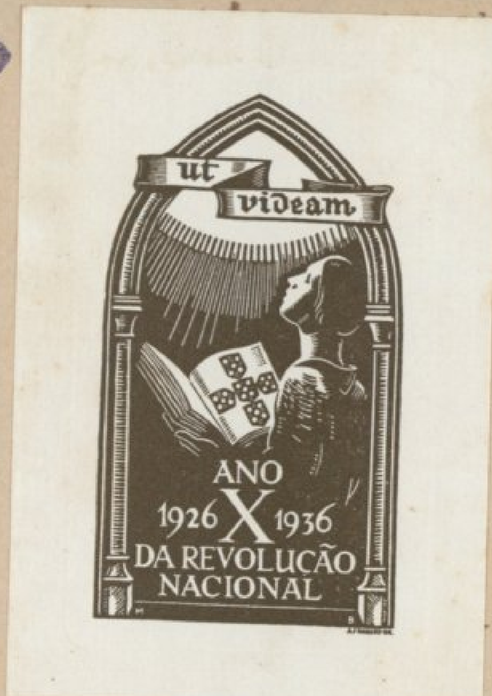
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

SOBRE QUATRO PROPOSIÇÕES FUNDAMENTAIS

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES INTEIRAS

POR

José Vicente Martins Gonsalves

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1921

SOBRE QUATRO PROPOSIÇÕES FUNDAMENTAIS

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES INTEIRAS

SOBRE QUATRO PROPOSIÇÕES FUNDAMENTAIS

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES INTEIRAS

POR

José Vicente Martins Gonsalves

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1921

Dissertação para o acto de doutoramento em Matemática na Faculdade de Sciências da Universidade de Coimbra.

A meus Pais.

Os trabalhos expressamente publicados com o fim a que êste se destina costumam ser precedidos de algumas palavras relativas à escôlha do assunto neles versado. Não nos dispensamos também de seguir, neste ponto, os velhos trilhos.

Independentemente da sugestão de profunda beleza que a Teoria das funções inteiras exerce sôbre os espiritos iniciados no estudo da Análise matemática, um factor importante, decisivo, nos levou á escôlha deste assunto.

Ao efectuar, com cuidadosa atenção, a leitura das Leçons sur les fonctions entières, *do sr.* Emile Borel, *fômos reunindo diversas notas e observações pessoais, em número relativamente avultado, e algumas delas de certo interesse. Quis-nos parecer que alguma coisa lucraria o estudo dessas funções com a publicação das nossas notas, motivo que nos decidiu a efectuar a sua coordenação e a apresenta-las neste Livro, sem veleidades de atrevimento, nem preocupações de timidês.*

Entre os nossos trabalhos pessoais, avultava a descoberta das proposições que vam adeante com os n.os 18 e 20. Só tarde soubémos que a primeira fôra publicada há vinte e cinco anos, num tomo da Comptes Rendus, *pelo sr.* Cesáro. *O sr.* Emile Borel *não lhe faz a menor referência, o que é* *deveras extranhavel, visto tratar-se, segundo* Hermite, *de uma bela proposição.*

Tendo estudado cuidadosamente a Teoria das funções internas na melhor obra em que êsse assunto era versado, não nos sobejou tempo para consultas de trabalhos de segunda ordem, como o livro do sr. Vivanti, *onde mais tarde tivemos ocasião de encontrar o teorema do sr.* Cesáro. *De resto, evidencia-se bem, no texto, a sugestão do método de* Laguerre. *Não há lá, pelo contrário, o menor indicador da influência dos trabalhos do sr.* Cesáro.

Apesar de nos animar o desejo de sêr, quanto possivel, completo, não nos foi permitido pela especial feição deste Livro fazer o estudo de um ponto assás importante da Teoria das funções inteiras: o teorema do sr. Picard.

Efectivamente, esta proposição, pelas suas sucessivas generalisações e pelos inumeros trabalhos que tem inspirado, exigia um estudo demasiado extenso para ser feito aqui, alêm de que se tornava necessário preceder a sua exposição de delicadas considerações da Teoria do crescimento (1).

---

(1) *Sob o ponto de vista elementar, essa proposição já vem estudada nos modernos tratados de Análise.*

No plano do Livro, há ainda que justificar a Introdução. Assentando a Teoria das funções inteiras sôbre as propriedades das séries e produtos infinitos, julgámos útil completar o estudo que desses assuntos fazem os tratados de Análise.

As demonstrações apresentadas sam todas nossas. Em especial, a proposição relativa à propriedade associativa nos produtos infinitos é aqui, pela primeira vez, obtida directamente, sem recorrer à Teoria dos conjuntos, como faz o sr. TANNERY, *que foi quem primeiro a demonstrou; o teorema respeitante à derivabilidade dos produtos infinitos também nos parece de molde a prestar alguns serviços.*

Nas duas Notas finais, encontrará o leitor alguns complementos úteis ao estudo de certas proposições anteriormente consideradas.

Coimbra, 20 de Janeiro de 1921.

INTRODUÇÃO

Algumas proposições relativas às séries e aos produtos infinitos

I

Sôbre quatro teoremas simples

1. Em todos os modernos livros de Análise vem registada uma proposição que estabelece a convergência da série

$$(1)\qquad (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots,$$

de termo geral (a_n+b_n), no caso de serem convergentes as séries

$$(2)\qquad a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

e

$$(3)\qquad b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots,$$

mas em nenhum dêles se encontra qualquer referência à série [1]

$$(4)\qquad a_1+b_1+a_2+\ldots+b_n+a_{n+1}+\ldots,$$

---

[1] O seu termo geral, se $2k$ designar o maior número par contido em n, é

$$u_n=u_{2k+\alpha}=a_{k+1}^{\alpha}+b_k^{1-\alpha}-1\,.$$

deduzida de (1) pela supressão dos parênteses. No entanto, achamos preferível o estudo da série (4), não só porque da sua convergência se infere a de (1), mas principalmente porque da convergência desta última se não deve concluir a da primeira. Efectivamente, a sucessão que decide da convergência de (1) é formada pelos elementos de índice par daquela que determina a de (4), e nós sabemos que a primeira destas convergências importa necessáriamente a segunda, não sendo, em geral, verdadeira a proposição recíproca.

O estabelecimento da proposição a que nos temos referido resulta imediatamente da fórmula

$$S_n = S'_k + S''_k + \frac{1}{2} a_{k+1}^{n-2k} \left[1 - (-1)^n\right],$$

onde S_n representa a soma dos n primeiros termos de (4), S'_k e S''_k somas análogas relativas a (2) e (3) e $2k$ é o maior número par contido em n. Ela mostra, efectivamente, que existe o limite de S_n, desde que existam os limites de S'_k e S''_k, e estabelece a relação

$$S = S' + S''$$

existente entre êsses limites.

Considerando agora os três produtos infinitos

$$P_1 = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \ldots,$$
$$P_2 = (1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_n) \ldots,$$
$$P = (1 + a_1)(1 + b_1) \ldots (1 + b_n)(1 + a_{n+1}) \ldots, \text{ [1]}$$

[1] O factor geral de P, conservando as notações anteriores, poderá escrever-se

$$1 + u_n = 1 + u_{2k+\alpha} = (1 + b_k)^{1-\alpha} + (1 + a_{k+1})^{\alpha} - 1.$$

nós podemos afirmar, como no teorema anterior, que P converge, desde que P_1 e P_2 gosem dessa propriedade, e fàcilmente se estabeleceria que o valor de P é igual ao produto dos valores de P_1 e P_2.

2. A proposição de que nos vamos agora ocupar é devida a CATALAN, que a enunciou do modo seguinte:

Numa série de termos positivos continuamente decrescentes, o produto $n u_n$ tende para zero (1).

Muitas têm sido as demonstrações apresentadas para esta proposição, que se encontra já estabelecida no caso mais geral de não ser contínuo o decrescimento dos termos (2).

Naquela que vai lêr-se, não se exige também tal continuidade.

Seja

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

uma série, que supomos convergente, formada de termos positivos não crescentes; vamos demonstrar que, dado um número positivo arbitrário δ, se pode sempre determinar um inteiro N_1, tal que se tenha

$$n a_n < \delta,$$
$$n > N_1.$$

Com efeito, atendendo a que $a_i \geqq a_{i+1}$, a condição de convergência permite-nos escrever

$$p a_{n+p} < \frac{\delta}{2};$$
$$n \geqq n_1$$
$$p > 0$$

e, se designarmos por N um inteiro qualquer superior a

---

(1) CATALAN, *Compt. Rend.*, 1886.

(2) Vêr: TANNERY, *Introduction à la Théorie des Fonctions.* BOREL, *Leçons sur les séries à Termes Positifs.*

$2n_1+2$, como é sempre possivel fazer

$$N = n' + n'',$$

com n' e n'' maiores que n_1, teremos, por (a),

$$n' a_{n''+n'} < \frac{\delta}{2}, \quad n'' a_{n'+n''} < \frac{\delta}{2},$$

donde se deduz, por adição,

$$N a_N < \delta,$$

ou

$$n a_n < \delta,$$
$$n > N_1 = 2n_1 + 2$$

o que demonstra a proposição enunciada.

3. A última das proposições que prometemos estabelecer enuncia-se como segue:

Se fôr $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, onde a_n e b_n são os termos gerais de duas séries de termos positivos divergentes, será tambêm

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n}{S'_n} = 0,$$

representando por S_n e S'_n as somas dos n primeiros termos das séries propostas. Para demonstrar esta proposição, bastará mostrar que, por maior que seja o positivo K previamente dado, a desigualdade

$$\frac{S_n}{S'_n} > K$$

é satisfeita, desde que seja $n > n_1$.

Ora, como $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, é sempre possível escrever

$$\frac{a_n}{b_n} > 2\mathrm{K};$$
$$n > n'$$

e, determinando n_1 pela condição

$$\mathrm{S}'_{n_1} > 2\,\mathrm{S}'_{n'},$$

virá, supondo $n > n_1$,

$$\frac{\mathrm{S}_n}{\mathrm{S}'_n} = \frac{\mathrm{S}_{n'} + a_{n'+1} + \ldots + a_{n_1} + \ldots + a_n}{\mathrm{S}'_{n'} + b_{n'+1} + \ldots + b_{n_1} + \ldots + b_n} > \frac{2\,\mathrm{K} \sum\limits_{n'+1}^{n} b_i}{\mathrm{S}'_{n'} + \sum\limits_{n'+1}^{n} b_i} > \mathrm{K},$$

como queriamos provar.

Esta proposição, que julgamos nova, é susceptivel de ser generalisada. Considerando, efectivamente, p séries nas condições das precedentes

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$b_1^{(i)} + b_2^{(i)} + \ldots + b_n^{(i)} + \ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots p-1)$$

se fôr

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n^{(i)}} = \infty,$$

será tambêm

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{\mathrm{S}_n^{(1)} + \ldots + \mathrm{S}_n^{(p-1)}} = \infty.$$

A demonstração é imediata.

II

A propriedade associativa nas séries e produtos infinitos absolutamente convergentes

4. No seu excelente livro sôbre a teoria das funções elíticas, os srs. Molk e Tannery, depois de estabelecidas algumas proposições relativas às séries duplas absolutamente convergentes, escrevem: «Au fond, on est parvenu à une généralisation complète du théorème sur la possibilité de grouper arbitrairement les termes d'une serie absolument convergente, la restriction que le nombre de termes contenus dans chaque groupe est fini étant supprimée: il peut y avoir un, plusieurs, une infinité de groupes qui soient eux-mêmes des series». Ora, entendendo, como é natural, que a teoria das séries simples deve ser feita com inteira independência do estudo das séries multiplas, ao qual, pelo contrário, ela deve dar subsídios, tentamos demonstrar directamente essa proposição e, se fôsse possível, estendê-la aos produtos infinitos. Poucas dificuldades ofereceu o estudo desses teoremas, cujas demonstrações vam em seguida, como as obtivemos numa primeira tentativa (1).

A generalisação completa a que se referem os autores citados obtem-se pela combinação do teorema relativo à propriedade comutativa de que gozam as séries absolutamente convergentes com aquêle que vamos estabelecer.

---

(1) Por indicação de um professor muito estudioso, soubemos, pelo que respeita às séries, que a proposição se encontra já estabelecida pelo sr. Fouet, que a publica em um livro recente.

O sr. Tannery, no seu livro sôbre a teoria das funções, demonstra-a igualmente e indica a sua extensão aos produtos infinitos; mas a sua demonstração encontra-se bastante prejudicada por confusas considerações sôbre a teoria dos conjuntos. O leitor verificará fácilmente a nenhuma influência que êsses autores exerceram sôbre as nossas demonstrações.

5. Começarêmos por considerar o caso de uma série convergente de números positivos ou nulos

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

cuja soma designaremos por S; S_n, agora como em todo êste estudo, designará a soma dos n primeiros termos de S.

Ao lado da série (1), consideremos também a série [1]

$$(2) \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots,$$

onde, de um modo geral, por b_n se representa a soma da série convergente

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n_i}.$$

Supõe-se, bem entendido, que o elemento a_k de (1) figura uma vez, mas uma só, num único b_i de (2).

Seja m um inteiro positivo dado, mas absolutamente qualquer, e façamos

$$S_{1,m} = b_1 + b_2 + \ldots + b_m = c_1 + c_2 + \ldots + c_m + r_1 + r_2 + \ldots + r_m,$$

pondo $b_i = c_i + r_i$, onde c_i é a soma dos termos de b_i cujo índice, em (1), não excede n. Nestas condições, poderemos sempre escrever, qualquer que seja n,

$$S_{1,m} \lesseqgtr S_n^m + r_1 + \ldots + r_m,$$

e, fixado o número m, determinar n de modo que seja

---

(1) Supomos que (2) é realmente uma série, podendo, no entanto, algum dos b reduzir-se a uma simples soma. Esta restrição não tem, porém, nenhuma importância, como o leitor fácilmente verá. O teorema é verdadeiro em todos os casos.

$r_i < \frac{\delta}{m}$, onde δ é um positivo arbitrário; concluimos, então,

$$S_{1,m} < S_n + \delta < S + \delta$$

ou

(*a*) $$S_1 \leqq S.$$

Por outro lado, determinando o inteiro n_1 pela condição

$$S_{n_1} > S - \delta$$

e designando por p o maior dos índices dos b onde se encontre algum dos números $a_1, a_2, \ldots a_{n_1}$, virá

$$S_{1,p} > S - \delta$$

ou

(*b*) $$S_1 \geqq S.$$

Do confronto de (*a*) e (*b*), resulta, como desejavamos provar,

$$S_1 = \lim_{m=\infty} S_{1,m} = S.$$

6. Estudando agora o caso mais geral de (2) representar uma série absolutamente convergente qualquer, vamos ainda mostrar, conservando as notações, que é $S_1 = S$.

Introduzindo, como é necessário, algumas notações novas, designaremos por S' a soma da série dos módulos de (1), por S'_1 a série[1] dos módulos de (2) e, finalmente por C a série que se deduz de S' como S_1 se deduziu de S:

$$C = \sum_1^{\infty} c_n, \qquad c_n = \sum_{i=1}^{i=\infty} |a_{n_i}|.$$

---

[1] Sempre que se demonstre que é lícito atribuir um certo valor a um símbolo matemático qualquer, a letra que representava o símbolo passará a representar também o seu valor.

Pelo teorema anterior, C é convergente e a sua soma é S′; mas, sendo, como é evidente, $c_n \geqq |b_n|$, a série S'_1 converge, e, por conseguinte, (2) é absolutamente convergente. Resta provar que $S = S_1$.

Para consegui-lo, designaremos por m_1 um inteiro que verifique as desigualdades

$$|S - S_{m_1}| < \frac{\delta}{2}, \qquad |S' - S'_{m_1}| < \frac{\delta}{2},$$

e daremos a n um valor suficientemente grande para que na expressão

$$S_{1,n} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

se compreendam os números $a_1, a_2, \ldots a_{m_1}$. Nestas condições, a diferença $S_{1,n} - S_{m_1}$ será igual à soma

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

dos termos de $b_1, b_2, \ldots b_n$ cujos índices sam superiores a m_1, e poderemos escrever

$$|S_{1,n} - S_{m_1}| \leqq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Mas, sendo

$$c_k = |a_{k_1}| + |a_{k_2}| + \ldots + |a_{k_i}| + \ldots,$$

é claro que será

$$c_k \geqq \sigma_{k,m_1} + |A_k|,$$

representando por σ_{k,m_1} a soma dos termos de c_k cujo índice não excede m_1, o que nos dá

$$|S_{1,n} - S_{m_1}| < c_1 - \sigma_{1,m_1} + \ldots + c_n - \sigma_{n,m_1} =$$
$$= C_n - S'_{m_1} < C - S'_{m_1} = S' - S'_{m_1}.$$

Logo, por sêr

$$|S - S_{1,n}| \leqq |S - S_{m_1}| + |S_{1,n} - S_{m_1}|,$$

virá, para valores de n suficientemente grandes,

$$|S - S_{1,n}| < \delta$$

ou

$$S = S_1 .$$

7. Estabeleçamos agora os teoremas correspondentes aos anteriores na teoria dos produtos infinitos.

Seja

$$P = \prod_1^\infty (1 + a_n), \qquad a_n \gtreqless 0 .$$

Em primeiro logar, é convergente qualquer produto

$$1 + b_n = \prod_{i=1}^{i=\infty} (1 + a_{n_i})$$

deduzido de P. É, efectivamente, o que nos é assegurado pela convergência da série $\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n_i}$.

Isto pôsto, vamos provar que o produto

$$\prod_1^\infty (1 + b_n)$$

é convergente e que o seu valor P_1 é egual a P.

Fazem-se, naturalmente, as restrições indicadas a propósito das séries. Cada factor $1 + a_k$ de P figura, mas uma só vez, num único produto $1 + b_i$.

Representemos por $P_{1,m}$ o produto

$$(1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_m) .$$

Fixado o número m, que é, de resto, arbitrário, determinemos um inteiro i', tal que os produtos

$$\prod_{i=i'}^{i=\infty} (1 + a_{n_i}) \qquad (n = 1, 2, \ldots m)$$

sejam inferiores a $1+\frac{\alpha}{m}$, $\alpha>0$, o que é sempre possível, visto considerarmos um número finito de produtos convergêntes.

$P_{1,m}$ escrever-se há, então,

$$P_{1,m}=\prod_{i=1}^{i=i'-1}(1+a_{1_i})\prod_{i=i'}^{i=\infty}(1+a_{1_i})\dots\prod_{i=1}^{i=i'-1}(1+a_{m_i})\prod_{i=i'}^{i=\infty}(1+a_{m_i})$$

$$<\prod_{n=1}^{n=n'}(1+a_n)\times\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m<P e^{\alpha},$$

onde n' é, bem entendido, o maior dos números $n_{i'-1}$, $n=1$, $2,\dots m$.

Esta desegualdade mostra-nos que $P_{1,m}$, função positiva e crescente de m, não pode exceder P, pelo que será

$$(a)\qquad P_1=\lim_{m=\infty}P_{1,m}\lesseqgtr P.$$

Por outro lado, dado o positivo δ, arbitráriamente pequeno, existem sempre dois inteiros n_1 e m_1 que verificam as desegualdades

$$(b)\qquad P_{n_1}>P-\delta,\qquad P_{1,m_1}>P_{n_1};$$

basta que m_1 designe o maior dos índices dos factores $1+b_n$, onde haja elementos a_k que, em P, tenham índice inferior a n_1+1. Do confronto de (a) e (b) resulta

$$(c)\qquad P=P_1.$$

8. Passando ao caso mais geral em que P représenta um produto absolutamente convergente, mostraremos que P_1 goza da mesma propriedade e que é ainda $P=P_1$.

Seja P' o valor do produto

$$\prod_1^{\infty}(1+|a_n|),$$

P'_1 o produto

$$\prod_1^{\infty}(1+|b_n|)$$

e, finalmente, Q o produto

$$\prod_1^{\infty}(1+c_n),$$

deduzido de P', como P_1 se deduziu de P:

$$1+c_n=\prod_{i=1}^{i=\infty}(1+|a_{n_i}|).$$

A convergência da série $\sum_1^{\infty}|a_n|$ mostra-nos que o produto

$$\prod_{i=1}^{i=\infty}(1+a_{n_i})$$

converge absolutamente. Seja $1+b_n$ o seu valôr. Atendendo a que $|b_n|<c_n$ e notando que, pelo teorema precedente, Q é convergente e igual a P', fica estabelecida a convergência absoluta de P_1.

Para demonstrar a igualdade $P=P_1$, começaremos por designar por m_1 um inteiro que verifique as desegualdades

$$|P-P_{m_1}|<\frac{\delta}{2}, \quad \left|\frac{P'}{P'_{m_1}}-1\right|<\frac{\delta}{2P'}$$

e por n_1 um número tal que $P_{1,n}$ contenha os factores $(1+a_1)$, ... $(1+a_{m_1})$. Depois, supondo, como é sempre possível, que $P_{1,n}$ tem os seus factores na ordem em que êles se encontram em P e que é $n>n_1$, escreveremos

$$|P-P_{1,n}|=|P-P_{m_1}|$$
$$+|P_{m_1}|\cdot\left|\frac{P_{1,n}}{P_{m_1}}-1\right|<\frac{\delta}{2}+P'\left|\prod_{i=k}^{i=\infty}(1+a_{r_i})-1\right|,$$

onde r_k representa o menor índice superior a m_1 que figura em $P_{1,n}$ e a_{r_i} é o termo geral dêste produto. Mas a quantidade

$$\left|\prod_{i=k}^{i=\infty}(1+a_{r_i})-1\right|$$

é manifestamente inferior a

$$\prod_{i=k}^{i=\infty}(1+|a_{r_i}|)-1,$$

que é menor que

$$\prod_{n=m_1+1}^{n=\infty}(1+|a_n|)-1;$$

logo, será

$$|P-P_{1,n}|<\delta$$

$$n \geqq n_1 \qquad\qquad \text{c. d. d.}$$

III

Sôbre a derivada dos produtos infinitos

9. Um dos mais importantes teoremas da Análise é aquêle que nos permite, sob certas condições gerais, escrever sob a forma de uma série a derivada de outra série. Sabe-se, efectivamente, que a derivada da função

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots,$$

convergente em certo intervalo (a, b), é dada pela fórmula

$$f'(x)=f'_1(x)+f'_2(x)+\ldots+f'_n(x)+\ldots,$$

desde que esta última série convirja uniformemente no mesmo intervalo (a, b). Dir-se há, abreviadamente, designando por

$S_n(x)$ a soma dos n primeiros termos de $f(x)$,

$$f'(x) = \lim_{n=\infty} S_n'(x).$$

É, como se sabe, um teorema fundamental. Nós vamos estabelecer, em condições muito largas também, não uma proposição que permita escrever sob a forma de um produto infinito a derivada de outro produto, mas o teorema traduzido na igualdade

$$f'(x) = \lim_{n=\infty} P_n'(x),$$

representando $P_n(x)$ o produto dos n primeiros factores da função

$$f(x) = \prod_1^\infty [1 + u_n(x)].$$

Para atingir êste resultado, suporémos uniformemente convergentes, em certo intervalo (a, b), as séries

$$(1) \qquad |u_1(x)| + |u_2(x)| + \ldots + |u_n(x)| + \ldots,$$

$$(2) \qquad |u_1'(x)| + |u_2'(x)| + \ldots + |u_n'(x)| + \ldots$$

e admitiremos, alêm disso, que, para êsses valores de x, a soma da segunda série se mantem inferior a um certo número A_1. É o que necessáriamente acontece, quando $u_i'(x)$ é uma função continua. A soma da série (1), em virtude das hipóteses feitas, admite um máximo A.

Começaremos por demonstrar que, para todos os valores de n e qualquer que seja x em (a, b), existe um número B que verifica as desegualdades

$$|P_m| < B, \qquad |P_m'| < B \text{ (1)}.$$

(1) Sempre que daí não resulte inconveniente, suprimiremos a letra que designa a variável.

Efectivamente, designando por P_m o produto

$$P_m = \prod_1^m (1 + u_n),$$

será

$$|P_m| < e^{|u_1| + \dots + |u_m|} < e^A;$$

e, por outro lado, visto sêr

$$P'_m = \sum_1^m \left[u'_i \prod_1^{i-1} (1 + u_n) \prod_{i+1}^m (1 + u_n) \right],$$

virá

$$|P'_m| < \sum_1^m \left[|u'_i| \prod_1^m (1 + |u_n|) \right] < \cancel{P_1} A_1,$$ / $\mathfrak{L}_1$

$\mathfrak{L}_1$ representando por $\cancel{P_1}$ o máximo de função continua

$$\prod_1^\infty (1 + |u_n|).$$

O número B será qualquer número superior a e^A e $\cancel{P_1} A_1$. / $\mathfrak{L}_1$
Isto pôsto, por ser

$$|P_n' - P'_{n-1}| = |P'_{n-1}| \cdot |u_n| + |P_{n-1}| \, |u_n'| < B(|u_n| + |u_n'|),$$

a série

$$\varphi(x) = P_1' + (P_2' - P_1') + \dots + (P_n' - P'_{n-1}) + \dots$$

converge uniformemente e representa a derivada de

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + \dots + (P_n - P_{n-1}) + \dots$$

Podemos, pois, dizer que, sob as condições indicadas, de

$$(\alpha) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} P_n,$$

deduz-se

$$(b) \qquad f'(x) = \lim_{n=\infty} P_n'.$$

Em particular, se nenhuma das funções $1 + u_i(x)$ é nula no ponto x, poderemos escrever

$$(b') \quad f'(x) = f(x)\left[\frac{u_1'}{1+u_1} + \frac{u_2'}{1+u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{1+u_n} + \ldots\right],$$

fórmula há muito estabelecida em condições muito restritas, como sejam as de se supôr que as funções $u_i(x)$, não sendo nunca nulas no ponto x que se considera, são susceptiveis de ser desenvolvidas em séries de potências, absoluta e uniformemente convergentes no intervalo proposto [1]. Apezar de imensamente restritiva, esta última hipotese não permitiu, até agora, estabelecer a fórmula (b), no caso em que algumas das funções $1 + u_i$ se anulassem. Deixamo-la rigorosamente demonstrada. O que importa, porem, notar é que, no seu estabelecimento, se fez uso de um mínimo de hipóteses.

10. Vamos, agora, introduzindo algumas hipóteses novas, generalisar os resultados que acabamos de obter.

Suponhamos que a série

$$(3) \qquad |u_1''(x)| + |u_2''(x)| + \ldots + |u_n''(x)| + \ldots$$

converge uniformemente no intervalo (a, b) e que a sua soma não excede, nêsse intervalo, um certo número A_2.

Começando pela determinação de um número superior ao valor absoluto de P_n'', consideremos a expressão

$$P_m' = \sum_1^m \left[u_i' \prod_1^{i-1} (1 + u_n) \prod_{i+1}^m (1 + u_n)\right],$$

(1) Tannery et Molk, *Fonctions Elliptiques*, tomo I, pág. 69.

que dá, por meio de um cálculo simples,

$$|P''_m| < \sum_1^m \Big[|u''_i| \prod_1^m (1+|u_n|) + |u'_i| \prod_1^m (1+|u_n|) \sum_1^i |u'_n| + |u'_i| \prod_1^m (1+|u_n|) \sum_{i+1}^m |u'_n| \Big]$$
$$< P_1 (A_2 + A_1^2).$$

Substituindo, agora, na expressão

$$u''_n P_{n-1} + 2\, u'_n P'_{n-1} + u_n P''_{n-1}$$

de $P''_n - P''_{n-1}$, P_{n-1}, P'_{n-1} e P''_{n-1} pelos números B e $P_1(A_2 + A_1^2)$, obtemos um resultado da forma

$$|P''_n - P''_{n-1}| < R(|u''_n| + |u'_n| + |u_n|),$$

que demonstra a convergência uniforme da série

$$\psi(x) = P''_1 + (P''_2 - P''_1) + \ldots + (P''_n - P''_{n-1}) + \ldots,$$

que, por isso, representa a segunda derivada de $f(x)$. Logo, sob as condições expressas, de

$$(a) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} P_n,$$

deduzem-se as egualdades

$$(b) \qquad f'(x) = \lim_{n=\infty} P'_n,$$

$$(c) \qquad f''(x) = \lim_{n=\infty} P''_n.$$

11. Acabamos de vêr que a hipótese de que as séries (1) e (2) eram uniformemente convergentes e de que a soma da última se mantinha inferior e um certo número A nos permitiu escrever sob a forma duma série uniformemente convergente a derivada de $f(x)$. Depois, supondo uniformemente convergentes as séries (1), (2) e (3) e admitindo que a soma da última era, para os valores de x que se consideraram, inferior a uma certa quantidade, vimos também que a segunda derivada de $f(x)$ se exprimia por meio de uma série de convergência uniforme. A existência da série (3) substituia a condição relativa à existência do número superior à soma da série (2).

Vamos agora obter o teorema geral, de que as duas últimas proposições são apenas casos particulares. Demonstraremos, em condições que vão sêr ulteriormente precisadas, a formula geral

$$f_{(x)}^{(k+1)} = \lim_{n=\infty} P_n^{(k+1)}.$$

Como o teorema se encontra estabelecido nos casos correspondentes a $k=0$ e $k=1$, supô-lo hemos verdadeiro até à ordem k, e vamos, admitindo a convergência uniforme da série

$$(k+2) \qquad |u_1^{(k+1)}| + |u_2^{(k+1)}| + \ldots + |u_n^{(k+1)}| + \ldots$$

e a existência de um número superior a todos os valôres que êla toma no intervalo (a, b), vêr que êle tem ainda logar no caso de se considerar a derivada de ordem imediatamente superior.

Precisemos, antes de mais nada, o significado da hipótese que acabamos de formular.

Supôr verdadeiro, até à ordem k, o teorema que se estuda é admitir que todas as derivadas de $f(x)$, cuja ordem é inferior ou egual a êsse número, podem ser expressas por meio de uma série uniformemente convergente da forma seguinte

$$P_1^{(i)} + (P_2^{(i)} - P_1^{(i)}) + \ldots + (P_n^{(i)} - P_{n-1}^{(i)}) + \ldots,$$

desde que as séries

$$(1) \qquad |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

$$(2) \qquad |u_1'| + |u_2'| + \ldots + |u_n'| + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(k+1) \qquad |u_1^{(k)}| + |u_2^{(k)}| + \ldots + |u_n^{(k)}| + \ldots$$

sejam uniformemente convergentes e exista um número inferior ao qual se conserve a soma da última em todo o intervalo (a, b).

Uma primeira observação importante é aquela que mostra como a existência da série $(k+2)$ substitue a condição de existência do número adstrito à série $(k+1)$. Efectivamente, em virtude de existirem as derivadas que figuram em $(k+2)$, os termos de $(k+1)$ sám agora funções continuas; e, visto $(k+1)$ convergir uniformemente, $f^{(k)}_{(x)}$ será continua e, portanto, limitada.

Para estabelecer a proposição que estudamos, é necessário provar a existência de um número B, que, para todos os valores de n e qualquer que seja x, verifique as desegualdades

$$|P^{(i)}_n| < B. \qquad (i = 0, 1, \dots k+1).$$

Para isso, notaremos que, em virtude da convergência uniforme de $(k+1)$, podemos escrever

$$|P^{(k)}_n - f^{(k)}_{(x)}| < \delta,$$

$$n > n_1$$

ou

$$|P^{(k)}_n| < M + \delta,$$

$$n > n_1$$

representando por M o máximo de $|f^{(k)}(x)|$; conseguintemente, se B_k designa um número superior a $M + \delta$ e ao maior dos máximos das funções

$$|P^{(k)}_1|, |P^{(k)}_2|, \dots |P^{(k)}_{n_1}|,$$

teremos, quaisquer que sejam x e n,

$$|P^{(k)}_n| < B_k.$$

Do mesmo modo se obtinham os números $B_0, B_1, \ldots B_{k-1}$ relativos às derivadas anteriores, e assim escreveremos

$$(\alpha) \qquad |P_n^{(i)}| < B_i \,.\, (i = 0, 1, \ldots k).$$

Pelo que respeita a única desegualdade que nos falta estabelecer, observaremos que a formula de Leibnitz aplicada ao produto

$$P_n = P_{n-1} + u_n P_{n-1}$$

dá

$$(\beta) \qquad P_n^{(k+1)} = P_{n-1}^{(k+1)} + u_n^{(k+1)} P_{n-1} + \ldots + u_n P_{n-1}^{(k+1)},$$

e êste resultado mostra-nos a necessidade de fazer depender a limitação de $P_n^{(k+1)}$ da de $P_{n-1}^{(k+1)}$ e esta da de $P_{n-2}^{(k+1)}$, etc.

Mudando, então, na formula (β), n em $n-1$, $n-1$ em $n-2$, etc., depois de se terem grupado as parcelas extremas, obtem-se

$$\begin{aligned}
P_n^{(k+1)} = {} & u_n^{(k+1)} P_{n-1} + (k+1) u_n^{(k)} P'_{n-1} + \ldots + (k+1) u'_n P_{n-1}^{(k)} \\
& + (1+u_n)\Big[u_{n-1}^{(k-1)} P_{n-2} + (k+1) u_{n-1}^{(l)} P'_{n-2} + \ldots + (k+1) u'_{n-1} P_{n-2}^{(k)} \\
& \qquad + (1+u_{n-1})\Big[u_{n-2}^{(k+1)} P_{n-3} + (k+1) u_{n-2}^{(k)} P'_{n-3} + \ldots + (k+1) u'_{n-2} P_{n-3}^{(k)} \\
& \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad\qquad + (1+u_3)\big[u_2^{(k+1)} P_1 + (k+1) u_2^{(k)} P'_1 + \ldots + (k+1) u'_2 P_1^{(k)} \\
& \qquad\qquad\qquad + (1+u_2) P_1^{(k+1)} \big] \ldots \Big]\Big] = \\
= {} & u_n^{(l+1)} P_{n-1} + (k+1) u_n^{(k)} P'_{n-1} + \ldots + (k+1) u'_n P_{n-1}^{(l)} \\
& + \big[u_{n-1}^{(k+1)} P_{n-2} + (k+1) u_{n-1}^{(k)} P'_{n-2} + \ldots + (k+1) u'_{n-1} P_{n-2}^{(l)} \big](1+u_n) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \big[u_2^{(k+1)} P_1 + (k+1) u_n^{(l)} P'_1 + \ldots + (k+1) u'_2 P_1^{(l)} \big](1+u_n)(1+u_{n-1})\ldots(1+u_3) \\
& + u_1^{(k+1)} (1+u_n)(1+u_{n-1})\ldots(1+u_3)(1+u_2).
\end{aligned}$$

Logo, designando por A_i um número superior à soma da série $(i-1)$ e supondo, como é licito, $B_i > 1$, vem, atendendo às desegualdades (α)

$$|P_n^{(k+1)}| < B_0 \sum_{i=1}^{i=n} [B_0 |u_i^{(k+1)}| + (k+1) B_1 |u_i^{(k)}| + \ldots + (k+1) B_k |u_i'|]$$
$$< B_0 [B_0 A_{k+2} + (k+1) B_1 A_{k+1} + \ldots + (k+1) B_k A_2] = B_{k+1},$$

o que nos permite englobar na formula

$$|P_n^{(i)}| < B, \qquad (i = 0, 1, \ldots k+1)$$

na qual B é um número maior que B_0, B_1, ... B_{k-1}, todas as desegualdades até agora obtidas.

Entrando com êstes resultados na formula (β), obtem-se, finalmente, a desegualdade

$$|P_n^{(k+1)} - P_{n-1}^{(k+1)}| < B [|u_n^{(k+1)}| + (k+1) |u_n^{(k)}| + \ldots + |u_n|],$$

que, estabelecendo a convergência uniforme da série

$$\varpi(x) = P_1^{(k+1)} + (P_2^{(k+1)} - P_1^{(k+1)}) + \ldots + (P_n^{(k+1)} - P_{n-1}^{(k+1)}) + \ldots,$$

permite escrever a formula geral que procuravamos obter:

$$\varpi(x) = f^{(k+1)}(x)$$

ou

$$(l) \qquad f^{(k+1)}(x) = \lim_{n=\infty} P_n^{(k+1)}.$$

Êstes teoremas estendem-se, sem dificuldade, às funções de variável imaginária. Nêste caso, as restrições de que atrás falamos não têm importância alguma, visto saber-se que a existência da primeira derivada importa, no domínio da variável imaginária, a existência de derivadas de todas as ordens.

Em todo o caso, a existência destas derivadas não permitiu, como já tivemos ocasião de dizer, demonstrar a formula (b), e isso porque a formula (b'), a que se chegava, era estabelecida na hipótese de não ser nulo nenhum dos factores de $f(x)$. Mas nós não quizemos estabelecer a formula (b'), que apenas de passagem registámos, mas, sim, as formulas (b), (c), ... (l).

Em particular, (b) poderia deduzir-se de (b'); mas, para isso, era não só preciso que $f(x)$ tivesse derivadas de todas as ordens, como se exigia a existência dum mínimo diferente de zero para os módulos dos factores de $f(x)$, condições estas que, no nosso estudo, não sam de modo algum necessárias.

Privado dos teoremas que acabamos de obter, o sr. Émile Borel, no seu belo livro sôbre as funções inteiras, tem de recorrer a calculos muito laboriosos para demonstrar que, dados o produto infinito [1]

$$F(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

e a região $|z|<R$, sam legitimas as correspondentes formulas (b) e (c). Êste autor não chega até a desenvolver os calculos relativos a egualdade (c). Ora, em vista do que acabamos de expor, essa conclusão é imediata. Bastaria, efectivamente, estabelecer a convergênvia uniforme das correspondentes séries (1), (2) e (3), o que é deveras simples, como adeante mostraremos, ao voltar a êste assunto.

[1] A função considerada pelo sr. Borel é $e^{Q(z)}F(z)$, onde $Q(z)$ é um polinómio de gráu inferior a $p+1$. O leitor verá, porem, que êsse factor não é estôrvo digno de menção.

IV

A integração dos produtos infinitos

12. A propósito da integração dos produtos infinitos, estabelecem-se teoremas paralelos àquêles que acabam de ser demonstrados para o caso da derivação.

Em primeiro logar, se o produto infinito

$$f(x)=\prod_{1}^{\infty}[1+u_i(x)]$$

for uniformemente convergente no intervalo (a, b) e se, nêsse mesmo intervalo, $f(x)$ e $u_i(x)$ forem funções integráveis (o que necessariamente acontece, quando $u_i(x)$ é uma função contínua), será, evidentemente,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\int_{x_0}^{x} \mathrm{P}_n\,dx,$$

visto que, nêste caso, a série de funções integráveis

$$\mathrm{P}_1+(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)+\ldots+(\mathrm{P}_n-\mathrm{P}_{n-1})+\ldots$$

converge uniformemente.

Atendendo a que a série

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}_1\,dx+\int_{x_0}^{x}(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)\,dx+\ldots+\int_{x_0}^{x}(\mathrm{P}_n-\mathrm{P}_{n-1})\,dx+\ldots$$

é também uniformemente convergênte e os seus termos sam funções contínuas, teremos

$$\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}_1\,dx+\ldots+\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}(\mathrm{P}-\mathrm{P}_n-\mathrm{P}_{n-1})\,dx+\ldots$$

e, de um modo geral,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} P_1\, dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} (P_n - P_{n-1})\, dx + \ldots$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} P_n(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{k-1}}{\lfloor k-1} P_n(z)\, dz.$$

CAPÍTULO I

Os produtos infinitos de Weirstrass

I

Extensão imediata de um teorema da Algebra

13. O problema da determinação de uma expressão analítica cujos zeros se conhecem ocupa há mais de um século o espírito de muitos geometras eminentes.

Começou-se por descobrir, sob um mesmo enunciado geral, a coexistência de dois problemas distintos, ao mesmo tempo que se reconhecia a insuficiência do conhecimento dos zeros para se proceder a uma determinação efectiva e única. Esta última conclusão resulta do facto de se anularem para os mesmos valores da variável duas expressões que apenas diferem num factor da forma $e^{\psi(z)}$, desde que $\psi(z)$ satisfaça a certas condições gerais; a duplicidade do problema provem das duas hipóteses que se podem fazer sôbre o número dos zeros dados. Se êsse número é finito, supondo, como é sempre possível (1), que a expressão a determinar se não anula com z, as considerações anteriores conduzem-nos ao produto

$$e^{\psi(z)}\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{a_m}\right),$$

onde $a_1, a_2, \ldots a_m$ sám os zeros propostos.

---

(1) Por meio de uma mudança de variável.

Nesta expressão, há, como se vê, um factor arbitrário. Se nos cingirmos ao domínio das expressões algébricas, inteiras, o conhecimento desse factor ficará apenas dependente do conhecimento do valor que toma a expressão procurada num ponto qualquer.

Numa expressão analítica que admita uma infinidade de zeros, haverá, também, em regra, um factor, independente dêsses números, cuja determinação só será possível quando se conheçam algumas propriedades caracteristicas da expressão que se pretende descobrir.

A determinação do mínimo e natureza dessas propriedades constitue a fase atual do estudo do problema proposto.

Nêste capítulo, dada a sucessão indefinida de números quaisquer

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots,$$

limitar-nos hemos a construir uma expressão analítica, regular em todo o plano, de que êsses números sejam os únicos zeros. A condição de regularidade exige que seja $\lim\limits_{m=\infty} |a_m| = \infty$, razão por que nós supomos os números (1) escritos segundo a ordem crescente dos seus módulos, sendo no entanto arbitrária a disposição daquêles que só diferem nos argumentos.

14. Suponhamos, em primeiro logar, $a_1 \neq 0$. Nestas condições, tendo em vista que, por maior que seja o inteiro m, o produto

$$\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{a_m}\right)$$

representa sempre uma expressão analítica destituida de singularidades a distância finita, que apenas se anula nos m primeiros pontos da sucessão (1), ocorre, naturalmente, investigar as condições a que devem satisfazer os elementos dessa sucessão para que o produto infinito

$$(a) \quad \prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdots$$

não admita outros zeros além dos números que nela figuram e conserve em qualquer região limitada do plano a regularidade dos seus factores.

Para realizar o primeiro objectivo, suporemos absolutamente convergente o produto (a), ou, o que tanto importa, admitiremos a convergência da série

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_n}\right|,$$

porque, nesta hipótese, qualquer que seja o valor de z que se considere, a série

$$\sum_1^\infty \frac{z}{a_n}$$

será sempre absolutamente convergente, o mesmo se podendo dizer do produto considerado, que não poderá, assim, ser nulo, sem que algum dos seus factores o seja.

Da nossa hipótese, decorre também a regularidade desse produto, como facilmente se reconhece, notando que é aqui integralmente aplicável a doutrina do n.º 9, desde que nos limitemos a considerar uma região limitada do plano.

Se a origem das coordenadas fôsse um zero de ordem h para a expressão que se pretende construir, constituiriamos com os restantes zeros a sucessão (1) e a expressão analítica procurada obter-se hia multiplicando pela potência h de z o produto infinito correspondente a essa sucessão.

II

Factores primários de género p. Teorema de Weirstrass

15. Antes de nos abeirarmos do estudo do teorema de Weirstrass, vamos dizer algumas palavras sôbre as expressões da forma

$$\mathrm{P}_p(x) = (1-x)\, e^{\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^p}{p}}$$

às quais se dá o nome de *factores primários de género* p.

Demonstraremos, em primeiro logar, que $\mathrm{P}_p(x)$ é suscétivel de sêr desenvolvido em série da forma

$$\mathrm{P}_p(x) = 1 + q_1\, x^{p+1} + q_2\, x^{p+2} + \ldots + q_m\, x^{p+m} + \ldots,$$

com $|q_i| < 1$.

Suponhamos $|x| < 1$. Como a expressão

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^{p+2}}{p+2} + \ldots$$

é sempre maior do que *um*, quando x é maior do que zero, os números positivos $s_1, s_2, \ldots$, que figuram no desenvolvimento

$$e^{\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^p}{p}} = 1 + x + \ldots + x^p + s_2\, x^{p+1} + s_2\, x^{p+2} + \ldots,$$

deverám ser inferiores aos coeficientes dos termos correspondentes da expressão

$$e^{\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^p}{p}+\frac{x^{p+1}}{p+1}+\ldots} = e^{\log\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} =$$

$$= 1 + x + \ldots + x^p + x^{p+1} + \ldots$$

e, conseguintemente, os números $q_1, q_2, \ldots$, respectivamente iguais a $1-s_1, s_1-s_2, \ldots$, satisfazem bem à desigualdade indicada. Por outro lado, o teorema relativo à multiplicação de séries mostra que o desenvolvimento obtido para $P_p(x)$ subsiste, ainda que o módulo de x exceda a unidade. Eis o que desejavamos provar.

Incidentemente, poderemos observar que, supondo $|x|<1$, será

$$\left|P_p(x)-1\right|<\frac{|x|^{p+1}}{1-|x|},$$

resultado êste que em breve utilisaremos.

16. Entrando no estudo da bela proposição de WEIRSTRASS, vamos mostrar como se poderá fazer corresponder a cada inteiro n um positivo k_n, de modo a tornar convergênte a série

$$\sum_1^\infty \left|\frac{R}{a_n}\right|^{k_n}, \tag{2}$$

onde R é um positivo arbitrário e a_n conserva o seu anterior significado, com a restrição $|a_1|>0$. É o que se consegue sempre, pondo, com WEIRSTRASS, $k_n=n$, ou, como indicou o sr. BOREL, $k_n=i(\log n)$, isto é, k_n igual ao maior inteiro contido em $\log n$. No primeiro caso, a raiz de índice n do termo da mesma ordem tende, com $\frac{1}{n}$, para zero; no segundo, qualquer que seja o positivo k, será sempre

$$\left|\frac{R}{a_n}\right|^{\log n}=n^{\log\left|\frac{R}{a_n}\right|}<\frac{1}{n^{1+k}},$$

desde que n seja suficientemente grande.

Nas aplicações, o caso mais importante é aquêle em que o número k_n é fixo, independente de n, como, por exemplo, na série

$$\sum_1^\infty\left(\frac{R}{n}\right)^2;$$

nêste caso, dá-se o nome de *expoente de convergência da sucessão (1)* ao limite inferior do conjunto de números α que tornam convergente a série

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\alpha}.$$

Adeante mostraremos o importante papel que êste número desempenha na teoria das funções inteiras.

Demonstrada, porem, a possibilidade da determinação dos números k_n, tomemos arbitráriamente um positivo R e consideremos a região A definida pela desigualdade $|z|<R$. Se o inteiro m_1 satisfizer à condição $|a_{m_1}|>R$, o produto infinito

$$f_1(z)=\prod_{m_1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}},$$

ou, mais simplesmente,

$$\prod_{m_1}^{\infty}(1+u_n),$$

convergirá absoluta e uniformemente em A, porque, visto ser $\left|\frac{z}{a_n}\right|<1$, $n\geqq m_1$, uma observação anterior permite escrever a desigualdade

$$\sum_{m_1}^{\infty}|u_n|<\sum_{m_1}^{\infty}\frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n}}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|}<\frac{1}{1-\left|\frac{R}{a_{m_1}}\right|}\sum_{m_1}^{\infty}\left|\frac{R}{a_n}\right|,$$

que mostra que o mesmo se dá com a série

$$(3)\qquad \sum_{1}^{\infty}|u_n|.$$

Logo, a expressão

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}$$

proveniente da multiplicação de $f_1(z)$ por um certo número (m_1-1) de factores, gozará das mesmas propriedades na região considerada, onde, por conseguinte, não poderá anular-se, sem que o mesmo aconteça a algum dos seus factores, o que nos permite afirmar, atendendo à arbitrariedade de R, que $f(z)$ não admite zeros extranhos à sucessão proposta.

Para terminar, mostraremos que $f(z)$ é uma expressão analítica inteira, para o que basta demonstrar a existência de $f'(z)$ em todos os pontos do A. Como se encontra já estabelecida a convergência uniforme da série (3), limitar-nos hemos a demonstrar que a série

$$\sum_{1}^{\infty}|u_n'|$$

satisfaz ás condições do n.° 9.

Efectivamente, supondo $R>1$ e designando por n_1 um número definido pela condição

$$\left|\frac{R}{a_{n_1}}\right|<\frac{1}{R},$$

as desigualdades evidentes

$$\sum_{n_1}^{\infty}|u_n'|=\sum_{n_1}^{\infty}\left|-\frac{z^{k_n-1}}{a_n^{k_n}}e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}}\right|$$

$$<\frac{1}{R}\sum_{n_1}^{\infty}\left|\frac{R}{a_n}\right|^{k_n}\times e^{\left|\frac{R}{a_n}\right|+\dots+\left|\frac{R}{a_n}\right|^{k_n-1}}<\frac{1}{R}\sum_{n_1}^{\infty}\left|\frac{R}{a_n}\right|^{k_n}\times e^{\frac{1}{R}+\dots+\frac{1}{R^n}+\dots}$$

mostram que essa série converge uniformemente e que a sua soma não excede, na região que se considera, um certo número, de calculo bastante simples.

Podemos, pois, escrever

$$f'(z) = \lim_{n=\infty} \frac{d}{dz} \prod_1^n (1+u_n)$$

ou, se $f(z') \neq 0$,

$$f'(z') = .f(z') \sum_1^\infty \frac{z'^{k_n-1}}{a_n^{k_n-1}(z'-a_n)}.$$

Se a expressão procurada se anular com z, a sua forma mais geral será

$$\varphi(z) = z^h e^{\psi(z)} f(z),$$

como se explicou anteriormente.

Eis, com algumas modificações, os trabalhos de WEIRSTRASS sôbre o problema que nos propusemos estudar nêste capítulo. O eminente geometra publicou a sua descoberta nas memórias da Academia de Berlim, em 1876.

Anteriormente, EULER obtivera já alguns resultados valiosos, se bem que muito particulares; e o professor ENRICO BETTI, em 1859, resolvera também êste problema, no caso particular de ser diferente de zero o limite inferior das distâncias mutuas dos zeros, que êle supunha simples.

Apesar da sublimidade do seu talento, WEIRSTRASS não conseguiu tornar o seu método aplicável à resolução de problemas que intimamente se ligam a êste, constituindo até como que um seu prolongamento, como, por exemplo, o da determinação do factor $e^{\psi(z)}$. Desta tarefa se tem encarregado os maiores geometras do nosso tempo, como POINCARÉ e os srs. HADAMARD, BOREL, LINDELÖF, BLUMENTHAL, etc. É que êste factor desconhecido, correspondente à constante indeterminada dos polinómios, é aqui de uma importância excecional, visto ser da mesma natureza da expressão a determinar, como judiciosamente observa o sr. Borel, enquanto a constante dos polinómios apenas influe no sinal dessa expressão, quando se consideram valores suficientemente grandes do módulo da variável.

Adeante, quando falarmos das funções de género finito, diremos mais algumas palavras sôbre êste importante assunto.

CAPÍTULO II

Alguns teoremas sôbre as funções de género finito

I

Os produtos canónicos

17. Se, conservando as notações do capítulo anterior, $p+1$ é o menor inteiro que, escrito no logar de α, torna convergente a série

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^\alpha,$$

à função

$$(1) \quad f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

dá-se o nome de *produto canónico de género* p. É, como se vê, um produto infinito de factores primários de género p, que converge absoluta e uniformemente para todos os valores de z. Multiplicando um produto canónico de género p por um factor da fórma

$$e^{Q(z)},$$

onde $Q(z)$ é um polinómio de grau q, obtem-se uma transcendente inteira, a que se dá o nome de *função de género* k [1], designando por esta letra o maior dos números p e q. Final-

---

[1] A noção de género é devida a Laguerre.

mente, se, no produto

$$\psi(z) = e^{H(z)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n - 1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n - 1}},$$

os números K_n crescem àlêm de todo o limite, $H(z)$ é uma série ou se verificam conjuntamente estas duas hipóteses, $\psi(z)$ toma o nome de ***função inteira de género infinito.***

Algumas das proposições que vamos expôr, relativas às funções de género finito, têm sido, mais ou menos laboriosamente e com determinadas modificações, estendidas às funções de género infinito. As duas teorias marcham, hoje, paralelamente, dando-se mútuos e importantes subsídios. Aqui, apenas nos referiremos às funções de género finito.

18. Começaremos por demonstrar que a derivada de um produto canónico de género p, cujos zeros sam riais, não tem raizes imaginárias, para o que faremos vêr que, representando por $f_m(z)$ o produto dos m primeiros factores de (1), nenhuma das funções $f_m'(z)$ tem zeros dessa natureza, como necessáriamente aconteceria se fôsse falsa a nossa proposição. Efectivamente, tivemos já ocasião de mostrar [1] que, no caso sujeito, de

(2) $$f(z) = \lim_{m=\infty} f_m(z)$$

se deduzia

(3) $$f'(z) = \lim_{m=\infty} f_m'(z)$$

e adiante mostraremos que é também

(4) $$f''(z) = \lim_{m=\infty} f_m''(z);$$

[1] Capítulo I, pág. 31.

ora, considerando o integral

$$\mathrm{I}_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{f''_m(z)}{f'_m(z)}\,dz,$$

que se supõe tomado ao longo de um círculo C traçado numa região onde apenas exista um único zero — o centro — de $f'(z)$ [1], e tendo em vista que, em virtude das formulas (3) e (4), tem logar a igualdade

$$\lim_{m=\infty} \mathrm{I}_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{f''(z)}{f'(z)}\,dz = 1,$$

vê-se quê cada uma das funções $f_m'(z)$, $m > m_1$, só admite um zero interior a essa região circular, donde concluimos que um zero de $f'(z)$ é sempre um ponto limite do conjunto de zeros das derivadas $f_m'(z)$. Logo, se provarmos que estas funções só admitem zeros riais, teremos estabelecido a proposição enunciada.

Ora, escrevendo $f_m(z)$ sob a forma

$$f_m(z) = e^{Q_m(z)}\,\mathrm{P}_m(z), \tag{5}$$

onde se pôs

$$\mathrm{Q}_m(z) = \sum_1^m \left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p\right]$$

e

$$\mathrm{P}_m(z) = \prod_1^m \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

$f_m'(z)$ terá a expressão

$$f_m'(z) = e^{Q_m}\left[\mathrm{Q}_m'\,\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_m'\right] \tag{6}$$

---

[1] A partir de certa ordem, nenhuma das funções $f_m'(z)$ poderá anular-se sôbre esta linha.

e, como P_m não tem, por hipótese, zeros imaginários, a derivada $f_m'(x+iy)$, $y \neq 0$, só poderá anular-se quando seja

$$Q_m'+\frac{P_m'}{P_m}=\sum_1^m\left[\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\ldots+\frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right]=\sum_1^m\left(\frac{z}{a_n}\right)^p\frac{1}{z-a_n}=0$$

ou, dividindo por z^p e multiplicando por $x-a_n-iy$

$$\sum_1^m\frac{1}{a_n^p}\,\frac{x-a_n-iy}{(x-a_n)^2+y^2}=0.$$

Se p é par, o coeficiente de iy nas parcelas deste somatório é negativo, e essa soma não poderá, por isso, sêr nula, com $y \neq 0$; se p é impar, a conclusão é ainda subsistente, como fácilmente se reconhece, multiplicando por $x+iy$ os dois membros da igualdade anterior. Logo, *se forem riais os zeros de um produto canónico de género* p, *sam igualmente riais os zeros da sua derivada* [1].

19. A formula fundamental (6) sugere-nos ainda algumas considerações de certo interesse. Suponhamos, em primeiro logar, que os zeros de $f(z)$ se estendem indefinidamente ao longo do eixo rial. Nêste caso, as raizes de $f'(z)=0$ prolongam-se também em toda a extensão dessa recta, porquanto em cada intervalo de dois zeros consecutivos de $f(z)$ deverá existir, pelo menos, uma raiz de $f'(z)=0$.

É, porém, fácil indicar com maior rigor a situação dos

---

(1) Esta proposição, que julgamos nova, é mais completa do que a de Laguerre, de que nos ocuparemos a seguir, se bem que menos geral do que ela. O método que empregamos na sua obtenção é devido a êsse sábio professor. Poderiamos, de resto, operar directamente sôbre a expressão de $f'(z)$, seguindo assim diverso caminho, aliás bem mais breve. Preferimos, no entanto, servir-nos dêste método, porque, como o leitor não deixará de notar, êle permite-nos fazer algumas observações interessantes.

zeros b_n de $f'(z)$, estudando, para isso, a distribuição dos zeros das derivadas $f_m'(z)$.

Em primeiro logar, como todas estas funções contêm o factor z^p, $f'(z)$ admite a origem das coordenadas como zero de ordem p. Por outro lado, ou êste zero existe num dos intervalos formados pelos zeros consecutivos de $f(z)$, ou lhes é exterior. No primeiro caso, se m é suficientemente grande, dos $n-1$ intervalos de $f_m(z)$ (¹) só um conterá a origem, devendo, portanto, nos restantes, existir um mínimo de $m-2$ zeros de $f_m'(z)$; como esta função apenas admite $m+p-1$ zeros, p dos quais coincidem na origem, segue-se que só falta precisar a posição de um deles. Ora, se p é par, êsse zero deverá encontrar-se no intervalo da origem, porque, pelo teorema de ROLLE, $f_m'(z)$ deve aí mudar de sinal um número impar de vezes; se p é impar, ainda pelo mesmo teorema, deverá êsse zero permanecer exterior aos intervalos de $f_m(z)$. Logo, *nêste primeiro caso, se excetuarmos o intervalo da origem,* podemos dizer que *entre dois zeros consecutivos de* f(z) *existe apenas um zero da sua derivada; no intervalo excluido, além do zero de ordem* p *na origem,* f'(z) *admite, quando* p *seja par, um outro zero simples.*

Se, porêm, os zeros de $f(z)$ forem todos do mesmo sinal, como p zeros de $f_m'(z)$ se encontram reunidos na origem e os $m-1$ restantes distribuidos pelos $m-1$ intervalos de $f_m(z)$, (um em cada), nós podemos concluir, afirmando que *em cada intervalo de* f(z) *há apenas um zero da sua derivada e que esta função se anula na origem, onde tem um zero de ordem* p.

Êste resultado permite-nos afirmar que o produto infinito que figura na expressão de $f'(z)$ é canónico e de género p. É, efectivamente, o que se verifica, notando que a conver-

(¹) Para abreviar, empregamcs, da uma maneira geral, a expressão «intervalos de $\varphi(z)$» por «intervalos formados por zeros consecutivos de $\varphi(z)$». Com o mesmo intuito, supomos também que $f(z)$ só tem zeros simples.

gência da série

$$(7) \qquad \sum_{p+1}^{m} \left| \frac{1}{b_n} \right|^{p+1}$$

é uma conseqüência imediata das últimas conclusões. Logo, se $S(z)$ representa uma função destituida de singularidades a distância finita e $\varphi(z)$ designa o produto canónico correspondente à série (7), a expressão da derivada $f'(z)$ terá a fórma

$$z^p e^{S(z)} \varphi(z).$$

20. Á derivada da função rial de género p

$$F(z) = e^{cz^p} f(z)$$

podem estender-se alguns dos resultados anteriores. Assim, se c é uma constante positiva, $F'(z)$ não tem raízes imaginárias; se c é menor do que zero e p é impar, a conclusão é ainda verdadeira. Efectivamente, a equação de condição da existência de raízes imaginárias é agora

$$p c z^{p-1} + \sum_{1}^{m} \left(\frac{z}{a_n}\right)^p \frac{1}{z - a_n} = 0$$

ou

$$p c + \sum_{1}^{m} \frac{x(x-a_n)+y^2}{a_n^p\left[(x-a_n)^2+y^2\right]} - i y \sum_{1}^{m} \frac{1}{a_n^{p-1}\left[(x-a_n)^2+y^2\right]} = 0,$$

e esta equação exige $y = 0$, qualquer que seja o sinal de c, se p é impar; se p é par, escrevendo a equação de condição sob a fórma

$$\frac{p c(x - i y)}{x^2+y^2} + \sum_{1}^{m} \frac{x - a_n - i y}{a_n^p\left[(x-a_n)^2+y^2\right]} = 0,$$

vê-se que ela não pode sêr satisfeita, se c é positivo, por $y \neq 0$.

Não será talvez inútil observar que $F'(z)$ admite um zero de ordem $p-1$ na origem das coordenadas. Com respeito aos restantes zeros, fácilmente se reconhece que, a não ser no caso de excepção a que vamos já referir-nos, é aqui integralmente aplicável o que ficou anteriormente dito a propósito dos produtos canónicos. O caso de excepção apresenta-se nos quando a origem se encontra num dos intervalos de $F(z)$ e p é um número par. Não é possível, nêste caso, precisar, de uma maneira geral, qual a posição de dois zeros de $F'(z)$ (1).

21. Com a proposição geral de que nos temos ocupado nêste capítulo, ficam generalizadas aos produtos canónicos de factores riais e género finito algumas propriedades estabelecidas para os polinómios de raízes riais. Não é provável que o futuro nos reserve, sob êste ponto de vista, resultados muito mais completos e gerais, porque sam, de facto, os produtos canónicos e não as transcendentes de género finito as funções que, pela sua constituição intrínseca, mais se aproximam dos polinómios. Tendo já demonstrado que a realidade dos zeros de um produto canónico importa a realidade dos zeros da sua derivada e tendo verificado que, salvo um caso de excepção, êsses zeros se separam mutuamente, poucas seram as proposições da teoria dos polinómios que lograram ainda sêr estendidas às funções inteiras, enquanto nos conservarmos no domínio arbitrário das transcendentes de género finito.

Restringindo, porêm, a determinados valôres de p as nossas investigações, é possível alargar certos resultados.

Assim, já tivemos ocasião de dizer que *a derivada de uma função rial de género um* (2), *desprovida de zeros imaginários, tem todas as suas raízes riais;* sôbre a distribuição dêstes números, observaremos que, sem excepção alguma, *entre*

(1) Para um estudo mais completo desta função, veja-se a Nota I, no fim do livro.

(2) É um caso particular do exemplo tratado no número anterior.

dois zeros de F(z) *há apenas um da sua derivada e que esta função não se anula na origem.*

A série

$$\sum \frac{1}{b_n^2}$$

onde b_n é o zero de ordem n de $F'(z)$, é, nêste caso, sem restrições, convergente, de modo que o quociente de $F'(z)$ por

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) e^{\frac{z}{b_n}}$$

é, necessáriamente, uma função exponencial. Adiante mostraremos que ela é da fórma

$$e^{\alpha z + \beta},$$

onde α e β designam constantes riais.

Por conseguinte, como a derivada de uma função rial de género um e zeros riais é ainda uma função que gosa de todas estas propriedades, podemos estender à derivada de ordem n os resultados que acabamos de registar. LAGUERRE obteve, tirando partido desta possibilidade, alguns resultados muito interessantes. Um deles, correspondente da proposição algébrica relativa às lacunas dos polinómios, é deduzido da formula

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = -\sum_1^\infty \left(\frac{1}{z - a_n}\right)^2,$$

demonstrada na hipótese $z \neq a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ela permite escrever, para êsses valores de z,

$$F(z)\,F''(z) - F'^2(z) < 0 \tag{8}$$

e é claro que esta desigualdade subsiste quando se consideram os valores excluidos. Ora, substituindo, como é permitido, em (8), $F(z)$ e as suas derivadas por $F_{(z)}^{(n-1)}$, $F_{(z)}^{(n)}$ e $F_{(z)}^{(n+1)}$

e pondo depois $z=0$, vem, na hipótese

$$F(z)=A_0+A_1 z+\ldots+A_n z^n+\ldots,$$

a desigualdade

$$(n+1) A_{n+1} A_{n-1}-n A_n^2<0,$$

donde se deduz, fazendo $A_n=0$,

$$A_{n+1} A_{n-1}<0.$$

Êste resultado corresponde rialmente à proposição algébrica a que nos referimos, porque mostra que *a existência de uma lacuna no desenvolvimento em série de uma função rial de género um só é possível entre dois termos de sinais contrários.*

Verificando-se fácilmente que, sob as condições indicadas, esta conclusão é aplicável às funções de género zero (que sam produtos canónicos), podemos então dizer:

Se houver uma lacuna entre dois termos do mesmo sinal no desenvolvimento em série de uma função rial F(z) *de género zero ou um, a equação*

$$F(z)=0$$

admite necessáriamente raizes imaginárias.

22. Para terminar êste breve estudo sôbre os produtos canónicos, vamos mostrar que a essas funções, quer riais, quer não, é aplicável a doutrina do n.º 11, sempre que nos limitemos a considerar uma região, onde o módulo da variável não possa exceder um positivo R, de resto, arbitrário.

Para o provar, faremos vêr que, representando por $u_n(z)$ o termo geral do produto canónico que se considera, as séries dos módulos das derivadas $u_n(z)$, $u_n'(z)$, ... $u_n^{(k)}(z)$, onde k é um inteiro fixo, mas absolutamente qualquer, convergem uniformemente, não excedendo a soma da última, para os valores de z indicados, um determinado número positivo.

Como a expressão de $u_n^{(k)}(z)$ é dada pela formula simbólica

$$u_n^{(k)}(z) = -\frac{1}{a_n^{p+1}}\left(z^p + e^{A_n}\right)^{(k-1)}, \quad A_n = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p,$$

bastará mostrar que o módulo de qualquer derivada de $z^p e^{A_n}$ não excede um certo número M, desde que a sua ordem não exceda k, pois que isso nos permitirá escrever

$$(1) \qquad |u_n^{(k)}(z)| < \frac{k}{|a_n|^p} M^2 K!,$$

visto os coeficientes do desenvolvimento de Leibnitz sêrem todos inferiores a $k!$

Ora, pelo que respeita a z^p, é evidente que o módulo de qualquer das suas derivadas não ultrapassa $p!\,R^p$; quanto à exponencial e^{A_n}, como da sua derivada de ordem i se deduz, pela mudança de a_n em a_1, a derivada da mesma ordem de e^{A_1}, o módulo da primeira destas derivadas será, para todos os valores de z e qualquer que seja n, inferior ao resultado que se obtem substituindo, na última, $\frac{z}{a_1}$ por $\left|\frac{z}{a_1}\right|$; e, por outro lado, como êste resultado representa a derivada de ordem i da exponencial

$$e^{\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x^p}{p}}, \quad \left(0 \overline{<} x = \left|\frac{R}{a_1}\right|\right),$$

concluimos que, supondo k fixo, se representarmos por H um número superior aos máximos desta função e das suas $k-1$ primeiras derivadas, êsse número limitará também superiormente o módulo de e^{A_n} e das suas $k-1$ primeiras derivadas. Logo, desde que M exceda o maior dos números $p!\,R^p$ e H, tem logar a formula (1), dela decorrendo imediatamente não só a existência de um número superior à soma da última das séries consideradas, mas ainda a convergência de todas essas séries, sendo-nos assim permitido escrever

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n=\infty} P_n^{(k)}(z),$$

onde P_n é o produto dos n primeiros factores do produto canónico de género p representado por $f(z)$.

II

As funções de género finito

23. Depois da descoberta do teorema fundamental do WEIRSTRASS, o professor EDMOND LAGUERRE estabeleceu algumas proposições importantes relativas às funções inteiras, procurando pôr em evidência o parentesco existênte entre estas funções e os polinómios. Conseguiu, rialmente, obter resultados muito completos e valiosos, quando, de um modo especial, se aplicou ao estudo das funções de género inferior a *dois* mas não logrou estender para àlêm desse limite algumas das mais importantes proposições da teoria dos polinómios.

Deixou-nos, em todo o caso, uma proposição valiosissima, relativa ao máximo do número de zeros imaginários que póde admitir a derivada de uma função rial, sob certas condições que abaixo indicaremos. Vamos terminar êste capítulo, demonstrando êsse importante teorema, em cujo estabelecimento aproveitaremos alguns dos anteriores resultados, afim de tornar mais breve e rigorosa a sua exposição e evitar inteiramente os raciocínios obscuros de que se serve o sr. EMILE BOREL ao estudar o mesmo assunto no seu já citado livro.

Consideremos, para isso, a função

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right) + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p},$$

onde $Q(z)$ é um polinómio rial de grau não superior a p e os números a_n, com excepção dos q primeiros, que supomos complexos conjugados, sam números riais nas condições anteriormente indicadas.

Designando por $\varphi_m(z)$ o produto

$$\varphi_m(z) = e^{Q_m(z)} P_m(z),$$

onde se pôs

$$Q_m(z) = Q(z) + \sum_1^m \left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p\right]$$

e

$$P_m(z) = \prod_1^m \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

a função rial

$$\varphi_m'(z) = e^{Q_m(z)} [Q_m'(z) P_m(z) + P_m'(z)]$$

não poderá têr mais do que $p+q$ zeros, riais ou imaginários, àlêm daqueles que sam estritamente necessários para a separação das raízes de $\varphi_m(z) = 0$, porque $p+q$ é, precisamente, o maior excesso possível do grau do polinómio entre colchetes sôbre o número $m-q-1$ dos intervalos dos zeros riais de $\varphi_m(z)$. Se considerarmos uma região limitada por um contorno fechado, sôbre o qual $f'(z)$ se não anule, esta função e a derivada $\varphi_m'(z)$ anular-se ham aí um mesmo número de vezes, visto os zeros de $f'(z)$ serem pontos limites dos de $\varphi_m'(z)$, como já tivemos ocasião de dizer. Logo, *se tirarmos a cada intervalo de* f(z) *uma raiz da equação derivada, esta equação poderá ainda admitir, nêsses intervalos ou fóra dêles, o número máximo de* p + q *raízes riais ou imaginárias.*

Como êstes $p+q$ zeros não possuem nenhumas caraterísticas especiais, não sabemos qual seja a posição do zero b_k de $f'(z)$, a não ser para valores particulares de k, necessáriamente em número limitado, quando se considerem tipos especiais de funções.

Contentemo-nos com o registar que, à excepção de um número limitado, os zeros de $f'(z)$ se encontram nos intervalos a que nos temos referido, um em cada, porque desse facto decorre a convergência da série

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{b_n}\right|^p,$$

onde b_n representa a raiz de índice n de $f'(z)=0$, depois de excluidas as raízes nulas desta equação. É sôbre esta convergência que repousa o cálculo que vamos desenvolver, para determinar o género de $f'(z)$.

Para isso, mostraremos que o quociente

$$\frac{f'(z)}{g(z)},$$

onde

$$g(z)=z^\omega\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{b_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{b_n}\right)^p},$$

representando ω o grau de multiplicidade do zero que $f'(z)$ tem na origem, é uma expressão da fórma

$$e^{R(z)},\quad R(z)=c_0z^p+c_1z^{p-1}+\ldots+c_p.$$

Para simplificar a demonstração, que ficará ainda bastante longa, suporemos $\omega=0$. O leitor verá fácilmente quais as modificações que a hipótese contrária nos imporia.

Isto pôsto, designemos por

(1) $$b_{\alpha_1},\quad b_{\alpha_2},\quad\ldots\quad b_{\alpha_n},\quad\ldots$$

e

(2) $$\beta_{\alpha_1},\quad \beta_{\alpha_2},\quad\ldots\quad \beta_{\alpha_i}$$

os zeros positivos de $g(z)$ e de

$$\gamma_{m+p-1}(z)=\prod_{1}^{m+p-1}\left(1-\frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right)e^{\frac{z}{\beta_n^{(m)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right)^p},$$

onde

$$(3)\qquad \beta_1^{(m)},\ \beta_2^{(m)},\ \ldots\ \beta_{m+p-1}^{(m)}$$

sam os zeros de $\varphi_m'(z)$. Em (1), supõem-se os números escritos pela ordem crescente dos seus valores; em (2), a posição dos β é definida pela igualdade

$$\lim_{m=\infty}\beta_{\alpha_k}^{(m)}=b_{\alpha_k}\,.$$

Consideremos a região $|z|<R$. Dado o positivo δ, designemos por k_1 um número tal que seja

$$0<\frac{\left|\frac{R}{b_{k_1}}\right|}{1-\left|\frac{R}{b_{k_1}}\right|}<\delta$$

e representemos por k_2 um inteiro definido pela condição de serem riais e se separarem mutuamente os zeros de $f(z)$ e $f'(z)$, cujo índice seja superior a k_2; k designa um número superior a k_1 e k_2. Mostremos, em primeiro logar, que a diferença

$$g_{1,\,m+p-1}(z)-\gamma_{1,\,m+p-1}(z)=$$

$$=\prod_{1}^{m+p-1}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{\frac{z}{b_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{b_n}\right)^p}-$$

$$-\prod_{1}^{m+p-1}\left(1-\frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right)e^{\frac{z}{\beta_n^{(m)}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right)+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right)^p},$$

que podemos escrever sob a forma

$$\left(g_{1,k}(z)-\gamma_{1,k}(z)\right) g_{k+1,\,m+p-1}(z)+$$

$$+\gamma_{1,k}(z)\left(g_{k+1,\,m+p-1}(z)-\gamma_{k+1,\,m+p-1}(z)\right),$$

tende para zero, quando m aumenta indefinidamente.

Consideremos a primeira parcela, cujo segundo factor é evidentemente limitado por um certo número M. Atendendo a que, na região que se considera, o módulo de z não pode exceder R e ao facto de cada um dos k factores de $\gamma_{1,k}(z)$ tender, quando m aumenta, para um dos factores de $g_{1,k}(z)$, podemos concluir que, para valores suficientemente grandes de m, será

$$\left|\left(g_{1,k}(z)-\gamma_{1,k}(z)\right) g_{k+1,\,m+p-1}(z)\right|<\delta.$$

Pelo que respeita à segunda, notemos, antes de mais nada, que, pelas anteriores razões, o módulo do seu primeiro factor é limitado; para obtermos um limite superior do segundo, consideremos a expressão

$$\log g_{k+1,\,m+p-1}(z)-\log \gamma_{k+1,\,m+p-1}(z),$$

que escreveremos debaixo da forma

$$\left(\log g'_{k+1,\,m+p-1}(z)-\log \gamma'_{k+1,\,m+p-1}(z)\right)+$$

$$+\left(\log g''_{k+1,\,m+p-1}(z)-\log \gamma''_{k+1,\,m+p-1}(z)\right),$$

separando os factores correspondentes aos zeros positivos e negativos.

A primeira parcela (relativa aos zeros positivos), desenvolvendo os logaritmos que nela figuram, o que é sempre possível visto ser $|z|<|b_k|$, conduz à desigualdade

$$\left|\log g'_{k+1,\,m+p-1}(z)-\log\gamma'_{k+1,\,m+p-1}(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{i=h}^{i=l}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{z}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+2}+\dots\right]\right.$$

$$\left.-\sum_{i=h}^{i=l}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+1}+\frac{1}{p+2}\left(\frac{z}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+2}+\dots\right]\right|$$

$$=\left|\frac{z^{p+1}}{p+1}\sum_{i=h}^{i=l}\left[\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+1}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{z^{p+2}}{p+2}\sum_{i=h}^{i=l}\left[\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+2}-\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+2}\right]+\dots\right|$$

$$\overline{<}\frac{R^{p+1}}{p+1}\sum_{i=h}^{i=l}\left|\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+1}\right|$$

$$+\frac{R^{p+2}}{p+2}\sum_{i=h}^{i=l}\left|\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+2}-\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+2}\right|+\dots,$$

onde α_h e α_l sám o menor e o maior dos índices dos zeros que figuram em $g'_{k+1,\,m+p-1}(z)$. Mas o termo geral do primeiro somatório do segundo membro, isto é; a expressão

$$\left|\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+1}\right|,$$

é igual a

$$\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+1}$$

ou a

$$\left(\frac{1}{\beta^{(m)}_{\alpha_i}}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1},$$

consoante seja $b_{\alpha_i} \lesseqgtr \beta_{\alpha_i}^{(m)}$, e, conseguintemente, inferior a

$$\left(\frac{1}{a_{\alpha_r}}\right)^{p+1} - \left(\frac{1}{a_{\alpha_{r+1}}}\right)^{p+1},$$

onde a_{α_r} e $a_{\alpha_{r+1}}$ sám os dois zeros consecutivos de $f(z)$ entre os quais se encontra b_{α_i}; logo, será

$$\sum_{i=h}^{i=l} \left| \left(\frac{1}{b_{\alpha_i}}\right)^{p+1} - \left(\frac{1}{\beta_{\alpha_i}^{(m)}}\right)^{p+1} \right| < \sum_{r=q}^{r=l+h-q+1} \left[\left(\frac{1}{a_r}\right)^{p+1} - \left(\frac{1}{a_{r+1}}\right)^{p+1} \right]$$

$$< \left(\frac{1}{a_{\alpha_q}}\right)^{p+1} < \left|\frac{1}{b_k}\right|^{p+1},$$

donde se deduz

$$|\log g'_{k+1,m+p-1}(z) - \log \gamma'_{k+1,m+p-1}(z)|$$

$$< \sum_{n=p+1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left|\frac{\mathrm{R}}{b_k}\right|^n < \frac{\left|\frac{\mathrm{R}}{b_k}\right|}{1 - \left|\frac{\mathrm{R}}{b_k}\right|} < \delta.$$

Demonstrando, por meio de um calculo análogo, a desigualdade

$$|\log g'_{k+1,m+p-1}(z) - \log \gamma''_{k+1,m+p-1}(z)| < \delta,$$

relativa aos zeros negativos, obtemos, qualquer que seja $|z| < \mathrm{R}$,

$$|g_{1,m+p-1}(z) - \gamma_{1,m+p-1}(z)| < \mathrm{M}\delta + \mathrm{N}\delta = \delta'$$

e, consequentemente,

$$|g(z) - \gamma_{1,m+p-1}(z)| \leqq \delta'$$

ou ainda

$$\lim_{m=\infty} \gamma_{1,m+p-1}(z) = g(z).$$

Terminados êstes cálculos auxíliares, é agora fácil demonstrar a formula

$$f'(z) = e^{R(z)}\, g(z).$$

Efectivamente, escrevendo $\gamma_{1,\,m+p-1}(z)$ sob a forma

$$e^{R_m(z)} \prod_{1}^{m+p-1} \left(1 - \frac{z}{\beta_n^{(m)}}\right),$$

teremos

$$\frac{f'(z)}{g(z)} = \lim_{m=\infty} \frac{\varphi'_m(z)}{\gamma_{1,\,m+p-1}(z)} \lim_{m=\infty} e^{Q_m(z) - R_m(z)},$$

e, como $Q_m(z)$ e $R_m(z)$ sám polinómios de grau não superior a p, concluimos que será

$$\lim_{m=\infty} e^{Q_m(z) - R_m(z)} = e^{c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \ldots + c_p}.$$

Logo, a derivada de uma função rial de género p, *que apenas admita um número finito de zeros imaginários, é ainda uma função de género* p; *esta conclusão é extensiva à derivada de qualquer ordem de uma função nas condições precedentes.*

Fica assim completamente estabelecida a proposição fundamental de Laguerre. Sendo, como já dissemos, mais geral do que aquela que deixámos atraz demonstrada, não é, contudo, tam completa como ela. É, efectivamente, o que se reconhece, quando se faz a sua aplicação aos produtos canónicos de género p destituidos de zeros imaginários. Pelo teorema de Laguerre, ficariamos sabendo que a derivada dessa função não pode ter mais do que p raizes complexas, enquanto a nossa proposição ensina que todos êsses números sám riais. A mesma observação a propósito das funções especiais, a que já tivemos ocasião de nos referir.

CAPÍTULO III

O módulo das funções de ordem ρ

I

O módulo máximo das funções de género finito

24. No Capítulo I, quando se tratou da exposição do teorema de WEIRSTRASS, dissemos que se dava o nome de *expoente de convergência da sucessão*

$$|a_1|, |a_2|, \dots |a_n|, \dots$$

dos módulos dos zeros de uma função inteira ao limite superior ρ *dos números* α *que tornam divergente a série*

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{a_n} \right|^\alpha; \tag{1}$$

é a êsse mesmo número que se dá também o nome de ordem da função de género p

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}.$$

Se a série (1) fôr convergênte para $\alpha = \rho$, ρ será a *ordem por excesso;* no caso contrário, êsse número tem o nome de *ordem por diferença* (¹).

(¹) A noção de *ordem* foi introduzida pelo sr. ÉMILE BOREL.

No primeiro caso, ρ, se é inteiro, coïncide com $p+1$. — O ponto de partida dos trabalhos sôbre as funções de ordem ρ encontra-se em duas memórias de POINCARÉ publicadas em 1883 (1). Na primeira, aquêle ilustre geometra mostra, representando por r o módulo de z, que se pode sempre escrever

$$(a) \qquad |f(z)| < e^{\alpha r^{p+1}}, \quad r > r_1$$

onde α é um positivo qualquer, prèviamente dado.

Algum tempo depois, o sr. ÉMILE BOREL obteve uma mais estreita desigualdade, mostrando que se tinha

$$(b) \qquad |f(z)| < e^{\alpha r^{\rho}} \quad r > r_\alpha$$

ou

$$(c) \qquad |f(z)| < e^{\alpha r^{\rho+\varepsilon'}}, \quad r > r_{\alpha, \varepsilon'}$$

consoante ρ designasse a ordem por excesso ou por diferença da função $f(z)$; ε' é um positivo qualquer. É, como se vê, uma limitação mais satisfatória, visto que, em regra, ρ é inferior a $p+1$.

Na segunda das referidas memórias, POINCARÉ demonstra a igualdade

$$(d) \qquad \lim_{m=\infty} A_m \Gamma\left(\frac{m+h+1}{p+1}\right) = 0,$$

onde A_m é o coeficiente de z^m no desenvolvimento de $f(z)$ em série, h representa um positivo arbitrário e $\Gamma(a)$ é o conhecido integral

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{a-1} e^{-x} dx.$$

(1) Já em 1882 POINCARÉ anunciára os seus resultados. Veja *Comp. Rend.*

Vamos fazer o estudo metódico dessas três proposições, começando por estabelecer uma importante desigualdade, a que, por vezes, teremos de recorrer.

25. Dado um factor primário de género p e um número ε definido pelas condições

$$0 \overline{<} \varepsilon \overline{<} 1,$$

é sempre possivel determinar um número C_ε, tal que, para todos os valores de z, seja

$$|P_p(z)| = \left|(1-z)\, e^{\frac{z}{1}+\cdots+\frac{z^p}{p}}\right| < e^{C_\varepsilon r^{p+\varepsilon}}.$$

Efectivamente, se $|z| = r \overline{>} 1$, teremos, designando por K a soma

$$2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p},$$

$$|P_p(z)| < |1-z|\, e^{\frac{r}{1}+\frac{r^2}{2}+\cdots+\frac{r^p}{p}} < e^{2r+\frac{r^2}{2}+\cdots+\frac{r^p}{p}} < e^{kr^p} < e^{kr^{p+\varepsilon}};$$

se $\frac{1}{2} \overline{<} r \overline{<} 1$, será

$$|P_p(z)| < e^k < e^{k_1 r^{p+\varepsilon}},$$

onde k_1 é determinado pela condição $k_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{p+\varepsilon} \overline{>} k$; se, finalmente, $r < \frac{1}{2}$, escreveremos

$$(1-z)\, e^{\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}} = e^{-\frac{z^{p+1}}{p+1}-\frac{z^{p+2}}{p+2}-\cdots},$$

donde

$$|P_p(z)| < e^{2r^{p+1}} < e^{2r^{p+\varepsilon}}.$$

Conseguintemente, representando por C_ε o maior dos números 2, k_1 e k, virá

$$(2) \qquad |P_p(z)| < e^{C_\varepsilon r^{p+\varepsilon}}.$$

27. Isto posto, decompondo nas duas funções

$$f_1(z) = e^{Q(z)} \prod_1^h \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

e

$$f_2(z) = \prod_{h+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

o produto infinito $f(z)$, facilmente estabeleceremos a primeira das fórmulas de POINCARÉ. Efectivamente, supondo h definido pela condição

$$C_1 \sum_{h+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1} < \frac{\alpha}{2},$$

poderemos escrever, em virtude de (2),

$$|f_1(z)| < e^{|Q(z)| + hC_n \left|\frac{z}{a_1}\right|^p},$$

donde se deduz, visto o gráu de $Q(z)$ não exceder p,

$$(3) \qquad |f_1(z)| < e^{\frac{\alpha}{2} r^{p+1}}; \qquad r > r_1$$

e, considerando o segundo factor,

$$(4) \qquad |f_2(z)| < \prod_{h+1}^{\infty} e^{C_1 \left|\frac{z}{n}\right|^{p+1}} = e^{r^{p+1} C_1 \sum\limits_{h+1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1}} < e^{\frac{\alpha}{2} r^{p+1}}.$$

Combinando, agora, os resultados (3) e (4), obtemos, finalmente, a referida fórmula

$$\underset{r>r_1}{|f(z)|<e^{\alpha r^{p+1}}}.$$

Ela exprime que o módulo de $f(z)$ (e, em particular, o módulo máximo) é, para valores de r suficientemente grandes, inferior ao valor da função $e^{\alpha r^{p+1}}$. Designando, segundo o uso corrente, por $\mathrm{M}(r)$ o módulo máximo de $f(z)$ para $|z|=r$, virá

$$(e) \qquad \underset{r>r_1}{\mathrm{M}(r)<e^{\alpha r^{p+1}}}.$$

A função positiva e crescente M (r) *é menor ou menos crescente que* $e^{\alpha r^{p+1}}$.

A desigualdade (2) permite, sem novos cálculos, obter os resultados do sr. ÉMILE BOREL. Bastaria, para isso, substituir, em (2), ε por $\rho-p$ ou $\rho+\varepsilon'-p$ [1], consoante ρ designe a ordem de $f(z)$ por excesso ou por diferença, e executar as conseqüêntes alterações nas fórmulas (3) e (4) e na desigualdade determinante de h. A formula resultante

$$(f) \qquad \mathrm{M}(r)<e^{\alpha r^{\rho+\varepsilon'}}$$

exprime que M (r) *é menos crescente que* $e^{\alpha r^{\rho+\varepsilon'}}$ *ou tem uma ordem de grandeza inferior à de* $e^{\alpha r^{\rho+\varepsilon'}}$, *por mais pequeno que seja o positivo* ε' [2].

27. Uma vez estabelecidas as desigualdades (a) e (f), é natural investigar quais os resultados que delas se deduzem

---

(1) É evidente que bastará considerar os valores de ε' para os quais é: $\rho+\varepsilon'-p\overline{<}1$.

(2) Como ε' é arbitrário, suporemos sempre $\alpha=1$.

com respeito aos coeficientes do desenvolvimento de $f(z)$ em série.

A formula clássica

$$|A_n| < \frac{M(r)}{r^n}$$

transforma-se imediatamente em

$$|A_n| < \frac{e^{\alpha r^{p+1}}}{r^n},$$

se nos servirmos da desigualdade de Poincaré. Êste resultado não satisfez, porém, o eminente geometra, que, servindo-se de considerações que seguidamente exporemos, demonstrou a formula (d)

$$\lim_{m=\infty} A_n \Gamma\left(\frac{n+h+1}{p+1}\right) = 0,$$

onde h é um positivo arbitrário e p o género de $f(z)$.

Sejam x, α e β três positivos, o primeiro dos quais variável e o último inferior à unidade. Comecemos por demonstrar que atribuindo a z um valor fixo, mas absolutamente qualquer, é sempre possível determinar x de maneira que o módulo da função

$$f(xz) = A_0 + A_1 xz + \ldots + A_n x^n z^n + \ldots$$

seja inferior a $e^{\beta x^{p+1}}$.

Efectivamente, como o módulo da função proposta é inferior a $e^{\alpha x^{p+1}|z|^{p+1}}$, desde que $x|z|$ exceda uma certa quantidade, e como z é fixo, poderemos determinar α de modo que o produto $\alpha|z|^{p+1}$ seja inferior a β, o que nos permitirá escrever

$$|f(xz)| < e^{\beta x^{p+1}}.$$

$$x > x_1$$

Isto pôsto, atendendo a que, para êstes valores de x, o módulo da função de variável rial

$$e^{-x^{p+1}} f(xz)\, x^h$$

é inferior a

$$e^{(\beta-1)x^{p+1}} x^h = e^{-\gamma x^{p+1}} x^h, \quad \gamma > 0,$$

existirá, qualquer que seja z, o integral

$$\mathrm{I}(z) = (p+1)\int_0^\infty e^{-x^{p+1}} f(xz)\, x^h\, dx,$$

que representa uma função inteira em z. Conseguintemente, o coeficiente

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n (p+1)\int_0^\infty e^{-x^{p+1}} x^{n+h}\, dx = \mathrm{A}_n \Gamma\left(\frac{n+h+1}{p+1}\right)$$

de z^n no desenvolvimento em série de $\mathrm{I}(z)$ deve satisfazer à condição

(5) $$\lim_{n=\infty} \mathrm{B}_n = \lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n \Gamma\left(\frac{n+h+1}{p+1}\right) = 0,$$

que traduz o segundo dos importantes resultados de POINCARÉ.

Na sua já citada memória, êste eminente geometra apresenta a desigualdade (5) sob uma forma altamente sugestiva. Por meio de um calculo elementar que a seguir exporemos, o sr. ÉMILE BOREL conseguiu obter êsse mesmo resultado.

Começa o ilustre professor por estabelecer a desigualdade

$$(ma)! = 1 \,.\, 2 \ldots a(a+1) \ldots ma < a^a (2a)^a \ldots (ma)^a,$$

onde a e m sam inteiros positivos, donde deduz

$$[(ma)!]^{\frac{1}{a}} < a^m m!$$

e, supondo $x > m+1$,

$$[(ma)!]^{\frac{1}{a}} < a^m \Gamma(x+1).$$

Logo, se $(m-1)a$ é o maior múltiplo de a contido em n, teremos, com mais forte razão,

$$(n!)^{\frac{1}{a}} < a^n \Gamma(x+1).$$

Findos êstes calculos preliminares, tendo observado que, por sêr $f(az)$ de género p, o produto

$$a^n A_n \Gamma\left(\frac{n+h+1}{p+1}\right) \tag{6}$$

deve tender, com $\frac{1}{n}$, para zero e que, fazendo, em (6), $a=p+1$ e $h=2p+1$, se tem

$$a^n A_n \Gamma\left(\frac{n+a}{a}+1\right) > a^n A_n \Gamma(x+1) > A_n (n!)^{\frac{1}{p+1}},$$

o autor conclue, escrevendo

$$\lim_{n=\infty} A_n (n!)^{\frac{1}{p+1}} = 0$$

ou, supondo $n > n_1$,

$$|A_n| < \frac{1}{\sqrt[p+1]{n!}}$$

Esta formula importante põe bem em evidência a relação existente entre o género de uma função inteira e a ordem de grandeza dos seus coeficientes.

II

O módulo mínimo das funções de género finito

28. Na segunda parte dêste Capítulo, vamos ver como se poderá completar o estudo que acabamos de fazer sôbre o módulo das funções de género finito, determinando um limite inferior do módulo mínimo de um produto canónico $f(z)$ de género p e ordem ρ. Como uma função desta natureza admite zeros exteriores a qualquer círculo descrito da origem como centro, é manifesto que, para obtêr um limite positivo, se torna necessário isolar os seus zeros e considerar apenas a região do plano exterior a êsses domínios de excèção. Designando por σ um positivo que torne convergente a série

$$\Sigma\left|\frac{1}{a_n}\right|^\sigma, \tag{1}$$

consideraremos a região do plano exterior aos círculos de raio $\left|\frac{1}{a_n}\right|^\sigma$, descritos de a_n como centro ([1]). Nestas condições, será sempre

$$|z-a_n|>\left|\frac{1}{a_n}\right|^\sigma. \tag{2}$$

O teorema de Catalan ([2]) permite também escrever

$$\lim_{n=\infty}\frac{n}{|a_n|^\sigma}=0,$$

o que nos dá

$$|a_n|>n^{\frac{1}{\sigma}}.$$
$$n\gtreqless n_1$$

([1]) Supõe-se $\sigma \lesseqgtr p+1$.

([2]) Veja Introdução, n.º 2.

Suponhamos agora o módulo r de z suficientemente para que se tenha

$$2r > |a_{n_1}|$$

e seja m um inteiro definido pela condição

$$|a_m| \overline{<} 2r < |a_{m+1}|;$$

é evidente que será

$$(3) \qquad 2r > m^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Isto pôsto, decomponhamos nos dois produtos

$$f_1(z) = \prod_1^m \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

e

$$f_2(z) = \prod_{m+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p},$$

a função $f(z)$ protosta e determinemos um limite inferior do módulo do factor geral de $f_1(z)$:

$$\left|\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}\right|$$

$$> \left|\frac{z - a_n}{a_n}\right| \cdot \frac{1}{e^{\left|\frac{z}{a_n}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{z}{a_n}\right|^2 + \dots + \frac{1}{p}\left|\frac{z}{a_n}\right|^p}}$$

$$> \frac{1}{|a_n|^{\sigma+1}} e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^\sigma} > \frac{1}{(2r)^{\sigma+1}} e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^\sigma},$$

visto que, em virtude da formula (2) do n.º 25, $e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^\sigma}$ limita inferiormente o factor que contém a exponencial.

Logo, designando por c' o produto de c pela soma da série (1), virá, por (3),

$$|f_1(z)| > \frac{1}{(2r)^{m(\sigma+1)}} e^{-cr^{\sigma} \sum_1^m \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\sigma}} > e^{-m(\sigma+1)\log 2.r - c'r^{\sigma}}$$

$$> e^{-(\sigma+1)(2r)^{\sigma}\log 2r - c'r^{\sigma}}.$$

Para obter um limite inferior do módulo de $f_2(z)$, notemos que, por ser $\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$, $n \gtrless n_1$, virá

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

$$= e^{-\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1} - \frac{1}{p+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+2} \ldots},$$

donde se deduz

$$\left|\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}\right|$$

$$> e^{-\frac{1}{p+1}\frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p+1}}{1 - \left|\frac{z}{a_n}\right|}} > e^{-\frac{2}{p+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\sigma}}$$

e, conseguintemente,

$$|f_2(z)| > e^{-\frac{2}{p+1} r^{\sigma} \sum_{m-1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^{\sigma}} = e^{-c'' r}.$$

Logo, combinando estes dois resultados, virá a desigualdade

$$|f(z)| < e^{-r^{\sigma}[(\sigma+1)2^{\sigma}\log 2r + c' + c'']}$$

ou seja

$$|f(z)| < e^{-r^{\sigma+\varepsilon}}, \quad r > \mathrm{R},$$

visto que, se r é suficientemente grande, será, manifestamente,

$$(\sigma+1)\, 2^{\sigma} \log 2r + c' + c'' < r^{\varepsilon},$$

por mais pequeno que seja o positivo ε prèviamente dado.

Como ε é arbitrário e a série

$$\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\rho+\varepsilon'}$$

converge, qualquer que seja o positivo ε' (1), podemos escrever

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

$$r > \mathrm{R}_1.$$

A exponencial $e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$ limita, assim, inferiormente, o módulo de um produto de ordem ρ na região exterior a um círculo de raio suficientemente grande, quando dela se excluem os domínios de excèção correspondentes às desigualdades (2).

O sr. ÉMILE BOREL, interpretando sugestivamente êste resultado, diz que, na região mencionada, *o mínimo da função é da mesma ordem de grandeza que o inverso do seu máximo* (2).

---

(1) Se fôsse $\rho = p + 1$, fariamos $\sigma = \rho$.

(2) O resultado que acabamos de obter generalisa um pouco uma importante proposição devida ao sr. HADAMARD. A proposição descoberta por êste ilustre professor só permite obter o limite inferior indicado no texto, quando o ponto z seja interior a certas corôas circulares de raios indefinidamente crescentes. Para demonstrá-la, o sr. HADAMARD supõe, primeiro, que a ordem ρ de $f(z)$ é inferior à unidade; depois, apoiando-se sôbre uma proposição de LAGUERRE que adeante exporemos, consegue então o seu belo teorema geral.

29. Supondo descritos, da origem como centro, pares de círculos C_k e C_k' de raios $|a_k| - \left|\frac{1}{a_k}\right|^{\rho+\varepsilon'}$ e $|a_k| + \left|\frac{1}{a_k}\right|^{\rho+\varepsilon'}$ maiores do que R_1, essas linhas serám tangentes aos círculos de excèção relativos aos pontos a_k e intercètarám em $X'OX$ (eixo rial) segmentos cuja extensão total não poderá exceder a soma da série

$$(5) \qquad 4\sum_{k_1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\rho+\varepsilon'},$$

designando por k_1 o menor inteiro que satisfaz à condição

$$|a_k| + \left|\frac{1}{a_k}\right|^{\rho+\varepsilon'} > R_1;$$

conseguintemente, como esta soma se pode tornar menor do que qualquer quantidade dada, reconhece-se, sem dificuldade, a existência de uma infinidade de coroas circulares de raios indefinidamente crescentes, nas quais tem logar a desigualdade (4). Elas sam, inegavelmente, maiores do que as do teorema do sr. HADAMARD (1).

Se houvessemos de considerar simultâneamente s funções nas condições precedentes, do que fica exposto resulta também a existência de coroas circulares de raios indefinidamente crescentes, nas quais as s desigualdades respèctivas seriam conjuntamente verdadeiras.

---

(1) Veja *Leçons sur les fonctions entières*, BOREL. Convem não esquecer, no entanto, que estamos tirando uma consequência muito particular da nossa proposição.

III

Ordem real e ordem aparente

30. Para terminar, vamos expor um teorema devido aos srs. HADAMARD e ERIK SCHOU, que permite determinar um limite superior da ordem de uma função inteira, quando se conheça um limite superior do seu módulo máximo. É, como, se vê, a questão recíproca da que foi estudada no n.º 26 dêste Capítulo.

A mesma proposição dá-nos uma ideia, embora pouco rigorosa, da densidade dos zeros que a função proposta admite em qualquer região circular.

31. Designemos por $f(z)$ o produto de uma exponencial $e^{Q(z)}$ por um produto canónico de género finito. $Q(z)$ é um polinómio *sem termo independente* [1].

Representando por $P(z)$ o produto

$$P(z) = (a_1 - z)(a_2 - z) \dots (a_n - z),$$

o integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{zP(z)}\,dz,$$

tomado ao longo de um círculo C de centro na origem e raio $r = (1+\alpha)|a_n| > 2|a_n|$, será igual a

$$\frac{f(0)}{P(0)} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \dots a_n},$$

donde se conclue

$$\frac{1}{|a_n|^n} < \frac{1}{|a_1 \cdot a_2 \dots a_n|} < \frac{M(r)}{m(r)},$$

---

(1) É uma hipótese que em nada afécta à generalidade da proposição que se estuda.

onde $M(r)$ e $m(r)$ designam, respètivamente, os módulos máximo e mínimo de $f(z)$ e $P(z)$. Ora, como $m(r)$ é, manifestamente, superior a

$$(r-|a_n|)^n = \alpha^n |a_n|^n,$$

se supusermos

$$M(r) < e^{N(r)},$$

limitando assim o módulo máximo de $f(z)$, virá

$$\alpha^n < e^{N(r)}$$

ou

$$n \log \alpha < N(r),$$

e esta desigualdade determina bem um limite superior do número n de zeros que $f(z)$ admite dentro do círculo de raio $\frac{r}{(1+\alpha)}$.

O sr. Schou aplica, em seguida, êstes resultados a uma função $f(z)$, cujo módulo máximo satisfaz à desigualdade

$$M(r) < e^{A^{\mu}},$$

onde A é uma constante.

Neste caso, atendendo a que $r=(1+\alpha)|a_n|$, obtêm-se, sem dificuldade,

$$n \log \alpha < A (1+\alpha)^{\mu} |a_n|^{\mu},$$

donde se deduzem, sucessivamente, as desigualdades

$$|a_n| > A_1 n^{\frac{1}{\mu}}$$

e

$$\frac{1}{|a_n|^{\mu+\varepsilon}} < \frac{B}{n^{\frac{\mu+\varepsilon}{\mu}}}.$$

Esta última traduz um resultado particularmente importante. Ela mostra, com efeito, que a ordem do produto canónico que figura em $f(z)$ não pode exceder μ, visto que a série

$$\sum\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\mu+\varepsilon}$$

é convergente, qualquer que seja ε.

32. Introduzindo a noção de *ordem aparente,* devida ao sr. Borel, poderemos tirar proveitoso ensinamento dos resultados anteriores.

Ordem aparente de uma função inteira, cujo módulo máximo para $|z|=r$ se designa por $M(r)$, *é o limite inferior* σ' *do conjunto dos números* σ, *aos quais é possivel fazer corresponder um positivo* R *determinado pela condição de, para* $r>R$, *têr logar a desigualdade*

$$M(r)<e^{r^\sigma}.$$

Em virtude desta definição (¹), será sempre

$$M(r)<e^{r^{\sigma'+\varepsilon}} \tag{5}$$

por mais pequeno que seja o positivo ε, desde que r seja suficientemente grande. Se σ' faz parte do mencionado conjunto, têr-se há até

$$M(r)<e^{r^{\sigma'}}$$

para êsses valores de r.

Decorre também dessa definição que a desigualdade

$$M(r)>e^{r^{\sigma'-\varepsilon}} \tag{6}$$

(¹) Cf. Borel, *Fonctions entières*, pág. 74.

é verificada por uma infinidade de valores de r indefinidamente crescentes.

Como a formula (5) é verdadeira logo que seja $r > r_1$, é sempre possivel determinar uma constante A, de modo a conseguir que a desigualdade

$$M(r) < e^{Ar^{\sigma'+\varepsilon}}$$

tenha logar para todos os valores de r. Conseguintemente, *se* F(z) *é o produto de uma exponencial por um produto canónico, a ordem dêste produto é igual ou inferior à ordem aparente de* F(z).

Como corolário, resulta que *a ordem aparente do produto de uma exponencial da forma*

$$e^{Q(z)}, \quad Q(z) = c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \ldots + c_p,$$

por um produto canónico de ordem ρ *e gênero* p *é ainda* ρ.

33. Sôbre a ordem aparente das funções inteiras, demonstraremos algumas proposições importantes.

Em primeiro logar, a ordem aparente da exponencial

$$e^{Q(z)}$$

é igual ao gráu p do polinómio $Q(z)$. Efectivamente, se r é suficientemente grande, o módulo máximo desta exponencial não podera exceder

$$e^{cr^p},$$

onde c é uma constante positiva de fácil determinação, de modo que será sempre

$$(7) \qquad \max_{r > r_1} |e^{Q(z)}| < e^{r^{p+\varepsilon}}.$$

Por outro lado, atendendo a que, para $r > r_2$, o módulo máximo de

$$e^{c_0 z^p}$$

excede a exponencial

$$e^{r^{p-\varepsilon}},$$

teremos, em virtude de (7),

$$\max | e^{Q(z)} | = \max \left| \frac{e^{c_0 z^p}}{e^{-c_1 z^{p-1} - c_2 z^{p-2} - \ldots - c_p}} \right| > \frac{e^{r^{p-\varepsilon}}}{e^{r^{p-1+\varepsilon}}} > e^{r^{p-\varepsilon-\varepsilon'}}$$

desde que r seja suficientemente grande. Logo, para êsses valores de r, será

$$e^{r^{p-\varepsilon'}} < \max | e^{Q(z)} | < e^{r^{p+\varepsilon'}},$$

o que demonstra a proposição enunciada. A recíproca, quase evidente, não se demonstra, no entanto, com a mesma simplicidade.

Suponhamos que, para valores de r superiores a certo limite, tem logar a desigualdade

$$\max | e^{H(z)} | < e^{r^{\sigma'+\varepsilon}},$$

onde $H(z)$ é uma função inteira.

Pondo

$$z = r\, e^{i\theta}$$

e

$$H(z) = H_1(r, \theta) + i H_2(r, \theta),$$

esta desigualdade transforma-se em

$$\max e^{H_1(r,\theta)} < e^{r^{\sigma'+\varepsilon}},$$

que é equivalente a

$$\max H_1(r_1 \theta) < r^{\sigma'+\varepsilon}.$$

Êste resultado exprime que os valores positivos de $H_1(r_1 \theta)$ sam inferiores a $r^{\sigma'+\varepsilon}$.

Vamos vêr que, nestas condições, $H(z)$ se reduz a um simples polinómio.

Para isso, façamos

$$H(z) = \sum_0^{\infty} (a_n' + i\, a_n'')\, z^n.$$

Tendo notado que, nêste caso, $H_1(r, \theta)$ é dada pela igualdade

$$H_1(r, \theta) = \sum_0^{\infty} (a_n' \cos n\,\theta - a_n'' \operatorname{sen} n\,\theta)\, r^n,$$

se integrarmos entre *zero* e 2π a soma dos produtos de $H_1(r, \theta)$ por $\cos n\,\theta$ e $-i \operatorname{sen} n\,\theta$, obteremos a relação importante

$$\int_0^{2\pi} H_1(r, \theta)\, e^{-in\theta}\, d\,\theta = a_n'\, r^n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\,\theta\, d\,\theta + i\, a_n''\, r^n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 n\,\theta\, d\,\theta,$$

donde deduzimos, se $n > 0$,

$$r^n \pi\, | a_n | = \int_0^{2\pi} | H_1(r, \theta) |\, d\,\theta$$

e, se $n = 0$,

$$2\,\pi\, a_0' = \int_0^{2\pi} H_1(r, \theta)\, d\,\theta.$$

Somando, membro a membro, estas duas expressões, vem

$$r^n \pi\, | a_n | + 2\,\pi\, a_0' \overline{<} \int_0^{2\pi} [\, | H_1(r, \theta) | + H_1(r, \theta)]\, d\,\theta.$$

Logo, como a função a integrar é nula no caso em que $H_1(r, \theta)$ seja negativo, se designarmos por $K(r)$ o máximo dos valores positivos desta função ao longo do círculo $|Z| = r$, poderemos escrever

$$r^n \pi |a_n| + 2\pi a_0' \overline{<} 4\pi k(r)$$

e êste resultado, quando nele se introduza a hipótese

$$k(r) < r^{\sigma'+\varepsilon},$$

mostra imediatamente, por meio da desigualdade

$$|a_n| \overline{<} \frac{r^{\sigma'+\varepsilon}}{r^n} - \frac{2a_0'}{r^n},$$

que sam nulos todos os números a_n, $n > \sigma'$, reduzindo-se assim $H(z)$ a um polinómio de gráu não superior a σ' (1).

34. A ordem aparente do produto de uma exponencial da forma

$$e^{Q(z)}, \quad Q(z) = c_0 z^p + c_1 z^{p-1} + \ldots + c_p$$

por um produto canónico $f(z)$ de género p e ordem ρ já foi estudada no caso em que é $q \overline{<} p$. Se fôr $q > p$, será tambem $q \overline{>} \rho$, e, se se dá a igualdade, a proposição do n.º 32 mostra que a ordem aparente do produto coïncide com os números q e ρ. No caso em que seja $q > \rho$, essa ordem é q.

Efectivamente, pondo

$$F(z) = e^{Q(z)} f(z)$$

---

(1) A segunda parte desta demonstração é devida ao sr. Hadamard. Alterando convenientemente a exposição, poderiamos ter demonstrado também que $-H_1(r, \theta)$ toma valores positivos superiores a $r^{\sigma'+\varepsilon}$, qualquer que seja σ'. O mesmo se diz com respeito a $H_2(r, \theta)$.

e designando por $M(r)$ o módulo máximo de $F(z)$, terá logar a desigualdade

$$M(r) < e^{r^{q+\varepsilon}} \times e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

que mostra que a ordem aparente de $F(z)$ não pode exceder q; mas, por outro lado, o teorema do sr. Hadamard permite escrever, para uma infinidade de valores de r indefinidamente crescentes,

$$M(r) > e^{r^{q-\varepsilon}} \times e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

e êste resultado, junto ao precedente, mostra que $F(z)$ é, de facto, de ordem aparente q.

Logo, em todos os casos, a ordem aparente de $F(z)$ é igual ao maior dos números q e ρ.

35. A ordem aparente de uma soma não póde, como é evidente, exceder a maior das ordens aparentes das parcelas, mas o gênero de uma soma póde, em certos casos ([1]), exceder, em uma unidade, o género das parcelas.

A ordem aparente de um produto póde ser inferior ás ordens aparentes dos factores, mas não poderá nunca exceder a maior destas.

Efectivamente, o exemplo

$$e^{Q(z)} f(z) \times e^{-Q(z)} f(z),$$

onde $f(z)$ é um produto canónico de ordem inferior ao gráu q de $Q(z)$, justifica a primeira afirmativa e a justeza da segunda é posta em evidência pelas desigualdades

$$\max |F_1(z) F_2(z)| \gtrless M_1(r) M_2(r) < e^{r^{\sigma_1'}} \times e^{r^{\sigma_2'}}.$$

([1]) O sr. P. Boutroux foi quem primeiro deu exemplos desta natureza. As suas considerações envolvem, porem, conceitos delicados da teoria do crescimento, motivo por que nos abstemos de lhes fazer maior referência.

36. Consideremos agora o produto

$$F(z) = e^{Q(z)}\varphi(z)f(z),$$

onde $\varphi(z)$ é uma função inteira sem factor exponencial e $f(z)$ é um produto canónico de género p e ordem ρ.

Se $\varphi(z)$ se reduz a um polinómio, a ordem aparente de $F(z)$ será, como vimos, igual ao maior dos números ρ e q, designando por esta última letra a gráu de $Q(z)$.

Suponhamos, porem, que $\varphi(z)$ é uma produto canónico e distingamos os dois casos seguintes:

1.º $\varphi(z)$ e $f(z)$ têm a mesma ordem. Nêste caso, o género p' de $\varphi(z)$ poderá ser igual ao género p de $f(z)$ ou igual a $p+1$ (¹). Na primeira hipótese, $\varphi(z) f(z)$ será um produto canónico de género p e ordem $\rho' = \rho$; na segunda, tendo transformado a função $f(z)$, sem alteração do seu valor (²), numa função de género $p' = p + 1$, o produto $\varphi(z) f(z)$ virá expresso numa função de género p' e ordem ρ, visto sêr $p' = \rho$. Conseguintemente, se $q \overline{<} \rho$, $F(z)$ será de ordem aparente $\rho' = \rho$; se $q > \rho$, será também $q > p + 1$ e o factor exponencial do produto transformado $\varphi(z)$ $f(z)$ irá combinar-se com $e^{Q(z)}$, dando um factor de ordem aparente $q > \rho$, donde se conclue que $F(z)$ é de ordem aparente q. Em qualquer dos casos, pois, a ordem aparente de $F(z)$ é igual ao maior dos três números q, ρ' e ρ.

Suponhamos agora que sam diferentes as ordens de $\varphi(z)$ e $f(z)$. Nesta hipótese, admitindo, como é licito, que a ordem ρ' de $\varphi(z)$ é superior a ρ, consideremos separadamente os dois casos: $q > \rho'$, $q \overline{<} \rho'$.

(¹) É evidente que poderemos sempre supôr $p' \overline{>} p$.

(²) Para isso, basta adicionar ao expoente de e no termo geral de $f(z)$ a fracção $\frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1}$ e acrescentar ao polinómio $Q(z)$ o termo

$$-\frac{1}{p+1}\sum_1^{\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p+1}.$$

No primeiro caso, se p é inferior a p', transforme-se $f(z)$ no produto de uma exponencial de ordem aparente p' por um produto canónico do mesmo género. Tendo conseguido êste resultado, a função $\varphi(z)\, f(z)$ será de género p' e ordem ρ' e o factor exponencial proveniente da transformação de $f(z)$ irá combinar-se com $e^{Q(z)}$, dando logar a um factor de ordem aparente q. O produto $F(z)$, em virtude do teorema do sr. Hadamard, terá a ordem aparente q.

Se, porem, fôr $q \leqq \rho'$, transforme-se, como ficou dito, se se tornar necessário, $f(z)$ numa função de género p': o produto $\varphi(z)\, f(z)$, que póde sêr canónico sem que seja $p=p'$, é uma função de ordem ρ' e, como o gráu do polinómio do factor exponencial não poderá exceder ρ', concluimos que ρ' é a ordem (ou ordem aparente) de $F(z)$.

Em resumo: a ordem aparente de $F(z)$ é sempre igual ao maior dos números q, ρ' e ρ.

37. A derivada de uma função de ordem aparente σ' é ainda uma função de ordêm aparente σ'.

Para demonstrar esta proposição, designemos por $M(r)$ e $M_1(r)$ os módulos máximos, para $|z|=r$, das funções $F(z)$ e $F'(z)$ e partamos da conhecida fórmula de Cauchy

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{(z-x)^2}\,dz.$$

C é aqui um circulo de centro na origem e raio $R=2r$ e nós supômos $|x|=r$,

Nestas condições, a fórmula anterior dá imediatamente

$$M_1(r)<\frac{R}{(R-r)^2}M(r)<2\,M(R),$$

donde, supondo

$$M(r)<e^{r^{\sigma'+\varepsilon}},$$

se tira

$$M_1(r)<e^{r^{\sigma'+\varepsilon+\varepsilon'}},$$

o que prova que $F'(z)$ é de ordem aparente igual ou inferior a σ'.

Por outro lado, designando por z' o ponto do círculo $|x| = r$ em que $|F(z)| = M(r)$, da igualdade

$$\int_0^{z'} F'(z)\,dz = F(z') - F(0),$$

podemos concluir

$$r\,M_1(r) + |F(0)| \geqq M(r)$$

e, conseguintemente, para uma infinidade de valores de r indefinidamente crescentes,

$$M_1(r) \geqq \frac{M(r) - |F(0)|}{r} > e^{r^{\sigma'-\varepsilon-\varepsilon'}},$$

com o que se demonstra a proposição enunciada.

Em particular, se $F(z)$ é de género p e de ordem aparente não inteira, $F'(z)$ será também uma função de género p.

38. Determinemos, a título de exercício, as expressões de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.

Como os zeros desta última transcendente sam

$$-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \ldots\ -\frac{2n-1}{2}\pi,\ \frac{2n-1}{2}\pi,\ \ldots,$$

o quociente de $\cos z$ pelo produto canónico de género 1

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{2z}{\pi}\right) e^{-\frac{2z}{\pi}} \times \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right) e^{\frac{2z}{\pi}} \ldots \left(1 + \frac{(2n-1)\pi}{2z}\right) e^{\frac{2z}{(2n-1)\pi}}$$

$$\times \left(1 - \frac{2z}{(2n-1)\pi}\right) e^{\frac{2z}{(2n-1)\pi}} \times \ldots = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

será uma função da fórma

$$e^{Q(z)},$$

de modo que virá

$$\cos z = e^{Q(z)} \varphi(z).$$

Por outro lado, como o módulo máximo $M(r)$ de $\cos z$ satisfaz á condição

$$e^{r^{1-\varepsilon}} < M(r) < e^r,$$

vê-se que a ordem aparente de $e^{Q(z)}$ não poderá exceder a unidade, pelo que $Q(z)$ se reduz, quando muito, a um polinómio do primeiro gráu. Mas, sendo $\cos z$ uma função par, o mesmo deverá acontecer a $e^{Q(z)}$, de modo que o polinómio $Q(z)$ é uma constante. Para determinar o seu valor, notaremos que, por ser

$$\cos o = e^{Q(o)} = 1,$$

será $Q(z) = Q(o) = o$, donde, finalmente, concluimos

$$\cos z = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right).$$

Como a derivada de uma função rial, de género p e zeros riais, é ainda uma função de género p, será

$$\operatorname{sen}(z) = z\, e^{az+b} \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

donde se deduz, atendendo a que $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ é par,

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{z^2}\right).$$

NOTA I

Sôbre a distribuição dos zeros da derivada de uma função de género p

Prometemos estudar nesta Nota a distribuição dos zeros da derivada da função

$$\varphi(z) = e^{cz^p} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p}$$

onde a_n e a constante c sam números riais. Supômos, bem entendido, que o produto canónico que figura em $\varphi(z)$ é, de facto, de género p, de modo que a série

$$\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|^p$$

é divergente.

1.º) Suponhamos, em primeiro logar, $p = 2k$, $c > 0$.

Tendo posto

$$\varphi_m(z) = e^{cz^p} f_m(z),$$

verifica-se imediatamente por meio da igualdade

$$\frac{\varphi_m'(z)}{z^p \varphi_m(z)} = \frac{pc}{z} + \sum_1^m \frac{1}{a_n^p(z - a_n)} = \frac{pc(x - iy)}{x^2 + y^2} + \sum_1^m \frac{x - a_n - iy}{a_n^p\left[(x - a_n)^2 + y^2\right]}$$

que nenhuma das funções $\varphi'_m(z)$, e portanto $\varphi'(z)$, admite zeros imaginários. Pelo que respeita à distribuição dos zeros de $\varphi'(z)$ [1], distinguiremos três casos:

1.º $a_n > 0$. Nestas condições, dos $m + p - 1$ zeros de $\varphi_m'(z)$, $m - 1$ existem, pelo teorema de Rolle, nos $m - 1$ primeiros intervalos de $\varphi(z)$;

---

[1] Por comodidade, supomos diferentes os zeros de $\varphi(z)$.

e, observando que $\varphi_m'(z)$ tem na origem um zero de ordem $p-1$, vê-se que apenas falta determinar a posição de um deles. Ora, se z é um pouco maior do que zero, a função

$$(1) \qquad \frac{pc}{z}+\sum_1^m \frac{1}{a_n^p(z-a_n)}$$

é positiva, por causa de $\frac{pc}{z}$, enquanto a parcela $\frac{1}{a_1^p(z-a_1)}$ lhe faz tomar valores negativos, se z é um pouco menor que a_1. Logo, entre a origem e a_1, essa função, e portanto $\varphi'(z)$, tem um zero positivo, ficando assim determinada a posição de todos os zeros de $\varphi'(z)$.

Representando êsses números por $b_0, b_1, \ldots b_n, \ldots$, obteremos o seguinte quadro

$$b_0=b_1=\ldots b_{p-1}=0, b_p, a_1, b_{p+1}, \ldots b_n, a_{n-p+1}, \ldots$$

Um raciocinio semelhante, mostra que êste mesmo quadro subsiste, se $a_n<0$.

Se, porem, houver números a_n de diferentes sinais, o teorema de Rolle apenas exige $m-2$ zeros de $\varphi_m'(z)$ para os intervalos de $\varphi(z)$, cujos extremos tenham o mesmo sinal, devendo, portanto, ser agora precisada a situação de dois zeros dessa derivada.

Para consegui-lo, observaremos que a função

$$(2) \qquad pc+\sum_1^m \frac{z}{a_n^p(z-a_n)}$$

toma valores de sinais contrários na origem e um pouco depois (no sentido de $-\infty$ para $+\infty$) do último zero negativo de $\varphi_m(z)$, o mesmo se repetindo quando se considera a origem e um número um pouco mais pequeno que o primeiro zero positivo desta função. Logo, (2) admite, no intervalo da origem, dois zeros separados por êste ponto, e, como esta conclusão é extensiva a $\varphi'(z)$, fica também completa a determinação dos zeros desta derivada: um em cada intervalo de $\varphi(z)$, cujos extremos sejam do mesmo sinal, e $p+1$ no intervalo da origem, $p-1$ dos quais sam nulos e separam os outros dois.

Seja agora

$$p=2k, c<0.$$

Se $a_n>0$, um raciocinio em tudo semelhante aos precedentes mostra que $\varphi_m'(z)$ tem $p-1$ zeros nulos e $m-1$ nos $m-1$ primeiros intervalos de $\varphi(z)$. Vamos, então, determinar a posição do último zero daquela derivada. Êsse zero é negativo. É, efectivamente, o que se reconhece, analisando a função

$$(3) \qquad \frac{\varphi_m'(z)}{z^{p-1}\varphi_m(z)} = -pc + \sum_1^m \frac{z}{a_n^p(z-a_n)},$$

onde se deixou em evidência o sinal de c. Ela é negativa na origem, e positiva, se se consideram valores negativos de z de módulo suficientemente grande, porque, para $z = -\infty$, o seu limite é

$$-pc + \sum_1^m \frac{1}{a_n^p},$$

e esta soma tende, com m, para $+\infty$.

Para determinar um limite inferior deste zero negativo, bastará obter um número inferior a qualquer dos zeros negativos das funções (3), $m > m_1$, o que se consegue fácilmente, como vamos vêr.

Seja m_1 um inteiro definido pela condição

$$-pc + \frac{1}{2}\sum_1^{m_1} \frac{1}{a_n^p} > 0.$$

As desigualdades evidentes, onde é $z' = -z$ e $z < 0$,

$$-pc + \sum_1^{m_1+q} \frac{z}{a_n^p(z-a_n)} = -pc + \sum_1^{m_1+q} \frac{z'}{a_n^p(z'+a_n)}$$

$$> -pc + \frac{1}{z'+a_{m_1}} \sum_1^{m_1} \frac{1}{a_n^p} + \sum_{m_1+1}^{m_1+q} \frac{z'}{a_n^p(z'+a_n)}$$

mostram que, pondo $z' = a_{m_1}$, todas as funções (3), $m > m_1$, sam positivas, isto é, de sinal contrário ao do seu valor na origem. Logo, $-a_{m_1}$ é um número inferior ao zero negativo de $\varphi'(z)$.

Quando a soma da série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_n^p}$$

excede o produto pc e é $a_1 > 1$, pode obter-se de outro modo o limite inferior deste zero. Efectivamente, para que tenha logar a desigualdade

$$-pc + \sum_1^m \frac{z'}{a_n^p(z'+a_n)} > 0,$$

basta que seja, na hipótese $a_1 > 1$,

$$-pc+\sum_{1}^{m}\frac{z'}{a_n^p(a_n z'+a_n)}=-pc+\frac{z'}{1+z'}\sum_{1}^{m}\frac{1}{a_n^{p+1}}>0$$

e esta condição é manifestamente atendida quando se tenha

$$-pc+\frac{z'}{1+z'}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{p+1}}>0.$$

Se $a_n < 0$, a distribuição dos zeros de $\varphi'(z)$ é análoga à precedente. Há um zero positivo, cujo limite superior é o número $|a_{m_1}|$, definido pela desigualdade

$$-pc+\frac{1}{2}\sum_{1}^{m_1}\left|\frac{1}{a_n}\right|^p>0.$$

No caso em que, sendo $c<0$, $\varphi(z)$ tenha zeros positivos e negativos, $\varphi'(z)$ admite dois zeros imaginários (conjugados).

Com efeito, a equação (3) não admite raizes superiores ao maior dos números $a_1, a_2, \dots a_m$, porque o seu primeiro membro, que é positivo para valores de z um pouco maiores do que êsse número, é também positivo para $z=+\infty$ e tem uma derivada de sinal constante para êsses valores de z; analogamente, não tem raizes inferiores ao menor dos números citados. Para valores de z um pouco superiores à maior raiz negativa de $\varphi_m(z)=0$ e um pouco inferiores à menor raiz positiva desta equação, êsse primeiro membro toma valores negativos, enquanto a sua derivada é constantemente positiva. Logo, a equação considerada e, conseguintemente, $\varphi'_m(z)=0$ e $\varphi'(z)=0$ admitem duas raizes imaginárias conjugadas (porque todas estas equações sam reais).

2.º) Suponhamos agora $p=2k+1$.

Nêste caso, a equação

$$pc+\sum_{1}^{m}\frac{z}{a_n^p(z-a_n)}=pc+\sum_{1}^{m}\frac{x(x-a_n)+y^2}{a_n^p\left[(x-a_n)^2+y^2\right]}$$

$$-\sum_{1}^{m}\frac{iy}{a_n^{p-1}\left[(x-a_n)^2+y^2\right]}=0$$

só póde sêr satisfeita, quando seja $y=0$. $\varphi'(z)$ não tem, pois, zeros imaginários.

Para averiguar a distribuição dos seus zeros, distinguiremos diferentes casos:

1.º $c > 0,\ a_n > 0$: O mesmo que na hipótese $c > 0,\ a_n > 0,\ p = 2k$.

2.º $c > 0,\ a_n < 0$: O mesmo que na hipótese $c < 0,\ a_n < 0,\ p = 2k$.

3.º $c > 0,\ a_i < 0,\ a_j > 0$: p zeros no intervalo da origem, um dos quais positivo, e um outro em cada intervalo de $\varphi(z)$.

4.º $c < 0,\ a_n > 0$: O mesmo que na hipótese $c < 0,\ a_n > 0,\ p = 2k$.

5.º $c < 0,\ a_n < 0$: O mesmo que no caso $c > 0,\ a_n < 0,\ p = 2k$.

6.º $c < 0,\ a_i < 0,\ a_j > 0$: Um zero entre a origem e a maior raiz negativa de $\varphi(z) = 0$; os restantes obedecem à disposição normal.

Chamando *caso* (a) àquele em que os zeros de $\varphi(z)$ sam todos do mesmo sinal e existe um zero de $\varphi'(z)$ entre a origem e a_1; caso (b) àquele em que $\varphi'(z)$ tem um zero de sinal contrário ao dos zeros de $\varphi(z)$, poderemos resumir êstes resultados do modo seguinte:

$$c > 0 \begin{cases} p = 2k & \begin{cases} a_n > 0 \ \dots \ (a) \\ a_n < 0 \ \dots \ (a) \end{cases} \\ p = 2k+1 & \begin{cases} a_n > 0 \ \dots \ (a) \\ a_n < 0 \ \dots \ (b) \end{cases} \end{cases}$$

$$c < 0 \begin{cases} p = 2k & \begin{cases} a_n > 0 \ \dots \ (b) \\ a_n < 0 \ \dots \ (b) \end{cases} \\ p = 2k+1 & \begin{cases} a_n > 0 \ \dots \ (b) \\ a_n < 0 \ \dots \ (a) \end{cases} \end{cases}$$

Se $\varphi(z)$ tem zeros positivos e negativos, $\varphi'(z) = 0$ terá, no intervalo da origem, uma raiz com o sinal de c, se p é impar; se p é par, essa equação admitirá duas raizes imaginárias, no caso em que c seja negativo e duas raizes de sinais contrários, no intervalo da origem, se c é positivo.

NOTA II

Sôbre uma proposição de Laguerre

Vamos agora estudar o artifício que permitiu ao sr. HADAMARD estabelecer o teorema geral, a que se fez referência no n.º 28. É seu autor, como se disse, o professor LAGUERRE.

Começamos por demonstrar a seguinte proposição da teoria das equações binómias:

«Se o gráu n do polinómio

$$P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$

é inferior ao gráu m da equação

$$x^m - 1 = 0,$$

a soma

$$R(x) = P(x) + P(\omega x) + \ldots + P(\omega^{m-1} x),$$

onde ω é uma raiz primitiva desta última equação, é numéricamente igual a $m\,P(0)$ (¹).

Efectivamente, se designarmos por

$$\cos \frac{2r\pi}{m} + i \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{m}$$

o número ω, o coeficiente de $p_{n-k} x^k$ em $R(x)$ será

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \ldots + \omega^{(m-1)k} = 1 + (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$
$$+ (\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) + \ldots + (\cos(m-1)\varphi + i \operatorname{sen}(m-1)\varphi)$$

(¹) Não encontrámos a demonstração dêste teorema em nenhum dos livros de Algebra que consultámos: Sr. Dr. SOUTO RODRIGUES, TANNERY, PINCHERLE, NIEWENGLOWSKI, etc.

onde se pôs

$$\varphi = \frac{2rk\pi}{m}.$$

Conseguintemente, em virtude das bens conhecidas fórmulas trigonométricas, aplicáveis na hipótese $\varphi \neq 2l\pi$, êsse coeficiente poderá escrever-se sob a forma

$$\operatorname{sen}\frac{m\varphi}{2}\cdot\frac{\cos\frac{(m-1)\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} + i\operatorname{sen}\frac{m\varphi}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{(m-1)\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}},$$

e esta soma é nula sempre que seja $0 < k < m$. Logo, o único termo diferente de zero que se encontra em $R(x)$ é aquêle que provem da soma dos termos independentes de x nos polinómios $P(\omega^i x)$, o qual é, como se queria provar, igual a $mP(0)$.

Isto pôsto, seja, com o factor exponencial em evidencia,

$$\varphi(z) = e^{Q(z)} f(z)$$

uma função inteira de género finito p e

$$x^m - 1 = 0$$

uma equação binómia de gráu superior a p.

Em virtude do que acima dissemos, o produto

$$\Phi(z) = \varphi(z)\cdot\varphi(\omega z)\ldots\ \varphi(\omega^{m-1} z)$$

reduzir-se há a

$$\Phi(z) = e^{mQ(0)}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\omega\frac{z}{a_n}\right)\ldots\left(1-\omega^{m-1}\frac{z}{a_n}\right).$$

Ora, sendo

$$(x-1)(x-\omega)\ldots(x-\omega^{m-1}) = x^m - 1,$$

será também

$$(1-y)(1-\omega y)\ldots(1-\omega^{m-1}y) = 1-y^m,$$

onde se fez

$$y = \frac{1}{x};$$

logo, virá

$$\Phi(z) = e^{mQ(0)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^m}{a_n^m}\right).$$

Pondo agora

$$z^m = u, \quad a_n^m = b^n, \quad e^{mQ(0)} = c,$$

teremos, finalmente,

$$\Phi(z) = c \prod_1^\infty \left(1 - \frac{u}{b_n}\right),$$

e êste resultado mostra que $\Phi(z)$ é uma função de género zero em u, visto que a série de termo geral

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right|^m \leqq \left|\frac{1}{a_n}\right|^{p+1}$$

é manifestamente convergente, porque o género de $f(z)$ é igual ou inferior a p.

Como $m \geqq p+1$, será $m \geqq \rho$, representando por esta letra a ordem de $f(z)$, donde se conclue que a ordem de $\Phi(z)$ é quando muito igual a *um*, porquanto

$$\left|\frac{1}{b_n}\right|^{\frac{\rho}{m}} = \left|\frac{1}{a_n}\right|^\rho.$$

A ordem aparente de $\Phi(z)$ será também, como é evidente, igual a $\frac{\rho}{m}$ e, portanto, não excederá a unidade.

ERRATA

Pág.	Linhas	Êrros	Emendas
3	28	A la	à la
3	29	A Termes Positifs	a termes positifs
4	15	0	∞
17	3	P_2	P_1
17	19	A	A_1
19	9	$f_{(x)}^{(k)}$	a função definida por esta série
19	17	de $(k+1)$	da série $\left(P_n^{(k)} - P_{n-1}^{(k)}\right)$
44	6	K	k
44	18	$\left\lvert \frac{R}{a_1} \right)$	$\left(\left\lvert \frac{R}{a_1} \right\rvert \right)$
50	11	isto é; α	isto é, a

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Algumas proposições relativas às séries e produtos infinitos

CAPÍTULO I

Os produtos infinitos de Weirstrass

CAPÍTULO II

Alguns teoremas sôbre as funções de género finito

CAPÍTULO III

O módulo das funções de ordem ρ

NOTAS

GONSALVES

TEORIA DAS FUNÇÕES INTEIRAS

DISSERTAÇÃO