

1070
A. VAN
Sala 5
Gab. -
Est. 56
Tab. 19
N.º 19

Sala 5
Gab. —
Est. 56
Tab. 19
N.º 19



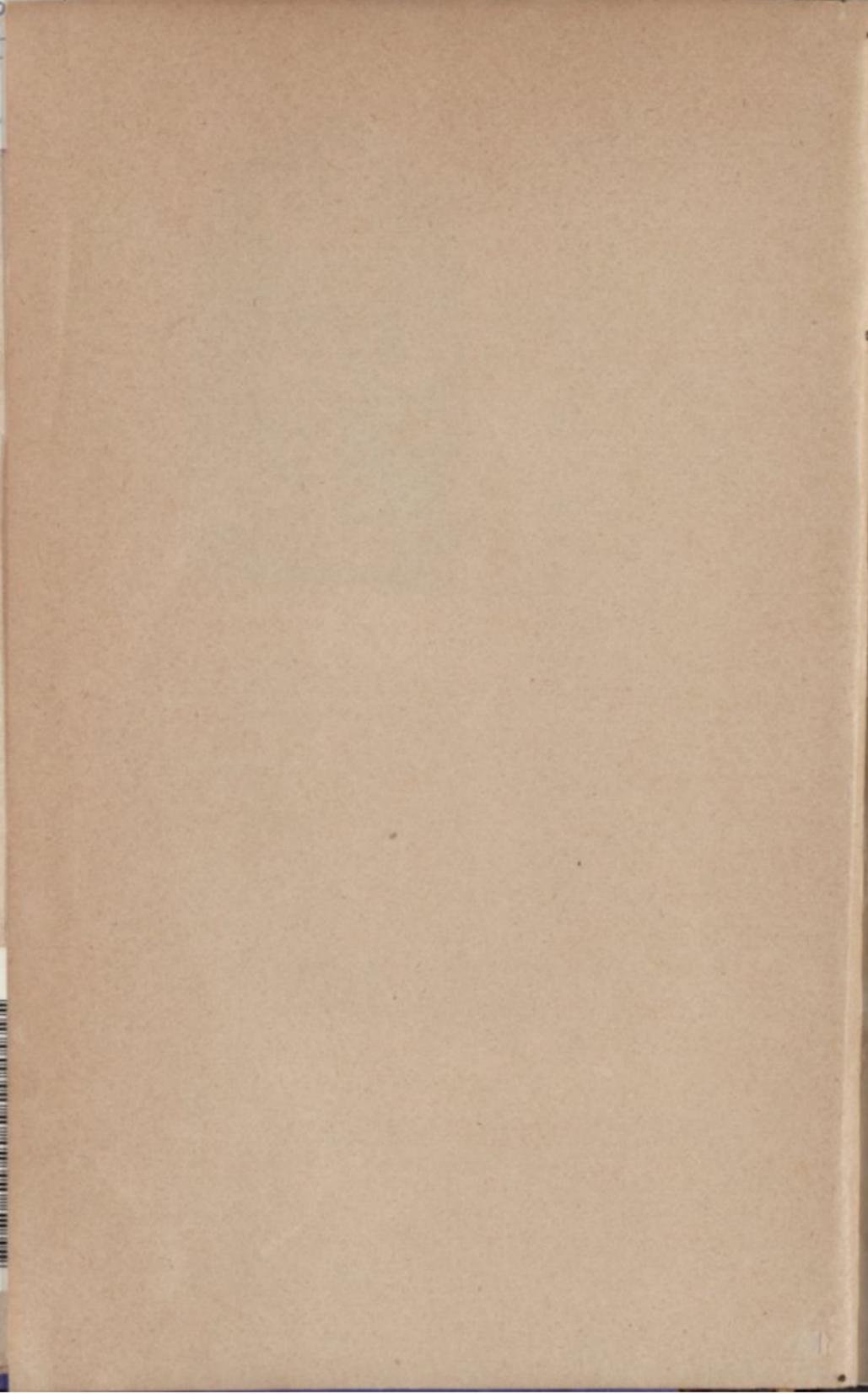
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Biblioteca Geral



1301500127



b24478398



DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

NA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ESTUDO

SÔBRE

O PLANO INVARIÁVEL DO SYSTEMA SOLAR

POR

GONÇALO XAVIER DE ALMEIDA GARRETT



matematica

COIMBRA

Imprensa da Universidade

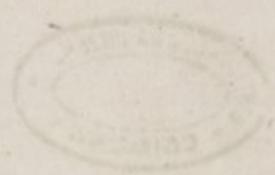
UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

EXPERIMENT

THE THEORY OF QUANTUM MECHANICS

BY JOHN VON NEUMANN



Nos trabalhos do insigne Kepler apparece a origem dos estudos de que nasceu o princípio da conservação das áreas, tam conhecido em mechanica pelas assiduas investigações dos geometras mais distinctos e pela importancia que merece ésta notavel lei da natureza.

Esse astronomo célebre foi quem primeiro concebeu a luminosa idea de considerar a área descripta pelo raio vector de um planeta no seu movimento em volta do Sol. Guiado acaso pelas ligeiras noções que então possuía a sciencia sôbre o movimento de translação dos planetas, concluiu

que a ditta área, correspondente a um qualquer de seus sectores ellipticos, é sempre a mesma em tempos eguaes, por augmentar proporcionalmente ao tempo decorrido. Uma discussão minuciosa das melhores observações astronomicas e a sua attenta comparação fizera levar Kepler á descoberta d'essa importantissima lei.

Este princípio, obtido com o auxilio da observação, foi ao depois elevado por Newton á classe de theorema mathematico, demonstrando que elle subsiste no movimento de um corpo attrahido por qualquer fôrça para uma origem fixa.

No meio do seculo passado, Daniel Bernoulli e Euler descobriram um theorema mais generico, no qual se acha comprehendido o que appresentára Newton. É relativo a um systema de corpos, sujeitos a suas acções mútuas e a quaesquer fôrças dirigidas para um ponto fixo. As áreas descriptas por cada um dos corpos não teem a propriedade de ser constantes, pois variam em consequencia das perturbações originadas pelos outros. Se projectarmos porém sôbre um plano fixo as áreas pertencentes a todos os corpos do systema, multiplicadas respectivamente pelas massas de cada um d'elles, a somma das projecções, durante todo o seu movimento, sera sempre a mesma em tempos eguaes.

O conhecimento do princípio das áreas deu origem á descoberta da notavel propriedade do plano maximo, o qual conserva uma posição fixa e invariavel no espaço. Laplace foi o primeiro que teve a idea de fazer considerar tal plano em um systema collocado nas condições que deixámos indicadas, e procurando determiná-lo no nosso systema planetario, tornou patentes as vantagens que de seu conhecimento poderiam resultar ás sciencias astronomicas.

É na realidade importantissima no systema do mundo a sua consideração, em virtude da propriedade fundamental caracteristica, que o fez appellar invariavel.

Mediante o seu auxilio chegaremos, algum dia, a investigar com a maior exactidão as alterações produzidas na posição das orbitas planetarias. Os movimentos proprios das estrellas serão analogamente estudados com reconhecida vantagem. Examinar se a acção d'estes astros tem alguma diminuta influencia sôbre os corpos que constituem o nosso systema, procurar quaes as modificações por ventura opperadas em seus movimentos, são pontos, cujo estudo se torna de muito interesse para a sciencia e que tambem poderá ser melhor e mais proficuamente dirigido. A determinação do mesmo plano hade talvez suggerir alguma idea nova, rela-

tivamente ás perturbações originadas pela acção dos cometas ou de quaesquer outros corpos ignorados do universo.

Uma das questões mais elevadas do systema planetario é pois a que se occupa do seu plano maximo das áreas. Foi ésta reflexão que nos levou a escolher, para objecto d'este estudo, tam importante materia, a que daremos todo o desenvolvimento compativel com os estreitos limites, que prescreve a occasião, lamentando não poder dar-lhe aquelle de que é merecedora especialmente na actualidade.

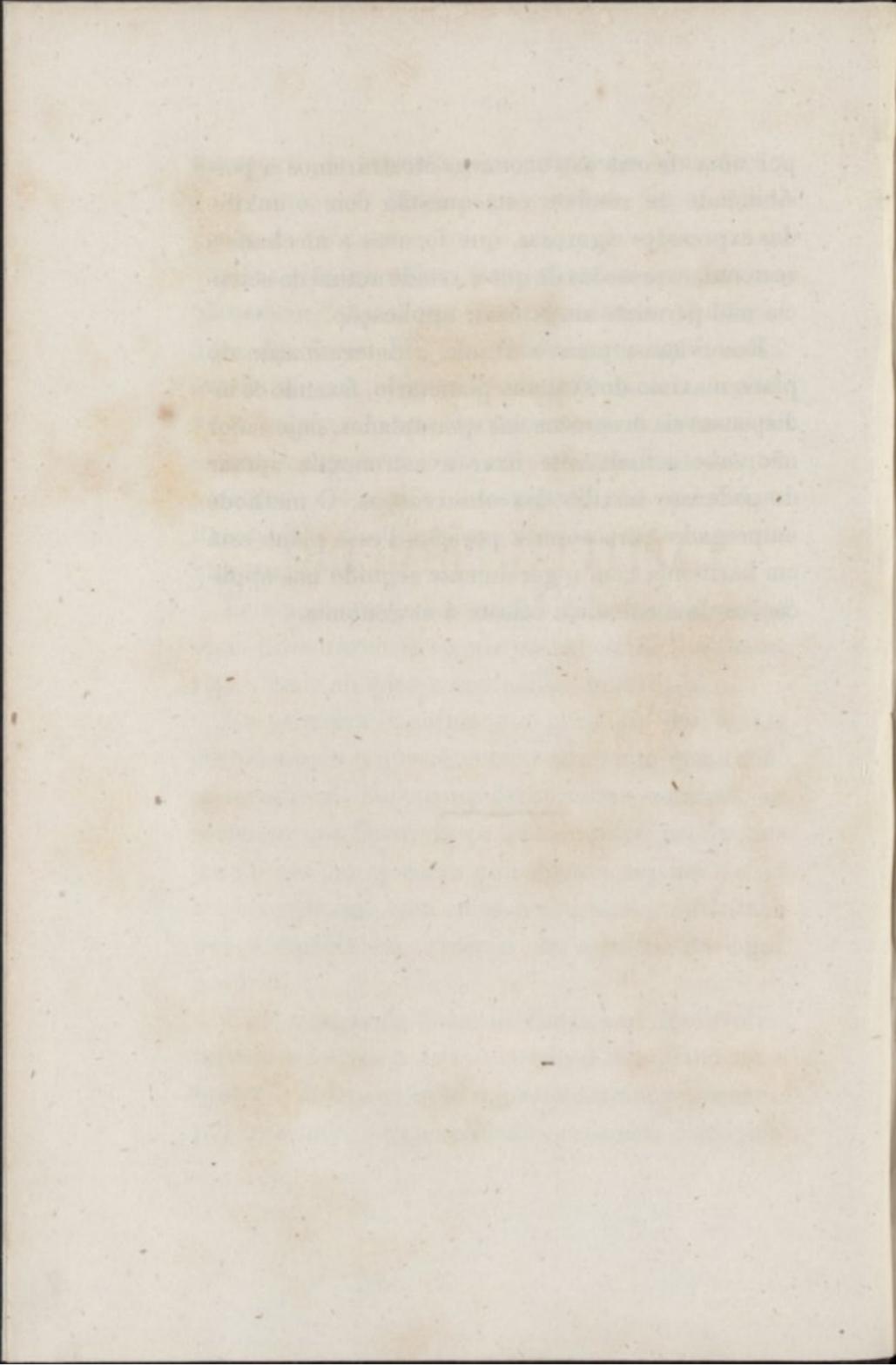
Este nosso trabalho sera dividido em tres partes, onde procuraremos seguir na exposição das materias a mais simples e methodica distribuição.

Na primeira exporemos o princípio das áreas, considerando a questão como um ponto de mechanica racional. Esboçadas éstas bases essenciaes, as fórmulas que determinam o plano principal de projecção em um systema unicamente sujeito a suas acções mútuas, bem como a singular propriedade que o caracteriza, obterão em seguida um logar proprio.

Para a segunda ficam destinados os desenvolvimentos relativos á determinação d'esse plano em o systema Solar, na qual apresentaremos o assumpto com toda a generalidade necessaria e exigida

por uma theoria astronomica. Mostraremos a possibilidade de resolver ésta questão com o auxilio das expressões rigorosas, que fornece a mechanica racional, expressões de que o estado actual da sciencia não permite ainda fazer applicação.

Reservâmos para a última a determinação do plano maximo do systema planetario, fazendo os indispensaveis desprezos das quantidades, cujo valor não sabe actualmente fixar a astronomia apesar do poderoso auxilio das observações. O methodo empregado para obter a posição d'esse plano está em harmonia com o geralmente seguido nas applicações da mechanica celeste á astronomia.



CAPÍTULO PRIMEIRO

CAPITULO PRIMERO

Reflexões preliminares sôbre a theoria
do plano invariavel.

As equações do movimento de um systema de corpos, sujeitos a suas acções mútuas e sollicitados por fôrças acceleratrizes quaesquer, guiam na investigação d'algumas importantissimas propriedades. Não sendo porém designio nosso entrar em desenvolvimentos ácerca de todas ellas, no que é relativo á theoria, e debaixo do ponto de vista das suas respectivas applicações, limitar-nos-hemos á consideração d'um caso particular, que indubitavelmente se torna do maior alcance no estudo do systema planetario.

Seja dm um elemento da massa m de um corpo

do systema proposto. Representando por x, y, z as coordenadas rectangulares, que determinam em referencia a tres eixos fixos a posição d'esse elemento, designemos por X, Y, Z as componentes, respectivamente parallelas, de todas as fôrças que obram sôbre cada unidade da massa m , e por t o tempo. As fôrças perdidas, provenientes das fôrças impressas ao corpo m e das effectivas tomadas em sentido contrário, teem por expressão,

$$Sdm \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right), \quad Sdm \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad Sdm \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right),$$

os integraes S devendo estender-se a toda a sua massa.

A fim d'obter, para cada um dos corpos $m, m', m'' \dots$ do systema, a expressão das fôrças perdidas, basta accentuar convenientemente dm, x, y, z , e X, Y, Z nas fórmulas anteriores.

Como, em virtude do princípio de d'Alembert, o systema se conserva em equilibrio debaixo da acção de todas as fôrças perdidas, para exprimir tal condição podêmos substituir seus valores nas seis equações geraes do equilibrio de um systema qualquer.

Se procedermos a este trabalho, occupando-nos unicamente das equações correspondentes ao equi-

librio de rotação, porque d'ellas dependem as nossas investigações, virá sem difficuldade,

$$\sum \left[y Sdm \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - x Sdm \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right] = 0,$$

$$\sum \left[x Sdm \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) - z Sdm \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \right] = 0,$$

$$\sum \left[z Sdm \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - y Sdm \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \right] = 0,$$

a caracteristica Σ exprimindo a somma de todos os termos relativos aos differentes corpos $m, m', m'' \dots$, que é mister considerar.

Éstas relações podem receber a fôrma mais simples,

$$\sum Sdm \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum Sdm (xY - yX),$$

$$\sum Sdm \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \sum Sdm (zX - xZ),$$

$$\sum Sdm \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \sum Sdm (yZ - zY),$$

e são as equações do movimento de rotação do sistema em volta da origem das coordenadas.

Não encarando a questão em toda a generalidade, occupemo'-nos somente do caso em que se tornam nullos os seus segundos membros, a fim de reconhecer algumas propriedades interessantes, dignas de serem mencionadas.

Os segundos membros desaparecem, quando o systema proposto estiver unicamente sujeito á acção mútua dos corpos que o compõem, e á influencia de fôrças dirigidas para um ponto que se tomar para origem das coordenadas, ponto, que deverá ser fixo no espaço, ou dotado de movimento rectilíneo e uniforme, ou coincidir finalmente com o centro de gravidade do systema.

Durante o movimento de qualquer systema que não estiver sujeito senão á mútua acção de seus corpos e a fôrças dirigidas para a origem das coordenadas, teremos por consequencia :

$$\sum Sdm \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\sum Sdm \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\sum Sdm \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = 0.$$

Se os corpos não forem attrahidos para um ponto,

mas sim unicamente sujeitos a suas acções mútuas, é permittido referir as coordenadas a tres eixos tirados por uma origem, cuja posição fica completamente arbitraria. Fazendo pois abstracção do movimento geral do systema, com o fim de não attender senão aos movimentos relativos de seus corpos, sera auctorizada e por conseguinte mui natural a collocação da origem no seu commum centro de gravidade, porque este ponto se considera em repouso e como fixo no espaço relativo, onde se executam os movimentos dos differentes corpos.

Por admittirmos um tal systema nas diversas indagações que devem seguir-se, consideraremos as tres últimas equações referidas ao seu centro de gravidade.

Se procedermos á sua integração relativamente a t , virá

$$\sum Sdm \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = s,$$

$$\sum Sdm \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = s', \quad (a)$$

$$\sum Sdm \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = s'',$$

designando por s , s' , s'' as constantes arbitrarias.

Com o auxílio d'estas equações é facil demonstrar uma propriedade notavel, e de muito alcance pelas vantagens que poderá prestar ao estudo das estrelas e dos movimentos planetarios.

A expressão differencial $xdy - ydx$ representa, em grandeza e em signal, o dôbro da área descripta, durante o tempo dt , ao redor da origem das coordenadas, pela projecção do raio vector de dm sôbre o plano dos xy . São analogas as expressões das áreas projectadas, em o mesmo tempo, sôbre os outros planos coordenados.

Se pois designarmos por $d\lambda$, $d\lambda'$, $d\lambda''$, as áreas elementares, relativas a esse ponto material e aos tres planos mencionados, as equações recebem a seguinte fórma:

$$\sum Sdm.d\lambda = \frac{1}{2}sd t, \quad \sum Sdm.d\lambda' = \frac{1}{2}s't dt, \quad \sum Sdm.d\lambda'' = \frac{1}{2}s''t dt.$$

Contando as áreas a partir da origem do tempo, apparece, mediante uma simples integração:

$$\sum Sdm.\lambda = \frac{1}{2}st, \quad \sum Sdm.\lambda' = \frac{1}{2}s't, \quad \sum Sdm.\lambda'' = \frac{1}{2}s''t.$$

D'aqui se infere que, estando os corpos de um systema livre unicamente sujeitos a suas acções mútuas, augmenta proporcionalmente ao tempo de-

corrido a somma das projecções, sôbre um plano qualquer, das áreas descriptas pelos raios vectores de todos os elementos materiaes e multiplicadas cada uma pela massa do ponto molecular correspondente. As áreas deverão considerar-se positivas para os corpos que se moverem em um sentido, com tanto que sejam negativas para aquelles que forem dotados de movimento em sentido inverso.

Ésta lei geral do movimento, denominada principio da conservação das áreas, subsiste, embora haja choques, embora se deem explosões que alterem a figura dos corpos do systema, embora se liguem entre si todos ou parte d'elles, embora finalmente se oppere alguma alteração no seu estado solido, liquido ou gazoso.

Projectando, sôbre diversos planos tirados pela origem das coordenadas, as áreas descriptas pelos raios vectores de todas as moleculas que entram na composição dos corpos considerados, e multiplicando cada uma pela massa dos elementos materiaes respectivos, demonstra-se que a somma é nulla em relação a todos aquelles que se interceptam segundo uma recta dada.

Um plano perpendicular a ésta linha goza d'uma propriedade digna de menção. E com effeito, a somma das áreas projectadas sôbre cada um dos planos que lhe ficarem igualmente inclinados, possui em

todos o mesmo valor, e este valor é proporcional ao coseno de sua inclinação.

Existe por consequencia um plano unico e distincto, em relação ao qual a ditta somma é maxima.

Se representarmos por v , v' , v'' os angulos que este último faz com os tres planos coordenados, attendendo ás propriedades conhecidas das projecções, teremos facilmente as relações seguintes:

$$\cos v = \frac{s}{\sqrt{s^2 + s'^2 + s''^2}},$$

$$\cos v' = \frac{s'}{\sqrt{s^2 + s'^2 + s''^2}}, \quad (b)$$

$$\cos v'' = \frac{s''}{\sqrt{s^2 + s'^2 + s''^2}}.$$

A direcção do plano maximo das áreas fica pois independente do tempo, conservando-se sempre parallelo a si mesmo durante todo o movimento, quaesquer que sejam as mudanças que se deem nas posições respectivas dos corpos do systema.

Não tem influencia na sua direcção as alterações acaso produzidas em sua figura pelos choques, explosões interiores, e pela circumstância de chegarem a ligar-se entre si alguns dos corpos do systema. Este plano é tambem independente de todas

as variações completamente arbitrárias, que por ventura se opporem na lei reguladora da attracção da materia.

Uma tam singular propriedade levou Laplace, a conferir a esse plano a denominação de invariavel.

Por ser a origem das coordenadas collocada no centro da gravidade do systema, o plano principal de projecção mover-se-ha parallelamente a si mesmo.

Para determinar este plano basta conhecer os valores das constantes s, s', s'' . Sabendo quaes sejam as massas dos differentes corpos, e obtendo para um instante qualquer as suas posições e as componentes de suas velocidades, calculam-se os valores das constantes por meio das equações (a), que anteriormente appresentámos.

É conveniente dizermos algumas palavras com relação a um novo e differente modo de considerar o princípio das áreas, o qual torna patente a sua verdadeira interpretação mechanica. D'aqui nasce uma idea luminosa ácerca d' ésta doutrina, cujas noções nos servirão d'auxílio, em algumas das questões que ao diante havemos de examinar.

A antiga theoria das áreas e dos momentos, por imperfeita que era, fazia considerar éstas expressões, como simples quantidades numericas ou geometricas, como puras relações de analyse, que entram nas equações pertencentes áquella parte da

mechanica, que se occupa das leis do equilibrio e movimento dos systemas. Ainda mais: o plano chamado invariavel determina-se de modo que a somma das áreas projectadas sôbre elle seja maxima; se tomarmos dois outros perpendiculares entre si e ao primeiro, sera nulla a somma das áreas projectadas em cada um d'aquelles.

Transformando os planos coordenados primitivos nos tres que deixâmos indicados, é mûita a simplificação que se dá ao cálculo, por isso que desaparesem duas das constantes arbitrârias, que entram em nossas equações.

Segundo essa maneira de olhar e proceder em tam interessante doutrina, as quantidades em que se acham expressas taes equações, são apenas symbolos rigorosamente abstractos ou simples fórmulas d'anályse, não dando a conhecer a natureza propria das grandezas, que figuram na theoria do equilibrio e movimento dos systemas.

Em virtude das novas e brilhantes luzes, que tem recebido modernamente a mechanica, as áreas não répresentam superficies, que se projectam em um plano, mas sim verdadeiras fôrças de rotação, ou segundo a phrase adoptada, conjugados que actuum sôbre o systema proposto.

Postas éstas ideas, a determinação do plano maximo das áreas não é mais que uma simples com-

posição de todos esses conjugados, que servirão de fixar a grandeza e posição do conjugado resultante.

Este conjugado unico conserva sempre uma grandeza constante, occupando um so plano durante todo o movimento, quaesquer que sejam as alterações que modifiquem a posição e grandeza dos seus conjugados componentes.

Para se dar uma tal circumstância, é mister que os corpos do systema estejam unicamente sujeitos a suas acções mútuas, podendo todavia ser attrahidos para um ponto em que se colloque a origem das coordenadas.

Os primeiros membros das equações anteriormente encontradas,

$$\sum Sdm \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = s,$$

$$\sum Sdm \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = s',$$

$$\sum Sdm \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = s'',$$

exprimem a somma de todos os conjugados, que actuam sôbre os corpos do systema, decompostos segundo os tres eixos coordenados. Por serem constantes os segundos membros, a grandeza e posição

do conjugado resultante, permanecerá sempre a mesma em quanto durar o movimento.

Fica pois demonstrada a proposição que asseverámos.

Exposta em breves traços a theoria do plano invariavel de um systema qualquer, unicamente sujeito ás suas acções mútuas, cumpre-nos entrar na applicação d'estes principios á sua determinação no systema Solar.

CAPÍTULO SEGUNDO

CAPITULO SEGUNDO

Considerações relativas á determinação theorica
do plano invariavel do systema Solar.

O estudo das leis do movimento dos systemas foi á porfia apprehendido pelos geometras mais abalisados na sciencia.

Em várias e repetidas investigações se procurou indagar qual o plano maximo d'um systema proposto, com o fim de simplificar o cálculo pelo desaparecimento de duas das constantes arbitrárias, que entram nas equações do seu movimento. Cabe porém a Laplace a glória de ter sido o primeiro que deu a este plano o nome de invariavel, e intentando determiná-lo no systema planetario, mostrou as vantagens de sua consideração.

Admittamos que, n'uma qualquer epocha, se tornára possível obter, attendendo unicamente á acção mútua de seus corpos, a posição do plano maximo do systema Solar, isto é, a grandeza e posição do seu conjugado resultante. Procedendo a trabalhos analogos em diversas epochas muito distantes, seriam identicos ou differentes os resultados, hypotheses que ambas vamos em seguida ponderar.

Se houver concordancia entre elles, existirá um plano invariavel no systema do mundo, e a sua consideração tornar-se-ha da maior utilidade. Os astrónomos referem as posições dos astros e das orbitas descriptas, ao plano da orbita da Terra e a uma recta tirada pelo centro do Sol parallelamente á linha dos equinoccios. Em consequencia do movimento da ecliptica e da linha equinoccial torna-se indispensavel determinar as posições d'estes elementos, em um instante dado, pela sua comparação ás das estrellas; todavia, como os movimentos proprios que possuem estes corpos celestes são ignorados na maior parte, podem introduzir-se, decorrido um longo espaço de tempo, erros sensiveis nos deslocamentos absolutos da orbita da Terra. Seria pois muita a conveniencia do emprego do plano invariavel, a fim de melhor avaliar as perturbações planetarias.

Se por ventura as investigações feitas em epo-

chas diversas nos conduzirem a valores differentes para a posição do plano maximo, é forçoso admittir alguma acção estranha ao nosso systema, acaso proveniente dos cometas ou das estrellas, mesmo d'algum corpo ignorado e invisivel, a cuja influencia se não houvera attendido. Ainda que o conjugado obtido pelo cálculo não seja resultante de todos os que actuam sôbre os corpos do systema do mundo, o plano encontrado poderá talvez ser mui pouco variavel e muito menos do que o da orbita terrestre: a sua determinação, apezar das difficuldades inherentes, compensará exuberantemente esse trabalho, permittindo referir-lhe com superioridade as posições das orbitas e de todos os corpos que devisâmos na esphera celeste.

Além das vantagens philosophicas, que do conhecimento do plano maximo poderiam resultar para as sciencias astronomicas, sería possível, comparando a theoria com a observação, alcançar luzes novas ácerca do systema de que o nosso globo faz parte.

Assim analysariamos, como consequencia da acção dos corpos estranhos: se os planetas e o Sol são alguma cousa perturbados; se o ditto plano persiste acaso parallelamente a si mesmo ou tem logar o contrario; e por último se retrogradam os seus nodos, com um movimento insensivel, sôbre a or-

bita immensa, que o Sol descreve ao redor d'algum centro mui affastado.

Appresentadas éstas ideas preliminares indispensaveis, cumpre-nos expor a questão melindrosissima da determinação do plano invariavel. Procuraremos tractá-la com o maior rigor da theoria, mostrando a possibilidade d'este trabalho em toda a sua generalidade, qualquer que seja a figura que elles affectem, ou a lei que regule as attracções dos corpos uns para os outros.

Seja a origem das coordenadas collocada no centro da gravidade do systema planetario. Tomemos o plano dos xy parallelamente ao que occupa a ecliptica n'um instante dado. Fixando as direcções para o eixo dos x e o dos y , e representando por φ a inclinação do plano maximo sôbre o dos xy , e por ω a longitude do seu nodo ascendente, sera:

$$\cos v = \cos \varphi, \quad \cos v' = \sin \varphi \cos \omega, \quad \cos v'' = \sin \varphi \sin \omega.$$

Em virtude d'estas relações, as fórmulas (b) dão facilmente:

$$\text{tang } \varphi = \frac{\sqrt{s'^2 + s''^2}}{s}, \quad \text{tang } \omega = \frac{s''}{s'}$$

Ficará pois conhecida a posição, do plano inva-

riavel, se forem dados os valores das constantes arbitrarias s, s', s'' .

Para que este plano possa servir de verdadeira utilidade á astronomia, e mostrar as alterações que tenham soffrido as posições das orbitas e dos equadores planetarios, assim como as das estrellas, é indispensavel que saibamos determinar reciprocamente, n'uma qualquer epocha, a posição da eclipica referida ao plano denominado invariavel. Pretendendo chegar a essa determinação, que nos dá a mútua inclinação dos dois planos, e tambem a longitude do nodo da orbita terrestre, d'onde se observam os movimentos celestes, é necessario conhecer previamente alguma linha fixa sôbre o plano maximo, á qual refiramos a sua intercepção.

Nas equações geraes da mechanica, que procurámos applicar aos movimentos do systema Solar, admittimos que os diversos corpos estão unicamente sujeitos a suas acções mútuas. Concedida a hypothese, não é difficil demonstrar que o centro de gravidade do systema descreve no espaço uma linha recta. Se a projectarmos pois sôbre o plano invariavel, obteremos, excluindo o caso de ser perpendicular a sua direcção, uma recta, sempre parallela a si mesma, mediante cujo auxilio se conseguiria o fim desejado.

Uma tal idea, devida a Poisson, so seria util á

prática, quando soubessemos a verdadeira direcção do movimento do centro de gravidade do nosso systema, ou mais exactamente, a direcção do pequeno arco, que, na actualidade, o Sol descreve em sua orbita immensa. Alguns astrónomos empenharam valiosos esforços a fim de alcançar tam importante resultado, sendo Argelander um dos mais zelosos no esclarecimento d'este ponto scientifico. A sua direcção porém é mui pouco conhecida e por extremo difficil d'obter com exactidão, podendo talvez servir de interesse real ás indagações astronomicas, so n'uma epocha muito distante da nossa.

Querendo determinar a posição do plano invariavel, é necessario que calculemos para um instante dado os valores das constantes s, s', s'' . As equações (a), que presentemente se acham referidas ao centro de gravidade do systema Solar, conduzem a esse resultado.

Se designarmos por x, y, z , as coordenadas do centro de gravidade do corpo m , e por α, β, γ as da molecula dm relativas a este ponto e a novos eixos parallelos aos primeiros, teremos:

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta, \quad z = z_1 + \gamma.$$

Substituindo nas relações (a) estes valores e suas

diferenciaes em ordem a t , encontra-se

$$\sum m \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) + \sum S dm \left(\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} \right) = s,$$

$$\sum m \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) + \sum S dm \left(\gamma \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\gamma}{dt} \right) = s',$$

$$\sum m \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) + \sum S dm \left(\beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} \right) = s'',$$

por ser

$$S_\alpha dm = 0, \quad S_\beta dm = 0, \quad S_\gamma dm = 0,$$

e consequentemente

$$S \frac{d\alpha}{dt} dm = 0, \quad S \frac{d\beta}{dt} dm = 0, \quad S \frac{d\gamma}{dt} dm = 0,$$

visto que se acha collocada a origem das coordenadas α , β , γ , no centro de gravidade de m .

Éstas equações, segundo deixa ver a transformação effectuada, compõem-se de duas partes. A primeira diz respeito ás áreas geradas pelo movimento de translação dos centros de gravidade dos diferentes cospos do systema do mundo, considerando

as suas massas $m, m', m''...$ concentradas n'esses pontos. A segunda é proveniente das áreas a que dão origem os movimentos de rotação dos mesmos corpos, ao redor de seus respectivos centros de gravidade, que serão tidos como pontos fixos.

Ésta última parte póde receber uma nova transformação, que julgâmos conveniente indicar.

Sejam A, B, C os momentos de inercia do corpo m , referidos aos tres eixos principaes, que se cruzam no seu centro de gravidade, e p, q, r as componentes da sua velocidade angular de rotação segundo os mesmos eixos; designemos por a, b, c os cosenos dos angulos que elles respectivamente fazem com o eixo das coordenadas z , e por a', b', c' , e a'', b'', c'' as quantidades analogas com relação aos eixos dos y e dos x . Posto isto, as expressões

$$Sdm \left(\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} \right) = Aap + Bbq + Ccr,$$

$$Sdm \left(\gamma \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\gamma}{dt} \right) = Aa'p + Bb'q + Cc'r,$$

$$Sdm \left(\beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} \right) = Aa''p + Bb''q + Cc''r,$$

são facéis de obter, attendendo aos principios que se demonstram na mechanica.

Em virtude do que deixámos ditto, as equações tornar-se-hão nas seguintes:

$$\sum m \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) + \sum (Aap + Bbq + Ccr) = s ,$$

$$\sum m \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) + \sum (Aa'p + Bb'q + Cc'r) = s' , \quad (c)$$

$$\sum m \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) + \sum (Aa''p + Bb''q + Cc''r) = s'' ,$$

onde o sommatorio Σ deve estender-se ao Sol, a todos os planetas e seus satellites.

Como n'estas equações se torna mister entrar em consideração com todos os corpos do systema do mundo, ve-se que na determinação do plano maximo é necessario attender, não so ás áreas geradas pelos movimentos de translação dos planetas ao redor do Sol, mas tambem áquellas que são devidas ás revoluções dos satellites em volta dos respectivos planetas principaes, e ainda ás que nascem da rotação do Sol e das de todos esses corpos sôbre seus proprios eixos.

O conhecimento dos valores das constantes exige que as coordenadas do centro de gravidade de cada planeta e cada satellite e as componentes das suas

velocidades se deduzam da observação, nas diversas epochas em que se queira proceder a taes investigações. Não é menos indispensavel saber tambem os valores das massas dos differentes corpos celestes do systema, assim como os de seus momentos de inercia principaes.

A astronomia ensina a maneira d'obter as coordenadas e as velocidades para uma epocha dada. As massas são ja conhecidas com bastante aproximação. Não acontece a mesma cousa aos momentos de inercia, porque dependem da lei, que governa a distribuição da materia no interior de cada um dos corpos, lei completamente ignorada na actualidade, mas que nos sera permittido talvez esclarecer em alguma epocha ainda remota.

Sendo designio nosso expor n'este logar a questão do plano maximo do systema do mundo, em todo o rigor exigido d'uma theoria astronomica, mostraremos a possibilidade de chegar directamente ao conhecimento dos valores dos momentos de inercia. É de conveniencia porém fazê-lo anteceder da indicação d'um outro meio, que, por estar mais em harmonia com os methodos geralmente seguidos em astronomia, parecerá por ventura o unico capaz de nos conduzir á determinação desejada.

Admittamos que em certa epocha se fez applicação, ao plano invariavel do systema Solar, não

so dos valores mais dignos de confiança, que possuímos ácerca das massas dos corpos celestes, mas também d'aquelles que for possível, com maior probabilidade, attribuir ás áreas que nascem dos movimentos de rotação sôbre si mesmos. Procedendo d'uma maneira analogá para outras epochas mui distantes, a comparação entre os diversos resultados obtidos para o ditto plano, deverá certamente aproveitar, a fim de que se corrijam, de seculo a seculo, os valores approximados dos dois elementos, que os assíduos trabalhos dos astrônomos ainda não conseguiram calcular com toda a precisão exigida na sciencia.

O plano invariavel poderá achar-se affectado por mais que um movimento, quando se observe em relação ás estrellas a sua posição, obtida n'esses diversos tempos, segundo o que fica esboçado: uns, na realidade apparentes, terão sua origem nos movimentos proprios das estrellas, outros serão devidos ás oscillações a que elle por ventura esteja sujeito em virtude d'alguma pequena acção estranha ao systema, outros finalmente encontrarão a causa na falta de exactidão dos elementos empregados no cálculo.

Procurando discernir o melhor possível estes ultimos dos primeiros dois movimentos, intentar-se-ha rectificar, da maneira a mais provavel, os

valores dos elementos empregados na primeira determinação. Se, auxiliados por estes trabalhos preliminares, entrassemos em novos calculos para outras epochas ultteriores, sería permittido levar mais longe as approximações, corrigindo successivamente os elementos que pretendemos conhecer com exactidão.

Ainda que o presente methodo seja, em casos analogos, geralmente usado pelos astronomicos, deixa todavia o espirito nada satisfeito e mostra por conseguinte a conveniencia d'uma approximação directa, digna de confiança, isenta de incertezas e dúvidas.

Com o auxilio de muito boas observações, a theoria póde levar-nos por um caminho directo, que sirva de conhecer as massas e os momentos de inercia, do Sol e dos planetas, sem que nos seja mister alguma antecedente noção dos valores approxima-dos d'esses elementos. Uma questão de tam grande importancia merece todos os esclarecimentos, que concorram para a sua ellucidação.

Concedamos a possibilidade de que os futuros trabalhos dos geometras venham a determinar a expressão analytica da grandeza da área resultante dos differentes corpos do systema. Substituindo n'ella os valores das linhas, dos angulos e velocidades, obtidos com o auxilio das observações para uma

certa epocha, consideremos como incognitas as massas e os momentos de inercia. Se opperarmos, d'um modo analogo, em tantas epochas, quantas forem as incognitas, apparecerão assim differentes expressões da grandeza da área resultante. Por ter ésta área o mesmo valor em todos os tempos, dado que os corpos estejam unicamente sujeitos a suas acções mútuas, ser-nos-hia permittido, egualando as expressões duas a duas, estabelecer o número de equações necessarias para a determinação das incognitas que desejâmos conhecer.

Em consequencia do exposto, a theoria auxiliada so pela observação dos movimentos dos corpos do systema Solar, calculados em epochas diversas, pôde guiar-nos á determinação das massas e dos momentos de inercia, sendo este trabalho independente de qualquer noção anterior sôbre os valores approximados de taes elementos, sôbre a natureza das orbitas dos corpos celestes ou mesmo sôbre a lei que rege as suas attracções.

Obtidos os valores d'essas pretendidas quantidades, não se tornaria difficil concluir qual seja a posição do plano invariavel do systema do mundo.

Á primeira vista parece realmente impossivel a determinação dos valores das massas e momentos de inercia dos corpos planetarios, por dependerem não so da grandeza de sua figura, mas tambem do

modo porque se acha distribuida a materia em cada um d'elles. Baseando-nos porêm nos conhecimentos theoricos, e notando que as perturbações das áreas geradas por cada corpo celeste são consequencia da lei de suas respectivas densidades, a qual não foi dado ainda descobrir, assim como d'uma qualquer lei, seja constante ou variavel, reguladora de seus movimentos, vemos que bastará observar as distancias e os movimentos d'esses corpos, para assignar a proporção que existe entre as massas, e mesmo entre os momentos de inercia.

Este methodo, fundado n'um dos principios mais geraes de mechanica, qual é o principio das áreas, dá-nos a possibilidade de chegarmos, algum dia, a conhecer esses importantissimos elementos. Pelo contrário, aquelle, mediante cujo auxilio se acham actualmente determinados os valores das massas planetarias, e que tem sua base na lei da attracção descoberta por Newton, talvez nunca nos levará a obter os momentos de inercia dos corpos celestes.

Permittindo os progressos da sciencia calcular, n'uma epocha mais ou menos remota, os valores das constantes s , s' , s'' , ficaria definida a posição do plano invariavel do systema Solar, se recorressemos ás fórmulas anteriormente offerecidas.

Este plano, assim determinado em toda a generalidade que exige o rigor das theorias mathema-

ticas e astronomicas, conserva-se sempre paralelo a si mesmo, a despeito de todas e quaesquer acções mútuas, que se deem entre os differentes corpos do systema: não soffrerá alteração, por mais variados que se appresentem os movimentos, ainda mesmo que a figura de cada um d'esses corpos venha a experimentar no futuro notaveis mudanças, originadas, quer por algum choque, quer pela circumstância de se unirem entre si alguns d'elles, quer por explosões subitas que os façam rebentar em diversos fragmentos, como varios astronomos pretendem haver acontecido a um planeta de massa consideravel, cuja antiquissima existencia admittem na zona situada entre Marte e Jupiter. Os tremores de terra, as explosões vulcanicas, o sôpro dos ventos contra os continentes, o attrito e pressão dos máres sôbre a parte solida do globo terrestre, são causas de nenhuma influencia na posição do plano que nos designar o cálculo. A lei que regula e governa as attracções dos corpos celestes, poderia tambem variar arbitrariamente, sem que houvesse origem para a mais leve alteração.

Attendemos em nossas considerações a todas as áreas geradas, não so pelos movimentos de translação dos planetas e satilletes, mas tambem pelos de rotação dos mesmos corpos e do Sol sôbre seus eixos respectivos. O plano maximo estara pois

unicamente sujeito a variar, em consequencia da acção dos cometas, das estrellas, ainda d'algum corpo ignorado e invisivel, porque hypotheticamente admittimos em nossas considerações, não produzirem taes causas a menor acção no systema do mundo.

A comparação da theoria com as observações mostrará, se a influencia d'esses corpos que giram na immensidade dos ceus, é por ventura sensivel. Estas causas, na actualidade, não parecem origem d'alguma perturbação appreciavel nos movimentos dos planetas e do Sol, e consequentemente na posição de seu plano principal de projecção. Accrescentaremos porém, que, decorrido grande número de seculos, provavelmente sera mui patente a acção de tantos seres, acção, que um breve espaço de tempo ainda não manifestou em nossos dias.

Recordando as diversas reflexões que deixámos expostas, é óbvia a conclusão de que não podêmos dar por certo e seguro, que o plano maximo do systema Solar permaneça parallelamente a si proprio em todos os tempos, mesmo que venha a tornar-se possivel a sua determinação com todo o rigor das theorias astronomicas.

CAPÍTULO TERCEIRO

CAPIULO TERCIERO

Considerações sôbre a determinação prática
do plano invariavel do systema Solar.

Exposta na maior generalidade a questão do plano principal de projecção do systema Solar, occupemo'-nos presentemente do mesmo assumpto, debaixo d'um ponto de vista mais restricto.

Encetaremos este importantissimo estudo, baseando-nos em todas aquellas approximações, que admittir a constituição do systema planetario, e que nos seja forçoso acceitar no campo da astronomia prática, em consequencia do estado actual dos conhecimentos astronomicos.

Ainda que éstas approximações sejam indispensaveis, a fim de que haja possibilidade de applicar

ao nosso systema os principios de mechanica ce-
leste, carecem todavia de que as auctorizemos pela
consideração do limite do desprêzo commettido.

Sendo dependentes dos momentos de inercia as
equações.(c), por meio das quaes se determinam
as constantes s, s', s'' , não sabemos, em virtude da
nossa quasi completa ignorancia ácerca dos valores
d'esses elementos, obter actualmente a posição do
plano maximo do systema do mundo.

Se os corpos planetarios fossem perfeitos globos,
compostos de camadas esphericas, cada uma das
quaes offerecesse em toda a sua extensão uma den-
sidade uniforme, então as quantidades,

$$Aa p + Bb q + Cc r ,$$

$$Aa' p + Bb' q + Cc' r , \quad (d)$$

$$Aa'' p + Bb'' q + Cc'' r ,$$

seriam rigorosamente constantes, sem dependencia
alguma da natureza de taes corpos.

Suppondo que os corpos celestes teem na reali-
dade a constituição designada, os segundos termos
das equações (c), depois de transpostos para o ou-
tro membro, não fariam mais que alterar os valo-
res das quantidades s, s', s'' , que ficariam ainda
constantes.

Calculada com o auxilio d'éstas novas constantes a posição do plano resultante, obteríamos um tam immutavel como o plano maximo das áreas.

Será facil proceder a essa determinação, relativamente ao systema Solar, em consequencia do que ja fica ditto, porque, sendo ella independente do cálculo das expressões (d), bastaria conhecer apenas as quantidades que a astronomia ensina a deduzir das observações.

Por ser a constituição dos corpos celestes pouco diversa da que deixámos indicada, a differença entre a sua figura e da esphera, origina perturbações periodicas e seculares nos segundos termos das equações (c). Éstas desigualdades, produzidas pela circumstância de não passarem, pelo centro de gravidade de cada um, as fôrças que os animam, dão causa a que o plano, determinado na hypothese de se considerar constante a somma dos termos dependentes dos momentos de inercia, deixe de permanecer rigorosamente paralelo a si mesmo em todos os seculos futuros.

A parte variavel das quantidades (d) é muito pequena, o que auctoriza o desprêzo de taes perturbações, dentro dos limites que exigem as approximações astronomicas.

Digamos algumas, ainda que poucas palavras, sôbre este delicadissimo assumpto.

Se procedessemos com referencia aos diversos corpos de systema Solar, em calculos analogos aos que se applicam á Terra, veriamos que os seus polos de rotaçãõ podem ser considerados como fixos á superficie de cada um d'elles, e a sua velocidade angular de rotaçãõ como constante, feito o indispensavel desprezo das desigualdades periodicas.

Se admittirmos pois que esse movimento tem lugar em redor de seu eixo principal minimo, virá

$$p=0, \quad q=0, \quad r=v,$$

representando por v a velocidade angular de rotaçãõ.

As equações (c) recebem n'este caso uma fórma, que, por mais simples e adequada á discussãõ actualmente proposta, julgâmos necessario indicar. Designando por α , α' , α'' os angulos que o eixo de rotaçãõ faz respectivamente com o dos z , dos y e dos x , teremos:

$$\sum m \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) + \sum C_v \cos \alpha = s,$$

$$\sum m \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) + \sum C_v \cos \alpha' = s',$$

$$\sum m \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) + \sum C_v \cos \alpha'' = s''.$$

Em quanto for sensivelmente constante o momento de inercia e a velocidade angular de rotação de cada corpo do nosso systema, as perturbações seculares, que por ventura affectem os termos dependentes d'éstas quantidades, so terão origem nas variações dos angulos α , α' , α'' . Uma circumstância tam notavel permite e favorece a discussão encestada, na qual se deseja avaliar os desprezos commettidos, não attendendo ás desigualdades relativas aos segundos termos de nossas equações.

Os deslocamentos do equador do Sol devidos á influencia dos planetas, são extremamente pequenos em comparação com os dos equadores planetarios, aos quaes dá logar a acção reciproca d'aquelle astro. Ésta consideração mostra, não attingirem valores que venham a tornar-se consideraveis, mas permanecerem insignificantes, as variações dos angulos que determinam no espaço o eixo de rotação do Sol.

A ésta accresce uma outra causa não menos ponderosa, as quaes cooperam conjunctamente, a fim de que as perturbações questionadas se appresentem na realidade insensiveis. E com effeito, essas variações são da ordem do achatamento Solar, quantidade muito pequena, pois se demonstra pela mechanica celeste, que elle não tem acção alguma appreciavel nos movimentos dos planetas.

Apezar de ser mui grande o momento d'inercia relativo ao Sol, em consequencia da massa e volume d'este corpo, as dittas desigualdades não poderiam chegar a adquirir, nos segundos termos das tres últimas equações, um valor tal, que produzisse alterações alguma cousa sensiveis nas constantes s , s' , s'' , que desejámos obter.

Para complemento da presente discussão, 'é mister que dediquemos, em referencia aos planetas, considerações analogas ás que ficam expendidas. Os valores dos cosenos dos angulos α , α' , α'' relativos a estes corpos soffrem variações seculares consideraveis, por isso que a posição de seus equadores muda sensivelmente com o tempo.

Sendo porém o factor C , uma quantidade muito pequena, essas desigualdades apenas originam, nos segundos termos de nossas equações, valores que é permittido desprezar. Demais, as áreas provenientes do movimento de rotação dos planetas são extremamente pequenas, quando se comparem ás do movimento de translação, e por conseguinte suas variações inappreciaveis e sem influencia sensivel nos valores das constantes procuradas.

Em conclusão, julgâmos lícito deixar de attender, na determinação do plano invariavel, á ellipticidade do Sol e dos planetas. O plano obtido, admittindo estes desprezos, permanecerá quasi

tam paralelo a si próprio, como se os corpos celestes fossem formados de camadas esfericas e homogeneas em toda a extensão de cada uma d'ellas.

Cumpre-nos ainda fazer notar que os movimentos de translação e rotação dos satellites, em virtude da extrema pequenez de suas massas, unicamente darão causa a alguns termos na realidade insensíveis.

Acceitando pois a constancia dos segundos termos das equações (c), e designando por s, s', s'' as respectivas differenças entre cada um d'elles e s, s', s'' , virá:

$$\Sigma m \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = s,$$

$$\Sigma m \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = s', \quad (e)$$

$$\Sigma m \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = s''.$$

Em consequencia das razões succintamente esboçadas, éstas equações, que teem seu fundamento na constituição actual do systema do mundo, servirão de determinar o plano invariavel, com sufficiente precisão para a sciencia.

Porque as massas dos planetas são conhecidas com bastante exactidão, e além d'isso as coordenadas dos mesmos corpos celestes e as suas respectivas velocidades se obtêm com auxílio das observações para uma epocha dada, vemos que se torna possível calcular com estes elementosos valores das constantes s , s' , s'' .

Obtidas éstas quantidades, e representando por φ , a inclinação do plano resultante sôbre a ecliptica, e por ω , a longitude de seu nodo, as fórmulas

$$\text{tang } \varphi = \frac{\sqrt{s'^2 + s''^2}}{s}, \quad \text{tang } \omega = \frac{s''}{s'}$$

permitterão assignar qual a sua posição no espaço.

Referindo este plano á ecliptica fixa de 1800, Pontécoulant encontra para essa epocha, os resultados que damos em seguida:

$$\varphi = 1^{\circ}.34'.16''$$

$$\omega = 103^{\circ}.8'.45''$$

Adoptando os valores das coordenadas e velocidades dos planetas, relativos á ecliptica fixa, e calculados para a epocha de 2000, o mesmo auctor chega aos seguintes numeros:

$$\varphi = 1^{\circ}.34'.15''$$

$$\omega = 103^{\circ}.8'.50''$$

Entre estes e os precedentes resultados nota-se bastante harmonia, especialmente no que diz respeito á sua inclinação sôbre a ecliptica.

A longitude do nodo obtida para as duas epochas offerece uma divergencia mais sensivel, ainda que na realidade pequena. É necessario porém accrescentar que ésta circumstância deverá, na sua maior parte, attribuir-se antes a erros que affectem as observações, do que ao movimento real do nodo sôbre o plano da ecliptica.

Se for muito pequena a inclinação dos dois planos, as constantes s' e s'' terão valores extremamente diminutos em comparação ao de s ; n'este caso, as differenças insignificantes, que por ventura appareçam entre os resultados obtidos para s' e s'' em duas epochas determinadas, originam variações consideraveis no angulo que difine a longitude do nodo.

Ainda que a-intercepção do plano da ecliptica com aquelle que nos designar o cálculo, apresente deslocamentos notaveis sôbre o primeiro, em geral, a maior parte d'este movimento, por ser pequena a mútua inclinação dos dois planos, não tem realmente logar. As differenças nos valores de s' e s'' podem principalmente ser devidas aos erros inevitaveis, que viciam as observações necessarias, e ao desprêzo de pequenas quantidades, de que se torna

mister prescindir, quando entramos no campo das applicações.

O plano determinado mediante o auxílio das equações (*e*), não coincide com o plano principal de projecção do systema Solar, o qual so possui a propriedade de permanecer rigorosamente paralelo a si mesmo nos espaços celestes. A circumstância de estar sujeita a mui pequenas alterações a posição do primeiro, deu origem a que elle tambem recebesse o nome de invariavel.

Mas não basta dizer que as oscillações de um tal plano são muito pequenas, ha tambem necessidade de mostrar a sua verdadeira insignificancia, em comparação com as dos outros planos que desejâmos referir-lhe, no intento de avaliar os deslocamentos de que elles se achem affectados.

N'este ponto essencial servir-nos-hemos dos trabalhos de Poinsot e Pontécoulant.

Considere-se um systema formado pela Terra e o Sol, completamente isolado no espaço, admittindo além d'isso que o segundo dos dois corpos seja perfeitamente espherico, e nem possua movimento algum de rotação.

Em taes hypotheses, o seu plano invariavel, determinado pela maneira que deixámos exposta e que se basea na regra dada por Laplace, coincide exactamente com a ecliptica. A linha dos nodos,

resultante da sua intercepção com o verdadeiro plano maximo das áreas, teria sôbre este, um movimento angular annuo proximo de $15''$.

Esta velocidade era igual á da linha dos nodos do equador terrestre sôbre a ecliptica.

A mútua inclinação do plano invariavel e do plano principal de projecção d'este systema é menor que $0'',0209$, quantidade muito pequena, como devêra esperar-se, porque elles na realidade quasi coincidem um com o outro.

As oscillações da ecliptica relativamente ao plano maximo são muito menores que as do equador terrestre. Com effeito, Pontécoulant demonstra que, em 1928 annos, desde Hipparco até ao principio do seculo actual, a variação da obliquidade da ecliptica seria de $16'. 16''$; no mesmo espaço de tempo, as desigualdades produzidas na inclinação da orbita da Terra sôbre o verdadeiro plano fixo, ter-se-hiam unicamente elevado a $0'',0002$.

Ainda que, no systema supposto, o nodo da ecliptica tenha sôbre o plano maximo um movimento sempre igual ao do equador, é lícito considerar invariavel o primeiro dos tres planos mencionados, por serem os seus deslocamentos angulares de uma ordem muito inferior em comparação aos do último.

Seja agora o systema hypothetico composto de

Sol, Terra e Lua. Tendo estes corpos como pontos massiços e unicamente sujeitos a suas acções mútuas, não seria difficil mostrar, d'uma maneira analogá do caso antecedente, que o plano determinado pelas fórmulas approximadas, que acima démos, póde tambem acceitar-se por invariavel n'este novo exemplo.

Volvamos a considerar a mesma questão, relativamente ao plano invariavel do nosso systema planetario.

Fazendo os desprezos que a sua constituição actual permite e o estado dos conhecimentos astronomicos presentemente exige, todas as reflexões, ácerca de tam delicado assumpto, estão resumidas nas seguintes palavras de Pontécoulant: «Sans doute, géométriquement parlant, l'intersection de deux plans invariables est elle-mémé invariable; mais on peut toujours supposer, et c'est le cas de la nature, que la position de l'un de ces plans subisse des variations assez petites pour qu'il reste toujours sensiblement parallele a lui-mémé, tandis que ses noeuds sur le plan qui est rigoureusement fixe, éprouvent des déplacemens considérables.»

No logar proprio indicámos a maneira approximada de calcular a posição do plano invariavel, a qual se funda na constituição actual do systema Solar. Este plano, ainda que não rigorosamente,

conserva todavia a propriedade de ser bastante imutavel nos espaços celestes. Em tal grau se patentea ésta condição, que foi proposto como plano fundamental, a fim de se obter um conhecimento preciso dos deslocamentos angulares, que soffrem as orbitas descriptas pelos corpos celestes.

Dissemos que era permittido, na determinação do plano invariavel, desprezar as áreas de rotação, se os corpos de nosso systema fossem globos, formados de camadas perfeitamente esphericas e homogeneas em toda a extensão de cada uma d'ellas. Concedida a hypothese, este plano, attendendo so aos movimentos de translação, ficaria rigorosamente parâllelo a si mesmo.

Determinado segundo a regra que Laplace deduziu da constituição especial do systema do mundo, o plano invariavel, é dotado d'uma posição sufficientemente estavel nos espaços celestes.

Nos raciocinios que fizemos, está implicitamente envolvida a condição de se não darem alterações consideraveis na constituição do systema Solar. A invariabilidade do plano obtido por meio das aproximações que ella actualmente permite, não pôde assegurar-se exacta em toda a serie dos seculos, ainda mesmo que se prescindia de quaesquer acções estranhas ao systema.

E na verdade, para que o ditto plano se con-

serve proxivamente parallelo a si mesmo, é mister que a fôrma dos corpos não venha a ser modificada d'um modo notavel. A figura do Sol e dos planetas está sujeita, no decurso de muitos seculos, a soffrer grandes alterações, seja em consequencia de choques por ventura dados entre elles, seja por que alguma fôrça interna mude vagarosamente a fôrma dos corpos, ou qualquer explosão subita os faça estalar em diversos fragmentos, seja finalmente em virtude d'alguma causa incognita que de futuro se desenvolva.

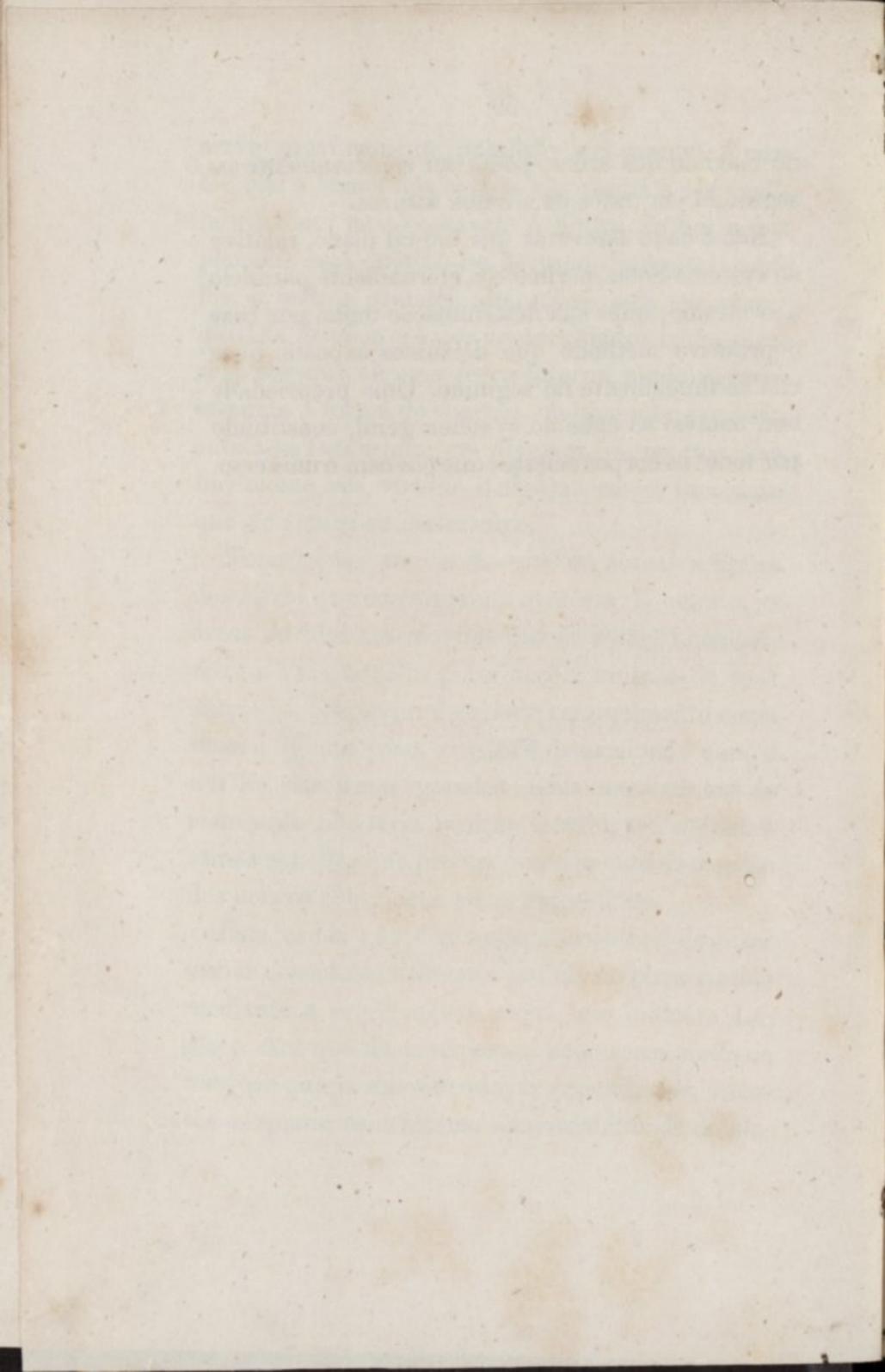
Tornando-se mui differente da actual a figura dos astros que constituem o systema do mundo, as áreas devidas aos movimentos de rotação começariam a ser alteradas pelas acções mútuas de seus corpos, e deixariam de existir sensivelmente constantes. N'esse caso, o plano determinado com o auxilio das áreas geradas pelos movimentos de translação não teria posição estavel, se desprezamos aquellas que produz o movimento de rotação dos corpos sôbre seus eixos respectivos.

Ésta causa não é a unica susceptivel de fazer variar consideravelmente a posição do plano obtido mediante a regra approximada que indicára Laplace. Aos que ficam expostos, accrescem ainda os motivos que ja em outro logar expendemos, attentos os quaes, nem mesmo a invariabilidade do pla-

no maximo das áreas, podia ser rigorosamente assegurada em todos os seculos futuros.

Não é dado asseverar que um tal plano, relativo ao systema Solar, permaneça eternamente paralelo a si mesmo, quer sua determinação tenha por base o primeiro methodo que deixámos exposto, quer ella se fundamente no segundo. Uma propriedade tam notavel so cabe ao systema geral, constituido por todos os corpos celestes que povoam o universo.

FIM.



INDICE

CAPÍTULO PRIMEIRO

Pag.

Reflexões preliminares sobre a theoria do plano invariavel.....	13
---	----

CAPÍTULO SEGUNDO

Considerações relativas á determinação theorica do plano invariavel do systema Solar.....	27
---	----

CAPÍTULO TERCEIRO

Considerações sobre a determinação práctica do plano invariavel do systema Solar.....	45
---	----



INDICE

CONTENUTO

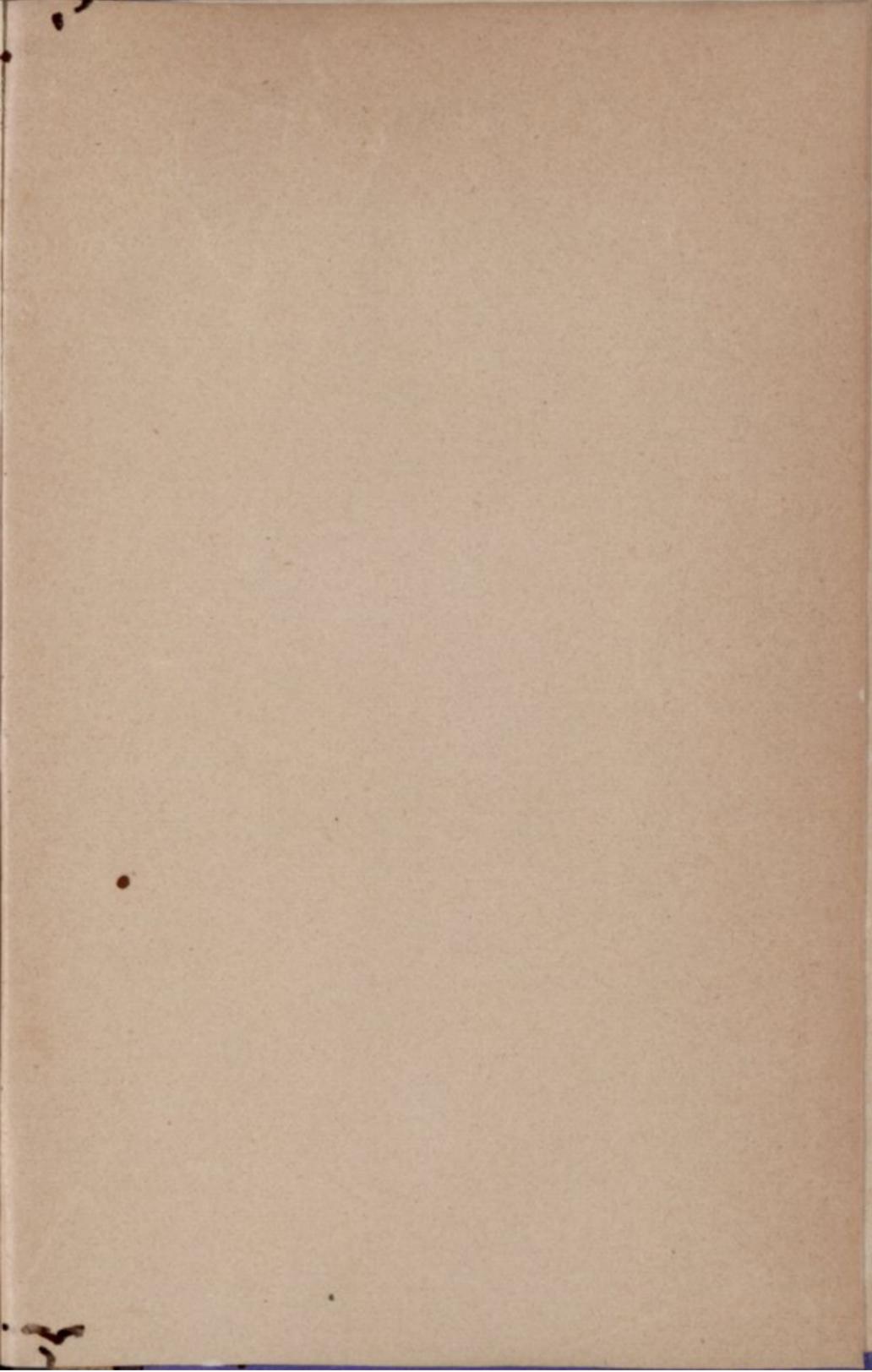
1. *[Faint, illegible text]*

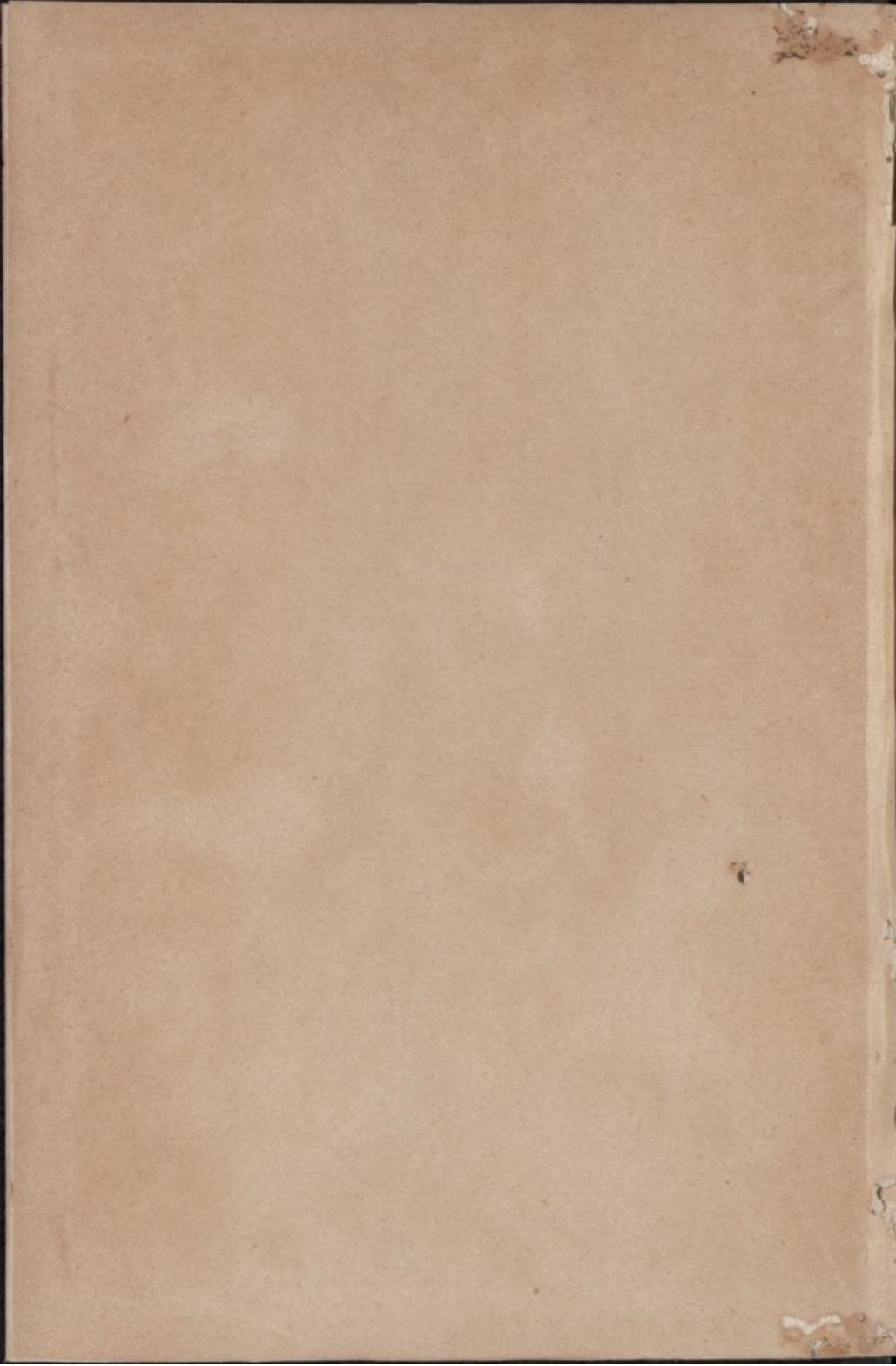
CONTENUTO

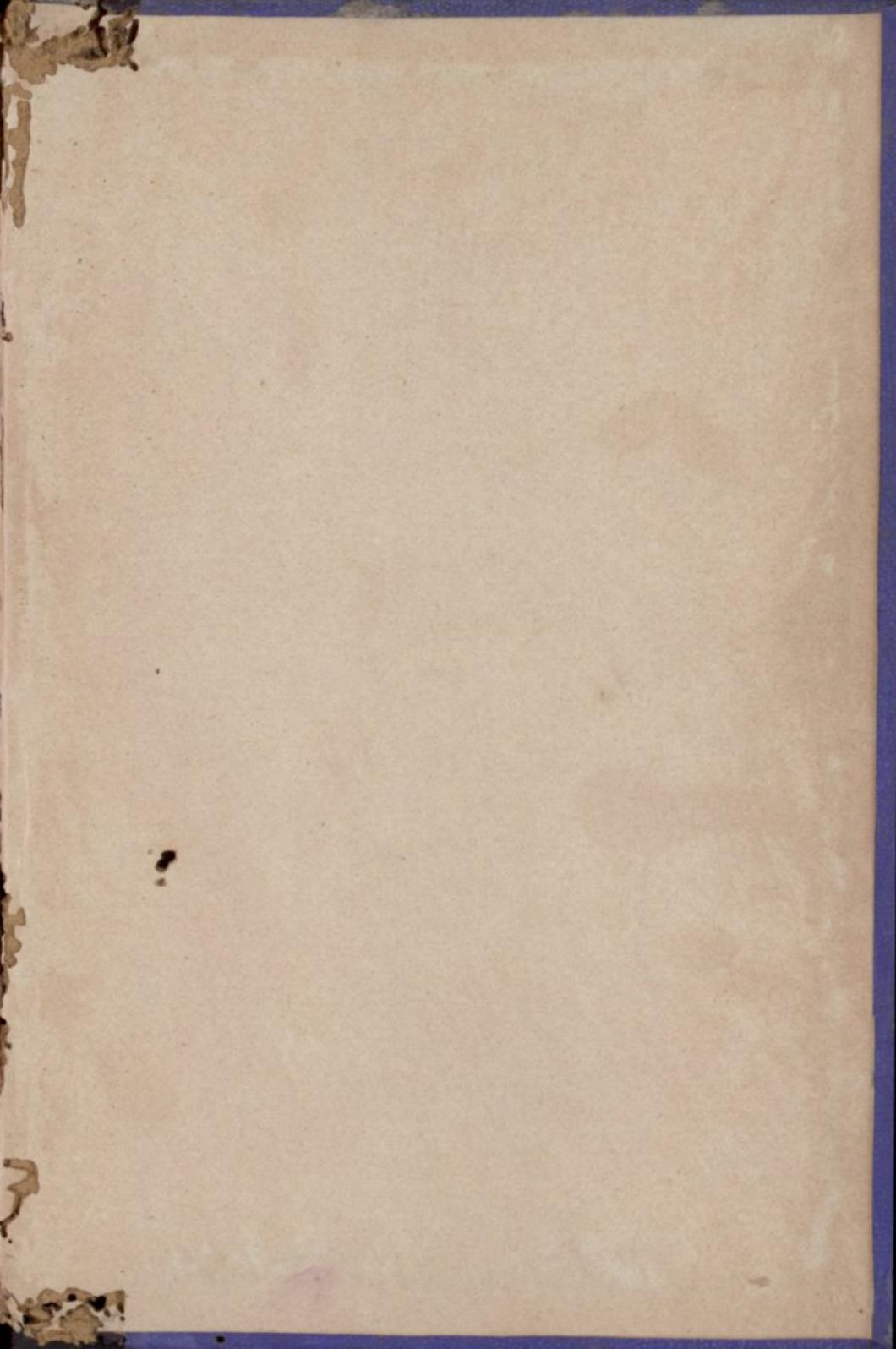
2. *[Faint, illegible text]*

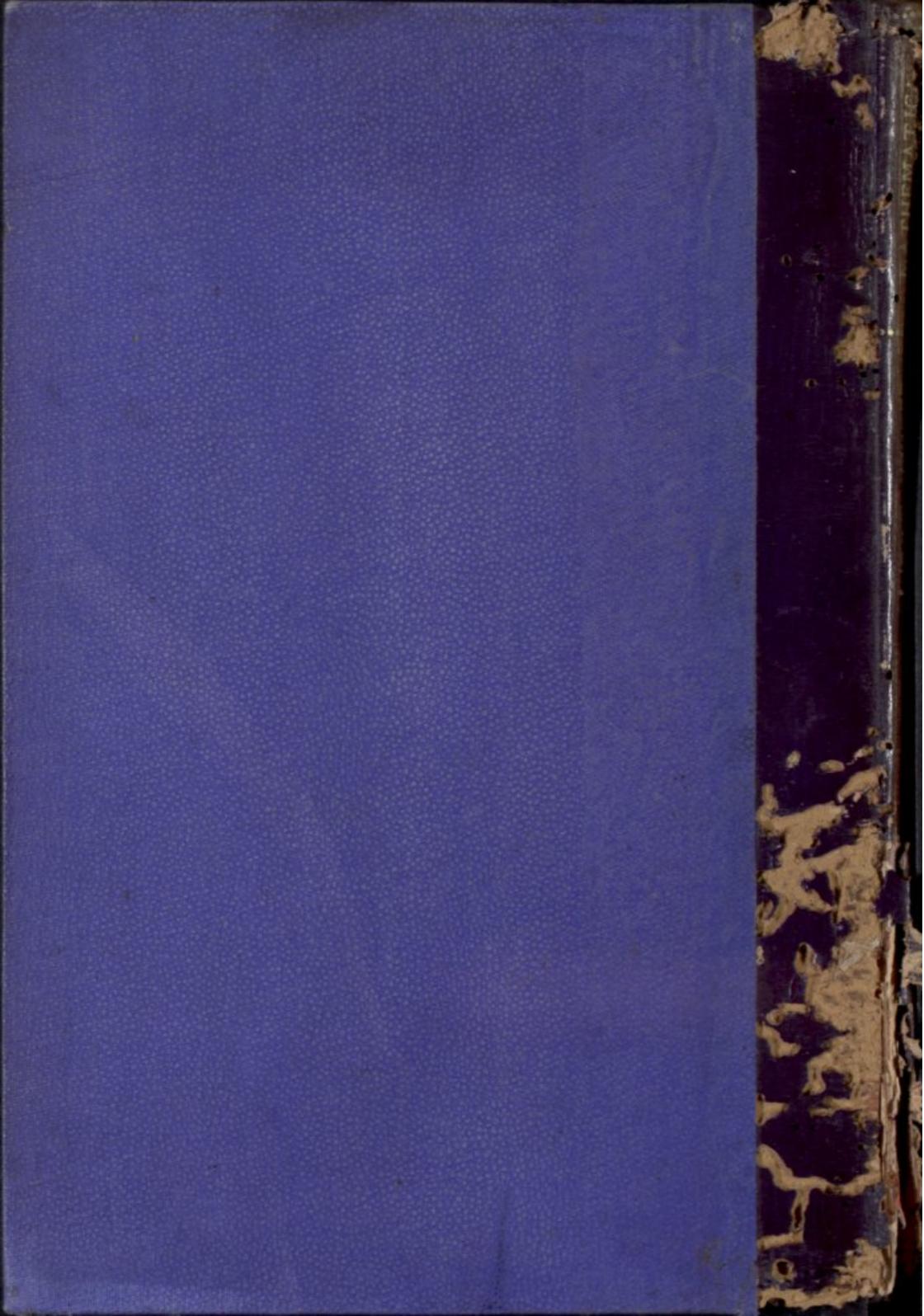
CONTENUTO

3. *[Faint, illegible text]*









1890
A. GARRÉTT - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

EM A T H E M A T I C A
M A T H E M A T I C A