CURSO COMPLETO

DE

# MATHEMATICAS PURAS.

# CURSO COMPLETO

DE

# MATHEMATICAS PURAS.

# CURSO COMPLETO

DE

# MATHEMATICAS PURAS,

POR

L.-B. Francoeur:

*NOVAMENTE TRADUZIDO, CORRECTO E AUGMENTADO*

PELOS

LENTES CATHEDRATICOS DA FACULDADE DE MATHEMATICA
NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA,

FRANCISCO DE CASTRO FREIRE,

E

RODRIGO RIBEIRO DE SOUSA PINTO.

---

## PARTE 3.ª

## ALGEBRA SUPERIOR

E

## GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO.

Da Faculd.e
Para uso das Aulas.



COIMBRA,
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

1856.

# ALGEBRA SUPERIOR

## I. DAS COMBINAÇÕES E POTENCIAS.

### *Permutações e Combinações.*

1. CHamam-se Arranjos *ou* Permutações *todas as collecções que se obtem, dispondo uns adiante dos outros, em todas as ordens differentes,* 2 *a* 2, 3 *a* 3, 4 *a* 4, ......... *um determinado numero de objectos. Quando expressamente não dissermos o contrário, supporemos que o mesmo objecto não entra mais que uma vez em cada collecção.* Assim *abc*, *bac*, *cba*, *bca*, são 4 permutações de 3 letras tomadas 3 a 3. Para designarmos o numero de todas as permutações possiveis de $m$ letras $p$ a $p$ escreveremos $[m\ \mathrm{P}p]$. (*)

*Chamam-se* Combinações *todas as collecções que se obtem, dispondo uns adiante dos outros, e em todas as ordens differentes,* 2 *a* 2, 3 *a* 3, 4 *a* 4, ...... *um determinado numero de objectos, de maneira que um d'elles pelo menos seja differente n'uma qualquer das collecções comparada com cada uma das outras. Quando expressamente não dissermos o contrário, supporemos que o mesmo objecto não entra mais*

(*) Alguns authores fazem distincção entre *arranjos* e *permutações*, reservando este último nome para designar os arranjos de $p$ letras entre si, ou $p$ a $p$: julgâmos porêm desnecessaria tal distincção.

*que uma vez em cada collecção.* Assim $abc$, $abd$, $bcd$, $acd$ são 4 combinações de 4 letras 3 a 3. Para designarmos o numero de todas as combinações possiveis de $m$ letras $p$ a $p$ escreveremos $[mCp]$.

Problema 1.° *Achar o numero* y *de todas as permutações de* m *letras* a, b, c, d, ...... *tomadas* p *a* p, *ou* $y=[mPp]$.

Visto que no enunciado do problema se não faz distincção alguma entre as $m$ letras $a$, $b$, $c$, $d$......, que pertendemos permutar, podêmos concluir, que entre todas as permutações possiveis haverá um certo numero d'ellas que começarão pela letra $a$, outras tantas que começarão pela letra $b$, outras tantas pela letra $c$, etc. Por conseguinte, se determinarmos o numero $\varphi$ de todas as que começam pela letra $a$, será o numero total das permutações

$$y=[mPp]=m\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Para achar este numero $\varphi$ consideremos, que obteriamos facilmente as permutações $p$ a $p$ em que a letra $a$ é inicial, se soubessemos permutar de todas as maneiras possiveis $p-1$ a $p-1$ as $m-1$ letras $b$, $c$, $d$, ......, e puzessemos depois a letra $a$ na frente de cada uma d'estas collecções. Na verdade se por este modo alguma das permutações, em que $a$ é inicial, fosse omittida ou repetida, seguir-se-hia que, supprimindo a letra $a$ na frente de cada um dos termos, haveria o mesmo erro de omissão ou repetição nas permutações das $m-1$ letras $p-1$ a $p-1$; o que é contra o supposto. D'aqui se segue que o numero $\varphi$ de todas as permutações de $m$ letras $p$ a $p$, em que $a$ é inicial, é o mesmo que o de todas as permutações das $m-1$ letras $p-1$ a $p-1$: ou

$$\varphi=[(m-1)\ P\,(p-1)].$$

E por tanto, substituindo em (1), será

$$y=[mPp]=m\,[(m-1)\,P\,(p-1)] \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Esta fórmula, fazendo depender o numero de todas as permutações de $m$ letras $p$ a $p$ do numero de todas as permutações de $m-1$ letras $p-1$ a $p-1$, resolve o problema: para o que basta advertir que o numero de $m$ letras permutadas 1 a 1 é $m$. Assim:

1.° Para achar o numero $y''$ das permutações de $m$ letras 2 a 2; como o numero $\varphi$ de $m-1$ letras permutadas 1 a 1 é $m-1$, temos $\varphi = m-1$, e

$$y'' = m(m-1).$$

2.° Para achar o numero $y'''$ de todas as permutações de $m$ letras 3 a 3; como n'este caso, $\varphi$ é o numero de permutações de $m-1$ letras 2 a 2, numero que se deduz do valor precedente de $y''$, mudando $m$ em $m-1$; será $\varphi = (m-1)(m-2)$, e

$$y''' = m(m-1)(m-2).$$

3.° Pelo mesmo estilo se acha, que o numero de permutações de $m$ letras 4 a 4 é

$$y^{\text{IV}} = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

E assim por diante.

Notando agora, que para passar de uma d'estas equações para a seguinte basta mudar $m$ em $m-1$, e multiplicar depois por $m$, o que equival a ajunctar aos factores $m$, $m-1$, ...... o inteiro immediatamente inferior ao último factor precedente: concluiremos que, para $p$ letras, o último factor será $m-(p-1)$; e por conseguinte teremos

$$y^{(p)} = [mPp] = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)\ldots\ldots(a)$$

O numero de factores é $p$.

Applicando a fórmula $(a)$ vê-se, que 9 objectos podem permutar-se 4 a 4 de tantos modos differentes, quantos são indicados pelo producto dos 4 factores 9.8.7.6, ou que $[9P4] = 3024$. Este numero mostra tambem todas as differentes maneiras, por que 9 pessoas podem occupar 4 logares.

Fazendo em $(a)$ $m = p$, obteremos o numero $z$ de todos os arranjos de $p$ letras entre si, ou $p$ a $p$, e virá

$$z = [p\mathrm{P}p] = p.(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1 = 1.2.3\ldots\ldots p \quad (b)$$

Assim o numero de todas as permutações das 7 notas da eschala musical entre si é $= 1.2.3\ldots 7 = 5040$; e se contarmos os semitonos será $= 1.2.3\ldots 12 = 479001600$.

Problema 2.° *Achar o numero* x *de todas as combinações de* m *letras* p *a* p.

Imaginemos estas $x$ combinações effectuadas e escriptas seguidamente em linha horizontal: escrevam-se depois por baixo da 1.ª combinação, e formando com ella uma columna vertical, todas as permutações $p$ a $p$ das $p$ letras daquella combinação. O numero $z$ dos termos d'esta columna será dado pela equação ($b$).

Da 2.ª combinação resultará tambem, pela mesma fórma, uma columna vertical de $z$ termos contendo todas as permutações $p$ a $p$ das $p$ letras d'essa combinação, uma das quaes letras pelo menos é differente das que entram na columna antecedente.

Da 3.ª combinação resultará tambem uma columna de $z$ termos differentes dos outros das columnas precedentes. E assim por diante.

Obter-se-ha por esta maneira uma tabella composta de $x$ columnas, contendo cada uma $z$ termos de $p$ letras, e dando por tudo $xz$ resultados, que constituem evidentemente todas as permutações possiveis das $m$ letras $p$ a $p$, sem omissão ou repetição alguma. Sendo $y^{(p)}$ o numero d'estas permutações dado pela equação ($a$), será pois

$$xz = y^{(p)}, \text{ ou } x = \frac{y^{(p)}}{z} = \frac{[m\mathrm{P}p]}{[p\,\mathrm{P}p]},$$

isto é,

$$x = [m\,\mathrm{C}p] = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p} \ldots\ldots (c)$$

Para usarmos d'esta fórmula advertiremos, que o numerador é formado pela serie de $p$ factores que vão diminuindo successivamente de uma unidade, desde o inteiro $m$ dado até ao inteiro $m-p+1$. O denominador é formado pela serie de factores dos numeros inteiros desde 1 até ao numero $p$.

Como por sua natureza $x$ deve ser numero inteiro, concluiremos:

*que a fórmula* (*a*) *deve ser exactamente divisivel por* (*b*). Isto mesmo se demonstra *a priori*. (Nota 1.ª)

2. Designando por $x'$ o numero de combinações de $m$ objectos $q$ a $q$, temos

$$x' = [m\,\mathrm{C}q] = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-q+1)}{1\,.\;\;2\,.\;\;3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,q}.$$

Se for $p>q$, todos os factores d'esta última equação entrarão na equação (*c*), que por isso se poderá escrever

$$x = x'\,\frac{(m-q)\,(m-q-1)\,\ldots\,(m-p+1)}{(q+1)\,(q+2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,p},$$

e nos leva ás seguintes considerações.

I. Para que seja $x=x'$, é necessario, que os factores do numerador da fracção, pela qual $x'$ se acha multiplicado, formem o mesmo producto que os do denominador; e assim, tomando estes em ordem inversa, deveremos ter

$$(m-q)\,(m-q-1)\,\ldots\,(m-p+1) = p\,(p-1)\,\ldots\,(q+1).$$

Como estes dous membros tem um numero egual de factores continues e decrescentes, se cada um dos factores de um lado não fosse egual ao que occupa o mesmo logar do outro lado, não seria possivel a egualdade, por que, supprimindo então os factores communs, ficariam de um lado factores todos maiores que do outro. É necessario por tanto, que seja $m-q=p$ para ser $x=x'$; donde resulta o seguinte theorema:

$$[m\,\mathrm{C}p] = [m\,\mathrm{C}q] \quad \text{quando for } m = p+q.$$

Assim 100 letras tomadas 88 a 88, e tomadas 12 a 12, dão o mesmo numero. Com effeito $[100\,\mathrm{C}\,88]$ tem por numerador $100.99\,..\,89.88\,..\,13$, e por denominador $1.2\,\ldots\,12.13\,\ldots\,88$; supprimindo pois os facto-

res communs $13.14\ldots\ldots 88$, resta $\dfrac{100.99\ldots\ldots 89}{1.2\ldots\ldots\ldots 12}=[100\,C\,12]$.
Esta consideração serve para facilitar os calculos da fórmula ($c$), quando for $p>\frac{1}{2}m$. Acha-se mais depressa $[100\,C\,4]$ do que $[100\,C\,96]=3921225$.

D'aqui se conclue, que *se escrevermos successivamente os numeros de combinações de* m *letras* 1 *a* 1, 2 *a* 2, 3 *a* 3, *hão-de reproduzir-se os mesmos valores em ordem retrograda, passado o termo do meio.* Sendo, por ex.°, 8 as letras, estes valores são 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. (Veja-se a taboada que vae adiante com a inscripção — *Coefficientes do Binomio ou Numeros de combinações* —)

II. Supponhamos $q=p-1$; n'este caso $x$ só tem um factor mais que $x'$, e é

$$x=x'\frac{m-p+1}{p},\ \text{ou}\ [m\,C\,p]=\Big[m\,C(p-1)\Big]\frac{m-p+1}{p}\ldots(d)$$

e nos leva ás seguintes considerações.

1.° Daqui se tira uma regra, que serve para deduzir successivamente uns dos outros os numeros de combinações de $m$ letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3.... *Escrevam-se as fracções* $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, .... *e multiplique-se cada uma pelo producto de todas as antecedentes.* Por ex.°, sendo 8 as letras que temos de combinar, escreveremos $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, e virá $8$; $8\times\frac{7}{2}=28$; $28\,\frac{6}{3}=56$; ..... Por este modo se acha que 8 numeros da lotaria formam 8 *azes*, 28 *duques*, 56 *ternos*, 70 *quadras* e 56 *quinas*; e que 80 numeros formam 90 *azes*, 4005 *duques*, 117480 *ternos*, 2555190 *quadras*, 43949268 *quinas*.

2.° Os factores successivos $m$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, .... tem os numeradores decrescentes e os denominadores crescentes: em quanto forem $>1$, o producto augmentará; e diminuirá pelo contrário logo que a ordem $i$ do termo for tal que venha

$$\frac{m-i+1}{i}<1,\ \text{ou}\ i>\frac{m+1}{2},$$

devendo então começar a apparecer os mesmos productos em ordem retrograda, como acima dissemos.

1.° *Caso*, m *par* $=2\alpha$. Então é $i>\alpha+\frac{1}{2}$; e por conseguinte os termos crescem até á ordem $i=\alpha$, na qual o último factor é $\frac{\alpha+1}{\alpha}$, sendo este termo $[m\,C\frac{1}{2}m]$ ou

$$\frac{2\alpha(2\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha+1)}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots2\alpha}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha},$$

o qual se fórma escrevendo no denominador a serie natural $1.2\ldots\ldots\alpha$, e continuando-a no numerador até $2\alpha$. Multiplicando ambos os termos por $1.2.3\ldots\ldots\alpha$, vem

$$M=\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots2\alpha}{(1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha)^2},$$

onde os factores pares, que no numerador vem alternados com os impares, são $2.4.6\ldots\ldots2\alpha=2^\alpha\times1.2.3.4\ldots\ldots\alpha$; e por conseguinte o *termo medio maior que todos os outros* é

$$M=[m\,C\tfrac{1}{2}m]=2^{\frac{1}{2}(m)}\,\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(m-1)}{1.2\,3\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}m}.$$

2.° *Caso*, *m impar* $=2\alpha+1$. N'este caso é $i>\alpha+1$; e por conseguinte os termos só começam a decrescer quando $i$ excede $\alpha+1$; e como no termo d'esta ordem o último factor se reduz a $\frac{\alpha+1}{\alpha+1}=1$, este termo é egual ao precedente, vindo assim a repetir-se nas ordens $\alpha$ e $\alpha+1$, ou $\frac{1}{2}(m\mp1)$. Fazendo pois $i=\alpha$, teremos para *os dois termos medios, maiores que todos os outros*, e correspondentes a $[m\,C\frac{1}{2}(m\mp1)]$,

$$M=\frac{(2\alpha+1)\times 2\alpha\times..(\alpha+2)}{1.\quad 2.\quad 3......\alpha}=\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)....(2\alpha+1)}{1.\quad 2.\quad 3....\alpha}.$$

Practicando, como no 1.° caso, acharemos

$$M=[m\,C\tfrac{1}{2}(m\mp 1)]=2^{\frac{1}{2}(m-1)}\frac{1.3.5.7\,..........\,m}{1.2.3.4\,.....\,\frac{1}{2}(m+1)}.$$

Applicando as fórmulas, que achámos por os dois casos, vê-se, que os maiores numeros de combinações que é possivel fazer com 18 e 19 letras são

$$M=[18\,C\,9]=2^{9}\frac{1.3.5\,......\,17}{1.2.5\,.....\,9}=48620\,;$$

$$M=[19\,C\,9]=[19\,C\,10]=92378.$$

3.° Da equação ($d$) tira-se

$$x+x'=x'\frac{m+1}{p}=\frac{m+1}{1}.\frac{m}{2}....\frac{m-p+2}{p},$$

attendendo a que suppuzemos $x'=[m\,C(p-1)]$. Comparando este valor de $x+x'$ com a equação ($c$), vem

$$[(m+1)\,Cp]=[m\,Cp]+[m\,C(p-1)]\,.........\quad(e)$$

Por meio d'esta fórmula, e por simples addição, se deduzem as combinações de $m+1$ letras conhecidas as de $m$ letras; e por ella se formou *a taboada seguinte, chamada Triangulo arithmetico de Pascal, na qual cada um dos numeros é a somma do termo correspondente superior e do que fica á esquerda deste na linha precedente.*

Temos, por ex.°,
na 7.ª linha ....... 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Para formar a 8.ª linha tomaremos $7+1=8$, $21+7=28$, $35+21=56$, $35+35=70$, etc.

N'esta lei explica-se o apparecimento dos mesmos termos em ordem inversa, por que basta que se dê n'uma linha para que tenha logar na seguinte.

Além d'este meio que acabâmos de indicar, podemos deduzir os termos da mesma linha uns dos outros, ou successivamente (1.°), ou usando da fórmula (*c*) que é o seu *termo geral.*

## COEFFICIENTES DO BINOMIO,

ou

*Numero de Combinações.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 |
| 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 |
| 1 | 13 | 78 | 286 | 715 | 1287 | 1716 | 1716 | 1287 | 715 | 286 |
| 1 | 14 | 91 | 364 | 1001 | 2002 | 3003 | 3432 | 3003 | 2002 | 1001 |
| 1 | 15 | 105 | 455 | 1365 | 3003 | 5005 | 6435 | 6435 | 5005 | 3003 |
| 1 | 16 | 120 | 560 | 1820 | 4368 | 8008 | 11440 | 12870 | 11440 | 8008 |
| 1 | 17 | 136 | 680 | 2380 | 6188 | 12376 | 19448 | 24310 | 24310 | 19448 |
| 1 | 18 | 153 | 816 | 3060 | 8568 | 18564 | 31824 | 43758 | 48620 | 43758 |
| 1 | 19 | 171 | 969 | 3876 | 11628 | 27132 | 50388 | 75582 | 92378 | 92378 |
| 1 | 20 | 190 | 1140 | 4845 | 15504 | 38760 | 77520 | 125970 | 167960 | 184756 |
| 0 | 1 a 1 | 2 a 2 | 3 a 3 | 4 a 4 | 5 a 5 | 6 a 6 | 7 a 7 | 8 a 8 | 9 a 9 | 10 a 10 |

III. Designando por $1, m, a, b, c, \ldots b, a, m, 1$ os numeros de uma linha, serão, fórm. $(e)$, os da seguinte

$$1,\ 1+m,\ m+a,\ a+b, \ldots a+m,\ m+1,\ 1,$$

na qual a somma dos termos das ordens pares é

$$1+m+a+b+c+d \ldots\ldots m+1,$$

que é a mesma dos termos das ordens impares, e tambem a mesma que a somma dos termos da linha precedente. Sommando pois todos os termos da linha $m+1$, teremos o dôbro da somma da linha $m$. Ora a 2.ª linha da taboada é $1+2+1=4=2^2$, e por conseguinte as linhas seguintes terão por somma $2^3$, $2^4$, .... $2^m$. Logo: *a somma das combinações de* m *letras é* $2^m$ *; a somma dos termos das ordens, ou pares, ou impares, é* $2^{m-1}$ *; e esta somma é a mesma que a das combinações de* m $-1$ *letras.*

3. Supponhamos que, tendo separado $m$ letras $a, b, c, d, \ldots$ em dois grupos, um contendo $m'$ d'estas letras, e o outro $m''$ das restantes, sendo assim $m=m'+m''$: se pede o numero de todas as combinações $p$ a $p$ formadas de $p'$ das letras do primeiro grupo e de $p''$ das do segundo, sendo $p=p'+p''$.

Para isto, façamos todas as combinações das primeiras $p'$ a $p'$, e as das segundas $p''$ a $p''$. Os numeros d'estas combinações serão respectivamente $[m'Cp']$ e $[m''Cp'']$. Se reunirmos dous a dous cada um dos resultados das 1.as com cada um dos das 2.as, $p'$ letras de uma parte, reunidas com $p''$ letras da outra, formarão $p$ letras; e é claro que estes systemas reunidos resolverão a questão proposta. O numero de todas estas combinações será pois

$$X=[m'Cp']\times[m''Cp''] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

I. Em quantas combinações de $m$ letras $a, b, c, \ldots\ldots$ entra a letra $a$? Temos $m'=p'=1$, e $X=[(m-1)C(p-1)]$.

II. Em quantas combinações entra $a$ sem $b$, e $b$ sem $a$? Temos $m'=2$, $p'=1$, logo $X=2\times[(m-2)C(p-1)]$.

III. Em quantas entra $a$ com $b$? Temos $m'=p'=2$, e

$$X=[(m-2)\,C\,(p-2)].$$

IV. Em quantas não entra nem $a$, nem $b$? Temos $m'=2$, $p'=0$, e $X=[(m-2)\,Cp]$.

V. Em quantas das combinações de $m$ letras $p$ a $p$ entram só duas das tres letras $a$, $b$, $c$? Temos $m'=3$, $p'=2$, e

$$X=3\times[(m-3)\,C\,(p-2)].$$

VI. Em quantas das 210 combinações de 10 letras 4 a 4 não entra nenhuma das tres letras $a$, $b$, $c$? Em quantas entra uma só? Em quantas duas? Em quantas entram todas tres? Applicando a fórmula acharemos:

| | | |
|---|---|---|
| 1.° Nenhuma das tres letras...... | $[3C0]\times[7C4]=1\times35=$ | 35 |
| 2.° Uma só.................. | $[3C1]\times[7C3]=3\times35=$ | 105 |
| 3.° Duas...................... | $[3C2]\times[7C2]=3\times21=$ | 63 |
| 4.° Todas tres..... ........ | $[3C3]\times[7C1]=1\times7=$ | 7 |
| Numero total das combinações.......................... | | 210 |

4. Pedindo-se o número de permutações $p$ a $p$ de $m$ letras dentre $m'$ designadas, bastará tomar cada uma das X combinações precedentes e permutar as $p$ letras que n'ellas entram. Assim, designando por Y o número das permutações pedidas, teremos

$$Y=X\times1.2.3\ldots\ldots p.$$

5. *Para effectuar com facilidade todas as permutações possiveis* p *a* p *de* m *letras*, procederemos da maneira seguinte.

Tendo escripto na ordem alphabetica as $m$ letras $a, b, c, \ldots . u, v$, separemos d'ellas as $p-1$ últimas letras $i, k, \ldots \ldots u, v$. Colloquemos depois a 1.ª d'estas letras separadas $i$ em frente de cada uma das primeiras $m-p+1$ letras $a, b, c \ldots \ldots h$, formando assim as seguintes permutações 2 a 2,

$$ia, ib, ic, \ldots \ldots \ldots \ldots ih.$$

Mudemos por fim, e successivamente, $i$ em $a, b, c, \ldots \ldots h$, tendo o cuidado de mudar tambem $a$ em $i$, $b$ em $i, \ldots . h$ em $i$, nos termos em que assim for necessario para que se não repita a mesma letra. Por esta fórma conseguiremos obter todas as permutações 2 a 2 das $m-p+2$ letras $i, a, b, \ldots . h$, tornando-se cada uma d'ellas inicial o mesmo numero de vezes $m-p+1$ (n.º 1.º).

Feito isto, colloquemos a 2.ª letra separada $k$ em frente de todos os resultados precedentes, formando assim as seguintes permutações 3 a 3,

$$kia, \ldots . , kih, kai, \ldots . kah, kba, \ldots . kbh, \ldots .$$

Mudando depois successivamente $k$ em $i, a, b, \ldots . h$, com a advertencia que acima fizemos, obteremos todas as permutações 3 a 3 das $m-p+3$ letras $k, i, a, b, \ldots . h$.

E proseguindo sempre pelo mesmo estilo, até chegar a collocar a última das letras separadas $v$, na frente de todas as permutações $p-1$ a $p-1$ das $m-1$ letras restantes; e fazendo depois a mudança successiva de $v$ em $u \ldots . k, i, a, b \ldots . h$, com a advertencia indicada, obteremos finalmente todas as permutações das $m$ letras $p$ a $p$.

Por ex.º, para permutar 3 a 3 as 5 letras $a, b, c, d, e$, separe-se $d$ e $e$, e pondo $d$ em frente de cada uma das tres $a, b, c$, vem

$$da, db, dc;$$

mudando depois successivamente $d$ em $a, b, c$, com a devida advertencia, obtem-se todos os arranjos 2 a 2 das 4 letras $a, b, c, d$, *da* , *db* , *dc* , *ad* , *ab* , *ac* , *ba* , *bd* , *bc* , *ca* , *cb* , *cd*.

Pondo por fim *e* em frente de cada um d'estes termos o que dá *eda*, *edb* , .... e mudando depois *e* em *a* , *b* , *c* , *d* , obteremos os 60 arranjos pedidos (*).

6. *Para effectuar com facilidade todas as combinações possiveis de* m *letras* p *a* p, empregaremos o processo seguinte.

Escrevam-se primeiro em linha e na ordem alphabetica todas as *m* letras; e teremos todas as suas combinações 1 a 1.

Escrevam-se depois n'outra linha, adiante de cada uma d'estas letras, successivamente todas as que se seguem a essa letra na 1.ª linha; e por esta fórma obteremos todas as combinações das *m* letras 2 a 2. Por que por esta maneira é evidente que não é possivel omittir-se qualquer combinação, nem tão pouco repetirem-se duas.

Continue-se sempre, por este modo, a escrever, adiante de cada uma das combinações já obtidas, successivamente todas as letras que se seguem na 1.ª linha á ultima letra d'esta combinação; e por esta fórma chegaremos a obter pela razão apontada, todas as combinações das *m* letras *p* a *p*.

Por ex.º, para effectuar todas as combinações 4 a 4 das 5 letras *a* , *b* , *c* , *d* , *e* , teremos seguidamente:

Combinações 1 a 1 .... *a* , *b* , *c* , *d* , *e*.

2 a 2 .... *ab* , *ac* , *ad* , *ae* , *bc* , *bd* , *be* , *cd* , *ce* , *de*.

3 a 3 .... *abc* , *abd* , *abe* , *acd* , *ace* , *ade* , *bcd* , *bce* , *bde* , *cde*.

4 a 4 .... *abcd* , *abce* , *abde* , *acde* , *bcde*.

---

(*) Esta theoria serve para achar o *logogrypho* e *anagramma* das palavras. Estas bagatellas, aliás trabalhosas, conduzem muitas vezes a resultados notaveis. A' pergunta feita por Pilatos a Jesus-Christo: *Quid est veritas?* responde o anagramma: *est vir qui adest*. Em *Frere Jacques Clement*, o assassino de Henrique III, acha-se letra por letra: *C'est l'enfer qui m'a créé*.

Todos os termos, em que entra a última letra $e$, nas combinações que tem o mesmo numero de letras, não fornecem termo algum para as combinações seguintes, em que entra mais uma letra.

## *Desenvolvimento das potencias de um polynomio.*

7. Se no producto de $m$ factores binomios

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots\ldots$$

fizermos $a=b=c=\ldots$, este producto se tornará em $(x+a)^m$. Por conseguinte para achar o desenvolvimento da potencia $m$ de um binomio, podemos effectuar o producto acima indicado, e tornar depois eguaes os 2.os termos $a, b, c, \ldots$; conseguindo por este processo reconhecer a lei que observam os diversos termos do producto, antes de se practicar a reducção. Ora já vimos (*Alg. El.* n.º 104, V) que este producto é da fórma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}\ldots + Nx^{m-n} + \ldots + abcd\ldots;$$

sendo $A$ a somma $a+b+c+\ldots\ldots$ dos 2.os termos dos factores binomios; $B$ a somma dos seus productos 2 a 2, $ab+ac+ad\ldots$; $C$ a dos productos 3 a 3, $abc+abd+\ldots\ldots$; etc.

Fazendo $a=b=c=\ldots$, todos os termos de $A$ se tornam eguaes a $a$; os de $B=a^2$; os de $C=a^3$; .... os de $N=a^n$. Logo:

$A$ torna-se em $a$ repetido $m$ vezes, ou $A=ma$.

$B$ torna-se em $a^2$ repetido tantas vezes quantos são os productos 2 a 2, ou $B=a^2\,[mC2]=m\dfrac{(m-1)}{2}a^2$.

$C$ torna-se em $a^3$ repetido tantas vezes quantos são os productos 3 a 3, ou $C=a^3\,[mC3]=m\left(\dfrac{m-1}{2}\right)\left(\dfrac{m-2}{3}\right)a^3$.

E assim por diante a respeito dos factores consecutivos; de sorte que para o termo $Nx^{m-n}$ de uma ordem qualquer $n$, será $N=[mCn]\,a^n$.

O último termo é $a^m$.

D'aqui resulta a fórmula geral descoberta por Newton:

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^m = x^m + ma\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}a^2x^{m-2}\\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3} + \ldots + a^m.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(g)$$

Se designarmos por $T_n$ um termo qualquer da ordem $n$, será o termo seguinte $T_{n+1}$, correspondente á ordem $n+1$, ou que tem $n$ termos antes de si,

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}a^n x^{m-n} = [mCn]\,a^n x^{m-n}\,..\,(h)$$

Esta expressão é o *termo geral* da fórmula $(g)$; e chama-se assim, por que, fazendo n'ella successivamente $n=1, 2, 3, \ldots$, podemos deduzir todos os termos da fórmula, começando no segundo.

Para obter o desenvolvimento de $(x-a)^m$ basta mudar nas fórmulas $(g)$ e $(h)$ $a$ em $-a$, isto é, basta tomar com o signal contrário os termos em que $a$ está elevado a potencias impares. Teremos assim

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}\\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3a^{m-3} + \ldots\ldots \pm a^m\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(i)$$

8. *As fórmulas $(g)$ e $(i)$ compõe-se de* m + 1 *termos, e os coefficientes são todos numeros inteiros*; na taboada da pag. 9 encontram-se estes coefficientes para as diversas potencias até á 20.ª

Os expoentes de $a$ vão crescendo successivamente de uma unidade desde o termo em que $a$ se torna na unidade ou $a^0$, até ao último, em que $a$ está elevado á potencia $m$. Os de $x$ decrescem desde o 1.° termo em que $x$ está elevado á potencia $m$ até ao último, em que $x$ se torna na unidade ou $x$.° Em cada termo a somma dos expoentes de $a$ e $x$ é sempre $= m$. D'aqui podemos concluir (pag. 6, 1.°) a seguinte regra para deduzir um termo qualquer da serie do seu precedente:

*Multiplique-se o termo precedente por* $\frac{a}{x}$ *e pelo expoente* $a$ *que n'elle se acha elevado* x; *e divida-se depois pelo numero, que designa na serie a ordem d'este termo.*

É assim, que no seguinte ex.° poderemos achar consecutivamente os termos da serie do desenvolvimento de $(x+a)^9$, obtendo

$$(x \pm a)^9 = x^9 \pm 9ax^8 + 36a^2x^7 \pm 84a^3x^6 + 126a^4x^5 \pm 126a^5x^4 + \ldots$$

Se o binomio não estiver reduzido á fórma mais simples $x \pm a$, não temos mais do que substituir nas fórmulas $(g)$ e $(i)$ por $x$ e por $a$ os termos que lhes equivalem. Assim para achar o desenvolvimento de $(2b^3 - 5c^3)^9$, faremos na equação precedente $x = 2b^3$, $a = -5c^3$, e usando dos signaes inferiores, virá

$$(2b^3 - 5c^3)^9 = 2^9b^{27} - 9.5c^3 2^8 b^{24} + 36 \times 5^2 c^6 2^7 b^{21} \ldots$$
$$= 512b^{27} - 45 \times 256c^3b^{24} + 36 \times 25 \times 128c^6b^{21} -$$

Finalmente, pelo que já fica dicto, advertiremos ainda que nas fórmulas $(g)$ e $(i)$:

1.° Depois do termo medio, apparecem os mesmos coefficientes em ordem retrograda; e os coefficientes equidistantes dos termos extremos são eguaes. Estes coefficientes crescem até ao termo medio, cujo valor se acha nas pag. 7 e 8.

2.° Cada um dos coefficientes da potencia $m$ sommado com o seguinte, dá o coefficiente do termo da mesma ordem que o d'este último, no desenvolvimento da potencia $(m+1)$ Veja-se pag. 8.

3.° A somma de todos os coefficientes da potencia $m$ é $= 2^m =$ á somma dos coefficientes de todas as ordens, pares ou impares, na potencia $(m+1)$ como se viu (pag. 10.) Na verdade fazendo $x = a = 1$, a equação $(g)$ reduz-se a $2^m =$ á somma de todos os coefficientes.

4.° Quando $x = 1$ e $a = z$, as equações ($g$) e ($i$) tornam-se em

$$(1 \pm z)^m = 1 \pm m\,z + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}z^2 \pm \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \ldots \pm z^m \ldots (l)$$

Sendo esta expressão muito mais simples, costuma reduzir-se a ella o desenvolvimento das potencias dos binomios. Se tivermos $(A \pm B)^m$, dividiremos a expressão dentro do binomio por A, a fim de reduzir o 1.° termo á unidade; e multiplicaremos depois por $A^m$ para que não fique alterada a expressão, que virá assim transformada em $A^m\left(1 \pm \frac{B}{A}\right)^m$. Fazendo $\frac{B}{A} = z$, podemos àpplicar a fórmula ($l$). Assim para $(2a + 3b^8)$, reduziremos esta expressão a $(2a)^8\left(1 + \frac{3b}{2a}\right)^8$, e faremos $z = \frac{3b}{2a}$.

Para applicar depois a fórmula com mais facilidade, formaremos os productos consecutivos dos factores $m$, $\frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{3}(m-2)$, $\frac{1}{4}(m-3)$, como se ensinou (pag. 6.), até á ordem $\frac{1}{2}\,m$ quando $m$ é par, ou até á ordem $\frac{m-1}{2}$ quando $m$ é impar; e obteremos assim os coefficientes do desenvolvimento, que depois terão de multiplicar-se pelas potencias crescentes de $z$. No exemplo de cima, tendo formado as fracções $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, acharemos pelas multiplicações successivas os coefficientes 8, 28, 56, 70; e como o último é o termo medio, serão os seguintes 56, 28, 8. Distribuindo convenientemente as potencias crescentes $z$, $z^2$, $z^3$, ....; multiplicando tudo por $256.\,a^8$; e pondo finalmente por $z$ a fracção que esta letra representa: vem

$$(2a + 3b)^8 = 256\,.\,a^8 + 3072.\,a^7b + 16128.\,a^6b^2 + 48384.\,a^5b^3$$
$$+ 90720.\,a^4b^4 + 108864\,.\,a^3b^5 + \ldots\ldots\ldots$$

9. Para obtermos o desenvolvimento da potencia inteira de um polynomio qualquer da fórma

$$(a + b + c + d + \ldots.)^m,$$

podemos servir-nos das fórmulas precedentes do desenvolvimento de um binomio, pondo $b+c+d+\ldots=x$. Antes de expormos o methodo de achar o termo geral d'este desenvolvimento, convem primeiro dar outra fórma á expressão $(h)$ do n.° 7, multiplicando ambos os seus termos por $1.2.3\ldots(m-n)$. Então o numerador tornar-se-ha o producto dos inteiros seguidos desde 1 até $m$, e a expressão $(h)$ se mudará em

$$T_{n+1}=\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots(m-n)}a^nx^{m-n}\ldots\ldots\ldots(m)$$

A vantagem d'esta fórmula, sôbre a sua equivalente, consiste, em fornecer *todos* os termos do desenvolvimento de $(x+a)$ dando a $n$ os valores successivos $0, 1, 2, 3, \ldots m$, debaixo *da convenção de não se attender ao factor* $1.2.3\ldots n$, *quando se suppuzer* $n=0$, *nem ao factor* $1.2.3\ldots(m-n)$ *quando for* $n=m$.

Posto isto, e fazendo, como acima dicemos, $x=b+c+d+\ldots$, a potencia dada será egual a $(a+x)^m$, e o seu termo geral em que entra $a^n$, será dado pela fórmula $(m)$, ou

$$(1)\ldots\ldots\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots(m-n)}a^n\,x^{m-n}.$$

Ponhamos $y=c+d+e\ldots$; será $x^{m-n}=(b+y)^{m-n}$, e se desenvolvermos esta última potencia, o seu termo geral, em que entra $b^{n'}$, será, pela fórmula $(m)$,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n'\times1.2.3\ldots(m-n-n')}b^{n'}y^{m-n-n'}.$$

Se substituirmos agora esta quantidade em logar de $x^{m-n}$ em (1), o resultado representará o termo geral do desenvolvimento da potencia do polynomio, em que entra $a^nb^{n'}$. Este resultado, simplificando a fracção, será

$$(2)\ldots\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots n'\times1.2.3\ldots(m-n-n')}a^nb^{n'}y^{m-n-n'}.$$

Pondo depois $z=d+e+\ldots.$, teremos $y^{m-n-n'}=(c+z)^{m-n-n'}$ e o termo geral do desenvolvimento d'esta última potencia, em que entra $c^{n''}$ será

$$\frac{1.2.3.\ldots.(m-n-n')}{1.2.3..n''\times 1.2.3..(m-n-n'-n'')}c^{n''}z^{m-n-n'-n''}.$$

Substituindo agora em (2) esta última expressão, em logar de $y^{m-n-n'}$, obteremos, feitas as simplificações, o termo geral do desenvolvimento da potencia do polynomio em que entra $a^n b^{n'} c^{n''}$, ou

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3..n\times 1.2.3..n'\times 1.2.3..n''\times 1.2..(m-n-n'-n'')}a^n b^{n'} c^{n''} z^{m-n-n'-n''}.$$

Sem ser necessario ir mais adiante, já d'aqui podemos concluir, que se designarmos por N o termo geral do desenvolvimento de $(a+b+c+..)^m$, será este termo geral

$$N=\frac{1.2.3.\ldots\ldots m}{1.2.3..n\times 1.2.3..n'\times 1.2.3..n''\times..}a^n b^{n'} c^{n''} d^{n'''}\ldots,$$

sendo $n, n', n'', \ldots\ldots$ inteiros qnaesquer, que satisfaçam á condição $n+n'+n''+\ldots.=m$. Para deduzir pois d'esta fórmula todos os termos do desenvolvimento pedido, deveremos procurar todos os systemas de valores inteiros e positivos, que podem satisfazer a esta equação de condição, e de os substituir depois successivamente na fórmula; tendo o cuidado, como já advertimos, de não attender no denominador do coefficiente numerico, aos factores que terminariam em *zero*.

Em $(a+b+c)^{10}$, por ex.°, um dos termos é

$$\frac{1.2.3\ldots.10}{1.2.3.4.5\times 1.2.3\times 1.2}a^5 b^3 c^2 = 2520.\,a^5 b^3 c^2;$$

e este mesmo coefficiente será o dos termos $a^3 b^2 c^5, a^2 b^3 c^5, \ldots\ldots$

10. Temos até aqui supposto que *o expoente* m *é um numero inteiro e positivo*. Passâmos agora a mostrar, que as fórmulas que achámos, são applicaveis ao caso de ser $m$ numero *negativo*, *fraccionario*, *irracional*, ou *transcendente*. E para isso, bastará mostrar que o binomio $(1 \pm z)^m$ tem o desenvolvimento ($l$) do n.° 8, em todos estes casos; por que como já vimos sempre é possivel reduzir a esta fórma o desenvolvimento de $(x \pm a)^m$, e por consequencia o de qualquer polynomio da forma $(a+b+c+\ldots)^m$

Designando por $m$ e $n$ quaesquer grandezas, e pondo

$$x = 1 \pm mz + \tfrac{1}{2} m(m-1)z^2 \pm \text{etc.},$$

$$y = 1 \pm nz + \tfrac{1}{2} n(n-1)z^2 \pm \text{etc.};$$

teremos, fazendo $p = m + n$,

$$xy = 1 \pm pz + \tfrac{1}{2} p(p-1)z^2 \pm \text{etc.}$$

Para achar este resultado, que se verifica pela multiplicação efectiva do valor de $x$ pelo de $y$, não é necessario recorrer a esta multiplicação, que não nos indicaria facilmente a lei dos termos da serie. E só bastará advertir, que, sendo $m$ e $n$ quaesquer grandezas, se nós conhecessemos duas expressões em que entrassem respectivamente $m$ e $n$, ás quaes competissem os desenvolvimentos de $x$ e $y$, e a cujo producto competisse o desenvolvimento de $xy$; poderiamos concluir que este ultimo desenvolvimento teria logar em todos os casos, e com a fórma que lhe suppuzemos. Com effeito, devendo deduzir-se este desenvolvimento da multiplicação dos dois polynomios, que são a expressão de $x$ e $y$, e sendo as regras da multiplicação dos polynomios independentes das grandezas que se possam attribuir ás letras dos factores; está claro que a fórma do desenvolvimento será sempre a mesma, em quanto a dos factores tambem o for. Por ex.°, o termo que contém $z^2$ em $xy$, deve ser o producto de certos termos de $x$ e $y$, termos que serão os mesmos quaesquer que sejam os valores de $m$ e $n$; e se este producto em um caso for $\frac{1}{2} p (p-1)z^2$, está claro que será o mesmo em todos os mais casos.

Ora já vimos que sendo $m$ e $n$ inteiros positivos é $x = (1 \pm z)^m$, e $y = (1 \pm z)^n$, e que é então

$$xy = (1 \pm z)^{m+n} = (1 \pm z)^p = 1 \pm pz + \tfrac{1}{2} p(p-1) z^2 \pm \text{etc.};$$

donde concluiremos, que $xy$ tem, em todos os casos, a fórma que lhe suppuzemos.

Posto isto:

1.° *Se* m *é inteiro e tem o signal negativo:* como $n$ é quantidade arbitrária, podemos suppor $n = +m$, tornando-se então $n$ inteiro e positivo, e por conseguinte $y = (1 \pm z)^n$. E como esta hypothese torna $p = 0$, a 3.ª equação se reduzirá a $xy = 1$, ou $x = y^{-1} = (1 \pm z)^{-n} = (1 \pm z)^{-m}$. Teremos pois

$$(1 \mp z)^{-m} = 1 \pm mz + \frac{m(m+1)}{1 \,.\, 2} z^2 \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^3 + \ldots\ldots$$

$$T_{q+1} = \pm \frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+q-1)}{1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots q} z^q = [(q+m-1)Cq] z^q$$

$$= [(q+m-1)\,C\,(m-1)] z^q = \frac{(q+1)(q+2)\ldots\ldots(q+m-1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (m-1)} z^q.$$

Acharemos assim, por este termo geral, para

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x \pm a)^{-1}$ coeffic. | 1 | $\mp$ 1 | + 1 | $\mp$ 1 | + 1...... |
| $(x \pm a)^{-2}$ ...... | 1 | $\mp$ 2 | + 3 | $\mp$ 4 | + 5.... |
| $(x \pm a)^{-3}$ ...... | 1 | $\mp$ 3 | + 6 | $\mp$ 10 | + 15.... |
| $(x \pm a)^{-3}$ ...... | 1 | $\mp$ 4 | + 10 | $\mp$ 20 | + 35.... |

A taboada da pag. 9 dá, nas columnas verticaes, a lei d'estes numeros.

2.° *Se* m *é fraccionario (positivo ou negativo):* façamos $n = m$, será $p = 2m$ e $xy = x^2$; logo

$$x^2 = 1 + 2mz + \frac{2m(2m-1)}{1 \,.\, 2} z^2 + \text{etc.}$$

Multiplicando esta equação por $x = 1 + mz + \text{etc.}$, vem

$$x^3 = 1 + 3mz + \frac{3m(3m-1)}{1\,.\,2}z^2 + \text{etc.}$$

Tornando a multiplicar por $x$, vem

$$x^4 = 1 + 4mz + \frac{4m(4m-1)}{1\,.\,2}z^2 + \text{etc.}$$

Donde concluiremos, em geral,

$$x^k = 1 + kmz + \frac{km(km-1)}{1\,.\,2}z^2 + \text{etc.},$$

qualquer que seja o inteiro $k$.

Por tanto se $k$ for o denominador da fracção $m = \frac{l}{k}$, ou $km = l$, será

$$x^k = 1 + lz + l\frac{l-1}{2}z^2 + \text{etc.} = (1+z)^l,$$

por ser $l$ um inteiro, positivo ou negativo, conforme $m$ é positivo ou negativo. Temos pois

$$x^k = (1+z)^{km}, \text{ e } x = (1+z)^m.$$

3.° *Se* m *é irracional, ou comprehende expressões transcendentes, taes como logarithmos, exponenciaes, arcos de circulo, senos, cosenos* etc. Suppondo que $n$ e $h$ são dous numeros entre os quaes $m$ está comprehendido, cada um dos termos de $x = 1 + mz + \text{etc.} \ldots$ estará comprehendido entre os seus correspondentes das series $(1+z)^n$ e $(1+z)^h$; e é claro que $x$ estará entre estas duas expressões, que podem differir entre si tão pouco como se quizer.

Como pois $(1+z)^n$ póde approximar-se indefinidamente de $x$ á medida que $n$ se approximar de $m$: se chamarmos $\alpha$ a differença, será $(1+z)^n = x + \alpha$. Do mesmo modo se chamarmos $\beta$ a differença entre $(1+z)^n$ e $(1+z)^m$, teremos $(1+z)^n = (1+z)^m + \beta$. Logo $x + \alpha = (1+z)^m + \beta$; e como $\alpha$ e $\beta$ são quantidades que se podem tornar tão pequenas como se quizer, teremos por fim (Alg. El. n.° 120) $x = (1+z)^m$.

4.° *Se* m *é imaginario:* sujeitam-se convencionalmente estas expressões ás mesmas regras das quantidades reaes; visto que não é possivel nem formar uma idea exacta de um calculo, cujos elementos seriam symbolos que não representam grandeza alguma; nem por consequencia dar demonstração a tal respeito (Alg. Elem. n.° 136). (Nota 2.ª)

**11.** Tendo visto que as fórmulas ($g$) e ($i$) tem logar qualquer que seja o valor de $m$, passemos a applical-a a alguns exemplos.

I. Para desenvolver $\dfrac{a}{\alpha + \beta x} = \dfrac{a}{\alpha} \times \dfrac{1}{1+kx}\left(\text{fazendo } k = \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, desenvolva-se em serie $(1+kx)^{-1}$ pela fórmula ($l$).
Os coefficientes tem por factores $-1$, $\frac{1}{2}(-1-1)$, $\frac{1}{3}(-1-2)$, .... os quaes são todos $= -1$; os productos são alternadamente $+1$, $-1$: donde resulta a progressão por quociente

$$1 - kx + k^2x^2 - k^3x^3 \ldots, \text{ cuja razão é } -kx.$$

$$\text{Logo}\quad \frac{a}{\alpha + \beta x} = \frac{a}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3 x^3}{\alpha^3} \ldots\ldots \pm \frac{\beta^n x^n}{\alpha^n} \ldots\ldots\right).$$

II. Para $\sqrt{(a^2 \pm x^2)}$, escreva-se

$$a\sqrt{\left(1 \pm \frac{x^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{(1 \pm y^2)} = a(1 \pm y^2)^{\frac{1}{2}},$$

fazendo $x = ay$. Para achar a potencia $\frac{1}{2}$ de $(1 \pm y^2)$ formemos os factores dos coefficientes, a saber: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)$, $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-2)$, ou $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$; os productos são fracções cujos numeradores são os factores impares 1.3.5.7...., e os denominadores os factores pares 2.4.6.8....
Logo:

$$\sqrt{(1 \pm y^2)} = 1 \pm \frac{y^2}{2} - \frac{1.y^4}{2.4} \pm \frac{1.3y^6}{2.4.6} - \frac{1.3.5y^8}{2.4.6.8} \pm \ldots$$

$$\sqrt{(a^2 \pm x^2)} = a\left(1 \pm \frac{x^2}{2a^2} - \frac{1.x^4}{2.4a^4} \pm \frac{1.3x^6}{2.4.6a^6} - \frac{1.3.5x^8}{2.4.6.8a^8} \pm \ldots\right)$$

III. Do mesmo modo se obterá

$$(1 \pm y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1.y^2}{2} + \frac{1.3.y^4}{2.4} \mp \frac{1.3.5y^6}{2.4.6.} + \frac{1.3.5.7y^8}{2.4.6.8.} \mp \ldots\ldots$$

$$(a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1.3x^4}{2.4a^4} \mp \frac{1.3.5x^6}{2.4.6a^6} + \frac{1.3.5\,7x^8}{2.4.6.8a^8} \mp \ldots\right).$$

$$(1 \pm x)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 \text{ etc.}$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3.5}{2.4}x^2 \mp \frac{3.5.7}{2.4.6}x^3 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}x^4 \text{ etc.}$$

$$\sqrt[3]{(a+x)} = \sqrt[3]{a}\left(1 + \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} + \frac{5x^3}{81a^3} - \frac{10x^4}{243a^4} + \frac{22x^5}{729a^5} \ldots\right).$$

$$\sqrt[3]{(1 - y^3)} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \frac{10y^{12}}{243} - \frac{22y^{15}}{729} - \ldots\ldots,$$

$$(1-a)^{-2} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 \ldots\ldots + (n+1)a^n \ldots$$

12. Todos os coefficientes do desenvolvimento de $(x+a)^m$, quando $m$ for primo, são multiplos de $m$, abstrahindo dos de $x^m$ e $a^m$; com effeito a equação $(c)$ dá

$$1.2.3\ldots p \times [mCp] = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1).$$

Ora, sendo o 2.º membro multiplo de $m$, tambem o 1.º o deve ser, e como suppuzemos $m$ primo e $>p$, deve por conseguinte $m$ dividir $[mCp]$.

Do mesmo modo se mostra que todos os coefficientes de $(a+b+c\ldots)^m$ são multiplos de $m$, excepto $a^m$, $b^m$, $c^m$, ....

Designando pois por $k$ um inteiro, teremos

$$(a+b+c\ldots)^m=a^m+b^m+c^m\ldots+mk.$$

Se fizermos $1=a=b=c\ldots$, sendo $h$ o numero de termos do polynomio, acharemos $h^m=h+mk$; donde se tira $h^m-h=$ um multiplo de $m$, ou $\dfrac{h(h^{m-1}-1)}{m}=$ inteiro. Logo, se um numero primo $m$ não for divisor exacto de $h$, sel-o ha de $(h^{m-1}-1)$. Este é o theorema de Fermat (Vej. *Addit. ás notas da Arithm.* pag. 276.), que se enuncia da maneira seguinte:

*Se o inteiro* h *não for multiplo do numero primo* m, *o resto da divisão de* $h^{m-1}$ *por* m *será a unidade.*

Este theorema ainda se póde enunciar d'outro modo. Como $m-1$ é um numero par, fazendo $m-1=2q$, será

$$h^{m-1}-1=(h^q-1)\times(h^q+1),$$

e por conseguinte deve $m$ dividir um destes factores. Logo: quando $m$ fôr um numero primo $>2$, e não dividir $h$, o resto da divisão de $h^{\frac{m-1}{2}}$ por $m$ será $\pm 1$.

*Extracção das raizes de qualquer grão dos numeros e dos polynomios.*

13. Na Arithmetica (n.º 70) demos uma regra geral para a extracção das raizes dos grãos superiores ao terceiro, e indicámos a razão da mesma regra, que póde agora ser mais bem entendida com o exemplo seguinte.

Para acharmos a raiz 4.ª de 548464, designemos por A a 4.ª potencia mais elevada contida neste numero, por $a$ as dezenas, e por $b$ as unidades da sua raiz. Como

$$A = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

o 1.° termo $a^4$ é a 4.ª potencia do algarismo das dezenas, e por isso deve acabar por quatro zeros á direita. Separando pois os quatro algarismos 8464, vê-se que 54 contém a 4.ª potencia do algarismo das dezenas, consideradas como simples unidades; e como 16 é a 4.ª potencia mais elevada comprehendida em 54, fica evidente que 2, raiz 4.ª de 16, é o algarismo das dezenas.

Diminuindo 16 de 54, e repondo os algarismos separados, o resto 388464 contém as outras quatro partes de $(a+b)^4$, ou $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Mas como $4a^3b$ acaba em tres zeros, que provém do factor $a^3$, por isso separando os tres algarismos 464, o resto 388 conterá 4 vezes o producto das unidades $b$ pelo cubo do algarismo 2 das dezenas, consideradas como simples unidades, ou $4 \times 8 \times b = 32b$, e além disto os milhares provenientes de $6a^2b + \ldots\ldots\ldots$ O quociente 10 de 388 dividido por 32 será pois $\overset{=}{>} b$; mas passando á verificação, isto é, formando, como abaixo se vê, o producto $b\,(4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3)$, reconhece-se que é necessario reduzir $b$ a 7, seguindo nisto um processo analogo ao que empregámos nas extracções das raizes quadradas e cubicas; e será a raiz 27 exacta até ás unidades.

Querendo levar a approximação mais adiante, junctem-se quatro zeros, dos quaes se separem tres, e divida-se 170230 por $4\,a'^3$, fazendo $a' = 27$. E como $4a'^3 = 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3$, vê-se que para formar este divisor basta ajunctar $6a^2b + 8ab^2 + 3b^3$ á parte do producto de cima, comprehendido entre parentheses. Feito o calculo pela maneira abaixo indicada, acha-se para 2.° divisor o numero 78732, que dá 2 para a primeira letra decimal da raiz.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 54 . 8464 | 27,2 | | |
| 16 | 32 1.° divisor .. | $4a^3$ | 53063 |
| 388 . 464 | 168 .......... | $6a^2b$ .......... | 168 |
| 371 . 441 | 392 .......... | $4ab^2$ .. 2 vezes .. | 784 |
| 17 . 0230 | 343 ........ | $b^3$ .. 3 vezes .. | 1029 |
| | $53063 \times 7 = 371\,441$ | 2.° divisor | $78732 = 4.27^3$ |

Este processo, tão commodo para achar cada um dos divisores parciaes, é geral, qualquer que for o grão da raiz, que se pertende extrahir.

14. Por meio das taboas dos logarithmos fazem-se estas extracções com muito maior facilidade, mas ha o inconveniente de se não poder obter uma approximação além dos limites das mesmas taboas. N'este caso usaremos dos processos seguintes.

I. As series (II. pag. 23.) servem para a extracção das raizes com grande approximação. Assim para obter $\sqrt{N}$, decomponha-se N em dous quadrados $a^2$ e $\pm x^2$, das quaes o 1.° seja muito grande em relação ao 2.°; então $\sqrt{N}=\sqrt{(a^2\pm x^2)}=(a^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}$ virá expresso n'uma serie convergente (Alg. n.° 106).

Se, por ex.°, nos pedirem $\sqrt{8}$, decompondo 8 em $9-1$, tomaremos

$$a=3 \text{ e } x=1, \text{ e virá } \sqrt{8}=\sqrt{(9-1)}=(3^2-1)^{\frac{1}{2}}=3\left(1-\tfrac{1}{18}-\tfrac{1}{648}-\ldots\right).$$

Para tornar a serie mais rapidamente convergente, tomem-se os tres primeiros termos da serie, que sommam 2,829, e compare-se o seu quadrado com 8; acharemos $8=(2,829)^2-0,003241$, d'onde

$$\sqrt{8}=2,829\sqrt{\left(1-\frac{3241}{8003241}\right)}=2,8284271247462\ldots\ldots$$

E como $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, tomando ametade, achar-se-ha

$$\sqrt{2}=1,41421\ 35623\ 731\ldots\ldots$$

As taboas dos logarithmos dão a 1.ª approximação, que depois se continúa pelo processo que acabâmos de indicar.

II. Supponhamos que é conhecido um valor approximado $a$ da raiz $m$ de N; e seja $b$ a differença entre N e $a^m$; teremos

$$N=a^m\pm b, \sqrt[m]{N}=a\pm z,$$

sendo $z$ a correcção que deve receber $a$, e por conseguinte tanto $z$ como

$b$ numeros pequenos. Como $a^m \pm b = (a \pm z)^m$, desenvolvendo, e representando por $m$, $A'$, $A''$,.... os coefficientes da serie, teremos

$$b = z\,(ma^{m-1} \pm A'z\,a^{m-2} + A''z^2\,a^{m-3} \pm \ldots\ldots).$$

N'uma primeira approximação, basta attender ao 1.° termo da serie, e vem $b = mz\,a^{m-1}$; d'este deduz-se o valor de $z$, o qual substituido no termo $\pm A'z\,a^{m-2}$, e desprezando os seguintes, dá

$$z = \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)\,b} = \pm\, 2a \times \frac{N - a^m}{(m+1)\,a^m + (m-1)\,N},$$

eliminando $b = \pm (N - a^m)$. Logo $\sqrt[m]{N} = a \pm z$ torna-se em

$$\sqrt[m]{N} = a \times \frac{(m+1)\,N + (m-1)\,a^m}{(m-1)\,N + (m+1)\,a^m};$$

d'onde $$\sqrt{N} = a \times \frac{3\,N + a^2}{N + 3a^2},\quad \sqrt[3]{N} = a \times \frac{2N + a^3}{N + 2a^3},$$

$$\sqrt[4]{N} = a \times \frac{5N + 3a^4}{3N + 5a^4},\quad \sqrt[5]{N} = a \times \frac{3N + 2a^5}{2N + 3a^5},\ \text{etc.}$$

Querendo, por ex.° $\sqrt{65}$, toma-se $a = 8$, d'onde

$$\sqrt{65} = 8 \times \frac{195 + 64}{65 + 192} = \frac{2072}{257} = 8{,}062257,$$

valor exacto até á 5.ª casa da dizima.

15. Para completarmos a doutrina expendida na Algebra elementar (n.os 142. e seg.) sôbre a extracção das raizes quadradas e cubicas dos polynomios, indicaremos tambem aqui as regras da extracção das raizes de qualquer ordem dos mesmos polynomios.

Suppondo que o polynomio dado X é a potencia $m$ de um polynomio desconhecido $Y = y + y_{(1)} + y_{(2)} + \ldots\ldots$ e que ambos estes polynomios estão ordenados segundo as potencias decrescentes da mesma letra $a$, demonstra-se facilmente, como a respeito das raizes quadradas e cubicas, que: *o maior termo* y *da raiz procurada se achará extrahindo a raiz* m *do maior termo do polynomio* X.

Achado este 1.° termo, facilmente se obterá o 2.°; para resolvermos porém a questão na maior generalidade, daremos a regra para obter um termo qualquer $y_{(n)}$ da raiz, quando forem conhecidos os $n$ termos precedentes.

Seja $u$ a somma dos termos já achados, e $v$ a dos termos desconhecidos; sendo então $X = (u + v)^m$, teremos desenvolvendo

$$X = u^m + mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + k'u^{m-3}v^3 + \text{etc.}$$

designando por $k$, $k'$, $k''$, .... os coefficientes do desenvolvimento deste binomio. D'esta equação tira-se

$$X - u^m = mu^{m-1}v + ku^{m-2}v^2 + \ldots\ldots$$

O 1.° membro d'esta equação é a differença entre o polynomio dado e a potencia $m$ da parte achada da raiz. O 2.° termo vai servir-nos para descubrir o *maior termo* $y_{(n)}$ da parte desconhecida $v$.

Com effeito, desenvolvendo $u^{m-1}$, o maior termo do desenvolvimento será $y^{m-1}$, e sendo $y_{(n)}$ o maior termo de $v$, será $my^{m-1}\,y_{(n)}$ o maior termo do producto $mu^{m-1}v$. Do mesmo modo se vê, que os maiores termos nos desenvolvimentos dos productos seguintes, serão respectivamente $ky^{m-2}\,y^2_{(n)}$, $k'y^{m-3}\,y^3_{(n)}$, ......

Reflectindo agora, que n'estes termos maiores dos productos successivos, vae seguidamente diminuindo de uma unidade o expoente de $y$, e crescendo o de $y_{(n)}$, e que em $y_{(n)}$ entra a letra $a$ com expoente menor do que em $y$: concluiremos que $my^{m-1}\,y_{(n)}$ é o termo maior do 2.° membro da equação.

Logo, se do polynomio dado X subtrahirmos a potencia $m$ da parte $u$ achada da raiz, o maior termo do resto será egual a $m$ vezes a potencia $m - 1$ do maior do termo $y$ da raiz, multiplicada pelo maior termo da parte da raiz desconhecida. E por conseguinte, se dividirmos o maior termo do resto pela potencia $m - 1$ do maior termo da raiz, acharemos mais um termo para a mesma raiz.

De tudo isto se deduz a regra seguinte para a extracção das raizes dos polynomios, depois de achado o 1.° termo $y$:

Para ter o 2.° termo $y_{(1)}$, subtraia-se do polynomio X a potencia $m$ do 1.° termo $y$ da raiz, e divida-se depois o maior termo do resto por $my^{m-1}$.

Para ter o 3.° termo $y_{(2)}$, subtraia-se de X a potencia $m$ de $y+y_{(1)}$, e divida-se depois o maior termo do resto por $my^{m-1}$.

Em geral para obter o termo $y_{(n)}$ subtraia-se de X a potencia $m$ de $y+y_{(1)}+\ldots y_{(n-1)}$, e divida-se depois o maior termo do resto por $my^{m-1}$.

## *Dos numeros figurados.*

16. Dá-se este nome aos numeros seguintes:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.ª ordem | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1.... |
| 2.ª | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10.... |
| 3.ª | 1. | 3. | 6. | 10. | 15. | 21. | 28. | 36. | 45. | 55.... |
| 4.ª | 1. | 4. | 10. | 20. | 35. | 56. | 84. | 120. | 165. | 220.... |
| 5.ª | 1. | 5. | 15. | 35. | 70. | 126. | 210. | 330. | 495. | 715.... |
| 6.ª | 1. | 6. | 21. | 56. | 126. | 252. | 462. | 792. | 1287. | 2002.... |
| 7.ª | 1. | 7. | 28. | 84. | 210. | 462. | 924. | 1716. | 3003. | 5005.... |

N'esta taboada *cada termo é a somma dos dois que lhe ficam, um immediatamente á esquerda, outra acima.*

Por ex.°, $2002 = 1287 + 715$.

Comparando a formação d'estes numeros com os da taboa de pag. 9. vê-se, que são os mesmos, porém dispostos em ordem differente. Uma linha da taboada da pag. 9., por ex.° 1, 7, 21, 35, ...... acha-se aqui em diagonal, ou figurando a hypothenusa do triangulo rectangulo isosceles, cujo vertice é a 1.ª letra, e cujos lados se tomam na 1.ª linha e na 1.ª columna. Por conseguinte o valor de um termo qualquer, que está na linha $p$ e ao mesmo tempo na hypothenusa $m$, é $T = [mC(p-1)]$.

Tomemos duas linhas consecutivas:

ordem $(p-1)$......1, $a$,.........$q$, $r$, $s$, $t$, $v$.....,
ordem $p$............1, A,.........Q, R, S, T,....;
teremos.. $A=1+a$,.... $R=Q+r$, $S=R+s$, $T=S+t$,...

1.° Considerando uma hypothenusa, vê-se que os seus termos se adiantam uma casa nas linhas das ordens consecutivas, como T e $v$. Se T fôr o termo $n$ na linha ou ordem $p$, $v$ será o termo $n+1$ na linha ou ordem precedente $p-1$. O outro termo da hypothenusa, na linha ou ordem $p-2$, será o termo $n+2$. E por conseguinte, se na ordem $p$ o termo da hypothenusa fôr $n$, será

na ordem $(p-1)$.............................. $n+1$
na ordem $(p-2)$ $n+2$
.............. .....
na 2.ª ordem ou na ordem $[(p-(p-2))]$ $n+(p-2)$

Designando pois por $m$ o termo da 2.ª ordem que pertence á hypothenusa, e que é o numero d'ella, este deverá occupar a casa $n+p-2$, isto é, será

$$m=n+p-2;$$

a equação $T=[mC(p-1)]$ reduz-se (pag. 5) a

$$T=[(n+p-2)\ C\ (p-1)]=[(n+p-2)\ C\ (n-1)],\ \ldots\ldots\ (n)$$

ou

$$T=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdots\frac{n+p-2}{p-1}$$

$$=\frac{p}{1}\cdot\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+2}{3}\cdots\frac{n+p-2}{n-1},$$

desenvolvendo pela equação ($c$), p. 4, e escrevendo os factores do numerador em ordem inversa. Confórme for $p <$ ou $> n$, assim se usará com preferencia da 1.ª ou 2.ª d'estas expressões do *termo geral* T. N'ellas se verifica tambem, que o termo $n$ da ordem $p$ é o mesmo que o termo $p$ da ordem $n$.

Fazendo $p = 3, 4, 5 \ldots$ acha-se

3.ª ordem, 1.3.6.10.. $T = \frac{1}{2}n(n+1) = [(n+1)\,C\,2]$
4.ª ....., 1.4.10.20.. $T = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = [(n+2)\,C\,3]$
5.ª ....., 1.5.15.35.. $T = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) = [(n+3)\,C\,4]$.

2.° Comparando os termos T, $t$ e S, acha-se

$$T = [m\,C\,(p-1)],\ t = [(m-1)\,C\,(p-2)],\ S = [(m-1)\,C\,(p-1)].$$

Desenvolvendo e reduzindo (equação ($c$) p. 4.) vem

$$T = \frac{n+p-2}{n-1} \times S = \frac{n+p-2}{p-1} \times t \ldots. (o).$$

Por meio d'estas fórmulas se deduzem uns dos outros, e seguidamente, os termos, que formam tanto a linha $p$ como a columna $n$. Por ex., para $p = 6$, vem $T = \frac{n+4}{n-1}S$; fazendo $n = 2, 3, 4 \ldots$ achão-se os factores $\frac{6}{1}, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4} \ldots$, cada um dos quaes multiplicado pelo termo respectivo S da 6.ª ordem, dá o termo seguinte T. Para $n = 7$, vem $T = \frac{p+5}{p-1} \times t$; e fazendo $p = 2, 3, 4, \ldots$ acham-se os factores $\frac{7}{1}, \frac{8}{2}, \frac{9}{3} \ldots$ que servem para passar de um termo $t$ da 7.ª columna para o seguinte T da 8.ª

3.° Acha-se que a somma de dous termos das casas $n-1$ e $n$ da 3.ª ordem é $n^2$; *logo a somma de dous numeros successivos da 3.ª ordem é um quadrado perfeito, e todo o quadrado póde decompôr-se em dous numeros da 3.ª ordem.* Assim 121 quadrado de 11, é a somma de 55 e 66, que são os termos 10.° e 11.° da 3.ª ordem.

4.° Sommando os valores A, .... R, S, T.... (p. 31.) vem $T = 1 + a \ldots + r + s + t$; logo qualquer termo T é egual á somma de todos os da ordem precedente, até ao termo $t$ que está na mesma columna; ou antes, *o termo geral da ordem* p *é o termo sommatorio da ordem* p — 1. Assim para obter o termo sommatorio dos $n$ primeiros termos da ordem $p$, mudaremos $p$ em $p + 1$ na equação ($n$), o que dá

$$\Sigma = [(n + p - 1)\,Cp] = [(n + p - 1)\,C(n - 1)].$$

Para a 7.ª ordem, por ex., $\Sigma = [(n+6)\,C7]$; a 7.ª serie, parando no 9.° termo, somma $[15C7] = 6435$.

5.° Do mesmo modo se veria, que *um termo qualquer da taboada é a somma dos termos da columna precedente até aquella ordem*; o que é tambem um resultado de ser *a columna* p *formada dos mesmos numeros que a ordem* p, porque estes termos são, dous a dous, aquelles que se reproduzem na mesma hypothenusa, por estarem equidistantes dos extremos.

17. Temos até aqui tomado para origem da nossa taboada a serie 1 . 1 . 1 . 1; se porém, em logar d'ella, tomarmos $1 . \delta . \delta . \delta \ldots$ e a sujeitarmos á mesma geração: a 2.ª ordem será a equidifferença $1, 1 + \delta, 1 + 2\delta, 1 + 3\delta, \ldots$; e assim nas outras ordens, como se vê na seguinte taboada; da qual a precedente não é mais do que um caso particular.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.ª ordem | 1. | $\delta$. | $\delta$. | $\delta$. | $\delta \ldots$; |
| 2.ª ..... | 1. | $1 + \delta$. | $1 + 2\delta$. | $1 + 3\delta$. | $1 + 4\delta \ldots$ |
| 3.ª ..... | 1. | $2 + \delta$. | $3 + 3\delta$. | $4 + 6\delta$. | $5 + 10\delta \ldots$; |
| 4.ª ..... | 1. | $3 + \delta$. | $6 + 4\delta$. | $10 + 10\delta$. | $15 + 20\delta \ldots$; |
| 5.ª ..... | 1. | $4 + \delta$. | $10 + 5\delta$. | $20 + 15\delta$. | $35 + 35\delta \ldots$; |
| 6.ª ..... | 1. | $5 + \delta$. | $15 + 6\delta$. | $35 + 21\delta$. | $70 + 56\delta \ldots$; |

É evidente que todos os termos tem a fórma $T = A + B\delta$, e comparando estes numeros com os da 1.ª taboada, acha-se que A é o termo da mesma casa $n$ na ordem precedente $p-1$, e que o factor B é o termo da mesma ordem $p$ na casa precedente $n-1$: assim

$T =$ ao termo $n$ da ordem $p-1$ + [o termo $(n-1)$ da ordem $p$] $\delta$,

$$T = (n-1)\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{3}\cdots\frac{n+p-3}{p-1}\cdot\left(\frac{p-1}{n-1}+\delta\right).$$

Tal é o *termo geral* d'esta ultima taboada. *O termo sommatorio* $\Sigma$ *da ordem* p, *é o termo geral da ordem* $p+1$, como antecedentemente. Por ex., $p=3$, dá na 3.ª ordem,

$$T = n + \tfrac{1}{2}n\delta(n-1),\ \Sigma = \tfrac{1}{2}n(n+1)\left[1 + \tfrac{1}{3}\delta(n-1)\right].$$

Toma-se, por ex., na 1.ª serie $\delta = 2$, e os quadrados 1 . 4 . 9 . 16 . . derivam da progressão impar 1 . 3 . 5 . 7 . . . . . ; toma-se na 2.ª $\delta = 3$, etc.

| | | |
|---|---|---|
| 1. 2. 2. 2. 2. . . . | 1. 3. 3. 3. 3. . . . | 1. 4. 4. 4. . |
| 1. 3. 5. 7. 9. . . . | 1. 4. 7. 10. 13. . . | 1. 5. 9. 13. . . |
| 1. 4. 9. 16. 25. . . . | 1. 5. 12. 22. 35. . . . | 1. 6. 15. 28. . . |
| $T = n^2$ | $T = n\cdot\frac{3n-1}{2}$ | $T = n(2n-1)$ |
| $\Sigma = n\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$ | $\Sigma = n^2\cdot\frac{n+1}{2}$ | $\Sigma = n\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{4n-1}{3}$. |

23 18. Se dividirmos o lado *al* (fig. 1.) do triangulo *alm* em $n-1$ partes iguaes, nos pontos *b*, *d*, *f*, . . . . e tirarmos *bc*, *de*, *fg* . . . . pa-

rallelas á base $lm$, estes comprimentos crescerão como os numeros $1.2.3.4....$ Marcando um ponto em $a$, 2 em $b$ e $c$, 3 sôbre $de$, 4 sôbre $fg$.... : a somma d'estes pontos, a contar de $a$, é successivamente $1.3.6.10....$; e o triangulo $alm$ contém tantos d'estes pontos, quantos são designados pelo termo $n$ pertencente a estes numeros na 3.ª ordem, os quaes por esta razão se chamão *triangulares*. Quando o triangulo é equilatero, estes pontos são equidistantes.

Do mesmo modo, se em um polygono de $m$ lados, tirarmos diagonaes de um dos angulos $a$, e dividirmos estas linhas e os lados do angulo $a$ em $n-1$ partes eguaes: unindo por meio de rectas os pontos notados com o mesmo numero, formar-se-hão $n-1$ polygonos com o angulo $a$ commum, e $m-2$ lados parallelos. Estes lados crescem como $1.2.3.4....$ Se collocarmos um ponto em cada um dos angulos, outro no meio dos lados parallelos do 2.° polygono, 2 pontos em cada um dos lados do 3.°, etc.: estes lados conterão 1, 2, 3, .... pontos mais, e cada um dos perimetros dos $m-2$ lados parallelos terá $m-2$ pontos mais do que o precedente. Fazendo $\delta = m-2$, a área do polygono conterá pois uma quantidade de pontos (equidistantes, quando a figura for regular) designada pelo termo $n$ da serie da 3.ª ordem, que se deduz de $1\delta.2\delta.3\delta..$ É por esta razão que se denominaram *Quadrados*, *Pentagonos*, *Hexagonos*.... os numeros d'estas series, de que démos os termos geral e sommatorio, suppondo $\delta = 2, 3, 4$, ou $m = 4, 5, 6....$ Em geral chamam-se *numeros polygonos*, todos os da 3.ª ordem, porque podem ser equidistantes e contidos em uma figura polygona.

Raciocinando pelo mesmo theor a respeito de um angulo triedro, ver-se-ha que a serie $1.4.10.20....$ representa o numero de pontos que n'elle se podem assentar sôbre planos parallelos, d'onde lhes resultou a denominação de numeros *Pyramidaes*.

Os numeros *polyedros*, compõe as series da 4.ª ordem, da qual nós sabemos já determinar os termos geral e sommatorio, fazendo $p = 4$ e 5.

A analogia conduziu á generalisação d'estas noções, e chamam-se *numeros figurados* todos os que estão sujeitos á lei do n.° 17, e comprehendidos na taboada precedente, ainda que não saibamos realmente representar todos estes numeros por figuras de Geometria, passada a 4.ª ordem.

### *Arranjos e Combinações quando as letras não são todas differentes.*

19. Effectue-se a multiplicação do polynomio $a + b + c + \ldots$ por si mesmo muitas vezes successivas, tendo o cuidado de escrever primeiro, em cada um dos termos obtidos, a letra que serviu de multiplicador, e de conservar nos seus logares as letras do multiplicando. Teremos

$$\begin{array}{ll}
\text{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a + b + c + \ldots\ldots \\
 & a + b + c + \ldots\ldots \\
\text{B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \left\{ \begin{array}{l} aa + ab + ac + \ldots\ldots \\ ba + bb + bc + \ldots\ldots \\ ca + cb + cc + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \\
 & \overline{a + b + c + \ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{C} \ldots\ldots \; aaa + aab + aac \ldots + aba + abb + abc \ldots + aca + acb \ldots \\
\qquad\quad baa + bab + bac \ldots + bba + bbb + bbc \ldots + bca + bcb \ldots \\
\qquad\quad caa + cab + cac \ldots + cba \ldots \text{ e assim por diante.}
\end{array}$$

O producto $B$ é formado dos arranjos 2 a 2 das letras $a, b, c, \ldots$ podendo cada uma d'ellas entrar 1, 2 vezes em cada termo. O producto $C$ é formado dos arranjos 3 a 3 das mesmas letras, podendo a mesma letra entrar 1, 2, 3, vezes em cada termo. E assim por diante.

E na verdade, para que, por ex.° alguns arranjos 3 a 3 em que $a$ é inicial, se repetissem ou omittissem em $C$, seria necessario que houvesse a mesma repetição ou ommissão nos termos de $B$, que resultariam supprimindo a inicial $a$.

Sendo $m$ o numero das letras do polynomio, vê-se que B tem $m$ termos em cada linha, e $m$ linhas; e por conseguinte os arranjos 2 a 2 são $m^2$.

O producto $C$ tem $m$ linhas cada uma com $m^2$ termos, e por conseguinte os arranjos 3 a 3 são $m^3$.

Em geral *o numero dos arranjos de* m *letras* n *a* n, *nos quaes cada letra póde entrar até* n *vezes, é* $m^n$. *Neste caso póde ser* $n > m$.

Por ex.° 9 algarismos tomados 4 a 4, dão $9^4$, ou 6561 numeros differentes.

A somma de arranjos de $m$ letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, .... $n$ a $n$, é

$$m + m^2 + \ldots . \; m^n, \text{ ou } m\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Por ex.° a somma de 5 algarismos 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, é $= \frac{5}{4}(5^3 - 1) = 155$.

Se tivermos $n$ dados A, B, C, .... com $f$ faces marcadas com as letras $a$, $b$, $c$, .... ; um lance destes dados produzirá um systema tal como *abacc*. Se tomarmos o 1.° dado A, e lhe fizermos apresentar successivamente as suas diversas faces, sem bulir nos outros dados, resultarão daquelle systema $f$ arranjos differentes; e como se póde fazer o mesmo para cada um dos arranjos dos outros dados: vê-se, que os $n$ dados produzem $f$ vezes mais resultados que os outros $(n-1)$ dados B, C, ......

Por conseguinte 2 dados dão $f^2$ resultados; 3 dados dão $f^3$; 4 dados $f^4$; e em geral $n$ dados com $f$ faces dão $f^n$ resultados diversos. Advirta-se que se consideram differentes os resultados identicos, quando resultam de dados differentes.

Se o 1.° dado tiver $f$ faces, o 2.° $f'$, o 3.° $f''$, o numero dos resultados será $f \times f' \times f'' \times \ldots\ldots$

20. Vejamos agora a maneira, pela qual se podem distribuir por $m$ logares vagos A, B, C, ...... $m$ letras, de maneira, que $\alpha$ logares sejam occupados pela letra $a$, $\beta$ logares pela letra $b$, etc.

É manifesto, que para distribuir as $\alpha$ letras $a$, basta tomar $\alpha$ logares A, B, C, .... e collocar n'elles as mesmas letras $a$; o que é possivel fazer de tantos modos differentes, quantas são as combinações $\alpha$ a $\alpha$ dos $m$ logares A, B, C, .... ; e por conseguinte $[mC\alpha]$ designa as maneiras differentes por que $\alpha$ letras $a$ se podem distribuir por $m$ logares vagos.

Feito isto, restam de cada distribuição $m - \alpha$ logares vagos, dos quaes $\beta$ podem ser occupados pela letra $b$, de todas as maneiras indicadas por $[(m-\alpha)C\beta]$. Por conseguinte o producto $[mC\alpha] \times [(m-\alpha)C\beta]$, mostra de quantos modos se podem distribuir $\alpha$ letras $a$, e $\beta$ letras $b$ por $m$ logares vagos.

Nos $m - \alpha - \beta$ logares, que ficam ainda por occupar, podemos distribuir $\gamma$ letras $c$, de todas as maneiras indicadas por $[(m-\alpha-\beta)C\gamma]$. E assim por diante até que não fique logar algum vago, o que acontece quando se chega a uma combinação de fórma $[\upsilon C\upsilon] = 1$.

Por conseguinte o producto

$$[mC\alpha]\times[(m-\alpha)C\beta]\times[(m-\alpha-\beta)C\gamma]\times\ldots..$$

mostra de quantas maneiras os $m$ logares vagos podem ser occupados por $\alpha$ letras $a$, por $\beta$ letras $b$, por $\gamma$ letras $c$. Este producto é o mesmo numero que na pag. 19. representa o coefficiente do termo geral do desenvolvimento do polynomio, termo que designámos por N.

*Se tivermos pois um producto da fórma* $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots$ *no qual* a *é* $\alpha$ *vezes factor*, b *é* $\beta$ *vezes*, c *é* $\gamma$ *vezes .... o numero de todos os modos possiveis por que estes factores podem estar distribuidos será o coefficiente da expressão* N, da pag. 19., sendo $m=\alpha+\beta+\gamma\ldots..$

Por ex.°, os 10 factores $a^4\, b^3\, c^2 d$ formam um numero de arranjos designado por $\dfrac{1.2.3\ldots\ldots 10}{1.2.3.4\times1.2.3.\times1.2}=12600.$

As 7 letras do nome *Antonio* podem arranjar-se de 1260 maneiras differentes.

21. Multipliquemos agora muitas vezes successivas por si mesmo o polynomio $a+b+c\ldots.$ tomando por factor de um termo $a$, $b$, $c$, .... só os termos do multiplicando, que estão na mesma columna, ou á sua esquerda.

$$\begin{array}{ll}
\text{A}\ldots\ldots\ldots\ldots & a+b+c+d\ldots\ldots\ldots \\
 & a+b+c+d\ldots\ldots\ldots \\
\hline
\text{B}\ldots\ldots\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} aa+bb+cc+dd\ldots\ldots \\ \quad +ab+bc+cd\ldots\ldots\ldots \\ \qquad +ac+bd\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad +ad\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \\
\hline
\text{C}\ldots\ldots\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} aaa+bbb+ccc+ddd\ldots. \\ \quad +abb+bcc+cdd\ldots. \\ \quad +aab+acc+bdd\ldots \\ \qquad +bbc+add\ldots. \\ \qquad +abc+ccd\ldots. \\ \qquad +aac+\text{etc.} \end{array}\right.
\end{array}$$

É facil de ver que o producto B é formado de todas as combinações 2 a 2 das $m$ letras do polynomio, podendo cada uma d'ellas entrar

1, 2 vezes em cada termo; por quanto, pelo modo como fizemos as multiplicações, se rejeitaram todos os arranjos 2 a 2 em que entravam as mesmas letras.

Do mesmo modo se vê, que o producto C é formado das combinações 3 a 3, em que a mesma letra póde entrar 1, 2, 3, vezes no mesmo termo. E assim por diante.

Em quanto ao numero d'estas combinações, cada uma das columnas do producto contém tantos termos quantos ha na columna, que lhe fica á esquerda, do mesmo producto, e na que lhe fica superior, do producto precedente.

Se os numeros dos termos das columnas de um producto forem

$$1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots\ldots,$$

os do producto seguinte serão

$$1+\alpha, 1+\alpha+\beta, 1+\alpha+\beta+\gamma, \ldots\ldots\ldots$$

Esta última serie deduz-se da precedente pela lei dos numeros figurados (n.° 17.): e por conseguinte, para as combinações 2 a 2 as columnas successivas contém 1 . 2 . 3 . 4 . . termos; para as combinações 3 a 3 contém 1.3.6.10 . . . . ; e finalmente para as $p$ a $p$, contém a serie da ordem $p$. .

O numero total das combinações, ou dos termos de um producto, é a somma da serie, continuada até á 2.ª, 3.ª, 4.ª. . . . columna, conforme houverem 1, 2, 3, . . . . . . . . letras para combinar. Sendo $n$ as letras é necessario sommar os $n$ 1.ºs termos da ordem $p$, o que, segundo vimos, equival (n.° 16, 4.°) a tomar o termo $n$ da ordem $p+1$. Logo:

*O numero, que tem o logar* n *na ordem* p+1, *é o das combinações de* n *letras* p *a* p, *admittindo que a mesma letra póde entrar* 1, 2, 3, . . n *vezes nas differentes combinações.*

Basta pois, para achar o termo geral, mudar $p$ em $p+1$ na equação ($n$) pag. 31.; e teremos

$$T_{p+1}=\frac{n(n+1)(n+2)..(n+p-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots p}=\frac{(p+1)(p+2)..\ (p+n-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots n-1}\ldots (p)$$

$n$ póde ser $>$, $=$, $<p$.

Por ex.° 10 letras 4 a 4 dão 715 combinações; 4 letras 10 a 10 dão 286.

Vê-se tambem que $n$ letras tomadas $p$ a $p$, e $p+1$ letras tomadas $n-1$ a $n-1$ dão o mesmo numero de combinações, por quanto substituindo $n$ por $p+1$, e $p$ por $n-1$, o valor de $T_{p+1}$ fica o mesmo.

A equação ($p$) resolve tambem, mudando $p$ em $n$, e $n$ em $p$, o seguinte problema: Ha um certo numero de espheras de $p$ côres differentes, *brancas*, *vermelhas*, *pretas*, ...... e dá-se convencionalmente a cada uma d'estas côres a significação de uma qualificação, como *bom*, *sufficiente*, *mão*. Um certo numero $n$ de juizes escolhem, cada um, uma esphera de cór conforme á sua opinião. Pergunta-se quantas combinações póde appresentar o resultado?

Os numeros da taboada da pag. 30. resolvem a questão, tomando as linhas 1.ª, 2.ª, 3.ª, .... conforme houver espheras de 1, 2, 3,...., côres; e tomando nessa linha os termos das casas 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª...., conforme os juizes forem 1, 2, 3, .... Com effeito, supponhamos effectuadas todas as combinações no caso das espheras de 1, 2, 3 côres, até ao termo 6 da 3.ª linha, e busquemos o termo seguinte 10, para o caso de 3 côres e 3 juizes. Formem-se primeiro as combinações seguintes, em que entram as espheras brancas:

3 br., 2 br. e 1 neg., 1 br. e 2 neg., 1 br. 1 neg. 1 ver., 2 br. 1 ver., 1 br. 2 ver.;

depois as combinações em que não entram espheras brancas:

3 neg., 3 ver., 2 ver. 1 neg., 2 neg. 1 ver.

Ora d'estas 10 combinações, as 6 primeiras estão designadas na taboada pelo numero á esquerda de 10, por que supprimindo em todas ellas uma esphera branca, teremos todas as combinações de duas espheras com 3 côres, que são 6; e o algarismo 4, que fica por cima de 10, dá o numero das combinações de 3 espheras de duas côres. Vê-se pois que os numeros da taboada, que pertendemos formar, tem a mesma geração que os da taboada de pag. 30., por ser cada um d'elles egual á somma do que lhe fica á esquerda e do que lhe fica superior. Não differem por conseguinte uma da outra, e temos

$$T_{p+1} = [(n+p-1)\,Cn] = [(n+p-1)\,C(p-1)] \ldots \quad (q)$$

No caso de $p = 3$, será

$$T = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

O desenvolvimento de $(a+b+c\ldots)^p$ consta (n.° 9) de tantos termos da fórma $Fa^{n}b^{n'}c^{n''}\ldots$, quantos são os inteiros differentes, que se podem tomar para expoentes $n$, $n'$, $n''$, com tanto que a sua somma seja $= p$. Logo o numero total dos termos é egual ao das combinações $p$ a $p$, que é possivel formar com as $m$ letras $a$, $b$, $c$, .... dando-lhe todos os expoentes possiveis inteiros desde zero até $p$. E por conseguinte:

*O numero dos termos da potencia* p *do polynomio* $a+b+c+\ldots$ *é designado tambem pela expressão* $(p)$ *de* $T_{p+1}$.

Para obter a somma das combinações de $n$ letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, .... $p$ a $p$, devemos ajunctar o numero que tem o logar $n$ nas ordens successivas 1, 2, 3, .... $p+1$ da taboada de pag. 30, ou a columna $n$, cuja somma, segundo vimos, é o numero $n+1$ da ordem $p+1$. Mude-se pois $n$ em $n+1$ na equação $(p)$, e designando por $\Sigma$ a somma pedida, será

$$\Sigma = [(n+p)\,Cp] - 1 = [(n+p)\,Cn] - 1;$$

correspondendo a unidade subtractiva ás combinações zero a zero, que n'este caso devemos omittir.

Por ex.°, 5 letras combinadas de 1 a 1, .... até 4 a 4, ou 4 letras de 1 a 1, até 5 a 5, dão o resultado

$$\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} - 1 = 125.$$

Querendo as combinações desde $p$ a $p$ até $p'$ a $p'$, applicar-se-ha duas vezes a fórmula aos numeros $p$ e $p'$, e diminuir-se-ha o primeiro resultado do último. Assim 5 letras tomadas desde 4 a 4 até 6 a 6 dão $461 - 125 = 336$ combinações.

22. *Para achar todas as combinações das* $\alpha$ letras $a$, $\beta$ letras $b$, .. *do monomio* $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$ .. 1 a 1, 2 a 2, .. $p$ a $p$, *sendo* $p=\alpha+\beta+\gamma..$; notando que $a$ póde ter todos os expoentes desde 1 até $\alpha$; que $b$ póde ter todos desde 1 até $\beta$; etc.....: vê-se que a questão se reduz a achar todos os divisores de $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$...... que formam os termos do producto (*vej. Addit. ás notas da Arith.* pag. 271)

$$(1+a+a^2+\ldots.\ a^\alpha)\ (1+b+b^2+\ldots.\ b^\beta)(1+c+c^2+\ldots.\ c^\gamma)\ldots;$$

e por conseguinte o numero das combinações, que se pede, é

$$(1+\alpha)\ (1+\beta)(1+\gamma)\ldots\ldots-1$$

Por ex.°, $a^5\ b^4\ c^3\ d^2$ tem 360 divisores (6 . 5 . 4 . 3) comprehendendo n'elles a unidade; por conseguinte de 359 maneiras se podem combinar os factores 1 a 1, 2 a 2, ...... etc.

Querendo sómente *o numero de termos em que entra* a, como os outros são os divisores de $b^\beta\ c^\gamma$...., em numero $(1+\beta)(1+\gamma)$; teremos, subtrahindo, o resto $\alpha(1+\beta)(1+\gamma)$.... que é o numero pedido. Isto equivaleria a ajunctar a todas as combinações sem $a$, os factores $a$, $a^2$, $a^3$, ........

Querendo saber entre os divisores de $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$.... quantos comprehendem $a^m\ b^n$, tomem-se os divisores de $c^\gamma\ d^\delta$......, cujo numero é $(1+\gamma)(1+\delta)$...., e multiplique-se cada um por $a^m\ b^n$; como este producto exprime a somma de todos os productos em que entra $a^m\ b^n$, será o factor $(1+\gamma)(1+\delta)$.... o numero pedido.

## *Noções sôbre as Probabilidades.*

23. Um acontecimento, que depende do acaso, diz-se *provavel* na razão do valor e quantidade dos casos em que póde realizar-se. Dous ou

mais acontecimentos dizem-se *igualmente possiveis* quando ha os mesmos motivos para que se realizem tanto uns como outros. *O gráo de probabilidade* de um acontecimento, avalia-se comparando o numero de casos em que póde dar-se com o numero total de todos os casos egualmente possiveis. Por isso:

*A probabilidade mede-se por uma fracção, que tem por denominador a somma de todos os casos egualmente possiveis, e por numerador o numero dos casos favoraveis.*

Querendo que dous dados, cujas faces tem inscriptos os numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, appresentem os numeros 5 e 2; como n'este caso ha só duas combinações que dão os dous numeros que se desejam, entre 36 egualmente possiveis: segue-se que a probabilidade é expressa por $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Se quizessemos que apparecessem dous pontos que sommassem 7, como ha então tres casos duplos favoraveis 5 e 2, 6 e 1, 4 e 3, entre os 36 egualmente possiveis, teremos por probabilidade $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. D'onde se vê, que ha 1 a apostar contra 5, em como virão numeros que deem esta somma.

Se a fracção por onde se avalia a probabilidade é $>\frac{1}{2}$ diremos, que o acontecimento que se deseja é *mais provavel*. Se a fracção é $=\frac{1}{2}$ diremos que é *incerto*, podendo indifferentemente apostar-se pró ou contra. Se a fracção é $=1$, diremos que o acontecimento é *certo*, por que n'este caso todos os acontecimentos possiveis são favoraveis. Em todos os casos a somma das probabilidades, pró e contra um acontecimento, deve dar a unidade.

Façamos algumas applicações d'estes principios. N'um baralho de $m$ cartas, se houver $p$ de uma qualidade designada, qual é a probabilidade de tirar $m'$ que sejam d'esta especie? O numero dos casos possiveis é $[mCm']$, o dos casos favoraveis é $[pCm']$; logo a probabilidade é $\frac{[pCm']}{[mCm']}$. Por ex.°, n'um baralho de 52 cartas ha 13 de copas; tirando 3 cartas ao acaso, a probabilidade de sairem todas 3 de copas é $\frac{[13C3]}{[52C3]}=\frac{286}{22100}$, quasi $\frac{1}{77}$.

A roda da lotaria contém $m$ numeros dos quaes se tiram $p$; um jogador comprou $m'$; qual é a probabilidade de lhe sairem precisamente $p'$? O numero total das sortes é $[m\,Cp]$; e é este o denominador que se procura. Já se vio (n.° 3) que o numero dos casos favoraveis, isto é, o numerador pedido tem por expressão

$$X = [(m - m') C (p - p')] [m'Cp'].$$

Na Lotaria de França $m = 90$, $p = 5$, e por conseguinte o denominador é $[90\,C5] = 43949268$. Se um jogador comprou 20 numeros, por ex.º, temos $m' = 20$; e então querendo que sáia *precisamente* um dos $p'$ seguintes, teremos

| *numero* | X | *probabilidade.* |
|---|---|---|
| $1 = p'$ ........ | $20\,[70C4]$ .... | 0,4172 |
| $2 = p'$, ...... | $20\,\frac{19}{2}\,[70C3]$ ..... | 0,2367 |
| $3 = p'$, ..... | $20 \cdot \frac{19}{2} \cdot \frac{18}{3}\,[70C2]$ ..... | 0,0626 |
| $4 = p'$, ...... | $70\,[20C4]$ ..... | 0,0077 |
| $5 = p'$, ...... | $[20C5]$ ..... | 0,0003. |

Querendo que ao menos sáia um numero, isto é, que sáia 1, 2, 3, 4, ou 5, tome-se a somma 0,7245. Para que ao menos sáiam dous, sommem-se os resultados precedentes menos o 1.°, e a probabilidade será 0,3073. E se não quizermos numero algum, faça-se $p' = 0$, ou tome-se o complemento de 0,7245 para a unidade, e acharemos 0,2755.

24. Suppondo que dous acontecimentos A e A′ são produzidos respectivamente por $p$, $p'$ causas; e que não se não realizam por outras $q$, $q'$; e admittindo que estes acontecimentos são independentes um do outro, podendo dar-se conjuncta ou separadamente: pergunta-se quaes as probabilidades dos differentes casos?

Para resolver esta questão, comparem-se estes dous acontecimentos aos resultados que podem provir de dous dados, um com $p + q$ faces pintadas, $p$ de branco e $q$ de negro; o outro com $p' + q'$ faces pintadas $p'$ de vermelho e $q'$ de azul. O acontecimento A será realizado quando appareça uma das $p$ faces brancas, e não o será quando appareça uma das $q$ faces negras. O acontecimento A′ terá logar quando appareça uma das $p'$ faces vermelhas, e não o terá quando vier uma das $q'$ faces azues.

O numero total dos casos (n.° 19) é $(p+q)(p'+q')$. Se quizermos que appareçam conjunctamente uma face negra e uma vermelha, isto é, se quizermos que tenha logar o acontecimento A' sem A; como as $q$ faces negras, e as $p'$ vermelhas, dão $qp'$ combinações, será este o numero dos casos favoraveis, e a probabilidade pedida

$$\frac{qp'}{(p+q)(p'+q')}=\frac{q}{p+q}\times\frac{p'}{p'+q'}.$$

Procedendo do mesmo modo nos outros casos, achariamos, como n'este, que a expressão da probabilidade pedida é o producto das probabilidades relativas a cada um dos acontecimentos designados. Logo:

*Se os acontecimentos forem independentes uns dos outros, a probabilidade de acontecerem conjunctamente é o producto de todas as probabilidades relativas a cada um em separado.*

Este theorema *das probabilidades compostas*, posto que se ache aqui sómente demonstrado para o caso dos dous acontecimentos, póde por um raciocinio identico estender-se a um 3.° acontecimento A'', ou a um 3.° dado de $p''+q''$ faces; e assim por diante, justificando-se por este modo a generalidade em que o enunciámos.

Se lançando dous dados de seis faces, quizermos que appareça 4 e 1, qual é aprobabilidade do successo? Considerando sómente um dado, ha seis casos, dos quaes dous são favoraveis (4 ou 1), sendo por tanto a probabilidade simples $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; mas acontecendo esse 1.° caso, é ainda necessario que o 2.° dado appresente o outro ponto (1 ou 4), cuja probabilidade simples é $\frac{1}{6}$; será por tanto aprobabilidade procurada $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$, resultado que achariamos tambem, se comparassemos os 2 casos favoraveis com os 36 casos possiveis.

As probabilidades, á medida que se compõe, attenuam-se, por isso mesmo que resultam do producto de muitos factores $<1$. Se um homem tido por verdadeiro, attesta um facto que vio, póde avaluar-se em $\frac{9}{10}$ a probabilidade de não querer enganar e de não ter sido induzido a erro pelos sentidos. Mas se este homem houve o facto de uma testemunha egualmente veridica, já então a probabilidade é sómente $\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{81}{100}$, quasi $\frac{4}{5}$. Se houverem assim 20 intermediarios, a probabilidade será apenas $(\frac{9}{10})^{20}$, isto é $<\frac{1}{8}$: póde pois apostar-se 7 contra 1 em como o facto transmittido é falso, posto que todos os intermediarios sejam testemunhas egualmente verdadeiras.

Póde comparar-se esta diminuição da probabilidade com a extincção da claridade dos objectos, vistos atravez de muitos pedaços de vidro.

25. O resultado ou producto das probabilidades simples eguaes, é uma potencia desta quantidade, e por isso facilmente podemos resolver a questão seguinte: Se $p$ causas produzem um acontecimeuto A, e se $q$ o impedem, qual é a probabilidade de fazer apparecer $k$ vezes o acontecimento A em $n$ lances?

É claro que a probabilidade simples, em cada lance, a favor de A é $\frac{p}{p+q}$; e $\frac{q}{p+q}$ a probabilidade contra. Se o acontecimento se realiza $k$ vezes, teremos a potencia $k$ da primeira fracção; e se não tem logar, os outros $n-k$ lances darão a potencia $n-k$ da segunda. Da multiplicação d'estas duas potencias resulta a probabilidade composta

$$z=\frac{p^k\, q^{n-k}}{(p+q)^n},$$

a qual exprime, que, em $n$ lances, A acontecerá precisamente $k$ vezes, tendo fixado previamente a ordem de successão dos acontecimentos. Sendo porém esta ordem arbitrária, deve $z$ repetir-se tantas vezes, quantas se puderem combinar estes resultados, a saber as $k$ vezes que tem logar o acontecimento A, com as $n-k$ em que não se realiza; o que é representado por $[nCk]$. Logo $z\times[nCk]$ é a probabilidade de que A acontecerá $k$ vezes em $n$ lances, sem designar aquelles em que deverá realizar-se.

Se quizermos que A aconteça $n$ vezes pelo menos, mudaremos n'esta expressão successivemente $k$ em $k$, $k+1$, $k+2$, .... até $n$, e sommaremos os resultados. N'este caso o denominador da probabilidade pedida é $(p+q)^n$. Para obtermos o numerador, desenvolveremos este binomio, e pararemos no termo em que entra $p^k$, o qual se tomará com o coefficiente, ou sem elle, conforme se quizer attender, ou não, ás $k$ ordens em que A se realiza em $k$ lances.

E se quizermos, que A não aconteça menos de $k$ vezes, nem mais de $k'$ vezes, em $n$ lances, sommaremos todos os termos em que $p$ tem os expoentes $k$, $k+1$, .... $k'$.

Por ex.º, se um dado de 6 faces tiver duas que sejam favoraveis a um jogador, e for necessario para que este ganhe, que em 4 lances deite 3 vezes uma ou outra (ou que em um só lance de 4 dados 3 faces lhe sejam favoraveis), pergunta-se qual é a probabilidade do ganho? N'este caso, $p=2$, $q=4$, e $(p+q)^4=6^4=1296$. Temos pois

$p^4=16$ lances que appresentam 4 vezes uma das faces favoraveis.
$+4p^3q=128$ .................. 3
$+6p^2q^2=384$ .................. 2
$+4pq^3=512$ .................. 1
$+\quad q^4=256$ .................. 0
Somma $=1296=(p+q)^4$, denominador das probabilidades.

Logo a probabilidade de saír *precisamente* 3 vezes um dos casos favoraveis é $\frac{128}{1296}=\frac{8}{81}$. E se devem acontecer em uma ordem designada, divida-se pelo coefficiente 4, e virá $\frac{2}{81}$. Em fim a somma dos dous primeiros numeros dá $\frac{144}{1296}=\frac{1}{9}$, que é a probabilidade de apparecerem pelo menos 3 vezes as faces favoraveis.

Qual é o *partido* de dois jogadores M e N de egual fôrça, faltando 6 pontos a M e 4 a N para ganhar o jogo?

A somma dos pontos é 10; e por isso elevando $p+q$ á 9.ª potencia, reservem-se para M os 4 primeiros termos (em que o menor expoente de $p$ é 6), e guardem-se para N os outros 6 termos; faça-se depois $p=q=1$. Acharemos os dois resultados 130 e 382, cuja somma total é 512. O partido de M, ou a probabilidade que elle tem de ganhar é $\frac{130}{512}$; e o de N é $\frac{382}{512}$. Sendo necessario acabar com a partida sem a levar ao fim, os abonos deveriam ser repartidos entre M e N na razão de 130 para 382, quasi na razão de 1 para 3; e é tambem este o preço por que M e N deveriam vender a sua pertenção aos abonos, no caso de transmittirem os seus direitos.

Quando a fôrça dos jogadores é, por ex.º, como 3 para 2, isto é quando M ganha a N ordinariamente 3 partidas sôbre 5, ou quando M dá 1 ponto de partido para egualar as fôrças, o calculo é o mesmo, fazendo $p=3$, $q=2$. N'este caso acha-se que o partido de M é para o de N proximamente :: 14:15.

26. Succede muitas vezes que as causas de um acontecimento são tão occultas, ou se modificam de uma maneira tão variada, que é impossivel destacal-as e calcular-lhes o numero: n'este caso são inapplicaveis os principios precedentes. Consulta-se então a experiencia, para verificar se os acontecimentos são sujeitos a um curso periodico, do qual se possa conjecturar com verosimilhança, que a causa desconhecida, que faz com que elles appareçam tantas vezes debaixo de uma ordem regular, continuando a obrar

sobre elles, os reproduzirá na mesma ordem. O numero d'estes periodos substitue-se ao das causas nos calculos das probabilidades. Se um dado, lançado dez vezes seguidas, appresentou 9 vezes a face $a$, póde conjecturar-se, que ha na acção que o lança, na sua figura ou substancia, alguma causa occulta, que produz a volta da face $a$ as 9 vezes. Se 100 provas appresentarem tambem 90 vezes esta face $a$, a probabilidade $\frac{9}{10}$ favoravel a esta volta adquire uma grande fôrça, que se augmenta á medida que as provas multiplicadas confirmam esta supposição; de sorte que se fosse possivel fazer um numero infinito de provas, e todas concordassem em dar 9 vezes sobre 10 a face $a$, concluiriamos a *certeza* da hypothese.

É d'esta maneira que a experiencia comprovou os factos seguintes, cujas causas é impossivel assignar.

1.° O numero de casamentos contrahidos em um paiz, durante um tempo determinado, é para o numero de nascimentos e para a população proximamente :: 3:14:396.

2.° A 15 nascimentos do sexo feminino correspondem 16 do masculino.

3.° A população, os nascimentos, os obitos, e os casamentos são :: 2037615 : 71896 : 67700 : 15345, por anno; e approximadamente, os nascimentos são $\frac{1}{28}$, os obitos $\frac{1}{30}$, e os casamentos $\frac{1}{132}$ da população. O excesso $\frac{1}{420}$ dos nascimentos sôbre os obitos é o accrescimo annuo da população.

4.° A duração das gerações de pai a filho é de 33 annos.

5.° O numero dos mortos do sexo masculino é para o do sexo feminino :: 24:23; e n'um paiz qualquer o numero dos vivos do 1.° sexo é para os do 2.° :: 33:29.

6.° Os obitos do sexo masculino são $\frac{1}{58}$ e os do fiminino $\frac{1}{61}$ da população. Em Pariz, a totalidade dos obitos chega só a $\frac{1}{32}$ do numero dos habitantes; estes obitos elevam-se annualmente a 27585 termo medio, e os nascimentos a 32324.

7.° A ametade de toda a população tem menos de 25 annos, e todos os 25 annos se renova uma ametade.

8.° Em França o numero da população é para o numero dos casamentos :: 127,63:1. A duração da vida media é actualmente de $36\frac{2}{3}$ annos.

É debaixo d'estas considerações que se estabelecem as Taboas de população e de mortalidade: póde consultar-se a este respeito o *Annuaire du Bureau des Longitudes.*

Nada mais accrescentaremos sobre a doutrina de probabilidades, que é tão extensa, que faz objecto de Tractados especiaes.

Vej. os de Laplace, Lacroix, Condorcet, Duvillard, Poisson etc.

## II. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.

### *Composição das equações.*

27. **D**Epois de transposta e reduzida, *toda a equação a uma só incognita tem a fórma*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \ldots\ldots\ldots (1);$$

na qual $x$ é a incognita, $n$ um inteiro, e $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..... $A_n$ numeros conhecidos positivos, negativos ou zero.

Chama-se *Raiz* qualquer quantidade $a$, que substituida por $x$ reduz o polynomio (1) a zero, ou que satisfaz á condição

$$A_0a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1}a + A_n = 0.$$

Tome-se arbitrariamente um numero $a$, e divida-se o polynomio (1) por $x - a$, até que se obtenha um resto R que não contenha $x$, o que sempre é possivel, por ser o divisor do 1.° grão. Multiplicando o quociente, que será da fórma

$$A_0x^{n-1} + A'_1x^{n-2} + \ldots\ldots A'_{n-1},$$

por $x - a$; e ajunctando R ao producto: deverá reproduzir-se *identicamente* o dividendo (1).

Fazendo o cálculo, e designando (*) a expressão (1) por $f(x)$, vem

$$fx = A_0 x^n + \begin{array}{c|} A'_1 \\ -aA_0 \end{array} x^{n-1} + \begin{array}{c|} A'_2 \\ -aA'_1 \end{array} x^{n-2} + \begin{array}{c|} A'_3 \\ -aA'_2 \end{array} x^{n-3} \ldots + \begin{array}{c|} A'_{n-1} \\ -aA'_{n-2} \end{array} \begin{array}{l} x + R \\ -aA'_{n-1} \end{array}.$$

E como n'esta expressão devem achar-se todos os termos do polynomio $f(x)$, vê-se que o factor $A_1$ de $x^{n-1}$ no polynomio, deve ser egual ao factor $A'_1 - aA_0$ de $x^{n-1}$ no cálculo que effectuámos. Pela mesma razão deverão ser

$$A_2 = A'_2 - aA'_1,\ A_3 = A'_3 - aA'_2,\ \ldots.\ A_n = R - aA'_{n-1}.$$

Transpondo os termos negativos, temos

$$A'_1 = A_1 + aA_0,\ A'_2 = A_2 + aA'_1,\ \ldots R = A_n + aA'_{n-1} \ldots\ldots \quad (2)$$

Por meio d'estas equações podemos deduzir uns dos outros, sucessivamente, os coefficientes $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, .... e o resto R; e da sua fórma se deduz a seguinte lei:

*Cada um dos coefficientes, e o resto, é formado do coefficiente da mesma ordem em* f(x), *mais do producto do coefficiente precedente multiplicado por* a.

---

(*) Toda a expressão analytica em que entra $x$ chama-se funcção de $x$. *Funcções algebricas* são aquellas que não exigem operações de algebra senão até ás extracções de raizes inclusivamente; as *funcções transcendentes* comprehendem logarithmos, exponenciaes, arcos de circulo, senos, cosenos.. Não se exprimem, debaixo da funcção, senão aquellas quantidades das quaes depende a solução dos problemas que nos propomos resolver. Assim $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$.. designam fórmulas em que a letra $x$ está combinada de differentes maneiras; $f(x)$ e $f(z)$, com o mesmo sinal $f$, indicam expressões nas quaes $x$ e $z$ se acham combinadas da mesma maneira, de sorte que se tornam identicas quando se muda $x$ em $z$. Por ex., $f(\sqrt{z}+a)$ significa que existe uma funcção $f(x)$ na qual por $x$ se substituio $\sqrt{z}+a$. Do mesmo modo $F(x^2+y^2)$ indica que se substituio $z$ por $x^2+y^2$ em uma funcção $F(z)$.

Querendo, por ex.°, dividir $4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11$ por $x-2$, acharemos o quociente $4x^4-2x^3+2x^2-3x+3$, e o resto $-5$.

Como effeito, tendo escripto o 1.° termo do quociente $4x^4$, acharemos, segundo a lei indicada,

para coefficiente de $x^3$ ...... $-10+4\times2=-2$

............de $x^2$....... $6-2\times2=+2$

............de $x$....... $-7+2\times2=-3$

para coefficiente do ultimo termo $9-3\times2=3$

para resto.................. $-11+3\times2=-5$.

Podemos obter tambem os coefficientes $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ e o resto R, eliminando-os das equações (2), o que dá

$$A'_1=A_0a+A_1,\ A'_2=A_0a^2+A_1a+A_2,\ A'_3=A_0a^3+A_1a^2+A_2a+A_3,\ldots$$

$$R=A_0a^n+A_1a^{n-1}+A_2a^{n-2}+\ldots\ldots A_{n-1}a+A_n=f(a).$$

Da lei que seguem estes coefficientes, e o resto, deduz-se a regra seguinte:

*Para formar um coefficiente qualquer da ordem* i *no quociente: tomem-se os* i *primeiros termos de* f(x); *substituam-se n'elles* x *por* a; *e supprimam-se as potencias de* a *communs a todos os termos. Para formar o resto mude-se* x *em* a *no polynomio proposto, que se tornará* f(a).

Da expressão precedente de R tiraremos as seguintes consequencias:

1.° *Se for* a *raiz da equação* (1), *sendo então* $f(a)=R=0$, *será* fx *divisivel por* $x-a$.

2.° *Reciprocamente, se* f(x) *for divisivel por* $x-a$, *como a divisão se faz exactamente, será* $R=0$, *e por conseguinte a substituição de* a *reduzirá* f(x) *a zero, isto é, será* a *raiz da equação.*

28. Supponhamos por agora demonstrado, *que toda a equação a uma incognita tem uma raiz pelo menos*, objecto de que adiante nos occuparemos; e na equação (1) façamos $A_0=1$, o que nada tira á generalidade da

mesma equação, por isso que a podiamos ter divido toda por este coefficiente de $x^n$.

Se $a$ é raiz da equação temos identicamente

$$fx = (x - a)\,Q,$$

sendo Q um polynomio do gráo $x^{n-1}$.

Se $b$ é raiz da equação $Q = 0$, $x - b$ deve dividir Q, e será $Q = (x - b)\,Q'$, e

$$fx = (x - a)\,(x - b)\,Q'.$$

Se $c$ é a raiz da equação $Q' = 0$, será do mesmo modo $Q' = (x - c)\,Q''$, e

$$fx = (x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,Q''.$$

Como os gráos dos quocientes successivos $Q$, $Q'$, $Q''$, .... se vão abaixando successivamente por cada factor binomio que se põe em evidencia, é claro que feitas $n - 1$ divisões, devemos chegar a um quociente $x - l$ do 1.° gráo. Admittindo pois que toda a equação tem uma raiz, podemos tirar a conclusão seguinte:

*Todo o polynomio* $f(x)$ *do gráo* n *é formado do producto de* n *factores binomios do* 1.° *gráo; e teremos sempre*

$$fx = (x - a)\,(x - b)\,(x - c) \ldots\ldots (x - l).$$

Esta equação é identica, e a dissimilhança dos dous membros desappareceria, logo que se effectuassem as multiplicações indicadas. E como $f(x)$ se torna nullo, quando por $x$ se substitue qualquer dos numeros, $a$, $b$, $c$, ...... concluiremos tambem, que:

*Toda a equação* $f(x) = 0$ *tem* n *raizes, que são, com signaes contrarios, os segundos termos dor seus* n *factores binomios.*

Passemos agora a mostrar, que o *polynomio* $f(x)$ *não póde ser de-*

*composto em outros factores* $(x-a')(x-b')\ldots(x-l')$, *sendo as quantidades* $a', b', \ldots l'$, *todas ou em parte, differentes de* $a, b, \ldots l$.

E para isto mostremos primeiro, que *se o binomio* $x-h$ *dividir exactamente o producto de dous polynomios* A *e* B *racionaes e inteiros* (*) *em ordem a* $x$, *um d'estes polynomios, pelo menos, será divisivel por* $x-h$. Supponhamos com effeito, que dividindo A e B por $x-h$, resultam os quocientes $A'$ e $B'$, e os restos numericos $\alpha$ e $\beta$, sendo

$$A = A'(x-h) + \alpha, \quad B = B'(x-h) + \beta.$$

Formando o producto AB, acha-se que $x-h$ é factor de todos o seus termos, menos do producto numerico $\alpha\beta$, o qual não póde ser divisivel por $x-h$; e por conseguinte AB tambem o não poderá ser, em quanto ou $\alpha$ ou $\beta$ não forem nullos.

Posto isto, sendo $fx = (x-a)Q$, se suppuzermos que $x-a'$ divide $f(x)$, será forçoso que seja Q divisivel por $x-a'$ visto que $x-a$ o não póde ser. O mesmo diremos de $Q'$ em $Q = (x-b)Q'$; e assim por diante até ao último factor $x-l$, o qual não sendo divisivel por $x-a'$, mostra que $x-a'$ não póde ser divisor de $f(x)$. O mesmo se mostra a respeito de $x-b'$, $x-c'$, .... Logo:

1.° *Qualquer polynomio* $f(x)$, *da ordem* $n$, *sómente se póde resolver em um systema unico de* $n$ *factores binomios do primeiro grão, e a equação* $f(x)=0$ *admitte sómente* $n$ *raizes.*

2.° Toda a fracção $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, que se torna $\dfrac{0}{0}$ quando se faz $x=a$, tem $x-a$, ou uma potencia de $x=a$, por factor commum dos seus dous termos $f(x)$, $\varphi x$. Para se obter o valor da fracção, supprimam-se primeiro os factores communs $x-a$, e faça-se depois $x=a$; d'onde resultará *um valor finito, nullo, ou infinito*, confórme $x-a$ estiver elevado á mesma potencia nos dous termos, ou a potencia mais elevada no numerador ou no denominador.

3.° Se as duas equações $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ tiverem uma mesma raiz $a$, $x-a$ será o seu factor commum. Deste modo

$$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0, \quad x^3 - 37x - 84 = 0,$$

(*) Entendemos aqui por *polynomios racionaes e inteiros, aquelles em cuja expressão não entram as incognitas em nenhum denominador, nem debaixo de radical algum.*

tem $x+3$ por factor, o qual se obtem pelo methodo do divisor commum. A coexistencia d'estas duas equações seria absurda, se não existisse um factor commum entre ellas. E se este factor fosse do 2.° gráo, as equações teriam duas raizes, que seriam as unicas que satisfariam ao problema, etc.

4.° Empregando a divisão, podemos abaixar no gráo $n$ de uma equação um numero de unidades egual ao das raizes conhecidas, por isso que a indagação das raizes se reduz á dos factores binomios. Os factores do 2.° gráo são em numero $\frac{1}{2}n(n-1)$ (n.° 1), porque resultam das combinações 2 a 2 dos do 1.°: os do 3.° gráo são em numero $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$, etc.

29. Como a equação proposta

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots A_{n-1}\, x + A_n = 0$$

é o producto de $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)$, segue-se do que se vio (*Alg. El.* n.° 104, V) que:

1.° *O coefficiente* $A_1$ *do* 2.° *termo é a somma de todas as raizes* a, b, c,.... l *tomadas com signaes contrarios.*

2.° *O coefficiente* $A_2$ *do* 3.° *termo é a somma dos productos* 2 *a* 2 *destas raizes.*

3.° *O coefficiente* $A_3$ *do* 4.° *termo é a somma dos productos* 3 *a* 3 *tomados com signaes contrarios* ....... *E assim por diante sendo o coefficiente* $A_i$ *do termo* $i+1$ *a somma dos productos* i *a* i *tomados com o mesmo ou differente signal, segundo é* i *par ou impar.*

4.° Finalmente, *o ultimo termo* $A_n$ *é o producto de todas as raizes, quando* n *é par; e este producto com o signal contrario, quando* n *é impar.*

## *Transformação das Equações.*

30. Com a simples mudança de letras nos coefficientes, a equação (1) póde escrever-se

$$f(x) = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots + tx + u = 0 \ldots\ldots (3)$$

1.° Se quizermos transformar esta equação n'outra, cujas raizes $y$ sejam $h$ vezes maiores que $x$, façamos

$$y=hx\text{, ou }x=\frac{y}{h};$$

e virá

$$f\left(\frac{y}{h}\right)=\frac{ky^n}{h^n}+\frac{py^{n-1}}{h^{n-1}}+\frac{qy^{n-2}}{h^{n-2}}+\ldots\ldots\frac{ty}{h}+u=0;$$

ou, multiplicando por $h^n$,

$$ky^n+phy^{n-1}+qh^2y^{n-2}+\ldots\ldots th^{n-1}y+uh^n=0.$$

Esta última equação deduz-se muito facilmente de (3), mudando $x$ em $y$, e multiplicando os termos successivos por $h^0, h^1, h^2, \ldots\ldots h^n$.

É facil de verificar, que por este processo as raizes da equação $f\left(\frac{y}{h}\right)=0$ são $h$ vezes maiores que as da proposta (3). Com effeito, suppondo que $\alpha$ é uma raiz d'esta última equação, teremos $f(\alpha)=0$; mas o 1.° membro da transformada reduz-se tambem a $f(\alpha)$, quando se substitue n'ella $h\alpha$ por $y$; logo $h\alpha$ é uma raiz da transformada.

2.° Se a equação proposta (3) tiver coefficientes fraccionarios, podemos sempre desembaraçal-a d'elles por meio da reducção ao mesmo denominador. Depois suppondo $h=k$, isto é, fazendo $x=\frac{y}{k}$, a transformada é divisivel por $k$, e torna-se em

$$y^n+py^{n-1}+qky^{n-2}\ldots\ldots uk^{n-1}=0;$$

logo: *para desembaraçar uma equação dos coefficientes fracionarios reduza-se ao mesmo denominador; e querendo desembaraçar tambem o 1.° termo do seu coefficiente* k, *faça-se* $x=\frac{y}{k}$, o que equival a supprimir $k$ no 1.° termo de (3), e a multiplicar successivamente, a partir do 2.° termo, os coefficientes por $k^0, k^1, k^2, \ldots\ldots k^{n-1}$.

Seja, por ex.°, a equação

$$x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{5}{6}x^2 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{7}{2} = 0\,;$$

multiplicando-a por 12, vem

$$12x^4 - 8x^3 + 10^2 - 9x - 42 = 0\,;$$

fazendo depois $x = \frac{1}{12}y$, ou multiplicando os coefficientes 10, 9, e 42 respectivamente por 12, $12^2$, $12^3$, vem

$$y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0.$$

3.° *Se quizermos transformar a equação* (3) *n'outra cujas raizes* y *sejam* h *vezes menores* é facil de ver, pelo que fica dito, que *devemos pôr*

$$x = hy,$$

o que equival a mudar na proposta $x$ em $y$, e dividir successivamente os coefficientes por $h^0$, $h^1$, $h^2$, ...... $h^n$. Este processo póde dar logar á á introducção de coefficientes fraccionarios.

Fazendo $x = 12y$ na equação $x^3 - 144x = 10368$, resulta a equação mais simples $y^3 - y = 6$ e com as raizes 12 vezes menores.

**31.** *Se quizermos uma equação, cujas raizes tenham de menos a quantidade* i *que as da equação* (3), *faça-se* $x = i + y$.

Pondo $i + y$ em vez de $x$ em todos os termos de $f(x)$, a transformada de (3) será

$$k(i+y)^n + p(i+y)^{n-1} + q(i+y)^{n-2} + \ldots\ldots\ t(i+y) + u = 0.$$

Sem ser necessario effectuar a desenvolução dos binomios que entram nos diversos termos, resulta da lei conhecida (n.° 8) que seguem os termos da fórmula de Newton, que se esta equação se ordenar relativamente ás potencias crescentes de $y$, será da fórma

$$A + By + Cy^2 + \ldots\ldots ky^n = 0,$$

equação na qual é:

$A = fi$, ou o polynomio, quando n'elle se muda $x$ em $i$;

$B = \frac{f'i}{1}$, designando por $f'i$ o resultado que se obtém multiplicando cada termo de A pelo expoente de $i$, e diminuindo este expoente d'uma unidade; resultado a que se dá o nome de DERIVADA de A;

$C = \frac{f''i}{1.2}$, designando por $f''i$ a derivada de B;

$D = \frac{f'''i}{1.2.3}$, designando por $f'''i$ a derivada de C;

E assim por diante.

Por este modo podemos compor os coefficientes da transformada, sabendo-os deduzir uns dos outros, isto é,

$$fi + yf'i + \frac{y^2}{2}f''i + \frac{y^3}{2.3}f'''i + \ldots + ky^n = 0,$$

$$fi = ki^n + pi^{n-1} + qi^{n-2} + \ldots\ldots + ti + u,$$

$$f'i = nki^{n-1} + (n-1)pi^{n-2} + (n-2)qi^{n-3} \ldots + t,$$

$$f''i = n(n-1)ki^{n-2} + (n-1)(n-2)pi^{n-3} + \ldots + \text{etc.}$$

Querendo, por ex.°, fazer $x=2+y$ em

$$fx=x^3-5x^2+x+7=0,$$

teremos, por ser $i=2$,

$$fi=i^3-5i^2+i+7=-3,$$

$$f'i=3i^2-10i+1\,..=-7,$$

$$f''i=6i-10\,.....=\;\;2;$$

e por conseguinte será a transformada

$$-3-7y+y^2+y^3=0.$$

*Se, pelo contrário, quizermos, que todas as raizes da transformada tenham de mais a quantidade* i *que as da proposta, faça-se* x = y — i.

O cálculo n'este caso é como o precedente, só com a differença de se mudar $i$ em $-i$, ou de tomar com signal contrário as potencias impares de $i$.

Do que fica dicto conclue-se, que se n'uma funcção $\varphi(x)$ racional, algebrica e inteira, se mudar $x$ em $x\pm h$, será

$$\varphi(x\pm h)=\left\{\begin{array}{l}\varphi(x)\pm h\,\varphi'(x)+\dfrac{h^2}{1.2}\varphi''(x)\\ \pm\dfrac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\,..\,\dfrac{h^m}{1.2.3..\,m}\varphi^m(x)\end{array}\right\}\ldots\ldots\text{(A)}$$

Esta fórmula descoberta pelo Geometra inglez *Taylor*, e que adiante demonstraremos para uma funcção qualquer de $x$, é conhecida pelo denominação de *fórmula de Taylor* (*).

**32.** O processo da pag. 51. é muito commodo para achar os coefficientes $fi$, $f'i$, $f''i$, .... da transformada. Com effeito, divida-se $f(x)$ por $x-i$, e sejam T o quociente e $t$ o resto d'esta divisão. Divida-se de-

---

(*) Vê-se na equação (A), que se ordenarmos qualquer funcção $\varphi(x \pm h)$ em ordem ás potencias crescentes de $h$, será, n'este desenvolvimento, o coefficiente da primeira potencia de $h$ a derivada da funcção $\varphi x$.

Por meio d'esta consideração se demonstra muito facilmente o seguinte theorema, de que ainda na Algebra superior teremos de fazer uso.

*A derivada de um producto de muitos factores é egual á somma algebrica de todos os productos, que se formam multiplicando a derivada de cada factor pelo producto dos outros factores*.

Sejam U, V, X, Y, .... funcções de $x$; se em cada um d'elles mudarmos $x$ em $x \pm h$, tornar-se-hão respectivamente em

$$U \pm U'h + U''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$V \pm V'h + V''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$X \pm X'h + X''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$Y \pm Y'h + Y''\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

Logo, para obter a derivada do producto UVXY...., é necessario formar o producto d'estas quantidades, e a derivada será o coefficiente da primeira potencia de $h$ n'este producto. Ora é evidente que para obter este coefficiente, se deve multiplicar o coefficiente de $h$ em cada um d'estes factores pelos termos dos outros em que não entra $h$, e sommar depois algebricamente os resultados. A derivada do producto UVXY ...... será pois

$$\pm U'VXY \pm V'UXY \ldots\ldots \pm X'UVY \ldots\ldots \pm Y'UVX \ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots,$$

como se pertendia demonstrar.

pois T por $x-i$, e sejam U o quociente e $u$ o resto. Divida-se U por $x-i$, e sejam V o quociente e $v$ o resto. E assim por diante. Teremos

$$fx=\mathrm{T}(x-i)+t\,,\ \mathrm{T}=\mathrm{U}(x-i)+u\,,\ \mathrm{U}=\mathrm{V}(x-i)+v\,,\ \ldots\ldots$$

Eliminando successivamente T, U, V, .... acha-se

$$fx=t+u(x-i)+v(x-i)^2+\ldots\ k(x-i)^n;$$

onde se vê, que os coefficientes da tranformada na qual é $y=x-i$, são os restos $t$, $u$, $v$.... das divisões successivas por $x-i$, sendo o último coefficiente $k$ o último quociente. E como pelo processo da pag. 51. estes restos se obtém facilmente, o cálculo toma a fórma do ex.° seguinte, no qual se suppoz $y=x-3$.

$$\text{Proposta}\ldots\ldots\ 2x^4-7x^3-12x^2+4x+129=0$$

$$\text{Factor 3}\ldots\left\{\begin{array}{llll}2-1 & -15 & -41+6 \\ 2+\ 5 & \ \ \ 0 & -41 & \\ 2+11 & +33 & & \\ 2+17 & & & \end{array}\right.$$

$$\text{Transformada } 2y^4+17y^3+33y^2-41y+6=0.$$

Os quatro 1.os numeros da 1.a linha $2, -1, -15, -41$, são os coefficientes successivos do 1.° quociente T. Os tres 1.os da 2.a linha, são os coefficientes do 2.° quociente U. Os dous 1.os da 3.a são os de V. etc. Cada linha tem um termo de menos que a precedente. O último termo de cada linha é o resto da divisão por $x-3$; assim $t=6$, $u=-41$, $v=33$, $w=17$. O último quociente $2$ é $=k$. Apparecem por este modo os coefficientes pedidos em ordem inversa. (*)

(*) Quando $i$ é uma fracção $\frac{h}{l}$, torna-se mais simples o cálculo do modo que passâmos a ver. Supponhâmos

$$x=\frac{x'}{l},\ x'=x''+h,\ x''=ly:$$

Quando se busca a transformada em $y=x-1$, sendo então $i=1$, reduz-se o cálculo a simples addicções, segundo a lei da pag. 30. Eis aqui dous exemplos:

---

eliminando d'estas equações $x'$ e $x''$ acha-se

$$x=y+\frac{h}{l}.$$

Logo podemos compor a transformada em ordem a $y$, satisfazendo successivamente ás tres equações, isto é: tornando, pela 1.ª, as raizes $l$ vezes maiores (n.° 30. 1.°); diminuindo-as pela 2.ª de $h$; e finalmente tornando, pela 3.ª, as raizes $l$ vezes menores (n.° 30, 3.°)

No seguinte exemplo, em que se busca a transformada em $x-\frac{2}{3}$ correspondente á equação

$$2x^4-5x^3+7x^2-4x+2=0,$$

se indica o processo d'este cálculo.

Coefficientes .................. $2-5+7-4+2$.

Potencias do denominador .... 1 3 9 27 81.

Transformada em $x'$ .... $2x'^4-15x'^3+63x'^2-108x'+162$.

$$\text{Factor 2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 2-11+41-26+110. \\ 2-7+27+28 \\ 2-3+21 \\ 2+1 \end{cases}$$

Transformada em $x''=x-2$ ...... $2x''^4+x''^3+21x''^2+28x''+110$.

Transformada em $y=x-\frac{2}{3}$ $2y^4+\frac{1}{3}y^3+\frac{21}{9}y^2+\frac{28}{27}y+\frac{110}{81}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3-12x^2+41x-29=0$ | | | | $x^4-6x^3$ | $+7x^2$ | $-7x$ | $+7=0$ | | |
| 1 | $-11$ | $+30$ | $+1$ | 1 | $-5$ | $+2$ | $-5$ | $+2$ |
| 1 | $-10$ | $+20$ | | 1 | $-4$ | $-2$ | $-7$ | |
| 1 | $-9$ | | | 1 | $-3$ | $-5$ | | |

$$y^3-9y^2+20y+1=0 \qquad y^4-2y^3-5y^2-7y+2=0.$$

33. A transformação da proposta (3) em $x=y+i$, sendo $i$ uma arbitrária, póde servir-nos para desembaraçar a equação de alguns dos seus termos, determinando a arbitrária n'este sentido. Assim:

1.° *Para desembaraçar a equação do seu 2.° termo*, tendo achado a transformada

$$\left.\begin{array}{r|c|r} ky^n+nik & y^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)i^2k & y^{n-2}\,..+ki^n\;+u \\ +p & +\;(n-1)ip & +pi^{n-1} \\ & +q & +\;\ldots\ldots \end{array}\right\}=0,$$

façamos depois
$$nik+p=0;$$

e resultará
$$i=-\frac{p}{nk},\ x=y-\frac{p}{nk}.$$

D'onde se deduz a regra seguinte: *mude-se* x *em* y, *menos o coefficiente* p *do* 2.° *termo*, *dividido pelo producto do coefficiente* k *do* 1.° *termo*

---

Emprega-se principalmente este cálculo, quando $l$ é 10, ou alguma das suas potencias. Assim, querendo achar a transformada em $y=x-0,2$ na equação de cima, teremos

Productos dos coefficientes pelas potencias de 10, $2-50+700-4000+20000$

$$\text{Factores } 2\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} 2-46+608-2784+14432 \\ 2-42+524-1736 \\ 2-38+448 \end{array}\right.$$

Transformada em $x'-2$ .................... $2-34+448-1736+14432$

Transformada em $x'-0,2$..... $2y^4-3,4y^3+4,48y^2-1,736y+1,4432=0.$

*pelo grão da equação*, bem entendido que $p$ e $k$ devem entrar com os seus signaes respectivos. (*)

Abbrevia-se muito o cálculo, elevando á potencia $n$ a expressão $x+\frac{p}{nk}=y$, desenvolvendo o 1.° membro, e multiplicando por $k$. Por este modo obtem-se o valor dos dois 1.os termos da proposta $kx^n+px^{n-1}$, o qual substituido n'ella, faz com que os termos, em que entra $x$ sejam de ordem menos elevada, tornando-se depois mais facil a transformação.

Por ex.°, na equação $x^3-6x^2+4x-7=0$, pondo, segundo a regra, $x-2=y$, e elevando esta expressão ao cubo, vem

$$x^3-6x^2=y^3-12x+8,$$

e substituindo na proposta, vem

$$y^3-8x+1=0, \text{ ou } y^3-8y-15=0.$$

---

(*) A condição que faz desaparecer o 2.° termo, equival á de tornar nulla a somma das raizes (n.° 29., 1.°), d'onde podêmos concluir que pela regra dada se augmentam todas as raizes com uma quantidade tal, que a somma das suas partes negativas se torna egual á das positivas.

Com effeito, mudar $x$ em $y-\frac{p}{nk}$, equival a augmentar as raizes $a, b, c, \ldots l$ da primitiva da quantidade $\frac{p}{nk}$, sendo assim as raizes da transformada

$$a+\frac{p}{nk},\ b+\frac{p}{nk}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, +\frac{p}{nk}.$$

Sommando estas raizes, e advertindo, que é

$$a+b+c+\ldots+l=-\frac{p}{k},$$

vem com effeito

$$a+b+c+\ldots\ldots l+\frac{np}{nk}=-\frac{p}{k}+\frac{p}{k}=0.$$

2.° *Para fazer desapparecer ao mesmo tempo o 2.° termo da equação* (3) *e o coefficiente* k *do* 1.° *termo, é facil de ver, que deve fazer-se*

$$x = \frac{y - p}{nk}. (*)$$

(*) Para desembaraçar do 2.° termo, deve fazer-se (1.°)

$$x = z - \frac{p}{nk};$$

e depois, para desembaraçar do coefficiente $k$, podemos fazer (30, 3.°)

$$z = \frac{y}{nk};$$

la por onde se vê que satisfaz a ambas as condições a hypothese unica

$$x = \frac{y}{nk} - \frac{p}{nk} = \frac{y - p}{nk}.$$

Com effeito fazendo na equação (3) $x = z + i$, resulta a transformada

$$kz^n + (nik + p)z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + ki^n = 0,$$

cujo 2.° termo se anniquila pela hypothese

$$i = -\frac{p}{nk};$$

em e fica, não attendo aos signaes,

$$kz^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{p^n}{k^{n-1}\,n^n} = 0.$$

en Reduzindo ao mesmo dominador, vem

$$k^n n^n z^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0;$$

e desembaraçando do coefficiente do 1.° termo pela hypothese $z = \frac{y}{nk}$, resulta em fim a transformada sem o 2.° termo e sem o coefficiente do 1.°

3.° *Para fazer desapparecer o 3.° termo da equação é necessario pôr*

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)i^2k+(n-1)ip+q=0.$$

Desta equação do 2.° grào deduzem-se, em geral, dous valores para $i$; e por conseguinte póde-se fazer desapparecer o 3.° termo por duas substituições de $x$ differentes.

4.° *Para fazer desapparecer o 4.°, 5.°, 6.° .... termos, é necessario resolver uma equação do 3.°, 4.°, 5.° .... gráos.*

5.° *Finalmente, para fazer desapparecer o último termo, é necessario fazer*

$$ki^n+pi^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+u=0:$$

mas isto equival a resolver a equação proposta; e com effeito, como nesse caso a transformada deve ter uma raiz nulla $y=0$, é então $x=i$. (*)

34. Usam-se muitas vezes as transformações seguintes:

1.° Fazer $x=-y$. *Os termos em que entram potencias impares mudam de signal; as raizes positivas tornam-se negativas, e reciprocamente.*

2.° Suppor $x=\dfrac{1}{y}$. *As raizes tornam-se reciprocas; as maiores de* x *correspondem ás menores de* y, *e as menores de* x *ás maiores de* y. Como os factores $x$, $x^2$, $x^3$, .. são substituidos pelos divisores $y$, $y^2$, $y^3$, .., se multiplicarmos a equação por $y^n$, aquelles factores serão substituidos por $y^{n-1}$, $y^{n-2}$, ....; e ella tornar-se-ha, invertendo os termos, em

$$uy^n+ty^{n-1}+\ldots\ldots+qy^2+py+k=0,$$

ou, dividindo pelo último termo $u$ da proposta,

---

(*) Cumpre notar, que não é possivel por transformações successivas, fazer desaparecer primeiro um termo, depois outro, e assim por diante: porque cada uma destas operações faria tornar a apparecer o termo que precedentemente se annulára. Com effeito, se na equação

$$x^n+qx^{n-2}+\ldots=0;$$

$$y^n + \frac{t}{u}y^{n-1} + \ldots \frac{q}{u}y^2 + \frac{p}{u}y + \frac{k}{u} = 0.$$

35. Em geral, *transformar uma equação* $fx = 0$, reduz-se a compor outra $F(y) = 0$, cujas raizes tenham com as de $x$ uma relação dada por uma equação entre $x$ e $y$, ou $\varphi(x, y) = 0$. A difficuldade do problema consiste toda em saber eliminar $x$ d'esta última equação, por meio da proposta, problema de que adiante nos occuparemos.

## *Limites das raizes.*

36. *Chama-se* limite superior das raizes *da equação* f (x) = 0 *uma quantidade qualquer maior que a maior d'ellas;* e limite inferior *qualquer quantidade menor que a menor d'ellas.*

Quando o 1.° termo $kx^n$ de $fx$ tiver o signal positivo, *todo o numero* l *que, substituido por* x, *em* fx, *der um resultado positivo, será limite superior, quando qualquer numero*>l *estiver no mesmo caso*: por que então nenhum valor$>l$ resolve a equação.

A indagação dos limites, como veremos, é uma questão muito interessante para a resolução das equações, e por isso começaremos por indicar os seguintes methodos para achar o limite superior.

1.° METHODO. Se $fx$ não tiver termos negativos, será zero um limite superior das suas raizes, por que qualquer valor positivo, que se substitua por $x$, não poderá reduzir $fx$ a zero, e por conseguinte esta expressão não terá raizes positivas.

---

que já se acha desembaraçada do 2.° termo, fizermos $x = y + i$, virá

$$(y+i)^n + q(y+i)^{n-2} + \ldots = 0;$$

ou, desenvolvendo,

$$y^n + niy^{n-1} + [\tfrac{1}{2}n(n-1)i^2 + q]y^{n-2} + \text{etc.} = 0;$$

onde se vê, que o valor de $i$, que faria desapparecer o termo com $y^{n-2}$, será differente de zero, e que por conseguinte tornaria a apparecer o termo com $y^{n-1}$.

Se houver termos positivos e negativos, advertiremos que sendo, como é sabido, quando $i$ é numero inteiro e positivo,

$$\frac{x^i-1}{x-1}=x^{i-1}+x^{i-2}+x^{i-3}+\ldots\ldots+x+1,$$

será

$$x^i=(x-1)x^{i-1}+(x-1)x^{i-2}+(x-1)x^{i-3}\ldots\ldots+(x-1)+1.$$

Applicando este desenvolvimento a todos os termos positivos de

$$fx=kx^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots u,$$

e suppondo, como é sempre permittido, que $kx^n$ é positivo, temos

$$\begin{array}{l|l|l|l}
k(x-1)\,x^{n-1}+k & (x-1)\,x^{n-2}+k & (x-1)\,x^{n-3}\ldots+k & (x-1)+k \\
\phantom{k(x-1)\,x^{n-1}}+p & \phantom{(x-1)\,x^{n-2}}+p & \phantom{(x-1)\,x^{n-3}\ldots}+p & \phantom{(x-1)}+p \\
 & \phantom{(x-1)\,x^{n-2}}+q & \phantom{(x-1)\,x^{n-3}\ldots}+q & \phantom{(x-1)}+q \\
 & & \phantom{(x-1)\,x^{n-3}\ldots}+\text{etc.} & \phantom{(x-1)}+\text{etc.}
\end{array}$$

Aos termos negativos conservaremos a sua fórma, e assental-os-hemos nas columnas em que $x$ se acha elevado ao mesmo expoente. Assim um termo $-sx^h$ ficará na columna $(x-1)x^h$; e $x^h$ terá por coefficiente

$$(k+p+q\ldots\ldots)(x-1)-s,$$

sendo o coefficiente de $(x-1)$ a somma dos coefficientes positivos que precedem $s$.

Vê-se pois, que para dar a $x$ um valor tal que torne o coefficiente de $x^h$ sempre positivo, é necessario fazer

$$(k+p+q\ldots.)(x-1)\geqq s,$$

..

ou
$$x \begin{smallmatrix}=\\>\end{smallmatrix} 1 + \frac{s}{k+p+q+\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(M)}.$$

Fazendo o mesmo em todas as columnas, em que entrarem coefficientes negativos; e tomando, dentre todas as expressões (M) assim formadas, a maior d'ellas $l$: é manifesto que $x =$ ou $> l$, tornará todo o polynomio positivo; e que por conseguinte será $l$ o limite superior das raizes, visto que nem $l$, nem qualquer valor maior que $l$, podem reduzir $fx$ a zero. Logo:

*Para achar o limite superior das raizes da equação* $fx = 0$, *divida-se cada um dos coefficientes negativos de* $fx$, *incluindo os que multiplicam* $x^\circ$, *pela somma de todos os coefficientes positivos que o precedem; a maior das fracções que assim se obtiver, sommada com a unidade, será o limite pedido.*

Assim na equação $4x^5 - 8x^4 + 23x^3 + 105x^2 - 80x + 11 = 0$, temos as fracções $\frac{8}{4} = 2$, e $\frac{80}{4+23+105}$, das quaes a primeira, que é maior, mostra que todas as raizes são $< 2 + 1$ ou $3$.

Este methodo applica-se com vantagem, quando o 1.° termo negativo é precedido de muitos termos positivos, e os menores coefficientes negativos precedem os maiores.

Suppondo que $s$ é o maior coefficiente negativo do equação $fx = 0$, a expressão

$$1 + \frac{s}{k}$$

não será menor que a maior das expressões (M). Logo, se dividirmos toda a equação por $k$:

*O maior coefficiente negativo de uma equação* $fx = 0$, *tomado com o signal positivo, e augmentado com a unidade, é um limite superior das suas raizes.*

Esta expressão mais simples, e que se obtém immediatamente, torna-se preferivel quando se não pertende achar um limite baixo.

2.° METHODO Limitemos-nos ao 1.° termo, e aos termos negativos de $fx$, isto é, consideremos a expressão

$$x^n - Fx^{n-f} \pm Gx^{n-g} \pm Hx^{n-h} \pm \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Seja $\alpha$ um numero, que substituido por $x$, torne esta expressão positiva, ou

$$\alpha^n > F\alpha^{n-f} + G\alpha^{n-g} + H\alpha^{n-h} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ou, dividindo tudo por $\alpha^n$,

$$1 > \frac{F}{\alpha^f} + \frac{G}{\alpha^g} + \frac{H}{\alpha^h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

É claro que todo o numero $> \alpha$ satisfaz a esta condição; por conseguinte como nem $\alpha$, nem os numeros$>\alpha$ podem tornar $fx$ nullo, por isso que a parte positiva de $fx$, de que prescindimos, accresce a $\alpha^n$; podemos tirar a conclusão seguinte:

*Qualquer numero* l, *que substituido por* x, *tornar o* 1.° *termo de* fx *maior que a somma dos termos negativos, é limite superior.* (*)

---

(*) Alguns authores dizem, que para se obter o limite superior das raizes de uma equação, se deve achar para $x$ um numero $l$, que torne *o* 1.° *termo maior que a somma de todos os outros*, mas isto não é exacto. Com effeito, designando por P a somma dos termos positivos, e por N a dos negativos, se tivermos n'um caso

$$\alpha^n > P - N, \text{ ou } 1 > \frac{P-N}{\alpha^n},$$

não poderemos concluir, que esta relação terá logar para os numeros maiores que $\alpha$, em consequencia das compensações, que se podem dar entre os termos de P e de N. Com effeito na equação

$$x^4 + x^3 - 30x^2 - 2x + 168 = 0,$$

da qual são raizes os numeros 3 e 4, acha-se que o valor $x = 2,3$, que evidentemente não é limite superior, faz com tudo com que seja $x^4 >$ a somma dos outros termos, ou

$$(2,3)^4 = 27,9841 > 180,167 - 163,3.$$

Deduzamos da relação (2) um valor de $\alpha$. Entre os numeros

$$\sqrt[f]{F},\ \sqrt[g]{G},\ \sqrt[h]{H},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

existe um maior do que os outros. Supponhamos que é o 2.°, e representemol-o por $i$ ; será

$$\sqrt[g]{G}=i>\sqrt[f]{F}\ \text{e}>\sqrt[h]{H},\quad G=i^g,\ F<i^f,\ H<i^h.$$

Substituamos em (2) G por $i^g$, F por $i^f$, H por $i^h$; o 2.° membro ficará $> F\alpha^{n-f}+G\alpha^{n-g}+H\alpha^{n-h}$ ; e se tomarmos $\alpha^n$ maior que elle, subsistirá *a fortiori* a condição (2). Temos pois de satisfazer agora á condição

$$x^n>i^f x^{n-f}+i^g x^{n-g}+i^h x^{n-h}\ \ldots\ldots\ldots$$

Se ajunctarmos ao 2.° membro os termos que completam o polynomio, teremos outra condição, que involve as precedentes,

$$x^n>ix^{n-1}+i^2x^{n-2}+i^3x^{n-3}+\ldots\ldots+i^n,$$

ou
$$x^n>\left(i\frac{x^n-i^n}{x-i}=\frac{ix^n}{x-i}-\frac{i^{n+1}}{x-i}\right).$$

Contentando-nos com buscar os limites entre os numeros maiores que $i$, será $x>i$, e por conseguinte negativo o último termo $-\dfrac{i^{n+1}}{x-i}$. Supprimindo este termo, com o que se augmenta o 2.° membro, teremos nova condição, em que se involvem todas as precedentes, e será

$$x^n \geqq \frac{ix^n}{x-i},\ \text{ou}\ x-i \geqq i,\ \text{ou}\ x \geqq 2i,\ \text{isto é},\ x \geqq 2\sqrt[g]{G}.$$

Logo: *O dobro do maior numero que se achar, extrahindo de cada coefficiente negativo uma raiz do grão designado pelo numero dos termos precedentes, é um limite superior das raizes.*

Na equação $$x^4-2x^3-20x^2+3x-11=0$$

tomando $\sqrt[1]{2}$, $\sqrt[2]{20}$, $\sqrt[4]{11}$, como o 2.° d'estes numeros é o maior, e proximamente 5, será 10 um limite superior. Pelo 1.° theorema do methodo precedente achariamos $\frac{20}{1}+1=21$; e pelo 2.° achariamos tambem 21 para limite superior.

3.° Methodo. Faça-se $x=l+y$, sendo $l$ um numero qualquer positivo; a equação $fx=0$ tornar-se-ha (n.° 31)

$$fl+yf'l+\tfrac{1}{2}y^2f''l+\ldots\ldots\ldots+ky^n=0.$$

Ora, se acharmos para $l$ um valor tal, que torne $fl$, $f'l$; $f''l$, .... positivos, como todos os coefficientes da transformada ficam tendo os signaes tambem positivos, nenhum numero positivo que se substitua por $y$, lhe poderá satisfazer; e por conseguinte os valores reaes de $x$ correspondem aos valores negativos de $y=x-l$, devendo por isso ser $l>x$. Logo:

*Todo o numero, que substituido por* x *em* fx *e em todas as suas derivadas, der resultados positivos, é um limite superior de* x.

No último ex.° as derivadas são

$$4x^3-6x^2-40x+3,\ 12x^2-12x-40,\ 24x-12;$$

e ve-se, que $x=6$ torna todos estes polynomios positivos, e por conseguinte 6 é um limite superior, mais baixo que o achado precedentemente.

Cabe aqui observar, que, se mudarmos os signaes das potencias impares da transformada, isto é, se fizermos $x = l - y$, as raizes $x$ mudarão de signal, e se tornarão, de negativas que eram, em positivas. Logo: *Para transformar uma equação* $fx = 0$ *n'outra* $Fy = 0$, *que não tenha nenhuma raiz negativa, faremos* $x = l - y$, *sendo* $l$ *um limite superior das raizes* $x$.

37. Mudando $x$ em $-x$ em $fx = 0$, isto é, mudando os signaes das potencias impares, as raizes positivas tornar-se-hão negativas, e reciprocamente. Se buscarmos pois o novo limite superior $l'$, as raizes negativas de $fx = 0$ estarão entre $-l'$ e $0$, e as positivas entre $0$ e $l$. Por esta maneira se reconhece, que no nosso último exemplo todas as raizes estão comprehendidas entre $-4$ e $6$.

38. Fazendo $x = \frac{1}{z}$ em $fx = 0$, as maiores raizes de $z$ corresponderão ás menores de $x$. Se procurarmos pois o limite superior $h$ das raizes de $z$, teremos $z < h$, $x > \frac{1}{h}$. Será pois $\frac{1}{h}$ o *limite inferior das raizes positivas de* $x$.

Para obter $h$ podemos empregar qualquer dos methodos do n.° 36.

39. Seja $s$ o maior coefficiente de signal contrario ao do último termo da equação

$$kx^n + px^{n-1} + \ldots\ldots u = 0.$$

Fazendo-se $x = \frac{1}{z}$, esta equação se transforma em

$$uz^n + \ldots\ldots + pz + k = 0,$$

ficando sempre o signal de $s$ contrario ao de $u$. Será pois $1 + \frac{s}{u}$ o limite superior da transformada, ou $z < 1 + \frac{s}{u}$; e por conseguinte $x > \frac{u}{u+s}$. Logo, *acha-se immediatamente um limite inferior das raizes positivas d'uma equação, dividindo o seu último termo pela somma, que se obtem junctando este ultimo termo com o maior dos coefficientes de signal contário ao d'elle.*

Todas as raizes positivas de $fx$ estão pois comprehendidas entre $\frac{u}{u+s}$ e $l$.

Passando das raizes negativas para as positivas (n.° 37), podemos applicar depois a estas os dois theoremas precedentes, e obter assim o limite inferior das raizes negativas.

40. Supponhamos $fx$ ordenada segundo as potencias decrescentes de $x$,

$$fx = kx^n + px^{n-1} + \ldots.$$

Se o 1.° termo $kx^n$ é positivo, limitando-nos a elle, e aos termos negativos de $fx$, temos a expressão

$$kx^n - Fx^{n-f} - Gx^{n-g} \ldots = kx^n\left(1 - \frac{F}{kx^f} - \frac{G}{kx^g} - \ldots\right).$$

Ora já vimos que podemos obter um limite superior $l$ de $x$, que torne esta expressão positiva; e vê-se agora, que todo os numeros $>l$, substituidos por $x$, augmentarão o seu valor, e a conservarão sempre positiva, bem como a expressão $fx$, visto que os termos positivos de que prescindimos, accrescem a $kx^n$. Podemos pois obter resultados sempre crescentes e positivos.

Se o 1.° termo $kx^n$ for negativo, comparando-o com os termos positivos, acharemos do mesmo modo, que se podem obter resultados sempre crescentes e negativos.

Supponhamos agora $fx$ ordenada segundo as potencias ascendentes de $x$, ou

$$fx = u + tx \ldots\ldots px^{n-1} + kx^n.$$

Fazendo $x = \frac{1}{z}$ vem

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n}\left(uz^n + tuz^{n-1} + \ldots\ldots k\right).$$

O valor $z = l$, que dá ao resultado o signal de $u$, corresponde a $x = \frac{1}{l}$ que produz o mesmo effeito em $fx$. Logo:

*É sempre possivel achar valores de* x *taes que deem á expressão* $fx$ *o signal do 1.° termo, quer a serie seja crescente, quer seja decrescente.*

41. Concluiremos demonstrando um theorema muito importante, que já póde ter sido previsto, e de que teremos ainda de fazer uso.

*É sempre possivel dar a* x *uma serie de valores crescentes* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *tão proximos, que os valores que resultam para o polynomio* $fx$ *sejam tão vizinhos como se quizer, ou a sua differença menor que qualquer grandeza assignavel.*

Supponhamos primeiro, que em $fx$ entram sómente termos positivos, e que tendo-se dado a $x$ um valor $\alpha$, se muda depois $\alpha$ em $\alpha+i$. Subtrahindo o 1.° resultado do 2.° ,vem

$$f(\alpha+i)-f\alpha=i(f'\alpha+\tfrac{1}{2}if''\alpha+\text{etc.})$$

Para dar a $i$ um valor tal que torne esta differença menor que qualquer quantidade assignavel $h$, é necessario que seja

$$i(f'\alpha+\tfrac{1}{2}if''\alpha+\ldots\ldots)<h;$$

ou, fazendo $i=1$ dentro do parenthesis,

$$i(f'\alpha+\tfrac{1}{2}f''\alpha+\ldots\ldots)<h,$$

por isso que devendo suppor-se $i<1$, esta condição comprehende a antecedente. Vê-se pois que a condição póde ser preenchida, pondo, como é sempre possivel,

$$i=\frac{h}{<f'\alpha+\frac{1}{2}f''\alpha+\ldots\ldots}.$$

Tomando este valor $i$, e fazendo depois $x=(\alpha+i)+i'$, obteremos, pelo mesmo theor, um 3.° resultado que differirá do 2.° menos de $h$. E assim por diante.

No caso de $fx$ conter termos negativos, applicariamos o que acabâmos de dizer á reunião dos termos positivos; e como os termos negativos diminuem ainda mais a grandeza dos resultados, com mais forte razão differirão de uma quantidade menor que $h$.

Finalmente, se a somma dos termos negativos excedesse a dos positivos, teriamos então de applicar aos primeiros o raciocinio de cima.

## *Raizes Commensuraveis.*

42. *Se na equação*

$$fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots u = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

*todos os coefficientes forem inteiros, e* $k=1$, *não poderá haver raiz alguma fraccionaria.*

Com effeito, se fosse $x = \frac{a}{b}$, sendo $a$ e $b$ primos entre si, teriamos

$$\frac{a^n}{b^n} + \frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots \frac{ta}{b} + u = 0,$$

d'onde se deduziria

$$\frac{a^n}{b} = -\left(pa^{n-1} + qba^{n-2} + \ldots\ldots ub^{n-1}\right),$$

o que é absurdo, por quanto sendo o 1.º membro uma fracção irreductivel, não póde ser egual ao 2.º que é um numero inteiro.

Por conseguinte, quando fizermos $y = kx$, para desembaraçar a equação (1) do coefficiente $k$ (n.º 30, 2.º) sem que os outros coefficientes deixem de ser inteiros, $y$ não terá raizes fraccionarias.

Pelo que respeita ás raizes de $fx$, serão, ou deixarão de ser inteiras, conforme as raizes inteiras de $fy$ forem, ou não forem, multiplas de $k$. Por este modo a indagação das raizes fraccionarias de $x$ vem a depender da indagação das raizes inteiras da transformada em $y$.

**43.** Usando das mesmas notações do n.° 27, e em virtude do que ahi se disse, entre os coefficientes de $f(x)$, e os do quociente de $f(x)$ dividido por $x - a$, existem as relações seguintes:

$$A'_1 = A_1 + a A_0, A'_2 = A_2 + a A'_1, A'_3 = A_3 + a A'_2, \ldots R = A_n + a A'_{n-1}$$

das quaes se deduzem

$$-A_0 = \frac{A_1 - A'_1}{a}, -A'_1 = \frac{A_2 - A'_2}{a}, \ldots -A'_{n-2} = \frac{A_{n-1} - A'_{n-1}}{a},$$

$$-A'_{n-1} = \frac{A_n - R}{a}.$$

Se $a$ for uma raiz da equação, será $R = 0$, e n'esse caso podemos servir-nos das últimas equações para calcular successivamente, mas em ordem retrograda, os coefficientes $A'_{n-1}$, $A'_{n-2}, \ldots \ldots A'_1$, $A_0$. E como estes coefficientes resultaram da divisão de $fx$ por $x - a$, os seus valores serão numeros inteiros.

Do que acabâmos de dizer, deduzem-se os seguintes caracteres *para reconhecer, que um numero inteiro a é raiz de uma equação* $fx = 0$, *cujos coefficientes são inteiros. Este numero deve dividir:*

1.° *O último termo da equação.*

2.° *A somma que se obtem, junctando ao quociente d'esta divisão o coefficiente da 1.ª potencia da incognita.*

3.° *A somma resultante do quociente d'esta 2.ª divisão, mais do coefficiente da 2.ª potencia da incognita.*

*E finalmente a somma de cada um dos coefficientes da proposta, mais o último quociente obtido na divisão precedente.*

Segundo se vê nas expressões de cima, estes quocientes são, com signaes contrários, os coefficientes successivos do quociente de $fx$ dividida por $x - a$; e o último d'estes quocientes é $- A_0$.

Se estas condições, a que deve satisfazer toda a raiz inteira de $fx = 0$, se derem a respeito de um numero qualquer $a$, este numero será raiz da equação: por quanto buscando o quociente de $fx$ dividida por $x - a$, pelo processo do n.° 27, acham-se reproduzidos os coefficientes $A'_1$, $A'_2$, .. $A_{n-1}$, e chega-se a um resto nullo.

44. Procederemos da maneira seguinte para obter as raizes inteiras de $fx = 0$.

*Calculem-se os limites das raizes positivas e negativas d'esta equação; procurem-se depois os divisores do ultimo termo, e escrevam-se em linha horizontal aquelles d'estes divisores, tanto positivos como negativos, que forem comprehendidos entre estes limites respectivos; escrevam-se por baixo, e tambem em linha horizontal, os quocientes: sujeitem-se estes quocientes ás provas prescriptas nas equações de cima: se algum destes divisores conduzir a algum quociente fraccionario, rejeite-se, por que não póde ser raiz.*

Como o divisor $\pm 1$ do último termo, dá quocientes sempre inteiros, é necessario chegar até ao último termo para ver se $\pm 1$ póde ser raiz. É porém mais simples substituir $\pm 1$ na proposta, segundo o processo da pag. 52.

Sirva para 1.º ex.º a equação

$$2x^5 + 3x^4 - 31x^3 + 3x^2 - 43x + 210 = 0,$$

na qual o último termo $210 = 2.3.5.7.$ tem por divisores

$$\pm(1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, \ldots\ldots).$$

Como $+7$ e $-8$ são os limites das raizes da equação, rejeitaremos todos os divisores que estão fóra d'estes limites, bem como $\pm 1$, que immediatamente se vê que não póde convir. Dispõe-se depois o cálculo pela fórma abaixo indicada. Marcaram-se com o signal » os divisores que não satisfazem; e julgou-se desnecessario escrever as somas e differenças, que dão os dividendos. E designaram-se por $t'$, $s'$, $q'$, $p'$, .. $k$ os coefficientes $A'_n$, $A'_{n-1}$, $A'_{n-2}$, ...... $A_0$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a =$ | 2 | 3 | 5 | 6 | −2 | −3 | −5 | −6 | −7 |
| $-t' =$ | 105 | 70 | 42 | 35 | −105 | −70 | −42 | −35 | −30 |
| $(-43 - t') : a = -s' =$ | 31 | 9 | » | » | +74 | » | +17 | +13 | » |
| $(+3 - s') : a = -q' =$ | 17 | 4 | | | » | | −4 | » | |
| $(-31 - q') : a = -p' =$ | −7 | −9 | | | | | +7 | | |
| $(+3 - p') : a = -k =$ | −2 | −2 | | | | | −2 | | |

A proposta tem pois sómente tres raizes inteiras $+2$, $+3$, $-5$. O quociente da divisão por $x-2$ tem por coefficientes os numeros collocados por baixo do divisor 2, isto é,

$$2x^4+7x^3-17x^2-31x-105.$$

Esta expressão dividida por $x-3$, dá

$$2x^3+13x^2+22x-35.$$

E finalmente esta última, dividida por $x+5$, dá

$$2x^2+3x+7.$$

E são estes os tres factores da proposta

Eis aqui mais dous exemplos:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x^3+3x^2-8x+10=0$ | | | | $8x^3-7x^2-63x+36=0$ | | | | | | | |
| $a=$ | 2 | $-2$ | $-5$ | $-10$ | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | $-2$ | $-3$ | $-4$ |
| $-t'=$ | 5 | $-5$ | $-2$ | $-1$ ... | 4 | 6 | 9 | 12 | 18 | $-18$ | $-12$ | $-9$ |
| $-s'=$ | » | » | 2 | » ... | » | » | » | $-17$ | » | » | $+25$ | 18 |
| $-k=$ | ...... | ...... | $-1$ | ........ | » | ...... | ...... | $-8$ | ...... | ...... | » | » |

Na 1.ª equação o factor $x+5$ dá o quociente $x^2-2x+2$.

Na 2.ª só se experimentam os divisores de 36 que estão entre os limites $-5$ e $+10$; o divisor é $x-3$, e o quociente $8x^2+17x-12$.

Podem resolver-se por este methodo os seguintes problemas.

I. Pede-se um numero N com tres algarismos $x$, $y$, $z$, taes que: 1.° o seu producto seja 54; 2.° que o algarismo do meio seja $\frac{1}{6}$ da somma dos outros dous; 3.° finalmente, que diminuindo 594 do numero N, o resto seja expresso pelos mesmos algarismos em ordem inversa.

Como $$N=100x+10y+z,$$

temos $$xyz=54,\ 6y=x+z,\ 100z+10y+x=N-594.$$

A 3.ª equação reduz-se a $x - z = 6$; eliminando $y$ das duas 1.ªˢ vem $x^2z + xz^2 = 324$; e finalmente, pondo $z + 6$ em lugar de $x$, apparece $z^3 + 9z^2 + 18z = 162$. Ora $x$, $y$, $z$, são numeros inteiros, e pelo methodo exposto acha-se $z = 3$, d'onde se deduz $x = 9$, $y = 2$, e $N = 923$.

II. Qual é a base $x$ do systema de numeração no qual o numero 538 é expresso pelos caracteres (4123)?

É necessario achar a raiz inteira e positiva da equação

$$4x^3 + 1x^2 + 2x + 3 = 538;$$

esta raiz é $x = 5$. Vej. *Not.* 1.ª *da Arith.* pag. 267.

Em geral, se A for expresso por $n$ algarismos $a, b, c, \ldots\ldots i$, a base $x$ do systema é dada pela equação

$$ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \ldots = A - i,$$

equação que só tem, como se verá, uma raiz positiva, a qual deve ser inteira, e $> a, b, c \ldots\ldots i$.

45. Quando o último termo tem muitos divisores, comprehendidos entre os limites das raizes, o cálculo torna-se longo; póde porém abbreviar-se pelo seguinte meio.

Se $a$ é raiz inteira da equação $fx = 0$, cujos coefficientes se suppõe inteiros, o quociente Q de $fx$ por $x - a$ será tambem inteiro, qualquer que seja $x$. Se pois tomarmos por $x$ um inteiro qualquer $\alpha$, deverá ser $\dfrac{f\alpha}{\alpha - a} =$ inteiro.

Podemos pois reconhecer, se um dos divisores $a$ do último termo é, ou não, raiz inteira da equação, tomando a differença entre $\alpha$ e este divisor, e vendo depois se esta differença divide, ou não, $f\alpha$, isto é, o numero que resulta de substituição de $\alpha$ por $x$ em $fx$. Todo o divisor que não satisfazer á condição exigida deverá excluir-se, e sómente se applicará o processo geral aos outros divisores do último termo, d'entre os quaes se podem ainda fazer novas exclusões, tomando outro numero $\alpha$.

Ora, como o methodo exposto exige, que se faça $x = \pm 1$ em $fx$, para verificar se $\pm 1$ são raizes da equação, podemos approveitar os valores $f(\pm 1)$, vindo n'este caso a tomar $\alpha = \pm 1$.

Assim no 1.° ex.° do n.° 44, experimentemos os 9 divisores, que ficaram comprehendidos entre os limites das raizes ; fazendo $x = \alpha = 1$,

vem $$f(+1) = 144,$$ e

$$\alpha - a = 1-2\,,\ 1-3\,,\ 1-5,\ 1-6,\ 1+2,\ 1+3\,,\ 1+5,\ 1+6,\ 1+7,$$

e como $$1-2\,,\ 1-3,\ 1-5\,,\ 1+2\,,\ 1+3,\ 1+5,$$

são os unicos divisores de 144, concluiremos que dentre os 9 divisores, só podem ser raizes da equação os 6 seguintes

$$2,\ 3\,,\ 5\,,-2,-3\,,-5.$$

46. Procuremos agora *os factores commensuraveis do 2.° grão* da equação $fx = 0$.

Sendo $$x^2 + px + q$$
um dos factores; e
$$x^{n-2} + p'x^{n-3} + q'x^{n-4} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
o quociente resultante da divisão de $fx$ por este factor: teremos a equação identica
$$fx = (x^2 + px + q)\,(x^{n-2} + p'x^{n-3} + q'x^{n-4} + \dots\dots\dots\dots),$$
na qual, além de $p$ e $q$, ha mais $n-2$ coefficientes desconhecidos.

Executando a multiplicação, e egualando os coefficientes das mesmas potencias de $x$ nos dous membros, como no n.° 27., teremos $n$ equações; das quaes eliminando os $n-2$ coefficientes $p', q', \dots\dots$, restarão duas equações entre $p$ e $q$; e depois só uma em $p$ ou $q$, a qual deverá ser do grão $\frac{1}{2}n\,(n-1)$, numero das $n$ combinações 2 a 2 dos factores binomios do 1.° grão.

Se $fx$ tiver factores racionaes do 2.° grão, a última equação em $p$ ou $q$ terá pelo menos uma raiz commensuravel. N'este caso, conhecido um valor de $p$ ou $q$, uma das equações entre $p$ e $q$ dará $q$, ou $p$, e viremos por fim a conhecer $x^2 + px + q$.

Por ex.°, a equação

$$x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q'),$$

dá

$$p + p' = 0\,,\ q + pp' + q' = -3\,,\ p'q + pq' = -12\,,\ qq' = 5.$$

As duas primeiras equações dão os valores de $p'$ e $q'$, os quaes substituidos nas outras duas, conduzem ás equações, entre $p$ e $q$,

$$2pq + 3p - p^3 = 12\,,\ q^2 + q(3 - p^2) + 5 = 0,$$

das quaes eliminando $q$, vem

$$p^6 - 6p^4 - 11p^2 = 144,$$

que dá

$$p = 3\,, -3;\ \text{e depois}\ q = 5\,,\ 1;$$

vindo a obter-se por este modo os factores

$$(x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 1).$$

## *Raizes eguaes.*

47. Quando o polynomio $fx$ tem $p$ factores eguaes a $x - a$; $q$ eguaes a $x - b$; ......: toma a fórma

$$fx = (x - a)^p (x - b)^q \ldots (x - k)(x - l)\,, \ldots \quad \text{(A)}$$

e n'este caso diz-se que a equação $fx = 0$ tem $p$ raizes eguaes a $a$, $q$ eguaes a $b$, ......

Dada uma equação $fx = 0$, vejamos a maneira de reconhecer, se tem raizes eguaes, isto é, se póde tomar a fórma (A).

Suppondo primeiro $p = q = \ldots = 1$: como a equação (A) é identica, podemos em ambos os membros substituir por $x$, $x+y$; o que dá, desenvolvendo o 1.° membro (n.° 31),

$$fx+yf'x+\tfrac{1}{2}y^2f''x\ldots=(y+x-a)\,(y+x-b)\,(y+x-c)\ldots$$

N.° 1.° membro, as derivadas successivas $f'x$, $f''x$, .... são polynomios conhecidos.

No 2.° membro, os factores podem considerar-se como binomios, dos quaes $y$ é a primeira parte em todos elles; e as 2.as partes são sucessivamente $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..... O producto d'estes factores, assim considerados, terá pois a fórma indicada na *Alg. El.* n.° 104, V, e conseguintemente:

O coefficiente de $y^{n-1}$ será a somma de todas as 2.as partes $x-a$, $x-b$, $x-c$, ......

O coefficiente de $y^{n-2}$ será a somma dos productos d'estas 2.as partes 2 a 2.

O coefficiente de $y^{n-3}$ será a somma dos productos das mesmas 2.as partes 3 a 3.

E assim por diante.

Logo:

1.° $fx$, coefficiente de $y^0$, é o producto de todos estes $n$ binomios, ou a expressão (A).

2.° $f'x$, coefficiente de $y^{n-(n-1)}$, é a somma dos seus productos $n-1$ a $n-1$, os quaes se formam supprimindo successivamente, no producto (A), cada um dos factores binomios, e sommando todos os re-resultados.

3.° $f''x$, é a somma dos productos $n-2$ a $n-2$, etc.

Posto isto, como suppuzemos $p=1$, terá $fx$ um factor unico egual $x-a$.

E $f'x$ conterá tambem este factor em todos os termos, menos um; e por isso, se designarmos por Q e R polynomios não divisiveis por $x-a$, será

$$f'x=(x-a)Q+R;$$

d'onde se vê que $f'x$ não é divisivel por $x-a$.

O mesmo diremos dos outros factores desiguaes de $fx$; e por conseguinte:

*Se o polynomio* $fx$ *não tem factores eguaes*, $fx$ *e* $f'x$ *não terão divisor commum.*

48. Suppouhamos agora, que (A) contém factores de fórma $(x-a)^p$, sendo $p>1$. Para formar $f'x$, será necessario supprimir primeiramente cada um dos factores $x-a$, d'onde resultarão $p$ termos eguaes, que terão todos por factores $(x-a)^{p-1}$. Depois de ommittidos todos estes factores, será ainda necessario ír ommittindo sucessivamente os outros factores $x-b$, $x-c$..; e os termos resultantes terão todos por factor $(x-a)^p$. Assim terá $f'x$ a fórma

$$p(x-a)^{p-1}P'+(x-a)^pQ',$$

sendo $P'$ e $Q'$ expressões não divisiveis por $x-a$.

O mesmo diremos dos outros factores eguaes, e por conseguinte:

*Se* $fx$ *tem factores eguaes*, $fx$ *e* $f'x$ *terão um divisor commum, que é o producto de todos os factores eguaes de* $fx$, *elevado cada um a uma potencia menor de uma unidade.*

49. Sendo pois dada uma equação $fx=0$, formaremos a sua derivada $f'x$, e procederemos á indagação do maior divisor commum entre $fx$ e $f'x$. Se o não houver, concluiremos que a proposta não tem raizes eguaes. Se porém apparecer um divisor commum F, a proposta terá raizes eguaes; e o divisor, posto que appareça debaixo da fórma de um polynomio, poderá tomar a fórma

$$F=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}\ldots\ldots$$

Dividindo $fx$ por F, o quociente Q será composto de todos os factores de $fx$, desembaraçados dos expoentes, ou

$$Q=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots\ldots$$

50. *Todas as vezes que* $fx=0$ *tiver raizes eguaes, podemos fazer depender a sua resolução da de uma serie de equações, das quaes a primeira só admitte as raizes simples da proposta; a segunda as raizes duplas* (isto é, as raizes que entram duas vezes); *a terceira as raizes triplas*, etc.: e isto pelo processo seguinte.

Sejam $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...... os productos dos factores binomios, que entram em $fx=0$ com os expoentes $1, 2, 3 \ldots\ldots$; sendo assim

$$fx=\alpha^1.\beta^2.\gamma^3.\delta^4 \ldots\ldots\ldots$$

Designemos por F o maior divisor commum entre $fx$ e $f'x$; por G o de F e F'; por H o de G e G' etc.; e por $p, q, r, s, t.$ os quocientes exactos successivos de cada um dos divisores communs pelo seguinte. Teremos o quadro seguinte, no qual suppomos que 5 é o maior numero de vezes que a mesma raiz entra na proposta, ou que a equação $I=0$ só tem raizes simples.

$$\left.\begin{array}{l} fx=\alpha^1.\beta^2.\gamma^3.\delta^4.\varepsilon^5.\text{etc.} \\ F=\quad \beta.\gamma^2.\delta^3.\varepsilon^4.\text{etc.} \\ G=\quad \gamma.\delta^2.\varepsilon^3.\text{etc.} \\ H=\quad \delta.\varepsilon^2.\ldots \\ I=\quad \varepsilon.\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} q=\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon \\ r=\beta.\gamma.\delta.\varepsilon \\ s=\gamma.\delta.\varepsilon \\ t=\delta.\varepsilon \\ u=\varepsilon \end{array} \left\} \begin{array}{l} \frac{q}{r}=\alpha=0. \\ \frac{r}{s}=\beta=0. \\ \frac{s}{t}=\gamma=0. \\ \frac{t}{u}=\delta=0. \\ \frac{u}{I}=\varepsilon=0. \end{array}\right.$$

D'onde se vê, que por meio de tres systemas de operações, a saber: uma serie d'operações do maior divisor commum, e duas series de divisões, se consegue separar successivamente os factores $\alpha.\ \beta, \gamma, \ldots.$, que sendo egualados successivamente a zero, dão, o primeiro as raizes simples, o segundo as raizes duplas, etc.

Se na proposta faltar algum dos factores, que suppuzemos, $\beta$ por ex.°, basta suppor $\beta=1$, d'onde resulta então $s=r$, e $\frac{r}{s}=1$, caracter por onde se reconhece a auzencia, em $fx$, do factor da ordem correspondente áquelle que este quociente é destinado a dar.

Cumpre ainda advertir que o grão de $\alpha=0$ exprime o numero das raizes simples da proposta; o grão de $\beta=0$, o numero das raizes duplas; o de $\gamma=0$ o das triplas, etc.; e a resolução completa d'estas equações faz conhecer as differentes especies de raizes simples, duplas, triplas, etc.

Applicações d'esta theoria (*).

I. Para a equação

$$fx = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0,$$

cuja derivada é

$$f'x = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12 = 0,$$

---

(*) Para abbreviar o calculo do divisor commum, póde servir a regra seguinte, pela qual se obtem immediatamente *o resto da divisão de* f'x *por* fx- *Multipliquem-se os coefficientes de* fx, *a contar do* 3.°, *por* 2, 3, 4 .... *vezes o coefficiente do* 1.° *termo de* f'x: *multipliquem-se os coefficientes de* f'x, *a contar do* 2.°, *pelo coefficiente do* 2.° *termo de* fx: *diminuam-se estes productos, pela sua ordem*, 2 *a* 2. Obter-se-ha assim os coefficientes do resto do gráo $m-2$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Por ex.° ........................ | $fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4$ | | | | |
| coefficientes de $f'x$ | $+5$ | $-4$ | $+12$ | $-8$ | $+4$ |
| producto dos coefficientes de $fx$ por 10, 15, 20, 25 ...... | | $+40$ | $-60$ | $+80$ | $-100$ |
| producto dos coefficientes de $fx'$ por $-1$ | | $+4$ | $-12$ | $+8$ | $-4$ |
| differença ................ | | $+36$ | $-48$ | $+72$ | $-96$ |
| resto da divisão, supprimindo o factor 12, | | $3x^3$ | $-4x^2$ | $+6x$ | $-8$ |

Quando $fx$ não tem segundo termo, a parte snbtractiva é nulla, e a regra reduz-se a multiplicar os coefficientes de $fx$ por 2, 3, 4, .... Por ex.°

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $fx = 3x^4 + 0 \cdot x^3 - 35x^2 + 44x + 4$ | | | |
| coefficiente de $fx' =$ | $+12$ | $+0$ | $-70$ | $+44$ |
| producto dos coefficientes de $fx$ por 2, 3, 4 | | $-70$ | $+132$ | $+16$ |
| resto da divisão, supprimindo o factor 2, | | $35x^2$ | $-66x$ | $-8.$ |

Acabando a operação, achar-se-ha o divisor commum $x-2$, e a proposta $= (x-2)^2 (3x^2 + 12x + 1)$.

Para demonstrar esta regra, effectue-se a divisão de $kx^m + px^{m-1} + qx^{m-2}$ pela sua derivada $mkx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \ldots.$, depois de se haver introduzido o factor $m^2k$ no dividendo, a fim de se obter um quociente inteiro. O resto, da ordem $x^{m-2}$, é

$$x^{m-2}[2mkq - p(m-1)p] + x^{m-3}[3mkr - p(m-2)q] + \ldots\ldots$$

(Veja-se a nota a pag. 87.)

temos, formando o quadro

$$
\begin{array}{l}
fx = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 \\
F = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \ldots \\
G = x^2 + 2x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\
H = x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
I = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\left\}
\begin{array}{l}
q = x^2 - x - 2 \\
r = x^2 - x - 2 \\
s = x + 1 \\
t = x + 1
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\dfrac{q}{r} = \alpha = 1, \\
\dfrac{r}{s} = \beta = x - 2, \\
\dfrac{s}{t} = \gamma = 1, \\
\dfrac{t}{1} = \delta = x + 1.
\end{array}
$$

Logo: $$fx = (x-2)^2 (x+1)^4.$$

II. Para
$$fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4,$$
acharemos pelo mesmo processo
$$fx = (x-1)(x^2+2)^2.$$

III. Para
$$fx = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9,$$
acharemos
$$fx = (x+1)(x+3)^2(x-1)^3.$$

51. Para verificar se uma raiz inteira $a$ é dupla, tripla, quadrupla, etc. basta ensaiar muitas vezes successivas a divisão por $x - a$, segundo o processo da pag. 51. Porém sómente se tentará o cálculo, quando os coefficientes tomados em ordem retrogada forem divisiveis por $a^i$, $a^{i-1}$,

$a^{i-2}, \ldots\ldots$ sendo $i$ o expoente de $x-a$ em $fx$. A razão disto é, por que $a^i$ deve ser divisor do último termo de $fx$; $a^{i-1}$ do último termo da derivada $f'x$, ou do penultimo de $fxa$; $^{i-2}$ do último em $f''x$, ou do antepenultimo em $fx$; etc.

## *Eliminação.*

52. Sejam A, B, ......, $a$, $b$, ...... funcções de $y$, e

$$Z = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots, \quad T = ax^n + bx^{n-1} + \ldots\ldots$$

dous polynomios, que contém sómente potencias inteiras e positivas de $x$ e $y$, e que tratâmos de tornar nullas por meio de systemas conjugados de valores de $x$ e $y$.

Se fosse conhecido um dos valores convenientes de $y$, $y = \beta$, substituindo-o nas equações propostas, estas não teriam outra incognita, além de $x$, e seriam satisfeitas por um mesmo valor $x = \alpha$: logo os polynomios Z e T seriam divisiveis por $x - \alpha$, e teriam conseguintemente um divisor commum D funcção de $x$. Achado este divisor commum, a equação $D = 0$ dá os valores de $x$ que combinados com $y = \beta$, satisfazem ás equações $Z = 0$, $T = 0$. Se não houver divisor commum, o valor $y = \beta$ não poderá satisfazer ás propostas.

Teremos pois de buscar o maior divisor commum entre Z e T (*Alg. El.* n.° 109.), como se $y$ fosse conhecido, levando o cálculo até se obter um resto final Y, que só contenha $y$. As raizes da equação $Y = 0$, por introduzirem a condição de haver um divisor commum D entre Z e T, darão todos os valores de $y$, que podem satifazer á proposta; e a equação $D = 0$ fará conhecer depois os valores de $x$, que se conjugam successivamente com os de $y$ para o mesmo fim.

Suppondo pois que é $m =$ ou $> n$, divida-se Z por T, depois de multiplicar, se for necessario para evitar fracções (*Alg. El.* n.° 109.), Z por um factor M, que torne AM divisivel por $a$ (*), funcção em geral de $y$. Desi-

(*) Se os gráos $m$ e $n$ forem eguaes, M será $= a$, ou sómente o factor de $a$ que não entra em A (Arith. n.° 39). Se $m = n + 1$, M será o quadrado de $a$, gnando por Q e R o quociente inteiro e o resto, ambos funcções de $x$ e $y$, virá

$$MZ = QT + R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Esta equação é *identica*, sem quebrados nem irracionalidades, e por conseguinte tem logar para todos e quaesquer valores que se substituam por $x$ e $y$. Supponhamos que os valores $x = \alpha$, $y = \beta$, são os convenites para tornar Z e T nullos: n'este caso, tambem R o será, e teremos

$$R = 0, \; T = 0.$$

E se os dous numeros substituidos por $x$ e $y$ em R e T tornarem estes polynomios nullos, será então $MZ = 0$, isto é, ou $M = 0$, ou $Z = 0$.

Por conseguinte as soluções do systema $T = 0$, $R = 0$, convém tanto a $Z = 0$ com $T = 0$, como a $M = 0$ com $T = 0$; e reciprocamente Logo:

se em logar das equações...... $Z = 0$, $T = 0$,

lançarmos mão das equações... $T = 0$, $R = 0$,

obteremos todos os systemas conjugados de valores pedidos, e além disso *outras soluções estranhas á questão*, que dão $M = 0$ e $T = 0$. E posto que o problema não admitta estas soluções estranhas, torna-se comtudo por este modo mais simples, por que o grão de R é menor que $n$.

---

ou d'este factor. Se $m = n + 2$, M será o cubo, e assim por diante. D'este modo evitâmos o estar a multiplicar continuamente de novo os restos parciaes, e obtem-se um ultimo resto, em que $x$ está elevado quando muito ao grão $n - 1$. Assim no caso de ser $m = n + 1$, e $M = a^2$, o quociente é

$$Q = Aax + (aB - Ab) = a\,(Ax + B) - Ab.$$

Compondo directamente esta expressão do quociente, multiplicando-a por T, e subtraindo-a de $a^2Z$, desapparecem os dous primeiros termos, e vem logo o resto R.

Quando T não tem 2.° termo, ou quando $a$ é factor d'este termo, a regra simplifica-se, porque então basta multiplicar Z por $a$, em vez de $a^2$, sendo $m = n + 1$.

Continuando o cálculo do divisor commum de Z por T, e designando, pela mesma fórma, por $M'$, $M''$.... os factores proprios para tornar possiveis as divisões parciaes sucessivas; e por $Q'$, $Q''$, .... e $R'$, $R''$,.. os quocientes successivos e restos correspondentes: obteremos as indentidades

$$M'T = Q'R + R',\ M''R = Q''R' + R'',\ M'''R' = Q'''R'' + R''',\ \ldots$$

das quaes se conclue, como acima, que:

se em logar das equações $T=0$ e $R=0$, $R=0$ e $R'=0$, $R'=0$ e $R''=0$,..

lançarmos mão das equações $R=0$ e $R'=0$, $R'=0$e$R''=0$, $R''=0$e$R'''=0$, obteremos todos os systemas conjugados dos valores pedidos, e além disso as outras soluções extranhas.

Como o gráo de $x$ se vae abaixando gradualmente, chegar-se-ha a um *resto final* Y, em que não entrará $x$. Sendo pois $mV$ o dividendo, e D o divisor, que em geral é do 1.° gráo em $x$, teremos

$$mV = Dq + Y, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

donde se deduzem as equações

$$D = 0,\ Y = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

que encerram todas as soluções pedidas, e além d'estas as que tornam nullos os factores introduzidos conjunctamente com os divisores correspondentes, i. é, M com T, $M'$ com R, $M''$ com $R'$,...... As raizes da equação $Y=0$, em que só entra a incognita Y, substituidas em $D=0$, farão conhecer os valores de $x$ que satisfazem ás propostas; sendo porém necessario desembaraçar primeiramente Y das raizes extranhas, pelo modo que adiante diremos.

I. Ex.° Sejam as equações

$$2x^2 - y^2 + 1 = 0,\ x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0.$$

Dividindo a 1.ª pela 2.ª, o quociente é 2; e o resto, desembaraçado do factor 3, é

$$D=2xy-y^2-3.$$

Multiplicando o divisor por $4y^2$, e dividindo por D, o quociente é

$$2xy-5y^2+3;$$

e o resto é

$$Y=-y^4+8y^2+9=0.$$

Para resolver esta equação faça-se $y^2=z$, e será $z^2-8z=9$, d'onde se deduz $z=9$ e $z=-1$; e por conseguinte $y=\pm 3$, e $y=\pm\sqrt{-1}$. Finalmente, substituindo em $D=0$, teremos para $x$ os valores correspondentes

$$x=\pm 2,\ x=\mp\sqrt{-1}.$$

II. Ex.º Sejam as equações

$$x^2+2xy-3y^2+1=0,\ x^2-y^2=0.$$

Procedendo do mesmo modo, acha-se

$$D=2xy-2y^2+1,\ Y=4y^2-1;$$

logo $$y=-x=\pm\tfrac{1}{2}.$$

Em geral, todas as vezes que P, Q, $p$, $q$, forem funcções de $y$, as equações

$$x^2+Px+Q=0,\ x^2+px+q=0,$$

dão

$$(P-p)x+Q-q=0,\ (Q-q)^2+q(P-p)^2=p(Q-q)(P-p).$$

III. Ex.° Sejam

$$x^3+x^2-xy^2-y^2=0\,,\ 2x^2-x(4y-1)-2y^2+y=0.$$

O 1.° resto é

$$D=(16y^2-2y-1)x+8y^3-6y^2-y\,;$$

multiplicando o divisor por $(16y^2-2y-1)$, e dividindo por D, chegaremos ao resto

$$Y=32y^3\,(4y^3-12y^2+3y+1)=0\,,$$

do qual se tira primeiramente $y=0$ e $y=\frac{1}{2}$ (n.° 42); e, abaixando depois o gráo da equação, $y=\frac{1}{4}\,(5\pm\sqrt{33})$. Finalmente, substituindo em $D=0$, obteremos os valores correspondentes $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$, $x=-1$.

53. Na applicação do methodo do divisor commum ao processo da eliminação das equações cumpre fazer as observações seguintes:

1.° Se for Z o producto de dois factores, i. é, $Z=P\times Q$, como Z não póde ser nullo sem que P ou Q o sejam (n.° 28) o problema divide-se em dous:

$$P=0 \text{ com } T=0\,,\ \ Q=0 \text{ como } T=0.$$

Estes dous systemas encerram todas as soluções pedidas, e são mais simples que a proposta.

E se Z e T se puderem decompor em diversos factores, o problema se dividirá em outros tantos, quantas forem as combinações possiveis dos factores de Z com os de T.

Por ex.°, as equações

$$x^2-2yx-3y^2+y=0\,,\ x^2-y^2=0\,,$$

como $x^2-y^2=(x-y)\,(x+y)$, decompõe-se nos dous systemas

$$x-y=0 \text{ com a } 1.^{a}, \text{ e } x+y=0 \text{ com a } 1.^{a},$$

dos quaes o 1.° dá $y=x$, e depois $x=0$, $x=\frac{1}{4}$; e o 2.° dá $y=-x=0$.

2.° Na hypothese do caso precedente, póde acontecer que P contenha só $y$; e nesse caso deve P dividir cada um dos coefficientes das potencias de $x$ em Z (*Alg. El.* n.° 109, III.) E como uma parte das soluções será dada então pela combinação de P=0 com T=0, e a outra parte por Q=0 com T=0, segue-se; que *não podemos n'este caso supprimir, como no processo do divisor commum, os factores, que só contiverem* $y$; ou antes, que podemos supprimil-os, tractando-os separadamente.

Por ex.°, nas equações

$$x^2+x(y-3)+y^2-3y+2=0,\ x^2-2x+y^2-y=0,$$

chega-se ao resto $(y-1)(x-2)$. Antes de passar á segunda divisão, supprimir-se-ha o factor $y-1$, suppondo porém $y=1$, o que dá $x=0$ e $x=2$. Continuando depois o cálculo com o resto $x-2$, obter-se-ha o resto final $y^2-y=0$, que dá $y=0$ e $y=1$, correspondentes a $x=2$.

3.° Antes de procedermos á multiplicação de um dividendo por algum dos factores M, M′, M″, ...... devemos verificar primeiro, pelo methodo dos divisores communs, se o divisor tem por factor de todos os seus termos M, M′, ...... ou os seus divisores; por que em tal caso deveria supprimir-se esse factor do divisor, e tractal-o separadamente, como nos casos precedentes.

Por ex.°, nas equações

$$x^3-x^2y+x(y-6)+y^2-4=0,\ x^2-xy-4=0,$$

obtem-se na primeira divisão o quociente $x$, e o resto $x(y-2)+y^2-4$, o qual tem $y-2$ por factor. Devemos então pôr $y=2$ no divisor, que se torna em $x^2-2x-4$, e dá $x=1\pm\sqrt{5}$. E continuando o cálculo com o outro factor, chega-se á equação final $y^2+3y=0$, donde se tira $y=0$ e $y=-3$, correspondentes a $x=-2$ e $x=1$.