logo $$z^m - z'^m = 2\sqrt{-1}.\text{sen } mC.$$

Substituindo, e supprimindo o factor commum $2\sqrt{-1}$, resulta

$$B = \frac{b}{a}\text{ sen } C + \frac{b^2}{2a^2}\text{ sen } 2C + \frac{b^3}{3a^3}\text{ sen } 3C + \ldots$$

A equação $c^2 = a^2 - 2ab \cos C + b^2 = a^2 - ab(z + z') + b^2$ reduz-se a

$$c^2 = (a - bz)(a - bz'),\text{ por ser } zz' = 1.$$

Tomando os log. vem

$$2 \log. c = 2 \log. a - M\left[\frac{b}{a}(z + z') + \frac{b^2}{2a^2}(z^2 + z'^2)\ldots\right];$$

e como temos $$z^m + z'^m = 2 \cos mC,$$

será $$\log c = \log a - M\left(\frac{b}{a}\cos C + \frac{b^2}{2a^2}\cos 2C + \frac{b^3}{3a^3}\cos 3C\ldots\right).$$

Estas duas series servem para resolver um triangulo, em que b é muito pequeno comparativamente com a, e *são conhecidos os dous lados* a e b, *e o angulo comprehendido* C.

159. A equação (I) dá, tomando os log. neperianos,

$$\pm x\sqrt{-1} = l(\cos x \pm \sqrt{1}.\text{sen } x):$$

subtrahindo estas duas equações uma da outra, vem

$$2x\sqrt{-1} = l\frac{\cos x + \sqrt{-1}\text{ sen } x}{\cos x - \sqrt{-1}\text{ sen } x} = l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}.\text{tang } x}{1 - \sqrt{-1}.\text{tang } x}\right),$$

por ser sen $x = \cos x$ tang x. Porém pela fórmula (E) p. 279 podemos achar o desinvolvimento deste log.; e supprimindo o factor commum $2\sqrt{-1}$, temos por expressão de arc. x, conhecida a tang.,

$$x = \text{tang}\, x - \tfrac{1}{3}\, \text{tang}^3\, x + \tfrac{1}{5}\, \text{tang}^5\, x - \tfrac{1}{7}\, \text{tang}^7\, x \ldots \text{(N)}$$

O arco x, cuja tang. é t, e o raio r, é (*Geom. Anal.* n.° 168)

$$x = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \ldots.$$

Esta fórmula serve para achar *a relação* π *da circumferencia para o diametro.* Dous arcos x e x', cujas tang. são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, tem por tang. de sua somma, tang. $(x + x') = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$; por tanto esta somma é $x + x' = 45°$.

Se na equação (N) fizermos tang. $x = \frac{1}{2}$, tang. $x' = \frac{1}{3}$, e sommarmos, obteremos o comprimento do arco de 45°, que é o quarto de semicircumferencia π do circulo cujo raio é 1:

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \ldots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \ldots\ldots$$

Segundo o processo de Machin obtem-se series mais convergentes, Tome-se o arco x cuja tang. é $\frac{1}{5}$, será *Geom. Anal.* (L. n.° 205)

$$\text{tang}\, 2x = \frac{2\, \text{tang}\, x}{1 - \text{tang}^2\, x} = \frac{5}{12},\ \text{tang}\, 4x = \frac{\dfrac{5}{2 \cdot 12}}{1 - \left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119},$$

logo este arco $4x$ differe muito pouco de 45°; e se chamamos v o excesso de $4x$ sobre 45°, ou $v=4x-45°$, será

$$\tang v=\frac{\tang 4x-1}{1+\tang 4x}=\frac{1}{239}.$$

Conseguintemente se fizermos $\tang x=\frac{1}{5}$, e repetirmos quatro vezes a serie N, teremos o arco $4x$; do mesmo modo $\tang v=\frac{1}{239}$ dá o arco v; e practicando a subtracção, obtem-se o arco de 45°, ou

$$\frac{1}{4}\pi=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5\dots\right]-\frac{1}{239}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3\dots$$

Na *Geometria* n.° 95, demos o resultado destes calculos com 20 decimaes:

$$\log \pi=0,49714\ 98726\ 94,\ l\,\pi=1,14472\ 98858\ 494.$$

160. Se na equação (I) fizermos $x=k\pi$, designando por k um inteiro qualquer, teremos $\sen x=0$, $\cos x=\pm 1$, conforme k for par ou impar, e por conseguinte

$$e^{\pm k\pi\sqrt{-1}}=\pm 1,\ l(\pm 1)=\pm k\pi\sqrt{-1}.$$

Multiplicando pelo modulo M, e ajunctando o valor numerico A de $\operatorname{Log} a$,

$$\operatorname{Log}(\pm a)=A\pm kM\pi\sqrt{-1},$$

sendo k um numero qualquer, par para $\log(+a)$, e impar para $\log(-a)$. Por conseguinte *todo o numero tem infinitos logarithmos no mesmo systema; quando o numero é negativo, estes log. são todos imaginarios; sendo positivo, sómente um é real.* (*)

(*) De $a^2=(-a)^2$, deduz-se $2\log a=2\log(-a)$, não devemos porém concluir d'aqui, como fez d'Alembert, que $+a$ e $-a$ tem os mesmos log.; por

161. Tractemos agora de desinvolver sen z e cos z em senos e cosenos d'arcos multiplos z, $2z$, $3z$, ... Supponhamos

$$\cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z = y\,,\quad \cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, z = v\,;$$

será

$$yv = 1\,,\quad 2\cos z = y + v.$$

Designando por 1, U, A′, A″, ... os coefficientes da potencia u, será, para qualquer valor de u,

$$2^u \cos^u z = y^u + uy^{u-2} + A'y^{u-4} + \ldots\ldots$$

E como, pela equação (M), temos

$$y^k = \cos kz + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, kz\,,$$

será

$$2^u \cos^u z = \cos uz + u\cos(u-2)z + A'\cos(u-4)z - \ldots.\quad \text{(P)}$$

$$\pm\sqrt{-1}\,[\text{sen}\, uz + u\,\text{sen}\,(u-2)z + A'\,\text{sen}\,(u-4)z + \ldots],$$

---

quanto, sendo pares k e l, é

$$\log a = A \pm k\,M\pi\sqrt{-1}\,,\quad e = A \pm l\,M\pi\sqrt{-1}\,;$$

e sommando, $2\log a = 2A \pm (k+l)\,M\pi\sqrt{-1}$. Do mesmo modo sendo k' e l' impares, acha-se $2\log(-a) = 2A \pm (k'+l')\,M\pi\sqrt{-1}$. Ora é evidente que esta última expressão se comprehende na primeira, porque $k'+l'$ é um numero par, porém não se segue que seja em geral $2\log(-a) = 2\log a$; porque, para que a seja real, é necessario que $k = l = 0$; porém k' e l' sendo impares, nunca a sua somma póde ser $= 0$; nem póde por tanto dar-se em numeros reaes $\log a = \log -a$. O que d'Alembert unicamente devia concluir, era que entre os log. imaginarios de $+a$ e $-a$, existem alguns que, sommados dous a dous, dão sommas eguaes.

onde se poz o signal duplo $\pm$, porque tanto se póde eliminar y como v.

Quando u é inteiro, $\cos^u z$ não póde admittir mais do que um valor, e como as duas expressões devem por isso ter o mesmo valor, a serie ficará reduzida á 1.ª linha (P), porque segundo se collige do que vamos dizer, os termos imaginarios se destroem dous a dous.

Porém se u for fraccionario, não accontecerá o mesmo, porque o expoente fraccionario, indicando a existencia de uma raiz de uma certa ordem, mostra que esta póde em geral ter muitos valores.

Considerando aqui sómente o caso de ser u inteiro, que é o unico de que se faz uso, advertiremos, que na equação (P) o arco que entra no termo que tem um numero x de termos antes de si, é da fórma $(u-2x)z$; e que aquelle que tem x depois, tem $u-x$ antes, e é por isso $[u-2(u-x)]z=-(u-2x)z$. Estes arcos terão pois os mesmos cosenos; e os seus coefficientes, pela propriedade de egualdade dos coefficientes dos termos equidistantes do binomio, serão tambem eguaes. Podemos pois, em logar de cada um destes dous termos, substituir o seu dôbro; e dividindo depois a equação por 2, virá

$$2^{u-1}\cos^u z=\cos uz+u\cos(u-2)z+A'\cos(u-4)z+\ldots\ldots(Q),$$

continuando com a serie, sómente em quanto os arcos vierem positivos. Cumpre tambem advertir, que *sendo* u *par, é necessario tomar a ametade do ultimo termo, que é o termo medio, o qual nesse caso se não somma com nenhum dos outros.*

Mudando, n'esta equação (Q), z em $\frac{1}{2}\pi-z$, o 1.° membro tornar-se-ha em $2^{u-1}\operatorname{sen}^u z$. Em quanto ao 2.° membro, como um arco da ordem x, tem a fórma $(u-2x)z$, teremos, por ser x um inteiro positivo,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos\left[\frac{u\pi}{2}-(u-2x)z-\pi x\right]=(-1)^x\left[\cos\frac{u\pi}{2}-(u-2x)z\right]$$

Temos agora a considerar dous casos:

1.° ***Se* u *for numero par*, teremos:**

a) **para** $u = 4n$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = (-1)^n \cos\left(2n\pi - (u-2x)z\right) = -(-1)^n \cos(u-2x)z:$$

b) **para** $u = 4n + 2$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = (-1)^n \cos\left((2n+1)\pi - (u-2x)z\right) = -(-1)^n \cos(u-2x)z:$$

Logo:

$$\pm 2^{u-1} \operatorname{sen}^u z = \cos uz - u\cos(u-2)z + A' \cos(u-4)z + \ldots . \quad (R)$$

devendo parar-se no termo medio, e tomar a sua ametade; usando do signal $+$ **quando** u **fôr da fórma** $4n$, **e do signal** $-$, **quando fôr da fórma** $4n+2$.

2.° ***Se* u *for numero* impar, teremos:**

a') **para** $u = 4n + 1$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = (-1)^n \cos\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi - (u-2x)z\right) = (-1)^n \operatorname{sen}(u-2x)z:$$

b') para $u=4n+3$,

$$\cos(u-2x)\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=$$

$$(-1)^x\cos\left[\left(2(n+1)-\frac{1}{2}\right)\pi-(u-2x)z\right]=-(-1)^x \operatorname{sen}(u-2x)z:$$

Logo

$$\pm 2^{u-1}\operatorname{sen}^u z=\operatorname{sen} uz-\operatorname{sen}(u-2)z+A'\operatorname{sen}(u-4)z\ldots\quad (S)$$

devendo parar-se no termo medio, sem tomar metade; usando do signal $+$ quando u fôr da fórma $4n+1$, e do signal $-$, quando for da fórma $4n+3$.

D'estas equações facilmente se deduzem, como na pag. 196 da segunda parte,

$$2\cos^2 z=\cos 2z+1,$$

$$4\cos^3 z=\cos 3z+3\cos z,$$

$$8\cos^4 z=\cos 4z+4\cos 2z+3,$$

$$16\cos^5 z=\cos 5z+5\cos 3z+10\cos z,$$

$$32\cos^6 z=\cos 6z+6\cos 4z+15\cos 2z+10, \text{ etc.}$$

$$-2\operatorname{sen}^2 z=\cos 2z-1,$$

$$-4\operatorname{sen}^3 z=\operatorname{sen} 3z-3\operatorname{sen} z,$$

$$8\operatorname{sen}^4 z=\cos 4z-4\cos 2z+3,$$

$$16\operatorname{sen}^5 z=\operatorname{sen} 5z-5\operatorname{sen} 3z+10\operatorname{sen} z,$$

$$-32\operatorname{sen}^6 z=\cos 6z-6\cos 4z+15\cos 2z-10, \text{ etc.}$$

162. Podemos reciprocamente desenvolver os sen. e cos. d'arcos multiplos, em ordem ás potencias de senos e cosenos. Fazendo, para simplificar,

$$\text{sen } z = s, \ \cos z = c,$$

o 2.° membro da equação (M) pag. 291, tornar-se-ha, fazendo $x = z$,

$$(c + \sqrt{-1} . s)^n;$$

o qual, sendo desinvolvido pela fórmula do binomio, conduz a uma equação da fórma

$$\cos nz + \sqrt{-1} \text{ sen } z = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}.$$

E como os imaginarios se devem destruir uns com os outros, teremos as duas equações separadas,

$$\cos nz = \mathrm{P}, \ \text{sen } nz = \mathrm{Q},$$

contendo a primeira todos os termos em que $s\sqrt{-1}$ tem expoentes pares. Será pois, para n inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo,

$$\cos nz = c^n - n\frac{n-1}{2} c^{n-2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} c^{n-4} s^4 - \ldots$$

$$\text{sen } nz = nc^{n-1} s - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} c^{n-3} s^3 + \frac{n(n-1)..(n-4)}{2.3.4.5} c^{n-5} s^5 -$$

Dando a n successivamente os valores 2, 3, 4, 5, ... obteremos, como nas pag. 194 e 195 da segunda parte,

$\cos 2z = c^2 - s^2$, $\quad$ $\operatorname{sen} 2z = 2cs$,

$\cos 3z = c^3 - 3cs^2$ $\quad$ $\operatorname{sen} 3z = 3c^2 s - s^3$,

$\cos 4z = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$, $\quad$ $\operatorname{sen} 4z = 4c^3 s - 4cs^3$,

$\cos 5z = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$, $\quad$ $\operatorname{sen} 5z = 5c^4 s - 10c^2s^3 + s^5$,

$\cos 6z = c^6 - 15c^4 s^2 + 15c^2s^4 - s^6$, $\quad$ $\operatorname{sen} 6z = 6c^5 s - 20c^3s^3 + 6cs^5$,

etc. $\quad$ etc.

163. N'estas fórmulas vem os senos misturados com cosenos, podemos porém achar outras em que estas funcções venham separadas. Como os arcos z, $2z$, $3z$, ... são equidifferentes, os senos e cosenos fórmam uma serie recurrente (Geom. An. n.° 209), cujos factores são $2 \cos z$ e -1. Do mesmo modo, se os arcos procedem de $2z$ em $2z$, isto é, z, $3z$, $5z$, ..., ou $0.z$, $2z$, $4z$, ..., os factores serão $2 \cos 2z = 2(c^2 - s^2) = 2 - 4s^2$, e -1.

Partindo pois de $\cos 0.z = 1$, $\operatorname{sen} 0.z = 0$, $\cos z = c$, $\operatorname{sen} c = s$, facilmente se podem formar (n.° 146) as series recurrentes seguintes, *em ordem ás potencias ascendentes de* c, das quaes são conhecidos os dous 1.^{os} termos e a lei que seguem.

$\operatorname{sen} 2z = s\,(2c)$, $\quad$ $\cos 2z = 2c^2 - 1$,

$\operatorname{sen} 3z = s\,(4c^2 - 1)$, $\quad$ $\cos 3z = 4c^3 - 3c$,

$\operatorname{sen} 4z = s\,(8c^3 - 4c)$, $\quad$ $\cos 4z = 8c^4 - 8c^2 + 1$,

$\operatorname{sen} 5z = s\,(16c^4 - 12c^2 + 1)$, $\quad$ $\cos 5z = 16c^5 - 20c^3 + 5c$,

$\operatorname{sen} 6z = s\,(32c^5 - 32c^3 + 6c)$, $\quad$ $\cos 6z = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$,

$\operatorname{sen} 7z = s\,(64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)$, $\quad$ etc.

A lei geral d'estas fórmulas acha-se demonstrada por Lagrange (*Calcul des fonctions*, XI *leç.*), e resume-se nas seguintes

$$\operatorname{sen} nz = s\Big[(2c)^{n-1} - (n-2)(2c)^{n-3} + \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(2c)^{n-5}$$

$$-(n-4)\frac{n-5}{2}\,\frac{n-6}{3}(2c)^{n-7} + (n-5)\,\frac{n-6\,..\,n-8}{2\,.\,3\,.\,4}(2c)^{n-9}\ldots\Big]$$

$$2\cos nz = (2c)^n - n(2c)^{n-2} + \tfrac{1}{2}n(n-3)(2c)^{n-4} - \tfrac{1}{6}\,n(n-4)(n-5)(2c)^{n-6}\,..$$

Passando agora ás series *em ordem ás potencias ascendentes de s*, acharemos pelo meio indicado:

$\operatorname{sen} 2z = c\,(2s)$, $\qquad \operatorname{sen} 3z = 3s - 4s^3$,

$\operatorname{sen} 4z = c\,(4s - 8s^3)$, $\qquad \operatorname{sen} 5z = 5s - 20s^3 + 16s^5$,

$\operatorname{sen} 6z = c\,(6s - 32s^3 + 32s^5)$, $\qquad \operatorname{sen} 7z = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$,

$\operatorname{sen} 8z = c\,(8s - 80s^3 + 192s^5 - 128s^7)$, $\qquad$ etc.

$\cos 2z = 1 - 2s^2$, $\qquad \cos 3z = c\,(1 - 4s^2)$,

$\cos 4z = 1 - 8s^2 + 8s^4$, $\qquad \cos 5z = c\,(1 - 12s^2 + 16s^4)$,

$\cos 6z = 1 - 18s^2 + 48s^4 - 32s^6$, $\qquad \cos 7z = c\,(1 - 24s^2 + 80s^4 - 64s^6)$,

etc. $\qquad$ etc.

1.° Sendo n par, podemos dar-lhe a fórma seguinte:

$$\operatorname{sen} nz = c\left[ns - n\frac{n^2-2^2}{2\,.\,3}s^3 + n\frac{n^2-2^2}{2\,.\,3}\,.\,\frac{n^2-4^4}{4\,.\,5}s^5 \ldots\ldots\ldots (2s)^{n-1}\right]$$

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2}s^2 + \frac{n^2}{2}\,.\,\frac{n^2-2^2}{3\,.\,4}s^4 - \frac{n^2}{2}\,.\,\frac{n^2-2^2}{3\,.\,4}\,.\,\frac{n^2-4^4}{5\,.\,6}s^6 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n,$$

2.° Sendo n impar,

$$\operatorname{sen} nz = ns - n\frac{n^2-1^2}{2\,.\,3}s^3 + n\frac{n^2-1^2}{2\,.\,3}\,.\,\frac{n^2-3^2}{4\,.\,5}s^5 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n;$$

$$\cos nz = c\left[1 - \frac{n^2-1^2}{1\,.\,2}s^2 + \frac{n^2-1^2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{n^2-4^2}{3\,.\,4}s^4 \ldots\ldots (2s)^{n-1}\right].$$

Methodo inverso, ou reversão das Series.

164. *Dada uma equação* $y = \varphi x$, *sendo* φx *uma serie, tracta-se de achar* $x = Fy$, *isto é*, x *expresso n'uma serie em ordem a* y.

1.° *Se* $x = Fy$ *tiver já uma fórma conhecida*, como por ex.°,

$$x = Ay + By^2 + Dy^3 + \text{etc.} \ldots\ldots \ldots\ldots \quad (1)$$

reduz-se a questão a achar os coefficientes indeterminados A, B, C, ..

Para isso, substituiremos na proposta $y = \varphi x$, os valores de x, x^2, x^3, .. tirados de (1); e obteremos assim uma equação identica, a qual por meio da comparação dos termos, em que entram as mesmas potencias de y, se separará n'outras, que darão a conhecer A, B, C, ...,

Seja $$y = \mathrm{M}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right);$$

como já sabemos (n.° 153), que x se póde desinvolver n'uma serie da fórma (1), porque é y o log. de $1+x$, ou $a^y = 1+x$: substituindo por x a serie $\mathrm{A}y + \mathrm{B}y^2 + \ldots\ldots$, resultará

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{y}{\mathrm{M}} = \mathrm{A}y + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}y^3 + & & \mathrm{D}y^4 \ldots & \text{por } x \\[2ex]
 & -\dfrac{1}{2}\mathrm{A}^2y^2 - \mathrm{AB}y^3 - & \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{B}^2 + \mathrm{AC}\right)y^4 \ldots & -\dfrac{1}{2}x^2 \\[2ex]
 & +\dfrac{1}{3}\mathrm{A}^3y^3 + & \mathrm{A}^2\mathrm{B}y^4 \ldots & +\dfrac{1}{3}x^3 \\[2ex]
 & & -\mathrm{A}^4y^4 \ldots & -\dfrac{1}{4}x^4;
\end{array}$$

d'onde $$\mathrm{AM} = 1,\ \mathrm{B} = \frac{1}{2}\mathrm{A}^2,\ \mathrm{C} = \mathrm{AB} - \frac{1}{3}\mathrm{A}^3,\ \mathrm{D} = \ldots$$

ou $$\mathrm{A} = \frac{1}{\mathrm{M}},\ \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}^2}{2},\ \mathrm{C} = \frac{\mathrm{A}^3}{2.3},\ \mathrm{D} = \frac{\mathrm{A}^4}{2.3.4}, \text{ etc.}$$

Finalmente, $$x = \mathrm{A}y + \frac{\mathrm{A}^2y^2}{2} + \frac{\mathrm{A}^3y^3}{2.3} + \frac{\mathrm{A}^4y^4}{2.3.4} \ldots,$$

Do mesmo modo $$y = x - x^2 + x^3 - x^4 \ldots,$$

dá pela reversão $\qquad x = y + y^2 + y^3 + y^4 \ldots.$

2.° Porém *se a fórma de* $x = Fy$ *for desconhecida*, como acontece as mais das vezes: indicando por α, β, γ, ... as potencias desconhecidas de y, poremos

$$x = Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma + \ldots\ldots;$$

e teremos, além dos coefficientes A, B, C, ... de determinar os expoentes α, β, γ.

Para isso, depois de substituidos os valores de x na proposta, formaremos o numero de equações necessarias para determinar as quantidades desconhecidas, pela consideração de que deve cada um dos termos ser destruido por outros em que entre y na mesma potencia. Assim procedemos já no n.° 155.

Na serie $\qquad y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \ldots\ldots,$

em que a $y = 0$ corresponde $x = 0$, poremos

$$x = Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma + \ldots\ldots,$$

sendo α, β, γ, ... numeros crescentes.

Substituindo por x o seu valor, vê-se, que:

1.° Como os expoentes 2, 3, 4, ... de x, na proposta, formam uma equidifferença, tambem α, β, γ, ... formam outra como é facil de ver.

2.° Tendo pois achado os dous primeiros expoentes α e β, facilmente se acharão os seguintes γ, δ, ...

3.° Como o termo, em que y tem menor expoente no 2.° membro, é $\frac{1}{2}A^2y^{2\alpha}$, deverá reduzir-se com o 1.° membro y, o que dá,

$$2\alpha = 1,\ \tfrac{1}{2}A^2 = 1;\ \text{e por conseguinte } \alpha = \tfrac{1}{2};\ A = \sqrt{2}.$$

4.° Como os termos, que depois tem menor expoente, são $ABy^{\alpha+\beta}$ e $\frac{1}{3}A^3y^{3\alpha}$, deverão reduzir-se a zero, e darão

$$\alpha + \beta = 3\alpha;\quad \text{ou } \beta = \frac{2}{2}.$$

Pela equidifferença teremos pois

$$\gamma = \frac{3}{2},\ \delta = \frac{4}{2},\ \ldots\ldots,$$

e a serie tornar-se-ha em

$$x = \sqrt{2}y^{\frac{1}{2}} + By^{\frac{2}{2}} + Cy^{\frac{2}{3}} + \text{etc.};$$

a qual, estando já no caso precedente, dará pelo mesmo processo os coefficiente B, C, D....; achando-se finalmente

$$x = \sqrt{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{18}\sqrt{2}y^{\frac{2}{3}} - \frac{58}{55}y^2 + \ldots.$$

Pela mesma maneira a serie

$$y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7}\ldots.$$

se poderá reverter debaixo da fórma $x = Ay + By^3 + Cy^5 \ldots$. e acha-se feitas todas as operações,

$$x=y+\frac{1\,.\,y^3}{2\,.\,3}+\frac{1\,.\,3y^5}{2\,.\,4\,.\,5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5y^7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7}+\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7y^9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,9}\cdots$$

Para $x=ay+by^2+cy^3+\ldots$ obtem-se

$$y=\frac{x}{a}-\frac{bx^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}x^3+\frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7}x^4\ldots$$

A serie $\quad x=ay+by^3+cy^5+dy^7\ldots\ldots$

dá

$$y=\frac{x}{a}-\frac{bx^3}{a^4}+\frac{3b^2-ac}{a^7}x^5+\frac{8abc-a^2d-12b^3}{a^{10}}x^7\ldots$$

Finalmente, $\quad y=x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{128}x^{\frac{7}{2}}\ldots$

dá $\quad x=Ay^{-2}+By^{-4}+Cy^{-6}\ldots\ldots;$

e por conseguinte $\quad x=y^{-2}-y^{-4}+y^{-6}-y^{-8}+\ldots\ldots$

Se a proposta fosse $y=a+bx+cx^2\ldots$, para commodidade do calculo, seria melhor transpor a, e fazer

$$\frac{y-a}{b}=z\text{, ou } z=x+\frac{c}{b}x^2+\frac{d}{b}x^3+\ldots\ldots;$$

depois desenvolver-se-hia x em z.

Das equações de condição, e methodo dos menores quadrados.

165. Quando a lei, que rege um phenomeno physico, é conhecida, e se acha traduzida analyticamente n'uma equação da fórma

$$\varphi(x, y, a, b, c \ldots) = 0,$$

succede muitas vezes serem desconhecidas as constantes $a, b, c \ldots$, sendo $x, y, z \ldots$ grandezas variaveis com as circunstancias do phenomeno. Para determinar estas constantes $a, b, c, \ldots$ recorre-se então á experiencia, achando por meio della os valores simultaneos de $x, y, z, \ldots$ e substituindo-os na equação $\varphi = 0$. Repetindo depois as experiencias, n'outras circunstancias, acham-se novos valores de $x, y, z, \ldots$ d'onde resultam novas *equações de condição*, podendo assim formar tantas, quantas forem necessarias para determinar as constantes, $a, b, c, \ldots$, por meio da eliminação.

Porém, como os valores das constantes obtidas por esta maneira estão sujeitos aos erros da observação, por meio da qual se determinaram nas differentes experiencias as variaveis $x, y, z, \ldots$, os resultados $a', b', c', \ldots$ que por este modo vimos a obter, em vez dos numeros exactos $a, b, c, \ldots$ devem considerar-se sómente como approximados. Designando por $A, B, C, \ldots$ os erros respectivos em a', b', c', erros que se devem considerar muito pequenos, quando as observações se tiverem feito com o escrupulo exigido, poremos em $\varphi = 0$,

$$a = a' + A, \; b = b' + B, \; c = c' + C, \ldots$$

e procuraremos determinar as quantidades $A, B, C, \ldots$ cujas potencias superiores á primeira se poderão desprezar, e que por isso entrarão em $\varphi = 0$ só no 1.° grão, e, por ex.°, debaixo da fórma

$$0 = x + Ay + Bz + Ct + \ldots\ldots \quad (1)$$

Para supprir então a imperfeição nos valores de x, y, z .... emprega-se um grande numero de observações. Repetindo muitas vezes as experiencias, obtem-se outras tantas equações (1) em que x, y, z .... são conhecidos; comparam-se depois estas equações, e combinam-se muitas entre si, de maneira que se venha a obter uma equação media, em que uma das constantes tenha o maior factor possivel, tendo as outras pelo contrario factores muito pequenos: por meio destes artificio o erro na determinação dos coefficientes vem a ser muito attenuado. Reduzindo estas equações de condição ao numero das incognitas, obteremos por meio da eliminação mui facilmente os valores de A, B, C....

Este methodo de grande uso na Astronomia, é menos exacto que o dos *menores quadrados*, proposto por M. Legendre, o qual, pela exactidão dos resultados, compensa bem a extensão dos calculos. Supponhamos que os valores x, y, z .... deduzidos da observação sendo pouco exactos, se substituiram na equação (1); então o 1.° membro não será zero, porém um numero e muito pequeno e desconhecido. Repetindo as experiencias obteremos outros erros e', e'' .... correspondentes aos valores x', x'', y', y'' .... a saber

$$e' = x' + Ay' + Bz'., \quad e'' = x'' + Ay'' + Bz'' \ldots \text{ etc.}$$

Tomando a somma dos quadrados destas equações, e escrevendo sómente os termos em A, porque os outros são da mesma fórma, acharemos

$$e^2 + e'^2 + e''^2 + \ldots.$$

$$= A^2(y^2 + \ldots.) + 2A(xy + x'y' \ldots.) + 2AB(yz \ldots.) + 2AC \text{ etc.}$$

Este 2.° membro é da fórma $A^2m + 2An + k$; e terá o menor valor possivel, como se verá no *Cálculo differencial* quando se der a A um valor tal, que a derivada seja nulla .... $Am + n = 0$ Considerando pois só o factor constante e desconhecido A, teremos

$$xy + x'y' \ldots + A(y^2 + y'^2 \ldots) + B(yz + y'z' \ldots) + C(yt \ldots \text{etc} = \ldots) \, 0$$

Deve-se pois multiplicar cada uma das equações de condição (1) *pelo factor* y *de* A, *e egualar a somma a zero.* Practicando o mesmo a respeito de B, C . . . . obtem-se tantas equações similhantes quantas são as constantes incognitas; e como estas equações são do 1.° grão, a eliminação não offerece difficuldade.

Por ex., sabe-se pela Mechanica que debaixo da latitude y, o comprimento x do pendulo simples de segundos sexagesimaes tem por expressão $x = A + B \operatorname{sen}^2 y$, sendo A e B numeros invariaveis, que se tracta de determinar. Bastaria medir com cuidado os comprimentos x debaixo de duas latitudes differentes y, para obter duas equações de condição proprias para darem A e B.

Porém a precisão se tornará maior, se, como fizeram MM. Mathieu e Biot, se medir x debaixo de seis latitudes differentes, e se tractarem pelo methodo precedente as seis equações de condição. As quantidades $A + B \operatorname{sen}^2 y - x$, avaliadas em metros, dão estes seis erros:

$$A + B.0,3903417 - 0,9929750,\quad A + B.0,4932370 - 0,9934740$$

$$A + B.0,4972122 - 0,9934620,\quad A + B.0,5136117 - 0,9935967$$

$$A + B.0,5667721 - 0,9938784,\quad A + B.0,6045628 - 0,9940932.$$

Como o coefficiente de A é 1, a equação, que lhe diz respeito, é formada da somma dos seis erros. Em quanto a B, multiplicar-se-ha cada trinomio pelo factor que affecta B, e sommar-se-hão os productos: logo

$$6A + B.3,0657375 - 5,9614793 = 0,$$

$$A.3,0657375 + B.1,5933894 - 3,061977 = 0.$$

Eliminando teremos A e B; finalmente, achar-se-ha

$$x = 0,9908755 + B \operatorname{sen}^2 y,\ \log B = \bar{3},7238509,\ B = 0,0052941816.$$

Consulte-se *Conn. des Temps de* 1816, onde M. Mathieu discute por este methodo as observações do pendulo feitas pelos Hespanhoes em differentes latitudes.

Consulte-se tambem *Astronomie pratique* e *Géodésie* de Francoeur, onde esta materia vem tractada com a maior miudeza.

Consulte-se *Conn. des Temps* de 1816, onde Mr. Mathieu discute por este methodo as observações do pendulo feitas pelos Hespanhoes em differentes latitudes.

Consulte-se tambem *Astronomie pratique* ou *Geodésie* de Francoeur, onde esta materia vem tractada com a maior miudeza.

Por isso, sabendo pela Mechanica que debaixo da latitude y, o comprimento z do pendulo simples de segundos [illegible] por expressão $z = A + B \operatorname{sen}^2 y$, sendo A e B numeros invariaveis, que se tracta de determinar. Bastaria medir com cuidado os comprimentos z debaixo de duas latitudes differentes y, para obter duas equações de condição proprias para darem A e B.

Porém a precisão se tornará maior, se, como fizeram MM. Mathieu e Biot, se medir z debaixo de seis latitudes differentes, e se tractarem pelo methodo precedente as seis equações de condição. As quantidades $A + B \operatorname{sen}^2 y - z$, avaliadas em metros, dão estes seis erros:

$$A+B.0,3903117-0,9929750,\quad A+B.0,4933876-0,9951916$$

$$A+B.0,1972122-0,9931629,\quad A+B.0,5136117-0,9935967$$

$$A+B.0,5687721-0,9939781;\quad A+B.0,6015024-0,9910092$$

Como o coefficiente de A é 1, a equação, que lhe diz respeito, é formada da somma dos seis erros. Em quanto a B, multiplicar-se-ha cada trinomio pelo factor que affecta B, e sommar-se-hão os productos: logo

$$6A + B.3,0087395 - 5,9617903 = 0,$$

$$A.3,0087395 + B.1,5935581 - 2,9861977 = 0$$

Eliminando depois A e B, achamos, com effeito,

$$z = 0,9907715 + B \operatorname{sen}^2 y,\ \log B = \bar{3},7178592,\ B = 0,0052181816$$

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO.

I. TRIGONOMETRIA ESPHERICA.

Noções fundamentaes.

166. SE tres planos MON, NOP, MOP (fig. 25), passando pelo centro de uma esphera, determinarem um angulo triedro O, da sua intersecção com a superficie da esphera resultarão circulos maximos, cujos arcos CA, CB, AB formarão sobre ella um *triangulo espherico* ABC. Os angulos planos do triedro O terão por medida respectiva os lados ou arcos deste triangulo, isto é, NOP a AB, MON a AC, MOP a BC. O angulo C do triangulo tem por medida o angulo que no ponto C fórmam as duas tangentes aos arcos contiguos AC e BC; e a inclinação d'estas tangentes, situadas nos planos d'estes arcos, é tambem a medida do angulo diedro formado por estes mesmos planos, isto é, da inclinação da face NOM sobre POM. Por conseguinte, *os angulos planos do triedro* O *são medidos pelos lados do triangulo espherico* ABC, *e as inclinações das faces são os angulos do triangulo.*

Os problemas em que se pedem as partes desconhecidas de um triangulo espherico por meio das que são dadas, são exactamente os mesmos que se appresentam, quando, conhecidos alguns elementos de um triedro, se pedem os outros. *Nos triangulos esphericos ha seis elementos a considerar, os tres angulos* A, B, C, *e os tres lados oppostos* a, b, c; *ou*, por outras palavras, *os tres angulos planos* a, b, c, *e os tres angulos diedros oppostos* A, B, C, *do triedro de que se tracta.*

A Trigonometria espherica tem por objecto o conhecimento de todas as seis partes de um triangulo espherico, sendo dadas as que bastam para determinar as outras.

Posto isto, se de um ponto O dirigirmos raios visuaes para tres pontos distantes M, N, P, situados no espaço, para tres estrellas por ex.°, estas linhas serão as arestas de um triedro O, cujos elementos constituintes serão os mesmos do triangulo espherico ABC, formado pelos arcos dos circulos maximos que unem os pontos em que estas arestas vão atravessar a superficie de uma esphera de raio arbitrario, cujo centro O se suppõe o ponto de partida dos raios visuaes.

D'estes principios deduzem-se os theoremas seguintes:

1.° Como qualquer angulo plano de um triedro é sempre menor que dous rectos, *será sempre cada um dos lados do triangulo espherico* $<180.°$ *Qualquer angulo será tambem sempre menor que dous rectos.*

Se no processo dos calculos encontrarmos um angulo, ou um lado de um triangulo, que tenha por valor um arco$>180°$, devemos regeitar essa solução, ou então substituir o supplemento do mesmo angulo ou arco: e os cos., sen., tang., etc., nunca poderão pertencer a um arco maior que a semicircumferencia.

2.° Como a somma dos angulos planos de qualquer angulo polyedro é sempre $<360.°$ (*Geom.* n.° 127), *será a somma dos tres lados de um triangulo espherico sempre* $<360°$.

3.° *Dous triangulos esphericos serão eguaes, quando os tres angulos, ou os tres lados, ou dous lados e o angulo comprehendido, ou dous angulos e o lado adjacente, forem respectivamente eguaes cada um a cada um.* Tanto estes theoremas, como os dous seguintes, demonstram-se do mesmo modo que os correspondentes nos triangulos rectilineos.

4.° *O arco abaixado perpendicularmente do vertice de um triangulo espherico isosceles sôbre a sua base, divide ao meio esta base, e o angulo do vertice; os angulos eguaes ficam oppostos aos lados eguaes, e reciprocamente.*

5.° *Nos triangulos esphericos o maior angulo fica sempre opposto ao maior lado, o medio ao medio, e o menor ao menor.*

6.° *Qualquer lado é sempre menor que a somma dos outros dous, e maior que a sua differença:* porque a somma de dous angulos planos de um triangulo triedro excede sempre o terceiro, e por conseguinte $a<b+c$, e $b<a+c$, ou $a>b-c$. Conseguintemente, *a semisomma dos tres lados de um* *triangulo excede sempre um lado qualquer* : por que de $b+c>a$ tira-se $b+c+a>2a$, ou $\frac{b+c+a}{2}>a$.

167. *Se de um ponto* O (fig. 26) *tomado dentro do angulo triedro* S, *abaixarmos as perpendiculares* OP, OQ, OR, *sobre as faces* ASB, ASC, BSC, *estas perpendiculares determinarão um novo angulo triedro, cujos angulos planos serão supplementos dos angulos diedros do angulo solido* S, *e cujos angulos diedros serão supplementos dos angulos planos do mesmo angulo solido.*

Com effeito:

1.° Os angulos planos do novo angulo triedro POQ, POR, QOR, formados pelas perpendiculares OP, OQ, OR, são supplementos dos angulos diedros formados segundo as rectas SA, SB, SC: por quanto sendo a face POQ perpendicular ás faces ASB, ASC do triedro S (*Geom.* n.° 119), tambem o será á intersecção d'ellas (*Geom.* n.° 120), ou á aresta SA; e determinará, pela sua intersecção com as duas faces, o angulo rectilineo que serve de medida ao angulo diedro formado segundo AS (*Geom.* n.° 118, 4.°). D'esta intersecção resulta um quadrilatero com dous angulos rectos em P e Q; e por conseguinte o angulo POQ será supplemento do angulo diedro segundo AS. O mesmo se demonstra a respeito dos outros angulos planos QOR, POR.

2.° Pela mesma razão, como já fica demonstrado que as arestas SA, SB, SC são perpendiculares ás faces do angulo solido O, concluiremos: que os angulos planos de S são supplementos dos angulos diedros de O, ou, reciprocamente, que os angulos diedros de O são os supplementos dos angulos planos de S.

Por causa d'estas propriedades, os angulos triedros S e O dizem-se *supplementares.* Estes triedros determinam dous triangulos esphericos taes, que os angulos de um são supplementos dos lados do outro, e reciprocamente. Logo: dado um triangulo espherico ABC com os angulos A, B, C, e lados a, b, c, é sempre possivel construir outro $A'B'C'$, cujos angulos A', B', C', e lados a', b', c', tenham com os do primeiro as relações seguintes:

$$a'=180°-A,\quad b'=180°-B,\quad c'=180°-C \ldots\ldots (1),$$

$$A'=180-a,\quad B'=180-b,\quad C'=180-c \ldots\ldots (2)$$

O triangulo assim construido chama-se *polar* ou *supplementar* do 1.°

Sommando as tres equações (1) temos

$$A+B+C=6 \text{ rectos} -(a'+b'+c')\,;$$

e como já se viu que $a'+b'+c'<4$ rectos (n.° 166, 2.°), vê-se que $A+B+C>2$ rectos. Mas por outra parte, como qualquer dos angulos esphericos é sempre <2 rectos, temos $A+B+C<6$ rectos. Logo, *a somma dos angulos de qualquer triangulo espherico fica sempre comprehendida entre dous e seis angulos rectos.*

As equações (1) e (2) são de muita utilidade, porque reduzem a tres os seis problemas da trigonometria espherica, que consistem em achar tres dos seis elementos de um triangulo, conhecidos os outros tres. Se, por ex.°, soubermos achar os tres angulos A, B, C, por meio dos tres lados conhecidos a, b, c, podemos reciprocamente, dados os tres angulos A, B, C, achar um lado a, substituindo ao triangulo o seu supplementar $A'B'C'$, cujos lados são conhecidos pelas equações (1); e tendo achado um dos angulos A', a equação (2) dará o lado proposto $a=180°-A'$. De maneira, que sabendo resolver um triangulo no caso de serem dados os tres lados, fica tambem resolvido para o caso de serem conhecidos os tres angulos; e assim nos outros casos. Adiante se verá isto mais explicitamente.

168. Se o triedro O (fig. 27) for cortado por um plano pmn perpendicular a uma aresta OA, em um ponto m tal que seja $Om=1$, teremos

$$mn=\operatorname{tang} c\,,\quad On=\sec c\,,\quad mp=\operatorname{tang} b\,,\quad Op=\sec b.$$

Mas pela propriedade dos triangulos rectilineos (*Geom. anal.* n.° 201) é

$$np^2=mn^2+pm^2-2mn\,.\,pm\,.\cos A\,,$$

$$np^2=nO^2+pO^2-2nO\,.\,pO\,.\cos a.$$

Subtrahindo a 1.ª da 2.ª, temos, em virtude de serem os triangulos nmO, pmO, rectangulos em m, e de ser $Om=1$,

$$0 = 1 + 1 - 2 \sec c \,.\, \sec b \,.\, \cos a + 2 \,\mathrm{tang}\, c \,.\, \mathrm{tang}\, b \,.\, \cos A,$$

e, substituindo $\frac{1}{\cos}$ pela sec., e $\frac{\mathrm{sen}}{\cos}$ pela tang.,

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos c \,.\, \cos b} + \frac{\mathrm{sen}\, c \,.\, \mathrm{sen}\, b \,.\, \cos A}{\cos c \,.\, \cos b}.$$

D'aqui se deduz a *equação fundamental*

$$\cos a = \cos b \cos c + \mathrm{sen}\, b \,\mathrm{sen}\, c \cos A \,\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Para os angulos b e c obteremos, pelo mesmo theor, fórmulas similhantes, e reunindo-as todas tres, teremos

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \mathrm{sen}\, b \,\mathrm{sen}\, c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \mathrm{sen}\, a \,\mathrm{sen}\, c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \mathrm{sen}\, a \,\mathrm{sen}\, b \cos C. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Estas equações, cada uma das quaes exprime uma relação *entre os tres lados e um angulo*, encerram implicitamente toda a Trigonometria espherica, visto que por ellas, sendo dadas tres das seis partes que entram no triangulo espherico, se podem calcular as tres restantes. Como porém seja conveniente, nos diversos casos, ter fórmulas que dêem immediatamente a incognita da questão, por isso passâmos a deduzir estas das fórmulas precedentes, combinando-as convenientemente. (*Nota* 5.ª)

1.° Temos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\mathrm{sen}\, b \,\mathrm{sen}\, c},$$

logo

$$1-\cos^2 A=\operatorname{sen}^2 A=1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}\right)^2;$$

reduzindo o 2.° membro ao mesmo denominador, e substituindo depois sen^2 por $1-\cos^2$ no numerador, vem

$$\operatorname{sen}^2 A=\frac{1-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 b\ .\ \operatorname{sen}^2 c}.$$

Extrahindo a raiz quadrada, e dividindo ambos os membros por sen a, o 2.° membro torna-se n'uma *expressão symetrica* relativamente a a, b, c, isto é, n'uma expressão tal, que permanece a mesma quando quaesquer d'estas letras se mudam reciprocamente umas nas outras. Designando esta expressão por M, temos $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=$ M. Mudando n'esta equação A e a em B e b, e em C e c, como M persiste constante, deduz-se

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{II.})$$

2.° Applicando á equação (3) a propriedade do triangulo supplementar (equações 1 e 2), isto é, mudando a em $180°-$A, e A em $180°-a$, etc. teremos

$$\cos A=-\cos B\cos C+\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a\ \ldots\ldots\ (4).$$

E reunindo esta com as duas que se obtém similhantemente, teremos

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a,\\ \cos B&=-\cos A\cos C+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} C\cos b,\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\cos c.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (\text{III})$$

3.° A fim de eliminar b da equação (3), substitua-se por cos b o seu valor (1), e $\frac{\text{sen B sen } a}{\text{sen A}}$ por sen b; e virá

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \text{sen } a \,\text{sen } c \cos c \cos B + \frac{\text{sen } a \,.\, \text{sen } c \,.\, \text{sen B} \,.\, \cos A}{\text{sen A}};$$

porém $\cos^2 c = 1 - \text{sen}^2 c$: logo, dividindo tudo por sen a sen c, será

$$\text{sen } c \cot a = \cos c \cos B + \text{sen B} \cot A \;\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

Esta equação dá *uma relação entre dous lados e dous angulos, sendo um dos angulos comprehendido por esses lados, e o outro opposto a qualquer delles.* Fazendo todas as combinações possiveis, deduzem-se mais cinco equações similhantes, que reunidas á antecedente, podem escrever-se

$$\left.\begin{aligned}
\cos B \cos c &= -\text{sen B} \cot A + \text{sen } c \cot a,\\
\cos A \cos b &= -\text{sen A} \cot C + \text{sen } b \cot c,\\
\cos C \cos a &= -\text{sen C} \cot B + \text{sen } a \cot b,\\
\cos B \cos a &= -\text{sen B} \cot C + \text{sen } a \cot c,\\
\cos A \cos c &= -\text{sen A} \cot B + \text{sen } c \cot b,\\
\cos C \cos b &= -\text{sen C} \cot A + \text{sen } b \cot a,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(IV.)}$$

Os quatro grupos de fórmulas (I), (II), (III), (IV), offerecem evidentemente todas as combinações que é possivel fazer *com tres quantidades conhecidas e uma incognita*, das seis que fórmam os elementos do triangulo espherico; e bastará nas differentes questões escolher d'entre as *quinze* equações aquella que convém, e tornal-a depois propria para o cálculo por logarithmos. Os tres primeiros tem os seguintes enunciados, faceis de conservar na memoria:

(I). *O coseno de um lado qualquer de um triangulo espherico é egual á somma do producto dos cosenos dos outros dous lados, mais o producto dos senos désses mesmos lados multiplicado pelo coseno do angulo opposto ao primeiro lado.*

(II.) *Nos triangulos esphericos os senos dos angulos são proporcionaes aos senos dos lados oppostos.*

(III.) *O coseno de um angulo é egual á somma algebrica do producto dos cosenos dos outros dous angulos, mais o producto dos senos desses mesmos angulos multiplicado pelo coseno do lado opposto ao primeiro angulo; devendo dar-se o signal negativo ao producto em que entram só angulos.* Este enunciado, prescindindo dos signaes, é o mesmo que o das fórmulas (I) mudando lado em angulo, e angulo em lado. A primeira consoante *n* que entra na palavra *angulo*, e que é ao mesmo tempo a inicial de *negativo*, servirá para recordar que no 2.° membro se deve dar o *signal negativo ao producto em que entram só angulos.*

Para reter na memoria o enunciado das fórmulas (IV), que exprimem, como já dissemos, a relação entre *dous lados*, *o angulo comprehendido e um opposto*, empregaremos o meio mnemonico lembrado por Delambre, Astr. T. I. cap. X., *Trig. mnem*, n.° 191 e seguintes, e que consiste em considerar as *quatro partes* do triangulo todas contiguas, sendo então *duas* d'ellas *medias*, e *duas extremas;* as *medias* um lado e um angulo, e as *extremas* outro lado e outro angulo. Reflectindo então nas seis fórmulas, vê-se que se podem traduzir pela maneira seguinte:

(IV). *O producto dos cosenos das partes medias é egual á somma dos productos dos senos das mesmas partes multiplicados pelas contagentes das extremas, lado com lado, e angulo com angulo:* sendo o producto em que entram *lados* positivo, e o producto em que entram *angulos* negativo. Para nos recordarmos dos signaes faremos a mesma observação que a respeito das fórmulas (III) (*a*)

(*a*) Delambre, no logar citado, menciona tambem a seguinte transformação notavel das fórmulas (IV), que lhe foi suggerida pela nosso Mestre o Sr. Manoel Pedro de Mello, Lente nesta Universidade. Dividindo por sen B sen *c* a 1.ª d'aquellas fórmulas, acha-se

$$\cot B \cot c = \frac{\cot a}{\operatorname{sen} B} - \frac{\cot A}{\operatorname{sen} c};$$

e assim das outras. Podem pois enunciar-se da maneira seguinte, simples e facil de decorar-se: *O producto das cot. das partes medias é egual á somma das cot. das extremas divididas pelos senos das medias, lado com angulo e angulo com lado*; devendo dar-se o signal *negativo* á cot. em que entra *angulo.*

Triangulos esphericos rectangulos.

169. Designemos o angulo recto por A, e a hypothenusa por a (fig. 28); e pondo $A = 90^\circ$ nas 1.^{as} equações de (I) e (II), na 1.^{a} e 2.^{a} de (III), na 1.^{a} e 5.^{a} de (IV), teremos

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots\ldots\ldots (m),$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \ldots\ldots\ldots (n),$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots\ldots\ldots (p),$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b \ldots\ldots\ldots (q),$$

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \ldots\ldots\ldots (r),$$

$$\cot B = \cot b \operatorname{sen} c \ldots\ldots\ldots (s).$$

Estas seis equações, accommodadas ao calculo logarithmico, bastam para resolver em qualquer triangulo rectangulo o problema seguinte: *Dados dous dos cinco elementos* a, b, c, B *e* C, *achar os outros tres.* Assim a questão vem a depender de uma equação entre tres elementos, dos quaes um só é a incognita. Designando sempre por A o angulo recto, buscaremos aquella das seis equações que comprehende os tres elementos da questão; será necessario porém mudar algumas vezes o logar das letras B e C na figura.

Assim entrando

a hypothenusa a e dous angulos B, C, .. empregue-se a equação .. (p),

a hypothenusa a, um lado B e o lado .... opposto b . . . . (n), angulo

a hypothenusa a, um lado B e o lado .... adjacente c . . . . (r),

a hypothenusa a e dous lados b, c . . . . (m),

um lado b do angulo recto e os angulos B, C . . . . (q),

dous lados b, c do angulo recto e um angulo B . . . . (s), O celebre Inventor dos Logarithmos, reflectindo sobre a organisação das fórmulas precedentes, conseguiu encerral-as em duas regras mui faceis de decorar, e vem a ser:

$$\text{o coseno da parte } \textit{Media} = \text{ao producto} \begin{cases} \text{dos senos das partes } \textit{Separadas} \\ \text{das cotang. das partes } \textit{Conjunctas.} \end{cases}$$

Para se applicarem estas regras deve advertir-se:

1.° Que Neper não considera no triangulo rectangulo senão cinco partes, excluindo o angulo recto, que não entra explicitamente na solução, como vimos acima. Contando d'esta fórma, e entrando em qualquer questão sempre tres partes, duas *dadas*, e uma *pedida:* é facil de ver, que uma das tres será equidistante das outras duas, ou *media* entre ellas, ficando-lhe as outras duas: ou contiguas, em cujo caso se chamam *conjunctas;* ou egualmente *separadas* por outras partes que não entram na questão, visto que, ao todo, não são senão cinco. É isto o que Neper entende por *partes medias*, *partes conjunctas*, *e partes separadas.* A primeira cousa que se deve fazer, é distinguir na figura quaes ellas são, o que é facil.

2.° Que em logar dos lados, que formam o angulo recto, se ha-de tomar o seu complemento, isto é, tomar d'elles o seno, o coseno ou a tangente, quando pelas regras se houvesse de tomar o coseno, o seno ou a cotangente.

Estas regras têm a vantagem de se tomarem facilmente de memoria pela *symetria de linguagem*, por assim dizer, com que se exprimem em portuguez, correspondendo *senos* ás partes *separadas* e *cotangentes* ás *conjunctas.*

170. A respeito das fórmulas precedentes faremos ainda as seguintes observações.

1.° Da equação (m) conclue-se que *o coseno da hypothenusa é egual ao producto dos cosenos dos outros dous lados;* e por conseguinte, que um dos tres lados é $<$ ou $>$ $90°$, conforme forem os outros dous lados da mesma ou differente especie, isto é, conforme forem conjunctamente ou $<$ ou $>$ $90.°$, ou conforme fôr um d'elles $<$ e o outro $>$ $90.°$; porque os cosenos dos arcos $>$ $90.°$ são negativos.

2.° A equação (p) faz ver que, se compararmos a hypothenusa com os dous angulos adjacentes B e C, um d'estes tres arcos é $>$ ou $<$ $90°$, segundo forem os outros dous arcos da mesma ou differente especie.

3.° As equações (q ou s) mostram que qualquer dos angulos B e C é sempre da mesma especie que o lado opposto.

4.° Vê-se tambem pela equação (r) que a hypothenusa e um dos lados são da mesma especie, quando o angulo comprehendido é $< 90°$, e de differente especie quando este angulo é $> 90°$.

5.° Finalmente se o lado b do angulo recto for $= 90°$; será $\cos b = 0$, e (pelas equações (m) e (q)) $\cos a = 0$, $\cos B = 0$: d'onde se conclue que neste caso os lados CA, CB serão cada um de 90.° e perpendiculares sôbre AB; o triangulo será isosceles *birectangulo;* e C toma o nome de *pôlo* do arco AB (fig. 28), em consequencia de ficar á distancia de 90° de todos os pontos d'este arco.

171. Posto que estas fórmulas resolvem todos os casos dos triangulos rectangulos, cumpre todavia notar que os valores das incognitas não se obterão com precisão, quando os arcos, sendo muito pequenos, vierem expressos em cosenos; ou quando, sendo vizinhos de 90°, forem dados por senos.

Para obviar a este inconveniente, recorremos aos artificios seguintes.

1.° Temos (P. II, pag 162) $\tang^2 \frac{1}{2} x = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

e por isso, se for pedida a hypothenusa a sendo conhecidos B e C, a equação (p) torna-se em

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos B \cos C},$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos (B + C)}{\cos (B - C)} \ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

equação onde se vê, que *a somma dos dous angulos* B *e* C é $> 90°$, por que o 2.° membro, que tem o signal $-$, deve ser positivo.

2.° Do mesmo modo, se procurarmos um lado b do angulo recto conhecidos os angulos B e C, temos pela equação (q) $\cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$, e fazendo $z = 90° - B$, que dá $\cos B = \operatorname{sen} z$, e $\cos b = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C}$; teremos (pela equação citada e pelo n.° 206 P. II.)

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} b = \frac{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C - z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C + z)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\left(\operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{2}(B - C) + 45^\circ\right] \operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{2}(B + C) - 45^\circ\right]\right)} \ldots \quad (7)$$

3.° Conhecida a hypothenusa a e um lado c, se quizermos achar o lado adjacente B, teremos pela equação (r)

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \operatorname{tang} c \cot a}{1 + \operatorname{tang} c \cot a} = \frac{\cos c \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \cos a}{\cos c \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} c \cos a},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}(a - c)}{\operatorname{sen}(a + c)}\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Para que esta expressão se não torne imaginaria, é necessario que $a - c$ e $a + c$ tenham o mesmo signal; por conseguinte sendo $a + c > 180^\circ$, deve ser a hypothenusa $a < c$. Logo se o triangulo tiver angulos obtusos, não será a hypothenusa o maior lado. É isto com effeito o que se torna evidente na figura 31.

4.° A equação (m) dá $\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b}$,

logo $$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + b) . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b) \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

5.° Finalmente se for pedido um lado b, conhecidos o angulo opposto B e a hypothenusa a, em vez de empregar a equação (n) quando b for vizinho de 90°, tome-se

$$b = 90^\circ - 2z, \ \operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B;$$

o que reduz a equação (n) a $\cos 2z = \operatorname{tang} x$, ou

$$\operatorname{tang}^2 z = \frac{1 - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} x} = \operatorname{tang.} (45° - x);$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tang} (45° - \tfrac{1}{2} b) = \sqrt{\operatorname{tang} (45° - x)} \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Calcula-se o arco x por meio da equação $\operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, e a última dará o valor de b.

Appresentâmos na tabella seguinte os cinco elementos constituintes de um triangulo espherico rectangulo, a fim de poder servir de exercicio para a applicação numerica das fórmulas, tomando á escolha dous d'estes elementos, e calculando por meio d'elles os tres restantes.

Triangulo rectangulo de prova.

ELEMENTOS.	LOG. SEN.	LOG. COSEN.	LOG. TANG.
$a = 71°24'30''$	$\bar{1}.9767235$	$\bar{1}.5035475 +$	$0.4731759 +$
$b = 140.52.40$	$\bar{1}.8000134$	$\bar{1}.8897507 -$	$\bar{1}.9102626 -$
$c = 114.15.54$	$\bar{1}.9598303$	$\bar{1}.6137969 -$	$0.3460333 -$
$B = 138.15.45$	$\bar{1}\ 8232909$	$\bar{1}\ 8728568 -$	$\bar{1}.9504341 -$
$C = 105.52.39$	$\bar{1}.9831068$	$\bar{1}.4370867 -$	$0.5460201 -$

O signal — posto á direita de muitos d'estes logarithmos serve para indicar que o factor correspondente é negativo; e não deve confundir-se com os signaes — collocados á esquerda dos log., que, como é sabido, indicam que devem ser subtrahidos, como acontece nas divisões. Conforme for par ou impar o numero dos factores negativos de uma fórmula, assim o producto terá o signal + ou —, circunstancias que deve haver cuidado em notar; porque, por ex.°, tang a dá para a um arco $<90°$, quando esta tangente é positiva, e o supplemento d'este valor quando a tangente é negativa.

Triangulos esphericos obliquangulos.

172. Percorramos todos os casos que podem apresentar-se (fig. 28).

1.° CASO *Dados os tres lados* a, b, c, *achar o angulo* A?

A 1.ª das equações (I) dá, substituindo nella $1-2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}A$ por cos A:

$$\cos a = \cos(b-c) - 2\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A, \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

ou
$$2\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A = \cos(b-c) - \cos a,$$

ou, P. II. pag. 164, (*)

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}.$$

Esta equação, accommodada ao cálculo logarithmico, dá o valor do angulo A. Póde tornar-se mais symetrica, fazendo

$$2p = a+b+c,$$

que dará

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen}(p-b)\,.\,\text{sen}(p-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

(*) Como o 1.° membro é essencialmente positivo, bem como sen b e sen c (porque b e c são $<180°$), vê-se a necessidade de ser ao mesmo tempo $c<b+a$, e $c>b-a$, por isso que as relações contrarias são visivelmente absurdas; e recahe-se assim no theorema 6.° do n.° 166.

Se na 1.ª das equações (I) substituissemos $2\cos^2\frac{1}{2}A-1$ em logar de cos A, achariamos identicamente

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Finalmente, dividindo a 1.ª d'estas equações pela 2.ª, temos

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-a)}\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Qualquer d'estas equações resolve a questão.

2.° Caso. *Dados os tres angulos* A, B, C, *achar o lado* a?

Da propriedade do triangulo supplementar (pag. 315.) applicada ás equações precedentes, pela substituição dos valores (1) e (2), e fazendo

$$2P=A+B+C,$$

resulta

$$\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}a=-\frac{\cos P\cos(P-A)}{\operatorname{sen}B\ \operatorname{sen}C},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\operatorname{sen}B\,.\operatorname{sen}C},$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a=-\frac{\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}.$$

3.° Caso. *Dados dous lados* a e b, *e o angulo comprehendido* C, *achar o terceiro lado?*

Póde lançar-se mão da última das equações (I) debaixo da fórma seguinte

$$\cos c=\cos a\cos b\,(1+\operatorname{tang}a\tan b\cos C.)$$

Ou então, fazendo na mesma equação,

$$\cos C = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} C - 1\,,\ \cos c = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c\,,$$

vem

$$1 - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \cos(a+b) + 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) + 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Tomando um arco v tal, que dê $\operatorname{sen} v = \cos \frac{1}{2} C \sqrt{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$, teremos

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) - \operatorname{sen}^2 v\,,$$

ou, Part. II, n.° 207,

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b+2v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b-2v)\,,$$

equação mais accommodada ao calculo logarithmico, e da qual se deduzem facilmente, por simples permutações, as correspondentes nos outros lados.

4.° Caso. *Dados dous angulos* A e B, *e o lado adjacente* c, *achar o terceiro angulo* C?

A 3.ª das equações (III) dá

$$\cos C = \cos A \cos B\ (\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \cos c - 1).$$

Podemos tambem substituir os valores (1) e (2) nas fórmulas precedentes, e teremos

$$\operatorname{sen} v = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c \sqrt{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}\,,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A+B+2v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A+B-2v).$$

5.° Caso. *Conhecidas tres das quatro partes, dous lados e os angulos oppostos, achar a quarta?*

Deve empregar-se a *regra dos quatro senos*, equações (II).

173. Excepto o caso de serem conhecidos os tres lados ou os tres angulos de um triangulo, todo o problema de trigonometria espherica comprehende no numero das partes dadas um angulo e um lado adjacente, além de um terceiro elemento: no que vamos expor, designaremos sempre este angulo por A, e o lado por b.

Abaixe-se de um dos angulos C (fig. 29) um arco CD perpendicular sôbre o lado c. Este lado ficará cortado em dous segmentos φ e φ', e o angulo C em dous angulos θ e θ', isto é,

$$c = \varphi + \varphi', \quad D = \theta + \theta'.$$

Cumpre porém advertir: *que uma d'estas partes será negativa nas differentes equações, se o arco perpendicular caír fóra do triangulo, o que se dá quando um dos angulos* A *da base é agudo e o outro* B *é obtuso: e que serão todas as partes positivas, quando o arco caír dentro do triangulo, isto é, quando os dous angulos dados forem da mesma especie.*

Com effeito, se nos dous triangulos ACD, BCD, tirarmos os valores do arco perpendicular CD, por meio da equação (s), acharemos

$$\text{tang CD} = \text{tang A sen } \varphi = \text{tang B sen } \varphi'.$$

Sendo A e B da mesma especie, as suas tangentes terão o mesmo signal, e por conseguinte sen φ e sen φ' estarão no mesmo caso. Se A e B forem porém de especie differente, sen φ e sen φ' devem ter signaes contrarios; então o arco perpendicular CD cairá fóra do triangulo, e sómente um dos segmentos φ e φ' será negativo.

174. Vê-se na fig. 29 que o triangulo ABC se decompõe em dous ACD, BCD que podemos resolver separadamente, achando assim os elementos desconhecidos por meio dos que são dados. Este processo leva-nos a equações simples, ás quaes facilmente se applica o calculo por logarithmos, como passâmos a mostrar.

Resolvem-se primeiro os triangulos ACD, BCD, para d'elles deduzir uma das partes φ ou θ, do lado c ou do angulo C, suppondo conhecidos o angulo A e o lado adjacente b. Applicando as equações (r e p), deduzem-se as equações (a e a'). Applicando depois em cada um d'estes triangulos as equações (m, q, s, r), e eliminando o arco perpendicular CD em cada systema de duas analogas, obtem-se as equações (c, c', d, d').

$$\text{Tang}\ \varphi = \text{tang}\ b \cos A \ldots\ldots (a); \qquad \cot \theta = \cos b\ \text{tang}\ A \ldots\ldots (a')$$

$$c = \varphi + \varphi' \ldots\ldots\ldots (b); \qquad C = \theta + \theta' \ldots\ldots\ldots (b')$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \ldots\ldots\ldots (c); \qquad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\text{sen}\ \theta}{\text{sen}\ \theta'} \ldots\ldots\ldots (c')$$

$$\frac{\text{tang}\ A}{\text{tang}\ B} = \frac{\text{sen}\ \varphi'}{\text{sen}\ \varphi} \ldots\ldots\ldots (d); \qquad \frac{\text{tang}\ a}{\text{tang}\ b} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \ldots\ldots\ldots (d')$$

$$\frac{\text{sen}\ A}{\text{sen}\ a} = \frac{\text{sen}\ B}{\text{sen}\ b} = \frac{\text{sen}\ C}{\text{sen}\ c} \ldots\ldots\ldots (e)$$

Passâmos a ver os casos que podem appresentar-se, e a maneira de os resolver por meio d'estas equações.

Além das partes dadas A *e* b, ha mais um 3.° elemento.

1.° Se for conhecido c (*dous lados* b *e* c, *e o angulo comprehendido* A) a equação (a) dá φ; (b) dá φ', podendo estes arcos ter o signal negativo; (c) dá a; (d) dá B; e finalmente (e) dá C, cuja especie se determinará pelo que fica dito no n.° 173.

2.° Se for conhecido C (*dous angulos* A *e* C *e o angulo adjacente* b) a equação (a') dá θ; (b') dá θ', que póde ser negativo; (c') dá B; (d') dá a; (e) dá c, cuja especie é conhecida.

3.° Se for conhecido a (*dous lados* a *e* b, *e o angulo opposto* A) a equação (a) dá φ; (c) dá φ'; (b) dá c; (d e e) dão B e C. Ou então (a') dá θ; (d') dá θ'; (b') dá C; (c' e e) dão B e c.

N'este caso o problema offerece geralmente duas soluções; porque se calcularmos φ' ou θ' por meio do coseno, o arco apparece com os dous signaes $\pm$; c e C tem por conseguinte dous valores, excepto se tivermos de rejeitar algum, como negativo ou $>180.°$ As equações (c' e d) dão φ' e θ' por meio dos seus senos, d'onde resultam dous valores para C e c.

4.° Se for conhecido B (*dous angulos* A e B, *e o lado opposto* b) a equação (a') dá θ; (c') dá θ'; (b') dá C; (d' e e) dã o a e c. Ou então (a) dá φ; (d) dá φ'; (b) dá c; (c e e) dão a e c.

Tambem neste caso ha duas soluções, porque φ' e θ' sendo dados em senos, o arco tem dous valores supplementares; e por tanto c na equação (b), e a na equação (d'), apparecem com dous valores: o mesmo acontece com a e C nas equações (c e b'); etc.

Os quatro casos que analysámos, resolvem-se, como acabâmos de ver, por qualquer dos dous systemas das oito equações, um formado das equações sem accento, e outro das accentuadas. Sendo commum a ambos a equação (e) (*).

175. D'estas equações deduzem-se as seguintes consequencias importantes (fig. 29).

1.° A equação (c) dá

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\cos \varphi + \cos \varphi'},$$

e em virtude das equações de pag. 165, *Part.* 2.ª, e por ser $c = \varphi + \varphi'$, temos

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\varphi' - \varphi) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a + b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) \cot \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots (15)$$

Conhecidos a tres lados a, b, c de um triangulo, podemos por meio d'esta equação conhecer a semidifferença dos segmentos φ e φ', e conseguintemente os mesmos segmentos, por ser $\frac{1}{2} c$ a sua semisomma: e

---

(*) Querendo resolver um triangulo espherico, conhecidos dous lados e um angulo, ou dous angulos e um lado, abaixa-se de um dos vertices um arco perpendicular sôbre o lado opposto, a fim de formar dous triangulos rect angulos, um dos quaes, além do angulo recto, tenha duas partes conhecidas. Está claro, que este arco não deve partir do angulo dado no 1.° caso, nem caír no lado conhecido no 2.° Resolva-se este triangulo rectangulo, e calculem-se os dous segmentos da base φ e φ', ou os dos angulos do vertice θ e θ'. As equações (c), (c'), (d), (d') podem enunciar-se da maneira seguinte.

1.° Os cos dos dous lados do angulo, d'onde parte o arco perpendicular, estão entre si como os cos dos segmentos respectivos da base; as cot. d'estes lados estão como as cot. respectivas dos segmentos do angulo no vertice.

2.° As cot. dos dous angulos na base estão como os senos respectivos dos segmentos da base; os cos d'estes angulos estão como os senos dos segmentos respectivos do angulo no vertice.

depois resolvendo os triangulos rectangulos ACD, BCD, obtem-se os angulos A e B, pela fórmula

$$\cos A = \text{tang}\,\varphi \cot b,\quad \cos B = \text{tang}\,\varphi' \cot. a \;\ldots\ldots\; (16)$$

2.° A equação (d) dá do mesmo modo [veja-se *Part.2.ª* n.° 206 e equação (b]:

$$\frac{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B} = \frac{\text{sen}\,\varphi' - \text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\varphi' + \text{sen}\,\varphi} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\text{sen}\,(A - B)}{\text{sen}\,(A + B)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (17)$$

Conhecidos dous angulos A *e* B, *e o lado adjacente* c, por meio d'esta equação obteremos φ e φ' e depois determinar-se-hão a e b por meio das equações (16).

3.° A equação (c') dá, practicando da mesma maneira,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B)\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C \;\ldots\; (18)$$

Conhecidos os tres angulos A, B, C; obteremos por meio d'estas equações θ e θ'; e obteremos depois os lados a e b, resolvendo os triangulos ACD e BCD, que dão

$$\cos b = \cot\theta \cot A,\quad \cos a = \cot\theta' \cot B \;\ldots\ldots\ldots\; (19)$$

4.° Finalmente pela equação (d') teremos tambem

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \frac{\text{sen}\,(a - b)}{\text{sen}\,(a + b)}\cot\tfrac{1}{2}C \;\ldots\ldots\ldots\; (20)$$

Conhecidos dous lados a, b, *e o angulo comprehendido* C, obteremos θ e θ', e depois A e B pelas equações (19).

176. As equações que acabâmos de deduzir, servem tambem para demonstrar os theoremas conhecidos pelo nome de *analogias de Neper*. Egualando os valores (15) e (17) de $\tang\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$ teremos, por ser $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A'-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}c\,..\,(21)$$

Mas pela equação (e) temos $\quad \dfrac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}=\dfrac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}$;

logo (*Part.* 2.ª n.º 206) $\quad \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}=\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}$.

Multiplicando ambos os membros da equação (21) por esta última equação, todos os termos que não desapparecem pela divisão, ficam no quadrado; e extrahindo a raiz, vem

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c,\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\ (*)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (22)$$

resultando a 2.ª d'estas equações da divisão da equação (21) pela 1.ª

Egualando os valores (18 e 20) de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)$, e operando da mesma maneira sôbre a equação resultante; ou, o que val o mesmo, mudando nas equações precedentes os angulos A e B nos supplementos dos lados a e b, e reciprocamente, e depois $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$ em $\cot\frac{1}{2}C$: obteremos

---

(*) Como $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(A-B)$ é uma quantidade positiva, é necessario que $\operatorname{tang}.\frac{1}{2}(a+b)$ e $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ tenham o mesmo signal; donde se conclue que *a semisomma de dous angulos quaesquer é sempre da mesma especie que a semisomma dos dous lados oppostos; e reciprocamente.*

$$\left.\begin{aligned} \tang \tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C, \\ \tang \tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2} C. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (23)$$

São estas as chamadas *analogias de Neper :* e servem principalmente para achar dous lados a e b de um triangulo, conhecido o 3.° lado c, e os angulos adjacentes A e B (equações 22); ou para achar dous angulos A e B, conhecidos os dous lados oppostos a e b, e o angulo comprehendido C (equações 23).

177. *Triangulos isosceles.* Sejam C e B os dous angulos eguaes de um triangulo isosceles (fig. 29 rep.); b e c os dous lados eguaes; A o angulo do vertice, e a a base. O arco perpendicular, tirado do vertice para o meio da base, dá dous triangulos symetricos rectangulos, os quaes offerecem as seguintes relações formadas das combinações 3 a 3 dos quatro unicos elementos A, B, a, b, do triangulo isosceles. Assim, por meio d'estas relações, *dados dous dos quatro elementos de um triangulo espherico isosceles, o angulo* A *do vertice, a base* a, *um dos lados eguaes* b, *e um dos angulos eguaes* B, *podemos sempre achar os outros dous.*

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \operatorname{sen} b \dots\dots\dots\dots (n)$$

$$\cos b = \cot B \cot \tfrac{1}{2} A \dots\dots\dots\dots (p)$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \tang b \cos B \dots\dots\dots\dots (r)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \dots\dots\dots\dots (q)$$

Problemas que offerecem duas soluções.

178. Continuaremos a considerar os triangulos esphericos como resultando da secção de uma esphera por tres planos que passam pelo centro O. A fig. 31 tem por base o circulo KMK', e representa um hemis-

pherio separado por um d'estes planos; os outros dous planos dão as semi-circumferencias $AC\alpha$, BCB'', que na fig. se representam em prespectiva, e tem por intersecção o raio CO. Os planos das tres circumferencias determinam o triangulo espherico ABC. Os arcos CA, $C\alpha$ são supplementares; e o angulo A mede a inclinação do plano $AC\alpha$ sôbre a base KK'.

Se pelo raio CO tirarmos o plano MCm, perpendicularmente a esta base KK', e tomarmos depois $MA'=MA$, de uma e de outra parte d'este plano MCm, obteremos um segundo plano $A'C\alpha'$ symetrico com $AC\alpha$, que dará

$$m\alpha = m\alpha',\ AC = A'C,\ C\alpha = C\alpha',\ A = A' = \alpha = \alpha'.$$

Fazendo girar o plano $AC\alpha$ em volta do raio CO, a fim de tomar todas as posições CK, CB, Cf....., este plano será perpendicular á base quando coincidir com MCm; e além disto, em qualquer das suas posições formará com a base dous angulos supplementares, para um e para outro lado do plano. Os arcos CB, CA, Cf...., crescem á medida que se desviam do arco perpendicular $CM = \psi$, que é o mais pequeno de todos, até ao arco perpendicular opposto Cm, que é o maior. Isto mesmo se vê resolvendo qualquer dos triangulos, ACM por ex.°; porque fazendo $CA = b$, temos

$$\cos ACM = \cot b \tang \psi,$$

expressão na qual é $\tang \psi$ uma quantidade constante.

Quando o angulo ACM chega a 90°, como acontece com o arco CK, cujo plano é perpendicular a MCm, temos $\cot b=0$, e o arco $CK=90.°$ Se o plano continúa depois a girar para $C\alpha'$, $\cos ACM$ torna-se negativo, e cresce com $\cot b$; de maneira que o arco $C\alpha'$ continúa a augmentar. Tudo é symetrico dos dous lados do plano MCm, de maneira que os arcos e as inclinações serão eguaes, dous a dous para os arcos eguaes $MA=MA'$, isto é, será $CA = CA'$, e o angulo $A=A'$.

Girando por esta fórma, o plano secante começa por tornar-se cada vez mais obliquo sôbre a base KMK', tornando-se CB, CA, CK; porque do triangulo rectangulo resulta ainda

$$\text{sen}\,\psi = \text{sen}\,b\ \text{sen}\,A, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

equação, cujo primeiro membro é constante, e na qual $\operatorname{sen} b$ vai primeiramento crescendo, como acaba de dizer-se, e por conseguinte $\operatorname{sen} A$ decrescendo ao mesmo tempo. Porém logo que o lado b chega a $90°$, torna-se então CB em $CK = 90° = MK$; e depois $\operatorname{sen} b$ diminuindo faz com que $\operatorname{sen} A$ augmente, e com que o angulo A, agudo para a base, tendo chegado ao seu menor valor no ponto K, comece a crescer. Este ponto K é o *polo* da semicircumferencia MCm, e o angulo K tem por medida o arco $CM = \psi = K$; ou, do outro lado do plano secante, o arco $Cm = 180 - \psi$.

Vê-se pois que todos os arcos que partem de C (fig. 31), e passam por um ponto qualquer da base do semicirculo KMK' são $<90°$, entre tanto que os outros que passam por KmK' são $>90°$; e é $CK = CK' = 90.°$ Além disto $CM = \psi$, e $Cm = 180° - \psi$, valores de ψ resultantes da equação (24), são os limites da grandeza dos arcos CA. Quanto mais um arco se approxima de CM, mais pequeno é; e quanto mais se approxima de Cm, pelo contrario tanto maior se torna.

A inclinação dos planos sôbre a base, sendo de $90°$ em MCm, diminue quando toma as posições CB, CA, até CK, onde se torna $K = \psi$; cresce depois até m, tornando-se outra vez de $90°$ em Cm. O angulo é agudo do lado de CM, e obtuso do lado de Cm, sendo estes ultimos angulos supplementos respectivos dos primeiros. Todos estes angulos obtusos são $< 180° - \psi$.

Posto isto, com facilidade se reconhecerá, se n'um triangulo BCA ou B'CA, ou arco CM perpendicular sôbre a base AB, cae dentro ou fóra d'este triangulo, e verificar-se-hão os corollarios deduzidos no n.° 169, relativos á grandeza dos lados e dos angulos dos triangulos rectangulos.

Os problemas que offerecem duas soluções, aos quaes se costuma dar o nome de *casos duvidosos*, são aquelles, em que entram, nos dados, um angulo e um lado opposto, o que acontece nos problemas 3.° e 4.° do n.° 174.

179. 1.° Caso. *Sendo dados dous lados* a *e* b *e o angulo opposto* A. Corte-se o hemispherio KMK' (fig. 31) por um plano $AC\alpha$ que passe pelo centro O, e que tenha com a base uma inclinação egual ao angulo A; e tome-se depois $AC = b$. Será C o vertice do triangulo, o qual deve ser fechado por um arco $CB = a$, de grandeza dada. Percorrâmos os differentes casos.

1.° *Supponhamos que é o angulo* $A < 90.°$ O lado a que fecha o triangulo deverá então caír no espaço α V'MA; por que, se assim não fosse, e caísse como Cf, $C\alpha'$, ... então os triangulos CAf, $CA\alpha'$, ... teriam, em vez do angulo agudo A, outro que sería o seu supplemento, do outro lado do plano αCA. Os arcos, taes como CB e CB′, são eguaes dous a dous, e tem a mesma inclinação sôbre a base, quando passam por pontos B e B′ equidistantes de M. Tomemos $MA'=MA$, $MB'=MB$, os arcos serão $CB'=CA=b$, $CB'=CB=a$.

a) Consideremos primeiro o caso em que é *o lado* $b<90°$, por ex.° $b=CA$.

Se é *o lado* $a<b$, *a* cae no angulo A′CA, como CB e CB′, e temos dous triangulos BCA e B′CA, em que entram os tres elementos A, *b*, *a*, isto é, temos *duas soluções*. N'este caso um dos angulos B da base é obtuso, e o outro B′ é agudo.

Se é *o lado* $a=ou>b$, o arco *a* cae como Cf', e o triangnlo ACf' é o unico que reune os tres elementos dados, visto que o arco Cf symetrico com Cf', fica excluido, por estar para o outro lado do plano αCA. Por tanto ha *só uma solução*. O angulo B do triangulo ACf' é agudo em f', bem como *b*.

b) Consideremos em segundo logar o caso em que é *o lado* $b>90°$, por ex.° $b=C\alpha$.

Se é *a somma dos lados* $a+b<180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço ACA′, como CB ou CB′, ha *duas soluções* $BC\alpha$ e $B'C\alpha$. O angulo B da base destes triangulos é agudo n'um, obtuso n'outro.

Se é *a somma dos lados* $a+b=ou>180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço $A'C\alpha$, como Cf', ha *só uma solução* $f'C\alpha$; f' e *b* são obtusos.

2.° *Supponhamos* agora *que é o angulo* $A>90.°$ N'este caso o lado *a* que fecha o triangulo, partindo de C, deve estar para outro lado do plano αCA, e cair como Cf, CB″, ...

a′) Consideremos tambem em primeiro logar o caso em que é *o lado* $b<90°$, por ex.° $b=CA$.

Se é *a somma dos lados* $a+b>180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço $\alpha'C\alpha$, como CB″ ou CB‴, ha *duas soluções*, taes como ACB″ e ACB‴. Um dos dous angulos da base, B″ e B‴, é agudo, o outro obtuso.

Se é *a somma dos lados* $a+b=ou<180°$, isto é, se o lado *a* cae no espaço $AC\alpha'$, como CK, ha *só uma solução* ACK. O angulo K da base é agudo como *b*.

b′) Consideremos em segundo logar o caso em que é *o lado* $b>90°$, por ex.° $b=C\alpha$.

Se é *o lado* $a>b$, a cae no espaço $\alpha C\alpha'$, como CB'' e CB''', e ha duas soluções taes como $\alpha CB''$ e $\alpha CB'''$. O angulo da base B''' é agudo; o angulo B'' obtuso.

Se é *o lado* $a = ou < b$, a cae, como CK, no espaço $\alpha' CA$, e ha *só uma solução* possivel $KC\alpha$. O angulo K da base é obtuso com b.

Na seguinte tabella appresentâmos em resumo os differentes caracteres, que indicam a existencia de duas ou de uma só solução.

$$\text{Se } A<90^\circ \begin{cases} b<90^\circ \begin{cases} a<b \ldots\ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a \begin{cases} = \\ > \end{cases} b \ldots\ldots\ldots \text{ uma solução} \end{cases} \\ b>90^\circ \begin{cases} a+b<180^\circ \ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a+b \begin{cases} = \\ > \end{cases} 180^\circ \ldots \text{ uma solução} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Se } A>90^\circ \begin{cases} b<90^\circ \begin{cases} a+b>180^\circ \ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a+b \begin{cases} = \\ < \end{cases} 180^\circ \ldots \text{ uma solução} \end{cases} \\ b>90^\circ \begin{cases} a>b \ldots\ldots\ldots \text{ duas soluções} \\ a \begin{cases} = \\ < \end{cases} b \ldots\ldots\ldots \text{ uma solução.} \end{cases} \end{cases}$$

Viu-se pela analyse precedente, que, no caso de uma só solução, B e b são da mesma especie. Mas sabemos (n.° 173) que a perpendicular abaixada do vertice C sobre a base c, cae dentro ou fóra do triangulo (o que tambem se reconhece na fig. 31), conforme os angulos A e B da base são de similhante ou differente especie; por conseguinte *nas equações* $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, *empregar-se-ha o signal* $+$ *quando os arcos* A e b *forem da mesma especie*, *e* — *no caso contrario*, *o que indicará qual das soluções*, *que dá o calculo* n.° 174, 3.°, *se deve adoptar.*

Cumpre notar que o valor do lado a está entre os limites CM e Cm, isto é, entre ψ e $180^\circ - \psi$, como se deduz não só da equação (24), mas tambem da impossibilidade de construir o triangulo, quando a está fóra d'estes limites. Vê-se tambem na figura que no caso de A e a não serem da mesma especie, e de não estar o lado a comprehendido entre os limites b e $180° - b$, não ha triangulo possivel.

180. 2.° Caso. *Sendo dados dous angulos* A *e* B, *como um lado opposto* a.

Sem ser necessario discutir as differentes circumstancias na figura, este caso se reduzirá ao precedente pela consideração do triangulo supplementar $A'B'C'$ (n.° 167), no qual são conhecidos os lados $a' = 180° - A$, $b' = 180 - B$, e o angulo $A' = 180 - a$. E podemos servir-nos da tabella de cima, mudando os angulos nos lados oppostos, e reciprocamente.

Como neste caso B e b são da mesma especie quando ha só uma solução, vê-se, raciocinando como no caso precedente, que: *nas equações* $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, *se deve empregar o signal* $+$, *quando os arcos* B *e* a *forem da mesma especie, e o signal* $-$ *no outro caso; o que indicará qual das duas soluções, que dá o calculo* n.° 174, 4.°, *se deve adoptar ou rejeitar.*

O angulo A deve tambem neste caso ficar comprehendido entre os valores supplementares de ψ dados pela equação (24).

Não ha triangulo possivel, quando A e a não forem da mesma especie, e não estiver A entre os limites B e $180 - B$.

181. *Sendo o triangulo rectangulo*, e CM ou Cm um dos lados, se for dado um angulo e o lado opposto, haverá duas soluções, que em certos casos poderão reduzir-se a uma só.

1.° *Dada a hypothenusa* a *e um lado* b, *achar o angulo opposto* B? A equação (n) que resolve este caso, dá b expresso em senos, os quaes correspondem a dous arcos supplementares.

Dada a hypothenusa a *e o angulo* B, *achar o lado opposto* b? A mesma equação (n) dá dous arcos supplementares para o lado opposto b.

Com tudo, em ambos estes dous casos não ha senão uma solução possivel, porque os dous arcos CA ou CA′, que fecham o triangulo CMA ou CMA′, são symetricos; e por isso devem B e b ser da mesma especie, o que faz desapparecer a indecisão.

2.° *Se forem dados um lado* b *do angulo recto e o angulo opposto* B, *a terceira parte pedida admittirá dous valores.* Porque, ou se pede a hypothenusa a, e a equação (n) dá sen a; ou se pede o terceiro lado c, e a equação (s) dá sen c; ou finalmente se pede o angulo C adjacente ao lado conhecido, e emprega-se a equação (q), que dá sen C. Vê-se pois que a incognita admitte dous valores supplementares para o arco correspondente a cada um d'estes senos.

182. Passemos a fazer algumas applicações numericas.

I. Sejam $a = 133° \, 19'$, $b = 57° \, 28'$, $A = 45° \, 23'$. O triangulo é impossivel, porque a não está entre $57° \, 28'$, e o seu supplemento $122° \, 32'$; e porque alem disso não são A e a da mesma especie.

II. Outro tanto acontecerá se for $B = 120°$, $A = 51°$, $a = 101°$; porque tambem A não está entre $120°$ e o seu supplemento $60°$; e porque A e a não são da mesma especie.

III. Se for $b = 40° \, 0' \, 10''$, $a = 50° \, 10' \, 30''$, $A = 42° \, 15' \, 14''$, haverá uma unica solução, porqne $A < 90°$, $b < 90°$, $a > b$. B é $< 90°$; e porque A e b são da mesma especie, devemos tomar $c = \varphi + \varphi'$. O calculo das equações (a, c e b) n.º 174 dá

$\tan b$	$\bar{1}.9238563$	$\cos a$	$\bar{1}.8064817$	$\varphi =$	$31° 50' 46'$
$\cos A$	$\bar{1}.8693330$	$\cos \varphi$	$\bar{1}.9291471$	$\varphi' =$	$44.44.50$
$\tan \varphi$	$\bar{1}.7931893$	— $\cos b$	$\bar{1}.8842363$	$c =$	$76.35.36$
		$\cos \varphi'$	$\bar{1}.8513925$		

Para achar o angulo C do vertice, as equações (a', d' e b') dão

$\cos b$	$\bar{1}.8842363$	$\tan b$	$\bar{1}.9238563$	$\theta =$	$55° 9' 59''$
$\tan A$	$\bar{1}.9583058$	$\cot a$	$\bar{1}.9211182$	$\theta' =$	$66.26.21$
$\cot \theta$	$\bar{1}.8425421$	$\cos \theta$	$\bar{1}.7567851$	$C =$	$121.36.20$
		$\cos \theta'$	$\bar{1}.6017596$		

Finalmente a regra dos quatro senos (II) dá $B = 34° \, 15' 3''$.

IV. Se for $A = 42° \, 15' \, 14''$, $B = 121° \, 36' \, 20''$, $a = 50° \, 10' \, 30''$, teremos duas soluções, por ser $a < 90°$, $B > 90°$, $A + B < 180$; e por serem B e a de differente especie, tomaremos nos valores de c e C o signal —. As equações (a', c', e C) conduzem-nos ás seguintes operações.

cos a	$\bar{1}.8064817$	cos A ..	$\bar{1}.8693330$	sen a	$\bar{1}.8853636$
tang B	0.2108864 —	sen θ ..	$\bar{1}.8406262$ —	sen B	$\bar{1}.9302745$
cot θ	0.0173681 —	cos B .. —	$\bar{1}.7193880$ —	sen A .. —	$\bar{1}.8276379$
$\theta = -$	$43°51'16''$	sen θ'	$\bar{1}.9905712$ +	sen b ...	$\bar{1}.9880002$
$\theta' = -$	$78.6.19$	ou	$101°53'41''$	$b =$	$76°35'36''$
C =	$34.15.3$	ou C =	$581.2.25$	ou =	$103.24.24$

tang a	0.0788818	cot A	0.0416956
cos B	$\bar{1}.7193874$ —	tang B	0.2108873 —
tang φ	$\bar{1}.7982692$ —	sen φ	$\bar{1}.7259905$ —
$\varphi = -$	$32°8'50''$	sen φ'	$\bar{1}.9785734$ +
$\varphi' =$	$72.9.0$	ou	$107°51'0''$
$c =$	$40.0.10$	ou	$c = 75.42.10$

Uma d'estas duas soluções reproduz o triangulo precedente, e vem a ser $f'CA'$ (fig. 31); a outra fCA'.

Conhecendo os tres lados, achar um angulo?

$a = 76°35'36''$	sen	$\bar{1}.9880008$	os outros elementos do
$b = 50.10.30$	sen ...	$\bar{1}.8853636$	triangulos são:
$c = 40.0.10$			
$2p = 166.46.16$		$-\bar{1}.8733644$	$A = 121°36'19''8$
$p = 83.23.8$			$B = 42.15.13,7$
$p-a = 6.47.32$	sen	$\bar{1},0728716$	$C = 34.15.2,8$
$p-b = 33.12.38$	sen	$\bar{1}.7385565$	$\psi = 40.51.3,0$
	sen²	$\bar{2},9380637$	φ, φ', θ, θ', são dados
$\frac{1}{2}C = 27.7.31,4$	sen	$\bar{1},4690818$	acima; o triangulo será
$C = 34.15.2,8$			aqui o mesmo.

Concluiremos a trigonometria espherica, apresentando todos os elementos d'um triangulo espherico. Escolhendo á vontade tres d'estes elementos para servirem de dados, calcular-se-hão para exercicio os outros tres restantes (*Nota* 6.ª).

Arcos.	Log. sen.	Log. cos.	Log. tang.
A = 121°36′10″81	$\bar{1}$.9302747	$\bar{1}$.7193874 —	0.2108873 —
B = 42.15.13,66	$\bar{1}$.8276379	$\bar{1}$.8693336	$\bar{1}$.9583043
C = 34.15. 2,76	$\bar{1}$.7503664	$\bar{1}$.9172860	$\bar{1}$.8330804
a = 76.35.36,0	$\bar{1}$.9880008	$\bar{1}$.3652279	0.6227729
b = 50.10.30,0	$\bar{1}$.8853636	$\bar{1}$.8064817	0.0788816
c = 40. 0.10.0	$\bar{1}$.8080926	$\bar{1}$.8842463	$\bar{1}$.9238564
$\varphi_{\prime}$ = — 32. 8.50,0	$\bar{1}$.7259905 —	$\bar{1}$.9277212	$\bar{1}$.7982693 —
φ' = 72. 9. 0,0	$\bar{1}$.9785741	$\bar{1}$.4864674	0.4921067
θ = — 43.01.16,2	$\bar{1}$.8406263 —	$\bar{1}$.8579964	$\bar{1}$.9826249 —
θ' = 78. 6.19,0	$\bar{1}$.9905733	$\bar{1}$.3141076	0.6764656
A respeito do arco perpendicular será			
ψ = 40.51. 3,0	$\bar{1}$.8156388	$\bar{1}$.9368787	$\bar{1}$.8787602

II. Superficies e curvas no espaço.

Principios geraes.

183. Para exprimir analyticamente a posição no espaço de um ponto M (fig. 32), imaginem-se tres planos fixos zAx, xAy, zAy, taes que se cortem todos no mesmo ponto A, e tenham dous a dous por intersecção *os eixos* Ax, Ay, Az, que para mais facilidade supporemos por hora rectangulares. Marque-se depois a distancia PM, ou $z = c$, d'este ponto á sua projecção P (P. II. n.° 119, 3.°) sôbre um d'estes planos; e tambem esta projecção por meio das coordenadas AN, AS do ponto R, ou $x = a$, $y = b$. As quantidades dadas, ou as *coordenadas* a, b, c, são as distancias MO, MR, MP, do ponto M aos tres planos, e são tambem as arestas que determinam o parallepipedo ON.

Reflectindo que, além do angulo triedro $zAxy$, os outros planos coordenados formam mais sete triedros, reconhecer-se-ha que a posição do ponto M no espaço não fica determinada pelas coordenadas a, b, c, em quanto não introduzirmos as noções sôbre os signaes (P. II. n.° 214). Para as aplicar a este caso convencionou-se: que se considerassem negativos os z correspondentes aos pontos que ficassem abaixo do plano xAy, produzido indefinidamente: que se considerassem negativos os x correspondentes aos pontos que ficassem por a esquerda do plano zAy, do lado x': e finalmente que se considerassem tambem negativos os y correspondentes aos pontos que ficassem por traz do plano zAx.

184. Succede muitas vezes que em uma questão tudo é similhante a respeito dos tres eixos x, y, z. Havendo então uma equação $X=0$, relativa ao eixo dos x, haverá uma similhante $Y=0$, correspondente ao eixo dos y, e uma terceira $Z=0$ relativa ao eixo dos z. Ora neste caso, as duas ultimas equações $Y=0$ e $Z=0$ podem deduzir-se de $X=0$ por simples mudança de letras. As permutações devem fazer-se pela seguinte maneira.

Poremos em X todas as quantidades relativas ao eixo dos x em lugar das quantidades analogas correspondentes ao eixo dos y; depois estas em logar das que correspondem ao eixo z; e finalmente estas ultimas quantidades em logar das primeiras que correspondiam ao eixo dos x. Por esta permutação *em gyro*, deduziremos Z de X; por uma segunda permutação da mesma natureza effectuada sobre Z, obteremos Y; e por uma terceira analoga, effectuada sobre Y, recairemos em X.

Supponhamos que temos as tres equações similhantes $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, relativas aos tres eixos e nas quaes além de x, y e z entram os tres angulos α, β, γ, que correspondem respectivamente a estas tres coordenadas.

Assentaremos em uma linha, mas separadamente, as tres coordenadas e os tres angulos; depois por baixo n'outra linha, tambem separadamente, mas dispostas por ordem differente, as mesmas seis quantidades, pela fórma seguinte

$$\begin{array}{ll} x,\ y,\ z, & \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ z,\ x,\ y, & \gamma,\ \alpha,\ \beta, \end{array}$$

Feito isto substituiremos, na 1.ª equação $X=0$, cada uma das quantidades da linha superior pela quantidade correspondente da linha inferior; e com esta permutação obteremos a 3.ª equação $Z=0$. Poremos de novo nesta ultima, as quantidades da linha inferior em lugar das que lhe correspondem na linha superior, e virá a 2.ª equação $Y=0$; e operando similhantemente sobre essa equação, recaíremos na 1.ª $X=0$, d'onde partiramos.

E com effeito, cada uma d'estas operações equival a uma mudança nos eixos das coordenadas, pela qual se fazem primeiramente girar os eixos dos x e dos y no seu plano, por tal modo que o eixo dos x positivos vem caír sobre o eixo dos y positivos, e este sobre o eixo dos x negativos. Faz-se depois girar este eixo dos y positivos assim deslocado, e o eixo dos z positivos, de maneira que o primeiro vem caír sôbre o eixo dos z positivos, e este ultimo sobre o eixo primitivo dos x positivos; d'onde resulta que a final cada um dos eixos das coordenadas positivas vem occupar o logar de um dos outros eixos das coordenadas positivas. É por isso que as equações relativas aos tres eixos coordenados se deduzem umas das outras por simples permutações de letras, sem ser necessario bulir nos signaes; o que não aconteceria, se simultaneamente se não permutassem pela maneira indicada as tres coordenadas, e as quantidades que respectivamente lhes correspondem.

185. Se for dada uma equação entre as tres coordenadas, tal como $f(x, y, z)=0$, esta equação será indeterminada. Se dermos a duas d'estas variaveis quaesquer valores, $x=a=AN$, $y=b=PN$ (fig. 32), da equação proposta resultará para z, pelo menos, uma raiz $z=c$. Se esta for real, levantaremos do ponto P sôbre o plano yAx a perpendicular $PM=c$, e d'este modo o ponto M do espaço ficará determinado. Dando outros valores ás arbitrarias x e y, isto é, tomando, como se quizer, differentes pontos P sôbre o plano xAy, deduziremos da equação os valores correspondentes de z, que determinarão outros tantos pontos do espaço. Todos estes pontos assim achados estarão sôbre uma superficie, que será *o logar* de todos elles, quando os imaginarmos unidos por lei de continuidade. Esta superficie será, por exemplo, um cóne, um cylindro, uma esphera; e assim $f(x, y, z)=0$ será a *equação da superficie*, porque distingue os seus pontos de todos outros do espaço.

Se z tiver muitos valores reaes, a superficie terá muitos ramos (*); e se for imaginario, a perpendicular indifinida levantada em P sôbre o plano xy não encontrará a superficie.

Se depois de havermos assignado um valor a y, tal como $y=b=AS$, fizermos variar x, a ordenada $PM=z$ mover-se-ha na direcção SP parallela ao plano xz, e as variações correspondentes, por que passar, serão determina-

(*) Não havendo em portuguez palavra propria, que exprima o mesmo que a palavra *nappe* adoptada pelos geometras francezes, assentámos que a expressão *ramos da superficie* podia exprimir a idea de que se tracta, estando de mais a mais em analogia com outra já adoptada de *ramos de curva*.

das pela equação $f(x, b, z)=0$, que será por conseguinte a da intersecção da superficie pelo plano SM parallelo aos xz. Pela mesma razão fazendo $x=a=\mathrm{AN}$, ou $z=c=\mathrm{AT}$, teremos as intersecções da superficie pelos planos MN, ou OR, parallelos aos yz ou aos xy.

Fica assim evidente: que $z=0$ é a equação do plano xy; $z=c$ a de um plano que lhe é parallelo á distancia c; $x=0$ a equação do plano yz; $x=a$ a do plano parallelo á distancia a; etc.

Do triangulo rectangulo AMP resulta $z^2+\mathrm{AP}^2=\mathrm{AM}^2$; e como APN dá $\mathrm{AP}^2=x^2+y^2$, será, fazendo $\mathrm{AM}=\mathrm{R}$,

$$(1)\ldots\ldots x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2.$$

Logo: 1.° a distancia de um ponto á origem das coordenadas é egual á raiz da somma dos quadrados das tres coordenadas do mesmo ponto: 2.° se x y e z forem variaveis, esta equação caracterisará todos os pontos do espaço, cuja distancia R á origem é a mesma; e será por conseguinte a *equação da esphera*, que tem o raio R, e o centro na origem das coordenadas.

Sejam (fig. 33) n e m as projecções sôbre o plano xy dos dous pontos N (x, y, z) e M (x', y', z'); mn será a projecção da linha $\mathrm{MN}=\mathrm{R}$, e teremos (P. II, n.° 222)

$$mn^2=(x-x')^2+(y-y')^2.$$

Além disso a linha MP parallela a mn, formando o triangulo MNP rectangulo em P, dá

$\mathrm{MN}^2=\mathrm{MP}^2+\mathrm{PN}^2=mn^2+\mathrm{PN}^2$; e como $\mathrm{PN}=\mathrm{N}n-\mathrm{M}m=z-z'$, será

$$(2)\ldots.(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\mathrm{R}^2,$$

sendo R a distancia entre os pontos (x, y, z) e (x', y', z') (*). Se consi-

(*) Como mB, nC (fig. 33) parallelas a Ay, dão $\mathrm{BC}=x-x'=$ á projecção de MN sôbre o eixo dos x (P. II. n.° 119, 3°), vê-se que *o comprimento de uma linha no espaço é a raiz da somma dos quadrados das suas projecções sôbre os tres eixos.*

Temos tambem $\mathrm{MP}=\mathrm{MN}\cos\mathrm{NMP}$; logo a projecção $mn=\mathrm{MN}$ é o producto da linha projectada pelo cos. da inclinação; e, reciprocamente, uma linha no espaço é o quociente da sua projecção sôbre um plano, dividida pelo coseno do angulo que a linha faz com o mesmo plano. Estes theoremas extendem-se tambem ás áreas planas situadas no espaço, como veremos adiante.

derarmos x, y, z como variaveis, *esta equação será a de uma esphera de raio* R, cujo centro está situado no ponto M (x', y', z').

186. Imaginemos a superficie de um cylindro recto (P. II. n.° 134), tendo por base uma curva qualquer sôbre o plano xy, dada pela sua equação $f(x, y) = 0$. A perpendicular indefinida z, levantada em qualquer ponto d'esta curva sôbre o plano xy, é uma generatriz d'este solido; e por conseguinte qualquer valor que se dê a z, sempre a extremidade d'esta perpendicular estará sôbre a superficie do cylindro.

Por conseguinte: *a equação da superficie de um cylindro recto é a da sua base*, ou $f(x, y) = 0$.

Quando a generatriz do cylindro recto for perpendicular ao plano dos xz, a equação d'esta superficie será a da base traçada na quelle plano.

Por um raciocinio identico se prova, que a equação de um plano, perpendicular a um dos planos coordenados, é a mesma que a do seu *traço* sôbre este plano, isto é, a da linha de intersecção dos dous planos. Assim, se for $AB = \alpha$ (fig. 33 *rep.*) e $a = \text{tang CBI}$, a equação $x' = az + \alpha$, que é a da linha BC existente no plano zAx, será tambem a do plano FEBC, perpendicular a zAx, e que passa por BC.

187. Sejam $M=0$, $N=0$, as equações de duas quaesquer superficies, e vejamos o que resulta da sua combinação.

Ficando neste caso arbitrária só uma das variaveis, z por ex.°, este systema de equações representará a serie de pontos communs a ambas as superficies, ou por outras palavras a curva resultante da sua intersecção.

188. Assim, recapitulando, vê-se: que *um ponto fica determinado por tres equações entre as suas tres coordenadas*, x, y, *e* z; *uma superficie por uma só equação entre as tres coordenadas variaveis dos seus differentes pontos; e uma curva por duas equações, que vem a ser as das duas superficies, que na sua intersecção determinam esta linha.*

Como por uma linha dada podem passar infinitas superficies, é claro que *uma curva no espaço póde ser dada por uma infinidade d'equações.*

Eliminando z entre $M = 0$ e $N = 0$, obtem-se uma equação $P = 0$ entre x e y. Esta equação é a de um cylindro recto, cuja intersecção com qualquer das duas superficies é a curva de que se tracta: e tambem é a equação da projecção da mesma curva sôbre xy. Se em vez de z, eliminarmos y, vê-se do mesmo modo que a equação resultante $Q = 0$, é a de um cylindro recto, ou a da projecção da curva sôbre o plano xz. Assim $P = 0$, $Q = 0$, são as equações de dous cylindros, que podêmos substituir ás superficies dadas; e são tambem as equações das projecções da curva, e as da mesma curva. D'onde se segue, que *podemos tomar por* *equações de uma curva as equações das suas projecções sôbre dous planos coordenados.*

189. Appliquemos estes principios á linha recta. Podemos tomar para as duas equações as de dous planos quaesquer, que contenham a mesma recta; convirá porém preferir as que appresentam resultados mais simples. Assim $x=0$, $y=0$, que são as equações dos planos yz e xz, são as equações do eixo dos z; $x=0$, $z=0$, são as do eixo dos y; e $y=0$, $z=0$, são as do eixo dos x. Do mesmo modo se vê, que $x=\alpha$, $y=\beta$, são as equações de uma recta PM (fig. 32) parallela aos z, e cujo pé P, ou intersecção com o plano xy, tem por coordenadas $x=\alpha$, $y=\beta$. E assim a respeito dos outros eixos.

Dada uma recta qualquer EF no espaço (fig. 33 *rep.*), tiremos por ella um plano FEBC perpendicular ao plano xz; BC será a sua projecção sôbre este plano. Do mesmo modo acharemos a projecção HG de EF sôbre o plano yz. As equações d'estas projecções, ou dos planos projectantes, ou

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x=az+\alpha, \quad y=bz+\beta,$$

são as da recta EF.

É facil de ver, que α e β são as coordenadas AB e AG do ponto E, onde a recta EF encontra o plano xy; e que a e b são as tangentes dos angulos formados pelas projecções BC e HG da mesma recta com o eixo AZ. Eliminando z, obtem-se a equação da projecção sôbre o plano xy,

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ay=bx+a\beta-b\alpha.$$

190. Se a recta EF (fig. 33 *rep.*) passar por um ponto F (x', y', z'), as projecções C e H d'este ponto estarão situadas sôbre as da recta; logo as equações da mesma recta serão (P. II. n.° 219)

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z').$$

Se a recta passar por um segundo ponto (x'', y'', z''), obteremos outras duas equações similhantes, por meio das quaes e das precedentes se determinarão os valores de a e b, que são $a=\dfrac{x''-x'}{z''-z'}$, $b=\dfrac{y''-y'}{z''-z'}$.

Se a recta passar pela origem A, as equações serão

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = az, \quad y = bz.$$

É facil mostrar, que as projecções de duas rectas parallelas sôbre um mesmo plano, são parallelas (P. II. n.° 115); logo as equações d'estas rectas devem ter os mesmos coefficientes a e b para z, e differir unicamente nos valores das constantes α e β.

191. Se forem dadas as equações de duas rectas

$$x = a\,z + \alpha,\ y = bz + \beta;\ x = a'z + \alpha',\ y = b'z + \beta',$$

e eliminarmos entre ellas as coordenadas variaveis x, y, z, virá uma equação

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha - \alpha')(b - b') = (\beta - \beta')(a - a'),$$

a qual, sendo independente das mesmas variaveis, é *a condição necessaria para que as mesmas rectas se encontrem*. Se ella não for satisfeita, as linhas não se cortarão; e se o for, o ponto de intersecção terá por coordenadas

$$z = \frac{\alpha - \alpha'}{a' - a} = \frac{\beta - \beta'}{b' - b},\ x = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a},\ y = \frac{b'\beta - b\beta'}{b' - b}.$$

Se as rectas forem parallelas, será então $a = a'$, $b = b'$, e os valores das coordenadas sairão infinitos, o que indica que as mesmas rectas se não podem encontrar.

Equações do Plano, do Cylindro, do Cóne, etc.

192. As condições pelas quaes se determina a natureza de qualquer superficie, reduzem-se sempre, em última analyse, á lei da sua geração, a

qual consiste em que uma curva *generatriz*, de fórma constante ou variavel, se move de certa maneira ao longo de uma ou muitas linhas dadas, que se chamam *directrizes*, e gera assim a superficie de que se tracta. Para achar a equação da superficie gerada emprega-se um raciocinio similhante ao do n.° 325 da P. II.; do que passâmos a dar alguns exemplos, começando pelo plano.

Um plano DC (fig. 34) *póde considerar-se gerado por uma recta* EF, *que conservando-se sempre parallela a uma direcção determinada, é obrigada a mover-se sôbre uma recta fixa.* Supponhâmos pois, que a *generatriz* EF, ficando sempre parallela á intersecção BC do plano DC com o plano dos xz, é obrigada, em qualquer das suas posições, a encontrar sempre a intersecção BD do mesmo plano DC com o plano dos yz, a qual é n'este caso a *directriz*. Para achar a equação do plano é necessario exprimir analyticamente estas duas condições.

As duas secções BC e BD encontrando-se em B no eixo dos z, tem por equações, fazendo $AB = C$,

$$BC \ldots\ldots\ldots y = 0, \qquad z = Ax + C,$$

$$BD \ldots\ldots\ldots x = 0, \qquad z = By + C \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como a linha EF, em qualquer das suas posições, deve ser sempre parallela a BC, o plano projectante EHIF será parallelo a zx, e HI a Ax. A projecção de EF sôbre o plano zx tambem será parallela a BC. Assim as equações de EF serão

$$y = \alpha, \quad z = Ax + \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Eliminando x, y, z entre estas ultimas equações, e as equações (1) da directriz, obtem-se a equação

$$\beta = B\alpha + C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

a qual, pelo que fica dicto (n.° 191), é a *equação de condição para que* *a generatriz tenha*, em todas as suas posições, *um ponto commum com a directriz fixa.*

Se dermos pois a α e β valores que satisfaçam á ultima equação (3), e os substituirmos em (2), estas serão as de generatriz n'uma das suas posições. Se nas equações (2) substituirmos o valor (3) de β, estas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor arbitrario que se der a α. E finalmente, se entre as equações (2) e (3) eliminarmos α e β, a equação resultante

$$z = Ax + By + C, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sendo independente d'aquellas quantidades, será a do plano; por isso que então x, y, z representam as coordenadas de uma generatriz qualquer, de que o plano é o *logar geometrico.*

Da analyse da equação do plano se vê: 1.° que C representa a coordenada z inicial, ou AB: 2.° que A e B representam as tangente dos angulos, que fazem com os eixos dos x e dos z os traços BC e BD do plano sôbre os dos xz e dos yz: 3.° que se fizermos variar C sómente, o plano se moverá parallelamente, por isso que os traços successivos se conservam parallelos.

Conclue-se tambem do que fica exposto:

1.° Que toda a equação do 1.° grão a tres variaveis é a de um plano, porque póde sempre reduzir-se á fórma (4).

2.° Que duas equações quaesquer do 1.° grão a tres variaveis, são as de uma linha recta, resultante da intersecção dos planos representados por aquellas equações.

3.° Que, sendo dada a equação do plano, obteremos as equações dos seus traços com os planos dos xz, yz e xy, fazendo nella respectivamente $y=0$, $x=0$, $z=0$, que são as equações dos mesmos planos. Assim $Ax + By + C = 0$ é a equação do traço do plano com o dos xy.

Podiamos ter considerado o plano gerado por uma recta qualquer no espaço obrigada a mover-se sôbre outras duas, que poderiam ser os traços do mesmo plano com dous dos planos coordenados. Este calculo, um pouco mais complicado, e que propomos para exercicio, conduziria aos mesmos resultados.

193. Por um raciocinio identico acharemos a equação do *Cylindro,*

o qual (P. II. n.° 134) *póde considerar-se gerado por uma recta qualquer, que conservando-se parallela a si mesma, é obrigada no seu movimento a encontrar sempre uma curva dada no espaço.*

Sejam

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (a)$$

as equações d'uma recta parallela á generatriz, nas quaes a e b se suppõe conhecidas, e α e β dependentes da posição da recta. Sejam tambem $M = 0$, $N = 0$ as equações da directriz. A condição para que esta curva seja encontrada sempre pela generatriz é expressa (n.° 191) pela equação $\beta = F\alpha$, resultante da eliminição de x, y, z, entre as quatro equações d'estas linhas.

Se nas equações (a) substituirmos $F\alpha$ por β, estas duas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor de α.

Se depois eliminarmos d'ellas a quantidade α, obteremos uma relação entre x, y e z, que terá logar para qualquer generatriz, e que será por conseguinte a equação pedida.

Logo, para achar a equação de uma superficie cylindrica, devemos eliminar x, y e z entre as equações (a) e as duas $M = 0$, $N = 0$ da curva directriz; depois na equação resultante $\beta = F\alpha$, substituir $x - az$ por α, e $y - bz$ por β A *equação do cylindro* será pois da fórma

$$y = bz = F(x - az); \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

dependendo a fórma da funcção F da natureza dá directriz.

Se por ex.°, a base for um circulo de raio r, traçado no plano xy, e collocado como na fig. 36, com o diametro AE sôbre o eixo dos x, e a origem em A: as equações d'esta base, que se póde tomar por directriz, serão

$$y^2 + x^2 = 2rx, \quad z = 0;$$

entre as quaes e as equações (a) se eliminarmos x, y, z, virá a equação de condição (*) $\beta^2 + \alpha^2 = 2r\alpha$ (*).

(*) Isto é evidente, reflectindo, que α e β são as coordenadas do pé da generatriz. A mesma consideração se fará a respeito do cone.

Poder-se-hia achar a equação do plano, considerando-o como um cylindro cuja base é uma recta.

Logo

$$(y-bz)^2+(x-az)^2=2r(x-az)\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

é a *equação do cylindro obliquo de base circular*. As quantidades a e b serão determinadas pela direcção do eixo.

Se o eixo estiver no plano xz, será $b=0$, e a equação precedente tornar-se-ha em

$$y^2+(x-az)^2=2r(x-az).$$

Finalmente, se o centro do circulo estiver na origem A, substituir-se-ha por r^2 o 2.° membro de (5).

194. Sejam $\qquad M=0,\ N=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ (a')$

as equações da directriz de *uma superficie conica*, qualquer (P. II. n.° 136) cujo vertice S tem por coordenadas a, b, c.

A generatriz d'esta superficie é obrigada a passar pelo vertice e a encontrar sempre no seu movimento a directriz.

A 1.ª condição é expressa (n.° 190) pela equação

$$x-a=\alpha(z-c),\ y-b=6(z-c)\ldots\ldots\ldots\ (a'')$$

A 2.ª é expressa, (n.° 191) pela equação $6=F\alpha$, resultante da eliminação de x, y, z, entre as equações (a') e (a'').

Eliminando depois 6 e α por meio das equações (a'') virá a *equação do cone*

$$\frac{y-b}{z-c}=F\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

na qual a fórma de F dependerá tambem da natureza da directriz, e será determinada quando esta o for.

Se, por ex.° a base for o circulo AE (fig. 36), que podemos tomar por directriz, as suas equações (a'), suppondo a origem na extremidade A do diametro, e este coincidindo com o eixo dos x, serão

$$z=0,\ y^2+x^2=2rx;$$

e a equação $\beta = F\alpha$ será 'neste caso

$$(a-\alpha c)^2+(b-\beta c)^2=2r(a-\alpha c):$$

d'onde se deduz

$$(az-cx)^2+(bz-cy)^2=2r(z-c).(az-cx),$$

a qual será a *equação do cone obliquo de base circular.*

Se quizermos que o eixo SC esteja no plano xz, como na fig. 36, faremos $b=0$, e virá

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz+a(a-2r)z^2+2acrz-2c^2rx=0.$$

Se o *cóne é recto*, poremos $a=r$. Mas 'neste caso é mais simples tomar o eixo dos z para o eixo do cóne, e acha-se então para equação d'esta superficie assim disposta,

$$c^2(x^2+y^2)=r^2(z-c)^2, \text{ ou } x^2+y^2=m^2(z-c)^2, \ldots\ldots \quad (7)$$

designando por m a tangente $\frac{r}{c}$ do angulo formado pelo eixo e pela generatriz.

Se o circulo da base não fosse traçado no plano xy, mas n'outro inclinado sôbre este, e perpendicular aos xz, sería necessario, designando por A a tangente do angulo que a base fizesse com o plano xy, substituir por (a') as equações

$$z=Ax,\quad x^2+y^2+z^2=r^2.$$

195. As *superficies de revolução* podem considerar-se geradas (P. II. n.° 133) pelo movimento de um circulo BDC (fig. 37), o qual sendo perpendicular a um eixo Az, conserva sempre o centro I sôbre este eixo, e cujo raio IC vai continuamente variando, de modo que o circulo corta sempre uma dada directriz CAB.

Como o circulo genitor deve ficar constantemente parallelo ao plano dos xy, as suas equações serão as do seu plano e do seu cylindro projectante, ou, fazendo $AI=\beta$, e o raio $IC=\alpha$,

$$z=\beta,\quad x^2+y^2=\alpha^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(b)$$

Para que este circulo encontre sempre a directriz, cujas equações designaremos por

$$M=0,\quad N=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(b'),$$

é necessario, segundo temos visto, que tenha logar a equação de condição $F(\alpha,\beta)=0$, resultante da eliminação de x, y, z, entre (b) e (b').

Se depois eliminarmos α e β entre esta equação e as equações (b), obteremos a *equação* pedida *da superficie de revolução*, que será de fórma

$$z=F(x^2+y^2) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(8)$$

e na qual a funcção F dependerá ainda da natureza da curva directriz.

I. Se a directriz é um circulo existente no plano xz e com o centro na origem, as equações (b') serão neste caso

$$y=0,\quad x^2+z^2=r^2;$$

e a equação de condição tornar-se-ha em $\alpha^2+\beta^2=r^2$, o que aliás é evidente. Substituindo 'nella os valores de α e β deduzidos de (b), virá a *equação da esphera*, já achada (n.° 185)

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

II. Se a directriz é *uma parabola* BAC existente no plano xz, e situada como na fig. 37, as equações da directriz serão

$$y=0\,,\ x^2=2pz,$$

d'onde se deduz $\alpha^2=2p\beta$; e por fim

$$x^2+y^2=2pz, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

que é *a equação do paraboloide de revolução* em volta do eixo dos z.

III. Se as directrizes forem *ellipses* ou *hyperboles*, acharemos pela mesma maneira que as *equações do ellipsoides e hyperboloides de revolução*, cujos 1.^{os} eixos coincidem com os dos z, são

$$A^2(x^2+y^2)\pm B^2z^2=\pm A^2B^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

sendo os signaes superiores relativos ao ellipsoide, e os inferiores ao hyperboloide.

IV. Se a directriz é uma recta, as suas equações serão

$$x=az+A\,,\ y=bz+B\,,$$

das quaes resulta a equação de condição

$$(a\beta+A)^2+(b\beta+B)^2=\alpha^2.$$

Eliminando α e β, virá por fim a equação da superficie de revolução

$$x^2+y^2=(a^2+b^2)\,z^2+2\,(Aa+Bb)\,z+A^2+B^2.$$

Fazendo $x=0$, acha-se (P. II. n.º310) que a intersecção pelo plano yz é uma hyperbole, e como x e y entram sempre debaixo da fórma x^2+y^2, z será funcção de x^2+y^2, e por conseguinte a *superficie gerada é um hyperboloide de revolução.*

Com tudo se a recta directriz cortar o eixo dos z, as suas equações serão satisfeitas fazendo $x=y=0$, e $z=c$, donde resulta $A=-ac$, $B=-bc$. Teremos pois

$$(a^2+b^2)(z-c)^2=x^2+y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

a qual é a *equação do cóne recto* (n.° 194).

Querendo a equação de uma superficie de revolução em volta de um eixo com uma direcção qualquer, será necessario ou recorrer a uma transformação de coordenadas, ou tractar directamente o problema de uma maneira analoga á que temos seguido.

Problemas sôbre o plano e a linha recta.

196. Cumpre advertir aqui, como na P. II. n.° 224, que a respeito das superficies se podem appresentar dous generos de problemas. Ou se tracta de determinar os pontos de uma dada superficie que gozam de certas propriedades, ou então de assignar á superficie uma posição ou dimensões taes, que por meio d'ellas satisfaça a certas condições. No 1.° caso x, y e z são as incognitas; no 2.° é necessario determinar algumas das constantes de modo que sejam satisfeitas as condições do problema. Estas condições devem, em todos os casos, estabelecer tantas equações distinctas quantas são as incognitas, aliás o problema seria indeterminado ou absurdo. Passêmos a applicar ao plano estas considerações geraes.

197. *Achar as projecções da intersecção de dous planos.*

Sejam as equações d'estes planos

$$z=Ax+By+C,\ z=A'x+B'x+C'.$$

Eliminando successivamente entre estas equações as variaveis z, x, y, obteremos as equações seguintes das projecções da intersecção sôbre os planos

$$(1)\begin{cases}\text{dos } xy\ldots\ldots\ldots (A-A')x+(B-B')y+C-C'=0\\ \text{dos } yz\ldots\ldots\ldots (A'-A)z+(AB'-A'B)y+AC'-A'C=0,\\ \text{dos } xz\ldots\ldots\ldots (B'-B)z+(A'B-AB')x+BC'-B'C=0.\end{cases}$$

198. *Fazer passar um plano por um, dous ou tres pontos dados.*

Seja a equação do plano $z=Ax+By+C$.

O plano ficará determinado, ou quando A, B, C forem conhecidas, ou quando se poderem estabelecer entre estas quantidades tres equações, por meio das quaes se determinem os seu valores.

Se quizermos que o plano passe pelo ponto dado (x', y', z'), a sua equação tornar-se-ha em $z'=Ax'+By'+C$. Subtrahindo pois esta última equação da primeira, teremos a equação do plano que passa pelo ponto dado,

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ z-z'=A(x-x')+B(y-y')$$

Se quizermos, que passe por um segundo ponto (x'', y'', z''), teremos $z''=Ax''+By''+C$; e como nos falta ainda uma equação para podermos determinar as tres constantes arbitrarias, podemos sujeitar o plano a passar ainda por um terceiro ponto, ou a satisfazer a outra condição.

Mas se quizessemos por ex.°, que o plano além de passar pelo ponto $(x', y', z',)$ fosse parallelo a um plano determinado $z=A'x+B'y+C'$, teriamos a equação (2), e as equações

$$A=A',\ B=B'.$$

199. *Achar as condições para que uma recta e um plano coincidam ou sejam parallelos.*

Sejam as equações do plano e da recta

$$z=Ax+By+C,$$

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta.$$

Substituindo na 1.ª, os valores de x e y, tirados das duas últimas, teremos

$$z(Aa+Bb-1)+A\alpha+B\beta+C=0.$$

Se a recta e o plano tivessem um só ponto commum, o valor de z tirado d'esta equação sería o de uma das coordenadas d'este ponto.

Para que a recta porém coincida com o plano, é necessario que esta última equação subsista qualquer que seja o valor de z; e por conseguinte as equações de *condição de coincidencia* serão

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Aa+Bb=1\,,\; A\alpha+B\beta+C=0.$$

Para exprimir que a recta é sómente parallela ao plano, basta introduzir a condição de que, se transportarmos parallelamente a si mesmo tanto a recta como o plano até á origem, ahi hão-de concidir. Mas para que este transporte tenha logar é necessario suppor nullos nas equações precedentes α, β e C; logo a *condição de parallelismo* reduz-se á equação

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad Aa+Bb-1=0.$$

200. *Exprimir que uma recta é perpendicular a um plano.*

Se projectarmos a recta sôbre o plano dos xy, o plano projectante será perpendicular ao plano dado e ao dos xy; os dous últimos terão pois por intersecção uma perpendicular ao plano projectante, e por conseguinte á projecção da recta sôbre o plano dos xy. Logo, *quando uma linha for perpendicular a um plano, os traços deste plano e as projecções da recta sobre os planos coordenados farão respectivamente angulos rectos.*

Posto isto, servindo-nos das mesmas equações do plano e da linha recta do n.° precedente, as equações dos traços do plano sôbre os xz e yz, serão

$$z=Ax+C\,,\quad z=By+C$$

ou

$$x=\frac{1}{A}z-\frac{C}{A},\; y=\frac{1}{B}z-\frac{C}{B}\,;$$

e as condições de perpendicularidade d'estes traços com as projecções da recta, darão (P. II. n.° 220, equação 6)

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad A+a=0, \quad B+b=0.$$

Estas equações determinam duas das constantes do plano, ou da recta que lhe é perpendicular. As outras constantes devem ser dadas, ou sujeitas a outras condições.

201. Querendo tirar um plano perpendicular á recta dada, a equação do plano será pelo n.° precedente,

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z+ax+by=C$$

Se designarmos por α e β as coordenadas do ponto onde a recta encontra o plano xy, uma esphera, cujo centro esteja 'neste ponto, terá por equação (n.° 185)

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2.$$

As equações (6) *e* (7) *são pois as de um circulo cujo plano é perpendicular á recta dada.* O raio d'este circulo e a sua posição absoluta dependem de r e de C.

Sejam $M=0$, $N=0$, as equações de uma curva. Para que esta encontre o circulo de que acabâmos de tractar, é necessario que possam coexistir as quatro equações precedentes. Eliminando entre ellas as variaveis x, y e z, vem uma equação de condição $r=F(C)$, na qual repondo por r e C os seus valores tirados de (7) e (6), vem a equação

$$(8) \ldots\ldots\ldots \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2}=F(z+ax+by),$$

que é a da superficie gerada pela revolução da curva dada em volta da recta.

202. Se pelo contrario quizermos *tirar uma recta que seja perpendicular a um plano dado, e que passe por um dado ponto* (x', y', z'), teremos

200 (n.° 19$\cancel{8}$) para determinal-a as seguintes equações

— $$(9) \;\ldots\ldots\; x - x' + A(z - z') = 0,\quad y \cancel{+} y' + B(z - z') = 0.$$

Por meio d'estas duas equações é facil *achar a distancia do ponto ao plano*; por quanto pondo

$$L = C - z' + Ax' + Bx';$$

dando á equação do plano a fórma

\+ $$(a) \;\ldots\ldots\ldots\; z - z' = A(x - x') \cancel{-} B(y - y') + L;$$

e eliminando depois as coordenadas x, y e z do pé da perpendicular, entre as equações (9) e (a): resulta finalmente

$$z - z' = \frac{L}{1 + A^2 + B^2},\quad x - x' = \frac{-AL}{1 + A^2 + B^2},\quad y - y' = \frac{-BL}{1 + A^2 + B^2}.$$

A distancia entre o ponto (x', y', z') e o pé da perpendicular (x, y, z), ou por outras palavras, a distancia do ponto ao plano, será pois (n.° 185)

$$(10) \;\ldots\ldots\ldots\; \delta = \frac{L}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \quad (*)$$

(*) Se o ponto pertencer a uma recta ($x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$,) será

$$\delta = \frac{(Aa + Bb - 1)z + A\alpha + B\beta + C}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

Para que a recta seja parallela ao plano, é necessario que δ seja constante, ou

$$Aa - Bb - 1 = 0.$$

203. *Achar a distancia de um ponto a uma recta.* Servindo-nos das mesmas equações da recta do n.° 199, o plano perpendicular, tirado pelo ponto dado $(x', y', z',)$, tem por equação

$$(a') \ldots\ldots\ldots\ldots a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Eliminando x, y e z entre a equação (a') e as duas da recta, obteremos os seguintes valores das coordenadas do ponto de encontro da recta com o plano perpendicular,

$$x=\frac{aM}{1+a^2+b^2}+\alpha,\ y=\frac{bM}{1+a^2+b^2}+\beta,\ z=\frac{M}{1+a^2+b^2},$$

sendo

$$M=a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'.$$

E por conseguinte concluiremos tambem (n.° 185), que a distancia P entre os pontos (x', y', z'), (x, y, z), ou por outras palavras, que a distancia P, do ponto á recta, é dada pela equação

$$(11) \ldots\ldots\ldots P^2=(x'-\alpha)^2+(x'-6)^2+z'^2-\frac{M^2}{1+a^2+b^2}$$

204. *Achar o angulo* A *formado por duas rectas.* Como póde acontecer que as rectas dadas, sendo produzidas, se não encontrem, deve entender-se, que se pede *o angulo comprehendido entre duas rectas tiradas por um mesmo ponto parallelamente ás linhas dadas.*

Sejam pois as equações das parallelas ás rectas dadas, tiradas pela origem,

---

E para que coincida com elle, é necessario, além dlsso, que seja $\delta=0$, ou

$$A\alpha+B6+C=0.$$

Por esta consideração podiam tambem determinar-se as condições pedidas no n.° 199.

$$(b) \ldots\ldots x = az,\ z = bz; \quad (b') \ldots\ldots x = a'z,\ y = b'z;$$

tractâmos de achar A em funcção de a, b, a', b'.

Para isso imagine-se primeiro uma esphera, cujo centro coincida com a origem das coordenadas, e cujo raio seja a unidade. Obteremos as coordenadas do ponto em que ella corta a recta dada pelas equações (b), substituindo os valores de x e y, tirados das mesmas equações, na equação da esphera, que é

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

e acha-se $(a^2 + b^2 + 1)\,z^2 = 1$, da qual se deduz z, e depois x e y por meio das mesmas equações (b). Para obter depois as coordenadas z', x', e y' do ponto, em que a mesma esphera corta a recta dada pelas equações (b'), basta evidentemente mudar nos valores precedentes a e b em a' e b'.

Teremos assim

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + a^2}},\ x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},\ y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},\ x' = \frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},\ y' = \frac{b'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

A distancia D, entre os pontos determinados por estes dous systemas de coordenadas, será dada pela equação

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = 2 - 2\,(xx' + yy' + zz'),$$

por ser

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Figurando agora no espaço o triangulo isosceles, cujos tres lados são 1, 1 e D, o angulo pedido A será opposto ao lado D; e por conseguinte a equação (D, n.° 201, P. II.) dará para este angulo

$$(12)\ldots\ldots\ldots\ldots \cos A = 1 - \tfrac{1}{2} D^2 = xx' + yy' + zz'$$

$$= \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

D'esta última equação deduz-se, pela relação conhecida $sen = \sqrt{1 - cos^2}$,

$$(13)\ldots\ldots \operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}};$$

e facilmente se obteria depois o valor de tang A.

1.° Para deduzir os angulos X, Y, Z, que uma recta faz com os eixos dos x, y e z, basta substituir nas equações precedentes, em logar de a' e b', os seus valores correspondentes a cada um d'estes eixos. Querendo achar, por ex.°, o angulo que uma recta faz com o eixo dos z, cuja posição é determinada pelas equações $x = 0$, $y = 0$, teremos em virtude das equações (b') $a' = 0$, $b' = 0$. Introduzindo estes valores na formula (12) do n.° precedente, resulta

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

E notando que o systema das equações (b) do mesmo n.° póde ser substituido pelo systema equivalente

$$y = \frac{b}{a} x, \quad z = \frac{1}{a} x, \qquad x = \frac{a}{b} y, \quad z = \frac{1}{b} y;$$

acham-se por simples permutações, mudando a e b em $\frac{b}{a}$ e $\frac{1}{a}$ para x, e a e b em $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{b}$ para y, os valores de cos X e de cos Y.

Por este modo acharemos que *os angulos, que uma recta qualquer no espaço faz com os tres eixos coordenados, são determinados pelas equações seguintes:*

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \cos X = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \\ \cos Y = \dfrac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \\ \cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}. \end{cases}$$

2.° As equações (14) são tambem os valores dos senos dos angulos que a recta faz com os planos dos yz, xz e xy; pois que estes angulos são visivelmente complementos de X, Y e Z.

3.° Sommando os quadrados das equações (14), vem a relação

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

As equações (14) e (15) fazem ver, que podemos sempre tirar no espaço uma recta, que forme com dous dos eixos coordenados, os dos x e dos y por ex.°, angulos arbitrarios X e Y; porém o terceiro Z fica então determinado.

4.° Tomemos um comprimento qualquer MN (fig. 33) sôbre uma recta no espaço, que faz os angulos X, Y e Z com os eixos coordenados, e projectemos o mesmo comprimento sôbre os x e os y. As projecções serão

$$\text{BC} = \text{MN} . \cos X, \text{ e MN } \cos Y.$$

Porém mn, ou MP, é a projecção de MN sôbre o plano xy, e por conseguinte é $mn = \text{MN} \text{ sen } Z$. Projectando de novo mn sôbre os x e os y, as projecções serão

$$BC = mn \cos\theta\,, \text{ e } \quad mn \text{ sen } \theta\,,$$

sendo θ o angulo que mn faz com os x. Substituindo depois 'nestas equações por mn o seu valor precedente, vem

$$BC = MN \text{ sen } Z \cos\theta, \text{ e } MN \text{ sen } Z \text{ sen } \theta.$$

Egualando finalmente os dous valores das mesmas projecções, resulta

$$(16) \ldots\ldots \cos X = \text{sen } Z \cos\theta\,, \ \cos Y = \text{sen } Z \text{ sen } \theta.$$

Assim, em vez de determinar a direcção de uma linha no espaço por meio dos tres angulos X, Y, Z, que ella faz com os tres eixos: basta que seja dado o angulo que ella faz com a sua projecção sôbre o plano dos xy (que é o complemento do angulo Z); e o angulo θ que esta projecção faz com o eixo dos X; e reciprocamente.

Sommando os quadrados das duas equações (16), vem

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = \text{sen}^2 Z = 1 - \cos^2 Z,$$

relação que já tinhamos obtido 3.°

5.° Sommando os valores dos productos $\cos X \cos X'$, $\cos Y \cos Y'$, $\cos Z \cos Z'$, dados pelas fórmulas, e comparando a somma com a equação (12) acha-se a relação

$$(17) \ldots\, \cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z',$$

por meio da qual se exprime o valor do angulo, que fazem duas rectas no espaço, em funcção do angulo que cada uma d'ellas faz com os tres eixos.

6.° *Se as duas rectas fórem perpendiculares*, será $\cos A = 0$, e esta condição será expressa por qualquer das relações seguintes

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 + aa' + bb' = 0,$$

$$(19) \ldots\ldots \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0.$$

205. ***Achar o angulo θ de dous planos, dados pelas suas equações***

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C'.$$

Se da origem abaixarmos perpendiculares sôbre os dous planos, o angulo feito por estas linhas será egual ao dos planos. Sendo pois

$$x = az, \; y = bz, \quad x = a'z, \; y = b'z,$$

as equações de duas rectas que passam pela origem; para que estas rectas sejam respectivamente parallelas aos dous planos, é necessario que sejam (n.° 200)

$$A + a = 0, \; B + b = 0; \quad A' + a' = 0, \; B' + b' = 0.$$

Logo as equações das perpendiculares serão

$$x + Az = 0, \; y + Bz = 0, \quad x + A'z = 0, \; y + B'z = 0;$$

e o coseno do angulo d'estas rectas, que é o dos dous planos, será (n.° 204)

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\theta = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}\,\sqrt{1 + A'^2 + B'^2}}.$$

1.° Se fizermos tomar ao 2.° plano a situação dos yx, a sua equação tornar-se-ha em $z=0$; é necessario por tanto, que na equação (20) se faça $A'=B'=C'=0$, a fim de obtermos o angulo V que um plano faz com o dos xy. Por meio de simples permutações, como no n.° 204, obteremos os angulos T e U, que o mesmo plano faz com os xz, e yz. Por conseguinte

$$(21) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \cos U &= \frac{A}{\sqrt{1+A^2+B^2}}, \\ \cos T &= \frac{B}{\sqrt{1+A^2+B^2}}, \\ \cos V &= \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B}}. \end{aligned} \right.$$

Destas equações deduzem-se as relações

$$(22) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos^2 T + \cos^2 U + \cos^2 V = 1.$$

$$(23) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\theta = \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + V \cos V'.$$

A última da-nos o angulo dos dous planos em funcção dos angulos que cada um d'elles faz respectivamente com os tres planos coordenados.

2.° *Se os dous planos forem perpendiculares*, será $\cos\theta=0$, e esta condição será expressa por qualquer das duas relações seguintes:

$$(24) \ldots\ldots\ldots\ldots 1 + AA' + BB' = 0,$$

$$(25) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V' = 0.$$

206. *Achar o angulo η de uma recta e de um plano.*

Sejam

$$z = Ax + By + C, \quad \text{e} \quad x = az + \alpha, \ y = bz + \beta,$$

as equações do plano e da recta. O angulo pedido é egual ao que a recta faz com a sua projecção sôbre o plano (n.° 119 P. II.); conseguintemente se de um ponto da recta abaixarmos uma perpendicular sôbre o mesmo plano, o angulo d'estas duas linhas será complemento do angulo η.

Tiremos pois pela origem uma recta qualquer $x = a'z$, $y = b'z$; para que ella seja perpendicular ao plano, é necessario (n.° 200), que seja $a' = -A$, $b' = -B$. O coseno do angulo que ella forma com a linha dada, sendo egual a sen η, teremos (n.° 204)

$$(26) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{sen} \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{1+a^2+b^2} \times \sqrt{1+A^2+B^2}},$$

D'aqui facilmente se conclue, como no n.° 205, que os angulos que a recta forma com os planos coordenados yz, xz, e xy, tem por senos respectivos

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \ \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \ \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

2.° o que concorda com o que já vimos (n.° 204, ~~3~~.°).

207. *Se a recta for parallela ao plano*, sendo então sen $\eta = 0$, esta condição será expressa pela relação

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 - Aa - Bb = 0.$$

Transformação de coordenadas.

208. *Passar de um systema de coordenadas para outro de coordenadas parallelas ás primeiras com a origem n'um ponto differente* (α, β, γ).

Veremos por um raciocinio similhante ao que empregámos no n.° 232, P. II, que deve fazer-se

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

É necessario advertir ainda, que ás coordenadas da nova origem α, β, γ devem dar-se os valores e os signaes convenientes á sua posição. Por exemplo, se a origem estiver no plano dos xy, será $\gamma = 0$; se estiver no eixo dos z negativos, α e β serão nullos, e γ será negativo.

209. *Mudar a direcção dos eixos.* Imaginem-se (fig. 38) tres novos eixos Ax', Ay', Az'; e supponhamos os eixos primitivos rectangulares, e estes novos eixos com uma direcção dada arbitrariamente. Tomé-se um ponto qualquer e tirem-se as suas coordenadas x', y' e z'. Se depois projectarmos successivamente estas coordenadas sôbre os tres eixos primitivos dos x, dos y e dos z; cada uma das coordenadas x, y, e z será, á similhança do que se viu no n.° 233, da P. II., a somma das tres projecções sôbre o eixo respectivo.

Designe-se por $(x\ x')$ o angulo x'Ax formado pelo eixo dos x' e dos x; por $(y\ y')$ o angulo yAy'; .... etc: teremos

$$(\mathrm{A}) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x), \\ y = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y), \\ z = x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z). \end{array} \right.$$

Como suppuzemos os eixos primitivos rectangulares, os angulos precedentes não são inteiramente arbitrarios, por isso que devem satisfazer (n.º 204, 3.º) ás relações

$$(B) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1, \\ \cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1, \\ \cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1. \end{cases}$$

Fazendo, para simplificar,

$$S=\cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z),$$

$$T=\cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z),$$

$$U=\cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z),$$

teremos para exprimir os angulos que os novos eixos fazem entre si (n.º 204, 5.º) as equações

$$(C) \ldots\ldots\ldots \cos(x'y')=S, \quad \cos(x'z')=T, \quad \cos(y'z')=U.$$

Se as novas coordenadas forem rectangulares, teremos

$$(D) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S=0, \quad T=0, \quad U=0.$$

As equações (A), (B), (C), (D) contém os nove angulos que os eixos x', y', z' fazem com os x, y, z. Se quizermos sómente mudar de um systema de coordenadas rectangulares para outro de coordenadas de direcção obliqua, teremos apenas seis angulos arbitrarios, porque as equações (B) determinam tres.

E se, além disto, quizermos, que o segundo systema seja tambem rectangular, as equações (D), que exprimem esta condição, deixarão unicamente tres angulos arbitrarios.

Com effeito o eixo dos x' faz com os x, y, z tres angulos, dous dos quaes são arbitrarios, e o terceiro vem a ser determinado pela 1.ª das equações (B): o eixo dos y' estaria no mesmo caso se não fosse sujeito a ser perpendicular aos x'; esta condição porém não deixa realmente mais que uma arbitraria: e como o eixo dos z', perpendicular ao plano $x'y'$, vem a ser determinado com os dados antecedentes, são por fim sómente tres as quantidades arbitrarias.

Os valores de x', y', z', deduzidos de (A) serviriam para *transformar um systema de coordenadas obliquas n' outro rectangular.* E por meio das mesmas fórmulas (A), passando d'este último systema para outro obliquo, conseguiriamos *transformar um systema obliquo n'outro tambem obliquo.*

Na resolução d'este problema suppuzemos que a origem das coordenadas se conservou a mesma; se quizermos porém que esta mude tambem, passaremos, primeiro que tudo, pelo modo indicado no n.º precedente, para um systema de eixos parallelos aos primeiros e que passe pela nova origem.

210. *Para passar de um systema rectangular por outro systema tambem rectangular*, em vez de nos servirmos das fórmulas precedentes, que para a resolução do problema nos conduzem a uma eliminação as mais das vezes trabalhosa, podemos servir-nos das *fórmulas* seguintes, *devidas a Euler*, por meio das quaes se exprimem immediatamente as nove constantes em funcção de outras tres escolhidas da maneira seguinte:

Tome-se um plano $\mathrm{CA}y'x'$ (fig. 38) com a inclinação θ sôbre o plano $x\mathrm{A}y$; e seja AC a intersecção d'estes planos, e $\mathrm{CA}x = \psi$ o angulo, que AC faz com $\mathrm{A}x$. No plano $\mathrm{CA}y'$ determinado por θ e ψ, tracemos dous eixos rectangulares $\mathrm{A}x'$, $\mathrm{A}y'$; e seja $\mathrm{CA}x' = \varphi$ o angulo que o primeiro faz com o traço AC. Por este meio os novos eixos vem a ser determinados pelos angulos θ, ψ e φ, que, dão a inclinação do plano $x'y'$ sôbre o plano xy, bem como a direcção do traço AC, e a de $\mathrm{A}x'$ n'este plano $x'y'$ assim determinado. O eixo y' fórma, n'este plano, com $\mathrm{A}x'$ o angulo $x'\mathrm{A}y'$ de $90°$; e o eixo z' fica determinado pela condição de ser perpendicular a este mesmo plano.

Tracta-se pois, a fim de transformar os eixos, de exprimir os nove angulos $(x'x)$, $(y'x)$, ..., que entram em (A), em funcção d'estas tres constantes θ, ψ e φ.

..

As rectas Ax, Ax' e AC formam um triedro, no qual se conhecem além dos dous angulos planos φ e ψ, o angulo diedro θ comprehendido por elles. Applicando a este caso a fórmula (3, pag. 317,) da Trigonometria espherica; e fazendo

$$c=(x'x),\ C=\theta,\ a=\psi,\ b=\varphi,$$

teremos

$$\cos(x'x)=\cos\psi\cos\varphi+\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta.$$

Operando analogamente, a respeito do angulo xAy', sôbre o triedro formado por AC e pelos eixos x e y'; determinaremos $\cos(yx')$, advertindo que n'este caso os angulos planos são $(y'x)$, $CAy'=90°+\varphi$, $CAx=\psi$. Para obter $\cos(x'y)$ empregaremos o triedro $x'ACy$, considerando os angulos planos $(x'y)$, $CAy=90+\psi$, e $CAx'=\varphi$. Finalmente para $\cos(y'y)$, tomaremos o triedro $y'ACy$, e os angulos planos $(y'y)$, $CAy'=90°+\psi$, e $CAy=90°+\varphi$.
Em resultado acharemos

$$\cos(y'x)=-\cos\psi\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi\cos\varphi\cos\theta,$$

$$\cos(x'y)=-\operatorname{sen}\psi\cos\varphi+\cos\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,$$

$$\cos(y'y)=\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta.$$

Consideremos agora o triedro $z'AxC$. O eixo Az' faz com AC um angulo recto (n.º 113, P. II.), assim como com o plano CAy'; e o angulo formado pelos planos xy e $z'AC$ é de $90°+\theta$, suppondo o plano CAy' situado para a parte superior do plano xy. Fazendo pois na equação (3) de pag. 317

$$c=(z'x),\ C=90°+\theta,\ a=90°,\ b=\psi,$$

teremos $$\cos(z'x)=-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta.$$

Do mesmo modo o triedro $z'ACy$, pondo $\psi+90°$ por ψ, dá

$$\cos(z'y)=-\cos\psi\operatorname{sen}\theta,$$

Finalmente, sendo o angulo zAC tambem recto, e o angulo diedro $zACx' = 90° - \theta$, teremos no triedro $zACx'$

$$\cos(x'z) = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,$$

d'onde
$$\cos(y'z) = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta;$$

e
$$\cos(z'z) = \cos\theta.$$

Temos assim determinado em funcção de θ, φ e ψ os nove coefficientes de (A), os quaes substituidos nas mesmas fórmulas dão

$$(E) \cdots\cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} x = {} & x'(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi) \\ & + y'(\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi) \\ & + z' \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi; \\ y = {} & x'(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi) \\ & + y'(\cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi) \\ & + z' \operatorname{sen}\theta\cos\psi; \\ z = {} & -x'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - y'\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + z'\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

As equações de condição (B) e (D) são tambem satisfeitas pelos valores precedentes, como facilmente se póde verificar.

Coordenadas polares no espaço.

211. A posição de um ponto no espaço ficará tambem determinada, como no n.º 237 da P. II., quando se conhecer o seu *raio vector* ou a sua distancia a um ponto fixo, e os angulos que esta recta fórma com os eixos coordenados.

Sejam X, Y e Z estes angulos, e seja ρ o raio vector, ou a distancia da origem das coordenadas ao ponto (x, y, z) que se quer determinar. Teremos (pag. 345 (*))

$$(F) \ldots\ldots\ldots \quad x = \rho \cos X, \quad y = \rho \cos Y, \quad x = \rho \cos Z,$$

fórmulas por meio das quaes se póde *passar de um systema rectangular para outro polar, ou vice versa*, advertindo que os angulos X, Y, Z, estão ligados pela relação já obtida, n.° 204 (15),

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Em vez dos angulos X, Y e Z emprega-se muitas vezes, como já dissemos no n.° 231, o angulo formado pelo raio vector com a sua projecção no plano dos xy; e o angulo θ, que esta projecção faz com o eixo positivo dos x. Para esta transformação podemos servir-nos das fórmulas (16) do n.° 204 advertindo que o angulo Z, que entra n'ellas se deve mudar em $90° - \varphi$ Assim, sendo

$$\cos X = \cos \varphi \cos \theta, \quad \cos Y = \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad \cos Z = \operatorname{sen} \varphi,$$

teremos, substituindo em (F),

$$(G) \ldots\ldots \quad x = \rho \cos \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

Das intersecções planas.

212. Quando da intersecção de duas superficies resulta uma curva plana, é mais commodo, para achar as suas propriedades, referil-a a coordenadas tomadas no plano DOC (fig. 39) da curva, o qual é determinado pelo angulo θ que fórma com o plano xy, e pelo angulo ψ que a intersecção OC d'estes planos faz com Ox. Tomemos esta linha OC para eixo dos x'; e para eixo des y' a perpendicular OA, abaixada sôbre OC, no plano secante DOC.

Como a questão se reduz a obter em x' e y' a equação da curva, re-resultante da intersecção das superficies; é claro que, feita a transformação (A) para referir uma d'estas superficies aos eixos x', y', z', bastará depois fazer $z'=0$, e ter-se-ha a sua intersecção com o plano $x'Oy'$. Porém, 'n-este caso tão simples, será melhor fazer $z'=0$ nas equações (A), e procurar directamente os valores de $\cos(x'x)$, $\cos(y'x)$......

Assim no triedro AOCB, em que são conhecidos os angulos planos $a=\psi$, $b=90°$, e o angulo diedro $C=\theta$ comprehendido por estes lados: temos

$$\cos(y'x)=\operatorname{sen}\psi\cos\theta,\quad \cos(y'y)=-\cos\psi\cos\theta.$$

Além disto

$$(x'x)=\psi,\ (x'y)=90°-\psi,\ (x'z)=90.°$$

Finalmente o plano $x'Oy'$, que suppomos estar para a parte de cima do plano dos xy, faz com Oz o angulo $(y'z)=90°-\theta$. Dão pois as equações (A)

$$(\text{H})\ \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x=x'\cos\psi+y'\operatorname{sen}\psi\cos\theta,\\ y=x'\operatorname{sen}\psi-y'\cos\psi\cos\theta,\\ z=y'\operatorname{sen}\theta. \end{array}\right.$$

Obteriamos estes mesmos resultados servindo-nos das equações do n.° 210.

213. Appliquemos as equações (H) ao cóne obliquo de base circular. O plano zAx (fig. 36) perpendicular ao plano secante AB, e que passa pelo eixo SC, será o dos (xz): a secção AB d'estes dous planos, ou o *eixo da curva*, corta esta no vertice A, que tomaremos para origem das coordenadas: o plano xAy, parallelo á base circular do cóne, será o dos xy; e da sua intersecção com o cóne resultará um circulo AE, de raio r, que poderemos considerar como a curva *directriz* (n.° 194). Por esta fórma, tendo o cóne por coordenadas do vertice $(a, 0, c)$, o eixo no plano xz, e a base no plano xy, a sua equação será, como no n.° citado,

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz+a(a-zr)z^2+z\,acrz-zc^2rx=0.$$

E como o plano AB perpendicular aos xz corta o plano xy pelo eixo Ay, deveremos pôr $\psi = 90°$ nas equações (H); d'onde resultará

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = y' \cos\theta, \quad y = x', \quad z = x' \,\text{seu}\, \theta$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y'^2 [c^2 \cos^2\theta + 2c(r - a) \,\text{sen}\, \theta \cos\theta + (a^2 - 2ar) \,\text{sen}^2 \theta]$$
$$+ c^2 x'^2 + 2cry' (a \,\text{sen}\, \theta - c \cos\theta) = 0.$$

Tal é a equação da curva, que póde representar todas as secções do cóne obliquo (excepto as parallelas á base) fazendo variar a, c, r e θ; os x' são contados sôbre Ay, os y' sôbre AB. A discussão d'esta equação não involve difficuldades (n.° 309, P. II), e acham-se em resultado curvas da mesma especie das secções do cóne recto.

Querendo que a secção seja um circulo, é necessario tornar eguaes, os coefficientes de x'^2 e y'^2 (n.° 304, P. II,); logo

/(/2 $$(c^2 + 2ar - a^2) \,\text{tang}^2 \theta = 2c(r - a) \,\text{tang}\, \theta.$$

Tomando a primeira raiz $\text{tang}\, \theta = 0$, recairemos na equação da base AE do cóne.

Querendo interpretar o outro valor de $\text{tang}\, \theta$, temos

/+ $$\text{tang SAD} = \frac{\text{SD}}{\text{AD}} = \frac{c}{a}, \ \text{tang SAB} = \text{tan}\,(\text{SAD} - \theta) = \frac{c - a \,\text{tang}\, \theta}{a + c \,\text{tang}\, \theta}.$$

Substituindo por $\text{tang}\, \theta$ a segunda raiz, vem, feitas as reducções,

/2 $$\text{tang SAB} = \frac{c^3 + a^2 c}{2a^2 r - a^3 + 2c^2 r - ac^2} = \frac{c}{2r - a} = -\frac{\text{SD}}{\text{DE}},$$

ou $$\text{tang SAB} = -\text{tang SED} = \text{tang SEA}.$$

Por tanto ainda 'neste caso *a secção será um circulo*, quando os angulos SAB', SEA, formados com as generatrizes oppostas, forem eguaes.

O plano secante yAB comparado com o circulo AE da base, é ao que se chama *secção subcontraria.*

Para obter as secções planas do cóne recto, basta fazer $a=r$ na equação (2), do que resulta

$$(3) \ldots\ y'^2(c^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta) + c^2x'^2 + 2cry'(r\,\text{sen}\,\theta - c\cos\theta) = 0\,;$$

equação que se reduz á do n.° 258, P. II.

Finalmente vê-se na equação (3), que da egualdade dos dous factores de y'^2 e x'^2 não póde resultar mais do que um valor para θ, $\text{sen}\,\theta=0$; e com effeito, 'neste caso, a secção subcontraria coincide com a base.

214. O cylindro obliquo de base circular, situada como a do cóne de que acabámos de tractar, e cujo eixo se acha tambem no plano dos xz, tem por equação (n.° 93)

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ y^2 + (x-az)^2 = 2r(x-az).$$

Introduzindo nella os valores (1), o que equival a suppor o plano secante perpendicular aos xz, vem

$$(5) \ldots\ y'^2(\cos^2\theta + a^2\,\text{sen}^2\,\theta - 2a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + x'^2 = 2ry'(\cos\theta - a\,\text{sen}\,\theta).$$

A secção é uma ellipse, que se reduz ao circulo: ou quando $\text{sen}\,\theta=0$, o que dá a base do cylindro; ou quando $(a^2-1)\,\text{tang}\,\theta=2a$, ou (equação L. n.° 205, P. II.)

$$\text{tang}\,\theta = -\,\text{tang}\,2\alpha\,,$$

sendo α o angulo que o eixo do cylindro faz com eixo dos z. Logo este 2.° valor de θ é o supplemento de 2α.

Superficies da segunda ordem.

215. A equação mais geral do 2.° gráo entre tres variaveis tem a fórma

$$(1)\ldots\; ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz=k,$$

e as *superficies* que representa, chamam-se *de segunda ordem* em virtude do gráo da equação. Para *discutir* esta, isto é, para determinar a natureza e posição das superficies que representa, convem simplifical-a transformando as coordenadas, de modo que desappareçam os termos em xy, xz e yz. Para isso, passaremos primeiro dos eixos primitivos, que sempre podemos suppor rectangulares, para outros obliquos por meio das fórmulas (A) da pag. 369, sujeitando depois os nove angulos que nellas entram ás tres condições (B), donde resultarão por fim seis arbitrarias, de que podemos dispor á vontade. Se egualarmos a zero os termos em que entram $x'y'$, $x'z'$ e $y'z'$, reduziremos as seis arbitrarias a tres. E se quizermos além disso que a direcção dos novos eixos seja tambem rectangular, condição que é expressa pelas tres relações (D), ficará o problema determinado, por que estas relações determinarão as tres arbitrarias que nos restavam.

Este calculo simplifica-se pelo processo seguinte. Sejam $x=\alpha z$, $y=\beta z$, as equações do eixo dos x'. Fazendo, por abbreviar,

$$l=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+6^2}},$$

acharemos (pag. 364)

$$\cos(x'x)=l\alpha,\quad \cos(x'y)=l6,\quad \cos(x'z)=l:$$

e fazendo hypotheses analogas para as equações $x=\alpha'z$, $y=6'z$, do eixo dos y', e para a do eixo dos z': virá

$$\cos(y'x) = l'\alpha', \quad \cos(y'y) = l'\beta', \quad \cos(y'z) = l';$$

$$\cos(z'x) = l''\alpha'', \quad \cos(z'y) = l''\beta'', \quad \cos(z'z) = l''.$$

As equações (A), por meio das quaes se faz a transformação, tornam-se em

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = l\alpha x' + l'\alpha' y' + l''\alpha'' z', \\ y = l\beta x' + l'\beta' y' + l''\beta'' z', \\ z = lx' + l'y' + l''z'. \end{cases}$$

Assim os nove angulos do problema são substituidos pelas seis incognitas α, α', α'', β, β', β'', por isso que as equações (B) se reduzem por este modo a uma identidade.

Substituamos pois estes valores de x, y e z na equação geral do 2.° grão, e egualemos a zero os coefficientes de $x'y'$, $x'z'$ e $x'z'$. Virá

$$(3) \ldots \begin{cases} (a\alpha + d\beta + e)\alpha' + (d\alpha + b\beta + f)\beta' + e\alpha' + f\beta' + c = 0 \ldots . x'y', \\ (a\alpha + d\beta + e)\alpha'' + (d\alpha + b\beta + f)\beta'' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0 \ldots . x'z', \\ (a\alpha'' + d\beta'' + e)\alpha' + (d\alpha'' + b\beta'' + f)\beta' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0 \ldots . y'z'. \end{cases}$$

Em consequencia da symetria do cálculo qualquer d'estas equações se póde obter sem ser necessario fazer as substituições por inteiro. E achada uma, podem deduzir-se della as outras duas por simples permutações.

Eliminando α' e β' entre a 1.ª e as equações $x = \alpha' z$, $y = \beta' z$, do eixo dos y', resulta a seguinte equação, que é *a de um plano*,

$$(4) \ldots . \ (a\alpha + d\beta + e)x + (d\alpha + b\beta + f)y + (e\alpha + f\beta + c)z = 0.$$

Ora a 1.ª das equações (3) é a condição do desvanecimento do termo com $x'y'$; e por isso, em quanto attendermos só a esta condição, podemos dar a α, α', 6, $6'$, os valores que quizermos, com tanto que satisfaçam á quella equação. Assim a equação (4), que della resultou pela substituição das expressões de α' e $6'$ tiradas das equações do eixo dos y', involve ainda a mesma condição; e por conseguinte, se traçarmos o eixo dos y' no plano determinado pela mesma equação (4), não entrará na equação (1), depois de transformada, o termo em $x'y'$.

Pelo mesmo theor, eliminando α'' e $6''$ da 2.ª equação por meio das equações $x = \alpha''z$, $y=\alpha''z$, do eixo dos z', determinaremos um plano tal, que se tomarmos para eixo dos z' qualquer recta nelle traçada, apparecerá a transformada sem o termo em $x'z'$. Attenta porém a forma das duas 1.ªˢ equações, vê-se logo que este segundo plano é o mesmo que o primeiro; e por consegninte, se traçarmos nelle os eixos dos z' e dos y' como quizermos, *o plano résultante será o dos* $y'z'$, e a transformada não terá termos em $x'y'$ nem em $x'z'$. Como a direcção d'estes eixos no plano é arbitrária, podemos conseguir este fim com uma infinidade de systemas. Em todos os casos porém, resultando na transformada um valor de x' da fórma

$$x' = \frac{-\frac{1}{2}(g\alpha + h6 + i)}{l\,(a\alpha^2 + b6^2 + c + 2d\alpha\beta + 2e\alpha + 2f6)} \pm f(y', z')$$

o valor

$$x' = \frac{-\frac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i)}{l\,(a\alpha^2 + b\beta^2 + c + 2d\alpha\beta + 2e\alpha + 2f\beta)}$$

é evidentemente a equação de um plano, o qual corta todas as parallelas ao eixo dos x em duas partes eguaes, e que se chama por isso *diametral.* Dando-lhe a fórma seguinte

$$(a\alpha + d\beta + e)\,l\alpha x' + (d\alpha + b\beta + f)\,l\beta x' + (e\alpha + f\beta + c)\,lx' + \tfrac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i) = 0;$$

e substituindo n'esta expressão por $l\alpha x'$, $l\beta x'$, lx', os seus valores tirados das equações (2), vem

$$0=(a\alpha+d\beta+e)x+(d\alpha+b\beta+f)y+(e\alpha+f\beta+c)z+\tfrac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i)$$

$$-ly'[(a\alpha+d\beta+e)\alpha'+(d\alpha+b\beta+f)\beta'+e\alpha+f\beta+c]$$

$$-l''z'[a\alpha+d\beta+e)\alpha''+(d\alpha+b\beta+f)\beta''+e\alpha+f\beta+c];$$

ou, em virtude das duas primeiras equações (3),

$$(5)\ldots 0=(a\alpha+d\beta+e)x+(d\alpha+b\beta+f)y+(e\alpha+f\beta+c)z+\tfrac{1}{2}(g\alpha+h\beta+i).$$

Debaixo d'esta nova fórma, vê-se facilmente n.° 198, que o plano diametral é parallelo ao plano representado pela equação (4), isto é, ao plano dos (yz) que faz desapparecer em (1) os termos em xy e xz. (*).

Finalmente, se quizermos ainda que desappareça, o termo em $y'z'$, é necessario determinar α' e β' por meio da 3.ª das equações (2); por onde se vê que ha uma infinidade d'eixos obliquos por meio dos quaes podem ser satisfeitas as condições pedidas.

216. Querendo porém que os x', y' e z', sejam rectangulares, deverá o eixo dos x' ser perpendicular ao plano dos $y'z'$, cuja equação já achámos; ora sendo $x=\alpha z$, $y=\beta z$, as equações do eixo dos x', a condição de perpendicularidade ao plano (4) será expressa (n.° 200) pelas equações

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ a\alpha+d\beta+e=(e\alpha+f\beta+c)\alpha,$$

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\ d\alpha+b\beta+f=(e\alpha+f\beta+c)\beta.$$

(*) Veja-se *Anal. appl.*, *de Leroy*, (2.ª edit.) n.° 105; e *Compl. de Geomet. descript. de* Sousa Pinto, n.° 39.

Eliminando α, entre estas equações acharemos (*)

$$(8)\ldots\ [(a-b)\,fe+(f^2-e^2)\,d]\,\beta^3$$

$$+[(a-b)\,(c-b)\,e+(2d^2-f^2-e^2)\,e+(2c-a-b)\,fd]\,\beta^2$$

$$+[(c-a)\,(c-b)\,d+(2e^2-f^2-d^2)\,d+(2b-a-c)\,fe]\,\beta$$

$$+(a-c)\,fd+(f^2-d^2)\,e=0.$$

Esta equação do 3.° gráo dá para β ao menos uma raiz real; a equação (7) dá depois outra para α.

(*) A equação (7), e a divisão de (6) por (7), dão

$$\alpha=\frac{f\beta^2+c\beta-b\beta-f}{d-e\beta},\quad \frac{a\alpha+d\beta+e}{d\alpha+b\beta+f}=\frac{\alpha}{\beta};$$

das quaes se tira

$$\frac{f\beta^2+c\beta-b\beta-f}{d\beta-e\beta^2}=\frac{af\beta^2+ac\beta-ab\beta-af+d^2\beta+de-de\beta^2-e^2\beta}{df\beta^2+cd\beta-bc\beta^2-ef\beta},$$

ou

$$0=\beta^4\,(df^2-bef+aef-de^2)$$

$$+\beta^3\,(cdf-ef^2+cdf-bce-bdf+b^2e-afd+d^2e+ace-abe+d^2e-e^3)$$

$$+\beta^2\,(c^2d-cef-bcd+bef-df^2+bef-acd+abd-d^3+de^2-aef+de^2)$$

$$+\beta\,(-cdf+ef^2+adf-d^2e).$$

Dividindo esta última equação por β, e reduzindo, vem facilmente a equação do texto.

D'este modo fica o eixo dos x' determinado de maneira que vem a ser perpendicular ao plano $z'y'$; e se desembaraça a equação dos termos em $x'z'$ e $x'y'$. Resta traçar n'este plano $y'z'$ eixos rectangulares taes, que façam desapparecer o termo $y'z'$; é porém evidente que se póde determinar do mesmo modo um plano dos $x'z'$, ao qual seja perpendicular o eixo dos y' e que faça desapparecer os termos em que entram $x'y'$ e $z'y'$. Mas como as condições pelas quaes se exprime que o eixo dos y' é perpendicular a este plano, são expressas tambem pelas equações (6) e (7), deverá a mesma equação (8) do 3.° gráo dar outra raiz β', que satisfaça a estas condições. O mesmo succede com o eixo dos z'.

Logo as tres raizes da equação (8) são reaes, e são os valores de β, β', β''. Os valores α, α', α'', vem depois a deduzir-se das equações (7).

Conseguintemente: *em geral há sempre um systema unico d'eixos rectangulares, que desembaraça a equação* (1) *dos termos* $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$; e este systema determina-se pelo processo de cálculo que acabâmos de expor.

A este systema da-se o nome de *Eixos principaes de figura.*

217. Analysemos os casos particulares que podem appresentar-se na resolução da equação (8).

1.° Se a equação não tiver o 1.° termo, isto é, se for

$$(a-b)\,fe+(f^2-e^2)\,d=0:$$

sabemos que n'esse caso uma das raizes β é infinita, bem como α, como se vê da equação (7) que se reduz a $e\alpha+f\beta=0$. Os angulos correspondentes são rectos; um dos eixos, o dos x' por ex.°, acha-se no plano xy, e obtem-se a sua equação eliminando α e β por meio das equações $x=\alpha z$, $y=\beta z$, donde resulta $ex+fy=0$. As direcções dos y' e z' vem a ser dadas pela equação em β, reduzida ao 2.° gráo.

2.° Se, além do 1.° coefficiente, tambem o 2.° for nullo: tirando o valor de b da primeira d'estas duas equações de condição, e substituindo-o na segunda, esta se reduzirá ao ultimo termo da equação (8)

$$(a-c)\,fd+(f^2-d^2)\,e=0.$$

E como o coefficiente de β na equação (8) se deduz do de β^2, mudando

b em c, e d em e, e o mesmo acontece a respeito do 1.° e ultimo termo da mesma equação: segue-se que n'este caso a equação (8) é uma identidade. Os systemas d'eixos que desembaraçam a equação dos termos em x', y' e z' são então em numero infinito.

Eliminando as quantidades a e b das equações (6) e (7) por meio das duas equações de condição, acha-se que ellas são o producto de $f\alpha-d$, e de $f\alpha-e\beta$ pelo factor commum $eda+fd\beta+fe$. Estes factores são por tanto nullos; e eliminando α e β acha-se

$$fx=dz,\ ey=dz,\ edx+fdy+fez=0.$$

As duas 1.as são as equações d'um dos eixos; a 3.a é a de um plano que lhe fica perpendicular, e no qual estão traçados os outros dous eixos com direcções arbitrarias. Da intersecção d'este plano com a superficie resulta uma curva, na qual todos os eixos rectangulares são principaes, e que por conseguinte é um circulo, unica das curvas do 2.° grão que goza d'esta propriedade. Nesse caso a superficie é de revolução em volta do eixo, cuja equação acabâmos de achar; e como facilmente se reconhece transportando a origem ao centro do circulo. (V. *Annales de Math.*, t. II)

218. A equação (1), desembaraçada dos tres productos, toma a fórma

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2+my^2+nx^2+qx+q'y+q''z=h.$$

Se nenhum dos coefficientes k, m e n for nullo, póde esta equação ficar ainda desembaraçada dos termos da 1.a dimensão, pelo processo do n.° 208, que equival a uma mudança de origem das coordenadas e tomar a fórma ainda mais simples

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2+my^2+nx^2=h.$$

Se um d'estes coefficientes for nullo, n por exemplo, podemos desembaraçar, pelo mesmo processo, a equação (9) do termo constante h e das 1.as potencias de y e z; ficando assim a equação reduzida á fórma

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2+my^2=hx.$$

Finalmente se dous dos mesmos coefficientes forem nullos, m e n por ex.°, a equação (9) poderá reduzir-se á fórma

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + py + qx = h.$$

Mas se n'este caso, ainda p e q forem nullos, a equação (12) será evidentemente um caso particular da equação (10); e se o não forem, será um caso particular da equação (11). Com effeito fazendo $z=0$, a equação (12), torna-se em

$$py + qx = h;$$

por conseguinte a intersecção da superficie com o plano dos xy é uma recta. Se tomarmos esta linha para eixo dos y, a equação não sofrerá alteração no termo kz^2; mas será forçoso que os termos restantes $-py-qx+h$ se reduzam a $k'x$, porque a hypothese $z=0$ deve dar $x=0$. A equação da superficie reduzir-se-ha então á fórma $kz^2=k'x$, que é evidentemente um caso particular de (11).

Podemos pois concluir que todas as superficies da 2.ª ordem são incluidas nas duas equações.

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + my^2 + nx^2 = h,$$

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2 + my^2 = hx.$$

Se pela origem das coordenadas conduzirmos uma recta qualquer

$$x = az, \; y = a'z,$$

e combinarmos a sua equação com (10), ver-se-ha que os pontos em que a recta encontra a superficie tem as suas coordenadas respectivamente eguaes e de signaes contrarios: donde se conclue, que a origem das mesmas coordenadas divide ao meio todas as cordas tiradas por este ponto; ou, por outras palavras, que *esta origem é o centro das superficies representadas pela equação* (10).

Procedendo do mesmo modo com a equação (11), vê-se que os valores de z não saem eguaes, em virtude do termo em que entra a variavel no 1.° grão; e que por conseguinte *as superficies representadas por esta equação são destituidas de centro.*

Assim podemos dividir as superficies de 2.ª ordem em dous generos:

1.° Superficies dotadas de centro, comprehendidas na equação (10);

2.° Superficies destituidas de centro, comprehendidas na equação (11).

Além disto cumpre notar, que a equação (10) mostra, pelo que se disse no n.° 215, que os tres *planos* coordenados das superficies, que representa, são *diametraes.* O plano diametral que é perpendicular ás cordas diz-se *plano diametral principal*, ou simplesmente *plano principal.* Tres planos diametraes dizem-se *conjugados*, quando as coordenadas, que cada um divide ao meio, são parallelas á intersecção commum dos outros dous planos. Em quanto á equação (11), vê-se, que só os planos dos yx e xz são diametraes. Estes dous *planos* chamam-se tambem *conjugados*, porque as cordas, que cada um delles corta ao meio, são parallelas ao outro.

Posto isto, passemos a discutir especialmente cada uma das equações (10) e (11).

1.° GENERO.

SUPERFICIES COM CENTRO.

219. Se na equação (10) suppuzermos n sempre positivo, as combinações de signaes que admittem os outros tres coefficientes k, m e h podem reduzir-se ás tres seguintes, que dão origem a tres especies de superficies dotadas do centro:

$kz^2 + my^2 + nx^2 = h$ . . . . . . Ellipsoide.

$-kz^2 + my^2 + nx^2 = h$ . . . . . . Hyperboloide de um só ramo.

$-kz^2 + my^2 + nx^2 = -h$ . . . . Hyperboloide de dous ramos.

Não figurâmos os casos em que m é negativo, por isso que se reduziriam aos dous últimos de cima por uma simples inversão nos eixos.

220. ELLIPSOIDE. Consideremos em 1.° logar a equação,

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad kz^2+my^2+nx^2=h.$$

Como suppomos k, m e n positivos, tambem h o será; aliás a *equação* sería *absurda e nada representaria.*

Se h for nullo, a equação partir-se-ha nas tres $x=0$, $y=0$, $z=0$, e a superficie reduzir-se-ha a *um ponto.*

Sendo h positivo, que é propriamente o caso, de que nos occupâmos, e fazendo separadamente x, y ou z nullos, ver-se-hia, que das intersecções dos tres planos coordenados com a superficie resultam ellipses.

Da secção feita por qualquer plano, parallelo aos coordenados, resultam tambem ellipses, como se veria facilmente, suppondo separadamente cada uma das coordenadas egual a uma constante.

O mesmo sería facil demonstrar a respeito de qualquer secção plana (n.° 212).

É por tudo isto que se deu a esta superficie o nome de *Ellipsoide.*

Os comprimentos A, B, C dos tres *eixos principaes,* obtem-se buscando as secções da superficie pelos eixos dos x, y e z, que dão

$$kC^2=h,\ mB^2=h,\ nA^2=h.$$

Eliminando k, m e n da equação (a), vem

$$(13)\ldots\quad \frac{z^2}{C^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1\text{, ou } A^2B^2z^2+A^2C^2y^2+B^2C^2x^2=A^2B^2C^2,$$

a qual é a equação do *ellipsoide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes.* Esta superficie póde imaginar-se gerada por uma ellipse traçada no plano xy, a qual se move parallelamente a si mesma, e de maneira que os seus dous eixos vão variando de grandeza, sendo a curva obrigada ainda a correr ao longo de outra ellipse traçada no plano xz.

Se duas das quantidades A, B, C, forem eguaes, o *ellipsoide* será *de revolução*. E se for $A=B=C$ a superficie tornar-se-ha n'uma *esphera*.

221. HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO. Consideremos em 2.° logar a equação

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -kz^2+my^2+nx^2=h.$$

Se $h=0$, a equação resultante é a de *cóne*, que será a respeito do hyperboloide, o mesmo que são assymptotas relativamente á hyperbole. (n.° 276, P. II.)

Se h não for nullo, fazendo separadamente x e y nullo, reconhece-se que das intersecções dos planos dos yz e xz com a superficie rasultam hyperboles, nas quaes o eixo dos z é o 2.° eixo.

Suppondo z egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas ao plano dos xy são ellipses reaes similhantes, cujas dimensões augmentam com o valor numerico da constante.

E por isso se deu a esta superficie o nome de *Hyperboloide de um só ramo.*

Os comprimentos A, B, $C\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes obtem-se como no n.° precedente, e a equação do hyperboloide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes terá a mesma fórma que a equação (13), unicamente com a mudança de C^2 em $-C^2$.

222. HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS. Consideremos em 3.° e último logar a equação

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -kz^2+my^2+nx^2=-h.$$

Se $h=0$, a equação resultante será tambem a de um *cóne assymptotico* d'este hyperboloide de 2.ª especie.

Quando h não é nullo, reconhece-se como no caso precedente, que das intersecções dos planos dos yz e dos xz com a superficie resultam hyperboles nas quaes o eixo dos z é o primeiro eixo.

Suppondo z egual a uma constante, $z = \pm l$, a equação (c) torna-se em

$$\frac{m}{h}y^2 + \frac{n}{h}x^2 = \frac{k}{h}l^2 - 1;$$

e mostra que as secções parallelas aos xy são ellipses similhantes, que crescem indefinidamente com a grandeza absoluta de l; porém que se tornam imaginarias quando $l^2 < \frac{h}{k}$. Donde resulta que este hyperboloide tem *dous ramos* não contiguos, indefinidos cada um no seu sentido, porém separados por um intervallo em que não ha superficie. E por isso se lhe deu o nome de *Hyperboloide de dous ramos*.

Os comprimentos A, B $\sqrt{-1}$, C $\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes determinam-se como nos n.os precedentes, e a equação do hyperboloide de dous ramos, referida ao centro e aos seus tres diametros, terá a mesma fórma da equação (13), só com a mudança de B^2 e C^2 em $-B^2$ e $-C^2$

223. As equações (a), (b), (c), que acabâmos de discutir, podem offerecer ainda outras variedades de superficies, suppondo nullos um ou alguns dos coefficientes k, m, n, h. Representarão *cylindros de base elliptica* ou *hyperbolica*, quando forem da fórma

$$kx^2 + my^2 = h\text{, ou } kx^2 - my^2 = h;$$

e um systema de *dous planos* que se cortam, ou que são parallelos, quando se reduzirem a

$$kx^2 - my^2 = 0\text{, ou } kx^2 = h.$$

Como estes casos não exigem discussão especial, contentar-nos-hemos com indical-os.

2.° GENERO.

SUPERFICIES SEM CENTRO.

224. Se na equação (11) fizermos com que hx seja sempre positivo, conservando-se no 2.° membro, não poderão ser negativos ambos os termos do 1.°, porque a equação seria então absurda. Assim esta apenas admitte as duas combinações seguintes de signaes, que dão origem a duas especies de superficies destituidas de centro:

$$kz^2 + my^2 = hx \text{ ..... Paraboloide elliptico.}$$

$$-kz^2 + my^2 = hx \text{ .... Paraboloide hyperbolico.}$$

Se em logar de, k suppuzessemos m negativo, tirariamos as mesmas consequencias, considerando invertido o eixo dos z no dos y.

225. PARABOLOIDE ELLIPTICO. Consideremos primeiro a superficie comprehendida na equação

$$(d) \text{ .... } kz^2 + my^2 = hx.$$

Fazendo separadamente z e y eguaes a zero, ver-se-ha que as secções feitas pelos planos xy e zx são parabolas. Se egualarmos estas mesmas coordenadas a quantidades constantes, concluir-se-ha que das secções parallelas áquelles planos resultam tambem parabolas.

Fazendo $x=0$, vê-se que a secção feita pelo plano zx determina a origem das coordenadas, porque a equação (d) parte-se então nas duas $z=0$, $y=0$. Fazendo x egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas a este ultimo plano são ellipses.

É por isto que á superficie representada pela equação (d) se deu o nome de *Paraboloide elliptico.*

Como x negativo dá resultados imaginarios, segue-se que a superficie fica toda do lado dos x positivos. Se m for zero, e a equação se reduzir á

$$kz^2 = hx,$$

que, segundo vimos (n.° 218), é uma transformação da equação (11); teremos então uma *superficie cylindrica de base parobolica.*

Os mais casos particulares que offerece a equação (d) comprehendem-se n'outros já discutidos.

226. PARABOLOIDE HYPERBOLICO. Discutindo pelo mesmo theor a equação

$$(e) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -kz^2 + my^2 = hx,$$

vê-se: que a secção feita pelo plano yx é uma parabola que fica para o lado dos x positivos: a do plano xz é uma parabola que fica para o lado dos x negativos: e a secção do plano yz representa duas rectas.

Todas as secções parallelas ao plano xy são parabolas eguaes á principal, mas collocadas sucessivamente em differentes posições. O mesmo diremos das secções parallelas ao plano xz. Finalmente as secções parallelas ao plano zy produzem hyperboles.

Por isso a estas superficies se deu o nome de *Paraboloide hyperbolico.*

227. Quando nos dous casos precedentes é $h = 0$, a equação tem a fórma $a^2z^2 \pm b^2y^2 = 0$, conforme os signaes de k e m. N'um dos casos é $z=0$, $y=0$, e a superficie reduz-se ao eixo dos x. No outro, a equação, á qual se póde dar a fórma $(az + by)(az - by) = 0$, indica que podemos tornar nullo qualquer dos dous factores; e a superficie reduz-se a um systema de dous planos que se interceptam segundo o eixo dos x.