PRIMEIRAS NOÇÕES

SOBRE O

CALCULO DAS QUANTIDADES GEOMETRICAS

POR

L. C. ALMEIDA

2.ª PARTE

(Extrahido do *Instituto*, vol. XL)

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1893

PRIMEIRAS NOÇÕES

SOBRE O

CALCULO DAS QUANTIDADES GEOMETRICAS

= 1899-III-2 =

POR

L. C. ALMEIDA

2.ª PARTE

(Extrahido do *Instituto*, vol. XL)

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1893

Conforme vimos no opusculo que anteriormente publicámos com o mesmo titulo do actual, os dados das seis operações fundamentaes, que na arithmetica representavam numeros, eram alli substituidos por outras tantas quantidades geometricas, havendo porém excepção para os expoentes, os quaes, positivos ou negativos, inteiros, fraccionarios ou incommensuraveis, continuaram sempre a ser representados numericamente.

Resta pois ainda averiguar se não poderão tambem esses symbolos receber a significação de quantidades geometricas, cumprindo mais, no caso affirmativo, investigar as propriedades inherentes ás novas funcções potenciaes que assim se formarem, bem como deduzir as consequencias mais notaveis a que o seu emprego possa dar logar. E d'isso vamos occupar-nos presentemente, procurando assim completar, dentro dos estreitos limites que desde o principio nos traçámos, o que ácerca do calculo das quantidades geometricas deixámos exposto nos já citados artigos.

É certo que o assumpto se encontra, geralmente, tractado nos livros de analyse; mas, como ahi vem precedido quasi sempre de grande copia de doutrina estranha, não será, talvez, de todo improficua esta nossa tentativa.

I. Algumas noções sobre as series

1. *Definições*. Chamamos *serie* a uma expressão composta de um numero indefinido de termos, cada um dos quaes é uma funcção determinada do numero (indice) indicativo do logar que esse termo occupa na dicta expressão.

Termo geral da serie é a expressão que dá o valor de cada termo em funcção do respectivo indice.

Assim, proposta a serie

$$(1) \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots,$$

será $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ o seu termo geral, pois que, fazendo n'esta expressão $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ se encontra respectivamente $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, isto é, cada um dos termos successivos da serie.

Designando por S_n a somma algebrica dos $n+1$ primeiros termos de uma dada serie, será S_n uma quantidade variavel com n; e a serie diz-se *convergente*, quando, augmentando n indefinidamente, S_n se aproxima tambem indefinidamente de uma quantidade finita e determinada S, que então se denomina *limite* ou *somma* (*) da serie (**).

(*) Esta ultima denominação relaciona-se com o modo que geralmente se emprega para denotar a ligação entre uma serie convergente e o seu respectivo limite, pois que sendo, por exemplo, 2 o limite da serie (1), e devendo portanto escrever-se

$$2=\lim.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right),$$

se indica mais simplesmente esta relação, pondo

$$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

(**) No caso de convergencia, designando por ε a differença numerica

$$(1) \qquad |S-S_n|$$

Se a somma S_n cresce com n acima de todo e qualquer valor finito dado, a serie é *divergente.*

Finalmente a serie diz-se *indeterminada,* quando, augmentando n, a somma S_n tende para mais de um valor ou limite.

Assim é convergente a serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.;$$

divergente a serie

$$1+2+3+\ldots.,$$

cujo termo geral é n; e indeterminada a serie

$$1-1+1-1+\ldots.,$$

que, tendo por termo geral $(-1)^n$, oscilla alternada e indefinidamente entre os valores 1 e -1.

Até aqui temos supposto reaes os termos da serie; considerando agora uma serie de termos imaginarios (representantes de quaesquer quantidades geometricas), da fórma

$$(u_0+iv_0)+(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\ldots.,$$

diremos que ella é *convergente,* quando forem conjunctamente

---

respectiva a um dado valor i de n, haverá outro inteiro $j > i$, tal que, para $n \overline{\overline{>}} j$, a differença (1) fique constantemente menor que um dado numero $\alpha < \varepsilon$, por muito pequeno que seja α em relação a ε.

Demais denotando por $\varepsilon_1 < \alpha$ a differença (1) correspondente a $n = j$, haverá outro inteiro $j' > j$, tal que, para $n \overline{\overline{>}} j'$, seja a differença (1) constantemente menor que outro numero dado $\beta < \varepsilon_1 < \alpha$, por muito pequeno que seja β em relação a ε_1.

E assim por deante.

Finalmente, os numeros $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ poderão ser escolhidos (e nós assim o supporemos) de modo que, sendo indefinidamente decrescentes, tenham por limite zero, para o que bastaria tomar, por exemplo,

$$\alpha=\frac{1}{2}\varepsilon,\ \beta=\frac{1}{2}\varepsilon_1,\ \gamma=\frac{1}{2}\varepsilon_2,\ldots.$$

convergentes as duas series de termos reaes

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots,$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots$$

2. Criterio de convergencia. *Para que uma dada serie de termos reaes*

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

seja convergente, é necessario e sufficiente que, qualquer que seja p, *para valores de* n *indefinidamente crescentes, convirja para zero o valor numerico da expressão*

$$(2) \qquad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p}.$$

a) Pondo

$$S - S_n = \varepsilon, \quad S - S_{n+p} = \varepsilon_1$$

acharemos

$$S_{n+p} - S_n = \varepsilon - \varepsilon_1,$$

ou, representando por R_{n+p} a expressão (2),

$$R_{n+p} = \varepsilon - \varepsilon_1.$$

Ora (nota ** pag. 5), suppondo $n \geqq j$, será

$$|\varepsilon| < \alpha, \ |\varepsilon_1| < \alpha \text{ e logo } |\varepsilon - \varepsilon_1| < 2\alpha.$$

E do mesmo modo se acharia

$$|\varepsilon - \varepsilon_1| < 2\beta, \ |\varepsilon - \varepsilon_1| < 2\gamma, \ldots\ldots$$

suppondo successivamente $n \geqq j'$, $n \geqq j''$, ...

E assim fica demonstrada a primeira parte da proposição, visto serem indefinidamente decrescentes as quantidades α, β, γ....

b) Attribua-se a n um valor j, tal que, para $n \geqq j$, se tenha constantemente

$$|R_{n+p}| < \alpha.$$

Para $n \geqq j$, S_n ficará comprehendido entre $S_j + \alpha$ e $S_j - \alpha$, valores que denotaremos respectivamente por A e B.

Depois, continuando a augmentar n, poderemos conseguir que este numero attinja um valor j', tal que, para $n \geqq j'$, seja

$$|R_{n+p}| < \beta.$$

Para $n \geqq j'$, S_n ficará pois comprehendido entre $S_{j'} + \beta$ e $S_{j'} - \beta$, valores que designaremos por A' e B' (*).

Em seguida, continuando sempre a augmentar n, este numero attingirá um valor j'', tal que, para $n \geqq j''$, S_n ficará comprehendido entre $S_{j''} + \gamma$ e $S_{j''} - \gamma$, ou entre A'' e B''.

E assim por deante.

Vê-se pois que, pelo augmento de n, S_n ficará successivamente comprehendido entre A e B, entre A' e B', entre A'' e B'',... Ora, considerando duas grandezas variaveis, cujos valores successivos sejam representados, os de uma d'ellas (da decrescente) por A, A', A'',.... e os da outra (crescente) por B, B', B'',... é manifesto que essas grandezas terão cada uma o seu limite (**); e demais esses limites serão eguaes, visto que a differença entre ellas tende indefinidamente para zero. A grandeza tambem variavel S_n, constantemente comprehendida entre essas duas, terá portanto tambem o mesmo limite que qualquer d'ellas.

Corollario 1.º *Proposta uma serie de termos reaes, uns positivos e outros negativos, se, mudando os signaes a estes ultimos termos, resultar uma serie convergente, tambem será convergente a serie primitiva* (***); *e reciprocamente.*

(*) Se fosse $S_{j'} + \beta > A$, caso em que teriamos necessariamente $S_{j'} - \beta > B$, em logar d'aquella primeira expressão, para representar A', adoptariamos $A' = A$.

E se fosse $S_{j'} - \beta < B$, e portanto $S_{j'} + \beta < A$, adoptariamos para B' o valor B.

E em ambos os casos o nosso raciocinio subsistiria sem modificação.

(**) A grandeza indefinidamente decrescente, cujos valores successivos são representados por A, A', A''.... é sempre maior que B; e do mesmo modo a outra grandeza successivamente representada por B, B',.... é crescente e sempre menor que A. Cada uma d'essas grandezas terá pois o seu limite.

(***) Essas series denominam-se, com muita propriedade, *absolutamente convergentes*. E demonstra-se que o seu limite é independente da ordem em que se escrevem os termos, ao contrario do que succede com as series que, Corollario 2.° *Proposta uma serie convergente de termos reaes e positivos, se multiplicarmos os seus diversos termos por outros tantos factores, não sendo o valor numerico de nenhum d'estes superior a um dado numero finito* H, *a serie que assim resultar será tambem convergente.*

Começando por suppor que eram positivos os factores, pelos quaes multiplicavamos os diversos termos da serie, e representando por R'_{n+p} a expressão (1) respectiva á serie resultante d'essa multiplicação, será

$$|R'_{n+p}| \overline{\overline{<}} H\,|R_{n+p}|;$$

por onde se vê que R'_{n+p} e R_{n+p} tenderão simultaneamente para o limite zero quando n augmentar indefinidamente.

Suppondo agora que os diversos factores tinham differentes signaes, e attendendo á doutrina da ultima parte do corollario 1.°, immediatamente se reconhecerá que ainda n'este caso é verdadeira a proposição enunciada.

Corollario 3.° *Será convergente uma serie de termos imagi-*

---

sendo convergentes, se tornam divergentes quando se mudam os signaes aos seus termos negativos, pois que para estas o limite varía com a ordem em que se succedem os termos, podendo até acontecer que uma serie convergente se transforme assim n'outra divergente.

Por exemplo, a serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

que não é absolutamente convergente, tem um limite differente do que corresponde á serie formada com os mesmos termos da precedente, escriptos porém de modo que dois termos positivos sejam seguidos de um negativo, assim

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

Como exemplo de uma serie convergente, e de outra divergente que resulta da primeira pela mudança na ordem em que os termos se escrevem, encontram-se tambem nos livros de analyse, entre outras, as duas seguintes

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ldots\ldots$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots.$$

narios (representantes de quantidades geometricas), sempre que for convergente a serie que resultar da substituição de cada termo da primeira pelo respectivo modulo.

É uma consequencia immediata da doutrina do corollario 2.º (*).

Corollario 4.º *Suppondo positivos todos os termos da serie* (1), *esta será convergente, se a partir de um dado valor* i *de* n *em deante for constantemente*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1. \tag{3}$$

Designe α um numero menor que a unidade e maior que o maior dos valores que toma o primeiro membro de (3), quando n'elle se faz variar n desde $n = i$ até $n = \infty$.

Para $n \geqq i$ será

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \ldots . \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < \alpha,$$

d'onde se deduz, multiplicando ordenadamente estas desegualdades,

$$\frac{u_{n+p}}{u_n} < \alpha^p,$$

ou

$$u_{n+p} < \alpha^p u_n. \tag{4}$$

Será pois

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+p} < \alpha^p u_n$$

e logo

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots . + u_{n+p} < \alpha \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} u_n < \frac{\alpha}{1 - \alpha} u_n$$

ou

$$R_{n+p} < \frac{\alpha}{1 - \alpha} u_n.$$

(*) N'este caso poderemos suppor $H = 1$. (Veja-se mais adeante a expressão de z em o numero 3).

Ora a relação (4) mostra que a partir de $n=i$ em deante, á medida que n augmenta, o valor u_n tende indefinidamente para zero; será pois R_{n+p} tambem indefinidamente decrescente, e portanto convergente a serie proposta.

SCHOLIO. Na hypothese admittida no corollario 4.º o erro que se commette parando no termo da ordem n será inferior a

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}u_n. \tag{5}$$

3. *Applicação a um exemplo.* Proposta a serie

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots. \tag{1}$$

e suppondo que z denota um numero qualquer positivo, é facil reconhecer (n.º 2, corollario 4.º) que ella é convergente.

Tem-se com effeito

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{z}{n+1},$$

por onde se vê que, qualquer que seja z, sempre se poderá dar a n um valor i, tal que para $n \overline{\gtrless} i$ seja $\frac{z}{n+1}<1$.

Depois do que, tendo em vista a doutrina do corollario 3.º, se póde mais concluir que a mesma serie ainda será convergente na hypothese de representar z uma quantidade geometrica qualquer, r_θ.

N'esse caso teriamos com effeito

$$z=r_\theta=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

logo

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta);$$

e, portanto, substituindo cada termo da serie (1) pelo respectivo modulo, viria uma nova serie, cujo termo geral era

$$\frac{r^n}{n!}:$$

ora esta ultima serie é convergente, como acima se vio, logo (corollario 3.º) será tambem convergente a serie primitiva.

4. *Determinação do numero* e. Assim reconhecida a convergencia da serie (1) do numero 3, qualquer que seja z, supponhamos agora $z=1$, caso em que o limite ou somma da serie é geralmente representado pela letra e.

A serie considerada será n'este caso

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots;$$

e facilmente se reconhece que a sua somma ou limite, evidentemente superior a 2, é inferior a 3.

Para isso basta aproveitar os tres primeiros termos da serie, d'onde resulta a somma 2,5, e depois calcular o limite superior do resto pela formula (5) do numero 2, em que podemos suppor $u_n=u_3=0{,}5$ e $\alpha=\frac{u_4}{n_3}=\frac{1}{3}$, o que dá para representar esse limite, superior ao resto da serie, o numero 0,25.

Demonstra-se tambem com facilidade que o numero e é incommensuravel.

Com effeito, suppondo-o commensuravel e attendendo a que, como já vimos, não é inteiro, sempre o poderemos representar sob a fórma $\frac{m}{n}$, designando m e n dois numeros inteiros primos entre si.

Posto isto, supponhamos que, para calcular o numero e, começavamos por aproveitar somente os $n+1$ primeiros termos da serie.

Teriamos assim a somma

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!};$$

e o limite superior do resto seria tambem dado pela formula (5) do numero 2, na qual poderemos agora suppor

$$u_n = \frac{1}{n!}, \quad \alpha = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Esse limite será pois

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n};$$

e como o resto da serie o não excederá, esse resto poderá ser representado por

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta}{n},$$

designando θ um numero positivo comprehendido entre *zero* e *um*.

Teremos assim a egualdade

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\,\frac{\theta}{n},$$

e multiplicando ambos os membros d'ella por $n!$, virá um resultado da fórma

$$A = B + \frac{\theta}{n},$$

sendo A e B dois inteiros, e $\frac{\theta}{n}$ uma fracção propria.

Este resultado absurdo mostra a falsidade da hypothese estabelecida.

5. *Multiplicação das series.* *Sendo*

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

(2) $$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$$

duas series convergentes, de termos reaes e positivos, que têm respectivamente por limite S *e* S', *se considerarmos uma nova serie*

$$(3) \qquad w_0 + w_1 + w_2 + \ldots,$$

estando os termos d'esta ligados aos das duas primeiras pelas relações

$$w_0 = u_0 v_0,$$

$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0,$$

$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_0,$$

a serie (3) *será tambem convergente, e o seu limite* S'' *será egual ao producto* SS' *dos limites de* (1) *e* (2).

Evidentemente é

$$(4) \qquad S''_n < S_n S'_n.$$

Demais, se denotarmos por $2m$ o maior numero par contido em n, teremos tambem

$$(5) \qquad S''_n > S_m S'_m.$$

Posto isto, fazendo agora tender m e portanto n para o infinito, as duas grandezas variaveis, que representam os segundos membros de (4) e (5), tenderão para o mesmo limite SS'; e portanto a grandeza tambem variavel S''_n, constantemente comprehendida entre essas duas, tenderá tambem para esse mesmo limite.

Corollario 1.º *A proposição precedente ainda subsistirá quando, tendo quaesquer signaes os termos de* (1) *e* (2), *forem absolutamente convergentes estas duas series.*

Com effeito, formando a differença $S_n S'_n - S''_n$, acha-se

$$(6)\qquad S_n S'_n - S''_n = (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + \ldots . + u_1 v_n)$$
$$+ (u_n v_2 + u_{n-1} v_3 + \ldots u_2 v_n) + \ldots + u_n v_n;$$

ora, por serem absolutamente convergentes as series (1) e (2), a expressão precedente, calculada na hypothese de u e v serem positivos, tenderia para zero quando n augmentasse indefinidamente, e portanto o mesmo se dará tambem quando algumas d'essas quantidades tiverem o signal *menos*, pois que o valor numerico d'aquella expressão será então menor.

Teremos pois

$$\text{lim.}\,(S_n S'_n - S''_n) = 0,$$

e, portanto,

$$S'' = SS'.$$

Corollario 2.° *A doutrina do theorema e corollario precedentes ainda será applicavel na hypothese de* u *e* v *representarem quantidades geometricas, se forem convergentes as series que resultarem das propostas depois da substituição de* u *e* v *pelos respectivos modulos* U *e* V.

Demonstra-se raciocinando como já o fizemos a proposito do corollario 1.°, attendendo a que o modulo de (6) nunca poderá exceder o valor numerico que essa expressão attingiria quando calculada depois da substituição de u e v pelos respectivos modulos U e V (*), valor esse que por hypothese tenderia para zero quando n augmentasse indefinidamente.

6. *Applicação a um exemplo.* Suppondo agora que eram

$$(1')\qquad 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots .$$

$$(2')\qquad 1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{2} + \frac{z'^3}{3!} + \ldots .$$

(*) Visto que o modulo da somma nunca é superior á somma dos modulos das parcellas.

as series denotadas por (1) e (2) em o numero precedente, como seriam convergentes as duas series que resultassem d'ellas depois da substituição de cada termo pelo respectivo modulo, se formarmos com os termos de (1') e (2') uma nova serie (3') correspondente á serie (3) d'aquelle numero, a estas tres series será applicavel a relação indicada no corollario 2.º do mesmo numero.

Ora, formando o termo geral w_n, acha-se

$$w_n = u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \dots + u_0 v_n =$$

$$= \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z'}{1} + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{z'^2}{2!} + \dots + \frac{z'^n}{n!}$$

isto é

$$w_n = \frac{1}{n!}\left(z^n + nz^{n-1}z' + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}z'^2 + \dots + z'^n\right)$$

ou

$$w_n = \frac{(z+z')^n}{n!};$$

assim a serie (3) do numero 5 será no caso presente

$$(3') \qquad 1 + \frac{(z+z')}{1} + \frac{(z+z')^2}{2} + \frac{(z+z')^3}{3!} + \dots$$

Denotando pois muito simplesmente por $[z]$ a funcção de z que exprime o limite de (1'), e conseguintemente por $[z']$ e $[z+z']$ as funcções analogas que representam os limites de (2') e (3'), e attendendo á doutrina do corollario 2.º do numero precedente, acharemos

$$[z][z'] = [z+z'].$$

II. Propriedades concernentes aos limites de algumas series precedentemente consideradas

7. *Sobre o limite da serie* (1) *do n.° 3.* Tendo reconhecido que é sempre convergente a serie

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\ldots,$$

quer z represente um numero ou uma quantidade geometrica, mostraremos agora que o limite d'essa serie é o mesmo para que converge a expressão $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$, quando se augmenta indefinidamente o numero inteiro e positivo m.

Desinvolvendo $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ na hypothese de ser m finito, inteiro e positivo, vem

$$(1)\qquad \left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+m\frac{z}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{z^2}{m^2}+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{z^p}{m^p}+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{1.2\ldots m}\cdot\frac{z^m}{m^m},$$

sendo

$$(2)\qquad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{z^p}{m^p}$$

o termo geral, d'onde se podem deduzir o segundo, terceiro, ... e ultimo termo do desinvolvimento (1), fazendo successivamente $p = 1, 2, \ldots, m$.

Ora (2) equivale a

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{z^p}{1.2\ldots p};$$

e como o coefficiente

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)$$

póde ser substituido por (*)

$$1-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\cdots+\frac{p-1}{m}\right)$$

ou

$$1-\alpha\frac{p(p-1)}{2m},$$

(*) Lemma: *Se representarmos por P_m o producto $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_m)$, onde $a_1, a_2, \ldots a_m$ designam numeros positivos menores que a unidade, teremos*

$$\text{(A)} \qquad P_m = 1-\alpha_m(a_1+a_2+\ldots+a_m),$$

sendo tambem α_m um numero positivo menor que a unidade.

Com effeito, pondo $\alpha_m = 0$, o segundo membro de (A) ficaria reduzido á unidade; e como é, evidentemente, $P_m < 1$, será $\alpha_m > 0$ e, portanto, positivo.

Do mesmo modo, pondo $\alpha_m = 1$, o segundo membro de (A) ficaria representado por $1-(a_1+a_2+\ldots+a_m)$; ora, como em seguida se demonstra, este resultado é menor que P_m, e portanto α_m será, como tinhamos dito, um numero comprehendido entre zero e a unidade.

Agora, para evidenciar que é

$$\text{(B)} \qquad P_m > 1-(a_1+a_2+\ldots+a_m),$$

bastará demonstrar que, se esta desigualdade se verificar para um dado onde por α se designa um numero positivo menor que a unidade, (2) transformar-se-á em

$$\frac{z^p}{1.2\ldots p}-\frac{z^p}{1.2\ldots(p-2)}\cdot\frac{\alpha}{2m},$$

ou, escrevendo θ_{p-2} em logar de α,

$$\frac{z^p}{1.2\ldots p}-\frac{z^p}{1.2\ldots(p-2)}\cdot\frac{\theta_{p-2}}{2m},$$

expressão applicavel a todos os termos do desinvolvimento (1), para os quaes seja $p>2$.

Applicando pois esta transformação ao quarto, quinto, ... e ultimo termo do desinvolvimento (1), acharemos

$$(3)\qquad \left(1+\frac{z}{m}\right)^m=\left(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^m}{m!}\right)$$

$$-\frac{z^2}{2m}\left(1+\frac{z}{1}\theta_1+\frac{z^2}{2}\theta_2+\frac{z^3}{3!}\theta_3+\ldots+\frac{z^{m-2}}{(m-2)!}\theta_{m-2}\right).$$

---

valor de m, igualmente subsistirá para o valor $m+1$, pois que a relação (B) é, evidentemente, verdadeira para $m=2$, por ser então

$$P_2=(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)+a_1a_2>1-(a_1+a_2).$$

Ora, multiplicando ambos os membros de (B) pela quantidade positiva $(1-a_{m+1})$, acha-se effectivamente

$$P_{m+1}>1-(a_1+a_2+\ldots+a_{m+1})+(a_1+a_2+\ldots+a_m)\,a_{m+1},$$

e logo

$$P_{m+1}>1-(a_1+a_2+\ldots+a_{m+1}).$$

Suppondo agora que m augmentava indefinidamente, a expressão comprehendida no ultimo parenthesis tenderia para um limite finito e determinado (*); e como ao mesmo tempo o factor $\frac{z^2}{2m}$ se approximava indefinidamente de zero, concluiremos que é

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=\lim\left(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right).$$

8. *Propriedade respectiva ao limite* e.

Pondo $z=1$ na ultima relação achada e attendendo ao que se disse em o n.º 4, conclue-se que é

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e,$$

o que n'outros termos significa que se póde considerar e como o limite para que tende a expressão $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quando, suppondo m inteiro e positivo, se faz augmentar indefinidamente este numero.

Mostraremos agora que esse limite é ainda o mesmo para que converge a expressão $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quando m augmenta

(*) Designando por Z o modulo de z, e substituindo pelo respectivo modulo cada termo da serie

$$1+\frac{z}{1}\theta_1+\frac{z^2}{2}\theta_2+\frac{z^3}{3!}\theta_3+\dots,$$

achariamos

$$1+\frac{Z}{1}\theta_1+\frac{Z^2}{2}\theta_2+\frac{Z^3}{3!}\theta_3+\dots;$$

e porque a convergencia d'esta ultima serie é já reconhecida (n.º 2, Corol. 2.º), concluiremos (n.º 2, Corol. 3.º) que é tambem convergente a serie comprehendida no parenthesis acima indicado.

indefinidamente em valor numerico, quer seja positivo ou negativo, inteiro, fraccionario ou incommensuravel.

1.° *m positivo*. Qualquer valor de m positivo e não inteiro ficará comprehendido entre dois inteiros consecutivos μ e $\mu+1$, sendo μ indefinidamente crescente com m; e assim teremos

$$(1) \qquad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} > \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu}.$$

Ora é

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} = \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

d'onde resulta, suppondo indefinidamente crescente o inteiro μ,

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} = \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}.\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = e.$$

Tem-se tambem

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} : \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right),$$

e logo

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} = e.$$

Assim o primeiro e o ultimo membro das desigualdades (1) convergem ambos para o mesmo limite e; e portanto a quantidade $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$, comprehendida entre elles, tenderá tambem para esse mesmo limite.

2.° *m negativo*. Tornando explicito o signal de m, teremos

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$$

$$=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right),$$

e depois, tomando os limites,

$$\lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}=e.$$

9. *Nova propriedade do limite da serie* (1) *do n.° 3, respectiva ao caso de ser z uma quantidade numerica, positiva ou negativa.*

Substituindo agora z por um numero qualquer x, e attendendo a que é

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x,$$

ou, pondo $\frac{m}{x}=\mu$,

$$(1)\qquad \left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^x,$$

e finalmente considerando que, qualquer que seja o valor finito, positivo ou negativo, de x, ao valor infinito do inteiro positivo m corresponderá (*) $\mu=\pm\infty$, acharemos, tomando os limites dos

(*) As duas quantidades, aqui designadas por m e μ, tenderão simultaneamente para o infinito, passando a primeira por uma serie de valores inteiros e positivos, e percorrendo a segunda outra serie de valores, positivos ou negativos, inteiros, fraccionarios ou incommensuraveis.

dois membros de (1),

$$(2) \qquad \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

10. *Demonstração de Cauchy.* Embora seja muito simples a demonstração, ultimamente exposta, da propriedade expressa pela equação (2) do numero precedente, ainda aqui daremos d'essa propriedade outra demonstração, devida a Cauchy, e que nos parece tambem muito interessante.

Funda-se esta demonstração no seguinte:

Lemma. — *Designando* $[x]$ *uma determinada funcção contínua do numero* x, *se for*

$$(1) \qquad [x][x'] = [x+x'],$$

teremos

$$(2) \qquad [x] = [1]^x.$$

De (1) deduz-se

$$[y][y'][y'']\ldots[y^{(n-1)}] = [y+y'+y''+\ldots+y^{(n-1)}],$$

e depois, pondo $y = y' = y'' = \ldots = y^{(n-1)}$,

$$(3) \qquad [y]^n = [ny].$$

Posto isto, distinguiremos agora diversos casos.

1.° Pondo $y=1$ em (3), resulta

$$[1]^n = [n],$$

o que demonstra a relação (2) para valores inteiros de x.

2.° Suppondo $y = \frac{1}{n}$ em (3), vem

$$\left[\frac{1}{n}\right]^n = [1],$$

e logo

$$\left[\frac{1}{n}\right]=[1]^{\frac{1}{n}},$$

o que confirma a existencia da relação (2) para valores de x da forma $\frac{1}{n}$, sendo n inteiro.

3.° Fazendo $y=\frac{m}{n}$, a relação (3) dará

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n=[m],$$

ou

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n=[1]^m,$$

e logo

$$\left[\frac{m}{n}\right]=[1]^{\frac{m}{n}}. \tag{4}$$

4.° Assim demonstrada a relação (4) para quaesquer valores $\frac{m}{n}$, fraccionarios e positivos, se agora fizermos convergir $\frac{m}{n}$ para o limite zero, acharemos

$$[0]=1. \tag{5}$$

E com a applicação do mesmo methodo dos limites igualmente se acharia

$$[\nu]=[1]^\nu$$

sendo ν um numero incommensuravel qualquer.

5.° Resta demonstrar que a relação (2) tambem se verifica para valores negativos de x.

Para isso faremos em (1) $x' = -x$, o que dará

$$[x][-x]=[0]$$

ou

$$[x][-x]=1,$$

e logo

$$[-x]=\frac{1}{[x]}=\frac{1}{[1]^x}=[1]^{-x}.$$

Suppondo agora que por $[x]$ se designava a funcção $\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, como para esta funcção se verifica (n.º 6) a propriedade expressa pela relação (1), teremos

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left\{\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^x$$

ou

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=e^x.$$

III. Das potencias que têm por base o numero e e por expoente uma quantidade geometrica

11. *Definição e propriedades das exponenciaes.* Quer z seja um numero ou uma quantidade geometrica, sabemos (n.º 7) que é

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots;$$

e demais no primeiro caso tem-se tambem

$$(1)\quad e^z=\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots.$$

Posto isto, e suppondo agora que é z uma quantidade geometrica, tomaremos para definição de e^z a que resulta das mesmas relações (1).

D'esta definição e do que se demonstrou em o n.º 6 resulta

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'},$$

e conseguintemente

$$e^z : e^{z'} = e^{z-z'},$$

sendo z e z' duas quantidades geometricas quaesquer.

12. *Exponencial trigonometrica.* Suppondo $z = yi$, sendo y um numero qualquer, positivo ou negativo, procuremos o valor ou expressão de e^{yi}.

Tem-se por definição

$$e^{yi} = \lim\left(1 + \frac{yi}{m}\right)^m,$$

ou, pondo (*)

(1) $$1 + \frac{yi}{m} = \rho_\theta,$$

(2) $$e^{yi} = \lim.\ (\rho^m)_{m\theta},$$

sendo ρ e θ duas quantidades variaveis com o inteiro m.

A relação (1) equivale a

$$1 + \frac{yi}{m} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta);$$

(*) Designamos por θ o menor valor numerico, positivo ou negativo, do argumento concernente á grandeza geometrica ρ_θ.

e d'esta se deduz (*)

(3) $$1 = \rho \cos \theta, \quad \frac{y}{m} = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

depois

$$1 + \frac{y^2}{m^2} = \rho^2,$$

e finalmente

$$\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{m^2}\right)^m} = \rho^m.$$

No intuito, pois, de conhecer o limite para que tende em (2) o modulo ρ^m quando m augmenta indefinidamente, procuremos n'esta hypothese o limite correspondente á expressão

(4) $$\left(1 + \frac{y^2}{m^2}\right)^m.$$

Pondo $\frac{y^2}{m} = z$, z approximar-se-á de zero quando m augmentar indefinidamente; e a expressão (4) transformar-se-á em

(5) $$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m.$$

Posto isto, será applicavel a (5) a transformação indicada pela relação (3) do n.º 7, advertindo porém que no caso presente será z uma quantidade variavel com m e tendente para zero, como ha pouco se disse.

(*) Por ser positivo $\cos \theta = \frac{1}{\rho}$, o angulo θ, que terá o signal *mais* ou *menos* conforme y for positivo ou negativo, será numericamente menor que $\frac{\pi}{2}$.

Ora, representando por r o modulo de $z=\frac{y^2}{m}$, respectivo a um dado valor de m, por muito grande que seja este ultimo numero, sempre o modulo da expressão contida no ultimo parenthesis d'aquella formula será inferior a $\frac{1}{1-r}$; e como o factor $\frac{z^2}{2m}$, pelo qual deve ser multiplicada essa expressão, tende para zero quando m augmenta indefinidamente, será ainda no caso presente

$$(6)\quad \lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=\lim\left(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^m}{m!}\right).$$

Demais, considerando agora a expressão comprehendida no ultimo parenthesis de (6), por maior que seja m, nunca o modulo d'essa expressão será superior a $\frac{1}{1-r}$, e teremos por conseguinte

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m \overline{\overline{<}} \lim\frac{1}{1-r}=1,$$

isto é

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m \overline{\overline{<}} 1;$$

e, como por outro lado é manifesto que não poderá ser

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m<1,$$

concluiremos finalmente

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^m=1.$$

Teremos pois em (2)

$$(7)\qquad \lim(\rho^m)=1.$$

Resta conhecer o limite para que tende o argumento $m\theta$. Das relações (3) deduz-se

$$(8) \qquad \frac{y}{m} = \text{tang}\,\theta;$$

logo (*)

$$y = m\,\text{tang}\,\theta,$$

e logo

$$(9) \qquad y = m\theta\,\frac{\text{tang}\,\theta}{\theta}.$$

Ora da relação (8) infere-se que o valor θ, positivo ou negativo, converge para zero quando m tende para o infinito, e, portanto, attendendo a (9), concluiremos

$$\text{lim.}\,y = y = \text{lim.}\,m\theta \times \text{lim.}\,\frac{\text{tang}\,\theta}{\theta} = \text{lim.}\,m\theta,$$

isto é

$$(10) \qquad y = \text{lim}\,m\theta.$$

As relações (2), (7) e (10) dão finalmente

$$e^{yi} = 1_y,$$

ou

$$(11) \qquad e^{yi} = \cos y + i\,\text{sen}\,y.$$

Esta formula devida a Euler, e que subsiste qualquer que

(*) A relação $y = m\,\text{tang}\,\theta$ deve ser considerada conjunctamente com as relações (3), e por ellas fica completamente determinada o angulo θ, pois, embora entre 0 e 2π haja sempre dois arcos que correspondem a uma dada tangente, sómente deverá ser aproveitado, como valor de θ, aquelle em relação ao qual se verifiquem as relações (3) que determinam o seno e o coseno d'esse angulo.

seja o valor numerico (positivo ou negativo) de y, justifica a denominação de exponencial trigonometrica com que é designado o algorithmo e^{yi}.

Corollario. Substituindo em (11) e^{yi} pelo seu desinvolvimento em serie, dado pela formula (1) do n.º 11, e depois igualando separadamente as partes independentes de i e as que se acharem multiplicadas por esse symbolo nos dois membros da equação resultante, obteremos (*)

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots.$$

13. *Nova representação de uma quantidade geometrica.* Pondo $z = x + yi$, tem-se

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \,.\, e^{yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = (e^x)_y,$$

ou, fazendo

$$(1) \qquad e^x = r,$$

$$e^{x+yi} = r_y.$$

Assim, proposta uma quantidade geometrica r_y, e determinado x pela relação (1), que dá $x = \log r$, teremos, para representar aquella quantidade, a expressão

$$e^{\log r + yi}.$$

(*) Suppondo conhecidos estes desinvolvimentos (veja-se na — Primeira parte — a nota (*) do n.º 19, 4.º), e attendendo ao desinvolvimento já dado (n.º 11) de e^{yi}, tambem immediatamente se acharia a relação (11) do numero precedente.

Mas, embora seja esse o modo mais geralmente seguido para se obter a referida relação (11), julgámos aqui preferivel o processo acima exposto.

Vejamos agora qual a expressão mais geral de z, que satisfaz á condição de ser

$$e^z = r_y.$$

Qualquer que deva ser z, sempre poderemos represental-o sob a forma

$$z = u + vi;$$

e assim teremos

$$e^z = e^{u+vi} = e^u \cdot e^{vi} = e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v).$$

E como esta expressão deve equivaler a r_y, isto é, a

$$r(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

será

$$e^u = r, \quad \cos v = \cos y, \quad \operatorname{sen} v = \operatorname{sen} y,$$

e logo

$$u = \log r, \quad v = y + 2n\pi,$$

denotando n todo e qualquer inteiro, positivo ou negativo.

A expressão mais geral de z será pois

$$z = \log r + (y + 2n\pi) i. \tag{2}$$

E, com effeito, tem-se

$$e^{\log r + (y + 2n\pi)i} = e^{\log r} \times e^{yi} \times e^{2n\pi i},$$

ou, por ser

$$e^{\log r} = r, \quad e^{yi} = 1_y, \quad e^{2n\pi i} = 1,$$

$$e^{\log r + (y + 2n\pi)i} = r_y.$$

IV. Logarithmos neperianos

14. *Definições*. Proposta uma quantidade geometrica, a_α, chamaremos *logarithmo neperiano* d'essa quantidade a qualquer outra, z, que satisfaça á seguinte relação

$$(1) \qquad e^z = a_\alpha.$$

D'este modo, denotando por $\log((a_\alpha))$ a expressão mais geral de z, que satisfaz á equação (1), teremos (n.º 13)

$$(2) \qquad \log((a_\alpha)) = \log a + (\alpha + 2n\pi)i.$$

Corollario. Suppondo que a_α representava um numero positivo, poderiamos suppor $\alpha = 0$, e a expressão (2) daria

$$\log((a)) = \log a + 2n\pi i;$$

por onde se vê que n'esta theoria qualquer numero positivo tem uma infinidade de logarithmos neperianos, sendo real um d'elles sómente, correspondente a $n = 0$.

Scholio. Indica a formula (2) que se obterá o logarithmo geral neperiano de uma dada quantidade $a_\alpha = a_{\alpha + 2n\pi}$, addicionando ao logarithmo arithmetico neperiano do modulo, $\log a$, o producto de i pela expressão geral, $\alpha + 2n\pi$, do argumento d'essa quantidade.

Conseguintemente, suppondo que a quantidade proposta era assignada por um valor unico (determinado) do argumento, por exemplo pelo valor α, e admittindo mais que por convenção o coefficiente de i em (2) se referia exclusivamente a esse valor, o logarithmo tornar-se-ia assim n'uma funcção completamente determinada, $\log a + i\alpha$.

A esta hypothese se referia Hoüel, quando a pag. 319 do tom. 1.° do seu *Curso de calculo infinitesimal*, escrevia: — *L'argument . . . doit être complètement déterminé, et non plus seulement connu à un multiple de* 2π *près*.

E assim tambem praticou Cauchy, quando da expressão (2) destacou a correspondente ao menor valor numerico (positivo ou negativo) do coefficiente de i, valor que, na hypothese sempre admissivel de ser α positivo e menor que 2π, ficaria representado por α, quando se tivesse $\alpha < \pi$; por $\alpha - 2\pi$, caso fosse $\alpha > \pi$; e finalmente por $\pm\pi$, na hypothese de ser $\alpha = \pi$.

Ao logarithmo, assim formado, chamou Cauchy *principal;* e resulta do que se deixa dito que esse logarithmo ficará unico, e por tanto determinado, sempre que seja $\alpha \gtrless \pi$, e duplo e da forma $\log a \pm i\pi$, quando for $\alpha = \pi$ (*).

Na obra de Cauchy (**) são quasi exclusivamente considerados os logarithmos principaes, e ácerca d'elles se demonstram diversas propriedades muito interessantes.

15. THEOREMA. *O logarithmo de um producto é egual á somma dos logarithmos dos factores* (***).

Esta propriedade resulta immediatamente da relação $e^z . e^{z'} = e^{z+z'}$, e póde tambem demonstrar-se como em seguida se vê.

(*) Esta circumstancia de ter o logarithmo principal um só valor para $\alpha \gtrless \pi$, e um valor duplo quando é $\alpha = \pi$, foi comparada pelo illustre auctor com o facto analogo que se dá com a funcção $y = \frac{1}{x}$, que, tendo tambem um só valor para cada valor, positivo ou negativo, de x, adquire dois valores, $y = \pm\infty$, quando se suppõe $x = 0$.

Ora do mesmo modo qne n'esta funcção se deverá adoptar $y = +\infty$ ou $y = -\infty$, conforme o valor $x = 0$, a que correspondem aquelles dois valores de y, for considerado como o limite de valores positivos e decrescentes de x, ou, pelo contrario, de valores negativos e tambem numericamente decrescentes d'esta mesma quantidade, assim tambem por identicas considerações se poderá, em geral, levantar a indeterminação do valor duplo do logarithmo principal, correspondente ao valor π do argumento respectivo á quantidade proposta.

(**) *Exercices d'analyse et de physique mathématique.*

(***) A doutrina d'esta proposição póde entender-se como significando que, tomado um dos logarithmos particulares de r_p e outro de s_q, a sua somma será um dos infinitos logarithmos do producto $(rs)_{p+q}$; ou, aliás, que a expressão geral do logarithmo de r_p junta com a expressão tambem geral do logarithmo de s_q dá o logarithmo geral do producto $(rs)_{p+q}$. Mas, embora sejam equivalentes estas duas interpretações, convirá usar com preferencia d'uma ou d'outra conforme os casos que se offerecerem.

Tem-se

$$\log((r_p)) = \log r + (p + 2n\pi)i,$$

$$\log((s_q)) = \log s + (q + 2n'\pi)i,$$

e portanto

$$\log((r_p)) + \log((s_q)) = \log rs + \{(p+q) + 2(n+n')\pi\}i,$$

ou, pondo

$$rs = \rho,\ p + q = \theta,\ n + n' = m,$$

(1) $$\log((r_p)) + \log((s_q)) = \log \rho + (\theta + 2m\pi)i,$$

sendo $n + n'$ ou m um inteiro qualquer, positivo ou negativo.
Por outro lado é

$$r_p \cdot s_q = (rs)_{p+q} = \rho_\theta,$$

e

(2) $$\log((\rho_\theta)) = \log \rho + (\theta + 2m\pi)i;$$

e portanto, (equações (1) e (2)), será

$$\log((r_p \times s_q)) = \log((r_p)) + \log((s_q)).$$

Corollario. *O logarithmo d'um quociente é egual ao logarithmo do dividendo menos o logarithmo do divisor.*

O logarithmo de uma potencia, indicada por um expoente, inteiro e positivo, é egual ao producto d'esse expoente pelo logarithmo da raiz. Etc., etc.

V. Das potencias em que tanto a base como o expoente denotam quantidades geometricas

16. *Definição.* Sendo u e v duas quantidades geometricas, digamos a significação de

$$u^v. \tag{1}$$

Tem-se

$$u = e^{\log((u))},$$

e por convenção considera-se a expressão (1) como equivalente a

$$e^{v \log((u))}.$$

Será pois

$$u^v = e^{v \log((u))}. \tag{2}$$

Especializaremos agora os differentes casos que podem dar-se.

1.° $v = m$, sendo m um inteiro positivo.

Pondo $u = r_\theta$, a equação (2) de definição daria

$$u^v = u^m = e^{m \log((u))} = e^{m[\log r + (\theta + 2n\pi)i]}$$

$$= e^{m \log r} \times e^{m\theta i} = r^m \times e^{m\theta i} = (r^m)_{m\theta}.$$

A expressão u^v tem pois n'este caso um valor unico, e esse valor coincide com o já achado em o n.° 16 da 1.ª Parte.

2.° $v = \dfrac{p}{q}$, sendo p e q dois numeros inteiros.

Teremos

$$u^v = e^{\frac{p}{q}\log((u))} = e^{\frac{p}{q}[\log r + (\theta + 2n\pi)i]} = e^{\frac{p}{q}\log r} \times e^{\frac{p}{q}(\theta + 2n\pi)i}$$

$$= \left(\sqrt[q]{r^p}\right)_{\frac{p}{q}(\theta + 2n\pi)},$$

expressão esta ultima, da qual se deduzirão q valores para u^v, tendo todos o mesmo modulo $\sqrt[q]{r^p}$ e argumentos differentes, os quaes resultarão de se attribuirem em $\frac{p}{q}(\theta + 2n\pi)$ a n todos os valores inteiros desde zero até $q-1$. (Veja-se o n.º 17 da Parte primeira).

3.º $v = \mathrm{N}$, sendo N um numero incommensuravel.

Designemos por r o modulo de u, e sejam $a, a', a'', \ldots$ e $b, b', b'', \ldots$ duas series de valores numericos crescentes, aquelles menores e estes maiores que N, tendo uns e outros por limite este ultimo numero. (Veja-se a nota sobre a doutrina da proporcionalidade, inserta no Vol. 39 do jornal — *O Instituto*).

Serão indefinidamente crescentes as potencias, $r^a, r^{a'}, r^{a''}, \ldots$ e como todas são inferiores a r^b, aquellas potencias terão um limite (*).

Assim, pelo que respeita ao modulo, a expressão $u^v = u^{\mathrm{N}}$ terá n'este caso um valor finito e determinado.

Agora quanto ao argumento, como nas expressões successivas $a, a', a'', \ldots$ o denominador vai augmentando e tendendo para o infinito, resulta do que se disse no caso 3.º que o argumento de u^{N} ficará completamente indeterminado; de modo que, denotado por R o modulo de u^{N}, esta ultima quantidade poderá ser

---

(*) Do mesmo modo se veria que as potencias $r^b, r^{b'}, r^{b''}, \ldots$ tinham tambem um limite; e esse limite será egual ao das quantidades, $r^a, r^{a'}, r^{a''}, \ldots$ visto serem indefinidamente decrescentes as differenças $r^b - r^a$, $r^{b'} - r^{a'}, \ldots$

E se em logar das series $a, a', a'', \ldots$ $b, b', b'', \ldots$ escolhessemos outras $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ provar-se-ia egualmente qne as potencias, $r^{\alpha}, r^{\alpha'}, \ldots$ e $r^{\beta}, r^{\beta'}, \ldots$ tendiam ainda para o mesmo limite já anteriormente considerado.

E esse limite, independente da lei que seguem na sua formação as quantidades $a, a', a'', \ldots$, que se denota pelo symbolo u^{N}.

indistinctamente representada por todo e qualquer raio de um circulo descripto com o raio R.

4.° $v = p + qi$. A formula (1) dá n'este caso

$$u^v = e^{v \log((u))} = e^{(p+qi)[\log r + (\theta + 2n\pi)i]}$$

$$= e^{p \log r - q(\theta + 2n\pi)} \times e^{[q \log r + p(\theta + 2n\pi)]i}$$

$$= \{r^p \,.\, e^{-q(\theta + 2n\pi)}\}_{q \log r + p(\theta + 2n\pi)},$$

comprehendendo-se n'esta ultima expressão uma infinidade de representações distinctas, correspondentes aos differentes valores de n (*).

VI. Dos logarithmos que têm por base uma quantidade geometrica

17. *Definição.* Posta a equação

$$u^v = w$$

na qual se suppõe que u e w representam quantidades geometricas dadas, será v dependente de u e w; pelo que, para denotar a primeira d'estas quantidades de modo que fique manifesta a sua ligação com as duas ultimas, escreveremos

$$v = \log_u w,$$

(*) Como se acaba de ver (casos 3.° e 4.°) a expressão u^v é susceptivel de uma infinidade de determinações differentes quando v denota um numero incommensuravel ou uma quantidade complexa qualquer. Essa expressão porém tornar-se-ia determinada e unica, se, como dissémos em o n.° 14, particularisassemos a expressão log $((u))$. *C'est à cette condition* (diz Hoüel) *que ... l'élévation ... à une puissance incommensurable ou complexe quelconque est une opération déterminée et uniforme.*

que se exprime dizendo que é v o logarithmo de w no systema de base u.

Para achar v, sendo dados u e w, como é

$$u^v = e^{v \cdot \log((u))},$$

e portanto

$$e^{v \log((u))} = w,$$

pondo

$$(1) \qquad v \log((u)) = z,$$

o que dava

$$e^z = w,$$

começariamos por determinar $z = \log((w))$, e depois a relação (1) daria

$$(2) \qquad v = \frac{\log((w))}{\log((u))}.$$

Esta ultima expressão, susceptivel de uma infinidade de determinações differentes, resultantes dos valores tambem differentes que podem attribuir-se aos dois termos da fracção (2), tornar-se-ia unica e, portanto, determinada, por meio da convenção a que nos referimos em os n.os 14 e 16.

VII. Das denominadas linhas ou relações trigonometricas, no caso em que o arco se acha substituido por uma quantidade geometrica.

18. *Definições.* Sendo z uma quantidade algebrica (numero positivo ou negativo) achámos (n.º 12)

$$(1) \qquad \begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z, \\ e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z, \end{cases}$$

d'onde se deduz, resolvendo as equações (1),

$$(2)\qquad \operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Suppondo agora que por z se denota uma quantidade geometrica, isto é, uma expressão da forma $x+yi$, sendo x e y dois numeros quaesquer positivos ou negativos, tomaremos para definições de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ as que resultam d'essas mesmas relações (2).

Teremos assim

$$(3)\qquad \operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$(4)\qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

e tambem, por definição,

$$(5)\qquad \operatorname{tang} z=\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1},$$

$$(6)\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}=i\cdot\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1},$$

$$(7)\qquad \sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

$$(8)\qquad \operatorname{cosec} z=\frac{1}{\operatorname{sen} z}=\frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}};$$

relações estas, ás quaes podemos ainda accrescentar as duas seguintes

$$(9) \qquad \operatorname{sen}^2 . z + \cos^2 . z = 1,$$

$$(10) \qquad 1 + \operatorname{tang}^2 . z = \sec^2 . z;$$

que facilmente se deduzem das precedentes (*).

Corollario 1.º *Na hypothese de ser z uma quantidade geometrica ainda subsistem as relações* (1); como se reconhece tirando de (3) e (4) os valores de

$$e^{iz},\ e^{-iz}.$$

Corollario 2.º Substituindo em (3) e (4) por e^{iz} e e^{-iz} os seus desinvolvimentos dados pela formula (1) do n.º 11, *resulta*

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots.$$

Corollario 3.º *Na mesma hypothese dos corollarios precedentes continuam a ser funcções pares de z (quer dizer, funcções que permanecem invariaveis quando se muda z em — z) o coseno e a secante; e funcções impares (isto é, funcções que apenas variam de signal por effeito d'aquella mudança no signal de z) todas as demais relações trigonometricas.*

O que se reconhece, mudando z em $-z$ nas relações (3) a (8), e depois comparando com os primitivos os valores resultantes.

(*) Assim, a relação (9) immediatamente se obtém multiplicando uma pela outra as duas equações (1), ou, aliás, elevando ao quadrado e sommando ordenadamente as equações (2). E, para se obter (10), bastará dividir por $\cos^2 z$ os dois membros de (9).

COROLLARIO 4.º *Qualquer das relações trigonometricas, precedentemente definidas, permanecerá invariavel quando a z se addicione ou tire um multiplo de* 2π; o que facilmente se deprehende de ser

$$e^{iz} = e^{i(z+2n\pi)}.$$

E, suppondo que a z se addicionava um numero impar de semicircumferencias, *teriamos*

$$\operatorname{sen} \{z + (2n+1)\pi\} = -\operatorname{sen} z,$$

$$\cos \{z + (2n+1)\pi\} = -\cos z,$$

. . . .

tudo como se z fosse real.

COROLLARIO 5.º *Se z e z' forem complementares, isto é, se for*

$$z + z' = \frac{\pi}{2},$$

teremos

$$\operatorname{sen} z = \cos z', \quad \operatorname{tang} z = \cot z', \text{ etc.}$$

E, se forem supplementares, será

$$\operatorname{sen} z' = \operatorname{sen} z, \quad \cos z' = -\cos z, \text{ etc.}$$

COROLLARIO 6.º *As formulas conhecidas na hypothese z e z' serem arcos reaes*

$$(11) \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}(z+z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \operatorname{sen} z' \cos z, \\ \cos(z+z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z' \end{cases}$$

ainda subsistem quando z e z' tenham representação geometrica.

Com effeito tem-se, por exemplo,

$$\operatorname{sen}(z+z') = \frac{e^{i(z+z')} - e^{-i(z+z')}}{2i} = \frac{e^{iz} \cdot e^{iz'} - e^{-iz} \cdot e^{-iz'}}{2i},$$

e substituindo

$$e^{iz},\ e^{-iz},\ e^{iz'},\ e^{-iz'}$$

pelos seus valores dados pelas equações (1) applicadas successivamente aos arcos z e z', immediatamente resulta a primeira das relações (11).

VIII. Determinação dos arcos correspondentes a uma relação trigonometrica dada

19. *Formulas que dão o arco expresso n'uma das suas linhas ou relações trigonometricas.* Seja u o valor dado de um seno, e z o arco respectivo que se pretende determinar.

Pondo $\operatorname{sen} z = u$, a formula (3) do n.º 18 dará

$$u = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

d'onde deduziremos o valor de z, como em seguida se vê.

A equação precedente equivale a

$$e^{2zi} - 2iue^{zi} - 1 = 0,$$

e desta resulta

$$e^{zi} = iu \pm \sqrt{1-u^2},$$

e depois

$$(1) \qquad z = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = u) = \frac{1}{i} \log\left(\left(iu \pm \sqrt{1-u^2}\right)\right).$$

Se em logar do seno fosse dado o coseno, designando-o tambem por u e attendendo á equação (4) do numero precedente, achariamos

$$(2) \qquad z = \operatorname{arc}(\cos = u) = \frac{1}{i} \log((u \pm \sqrt{u^2 - 1})).$$

Do mesmo modo, suppondo conhecida a tangente, teriamos pela formula (5) do n.º 18

$$(3) \qquad z = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = u) = \frac{1}{2i} \log\left(\left(\frac{1 + iu}{1 - iu}\right)\right).$$

E assim por deante.

Em seguida, para completar a determinação de z por qualquer das formulas precedentes, resta ainda substituir u pela sua respectiva expressão, que poderá ser qualquer das seguintes

$$u = r_\theta = p + qi.$$

No intuito, pois, de mostrar como se procede n'essas transformações, procuraremos effeitual-as n'uma das formulas ultimamente achadas, na formula (3) por exemplo (*).

Pondo em (3)

$$u = r_\theta = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

virá

$$z = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = r_\theta) = \frac{1}{2i} \log\left(\left(\frac{1 - r\operatorname{sen}\theta + ir\cos\theta}{1 + r\operatorname{sen}\theta - ir\cos\theta}\right)\right),$$

(*) Les fonctions inverses du cosinus et du sinus, pour des valeurs complexes de ces dernières quantités, se calculeraient de la même manière. Seulement leurs valeurs sont plus compliquées et d'un usage moins fréquent. (*Cours de Calcul infinitésimal*, par J. Hoüel, tom. 1.º, pag. 327).

ou, multiplicando por

$$1 + r \operatorname{sen} \theta + ir \cos \theta$$

ambos os termos da ultima fracção,

$$(4) \qquad z = \frac{1}{2i} \log \left(\left(\frac{1 - r^2 + 2ir \cos \theta}{1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta} \right) \right).$$

Ora a expressão

$$\frac{1 - r^2 + 2ir \cos \theta}{1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta}$$

póde reduzir-se á forma

$$A + Bi = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{Bi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

$$= \left(\sqrt{A^2 + B^2}\right)_{\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{B}{A}\right)},$$

sendo

$$A = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta}, \quad B = \frac{2r \cos \theta}{1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta},$$

portanto,

$$A^2 + B^2 = \frac{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \cos^2 \theta}{(1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta)^2} = \frac{(1 + r^2)^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta)^2}$$

$$= \frac{(1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta)(1 + r^2 - 2r \operatorname{sen} \theta)}{(1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta)^2} = \frac{1 + r^2 - 2r \operatorname{sen} \theta}{1 + r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta},$$

e

$$\frac{B}{A} = \frac{2r \cos \theta}{1 - r^2};$$

e com estes valores, attendendo á formula (2) do n.º 13, (4) dará

$$(5) \qquad z = \text{arc}\,(\text{tang} = r_\theta) = \frac{1}{2}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2r\cos\theta}{1-r^2}\right)$$

$$+\frac{i}{4}\log.\frac{1+2r\,\text{sen}\,\theta+r^2}{1-2r\,\text{sen}\,\theta+r^2}+n\pi.$$

Suppondo agora que u era dado sob a forma

$$u = p + qi,$$

bastaria substituir em (5) r e θ pelos seus valores expressos em p e q, isto é, pôr

$$r\cos\theta = p, \quad r\,\text{sen}\,\theta = q;$$

e assim obteriamos

$$z = \text{arc}\,(\text{tang} = p + qi) = \frac{1}{2}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2p}{1-p^2-q^2}\right)$$

$$+\frac{i}{4}\log\frac{(1+q)^2+p^2}{(1-q)^2+p^2}+n\pi.$$

FIM.

ERRATA

Na 4.ª linha do Corol. 1.º, pag. 8, em logar de:

serie primitiva (***); *e reciprocamente.*

leia-se:

serie primitiva (***); *e, conseguintemente, proposta uma serie convergente de termos reaes e positivos, será tambem convergente a serie que d'ella provier pela mudança operada nos signaes de quaesquer dos seus termos.*

INDICE