o 2.° membro $=e$.

	2,5	
3.° termo	0,16666 .	66666 66
4.°	0,04166	66666 66
5.°	0,00833	33333 73
6.°	0,00138	88888 88
7.°	0,00019	84126 98
8.°	0,00002	48015 87
9.°	0,00000	27557 32
etc.	....	....
	$e=$ 2,71828	18284 59

Logo $a^{\frac{1}{k}}=e$, ou $e^k=a$.

Tal é a equação finita que liga k e a, e que mostra que k *é o logarithmo de* a, *tomado no systema de base* e. Prefere-se esta base e nos calculos algebricos, porque os torna mais simples, como teremos occasião de observar. Chamam-se *logarithmos neperianos* os que são tomados n'este systema. D'aqui por diante exprimiremos respectivamente pelos signaes l, *Log.*, *log.*, os logarithmos neperianos, os de qualquer base arbitraria b, e os de base 10.

Temos pois

$$k=la=\textit{logar. neperiano de } a\textit{, sendo a base } e \ldots\ (4)$$

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{2} l^2 a + \frac{x^3}{2.3} l^3 a + \frac{x^4}{2.3.4} l^4 a \ldots \quad (A')$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Tomando os log. dos dous membros da equação $a = e^k$, n'um systema de base qualquer arbitrária b, vem

$$\text{Log. } a = k \text{ Log. } e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

d'onde se deduz, por ser $a = 1 + y$, e pondo por k o seu valor (2),

$$\text{Log } (1 + y) = \text{Log } e \left(y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \ldots\right) \ldots\ldots \quad (C).$$

Junctando Log h a ambos os membros, e fazendo $hy = z$, sendo h e z numeros quaesquer, vem

$$\text{Log } (h + z) = \text{Log } h + \text{Log } e \left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2} + \frac{z^3}{3h^3} + \text{etc.}\right) \ldots \quad (D)$$

Querendo passar para os logarithmos neperianos, Log e muda-se em $le = 1$, por ser então e a base (*Alg. Elem.* n.° 154, 1.°); a equação (C) torna-se pois em

$$l(1 + y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{4} y^4 \ldots\ldots\ldots$$

e por conseguinte

$$\text{Log } (1 + y) = \text{Log } e \times l\,(1 + y).$$

Logo: *para passarmos dos logarithmos neperianos para os logarithmos tomados n'um systema de base* b, *multiplicaremos os primeiros por* Log e (*Alg. Elem.* n.° 156). Este factor Log $e = \mathrm{M}$, constante para cada systema, é o que se chama MODULO, e vem a ser *o log. da base neperiana tomado n'um systema* b, ou para melhor dizer, *a unidade dividida pelo log. neperiano da base* b. Para cada systema o modulo M tem um valor particular, porque tendo e o valor constante $= 2{,}71828\ldots$, o log. deste numero só variará com a base *b*.

Tomando *a* por base, a equação (5) torna-se em

$$k \text{ Log } e = 1,$$

que dá

$$\mathrm{M}k = 1, \ \mathrm{M} = \text{Log } e, \ \mathrm{M} = \frac{1}{k} = \frac{1}{la} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Os dous factores M e k variam com a base do systema; mas tem um producto constante $= 1$. Adiante veremos a maneira de calcular o modulo M para qualquer base *a*. (*Nota* 4.ª)

154. Para applicarmos a equação (C) ao calculo do log. de um numero, é necessario tornar a serie convergente. A equação (C) dá pela mudança de y em $-y$,

$$\text{Log}\,(1-y) = -\mathrm{M}\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \ldots\right);$$

subtraindo esta expressão de (C), resulta

$$\text{Log}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\,\mathrm{M}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 \ldots\right) \ldots (\mathrm{E}).$$

Supponhamos $\qquad \dfrac{1+y}{1-y} = \dfrac{z}{z-1}$, ou $y = \dfrac{1}{2z-1}$.

O primeiro membro torna-se em $\Delta = \text{Log } z - \text{Log}\,(z-1)$, i. é, na differença dos log. consecutivos de z e $z-1$. Logo

$$\Delta = 2M\left[\frac{1}{2z-1}+\frac{1}{3(2z-1)^3}+\frac{1}{5(2z-1)^5}\cdots\right]\cdots(F)$$

Conhecido o modulo M, facilmente se calculam, e seguidamente, os log. dos numeros inteiros 2, 3, 4, 5, ..., por isso que este valor da differença Δ entre estes log. é muito convergente, e o vae sendo cada vez mais á medida que z vai crescendo.

Se os logarithmos, que se tracta de formar, forem os neperianos, M ou Log. e se tornam em $le=1$, e então muito facilmente se calcula Δ, e se póde compôr uma taboa de log. neperianos

Em quanto ao valor de M expresso pela equação (5), deduz-se do calculo de $l\ a$, ou *do log. neperiano da base* a.

Se for, por ex.°, $a=10$: faremos na equação (F), $M=1$, depois $z=2$; teremos $\Delta=l2$ (por ser $l1=0$); o dobro de $l2$ é $l4$: depois $z=5$ dará $l5$, e obteremos por fim $l10$. Faz-se o cálculo segundo o typo em frente. Divide-se depois 1 por $l10$: e acha-se por esta fórma

$$\begin{array}{rr}
 & l2 = 0,69314\ 718056 \\
 & l4 = 1,38629\ 436112 \\
\Delta \text{ para } z=5\,.. & 0,22314\ 355131 \\
 & l5 = 1,60943\ 791243 \\
 & l2 = 0,69314\ 718056 \\
 & l10 = 2,30258\ 509298
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
M &= 0.43429\ 48319\ 03251\ 82765, \\
\log. M &= \bar{1},63778\ 43113\ 00536\ 77817 \\
\text{Compl.} &= 0,36221\ 56886\ 99463\ 22183 \\
e &= 2,71828\ 18284\ 59045\ 25536.
\end{aligned}$$

Se 3 fosse a base do systema, obtido o valor de $l2$, far-se-hia $z=3$, e viria $l4=1,09861229$; finalmente

$$M = 1 : l3 = 0,9102392.$$

Identicamente para a base 5

$$M = 1 : l5 = 0,6213349.$$

Depois do que temos expendido, torna-se facil a formação da taboa dos log. de Briggs e Callet. A base é $a=10$; o valor de M augmenta a convergencia da serie (F); quando z passa de 100, póde desprezar-se o segundo termo, e o primeiro é sufficiente para dar Δ com 8 decimaes. É necessario porém calcular ainda mais 2 ou 3 algarismos, além d'aquelles que se pertende conservar, a fim de evitar a accumulação dos erros; e é conveniente tambem o começar a calcular desde $z=10000$, por isso que os log. inferiores facilmente se deduzem dos outros. Logo que z excede 1200 podemos desprezar 1 em comparação de $2z$, e suppôr $\Delta = \frac{M}{z}$.

Por exemplo, $z = 10001$ dá $\Delta=0,000043425$; e por conseguinte $\log 10001=4,000043425$. Se for $z=99857$, teremos $\Delta=0,000004349$, quantidade que é necessario ajunctar ao $\log 99856=4,9993742$, para ter

$$\log 99857 = 4,9993785.$$

Deve notar-se mais que os log. consecutivos tem uma differença constante em uma certa extensão da taboa (*Arith.* p. 119), e por conseguinte basta calcular Δ de certa em certa distancia. Póde ver-se que de $z = 99840$ e $z = 99860$ resulta o mesmo numero Δ que acima achámos, e por conseguinte no intervallo d'estes dous numeros z, Δ é constante se nos limitarmos a 9 letras de dizima.

A serie (E) é pouco convergente para os numeros pequenos 2, 3, 5... Eis aqui como d'ella usa Borda (*Tableau de log. decimales*):

Suppõe $\frac{1+y}{1-y} = \frac{m}{n}$, ou $y = \frac{m-n}{m+n}$,

$$\text{e } \operatorname{Log} \frac{m}{n} = 2M \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots \right\}$$

Tal é a differença entre os log. de dous numeros m e n expressa n'uma serie muito convergente, principalmente quando m e n são grandes e pouco differentes. Sendo por exemplo $m=101$, e $n=100$, o 1.° algarismo significativo do segundo termo é apenas da 8.ª casa decimal, e passado o numero 100, podemos contentar-nos com o primeiro termo, se calcularmos os log. só com 7 algarismos decimaes, e obteremos assim a differença entre dous log. successivos.

Para os numeros pequenos, Borda suppõe

$$m=(p-1)^2(p+2),\ n=(p+1)^2(p-2),$$

o que dá

$$m-n=4,\ m+n=2p^3-6p,$$

e os log. neperianos

$$2l(p-1)+l(p+2)-2l(p+1)-l(p-2)=$$

$$2\left\{\frac{2}{p^3-3p}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{p^3-3p}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{p^3-3p}\right)^5+\ldots\ldots\right\};$$

e fazendo successivamente $p=5$, 6, 7 e 8, achar-se-ha

$$2l2-3l3+l7=2\left(\tfrac{1}{55}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{55}\right)^3+\ldots\right)$$

$$2l5+l2-2l7=2\left(\tfrac{1}{99}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{99}\right)^3+\ldots\right)$$

$$4l3-4l2-l5=2\left(\tfrac{1}{161}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{161}\right)^3+\ldots\right)$$

$$2l7+l5-5l3=2\left(\tfrac{1}{244}+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{244}\right)^3+\ldots\right).$$

Estas series que convergem com muita rapidez, são faceis de calcular, e deduzem-se d'ellas consecutivamente os log. de 2, 3, 5 e 7 por meio da eliminação entre estas quatro equações do 1.° grão. Haros lembrou-se de suppôr

$$m=p^2(p+5)(p-5),\ n=(p+3)(p-3)(p+4)(p-4)$$

e obteve por este meio uma serie procedendo segundo as potencias impares de $\frac{72}{p^4-25p^2+72}$, a qual é tão convergente, que dando apenas a p o valor 12, o 2.° termo só tem o 1.° algarismo significativo na 9.ª casa decimal. Conhecidos os log. de $p+4$, $p+3$, p, $p-3$ e $p-5$ obtem-se logo o log. de $p+5$.

Series Circulares.

155. Para desenvolver em series as expressões sen x e cos x em ordem ás potencias crescentes do arco x, notemos que estas series não podem admittir termos, em que entre x com expoente negativo ou fraccionario. Por quanto:

1.° Se fosse possivel, que na serie entrasse um termo da fórma $Px^{\frac{h}{i}} = P\sqrt[i]{x^h}$, resultariam i valores por cada arco, o que não póde ser, por que a qualquer arco não corresponde mais do que um seno ou coseno.

2.° Se houvesse um termo de fórma $Px^{-i} = \frac{P}{x^i}$, a serie se tornaria infinita para $x=0$, o que é absurdo, por que, como se sabe, nesse caso o seno torna-se em zero, e o coseno na unidade. Por esta consideração conclue-se além disso, que na expressão de sen x só devem entrar termos em que x seja factor, e que o termo constante, que entra em cos x, deve ser a unidade.

Supponhamos pois

$$\operatorname{sen} x = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots,$$

$$\cos x = 1 + a'x + b'x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Da 1.ª equação deduz-se $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = a + bx + \ldots\ldots$; mas (Geom. An. n.° 210) sabemos que o limite da relação do seno para o arco é $=1$; fazendo pois $x=0$, será $a=1$.

Quando x se torna negativo, tanto o seno, como o coseno, conservam as suas grandezas, mudando porém o seno de signal. Ora, se nas series precedentes mudarmos x em $-x$, só mudarão de signaes os termos das potencias impares; por conseguinte é necessario, *que no desenvolvimento de* sen x *entrem sómente termos com expoentes impares, e no de* cos x *só os de expoentes pares*. Será pois

$$\text{sen}\, x = x + Ax^3 + Bx^5 + \ldots\ldots + Mx^{2i-1} + Nx^{2i+1},$$

$$\cos x = 1 + A'x^2 + B'x^4 + C'x^6 + \ldots\ldots\ldots + N'x^{2i},$$

designando por i a ordem dos termos.

Tractemos agora de determinar os coefficientes numericos

$$A, B, C, \ldots\ldots\ldots\ldots A', B', C', \ldots\ldots$$

Se no binomio

$$P \cos x + Q \,\text{sen}\, x$$

mudarmos x em $x+h$, podemos obter o seu desenvolvimento em ordem ás potencias de h de duas maneiras, que devem dar resultados identicos; ou desenvolvendo primeiro o binomio em ordem a x, e mudando depois x em $x+h$; ou substituindo x por $x+h$, e pondo depois por sen h e cos h os seus valores em ordem a h.

Representando os dous resultados por

$$\alpha + \beta h + \gamma h^2 + \ldots\ldots = \alpha' + \beta' h + \gamma' h^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

deduz-se

$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \ldots\ldots\ldots$$

A 2.ª equação $\beta = \beta'$, que corresponde aos coefficientes da 1.ª potencia de h, servirá para resolver a questão de que tractâmos. Para a obter:

1.° Façamos

$$P\cos x + Q\,\mathrm{sen}\,x = P\,(1 + A'x^2 + B'x^4 + \ldots\ldots + N'x^{2i})$$

$$+ Q\,(x + Ax^3 + Bx^5 + \ldots\ldots\ldots + Nx^{2i+1}).$$

Substituindo n'esta expressão x por $x + h$, e approveitando sómente o coefficiente de h, isto é, tomando a sua derivada, acharemos

$$\beta = P\,(2A'x + 4B'x^3 + \ldots . + 2i\,N'x^{2i-1})$$

$$+ Q\,(1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + \ldots + (2i+1)\,Nx^{2i}).$$

2.° Mudemos $P\cos x + Q\,\mathrm{sen}\,x$

em $$P\cos(x+h) + Q\,\mathrm{sen}\,(x+h) = P\,(\cos x\cos h - \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,h)$$

$$+ Q\,(\mathrm{sen}\,x\cos h + \cos x\,\mathrm{sen}\,h).$$

Substituindo $1 + A'h^2 + \ldots .$ por $\cos h$, e $h + Ah^3 + \ldots .$ por $\mathrm{sen}\,h$, é evidente que dos termos em que entra $\cos h$ não resultará nenhum com a 1.ª potencia de h, e que por isso virá logo

$$\beta' = -P\,\mathrm{sen}\,x + Q\cos x.$$

Como na equação $\beta = \beta'$ entram os coefficientes P e Q, que são quantidades arbitrárias, é necessario (*Alg. El.* n.° 120), que a equação se parta em duas resultantes da egualdade dos coefficientes das duas arbitrárias. Substituindo pois $\cos x$ e $\mathrm{sen}\,x$ pelos seus desinvolvimentos, resultam as equações identicas

$$2\,A'x + 4\,B'x^3 + 6\,C'x^5 - \ldots + 2i\,N'x^{2i-1} = -x - A\,x^3 - Bx^5 \ldots - Mx^{2i-1},$$

$$1 + 3\,Ax^2 + 5\,Bx^4 \ldots + (2i+1)\,Nx^{2i} = 1 + A'x^2 + B'x^4 + \ldots + N'x^{2i};$$

das quaes deduziremos, egualando termo a termo,

$$2A'=-1,\ 4B'=-A,\ 6C'=-B,\ldots 2iN'=-M,$$

$$3A=A',\ 5B=B',\ 7C=C',\ldots(2i+1)\ N=N';$$

e depois

$$A'=-\frac{1}{2},\ A=-\frac{1}{2.3.},\ B'=\frac{1}{2.3.4},\ B=\frac{1}{2.3.4.5},\ C'=\frac{-1}{2.3.4.5.6},\ldots$$

Substituindo os valores de A, B, C,.., A', B', C',... obteremos por ultimo

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3\ldots\ldots 7}+\ldots\pm\frac{x^{2i+1}}{2.3\ldots(2i+1)}\ldots(G)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3\ldots 6}+\ldots\pm\frac{x^{2i}}{2.3\ldots 2i}\ldots(H)$$

Os termos geraes d'estas series resultam de $N'=\frac{-M}{2i}$, e de $N=\frac{N'}{2i+1}$, equações que mostram como os coefficientes d'uma das series se deduzem dos da mesma ordem da outra. Escolhe-se para estes termos o signal + ou —, conforme i é da fórma 2θ ou $2\theta+1$.

156. As fórmulas precedentes podem servir para achar as grandezas do seno e coseno d'um arco, cujo comprimento é x, e o raio de circulo a unidade. Representando por 2π a circumferencia, teremos

$\pi : x :: 180°$: o numero t de gráos do arco $x=\frac{\pi t}{180}=\frac{t}{\mu}$, sendo o valor de μ, o que dêmos na Trigon. II. pag. 152.

Designando pois por t *o numero de grâos d'um arco* x, *as fórmulas* (G) e (H) tornam-se em

$$\operatorname{sen} x = At - Bt^3 + Ct^5, \ldots, \quad \cos x = 1 - A't^2 + B't^4$$

cujos coefficientes são dados pelo calculo seguinte:

$\log A = \overline{2},24187\ 736759$	$\log C = \overline{11},13020559$	$\log E = \overline{22},61733$
$\log B = \overline{7},94748\ 0852$—	$\log D = \overline{17},990711$—	$\log F = \overline{25},05950$—
$\log A' = \overline{4},18272\ 47395$—	$\log C' = \overline{14},593932$—	$\log E' = \overline{25},85901$—
$\log B' = \overline{9},58729\ 823$	$\log D' = \overline{19},329498$	$\log F' = \overline{30},02219$

157. Porém o que ordinariamente nos serve não é o valor dos sen. e cos., porém sim os seus logarithmos. Seja δ a differença constante dos arcos da taboa que queremos construir; um arco qualquer t será $= n\delta$; logo

$$\operatorname{sen} x = n\delta\,(1 - \tfrac{1}{6}n^2\delta^2 \ldots), \quad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}n^2\delta^2 + \ldots.$$

Façamos $\quad y = \dfrac{n^2\delta^2}{2.3} - \dfrac{n^4\delta^4}{2\ldots5}, \quad z = \dfrac{n^2\delta^2}{2} - \dfrac{n^4\delta^4}{2.3.4.} \ldots,$

teremos $\operatorname{sen} x = n\delta\,(1 - y)$, $\cos x = 1 - z$; tomando os log. n'um systema qualquer, cujo modulo é M (n.° 154) acha-se

$$\operatorname{Log} \operatorname{sen} x = \operatorname{Log} n\delta - M\,(y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \ldots),$$

$$\operatorname{Log} \cos x = -M\,(z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 \ldots);$$

substituindo finalmente por y e z os seus valores, vem

$$\operatorname{Log} \operatorname{sen} x = \operatorname{Log}(n\delta) - \frac{M\delta^2}{2.3}n^2 - \frac{M\delta^4}{4.5.9}n^4 - \frac{M\delta^6}{9^2.5.7}n^6 \ldots..$$

$$\text{Log cos } x = \quad -\frac{M\delta^2}{2}n^2 - \frac{M\delta^4}{3.4}n^4 - \frac{M\delta^6}{9.5}n^6 \ldots.$$

Se a base dos log. for 10, e se, como tem logar nas taboas de Callet, os arcos da taboa procederem de $10''$ em $10''$, δ será o comprimento do arco de $10''$, ou a 64800.ª parte da semicircumferencia π. Tomando os valores de π e M (n.° 159, 154) acha-se em resultado das operações,

$$\log \text{sen } x = \log \delta + \log n - An^2 - Bn^4 \ldots, \ \log \cos x = A'n^2 - B'n^4 \ldots.$$

$\log \delta = \overline{5}.68557\ 48668\ 23541$

$\log A = \overline{10},23078\ 27994\ 564$	$\log B = \overline{20},12481\ 12735$
$\log A' = \overline{10},70790\ 40492\ 84$	$\log B' = \overline{19},30090\ 25326$
$\log C = \overline{30},29868\ 045$	$\log D = \overline{40},54489\ 2$
$\log C' = \overline{28},09802\ 100$	$\log D' = \overline{38},95143\ 2,$

Querendo, por ex., calcular o log. dos sen e cos do arco de 4.° ½ ou $16200''$, é então $n = 1620$.

$\log \delta = 5,68557487$	$\log A = \overline{10},2307828$	$\log B = \overline{20},1248113$
$\log n = 3,20951501$	$\log n^2 = 6,4190300$	$\log n^4 = 12,8380600$
-0.00044649	$\overline{4},6498128$	$8,9628713$
-0.00000009	Subtráem-se os numeros correspondentes	

$\overline{2}.89464330 = \log \text{sen } 4.° 30'$

$\log A' = \overline{10}.7079041$	$\log B' = \overline{19}.3009025$	$-0,00138947$
$\log n^2 = 6,4190300$	$\log n^4 = 12.8380600$	$-0,00000138$
$\overline{3},1269341$	$\overline{0},1389625$	$-0,00034085$

Complemento $= \log \cos 4.° 30' \qquad = \overline{1},99865915$

Querendo achar o log R = 10, ajunctar-se-ha 10 ás caracteristicas (V.

Geom. An. n.° 210). Os log. das tang. e cot. obtêm-se por meio de simples subtracções.

Como n cresce cada vez mais, estas series não se podem empregar além de 12°, porque se tornam muito pouco convergentes. Não se faz mesmo uso d'ellas senão até 5.°; d'ahi por diante recorre-se ao seguinte processo:

Temos $$\frac{\operatorname{sen}(x+\delta)}{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen} x \cos\delta+\operatorname{sen}\delta\cos x}{\operatorname{sen} x}=$$

$$\cos\delta+\operatorname{sen}\delta\cot x=\cos\delta(1+\operatorname{tang}\delta\cot x);$$

tomando os logarithmos, o 1.° membro é a differença Δ entre os log. dos senos dos arcos $x+\delta$ e x, i. é,

$$\Delta=\log\cos\delta+\mathrm{M}(\operatorname{tang}\delta\cot x-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\cot^2 x+\ldots).$$

Raciocinando da mesma maneira a respeito de $\cos(x+\delta)$, acha-se que a differença entre os log. consecutivos dos cosenos é

$$\Delta'=\log\cos\delta-\mathrm{M}(\operatorname{tang}\delta\operatorname{tang} x+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta\operatorname{tang}^2 x+\ldots)$$

Querendo-nos limitar a 9 decimaes, e tomando $\delta=10''$, só o 1.° termo d'estas series dá algarismos significativos,

$$\Delta=\mathrm{M}\operatorname{tang}\delta\cot x,\quad \Delta'=-\mathrm{M}\operatorname{tang}\delta\operatorname{tang} x;$$

e temos $\log(\mathrm{M}\operatorname{tang}\delta)=\bar{5},32335\ 91788.$

Quando $\delta=1'$, temos $\log(\mathrm{M}\operatorname{tang}\delta)=\bar{4},10151\ 043.$

Por meio d'este artificio, partindo do arc $x=5.°$, do qual conhecemos o sen., o cos., a tang., e a cot., podemos calcular, seguidamente, todos os sen. e cos. por meio das suas differenças successivas Δ, Δ', de $10''$ em $10''$, ou ainda de $1'$ em $1'$, e por meio d'estes valores se acharão os das tang. e cot. Seja por ex.

$$
\begin{array}{rr|r}
x=10°\,10'\,30'',\ \log\cot x = & 0.7459888 & \log\operatorname{tang} x = 1.2540112 \\
\text{constante} & \bar{5}.3233592 & \bar{5}.3233592 \\
\hline
 & \bar{4}.0693480 & \bar{6}.5773704 \\
\text{Diff. logarith. } \Delta = & 0{,}00011731 & \Delta' = -0.000003779.
\end{array}
$$

É de notar, como a pag. 281, que as quantidades Δ e Δ' são constantes durante uma certa extensão da taboa. A fim de evitar a accumulação d'erros, calcularemos préviamente os termos de certa em certa distancia, e estes servirão de ponto de partida.

A equação
$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$$
que dá
$$\log\operatorname{sen} 2x = \log 2 + \log\operatorname{sen} x + \log\cos x,$$

póde servir para este fim. Como $\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45°$, podemos partir d'este arco e calcular $\operatorname{sen}(45° \pm 10'')$; nestes dous arcos complementares o seno de um corresponde reciprocamente ao cos. do outro; dos valores destas linhas deduzem-se as tang. e cot; e depois se passa para

$$45° \pm 20'',\ 45° \pm 30'',\ \text{etc.}$$

158. Comparando as series (G) e (H) com a eq. (B), vê-se que a sua somma é e^x, com a differença de signal nos termos de duas em duas ordens; ora se mudarmos x em $\pm x\sqrt{-1}$ no desinvolvimento (B) de e^x, como $\sqrt{-1}$ tem por potencias $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1$, as quaes se

reproduzem até ao infinito, acha-se que os signaes dos termos são os mesmos que nas series (G) e (H); d'onde se conclue

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos x\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,x\ldots(\text{I})$$

Sommando e subtrahindo estas duas equações, vem

$$\cos x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2},\ \text{sen}\,x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\ldots(\text{K});$$

$$\text{tang}\,x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}}=\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{\left(e^{2x\sqrt{-1}}+1\right)\sqrt{-1}},$$

multiplicando ambos os termos por $e^{x\sqrt{-1}}$. Estas expressões devem considerar-se simplesmente como resultados analyticos, nos quaes os imaginarios são apenas apparentes, advertindo que elles devem desapparecer por um calculo identico.

Finalmente mudando x em nx em (I), vem

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}}=\cos nx\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,nx\,;\ldots.(\text{L})$$

mas o primeiro membro é a potencia n da equação (I); logo para qualquer valor de n será

$$\cos nx\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,nx=(\cos x\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,x)^n\ldots.(\text{M})$$

Estas fórmulas são muito usadas. Limitar-nos-hemos aqui a applical-as á resolução dos triangulos. Façamos

$$z = e^{C\sqrt{-1}},\ z' = e^{-C\sqrt{-1}};$$

será $$\cos C = \tfrac{1}{2}(z+z'),\quad \sqrt{-1}.\ \text{sen}\, C = \tfrac{1}{2}(z-z').$$

Sejam A, B, C os tres angulos d'um triangulo, e a, b, c os lados que lhes ficam respectivamente oppostos: teremos

$$a \text{ sen B} = b \text{ sen A} = b \text{ sen } (B+C);$$

e por conseguinte

$$\frac{\text{sen B}}{\cos B} = \text{tang B} = \frac{b \text{ sen C}}{a - b \cos C};$$

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}} - 1}{e^{2B\sqrt{-1}} + 1} = \frac{b(z-z')}{2a - b(z+z')},\ e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - bz'}{a - bz}.$$

Finalmente (eq. D)

$$2B\sqrt{-1} = \text{l}\,(a - bz') - \text{l}\,(a - bz)$$

$$= \frac{b}{a}\left(z - z'\right) + \frac{b^2}{2a^2}\left(z^2 - z'^2\right) + \frac{b^3}{3a^3}\left(z^3 - z'^3\right)\ldots.$$

Porém a fórmula (L) dá

$$z^m = \cos mC + \sqrt{-1} \text{ sen } mC,\ z'^m = \cos mC - \sqrt{-1} \text{ sen } mC;$$

logo $$z^m - z'^m = 2\sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\; mC.$$

Substituindo, e supprimindo o factor commum $2\sqrt{-1}$, resulta

$$B = \frac{b}{a}\,\text{sen}\; C + \frac{b^2}{2a^2}\,\text{sen}\; 2C + \frac{b^3}{3a^3}\,\text{sen}\; 3C + \ldots$$

A equação $c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2 = a^2 - ab\,(z+z') + b^2$ reduz-se a

$$c^2 = (a-bz)\,(a-bz'),\ \text{por ser}\ zz' = 1.$$

Tomando os log. vem

$$2\log.\,c = 2\log.\,a - M\left[\frac{b}{a}(z+z') + \frac{b^2}{2a^2}(z^2+z'^2)\ldots\right];$$

e como temos $$z^m + z'^m = 2\cos mC,$$

será $$\log c = \log a - M\left(\frac{b}{a}\cos C + \frac{b^2}{2a^2}\cos 2\,C + \frac{b^3}{3a^3}\cos 3\,C\ldots\right).$$

Estas duas series servem para resolver um triangulo, em que b é muito pequeno comparativamente com a, e *são conhecidos os dous lados* a e b, *e o angulo comprehendido* C.

159. A equação (I) dá, tomando os log. neperianos,

$$\pm x\sqrt{-1} = l(\cos x \pm \sqrt{1}\,.\,\text{sen}\; x):$$

subtrahindo estas duas equações uma da outra, vem

$$2x\sqrt{-1} = l\,\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\; x}{\cos x - \sqrt{-1}\,\text{sen}\; x} = l\left(\frac{1+\sqrt{-1}\,.\,\text{tang}\; x}{1-\sqrt{-1}\,.\,\text{tang}\; x}\right),$$

por ser sen $x = \cos x \operatorname{tang} x$. Porém pela fórmula (E) p. 279 podemos achar o desinvolvimento deste log.; e supprimindo o factor commum $2\sqrt{-1}$, temos por expressão de arc. x, conhecida a tang.,

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 x + \tfrac{1}{5} \operatorname{tang}^5 x - \tfrac{1}{7} \operatorname{tang}^7 x \ldots \text{(N)}$$

O arco x, cuja tang. é t, e o raio r, é (*Geom. Anal.* n.° 168)

$$x = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \ldots.$$

Esta fórmula serve para achar *a relação* π *da circumferencia para o diametro.* Dous arcos x e x', cujas tang. são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, tem por tang. de sua somma, $\operatorname{tang.}(x+x') = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$; por tanto esta somma é $x + x' = 45°$.

Se na equação (N) fizermos tang. $x = \frac{1}{2}$, tang. $x' = \frac{1}{3}$, e sommarmos, obteremos o comprimento do arco de 45°, que é o quarto de semicircumferencia π do circulo cujo raio é 1:

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \ldots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \ldots\ldots$$

Segundo o processo de Machin obtem-se series mais convergentes, Tome-se o arco x cuja tang. é $\frac{1}{5}$, será *Geom. Anal.* (L. n.° 205)

$$\operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x} = \frac{5}{12},\ \operatorname{tang} 4x = \frac{\frac{5}{2\cdot 12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119},$$

logo este arco $4x$ differe muito pouco de 45°; e se chamamos v o excesso de $4x$ sobre $45°$, ou $v = 4x - 45°$, será

$$\operatorname{tang} v = \frac{\operatorname{tang} 4x - 1}{1 + \operatorname{tang} 4x} = \frac{1}{239}.$$

Conseguintemente se fizermos $\operatorname{tang} x = \frac{1}{5}$, e repetirmos quatro vezes a serie N, teremos o arco $4x$; do mesmo modo $\operatorname{tang} v = \frac{1}{239}$ dá o arco v; e practicando a subtracção, obtem-se o arco de $45°$, ou

$$\frac{1}{4}\pi = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \dots\right] - \frac{1}{239} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 \dots$$

Na *Geometria* n.º 95, demos o resultado destes calculos com 20 decimaes:

$$\log \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94,\ \mathrm{l}\,\pi = 1{,}14472\ 98858\ 494.$$

160. Se na equação (I) fizermos $x = k\pi$, designando por k um inteiro qualquer, teremos $\operatorname{sen} x = o$, $\cos x = \pm 1$, conforme k for par ou impar, e por conseguinte

$$e^{\pm k\pi\sqrt{-1}} = \pm 1,\ \mathrm{l}(\pm 1) = \pm k\pi\sqrt{-1}.$$

Multiplicando pelo modulo M, e ajunctando o valor numerico A de $\operatorname{Log} a$,

$$\operatorname{Log}(\pm a) = A \pm kM\pi\sqrt{-1},$$

sendo k um numero qualquer, par para $\log(+a)$, e impar para $\log(-a)$. Por conseguinte *todo o numero tem infinitos logarithmos no mesmo systema; quando o numero é negativo, estes log. são todos imaginarios; sendo positivo, sómente um é real.* (*)

(*) De $a^2 = (-a)^2$, deduz-se $2 \log a = 2 \log(-a)$, não devemos porém concluir d'aqui, como fez d'Alembert, que $+a$ e $-a$ tem os mesmos log.; por

161. Tractemos agora de desinvolver sen z e cos z em senos e cosenos d'arcos multiplos z, $2z$, $3z$, ... Supponhamos

$$\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z = y\,,\ \cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z = v\,;$$

será
$$yv = 1\,,\ 2\cos z = y + v.$$

Designando por 1, U, A′, A″, ... os coefficientes da potencia u, será, para qualquer valor de u,

$$2^u \cos^u z = y^u + u y^{u-2} + A' y^{u-4} + \ldots\ldots$$

E como, pela equação (M), temos

$$y^k = \cos kz + \sqrt{-1}\ \text{sen}\, kz\,,$$

será

$$2^u \cos^u z = \cos uz + u\cos(u-2)z + A'\cos(u-4)z - \ldots. \quad \text{(P)}$$

$$\pm\sqrt{-1}\,[\text{sen}\, uz + u\,\text{sen}\,(u-2)z + A'\,\text{sen}\,(u-4)z + \ldots],$$

---

quanto, sendo pares k e l, é

$$\log a = A \pm k\, M\pi\sqrt{-1}\,,\ e = A \pm l\, M\pi\sqrt{-1}\,;$$

e sommando, $2\log a = 2A \pm (k+l)\,M\pi\sqrt{-1}$. Do mesmo modo sendo k' e l' impares, acha-se $2\log(-a) = 2A \pm (k'+l')\,M\pi\sqrt{-1}$. Ora é evidente que esta última expressão se comprehende na primeira, porque $k'+l'$ é um numero par, porém não se segue que seja em geral $2\log(-a) = 2\log a$; porque, para que a seja real, é necessario que $k = l = 0$; porém k' e l' sendo impares, nunca a sua somma póde ser $= 0$; nem póde por tanto dar-se em numeros reaes $\log a = \log - a$. O que d'Alembert unicamente devia concluir, era que entre os log. imaginarios de $+a$ e $-a$, existem alguns que, sommados dous a dous, dão sommas eguaes.

onde se poz o signal duplo $\pm$, porque tanto se póde eliminar y como v.

Quando u é inteiro, $\cos^u z$ não póde admittir mais do que um valor, e como as duas expressões devem por isso ter o mesmo valor, a serie ficará reduzida á 1.ª linha (P), porque segundo se collige do que vamos dizer, os termos imaginarios se destroem dous a dous.

Porém se u for fraccionario, não accontecerá o mesmo, porque o expoente fraccionario, indicando a existencia de uma raiz de uma certa ordem, mostra que esta póde em geral ter muitos valores.

Considerando aqui sómente o caso de ser u inteiro, que é o unico de que se faz uso, advertiremos, que na equação (P) o arco que entra no termo que tem um numero x de termos antes de si, é da fórma $(u-2x)z$; e que aquelle que tem x depois, tem $u-x$ antes, e é por isso $[u-2(u-x)]z=-(u-2x)z$. Estes arcos terão pois os mesmos cosenos; e os seus coefficientes, pela propriedade de egualdade dos coefficientes dos termos equidistantes do binomio, serão tambem eguaes. Podemos pois, em logar de cada um destes dous termos, substituir o seu dôbro; e dividindo depois a equação por 2, virá

$$2^{u-1}\cos^u z=\cos uz+u\cos(u-2)z+A'\cos(u-4)z+\ldots\quad(Q),$$

continuando com a serie, sómente em quanto os arcos vierem positivos. Cumpre tambem advertir, que *sendo* u *par, é necessario tomar a ametade do ultimo termo, que é o termo medio, o qual nesse caso se não somma com nenhum dos outros.*

Mudando, n'esta equação (Q), z em $\frac{1}{2}\pi-z$, o 1.° membro tornar-se-ha em $2^{u-1}\operatorname{sen}^u z$. Em quanto ao 2.° membro, como um arco da ordem x, tem a fórma $(u-2x)z$, teremos, por ser x um inteiro positivo,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos\left[\frac{u\pi}{2}-(u-2x)z-\pi x\right]=(-1)^x\left[\cos\frac{u\pi}{2}-(u-2x)z\right]$$

Temos agora a considerar dous casos :

1.° *Se* u *for numero par*, **teremos :**

a) para $u = 4n$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = (-1)^x \cos\left(2n\pi-(u-2x)z\right) = -(-1)^x \cos(u-2x)z:$$

b) para $u = 4n+2$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = (-1)^x \cos\left((2n+1)\pi-(u-2x)z\right) = -(-1)^x \cos(u-2x)z:$$

Logo :

$$\pm 2^{u-1}\operatorname{sen}^u z = \cos uz - u\cos(u-2)z + A'\cos(u-4)z + \ldots . \quad (R)$$

devendo parar-se no termo medio, e tomar a sua ametade ; usando do signal + quando u fôr da fórma $4n$, e do signal —, quando fôr da fórma $4n+2$.

2.° *Se* u *for numero* impar, teremos :

a') para $u = 4n+1$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = (-1)^x \cos\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi-(u-2x)z\right) = (-1)^x \operatorname{sen}(u-2x)z:$$

b') para $u = 4n + 3$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=$$

$$(-1)^x \cos\left[\left(2(n+1)-\frac{1}{2}\right)\pi-(u-2x)z\right] = -(-1)^x \operatorname{sen}(u-2x)z:$$

Logo

$$\pm 2^{u-1} \operatorname{sen}^u z = \operatorname{sen} uz - \operatorname{sen}(u-2)z + A' \operatorname{sen}(u-4)z \ldots \quad (S)$$

devendo parar-se no termo medio, sem tomar metade; usando do signal $+$ quando u fôr da fórma $4n+1$, e do signal $-$, quando for da fórma $4n+3$.

D'estas equações facilmente se deduzem, como na pag. 196 da segunda parte,

$$2\cos^2 z = \cos 2z + 1,$$

$$4\cos^3 z = \cos 3z + 3\cos z,$$

$$8\cos^4 z = \cos 4z + 4\cos 2z + 3,$$

$$16\cos^5 z = \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z,$$

$$32\cos^6 z = \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10, \text{ etc.}$$

$$-2\operatorname{sen}^2 z = \cos 2z - 1,$$

$$-4\operatorname{sen}^3 z = \operatorname{sen} 3z - 3\operatorname{sen} z,$$

$$8\operatorname{sen}^4 z = \cos 4z - 4\cos 2z + 3,$$

$$16\operatorname{sen}^5 z = \operatorname{sen} 5z - 5\operatorname{sen} 3z + 10\operatorname{sen} z,$$

$$-32\operatorname{sen}^6 z = \cos 6z - 6\cos 4z + 15\cos 2z - 10, \text{ etc.}$$

162. Podemos reciprocamente desenvolver os sen. e cos. d'arcos multiplos, em ordem ás potencias de senos e cosenos. Fazendo, para simplificar,

$$\operatorname{sen} z = s, \ \cos z = c,$$

o 2.° membro da equação (M) pag. 291, tornar-se-ha, fazendo $x = z$,

$$(c + \sqrt{-1}. \, s)^n;$$

o qual, sendo desinvolvido pela fórmula do binomio, conduz a uma equação da fórma

$$\cos nz + \sqrt{-1} \operatorname{sen} z = P + Q\sqrt{-1}.$$

E como os imaginarios se devem destruir uns com os outros, teremos as duas equações separadas,

$$\cos nz = P, \ \operatorname{sen} nz = Q,$$

contendo a primeira todos os termos em que $s\sqrt{-1}$ tem expoentes pares. Será pois, para n inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo,

$$\cos nz = c^n - n\frac{n-1}{2} c^{n-2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} c^{n-4} s^4 - \ldots$$

$$\operatorname{sen} nz = nc^{n-1} s - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} c^{n-3} s^3 + \frac{n(n-1)..(n-4)}{2.3.4.5} c^{n-5} s^5 -$$

Dando a n successivamente os valores 2, 3, 4, 5, ... obteremos, como nas pag. 194 e 195 da segunda parte,

$\cos 2z = c^2 - s^2$, $\quad$ $\sin 2z = 2cs$,

$\cos 3z = c^3 - 3cs^2$ $\quad$ $\sin 3z = 3c^2s - s^3$,

$\cos 4z = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$, $\quad$ $\sin 4z = 4c^3s - 4cs^3$,

$\cos 5z = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$, $\quad$ $\sin 5z = 5c^4s - 10c^2s^3 + s^5$,

$\cos 6z = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6$, $\quad$ $\sin 6z = 6c^5s - 20c^3s^3 + 6cs^5$,

etc. $\quad$ etc.

163. N'estas fórmulas vem os senos misturados com cosenos, podemos porém achar outras em que estas funcções venham separadas. Como os arcos z, $2z$, $3z$, ... são equidifferentes, os senos e cosenos fórmam uma serie recurrente (Geom. An. n.° 209), cujos factores são $2\cos z$ e -1. Do mesmo modo, se os arcos procedem de $2z$ em $2z$, isto é, z, $3z$, $5z$, ..., ou $0.z$, $2z$, $4z$, ..., os factores serão $2\cos 2z = 2(c^2 - s^2) = 2 - 4s^2$, e -1.

Partindo pois de $\cos 0.z = 1$, $\sin 0.z = 0$, $\cos z = c$, $\sin c = s$, facilmente se podem formar (n.° 146) as series recurrentes seguintes, *em ordem ás potencias ascendentes de* c, das quaes são conhecidos os dous 1.^{os} termos e a lei que seguem.

$\sin 2z = s\,(2c)$, $\quad$ $\cos 2z = 2c^2 - 1$,

$\sin 3z = s\,(4c^2 - 1)$, $\quad$ $\cos 3z = 4c^3 - 3c$,

$\sin 4z = s\,(8c^3 - 4c)$, $\quad$ $\cos 4z = 8c^4 - 8c^2 + 1$,

$\sin 5z = s\,(16c^4 - 12c^2 + 1)$, $\quad$ $\cos 5z = 16c^5 - 20c^3 + 5c$,

$\sin 6z = s\,(32c^5 - 32c^3 + 6c)$, $\quad$ $\cos 6z = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$,

$\sin 7z = s\,(64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)$, $\quad$ etc.

A lei geral d'estas fórmulas acha-se demonstrada por Lagrange (*Calcul des fonctions*, XI *leç.*), e resume-se nas seguintes

$$\operatorname{sen} nz = s\Big[(2c)^{n-1} - (n-2)(2c)^{n-3} + \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(2c)^{n-5}$$

$$- (n-4)\frac{n-5}{2}\,\frac{n-6}{3}(2c)^{n-7} + (n-5)\,\frac{n-6\,..\,n-8}{2\,.\,3\,.\,4}(2c)^{n-9}\ldots\Big]$$

$$2\cos nz = (2c)^n - n(2c)^{n-2} + \tfrac{1}{2}n(n-3)(2c)^{n-4} - \tfrac{1}{6}n(n-4)(n-5)(2c)^{n-6}\,..$$

Passando agora ás series *em ordem ás potencias ascendentes de s*, acharemos pelo meio indicado:

$\operatorname{sen} 2z = c\,(2s)$, $\qquad \operatorname{sen} 3z = 3s - 4s^3$,

$\operatorname{sen} 4z = c\,(4s - 8s^3)$, $\qquad \operatorname{sen} 5z = 5s - 20s^3 + 16s^5$,

$\operatorname{sen} 6z = c\,(6s - 32s^3 + 32s^5)$, $\qquad \operatorname{sen} 7z = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$,

$\operatorname{sen} 8z = c\,(8s - 80s^3 + 192s^5 - 128s^7)$, $\qquad$ etc.

$\cos 2z = 1 - 2s^2$, $\qquad \cos 3z = c\,(1 - 4s^2)$,

$\cos 4z = 1 - 8s^2 + 8s^4$, $\qquad \cos 5z = c\,(1 - 12s^2 + 16s^4)$,

$\cos 6z = 1 - 18s^2 + 48s^4 - 32s^6$, $\qquad \cos 7z = c\,(1 - 24s^2 + 80s^4 - 64s^6)$,

etc. $\qquad$ etc.

1.° Sendo n par, podemos dar-lhe a fórma seguinte:

$$\text{sen } nz = c\left[ns - n\frac{n^2-2^2}{2.3}s^3 + n\frac{n^2-2^2}{2.3}.\frac{n^2-4^4}{4.5}s^5 \ldots\ldots\ldots (2s)^{n-1}\right]$$

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2}s^2 + \frac{n^2}{2}.\frac{n^2-2^2}{3.4}s^4 - \frac{n^2}{2}.\frac{n^2-2^2}{3.4}.\frac{n^2-4^4}{5.6}s^6 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n,$$

2.° Sendo n impar,

$$\text{sen } nz = ns - n\frac{n^2-1^2}{2.3}s^3 + n\frac{n^2-1^2}{2.3}.\frac{n^2-3^2}{4.5}s^5 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n;$$

$$\cos nz = c\left[1 - \frac{n^2-1^2}{1.2}s^2 + \frac{n^2-1^2}{1.2}.\frac{n^2-4^2}{3.4}s^4 \ldots\ldots (2s)^{n-1}\right].$$

Methodo inverso, ou reversão das Series.

164. *Dada uma equação $y=\varphi x$, sendo φx uma serie, tracta-se de achar $x=Fy$, isto é, x expresso n'uma serie em ordem a y.*

1.° *Se $x=Fy$ tiver já uma fórma conhecida*, como por ex.°,

$$x = Ay + By^2 + Dy^3 + \text{etc.} \ldots\ldots \ldots\ldots \quad (1)$$

reduz-se a questão a achar os coefficientes indeterminados A, B, C, ..

Para isso, substituiremos na proposta $y=\varphi x$, os valores de x, x^2, x^3, .. tirados de (1); e obteremos assim uma equação identica, a qual por meio da comparação dos termos, em que entram as mesmas potencias de y, se separará n'outras, que darão a conhecer A, B, C, ...,

Seja $$y = M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right);$$

como já sabemos (n.° 153), que x se póde desinvolver n'uma serie da fórma (1), porque é y o log. de $1 + x$, ou $a^y = 1 + x$: substituindo por x a serie $Ay + By^2 + \ldots\ldots$, resultará

$$\frac{y}{M} = Ay + By^2 + Cy^3 + \qquad Dy^4 \ldots \qquad \text{por } x$$

$$-\frac{1}{2}A^2y^2 - ABy^3 - \left(\frac{1}{2}B^2 + AC\right)y^4 \ldots \qquad -\frac{1}{2}x^2$$

$$+\frac{1}{3}A^3y^3 + \qquad A^2By^4 \ldots \qquad +\frac{1}{3}x^3$$

$$-A^4y^4 \ldots \qquad -\frac{1}{4}x^4;$$

d'onde $AM = 1$, $B = \frac{1}{2}A^2$, $C = AB - \frac{1}{3}A^3$, $D = \ldots$

ou $A = \frac{1}{M}$, $B = \frac{A^2}{2}$, $C = \frac{A^3}{2.3}$, $D = \frac{A^4}{2.3.4}$, etc.

Finalmente, $$x = Ay + \frac{A^2y^2}{2} + \frac{A^3y^3}{2.3} + \frac{A^4y^4}{2.3.4}\ldots,$$

Do mesmo modo $$y = x - x^2 + x^3 - x^4 \ldots,$$

dá pela reversão $x = y + y^2 + y^3 + y^4 \ldots$

2.° Porém *se a fórma de* $\mathrm{x} = \mathrm{F}y$ *for desconhecida*, como acontece as mais das vezes: indicando por α, β, γ, ... as potencias desconhecidas de y, poremos

$$x = \mathrm{A}y^{\alpha} + \mathrm{B}y^{\beta} + \mathrm{C}y^{\gamma} + \ldots\ldots;$$

e teremos, além dos coefficientes A, B, C, ... de determinar os expoentes α, β, γ.

Para isso, depois de substituidos os valores de x na proposta, formaremos o numero de equações necessarias para determinar as quantidades desconhecidas, pela consideração de que deve cada um dos termos ser destruido por outros em que entre y na mesma potencia. Assim procedemos já no n.° 155.

Na serie $$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \ldots\ldots\ldots,$$

em que a $y = 0$ corresponde $x = 0$, poremos

$$x = \mathrm{A}y^{\alpha} + \mathrm{B}y^{\beta} + \mathrm{C}y^{\gamma} + \ldots\ldots\ldots,$$

sendo α, β, γ, ... numeros crescentes.

Substituindo por x o seu valor, vê-se, que:

1.° Como os expoentes 2, 3, 4, ... de x, na proposta, formam uma equidifferença, tambem α, β, γ, ... formam outra como é facil de ver.

2.° Tendo pois achado os dous primeiros expoentes α e β, facilmente se acharão os seguintes γ, δ, ...

3.° Como o termo, em que y tem menor expoente no 2.° membro, é $\frac{1}{2}\mathrm{A}^2y^{2\alpha}$, deverá reduzir-se com o 1.° membro y, o que dá,

$$2\alpha = 1,\ \tfrac{1}{4}A^2 = 1;\ \text{e por conseguinte } \alpha = \tfrac{1}{2},\ A = \sqrt{2}.$$

4.° Como os termos, que depois tem menor expoente, são $ABy^{\alpha+\beta}$ e $\frac{1}{3}A^3y^{3\alpha}$, deverão reduzir-se a zero, e darão

$$\alpha + \beta = 3\alpha;\quad \text{ou } \beta = \frac{2}{2}.$$

Pela equidifferença teremos pois

$$\gamma = \frac{3}{2},\ \delta = \frac{4}{2},\ \ldots\ldots,$$

e a serie tornar-se-ha em

$$x = \sqrt{2}y^{\frac{1}{2}} + By^{\frac{2}{2}} + Cy^{\frac{3}{2}} + \text{etc.};$$

a qual, estando já no caso precedente, dará pelo mesmo processo os coefficiente B, C, D ....; achando-se finalmente

$$x = \sqrt{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{18}\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}} - \frac{58}{55}y^2 + \ldots.$$

Pela mesma maneira a serie

$$y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7}\ldots.$$

se poderá reverter debaixo da fórma $x = Ay + By^3 + Cy^5 \ldots$ e acha-se feitas todas as operações,

$$x = y + \frac{1 \cdot y^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5y^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7y^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \cdots$$

Para $x = ay + by^2 + cy^3 + \ldots$ obtem-se

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} x^3 + \frac{5abc - a^2 d - 5b^3}{a^7} x^4 \ldots$$

A serie $\quad x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 \ldots\ldots$

dá

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} x^5 + \frac{8abc - a^2 d - 12b^3}{a^{10}} x^7 \ldots$$

Finalmente, $\quad y = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{128} x^{\frac{7}{2}} \ldots$

dá $\quad x = Ay^{-2} + By^{-4} + Cy^{-5} \ldots\ldots;$

e por conseguinte $\quad x = y^{-2} - y^{-4} + y^{-6} - y^{-8} + \ldots\ldots$

Se a proposta fosse $y = a + bx + cx^2 \ldots$, para commodidade do calculo, seria melhor transpor a, e fazer

$$\frac{y - a}{b} = z, \text{ ou } z = x + \frac{c}{b} x^2 + \frac{d}{b} x^3 + \ldots\ldots;$$

depois desenvolver-se-hia x em z.

Das equações de condição, e methodo dos menores quadrados.

165. Quando a lei, que rege um phenomeno physico, é conhecida, e se acha traduzida analyticamente n'uma equação da fórma

$$\varphi(x, y, a, b, c \ldots .) = 0,$$

succede muitas vezes serem desconhecidas as constantes $a, b, c \ldots .$, sendo $x, y, z \ldots .$ grandezas variaveis com as circunstancias do phenomeno. Para determinar estas constantes $a, b, c, \ldots .$ recorre-se então á experiencia, achando por meio della os valores simultaneos de $x, y, z, \ldots$ e substituindo-os na equação $\varphi = 0$. Repetindo depois as experiencias, n'outras circunstancias, acham-se novos valores de $x, y, z, \ldots .$ d'onde resultam novas *equações de condição*, podendo assim formar tantas, quantas forem necessarias para determinar as constantes, $a, b, c, \ldots$, por meio da eliminação.

Porém, como os valores das constantes obtidas por esta maneira estão sujeitos aos erros da observação, por meio da qual se determinaram nas differentes experiencias as variaveis $x, y, z, \ldots$, os resultados $a', b', c', \ldots .$ que por este modo vimos a obter, em vez dos numeros exactos $a, b, c, \ldots .$ devem considerar-se sómente como approximados. Designando por A, B, C, ... os erros respectivos em a', b', c', erros que se devem considerar muito pequenos, quando as observações se tiverem feito com o escrupulo exigido, poremos em $\varphi = 0$,

$$a = a' + A, \; b = b' + B, \; c = c' + C, \ldots .$$

e procuraremos determinar as quantidades A, B, C, ... cujas potencias superiores á primeira se poderão desprezar, e que por isso entrarão em $\varphi = 0$ só no 1.° grão, e, por ex.°, debaixo da fórma

$$0 = x + Ay + Bz + Ct + \ldots \ldots \quad (1)$$

Para supprir então a imperfeição nos valores de x, y, z .... emprega-se um grande numero de observações. Repetindo muitas vezes as experiencias, obtem-se outras tantas equações (1) em que x, y, z .... são conhecidos; comparam-se depois estas equações, e combinam-se muitas entre si, de maneira que se venha a obter uma equação media, em que uma das constantes tenha o maior factor possivel, tendo as outras pelo contrario factores muito pequenos: por meio destes artificio o erro na determinação dos coefficientes vem a ser muito attenuado. Reduzindo estas equações de condição ao numero das incognitas, obteremos por meio da eliminação mui facilmente os valores de A, B, C....

Este methodo de grande uso na Astronomia, é menos exacto que o dos *menores quadrados*, proposto por M. Legendre, o qual, pela exactidão dos resultados, compensa bem a extensão dos calculos. Supponhamos que os valores x, y, z .... deduzidos da observação sendo pouco exactos, se substituiram na equação (1); então o 1.° membro não será zero, porém um numero e muito pequeno e desconhecido. Repetindo as experiencias obteremos outros erros e', e'' .... correspondentes aos valores x', x'', y', y'' .... a saber

$$e' = x' + Ay' + Bz'., \quad e'' = x'' + Ay'' + Bz'' \text{ . . . . etc.}$$

Tomando a somma dos quadrados destas equações, e escrevendo sómente os termos em A, porque os outros são da mesma fórma, acharemos

$$e^2 + e'^2 + e''^2 + \ldots$$

$$= A^2(y^2 + \ldots) + 2A(xy + x'y' \ldots) + 2AB(yz \ldots) + 2AC \text{ etc.}$$

Este 2.° membro é da fórma $A^2m + 2An + k$; e terá o menor valor possivel, como se verá no *Cálculo differencial* quando se der a A um valor tal, que a derivada seja nulla .... $Am + n = 0$ Considerando pois só o factor constante e desconhecido A, teremos

$$xy + x'y' \ldots + A(y^2 + y'^2 \ldots) + B(yz + y'z' \ldots) + C(yt \ldots \text{etc} = \ldots) \, 0$$

Deve-se pois multiplicar cada uma das equações de condição (1) *pelo factor y de A, e egualar a somma a zero.* Practicando o mesmo a respeito de B, C.... obtem-se tantas equações similhantes quantas são as constantes incognitas; e como estas equações são do 1.° grão, a eliminação não offerece difficuldade.

Por ex., sabe-se pela Mechanica que debaixo da latitude y, o comprimento x do pendulo simples de segundos sexagesimaes tem por expressão $x = A + B \operatorname{sen}^2 y$, sendo A e B numeros invariaveis, que se tracta de determinar. Bastaria medir com cuidado os comprimentos x debaixo de duas latitudes differentes y, para obter duas equações de condição proprias para darem A e B.

Porém a precisão se tornará maior, se, como fizeram MM. Mathieu e Biot, se medir x debaixo de seis latitudes differentes, e se tractarem pelo methodo precedente as seis equações de condição. As quantidades $A + B \operatorname{sen}^2 y - x$, avaliadas em metros, dão estes seis erros:

$$A+B.0{,}3903417-0{,}9929750\,,\quad A+B.0{,}4932370-0{,}9934740$$

$$A+B.0{,}4972122-0{,}9934620\,,\quad A+B.0{,}5136117-0{,}9935967$$

$$A+B.0{,}5667721-0{,}9938784\,,\quad A+B.0{,}6045628-0{,}9940932.$$

Como o coefficiente de A é 1, a equação, que lhe diz respeito, é formada da somma dos seis erros. Em quanto a B, multiplicar-se-ha cada trinomio pelo factor que affecta B, e sommar-se-hão os productos: logo

$$6A + B.\ 3{,}0657375 - 5{,}9614793 = 0\,,$$

$$A.\ 3{,}0657375 + B.\ 1{,}5933894 - 3{,}061977 = 0.$$

Eliminando teremos A e B; finalmente, achar-se-ha

$$x = 0{,}9908755 + B \operatorname{sen}^2 y,\ \log B = \overline{3},7238509\,,\ B = 0{,}00529416.$$

Consulte-se *Conn. des Temps de* 1816, onde M. Mathieu discute por este methodo as observações do pendulo feitas pelos Hespanhoes em differentes latitudes.

Consulte-se tambem *Astronomie pratique* e *Géodésie* de Francoeur, onde esta materia vem tractada com a maior miudeza.

Consulte-se *Conn. des Temps* de 1816, onde M. Mathieu discute por este methodo as observações do pendulo feitas pelos Hespanhoes em differentes latitudes.

Consulte-se tambem *Astronomie pratique* ou *Géodésie* de Francoeur, onde esta materia vem tractada com a maior [illegible].

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO.

I. TRIGONOMETRIA ESPHERICA.

Noções fundamentaes.

166. SE tres planos MON, NOP, MOP (fig. 25), passando pelo centro de uma esphera, determinarem um angulo triedro O, da sua intersecção com a superficie da esphera resultarão circulos maximos, cujos arcos CA, CB, AB formarão sobre ella um *triangulo espherico* ABC. Os angulos planos do triedro O terão por medida respectiva os lados ou arcos deste triangulo, isto é, NOP a AB, MON a AC, MOP a BC. O angulo C do triangulo tem por medida o angulo que no ponto C fórmam as duas tangentes aos arcos contiguos AC e BC; e a inclinação d'estas tangentes, situadas nos planos d'estes arcos, é tambem a medida do angulo diedro formado por estes mesmos planos, isto é, da inclinação da face NOM sobre POM. Por conseguinte, *os angulos planos do triedro* O *são medidos pelos lados do triangulo espherico* ABC, *e as inclinações das faces são os angulos do triangulo.*

Os problemas em que se pedem as partes desconhecidas de um triangulo espherico por meio das que são dadas, são exactamente os mesmos que se appresentam, quando, conhecidos alguns elementos de um triedro, se pedem os outros. *Nos triangulos esphericos ha seis elementos a considerar, os tres angulos* A, B, C, *e os tres lados oppostos* a, b, c; *ou*, por outras palavras, *os tres angulos planos* a, b, c, *e os tres angulos diedros oppostos* A, B, C, *do triedro de que se tracta.*

A Trigonometria espherica tem por objecto o conhecimento de todas as seis partes de um triangulo espherico, sendo dadas as que bastam para determinar as outras.

Posto isto, se de um ponto O dirigirmos raios visuaes para tres pontos distantes M, N, P, situados no espaço, para tres estrellas por ex.º, estas linhas serão as arestas de um triedro O, cujos elementos constituintes serão os mesmos do triangulo espherico ABC, formado pelos arcos dos circulos maximos que unem os pontos em que estas arestas vão atravessar a superficie de uma esphera de raio arbitrario, cujo centro O se suppõe o ponto de partida dos raios visuaes.

D'estes principios deduzem-se os theoremas seguintes:

1.º Como qualquer angulo plano de um triedro é sempre menor que dous rectos, *será sempre cada um dos lados do triangulo espherico* $<180.°$ *Qualquer angulo será tambem sempre menor que dous rectos.*

Se no processo dos calculos encontrarmos um angulo, ou um lado de um triangulo, que tenha por valor um arco$>180°$, devemos regeitar essa solução, ou então substituir o supplemento do mesmo angulo ou arco: e os cos., sen., tang., etc., nunca poderão pertencer a um arco maior que a semicircumferencia.

2.º Como a somma dos angulos planos de qualquer angulo polyedro é sempre $<360.°$ (*Geom.* n.º 127), *será a somma dos tres lados de um triangulo espherico sempre* $<360°$.

3.º *Dous triangulos esphericos serão eguaes, quando os tres angulos, ou os tres lados, ou dous lados e o angulo comprehendido, ou dous angulos e o lado adjacente, forem respectivamente eguaes cada um a cada um.* Tanto estes theoremas, como os dous seguintes, demonstram-se do mesmo modo que os correspondentes nos triangulos rectilineos.

4.º *O arco abaixado perpendicularmente do vertice de um triangulo espherico isosceles sôbre a sua base, divide ao meio esta base, e o angulo do vertice; os angulos eguaes ficam oppostos aos lados eguaes, e reciprocamente.*

5.º *Nos triangulos esphericos o maior angulo fica sempre opposto ao maior lado, o medio ao medio, e o menor ao menor.*

6.º *Qualquer lado é sempre menor que a somma dos outros dous, e maior que a sua differença:* porque a somma de dous angulos planos de um triangulo triedro excede sempre o terceiro, e por conseguinte $a<b+c$, e $b<a+c$, ou $a>b-c$. Conseguintemente, *a semisomma dos tres lados de um* *triangulo excede sempre um lado qualquer :* por que de $b+c>a$ tira-se $b+c+a>2a$, ou $\frac{b+c+a}{2}>a$.

167. *Se de um ponto* O (fig. 26) *tomado dentro do angulo triedro* S, *abaixarmos as perpendiculares* OP, OQ, OR, *sobre as faces* ASB, ASC, BSC, *estas perpendiculares determinarão um novo angulo triedro, cujos angulos planos serão supplementos dos angulos diedros do angulo solido* S, *e cujos angulos diedros serão supplementos dos angulos planos do mesmo angulo solido.*

Com effeito :

1.° Os angulos planos do novo angulo triedro POQ, POR, QOR, formados pelas perpendiculares OP, OQ, OR, são supplementos dos angulos diedros formados segundo as rectas SA, SB, SC: por quanto sendo a face POQ perpendicular ás faces ASB, ASC do triedro S (*Geom.* n.° 119), tambem o será á intersecção d'ellas (*Geom.* n.° 120), ou á aresta SA; e determinará, pela sua intersecção com as duas faces, o angulo rectilineo que serve de medida ao angulo diedro formado segundo AS (*Geom.* n.° 118, 4.°). D'esta intersecção resulta um quadrilatero com dous angulos rectos em P e Q; e por conseguinte o angulo POQ será supplemento do angulo diedro segundo AS. O mesmo se demonstra a respeito dos outros angulos planos QOR, POR.

2.° Pela mesma razão, como já fica demonstrado que as arestas SA, SB, SC são perpendiculares ás faces do angulo solido O, concluiremos: que os angulos planos de S são supplementos dos angulos diedros de O, ou, reciprocamente, que os angulos diedros de O são os supplementos dos angulos planos de S.

Por causa d'estas propriedades, os angulos triedros S e O dizem-se *supplementares.* Estes triedros determinam dous triangulos esphericos taes, que os angulos de um são supplementos dos lados do outro, e reciprocamente. Logo: dado um triangulo espherico ABC com os angulos A, B, C, e lados a, b, c, é sempre possivel construir outro $A'B'C'$, cujos angulos A', B', C', e lados a', b', c', tenham com os do primeiro as relações seguintes :

$$a'=180°-A, \quad b'=180°-B, \quad c'=180°-C \ldots\ldots (1),$$

$$A'=180-a, \quad B'=180-b, \quad C'=180-c \ldots\ldots (2)$$

O triangulo assim construido chama-se *polar* ou *supplementar* do 1.°

Sommando as tres equações (1) temos

$$A+B+C=6 \text{ rectos}-(a'+b'+c');$$

e como já se viu que $a'+b'+c'<4$ rectos (n.° 166, 2.°), vê-se que $A+B+C>2$ rectos. Mas por outra parte, como qualquer dos angulos esphericos é sempre <2 rectos, temos $A+B+C<6$ rectos. Logo, *a somma dos angulos de qualquer triangulo espherico fica sempre comprehendida entre dous e seis angulos rectos.*

As equações (1) e (2) são de muita utilidade, porque reduzem a tres os seis problemas da trigonometria espherica, que consistem em achar tres dos seis elementos de um triangulo, conhecidos os outros tres. Se, por ex.°, soubermos achar os tres angulos A, B, C, por meio dos tres lados conhecidos a, b, c, podemos reciprocamente, dados os tres angulos A, B, C, achar um lado a, substituindo ao triangulo o seu supplementar $A'B'C'$, cujos lados são conhecidos pelas equações (1); e tendo achado um dos angulos A', a equação (2) dará o lado proposto $a=180°-A'$. De maneira, que sabendo resolver um triangulo no caso de serem dados os tres lados, fica tambem resolvido para o caso de serem conhecidos os tres angulos; e assim nos outros casos. Adiante se verá isto mais explicitamente.

168. Se o triedro O (fig. 27) for cortado por um plano pmn perpendicular a uma aresta OA, em um ponto m tal que seja $Om=1$, teremos

$$mn=\tang c,\quad On=\sec c,\quad mp=\tang b,\quad Op=\sec b.$$

Mas pela propriedade dos triangulos rectilineos (*Geom. anal.* n.° 201) é

$$np^2=mn^2+pm^2-2mn.pm.\cos A,$$

$$np^2=nO^2+pO^2-2nO.pO.\cos a.$$

Subtrahindo a 1.ª da 2.ª, temos, em virtude de serem os triangulos nmO, pmO, rectangulos em m, e de ser $Om=1$,

$$0 = 1 + 1 - 2 \sec c \,.\, \sec b \,.\, \cos a + 2 \operatorname{tang} c \,.\, \operatorname{tang} b \,.\, \cos \mathrm{A},$$

e, substituindo $\frac{1}{\cos}$ pela sec., e $\frac{\text{sen}}{\cos}$ pela tang.,

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos c \,.\, \cos b} + \frac{\text{sen}\, c \,.\, \text{sen}\, b \,.\, \cos \mathrm{A}}{\cos c \,.\, \cos b}.$$

D'aqui se deduz a *equação fundamental*

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\ \text{sen}\, c \cos \mathrm{A} \,\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Para os angulos b e c obteremos, pelo mesmo theor, fórmulas similhantes, e reunindo-as todas tres, teremos

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \text{sen}\, b\ \text{sen}\, c \cos \mathrm{A}, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \text{sen}\, a\ \text{sen}\, c \cos \mathrm{B}, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \text{sen}\, a\ \text{sen}\, b \cos \mathrm{C}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Estas equações, cada uma das quaes exprime uma relação *entre os tres lados e um angulo*, encerram implicitamente toda a Trigonometria espherica, visto que por ellas, sendo dadas tres das seis partes que entram no triangulo espherico, se podem calcular as tres restantes. Como porém seja conveniente, nos diversos casos, ter fórmulas que dêem immediatamente a incognita da questão, por isso passâmos a deduzir estas das fórmulas precedentes, combinando-as convenientemente. (*Nota* 5.ª)

1.° Temos

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\ \text{sen}\, c},$$

logo

$$1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\ \text{sen}\, c}\right)^2;$$

reduzindo o 2.° membro ao mesmo denominador, e substituindo depois sen^2 por $1 - \cos^2$ no numerador, vem

$$\text{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a . \cos b . \cos c}{\text{sen}^2 b\ .\ \text{sen}^2 c}.$$

Extrahindo a raiz quadrada, e dividindo ambos os membros por sen a, o 2.° membro torna-se n'uma *expressão symetrica* relativamente a a, b, c, isto é, n'uma expressão tal, que permanece a mesma quando quaesquer d'estas letras se mudam reciprocamente umas nas outras. Designando esta expressão por M, temos $\frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, a} = M$. Mudando n'esta equação A e a em B e b, e em C e c, como M persiste constante, deduz-se

$$\frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, b} = \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.)}$$

2.° Applicando á equação (3) a propriedade do triangulo supplementar (equações 1 e 2), isto é, mudando a em $180° - A$, e A em $180° - a$, etc. teremos

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen}\, B\ \text{sen}\, C \cos a \ldots\ldots \text{(4)}.$$

E reunindo esta com as duas que se obtém similhantemente, teremos

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \text{sen}\, B\ \text{sen}\, C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \text{sen}\, A\ \text{sen}\, C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \text{sen}\, A\ \text{sen}\, B \cos c. \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(III)}$$

3.° A fim de eliminar b da equação (3), substitua-se por cos b o seu valor (I), e $\frac{\text{sen B sen } a}{\text{sen A}}$ por sen b; e virá

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, c \cos c \cos B + \frac{\text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, c \,.\, \text{sen B} \,.\, \cos A}{\text{sen A}};$$

porém $\cos^2 c = 1 - \text{sen}^2 c$: logo, dividindo tudo por sen a sen c, será

$$\text{sen}\, c \cot a = \cos c \cos B + \text{sen B} \cot A \;\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

Esta equação dá *uma relação entre dous lados e dous angulos, sendo um dos angulos comprehendido por esses lados, e o outro opposto a qualquer delles.* Fazendo todas as combinações possiveis, deduzem-se mais cinco equações similhantes, que reunidas á antecedente, podem escrever-se

$$\left.\begin{aligned}
\cos B \cos c &= -\,\text{sen B} \cot A + \text{sen}\, c \cot a,\\
\cos A \cos b &= -\,\text{sen A} \cot C + \text{sen}\, b \cot c,\\
\cos C \cos a &= -\,\text{sen C} \cot B + \text{sen}\, a \cot b,\\
\cos B \cos a &= -\,\text{sen B} \cot C + \text{sen}\, a \cot c,\\
\cos A \cos c &= -\,\text{sen A} \cot B + \text{sen}\, c \cot b,\\
\cos C \cos b &= -\,\text{sen C} \cot A + \text{sen}\, b \cot a,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(IV.)}$$

Os quatro grupos de fórmulas (I), (II), (III), (IV), offerecem evidentemente todas as combinações que é possivel fazer *com tres quantidades conhecidas e uma incognita*, das seis que fórmam os elementos do triangulo espherico; e bastará nas differentes questões escolher d'entre as *quinze* equações aquella que convém, e tornal-a depois propria para o cálculo por logarithmos. Os tres primeiros tem os seguintes enunciados, faceis de conservar na memoria:

(I). *O coseno de um lado qualquer de um triangulo espherico é egual á somma do producto dos cosenos dos outros dous lados, mais o producto dos senos désses mesmos lados multiplicado pelo coseno do angulo opposto ao primeiro lado.*

(II.) *Nos triangulos esphericos os senos dos angulos são proporcionaes aos senos dos lados oppostos.*

(III.) *O coseno de um angulo é egual á somma algebrica do producto dos cosenos dos outros dous angulos, mais o producto dos senos desses mesmos angulos multiplicado pelo coseno do lado opposto ao primeiro angulo; devendo dar-se o signal negativo ao producto em que entram só angulos.* Este enunciado, prescindindo dos signaes, é o mesmo que o das fórmulas (I) mudando lado em angulo, e angulo em lado. A primeira consoante *n* que entra na palavra *angulo*, e que é ao mesmo tempo a inicial de *negativo*, servirá para recordar que no 2.° membro se deve dar o *signal negativo ao producto em que entram só angulos.*

Para reter na memoria o enunciado das fórmulas (IV), que exprimem, como já dissemos, a relação entre *dous lados*, *o angulo comprehendido e um opposto*, empregaremos o meio mnemonico lembrado por Delambre, Astr. T. I. cap. X., *Trig. mnem*, n.° 191 e seguintes, e que consiste em considerar as *quatro partes* do triangulo todas contiguas, sendo então *duas* d'ellas *medias*, e *duas extremas;* as *medias* um lado e um angulo, e as *extremas* outro lado e outro angulo. Reflectindo então nas seis fórmulas, vê-se que se podem traduzir pela maneira seguinte:

(IV). *O producto dos cosenos das partes medias é egual á somma dos productos dos senos das mesmas partes multiplicados pelas contagentes das extremas, lado com lado, e angulo com angulo:* sendo o producto em que entram *lados* positivo, e o producto em que entram *angulos* negativo. Para nos recordarmos dos signaes faremos a mesma observação que a respeito das fórmulas (III) (*a*)

(*a*) Delambre, no logar citado, menciona tambem a seguinte transformação notavel das fórmulas (IV), que lhe foi suggerida pela nosso Mestre o Sr. Manoel Pedro de Mello, Lente nesta Universidade. Dividindo por sen B sen c a 1.ª d'aquellas fórmulas, acha-se

$$\cot \mathrm{B} \cot c = \frac{\cot a}{\operatorname{sen} \mathrm{B}} - \frac{\cot \mathrm{A}}{\operatorname{sen} c};$$

e assim das outras. Podem pois enunciar-se da maneira seguinte, simples e facil de decorar-se: *O producto das cot. das partes medias é egual á somma das cot. das extremas divididas pelos senos das medias, lado com angulo e angulo com lado*; devendo dar-se o signal *negativo* á cot. em que entra *angulo*.

Triangulos esphericos rectangulos.

169. Designemos o angulo recto por A, e a hypothenusa por a (fig. 28); e pondo $A = 90°$ nas 1.as equações de (I) e (II), na 1.a e 2.a de (III), na 1.a e 5.a de (IV), teremos

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots\ldots\ldots (m),$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \ldots\ldots\ldots (n),$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots\ldots\ldots (p),$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b \ldots\ldots\ldots (q),$$

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \ldots\ldots\ldots (r),$$

$$\cot B = \cot b \operatorname{sen} c \ldots\ldots\ldots (s).$$

Estas seis equações, accommodadas ao calculo logarithmico, bastam para resolver em qualquer triangulo rectangulo o problema seguinte: *Dados dous dos cinco elementos* a, b, c, B *e* C, *achar os outros tres.* Assim a questão vem a depender de uma equação entre tres elementos, dos quaes um só é a incognita. Designando sempre por A o angulo recto, buscaremos aquella das seis equações que comprehende os tres elementos da questão; será necessario porém mudar algumas vezes o logar das letras B e C na figura.

Assim entrando

a hypothenusa a { um lado B angulo † {
- e dous angulos B, C, .. empregue-se a equação .. (p),
- e o lado .... { opposto b . . . . (n), adjacente c . . . . (r),
- dous lados b, c . . . . (m),

um lado b do angulo recto e os angulos B, C . . . . (q),
dous lados b, c do angulo recto e um angulo B . . . . (s),

O celebre Inventor dos Logarithmos, reflectindo sobre a organisação das fórmulas precedentes, conseguiu encerral-as em duas regras mui faceis de decorar, e vem a ser:

o coseno da parte *Media* = ao producto $\begin{cases}\text{dos senos das partes } \textit{Separadas} \\ \text{das cotang. das partes } \textit{Conjunctas.}\end{cases}$

Para se applicarem estas regras deve advertir-se:

1.° Que Neper não considera no triangulo rectangulo senão cinco partes, excluindo o angulo recto, que não entra explicitamente na solução, como vimos acima. Contando d'esta fórma, e entrando em qualquer questão sempre tres partes, duas *dadas*, e uma *pedida:* é facil de ver, que uma das tres será equidistante das outras duas, ou *media* entre ellas, ficando-lhe as outras duas: ou contiguas, em cujo caso se chamam *conjunctas;* ou egualmente *separadas* por outras partes que não entram na questão, visto que, ao todo, não são senão cinco. É isto o que Neper entende por *partes medias*, *partes conjunctas*, *e partes separadas.* A primeira cousa que se deve fazer, é distinguir na figura quaes ellas são, o que é facil.

2.° Que em logar dos lados, que formam o angulo recto, se ha-de tomar o seu complemento, isto é, tomar d'elles o seno, o coseno ou a tangente, quando pelas regras se houvesse de tomar o coseno, o seno ou a cotangente.

Estas regras têm a vantagem de se tomarem facilmente de memoria pela *symetria de linguagem*, por assim dizer, com que se exprimem em portuguez, correspondendo *senos* ás partes *separadas* e *cotangentes* ás *conjunctas.*

170. A respeito das fórmulas precedentes faremos ainda as seguintes observações.

1.° Da equação (m) conclue-se que *o coseno da hypothenusa é egual ao producto dos cosenos dos outros dous lados;* e por conseguinte, que um dos tres lados é $<$ou$>$ 90°, conforme forem os outros dous lados da mesma ou differente especie, isto é, conforme forem conjunctamente ou $<$ou$>$ 90.°, ou conforme fôr um d'elles $<$e o outro$>$ 90.°; porque os cosenos dos arcos$>$ 90.° são negativos.

2.° A equação (p) faz ver que, se compararmos a hypothenusa com os dous angulos adjacentes B e C, um d'estes tres arcos é $<$ ou $>$ 90°, segundo forem os outros dous arcos da mesma ou differente especie.

3.° As equações (q ou s) mostram que qualquer dos angulos B e C é sempre da mesma especie que o lado opposto.

4.° Vê-se tambem pela equação (r) que a hypothenusa e um dos lados são da mesma especie, quando o angulo comprehendido é $< 90°$, e de differente especie quando este angulo é $> 90°$.

5.° Finalmente se o lado b do angulo recto for $= 90°$; será $\cos b = 0$, e (pelas equações (m) e (q)) $\cos a = 0$, $\cos B = 0$: d'onde se conclue que neste caso os lados CA, CB serão cada um de 90.° e perpendiculares sôbre AB; o triangulo será isosceles *birectangulo;* e C toma o nome de *pólo* do arco AB (fig. 28), em consequencia de ficar á distancia de 90° de todos os pontos d'este arco.

171. Posto que estas fórmulas resolvem todos os casos dos triangulos rectangulos, cumpre todavia notar que os valores das incognitas não se obterão com precisão, quando os arcos, sendo muito pequenos, vierem expressos em cosenos; ou quando, sendo vizinhos de 90°, forem dados por senos.

Para obviar a este inconveniente, recorremos aos artificios seguintes.

1.° Temos (P. II, pag 162) $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

e por isso, se for pedida a hypothenusa a sendo conhecidos B e C, a equação (p) torna-se em

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos B \cos C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos(B + C)}{\cos(B - C)} \ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

equação onde se vê, que *a somma dos dous angulos* B *e* C é $> 90°$, por que o 2.° membro, que tem o signal $-$, deve ser positivo.

2.° Do mesmo modo, se procurarmos um lado b do angulo recto conhecidos os angulos B e C, temos pela equação (q) $\cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$, e fazendo $z = 90° - B$, que dá $\cos B = \operatorname{sen} z$, e $\cos b = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C}$; teremos (pela equação citada e pelo n.° 206 P. II.)

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} b = \frac{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} z} = \frac{\tang \frac{1}{2}(C - z)}{\tang \frac{1}{2}(C + z)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} b = \sqrt{}(\tang [\tfrac{1}{2}(B - C) + 45°] \tang [\tfrac{1}{2}(B + C) - 45°]) \ldots (7)$$

3.° Conhecida a hypothenusa a e um lado c, se quizermos achar o lado adjacente B, teremos pela equação (r)

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \tang c \cot a}{1 + \tang c \cot a} = \frac{\cos c \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \cos a}{\cos c \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} c \cos a},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}(a - c)}{\operatorname{sen}(a + c)}\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Para que esta expressão se não torne imaginaria, é necessario que $a - c$ e $a + c$ tenham o mesmo signal; por conseguinte sendo $a + c > 180°$, deve ser a hypothenusa $a < c$. Logo se o triangulo tiver angulos obtusos, não será a hypothenusa o maior lado. É isto com effeito o que se torna evidente na figura 31.

4.° A equação (m) dá $\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b}$,

logo $$\tang^2 \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2}(a + b) . \tang \tfrac{1}{2}(a - b) \ldots\ldots\ldots (9)$$

5.° Finalmente se for pedido um lado b, conhecidos o angulo opposto B e a hypothenusa a, em vez de empregar a equação (n) quando b for vizinho de 90°, tome-se

$$b = 90° - 2z, \ \tang x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B;$$

o que reduz a equação (n) a $\cos 2z = \operatorname{tang} x$, ou

$$\operatorname{tang}^2 z = \frac{1 - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} x} = \operatorname{tang.} (45° - x);$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tang} (45° - \tfrac{1}{2} b) = \sqrt{\operatorname{tang} (45° - x)} \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Calcula-se o arco x por meio da equação $\operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, e a última dará o valor de b.

Appresentâmos na tabella seguinte os cinco elementos constituintes de um triangulo espherico rectangulo, a fim de poder servir de exercicio para a applicação numerica das fórmulas, tomando á escolha dous d'estes elementos, e calculando por meio d'elles os tres restantes.

Triangulo rectangulo de prova.

ELEMENTOS.	LOG. SEN.	LOG. COSEN.	LOG. TANG.
$a = 71°24'30''$	$\bar{1}.9767235$	$\bar{1}.5035475 +$	$0.4731759 +$
$b = 140.52.40$	$\bar{1}.8000134$	$\bar{1}.8897507 -$	$\bar{1}.9102626 -$
$c = 114.15.54$	$\bar{1}.9598303$	$\bar{1}.6137969 -$	$0.3460333 -$
$B = 138.15.45$	$\bar{1}\ 8232909$	$\bar{1}\ 8728568 -$	$\bar{1}.9504341 -$
$C = 105.52.39$	$\bar{1}.9831068$	$\bar{1}.4370867 -$	$0.5460201 -$

O signal — posto á direita de muitos d'estes logarithmos serve para indicar que o factor correspondente é negativo; e não deve confundir-se com os signaes — collocados á esquerda dos log., que, como é sabido, indicam que devem ser subtrahidos, como acontece nas divisões. Conforme for par ou impar o numero dos factores negativos de uma fórmula, assim o producto terá o signal $+$ ou $-$, circunstancias que deve haver cuidado em notar; porque, por ex.°, tang a dá para a um arco $<90°$, quando esta tangente é positiva, e o supplemento d'este valor quando a tangente é negativa.

Triangulos esphericos obliquangulos.

172. Percorramos todos os casos que podem apresentar-se (fig. 28).

1.° Caso *Dados os tres lados* a, b, c, *achar o angulo* A?

A 1.ª das equações (I) dá, substituindo nella $1-2\ \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2}\mathrm{A}$ por cos A:

$$\cos a = \cos(b-c) - 2\ \mathrm{sen}\, b\ \mathrm{sen}\, c\ \mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A}, \ \ldots\ldots\ (11).$$

ou $$2\ \mathrm{sen}\, b\ \mathrm{sen}\, c\ \mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \cos(b-c) - \cos a,$$

ou, P. II. pag. 164, (*)

$$\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathrm{sen}\, b\ \mathrm{sen}\, c}.$$

Esta equação, accommodada ao cálculo logarithmico, dá o valor do angulo A. Póde tornar-se mais symetrica, fazendo

$$2p = a+b+c,$$

que dará

$$\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \frac{\mathrm{sen}\,(p-b)\,.\,\mathrm{sen}\,(p-c)}{\mathrm{sen}\, b\ \mathrm{sen}\, c} \ \ldots\ldots\ldots\ (12).$$

(*) Como o 1.° membro é essencialmente positivo, bem como sen b e sen c (porque b e c são $<180°$), vê-se a necessidade de ser ao mesmo tempo $c<b+a$, e $c>b-a$, por isso que as relações contrarias são visivelmente absurdas; e recahe-se assim no theorema 6.° do n.° 166.

Se na 1.ª das equações (I) substituissemos $2\cos^2\frac{1}{2}A - 1$ em logar de cos A, achariamos identicamente

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Finalmente, dividindo a 1.ª d'estas equações pela 2.ª, temos

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Qualquer d'estas equações resolve a questão.

2.° Caso. *Dados os tres angulos* A, B, C, *achar o lado* a?

Da propriedade do triangulo supplementar (pag. 315.) applicada ás equações precedentes, pela substituição dos valores (1) e (2), e fazendo

$$2P = A + B + C,$$

resulta
$$\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos P \cos(P-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C},$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos P \cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}.$$

3.° Caso. *Dados dous lados* a *e* b, *e o angulo comprehendido* C, *achar o terceiro lado?*

Póde lançar-se mão da última das equações (I) debaixo da fórma seguinte

$$\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \operatorname{tang} a \tan b \cos C.)$$

Ou então, fazendo na mesma equação,

$$\cos C = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} C - 1\,,\quad \cos c = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} c\,,$$

vem

$$1 - 2\,\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \cos(a+b) + 2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$= 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) + 2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b \cos^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Tomando um arco v tal, que dê $\mathrm{sen}\,v = \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b}$, teremos

$$\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) - \mathrm{sen}^2 v\,,$$

ou, Part. II, n.° 207,

$$\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b+2v)\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b-2v)\,,$$

equação mais accommodada ao calculo logarithmico, e da qual se deduzem facilmente, por simples permutações, as correspondentes nos outros lados.

4.° Caso. *Dados dous angulos* A e B, *e o lado adjacente* c, *achar o terceiro angulo* C?

A 3.ª das equações (III) dá

$$\cos C = \cos A \cos B\,(\mathrm{tang}\,A\,\mathrm{tang}\,B \cos c - 1).$$

Podemos tambem substituir os valores (1) e (2) nas fórmulas precedentes, e teremos

$$\mathrm{sen}\,v = \mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2} c \sqrt{\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B}\,,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B+2v)\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B-2v).$$

5.° Caso. *Conhecidas tres das quatro partes, dous lados e os angulos oppostos, achar a quarta?*

Deve empregar-se a *regra dos quatro senos*, equações (II).

173. Excepto o caso de serem conhecidos os tres lados ou os tres angulos de um triangulo, todo o problema de trigonometria espherica comprehende no numero das partes dadas um angulo e um lado adjacente, além de um terceiro elemento: no que vamos expor, designaremos sempre este angulo por A, e o lado por b.

Abaixe-se de um dos angulos C (fig. 29) um arco CD perpendicular sôbre o lado c. Este lado ficará cortado em dous segmentos φ e φ', e o angulo C em dous angulos θ e θ', isto é,

$$c = \varphi + \varphi', \quad D = \theta + \theta'.$$

Cumpre porém advertir: *que uma d'estas partes será negativa nas differentes equações, se o arco perpendicular caír fóra do triangulo, o que se dá quando um dos angulos* A *da base é agudo e o outro* B *é obtuso: e que serão todas as partes positivas, quando o arco caír dentro do triangulo, isto é, quando os dous angulos dados forem da mesma especie.*

Com effeito, se nos dous triangulos ACD, BCD, tirarmos os valores do arco perpendicular CD, por meio da equação (s), acharemos

$$\text{tang CD} = \text{tang A sen } \varphi = \text{tang B sen } \varphi'.$$

Sendo A e B da mesma especie, as suas tangentes terão o mesmo signal, e por conseguinte sen φ e sen φ' estarão no mesmo caso. Se A e B forem porém de especie differente, sen φ e sen φ' devem ter signaes contrarios; então o arco perpendicular CD cairá fóra do triangulo, e sómente um dos segmentos φ e φ' será negativo.

174. Vê-se na fig. 29 que o triangulo ABC se decompõe em dous ACD, BCD que podemos resolver separadamente, achando assim os elementos desconhecidos por meio dos que são dados. Este processo leva-nos a equações simples, ás quaes facilmente se applica o calculo por logarithmos, como passâmos a mostrar.

Resolvem-se primeiro os triangulos ACD, BCD, para d'elles deduzir uma das partes φ ou θ, do lado c ou do angulo C, suppondo conhecidos o angulo A e o lado adjacente b. Applicando as equações (r e p), deduzem-se as equações (a e a'). Applicando depois em cada um d'estes triangulos as equações (m, q, s, r), e eliminando o arco perpendicular CD em cada systema de duas analogas, obtem-se as equações (c, c', d, d').

$$\text{Tang } \varphi = \text{tang } b \cos A \ldots . \ (a); \qquad \cot \theta = \cos b \text{ tang } A \ldots \ldots (a')$$

$$c = \varphi + \varphi' \ldots \ldots \ldots (b); \qquad C = \theta + \theta' \ldots \ldots \ldots \ldots (b')$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \ldots \ldots \ldots (c); \qquad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta'} \ldots \ldots \ldots (c')$$

$$\frac{\text{tang } A}{\text{tang } B} = \frac{\text{sen } \varphi'}{\text{sen } \varphi} \ldots \ldots \ldots (d); \qquad \frac{\text{tang } a}{\text{tang } b} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \ldots \ldots \ldots (d')$$

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c} \ldots \ldots \ldots (e)$$

Passâmos a ver os casos que podem appresentar-se, e a maneira de os resolver por meio d'estas equações.

Além das partes dadas A *e* b, ha mais um 3.° elemento.

1.° Se for conhecido c (*dous lados* b *e* c, *e o angulo comprehendido* A) a equação (a) dá φ; (b) dá φ', podendo estes arcos ter o signal negativo; (c) dá a; (d) dá B; e finalmente (e) dá C, cuja especie se determinará pelo que fica dito no n.° 173.

2.° Se for conhecido C (*dous angulos* A *e* C *e o angulo adjacente* b) a equação (a') dá θ; (b') dá θ', que póde ser negativo; (c') dá B; (d') dá a; (e) dá c, cuja especie é conhecida.

3.° Se for conhecido a (*dous lados* a *e* b, *e o angulo opposto* A) a equação (a) dá φ; (c) dá φ'; (b) dá c; (d e e) dão B e C. Ou então (a') dá θ; (d') dá θ'; (b') dá C; (c' e e) dão B e c.

N'este caso o problema offerece geralmente duas soluções; porque se calcularmos φ' ou θ' por meio do coseno, o arco apparece com os dous signaes $\pm$; c e C tem por conseguinte dous valores, excepto se tivermos de rejeitar algum, como negativo ou $>180.°$ As equações (c' e d) dão φ' e θ' por meio dos seus senos, d'onde resultam dous valores para C e c.

4.° Se for conhecido B (*dous angulos* A e B, *e o lado opposto* b) a equação (a') dá θ; (c') dá θ'; (b') dá C; (d'e e) dão a e c. Ou então (a) dá φ; (d) dá φ'; (b) dá c; (c e e) dão a e c.

Tambem neste caso ha duas soluções, porque φ' e θ' sendo dados em senos, o arco tem dous valores supplementares; e por tanto c na equação (b), e a na equação (d'), apparecem com dous valores: o mesmo acontece com a e C nas equações (c e b'); etc.

Os quatro casos que analysámos, resolvem-se, como acabâmos de ver, por qualquer dos dous systemas das oito equações, um formado das equações sem accento, e outro das accentuadas. Sendo commum a ambos a equação (e) (*).

175. D'estas equações deduzem-se as seguintes consequencias importantes (fig. 29).

1.° A equação (c) dá

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi'}{\cos\varphi + \cos\varphi'},$$

e em virtude das equações de pag. 165, *Part.* 2.ª, e por ser $c = \varphi + \varphi'$, temos

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)\cot\tfrac{1}{2}c\ldots\ldots \quad (15)$$

Conhecidos a tres lados a, b, c de um triangulo, podemos por meio d'esta equação conhecer a semidifferença dos segmentos φ e φ', e conseguintemente os mesmos segmentos, por ser $\frac{1}{2}c$ a sua semisomma: e

(*) Querendo resolver um triangulo espherico, conhecidos dous lados e um angulo, ou dous angulos e um lado, abaixa-se de um dos vertices um arco perpendicular sôbre o lado opposto, a fim de formar dous triangulos rect angulos, um dos quaes, além do angulo recto, tenha duas partes conhecidas. Está claro, que este arco não deve partir do angulo dado no 1.° caso, nem caír no lado conhecido no 2.° Resolva-se este triangulo rectangulo, e calculem-se os dous segmentos da base φ e φ', ou os dos angulos do vertice θ e θ'. As equações (c), (c'), (d), (d') podem enunciar-se da maneira seguinte.

1.° Os cos dos dous lados do angulo, d'onde parte o arco perpendicular, estão entre si como os cos dos segmentos respectivos da base; as cot. d'estes lados estão como as cot. respectivas dos segmentos do angulo no vertice.

2.° As cot. dos dous angulos na base estão como os senos respectivos dos segmentos da base; os cos d'estes angulos estão como os senos dos segmentos respectivos do angulo no vertice.

depois resolvendo os triangulos rectangulos ACD, BCD, obtem-se os angulos A e B, pela fórmula

$$\cos A = \operatorname{tang} \varphi \cot b, \quad \cos B = \operatorname{tang} \varphi' \cot. a \; \ldots\ldots \quad (16)$$

2.° A equação (d) dá do mesmo modo [veja-se *Part.*2.ª n.° 206 e equação (b]:

$$\frac{\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B} = \frac{\operatorname{sen} \varphi' - \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{sen}(A - B)}{\operatorname{sen}(A + B)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Conhecidos dous angulos A *e* B, *e o lado adjacente* c, por meio d'esta equação obteremos φ e φ' e depois determinar-se-hão a e b por meio das equações (16).

3.° A equação (c') dá, practicando da mesma maneira,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \ldots . \quad (18)$$

Conhecidos os tres angulos A, B, C; obteremos por meio d'estas equações θ e θ'; e obteremos depois os lados a e b, resolvendo os triangulos ACD e BCD, que dão

$$\cos b = \cot \theta \cot A, \quad \cos a = \cot \theta' \cot B \; \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

4.° Finalmente pela equação (d') teremos tambem

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\operatorname{sen}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2} C \; \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Conhecidos dous lados a, b, *e o angulo comprehendido* C, obteremos θ e θ', e depois A e B pelas equações (19).

176. As equações que acabâmos de deduzir, servem tambem para demonstrar os theoremas conhecidos pelo nome de *analogias de Neper*. Egualando os valores (15) e (17) de $\tang \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$ teremos, por ser $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) \cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c \,..\, (21)$$

Mas pela equação (e) temos $\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b} = \dfrac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}$;

logo (*Part.* 2.ª n.° 206) $\dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b)} = \dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)}$.

Multiplicando ambos os membros da equação (21) por esta última equação, todos os termos que não desapparecem pela divisão, ficam no quadrado; e extrahindo a raiz, vem

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b) &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c, \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + b) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \ (*) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (22)$$

resultando a 2.ª d'estas equações da divisão da equação (21) pela 1.ª

Egualando os valores (18 e 20) de $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\theta' - \theta)$, e operando da mesma maneira sôbre a equação resultante; ou, o que val o mesmo, mudando nas equações precedentes os angulos A e B nos supplementos dos lados a e b, e reciprocamente, e depois $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c$ em $\cot \frac{1}{2} C$: obteremos

(*) Como $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c . \cos \frac{1}{2}(A - B)$ é uma quantidade positiva, é necessario que $\operatorname{tang}. \frac{1}{2}(a + b)$ e $\cos \frac{1}{2}(A + B)$ tenham o mesmo signal; donde se conclue que *a semisomma de dous angulos quaesquer é sempre da mesma especie que a semisomma dos dous lados oppostos; e reciprocamente.*

$$\left.\begin{aligned} \tang \tfrac{1}{2}(A - B) &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2} C, \\ \tang \tfrac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cot \tfrac{1}{2} C. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (23)$$

São estas as chamadas *analogias de Neper :* e servem principalmente para achar dous lados a e b de um triangulo, conhecido o 3.° lado c, e os angulos adjacentes A e B (equações 22); ou para achar dous angulos A e B, conhecidos os dous lados oppostos a e b, e o angulo comprehendido C (equações 23).

177. *Triangulos isosceles.* Sejam C e B os dous angulos eguaes de um triangulo isosceles (fig. 29 rep.); b e c os dous lados eguaes; A o angulo do vertice, e a a base. O arco perpendicular, tirado do vertice para o meio da base, dá dous triangulos symetricos rectangulos, os quaes offerecem as seguintes relações formadas das combinações 3 a 3 dos quatro unicos elementos A, B, a, b, do triangulo isosceles. Assim, por meio d'estas relações, *dados dous dos quatro elementos de um triangulo espherico isosceles, o angulo* A *do vertice, a base* a, *um dos lados eguaes* b, *e um dos angulos eguaes* B, *podemos sempre achar os outros dous.*

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \operatorname{sen} b \dots\dots\dots\dots (n)$$

$$\cos b = \cot B \cot \tfrac{1}{2} A \dots\dots\dots\dots (p)$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \tang b \cos B \dots\dots\dots\dots (r)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \dots\dots\dots\dots (q)$$

Problemas que offerecem duas soluções.

178. Continuaremos a considerar os triangulos esphericos como resultando da secção de uma esphera por tres planos que passam pelo centro O. A fig. 31 tem por base o circulo KMK′, e representa um hemis-

pherio separado por um d'estes planos; os outros dous planos dão as semicircumferencias $AC\alpha$, BCB'', que na fig. se representam em prespectiva, e tem por intersecção o raio CO. Os planos das tres circumferencias determinam o triangulo espherico ABC. Os arcos CA, $C\alpha$ são supplementares; e o angulo A mede a inclinação do plano $AC\alpha$ sôbre a base KK'.

Se pelo raio CO tirarmos o plano MCm, perpendicularmente a esta base KK', e tomarmos depois $MA'=MA$, de uma e de outra parte d'este plano MCm, obteremos um segundo plano $A'C\alpha'$ symetrico com $AC\alpha$, que dará

$$m\alpha = m\alpha',\ AC = A'C,\ C\alpha = C\alpha',\ A = A' = \alpha = \alpha'.$$

Fazendo girar o plano $AC\alpha$ em volta do raio CO, a fim de tomar todas as posições CK, CB, Cf....., este plano será perpendicular á base quando coincidir com MCm; e além disto, em qualquer das suas posições formará com a base dous angulos supplementares, para um e para outro lado do plano. Os arcos CB, CA, Cf...., crescem á medida que se desviam do arco perpendicular $CM = \psi$, que é o mais pequeno de todos, até ao arco perpendicular opposto Cm, que é o maior. Isto mesmo se vê resolvendo qualquer dos triangulos, ACM por ex.°; porque fazendo $CA = b$, temos

$$\cos ACM = \cot b \tang \psi,$$

expressão na qual é $\tang \psi$ uma quantidade constante.

Quando o angulo ACM chega a 90°, como acontece com o arco CK, cujo plano é perpendicular a MCm, temos $\cot b = 0$, e o arco $CK = 90.°$ Se o plano continúa depois a girar para $C\alpha'$, cos ACM torna-se negativo, e cresce com $\cot b$; de maneira que o arco $C\alpha'$ continúa a augmentar. Tudo é symetrico dos dous lados do plano MCm, de maneira que os arcos e as inclinações serão eguaes, dous a dous para os arcos eguaes $MA=MA'$, isto é, será $CA = CA'$, e o angulo $A=A'$.

Girando por esta fórma, o plano secante começa por tornar-se cada vez mais obliquo sôbre a base KMK', tornando-se CB, CA, CK; porque do triangulo rectangulo resulta ainda

$$\operatorname{sen} \psi = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

equação, cujo primeiro membro é constante, e na qual sen b vai primeiramente crescendo, como acaba de dizer-se, e por conseguinte sen A decrescendo ao mesmo tempo. Porém logo que o lado b chega a 90°, torna-se então CB em $CK = 90° = MK$; e depois sen b diminuindo faz com que sen A augmente, e com que o angulo A, agudo para a base, tendo chegado ao seu menor valor no ponto K, comece a crescer. Este ponto K é o *polo* da semicircumferencia MCm, e o angulo K tem por medida o arco $CM = \psi = K$; ou, do outro lado do plano secante, o arco $Cm = 180 - \psi$.

Vê-se pois que todos os arcos que partem de C (fig. 31), e passam por um ponto qualquer da base do semicirculo KMK′ são $<90°$, entre tanto que os outros que passam por KmK′ são$>90°$; e é $CK=CK'=90.°$ Além disto $CM = \psi$, e $Cm = 180° - \psi$, valores de ψ resultantes da equação (24), são os limites da grandeza dos arcos CA. Quanto mais um arco se approxima de CM, mais pequeno é; e quanto mais se approxima de Cm, pelo contrario tanto maior se torna.

A inclinação dos planos sôbre a base, sendo de 90° em MCm, diminue quando toma as posições CB, CA, até CK, onde se torna $K=\psi$; cresce depois até m, tornando-se outra vez de 90° em Cm. O angulo é agudo do lado de CM, e obtuso do lado de Cm, sendo estes ultimos angulos supplementos respectivos dos primeiros. Todos estes angulos obtusos são $<180° - \psi$.

Posto isto, com facilidade se reconhecerá, se n'um triangulo BCA ou B′CA, ou arco CM perpendicular sôbre a base AB, cae dentro ou fóra d'este triangulo, e verificar-se-hão os corollarios deduzidos no n.° 169, relativos á grandeza dos lados e dos angulos dos triangulos rectangulos.

Os problemas que offerecem duas soluções, aos quaes se costuma dar o nome de *casos duvidosos*, são aquelles, em que entram, nos dados, um angulo e um lado opposto, o que acontece nos problemas 3.° e 4.° do n.° 174.

179. 1.° Caso. *Sendo dados dous lados* a *e* b *e o angulo opposto* A. Corte-se o hemispherio KMK′ (fig. 31) por um plano ACα que passe pelo centro O, e que tenha com a base uma inclinação egual ao angulo A; e tome-se depois $AC = b$. Será C o vertice do triangulo, o qual deve ser fechado por um arco $CB = a$, de grandeza dada. Percorrâmos os differentes casos.

1.° *Supponhamos que é o angulo* $A<90.°$ O lado a que fecha o triangulo deverá então caír no espaço α A′MA; por que, se assim não fosse, e caísse como Cf, $C\alpha'$, . . . então os triangulos CAf, $CA\alpha'$, ... teriam, em vez do angulo agudo A, outro que sería o seu supplemento, do outro lado do plano αCA. Os arcos, taes como CB e CB$'$, são eguaes dous a dous, e tem a mesma inclinação sôbre a base, quando passam por pontos B e B$'$ equidistantes de M. Tomemos MA$'$=MA, MB$'$=MB, os arcos serão CB$'$=CA=b, CB$'$=CB=a.

a) Consideremos primeiro o caso em que é *o lado* $b<90°$, por ex.° $b=$CA.

Se é *o lado* $a<b$, *a* cae no angulo A$'$CA, como CB e CB$'$, e temos dous triangulos BCA e B$'$CA, em que entram os tres elementos A, b, a, isto é, temos *duas soluções*. N'este caso um dos angulos B da base é obtuso, e o outro B$'$ é agudo.

Se é *o lado* $a=ou>b$, o arco *a* cae como Cf', e o triangnlo ACf' é o unico que reune os tres elementos dados, visto que o arco Cf symetrico com Cf', fica excluido, por estar para o outro lado do plano αCA. Por tanto ha *só uma solução*. O angulo B do triangulo ACf' é agudo em f', bem como b.

b) Consideremos em segundo logar o caso em que é *o lado* $b>90°$, por ex.° $b=C\alpha$.

Se é *a somma dos lados* $a+b<180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço ACA$'$, como CB ou CB$'$, ha *duas soluções* BCα e B$'$Cα. O angulo B da base destes triangulos é agudo n'um, obtuso n'outro.

Se é *a somma dos lados* $a+b=ou>180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço A$'$Cα, como Cf', ha *só uma solução* $f'C\alpha$; f' e b são obtusos.

2.° *Supponhamos* agora *que é o angulo* $A>90.°$ N'este caso o lado *a* que fecha o triangulo, partindo de C, deve estar para outro lado do plano αCA, e cair como Cf, CB$''$, ...

a') Consideremos tambem em primeiro logar o caso em que é *o lado* $b<90°$, por ex.° $b=$CA.

Se é *a somma dos lados* $a+b>180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço $\alpha'C\alpha$, como CB$''$ ou CB$'''$, ha *duas soluções*, taes como ACB$''$ e ACB$'''$. Um dos dous angulos da base, B$''$ e B$'''$, é agudo, o outro obtuso.

Se é *a somma dos lados* $a+b=ou<180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço ACα', como CK, ha *só uma solução* ACK. O angulo K da base é agudo como b.

b') Consideremos em segundo logar o caso em que é *o lado* $b>90°$, por ex.° $b=C\alpha$.

Se é *o lado* a>b, *a* cae no espaço $\alpha C\alpha'$, como CB'' e CB''', e ha duas soluções taes como $\alpha CB''$ e $\alpha CB'''$. O angulo da base B''' é agudo; o angulo B'' obtuso.

Se é *o lado* $a = ou < b$, *a* cae, como CK, no espaço $\alpha' CA$, e ha *só uma solução* possivel $KC\alpha$. O angulo K da base é obtuso com *b*.

Na seguinte tabella appresentâmos em resumo os differentes caracteres, que indicam a existencia de duas ou de uma só solução.

$$\text{Se } A<90^\circ \begin{cases} b<90^\circ \begin{cases} a<b \ldots\ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a \begin{Bmatrix} = \\ > \end{Bmatrix} b \ldots\ldots\ldots \text{ uma solução} \end{cases} \\ b>90^\circ \begin{cases} a+b<180^\circ \ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a+b \begin{Bmatrix} = \\ > \end{Bmatrix} 180^\circ \ldots \text{ uma solução} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Se } A>90^\circ \begin{cases} b<90^\circ \begin{cases} a+b>180^\circ \ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a+b \begin{Bmatrix} = \\ < \end{Bmatrix} 180^\circ \ldots \text{ uma solução} \end{cases} \\ b>90^\circ \begin{cases} a>b \ldots\ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a \begin{Bmatrix} = \\ < \end{Bmatrix} b \ldots\ldots\ldots \text{ uma solução.} \end{cases} \end{cases}$$

Viu-se pela analyse precedente, que, no caso de uma só solução, B e *b* são da mesma especie. Mas sabemos (n.° 173) que a perpendicular abaixada do vertice C sobre a base *c*, cae dentro ou fóra do triangulo (o que tambem se reconhece na fig. 31), conforme os angulos A e B da base são de similhante ou differente especie; por conseguinte *nas equações* $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, *empregar-se-ha o signal* + *quando os arcos* A e b *forem da mesma especie*, *e* — *no caso contrario*, *o que indicará qual das soluções*, *que dá o calculo* n.° 174, 3.°, *se deve adoptar.*

Cumpre notar que o valor do lado *a* está entre os limites CM e C*m*, isto é, entre ψ e $180^\circ - \psi$, como se deduz não só da equação (24), mas tambem da impossibilidade de construir o triangulo, quando *a* está fóra d'estes limites. Vê-se tambem na figura que no caso de A e *a* não serem da mesma especie, e de não estar o lado a comprehendido entre os limites b e $180° - b$, não ha triangulo possivel.

180. 2.° Caso. *Sendo dados dous angulos* A *e* B, *como um lado opposto* a.

Sem ser necessario discutir as differentes circumstancias na figura, este caso se reduzirá ao precedente pela consideração do triangulo supplementar A′B′C′ (n.° 167), no qual são conhecidos os lados $a' = 180° - A$, $b' = 180 - B$, e o angulo $A' = 180 - a$. E podemos servir-nos da tabella de cima, mudando os angulos nos lados oppostos, e reciprocamente.

Como neste caso B e b são da mesma especie quando ha só uma solução, vê-se, raciocinando como no caso precedente, que: *nas equações* $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, *se deve empregar o signal* $+$, *quando os arcos* B *e* a *forem da mesma especie, e o signal* $-$ *no outro caso; o que indicará qual das duas soluções, que dá o calculo* n.° 174, 4.°, *se deve adoptar ou rejeitar.*

O angulo A deve tambem neste caso ficar comprehendido entre os valores supplementares de ψ dados pela equação (24).

Não ha triangulo possivel, quando A e a não forem da mesma especie, e não estiver A entre os limites B e $180 - B$.

181. *Sendo o triangulo rectangulo*, e CM ou Cm um dos lados, se for dado um angulo e o lado opposto, haverá duas soluções, que em certos casos poderão reduzir-se a uma só.

1.° *Dada a hypothenusa* a *e um lado* b, *achar o angulo opposto* B? A equação (n) que resolve este caso, dá b expresso em senos, os quaes correspondem a dous arcos supplementares.

Dada a hypothenusa a *e o angulo* B, *achar o lado opposto* b? A mesma equação (n) dá dous arcos supplementares para o lado opposto b.

Com tudo, em ambos estes dous casos não ha senão uma solução possivel, porque os dous arcos CA ou CA′, que fecham o triangulo CMA ou CMA′, são symetricos; e por isso devem B e b ser da mesma especie, o que faz desapparecer a indecisão.

2.° *Se forem dados um lado* b *do angulo recto e o angulo opposto* B, *a terceira parte pedida admittirá dous valores.* Porque, ou se pede a hypothenusa a, e a equação (n) dá sen a; ou se pede o terceiro lado c, e a equação (s) dá sen c; ou finalmente se pede o angulo C adjacente ao lado conhecido, e emprega-se a equação (q), que dá sen C. Vê-se pois que a incognita admitte dous valores supplementares para o arco correspondente a cada um d'estes senos.

182. Passemos a fazer algumas applicações numericas.

I. Sejam $a=133°\ 19'$, $b=57°\ 28'$, $A=45°\ 23'$. O triangulo é impossivel, porque a não está entre $57°\ 28'$, e o seu supplemento $122°\ 32'$; e porque alem disso não são A e a da mesma especie.

II. Outro tanto acontecerá se for $B=120°$, $A=51°$, $a=101°$; porque tambem A não está entre $120°$ e o seu supplemento $60°$; e porque A e a não são da mesma especie.

III. Se for $b=40°\ 0'\ 10''$, $a=50°\ 10'\ 30''$, $A=42°\ 15'\ 14''$, haverá uma unica solução, porque $A<90°$, $b<90°$, $a>b$. B é $<90°$; e porque A e b são da mesma especie, devemos tomar $c=\varphi+\varphi'$. O calculo das equações (a, c e b) n.° 174 dá:

tang b .... $\bar{1}.9238563$	cos a .... $\bar{1}.8064817$	$\varphi=31°50'46'$
cos A .... $\bar{1}.8693330$	cos φ .... $\bar{1}.9291471$	$\varphi'=44.44.50$
tang φ .... $\bar{1}.7931893$	— cos b .... $\bar{1}.8842363$	$c=76.35.36$
	cos φ' .... $\bar{1}.8513925$	

Para achar o angulo C do vertice, as equações (a', d' e b') dão

cos b .... $\bar{1}.8842363$	tang b .... $\bar{1}.9238563$	$\theta=55°\ 9'\ 59''$
tang A .... $\bar{1}.9583058$	cot a .... $\bar{1}.9211182$	$\theta'=66.26.21$
cot θ .... $\bar{1}.8425421$	cos θ .... $\bar{1}.7567851$	$C=121.36.20$
	cos θ' .... $\bar{1}.6017596$	

Finalmente a regra dos quatro senos (II) dá $B=34°\ 15'3''$.

IV. Se for $A=42°\ 15'\ 14''$, $B=121°\ 36'\ 20''$, $a=50°\ 10'\ 30''$, teremos duas soluções, por ser $a<90°$, $B>90°$, $A+B<180$; e por serem B e a de differente especie, tomaremos nos valores de c e C o signal —. As equações (a', c', e C) conduzem-nos ás seguintes operações.

cos a	$\bar{1}.8064817$	cos A ..	$\bar{1}.8693330$	sen a	$\bar{1}.8853636$
tang B	0.2108864 —	sen θ ..	$\bar{1}.8406262$ —	sen B	$\bar{1}.9302745$
cot θ	0.0173681 —	cos B .. —	$\bar{1}.7193880$ —	sen A .. —	$\bar{1}.8276379$
$\theta = -43°51'16''$		sen θ'	$\bar{1}.9905712$ +	sen b ...	$\bar{1}.9880002$
$\theta' = -78.6.19$		ou	$101°53'41''$	$b =$	$76°35'36''$
C =	$34.15.3$	ou C =	$581.2.25$	ou =	$103.24.24$

tang a	0.0788818	cot A	0.0416956
cos B	$\bar{1}.7193874$ —	tang B	0.2108873 —
tang φ	$\bar{1}.7982692$ —	sen φ	$\bar{1}.7259905$ —
$\varphi = -$	$32°8'50''$	sen φ'	$\bar{1}.9785734$ +
$\varphi' =$	$72.9.0$	ou	$107°51'0''$
$c =$	$40.0.10$	ou	$c = 75.42.10$

Uma d'estas duas soluções reproduz o triangulo precedente, e vem a ser $f'CA'$ (fig. 31); a outra fCA'.

Conhecendo os tres lados, achar um angulo?

$a = 76°35'36''$	sen	$\bar{1}.9880008$	os outros elementos do
$b = 50.10.30$	sen ...	$\bar{1}.8853636$	triangulos são:
$c = 40.0.10$			
$2p = 166.46.16$		$-\bar{1}.8733644$	$A = 121°36'19''8$
$p = 83.23.8$			$B = 42.15.13,7$
$p-a = 6.47.32$	sen	$\bar{1},0728716$	$C = 34.15.2,8$
$p-b = 33.12.38$	sen	$\bar{1}.7385565$	$\psi = 40.51.3,0$
	sen^2	$\bar{2},9380637$	φ, φ', θ, θ', são dados
$\frac{1}{2}C = 27.7.31,4$	sen	$\bar{1},4690818$	acima; o triangulo será
$C = 34.15.2,8$			aqui o mesmo.

Concluiremos a trigonometria espherica, appresentando todos os elementos d'um triangulo espherico. Escolhendo á vontade tres d'estes elementos para servirem de dados, calcular-se-hão para exercicio os outros tres restantes (*Nota* 6.ª).

Arcos.	Log. sen.	Log. cos.	Log. tang.
$A =$ 121°36'10''81	$\bar{1}.9302747$	$\bar{1}.7193874$ —	0.2108873 —
$B =$ 42.15.13,66	$\bar{1}.8276379$	$\bar{1}.8693336$	$\bar{1}.9583043$
$C =$ 34.15. 2,76	$\bar{1}.7503664$	$\bar{1}.9172860$	$\bar{1}.8330804$
$a =$ 76.35.36,0	$\bar{1}.9880008$	$\bar{1}.3652279$	0.6227729
$b =$ 50.10.30,0	$\bar{1}.8853636$	$\bar{1}.8064817$	0.0788816
$c =$ 40. 0.10.0	$\bar{1}.8080926$	$\bar{1}.8842463$	$\bar{1}.9238564$
$\varphi_{,} = -$ 32. 8.50,0	$\bar{1}.7259905$ —	$\bar{1}.9277212$	$\bar{1}.7982693$ —
$\varphi' =$ 72. 9. 0,0	$\bar{1}.9785741$	$\bar{1}.4864674$	0.4921067
$\theta = -$ 43.01.16,2	$\bar{1}.8406263$ —	$\bar{1}.8579964$	$\bar{1}.9826249$ —
$\theta' =$ 78. 6.19,0	$\bar{1}.9905733$	$\bar{1}.3141076$	0.6764656
A respeito do arco perpendicular será			
$\psi =$ 40.51. 3,0	$\bar{1}.8156388$	$\bar{1}.9368787$	$\bar{1}.8787602$

II. Superficies e curvas no espaço.

Principios geraes.

183. Para exprimir analyticamente a posição no espaço de um ponto M (fig. 32), imaginem-se tres planos fixos zAx, xAy, zAy, taes que se cortem todos no mesmo ponto A, e tenham dous a dous por intersecção *os eixos* Ax, Ay, Az, que para mais facilidade supporemos por hora rectangulares. Marque-se depois a distancia PM, ou $z=c$, d'este ponto á sua projecção P (P. II. n.° 119, 3.°) sôbre um d'estes planos; e tambem esta projecção por meio das coordenadas AN, AS do ponto R, ou $x=a$, $y=b$. As quantidades dadas, ou as *coordenadas* a, b, c, são as distancias MO, MR, MP, do ponto M aos tres planos, e são tambem as arestas que determinam o parallelipipedo ON.

Reflectindo que, além do angulo triedro $zAxy$, os outros planos coordenados formam mais sete triedros, reconhecer-se-ha que a posição do ponto M no espaço não fica determinada pelas coordenadas a, b, c, em quanto não introduzirmos as noções sôbre os signaes (P. II. n.° 214). Para as aplicar a este caso convencionou-se: que se considerassem negativos os z correspondentes aos pontos que ficassem abaixo do plano xAy, produzido indefinidamente: que se considerassem negativos os x correspondentes aos pontos que ficassem por a esquerda do plano zAy, do lado x': e finalmente que se considerassem tambem negativos os y correspondentes aos pontos que ficassem por traz do plano zAx.

184. Succede muitas vezes que em uma questão tudo é similhante a respeito dos tres eixos x, y, z. Havendo então uma equação $X=0$, relativa ao eixo dos x, haverá uma similhante $Y=0$, correspondente ao eixo dos y, e uma terceira $Z=0$ relativa ao eixo dos z. Ora neste caso, as duas ultimas equações $Y=0$ e $Z=0$ podem deduzir-se de $X=0$ por simples mudança de letras. As permutações devem fazer-se pela seguinte maneira.

Poremos em X todas as quantidades relativas ao eixo dos x em lugar das quantidades analogas correspondentes ao eixo dos y; depois estas em logar das que correspondem ao eixo z; e finalmente estas ultimas quantidades em logar das primeiras que correspondiam ao eixo dos x. Por esta permutação *em gyro*, deduziremos Z de X; por uma segunda permutação da mesma natureza effectuada sobre Z, obteremos Y; e por uma terceira analoga, effectuada sobre Y, recairemos em X.

Supponhamos que temos as tres equações similhantes $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, relativas aos tres eixos e nas quaes além de x, y e z entram os tres angulos α, β, γ, que correspondem respectivamente a estas tres coordenadas.

Assentaremos em uma linha, mas separadamente, as tres coordenadas e os tres angulos; depois por baixo n'outra linha, tambem separadamente, mas dispostas por ordem differente, as mesmas seis quantidades, pela fórma seguinte

$$\begin{array}{lcl} x,\ y,\ z, & \qquad & \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ z,\ x,\ y, & \qquad & \gamma,\ \alpha,\ \beta, \end{array}$$

Feito isto substituiremos, na 1.ª equação $X=0$, cada uma das quantidades da linha superior pela quantidade correspondente da linha inferior; e com esta permutação obteremos a 3.ª equação $Z=0$. Poremos de novo nesta ultima, as quantidades da linha inferior em lugar das que lhe correspondem na linha superior, e virá a 2.ª equação $Y=0$; e operando similhantemente sobre essa equação, recaíremos na 1.ª $X=0$, d'onde partiramos.

E com effeito, cada uma d'estas operações equival a uma mudança nos eixos das coordenadas, pela qual se fazem primeiramente girar os eixos dos x e dos y no seu plano, por tal modo que o eixo dos x positivos vem caír sobre o eixo dos y positivos, e este sobre o eixo dos x negativos. Faz-se depois girar este eixo dos y positivos assim deslocado, e o eixo dos z positivos, de maneira que o primeiro vem caír sôbre o eixo dos z positivos, e este ultimo sobre o eixo primitivo dos x positivos; d'onde resulta que a final cada um dos eixos das coordenadas positivas vem occupar o logar de um dos outros eixos das coordenadas positivas. É por isso que as equações relativas aos tres eixos coordenados se deduzem umas das outras por simples permutações de letras, sem ser necessario bulir nos signaes; o que não aconteceria, se simultaneamente se não permutassem pela maneira indicada as tres coordenadas, e as quantidades que respectivamente lhes correspondem.

185. Se for dada uma equação entre as tres coordenadas, tal como $f(x, y, z)=0$, esta equação será indeterminada. Se dermos a duas d'estas variaveis quaesquer valores, $x=a=AN$, $y=b=PN$ (fig. 32), da equação proposta resultará para z, pelo menos, uma raiz $z=c$. Se esta for real, levantaremos do ponto P sôbre o plano yAx a perpendicular $PM=c$, e d'este modo o ponto M do espaço ficará determinado. Dando outros valores ás arbitrarias x e y, isto é, tomando, como se quizer, differentes pontos P sôbre o plano xAy, deduziremos da equação os valores correspondentes de z, que determinarão outros tantos pontos do espaço. Todos estes pontos assim achados estarão sôbre uma superficie, que será *o logar* de todos elles, quando os imaginarmos unidos por lei de continuidade. Esta superficie será, por exemplo, um cóne, um cylindro, uma esphera; e assim $f(x, y, z)=0$ será a *equação da superficie*, porque distingue os seus pontos de todos outros do espaço.

Se z tiver muitos valores reaes, a superficie terá muitos ramos (*); e se for imaginario, a perpendicular indifinida levantada em P sôbre o plano xy não encontrará a superficie.

Se depois de havermos assignado um valor a y, tal como $y=b=AS$, fizermos variar x, a ordenada $PM=z$ mover-se-ha na direcção SP parallela ao plano xz, e as variações correspondentes, por que passar, serão determina-

(*) Não havendo em portuguez palavra propria, que exprima o mesmo que a palavra *nappe* adoptada pelos geometras francezes, assentámos que a expressão *ramos da superficie* podia exprimir a idea de que se tracta, estando de mais a mais em analogia com outra já adoptada de *ramos de curva*.

das pela equação $f(x, b, z)=0$, que será por conseguinte a da intersecção da superficie pelo plano SM parallelo aos xz. Pela mesma razão fazendo $x=a=\mathrm{AN}$, ou $z=c=\mathrm{AT}$, teremos as intersecções da superficie pelos planos MN, ou OR, parallelos aos yz ou aos xy.

Fica assim evidente: que $z=0$ é a equação do plano xy; $z=c$ a de um plano que lhe é parallelo á distancia c; $x=0$ a equação do plano yz; $x=a$ a do plano parallelo á distancia a; etc.

Do triangulo rectangulo AMP resulta $z^2+\mathrm{AP}^2=\mathrm{AM}^2$; e como APN dá $\mathrm{AP}^2=x^2+y^2$, será, fazendo $\mathrm{AM}=\mathrm{R}$,

$$(1)\ldots\ldots x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2.$$

Logo: 1.° a distancia de um ponto á origem das coordenadas é egual á raiz da somma dos quadrados das tres coordenadas do mesmo ponto: 2.° se x y e z forem variaveis, esta equação caracterisará todos os pontos do espaço, cuja distancia R á origem é a mesma; e será por conseguinte a *equação da esphera*, que tem o raio R, e o centro na origem das coordenadas.

Sejam (fig. 33) n e m as projecções sôbre o plano xy dos dous pontos N (x, y, z) e M (x', y', z'); mn será a projecção da linha MN=R, e teremos (P. II, n.° 222)

$$mn^2=(x-x')^2+(y-y')^2.$$

Além disso a linha MP parallela a mn, formando o triangulo MNP rectangulo em P, dá

$\mathrm{MN}^2=\mathrm{MP}^2+\mathrm{PN}^2=mn^2+\mathrm{PN}^2$; e como $\mathrm{PN}=\mathrm{N}n-\mathrm{M}m=z-z'$, será

$$(2)\ldots.(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\mathrm{R}^2,$$

sendo R a distancia entre os pontos (x, y, z) e (x', y', z') (*). Se consi-

(*) Como $m\mathrm{B}$, $n\mathrm{C}$ (fig. 33) parallelas a $\mathrm{A}y$, dão $\mathrm{BC}=x-x'=$ á projecção de MN sôbre o eixo dos x (P. II. n.° 119, 3°), vê-se que *o comprimento de uma linha no espaço é a raiz da somma dos quadrados das suas projecções sôbre os tres eixos.*

Temos tambem $\mathrm{MP}=\mathrm{MN}\cos\mathrm{NMP}$; logo a projecção $mn=\mathrm{MN}$ é o producto da linha projectada pelo cos. da inclinação; e, reciprocamente, uma linha no espaço é o quociente da sua projecção sôbre um plano, dividida pelo coseno do angulo que a linha faz com o mesmo plano. Estes theoremas extendem-se tambem ás áreas planas situadas no espaço, como veremos adiante.

derarmos x, y, z como variaveis, *esta equação será a de uma esphera de raio* R, cujo centro está situado no ponto M (x', y', z').

186. Imaginemos a superficie de um cylindro recto (P. II. n.° 134), tendo por base uma curva qualquer sôbre o plano xy, dada pela sua equação $f(x, y) = 0$. A perpendicular indefinida z, levantada em qualquer ponto d'esta curva sôbre o plano xy, é uma generatriz d'este solido; e por conseguinte qualquer valor que se dê a z, sempre a extremidade d'esta perpendicular estará sôbre a superficie do cylindro.

Por conseguinte: *a equação da superficie de um cylindro recto é a da sua base*, ou $f(x, y) = 0$.

Quando a generatriz do cylindro recto for perpendicular ao plano dos xz, a equação d'esta superficie será a da base traçada na quelle plano.

Por um raciocinio identico se prova, que a equação de um plano, perpendicular a um dos planos coordenados, é a mesma que a do seu *traço* sôbre este plano, isto é, a da linha de intersecção dos dous planos. Assim, se for AB $= \alpha$ (fig. 33 *rep.*) e $a =$ tang CBI, a equação $x' = az + \alpha$, que é a da linha BC existente no plano zAx, será tambem a do plano FEBC, perpendicular a zAx, e que passa por BC.

187. Sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações de duas quaesquer superficies, e vejamos o que resulta da sua combinação.

Ficando neste caso arbitrária só uma das variaveis, z por ex.°, este systema de equações representará a serie de pontos communs a ambas as superficies, ou por outras palavras a curva resultante da sua intersecção.

188. Assim, recapitulando, vê-se: que *um ponto fica determinado por tres equações entre as suas tres coordenadas*, x, y, *e* z; *uma superficie por uma só equação entre as tres coordenadas variaveis dos seus differentes pontos; e uma curva por duas equações, que vem a ser as das duas superficies, que na sua intersecção determinam esta linha.*

Como por uma linha dada podem passar infinitas superficies, é claro que *uma curva no espaço póde ser dada por uma infinidade d'equações.*

Eliminando z entre $M = 0$ e $N = 0$, obtem-se uma equação $P = 0$ entre x e y. Esta equação é a de um cylindro recto, cuja intersecção com qualquer das duas superficies é a curva de que se tracta: e tambem é a equação da projecção da mesma curva sôbre xy. Se em vez de z, eliminarmos y, vê-se do mesmo modo que a equação resultante $Q = 0$, é a de um cylindro recto, ou a da projecção da curva sôbre o plano xz. Assim $P = 0$, $Q = 0$, são as equações de dous cylindros, que podêmos substituir ás superficies dadas; e são tambem as equações das projecções da curva, e as da mesma curva. D'onde se segue, que *podemos tomar por* *equações de uma curva as equações das suas projecções sôbre dous planos coordenados.*

189. Appliquemos estes principios á linha recta. Podemos tomar para as duas equações as de dous planos quaesquer, que contenham a mesma recta; convirá porém preferir as que appresentam resultados mais simples. Assim $x=0$, $y=0$, que são as equações dos planos yz e xz, são as equações do eixo dos z; $x=0$, $z=0$, são as do eixo dos y; e $y=0$, $z=0$, são as do eixo dos x. Do mesmo modo se vê, que $x=\alpha$, $y=6$, são as equações de uma recta PM (fig. 32) parallela aos z, e cujo pé P, ou intersecção com o plano xy, tem por coordenadas $x=\alpha$, $y=6$. E assim a respeito dos outros eixos.

Dada uma recta qualquer EF no espaço (fig. 33 *rep.*), tiremos por ella um plano FEBC perpendicular ao plano xz; BC será a sua projecção sôbre este plano. Do mesmo modo acharemos a projecção HG de EF sôbre o plano yz. As equações d'estas projecções, ou dos planos projectantes, ou

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x=az+\alpha, \quad y=bz+6,$$

são as da recta EF.

É facil de ver, que α e 6 são as coordenadas AB e AG do ponto E, onde a recta EF encontra o plano xy: e que a e b são as tangentes dos angulos formados pelas projecções BC e HG da mesma recta com o eixo AZ. Eliminando z, obtem-se a equação da projecção sôbre o plano xy,

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ay=bx+a6-b\alpha.$$

190. Se a recta EF (fig. 33 *rep.*) passar por um ponto F (x', y', z'), as projecções C e H d'este ponto estarão situadas sôbre as da recta; logo as equações da mesma recta serão (P. II. n.° 219)

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad x-x'=a(z-z'), \; y-y'=b(z-z').$$

Se a recta passar por um segundo ponto (x'', y'', z''), obteremos outras duas equações similhantes, por meio das quaes e das precedentes se determinarão os valores de a e b, que são $a=\frac{x''-x'}{z''-z'}$, $b=\frac{y''-y'}{z''-z'}$.

Se a recta passar pela origem A, as equações serão

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = az, \quad y = bz.$$

É facil mostrar, que as projecções de duas rectas parallelas sôbre um mesmo plano, são parallelas (P. II. n.° 115); logo as equações d'estas rectas devem ter os mesmos coefficientes a e b para z, e differir unicamente nos valores das constantes α e β.

191. Se forem dadas as equações de duas rectas

$$x = a\,z + \alpha,\ y = bz + \beta;\ x = a'z + \alpha',\ y = b'z + \beta',$$

e eliminarmos entre ellas as coordenadas variaveis x, y, z, virá uma equação

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha - \alpha')(b - b') = (\beta - \beta')(a - a'),$$

a qual, sendo independente das mesmas variaveis, é *a condição necessaria para que as mesmas rectas se encontrem.* Se ella não for satisfeita, as linhas não se cortarão; e se o for, o ponto de intersecção terá por coordenadas

$$z = \frac{\alpha - \alpha'}{a' - a} = \frac{\beta - \beta'}{b' - b},\ x = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a},\ y = \frac{b'\beta - b\beta'}{b' - b}.$$

Se as rectas forem parallelas, será então $a = a'$, $b = b'$, e os valores das coordenadas sairão infinitos, o que indica que as mesmas rectas se não podem encontrar.

Equações do Plano, do Cylindro, do Cóne, etc.

192. As condições pelas quaes se determina a natureza de qualquer superficie, reduzem-se sempre, em última analyse, á lei da sua geração, a qual consiste em que uma curva *generatriz*, de fórma constante ou variavel, se move de certa maneira ao longo de uma ou muitas linhas dadas, que se chamam *directrizes*, e gera assim a superficie de que se tracta. Para achar a equação da superficie gerada emprega-se um raciocinio similhante ao do n.º 325 da P. II.; do que passâmos a dar alguns exemplos, começando pelo plano.

Um plano DC (fig. 34) *póde considerar-se gerado por uma recta* EF, *que conservando-se sempre parallela a uma direcção determinada, é obrigada a mover-se sôbre uma recta fixa.* Supponhâmos pois, que a *generatriz* EF, ficando sempre parallela á intersecção BC do plano DC com o plano dos xz, é obrigada, em qualquer das suas posições, a encontrar sempre a intersecção BD do mesmo plano DC com o plano dos yz, a qual é n'este caso a *directriz*. Para achar a equação do plano é necessario exprimir analyticamente estas duas condições.

As duas secções BC e BD encontrando-se em B no eixo dos z, tem por equações, fazendo $AB = C$,

$$\text{BC} \ldots\ldots\ldots \; y = 0, \qquad z = Ax + C,$$

$$\text{BD} \ldots\ldots\ldots \; x = 0, \qquad z = By + C \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como a linha EF, em qualquer das suas posições, deve ser sempre parallela a BC, o plano projectante EHIF será parallelo a zx, e HI a Ax. A projecção de EF sôbre o plano zx tambem será parallela a BC. Assim as equações de EF serão

$$y = \alpha, \quad z = Ax + 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Eliminando x, y, z entre estas ultimas equações, e as equações (1) da directriz, obtem-se a equação

$$\beta = B\alpha + C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

a qual, pelo que fica dicto (n.º 191), é a *equação de condição para que* *a generatriz tenha*, em todas as suas posições, *um ponto commum com a directriz fixa.*

Se dermos pois a α e β valores que satisfaçam á ultima equação (3), e os substituirmos em (2), estas serão as de generatriz n'uma das suas posições. Se nas equações (2) substituirmos o valor (3) de β, estas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor arbitrario que se der a α. E finalmente, se entre as equações (2) e (3) eliminarmos α e β, a equação resultante

$$z = Ax + By + C, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

sendo independente d'aquellas quantidades, será a do plano; por isso que então x, y, z representam as coordenadas de uma generatriz qualquer, de que o plano é o *logar geometrico.*

Da analyse da equação do plano se vê: 1.° que C representa a coordenada z inicial, ou AB: 2.° que A e B representam as tangente dos angulos, que fazem com os eixos dos x e dos z os traços BC e BD do plano sôbre os dos xz e dos yz: 3.° que se fizermos variar C sómente, o plano se moverá parallelamente, por isso que os traços successivos se conservam parallelos.

Conclue-se tambem do que fica exposto:

1.° Que toda a equação do 1.° grão a tres variaveis é a de um plano, porque póde sempre reduzir-se á fórma (4).

2.° Que duas equações quaesquer do 1.° grão a tres variaveis, são as de uma linha recta, resultante da intersecção dos planos representados por aquellas equações.

3.° Que, sendo dada a equação do plano, obteremos as equações dos seus traços com os planos dos xz, yz e xy, fazendo nella respectivamente $y=0$, $x=0$, $z=0$, que são as equações dos mesmos planos. Assim $Ax + By + C = 0$ é a equação do traço do plano com o dos xy.

Podiamos ter considerado o plano gerado por uma recta qualquer no espaço obrigada a mover-se sôbre outras duas, que poderiam ser os traços do mesmo plano com dous dos planos coordenados. Este calculo, um pouco mais complicado, e que propomos para exercicio, conduziria aos mesmos resultados.

193. Por um raciocinio identico acharemos a equação do *Cylindro,*

o qual (P. II. n.° 134) *póde considerar-se gerado por uma recta qualquer, que conservando-se parallela a si mesma, é obrigada no seu movimento a encontrar sempre uma curva dada no espaço.*

Sejam

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \text{ .... } (a)$$

as equações d'uma recta parallela á generatriz, nas quaes a e b se suppõe conhecidas, e α e β dependentes da posição da recta. Sejam tambem $M = 0$, $N = 0$ as equações da directriz. A condição para que esta curva seja encontrada sempre pela generatriz é expressa (n.° 191) pela equação $\beta = F\alpha$, resultante da eliminição de x, y, z, entre as quatro equações d'estas linhas.

Se nas equações (a) substituirmos $F\alpha$ por β, estas duas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor de α.

Se depois eliminarmos d'ellas a quantidade α, obteremos uma relação entre x, y e z, que terá logar para qualquer generatriz, e que será por conseguinte a equação pedida.

Logo, para achar a equação de uma superficie cylindrica, devemos eliminar x, y e z entre as equações (a) e as duas $M = 0$, $N = 0$ da curva directriz; depois na equação resultante $\beta = F\alpha$, substituir $x - az$ por α, e $y - bz$ por β A *equação do cylindro* será pois da fórma

$$y = bz = F(x - az)\text{; .... } (4)$$

dependendo a fórma da funcção F da natureza dá directriz.

Se por ex.°, a base for um circulo de raio r, traçado no plano xy, e collocado como na fig. 36, com o diametro AE sôbre o eixo dos x, e a origem em A: as equações d'esta base, que se póde tomar por directriz, serão

$$y^2 + x^2 = 2rx, \quad z = 0\text{;}$$

entre as quaes e as equações (a) se eliminarmos x, y, z, virá a equação de condição (*) $\beta^2 + \alpha^2 = 2r\alpha$ (*).

(*) Isto é evidente, reflectindo, que α e β são as coordenadas do pé da generatriz. A mesma consideração se fará a respeito do cone.

Poder-se-hia achar a equação do plano, considerando-o como um cylindro cuja base é uma recta.

Logo

$$(y-bz)^2+(x-az)^2=2r(x-az)\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

é a *equação do cylindro obliquo de base circular*. As quantidades a e b serão determinadas pela direcção do eixo.

Se o eixo estiver no plano xz, será $b=0$, e a equação precedente tornar-se-ha em

$$y^2+(x-az)^2=2r(x-az).$$

Finalmente, se o centro do circulo estiver na origem A, substituir-se-ha por r^2 o 2.° membro de (5).

194. Sejam $\quad M=0,\ N=0\ldots\ldots\ldots\ (a')$

as equações da directriz de *uma superficie conica*, qualquer (P. II. n.° 136) cujo vertice S tem por coordenadas a, b, c.

A generatriz d'esta superficie é obrigada a passar pelo vertice e a encontrar sempre no seu movimento a directriz.

A 1.ª condição é expressa (n.° 190) pela equação

$$x-a=\alpha(z-c),\ y-b=\beta(z-c)\ldots\ldots\ldots\ (a'')$$

A 2.ª é expressa, (n.° 191) pela equação $\beta=F\alpha$, resultante da eliminação de x, y, z, entre as equações (a') e (a'').

Eliminando depois β e α por meio das equações (a'') virá a *equação do cone*

$$\frac{y-b}{z-c}=F\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

na qual a fórma de F dependerá tambem da natureza da directriz, e será determinada quando esta o for.

Se, por ex.° a base for o circulo AE (fig. 36), que podemos tomar por directriz, as suas equações (a'), suppondo a origem na extremidade A do diametro, e este coincidindo com o eixo dos x, serão

$$z=0,\ y^2+x^2=2rx;$$

e a equação $\beta = F\alpha$ será 'neste caso

$$(a-\alpha c)^2+(b-\beta c)^2=2r(a-\alpha c):$$

d'onde se deduz

$$(az-cx)^2+(bz-cy)^2=2r(z-c).(az-cx),$$

a qual será a *equação do cone obliquo de base circular.*

Se quizermos que o eixo SC esteja no plano xz, como na fig. 36, faremos $b=0$, e virá

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz+a(a-2r)z^2+2acrz-2c^2rx=0.$$

Se o *cóne é recto*, poremos $a=r$. Mas 'neste caso é mais simples tomar o eixo dos z para o eixo do cóne, e acha-se então para equação d'esta superficie assim disposta,

$$c^2(x^2+y^2)=r^2(z-c)^2, \text{ ou } x^2+y^2=m^2(z-c)^2, \ldots\ldots \quad (7)$$

designando por m a tangente $\frac{r}{c}$ do angulo formado pelo eixo e pela generatriz.

Se o circulo da base não fosse traçado no plano xy, mas n'outro inclinado sôbre este, e perpendicular aos xz, sería necessario, designando por A a tangente do angulo que a base fizesse com o plano xy, substituir por (a') as equações

$$z=Ax,\quad x^2+y^2+z^2=r^2.$$

195. As *superficies de revolução* podem considerar-se geradas (P. II. n.° 133) pelo movimento de um circulo BDC (fig. 37), o qual sendo perpendicular a um eixo Az, conserva sempre o centro I sôbre este eixo, e cujo raio IC vai continuamente variando, de modo que o circulo corta sempre uma dada directriz CAB.

Como o circulo genitor deve ficar constantemente parallelo ao plano dos xy, as suas equações serão as do seu plano e do seu cylindro projectante, ou, fazendo $AI=\beta$, e o raio $IC=\alpha$,

$$z=\beta,\quad x^2+y^2=\alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Para que este circulo encontre sempre a directriz, cujas equações designaremos por

$$M=0,\quad N=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b'),$$

é necessario, segundo temos visto, que tenha logar a equação de condição $F(\alpha,\beta)=0$, resultante da eliminação de x, y, z, entre (b) e (b').

Se depois eliminarmos α e β entre esta equação e as equações (b), obteremos a *equação* pedida *da superficie de revolução*, que será de fórma

$$z=F(x^2+y^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

e na qual a funcção F dependerá ainda da natureza da curva directriz.

I. Se a directriz é um circulo existente no plano xz e com o centro na origem, as equações (b') serão neste caso

$$y=0,\quad x^2+z^2=r^2;$$

e a equação de condição tornar-se-ha em $\alpha^2+\beta^2=r^2$, o que aliás é evidente. Substituindo 'nella os valores de α e β deduzidos de (b), virá a *equação da esphera*, já achada (n.° 185)

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

II. Se a directriz é *uma parabola* BAC existente no plano xz, e situada como na fig. 37, as equações da directriz serão

$$y=0\,,\ x^2=2pz,$$

d'onde se deduz $\alpha^2=2p\beta$; e por fim

$$x^2+y^2=2pz, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

que é *a equação do paraboloide de revolução* em volta do eixo dos z.

III. Se as directrizes forem *ellipses* ou *hyperboles*, acharemos pela mesma maneira que as *equações do ellipsoides e hyperboloides de revolução*, cujos 1.os eixos coincidem com os dos z, são

$$A^2(x^2+y^2)\pm B^2z^2=\pm A^2B^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

sendo os signaes superiores relativos ao ellipsoide, e os inferiores ao hyperboloide.

IV. Se a directriz é uma recta, as suas equações serão

$$x=az+A\,,\ y=bz+B\,,$$

das quaes resulta a equação de condição

$$(a\beta+A)^2+(b\beta+B)^2=\alpha^2.$$

Eliminando α e β, virá por fim a equação da superficie de revolução

$$x^2+y^2=(a^2+b^2)\,z^2+2\,(Aa+Bb)\,z+A^2+B^2.$$

Fazendo $x=0$, acha-se (P. II. n.º310) que a intersecção pelo plano yz é uma hyperbole, e como x e y entram sempre debaixo da fórma x^2+y^2, z será funcção de x^2+y^2, e por conseguinte a *superficie gerada é um hyperboloide de revolução.*

Com tudo se a recta directriz cortar o eixo dos z, as suas equações serão satisfeitas fazendo $x=y=0$, e $z=c$, donde resulta $A=-ac$, $B=-bc$. Teremos pois

$$(a^2+b^2)(z-c)^2=x^2+y^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

a qual é a *equação do cóne recto* (n.° 194).

Querendo a equação de uma superficie de revolução em volta de um eixo com uma direcção qualquer, será necessario ou recorrer a uma transformação de coordenadas, ou tractar directamente o problema de uma maneira analoga á que temos seguido.

Problemas sôbre o plano e a linha recta.

196. Cumpre advertir aqui, como na P. II. n.° 224, que a respeito das superficies se podem appresentar dous generos de problemas. Ou se tracta de determinar os pontos de uma dada superficie que gozam de certas propriedades, ou então de assignar á superficie uma posição ou dimensões taes, que por meio d'ellas satisfaça a certas condições. No 1.° caso x, y e z são as incognitas; no 2.° é necessario determinar algumas das constantes de modo que sejam satisfeitas as condições do problema. Estas condições devem, em todos os casos, estabelecer tantas equações distinctas quantas são as incognitas, aliás o problema seria indeterminado ou absurdo. Passêmos a applicar ao plano estas considerações geraes.

197. *Achar as projecções da intersecção de dous planos.*

Sejam as equações d'estes planos

$$z=Ax+By+C,\; z=A'x+B'x+C'.$$

Eliminando successivamente entre estas equações as variaveis z, x, y, obteremos as equações seguintes das projecções da intersecção sôbre os planos

$$(1)\begin{cases}\text{dos } xy\ldots\ldots\ldots & (A-A')x+(B-B')y+C-C'=0\\ \text{dos } yz\ldots\ldots\ldots & (A'-A)z+(AB'-A'B)y+AC'-A'C=0,\\ \text{dos } xz\ldots\ldots\ldots & (B'-B)z+(A'B-AB')x+BC'-B'C=0.\end{cases}$$

198. *Fazer passar um plano por um, dous ou tres pontos dados.*

Seja a equação do plano $z=Ax+By+C$.

O plano ficará determinado, ou quando A, B, C forem conhecidas, ou quando se poderem estabelecer entre estas quantidades tres equações, por meio das quaes se determinem os seu valores.

Se quizermos que o plano passe pelo ponto dado (x', y', z'), a sua equação tornar-se-ha em $z'=Ax'+By'+C$. Subtrahindo pois esta última equação da primeira, teremos a equação do plano que passa pelo ponto dado,

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ z-z'=A(x-x')+B(y-y')$$

Se quizermos, que passe por um segundo ponto (x'', y'', z''), teremos $z''=Ax''+By''+C$; e como nos falta ainda uma equação para podermos determinar as tres constantes arbitrarias, podemos sujeitar o plano a passar ainda por um terceiro ponto, ou a satisfazer a outra condição.

Mas se quizessemos por ex.°, que o plano além de passar pelo ponto $(x', y', z',)$ fosse parallelo a um plano determinado $z=A'x+B'y+C'$, teriamos a equação (2), e as equações

$$A=A',\ B=B'.$$

199. *Achar as condições para que uma recta e um plano coincidam ou sejam parallelos.*

Sejam as equações do plano e da recta

$$z=Ax+By+C,$$

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta.$$

Substituindo na 1.ª, os valores de x e y, tirados das duas últimas, teremos

$$z(Aa + Bb - 1) + A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Se a recta e o plano tivessem um só ponto commum, o valor de z tirado d'esta equação sería o de uma das coordenadas d'este ponto.

Para que a recta porém coincida com o plano, é necessario que esta última equação subsista qualquer que seja o valor de z; e por conseguinte as equações de *condição de coincidencia* serão

$$(3) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Aa + Bb = 1 \,, \; A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Para exprimir que a recta é sómente parallela ao plano, basta introduzir a condição de que, se transportarmos parallelamente a si mesmo tanto a recta como o plano até á origem, ahi hão-de concidir. Mas para que este transporte tenha logar é necessario suppor nullos nas equações precedentes α, β e C; logo a *condição de parallelismo* reduz-se á equação

$$(4) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad Aa + Bb - 1 = 0.$$

200. *Exprimir que uma recta é perpendicular a um plano.*

Se projectarmos a recta sôbre o plano dos xy, o plano projectante será perpendicular ao plano dado e ao dos xy; os dous últimos terão pois por intersecção uma perpendicular ao plano projectante, e por conseguinte á projecção da recta sôbre o plano dos xy. Logo, *quando uma linha for perpendicular a um plano, os traços deste plano e as projecções da recta sobre os planos coordenados farão respectivamente angulos rectos.*

Posto isto, servindo-nos das mesmas equações do plano e da linha recta do n.° precedente, as equações dos traços do plano sôbre os xz e yz, serão

$$z = Ax + C \,, \quad z = By + C$$

ou

$$x = \frac{1}{A} z - \frac{C}{A} \,, \; y = \frac{1}{B} z - \frac{C}{B} \,;$$

e as condições de perpendicularidade d'estes traços com as projecções da recta, darão (P. II. n.° 220, equação 6)

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad A + a = 0, \quad B + b = 0.$$

Estas equações determinam duas das constantes do plano, ou da recta que lhe é perpendicular. As outras constantes devem ser dadas, ou sujeitas a outras condições.

201. Querendo tirar um plano perpendicular á recta dada, a equação do plano será pelo n.° precedente,

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad z + ax + by = C$$

Se designarmos por α e 6 as coordenadas do ponto onde a recta encontra o plano xy, uma esphera, cujo centro esteja 'neste ponto, terá por equação (n.° 185)

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (x-\alpha)^2 + (y-6)^2 + z^2 = r^2.$$

As equações (6) *e* (7) *são pois as de um circulo cujo plano é perpendicular á recta dada.* O raio d'este circulo e a sua posição absoluta dependem de r e de C.

Sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações de uma curva. Para que esta encontre o circulo de que acabâmos de tractar, é necessario que possam coexistir as quatro equações precedentes. Eliminando entre ellas as variaveis x, y e z, vem uma equação de condição $r = F\,(C)$, na qual repondo por r e C os seus valores tirados de (7) e (6), vem a equação

$$(8) \ldots\ldots\ldots \quad \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-6)^2 + z^2} = F\,(z + ax + by),$$

que é a da superficie gerada pela revolução da curva dada em volta da recta.

202. Se pelo contrario quizermos *tirar uma recta que seja perpendicular a um plano dado, e que passe por um dado ponto* (x', y', z'), teremos

200 (n.° 19$\cancel{8}$) para determinal-a as seguintes equações

— $$(9) \ldots\ldots \quad x-x'+\mathrm{A}(z-z')=0,\quad y\cancel{+}y'+\mathrm{B}(z-z')=0.$$

Por meio d'estas duas equações é facil *achar a distancia do ponto ao plano*; por quanto pondo

$$\mathrm{L}=\mathrm{C}-z'+\mathrm{A}x'+\mathrm{B}x';$$

dando á equação do plano a fórma

+ $$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots z-z'=\mathrm{A}(x-x')\cancel{-}\mathrm{B}(y-y')+\mathrm{L};$$

e eliminando depois as coordenadas x, y e z do pé da perpendicular, entre as equações (9) e (a): resulta finalmente

$$z-z'=\frac{\mathrm{L}}{1+\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2},\quad x-x'=\frac{-\mathrm{AL}}{1+\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2},\quad y-y'=\frac{-\mathrm{BL}}{1+\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}.$$

A distancia entre o ponto (x', y', z') e o pé da perpendicular (x, y, z), ou por outras palavras, a distancia do ponto ao plano, será pois (n.° 185)

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta=\frac{\mathrm{L}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} \quad (*)$$

(*) Se o ponto pertencer a uma recta ($x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$,) será

$$\delta=\frac{(\mathrm{A}a+\mathrm{B}b-1)z+\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\mathrm{C}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

Para que a recta seja parallela ao plano, é necessario que δ seja constante, ou

$$\mathrm{A}a-\mathrm{B}b-1=0.$$

203. *Achar a distancia de um ponto a uma recta.* Servindo-nos das mesmas equações da recta do n.° 199, o plano perpendicular, tirado pelo ponto dado $(x', y', z',)$, tem por equação

$$(a') \ldots\ldots\ldots\ldots \; a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Eliminando x, y e z entre a equação (a') e as duas da recta, obteremos os seguintes valores das coordenadas do ponto de encontro da recta com o plano perpendicular,

$$x=\frac{aM}{1+a^2+b^2}+\alpha,\; y=\frac{bM}{1+a^2+b^2}+\beta,\; z=\frac{M}{1+a^2+b^2},$$

sendo

$$M=a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'.$$

E por conseguinte concluiremos tambem (n.° 185), que a distancia P entre os pontos (x', y', z'), (x, y, z), ou por outras palavras, que a distancia P, do ponto á recta, é dada pela equação

$$(11) \ldots\ldots\ldots \; P^2=(x'-\alpha)^2+(x'-\beta)^2+z'^2-\frac{M^2}{1+a^2+b^2}$$

204. *Achar o angulo* A *formado por duas rectas.* Como póde acontecer que as rectas dadas, sendo produzidas, se não encontrem, deve entender-se, que se pede *o angulo comprehendido entre duas rectas tiradas por um mesmo ponto parallelamente ás linhas dadas.*

Sejam pois as equações das parallelas ás rectas dadas, tiradas pela origem,

---

E para que coincida com elle, é necessario, além dlsso, que seja $\delta=0$, ou

$$A\alpha+B\beta+C=0.$$

Por esta consideração podiam tambem determinar-se as condições pedidas no n.° 199.

$$(b) \ldots\ldots x = az\,,\ z = bz\,; \quad (b') \ldots\ldots x = a'z\,,\ y = b'z\,;$$

tractâmos de achar A em funcção de a, b, a', b'.

Para isso imagine-se primeiro uma esphera, cujo centro coincida com a origem das coordenadas, e cujo raio seja a unidade. Obteremos as coordenadas do ponto em que ella corta a recta dada pelas equações (b), substituindo os valores de x e y, tirados das mesmas equações, na equação da esphera, que é

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,;$$

e acha-se $(a^2 + b^2 + 1)\, z^2 = 1$, da qual se deduz z, e depois x e y por meio das mesmas equações (b). Para obter depois as coordenadas z', x', e y' do ponto, em que a mesma esphera corta a recta dada pelas equações (b'), basta evidentemente mudar nos valores precedentes a e b em a' e b'.

Teremos assim

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + a^2}}\,,\ x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\,,\ y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\,,$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}\,,\ x' = \frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}\,,\ y' = \frac{b'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}\,.$$

A distancia D, entre os pontos determinados por estes dous systemas de coordenadas, será dada pela equação

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = 2 - 2\,(xx' + yy' + zz')\,,$$

por ser

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Figurando agora no espaço o triangulo isosceles, cujos tres lados são 1, 1 e D, o angulo pedido A será opposto ao lado D; e por conseguinte a equação (D, n.° 201, P. II.) dará para este angulo

$$(12) \ldots\ldots\ldots \cos A = 1 - \tfrac{1}{2} D^2 = xx' + yy' + zz'$$

$$= \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

D'esta última equação deduz-se, pela relação conhecida $sen = \sqrt{1 - cos^2}$,

$$(13) \ldots\ldots \text{sen}\, A = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}};$$

e facilmente se obteria depois o valor de tang A.

1.° Para deduzir os angulos X, Y, Z, que uma recta faz com os eixos dos x, y e z, basta substituir nas equações precedentes, em logar de a' e b', os seus valores correspondentes a cada um d'estes eixos. Querendo achar, por ex.°, o angulo que uma recta faz com o eixo dos z, cuja posição é determinada pelas equações $x = 0$, $y = 0$, teremos em virtude das equações (b') $a' = 0$, $b' = 0$. Introduzindo estes valores na formula (12) do n.° precedente, resulta

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

E notando que o systema das equações (b) do mesmo n.° póde ser substituido pelo systema equivalente

$$y = \frac{b}{a} x, \quad z = \frac{1}{a} x, \quad x = \frac{a}{b} y, \quad z = \frac{1}{b} y;$$

acham-se por simples permutações, mudando a e b em $\frac{b}{a}$ e $\frac{1}{a}$ para x, e a e b em $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{b}$ para y, os valores de cos X e de cos Y.

Por este modo acharemos que *os angulos, que uma recta qualquer no espaço faz com os tres eixos coordenados, são determinados pelas equações seguintes:*

$$(14)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}\cos X &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\\ \cos Y &= \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\\ \cos Z &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.\end{aligned}\right.$$

2.° As equações (14) são tambem os valores dos senos dos angulos que a recta faz com os planos dos yz, xz e xy; pois que estes angulos são visivelmente complementos de X, Y e Z.

3.° Sommando os quadrados das equações (14), vem a relação

$$(15)\ldots\ldots\ldots\ldots \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

As equações (14) e (15) fazem ver, que podemos sempre tirar no espaço uma recta, que forme com dous dos eixos coordenados, os dos x e dos y por ex.°, angulos arbitrarios X e Y; porém o terceiro Z fica então determinado.

4.° Tomemos um comprimento qualquer MN (fig. 33) sôbre uma recta no espaço, que faz os angulos X, Y e Z com os eixos coordenados, e projectemos o mesmo comprimento sôbre os x e os y. As projecções serão

$$\text{BC} = \text{MN}.\cos X, \text{ e MN } \cos Y.$$

Porém mn, ou MP, é a projecção de MN sôbre o plano xy, e por conseguinte é $mn = \text{MN} \operatorname{sen} Z$. Projectando de novo mn sôbre os x e os y, as projecções serão

$$BC = mn \cos\theta\,, \quad e \quad mn \operatorname{sen}\theta\,,$$

sendo θ o angulo que mn faz com os x. Substituindo depois 'nestas equações por mn o seu valor precedente, vem

$$BC = MN \operatorname{sen} Z \cos\theta,\ e\ MN \operatorname{sen} Z \operatorname{sen}\theta.$$

Egualando finalmente os dous valores das mesmas projecções, resulta

$$(16) \ldots\ldots \cos X = \operatorname{sen} Z \cos\theta\,,\ \cos Y = \operatorname{sen} Z \operatorname{sen}\theta.$$

Assim, em vez de determinar a direcção de uma linha no espaço por meio dos tres angulos X, Y, Z, que ella faz com os tres eixos: basta que seja dado o angulo que ella faz com a sua projecção sôbre o plano dos xy (que é o complemento do angulo Z); e o angulo θ que esta projecção faz com o eixo dos X; e reciprocamente.

Sommando os quadrados das duas equações (16), vem

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = \operatorname{sen}^2 Z = 1 - \cos^2 Z\,,$$

relação que já tinhamos obtido 3.°

5.° Sommando os valores dos productos $\cos X \cos X'$, $\cos Y \cos Y'$, $\cos Z \cos Z'$, dados pelas fórmulas, e comparando a somma com a equação (12) acha-se a relação

$$(17) \ldots\ \cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z',$$

por meio da qual se exprime o valor do angulo, que 'fazem duas rectas no espaço, em funcção do angulo que cada uma d'ellas faz com os tres eixos.

6.° *Se as duas rectas fórem perpendiculares*, será $\cos A = 0$, e esta condição será expressa por qualquer das relações seguintes

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 + aa' + bb' = 0,$$

$$(19) \ldots\ldots \quad \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0.$$

205. *Achar o angulo θ de dous planos, dados pelas suas equações*

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C'.$$

Se da origem abaixarmos perpendiculares sôbre os dous planos, o angulo feito por estas linhas será egual ao dos planos. Sendo pois

$$x = az, \ y = bz, \quad x = a'z, \ y = b'z,$$

as equações de duas rectas que passam pela origem; para que estas rectas sejam respectivamente parallelas aos dous planos, é necessario que sejam (n.° 200)

$$A + a = 0, \ B + b = 0; \quad A' + a' = 0, \ B' + b' = 0.$$

Logo as equações das perpendiculares serão

$$x + Az = 0, \ y + Bz = 0, \quad x + A'z = 0, \ y + B'z = 0;$$

e o coseno do angulo d'estas rectas, que é o dos dous planos, será (n.° 204)

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \cos\theta = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}\,\sqrt{1 + A'^2 + B'^2}}.$$

1.° Se fizermos tomar ao 2.° plano a situação dos yx, a sua equação tornar-se-ha em $z=0$; é necessario por tanto, que na equação (20) se faça $A'=B'=C'=0$, a fim de obtermos o angulo V que um plano faz com o dos xy. Por meio de simples permutações, como no n.° 204, obteremos os angulos T e U, que o mesmo plano faz com os xz, e yz. Por conseguinte

$$(21) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \cos U &= \frac{A}{\sqrt{1+A^2+B^2}}, \\ \cos T &= \frac{B}{\sqrt{1+A^2+B^2}}, \\ \cos V &= \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B}}. \end{aligned} \right.$$

Destas equações deduzem-se as relações

$$(22) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos^2 T + \cos^2 U + \cos^2 V = 1.$$

$$(23) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\theta = \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + V \cos V'.$$

A última da-nos o angulo dos dous planos em funcção dos angulos que cada um d'elles faz respectivamente com os tres planos coordenados.

2.° *Se os dous planos forem perpendiculares*, será $\cos\theta=0$, e esta condição será expressa por qualquer das duas relações seguintes:

$$(24) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 + AA' + BB' = 0,$$

$$(25) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V' = 0.$$

206. *Achar o angulo η de uma recta e de um plano.*

Sejam

$$z = Ax + By + C, \quad e \quad x = az + \alpha, \; y = bz + \beta,$$

as equações do plano e da recta. O angulo pedido é egual ao que a recta faz com a sua projecção sôbre o plano (n.° 119 P. II.); conseguintemente se de um ponto da recta abaixarmos uma perpendicular sôbre o mesmo plano, o angulo d'estas duas linhas será complemento do angulo η.

Tiremos pois pela origem uma recta qualquer $x = a'z$, $y = b'z$; para que ella seja perpendicular ao plano, é necessario (n.° 200), que seja $a' = -A$, $b' = -B$. O coseno do angulo que ella forma com a linha dada, sendo egual a sen η, teremos (n.° 204)

$$(26) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{sen} \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{1+a^2+b^2} \times \sqrt{1+A^2+B^2}},$$

D'aqui facilmente se conclue, como no n.° 205, que os angulos que a recta forma com os planos coordenados yz, xz, e xy, tem por senos respectivos

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \; \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \; \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

2.° o que concorda com o que já vimos (n.° 204, ~~3.°~~).

207. *Se a recta for parallela ao plano*, sendo então sen $\eta = 0$, esta condição será expressa pela relação

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 - Aa - Bb = 0.$$

Transformação de coordenadas.

208. *Passar de um systema de coordenadas para outro de coordenadas parallelas ás primeiras com a origem n'um ponto differente* (α, β, γ).

Veremos por um raciocinio similhante ao que empregámos no n.° 232, P. II, que deve fazer-se

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

É necessario advertir ainda, que ás coordenadas da nova origem α, β, γ devem dar-se os valores e os signaes convenientes á sua posição. Por exemplo, se a origem estiver no plano dos xy, será $\gamma = 0$; se estiver no eixo dos z negativos, α e β serão nullos, e γ será negativo.

209. *Mudar a direcção dos eixos.* Imaginem-se (fig. 38) tres novos eixos Ax', Ay', Az'; e supponhamos os eixos primitivos rectangulares, e estes novos eixos com uma direcção dada arbitrariamente. Tomé-se um ponto qualquer e tirem-se as suas coordenadas x', y' e z'. Se depois projectarmos successivamente estas coordenadas sôbre os tres eixos primitivos dos x, dos y e dos z; cada uma das coordenadas x, y, e z será, á similhança do que se viu no n.° 233, da P. II., a somma das tres projecções sôbre o eixo respectivo.

Designe-se por $(x\,x')$ o angulo x'Ax formado pelo eixo dos x' e dos x; por $(y\,y')$ o angulo yAy'; .... etc: teremos

$$(\mathrm{A})\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x), \\ y = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y), \\ z = x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z). \end{cases}$$

Como suppuzemos os eixos primitivos rectangulares, os angulos precedentes não são inteiramente arbitrarios, por isso que devem satisfazer (n.° 204, 3.°) ás relações

$$(B) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1, \\ \cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1, \\ \cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1. \end{cases}$$

Fazendo, para simplificar,

$$S=\cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z),$$

$$T=\cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z),$$

$$U=\cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z),$$

teremos para exprimir os angulos que os novos eixos fazem entre si (n.° 204, 5.°) as equações

$$(C) \ldots\ldots\ldots \cos(x'y')=S, \quad \cos(x'z')=T, \quad \cos(y'z')=U.$$

Se as novas coordenadas forem rectangulares, teremos

$$(D) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S=0, \quad T=0, \quad U=0.$$

As equações (A), (B), (C), (D) contém os nove angulos que os eixos x', y', z' fazem com os x, y, z. Se quizermos sómente mudar de um systema de coordenadas rectangulares para outro de coordenadas de direcção obliqua, teremos apenas seis angulos arbitrarios, porque as equações (B) determinam tres.

E se, além disto, quizermos, que o segundo systema seja tambem rectangular, as equações (D), que exprimem esta condição, deixarão unicamente tres angulos arbitrarios.

Com effeito o eixo dos x' faz com os x, y, z tres angulos, dous dos quaes são arbitrarios, e o terceiro vem a ser determinado pela 1.ª das equações (B): o eixo dos y' estaria no mesmo caso se não fosse sujeito a ser perpendicular aos x'; esta condição porém não deixa realmente mais que uma arbitraria: e como o eixo dos z', perpendicular ao plano $x'y'$, vem a ser determinado com os dados antecedentes, são por fim sómente tres as quantidades arbitrarias.

Os valores de x', y', z', deduzidos de (A) serviriam para *transformar um systema de coordenadas obliquas n' outro rectangular*. E por meio das mesmas fórmulas (A), passando d'este último systema para outro obliquo, conseguiriamos *transformar um systema obliquo n'outro tambem obliquo.*

Na resolução d'este problema suppuzemos que a origem das coordenadas se conservou a mesma; se quizermos porém que esta mude tambem, passaremos, primeiro que tudo, pelo modo indicado no n.º precedente, para um systema de eixos parallelos aos primeiros e que passe pela nova origem.

210. *Para passar de um systema rectangular por outro systema tambem rectangular*, em vez de nos servirmos das fórmulas precedentes, que para a resolução do problema nos conduzem a uma eliminação as mais das vezes trabalhosa, podemos servir-nos das *fórmulas* seguintes, *devidas a Euler*, por meio das quaes se exprimem immediatamente as nove constantes em funcção de outras tres escolhidas da maneira seguinte:

Tome-se um plano CA$y'x'$ (fig. 38) com a inclinação θ sôbre o plano xAy; e seja AC a intersecção d'estes planos, e CA$x = \psi$ o angulo, que AC faz com Ax. No plano CAy' determinado por θ e ψ, tracemos dous eixos rectangulares Ax', Ay'; e seja CA$x' = \varphi$ o angulo que o primeiro faz com o traço AC. Por este meio os novos eixos vem a ser determinados pelos angulos θ, ψ e φ, que, dão a inclinação do plano $x'y'$ sôbre o plano xy, bem como a direcção do traço AC, e a de Ax' n'este plano $x'y'$ assim determinado. O eixo y' fórma, n'este plano, com Ax' o angulo x'Ay' de 90°; e o eixo z' fica determinado pela condição de ser perpendicular a este mesmo plano.

Tracta-se pois, a fim de transformar os eixos, de exprimir os nove angulos $(x'x)$, $(y'x)$, ..., que entram em (A), em funcção d'estas tres constantes θ, ψ e φ.

..

As rectas Ax, Ax' e AC formam um triedro, no qual se conhecem além dos dous angulos planos φ e ψ, o angulo diedro θ comprehendido por elles. Applicando a este caso a fórmula (3, pag. 317,) da Trigonometria espherica; e fazendo

$$c=(x'x),\ C=\theta,\ a=\psi,\ b=\varphi,$$

teremos

$$\cos(x'x)=\cos\psi\cos\varphi+\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta.$$

Operando analogamente, a respeito do angulo xAy', sôbre o triedro formado por AC e pelos eixos x e y'; determinaremos $\cos(yx')$, advertindo que n'este caso os angulos planos são $(y'x)$, $CAy'=90°+\varphi$, $CAx=\psi$. Para obter $\cos(x'y)$ empregaremos o triedro $x'ACy$, considerando os angulos planos $(x'y)$, $CAy=90+\psi$, e $CAx'=\varphi$. Finalmente para $\cos(y'y)$, tomaremos o triedro $y'ACy$, e os angulos planos $(y'y)$, $CAy'=90°+\psi$, e $CAy=90°+\varphi$.

Em resultado acharemos

$$\cos(y'x)=-\cos\psi\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi\cos\varphi\cos\theta,$$

$$\cos(x'y)=-\operatorname{sen}\psi\cos\varphi+\cos\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,$$

$$\cos(y'y)=\quad\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta.$$

Consideremos agora o triedro $z'AxC$. O eixo Az' faz com AC um angulo recto (n.º 113, P. II.), assim como com o plano CAy'; e o angulo formado pelos planos xy e $z'AC$ é de $90°+\theta$, suppondo o plano CAy' situado para a parte superior do plano xy. Fazendo pois na equação (3) de pag. 317

$$c=(z'x),\ C=90°+\theta,\ a=90°,\ b=\psi,$$

teremos
$$\cos(z'x)=-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta.$$

Do mesmo modo o triedro $z'ACy$, pondo $\psi+90°$ por ψ, dá

$$\cos(z'y)=-\cos\psi\operatorname{sen}\theta,$$

Finalmente, sendo o angulo zAC tambem recto, e o angulo diedro $zACx' = 90° - \theta$, teremos no triedro $zACx'$

$$\cos(x'z) = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,$$

d'onde
$$\cos(y'z) = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta;$$

e
$$\cos(z'z) = \cos\theta.$$

Temos assim determinado em funcção de θ, φ e ψ os nove coefficientes de (A), os quaes substituidos nas mesmas fórmulas dão

$$(E)\dots\dots\dots \left\{\begin{aligned} x &= x'(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi) \\ &\quad + y'(\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi) \\ &\quad + z' \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi; \\ y &= x'(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi) \\ &\quad + y'(\cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi) \\ &\quad + z' \operatorname{sen}\theta\cos\psi; \\ z &= -x'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - y'\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + z'\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

As equações de condição (B) e (D) são tambem satisfeitas pelos valores precedentes, como facilmente se póde verificar.

Coordenadas polares no espaço.

211. A posição de um ponto no espaço ficará tambem determinada, como no n.º 237 da P. II., quando se conhecer o seu *raio vector* ou a sua distancia a um ponto fixo, e os angulos que esta recta fórma com os eixos coordenados.

Sejam X, Y e Z estes angulos, e seja ρ o raio vector, ou a distancia da origem das coordenadas ao ponto (x, y, z) que se quer determinar. Teremos (pag. 345 (*))

$$(F) \ldots\ldots\ldots \quad x = \rho \cos X, \quad y = \rho \cos Y, \quad x = \rho \cos Z,$$

fórmulas por meio das quaes se póde *passar de um systema rectangular para outro polar, ou vice versa*, advertindo que os angulos X, Y, Z, estão ligados pela relação já obtida, n.° 204 (15),

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Em vez dos angulos X, Y e Z emprega-se muitas vezes, como já dissemos no n.° 231, o angulo formado pelo raio vector com a sua projecção no plano dos xy; e o angulo θ, que esta projecção faz com o eixo positivo dos x. Para esta transformação podemos servir-nos das fórmulas (16) do n.° 204 advertindo que o angulo Z, que entra n'ellas se deve mudar em $90° - \varphi$ Assim, sendo

$$\cos X = \cos\varphi \cos\theta, \quad \cos Y = \cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \cos Z = \mathrm{sen}\,\varphi,$$

teremos, substituindo em (F),

$$(G) \ldots\ldots \quad x = \rho \cos\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Das intersecções planas.

212. Quando da intersecção de duas superficies resulta uma curva plana, é mais commodo, para achar as suas propriedades, referil-a a coordenadas tomadas no plano DOC (fig. 39) da curva, o qual é determinado pelo angulo θ que fórma com o plano xy, e pelo angulo ψ que a intersecção OC d'estes planos faz com Ox. Tomemos esta linha OC para eixo dos x'; e para eixo des y' a perpendicular OA, abaixada sôbre OC, no plano secante DOC.

Como a questão se reduz a obter em x' e y' a equação da curva, resultante da intersecção das superficies; é claro que, feita a transformação (A) para referir uma d'estas superficies aos eixos x', y', z', bastará depois fazer $z'=0$, e ter-se-ha a sua intersecção com o plano $x'Oy'$. Porém, 'n-este caso tão simples, será melhor fazer $z'=0$ nas equações (A), e procurar directamente os valores de $\cos(x'x)$, $\cos(y'x)$......

Assim no triedro AOCB, em que são conhecidos os angulos planos $a=\psi$, $b=90°$, e o angulo diedro $C=\theta$ comprehendido por estes lados: temos

$$\cos(y'x)=\operatorname{sen}\psi\cos\theta,\quad \cos(y'y)=-\cos\psi\cos\theta.$$

Além disto

$$(x'x)=\psi,\ (x'y)=90°-\psi,\ (x'z)=90.°$$

Finalmente o plano $x'Oy'$, que suppomos estar para a parte de cima do plano dos xy, faz com Oz o angulo $(y'z)=90°-\theta$. Dão pois as equações (A)

$$(\mathrm{H})\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x=x'\cos\psi+y'\operatorname{sen}\psi\cos\theta, \\ y=x'\operatorname{sen}\psi-y'\cos\psi\cos\theta, \\ z=y'\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Obteriamos estes mesmos resultados servindo-nos das equações do n.° 210.

213. Appliquemos as equações (H) ao cóne obliquo de base circular. O plano zAx (fig. 36) perpendicular ao plano secante AB, e que passa pelo eixo SC, será o dos (xz): a secção AB d'estes dous planos, ou o *eixo da curva*, corta esta no vertice A, que tomaremos para origem das coordenadas: o plano xAy, parallelo á base circular do cóne, será o dos xy; e da sua intersecção com o cóne resultará um circulo AE, de raio r, que poderemos considerar como a curva *directriz* (n.° 194). Por esta fórma, tendo o cóne por coordenadas do vertice $(a,\ 0,\ c)$, o eixo no plano xz, e a base no plano xy, a sua equação será, como no n.° citado,

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz+a(a-zr)z^2+z\,acrz-zc^2rx=0.$$

E como o plano AB perpendicular aos xz corta o plano xy pelo eixo Ay, deveremos pôr $\psi = 90^\circ$ nas equações (H); d'onde resultará

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = y'\cos\theta, \quad y = x', \quad z = x'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y'^2[c^2\cos^2\theta + 2c(r-a)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + (a^2 - 2ar)\,\mathrm{sen}^2\theta]$$
$$+ c^2x'^2 + 2cry'(a\,\mathrm{sen}\,\theta - c\cos\theta) = 0.$$

Tal é a equação da curva, que póde representar todas as secções do cóne obliquo (excepto as parallelas á base) fazendo variar a, c, r e θ; os x' são contados sôbre Ay, os y' sôbre AB. A discussão d'esta equação não involve difficuldades (n.° 309, P. II), e acham-se em resultado curvas da mesma especie das secções do cóne recto.

Querendo que a secção seja um circulo, é necessario tornar eguaes, os coefficientes de x'^2 e y'^2 (n.° 304, P. II,); logo

$$(c^2 + 2ar - a^2)\,\mathrm{tang}^2\,\theta = 2c(r-a)\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Tomando a primeira raiz $\mathrm{tang}\,\theta = 0$, recairemos na equação da base AE do cóne.

Querendo interpretar o outro valor de $\mathrm{tang}\,\theta$, temos

$$\mathrm{tang\,SAD} = \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{AD}} = \frac{c}{a},\ \mathrm{tang\,SAB} = \mathrm{tan\,(SAD} - \theta) = \frac{c - a\,\mathrm{tang}\,\theta}{a + c\,\mathrm{tang}\,\theta}.$$

Substituindo por $\mathrm{tang}\,\theta$ a segunda raiz, vem, feitas as reducções,

$$\mathrm{tang\,SAB} = \frac{c^3 + a^2c}{2a^2r - a^3 + 2c^2r - ac^2} = \frac{c}{2r - a} = -\frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{DE}},$$

ou $\quad \mathrm{tang\,SAB} = -\,\mathrm{tang\,SED} = \mathrm{tang\,SEA}.$

Por tanto ainda 'neste caso *a secção será um circulo*, quando os angulos SAB$'$, SEA, formados com as generatrizes oppostas, forem eguaes.

O plano secante yAB comparado com o circulo AE da base, é ao que se chama *secção subcontraria.*

Para obter as secções planas do cóne recto, basta fazer $a=r$ na equação (2), do que resulta

$$(3)\ ..\ y'^2(c^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta) + c^2x'^2 + 2cry'(r\operatorname{sen}\theta - c\cos\theta) = 0;$$

equação que se reduz á do n.° 258, P. II.

Finalmente vê-se na equação (3), que da egualdade dos dous factores de y'^2 e x'^2 não póde resultar mais do que um valor para θ, $\operatorname{sen}\theta=0$; e com effeito, 'neste caso, a secção subcontraria coincide com a base.

214. O cylindro obliquo de base circular, situada como a do cóne de que acabámos de tractar, e cujo eixo se acha tambem no plano dos xz, tem por equação (n.° 93)

$$(4)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az).$$

Introduzindo nella os valores (1), o que equival a suppor o plano secante perpendicular aos xz, vem

$$(5)\ ..\ y'^2(\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta - 2a\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + x'^2 = 2ry'(\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta).$$

A secção é uma ellipse, que se reduz ao circulo: ou quando $\operatorname{sen}\theta=0$, o que dá a base do cylindro; ou quando $(a^2-1)\operatorname{tang}\theta = 2a$, ou (equação L. n.° 205, P. II.)

$$\operatorname{tang}\theta = -\operatorname{tang}2\alpha,$$

sendo α o angulo que o eixo do cylindro faz com eixo dos z. Logo este 2.° valor de θ é o supplemento de 2α.

Superficies da segunda ordem.

215. A equação mais geral do 2.° gráo entre tres variaveis tem a fórma

$$(1) \ldots . \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz = k,$$

e as *superficies* que representa, chamam-se *de segunda ordem* em virtude do gráo da equação. Para *discutir* esta, isto é, para determinar a natureza e posição das superficies que representa, convem simplifical-a transformando as coordenadas, de modo que desappareçam os termos em xy, xz e yz. Para isso, passaremos primeiro dos eixos primitivos, que sempre podemos suppor rectangulares, para outros obliquos por meio das fórmulas (A) da pag. 369, sujeitando depois os nove angulos que nellas entram ás tres condições (B), donde resultarão por fim seis arbitrarias, de que podemos dispor á vontade. Se egualarmos a zero os termos em que entram $x'y'$, $x'z'$ e $y'z'$, reduziremos as seis arbitrarias a tres. E se quizermos além disso que a direcção dos novos eixos seja tambem rectangular, condição que é expressa pelas tres relações (D), ficará o problema determinado, por que estas relações determinarão as tres arbitrarias que nos restavam.

Este calculo simplifica-se pelo processo seguinte. Sejam $x = \alpha z$, $y = \beta z$, as equações do eixo dos x'. Fazendo, por abbreviar,

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}},$$

acharemos (pag. 364)

$$\cos(x'x) = l\alpha, \quad \cos(x'y) = l\beta, \quad \cos(x'z) = l:$$

e fazendo hypotheses analogas para as equações $x = \alpha' z$, $y = \beta' z$, do eixo dos y', e para a do eixo dos z': virá

$$\cos(y'x) = l'\alpha', \quad \cos(y'y) = l'\beta', \quad \cos(y'z) = l';$$

$$\cos(z'x) = l''\alpha'', \quad \cos(z'y) = l''\beta'', \quad \cos(z'z) = l''.$$

As equações (A), por meio das quaes se faz a transformação, tornam-se em

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = l\alpha x' + l'\alpha' y' + l''\alpha'' z', \\ y = l\beta x' + l'\beta' y' + l''\beta'' z', \\ z = lx' + l'y' + l''z'. \end{cases}$$

Assim os nove angulos do problema são substituidos pelas seis incognitas α, α', α'', β, β', β'', por isso que as equações (B) se reduzem por este modo a uma identidade.

Substituamos pois estes valores de x, y e z na equação geral do 2.° grão, e egualemos a zero os coefficientes de $x'y'$, $x'z'$ e $x'z'$. Virá

$$(3) \ldots \begin{cases} (a\alpha + d\beta + e)\alpha' + (d\alpha + b\beta + f)\beta' + e\alpha' + f\beta' + c = 0 \ldots . x'y', \\ (a\alpha + d\beta + e)\alpha'' + (d\alpha + b\beta + f)\beta'' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0 \ldots . x'z', \\ (a\alpha'' + d\beta'' + e)\alpha' + (d\alpha'' + b\beta'' + f)\beta' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0 \ldots . y'z'. \end{cases}$$

Em consequencia da symetria do cálculo qualquer d'estas equações se póde obter sem ser necessario fazer as substituições por inteiro. E achada uma, podem deduzir-se della as outras duas por simples permutações.

Eliminando α' e β' entre a 1.ª e as equações $x = \alpha'z$, $y = \beta'z$, do eixo dos y', resulta a seguinte equação, que é *a de um plano*,

$$(4) \ldots . (a\alpha + d\beta + e)x + (d\alpha + b\beta + f)y + (e\alpha + f\beta + c)z = 0.$$

Ora a 1.ª das equações (3) é a condição do desvanecimento do termo com $x'y'$; e por isso, em quanto attendermos só a esta condição, podemos dar a α, α', β, β', os valores que quizermos, com tanto que satisfaçam á quella equação. Assim a equação (4), que della resultou pela substituição das expressões de α' e β' tiradas das equações do eixo dos y', involve ainda a mesma condição; e por conseguinte, se traçarmos o eixo dos y' no plano determinado pela mesma equação (4), não entrará na equação (1), depois de transformada, o termo em $x'y'$.

Pelo mesmo theor, eliminando α'' e β'' da 2.ª equação por meio das equações $x=\alpha''z$, $y=\alpha''z$, do eixo dos z', determinaremos um plano tal, que se tomarmos para eixo dos z' qualquer recta nelle traçada, apparecerá a transformada sem o termo em $x'z'$. Attenta porém a forma das duas 1.ªs equações, vê-se logo que este segundo plano é o mesmo que o primeiro; e por consegninte, se traçarmos nelle os eixos dos z' e dos y' como quizermos, *o plano résultante será o dos* $y'z'$, e a transformada não terá termos em $x'y'$ nem em $x'z'$. Como a direcção d'estes eixos no plano é arbitrária, podemos conseguir este fim com uma infinidade de systemas. Em todos os casos porém, resultando na transformada um valor de x' da fórma

$$x'=\frac{-\frac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i)}{l\,(a\alpha^2+b\beta^2+c+2d\alpha\beta+2e\alpha+2f\beta)}\pm f(y',\,z'),$$

o valor

$$x'=\frac{-\frac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i)}{l\,(a\alpha^2+b\beta^2+c+2d\alpha\beta+2e\alpha+2f\beta)}$$

é evidentemente a equação de um plano, o qual corta todas as parallelas ao eixo dos x em duas partes eguaes, e que se chama por isso *diametral.* Dando-lhe a fórma seguinte

$$(a\alpha+d\beta+e)\,l\alpha x'+(d\alpha+b\beta+f)\,l\beta x'+(e\alpha+f\beta+c)\,lx'+\tfrac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i)=0;$$

e substituindo n'esta expressão por $l\alpha x'$, $l\beta x'$, lx', os seus valores tirados das equações (2), vem

$$0=(a\alpha+d\beta+e)\,x+(d\alpha+b\beta+f)\,y+(e\alpha+f\beta+c)\,z+\tfrac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i)$$

$$-ly'\,[(a\alpha+d\beta+e)\,\alpha'+(d\alpha+b\beta+f)\,\beta'+e\alpha+f\beta+c]$$

$$-l''z'\,[a\alpha+d\beta+e)\,\alpha''+(d\alpha+b\beta+f)\,\beta''+e\alpha+f\beta+c];$$

ou, em virtude das duas primeiras equações (3),

$$(5)\,..\;0=(a\alpha+d\beta+e)\,x+(d\alpha+b\beta+f)\,y+(e\alpha+f\beta+c)\,z+\tfrac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i).$$

Debaixo d'esta nova fórma, vê-se facilmente n.° 198, que o plano diametral é parallelo ao plano representado pela equação (4), isto é, ao plano dos (yz) que faz desapparecer em (1) os termos em xy e xz. (*).

Finalmente, se quizermos ainda que desappareça, o termo em $y'z'$, é necessario determinar α' e β' por meio da 3.ª das equações (2); por onde se vê que ha uma infinidade d'eixos obliquos por meio dos quaes podem ser satisfeitas as condições pedidas.

216. Querendo porém que os x', y' e z', sejam rectangulares, deverá o eixo dos x' ser perpendicular ao plano dos $y'z'$, cuja equação já achámos; ora sendo $x=\alpha z$, $y=\beta z$, as equações do eixo dos x', a condição de perpendicularidade ao plano (4) será expressa (n.° 200) pelas equações

$$(6)\;..........\;a\alpha+d\beta+e=(e\alpha+f\beta+c)\,\alpha,$$

$$(7)\;..........\;d\alpha+b\beta+f=(e\alpha+f\beta+c)\,\beta.$$

(*) Veja-se *Anal. appl.*, *de Leroy*, (2.ª edit.) n.° 105; e *Compl. de Geomet. descript. de* Sousa Pinto, n.° 39.

Eliminando α, entre estas equações acharemos (*)

$$(8) \ldots [(a-b)\,fe + (f^2 - e^2)\,d]\,\beta^3$$

$$+ [(a-b)(c-b)\,e + (2d^2 - f^2 - e^2)\,e + (2c - a - b)\,fd]\,\beta^2$$

$$+ [(c-a)(c-b)\,d + (2e^2 - f^2 - d^2)\,d + (2b - a - c)\,fe]\,\beta$$

$$+ (a-c)\,fd + (f^2 - d^2)\,e = 0.$$

Esta equação do 3.° gráo dá para β ao menos uma raiz real; a equação (7) dá depois outra para α.

(*) A equação (7), e a divisão de (6) por (7), dão

$$\alpha = \frac{f\beta^2 + c\beta - b\beta - f}{d - e\beta}, \quad \frac{a\alpha + d\beta + e}{d\alpha + b\beta + f} = \frac{\alpha}{\beta};$$

das quaes se tira

$$\frac{f\beta^2 + c\beta - b\beta - f}{d\beta - e\beta^2} = \frac{af\beta^2 + ac\beta - ab\beta - af + d^2\beta + de - de\beta^2 - e^2\beta}{df\beta^2 + cd\beta - be\beta^2 - ef\beta},$$

ou

$$0 = \beta^4\,(df^2 - bef + aef - de^2)$$

$$+ \beta^3\,(cdf - ef^2 + cdf - bce - bdf + b^2e - afd + d^2e + ace - abe + d^2e - e^3)$$

$$+ \beta^2\,(c^2d - cef - bcd + bef - df^2 + bef - acd + abd - d^3 + de^2 - aef + de^2)$$

$$+ \beta\,(-cdf + ef^2 + adf - d^2e).$$

Dividindo esta última equação por β, e reduzindo, vem facilmente a equação do texto.

D'este modo fica o eixo dos x' determinado de maneira que vem a ser perpendicular ao plano $z'y'$; e se desembaraça a equação dos termos em $x'z'$ e $x'y'$. Resta traçar n'este plano $y'z'$ eixos rectangulares taes, que façam desapparecer o termo $y'z'$; é porém evidente que se póde determinar do mesmo modo um plano dos $x'z'$, ao qual seja perpendicular o eixo dos y' e que faça desapparecer os termos em que entram $x'y'$ e $z'y'$. Mas como as condições pelas quaes se exprime que o eixo dos y' é perpendicular a este plano, são expressas tambem pelas equações (6) e (7), deverá a mesma equação (8) do 3.° gráo dar outra raiz β', que satisfaça a estas condições. O mesmo succede com o eixo dos z'.

Logo as tres raizes da equação (8) são reaes, e são os valores de β, β', β''. Os valores α, α', α'', vem depois a deduzir-se das equações (7).

Conseguintemente: *em geral há sempre um systema unico d'eixos rectangulares, que desembaraça a equação* (1) *dos termos* $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$; e este systema determina-se pelo processo de cálculo que acabâmos de expor.

A este systema da-se o nome de *Eixos principaes de figura.*

217. Analysemos os casos particulares que podem appresentar-se na resolução da equação (8).

1.° Se a equação não tiver o 1.° termo, isto é, se for

$$(a-b)\,fe+(f^2-e^2)\,d=0:$$

sabemos que n'esse caso uma das raizes β é infinita, bem como α, como se vê da equação (7) que se reduz a $e\alpha+f\beta=0$. Os angulos correspondentes são rectos; um dos eixos, o dos x' por ex.°, acha-se no plano xy, e obtem-se a sua equação eliminando α e β por meio das equações $x=\alpha z$, $y=\beta z$, donde resulta $ex+fy=0$. As direcções dos y' e z' vem a ser dadas pela equação em β, reduzida ao 2.° gráo.

2.° Se, além do 1.° coefficiente, tambem o 2.° for nullo: tirando o valor de b da primeira d'estas duas equações de condição, e substituindo-o na segunda, esta se reduzirá ao ultimo termo da equação (8)

$$(a-c)\,fd+(f^2-d^2)\,e=0.$$

E como o coefficiente de β na equação (8) se deduz do de β^2, mudando

b em c, e d em e, e o mesmo acontece a respeito do 1.° e ultimo termo da mesma equação: segue-se que n'este caso a equação (8) é uma identidade. Os systemas d'eixos que desembaraçam a equação dos termos em x', y' e z' são então em numero infinito.

Eliminando as quantidades a e b das equações (6) e (7) por meio das duas equações de condição, acha-se que ellas são o producto de $f\alpha-d$, e de $f\alpha-e\beta$ pelo factor commum $eda+fd\beta+fe$. Estes factores são por tanto nullos; e eliminando α e β acha-se

$$fx=dz,\ ey=dz,\ edx+fdy+fez=0.$$

As duas 1.as são as equações d'um dos eixos; a 3.a é a de um plano que lhe fica perpendicular, e no qual estão traçados os outros dous eixos com direcções arbitrarias. Da intersecção d'este plano com a superficie resulta uma curva, na qual todos os eixos rectangulares são principaes, e que por conseguinte é um circulo, unica das curvas do 2.° grão que goza d'esta propriedade. Nesse caso a superficie é de revolução em volta do eixo, cuja equação acabâmos de achar; e como facilmente se reconhece transportando a origem ao centro do circulo. (V. *Annales de Math.*, t. II)

218. A equação (1), desembaraçada dos tres productos, toma a fórma

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots kz^2+my^2+nx^2+qx+q'y+q''z=h.$$

Se nenhum dos coefficientes k, m e n for nullo, póde esta equação ficar ainda desembaraçada dos termos da 1.a dimensão, pelo processo do n.° 208, que equival a uma mudança de origem das coordenadas e tomar a fórma ainda mais simples

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2+my^2+nx^2=h.$$

Se um d'estes coefficientes for nullo, n por exemplo, podemos desembaraçar, pelo mesmo processo, a equação (9) do termo constante h e das 1.as potencias de y e z; ficando assim a equação reduzida á fórma

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2+my^2=hx.$$

Finalmente se dous dos mesmos coefficientes forem nullos, m e n por ex.°, a equação (9) poderá reduzir-se á fórma

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + py + qx = h.$$

Mas se n'este caso, ainda p e q forem nullos, a equação (12) será evidentemente um caso particular da equação (10); e se o não forem, será um caso particular da equação (11). Com effeito fazendo $z=0$, a equação (12), torna-se em

$$py + qx = h;$$

por conseguinte a intersecção da superficie com o plano dos xy é uma recta. Se tomarmos esta linha para eixo dos y, a equação não sofrerá alteração no termo kz^2; mas será forçoso que os termos restantes $-py-qx+h$ se reduzam a $k'x$, porque a hypothese $z=0$ deve dar $x=0$. A equação da superficie reduzir-se-ha então á fórma $kz^2 = k'x$, que é evidentemente um caso particular de (11).

Podemos pois concluir que todas as superficies da 2.ª ordem são incluidas nas duas equações.

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + my^2 + nx^2 = h,$$

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + my^2 = hx.$$

Se pela origem das coordenadas conduzirmos uma recta qualquer

$$x = az, \ y = a'z,$$

e combinarmos a sua equação com (10), ver-se-ha que os pontos em que a recta encontra a superficie tem as suas coordenadas respectivamente eguaes e de signaes contrarios: donde se conclue, que a origem das mesmas coordenadas divide ao meio todas as cordas tiradas por este ponto; ou, por outras palavras, que *esta origem é o centro das superficies representadas pela equação* (10).

Procedendo do mesmo modo com a equação (11), vê-se que os valores de z não saem eguaes, em virtude do termo em que entra a variavel no 1.° grão; e que por conseguinte *as superficies representadas por esta equação são destituidas de centro.*

Assim podemos dividir as superficies de 2.ª ordem em dous generos:

1.° Superficies dotadas de centro, comprehendidas na equação (10);

2.° Superficies destituidas de centro, comprehendidas na equação (11).

Além disto cumpre notar, que a equação (10) mostra, pelo que se disse no n.° 215, que os tres *planos* coordenados das superficies, que representa, são *diametraes.* O plano diametral que é perpendicular ás cordas diz-se *plano diametral principal*, ou simplesmente *plano principal.* Tres planos diametraes dizem-se *conjugados*, quando as coordenadas, que cada um divide ao meio, são parallelas á intersecção commum dos outros dous planos. Em quanto á equação (11), vê-se, que só os planos dos yx e xz são diametraes. Estes dous *planos* chamam-se tambem *conjugados*, porque as cordas, que cada um delles corta ao meio, são parallelas ao outro.

Posto isto, passemos a discutir especialmente cada uma das equações (10) e (11).

1.° GENERO.

SUPERFICIES COM CENTRO.

219. Se na equação (10) suppuzermos n sempre positivo, as combinações de signaes que admittem os outros tres coefficientes k, m e h podem reduzir-se ás tres seguintes, que dão origem a tres especies de superficies dotadas do centro:

$kz^2+my^2+nx^2=h$ . . . . . . ELLIPSOIDE.

$-kz^2+my^2+nx^2=h$ . . . . . . HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO.

$-kz^2+my^2+nx^2=-h$ . . . . HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS.

Não figurâmos os casos em que m é negativo, por isso que se reduziriam aos dous últimos de cima por uma simples inversão nos eixos.

220. ELLIPSOIDE. Consideremos em 1.° logar a equação,

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + my^2 + nx^2 = h.$$

Como suppomos k, m e n positivos, tambem h o será; aliás a *equação* sería *absurda e nada representaria.*

Se h for nullo, a equação partir-se-ha nas tres $x=0$, $y=0$, $z=0$, e a superficie reduzir-se-ha a *um ponto.*

Sendo h positivo, que é propriamente o caso, de que nos occupâmos, e fazendo separadamente x, y ou z nullos, ver-se-hia, que das intersecções dos tres planos coordenados com a superficie resultam ellipses.

Da secção feita por qualquer plano, parallelo aos coordenados, resultam tambem ellipses, como se veria facilmente, suppondo separadamente cada uma das coordenadas egual a uma constante.

O mesmo sería facil demonstrar a respeito de qualquer secção plana (n.° 212).

É por tudo isto que se deu a esta superficie o nome de *Ellipsoide.*

Os comprimentos A, B, C dos tres *eixos principaes*, obtem-se buscando as secções da superficie pelos eixos dos x, y e z, que dão

$$kC^2 = h,\ mB^2 = h,\ nA^2 = h.$$

Eliminando k, m e n da equação (a), vem

$$(13) \ldots\ \frac{z^2}{C^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1, \text{ ou } A^2B^2z^2 + A^2C^2y^2 + B^2C^2x^2 = A^2B^2C^2,$$

a qual é a equação do *ellipsoide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes*. Esta superficie póde imaginar-se gerada por uma ellipse traçada no plano xy, a qual se move parallelamente a si mesma, e de maneira que os seus dous eixos vão variando de grandeza, sendo a curva obrigada ainda a correr ao longo de outra ellipse traçada no plano xz.

Se duas das quantidades A, B, C, forem eguaes, o *ellipsoide* será *de revolução*. E se for A=B=C a superficie tornar-se-ha n'uma *esphera*.

221. HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO. Consideremos em 2.° logar a equação

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -kz^2+my^2+nx^2=h.$$

Se $h=0$, a equação resultante é a de *cóne*, que será a respeito do hyperboloide, o mesmo que são assymptotas relativamente á hyperbole. (n.° 276, P. II.)

Se h não for nullo, fazendo separadamente x e y nullo, reconhece-se que das intersecções dos planos dos yz e xz com a superficie rasultam hyperboles, nas quaes o eixo dos z é o 2.° eixo.

Suppondo z egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas ao plano dos xy são ellipses reaes similhantes, cujas dimensões augmentam com o valor numerico da constante.

E por isso se deu a esta superficie o nome de *Hyperboloide de um só ramo.*

Os comprimentos A, B, C $\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes obtem-se como no n.° precedente, e a equação do hyperboloide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes terá a mesma fórma que a equação (13), unicamente com a mudança de C^2 em $-C^2$.

222. HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS. Consideremos em 3.° e último logar a equação

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -kz^2+my^2+nx^2=-h.$$

Se $h=0$, a equação resultante será tambem a de um *cóne assymptotico* d'este hyperboloide de 2.ª especie.

Quando h não é nullo, reconhece-se como no caso precedente, que das intersecções dos planos dos yz e dos xz com a superficie resultam hyperboles nas quaes o eixo dos z é o primeiro eixo.

Suppondo z egual a uma constante, $z = \pm l$, a equação (c) torna-se

em $$\frac{m}{h}y^2 + \frac{n}{h}x^2 = \frac{k}{h}l^2 - 1;$$

e mostra que as secções parallelas aos xy são ellipses similhantes, que crescem indefinidamente com a grandeza absoluta de l; porém que se tornam imaginarias quando $l^2 < \frac{h}{k}$. Donde resulta que este hyperboloide tem *dous ramos* não contiguos, indefinidos cada um no seu sentido, porém separados por um intervallo em que não ha superficie. E por isso se lhe deu o nome de *Hyperboloide de dous ramos.*

Os comprimentos A, B $\sqrt{-1}$, C $\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes determinam-se como nos n.os precedentes, e a equação do hyperboloide de dous ramos, referida ao centro e aos seus tres diametros, terá a mesma fórma da equação (13), só com a mudança de B^2 e C^2 em $-B^2$ e $-C^2$

223. As equações (a), (b), (c), que acabâmos de discutir, podem offerecer ainda outras variedades de superficies, suppondo nullos um ou alguns dos coefficientes k, m, n, h. Representarão *cylindros de base elliptica* ou *hyperbolica*, quando forem da fórma

$$kx^2 + my^2 = h, \text{ ou } kx^2 - my^2 = h;$$

e um systema de *dous planos* que se cortam, ou que são parallelos, quando se reduzirem a

$$kx^2 - my^2 = 0, \text{ ou } kx^2 = h.$$

Como estes casos não exigem discussão especial, contentar-nos-hemos com indical-os.

2.° GENERO.

SUPERFICIES SEM CENTRO.

224. Se na equação (11) fizermos com que hx seja sempre positivo, conservando-se no 2.° membro, não poderão ser negativos ambos os termos do 1.°, porque a equação seria então absurda. Assim esta apenas admitte as duas combinações seguintes de signaes, que dão origem a duas especies de superficies destituidas de centro:

$$kz^2+my^2=hx \ldots\ldots \text{PARABOLOIDE ELLIPTICO.}$$

$$-kz^2+my^2=hx \ldots\ldots\ldots \text{PARABOLOIDE HYPERBOLICO.}$$

Se em logar de, k suppuzessemos m negativo, tirariamos as mesmas consequencias, considerando invertido o eixo dos z no dos y.

225. PARABOLOIDE ELLIPTICO. Consideremos primeiro a superficie comprehendida na equação

$$(d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2+my^2=hx.$$

Fazendo separadamente z e y eguaes a zero, ver-se-ha que as secções feitas pelos planos xy e zx são parabolas. Se egualarmos estas mesmas coordenadas a quantidades constantes, concluir-se-ha que das secções parallelas áquelles planos resultam tambem parabolas.

Fazendo $x=0$, vê-se que a secção feita pelo plano zx determina a origem das coordenadas, porque a equação (d) parte-se então nas duas $z=0$, $y=0$. Fazendo x egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas a este ultimo plano são ellipses.

É por isto que á superficie representada pela equação (d) se deu o nome de *Paraboloide elliptico.*

Como x negativo dá resultados imaginarios, segue-se que a superficie fica toda do lado dos x positivos. Se m for zero, e a equação se reduzir á

$$kz^2 = hx,$$

que, segundo vimos (n.° 218), é uma transformação da equação (11); teremos então uma *superficie cylindrica de base parobolica.*

Os mais casos particulares que offerece a equação (d) comprehendem-se n'outros já discutidos.

226. PARABOLOIDE HYPERBOLICO. Discutindo pelo mesmo theor a equação

$$(e) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - kz^2 + my^2 = hx,$$

vê-se: que a secção feita pelo plano yx é uma parabola que fica para o lado dos x positivos: a do plano xz é uma parabola que fica para o lado dos x negativos: e a secção do plano yz representa duas rectas.

Todas as secções parallelas ao plano xy são parabolas eguaes á principal, mas collocadas sucessivamente em differentes posições. O mesmo diremos das secções parallelas ao plano xz. Finalmente as secções parallelas ao plano zy produzem hyperboles.

Por isso a estas superficies se deu o nome de *Paraboloide hyperbolico.*

227. Quando nos dous casos precedentes é $h=0$, a equação tem a fórma $a^2z^2 \pm b^2y^2 = 0$, conforme os signaes de k e m. N'um dos casos é $z=0$, $y=0$, e a superficie reduz-se ao eixo dos x. No outro, a equação, á qual se póde dar a fórma $(az+by)(az-by)=0$, indica que podemos tornar nullo qualquer dos dous factores; e a superficie reduz-se a um systema de dous planos que se interceptam segundo o eixo dos x.

NOTAS.

Nota 1.ª (*pag.* 5).

Multiplicando os dous termos do segundo membro de (c) por $1.2.3\ldots(m-p)$, e designando a differença $m-p$ por n: este segundo membro se tornará na expressão equivalente

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots n}, \ldots \text{(C)}$$

a qual vamos mostrar, *a priori*, que é inteira. Para isso bastará provar, como faz Mr. Cirodde, que no numerador de (C) se encontram todos os factores primos, em que o denominador se póde decompor, elevados a uma potencia pelo menos egual, áquella a que se acham elevados no mesmo denominador.

Seja a um *numero primo* não maior que m; divida-se m por a; e chame-se m' o inteiro do quociente, sendo assim $m'a$ egual, quando muito, a m. Todos os multiplos $a, 2a, 3a, \ldots m'a$, de a, se encontrarão entre os factores de $1.2.3\ldots m$; e por conseguinte será este producto divisivel por $a.\,2a.\,3a\ldots m'a = 1.2.3\ldots m'a^{m'}$. Onde se vê, que a potencia mais alta de a, que divide $1.2.3\ldots m$, é o producto de $a^{m'}$ pela potencia mais alta de a, que divide o producto $1.2.3\ldots m'$.

Designando por m'' o inteiro do quociente de a dividido por m', ver-se-ha do mesmo modo, que a potencia mais alta de a, que divide $1.2.3\ldots m'$, é o producto de $a^{m''}$ pela potencia mais alta, que divide $1.2.3.m''$.

Designando por m''' o inteiro do quociente de a dividido por m'', a potencia mais alta de a que divide $1.2.3...m''$, será similhantemente o producto de $a^{m'''}$ pela potencia mais alta de a, que divide $1.2.3...m'''$. E assim por diante.

Mas, por este theor, havemos de chegar por fim a um quociente $<a$. Suppondo, para fixar as idêas, que este quociente é m''', o producto $1.2.3.m'''$ já não conterá o divisor a um numero inteiro de vezes; e por conseguinte a potencia mais alta de a, que divide $1.2.3...m$, será $a^{m+m'+m''+m'''}$.

Posto isto, e dando, respectivamente, a p', p'', p''', ... relativamente a p, e a n', n'', n''', ... relativamente a n, as mesmas significações que démos a m', m'', m''', ... relativamente a m: teremos, que as potencias mais altas de a que dividem respectivamente $1.2.3....p$, e $1.2.3...n$, são $a^{p'+p''+p'''+...}$ e $a^{n'+n''+n'''+...}$ A potencia mais alta de a, contida no producto $1.2.3...p\times1.2.3...n$, será portanto

$$a^{p'+p''+p'''+...+n'+n''+n'''+...}$$

Mas por ser $$m=p+n,$$

temos $$\frac{m}{a}=\frac{p}{a}+\frac{n}{a};$$

e por conseguinte $$m'=\text{ou}>p'+n',$$

$$m''=\text{ou}>p''+n'',$$

$$m'''=\text{ou}>p'''+n''',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots:$$

logo $$m'+m''+m'''+....=\text{ou}>p'+p''+p'''+...+n'+n''+n'''+...,$$

isto é, o expoente da potencia mais alta do *factor primo* a no numerador de (C), egual pelo menos, ou maior, que a potencia mais elevada do mesmo *factor primo* no denominador d'aquella mesma expressão. E como se póde mostrar o mesmo a respeito de qualquer outro *factor primo* menor que m, fica demonstrada a proposição.

Nota 2.ª (*pag.* 23).

1. Cumpre advertir que, segundo os theoremas I e III dos n.ºs 141 e 143, sómente serão convergentes, e poderão ser approveitadas, as series representadas por x e y no n.º 10, pag. 20, quando os valores de z ficarem comprehendidos entre $+1$ e -1. E tambem só entre estes mesmos limites será convergente a serie resultante da multiplicação d'aquellas duas, representada alli por xy. Para o fazer ver, consideremos duas series ordenadas segundo as potencias ascendentes d'uma variavel z:

$$(1) \ldots\ldots a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots$$

$$(2) \ldots\ldots b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots\ldots$$

Seja s_t a somma dos t primeiros termos de (1), e s'_t a somma dos t primeiros termos de (2); ou

$$s_t = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_{t-1} z^{t-1},$$

$$s'_t = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\ldots + b_{t-1} z^{t-1};$$

e supponhamos que se multiplicaram uma pela outra estas duas expressões. Sommando os termos do producto em que o expoente de z é menor que t, e designando esta somma por s''_t: virá

$$(3) \ldots\ldots s''_t = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)\, z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)\, z^2$$

$$+ \ldots\ldots + (a_{t-1} b_0 + a_{t-2} b_1 + \ldots a_1 b_{t-2} + a_0 b_{t-1})\, z^{t-1}.$$

Os termos que compõe a somma s''_t podem considerar-se como os t primeiros termos d'uma serie, cujo termo geral terá por expressão

$$(4) \ldots\ldots [a_t b_0 + a_{t-1} b_1 + \ldots\ldots a_1 b_{t-1} + a_0 b_t] z^t.$$

Posto isto, passâmos a demonstrar o theorema seguinte: *Se para um valor particular de z, as series* (1) *e* (2), *compostas de termos todos positivos, forem convergentes, e tiverem* s *e* s' *por sommas respectivas, a serie, cujo termo geral tiver por expressão* (4), *será tambem convergente, e terá por somma* $s \times s'$. *Esta mesma propriedade terá ainda logar, quando não forem aquellas series compostas de termos todos positivos, se cada uma d'ellas se conservar ainda convergente, quando os termos negativos se mudarem para positivos.*

a) *Se todos os termos das series* (1) *e* (2) *são positivos*, vê-se logo que é

$$s''_t < s_t s'_t.$$

Mas, se designarmos por q o inteiro $\frac{1}{2}(t-1)$ ou $\frac{1}{2}(t-2)$, conforme t for numero impar, ou numero par: o producto das duas sommas s_{q+1}, e s'_{q+1}, só póde dar termos em que z entre com um expoente menor que t; de maneira que todos estes termos se acharão comprehendidos na expressão de s''_t: e portanto será

$$s''_t > s_{q+1} \times s'_{q+1}.$$

Concebendo agora que t cresce indefinidamente, tambem q crescerá do mesmo modo, e as sommas s_t e s_{q+1} convergirão ambas para o limite s, ao mesmo tempo que as sommas s'_t e s'_{q+1} convergirão para o limite s'. D'onde se segue, que a somma s''_t, que está comprehendida entre os dous productos $s_t s'_t$ e $s_q s'_{q+1}$, convergirá para o limite $s \times s'$.

b) *Se todos, ou alguns dos termos das series* (1) *e* (2) *forem negativos*, segue-se, do que acabâmos de demonstrar, que a differença $s_t s'_t - s''_t$ convergirá para zero, quando t crescer indefinidamente, e todos os termos das duas series forem positivos. Ora esta differença compõe-se de todos os termos do producto $s_t s'_t$, em que entra z com expoente maior que $t-1$; de maneira que será

$$s_t s'_t - s''_t = a_{t-1} b_{t-1} z^{2t-2} + (a_{t-1} b_{t-2} + a_{t-2} b_{t-1}) z^{2t-3} + \ldots$$

$$+ (a_{t-1} b_1 + a_{t-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{t-2} + a_1 b_{t-1}) z^t.$$

Logo, se, para valores crescentes de t, a differença $s_t\, s'_t - s''_t$ converge para zero, quando todos os termos que a compõe são positivos, o mesmo acontecerá, e com mais forte razão, se todos, ou alguns d'elles, mudarem de signal, conservando os mesmos valores numericos. D'onde se segue que, ainda 'neste caso, a serie, cujo termo geral é (4), será convergente, e terá por somma $s \times s'$.

2. Da advertencia feita no n.° precedente devemos concluir, que a demonstração dada no citado n.° 10, para demonstrar que o desinvolvimento do binomio $(1 \pm z)^m$ ainda tem logar, quando m é negativo, fraccionario, irracional ou transcendente, só tem applicação quando z fica comprehendido entre $+1$ e -1.

3. E posto que nos parece rigoroso todo o raciocinio empregado 'naquella demonstração, e especialmente na parte em que se quer fazer ver que *a serie representada por* xy *é composta com* m + n *da mesma maneira que as series* x *e* y *o são respectivamente com* m *e com* n : comtudo aqui apprèsentâmos outra demonstração, talvez mais clara, a qual tirámos da Algebra de Mayer e Choquet.

Muliplicando a serie x do n.° 10 pela serie y, o termo geral da serie xy, será :

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.\;2\ldots\;\;t}+\frac{m(m-1)\ldots(m-t+2)n}{1.\;2\ldots\;(t-1).\;1}+\ldots\\&+\frac{n(n-1)\ldots(n-t+2)m}{1.\;2\ldots\;(t-1).\;1}+\frac{n(n-1)\ldots(n-t+1)}{1\;2\ldots\;\;t}\end{aligned}\right\}z^t.$$

Supponhamos agora que m e n são inteiros positivos. As series x e y são finitas, e tem por sommas respectivas $(1+z)^m$ e $(1+z)^n$; e por conseguinte tambem a serie xy será finita, e terá por somma $(1+z)^{m+n}$. Logo, para todos os valores inteiros e positivos de m e n, será

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.\;2.\;\;\;t}+\frac{m(m-1)\ldots(m-t+2)n}{1.\;2.\;\;(t-1).\;1}+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-t+2)}{1.\;2.\;\;(t-1)}\frac{m}{1}+\frac{n(n-1)\ldots(n-t+1)}{1.2.\;\;\;t}$$

$$=\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-t+1)}{1.\;2.\;\;\;t}.$$

Ora, como esta equação deve verificar-se para todos os valores inteiros e positivos de m e n, é necessario que os seus dous membros sejam identicos. Com effeito, sendo ambos funcções inteiras de m e n, do gráu t, se effectuarmos as operações indicadas, e ordenarmos cada um dos membros em ordem a n, virá uma equação da fórma

$$A_0+A_1 n+A_2 n^2+\ldots.=B_0+B_1 n+B_2 n^2+\ldots.$$

na qual os coefficientes A_0, A_1, ... B_0, B_1, ... são funcções inteiras de m, e a maior potencia de n é inferior a $t+1$.

Se dermos arbitrariamente a m um determinado valor, deve a equação precedente ter logar para todos os valores positivos de n, e deve ser forçosamente $A_0=B_0$, $A_1=B_1$, etc.: porque, se assim não fosse, passando todos os termos para um membro, viria uma equação do gráo t com uma só incognita n, a qual não admittiria mais de t raizes para n, o que é contra o supposto. E como esta conclusão deva subsistir para qualquer valor de m, podemos applicar ás egualdades $A_0=B_0$, $A_1=B_1$, etc. um raciocinio similhante, por onde se concluiria que estas equações se verificam para qualquer valor de m.

D'aqui se deduz facilmente o theorema indicado; e, se representarmos a somma da serie x por $\varphi(m)$, e a da serie y por $\varphi(n)$, a somma da serie xy deverá ser representada por $\varphi(m+n)$; e como esta somma é tambem egual a $\varphi(m)\times\varphi(n)$, teremos

$$\varphi(m)\times\varphi(n)=\varphi(m+n).$$

Pondo 'nesta equação $n+p$ por n, vem

$$\varphi(m)\times\varphi(n)\times\varphi(p)=\varphi(m+n+p).$$

E em geral teremos

$$\varphi(m)\times\varphi(n)\times\varphi(p)\times\varphi(q)\times\ldots=\varphi(m+n+p+q+\ldots.).$$

4. O nosso celebre Mathematico, o Sr. Dr. José Anastacio da Cunha, acha pela maneira seguinte o desinvolvimento da serie do binomio:

Sabemos que em muitos casos a expressão $(1+x)^n$ é susceptivel da fórma $1+nx+Ax^2+Bx^3+Cx^4+\text{etc.}$ Se este desinvolvimento for possivel em todos os casos, o que o calculo nos dirá a final, teremos

$$\begin{aligned}(1+2x+x^2)^n=1+2nx&+nx^2\\&+4Ax^2+4Ax^3+Ax^4+\text{etc.}\\&+8Bx^3+12Bx^4+\text{etc.}\\&+16Cx^4+\text{etc.};\end{aligned}$$

substituindo em $1+nx+Ax^2+Bx^3+\text{etc.}$, em logar de x, $2x+x^2$, por isso que $\varphi\, x$ de $(1+x)^n$ se tornou em $2x+x^2$.

Mas

$$\begin{aligned}(1+2x+x^2)^n=[(1+x)^n]^2&=(1+nx+Ax^2+Bx^3+\text{etc.})^2\\&=1+2nx+2Ax^2+2Bx^3+2Cx^4+\text{etc.}\\&+n^2x^2+2nAx^3+2nBx^4+\text{etc.}\\&+A^2x^4+\text{etc.};\end{aligned}$$

logo

$$2A+n^2=n+4A,\ 2B+2nA=4A+8B,\ 2C+2nB+A^2=A+12B+16C,\ \text{etc.}$$

e por conseguinte

$$A=\frac{n^2-n}{2}=n.\frac{n-1}{2};\ B=n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3};\ \text{etc.}$$

Nota 3.ª (pag. 256).

No *Curso de Analyse* de Mr. Cauchy vem demonstradas as duas proposições seguintes por meio das quaes se consegue muitas vezes resolver a questão da convergencia, quando $L=1$.

Quando na serie proposta cada um dos termos é menor que o seu antecedente, esta serie e a seguinte

$$(1) \ldots . u_0+2u_1+4u_3+8u_7+16u_{15}+\ldots .,$$

são conjunctamente ou convergentes, ou divergentes.

Supponhamos em primeiro logar que a serie proposta é convergente, e designemos a sua somma por s. Teremos

$$u_0=u_0$$

$$2u_1=2u_1$$

$$4u_3<2u_2+2u_3$$

$$8u_7<2u_4+2u_5+2u_6+2u_7$$

etc.;

e por conseguinte, a somma dos termos da serie (1), levada até onde se quizer. será inferior a

$$u_0+2u_1+2u_2+2u_3+2u_4+\ldots .=2s-u_0.$$

Vê-se pois que 'neste caso a serie (1) será tambem convergente

Se suppuzermos agora que a serie proposta é divergente, a somma dos termos, tomados em grande numero, acabará sempre por exceder qualquer limite assignado; e commo temos então

$$u_0 = u_0$$

$$2u_1 > u_1 + u_2$$

$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$

$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + \ldots + u_{14},$$

etc.;

concluiremos, que a somma das quantidades

$$u_0,\ 2u_1,\ 4u_3,\ 8u_7,\ \text{etc.}$$

tomadas em grande numero, acaba tambem por se tornar superior a qualquer quantidade assignada. E 'neste caso a serie (1) será tambem divergente, conforme o theorema enunciado.

Se pela serie proposta tomarmos a seguinte

$$(2) \ldots . 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots ,$$

designando por k uma quantidade qualquer, a serie (1) tornar-se-ha em

$$1 + 2^{1-k} + 4^{1-k} + 8^{1-k} + \text{etc.}$$

Esta ultima serie é uma progressão geometrica, convergente quando $k > 1$, e divergente no caso contrario. Por conseguinte a serie (2) será tambem convergente se for $k>1$, e divergente se for $k=1$ ou $k<1$. Por exemplo das tres series

$$(3)\ldots\ldots 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}$$

$$(4)\ldots\ldots 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

$$(5)\ldots\ldots 1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$

a primeira será convergente, e as outras duas divergentes.

Nota 4.ª (pag. 279).

O Sr. J. A. da Cunha acha o desinvolvimento de $\log(1+y)$ da seguinte maneira.

Se em todos os casos pudér ter logar o desinvolvimento de $\mathrm{l}(1+y)$ debaixo da fórma

$$\mathrm{l}(1+y)=\mathrm{A}y+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}y^3+\mathrm{D}y^4+\text{etc.}$$

será $$\mathrm{l}(1+2y+y^2)=2\mathrm{A}y+\mathrm{A}y^2+4\mathrm{B}y^2+\mathrm{B}y^4+\text{etc.}$$
$$+4\mathrm{B}y^3+8\mathrm{C}y^3+12\mathrm{C}y^4+\text{etc.}$$
$$+16\mathrm{D}y^4+\text{etc.}$$

mas $$\mathrm{l}(1+2y+y^2)=\mathrm{l}[(1+y)^2]=2\mathrm{l}(1+y);$$

logo $$2Ay+(A+4B)y^2+\text{etc.}=2Ay+2By^2+\text{etc.}$$

$$A+4B=2B;\ 4B+8C=2C;\ B+12C+16D=2D,\ \text{etc.},$$

$$B=-\tfrac{1}{2}A;\ C=\tfrac{1}{3}A;\ D=-\tfrac{1}{4}A;\ E=\tfrac{1}{5}A,\ \text{etc.};$$

e por conseguinte

$$l(1+y)=A\left(y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{5}y^5-\text{etc.}\right)$$

Como a quantidade A apparece arbitrária, segue-se que o numero de systemas de logarithmos que podemos adoptar é tambem arbitrário. Se fizermos $1+y=$base a, será

$$A=\frac{\log.\ a}{a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc.}}=\text{Modulo}=\text{Log. } e.$$

Nota 5.ª (pag. 317).

A construcção empregada para demonstrar o theorema fundamental (3) [fig. 40] deixa de ser a mesma quando não são menores de 90° os lados b' e c'; porque se um d'estes lados é $>90°$, a secante respectiva não encontra a tangente, mas sim o seu prolongamento; e se um dos mesmos lados é $=90°$, a secante respectiva é parallela á tangente.

No entretanto, sem fazermos construcção, póde mostrar-se que, ainda nos casos mencionados, tem logar o theorema (3).

I. Se $b'<90°$; a construcção dá, como dissemos, no triangulo ABC a formula (3).

II. Se $b'<90$, $c'>90°$; produzam-se BA e BC até completar em B′ o fuso espherico BB′. No triangulo B′AC, serão:

$$B'A=180°-c',\ B'AC=180-a,\ B'C=180-a';$$

e a formula (3) que tem logar para o angulo B'AC d'este triangulo, dá

$$\cos B'AC = \frac{\cos B'C - \cos AB' \cos AC}{\operatorname{sen} AB' \operatorname{sen} AC},$$

ou (3).

III. Se $b' > 90°$, $c' > 90°$; o triangulo B'AC, relativamente ao angulo B'AC, está no caso precedente (II); e por isso ainda tem logar a mesma demonstração.

Ou tambem; produzindo os lados BA e AC até encontrarem em B' e C' o arco BC produzido, será no triangulo C'AB':

$$B'AC' = a,\ AB' = 180 - c',\ AC' = 180 - b',\ C'B' = a';$$

e applicando-lhe o theorema, virá a formula (3).

IV. Se $b' = 90°$, $c' = 90°$, a formula (3) dá

$$\begin{cases} \text{para o angulo } a, & \cos a = \cos a',\ a = a' \\ \text{para os angulos } b \text{ ou } c, & \cos b = 0,\ b = 90°;\ \cos c = 0,\ c = 90° \end{cases}$$

o que concorda com as propriedades conhecidas dos polos.

V. Se é sómente $c' = 90°$: produza-se, ou corte-se AC, até que seja $AD = 90°$.

1.º Se não é $BD = 90°$; o theorema será applicavel ao angulo D no triangulo CBD; e dará

$$\cos D = \frac{\cos a' - \cos B \cos CD}{\operatorname{sen} BD \operatorname{sen} CD},$$

que, por ser $\cos D = 0$, se reduz a

$$\cos a' = \cos BD \cos CD = \cos a \operatorname{sen} b':$$

e como a fórmula (3) applicada ao angulo a no triangulo ABC dá tambem $\cos a = \frac{\cos a'}{\operatorname{sen} b'}$, ou $\cos a' = \cos a \operatorname{sen} b'$, segue-se que aquella fórmula é ainda verdadeira 'neste caso.

2.° Se é $BD=90°$; como tambem é $AB=90°$, será B pólo de AC, e conseguintemente $a'=90$; logo (IV) o theorema é ainda verdadeiro no caso de que se tracta.

(Vejam-se os *Apontamentos de Trigon. Esph.*, que se encontram tambem no vol. 3.° do jornal de Coimbra o *Instituto*).

Nota 6.ª (*pag.* 341).

1. No triangulo ABC (fig. 41) produzam-se os seus lados, até se encontrarem dous a dous, e formarem os tres fusos esphericos $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$. O circulo $ACA'C'A$ será a base do hemispherio $ACBA'C'$; e este compor-se-ha dos triangulos m, n, p, q.

Chamando pois $S=2\pi r^2$ a superficie do hemispherio, e observando que, por serem

$$AB'=180°-AB=A'B,\ CB'=180°-CB=BC',\ B=B',$$

são eguaes os triangulos $AB'C$, $A'BC'$: teremos

$$S=m+n+p+q=m+n+m+p+m+q-2m$$

$$=AA'+BB'+CC'-2m.$$

E como os fusos esphericos são proporcionaes aos seus angulos, isto é,

$$AA'=\frac{a}{180°}.\,S,\qquad BB'=\frac{b}{180°}.\,S,\qquad CC'=\frac{c}{180°}.\,S,$$

teremos
$$AA'+BB'+CC'=\frac{a+b+c}{180°}.\,S,$$

e conseguintemente

$$m=\frac{a+b+c-180°}{360°}.\,S.$$

Se quizermos tomar por unidade de superficie a superficie do triangulo trirectangulo, que é a quarta parte do hemispherio, e por unidade d'angulo o angulo recto, a expressão de m tomará a fórma

$$m = a + b + c - 2.$$

2. A superficie do triangulo vem assim expressa nos seus tres angulos: mas quando os angulos não forem dados, poderemos exprimil-os nas partes que forem dadas, e substituir depois essas expressões na da superficie, ou d'uma funcção trigonometrica d'ella.

Por exemplo, se forem dados os lados a' e c' com o angulo comprehendido b: tomando o triangulo trirectangulo por unidade de superficie, e o angulo recto por unidade d'angulo, teremos

$$\cot\left(\frac{1}{2}m\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{a+c}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2} - 1};$$

ou, em virtude da primeira analogia de Neper, e fazendo $\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2} = t$,

$$\cot\left(\frac{1}{2}m\right) = \frac{\cot\frac{b}{2}\cos\frac{a'-c'}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}\cos\frac{a'+c'}{2}}{\cos\frac{a'-c'}{2} - \cos\frac{a'+c'}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{c'}{2} + \operatorname{sen}\frac{a'}{2}\operatorname{sen}\frac{c'}{2}\left(\cos^2\frac{b}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\operatorname{sen}\frac{c'}{2} \times \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}\cos b}{\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}\operatorname{sen} b} = \frac{1 + t\cos b}{t\operatorname{sen} b},$$

Desinvolvendo em fim $\frac{1}{2}m$ em serie ordenada segundo as potencias de t, será

$$\frac{1}{2}m = t \operatorname{sen} b - \frac{1}{2}t^2 \operatorname{sen} 2b \ldots\ldots,$$

ou, se desprezarmos as quantidades da quarta ordem relativamente a a' e c',

$$m = \frac{1}{2}a' \, c' \operatorname{sen} b.$$

E porque é da segunda ordem a differença entre os senos do angulo b do triangulo espherico, e do angulo correspondente do triangulo rectilineo, que tem os mesmos lados que o espherico, vê-se que, desprezando os termos da quarta ordem, a superficie do triangulo espherico é egual á do rectilineo.

3. Chamando r o raio da esphera, e exprimindo as linhas trigonometricas do segundo membro da equação (3) nos comprimentos dos arcos respectivos, facilmente se mostra (Trigon. de Legendre, appendice §. V) que os angulos a, b, c, d'um triangulo espherico de lados muito pequenos teem, desprezando os termos da quarta ordem, com os correspondentes a_i, b_i, c_i, do triangulo rectilineo, cujos lados são tambem a', b', c', as seguintes relações

$$a = a_i + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}, \; b = b_i + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}, \; c = c_i + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''},$$

sendo m a superficie do triangulo rectilineo, que segundo o n.° precedente é egual á do espherico.

O que reduz a resolução do triangulo espherico proposto á do triangulo rectilineo, cujos lados são a', b', c', e cujos angulos são a_i, b_i, c_i.

O numero de segundos $\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}$ é o *excesso espherico*, que se reparte assim egualmente pelos tres angulos do triangulo.

4. Suppondo o raio da esphera infinito, e os comprimentos dos arcos finitos, ou suas graduacões infinitesimas, o triangulo espherico torna-se rectilineo; e porisso podemos, fazendo aquellas hypotheses, passar dos theoremas da trigonometria espherica para os correspondentes da trigonometria rectilinea.

Quando nos theoremas da trigonometria espherica entra mais de um lado, passando d'elles para os triangulos rectilineos, podem apparecer razões entre as graduações dos lados; e porque estas razões podem ter um limite de grandeza finita, quando se tornam infinitesimas as graduações entre as quaes ellas teem logar, póde apparecer um theorema correspondente da trigonometria rectilinea na qual entrem lados. Mas quando nos theoremas da trigonometria espherica entra só um lado, a hypothese de ser este infinitesimo necessariamente o faz desapparecer; e o theorema reduz-se para a trigonometria rectilinea a uma relação entre angulos.

Assim, 'nestas hypotheses, a formula (3)

$$\cos a = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'} = \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b' - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c' - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'},$$

dá

$$\cos a = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}.$$

E proseguindo, pelo mesmo modo, achariamos que os quatro theoremas fundamentaes de trigonometria espherica, e as quatro analogias de Neper, correspondem aos quatro theoremas principaes da trigonometria rectilinea. (Vejam-se os já citados *Appontamentos de Trigon. Esph.*)

FIM DO 3.º VOLUME.

TABOA DAS MATERIAS.

ALGEBRA SUPERIOR.

I. DAS COMBINAÇÕES E POTENCIAS.

II. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.

III. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARTICULARES.

IV. FUNCÇÕES SYMETRICAS.

V. FRACÇÕES CONTÍNUAS.

VI. METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS.

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO.

I. TRIGONOMETRIA ESPHERICA.

II. SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO.

NOTAS.

ERRATAS.

Pag.	*Lin.*	*Erros*	*Emendas*
16	18	$(2b^3-5c^3)^2(2b^3-5c^3)^2$ etc. $=$	$(2b^3-5c^3)^2$.
25	18	$h^{m-1}-1=(h^q-1)=(h^q+1)$,	$h^{m-1}=(h^q-1)\times(h^q+1)$,
34	19	(fig. 1)	(fig. 23)
38	23	$+ad$	$+bd$
—	28	$+bdd$	$+add$
41	6	$\mathrm{F}a\,b^{n'}c^{n''}$	$\mathrm{F}a^n\,b^{n'}c^{n''}$
64	9	satisfaz ambas	satisfaz a ambas
—	15	attendo	attendendo.
—	17	*dominador*	*denominador*
97	19	$+\frac{1}{5}hf''x$	$+\frac{1}{2}hf''x$
99	3	$x=fx$	$y=fx$
101	16	$\frac{1}{6}h^3f''x$	$\frac{1}{6}h^3f'''x$
—	25	fx^{IV}	$f^{\mathrm{IV}}x$
113	14	$s=0{,}0054$	$s=-0{,}0054$
120	3	*são* i	*são os* i
129	8	3.° Se houver	3.° Se na serie B houver de menos uma variação do que em A, haverá só uma raiz entre a e b. 4.° Se houver....

Pag.	*Lin.*	*Erros*	*Emendas*
150	8	$x+1$	x^m+1
164	29	$b\ e\ o$	$b\ e\ c$
165	30	$y-1$	$y'-1$
167	3	$m,\ S_m$	$m.\ S_m$
170	10	y^m+	y^m+1
189	8	$\cos\frac{1}{8}\varphi$	$\cos\frac{1}{3}\varphi$
256	5	$+n_2+\ldots$	$+u_2+\ldots$
263	16	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^3$
—	19	$\frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{2}x^2$
321	21	a hypothenusa a } um lado B	a hypothenusa a } um angulo B
360	2	(n.° 198)	(n.° 200)
—	3	$y+y'$	$y-y'$
—	8	$=A(x-x')\ B(y-y')$	$=A(x-x')+B(y-y')$
368	18	(n.° 204, 3.°)	(n.° 204, 2.°)
376	14	$=(ctr-a)$	$2c(r-a)$
—	18	$\frac{c-a\,\text{tang}\,\theta}{a-c\,\text{tang}\,\theta}$	$\frac{c-a\,\text{tang}\,\theta}{a+c\,\text{tang}\,\theta}$
—	20	$\frac{c}{zr-a}$	$\frac{c}{2r-a}$

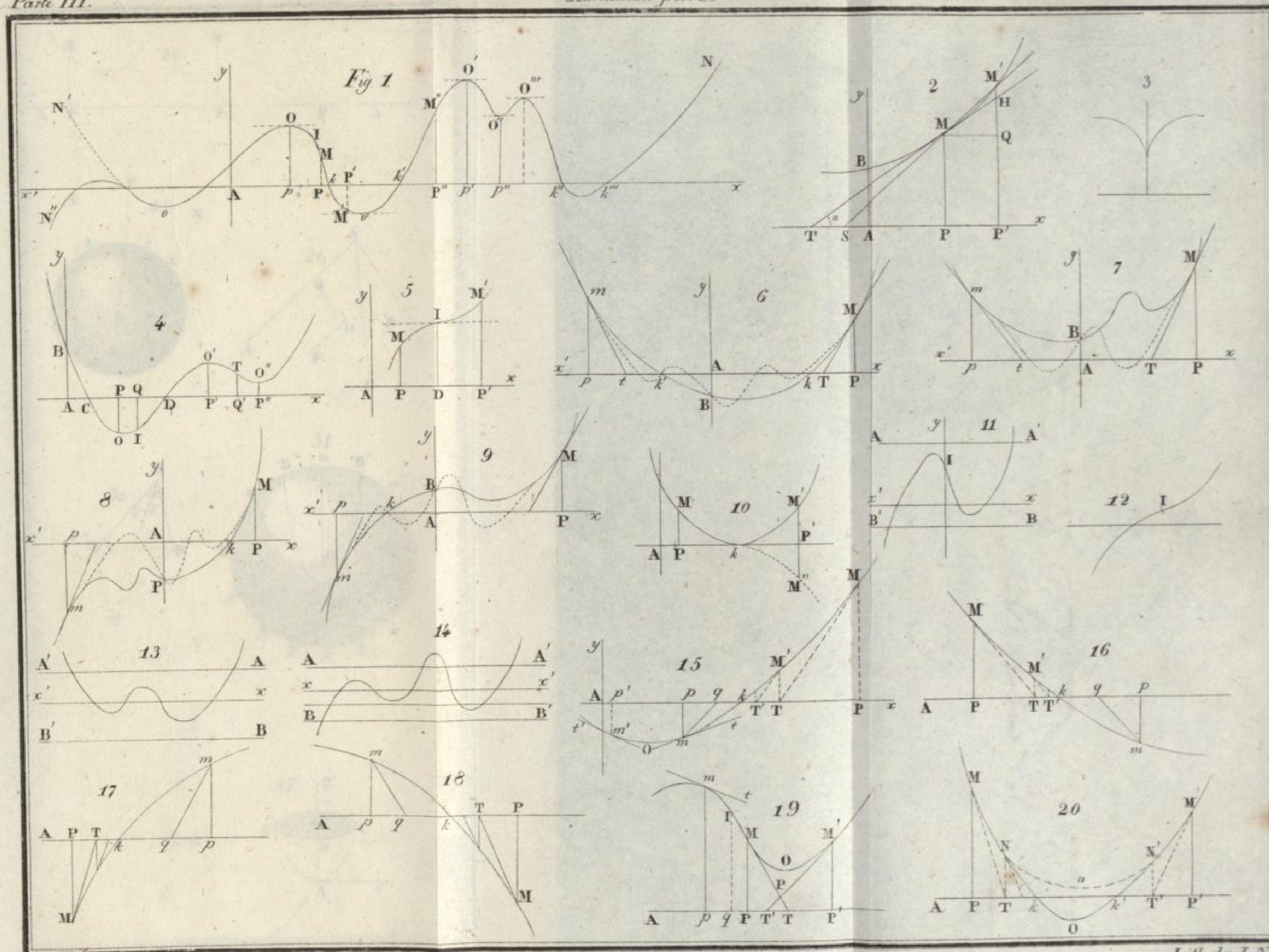
ADDITAMENTO

ÁS ERRATAS DO 2.º VOLUME.

Pag.	*Lin.*	*Erros*	*Emendas*
167	6	<arco AB	<arco AC
175	16	$\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{1}{2}A$	$\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{1}{2}A \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$
178	5	$2bc\cos\frac{1}{2}A$	$2\sqrt{(bc)}\cos\frac{1}{2}A$
196	4	$-4\cos 3a$	$-4\cos 2a$
239	10	$+ax$	$+\alpha x$
298	7	n.º	n.º 269
302	19	$\cos^2(6-\alpha)$	$\cos^2(6+\alpha)$

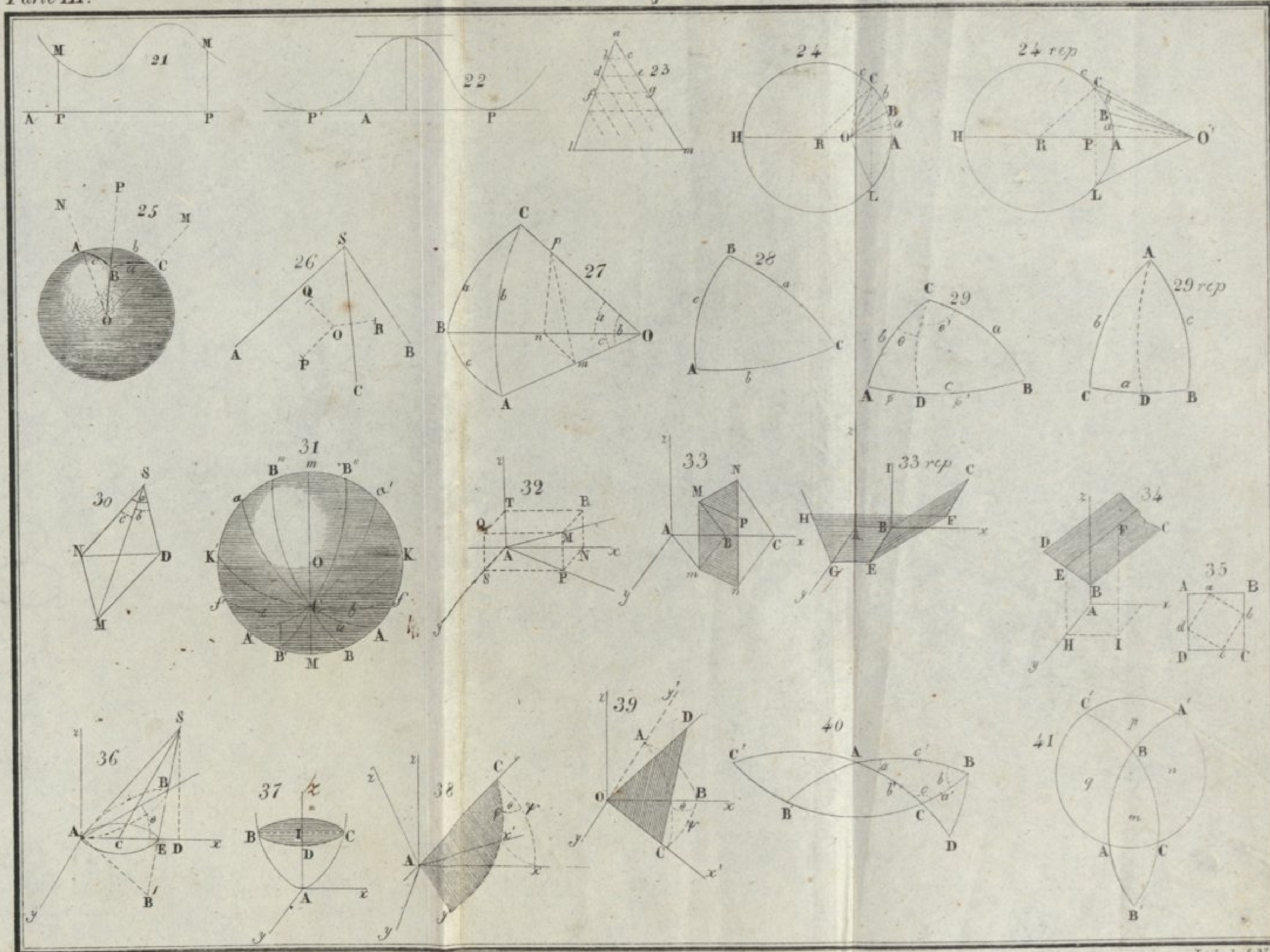
Em logar das ultimas cinco linhas d'esta pagina **302**, *leia-se o seguinte*:

As equações (9), (10), (11), por serem symmetricas relativamente a a' e b', não mudam quando se trocam as denominações dos diametros, isto é, quando se chama a' o que faz com a o angulo 6, e b' o que faz com o mesmo eixo o angulo α. Por isso o primeiro factor da equação final da pagina 302, egualado a zero, e combinado com as equações (8), reproduz a equação (11); e o segundo factor, combinado com as equações (8) depois de mudar n'ellas a' em b' e b' em a', reproduz a mesma equação (11).



Valheiras gr.

Lith. da I. N.al



Calheiros, gr. *Lith. da I.N.*

FRANCOEUR

MATHEMATICAS PURAS

3