

Est. B(S.R.)

Tab. 3

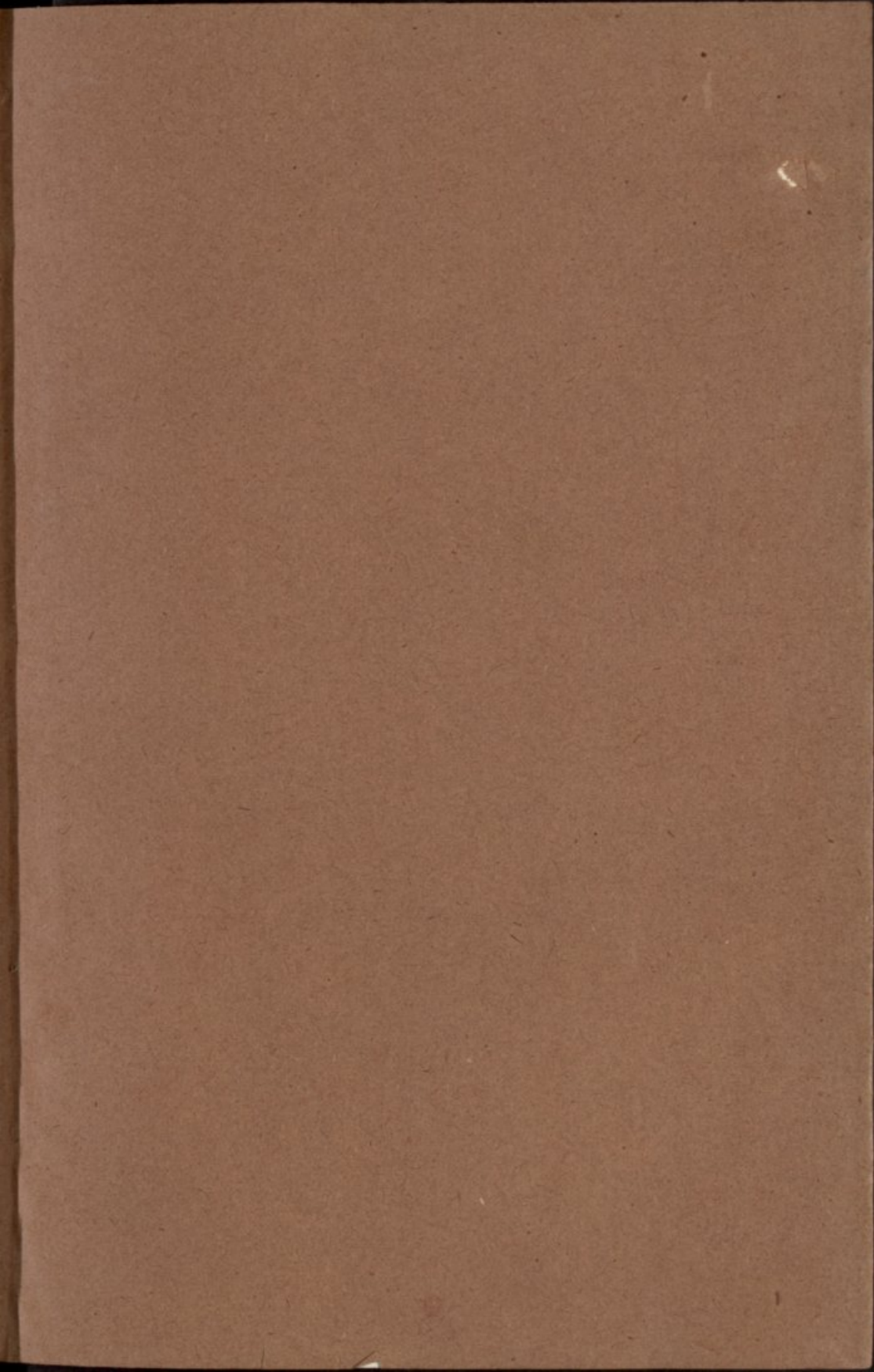
N.º 13

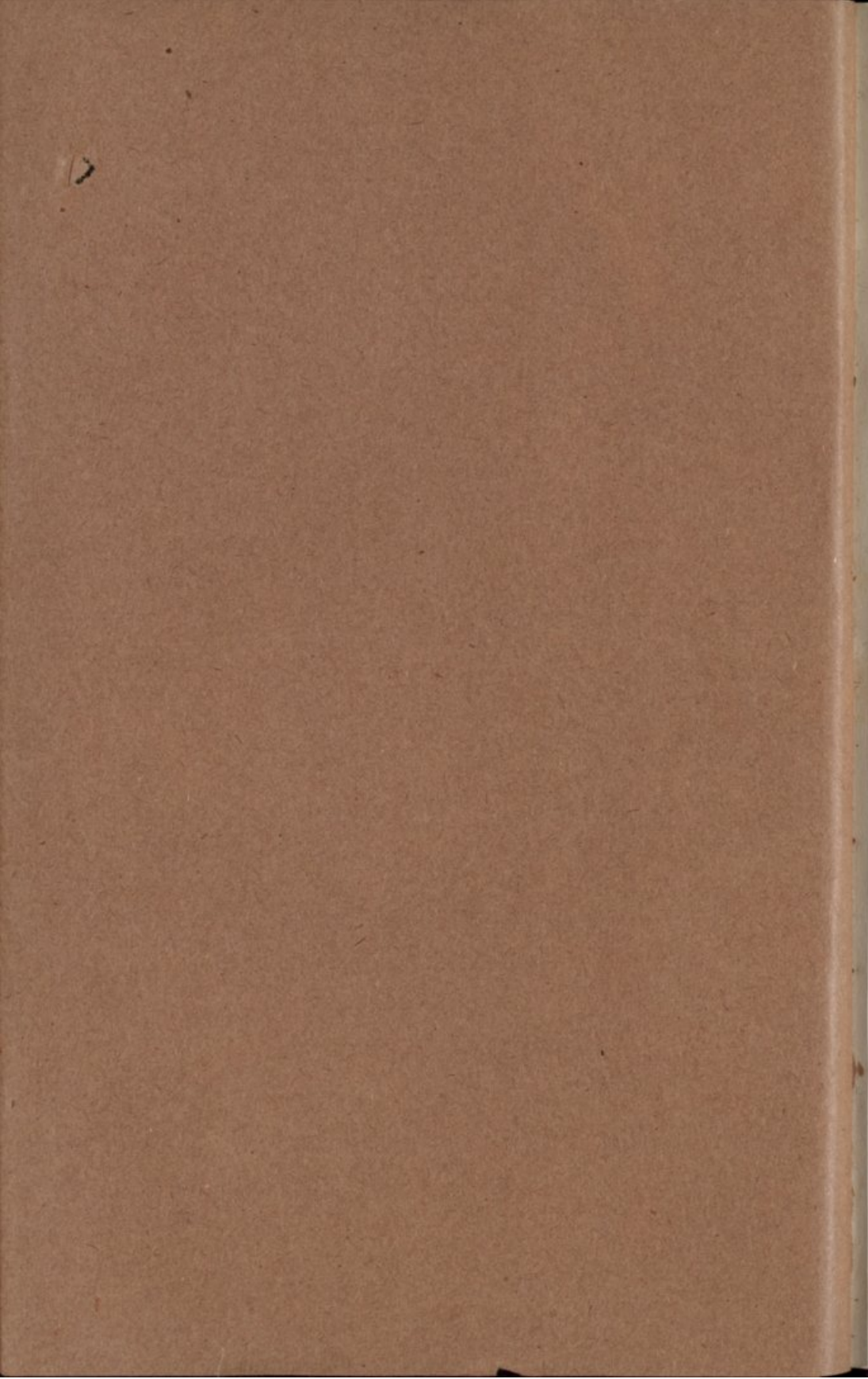


BIBLIOTECA MATEMÁTICA
DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA



1328185741





CURSO

DE

ANALYSE INFINITESIMAL

CURSO

LA MISERIA DEL POPOLO

CURSO

DE

ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

*Director da Academia Polytechnica do Porto,
professor na mesma Academia,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio correspondente das Academias Reaes das Sciencias
de Lisboa, Madrid, etc.*

CALCULO DIFFERENCIAL

(Premiado pela Academia Real das Sciencias de Lisboa com o premio
instituido por El-Rei D. Luiz I)

2.^a EDIÇÃO



N.^o de Reg. 6904 PORTO

TYPOGRAPHIA OCCIDENTAL

Rua da Fabrica, 66

1890

CURBO

ANALYZE INSTRUMENTAL



INTRODUÇÃO

CAPITULO I

THEORIA DOS NUMEROS IRRACIONAES, DOS NUMEROS NEGATIVOS E DOS
NUMEROS IMAGINARIOS. REGRAS PARA O SEU CALCULO

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

1. — Os numeros inteiros e os numeros fraccionarios cujos numeradores e denominadores são numeros inteiros, constituem a classe dos numeros *racionaes*, que podem ser *positivos* ou *negativos*. O estudo dos numeros racionaes positivos é o primeiro objecto da Arithmetica. Ahi são definidos, assim como as operações a que se sujeitam, e ahi são estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações.

Em seguida, na Algebra, em logar de numeros consideram-se letras que os representam, e definem-se as operações algebraicas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas, isto é, da maneira seguinte:

1.º — *Adição* dos numeros representados pelas letras *a* e *b* é a combinação d'estes numeros cujas leis fundamentaes são:

$$1) \quad a + b = b + a$$

$$2) (a + b) + c = (a + c) + b$$

$$3) a + 0 = a;$$

2.º — *Subtração* é a operação inversa da adição.

3.º — *Multiplicação* é a combinação dos números, representados pelas letras a e b , caracterizada pelas leis:

$$1) ab = ba$$

$$2) (ab) c = (ac) b$$

$$3) (a + b) c = ac + bc$$

$$4) a \times 0 = 0, a \times 1 = a.$$

4.º — *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.º — *Elevação a potencias* é a multiplicação de factores iguaes.

6.º — *Extracção de raiz* é a operação inversa da elevação a potencias.

Reflectindo um pouco sobre o que se aprendeu na Arithmetica, é facil de vêr que o calculo arithmetico é principalmente fundado nas leis fundamentaes precedentes, e nas leis fundamentaes da transformação das igualdades e desigualdades:

$$1) \text{ Se fôr } a = b, \text{ será } b = a$$

$$2) \text{ Se fôr } a = b \text{ e } a = c, \text{ será } b = c$$

$$3) \text{ Se fôr } a > b \text{ e } b > c, \text{ será } a > c$$

$$4) \text{ Se fôr } a = b \text{ e } c = d, \text{ será } a + c = b + d, \\ ac = bd, \text{ etc.}$$

$$5) \text{ Se fôr } a > b \text{ e } c > d, \text{ será } a + c > b + d, \\ a - d > b - c.$$

Duas das operações precedentes, isto é a subtração e a



Nouvelle collection scientifique
 Directeur Emile Borel
 de la Méthode dans les sciences - T. 1.^o

L'introduction des nombres irrationnels est beaucoup compliquée. Pour la définition d'une fraction, deux nombres entiers suffisent; pour définir un nombre irrationnel, il faut une infinité de nombres entiers ou, ce qui revient au même, une règle qui permette de séparer les nombres entiers et fractionnaires en deux classes, de façon que les nombres de la première classe soient tous plus petits que les nombres de la seconde classe. Tels sont, par exemple, la classe des nombres entiers et fractionnaires dont le carré est inférieur à deux, et celle des nombres dont le carré est supérieur à deux. On démontre facilement qu'il n'y a pas, dans la première classe, de nombre plus grand que tous les nombres de cette première classe, qu'il n'y a pas, dans la seconde classe, de nombre plus petit que tous les autres nombres de cette seconde classe; une pareille coupure, pratiquée dans l'ensemble des nombres entiers et fractionnaires, définit ce qu'on appelle un nombre

irrationnel et permet préciser de la façon la plus simple, ce qu'il faut entendre par les valeurs approchées, au-dessus ou au-dessous de ce nombre irrationnel, par excès ou par défaut; inversement, la connaissance de ces valeurs approchées, en particulier des valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près, permet de retrouver la coupure qui définit le nombre irrationnel.

Il y a souvent lieu de porter l'attention sur un ensemble spécial de nombres, sur l'ensemble des nombres entiers, par exemple, ou des nombres premiers, ou des nombres décimaux, ou des nombres réels compris entre zéro et un.

Si un ensemble contient une infinité de nombres, tous inférieurs à un nombre A , il existe un nombre a , la borne supérieure de l'ensemble, qui jouit des propriétés suivantes: 1°. Aucun nombre de l'ensemble n'est plus grand que a : 2°. Si a n'appartient pas à l'ensemble, il y a, dans cet ensemble, des nombres aussi voisins de a qu'on le veut.

Si un ensemble contient une infinité de nombres tous compris entre les nombres A et B , il existe au moins un nombre a jouissant de la propriété suivante: il y a dans l'ensemble une infinité de nombres qui diffèrent aussi peu qu'on le veut de a ; ce nombre a

peut d'ailleurs appartenir ou ne pas appartenir à l'ensemble, dont il est ce qu'on appelle un élément d'accumulation.

Par exemple, si l'on considère l'ensemble des fractions décimales dont la partie entière est zéro et dont les chiffres décimaux sont des 9, on peut trouver, dans cet ensemble, une infinité de fractions dont la différence avec le nombre 1 est moindre que $\frac{1}{1000}$... que tel nombre qu'on veut. Le nombre 1 est un élément d'accumulation de l'ensemble considéré; il en est aussi la borne supérieure; il n'appartient pas à l'ensemble.

extracção de raiz, não são sempre possíveis, quando se usa sómente dos numeros racionaes positivos. Para não ter porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possíveis, introduzem-se novas especies de numeros, e generalizam-se as definições das operações, tendo sempre em vista que se conservem as propriedades fundamentaes que vimos de indicar, e que as novas definições levem aos mesmos resultados que as antigas, quando se applicam aos numeros para os quaes estas foram primeiramente estabelecidas. Foi o que se viu na Arithmetica, onde appareceram os numeros *irrationaes*, e na Algebra, onde appareceram os numeros *negativos* e os numeros *imaginarios*. Aqui vamos recordar succintamente a theoria d'estas tres especies de numeros.

II

Theoria dos numeros irrationaes (1)

2. — Consideremos um grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e crescentes

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

e outro grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e decrescentes

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

e supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo, e que a differença

(1) Para um estudo mais desenvolvido da theoria dos numeros irrationaes veja-se:

Dedekind — *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, (Brunswick, 1872).

Tannery — *Introduction à la théorie des fonctions* (Paris, 1886).

$b_n - a_n$ pôde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se existe um numero racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os numeros do segundo grupo, este numero é completamente determinado pelos dous grupos. Com effeito, se existissem dois numeros A e B que satisfizessem a esta condição, estes numeros deveriam estar comprehendidos entre b_n e a_n , e seria, por maior que fosse n ,

$$B - A < b_n - a_n,$$

o que é absurdo, visto que a differença $b_n - a_n$ pôde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se porém não existe numero algum racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os numeros do segundo, diz-se, por definição, que os dous grupos estão separados por um numero *irrational*, maior do que os numeros do primeiro e menor do que os do segundo. Como, n'este caso, qualquer numero racional differente dos precedentes é menor do que um valor de a_n ou maior do que um valor de b_n , vê-se que cada numero irrational divide a totalidade dos numeros racionaes em dous grupos taes que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo grupo.

E' evidente que a definição precedente comprehende os numeros irracionaes a que se foi conduzido em Arithmetica pela extracção das raizes. Assim, por exemplo, $\sqrt{2}$ representa um numero irrational que separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores do que 2 d'aquelles cujos quadrados são maiores do que 2.

Dous numeros irracionaes A e B dizem-se *iguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que A são tambem menores do que B , e todos os numeros racionaes maiores do que A são tambem maiores do que B .

Diz-se que A é maior do que B , ou que B é menor do que A , quando existe algum numero racional maior do que B e menor do que A .

3. — Definamos agora as operações sobre numeros irracionaes.

1.^o — Sejam dados dous numeros racionaes ou irracionaes A e B determinados pelos grupos

$$(1) \quad \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots \\ b'_1, b'_2, \dots, b'_n, \dots \end{cases}$$

e formemos o grupo de numeros crescentes

$$a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n, \dots$$

e o grupo de numeros decrescentes

$$b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \dots, b_n + b'_n, \dots$$

Como os numeros do primeiro d'estes grupos são menores do que os do segundo, e como a differença entre $b_n + b'_n$ e $(a_n + a'_n)$ pôde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande, estes grupos determinam um numero *racional* ou *irracional*, a que se chama *somma* dos numeros dados.

Para justificar esta definição, notemos em primeiro logar que, se os numeros dados A e B forem racionaes, os grupos que vimos de formar determinam o numero racional $A + B$, visto que este numero os sepára.

Notemos em seguida que a *somma* dos numeros A e B , como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes indicadas no n.º 4, como é facil de verificar.

2.º — Consideremos ainda os numeros A e B e seja $A > B$. Demonstra-se, procedendo como no caso anterior, que os grupos

$$a_1 - b'_1, a_2 - b'_2, \dots, a_n - b'_n, \dots$$

$$b_1 - a'_1, b_2 - a'_2, \dots, b_n - a'_n, \dots$$

determinam um numero racional ou irracional. A este numero chama-se *differença* dos numeros dados, e representa-se por $A - B$. E' facil, com effeito, de vêr que da sua *somma* com o numero B resulta um numero igual a A . Para isso, basta notar que esta *somma* é determinada pelos grupos

$$a_1 - b'_1 + a'_1, \dots, a_n - b'_n + a'_n, \dots$$

$$b_1 - a'_1 + b'_1, \dots, b_n - a'_n + b'_n, \dots,$$

e que, sendo α um numero racional qualquer menor do que esta somma, temos (para um valor de n sufficientemente grande)

$$\alpha \leq a_n - b'_n + a'_n < a_n < A,$$

e que, sendo α maior do que a mesma somma, temos

$$\alpha \geq b_n - a'_n + b'_n > b_n > A;$$

portanto, em virtude da definição de igualdade, é

$$(A - B) + B = A.$$

3.º — Chama-se *producto* dos numeros A e B ao numero definido pelos grupos

$$a_1 a'_1, a_2 a'_2, \dots, a_n a'_n, \dots$$

$$b_1 b'_1, b_2 b'_2, \dots, b_n b'_n, \dots;$$

e chama-se *quociente* d'estes mesmos numeros ao numero definido pelos grupos

$$\frac{a_1}{b'_1}, \frac{a_2}{b'_2}, \dots, \frac{a_n}{b'_n}, \dots$$

$$\frac{b_1}{a'_1}, \frac{b_2}{a'_2}, \dots, \frac{b_n}{a'_n}, \dots$$

Justificam-se estas definições de um modo semelhante ao que foi empregado no caso da addição e da subtracção.

4.º — Chama-se *potencia* do gráo m do numero irracional A ao producto de m factores iguaes a A .

5.º — Chama-se *raiz* de indice m do numero A ao numero que elevado á potencia m dá A . Adiante veremos que existe sempre um numero positivo que satisfaz a esta condição.

4. — E' facil de vêr que as leis relativas á transformação das igualdades e das desigualdades, indicadas no n.º 1, têm logar no caso dos numeros irracionaes, quando se adoptam as definições precedentes. As tres primeiras leis resultam immediatamente das definições de igualdade e desigualdade. A quarta demonstra-se do modo seguinte.

Sejam a, b, c, d quatro numeros determinados pelos grupos

$$\left. \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n, \dots \\ b_1, \dots, b_n, \dots \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} a'_1, \dots, a'_n, \dots \\ b'_1, \dots, b'_n, \dots \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1, \dots, c_n, \dots \\ d_1, \dots, d_n, \dots \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} c'_1, \dots, c'_n, \dots \\ d'_1, \dots, d'_n, \dots \end{array} \right\};$$

e seja $a = b, c = d$. A somma dos numeros a e c é

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + c_1, \dots, a_n + c_n, \dots \\ b_1 + d_1, \dots, b_n + d_n, \dots \end{array} \right\}$$

e a somma dos numeros b e d é

$$\left. \begin{array}{l} a'_1 + c'_1, \dots, a'_n + c'_n, \dots \\ b'_1 + d'_1, \dots, b'_n + d'_n, \dots \end{array} \right\}.$$

Para mostrar que estas sommas são iguaes, notemos que das igualdades $a = b, c = d$ resulta, quaesquer que sejam os valores que se attribuem a n e m ,

$$a_n < b'_m, c_n < d'_m, b_n > a'_m, d_n > c'_m.$$

e portanto

$$a_n + c_n < b'_m + d'_m, b_n + d_n > a'_m + c'_m.$$

Sendo pois α um numero racional menor do que $a + c$, existirá um valor de n tal que será, qualquer que seja m ,

$$\alpha \leq a_n + c_n < b'_m + d'_m$$

e portanto $\alpha < b + d$; e sendo α maior do que $a + c$, existirá um valor de n tal que será

$$\alpha \geq b_n + d_n > a'_n + c'_n,$$

e portanto $\alpha > b + d$. Logo, em virtude da definição de igualdade, temos a relação

$$a + c = b + d,$$

que se pretendia demonstrar.

Demonstra-se de uma maneira analogia as outras propriedades fundamentaes das igualdades e desigualdades.

5. — *Representação geometrica dos numeros irracionais.* Sabe-se pelos Elementos de Geometria que todo o segmento de recta pôde ser representado por um numero racional ou irracional, tomando outro segmento de recta para unidade. Vamos agora demonstrar que, reciprocamente, todo o numero irracional A pôde representar um segmento de recta. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto O , todos os numeros racionais, menores do que o numero irracional considerado, que entram na sua definição, obtem-se uma série de pontos, que representaremos por $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. Do mesmo modo os numeros maiores do que A darão outra série de pontos, que representaremos por $N_1, N_2, \dots, N_n, \dots$.

$$\overline{O \quad M_1 \quad M_2 \quad K \quad N_2 \quad N_1}$$

Por ser $ON_n > OM_n$, qualquer que seja n , vê-se que as duas séries de pontos estão completamente separadas; e por poder tornar-se tão pequena, quanto se queira, a distancia $M_n N_n$, dando a n um valor sufficientemente grande, vê-se que esta separação é feita por meio de um ponto unico K (com effeito, se existissem dous pontos K e K_1 , que satisfizessem a esta condição, seria $KK_1 < M_n N_n$, por maior que fosse n , o que é absurdo). Temos assim determinado o segmento OK que o numero irracional considerado representa.

III

Numeros negativos e numeros imaginarios

6. — *Numeros negativos.* — Consideremos a differença $a - b$ entre os dous numeros a e b . Se fôr $b > a$, a subtracção precedente é impossivel, empregando os numeros até aqui estudados. Considera-se porisso $a - b$ como definindo uma nova especie de numeros, a que se chama *numeros negativos*.

Introduzida assim esta especie de numeros, resta definir as operações a realisar com elles de modo que tenham logar as propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1.

1.º — Dous numeros $a - b$ e $c - d$ dizem-se iguaes quando é

$$a + d = b + c.$$

Diz-se que $a - b$ é maior do que $c - d$, ou que $c - d$ é menor do que $a - b$, quando é

$$a + d > b + c.$$

D'aqui resulta, pondo $a = 0$, $c = 0$, que é $-b > -d$ quando $d > b$, isto é, que uma quantidade negativa menor do que outra tem maior valor absoluto.

2.º — Chama-se *addição* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d).$$

3.º — Chama-se *multiplicação* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (bc + ad).$$

4.º — Chama-se *subtracção e divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

5.º — Chama-se *elevação a potencia* a multiplicação de factores iguaes.

E' muito facil de vêr que as operações assim definidas gozam das propriedades fundamentaes enunciadas no n.º 1, que coincidem com as operações arithmeticas no caso de ser $a > b$ e $c > d$, e que dão origem ás regras bem conhecidas da Algebra.

7. — *Numeros imaginarios.* — A extracção de raiz das quantidades negativas é uma operação impossivel, quando se usa dos numeros precedentemente estudados. D'ahi vem a necessidade de introduzir uma nova especie de numeros da fórma $a + b\sqrt{-1}$, a que se chama *numeros imaginarios* ou *numeros complexos*, e que comprehendem todos os precedentes como caso particular.

Para introduzir estes numeros no calculo é necessario definir as operações que sobre elles se devem executar, de modo que se sujeitem ás leis fundamentaes expostas no n.º 1.

1.º — Dous numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ dizem-se *iguaes* quando é $a = c$, $b = d$.

Diz-se que $a + b\sqrt{-1}$ é maior do que $c + d\sqrt{-1}$, ou que $c + d\sqrt{-1}$ é menor do que $a + b\sqrt{-1}$, quando é $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$.

2.º — Chama-se *addição* dos dous numeros imaginarios $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ á operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = a + c + (b + d)\sqrt{-1}.$$

3.º — Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição.

4.º — Chama-se *multiplicação* dos numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

5.º — Chama-se *divisão* do numero $a + b\sqrt{-1}$ pelo numero $c + d\sqrt{-1}$ a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim achar um numero $x + y\sqrt{-1}$ que multiplicado por $c + d\sqrt{-1}$ dê $a + b\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$a + b \sqrt{-1} = (x + y \sqrt{-1})(c + d \sqrt{-1}),$$

ou

$$a + b \sqrt{-1} = cx - dy + (dx + cy) \sqrt{-1},$$

d'onde se tira

$$a = cx - dy,$$

$$b = dx + cy.$$

Estas equações dão os valores de x e y que entram no quociente pedido, e vem

$$\frac{a + b \sqrt{-1}}{c + d \sqrt{-1}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \sqrt{-1}.$$

E' facil de vêr que as operações que vimos de definir gozam das propriedades fundamentaes expostas no n.º 4, e que coincidem no caso dos numeros reaes com as definições anteriormente estabelecidas; e portanto os resultados a que se chega, usando dos numeros imaginarios no calculo, são applicaveis ao caso particular dos numeros reaes.

S. — Todo o imaginario $a + b \sqrt{-1}$ pôde ser reduzido á fórma trigonometrica

$$\rho (\cos \theta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \theta)$$

pondo

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

o que dá

$$\rho = + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\rho}.$$

A primeira d'estas formulas determina ρ . As duas outras,

consideradas simultaneamente, determinam θ . As quantidades ρ e θ chamam-se respectivamente *módulo* e *argumento* do imaginário. É fácil de vêr, pondo $b = 0$, que os módulos das quantidades reaes coincidem com os seus valores absolutos.

Para commodidade representa-se ordinariamente o imaginário $\sqrt{-1}$ pela letra i , e representa-se muitas vezes o módulo do numero z , quando é imaginário, ou o seu valor absoluto, quando é real, pelo signal $|z|$. Estas notações serão adoptadas n'esta obra.

As regras para o calculo dos imaginarios, quando se lhes dá a fórma trigonometrica, conduzem aos resultados seguintes:

I — A somma e a differença dos imaginarios

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta), \quad z' = \rho' (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

é

$$z \pm z' = \rho \cos \theta \pm \rho' \cos \theta' + i (\rho \sin \theta \pm \rho' \sin \theta')$$

ou

$$z \pm z' = R (\cos \omega + i \sin \omega),$$

pondo

$$\rho \cos \theta \pm \rho' \cos \theta' = R \cos \omega, \quad \rho \sin \theta \pm \rho' \sin \theta' = R \sin \omega,$$

o que dá

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \pm 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}.$$

Esta expressão de R mostra que é $R^2 \geq (\rho + \rho')^2$, e portanto temos o theorema seguinte:

O módulo de uma somma algebraica de imaginarios não pôde ser maior do que a somma dos módulos das parcellas.

II — O producto dos mesmos imaginarios é

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho' [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= \rho\rho' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]. \end{aligned}$$

Multiplicando este resultado por

$$z'' = \rho'' (\cos \theta'' + i \operatorname{sen} \theta'')$$

vem

$$zz'z'' = \rho\rho'\rho'' [\cos (\theta + \theta' + \theta'') + i \operatorname{sen} (\theta + \theta' + \theta'')].$$

Em geral temos

$$zz' \dots z^{(n-1)} = \rho\rho' \dots \rho^{(n-1)} [\cos (\theta + \theta' + \dots + \theta^{(n-1)}) + i \operatorname{sen} (\theta + \theta' + \dots + \theta^{(n-1)})],$$

e portanto o *módulo do producto de imaginarios é igual ao producto dos módulos dos factores, e o seu argumento é igual á somma dos argumentos dos factores.*

Se fôr $z = z' = \dots = z^{(n-1)}$, vem o resultado importante

$$z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

conhecido pelo nome de *formula de Moivre*.

■■■ — Dividindo por z o imaginario

$$u = r (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{u}{z} &= \frac{r}{\rho} \frac{(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} \\ &= \frac{r}{\rho} [\cos (\omega - \theta) + i \operatorname{sen} (\omega - \theta)], \end{aligned}$$

e portanto o *módulo do quociente de dous imaginarios é igual ao quociente da divisão do módulo do dividendo pelo módulo do divisor, e o seu argumento é igual á diferença entre o argumento do dividendo e o argumento do divisor.*

Dividindo este resultado por z' , vem

$$\frac{u}{zz'} = \frac{r}{\rho\rho'} [\cos (\omega - \theta - \theta') + i \operatorname{sen} (\omega - \theta - \theta')].$$

Em geral, temos

$$\frac{u}{z z' \dots z^{(n-1)}} = \frac{r}{\rho \rho' \dots \rho^{(n-1)}} [\cos (\omega - \theta - \theta' - \dots - \theta^{(n-1)}) + i \operatorname{sen} (\omega - \theta - \dots - \theta^{(n-1)})].$$

Fazendo $r = 1$, $\omega = 0$, $z = z' = \dots = z^{(n-1)}$, resulta

$$z^{-n} = \rho^{-n} [\cos (-n\theta) + i \operatorname{sen} (-n\theta)],$$

convencionando representar $\frac{1}{z^n}$ por z^{-n} , como no caso das quantidades reaes.

Vê-se pois que a *formula de Moivre* ainda tem logar quando o expoente é um numero inteiro negativo.

IV — Passemos á extracção das raizes.
Veamos se pôde ser

$$\sqrt[n]{\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} = r (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega).$$

Para ter logar esta igualdade deve ser

$$\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r^n (\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega),$$

ou

$$\rho \cos \theta = r^n \cos n\omega, \quad \rho \operatorname{sen} \theta = r^n \operatorname{sen} n\omega,$$

d'onde se deduz

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\omega = \theta + 2k\pi,$$

representando por k um inteiro que pôde ter todos os valores positivos e negativos desde zero até ao infinito.

Vem pois

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \\ &= \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right] \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

O binomio

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$$

só tem n valores diferentes, correspondentes a $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, pois é facil de vêr que, quando a k se dá valores maiores ou menores do que estes, o seno e coseno, que entram no binomio, retomam os valores correspondentes aos valores precedentes de k .

Logo *todo o radical de indice n tem n valores diferentes, que a formula, que vimos de achar, determina.*

Das consequencias d'este theorema importante faremos notar as seguintes:

4.º—As regras para o calculo dos radicaes foram demonstradas na Arithmetica para o valor unico de cada radical, que ahí se considera. O theorema precedente permite verificar se estas regras se estendem ou não a todos os n valores do radical.

Assim, para verificar que é

$$\sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{zz'},$$

basta attender á igualdade

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \\ &\quad \times \sqrt[n]{\rho'} \left[\cos \left(\frac{\theta'}{n} + \frac{2k'\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta'}{n} + \frac{2k'\pi}{n} \right) \right] \\ &= \sqrt[n]{\rho\rho'} \left[\cos \left(\frac{\theta + \theta'}{n} + \frac{2(k + k')\pi}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + \theta'}{n} + \frac{2(k + k')\pi}{n} \right) \right], \end{aligned}$$

cujo primeiro membro representa $\sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{z'}$ e cujo segundo membro representa $\sqrt[n]{zz'}$.

Do mesmo modo se verifica a relação

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[mn]{z}.$$

Da primeira d'estas igualdades são, como se sabe, consequências as seguintes:

$$\sqrt[n]{\frac{z}{z'}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{z'}}, \quad (\sqrt[n]{z})^m = \sqrt[n]{z^m}.$$

A igualdade, verdadeira em Arithmetica,

$$\sqrt[np]{z^{mp}} = \sqrt[n]{z^m}$$

não tem logar no caso em que se consideram os radicaes com toda a generalidade, visto que o primeiro membro tem np valores e o segundo membro tem sómente n valores.

2.º — Elevando ambos os membros da formula considerada á potencia m , e convencionando representar $\sqrt[n]{z^m}$ por $z^{\frac{m}{n}}$, como no caso das quantidades reaes, vem a formula

$$\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}} = \rho^{\frac{m}{n}} \left[\cos \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right],$$

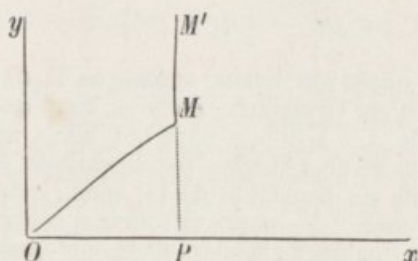
de que adiante faremos uso.

9. — *Representação geometrica dos imaginarios.* — O imaginario $a + bi$ pôde ser representado geometricamente pelo ponto M cuja abscissa é a e cuja ordenada é b , visto que a cada valor do imaginario corresponde uma posição determinada do ponto M , e reciprocamente a cada posição do ponto corresponde um valor determinado do imaginario.

Representando por ρ a recta OM e por θ o angulo MOP , temos

$$a + ib = OP + iMP = \rho (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Logo a recta OM representa o *módulo* e o angulo MOP representa o *argumento* do imaginario considerado.



As operações sobre imaginarios correspondem operações geometricas determinadas. Assim a somma dos imaginarios $a + ib$ e $a' + ib'$, cujos módulos são ρ e ρ' e cujos argumentos são θ e θ' , é representada pelo ponto M' que se obtém tirando primeiramente pela origem das coordenadas uma recta OM cujo comprimento seja ρ e cuja inclinação sobre o eixo das abscissas seja θ , e em seguida tirando pela extremidade M d'esta recta outra MM' cujo comprimento seja ρ' e cuja inclinação sobre o eixo das abscissas seja θ' . Com effeito, as coordenadas do ponto M' são

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta', \quad \rho \sin \theta + \rho' \sin \theta',$$

e portanto o imaginario que M' representa é o seguinte:

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta' + i (\rho \sin \theta + \rho' \sin \theta'),$$

que coincide effectivamente com a somma dos imaginarios considerados.

IV

Noção de limite

10. — A noção de *limite* appareceu já na Arithmetica e nos Elementos de Geometria, onde se disse que uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u se os valores successivos da variavel se approximam indefinidamente da constante de tal modo que o valor absoluto da differença $A - u$ possa tomar e conservar um valor menor do que qualquer grandeza dada, por mais pequena que seja.

Em termos mais precisos póde dizer-se que *uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u , que passa por uma infinidade de valores successivos $u_1, u_2, \text{etc.}$, quando a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que a desigualdade*

$$(1) \quad |A - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1 .

D'esta definição deduzem-se immediatamente as consequencias seguintes :

1.º — *A variavel u não póde tender ao mesmo tempo para dous limites differentes.* Com effeito, se u tendesse tambem para uma quantidade B , differente de A , existiria um numero n_2 tal que seria

$$|B - u_n| < \delta$$

quando $n > n_2$. Logo a desigualdade (n.º 8—1)

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - u_n + u_n - B| \\ &\leq |A - u_n| + |B - u_n| < 2\delta \end{aligned}$$

seria satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 e n_2 ; o que

é absurdo, visto que δ é tão pequeno quanto se queira e $A - B$ é constante.

2.º — Se os valores successivos de uma variavel u estão constantemente comprehendidos entre os valores correspondentes de duas quantidades variaveis v e w que tendem para o mesmo limite A , u tende tambem para A . Com effeito, como as desigualdades

$$|A - v_n| < \delta, \quad |A - w_n| < \delta$$

são satisfeitas, por hypothese, a primeira pelos valores de n superiores a um numero n_1 e a segunda pelos valores de n superiores a n_2 , as duas desigualdades são satisfeitas, ao mesmo tempo, pelos valores de n superiores ao maior dos numeros n_1 e n_2 . Porisso e porque $A - u_n$ está comprehendido entre $A - v_n$ e $A - w_n$, a desigualdade

$$|A - u_n| < \delta$$

é satisfeita por estes mesmos valores de n , e portanto u tende para A .

3.º — Se os valores successivos da variavel u são todos inferiores a um numero L , u não pôde tender para um numero superior a L . Com effeito, temos, por hypothese,

$$A - u_n > A - L.$$

Logo, se fosse $A > L$, não podia ter logar a desigualdade (1) quando a δ se dessem valores inferiores a $A - L$.

4.º — Se os valores successivos da variavel u são todos superiores a um numero L , u não pôde tender para um numero inferior a L . Com effeito, temos

$$u_n - A > L - A.$$

Logo, se fosse $A < L$, a desigualdade (1) não poderia ter logar quando fosse $\delta < L - A$.

11. — O problema que consiste em procurar se uma quantidade variavel tende ou não para um limite, pôde ser substituido por outro, em que se procura se uma certa quan-

tidade tende ou não para zero, em virtude do seguinte theorema importante, devido a Cauchy (1).

Sejam $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ os valores successivos que toma a variavel u . E' condição necessaria e sufficiente para que u tenda para um limite, que a cada valor que se dê á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desigualdade

$$(2) \quad |u_{n+p} - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1 , combinados com todos os valores de p .

Com effeito, se u tende para um limite A , a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades

$$|u_{n+p} - A| < \frac{1}{2} \delta, \quad |u_n - A| < \frac{1}{2} \delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1 . Logo tambem é satisfeita pelos mesmos valores de n a desigualdade (2), visto que é

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - A| + |A - u_n| < \delta.$$

Demonstremos agora que, reciprocamente, quando a desigualdade (2) tem logar, u tende para um limite.

Dê-se a δ um valor particular δ_1 e representa-se por α o valor correspondente de n_1 . Por ser, por hypothese,

$$|u_{n+p} - u_{\alpha+1}| < \delta_1$$

quando $n > \alpha$, os valores correspondentes de u_{n+p} estão comprehendidos entre as quantidades $u_{\alpha+1} - \delta_1$ e $u_{\alpha+1} + \delta_1$, que representaremos por v_1 e w_1 .

Dê-se em seguida a δ o valor δ_2 , menor do que δ_1 , e seja β o valor correspondente de n_1 . Vê-se do mesmo modo que os valores que toma u_{n+p} , quando $n > \beta$, estão comprehendidos entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$. Logo os valores que toma u_{n+p} , quando a n se dá valores que satisfazem ao

(1) Cauchy — Cours d'Analyse.

mesmo tempo ás duas condições $n > \alpha$ e $n > \beta$, estão compreendidos entre v_1 e w_1 e entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$, e portanto entre a maior das quantidades v_1 e $u_{\beta+1} - \delta_2$, que representaremos por v_2 e a menor das quantidades w_1 e $u_{\beta+1} + \delta_2$; que representaremos por w_2 ; e vê-se que é

$$v_2 \geq v_1, w_2 \leq w_1, w_2 - v_2 \leq 2\delta_2.$$

Continuando do mesmo modo, forma-se um grupo de numeros crescentes

$$v_1, v_2, \dots, v_m, \dots$$

e um grupo de numeros decrescentes

$$w_1, w_2, \dots, w_m, \dots,$$

que satisfazem á condição

$$w_m - v_m \leq 2\delta_m;$$

e vê-se que u_{n+p} está compreendido entre v_m e w_m quando n é maior do que as m quantidades α, β , etc.

Seja agora

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$$

um grupo de numeros crescentes e

$$b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$$

um grupo de numeros decrescentes, que se formam tomando um numero racional entre cada par de numeros dos grupos anteriores. Como a_m e b_m estão compreendidos entre v_m e w_m , teremos

$$b_m - a_m \leq w_m - v_m \leq 2\delta_m.$$

D'esta desigualdade e da circumstancia de δ_m poder ser tão pequeno, quanto se queira, conclue-se que os dous grupos precedentes determinam um numero racional ou irracional c , compreendido entre a_m e b_m .

Por outra parte, como u_{n+p} está compreendido entre

u_{m+1} e w_{m+1} quando n é superior ás $m+1$ quantidades $\alpha, \beta, \text{etc.}$, u_{n+p} está também comprehendido entre a_m e b_m .
Temos pois a desigualdade

$$|c - u_{n+p}| \leq b_m - a_m \leq 2\delta_m,$$

que é satisfeita pelos valores de $n+p$ superior ás $m+1$ quantidades $\alpha, \beta, \text{etc.}$, e da qual se conclue que u tende para c .

COROLLARIOS. — 1.º — *Se a quantidade variavel u cresce constantemente, sem todavia poder exceder um valor determinado L , u tende para um limite.*

Com effeito, se u não tendesse para um limite determinado, existiria, em virtude do theorema precedente, um valor de δ e um valor de p taes que, por maior que fosse o inteiro n_1 , a desigualdade

$$u_{n+p} - u_n \geq \delta$$

seria satisfeita por um valor $n = \alpha$ superior a n_1 . Teriamos pois

$$u_{\alpha+p} \geq u_{\alpha} + \delta.$$

Do mesmo modo, deveria existir um numero β maior do que $\alpha + p$ tal que

$$u_{\beta+p} \geq u_{\beta} + \delta,$$

e portanto teriamos

$$u_{\beta+p} > u_{\alpha+p} + \delta > u_{\alpha} + 2\delta,$$

visto ser $u_{\beta} > u_{\alpha+p}$.

Continuando do mesmo modo, achariamos a desigualdade

$$u_{\omega+p} > u_{\alpha} + k\delta,$$

da qual resultaria o poder $u_{\omega+p}$ tornar-se maior do que L dando a k um valor sufficientemente grande, o que é contra a hypothese.

2.º — *Se a quantidade variavel u decresce constantemente sem todavia poder ser inferior a um numero l determinado, u tende para um limite.*

Demonstra-se este corollario de um modo semelhante ao empregado para demonstrar o anterior.

12. — Seja agora u uma quantidade variavel cujos valores dependem dos valores de outra quantidade variavel x , e supponhamos que x tende para o limite a . A definição de limite leva immediatamente á consequencia seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A , quando x tende para a , que, a cada valor que se dê á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um valor ε tal que a desigualdade

$$(3) \quad |A - u| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição

$$(4) \quad |x - a| < \varepsilon.$$

Com effeito, se u tende para A , a cada valor de δ , por pequeno que seja, corresponde um valor x' tal que a desigualdade (3) é satisfeita pelos valores por que passa successivamente x desde x' até a .

Como porém x tende tambem, por hypothese, para a , a cada valor de ε_1 corresponde um valor x'' tal que a desigualdade

$$|x - a| < \varepsilon_1$$

é satisfeita pelos valores por que passa x desde x'' até a .

Diminuindo ε_1 , os valores de x'' approximam-se tanto quanto se queira de a , e podemos portanto dar a ε_1 um valor ε tal que x , na sua passagem para a , encontre x'' depois de x' . Temos achado pois uma quantidade ε tal que todos os valores de x que satisfazem a (4) satisfazem tambem a (3), que é o que se pretendia demonstrar.

Reciprocamente, supponhamos que existe um valor ε tal que a desigualdade (3) é satisfeita pelos valores de x que satisfazem a (4). Se notarmos que a desigualdade (4) é satisfeita, por hypothese, pelos valores por que passa successivamente x quando varia desde um valor x' até a , conclue-se que (3) é satisfeita pelos mesmos valores de x , e portanto que u tende para A .

Para designar que u tende para A quando x tende para a , escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} u = A.$$

Muitas questões importantes de Analyse levam a procurar o limite para que tendem quantidades dadas. Os principios seguintes facilitam esta indagação.

1.º — *O limite para que tende a somma de duas quantidades variaveis, dependentes de x , que tendem para limites determinados, quando x tende para a , existe e é igual á somma dos limites para que tendem as parcellas.*

Sejam u e v as duas quantidades variaveis, dependentes de x , que tendem para os limites A e B quando x tende para a .

Ha, por hypothese, uma quantidade positiva ε' tal que a desigualdade

$$|A - u| < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon'$.

Do mesmo modo, ha uma quantidade positiva ε'' tal que a desigualdade

$$|B - v| < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon''$.

Logo, chamando ε a menor das quantidades ε' e ε'' , a desigualdade (n.º 8 — I)

$$|A - u + B - v| < \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon$; e portanto a quantidade $u + v$ tende para o limite $A + B$.

2.º — *O limite para que tende o producto uv existe e é igual ao producto dos limites para que tendem os factores.*

Deduz-se este principio da identidade

$$AB - uv = A(B - v) + v(A - u).$$

Com effeito, por ser A o limite para que tende u , ha sempre um valor positivo ϵ' tal que a desigualdade

$$|A - u| < \delta'$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que verificam a condição $|x - a| < \epsilon'$. Chamando pois M um numero maior do que os valores que toma $|v|$ quando a x se dá todos os valores que satisfazem á condição precedente, vem

$$M |A - u| < M \delta'$$

e á fortiori

$$|v| |A - u| < M \delta' = \frac{1}{2} \delta.$$

Esta desigualdade é pois satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \epsilon'$.

Do mesmo modo se vê que ha sempre um valor ϵ'' tal que a desigualdade

$$|A| |B - v| < \frac{1}{2} \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \epsilon''$.

Logo a desigualdade

$$|AB - uv| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \epsilon$; e portanto uv tende para o limite AB .

3.º — O limite para que tende o quociente $\frac{u}{v}$ existe e é igual ao quociente dos limites para que tendem u e v , quando v não tende para zero.

Com effeito, pondo

$$\frac{u}{v} = w, \quad \frac{A}{B} = C,$$

a identidade

$$w - C = \frac{u - A}{v} + \frac{A(B - v)}{Bv}$$

mostra, como no caso anterior, que existe sempre um valor ε tal que as desigualdades

$$\left| \frac{u - A}{v} \right| < \frac{1}{2} \delta, \left| \frac{A(B - v)}{Bv} \right| < \frac{1}{2} \delta$$

são satisfeitas pelos valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon$.

Logo a desigualdade

$$|w - C| < \delta$$

é satisfeita pelos mesmos valores de x ; e portanto $\frac{u}{v}$ tende para $\frac{A}{B}$.

13. — Tudo o que se disse no numero precedente applica-se ao caso de u depender de muitas quantidades variaveis x, y, z , etc. Assim, demonstra-se, procedendo como no caso de uma variavel, o principio seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A , quando x, y , etc. tendem respectivamente para a, b , etc., que, a cada valor que se dê á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, correspondam valores $\varepsilon, \varepsilon'$ etc. taes que a desigualdade

$$|A - u| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de x, y , etc. que verificam as condições

$$|x - a| < \varepsilon, |x - b| < \varepsilon', \text{ etc.}$$

D'este principio deduzem-se, para o caso de muitas variaveis, consequencias semelhantes ás que no numero anterior se deduziram para o caso de uma só variavel.

14. — Diz-se que uma quantidade variavel *tende para ∞* quando esta quantidade augmenta indefinidamente de tal modo

que chega a ser e a conservar-se superior a todo o numero dado, por maior que este seja; e diz-se que uma quantidade *tende para* $-\infty$ quando esta quantidade diminue indefinidamente de tal modo que o seu valor absoluto chega a ser e a conservar-se superior a todo o numero dado, por maior que este seja.

Se uma quantidade variavel u depende de outra quantidade variavel x , e aquella tende para um limite A quando x tende para o infinito, escreve-se

$$\lim_{x = \infty} u = A$$

quando x tende para ∞ , e

$$\lim_{x = -\infty} u = A$$

quando x tende para $-\infty$.

Se notarmos que $\frac{1}{x}$ tende para 0, quando x tende para o infinito, e que tende para o infinito, quando x tende para 0, podemos dos theoremas anteriormente demonstrados para o caso de x tender para um limite a deduzir outros correspondentes para o caso de x tender para o infinito. Assim, por exemplo, podemos enunciar o theorema seguinte:

A somma, o producto e o quociente de duas funcções u e v que tendem para os limites A e B , quando x tende para o infinito, tendem respectivamente para $A + B$, AB e $\frac{A}{B}$ (quando B é diferente de zero).

Com effeito, u e v tendendo para A e B quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, $u + v$, uv , etc. tendem para $A + B$, AB , etc., quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, isto é quando x tende para o infinito.

15.—Consideremos agora a quantidade imaginaria $u + iv$, que passa successivamente pelos valores $u_1 + iv_1$, $u_2 + iv_2$, etc. Diz-se que esta quantidade tende para o limite $A + iB$ quando u tende para A e v tende para B .

E' consequencia immediata d'esta definição o principio seguinte:

I—É condição necessária e suficiente para que $u + iv$ tenda para o limite $A + iB$ que o módulo da diferença entre a quantidade $u + iv$ e o limite tenda para zero.

Com effeito, se u e v tendem para A e B , a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades

$$|A - u_n| < \delta, \quad |B - v_n| < \delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1 . Logo a desigualdade

$$|A - u_n + i(B - v_n)| = \sqrt{(A - u_n)^2 + (B - v_n)^2} < \delta \sqrt{2}$$

é satisfeita pelos mesmos valores de n , e o módulo considerado tende portanto para zero.

Reciprocamente, se é

$$\sqrt{(A - u_n)^2 + (B - v_n)^2} < \delta \sqrt{2}$$

quando $n > n_1$, é também

$$|A - u_n| < \delta \sqrt{2}, \quad |B - v_n| < \delta \sqrt{2},$$

e portanto u tende para A e v tende para B .

II—É condição necessária e suficiente para que $u + iv$ tenda para um limite que, a cada valor que se dê á quantidade δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desigualdade

$$(5) \quad |u_{n+p} - u_n + i(v_{n+p} - v_n)| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p .

Deduz-se facilmente este theorema da igualdade (n.º 8)

$$\begin{aligned} & |u_{n+p} - u_n + i(v_{n+p} - v_n)| \\ &= + \sqrt{(u_{n+p} - u_n)^2 + (v_{n+p} - v_n)^2}. \end{aligned}$$

Com effeito, se $u + iv$ tende para um limite, a cada va-

lor da quantidade δ corresponde um valor n_1 tal que as desigualdades (n.º 11)

$$|u_{n+p} - u_n| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, |v_{n+p} - v_n| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p . Logo também a desigualdade (5) é satisfeita pelos mesmos valores de n e p , o que demonstra a primeira parte do theorema.

Reciprocamente, se δ representa uma quantidade tão pequena quanto se queira, e é satisfeita a desigualdade (5) quando $n > n_1$, qualquer que seja p , temos

$$(u_{n+p} - u_n)^2 + (v_{n+p} - v_n)^2 < \delta^2;$$

logo as desigualdades

$$|u_{n+p} - u_n| < \delta, |v_{n+p} - v_n| < \delta$$

são satisfeitas pelos mesmos valores de n e p . As variáveis u e v tendem pois (n.º 11) para limites determinados, assim como $u + iv$.

V

Séries

16. — Depois de considerar expressões analyticas compostas de um numero finito de operações é natural passar a considerar expressões analyticas compostas d'um numero infinito de operações, isto é, as *séries*, os *productos infinitos* e as *fracções continuas*. Vamos poi estudar estas expressões, limitando-nos porém aos casos mais simples e mais usados.

17. — *Séries de termos reaes.* — As séries são expressões da fórmula

A serie representa um numero, que é o limite para que tende, de, de, $+ u_2 + \dots + u_n + \dots$, quando n cresce indefinidamente.

Nem todas as propriedades das sommas são applicáveis ás series.

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

em que o numero das parcelas é infinito. O termo u_n é o termo geral por meio do qual se formam todos os outros dando a n os valores 1, 2, 3, etc. Empregando o signal Σ para designar sommas, esta expressão pôde ser escripta do modo seguinte:

$$\sum_1^{\infty} u_n.$$

Se a somma s_n dos n primeiros termos da série, isto é, a somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

tende para um limite determinado quando n augmenta indefinidamente, diz-se que a série é *convergente*. Este limite chama-se *somma da série*.

As séries que não são convergentes chamam-se *divergentes*.

EXEMPLO 1.º — A progressão

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

é convergente quando o valor absoluto de x é menor do que a unidade, pois que a somma dos seus n primeiros termos, isto é

+ porque como $|x| < 1$, x^n vai aproximando-se de zero, quando n augmenta e portanto $\frac{x^n}{1-x}$ tende para zero.

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

tende para o limite $\frac{1}{1-x}$ quando n augmenta indefinidamente.

Podemos pois escrever

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, a somma s_n augmenta indefinidamente e a série é *divergente*.

Se é $x = 1$, a série é divergente.
 Se é $x = -1$, vem

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots,$$

e a série toma alternadamente os valores zero e um, e portanto é divergente.

EXEMPLO 2.º—A série importante

$$(2) \quad \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \dots$$

é convergente quando $a > 1$, e é divergente quando $a \leq 1$.

Seja primeiramente $a > 1$. Reunindo os termos em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^b , etc. termos, a série considerada pôde ser escripta do modo seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^a} + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \right) + \left(\frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{7^a} \right) + \dots \\ + \left[\frac{1}{(2^b)^a} + \frac{1}{(2^b + 1)^a} + \dots + \frac{1}{(2^{b+1} - 1)^a} \right] + \dots \end{aligned}$$

Notando agora que a somma dos termos de cada grupo é menor do que o producto do primeiro termo pelo seu numero de termos, temos

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} < \frac{1}{2^{a-1}}$$

$$\frac{1}{4^a} + \dots + \frac{1}{7^a} < \frac{1}{2^{2(a-1)}}$$

.....

$$\frac{1}{(2^b)^a} + \frac{1}{(2^b + 1)^a} + \dots + \frac{1}{(2^{b+1} - 1)^a} < \frac{1}{2^{b(a-1)}}$$

.....;

e portanto

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} < 1 + \frac{1}{2^{a-1}} \\ + \frac{1}{2^{2(a-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{b(a-1)}} + \dots$$

O segundo membro d'esta desigualdade, por ser uma progressão geometrica decrescente, tem um valor determinado; logo o primeiro membro, que augmenta com n sem poder exceder este valor, tende para um limite determinado, e a série proposta é convergente.

No caso de ser $a = 1$, a série (2) tem o nome de *série harmonica* e é divergente. Para o demonstrar basta dispôr os seus termos em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^b , etc. termos do modo seguinte:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{2^b + 1} + \frac{1}{2^b + 2} + \dots + \frac{1}{2^b + 1}\right) + \dots$$

Com effeito, notando que a somma dos termos de cada grupo é maior do que o producto do ultimo termo do grupo pelo numero de termos, temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

.....

$$\frac{1}{2^b + 1} + \frac{1}{2^b + 2} + \dots + \frac{1}{2^b + 1} > \frac{1}{2}$$

.....

Logo a somma s_n dos n primeiros termos da série (2) pôde tornar-se maior do que $\frac{m}{2}$, por maior que seja o valor do inteiro m , dando a n um valor sufficientemente grande; e a série é portanto divergente.

Se é $a < 1$, temos

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Quando n tende para o infinito, o segundo membro d'esta desigualdade tende para o infinito; logo tambem tende para o infinito o primeiro membro, e a série proposta é divergente.

18. — Do theorema demonstrado no n.º 14 tira-se immediatamente os dous principios seguintes, conhecidos pelo nome de *principios geraes de convergencia e divergencia*:

1.º — Se a série (1) é convergente, a cada valor que se dá á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p .

2.º — Reciprocamente, se a cada valor que se dá á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , a série (1) é convergente.

D'estes principios tira-se, pondo $p = 1$, o corollario seguinte:

E' condição necessaria para que a série (1) seja convergente, que o valor dos seus termos tenda para zero, quando a ordem d'elles augmenta indefinidamente.

19. — Não ha criterio geral para decidir se uma série dada é convergente; ha apenas regras abrangendo maior ou menor numero de casos. Aqui exporemos apenas as seguintes:

I — Sejam

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

duas séries compostas de termos positivos, e seja p um nu-

mero determinado. Se, a partir do termo de ordem p , é sempre $u_m < v_m$ e a segunda série é convergente, a primeira também é convergente; se, pelo contrario, é $u_m > v_m$ e a segunda série é divergente a primeira também é divergente.

Com effeito, se é $u_m < v_m$ quando $m \geq p$, temos

$$\begin{aligned} u_1 + \dots + u_{p-1} + u_p + \dots + u_n \\ < u_1 + \dots + u_{p-1} + v_p + \dots + v_n. \end{aligned}$$

e portanto, chamando s_n e s'_n as sommas dos n primeiros termos da primeira e da segunda série e s' o limite para que tende s'_n quando n augmenta indefinidamente,

$$s_n < s'_n + u_1 + \dots + u_{p-1} < s' + u_1 + \dots + u_{p-1}.$$

A somma s_n augmenta pois indefinidamente com n sem poder exceder um valor determinado; logo (n.º 41) tende para um limite determinado.

Se, pelo contrario, é $u_m > v_m$ e a segunda série é divergente, acha-se do mesmo modo a desigualdade

$$s_n > s'_n - (v_1 + \dots + v_p).$$

cujo segundo membro augmenta indefinidamente com n ; logo tambem o primeiro membro augmenta indefinidamente com n , e portanto a primeira série é divergente.

Por exemplo, a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^n} + \dots$$

é convergente pois que cada termo, a partir do terceiro, é menor do que o termo correspondente da progressão geometrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

III -- Toda a série composta de termos positivos e negativos de que deriva uma série convergente pela mudança dos signaes dos termos negativos, é convergente.

Com effeito, a série

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

sendo, por hypothese, convergente, a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, deve corresponder (18 - 1.º) um numero n_1 tal que seja

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \delta$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p . D'aqui conclue-se que a desigualdade (8 - I)

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \delta$$

tambem é satisfeita pelos mesmos valores de n , e portanto que a série (1) é convergente.

As séries que estão no caso indicado n'este theorema, isto é as séries formadas de termos cujos valores absolutos formam uma série convergente, chamam-se *absolutamente convergentes*.

III — Se, a partir de um valor determinado p de n , a razão $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ dos valores absolutos de dous termos consecutivos da série (1) é sempre menor do que uma quantidade L inferior á unidade, a série é convergente; se esta razão é maior do que a unidade, a série é divergente (4).

Este criterio importante, devido a *Cauchy*, resulta da comparação da série proposta com uma progressão geometrica, como vamos vêr.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < L |u_p|, |u_{p+2}| < L |u_{p+1}|, \text{ etc.};$$

logo os termos da série

$$(3) \quad |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

são, a partir do termo de ordem p , menores do que os termos correspondentes da série

(4) Veja-se nos tomos VII e VIII do *Jornal de Sciencias mathematicas* algumas observações interessantes dos srs. *Lerch*, *Cesàro*, *Gützmér* e *Ed. Weyr* a respeito d'este theorema e dos dous seguintes.

$|u_1| + |u_1| + \dots + |u_{p-1}| + |u_p| (1 + L + L^2 + \dots)$,
 que é convergente quando $L < 1$, por ser n'este caso convergente a progressão

$$1 + L + L^2 + \dots$$

2 Logo a série (3) é convergente (th. I), assim como a série (4) (th. II)
 Se é, pelo contrario,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1,$$

o valor absoluto dos termos da série (4), a partir do termo de ordem p , cresce com n , e portanto a série é divergente (n.º 18).

COROLLARIO. — Se a razão $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tende para um limite determinado quando n augmenta indefinidamente, a série é convergente se este limite é menor do que a unidade, e é divergente se este limite é maior do que a unidade.

Seja l este limite e L um valor comprehendido entre l e 1. Se é $l < 1$, a desigualdade (n.º 10)

$$\left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - l \right| < L - l$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a um numero p , e portanto temos $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L < 1$, quando $n > p$. A série é pois convergente, em virtude do theorema precedente.

Se é $l > 1$, a desigualdade

$$\left| l - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right| < l - L$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a um numero p , e portanto temos $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > L > 1$. Logo a série é divergente.

Por exemplo, a série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

é convergente, qualquer que seja o valor que se dê a x , pois que a razão dos valores absolutos de dous termos consecutivos

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|$$

tende para 0 quando n augmenta indefinidamente.

IV — Se, para todos os valores de n a partir de um numero determinado p , a raiz $\sqrt[n]{|u_n|}$ é menor do que uma quantidade L inferior á unidade, a série (1) é convergente; se esta raiz é maior do que a unidade, a série é divergente.

Temos, por hypothese,

$$|u_p| < L^p, |u_{p+1}| < L^{p+1}, \text{ etc.};$$

logo os termos da série

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

são, a partir do termo de ordem p ; menores do que os termos correspondentes da série convergente

$$|u_1| + \dots + |u_{p-1}| + L^p (1 + L + L^2 + \dots).$$

Logo aquella série é convergente, assim como a série (1).

— Se é $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, é tambem $|u_n| > 1$ quando $n > p$, e portanto a série (1) é divergente.

Do theorema, que vimos de demonstrar, deduz-se um collario analogo ao que se deduziu do theorema anterior.

V — Se existir um numero a , maior do que a unidade, tal que, para todos os valores de n a partir de um numero determinado p , o producto $n^a |u_n|$ seja menor do que uma quantidade determinada K , a série (1) é convergente.

Com effeito, por ser

$$|u_p| < \frac{K}{p^a}, |u_{p+1}| < \frac{K}{(p+1)^a}, \text{ etc.},$$

os termos da série

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots,$$

a partir do termo de ordem p , são menores do que os termos correspondentes da série convergente ($n.^\circ$ 17)

$$|u_1| + \dots + |u_{p-1}| + K \left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \dots \right).$$

Logo aquella série é convergente, e portanto é também convergente (th. II) a série (1).

Se existir um numero a , igual ou inferior á unidade, tal que, para todos os valores de n , a partir de um numero determinado p , os termos da série (1) sejam positivos e o producto $n^a u_n$ seja maior do que K , a série (1) é divergente.

Com effeito, temos

$$u_p > \frac{K}{p^a}, \quad u_{p+1} > \frac{K}{(p+1)^a}, \text{ etc.,}$$

e portanto, a partir da ordem p , os termos da série (1) são maiores do que os termos correspondentes da série divergente

$$u_1 + \dots + u_{p-1} + K \left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \dots \right).$$

Logo a série (1) é divergente.

Assim, por exemplo, a série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

é divergente por ser

$$nu_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} > \frac{1}{2}.$$

VI — Seja L uma quantidade positiva e

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

um grupo composto de um numero infinito de numeros possi-
sivos. Se a desigualdade

$$a_n \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - a_{n+1} > L$$

fôr satisfeita pelos valores de n superiores a p , a série (1)
é convergente.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < \frac{1}{L} [a_p |u_p| - a_{p+1} |u_{p+1}|]$$

$$|u_{p+2}| < \frac{1}{L} [a_{p+1} |u_{p+1}| - a_{p+2} |u_{p+2}|]$$

.....

e portanto

$$|u_{p+1}| + \dots + |u_{p+m}|$$

$$< \frac{1}{L} [a_p |u_p| - a_{p+m} |u_{p+m}|] < \frac{a_p |u_p|}{L},$$

por maior que seja m . Logo

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| < |u_1| + \dots + |u_p| + \frac{a_p |u_p|}{L}.$$

Quando n tende para ∞ , o primeiro membro d'esta desigualdade augmenta sempre sem todavia poder exceder o valor determinado do segundo membro, e portanto tende para um limite. Logo a série

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

é convergente, assim como (II) a série (1).

D'este theorema, devido ao sr. Jensen ⁽¹⁾, tira-se como co-

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888.

rollario, pondo $a_n = n$, $a_{n+1} = n + 1$, etc., o theorema seguinte, devido a Raabe.

Se a desigualdade

$$n \left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1 \right) > 1 + L$$

fôr satisfeita por todos os valores de n superiores a um numero p , a série (1) é convergente.

VII — Seja

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Se u_n decresce constantemente e tende para zero quando n cresce indefinidamente, esta série é convergente.

Com effeito, por ser cada termo da série considerada maior do que o seguinte, a diferença

$$s_{n+p} - s_n = \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots]$$

tem o signal do primeiro termo. Mas esta diferença pôde ser escripta do modo seguinte

$$\pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots],$$

e vê-se então que o seu valor absoluto é menor do que u_{n+1} , pois que esta expressão deve ter o signal do primeiro termo. Temos pois

$$|s_{n+p} - s_n| < u_{n+1}.$$

Por outra parte, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde, por hypothese, um numero n_1 tal que é $u_{n+1} < \delta$ quando $n > n_1$.

Logo a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , e a série considerada é portanto (18 — 2.º) convergente.

Por exemplo, a série

$$1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5} + \dots$$

é convergente.

NOTA. — Fazendo nas formulas precedentes tender p para o infinito e notando que s_{n+p} tende para a somma s da série considerada, é facil de vêr que o erro que se commette, quando se toma para valor approximado de s a somma dos n primeiros termos da série, é menor do que o primeiro termo desprezado.

20. — *Séries de termos imaginarios.* — Consideremos agora as séries compostas de termos imaginarios, isto é as séries da fórma

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_m + iy_m) + \dots$$

ou

$$(4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} (x_m + iy_m) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m.$$

Se as séries

$$(5) \quad \sum_{m=1}^{\infty} x_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} y_m$$

são convergentes, a série (3) diz-se *convergente*. N'este caso a somma s_n dos seus n primeiros termos, isto é a somma

$$s_n = \sum_{m=1}^n (x_m + iy_m) = \sum_{m=1}^n x_m + i \sum_{m=1}^n y_m$$

tende para um limite determinado, que se chama *somma da série* (4).

A respeito da convergencia das séries de termos imaginarios vamos demonstrar os theoremas seguintes :

THEOREMA 1.º — *E' condição necessaria e sufficiente para que a série (4) seja convergente que a cada valor que se dê á quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desigualdade*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} x_m + i \sum_{n+1}^{n+p} y_m \right| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 , qualquer que seja p .

Esta proposição é uma consequencia immediata do theorema II do n.º 15.

THEOREMA 2.º—*Para que a série (4) seja convergente basta que a série formada pelos módulos dos seus termos o seja.*

Com effeito, das desigualdades

$$|x_m| < \sqrt{x_m^2 + y_m^2}, \quad |y_m| < \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

deduz-se (49 — I) que, quando a série

$$(6) \quad \sum_1^{\infty} \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

é convergente, tambem são convergentes as séries

$$(7) \quad \sum_1^{\infty} |x_m|, \quad \sum_1^{\infty} |y_m|.$$

Logo as séries (5) são (49 — II) convergentes, assim como a série (4).

O theorema reciproco do precedente não é sempre verdadeiro. isto é, pôde ser convergente a série (4) e não o ser a série correspondente dos módulos. Ha porém um caso muito importante em que esta proposição reciproca é verdadeira, que é quando as séries (7) são convergentes. Com effeito, n'este caso temos

$$\sqrt{x_m^2 + y_m^2} < |x_m| + |y_m|$$

e portanto

$$\sum_1^n \sqrt{x_m^2 + y_m^2} < \sum_1^n |x_m| + \sum_1^n |y_m|.$$

Quando n augmenta indefinidamente, o segundo membro d'esta desigualdade tende, por hypothese, para um limite, e

o primeiro membro augmenta constantemente sem poder exceder este limite. Logo tende tambem para um limite e a série (6) é convergente.

21. — *Séries absolutamente convergentes.* — As séries formadas de termos cujos módulos formam uma série convergente chamam-se *séries absolutamente convergentes*. A respeito d'estas séries vamos demonstrar o seguinte theorema importante, devido a *Dirichlet*:

THEOREMA 3.º — *A somma de uma série absolutamente convergente não se altera quando se muda a ordem dos seus termos.*

Seja s_n a somma dos n primeiros termos da série dada e s'_p a somma dos p primeiros termos da nova série, que resulta de mudar a ordem dos termos da primeira. Suppondo que se dá a p um valor sufficientemente grande para que s'_p contenha todos os termos de s_n , e chamando u_α, u_β , etc. os termos que aquella somma contém a mais, vem

$$s'_p - s_n = u_\alpha + u_\beta + \dots + u_p;$$

ou, attendendo ao theorema 4.º do n.º 8,

$$\begin{aligned} |s'_p - s_n| &\leq |u_\alpha| + |u_\beta| + \dots + |u_p| \\ &\leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_p|. \end{aligned}$$

Por ser convergente a série $\sum_1^\infty |u_m|$, o segundo membro d'esta desigualdade tende para zero quando n augmenta indefinidamente; logo o módulo da differença $s'_p - s_n$ tende para o limite zero, e portanto s'_p tende para o mesmo limite que s_n .

COROLLARIO. — *N'uma série formada de termos reaes pode-se alterar a ordem das parcelas sem mudar o valor da série se, dando a todos os termos da série o signal +, resultar uma série convergente.*

NOTA. — A respeito do theorema que precede faremos as seguintes observações importantes:

I — Se a série proposta não fôr absolutamente convergente não se pôde mudar sempre a ordem dos seus termos, porque d'esta mudança podem provir, como fez notar *Riemann*, ou novas séries convergentes com valores differentes

Francisco
7, 3.º Aug. 251

da primeira ou séries divergentes. E' o que mostra claramente o exemplo seguinte (1):

$$U = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \dots$$

Com effeito, dando outra disposição aos termos d'esta série, vem

$$\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) - \frac{2}{2(n+1)} - \left(2 - \frac{2}{2}\right) - \frac{2}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{6}\right) - \frac{2}{8} + \dots$$

$$\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) - \frac{2}{2(i+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} U.$$

III — Se a série dada não fôr absolutamente convergente, é sempre possível reunir os seus termos em grupos de modo a transformal-a n'uma série absolutamente convergente. Esta observação importante é devida ao sr. Ed. Weyr, que a demonstrou do modo seguinte (2):

Seja $\sum_1 u_n$ a série dada e $\sum_1 b_n$ uma série convergente arbitraria formada de termos positivos. Por ser convergente a série dada, aos numeros $b_1, b_2, \text{ etc.}$ correspondem (20 — 1.º) numeros $n', n'', \text{ taes}$ que é

$$\left| \sum_{n_1+1}^{n_1+p_1} u_m \right| < b_1, \quad \left| \sum_{n_2+1}^{n_2+p_2} u_m \right| < b_2, \text{ etc.}$$

quando $n_1 > n', n_2 > n'', \text{ etc.}$, qualquer que seja o valor dos numeros $p_1, p_2, \text{ etc.}$ Logo, se dermos a n_2 um valor maior do que n_1 e n'' , a n_3 um valor maior do que n_2 e n''' , etc., temos

$$\left| \sum_{n_1+1}^{n_2} u_m \right| < b_1, \quad \left| \sum_{n_1+1}^{n_3} u_m \right| < b_2, \text{ etc.,}$$

e portanto os termos da série

(1) Longchamps: *Algèbre* (Paris, 1889), pag. 166.

(2) Ed. Weyr — *Deux remarques relatives aux séries* (*Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, tomo VIII).

$$\left| \sum_1^{n_1} u_m \right| + \left| \sum_{n_1+1}^{n_2} u_m \right| + \left| \sum_{n_2+1}^{n_3} u_m \right| + \dots$$

são, a partir do segundo, menores do que os termos correspondentes da série convergente

$$\left| \sum_1^{n_1} u_m \right| + b_1 + b_2 + \dots,$$

e portanto aquella série é convergente. A série formada por grupos de termos da proposta

$$\left(\sum_1^{n_1} u_m \right) + \left(\sum_{n_1+1}^{n_2} u_m \right) + \left(\sum_{n_2+1}^{n_3} u_m \right) + \dots$$

é pois absolutamente convergente.

22. — *Operações sobre séries.* — Passando agora às operações sobre séries, demonstraremos a este respeito os dois theoremas seguintes, devidos a *Cauchy*:

THEOREMA 4.^o — *Se as séries*

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

forem convergentes e se as suas sommas forem s e s' , tambem a série cujo termo geral é $u_n + v_n$ será convergente, e a sua somma será igual a $s + s'$.

Com effeito, a somma dos n primeiros termos da nova série é $\sum_1^n u_n + \sum_1^n v_n$, e esta somma tende para o limite $s + s'$.

THEOREMA 5.^o — *Se as séries*

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

forem absolutamente convergentes ⁽¹⁾ e as suas sommas forem s e s' , tambem a série

(¹) Veja-se no tomo 79 do *Jornal de Crelle* uma generalisação d'este theorema devida ao sr. *Mertens*.

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots,$$

cujo termo geral T_n é a somma de todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas da equação $\alpha + \beta = n + 1$, é convergente, e a sua somma é igual a ss' .

Com effeito, a somma S_p dos p primeiros termos da nova série contém todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas das equações:

$$\alpha + \beta = 2, 3, 4, \dots, p + 1.$$

Por outra parte o producto $s_n s'_n$ dos n primeiros termos das séries dadas contém como parcellas todos os valores de $u_\alpha v_\beta$ correspondentes aos valores inteiros positivos de α e β desde 1 até n , isto é, a todas as soluções inteiras positivas das equações

$$\alpha + \beta = 2, 3, \dots, 2n,$$

que não excederem n em grandeza.

Logo, dando a p um valor maior do que $2n - 1$, vem

$$S_p - s_n s'_n = u_i v_j + u_k v_l + \dots + u_r v_t,$$

onde cada parcella tem um dos indices superior a n e inferior a $p + 2$, e o outro inferior a $p + 2$.

Portanto, chamando ρ_1, ρ_2 , etc. os módulos de u_1, u_2 , etc., ρ'_1, ρ'_2 , etc. os módulos de v_1, v_2 , etc., M a somma dos primeiros e N a somma dos segundos, temos (n.º 8 - 1)

$$\begin{aligned} |S_p - s_n s'_n| &\leq \rho_i \rho'_j + \rho_k \rho'_l + \dots + \rho_r \rho'_t \\ &\leq (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{p+1}) (\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \dots + \rho'_{p+1}) \\ &+ (\rho'_1 + \rho'_2 + \dots + \rho'_{p+1}) (\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \dots + \rho_{p+1}) \\ &< M(\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \dots + \rho'_{p+1}) + N(\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \dots + \rho_{p+1}). \end{aligned}$$

Como as séries $\rho_1 + \rho_2 + \dots, \rho'_1 + \rho'_2 + \dots$ são, por hypothese, convergentes, o segundo membro da desigualdade precedente tende para o limite zero á medida que n augmen-

ta; logo S_p tende para o mesmo limite que $s_n s'_n$, isto é, para o limite ss' .

23. — *Séries cujos termos depen' em de uma variavel.*
— Passando agora a considerar especialmente as séries cujos termos dependem de uma quantidade variavel z , principiemos pelas séries ordenadas segundo as potencias de z , isto é pelas séries da fórmula

$$(8) \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m, \quad z = x + iy,$$

e demonstremos o seguinte theorema, devido a *Abel*:

THEOREMA 6.º — *Se existe um numero positivo α que, substituido em (8) no logar do módulo de z , torna os módulos de todos os termos da série inferiores a uma quantidade finita B , a série (8) é absolutamente convergente todas as vezes que se derem a z valores cujos módulos sejam inferiores a α .*

Seja z_1 um valor de z cujo módulo é menor do que α . Por ser, por hypothese,

$$|c_m| \alpha^m < B,$$

temos

$$|c_m| |z_1|^m < B \left| \frac{z_1}{\alpha} \right|^m,$$

e portanto os termos da série

$$\sum_1^{\infty} |c_m| |z_1|^m$$

são menores do que os termos correspondentes da progressão

$$\sum_1^{\infty} B \left| \frac{z_1}{\alpha} \right|^m.$$

Logo a série

$$\sum_1^{\infty} c_m z_1^m$$

é (n.º 19 — I e II) absolutamente convergente.

NOTA. — O theorema que vimos de demonstrar mostra que todos os valores de $|z|$ podem ser divididos em dous grupos, separados por um numero R , o primeiro compostos dos valores de $|z|$ para os quaes a série (8) é convergente, e o segundo composto dos valores de $|z|$ para os quaes esta série é divergente. Os numeros do primeiro grupo são menores do que R , e os numeros do segundo grupo são maiores do que R . Como os valores de z cujo módulo é menor do que R , são representados (n.º 9) pelos pontos do interior de um circulo de raio R com o centro na origem das coordenadas, vê-se que a série (1) é convergente quando z representa um ponto do interior d'este circulo e divergente quando z representa um ponto exterior. A este circulo, cuja consideração é devida a *Cauchy*, chama-se *circulo de convergencia* da série (8).

O theorema precedente nada diz relativamente á convergencia ou divergencia da série (8), quando z representa pontos collocados sobre a circumferencia do circulo de convergencia.

Deve-se observar que a série (8) pôde ser convergente sómente no ponto $z = 0$, e que n'este caso o raio do circulo de convergencia é nullo; e que pôde ser convergente qualquer que seja o valor que se dê a z , e n'este caso diz-se que o raio do circulo de convergencia é infinito.

O estudo das séries ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - a$, isto é, o estudo das séries da fórma

$$\sum_1^{\infty} c_m (z - a)^m$$

reduz-se, pondo $z - a = t$, ao da série

$$\sum_1^{\infty} c_m t^m,$$

que vimos de considerar. N'este caso existe ainda um circulo de convergencia cujo centro é o ponto que representa a .

24. — Voltemos a considerar a série

$$\sum_1^{\infty} u_m = \sum_1^{\infty} (x_m + iy_m)$$

e supponhamos que os seus termos dependem de uma variavel $z = x + iy$, que toma os valores z' , z'' , etc.

Se esta série é convergente nos pontos z' , z'' , etc., a cada valor da quantidade positiva δ e a cada valor de z corresponde um valor de n_1 tal que é (20 - 4.º)

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \delta$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p .

Sejam a , b , c , etc. os valores de n_1 correspondentes aos valores z' , z'' , etc. de z . Se existe um numero l maior do que todos os numeros a , b , c , etc., a desigualdade precedente é satisfeita pelos valores de n superiores a l , qualquer que seja z . Neste caso diz-se que a série considerada é *uniformemente convergente nos pontos* z' , z'' , etc.

Se os valores de z considerados são representados geometricamente pelos pontos de uma linha ou de uma área dada, diz-se que a série é *uniformemente convergente na linha ou na área dada*. Se é $y = 0$ e os valores x' , x'' , etc. representam todos os valores de x desde um numero A até um numero B , diz-se que a série é *uniformemente convergente no intervallo de A a B*.

Chamando s a somma da série considerada, s_n a somma dos n primeiros termos e R_n a somma dos restantes, e fazendo tender na desigualdade precedente p para o infinito, temos, quando a série é uniformemente convergente,

$$|s - s_n| = |R_n| \leq \delta$$

quando $n > l$, qualquer que seja p e qualquer que seja z .

THEOREMA 7.º — *Toda a série ordenada segundo as potencias de uma variavel real ou imaginaria, é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro do circulo de convergencia.*

Seja

$$\sum_1^{\infty} c_n z^n, \quad z = x + iy$$

a série proposta, e seja R o maior valor do módulo de z na área considerada.

Por ser esta série (23) absolutamente convergente nos pon-

tos cujo módulo é R , a cada valor de δ , corresponde um número n_1 tal que é

$$|c_{n+1}|R^{n+1} + \dots + |c_{n+p}|R^{n+p} < \delta$$

quando $n > n_1$.

Temos porém, qualquer que seja z ,

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= |c_{n+1}z^{n+1} + \dots + c_{n+p}z^{n+p}| \\ &< |c_{n+1}| |z|^{n+1} + \dots + |c_{n+p}| |z|^{n+p} \\ &< |c_{n+1}|R^{n+1} + \dots + |c_{n+p}|R^{n+p}. \end{aligned}$$

Logo a desigualdade

$$|s_{n+p} - s_n| < \delta$$

é satisfeita também quando $n > n_1$, qualquer que seja z ; e a série é uniformemente convergente.

Por exemplo, a série

$$1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \dots + \frac{z^n}{1.2\dots n} + \dots$$

é convergente, qualquer que seja z , visto que a série

$$|1| + |z| + \frac{|z|^2}{1.2} + \dots + \frac{|z|^n}{1.2\dots n} + \dots$$

é sempre convergente. Logo o raio do círculo de convergência d'aquella série é infinito, e a série é uniformemente convergente n'uma área qualquer.

Como segundo exemplo consideremos a série

$$\begin{aligned} &1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1.2\dots n\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n + \dots \end{aligned}$$

e supponhamos que α, β, γ são constantes reaes.

A série correspondente dos módulos é :

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} |z| + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} |z|^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} |z|^n + \dots,$$

e a razão de dous termos consecutivos :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)} \rho$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\alpha-1}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta-1}{n}\right)}{1 + \frac{\gamma-1}{n}} |z|$$

tende para $|z|$ quando n augmenta indefinidamente. Logo esta série é convergente (19 - III) quando $|z| < 1$ e é divergente quando $|z| > 1$.

Logo o raio do circulo de convergencia da série considerada é igual á unidade, e a série é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro d'este circulo.

A série precedente, que tem sido objecto de trabalhos importantes, tem o nome de série *hypergeometrica*.

VI

Productos infinitos

25. — Consideremos agora as expressões da fórmula

$$(1) \quad (1 + a_1) (1 + a_2) \dots (1 + a_m) \dots,$$

em que o numero de factores é infinito, que, empregando o signal Π para representar productos, podemos escrever do modo seguinte

$$\prod_1^{\infty} (1 + a_m).$$

A cada expressão da fórmula precedente chama-se um *producto infinito*, e diz-se que este producto é convergente se o producto

$$\prod_1^n (1 + a_m)$$

dos n primeiros factores tende para um limite determinado quando n augmenta indefinidamente. Este limite é o valor do producto infinito.

Antes de procurar as condições de convergencia do producto (1) vamos demonstrar o seguinte lemma, de que teremos de fazer uso :

A média geometrica dos numeros A, B, C, etc. é sempre menor do que a média arithmetica dos mesmos numeros.

Esta proposição é devida a *Cauchy* e foi demonstrada por este eminente geometra do modo que vamos expôr (¹).

Seja n o numero das letras $A, B, C, \text{ etc.}$ Queremos provar que é sempre

(¹) Cauchy: *Cours d'Analyse*.

Produtos infinitos

Sobre os valores por que se denotam os factores $\beta^1, 1, 2, 3, \dots$ veja-se o Calculo de Duhamel, Vol. I: pag. 461.

Era natural fazer depender os valores da convergencia dos productos infinitos das que ja eram conhecidas para o caso das sommas, ja anteriormente estudadas, e cois fez Jordan pela consideracão dos logarithmos (log de um producto equal á somma dos log dos factores); mas isso mesmo começou o autor pela consideracão de ser a media geometrica de n divisores quaesquer menor que a media arithmetica, isto é

$$\sqrt[n]{A, B, C, \dots, H} < \frac{A+B+C+\dots+H}{n}, \text{ ou } A+B+C+\dots+H < \left(\frac{A+B+C+\dots+H}{n}\right)^n \dots (1)$$

Se as quantidades forem só duas A e B , Teremos

$$(A+B)^2 - (A-B)^2 = 4AB \therefore \sqrt{4AB} < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

E agora mostraremos que se a relação (1) for verdadeira no caso de n factores quantidades A, B, C, \dots, H , tambem será verdadeira para o caso de $2n$ quantidades $A, B, C, \dots, H, A', B', C', \dots, H'$.

Esses effectos temos

$$A, B, C, \dots, H \times A', B', C', \dots, H' < \left(\frac{A+B+C+\dots+H}{n}\right)^n \times \left(\frac{A'+B'+C'+\dots+H'}{n}\right)^n \dots (2)$$

$$= < \left(\frac{A+B+C+\dots+H+A'+B'+C'+\dots+H'}{2n}\right)^{2n}$$

D'ahi resulta que a formula, ja demonstrada para o caso de serem dois os factores, substituiria igualmente q. estes forem 4, 8, 16, ... em fim 4^k e $2n^k$

$$(2) \frac{A+B+C+\dots+H}{n} \times \frac{A'+B'+C'+\dots+H'}{n} < \left(\frac{A+B+C+\dots+H+A'+B'+C'+\dots+H'}{2n}\right)^2$$

1.º. por uma potencia de 2 isto é 2^m

Se posarmos o 1.º n não representando potencia de 2, designiamos de 2^m a potencia de 2 imediatamente superior a n , elevaremos o 1.º ~~de~~ dos factores até ser 2^m , e por de consequencia introduzindo novos factores (2^{m-n}) iguais cada um a $\frac{A+B+c+\dots+H}{n}$ e que nós designaremos abreviadamente pela letra K .

Teremos pois

$$A+B.C\dots H.K.K\dots \text{isto é}$$

$$A.B.C\dots H.K^{2^{m-n}}$$

e pois que o número dos factores d'este producto é 2^m , se applicamos a formula (1), e assim teremos

$$A.B.C\dots H.K^{2^{m-n}} \left(\frac{A+B+c+\dots+H+K(2^{m-n})}{2^m} \right)^{2^m}$$

Ora no 2.º membro d'esta desigualdade o termo $-Kn$ reduz se com o polynomio $A+B+c+\dots+H$, de modo que o numerador ficou reduzido a $K2^m$ que, attendendo ao den.º 2^m , se reduz a K , ficando o 2.º membro reduzido a K^{2^m} , e assim teremos

$$A.B.C\dots H.K^{2^m} < 1 \text{ ou } A.B.C\dots H < \left(\frac{A+B+c+\dots+H}{n} \right)^n.$$

$$\sqrt[n]{A B C \dots} < \frac{A + B + C + \dots}{n},$$

ou que é

$$A B C \dots < \left(\frac{A + B + C + \dots}{n} \right)^n.$$

Ora, em primeiro lugar, temos evidentemente, quando é $n = 2$,

$$A B = \left(\frac{A + B}{2} \right)^2 - \left(\frac{A - B}{2} \right)^2 < \left(\frac{A + B}{2} \right)^2,$$

d'onde se conclue, tomando successivamente $n = 4$, $n = 8$,
 \dots , $n = 2^m$,

$$A B C D < \left(\frac{A + B}{2} \right)^2 \left(\frac{C + D}{2} \right)^2 < \left(\frac{A + B + C + D}{4} \right)^4,$$

$$\begin{aligned} A B C D E F G H &< \left(\frac{A + B + C + D}{4} \right)^4 \left(\frac{E + F + G + H}{4} \right)^4 \\ &< \left(\frac{A + B + C + D + E + F + G + H}{8} \right)^8, \end{aligned}$$

etc.

$$A B C D \dots < \left(\frac{A + B + C + \dots}{2^m} \right)^{2^m}.$$

Em segundo lugar, se n não é um termo da progressão geometrica

2, 4, 8, 16, etc.,

designar-se-ha por 2^m um termo d'esta progressão superior a n , e far-se-ha

$$K = \frac{A + B + C + \dots}{n};$$

depois, voltando á formula anterior e suppondo no primeiro membro d'esta formula os $2^m - n$ ultimos factores iguaes a K , achar-se-ha

$$A B C D \dots K^{2^m - n} < \left[\frac{A + B + C + \dots + (2^m - n)K}{2^m} \right]^{2^m},$$

ou, attendendo ao valor de K ,

$$A B C D \dots < \left(\frac{A + B + C + \dots}{n} \right)^n,$$

que é o que se queria demonstrar.

26. — Posto isto, vamos procurar as condições de convergencia do producto (1), suppondo primeiramente que as quantidades $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$ são reaes e positivas.

Vimos de vêr que a média arithmetica de p quantidades positivas é maior do que a sua média geometrica; portanto, sendo q d'estas quantidades iguaes a A e as restantes iguaes a B , temos

$$\left(\frac{qA + (p - q)B}{p} \right)^p > A^q B^{p - q}.$$

Pondo n'esta desigualdade

A

$$A = 1 + \beta \frac{p}{q}, B = 1,$$

vem

$$(1 + \beta)^p > \left(1 + \beta \frac{p}{q} \right)^q,$$

ou, pondo $\beta = 1$,

$$2^p > \left(1 + \frac{p}{q} \right)^q.$$

Considérons agora p quantidades, das quais q sejam iguais, cada uma, a A , e as $p-q$ restantes iguais a B , e exprimamos uma média geométrica d'essas quantidades e menor que a média arith.^a, teremos

$$A^q B^{p-q} < \left(\frac{Aq + B(p-q)}{p} \right)^p,$$

donde resulta, supondo $B=1$ ~~$A=1+\frac{k}{9}$~~

$$\left(\frac{Aq + p - q}{p} \right)^p > A^q$$

e depois, para $A=1+\frac{k}{9}$

$$\left(\frac{q + p + p - q}{p} \right)^p > \left(1 + \frac{k}{9} \right)^q, \text{ ou } 2^{\frac{k}{9}} > 1 + \frac{k}{9}$$

ou mais abreviadamente

$$2^x > 1 + x \dots (1)$$

sendo $x = \frac{k}{9} > 1$.

Se x for ~~menor~~ ^{menor} que 1, $x+1$ será maior que 1, e x' tanto ser-á a' applicavel a relação (1), e teremos

$$2^{x'} > 1 + x'$$

itae'

$$2^{x+1} > 1 + (x+1) \text{ ou } 2^{x+1} > 2 + x, \text{ logo } 2^x > 1 + \frac{x}{2} \quad (2)$$

Agora, se $x > 1$ substitui-se relação (1), se $x < 1$, substitui-se a relação (2), e ambos os casos será

$$2^x > 1 + \frac{x}{2} \dots (3)$$

Para isto, supondo agora successivamente $\frac{x}{2} = a_1, a_2, a_3, \dots$

obtemos respectivamente $1 + a_1 < 2^{\frac{2a_1}{2}}, 1 + a_2 < 2^{\frac{2a_2}{2}}, 1 + a_3 < 2^{\frac{2a_3}{2}}, \dots$

e portanto

$$\frac{\infty}{1} \# (1 + \frac{a_m}{m}) < 2$$

É manifesto que n'esta demonstracão se supõe γ menor
racional visto ser $\gamma = \frac{p}{q}$, sendo p e q n.º inteiros

Temos pois, pondo $\gamma = \frac{p}{q} > 1$,

$$2^\gamma > 1 + \gamma > 1 + \frac{1}{2} \gamma.$$

Se fôr $\gamma < 1$, a formula precedente dá

$$2^{1+\gamma} > 1 + (1 + \gamma),$$

e portanto temos tambem n'este caso

$$2^\gamma > 1 + \frac{1}{2} \gamma.$$

Em virtude d'esta desigualdade virá, pondo $\frac{1}{2} \gamma = a_m$,

$$1 + a_m < 2^{2a_m}$$

e portanto

$$\prod_1^n (1 + a_m) < \prod_1^n 2^{2a_m} = 2^{2 \sum_1^n a_m}.$$

Se a série Σa_m é convergente, a sua somma é inferior a um numero racional α , e temos

$$\prod_1^n (1 + a_m) < 2^{2\alpha};$$

portanto $\prod_1^n (1 + a_m)$ tende para um limite determinado quando n augmenta (11 — 1.º) indefinidamente.

O raciocinio que precede só tem logar quando todas as quantidades $a_1, a_2, \text{ etc.}$ são racionais. A conclusão porém a que se chegou tem ainda logar quando todas ou algumas d'estas quantidades são irracionais. Com effeito, representando por $b_1, b_2, \text{ etc.}$ numeros racionais respectivamente inferiores

a a_1, a_2 , etc. e tão proximos d'estes numeros quanto se queira, temos

$$\sum_1^n b_m < \sum_1^{\infty} a_m < \alpha,$$

e portanto

$$\prod_1^n (1 + b_m) < 2^{\sum_1^n b_m} < 2^{2\alpha}.$$

Quando b_1, b_2 , etc. tendem para a_1, a_2 , etc. e n augmenta indefinidamente, o primeiro membro d'esta desigualdade augmenta constantemente; logo tende (11-1.º) para um limite.

Reciprocamente, a desigualdade

$$\prod_1^n (1 + a_m) = 1 + \sum_1^n a_m + \dots > \sum_1^n a_m$$

mostra que, se $\sum_1^n a_m$ augmenta indefinidamente com n , tambem o producto $\prod_1^n (1 + a_m)$ augmenta indefinidamente com n .

Temos pois o theorema seguinte:

THEOREMA. — *A condição necessaria e sufficiente para que o producto (1) seja convergente é que a série $\sum a_m$ o seja.*

27. — Podemos ligar com a doutrina precedente a das potencias de grão infinito. A este respeito vamos considerar a expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

que tem grande importancia no *Calculo Differencial*, para procurar o limite para que tende quando n tende para o infinito. Supporemos que o numero n é inteiro e positivo, reservando para mais tarde o caso de n representar um numero qualquer.

A desigualdade

$$(1 + \beta)^p > \left(1 + \beta \frac{p}{q}\right)^q$$

ou

$$(1 + \beta)^\gamma > 1 + \beta\gamma$$

dá, pondo $\beta = \frac{1}{n+1}$, $\gamma = \frac{n+1}{n}$ e elevando à potencia n ,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Logo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ aumenta indefinidamente com n .

Por outra parte temos, pondo $a_m = \frac{1}{n}$,

$$1 + \frac{1}{n} < 2^{\frac{1}{n}},$$

e portanto

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2^n,$$

o que mostra que a potencia considerada, que aumenta indefinidamente com n , tende para um limite menor do que 4, quando n tende para o infinito.

Este limite designa-se habitualmente pela letra e , e serve de base a um systema de logarithmos, que são chamados *neperianos*, por ser a base de que usou Neper, inventor dos logarithmos.

O valor de e póde calcular-se com a aproximação que se quizer dando a n os valores 1, 2, 3, ..., o que dá $e = 2,718281\dots$

28. — Consideremos agora o producto

$$\prod_1^{\infty} (1 + u_m),$$

onde u_1, u_2 , etc. representam quantidades reaes ou imaginarias.

A formula conhecida relativa à multiplicação de binomios dá

$$\prod_1^n (1 + u_m) = 1 + \sum_1^n u_m + \dots + u_1 u_2 \dots u_n,$$

e do mesmo modo

$$\prod_1^n (1 + a_m) = 1 + \sum_1^n a_m + \dots + a_1 a_2 \dots a_n,$$

chamando a_1, a_2 , etc. os módulos de u_1, u_2 , etc.

Suppondo agora que o producto $\prod_1^\infty (1 + a_m)$ é convergente, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero n_1 tal que é (n.º 44)

$$\prod_1^{n+p} (1 + a_m) - \prod_1^n (1 + a_m) = \sum' a_j a_k \dots < \delta$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p .

Mas temos

$$\prod_1^{n+p} (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) = \sum' u_j u_k \dots$$

e (n.º 8 — I)

$$|\sum' u_j u_k \dots| < \sum' a_j a_k \dots$$

Logo é

$$\left| \prod_1^{n+p} (1 + u_m) - \prod_1^n (1 + u_m) \right| < \delta$$

quando $n > n_1$, e o producto $\prod_1^\infty (1 + u_m)$ é pois (n.º 45 — II) convergente.

Podemos pois enunciar o principio seguinte :

Se o producto $\prod_1^{\infty} (1 + a_m)$ é convergente, tambem é convergente o producto $\prod_1^{\infty} (1 + u_m)$.

Por exemplo, o producto

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{|z|}{1.2 \dots m} \right),$$

onde $z = x + iy$, é convergente, visto ser convergente a série (n.º 49 — III)

$$\sum_1^{\infty} a_m = \prod_1^{\infty} \frac{|z|}{1.2 \dots m}.$$

Logo tambem é convergente o producto

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{1.2 \dots m} \right).$$

VII

Fracções continuas

29. — As fracções continuas são conhecidas desde os Elementos de Algebra, onde se viu a grande importancia que tinham em muitas questões relativas aos numeros. Os principais resultados lá achados téem logar no caso da fracção continua :

$$(1) \quad u = \frac{a_1}{b_1 + u_1}, \quad u_1 = \frac{a_2}{b_2 + u_2}, \quad u_2 = \frac{a_3}{b_3 + u_3}, \quad \text{etc.},$$

onde $a_1, a_2, \text{ etc.}, b_1, b_2, \text{ etc.}$ representam polynomios ordenados seguudo as potencias inteiras e positivas de uma variavel x .

II — Formando as convergentes successivas, como no caso das fracções continuas elementares, acha-se os resultados :

$$C_1 = \frac{N_1}{D_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$C_2 = \frac{N_2}{D_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}$$

.....

$$C_n = \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}.$$

III — As tres convergentes consecutivas :

$$\frac{N_{n-2}}{D_{n-2}}, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}$$

dão, pela subtracção,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{a_n (N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2})}{D_{n-1} D_n}$$

$$C_{n-2} - C_{n-1} = - \frac{N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2}}{D_{n-1} D_{n-2}},$$

e portanto o numerador da differença $C_{n-1} - C_n$ é igual ao numerador da differença $C_{n-2} - C_{n-1}$ multiplicado por $-a_n$; mas as primeiras convergentes dão

$$C_1 - C_2 = \frac{a_1 a_2}{D_1 D_2},$$

logo temos

$$C_{n-1} - C_n = \pm \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{D_{n-1} D_n},$$

e portanto

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n,$$

III — Este resultado permite transformar a fracção continua n'uma série. Com effeito, temos evidentemente

$$u_1 = C_1 - (C_1 - C_2) - (C_2 - C_3) - \dots$$

d'onde se segue,

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{D_1 D_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{D_2 D_3} - \dots$$

O valor que se obtém sommando n termos d'esta série é igual a convergente de ordem n de fracção continua. Logo para que a fracção continua seja convergente basta que esta série o seja, e reciprocamente.

IV — Das fracções continuas contidas na fórmula geral (1) ha dous grupos importantes na Analyse. O primeiro corresponde a $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 1$ (1). O segundo corresponde a $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$.

A respeito das fracções continuas do segundo grupo enunciaremos os principios seguintes:

1.º — A fracção algebraica $\frac{N_n}{D_n}$ é irreductivel.

Este principio é consequencia da formula

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm 1.$$

2.º — O denominador da convergente da ordem n é um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x , cujo gráo é igual á somma dos grãos de b_1, b_2, \dots , etc.

Este principio é uma consequencia da lei da formação dos denominadores das convergentes.

3.º — Se u_n tende para um limite quando x tende para o infinito, a differença entre o valor da fracção continua completa e o da convergente C_{n-1} é da forma

$$(2) \quad u - C_{n-1} = \frac{1}{x^k} (A + \varepsilon),$$

(1) Veja-se o nosso opusculo intitulado — *Desenvolvimento das funcções em fracção continua* — Coimbra, 1871.

onde k igual á somma dos grãos dos polynomios D_{n-1} e D_n , A uma constante determinada, e ε uma quantidade que tende para zero quando x tende para o infinito.

Antes de demonstrar esta proposição, demonstremos o lema seguinte :

A fracção

$$y = \frac{Ax^a + Bx^b + \dots}{Lx^l + Mx^m + \dots}$$

cujos numerador e denominador estão ordenados segundo as potencias decrescentes de x , quando x tende para o infinito, tende para zero se é $a < l$, tende para $\frac{A}{L}$ se é $a = b$ e tende para o infinito se é $a > l$.

Com effeito, se é $a = l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \dots}{L + Mx^{m-a} + \dots} = \frac{A}{L};$$

se é $a > l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \dots}{Lx^{l-a} + Mx^{m-a} + \dots} = \infty;$$

se é $a < l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{Ax^{a-l} + Bx^{b-l} + \dots}{L + Mx^{m-l} + \dots} = 0.$$

Posto isto, a igualdade

$$\begin{aligned} \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - \frac{N_n}{D_n} &= \pm \frac{1}{D_n D_{n-1}} \\ &= \pm \frac{1}{D_{n-1} (D_{n-1} b_n + D_{n-2})} \end{aligned}$$

dá, quando se muda b_n em $b_n + u_n$,

$$\begin{aligned} \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u &= \pm \frac{1}{D_{n-1} (D_{n-1} b_n + D_{n-1} u_n + D_{n-2})} \\ &= \pm \frac{1}{D_{n-1} (D_n + D_{n-1} u_n)}. \end{aligned}$$

Temos pois a igualdade

$$(u - C_{n-1}) x^k = \mp \frac{x^k}{D_{n-1} (D_n + D_{n-1} u_n)},$$

da qual se deduz, dividindo os dous termos da fracção que entra no segundo membro por x^k , fazendo tender x para o infinito, e attendendo a que $\frac{D_{n-1} D_n}{x^k}$ tende para um limite determinado e $\frac{D_{n-1}}{x^k}$ tende para zero, uma igualdade da fórma

$$\lim x^k (u - C_{n-1}) = A$$

da qual se tira o theorema enunciado.

4.º — Se $\frac{N}{D}$ representar uma fracção irreductivel, cujo numerador e denominador sejam polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de x e cujo denominador seja do gráo α , e se existir um numero m , maior do que 2α , tal que seja

$$(3) \quad u - \frac{N}{D} = \frac{1}{x^m} (B + \varepsilon'),$$

B sendo uma quantidade constante e ε' uma quantidade que tende para zero quando x tende para o infinito, a fracção $\frac{N}{D}$ é igual á convergente C_{n-1} da fracção continua u , no caso de u_n tender para um limite quando x tende para o infinito.

Sejam α_{n-1} e α_n os grãos dos denominadores D_{n-1} e D_n de duas convergentes consecutivas da fracção continua con-

siderada taes que $\alpha_{n-1} \geq \alpha$, $\alpha_n > \alpha$, e ponha-se $\alpha + \alpha_{n-1} = s$.

As igualdades (2) e (3) dão

$$x^s \left(\frac{N}{D} - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} \right) = \frac{x^s}{x^k} (A + \varepsilon) - \frac{x^s}{x^m} (B + \varepsilon'),$$

e portanto, fazer tender x para o infinito e notando que é $s < k$, $s \geq 2\alpha < m$,

$$\lim \frac{x^s (ND_{n-1} - DN_{n-1})}{DD_{n-1}} = 0.$$

Temos pois

$$ND_{n-1} - DN_{n-1} = 0,$$

porque, se esta igualdade não tivesse lugar, o grão do numerador da fracção precedente seria igual ou superior ao grão do denominador, e o limite da fracção não podia ser igual a zero, em virtude do lemma anteriormente demonstrado.

Logo

$$\frac{N}{D} = \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}},$$

que é o que se queria demonstrar.

30. — A theoria das fracções continuas algebraicas tem a sua principal applicação no problema que consiste em procurar, sendo dada a série convergente

$$u = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \dots,$$

uma série de fracções irreductiveis

$$\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \dots, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \dots$$

taes que, sendo α o grão de D_{n-1} , seja

$$u = \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{1}{x^{2n+1}} (A + \varepsilon),$$

representando por A uma constante e por ε uma variável que tende para zero, quando x tende para o infinito. Para resolver esta questão, vamos primeiramente desenvolver u em fracção continua.

Pondo, para isso,

$$u = c_0 + \frac{1}{v}, \quad v = \frac{1}{\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots},$$

teremos, effectuando a divisão, um resultado da fórma

$$v = p_1 x + q_1 + u_1,$$

onde

$$u_1 = \frac{\frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \dots}{c_1 + \frac{c_2}{x} + \dots}.$$

Temos depois

$$u_1 = \frac{1}{v_1}, \quad v_1 = \frac{c_1 + \frac{c_2}{x} + \dots}{\frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \dots},$$

e portanto

$$v_1 = p_2 x + q_2 + u_2,$$

onde

$$u_2 = \frac{\frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \dots}{d_1 + \frac{d_2}{x} + \dots}.$$

Continuando do mesmo modo obtem-se o desenvolvimento de u em fracção continua :

$$u = c_0 + \frac{1}{p_1 x + q_1 + u_1}$$

$$u_1 = \frac{1}{p_2 x + q_2 + u_2}$$

$$u_2 = \frac{1}{p_3 x + q_3 + u_3}$$

.....

$$u_{n-1} = \frac{1}{p_n x + q_n + u_n}.$$

Como u_n tende para zero quando x tende para o infinito, as convergentes d'esta fracção continua satisfazem (n.º 29 — 3.º) á questão proposta, e são as unicas fracções (n.º 29 — 4.º) que lhe satisfazem.

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS,
LOGARITHMICAS, ETC.

I

Principios geraes

31. — *Funcções de variaveis reaes.* — Se duas quantidades reaes variáveis x e y estão ligadas de tal modo que os valores da segunda dependem dos valores da primeira, diz-se que y é *funcção de x* . Assim, por exemplo, \sqrt{x} , $\text{sen } x$, x^m , etc. são funcções de x . Para designar que y é funcção de x emprega-se qualquer das notações

$$y = f(x), y = F(x), y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

Os valores que tomam as funcções $f(x)$, $F(x)$, etc., quando á variavel x se dá o valor determinado a , representam-se por $f(a)$, $F(a)$, etc.

A' variavel x chama-se *variavel independente*, e á variavel y *variavel dependente*. A variavel independente póde representar qualquer numero da collecção geral dos numeros, ou qualquer numero de uma collecção especial, por exemplo, da collecção dos numeros racionaes, ou da collecção dos numeros comprehendidos entre A e B , etc. Os valores de y ficam determinados quando x é dado.

Uma funcção $f(x)$ diz-se *definida no intervallo de $x = a$ a $x = b$* quando a todo o valor que se dá a x desde a até b , corresponde um valor unico da funcção.

Uma funcção diz-se *definida na vizinhança do ponto $x = a$* quando existe um numero β tal que a funcção é definida no intervallo de $x = a - \beta$ a $x = a + \beta$.

Nas definições e enunciados dos theoremas geraes relativos ás funcções supponhamos sempre que a cada valor de x corresponde um só valor da funcção. Para depois se applicarem estes principios ás funcções que tomam muitos valores para cada valor de x , é necessario primeiramente separar estes valores de modo a formar novas funcções taes que a cada valor de x corresponda um só valor da funcção. Ás novas funcções assim formadas chama-se *ramos* da primeira.

Deve-se observar que esta separação não se faz de uma maneira arbitraria; deve ser feita de tal modo que as novas funcções tenham as qualidades que iremos attribuinto ás funcções de que nos occuparmos.

32.—Principiaremos o estudo geral das funcções demonstrando o theorema seguinte, devido ao sr. *Weierstrass*:

Se os valores da funcção $f(x)$, correspondentes aos valores que toma x desde $x = a$ até $x = \beta$, estão todos comprehendidos entre dous numeros A e B , existe sempre um numero L tal que os valores de $f(x)$ não podem ser superiores a L e tal que, ou L representa um valor de $f(x)$, ou entre L e $L - \delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$, por mais pequeno que seja δ ; e existe sempre um numero l tal que os valores de $f(x)$ não podem ser inferiores a l , e tal que, ou l representa um valor de $f(x)$, ou entre l e $l + \delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$.

Sejam a e b dous numeros racionaes entre os quaes A e B estejam comprehendidos, e seja $b > a$. Dividamos o intervallo entre a e b em dous intervallos iguaes, o que dá os numeros

$$a, a + \frac{b - a}{2}, b,$$

e seja a_1 o ultimo d'estes tres numeros que $f(x)$ póde exceder, quando x varia dos a até β , e b_1 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder, de modo que

$$a_1 \geq a, b_1 \leq b, b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}.$$

Dividamos em seguida o intervalo entre a_1 e b_1 em dous intervallos iguaes, o que dá os numeros

$$a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, b_1,$$

e seja a_2 o ultimo d'estes numeros que $f(x)$ póde exceder e b_2 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder, de modo que

$$a_2 \geq a_1, b_2 \leq b_1, b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo obtem-se um grupo de numeros crescentes

$$a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

que $f(x)$ excede, e um grupo de numeros decrescentes

$$b, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

que $f(x)$ não póde exceder, taes que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Os numeros a, a_1, a_2 , etc. tendem para um numero racional ou irracional L ; e como a differença $b_n - a_n$ tende para zero á medida que n augmenta, segue-se que os numeros b, b_1, b_2 , etc. tendem tambem para o limite L . Como porém $f(x)$ não póde exceder os numeros b, b_1, b_2 , etc., esta funcção não póde exceder L ; e como, por outra parte, temos

$$L - f(x) < L - a_n < b_n - a_n$$

ou

$$L - f(x) < \frac{b - a}{2^n},$$

ou, dando a n um valor tão grande que seja $\frac{b - a}{2^n} < \delta$,

$$L - f(x) < \delta,$$

$f(x)$ excede $L - \delta$, por mais pequeno que seja δ , o que é a primeira parte do theorema.

Do mesmo modo se demonstra a existencia do numero l satisfazendo ás condições do theorema.

Aos numeros L e l chama-se respectivamente *limite superior* e *limite inferior* dos valores considerados da funcção.

NOTA. — E' facil de vêr que o theorema precedente tem logar, no caso mais geral de, em logar de uma funcção, se considerar um grupo qualquer de numeros comprehendidos entre A e B .

33. — Seja $f(x)$ uma funcção definida na visinhança do ponto a . Diz-se que esta funcção é *continua* no ponto a se $f(a + h)$ tende para $f(a)$ quando h tende para zero, e isto qualquer que seja o modo como h tenda para zero. Se no ponto a a funcção não é continua, diz-se que é *discontinua*.

Da definição de continuidade decorrem immediatamente as seguintes proposições:

1.º — E' *condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x)$ seja continua no ponto a , que a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponda um numero positivo ε tal que a desigualdade*

$$(1) \quad |f(a + h) - f(a)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < \varepsilon$.

Com effeito, sendo h_1, h_2, h_3 , etc. uma série de valores de h que tendem para zero, se a desigualdade (1) é satisfeita por todos os valores que tem h entre $+\varepsilon$ e $-\varepsilon$, é satisfeita por aquelles dos numeros h_1, h_2, h_3 , etc. que estão comprehendidos entre $+\varepsilon$ e $-\varepsilon$. Logo os valores $f(a + h_1), f(a + h_2)$, etc. de $f(x)$ tendem para $f(a)$, e a funcção $f(x)$ é continua no ponto a .

Reciprocamente, se para qualquer grupo dos numeros h_1, h_2, h_3 , etc., os valores correspondentes $f(a + h_1), f(a + h_2)$, etc. de $f(x)$ tendem para $f(a)$, a desigualdade (1) tem logar; porque, se não tivesse logar, existiria um valor de δ tal que, por menor que tomassemos ε , seria

$$|f(a + h) - f(a)| \geq \delta$$

para algum valor h_i de h inferior em valor absoluto a ε . Pondo depois $\varepsilon = |h_i|$ vê-se que existiria um valor h_j de h , inferior em valor absoluto a $|h_i|$, tal que esta ultima desigualdade seria satisfeita. Continuando do mesmo modo obter-se-hia uma série de numeros h_i, h_j, h_l , etc. taes que, quando se fizesse passar h por elles, a funcção $f(a + h)$ não tenderia para $f(a)$, o que é contrario á hypothese.

2.º — A somma, o producto e o quociente (quando $\psi(a)$ é diferente de zero) de duas funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, continuas no ponto a , são funcções de x continuas no mesmo ponto.

Com effeito, sendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ estas funcções e $f(x)$ a sua somma, temos (n.º 12 — 1.º)

$$\begin{aligned} \lim_{h=0} f(a+h) &= \lim_{h=0} \varphi(a+h) + \lim_{h=0} \psi(a+h) \\ &= \varphi(a) + \psi(a) = f(a). \end{aligned}$$

Do mesmo modo se demonstram os theoremas relativos ao producto e ao quociente de funcções, baseando-se nos theoremas 2.º e 3.º do n.º 12.

3.º — Se $y = \varphi(x)$ representa uma funcção continua de x no ponto a , e $z = \psi(y)$ uma funcção continua de y no ponto b correspondente a $x = a$, a funcção de funcção $z = \psi[\varphi(x)] = f(x)$ é continua no ponto $x = a$.

Com effeito, quando x tende para a , y tende para b , e z tende para $\psi(b) = \psi[\varphi(a)] = f(a)$.

34. — Os theoremas seguintes dão propriedades importantes das funcções continuas:

THEOREMA 1.º — Se a funcção $f(x)$ fôr continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$, e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem signaes contrarios, entre a e b existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ (Cauchy).

Supponhamos $b > a$ e dividamos o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes iguaes, o que dá os numeros

$$a, a + \frac{b-a}{2}, b.$$

Se o segundo numero annullar a funcção, está o theorema demonstrado. No caso contrario, chamemos a_1 e b_1 dous

d'estes numeros que sejam consecutivos e dêem á funcção signaes contrarios; de modo que temos

$$a_1 \geq a, b_1 \leq b, b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}.$$

Dividamos do mesmo modo o intervallo de $x = a_1$ a $x = b_1$ em dous intervallos iguaes, o que dá os numeros

$$a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, b_1,$$

e chamemos a_2 e b_2 os dous numeros consecutivos d'este grupo que dão a $f(x)$ signaes contrarios; de modo que temos

$$a_1 \geq a_2, b_1 \leq b_2, b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se um grupo

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

de numeros crescentes, e um grupo

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

de numeros decrescentes, maiores do que os numeros do grupo anterior, e taes que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Os numeros do primeiro grupo tendem para um numero racional ou irracional c ; e, por ser a funcção $f(x)$ continua no intervallo de $x = a$ a $x = b$, as funcções $f(a_1)$, $f(a_2)$, etc. devem tender para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estas funcções (n.º 40 — 3.º).

Os numeros b_1 , b_2 , etc. tendendo tambem para c , as funcções $f(b_1)$, $f(b_2)$, etc. tendem tambem para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estas funcções.

Mas $f(c)$ não pôde ter ao mesmo tempo o signal de $f(a_n)$ e de $f(b_n)$, porque estes valores têm signaes contrarios; logo é $f(c) = 0$.

THEOREMA 2.º — Se a funcção $f(x)$ é continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$ e A e B são dous valores de $f(x)$ correspondentes aos valores a e b de x , $f(x)$ passa por todos os valores comprehendidos entre A e B quando x varia desde a até b .

Com effeito, sendo C um valor comprehendido entre A e B e portanto $A > C > B$, as quantidades $f(a) - C$ e $f(b) - C$ têm signaes contrarios; logo existe um valor x_1 de x , comprehendido entre a e b (theoremata 1.º), tal que é $f(x_1) - C = 0$.

THEOREMA 3.º — Se a funcção $f(x)$ fôr continua no intervallo de $x = a$ a $x = b$, existe um limite superior e um limite inferior dos valores que ella tem n'este intervallo, e estes limites representam valores da funcção (Weierstrass).

E' evidente que, se $f(x)$ não tivesse limite superior no intervallo de $x = a$ a $x = b$, tambem não teria limite superior n'um pelo menos dos intervallos que resultam de dividir aquelle em duas partes iguaes; e que, se a $f(x)$ tiver limite superior no intervallo considerado, este limite coincide com o limite superior correspondente a um $(a_1$ a $b_1)$ dos intervallos considerados. Continuando depois, como na demonstração do theoremata 4.º, é facil de vêr que, se não existe limite superior, haverá dous grupos de numeros

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

que tenderão para o mesmo limite c , taes que não existirá limite superior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a_n até b_n ; e que, se existir um limite superior L , este numero será tambem o limite superior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a_n até b_n .

Mas, por ser a funcção $f(x)$ continua no ponto c , a cada valor de δ corresponde um valor positivo h_1 tal que a desigualdade

$$|f(c + h) - f(c)| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1 . Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - h_1$ e $c + h_1$, vê-se que é

$$|f(x) - f(c)| < \delta,$$

quando x está compreendido entre a_n e b_n , e portanto que $f(x)$ está compreendido entre $f(c) + \delta$ e $f(c) - \delta$; isto é que existe um limite superior L (n.º 32) dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a até b . Para mostrar que este limite é um valor de $f(x)$, basta notar que, por ser também L o limite superior dos valores que toma $f(x)$ quando x varia desde a_n até b_n , temos, por definição (n.º 32),

$$f(x) > L - \delta'$$

por mais pequeno que seja δ' , e portanto

$$f(c) + \delta > L - \delta',$$

o que dá, fazendo tender δ e δ' para zero, $f(c) = L$, visto que, por definição, $f(c)$ não pôde ser maior do que L .

Por um raciocínio semelhante se demonstra o theorema no caso do limite inferior.

THEOREMA 4.º — *Se a função $f(x)$ fôr continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$, a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 tal que a desigualdade*

$$|f(x') - f(x)| < \delta$$

é satisfeita por todos aquelles valores de x e x' , pertencentes ao intervallo considerado, cuja differença é menor do que h_1 (1).

Com effeito, se o theorema não tivesse logar, também não teria logar n'um, pelo menos, dos intervallos que resultam de dividir o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes iguaes por meio dos numeros

$$a, a + \frac{b-a}{2}, b;$$

porque, se o theorema tivesse logar nos dous intervallos, teriamos para h_1 dous valores, correspondendo um a cada intervallo, e as condições do theorema verificavam-se em todo

(1) Este theorema é devido a Cantor. Veja-se uma memoria de Heine publicada no tomo 74 do *Jornal de Crelle*.

o intervallo de $x = a$ a $x = b$ dando a h_1 o menor d'estes valores.

Chamando a_1 e b_1 as extremidades d'aquelle dos intervallos precedentes no qual o theorema não teria logar, vê-se que o theorema também não deveria ter logar n'um pelo menos dos intervallos parciaes que resultam de dividir o intervallo $x = a_1$ a $x = b_1$ em duas partes iguaes por meio dos numeros

$$a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, b_1.$$

Continuando do mesmo modo, como na demonstração do theorema 1.º, é facil de vêr que, se o theorema não fosse verdadeiro, haveria dous grupos de numeros

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

que tenderiam para o limite c , taes que o theorema não seria também verdadeiro no intervallo de $x = a_n$ a $x = b_n$.

Mas, por ser a funcção $f(x)$ continua no ponto c , a cada valor δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 tal que é

$$|f(c + h) - f(c)| < \delta$$

quando h está comprehendido entre $-h_1$ e $+h_1$. Logo dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - h_1$ e $c + h_1$, a desigualdade

$$|f(x) - f(c)| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a_n e b_n . Chamando pois x' um valor de x comprehendido entre estes numeros, temos

$$|f(x') - f(c)| < \delta.$$

D'esta desigualdade e da anterior tira-se a desigualdade

$$|f(x') - f(x)| < 2\delta$$

que é satisfeita por todos os valores de x e de x' compreendidos entre a_n e b_n . Logo o theorema tem logar para o intervallo de $x = a_n$ a $x = b_n$, e portanto tambem tem logar para o intervallo de $x = a$ a $x = b$.

35. — Se uma quantidade variavel u depende de outras variaveis x, y , etc., diz-se que u é funcção das variaveis x, y , etc. e escreve-se

$$u = f(x, y, \dots), u = F(x, y, \dots), \text{ etc.}$$

A funcção $f(x, y, \dots)$, definida na visinhança dos pontos $x = a, y = b$, etc., diz-se *continua* no ponto (a, b, c, \dots) se $f(a + h, b + k, \dots)$ tende para $f(a, b, \dots)$ quando h, k , etc. tendem para zero, e isto qualquer que seja o modo como tendam para zero.

E' facil de estender os theoremas que demonstrámos nos numeros anteriores para as funcções de uma variavel, ao caso das funcções de muitas variaveis. Assim temos:

1.º — *E' condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x, y, \dots)$ seja continua no ponto (a, b, \dots) , que a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, correspondam numeros $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, etc. taes que a desigualdade*

$$|f(a + h, b + k, \dots) - f(a, b, \dots)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h, k , etc. que satisfizerem ás condições $|h| < \varepsilon_1, |k| < \varepsilon_2$, etc.

2.º — *A somma, o producto e o quociente (quando $\phi(a, b, \dots)$ é diferente de zero) de duas funcções $\varphi(x, y, \dots)$ e $\psi(x, y, \dots)$ continuas no ponto (a, b, \dots) , são funcções de x, y , etc. continuas no mesmo ponto.*

.....

36. — *Funcções de variaveis imaginarias.* — Se os valores de uma variavel $u = X + iY$ dependem dos valores de outra variavel $z = x + iy$, diz-se que u é funcção de z .

A funcção $f(x + iy)$ diz-se *continua* no ponto $a + ib$ se a funcção $f[a + h + i(b + k)]$ tende para $f(a + ib)$ quando h e k tendem para zero, e isto qualquer que seja o

modo como h e k tendam para zero; ou, em outros termos (n.º 15), se X e Y são funcções continuas de x e y .

D'esta definição decorre immediatamente que a *somma*, o *producto* e o *quociente* (quando $\phi(a + ib)$ é diferente de 0) de duas funcções $\varphi(z)$ e $\phi(z)$, continuas no ponto $a + ib$, é uma funcção de z continua no mesmo ponto.

Com effeito, pondo

$$\varphi(z) = X + iY, \phi(z) = X_1 + iY_1,$$

-temos as relações (n.º 7)

$$\varphi(z) + \phi(z) = X + X_1 + i(Y + Y_1),$$

$$\varphi(z)\phi(z) = XX_1 - YY_1 + i(XY_1 + YX_1),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \frac{XX_1 + YY_1}{X_1^2 + Y_1^2} + i \frac{YX_1 - XY_1}{X_1^2 + Y_1^2},$$

-das quaes se tira o theorema enunciado, visto que a parte independente de i e o coefficiente de i , que entram no segundo membro de cada uma d'estas relações, são (n.º 35—2.º) funcções continuas de x e y .

II

Funcções algebraicas

37.—Diz-se que u é uma funcção algebraica de z quando estas variaveis estão ligadas por uma equação irreductivel da fórma

$$(1) \quad a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0,$$

onde m é um numero inteiro positivo e a_0, a_1, a_2, \dots são polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de z .

Se a equação precedente é do primeiro grão relativamente a u , diz-se que u é função *racional* de z ; no caso contrario diz-se que u é função *irracional* de z . Toda a expressão analytica dada em que a variavel z é sómente sujeita a sommas, multiplicações e divisões, em numero finito, é uma função racional de z .

Se a equação (1) é do primeiro grão relativamente a u e a_1 é constante, diz-se que u é função *inteira* de z . Toda a função racional que não contém z em denominador é pois uma função inteira de z .

N'este logar occupar-nos-hemos sómente das funções racionais, inteiras e fraccionarias, para recordarmos algumas das suas propriedades mais importantes.

38. — Consideremos primeiramente a *função inteira*, isto é, a função

$$u = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n,$$

onde n é um numero inteiro positivo, e A_0, A_1 , etc. são constantes reaes ou imaginarias.

■ — Mudando z em $z + h$, temos

$$f(z + h) = A_0 (z + h)^n + A_1 (z + h)^{n-1} + \dots$$

$$+ A_k (z + h)^{n-k} + \dots + A_{n-1} (z + h) + A_n,$$

ou, desenvolvendo as potencias inteiras do binomio $z + h$ e ordenando o resultado segundo as potencias de h ,

$$f(z + h) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n$$

$$+ h [nA_0 z^{n-1} + (n-1)A_1 z^{n-2} + \dots + A_{n-1}]$$

$$+ \frac{h^2}{2} [n(n-1)A_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1 z^{n-3} + \dots]$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{h^k}{1.2 \dots k} [(n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots]$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ A_0 h^n,$$

pondo

$$(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1), \text{ etc.}$$

Representando os coeficientes de h , $\frac{1}{2} h^2$, $\frac{1}{2 \cdot 3} h^3$, etc. por $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc, vem a formula

$$f(z+h) = f(z) + h f'(z) + \frac{h^2}{2} f''(z) + \dots \\ + \frac{h^k}{1 \cdot 2 \dots k} f^{(k)}(z) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(z),$$

que tem o nome de *formula de Taylor*.

As funcções $f'(z)$, $f''(z)$, etc. são respectivamente do grão $n-1$, $n-2$, etc., e a sua lei de formação é dada pela formula seguinte:

$$f^k(z) = (n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots$$

A estas funcções dá-se respectivamente os nomes de *derivada de primeira ordem*, de *derivada de segunda ordem*, etc. da funcção $f(z)$.

Da comparação das expressões de $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, etc., ou antes da comparação da formula precedente com a correspondente a $k+1$:

$$f^{k+1}(z) = (n)_{k+1} A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_{k+1} A_1 z^{n-k-2} + \dots \\ = (n)_k (n-k) A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_k (n-k-1) A_1 z^{n-k-2} + \dots$$

conclue-se a seguinte regra para formar as derivadas successivas de $f(z)$:

Para passar de uma funcção para a sua derivada, ou de uma derivada para a seguinte, multiplique-se em cada termo da primeira o expoente de z pelo cocfficiente e diminua-se o expoente de uma unidade.

Por exemplo, no caso de

$$f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^2 - 7$$

vem

$$f'(z) = 5z^4 - 12z^3 + 8z$$

$$f''(z) = 20z^3 - 36z^2 + 8$$

etc.

II — A função inteira é composta de sommas, productos e potencias de funcções continuas, logo (n.º 33 — 3.º) é *continua qualquer que seja z*.

III — Toda a função inteira é um producto de n factores do primeiro grão :

$$f(z) = A_0 (z - a)^\alpha (z - b)^\beta \dots (z - l)^\lambda,$$

onde a, b, \dots, l são as raizes da equação $f(z) = 0$. Este theorema é bem conhecido da theoria das equações, e mais tarde o demonstraremos.

39. — Consideremos agora as *funcções racionais fraccionarias*, isto é, as funcções da fórmula :

$$u = f(z) = \frac{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n}{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p}.$$

I — Suppondo $n > p$, pôde effectuar-se a divisão do numerador pelo denominador e reduzir d'este modo u à fórmula

$$u = F(z) + \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

onde $F(z)$, $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ são funcções inteiras, e o grão de $\varphi(z)$ é menor de que o grão de $\psi(z)$.

Decompondo $\psi(z)$ em factores, o que dá

$$\psi(z) = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta \dots (z - l)^\lambda,$$

a fracção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é susceptível da decomposição seguinte :

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_1}{z - a} + \frac{A_2}{(z - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(z - a)^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\
 & + \dots\dots\dots \\
 & + \frac{L_1}{z-l} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(z-l)^\lambda},
 \end{aligned}$$

onde os numeradores são quantidades constantes.

Demonstra-se esta proposição importante do modo seguinte:

Pondo

$$\psi_1(z) = (z-b)^\beta \dots (z-l)^\lambda$$

e chamando $\varphi_1(z)$ o quociente e R o resto da divisão de $\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z)$ por $z-a$, temos

$$\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z) = \varphi_1(z)(z-a) + R$$

e, pondo $z = a$,

$$R = \varphi(a) - A_\alpha \psi_1(a).$$

Determinando pois A_α de modo que R seja nullo, isto é pondo

$$A_\alpha = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)},$$

vem

$$\varphi(z) = A_\alpha \psi_1(z) + \varphi_1(z)(z-a),$$

d'onde se tira, dividindo por $\psi(z)$,

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} \psi_1(z)}.$$

Do mesmo modo obtemos

$$\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1} \psi_1(z)} = \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(z)}{(z-a)^{\alpha-2} \psi_1(z)}.$$

Continuando acha-se finalmente a igualdade

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + \frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}.$$

Depois applica-se a $\frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}$ o mesmo processo que se applicou a $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, e continua-se do mesmo modo até chegar à decomposição enunciada.

Pelo processo anterior determina-se as constantes $A_1, A_2,$ etc., $B_1, B_2,$ etc.; mas attendendo à importancia da questão, vamos expôr um processo mais simples para esta determinação.

Pondo na igualdade precedente $z = a + h$, vem

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^\alpha \psi_1(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{h} + \frac{\varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)} = A_\alpha + A_{\alpha-1}h + \dots + A_1h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)}.$$

Este resultado mostra que, para achar $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \dots, A_1$, basta dividir $\varphi(a+h)$ por $\psi_1(a+h)$, tendo o cuidado de ordenar primeiro estes polynomios segundo as potencias crescentes de h . Os coefficients de $h^0, h, \dots, h^{\alpha-1}$ no quociente são as constantes pedidas.

Devemos observar que na formação do numerador e do denominador de $\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)}$ é escusado escrever os termos que contêm potencias de h superiores a $\alpha - 1$, pois que estes termos não influem no quociente.

Do mesmo modo se determina as outras constantes B_1, B_2, \dots dividindo $\varphi(b+h)$ por $\frac{\psi(b+h)}{h^\beta}$, etc.

EXEMPLO. — Decomponhamos por este processo a fracção :

$$\frac{z^2 - 3z + 5}{(z-1)^4(z-2)z}.$$

Pondo n'esta fracção $z = a + h = 1 + h$, vem

$$\frac{\varphi(1+h)}{\phi_1(1+h)} = \frac{3-h+h^2}{-1+h^2} = -3+h-4h^2+h^3 + \frac{4h^4-h^5}{h^2-1};$$

logo teremos

$$A_4 = -3, A_3 = 1, A_2 = -4, A_1 = 1.$$

Do mesmo modo, pondo $z = 2 + h$, vem

$$\frac{\varphi(2+h)}{\phi_1(2+h)} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 5}{(1+h)^4(2+h)},$$

que, aproveitando só a parte independente de h no numerador e no denominador, visto que $z = 2$ entra na fracção proposta no primeiro grão, dá $\frac{3}{2}$. Logo temos

$$B_1 = \frac{3}{2}.$$

Do mesmo modo se acha $C_1 = -\frac{5}{2}$.

Temos pois

$$\frac{z^2 - 3z + 5}{(z-1)^4(z-2)z} = \frac{1}{z-1} - \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{3}{(z-1)^4} \\ + \frac{\frac{3}{2}}{z-2} - \frac{5}{z}.$$

Ha muitos outros methodos para fazer a decomposição das fracções racionais, e ha mesmo formulas que dão directamente a expressão analytica das constantes $A_1, A_2, \text{ etc.}$ Pôde vêr-se alguns methodos e formulas na nossa memoria intitulada — *Sur la décomposition des fractions rationnelles* (1).

(1) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomos 1 e 11 (Coimbra).

NOTA. — No caso de ser $\alpha = 1$, é

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Com effeito, da igualdade

$$\phi(z) = (z - a) \psi_1(z)$$

tira-se, pondo $z = a + h$ e desenvolvendo os dous membros pela formula de Taylor, a identidade

$$\phi(a) + h \phi'(a) + \dots = h [\psi_1(a) + h \psi_1'(a) + \dots],$$

que, devendo ter logar qualquer que seja o valor de h , dá $\phi'(a) = \psi_1(a)$; e portanto temos

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

III — Vejamos agora se a funcção considerada é ou não continua.

A primeira parte $F(z)$ é continua por ser uma funcção inteira. A outra parte $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é a somma de fracções da fórma

$\frac{A}{(z - a)^k}$, onde k é inteiro; logo é continua (n.º 33 — 2.º) em todos os pontos, excepto nos pontos $z = a, b, c, \dots, l$.

Concluiremos pois que toda a *funcção racional fraccionaria é continua em qualquer ponto z que não seja raiz do denominador. N'estes pontos a funcção torna-se infinita.*

III

**Funções exponenciaes, logarithmicas,
e circulares**

40. — As *exponenciaes*, os *logarithmos* e as *potencias de expoente irracional* são funções transcendentales conhecidas desde os Elementos de Algebra; as *funções circulares* são conhecidas desde a Trigonometria. São as unicas transcendentales estudadas nos Elementos, e o seu estudo é muito importante por causa da frequencia com que apparecem nas questões a que se applica a Mathematica, e porque serve de preparação para o estudo das outras transcendentales de que se occupa a Analyse mathematica. Vamos porisso aqui recordar succintamente, e completar em certos pontos o que a respeito d'estas funções se ensina nos Elementos.

41. — *Exponencial de base e expoente real.* — Viu-se nos Elementos de Algebra qual é a significação de a^x quando a representa um numero racional positivo e x um numero racional positivo ou negativo. Viu-se tambem que n'este caso a cada valor de x corresponde um valor positivo para a^x , e tambem um valor negativo quando o denominador de x é par. Considerando só os valores positivos, a^x é uma função de x que tem um unico valor para cada valor racional de x .

Vejamos agora como se define a^x quando a e x são irracionaes.

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ e $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ os grupos de numeros respectivamente inferiores a a e a x , que entram na definição (n.º 2) d'estes numeros, e α e β dous numeros racionaes maiores do que a e x . Se é $a > 1$, os valores positivos de $a_m^{x_n}$ crescem constantemente quando n e m augmentam, sem todavia poderem exceder o numero α^β ; logo tendem para um limite (n.º 14—1.º) que representa, por definição, o symbolo a^x . Se é $a > 1$, os mesmos valores decrescem constantemente quando n e m augmentam, e vê-se

do mesmo modo que tendem para um limite, que representa ainda, por definição, o symbolo a^x .

Para justificar esta definição, é necessario demonstrar que a^x tem um unico valor, quaesquer que sejam os numeros racionais que entram na definição de a e de x . Sejam, com effeito, y_1 e y_2 os valores de a^x correspondentes a dous systemas differentes de numeros racionais que entrem na definição de a e de x , e seja y_3 um terceiro valor de a^x correspondente ao systema de numeros composto de todos os numeros que entram nos dous systemas anteriores, collocados pela ordem crescente. Por hypothese, a cada valor de δ correspondem dous inteiros n_1 e m_1 taes que a desigualdade

$$|y_3 - a_m^{x_n}| < \delta$$

é satisfeita pelos numeros a_m e x_n que entram nos dous systemas considerados, correspondentes a $n > n_1$ e $m > m_1$. Por ser esta desigualdade satisfeita separadamente pelos valores de a_m e x_n que entram só no primeiro ou só no segundo dos systemas considerados, os valores correspondentes de $a_m^{x_n}$ tendem tambem para y_3 , e temos (n.º 40—1.º) $y_3 = y_1$, $y_3 = y_2$ e portanto $y_1 = y_2$.

A' funcção a^x que vimos de definir chama-se *exponencial*. Vamos vêr algumas propriedades d'esta funcção.

I — *O producto de dous valores da exponencial é dado pela formula*

$$(4) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Esta proposição foi demonstrada nos Elementos de Algebra, quando a , x e y representam numeros racionais.

No caso de a , x e y representarem numeros irracionais, temos, chamando y_1 , y_2 , etc. os numeros racionais que entram na definição de y ,

$$a^x \cdot a^y = \lim_{m, n = \infty} a_m^{x_n} \cdot \lim_{m, n = \infty} a_m^{y_n} = \lim_{m, n = \infty} a_m^{x_n + y_n} = a^{x+y}.$$

II — *Quando x cresce constantemente desde $-\infty$ até ∞ , a^x cresce constantemente desde 0 até ∞ se é $a > 1$, e decresce constantemente desde ∞ até 0 se é $a < 1$.*

Seja primeiramente $a > 1$.

Sabe-se desde a Arithmetica que as potencias de expoente

inteiro e as raízes dos números maiores do que a unidade são também maiores do que a unidade; logo, se h representa um número racional positivo, é $a^h > 1$. Se h representa um número irracional positivo e h_1, h_2, \dots representam os números, menores do que h , que entram na definição de h , temos ainda $a^h > 1$, por ser $a^h > a^{h_n} > 1$.

Em virtude d'esta desigualdade, a fórmula (1) dá $a^{x+h} > x^x$, por onde se vê que a exponencial cresce quando o expoente cresce, como se sabia já, no caso dos números racionais, pelos Elementos d'Algebra.

Para demonstrar que a^x tende para ∞ quando x tende para ∞ , basta notar que, chamando m o maior inteiro contido em x , temos

$$a^x > a^m, \quad a^m = (1 + a - 1)^m = 1 + m(a - 1) + \dots,$$

por onde se vê primeiramente que a^m tende para ∞ , quando m tende para ∞ , e depois que a^x tende para ∞ quando x tende para ∞ .

Para demonstrar que a^x tende para 0 quando x tende para $-\infty$, basta notar que, quando x é negativo, o denominador de $\frac{1}{a^{-x}} = a^x$ tende para ∞ .

Para considerar o caso de ser $a < 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, o denominador de $\frac{1}{b^x} = a^x$ cresce desde 0 até ∞ , quando x cresce desde $-\infty$ até ∞ .

■■■ — Quando x tende para zero, a^x tende para a unidade.

Seja primeiramente $a > 1$.

Se x é positivo, temos, pondo $x = \frac{1}{t}$ e chamando m o maior inteiro contido em t ,

$$a^x - 1 = a^{\frac{1}{t}} - 1 \geq a^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Mas da desigualdade

$$\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)^m = 1 + a - 1 + \binom{m}{2} \left(\frac{a-1}{m}\right)^2 + \dots > a$$

tira-se

$$a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a - 1}{m}.$$

Logo $a^x - 1$ tende para zero quando x tende para zero, visto ser $a^x > 1$ e $\frac{a - 1}{m}$ tender para zero quando m tende para o infinito.

Quando x é negativo, ponha-se $x = -y$, o que dá a igualdade

$$a^x - 1 = -\frac{a^y - 1}{a^y}$$

da qual se tira ainda o principio enunciado, visto que, quando x tende para 0, a^y tende para 1.

Para demonstrar o theorema no caso de ser $a > 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, $a = \frac{1}{b^x}$ tende para 1 quando x tende para 0.

IV—A funcção a^x é continua qualquer que seja x .

E' o que resulta da igualdade

$$a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1),$$

a qual, attendendo a que a^h tende para 1 quando h tende para 0, mostra que a^{x+h} tende para a^x .

42.—NOTA **I**—Baseados nas considerações que precedem podemos completar a doutrina relativa ás raizes das quantidades irrationaes (3—5.º). Seja u um numero irracional dado e procuremos a raiz $\sqrt[m]{u}$, que representaremos por v .

Ao problema satisfaz $v = u^{\frac{1}{m}}$ pois que temos, em virtude da formula (1)

$$v^m = \left(u^{\frac{1}{m}}\right)^m = u^{\frac{1}{m}} \cdot u^{\frac{1}{m}} \dots = u.$$

Podemos accrescentar que não existe outro numero real positivo que satisfaça á questão. Com effeito, se á questão satisfizessem dois numeros v e v' e fosse $v' > v$, teriamos, pondo $v' = v + h$,

$$v'^m = (v + h)^m = v^m + mhv^{m-1} + \dots$$

ou o resultado absurdo

$$u = u + mhv^{m-1} + \dots$$

43. — NOTA III — Viu-se no n.º 27 que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende para um limite determinado, que se representou pela letra e , quando n tende para o infinito passando por uma série de numeros inteiros positivos. Podemos agora mostrar que esta expressão tende ainda para o mesmo numero e , quando n tende para o infinito passando por uma série qualquer de numeros racionais ou irracionais, positivos ou negativos.

Seja n positivo e sejam m e $m + 1$ dois numeros inteiros entre os quaes n está comprehendido. Teremos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

e depois

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

O primeiro e o ultimo membro d'esta desigualdade tendem para e , quando m tende para o infinito. Logo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende tambem para e .

Se n é negativo e igual a $-m$, temos ainda

$$\lim_{n = -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m = \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m = \infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) = e.$$

11. — *Função $e^z + iy$.* — Seja e o numero definido nos n.ºs 27 e 43. A definição de e^z no caso de ser $z = x + iy$ deve ser tal que se recaia na exponencial de expoente real quando é $y = 0$, e que tenha logar o principio fundamental (4). A estas condições satisfaz $e^z + iy$ quando se define pela igualdade, devida a Euler :

$$(2) \quad e^z + iy = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Com effeito temos, pondo $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$,

$$e^z \cdot e^{z'} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \cdot e^{x'} (\cos y' + i \operatorname{sen} y')$$

$$= e^{x+x'} [\cos (y + y') + i \operatorname{sen} (y + y')] = e^{z+z'}.$$

Adiante definiremos a^z no caso de a representar um numero positivo differente de e .

■ — Da equação de definição decorre logo uma propriedade importante da exponencial de expoente imaginario, a saber : a sua *periodicidade*. Com effeito, por ser

$$e^z + 2ki\pi = e^z [\cos (y + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (y + 2k\pi)]$$

$$= e^z (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z,$$

quando k é inteiro, conclue-se que a exponencial toma o mesmo valor cada vez que z augmenta de $2i\pi$.

Do mesmo modo se vê que a exponencial toma o mesmo valor com signal contrario cada vez que z augmenta de $i\pi$.

■■ — Do que precede resulta tambem que todo o imaginario se pôde exprimir debaixo da fórmula de exponencial. Com effeito, temos

$$x + iy = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho e^{i\theta}.$$

Temos assim tres fórmulas que se pôde dar ao imaginario, cada uma das quaes pôde ser preferivel em sua questão.

■■■ — Por ser

$$e^h + ik = e^h (\cos k + i \operatorname{sen} k)$$

e por e^h , $\cos k$, $\sin k$ tenderem respectivamente para 1, 1, 0 quando h e k tendem para 0, como se viu no n.º 41 — III a respeito de e^h , e na Trigonometria a respeito de $\sin k$ e $\cos k$, vê-se que é

$$\lim_{h, k=0} e^h + ik = 1.$$

Temos porém

$$e^{x+h+i(y+k)} = e^x + iy \cdot e^h + ik.$$

Logo

$$\lim_{h, k=0} e^{x+h+i(y+k)} = e^x + iy.$$

A função exponencial e^z é pois continua, qualquer que seja z .

45. — *Logarithmos reaes.* Consideremos agora a função inversa da exponencial e^z , isto é a função y ligada com x pela equação

$$x = e^y,$$

e supponhamos que x é uma variavel real positiva e que y é uma variavel real, positiva ou negativa.

A y chama-se, cono se sabe, *logarithmo neperiano de x* (n.º 27), e será representado pelo signal $\log x$.

I — *A variavel y é uma função definida de x que, quando x varia desde 0 até ∞ , varia desde $-\infty$ até ∞ .*

Com effeito, por ser e^y uma função continua de y , se a x dermos um valor positivo a , a y deve corresponder (n.º 34 — 2.º) um valor b , e só um, visto que a valores designaes de y correspondem valores designaes de x . Além d'isso, a $x = 0$ corresponde (n.º 41 — II) $y = -\infty$, a $x = \infty$ corresponde $y = \infty$, e a $e^y > e^{y'}$ corresponde $y > y'$. De tudo isto resulta o theorema enunciado.

II — *Se x e x' representarem dous numeros positivos, temos*

$$\log (xx') = \log x + \log x'.$$

Esta proposição fundamental é bem conhecida desde os Elementos d'Algebra.

III — Se y é um numero racional e a um numero real positivo, temos, como se sabe,

$$\log a^y = y \log a.$$

Se y é um numero irracional e $y_1, y_2 \dots, y_t$, etc. são os numeros racionais, inferiores a y , que entram na sua definição, temos

$$\log a^{y_t} = y_t \log a,$$

e portanto

$$a^{y_t} = e^{y_t \log a},$$

e, no limite,

$$a^y = e^{y \log a}.$$

Logo

$$\log a^y = y \log a.$$

IV — A função $\log x$ é continua quando a variavel x é positiva e diferente de 0. No ponto 0 a função $\log x$ é infinita.

Esta proposição resulta da igualdade

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

cujo ultimo membro tende (n.º 27 e 43) para 0 quando h tende para 0.

V — Temos, pondo $x = a^y$ e representando por $\log_a x$ o logarithmo de x na base a ,

$$\log_a x = y, \log x = y \log a,$$

e portanto

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Passa-se pois do logaríthmo neperiano de x para o logaríthmo de x na base a dividindo o logaríthmo neperiano de x pelo logaríthmo neperiano de a .

46. — Consideremos agora a função u determinada pela equação

$$z = e^u$$

onde z e u representam quantidades reaes ou imaginarias.

Suppondo

$$z = x + iy = \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega), \quad u = \alpha + i\beta$$

temos a equação

$$\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta),$$

que dá

$$\rho \cos \omega = e^{\alpha} \cos \beta, \quad \rho \operatorname{sen} \omega = e^{\alpha} \operatorname{sen} \beta,$$

d'onde se tira, por serem α e β reaes,

$$e^{2\alpha} = \rho^2, \quad \cos \omega = \cos \beta, \quad \operatorname{sen} \omega = \operatorname{sen} \beta,$$

ou

$$\alpha = \log \rho, \quad \beta = \omega + 2k\pi,$$

onde é $\omega < 2\pi$, e k igual a zero ou a um numero inteiro positivo ou negativo qualquer.

Temos pois

$$(a) \quad u = \log ((z)) = \log \rho + i (\omega + 2k\pi),$$

empregando, como Cauchy, o signal $\log ((N))$ para designar todos os logaríthmos de N e o signal $\log N$ para designar o logaríthmo real.

O valor de ρ que entra n'esta igualdade é dado pela formula

$$\rho = + \sqrt{x^2 + y^2},$$

e o valor de ω é dado por qualquer das formulas

$$\omega = \text{arc sen } \frac{y}{\rho}, \quad \omega = \text{arc cos } \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \text{arc tang } \frac{y}{x},$$

devendo porém observar-se que qualquer d'estas formulas dá dous valores para ω , e que porisso se deve determinar primeiramente pelo signal de x e y qual o quadrante em que está comprehendido o angulo ω .

■—Se z fôr um numero real positivo, é $\omega = 0$, e vê-se pela formula precedente que o logarithmo de z tem um valor real correspondente a $k = 0$, e um numero infinito d'elles imaginarios correspondentes aos outros valores de k . Em todos os outros casos o logarithmo de z tem um numero infinito de valores imaginarios, e não tem valor real.

Cada uma das expressões que se obtêm para u dando a k um valor determinado é um *ramo* da funcção $\log ((z))$. Cada ramo é uma funcção definida de z , excepto no ponto $z = 0$ onde se torna infinita. Quando z é um numero real positivo, a funcção tem um ramo real e um numero infinito de ramos imaginarios; nos outros casos só tem ramos imaginarios.

■■—Não ha valor algum de z para o qual dous ramos de $\log ((z))$ sejam iguaes, pois que viria

$$\log \rho + i (\omega + 2k\pi) = \log \rho + i (\omega + 2k'\pi),$$

ou $k = k'$.

■■■—A igualdade fundamental

$$\text{lag} ((z)) + \log ((z')) = \log ((z z'))$$

tem logar para todos os valores do logarithmo. Os logarithmos que entram nos dous membros d'esta igualdade podem todavia corresponder a ramos diferentes da funcção.

■V—Cada um dos ramos da funcção $\log ((z))$ é uma funcção continua de z .

Com effeito, temos, para cada ramo,

$$\begin{aligned} \log (z + h + ik) - \log z &= \frac{1}{2} \log \frac{(x + h)^2 + (y + k)^2}{x^2 + y^2} \\ &+ i \left[\text{arc tang } \frac{y + k}{x + h} - \text{arctang } \frac{y}{x} \right]. \end{aligned}$$

Quando h e k tendem para zero, temos

$$\lim_{h, k=0} \log \frac{(x+h)^2 + (y+k)^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

e, dando a h e k valores tão pequenos que $x+h$ tenha o signal de x e que $y+k$ tenha o signal de y ,

$$\begin{aligned} \lim_{h, k=0} \left[\text{arc tang} \frac{y+k}{x+h} - \text{arc tang} \frac{y}{x} \right] \\ = \lim_{h, k=0} \text{arc tang} \frac{kx - hy}{x(x+h) + y(y+k)} = 0, \end{aligned}$$

visto que os dous arcs que entram no primeiro membro d'esta formula estão comprehendidos no mesmo quadrante.

Temos pois

$$\lim_{h, k=0} \log (z + h + ik) \leftarrow \log z,$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

47. — *Função z^a .* E' conhecido desde o n.º 8 a significação de z^a quando a representa um numero racional qualquer, e sabe-se que é

$$z^a = \rho^a [\cos a (\theta + 2k\pi) + i \text{sen} a (\theta + 2k\pi)],$$

ρ e θ representando o módulo e o argumento de z . No caso de a ser irracional toma-se esta igualdade para definição de z^a . A função z^a goza das propriedades seguintes:

■ — Se a é racional e igual a $\frac{m}{n}$, a função z^a tem n ramos (n.º 8—IV), que correspondem a $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Se a é irracional, a função tem um numero infinito de ramos. Se z é real e igual ao numero positivo x , é $\theta = 0$ e z^a tem um unico ramo real positivo correspondente a $k = 0$, e, no caso de a ser uma fracção de denominador par, tem ainda um ramo real negativo correspondente a $k = \frac{n}{2}$.

■ — Por ser (n.º 44)

$$e^a \log z = e^a [\log r + (\theta + 2k\pi) i]$$

$$= r^a [\cos a (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} a (\theta + 2k\pi)],$$

temos a relação

$$z^a = e^a \log z,$$

que pôde servir depois de definição a z^a quando a é imaginario.

III— Seja z positivo e igual a x , e consideremos o ramo real positivo de x^a . Da relação

$$x^a = e^a \log x$$

deduzem-se as propriedades seguintes :

1.º — Quando x cresce desde 0 até ∞ , x^a cresce desde 0 até ∞ .

Com effeito, quando x cresce desde 0 até ∞ , $\log x$ cresce desde $-\infty$ até ∞ , e portanto $e^a \log x$ cresce desde 0 até ∞ .

2.º — O producto de dous valores da funcção é dado pela formula

$$x^a \cdot x'^a = (xx')^a.$$

Temos, com effeito,

$$x^a x'^a = e^a \log x \cdot e^a \log x' = e^a (\log x + \log x')$$

$$= e^a \log (xx') = (xx')^a.$$

3.º — A funcção x^a é continua em qualquer dos pontos considerados, exceptuando o ponto $x = 0$ quando a é negativo. N'este ponto a funcção torna-se infinita.

Viu-se, com effeito, no n.º 45 que, quando é $x > 0$, a funcção $\log x$ tem um ramo real que é uma funcção continua de x ; e portanto tambem n'este caso é continua a funcção de funcção $e^a \log x$.

No ponto $x = 0$ a funcção x^a é infinita quando a é negativo; quando porém a é positivo $\frac{1}{e^{-a \log x}}$ tende para 0 quando x tende para 0, e a funcção x^a é ainda continua.

48.—*Funções circulares.*—As funções circulares foram estudadas na Trigonometria, onde apparecem como auxiliares para a resolução dos triangulos.

I—As suas propriedades fundamentaes são, no caso dos arcos reaes, as seguintes:

1.^a— Sendo a e b dous arcos reaes, temos

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$

$$\text{cos } (a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b.$$

E' o *theorem* de addicção.

2.^a—As funções circulares são *periodicas*, isto é, tomam o mesmo valor cada vez que o arco augmenta de 2π , e o mesmo valor com signal contrario cada vez que o arco augmenta de π .

II—As formulas do n.º 44:

$$e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \text{ sen } x$$

dão as funções circulares expressas por meio de funções exponenciaes:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

III—Estas relações permitem definir os *senos* e *cosenos* de arcos imaginarios. Representa-se, com effeito, por $\text{sen } (x + iy)$ e $\text{cos } (x + iy)$ as funções que resultam de substituir nas formulas precedentes x por $x + iy$, a saber:

$$\cos z = \cos (x + iy) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y + ix} + e^{y - ix}}{2}$$

$$\text{sen } z = \text{sen } (x + iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y + ix} - e^{y - ix}}{2i}.$$

A primeira d'estas formulas dá

$$\begin{aligned}\cos(z + z') &= \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{e^{iz} e^{iz'} + e^{-iz} e^{-iz'}}{2} \\ &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz'} - e^{-iz'})}{4}\end{aligned}$$

ou

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'.$$

Do mesmo modo a segunda dá

$$\operatorname{sen}(z + z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'.$$

Vê-se pois que os *senos* e os *cosenos* de arcos imaginarios gozam da propriedade expressa pelo *theoremata de addicção*.

IV — Pondo nas formulas precedentes $x = 0$, vem

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad \operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}.$$

Estas funcções $\operatorname{sen}(iy)$ e $\cos(iy)$ têm o nome de *seno hyperbolico* e de *coseno hyperbolico* de y . Temos aqui a origem da theoria das *funcções hyperbolicas*, devida a Riccati, que é objecto de tratados especiaes.

V — Por ser a exponencial uma funcção continua, qualquer que seja z , e por serem $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ sommas d'exponenciaes, podemos enunciar o *theoremata* seguinte:

As funcções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são continuas, qualquer que seja z .

VI — A tangente de z , quer z seja real, quer seja imaginario, é definida pela relação

$$\operatorname{tang} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

Esta funcção é continua (n.º 36) qualquer que seja z , excepto nos pontos que satisfazem á equação

$$\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = 0,$$

ou

$$e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y (\cos x - i \operatorname{sen} x) = 0,$$

ou

$$\cos x (e^{-y} + e^y) + i \operatorname{sen} x (e^{-y} - e^y) = 0.$$

Esta equação, por ser a expressão $e^{-y} + e^y$ sempre positiva, dá $\cos x = 0$, $e^{-y} = e^y$, e portanto

$$y = 0, x = \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi, \dots$$

Logo a tangente é uma função continua, qualquer que seja z , excepto nos pontos $(0, \frac{1}{2} \pi)$, $(0, \frac{3}{2} \pi)$, ...

49. — *Funções circulares inversas.* — Suppondo que na relação

$$\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = \cos u = z$$

se conhece $\cos u$, isto é z , podemos achar u isto é $\operatorname{arc} \cos z$.
A equação precedente dá, com effeito,

$$e^{2iu} - 2z e^{iu} + 1 = 0;$$

logo será

$$e^{iu} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

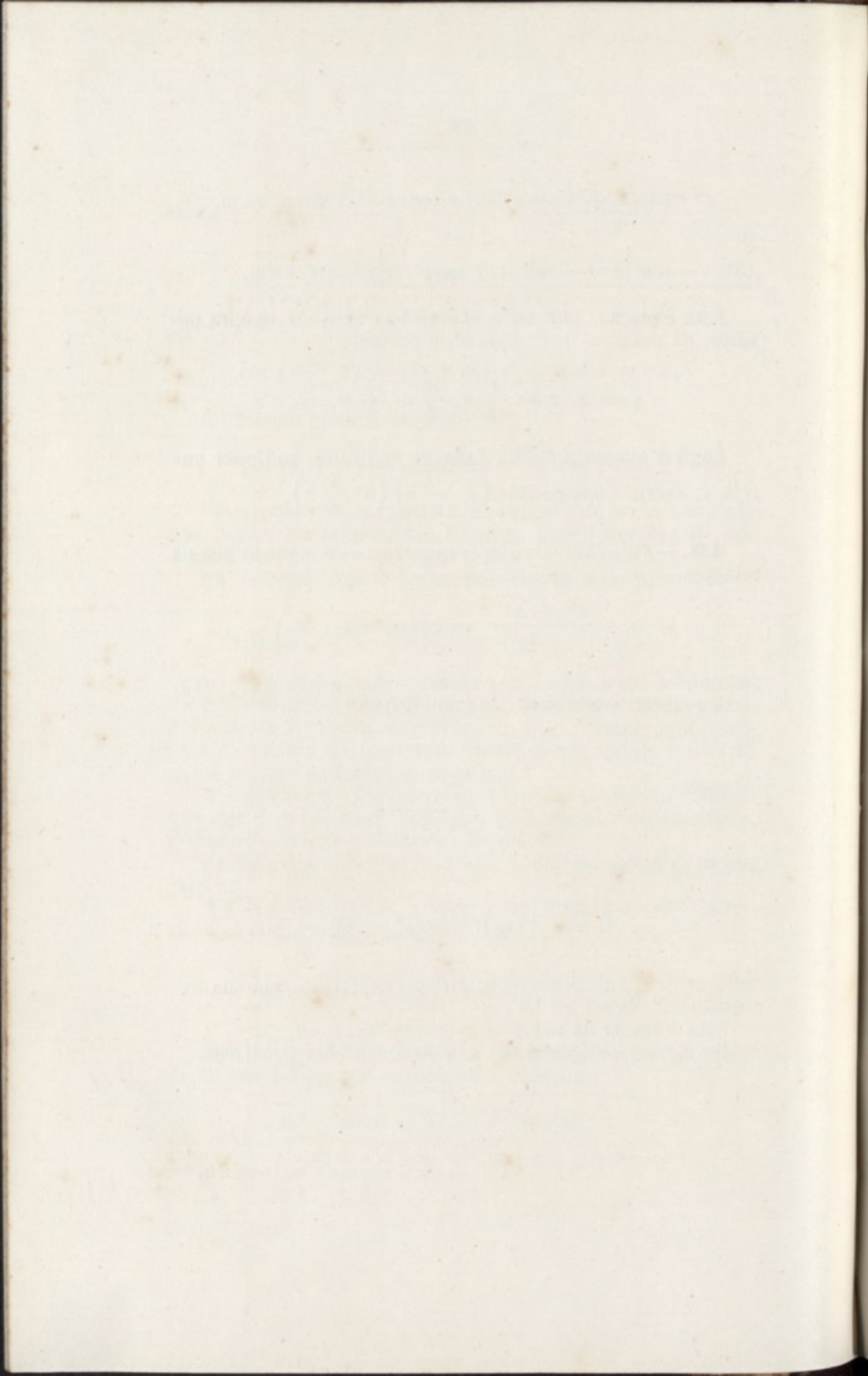
d'onde se deduz

$$u = \frac{1}{i} \log ((z \pm \sqrt{z^2 - 1})),$$

onde se deve substituir o logarithmo neperiano pela sua expressão achada no n.º 46.

Esta formula dá todos os ramos do $\operatorname{arc} \cos z$.

Do mesmo se estudariam as outras funções circulares.



CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELIMINARES

I

Noção de infinitamente pequeno e de derivada

50.—Chama-se *quantidade infinitamente pequena toda a quantidade variavel que tende para o limite zero.*

Seja α uma quantidade infinitamente pequena e β uma quantidade ligada com α de tal modo que, quando α tende para o limite zero, β tenda tambem para o limite zero. Diz-se que β é *infinitamente pequena de ordem n relativamente a α* se $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende para um limite determinado ⁽¹⁾, differente de zero, quando α tende para zero.

Chamando A este limite, podemos escrever n'este caso

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = A + \varepsilon,$$

⁽¹⁾ Diz-se que uma quantidade u , dependente de outra x , tende para um limite *determinado*, quando x tende para a , se o limite para que tende u é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como x tende para a .

onde a quantidade ε é infinitamente pequena ao mesmo tempo que α .

D'esta definição decorre immediatamente:

1.º — Que, se duas quantidades infinitamente pequenas β e β' forem respectivamente da ordem n e m relativamente a α , o seu producto será da ordem $n + m$ e o seu quociente da ordem $n - m$.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta = \alpha^n (A + \varepsilon), \beta' = \alpha^m (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta\beta'}{\alpha^{n+m}} = AB.$$

2.º — Que, se uma quantidade infinitamente pequena β' fôr da ordem m relativamente a β , e esta da ordem n relativamente a α , a primeira será da ordem $n \times m$ relativamente a α .

Com effeito, das equações de definição

$$\beta' = \beta^m (A + \varepsilon), \beta = \alpha^n (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha^{nm}} = AB^m.$$

EXEMPLO 1.º — Quando um arco é infinitamente pequeno, o seu seno é um infinitamente pequeno da mesma ordem. Com effeito, sabe-se pela Trigonometria que $\frac{\text{sen } x}{x}$ tende para a unidade quando x tende para o limite zero.

EXEMPLO 2.º — No triangulo rectangulo ABC a differença entre a hypotenusa BC e o catheto AC é infinitamente pequena de segunda ordem relativamente ao catheto.

Com effeito, chamando α o angulo BCA , temos

$$CB - AC = CB (1 - \cos \alpha) = 2CB \text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

e portanto

$$\lim \frac{CB - AC}{\alpha^2} = \lim \frac{2CB \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2} BC,$$

visto que é

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} = 1.$$

51. — Na *Introdução* definiu-se a *continuidade* das funcções. A respeito da noção de continuidade observaremos aqui que, empregando a linguagem infinitesimal, se pôde dizer que $f(x)$ é uma *funcção continua* de x no ponto a , quando a diferença $f(a+h) - f(a)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h .

52. — Seja $f(x)$ uma funcção de x definida na visinhança de cada ponto. Se, quando h tende para zero, a fracção

$$(1) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tende para um limite *determinado* $f'(x)$ (isto é, para um limite que é sempre o mesmo qualquer que seja a lei dos valores successivos pelos quaes passa h quando tende para zero), a este limite dá-se o nome de *derivada* da funcção $f(x)$ no ponto x .

Se em alguns pontos a fracção (1) tende para o infinito, diz-se que a derivada é *infinita* n'estes pontos e *finita* nos outros.

Se em alguns pontos a mesma funcção não tende para um limite determinado, a funcção n'estes pontos não tem derivada (1). No que segue, quando dissermos que uma funcção tem derivada, sem especificar os pontos em que isto tem logar, deve-se entender que a funcção tem derivada em todos os pontos em que é dada.

(1) Quando n'um ponto a fracção (1) tende para mais do que um limite, diz-se algumas vezes que n'este ponto a funcção tem derivada, mas que não é determinada.

E' facil de vêr que, no caso de $f(x)$ ser uma funcção algebrica inteira, a definição de derivada que vimos de dar concorda com a definição dada na *Introducção* (n.º 38 — 1).

Com effeito, a formula de Taylor dá

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x),$$

e portanto

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Da definição de derivada deduz-se immediatamente o seguinte principio:

Toda a funcção, que tem derivada, é continua nos pontos em que a derivada se não torna infinita.

Com effeito, da igualdade

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

deduz-se

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

representando por ε uma quantidade infinitamente pequena com h .

Temos pois a igualdade

$$f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon),$$

a qual mostra que a differença $f(x+h) - f(x)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h , quando a funcção $f'(x)$ é finita.

Por muito tempo se julgou que toda a funcção, continua em todos os pontos d'um intervallo dado, tinha nos pontos d'este intervallo, exceptuando um numero limitado d'elles, uma derivada finita. Hoje sabe-se que este principio é falso e conhecem-se muitas funcções continuas que não admittem derivada. Adiante veremos um exemplo notavel d'estas funcções

singulares. As funcções consideradas na *Introducção* têm todas derivada. Veremos isto adiante, assim como veremos apparecer um numero infinito d'outras funcções nas mesmas circumstancias.

53. — Considerámos no parographo anterior a derivada como limite da razão $\frac{k}{h}$ (pondo $f(x+h) - f(x) = k$) de dous infinitamente pequenos. D'este modo sobre k e h não se podem executar as operações da Algebra. Introduzindo a noção de *differencial* póde exprimir-se a derivada pela razão de dous infinitamente pequenos, como vamos vêr.

Temos

$$f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon),$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h . A differença $f(x+h) - f(x)$ compõe-se pois de duas parcellas infinitamente pequenas, a primeira das quaes é proporcional a h , e, por tender menos rapidamente para zero do que a segunda, é a parte principal da differença quando h é sufficientemente pequeno e $f'(x)$ é differente de zero. A esta parcella dá-se o nome de *differencial da funcção* $f(x)$ e representa-se por $df(x)$ ou por dy (pondo $y = f(x)$). Para conformidade de notação representa-se o infinitamente pequeno arbitrario h pela notação dx . Temos pois

$$dy = f'(x) dx,$$

onde dx é o *augmento arbitrario da variavel independente* x , dy é a *parte proporcional a dx do augmento correspondente da funcção* $f(x)$. A derivada $f'(x)$ é o *quociente de dy por dx* .

Das duas igualdades precedentes tira-se a relação

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{dy} = 1$$

entre o augmento da funcção $f(x)$ e a sua differencial, de que teremos de fazer uso.

54. — Em todo este livro empregaremos para representar as derivadas umas vezes a notação y' ou $f'(x)$ (notação

de Lagrange), outras vezes a notação $\frac{dy}{dx}$ (notação de Leibnitz).

Esta ultima notação é principalmente util quando y é funcção de muitas variaveis independentes. Assim, se fôr $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, a derivada de y relativamente a x_1 , quando as outras variaveis são consideradas como constantes, que se chama *derivada parcial* de y relativamente a x_1 , será representada por $\frac{\partial y}{\partial x_1}$; do mesmo modo a *derivada parcial* de y relativa-

mente a x_2 será representada por $\frac{\partial y}{\partial x_2}$; etc. As differencias ∂y que entram n'estas derivadas parciaes são differentes umas das outras e é o denominador que indica o que cada uma representa. Portanto sobre as differencias que entram nas derivadas parciaes, não se podem executar operações que as separem dos denominadores. E' para não esquecer esta circumstancia que em logar da caracteristica d se emprega a caracteristica ∂ .

A funcção $f'(x)$ póde ter tambem uma derivada que se representa por $f''(x)$, etc. Estas derivadas $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. têm respectivamente os nomes de derivadas de *segunda ordem*, de *terceira ordem*, etc. Podem tambem ser representadas pelas notações $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. por motivos que adiante veremos.

No caso de muitas variaveis independentes representa-se por

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \partial x_3^c \dots}$$

a derivada de ordem n que se obtém derivando primeiro a vezes a funcção relativamente a x_1 , considerando as outras variaveis como constantes; depois derivando o resultado obtido b vezes relativamente a x_2 , considerando as outras variaveis como constantes; e assim successivamente.

55. — Foi por considerações geometricas que se chegou á noção importante de derivada. Vamos pois entrar por um pouco no campo da Geometria, para se poder vêr a origem d'esta noção e apreciar assim a sua importancia.

**Methodo dos limites. Methodo infinitesimal.
Origem do Calculo infinitesimal**

56. — Dá-se, como se sabe, o nome de *methodo dos limites* ao methodo de determinar quantidades considerando-as como limites d'outras quantidades conhecidas. Viu-se já na Geometria Elementar a importancia consideravel d'este methodo para se resolverem certas questões relativas ao circulo, ao cylindro, ao cône e á esphera. Aqui vamos fazer ainda duas applicações importantes para o nosso fim.

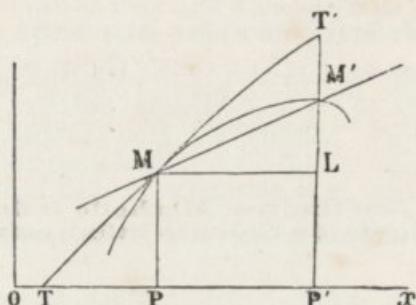
I — Consideremos uma recta MM' que corte uma curva em dous pontos, e supponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para M ⁽¹⁾, a recta tende para um limite determinado, isto é, para um limite MT' que é sempre o mesmo qualquer que seja a série de pontos pelos quaes passa M' quando se approxima de M . A esta recta MT' chama-se *tangente* á curva no ponto M .

Se forem $y = f(x)$ a equação da curva, (x, y) e $(x + h, y + k)$ as coordenadas dos pontos M e M' , θ e α as inclinações $T'ML$ e $M'ML$ da tangente e da secante sobre o eixo das abscissas, a resolução do triangulo rectangulo LMM' dará a igualdade

$$\text{tang } \alpha = \frac{M'L}{ML} = \frac{k}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

por meio da qual se determina a inclinação da secante sobre o eixo das abscissas, substituindo $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ pelo seu valor tirado da equação da curva.

(1) Diz-se que uma recta fixa é o limite para que tende uma recta variavel se o angulo das duas rectas tende para zero; e que um ponto variavel tende para um ponto fixo se a distancia dos dous pontos tende para zero.



Mas, quando o ponto M' tende para M , h tende para zero, logo temos a igualdade

$$\operatorname{tang} \theta = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

por meio do qual se determina a direcção θ da tangente substituindo $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pelo seu valor tirado da equação da curva. Este *methodo de tangentes* é devido a Fermat.

No caso, por exemplo, de ser $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = R^2$, teremos, mudando x em $x+h$ e y em $y+k$,

$$x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 = R^2,$$

ou

$$2hx + h^2 + 2ky + k^2 = 0,$$

que dá

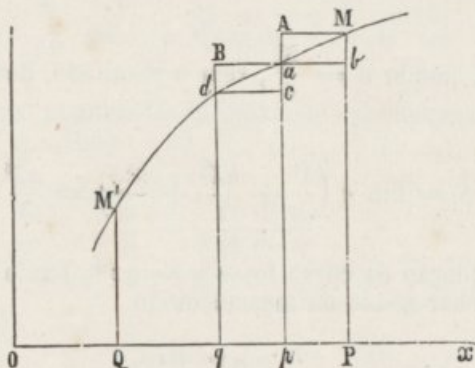
$$\frac{k}{h} = - \frac{2x+h}{2y+k},$$

e portanto

$$\operatorname{tang} \theta = \lim \frac{k}{h} = - \frac{x}{y}.$$

Temos assim o coefficiente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y) .

III—O segmento plano $MM'QP$, compreendido entre uma curva MM' cuja equação é $y = f(x)$, o eixo das abscissas e duas ordenadas MP e $M'Q$, correspondentes às abscissas X e x_0 , póde ser decomposto n'outros por meio de rectas paralelas ao eixo das ordenadas que passem por $n - 1$ pontos equidistantes, compreendidos entre P e Q , cujas abscissas representaremos por x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Tirando depois pa-



rallelas ao eixo das abscissas que passem pelos pontos M, a, d , etc. forma-se uma série de rectangulos $r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, r_1$ ($AMPp, aBpq$, etc.) cujas áreas são iguaes a $hf(X), hf(x_{n-1}), \dots, hf(x_2), hf(x_1)$, representando por h o comprimento de cada uma das n partes em que foi dividido o intervallo PQ . Posto isto, chama-se *área* do segmento plano considerado o limite para que tende a somma

$$hf(x_1) + hf(x_2) + \dots + hf(X)$$

quando h tende para zero, se este limite existe e tem um valor unico qualquer que seja o modo como h tende para zero (questão de que adiante nos occuparemos).

Por exemplo, se a linha MM' é uma recta $y = ax$ que passa pela origem das coordenadas, e se queremos achar a área comprehendida entre a origem e a ordenada correspondente á abscissa X , teremos $X = nh$, e portanto

$$\begin{aligned} S &= \lim ah^2 [n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1] \\ &= \lim \frac{n(n+1)ah^2}{2} = \lim \left[\frac{aX^2}{2} + \frac{aXh}{2} \right] = \frac{aX^2}{2}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo no caso da parábola $y = ax^2$ vem

$$S = \lim ah^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2);$$

mas, em virtude de um theorema da Algebra ⁽¹⁾, temos

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6};$$

e portanto, pondo $n = \frac{X}{h}$, vem o resultado, devido a Archimedes:

$$S = \lim a \left(\frac{X^3}{3} + \frac{hX^2}{2} + \frac{h^2X}{6} \right) = \frac{aX^3}{3}.$$

Se a equação da curva fosse $y = ax^m$, sendo m inteiro e positivo, achar-se-hia do mesmo modo

$$S = \frac{aX^{m+1}}{m+1},$$

resultado devido a Wallis.

57. — O methodo dos limites, quando se determinam as quantidades considerando-as como limites de razões ou limites de sommas de quantidades infinitamente pequenas, toma o nome de methodo infinitesimal. Os dous principios seguintes facilitam a applicação do methodo infinitesimal a muitas questões:

1.º — Se se quizer achar o limite para que tende a razão $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de duas quantidades infinitamente pequenas α' e α , e se as quantidades infinitamente pequenas β' e β estiverem ligadas com α' e α de modo que seja

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \quad \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

(1) Este theorema será adiante demonstrado.

podemos substituir α' por β' e α por β , e temos :

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta} .$$

Com effeito, temos por hypothese

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon ,$$

onde ε' e ε são quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que α' e α . Logo será

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta' (1 + \varepsilon')}{\beta (1 + \varepsilon)} ,$$

e portanto

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta} .$$

2.º— Se as quantidades $\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(n)}$ tenderem para zero quando n tende para o infinito e se quizer achar o limite para que tende n'este caso a somma d'estas quantidades, e se as quantidades positivas $\beta, \beta', \dots, \beta^{(n)}$ estiverem ligadas com $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc. de tal modo que seja

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\alpha''}{\beta''} = 1 \text{ etc.},$$

podemos substituir α por β , α' por β' , etc., e temos

$$\lim (\alpha + \alpha' + \dots + \alpha^{(n)}) = \lim (\beta + \beta' + \dots + \beta^{(n)}) .$$

Com effeito, temos

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \quad \frac{\alpha''}{\beta''} = 1 + \varepsilon'', \text{ etc.},$$

e portanto

$$\alpha + \alpha' + \dots + \alpha^{(n)} = \beta + \beta' + \dots + \beta^{(n)} \\ + \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \dots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)}.$$

Mas suppondo que ε é aquella das quantidades infinitamente pequenas $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'',$ etc. que tem maior valor absoluto, teremos (n.º 8—I) a desigualdade

$$|\beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \dots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)}| \leq \varepsilon |(\beta + \beta' + \dots + \beta^{(n)})|,$$

que, quando $\beta + \beta' + \dots$ tende para um limite determinado, dá

$$\lim (\beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \dots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)}) = 0.$$

Logo é

$$\lim (\alpha + \alpha' + \dots) = \lim (\beta + \beta' + \dots).$$

Só mais tarde se poderá apreciar a importancia d'estes dous principios. O primeiro tem applicação nas questões da natureza da questão I do paragrapho precedente, em que uma quantidade é determinada pelo limite da razão de dous infinitamente pequenos. O segundo tem applicação nas questões da natureza da questão II do mesmo paragrapho, em que uma quantidade é determinada pelo limite de uma somma de infinitamente pequenos. Em virtude d'estes principios podemos substituir os infinitamente pequenos que entrem n'uma questão, por outros que a simplifiquem.

58. — Para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza da questão I do n.º 56 é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Somos assim levados pela questão importante da determinação das tangentes ás curvas á *resolução do problema de calculo que tem por fim achar as derivadas das funcções.*

Este problema é o objecto do *Calculo Differential.*

Em segundo logar, para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza da questão II do n.º 56 é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite da somma

$$S = hf(x_1) + hf(x_2) + \dots + hf(X).$$

Somos assim levados a outro problema da Analyse: *determinar a funcção que é o limite da somma precedente.*

Adiante faremos vêr que, se a funcção $f(x)$ é continua, o limite para que tende S , quando h tende para zero, é uma funcção de X , cuja derivada é igual a $f(X)$.

Somos pois levados assim à *resolução do problema de calculo que tem por fim achar as funcções quando se conhecem as suas respectivas derivadas.* Este problema é o objecto do *Calculo Integral*.

O *Calculo Differencial* e o *Calculo Integral* constituem a *Analyse infinitesimal*, cuja descoberta é devida a Newton e a Leibnitz. A determinação das tangentes ás curvas e a quadratura das áreas planas foram as duas questões que principalmente levaram estes dous celebres geometras a esta grande descoberta.

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

I

Theoremas geraes

59. — I — Seja y uma funcção de x definida pela igualdade

$$y = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \dots \pm \varphi_n(x),$$

e procuremos a derivada d'esta funcção relativamente a x , suppondo que $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc. admittem derivadas finitas no ponto x .

Mudando x em $x + h$, e chamando k , l_1 , l_2 , ..., l_n os augmentos correspondentes de y , $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc., teremos

$$k = l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n,$$

d'onde se deduz, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \lim \frac{l_1}{h} \pm \lim \frac{l_2}{h} \pm \dots$$

ou

$$y' = \varphi'_1(x) \pm \varphi'_2(x) \pm \dots \pm \varphi'_n(x).$$

Logo a derivada de uma somma algebraica de funcções é igual á somma algebraica das derivadas das parcelas.

III — Procuremos a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$$

de duas funcções dadas, que admittam derivadas finitas no ponto x .

Mudando x em $x + h$ e chamando k , l_1 , l_2 os augmentos correspondentes de y , $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, vem

$$y + k = \varphi_1(x + h) \cdot \varphi_2(x + h) = [\varphi_1(x) + l_1][\varphi_2(x) + l_2].$$

Teremos pois

$$k = l_1 \varphi_2(x) + l_2 \varphi_1(x) + l_1 \cdot l_2,$$

e portanto, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \varphi_2(x) \lim \frac{l_1}{h} + \varphi_1(x) \lim \frac{l_2}{h},$$

ou

$$y' = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) + \varphi_2'(x) \varphi_1(x).$$

Do mesmo modo se vê que a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$$

é dada pela formula

$$y' = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) + \varphi_1(x) \varphi_2'(x) \dots \varphi_n(x) \\ + \dots + \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n'(x);$$

e portanto a derivada de um producto de funcções é igual á somma dos productos que se obtêm multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.

III — A derivada do quociente das mesmas funcções:

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

obtem-se igualando os limites para que tendem os dous membros da identidade

$$\frac{1}{h} \left[\frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \right] = \frac{1}{\varphi_2(x)\varphi_2(x+h)} \left[\varphi_2(x) \frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} - \varphi_1(x) \frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} \right],$$

quando h tende para zero, o que dá

$$y' = \frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{[\varphi_2(x)]^2}.$$

Logo a derivada de uma fracção é igual ao quociente da differença entre os productos da derivada do numerador pelo denominador e da derivada do denominador pelo numerador dividida pelo quadrado do denominador.

IV — Seja y uma funcção de funcção de x determinada pelas equações:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x , suppondo que $\varphi(x)$ admite uma derivada finita no ponto x , e que $f(u)$ admite uma derivada finita no ponto u correspondente. Chamando l e k os augmentos de u e de y , correspondentes ao augmento h de x , temos

$$k = f(u+l) - f(u) = l \left(\frac{dy}{du} + \varepsilon \right),$$

$$l = \varphi(x+h) - \varphi(x) = h \left(\frac{du}{dx} + \varepsilon' \right),$$

onde ε e ε' representam quantidades infinitamente pequenas com h ; e portanto

$$\frac{k}{h} = \left(\frac{dy}{du} + \varepsilon \right) \left(\frac{du}{dx} + \varepsilon' \right).$$

Logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Temos pois o theorema seguinte:

Se y é funcção de u e u é funcção de x , a derivada de y relativamente a x é igual ao producto da derivada de y relativamente a u pela derivada de u relativamente a x .

V—Se resolvermos relativamente a x a equação $y = f(x)$, vem uma equação da fórma $x = \varphi(y)$, e a funcção $\varphi(y)$ chama-se *funcção inversa de $f(x)$* .

Supponhamos que as funcções $f(x)$ e $\varphi(y)$ têm um unico valor para cada valor de x e de y ; que a funcção $f(x)$ é continua, e que a funcção $\varphi(y)$ admite uma derivada finita no ponto y . Chamando k o augmento infinitamente pequeno de y correspondente ao augmento infinitamente pequeno h de x , temos

$$h = \varphi(y + k) - \varphi(y) = k [\varphi'(y) + \alpha],$$

onde α representa uma quantidade infinitamente pequena com k , e portanto com h .

Temos pois

$$1 = \frac{k}{h} (\varphi'(y) + \alpha),$$

e portanto

$$f'(x) = \lim \frac{k}{h} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f(x))}.$$

Logo a derivada de uma funcção é igual á unidade dividida pela derivada da sua funcção inversa.

II

**Derivadas das funcções algebraicas,
logarithmicas, circulares, etc.**

60. — Vamos agora procurar as derivadas das funcções explicitas consideradas na Algebra e na Trigonometria.

Todas estas funcções são constituídas por *funcções simples*, chamando funcções simples aquellas em que a variavel entra affectada de um só dos signaes usados para indicar as combinações analyticas. Por meio dos theoremas do n.º 59 pode-se formar a derivada de qualquer funcção quando se conhecem as derivadas das funcções simples, e vamos porisso procurar estas derivadas.

As funcções simples são as seguintes :

$$a \pm x, bx, x^m, e^x, \log x, \text{sen } x, \text{cos } x, \text{tang } x, \text{cot } x,$$

$$\text{sec } x, \text{cosec } x, \text{arc sen } x, \text{arc cos } x, \text{arc tang } x,$$

$$\text{arc cot } x, \text{arc sec } x, \text{arc cosec } x.$$

Nem todas estas funcções são independentes, e bastaria portanto procurar as derivadas das cinco funcções

$$a \pm x, ax, x^m, e^x, \text{sen } x,$$

de que as outras dependem. Em todo o caso serão aqui todas consideradas, para termos regras que permittam escrever immediatamente as suas derivadas, visto a frequencia com que apparecem na Analyse.

1) A derivada da funcção $y = a \pm x$ é

$$y' = \pm 1.$$

2) A derivada de $y = bx$ é

$$y' = b.$$

NOTA. — A derivada da funcção de funcção

$$y = a + bu,$$

onde u representa uma funcção de x , é (n.º 59—IV) $y' = bu'$; e vê-se portanto: 1.º que a derivada do producto de uma constante por uma funcção é igual ao producto da constante pela derivada da funcção; 2.º que a derivada de uma constante é nulla.

3) A funcção $y = e^x$, onde e representa o numero definido no n.º 27, dá

$$y' = \lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mas, como e^h tende para o limite 1 quando h tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n},$$

onde n representa uma quantidade que tende para o infinito quando h tende para zero; o que dá

$$h = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

representando por \log os logarithmos neperianos.

Virá pois

$$y' = e^x \lim \frac{1}{n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{e^x}{\lim \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n},$$

e por consequencia (n.ºs 27 e 43)

$$y' = e^x.$$

NOTA. — Se fôr $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 59 — IV)

$$y' = e^u \cdot u',$$

o que dá a regra seguinte:

A derivada da exponencial de base e é igual ao producto da mesma exponencial pela derivada do expoente.

Se fôr $y = a^u$ teremos (n.º 45 — III)

$$y = e^{u \log a}$$

e portanto

$$y' = a^u u' \log a.$$

4) A função logarithmica $y = \log x$ dá $x = e^y$, e portanto (n.º 59 — V)

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

NOTA. — Se fôr $y = \log u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 59 — IV)

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

Logo a derivada do logarithmo neperiano de uma função é igual á derivada da função dividida pela função.

Se fôr a a base dos logarithmos teremos (n.º 45 — V)

$$y = \log_a u = \frac{\log u}{\log a}, \quad y' = \frac{u'}{u \log a}.$$

5) No caso da função

$$y = x^m$$

temos

$$y = e^{m \log x}$$

log a = y log a
log e = 1

o que dá, quando x é positivo e m real,

$$y' = e^{m \log x} \frac{m}{x} = \frac{my}{x} = mx^{m-1}.$$

Se x é negativo e m é um numero racional, pondo $x = -z$, temos

$$y = (-1)^m z^m$$

e portanto

$$y' = (-1)^m m z^{m-1} z' = mx^{m-1},$$

como no caso anterior.

NOTA 1.^a — Se fôr $y = u^m$, e $u = \varphi(x)$, vem

$$y' = mu^{m-1} u'.$$

Logo a derivada da potencia de gráo m de uma funcção forma-se multiplicando o expoente pela potencia de gráo $m - 1$ da funcção e pela derivada da funcção.

A regra precedentê abrange as raízes das funcções, visto que se podem representar por potencias com expoentes fraccionarios.

NOTA 2.^a — Se fôr $y = u^v$, u e v representando funcções de x , temos $y = e^{v \log u}$ e portanto

$$y' = u^v \left(v' \log u + \frac{u'}{u} v \right).$$

6) A funcção $y = \text{sen } x$ dá

$$\begin{aligned} y' &= \lim \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim \frac{2 \text{sen} \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} \\ &= \cos x \lim \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$y' = \cos x.$$

7) Por ser $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, a derivada da função $y = \cos x$ será

$$y' = - \sin x.$$

8) A derivada de $y = \tan x$ obtem-se derivando a fracção $\frac{\sin x}{\cos x}$, o que dá

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Do mesmo modo se acha as derivadas de $\cot x$, de $\sec x$ e de $\operatorname{cosec} x$:

$$9) \quad y = \cot x, \quad y' = - \frac{1}{\sin^2 x} = - \operatorname{cosec}^2 x,$$

$$10) \quad y = \sec x, \quad y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x,$$

$$11) \quad y = \operatorname{cosec} x, \quad y' = - \cot x \operatorname{cosec} x.$$

12) Passando ás funcções circulares inversas, considere-mos primeiramente a funcção

$$y = \arcsin x,$$

que é real no intervalo de $x = -1$ a $x = 1$, e tem um numero infinito de ramos.

Applicando o theorema V do n.º 59 ao ramo formado pelos valores de y comprehendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, temos

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do mesmo modo se acha a derivada dos outros ramos da funcção.

Do mesmo modo se acha as derivadas de $\arccos x$, de $\arctan x$, etc.:

$$13) \quad y = \arccos x, \quad y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) \quad y = \arctan x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15) \quad y = \operatorname{arccot} x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$16) \quad y = \operatorname{arcsec} x, \quad y' = \frac{1}{+x\sqrt{x^2-1}}$$

$$17) \quad y = \operatorname{arccosec} x, \quad y' = \frac{1}{-x\sqrt{x^2-1}},$$

considerando os ramos de $\arccos x$ e $\operatorname{arcsec} x$ compreendidos entre 0 e π , e o ramo de $\operatorname{arccosec} x$ compreendido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

III

Relações entre as funções e suas derivadas

61. — THEOREMA 1.º — *Se a função $f(x)$ tiver uma derivada finita e diferente de zero no ponto α , a função cresce com x , na vizinhança do ponto α , se $f'(\alpha)$ é positiva, e decresce se $f'(\alpha)$ é negativa.*

E' o que se deduz da igualdade

$$f(\alpha \pm h) = f(\alpha) \pm h [f'(\alpha) \pm \varepsilon].$$

Com effeito, por ser ε infinitamente pequeno com h , póde sempre dar-se ao numero h_1 um valor tão pequeno que a somma $f'(\alpha) \pm \varepsilon$ tenha o signal de $f'(\alpha)$ quando $|h| < h_1$. Logo, se $f'(\alpha)$ é positivo, temos

$$f(\alpha - h) < f(\alpha) < f(\alpha + h)$$

quando $|h| < h_1$; e portanto, quando x cresce desde $\alpha - h_1$ até $\alpha + h_1$, a função $f(x)$ cresce.

Se porém $f'(\alpha)$ é negativo, temos

$$f(\alpha - h) > f(\alpha) > f(\alpha + h),$$

e a função $f(x)$ decresce, na vizinhança do ponto α , quando x cresce.

62. — THEOREMA 2.º — Se a função $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos desde x_0 até X , e se for $f(x_0) = 0$ e $f(X) = 0$, existe sempre um valor de x , compreendido entre x_0 e X , que annulla $f'(x)$.

Esta proposição, conhecida pelo nome de *theorem de Rolle*, foi demonstrada por O. Bonnet do modo seguinte:

Por ser a função $f(x)$ continua no intervalo de x_0 a X e nulla nos extremos d'este intervallo, ou será constantemente nulla n'este intervallo, ou aumentará (em valor absoluto) até um valor $f(x_1)$ correspondente a um numero x_1 , compreendido entre x_0 e X , para depois diminuir. No primeiro caso será constantemente $f'(x) = 0$; no segundo caso, na vizinhança do ponto x_1 , a função não será nem sempre crescente nem sempre decrescente, logo a derivada $f'(x_1)$ não será nem positiva nem negativa, e será portanto nulla.

THEOREMA 3.º — Se a função $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos desde x_0 até X , será

$$f(X) = f(x_0) + (X - x_0) f'(x_1),$$

x_1 representando um valor compreendido entre x_0 e X (Lagrange).

Com effeito, applicando o theorema precedente á função

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{X - x_0} [f(X) - f(x_0)],$$

que se annulla quando se faz $x = x_0$, e quando se faz $x = X$, temos

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = 0,$$

que dá a formula enunciada.

Por estar x_1 comprehendido entre x_0 e X , pode-se pôr $x_1 = x_0 + \theta h$, sendo $h = X - x_0$ e θ uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade; e temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

D'este theorema deduzem-se os dous corollarios seguintes:

1.º — Se a derivada de uma funcção $f(x)$ é nulla n'um certo intervallo, a funcção é constante no mesmo intervallo.

Com effeito, sendo x_0 e $x_0 + h$ dous valores de x pertencentes ao intervallo considerado, por estar $x_0 + \theta h$ comprehendido no intervallo de x_0 a $x_0 + h$, será $f'(x_0 + \theta h) = 0$, e portanto $f(x_0 + h) = f(x_0)$.

2.º — Se duas funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem uma mesma derivada finita em todos os pontos d'um certo intervallo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.

Com effeito, por ser nulla a differença $f'(x) - F'(x)$ das derivadas das duas funcções no intervallo considerado, será (corollario precedente) a funcção correspondente $f(x) - F(x)$ constante no mesmo intervallo.

THEOREMA 4.º — Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem derivadas $f'(x)$ e $F'(x)$ finitas em todos os pontos desde x_0 até X , será

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]},$$

se a funcção $F'(x)$ fôr diferente de zero no intervallo comprehendido entre x_0 e X .

Demonstra-se este theorema, devido a Cauchy, applicando o theorema de Rolle á funcção

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(x) - [F(x_0) - F(x)] \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)},$$

que se annulla nos pontos x e X ; o que dá a igualdade

$$\varphi'(x_1) = -f'(x_1) + F'(x_1) \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = 0,$$

ou

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]}.$$

NOTA. — Deve-se observar que os theoremas 2.º, 3.º e 4.º ainda têm logar quando as funcções $f(x)$ e $F(x)$ não têm derivadas finitas nos pontos x_0 e X , se todavia estas funcções são continuas n'estes pontos. E' o que resulta immediatamente das demonstrações que vimos de dar d'estes theoremas.

IV

Funcções de muitas variaveis

63. — Passando agora ás funcções de muitas variaveis, consideremos a funcção

$$z = f(x, y, \dots)$$

das variaveis independentes x, y , etc.

Podemos derivar z relativamente a x considerando as outras variaveis como constantes, ou relativamente a y considerando as outras variaveis como constantes, etc. Já vimos que a estas derivadas se dava respectivamente os nomes de *derivada parcial* de z relativamente a x , de *derivada parcial* de z relativamente a y , etc. Já vimos tambem que se representa por $\frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^b \dots}$, ou $\frac{\partial^n f}{\partial x^a \partial y^b \dots}$ a derivada parcial de ordem n que resulta de derivar z a vezes relativamente a x , depois o resultado b vezes relativamente a y , etc.

64. — THEOREMA 4.º — Se as derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ forem funcções continuas de x e y , é

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Com effeito ⁽¹⁾, applicando o theorema 3.º do n.º 62 ás funcções :

$$f(x, y + k, \dots) - f(x, y, \dots), \frac{\partial f(x + \theta_1 h, y, \dots)}{\partial x}$$

considerando na primeira x como variavel independente e na segunda y , vem

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k, \dots) - f(x + h, y, \dots) - [f(x, y + k, \dots) - f(x, y, \dots)] \\ = h \left[\frac{\partial f(x + \theta_1 h, y + k, \dots)}{\partial x} - \frac{\partial f(x + \theta_1 h, y, \dots)}{\partial x} \right] \\ = hk \frac{\partial^2 f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k, \dots)}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

onde θ_1 e θ_2 representam duas quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Applicando o mesmo theorema ás funcções

$$f(x + h, y, \dots) - f(x, y, \dots), \frac{\partial f(x, y + \theta' k, \dots)}{\partial y}$$

considerando a primeira como funcção de y e a segunda como funcção de x , vem do mesmo modo

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k, \dots) - f(x, y + k, \dots) - [f(x + h, y, \dots) - f(x, y, \dots)] \\ = hk \frac{\partial^2 f(x + \theta h, y + \theta' k, \dots)}{\partial y \partial x}, \end{aligned}$$

onde θ e θ' representam quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Igualando estes dous resultados, vem

$$\frac{\partial^2 f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k, \dots)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x + \theta h, y + \theta' k, \dots)}{\partial y \partial x},$$

(1) Esta demonstração é devida a O. Bonnet.

e no limite,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

THEOREMA 2.º — *Se as derivadas*

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial u \partial v}, \frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial v \partial u}$$

forem funcções continuas de u e v, pôde-se inverter a ordem das duas derivações consecutivas relativas a u e v, e temos

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial u \partial v \partial w \dots} = \frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial v \partial u \partial w \dots}.$$

Com effeito, temos primeiramente, em virtude do theorema anterior,

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \frac{\partial^{m-2} z}{\partial x \dots \partial l}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \frac{\partial^{m-2} z}{\partial x \dots \partial l}}{\partial v \partial u}$$

e portanto

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial u \partial v} = \frac{\partial^m z}{\partial x \dots \partial l \partial v \partial u}.$$

Derivando em seguida ambos os membros d'esta identidade relativamente a w , etc., obtem-se a igualdade que se queria demonstrar.

Se notarmos que qualquer mudança na ordem em que se effectuam as derivações relativas a x, y , etc. pôde ser obtida por mudanças successivas da ordem de duas derivações, pôde-se por applicações successivas do theorema que vimos de demonstrar inverter a ordem de qualquer numero de derivações. Em todas estas mudanças deve-se attender ás condições relativas á continuidade das derivadas impostas pelo theorema.

D'este theorema deduzem-se dous corollarios importantes.

I — Se as derivadas parciaes de primeira ordem da funcção $f(x, y, \dots)$ forem todas finitas, $f(x, y, \dots)$ é uma funcção continua de x, y , etc. Com effeito, o primeiro membro da formula (1) tende para $f(x, y, \dots)$ quando h, k , etc. tendem para zero.

II — Se as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, etc. forem funcções continuas de x, y , etc., temos

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots) &= h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \\ &+ \alpha_1 h + \alpha_2 k + \dots, \end{aligned} \right.$$

onde α_1, α_2 , etc. representam quantidades que tendem para zero quando todas as quantidades h, k , etc. tendem para zero.

Com effeito, se as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, etc. são funcções continuas de x, y , etc., temos

$$\frac{\partial f(x + \theta_1 h, y + k, \dots)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x} + \alpha_1$$

$$\frac{\partial f(x, y + \theta_2 k, \dots)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial y} + \alpha_2$$

.....

onde α_1, α_2 , etc. representam quantidades que tendem para zero quando h, k , etc. tendem para zero.

Substituindo estes valores na formula (1) vem a formula (2) que se queria demonstrar.

66. — *Derivadas das funcções compostas.* — A' funcção $f(u_1, u_2, \dots)$, onde u_1, u_2 , etc. representam funcções de x , dá-se o nome de *funcção composta* de x por meio de u_1, u_2 , etc. Da formula (2) deduz-se uma regra importante para derivar estas funcções.

Dê-se a x o augmento infinitamente pequeno h e sejam

lim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \epsilon$ ou $\Delta y = y' \Delta x + \Delta x \epsilon$.

$l_1, l_2, \text{ etc.}$ os augmentos correspondentes de $u_1, u_2, \text{ etc.}$ Se a funcção $f(u_1, u_2, \dots)$ admite derivadas parciais relativamente a $u_1, u_2, \text{ etc.}$, e estas derivadas são funcções continuas de $u_1, u_2, \text{ etc.}$ nos pontos $(u_1, u_2, \text{ etc.})$ correspondentes aos valores dados a x , a formula (2) dá

$$f(u_1 + l_1, u_2 + l_2, \dots) - f(u_1, u_2, \dots) = l_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + l_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots \\ + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \text{ etc.}$ representam quantidades que tendem para zero quando $l_1, l_2, \text{ etc.}$ tendem para zero.

Temos pois, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{f(u_1 + l_1, u_2 + l_2, \dots) - f(u_1, u_2, \dots)}{h} \\ = \frac{\partial f}{\partial u_1} \lim \frac{l_1}{h} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \lim \frac{l_2}{h} + \dots \\ + \alpha_1 \lim \frac{l_1}{h} + \alpha_2 \lim \frac{l_2}{h} + \dots,$$

e portanto

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Esta formula importante dá a derivada das funcções compostas quando são conhecidas as derivadas das funcções que entram na sua composição, e contém como caso particular os theoremas 1.º, 2.º, 3.º e 4.º do n.º 59.

Aplicação. Diz-se que $f(x, y, \dots)$ é uma funcção *homogenea* do grão n quando satisfaz à condição seguinte

$$f(tx, ty, \dots) = t^n f(x, y, \dots).$$

Derivando os dous membros d'esta identidade relativamente a t por meio do theorema anterior, vêm

$$\frac{\partial f}{\partial (lx)} x + \frac{\partial f}{\partial (ly)} y + \dots = mt^{m-1} f(x, y, \dots)$$

e, pondo $l = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \dots = mf(x, y, \dots).$$

Consiste n'esta formula o theorema de Euler relativo ás funcções homogeneas.

67. — A noção de diferencial pôde ser estendida ao caso d'uma funcção de muitas variaveis independentes.

Se diferenciarmos a funcção $z = f(x, y, \dots)$ relativamente a cada uma das variaveis, considerando as outras como constantes, obtemos os resultados

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx, \frac{\partial z}{\partial y} dy, \dots,$$

a que se dá o nome de *differenciaes parciaes* de z relativamente a x , a y , etc. A' somma d'estas differenciaes parciaes dá-se o nome de *differencial total* de z . Representando-a por dz , temos pois a igualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \dots$$

que define dz .

Comparando esta formula com a formula (2) conclue-se que a differencial dz é a parte principal da differença $f(x + dx, y + dy, \dots) - f(x, y, \dots)$, quando dx, dy , etc. são sufficientemente pequenos.

**Derivadas das funções de variáveis
imaginárias**

68. — Seja $z = x + iy$ uma variável imaginária e

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

uma função d'esta variável. Mudemos n'esta função x em $x + h$ e y em $y + k$ e supponhamos que a razão

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik}$$

tende para um limite determinado $f'(z)$, quando $h + ik$ tende para zero, mesmo quando uma das quantidades h e k é nulla. Este limite chama-se, como no caso das variáveis reaes, *derivada de $f(z)$* .

Por ser o limite da razão precedente sempre o mesmo, quando $f(z)$ tem derivada, quer h e k sejam diferentes de zero, quer uma d'estas quantidades seja nulla, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h, y) + i\psi(x + h, y) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{h} = f'(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y + k) + i\psi(x, y + k) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{ik} = f'(z),$$

e portanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = if'(z),$$

d'onde se deduz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right],$$

ou

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\phi}{dy}.$$

Temos assim duas condições a que devem satisfazer as funcções $\varphi(x, y)$ e $\phi(x, y)$ para que $\varphi(x, y) + i\phi(x, y)$ seja uma funcção de z que tenha derivada.

A proposição reciproca da precedente é verdadeira, no caso de $\varphi(x, y)$ e $\phi(x, y)$ representarem funcções continuas de x e y . Para o demonstrar basta attender ás igualdades (n.º 65 — II)

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha_1 h + \alpha_2 k$$

$$\phi(x+h, y+k) = \phi(x, y) + h \frac{\partial \phi}{\partial x} + k \frac{\partial \phi}{\partial y} + \beta_1 h + \beta_2 k$$

onde $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ representam quantidades infinitamente pequenas com h e k , que dão, attendendo ás formulas (1),

$$\begin{aligned} & \varphi(x+h, y+k) + i\phi(x+h, y+k) - [\varphi(x, y) + i\phi(x, y)] \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) h + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) k + (\alpha_1 + i\beta_1) h + (\alpha_2 + i\beta_2) k \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (h + ik) + (\alpha_1 + i\beta_1) h + (\alpha_2 + i\beta_2) k. \end{aligned}$$

Temos pois

$$\begin{aligned} \lim \frac{\varphi(x+h, y+k) + i\phi(x+h, y+k) - [\varphi(x, y) + i\phi(x, y)]}{h + ik} \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial x} + \lim \frac{(\alpha_1 + i\beta_1) h}{h + ik} + \lim \frac{(\alpha_2 + i\beta_2) k}{h + ik}, \end{aligned}$$

ou, attendendo a que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 tendem para zero e a que os módulos de $\frac{h}{h + ik}$ e $\frac{k}{h + ik}$ são inferiores á unidade,

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Logo se a funcção $f(z)$ satisfaz ás condições (1), e $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ são funcções continuas de x e y , a funcção $f(z)$ tem derivada.

69. — E' facil de vêr que o que se disse no n.º 59 a respeito da derivação das sommas, productos, quocientes, funcções de funcções e funcções inversas tem ainda logar no caso das funcções de variaveis imaginarias. Estamos pois reduzidos a considerar as funcções simples.

1) E' facil de vêr que a derivada de $a \pm z$ é ± 1 , e que a derivada de bz é b .

2) A derivada de e^z obtem-se facilmente. Com effeito, por serem x e y variaveis independentes, a funcção

$$u = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

dará (n.º 65 — II)

$$e^{z+h+ik} - e^z = e^x (\cos y + i \sin y) h + e^x (-\sin y + i \cos y) k + \alpha_1 h + \alpha_2 k = e^x (\cos y + i \sin y) (h + ik) + \alpha_1 h + \alpha_2 k.$$

Logo teremos

$$\lim \frac{e^{z+h+ik} - e^z}{h + ik} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Vê-se pois que se obtém a derivada da exponencial, no caso das variaveis imaginarias, pela mesma regra que no caso das variaveis reaes.

3) A derivada de cada ramo da funcção $\log z$ acha-se como no caso das variaveis reaes (n.º 60 e é igual a $\frac{1}{z}$).

4) A derivada de z^m acha-se tambem pondo, como no n.º 60, $z^m = e^{m \log z}$ e é igual a mz^{m-1} .

As outras funcções simples são sommas, productos, quocientes ou funcções das anteriores, e por isso acha-se facilmente as suas derivadas, e vê-se que as regras dadas, para as formar no caso das variaveis reaes, subsistem no caso das variaveis imaginarias.

VI

Funcções implicitas

70. — Consideremos agora as funcções implicitas, isto é, procuremos a derivada relativamente a x de uma funcção y dada pela equação

$$(1) \quad F(x, y) = 0.$$

Seja $y = \varphi(x)$ um ramo d'esta funcção, e supponhamos que $\varphi(x)$ admite uma derivada finita e que $F(x, y)$ é uma funcção continua de x e y para os valores de x e y considerados. N'este caso o theorema relativo á derivação das funcções compostas (n.º 66) dá

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

e portanto temos a formula

$$(3) \quad y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

por meio da qual se obtém a derivada da funcção $\varphi(x)$ sem resolver a equação proposta relativamente a y .

Por meio da formula precedente temos a derivada y' ex-

pressa em funcção de x e y . Se quizermos esta derivada só expressa em funcção de uma variavel, eliminaremos a outra por meio da equação proposta.

Derivando pela mesma regra a equação (2), que é da fórma

$$F_1(x, y, y') = 0,$$

vem a equação

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' = 0$$

que dá y'' .

Continuando do mesmo modo obtem-se equações que dão y''' , $y^{(4)}$, etc.

As equações que se obtêm, derivando successivamente uma equação dada, são do primeiro gráo relativamente a y' , y'' , y''' , etc. Porém este gráo pôde elevar-se já por se fazer desaparecer radicaes que lá entrem, já por se eliminar entre ellas algumas quantidades.

EXEMPLO.—A equação da ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

dá

$$a^2 y y' + b^2 x = 0,$$

e portanto

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Se quizermos exprimir a derivada só em funcção de x teremos de eliminar y , o que dá

$$y' = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Se quizermos fazer desaparecer o radical, teremos de elevar ao quadrado, o que dá

$$a^2 (a^2 - x^2) y'^2 = b^2 x^2.$$

21. — Toda a relação entre uma função e suas derivadas, isto é, toda a equação da fórmula

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

tem o nome de *equação diferencial d'ordem n*.

O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que a equação

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0,$$

que contém n constantes arbitrárias c_1, c_2, \dots , leva a uma equação diferencial d'ordem n independente d'estas constantes.

Com effeito, derivando n vezes esta equação, obteremos n equações da fórmula

$$F_1(x, y, y', c_1, c_2, \dots) = 0$$

$$F_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \dots) = 0$$

.....

$$F_n(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, c_1, c_2, \dots) = 0,$$

entre as quaes e a proposta podemos eliminar as n constantes arbitrárias. Chega-se assim a uma equação da fórmula

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

independente das arbitrárias.

Em Geometria esta equação representa uma propriedade commum a todas as curvas representadas pela equação proposta.

EXEMPLO. — A equação do circulo $x^2 + y^2 = R^2$ dá

$$x + yy' = 0,$$

ou

$$1 + \frac{y}{x} y' = 0.$$

Como y' é o coefficiente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y) e $\frac{y}{x}$ é o coefficiente angular do raio que passa por este ponto, esta equação exprime que a tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto.

72. — As derivadas parciaes das funcções implicitas de muitas variaveis obtêm-se pelas regras dos numeros anteriores.

Assim, por exemplo, as derivadas parciaes da funcção implicita z dada pela equação :

$$F(x, y, z) = 0$$

obtêm-se por meio das igualdades :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Em geral, se tivermos as n equações com $m + n$ variaveis, das quaes n sejam dependentes e m independentes :

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

.....

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

podemos achar as derivadas das variaveis dependentes z_1, z_2, \dots, z_n relativamente ás variaveis independentes x_1, x_2, \dots, x_m resolvendo as $m \cdot n$ equações do primeiro gráo :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_2} = 0$$

.....,

que resultam de derivar as anteriores relativamente a x_1, x_2 , etc.

Derivando estas equações relativamente a x_1, x_2 , etc. obtêm-se outras que dão as derivadas de segunda ordem de z , e assim successivamente.

73. — Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas parciaes, isto é, toda a equação da fórmula

$$f\left(x_1, x_2, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0$$

tem o nome de *equação ás derivadas parciaes*. Se a derivada da ordem mais elevada que entra n'esta equação é d'ordem n , diz-se que a equação é d'ordem n . O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que toda a equação:

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0$$

onde $\varphi(u)$ representa uma funcção arbitraria de u , e u representa uma funcção determinada de x, y e z , leva a uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem independente de φ .

Com effeito, derivando-a relativamente a x e a y , temos as equações:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi(u)} \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi(u)} \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

que, pela eliminação de $\varphi(u)$ e $\varphi'(u)$ entre ellas e a proposta, dão uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem independente da funcção arbitraria.

EXEMPLO 4.º — A equação geral das superficies cylindricas

$$x - az = \varphi(y - bz)$$

dá

$$1 - a \frac{\partial z}{\partial x} = -b \frac{\partial z}{\partial x} \varphi' (y - bz)$$

$$- a \frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - b \frac{\partial z}{\partial y}\right) \varphi' (y - bz),$$

e portanto temos a equação às derivadas parciais das superfícies cylindricas

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

que deve representar uma propriedade commum a todos os cylindros. Adiante veremos qual é esta propriedade.

EXEMPLO 2.º — A equação geral das superfícies de revolução

$$z = \varphi (x^2 + y^2)$$

dá do mesmo modo

$$\frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x = 0.$$

EXEMPLO 3.º — A equação geral das superfícies conicas

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi \left(\frac{y - b}{z - c} \right)$$

dá do mesmo modo

$$(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

34. — Do mesmo modo uma equação da fórmula:

$$V = F [x, y, z, \varphi (u_1), \psi (u_2)] = 0,$$

onde $\varphi (u_1)$ e $\psi (u_2)$ representam funcções arbitrarías de u_1 e u_2 , e onde u_1 e u_2 representam funcções determinadas de x , y e z , leva, em certos casos, a uma equação às derivadas parciais de segunda ordem independente de φ e ψ .

Com effeito, formando as derivadas de primeira e de segunda ordem relativamente a x e a y d'esta equação, obtêm-se cinco equações onde entram as funcções arbitrárias φ , φ' , ϕ , ϕ' , ϕ'' .

Se entre estas equações e a proposta eliminarmos as funcções arbitrárias φ , ϕ , φ' , ϕ' , φ'' , ϕ'' chegaremos, não sempre, mas em casos particulares importantes, a uma equação ás derivadas parciaes de segunda ordem independente d'estas funcções.

Por exemplo, a equação

$$z = \varphi(x + ay) + \phi(x - ay)$$

dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x + ay) + \phi'(x - ay)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\varphi'(x + ay) - a\phi'(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi''(x + ay) + \phi''(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \varphi''(x + ay) + a^2 \phi''(x - ay);$$

logo virá a equação ás derivadas parciaes de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

25. — Viu-se nos numeros anteriores o modo de achar as derivadas das funcções implícitas quando se sabe *á priori*, como acontece em muitos casos, que a funcção que se considera admite derivada. Passando agora ao estudo das condições geraes para a existencia de derivada das funcções implícitas, vamos demonstrar os theoremas seguintes:

THEOREMA 1.º — Se a equação

$$F(x, y) = 0$$

fôr satisfeita pelos valores x_0 e y_0 dados a x e a y , se a

função $F(x, y)$ admitir derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas na vizinhança do ponto (x_0, y_0) e se n'este ponto a derivada $\frac{\partial F}{\partial y}$ fôr diferente de zero, y é uma função definida de x na vizinhança do ponto (x_0, y_0) , e esta função é contínua e admite uma derivada finita n'este ponto.

Pondo $x - x_0 = h$ e $y - y_0 = k$, e representando por α_1, α_2 e α_3 tres quantidades infinitamente pequenas com h e k , temos (n.º 65 — II)

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1 \right) h + \left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2 \right) k$$

e, em virtude da continuidade da função $\frac{\partial F}{\partial y}$ no ponto (x_0, y_0) ,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_3.$$

Seja h_1 um numero de valor absoluto tão pequeno que, para valores de $|h|$ e $|k|$ que não sejam maiores do que $|h_1|$, as quantidades

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2, \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_3$$

sejam diferentes de zero e tenham o signal de $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}$,

o que é sempre possível por ser esta quantidade diferente de zero; e dê-se na primeira das formulas precedentes a k o valor h_1 e a h valores inferiores em valor absoluto a h_1^2 . Teremos, pondo $h = \pm \theta h_1^2$ (onde θ representa um numero positivo menor do que a unidade)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \pm \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1 \right] \theta h_1^2 + \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2 \right] h_1 \\ &= h_1 \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2 \right] \left[1 \pm \theta \frac{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1}{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2} h_1 \right]. \end{aligned}$$

D'esta formula conclue-se que $F(x, y)$ tem o signal de $h_1 \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}$ quando se dá a $|h_1|$ um valor tão pequeno que seja

$$\left| \frac{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \alpha_1}{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \alpha_2} h_1 \right| < 1;$$

e portanto que, para cada valor $x_0 + h$ de x comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, $F(x, y)$ muda de signal quando y varia desde $y_0 - h_1$ até $y_0 + h_1$.

A cada valor de x comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$ corresponde pois sempre um valor de y , comprehendido entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$, que satisfaz (n.º 34 — I) á equação $F(x, y) = 0$; e não pôde haver mais (n.º 62) do que um visto que a derivada $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ não é nulla n'este intervallo. Logo a collecção dos valores de y comprehendidos entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$ determinados pela equação $F(x, y) = 0$, quando se dá a x os valores comprehendidos entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, constitue um ramo $\varphi(x)$ da funcção implicita dada por esta equação.

Como além d'isso, quando h_1 tende para zero, x tende para x_0 e y tende para y_0 , vê-se que φ é continua no ponto x_0 .

Finalmente a funcção $y = \varphi(x)$ admite uma derivada finita no ponto (x_0, y_0) . Com effeito, mudando na equação proposta x_0 em $x_0 + h$ e y_0 em $y_0 + k$, temos

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x_0} h + \frac{\partial F}{\partial y_0} k + \alpha_1 h + \alpha_2 k = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \frac{k}{h} + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{k}{h} = 0.$$

Temos pois

x Values
or y values

$$y' = \lim \frac{k}{h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{\frac{\partial F}{\partial y_0}}$$

o que concorda com o que se disse no n.º 70.

THEOREMA 2.º—*Se a equação*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

fôr satisfeita pelos valores $a_1, a_2, \dots, a_m, y_0$ dados a x_1, x_2, \dots, x_m, y , se a funcção $F(x_1, \dots, x_m, y)$ admitir derivadas parciaes relativas a x_1, x_2, \dots, x_m, y continuas na visinhança do ponto $(a_1, a_2, \dots, a_m, y_0)$, e se n'este ponto a derivada $\frac{\partial F}{\partial y}$ fôr diferente de zero. y é uma funcção definida de x_1, x_2, \dots, x_m na visinhança do ponto $(a_1, a_2, \dots, a_m, y_0)$, e esta funcção é continua e admite uma derivada finita n'este ponto.

A demonstração d'este theorema é semelhante á demonstração empregada para estabelecer o theorema anterior.

THEOREMA 3.º—*Se as equações*

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0,$$

onde entram as variaveis independentes x_1, x_2, \dots, x_m e as variaveis dependentes z_1, z_2, \dots, z_n , forem satisfeitas pelos valores $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ dados a $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n$; se as funcções F_1, F_2, \dots, F_n admittirem derivadas parciaes relativas a $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n$ que sejam funcções continuas d'estas variaveis na visinhança do ponto $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$; e se n'este ponto o determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

vem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{J}{J_1}.$$

Vê-se pois que $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$ é diferente de zero no ponto (a_1, a_2, \dots) ; e portanto que (th. 2º) a equação $\varphi = 0$ determina z_1 em função de x_1, x_2, \dots , que este valor satisfaz á equação $F_1 = 0$ conjunctamente com os valores anteriormente achados para z_2, z_3, \dots , e que a função z_1 admite também derivadas parciaes relativamente a x_1, x_2, \dots no ponto (a_1, a_2, \dots) .

VII

Derivadas dos determinantes. Determinantes funcionaes

26. — Procuremos agora a derivada do determinante

$$f(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

onde u_1, u_2, v_1, v_2 são funcções de x .

Mudando x em $x + h$ e chamando k_1, k_2, l_1, l_2 os augmentos correspondentes de u_1, u_2, v_1, v_2 , vem

$$f(x + h) = \begin{vmatrix} u_1 + k_1 & u_2 + k_2 \\ v_1 + l_1 & v_2 + l_2 \end{vmatrix},$$

ou, em virtude d'um theorema bem conhecido,

$$f(x + h) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & k_2 \\ v_1 & l_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & u_2 \\ l_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}.$$

lada — *De determinantibus functionalibus* (1) do eminente geometra. No theorema 3.º do n.º 75 vimos já uma questão em que intervem este determinante. Aqui vamos ainda demonstrar, a respeito d'elle os theoremas seguintes:

■ — Supponhamos que as funcções y_1, y_2, \dots, y_n admittem derivadas parciaes relativas a x_1, x_2, \dots, x_n , e que estas derivadas são funcções continuas d'estas variaveis. N'este caso temos o theorema seguinte:

1.º — Se uma das funcções y_1, y_2, \dots, y_n , por exemplo y_1 , fôr uma funcção das outras e admittir derivadas parciaes relativamente a y_2, y_3, \dots, y_n que sejam funcções continuas d'estas variaveis, o determinante (2) é identicamente nullo.

2.º — Se o determinante (2) fôr identicamente nullo, mas não o fôr um dos seus menores de primeira ordem, uma das quantidades y_1, y_2, \dots é funcção das outras, e esta funcção é continua e admittre derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante é nullo.

3.º — Se forem identicamente nulos o determinante (2) e todos os seus menores de primeira ordem e o não fôr um dos determinantes menores de segunda ordem, duas das quantidades y_1, y_2, \dots são funcções das outras, e estas funcções são continuas e admittem derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante de segunda ordem não é nullo.

4.º — Em geral, se forem identicamente nulos o determinante (2) e os seus menores até á ordem i e não o fôr um dos determinantes menores da ordem $i + 1$, i das quantidades y_1, y_2, \dots são funcções das restantes, e estas funcções são continuas e admittem derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante de ordem $i + 1$ não é nullo.

Para demonstrar esta proposição consideremos sómente tres funcções

$$(1') \quad y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

E' facil de vêr que o raciocinio que vamos empregar é applicavel a maior numero de funcções.

Se fôr $y_1 = \varphi(y_2, y_3)$, temos

(1) Jacobi — *Gesammelte Werke*, tomo III.

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_3},\end{aligned}$$

e portanto, eliminando $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}$ entre estas equações,

$$(2') \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

o que demonstra a primeira parte do theorema.

Para demonstrar a proposição reciproca, supponhamos que o determinante (2) é identicamente nullo e que um dos determinantes menores de segunda ordem não é identicamente nullo, por exemplo o determinante

$$\frac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}.$$

Em virtude do theorema 3.º do n.º 75, as duas ultimas equações (1') determinam x_2 e x_3 como funcções de x_1 , y_2 e y_3 , e, nos pontos em que este determinante não é nullo, estas funcções admittem derivadas parciais relativas a x_1 , y_2 , y_3 dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0.$$

.....

Substituindo estes valores de x_2 e x_3 na primeira das equações (1') vem

$$y_1 = \varphi(x_1, y_2, y_3),$$

e, em virtude do theorema relativo á derivação das funcções compostas, y_1 admite derivadas parciaes relativamente a x_1 , y_2 e y_3 . A derivada relativa a x_1 é dada pela equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1},$$

onde se deve substituir $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ pelos seus valores tirados das equações anteriores, o que dá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}.$$

Como o segundo membro d'esta igualdade é, por hypotese, identicamente nullo, é identicamente nulla a derivada de φ relativamente a x_1 ; portanto φ é independente de x_1 , e temos

$$y_1 = \varphi(y_2, y_3),$$

que é o que se queria demonstrar.

Se todos os determinantes menores de primeira ordem do determinante (1') forem identicamente nulos, recorre-se aos determinantes de segunda ordem, que no caso considerado não podem ser todos identicamente nulos sem que as funcções sejam todas constantes. Seja pois $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ um dos determinantes de terceira ordem que não é identicamente nullo. A ultima das equações (1') determinará x_3 em funcção de x_1 , x_2 e y_3 e as suas derivadas relativamente a x_1 e x_2 serão dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

Substituindo o valor de x_3 na primeira das equações (1') vem

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2, y_3),$$

cujas derivadas relativamente a x_1 e x_2 são dadas pelas equações

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$$

ou, eliminando $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ por meio das equações anteriores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial (f_1, f_3)}{\partial (x_1, x_3)}}{\frac{\partial f_3}{\partial x_3}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial (f_1, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}}{\frac{\partial f_3}{\partial x_3}}.$$

Como, por hypothese, os segundos membros d'estas equações são identicamente nullos, a funcção φ é independente de x_1 e x_2 , e temos

$$y_1 = \varphi(y_3).$$

Do mesmo modo a segunda das equações (1') dá

$$y_2 = \psi(y_3).$$

III — Se nas funcções f_1, f_2, \dots, f_n substituirmos as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n por outras $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ligadas com as primeiras por equações dadas, o jacobiano das novas funcções estará ligado com o jacobiano (2) pela relação:

$$(4) \quad \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)}.$$

Para demonstrar este theorema basta substituir no determinante (2) as derivadas que lá entram pelos seus valores ti-

mo qualquer que seja o modo como se escolham os numeros $z_1, z_2, \text{etc.}$, e os numeros $x_1, x_2, \text{etc.}$

Supponhamos primeiramente que se escolhe $x_1, x_2, \text{etc.}$ de modo que $f(x_1), f(x_2), \text{etc.}$ representem os maiores valores que toma $f(x)$ quando x varia respectivamente de x_0 a z_1 , de z_1 a $z_2, \text{etc.}$ Decompondo o intervalo h_i em m intervallos parciaes $h'_i, h''_i, \text{etc.}$ de modo que seja

$$h_i = h'_i + h''_i + \dots,$$

e chamando $x'_i, x''_i, \text{etc.}$ os valores de x a que correspondem os maiores valores que toma $f(x)$ quando x varia desde z_{i-1} até $z_{i-1} + h'_i$, de $z_{i-1} + h'_i$ até $z_{i-1} + h'_i + h''_i, \text{etc.}$, vem

$$f(x'_i) \geq f(x_i), f(x''_i) \geq f(x_i), \text{etc.},$$

e portanto

$$\begin{aligned} h_i f(x_i) &= h'_i f(x_i) + h''_i f(x_i) + \dots \\ &> h'_i f(x'_i) + h''_i f(x''_i) + \dots \end{aligned}$$

O primeiro membro d'esta desigualdade representando uma qualquer das parcelas de S e o segundo membro a somma das que a substituem quando se divide h_i em m partes, podemos concluir que a somma S diminue quando augmenta o numero de partes em que se divide o intervalo h_i . Por outra parte, o seu valor conserva-se sempre maior do que

$$m (h_1 + h_2 + \dots + h_n) = m (X - x_0),$$

representando por m o menor valor que toma $f(x)$ quando x varia desde x_0 até X . Logo a somma S tende para um limite quando as quantidades $h_1, h_2, \text{etc.}$ tendem todas para zero.

Supponhamos agora que $f(x_1), f(x_2), \text{etc.}$ não representam os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varia respectivamente de x_0 a z_1 , de z_1 a $z_2, \text{etc.}$, e sejam $M_1, M_2, M_3, \text{etc.}$ estes valores. Pondo

$$f(x_1) = M_1 + \epsilon_1, f(x_2) = M_2 + \epsilon_2, \dots$$

temos

$$\Sigma h_i f(x_i) = \Sigma h_i M_i + \Sigma h_i \varepsilon_i,$$

ou, chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \text{etc.}$,

$$|\Sigma h_i f(x_i) - \Sigma h_i M_i| = |\Sigma h_i \varepsilon_i| < \varepsilon \Sigma h_i.$$

Mas, por ser continua a funcção $f(x)$ em todos os pontos desde x_0 até X , a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponde (n.º 34 — 4.ª) um numero η tal que a desigualdade $|\varepsilon| < \delta$ é satisfeita quando a $|h_1|, h_2|, \text{etc.}$ tendem para zero, ε tende para zero. Por isto, e por ser Σh_i igual a $X - x_0$, conclue-se da desigualdade precedente que as duas sommas $\Sigma h_i f(x_i)$ e $\Sigma h_i M_i$ tendem para um mesmo limite.

Resta demonstrar que este limite é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como se escolham os numeros $z_1, z_2, \text{etc.}$ Para isso, consideremos duas sommas S e S_1 correspondentes a dous modos de divisão do intervallo $X - x_0$, e seja S_2 uma somma correspondente a um terceiro modo de divisão, em que figurem todos os intervallos das duas divisões anteriores. O intervallo h_i da primeira divisão conterà um ou mais intervallos $h'_i, h''_i, \text{etc.}$ da terceira divisão, e a parcella $h_i f(x_i)$ da somma S corresponderão as parcellas

$$u_i = h'_i f(x'_i) + h''_i f(x''_i) + \dots$$

da somma S_2 . Pondo pois

$$f(x_i) = f(x'_i) + \varepsilon_i, f(x_i) = f(x''_i) + \varepsilon'_i, \dots,$$

temos

$$\begin{aligned} S_2 &= \Sigma u_i = \Sigma f(x_i) (h'_i + h''_i + \dots) - \Sigma (\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots) \\ &= \Sigma f(x_i) h_i - \Sigma (\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots), \end{aligned}$$

d'onde se tira

$$|S_2 - S| = |\Sigma (\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \dots)| < \varepsilon \Sigma h_i$$

chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \dots, |\varepsilon'_1|, |\varepsilon'_2|, \dots, \text{etc.}$

Mas, por ser continua a funcção $f(x)$, ε tende (n.º 34 —

X e, por ser continua a função $f(x)$, $f(x')$ e $f(x'')$ tendem para $f(X)$; temos portanto

$$\lim \frac{k}{h} = f(X).$$

Logo a função $\lim S$ admite derivada no ponto X , e esta derivada é igual a $f(X)$.

S1.—*Derivada dos arcos de curva.*—**II**—Dá-se o nome de comprimento de um arco de curva ao limite para que tende o perimetro d'um polygono inscripto n'este arco quando todos os lados tendem para zero.

Para justificar esta definição é necessario demonstrar que este limite existe e que tem um valor unico qualquer que seja a lei d'inscripção dos polygonos.

N'um arco da curva, cujas equações são $y = f(x)$ e $z = F(x)$, comprehendido entre o ponto arbitrario (x_0, y_0, z_0) e o ponto variavel (x, y, z) , inscrevamos um polygono qualquer e sejam (y_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , etc. os seus vertices. O perimetro P do polygono será dado pela formula

$$P = \sum \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

onde a somma se refere a todos os lados do polygono; ou

$$P = \sum h_i \sqrt{1 + [f'(x_i + \theta_i h_i)]^2 + [F'(x_i + \theta'_i h_i)]^2},$$

pondo $x_{i+1} - x_i = h_i$ e attendendo ás igualdades (n.º 62)

$$y_{i+1} - y_i = h_i f'(x_i + \theta_i h_i), \quad z_{i+1} - z_i = h_i F'(x_i + \theta'_i h_i).$$

Ponha-se agora

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + [f'(x_i + \theta_i h_i)]^2 + [F'(x_i + \theta'_i h_i)]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2} + \varepsilon_i \end{aligned}$$

e represente-se por ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, etc. Teremos

$$P = \sum h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2} + \sum \varepsilon_i h_i,$$

Scinet - T. 1.º pag. 285.

d'onde se tira

$$|P - \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2}| = |\Sigma \varepsilon_i h_i| < \varepsilon |\Sigma h_i|.$$

Suppondo agora que as funcções $f'(x)$ e $F'(x)$ são continuas em todos os pontos do arco considerado, a funcção $\sqrt{1 + [f'(x)]^2 + [F'(x)]^2}$ é também continua, e portanto se tende (n.º 34 - 4.º) para zero quando todas as quantidades $h_1, h_2, \text{etc.}$ tendem para zero. Logo

$$\lim P = \lim \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2}.$$

Esta formula mostra, em virtude dos theoremas do numero precedente, que o limite de P existe; que é unico e determinado qualquer que seja o modo como as quantidades h_i tendam para zero; e finalmente que a derivada d'este limite, que representaremos por s , é dada pela formula

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

d'onde se deduz a diferencial

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Se houver pontos em que alguma das funcções $f'(x)$ ou $F'(x)$ seja discontinua, decompor-se-ha o arco considerado n'outros cujos comprimentos se avaliam separadamente.

■ ■ — Se a curva fôr plana, a equação precedente dará

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se quizermos o valor de ds expresso em coordenadas polares, faremos a transformação da formula precedente por meio das formulas

$$x = \rho \cos \theta, \quad dx = d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta \, d\theta$$

$$y = \rho \sin \theta, \quad dy = d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta \, d\theta:$$

e acharemos

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

IX

Mudança das variaveis

82. — O problema que vamos resolver é o seguinte :

Dada uma expressão analytica ou uma equação, em que entrem variaveis independentes, variaveis dependentes e derivadas d'estas, achar a sua transformada, quando se substitue todas ou algumas das variaveis por outras ligadas com as primeiras por equações dadas.

Esta transformação tem muita importancia em Geometria quando, tendo um resultado expresso em um systema de coordenadas, se quer exprimir-o n'outro systema. Em Analyse tem tambem uma importancia grande, como iremos vendo.

83. — Consideremos primeiro expressões em que entrem duas variaveis, uma dependente e outra independente :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right),$$

e resolvamos os dous problemas seguintes :

1.º — *Substituir a variavel independente x por outra θ ligada com x pela relação $\varphi(x, \theta) = 0$.*

Chamando x' , x'' etc., y' , y'' , etc. as derivadas de x e de y relativamente a θ , teremos (n.º 59 — IV)

$$y' = \frac{dy}{dx} x'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} x'^2 + \frac{dy}{dx} x''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} x'^3 + 3 \frac{d^2y}{dx^2} x' x'' + \frac{dy}{dx} x'''$$

.....

e portanto

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3} \\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'^2 y''' - x' y' x''' - 3 x' x'' y'' + 3 y' x''^2}{x'^5} \\ \dots \end{cases}$$

onde se deve substituir as derivadas de x pelos seus valores tirados da equação $\varphi(x, \theta) = 0$.

Substituindo depois os valores resultantes de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. na expressão proposta resolve-se o problema enunciado.

EXEMPLO. — Substituindo na expressão :

$$F\left(x, \sqrt{x^2 + bx + c}, \frac{dy}{dx}\right),$$

onde F representa uma função racional de $x, \sqrt{x^2 + bx + c}$ e $\frac{dy}{dx}$, a variavel x por outra θ ligada com x pela equação

$$\sqrt{x^2 + bx + c} = x - \theta$$

que dá

$$x = \frac{\theta^2 - c}{b + 2\theta}, \quad x' = \frac{2(\theta^2 + b\theta + c)}{(b + 2\theta)^2},$$

vem uma expressão da fórmula :

$$f\left(\theta, \frac{dy}{d\theta}\right)$$

onde f representa uma função racional de θ e $\frac{dy}{d\theta}$. Temos assim um exemplo da transformação d'uma função irracional n'outra racional.

2.º — Substituir as variaveis x e y por outras ρ e θ ligadas com x e y pelas equações

$$\varphi(x, y, \theta, \rho) = 0, \psi(x, y, \theta, \rho) = 0,$$

sendo θ a nova variavel independente.

Para resolver este problema basta derivar as equações precedentes relativamente a θ , considerando x , y e ρ como funcções d'esta variavel, o que dá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

etc.;

e em seguida substituir nas formulas (1) os valores de x' , y' , x'' , y'' , etc. tirados das equações precedentes. Obtêm-se assim as derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

EXEMPLO. — Transformar a expressão

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

sendo

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

as equações que ligam as novas variaveis ás antigas.

Temos

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta$$

$$y' = \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta - \rho \cos \theta$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta.$$

Substituindo estas derivadas na formula

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' y'' - y' x''},$$

que resulta de substituir na expressão dada $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ pelos seus valores tirados das formulas (1), vem

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2}}.$$

84. — Consideremos agora a respeito da função de duas variaveis independentes x e y :

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots\right)$$

as duas questões seguintes:

1.º — *Substituir as variaveis independentes x e y por outras θ_1 e θ_2 ligadas com x e y pelas equações*

$$\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0, \psi(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0.$$

Por z ser função de x e y , e por x e y serem funções de θ_1 e θ_2 , temos

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2} \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_1} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} . \end{aligned}$$

etc.

Substituindo n'estas equações as derivadas $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta_2}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$, etc. pelos seus valores tirados das equações que resultam de derivar $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ relativamente a θ_1 e θ_2 , e resolvendo-as depois relativamente a $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., temos as derivadas que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

2.º — *Substituir as variaveis x, y e z por outras θ_1 , θ_2 , e ρ ligadas com as primeiras pelas equações:*

$$\varphi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0, \quad \psi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0,$$

$$\omega(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0.$$

Resolve-se este problema por meio das formulas anteriores substituindo n'ellas $\frac{\partial z}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta_2}$, etc. pelos seus valores tirados das equações $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$.

EXEMPLO. — Transformar a funcção

$$F\left(x, \sqrt{a+x}, \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}}{y}\right),$$

suppondo as novas variaveis ligadas com as antigas pelas equações

$$x^2 + y^2 = \theta_1, \quad a + x = \theta_2.$$

Derivando estas equações relativamente a θ_1 e θ_2 , vem

$$2x \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + 2y \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = 1, \quad x \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2;$$

o que dá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y}, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{2x\theta_2}{y}.$$

Temos pois

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_2} = 2\theta_2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x\theta_2}{y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Substituindo na expressão proposta os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ tirados d'estas equações, vem uma expressão da fórmula

$$f\left(\theta_2, \frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right)$$

em que só entra uma derivada e em que não entra radical.

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

I

Curvas planas

§5. — *Tangentes e normaes.* — **I** — Seja dada uma curva cuja equação em coordenadas rectangulares é

$$F(x, y) = 0.$$

A *tangente* a esta curva no ponto (x, y) sendo uma recta que passa pelo ponto (x, y) e cujo coefficiente angular *tang* θ é (n.º 56 — I) igual a $\frac{dy}{dx}$, a sua equação será (chamando X e Y as coordenadas correntes da recta)

$$(4) \quad Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x),$$

onde se deve substituir $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor tirado da equação da curva, o que dá

$$\frac{\partial F}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y - y) = 0.$$

II — A equação da recta perpendicular a esta, isto é, a equação da *normal á curva* no ponto (x, y) é

$$X - x = - \frac{dy}{dx} (Y - y),$$

ou

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

A respeito da normal resolveremos aqui o problema seguinte:

Determinar o limite para que tende a intersecção das normaes á curva nos pontos (x, y) e $(x + h, y + k)$ quando o segundo ponto tende para o primeiro.

As equações das duas normaes são

$$X - x = - f' (x) (Y - y)$$

$$X - x - h = - f' (x + h) (Y - y - k),$$

e a segunda dá, attendendo á primeira e ao que se disse no n.º 52,

$$\begin{aligned} - h &= - hf'' (x) (Y - y) + kf' (x) \\ &+ khf'' (x) - \varepsilon h (Y - y - k). \end{aligned}$$

Vêm portanto, dividindo por h e depois fazendo tender h para zero, as formulas

$$(2) \quad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad X - x = - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''}$$

que dão o ponto (X, Y) pedido.

■■■ — Dá-se respectivamente os nomes de *subtangente*, *subnormal*, *tangente definida* e *normal definida* aos comprimentos (1) TP , PN , TM e NM determinados pela tangente e pela normal. A resolução dos triangulos MTP e MNP dá os comprimentos d'estas linhas:

(1) Serve a figura do n.º 56, tirando a normal MN que corta o eixo das abscissas no ponto N .

$$\text{subtangente} = \frac{y}{\text{tang } \theta} = y \frac{dx}{dy}$$

$$\text{subnormal} = y \text{ tang } \theta = y \frac{dy}{dx}$$

$$\text{tangente} = \sqrt{y^2 + TP^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\text{normal} = \sqrt{y^2 + NP^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

86. — *Concavidade e convexidade.* — **I** — Consideremos um arco de curva e pelo ponto (x, y) d'este arco tiremos a normal, que se estende indefinidamente em duas direcções oppostas. Se as normaes nos pontos do arco, visinhos de (x, y) , cortarem todas a primeira normal em pontos situados n'uma mesma d'estas direcções, diz-se que o arco considerado tem, na visinhança do ponto (x, y) a sua *concavidade* voltada no sentido d'esta direcção da normal e a *convexidade* voltada no sentido opposto.

O sentido da concavidade determina-se pois pela posição do ponto (X, Y) dado pelas formulas (2), visto que estas formulas dão o ponto para que tende a intersecção da normal á curva no ponto (x, y) com as normaes nos pontos infinitamente proximos de (x, y) , quando estes pontos tendem para (x, y) .

II — Diz-se que um arco tem, na visinhança do ponto (x, y) , a sua concavidade voltada no sentido d'uma direcção dada, quando esta direcção fórma um angulo agudo com a direcção da normal no sentido da qual está voltada a concavidade.

Se a direcção dada é a das ordenadas positivas, para que esta direcção forme um angulo agudo com a direcção da normal que contém o ponto (X, Y) , deve este ponto estar evidentemente acima de uma parallela ao eixo das abscissas tirada pelo ponto (x, y) . A primeira das formulas (2) mostra que isto tem logar todas as vezes que y'' é positivo, pois que:

1.º — Se y é positivo a formula dá $Y > y$;

2.º — Se y é negativo, a formula dá para Y ou um valor positivo, ou um valor negativo menor do que y em valor absoluto.

Demonstra-se do mesmo modo que a concavidade estará voltada para os y negativos quando y'' é negativo.

Podemos pois enunciar o theorema seguinte:

A curva volta a sua concavidade no sentido das ordenadas positivas ou das negativas, na vizinhança d'um ponto dado no qual as derivadas y' e y'' são finitas, segundo a derivada y'' é positiva ou negativa n'este ponto.

III — Se nos pontos visinhos do ponto (x, y) , collocados d'um dos lados d'este ponto, a concavidade está voltada n'um sentido e nos pontos visinhos, collocados do outro lado, está voltada no sentido opposto, diz-se que o ponto (x, y) é um *ponto d'inflexão*.

D'esta definição e do theorema anterior resulta immediatamente o theorema seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que um ponto (x, y) , no qual as derivadas y' e y'' são finitas, seja ponto d'inflexão, que y'' mude n'este ponto de signal.

Funda-se n'este theorema a indagação dos pontos d'inflexão, como adiante veremos.

87. — *Asymptotas.* — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de curva se a distancia d'um ponto do ramo de curva á recta tende para o limite zero, quando o ponto se afasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptomas não parallelas ao eixo das ordenadas dos ramos de curvas planas, basta determinar as constantes a e b , que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas y e Y da recta e da curva, correspondentes á mesma abscissa, tenda para zero quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que a equação do ramo de curva possa ser reduzida á fórma

$$Y = ax + b + F(x, y),$$

representando por $F(x, y)$ uma função que tende para zero quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$,

$$\lim z = \lim \frac{Y}{x} = a + \lim \frac{b + F(x, y)}{x} = a$$

Gerhard - D. T. 1. p. 332

$$\lim u = \lim (Y - ax) = b + \lim F(x, u) = b.$$

Denotando por $y = ax + b$ a equação de uma asymptote, a equação da respectiva curva deverá ser $Y = ax + b + u$ (Duchamp, T. 1, pag 332, e Gomes Teófilo, pag 1), sendo u uma função de x e y que se torna nulla para valores infinito d'estas variáveis.

Ora da eq. da recta deduz-se $a = \frac{y-b}{x}$, e pelo que ha pouco se disse, n'esta expressão é permittida substituição y por Y para valores m. grandes de x e Y , pelo que teremos $a = \frac{Y-b}{x}$ e logo $a = \lim \frac{Y-b}{x} = \frac{Y}{x}$.

Assim determinando a , teremos $b = y - ax = \lim (y - ax) = \lim (Y - ax)$ sendo Y o valor de y dado pela equação da curva, que se supõe coincidir (x) ou mais simplesmente função de x somente.

$$\alpha^2 z^2 - \beta^2 = -\frac{\alpha^2 \beta^2}{x^2},$$

e portanto

$$\alpha^2 (\lim z)^2 - \beta^2 = 0,$$

ou

$$a = \lim z = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x + u$, vem a equação

$$u \left(\frac{u}{x} \pm 2 \frac{\beta}{\alpha} \right) = -\frac{\beta^2}{x},$$

que, fazendo $x = \infty$, dá $\lim u = 0$; portanto $b = 0$.

Logo as equações das asymptotas da hyperbole são

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x.$$

Demonstra-se do mesmo modo que a concavidade estará voltada para os x negativos quando y'' é negativo.

Calculus - P. 1. pag. 303 da 1.ª regra. Procura-se a eq. da tangente à curva dada no ponto x_1, y_1 , exprime-se y_1 em função de x_1 e depois faz-se $x_1 = \infty$

Ex. ex.º: na hyperbole $ay^2 - bx^2 = -ab$, a eq. da tangente no p.º x_1, y_1 é $\frac{ay_1 y}{a^2} - \frac{bx_1 x}{b^2} = 1$, donde resulta exprimindo y_1 em função de x_1 $\frac{y_1}{a^2} + \frac{y}{b} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{x_1}$, e suppondo agora $x_1 = \infty$, vem $y = t \frac{b}{a}$

87. — *Asymptotas.* — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de curva se a distancia d'um ponto do ramo de curva à recta tende para o limite zero, quando o ponto se afasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptomas não paralelas ao eixo das ordenadas dos ramos de curvas planas, basta determinar as constantes a e b , que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas y e Y da recta e da curva, correspondentes à mesma abscissa, tenda para zero quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que a equação do ramo de curva possa ser reduzida à fórma

$$Y = ax + b + F(x, y),$$

representando por $F(x, y)$ uma função que tende para zero quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$,

$$\lim z = \lim \frac{Y}{x} = a + \lim \frac{b + F(x, y)}{x} = a$$

Calculus - P. 1. pag. 332

$$\lim u = \lim (Y - ax) = b + \lim F(x, y) = b;$$

e vê-se portanto que, para determinar a , basta substituir Y por zx na equação proposta e procurar depois o limite para que tende z quando x tende para o infinito; e que, para determinar b , basta substituir Y por $ax + u$ na equação proposta (ou z por $a + \frac{u}{x}$ na primeira transformada) e procurar depois o limite para que tende u quando x tende para o infinito.

A equação de qualquer asymptota paralela ao eixo das ordenadas é $x = \alpha$, onde α representa evidentemente o limite para que tende a abscissa do ramo da curva considerado quando y tende para o infinito.

EXEMPLO. — Para determinar as asymptotas da hyperbole

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 = -\alpha^2 \beta^2$$

ponhamos $y = zx$, o que dá

$$\alpha^2 z^2 - \beta^2 = -\frac{\alpha^2 \beta^2}{x^2},$$

e portanto

$$\alpha^2 (\lim z)^2 - \beta^2 = 0,$$

ou

$$a = \lim z = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x + u$, vem a equação

$$u \left(\frac{u}{x} \pm 2 \frac{\beta}{\alpha} \right) = -\frac{\beta^2}{x},$$

que, fazendo $x = \infty$, dá $\lim u = 0$; portanto $b = 0$.

Logo as equações das asymptotas da hyperbole são

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x.$$

88. — *Curvatura.* — Chama-se *curvatura média d'um arco de curva* compreendido entre os pontos (x, y) e $(x + h, y + k)$ a razão entre o angulo formado pelas tangentes ás extremidades do arco e o comprimento do arco.

Chama-se *curvatura da curva no ponto* (x, y) o limite para que tende a razão precedente quando o arco tende para zero.

Seja $y = f(x)$ a equação da curva em coordenadas rectangulares, θ o angulo das tangentes nas extremidades do arco e l o comprimento do arco; a curvatura no ponto (x, y) será igual a $\lim \frac{\theta}{l}$, e vamos determiná-la em função das coordenadas do ponto.

Por serem $f'(x)$ e $f'(x + h)$ os coefficients angulares das tangentes, a applicação d'uma formula bem conhecida de Geometria Analytica dará

$$\text{tang } \theta = \pm \frac{f'(x + h) - f'(x)}{1 + f'(x) \cdot f'(x + h)},$$

d'onde se deduz (n.º 53)

$$\frac{\text{tang } \theta}{h} = \pm \frac{f''(x) + \varepsilon}{1 + f'(x) \cdot f'(x + h)}.$$

Por outra parte, por ser (n.º 53) $\lim \frac{l}{ds} = 1$, temos (n.º 84 — II)

$$\lim \frac{h}{l} = \lim \frac{h}{ds} = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lim \frac{\theta}{\text{tang } \theta} = 1,$$

e

$$\lim \frac{\theta}{l} = \lim \frac{\theta}{\text{tang } \theta} \cdot \lim \frac{\text{tang } \theta}{h} \cdot \lim \frac{h}{l}.$$

Logo virá

$$\text{curvatura} = \lim \frac{\theta}{l} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$(3) \quad \text{curvatura} = \frac{1}{R}, \quad R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

onde se deve empregar aquelle dos signaes a que corresponde um valor positivo de R .

■ — Applicando a formula precedente á circumferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vem $R = r$, e portanto a curvatura da circumferencia é constante e inversa do raio.

Vê-se pois que, se pelo ponto (x, y) da curva dada fizermos passar uma circumferencia cujo centro esteja sobre a normal á curva n'este ponto, do lado para onde ella volta a concavidade, e cujo raio seja igual a R , esta circumferencia é tangente á curva e tem em toda a sua extensão a mesma curvatura que a curva considerada tem no ponto (x, y) . Ao circulo assim obtido dá-se o nome de *circulo de curvatura da curva* no ponto (x, y) . E' facil obter as coordenadas (x_1, y_1) do centro d'este circulo, que se chama *centro de curvatura*.

Com effeito, por ser R o raio d'este circulo, temos

$$(4) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2};$$

e por estar o seu centro sobre a normal á curva no ponto (x, y) , temos

$$(5) \quad x_1 - x = -y'(y_1 - y).$$

Eliminando x_1 e y_1 entre estas equações obtêm-se as formulas

$$x_1 = x \mp y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y \pm \frac{1 + y'^2}{y''}$$

que dão as coordenadas não só do centro de curvatura, collocado do lado da concavidade, mas tambem as do centro do circulo tangente igual, collocado do lado da convexidade. Para distinguir quaes dos signaes das formulas precedentes correspondem ao centro de curvatura, basta comparal-as com as formulas (2) do n.º 85 que dão o ponto (X, Y) collocado do

lado da concavidade. Vê-se assim que as coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas formulas:

$$(6) \quad x_1 = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

D'esta comparação conclue-se tambem, attendendo ao que se disse no n.º 85 — II, que o centro da curvatura de curva no ponto (x, y) é o limite para que tende a intersecção da normal á curva no ponto considerado com a normal n'um ponto infinitamente proximo, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

II — Se em lugar da variavel independente x quizermos empregar outra variavel t ligada com x por uma relação dada, transformaremos as formulas (3) e (6) por meio das formulas (1) do n.º 83, e teremos

$$x_1 = x + \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{y'x'' - x'y''}, \quad y_1 = y - \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y'x'' - x'y''}, \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'x'' - x'y''}$$

onde x' e y' representam agora as derivadas de x e y relativamente a t . No exemplo do n.º 83 vem a expressão de R em coordenadas polares.

III — A cada ponto (x, y) da curva proposta corresponde um centro de curvatura. Quando o ponto (x, y) descreve a curva proposta, o centro de curvatura descreve uma curva cuja equação se acha eliminando x e y entre as equações (6) e a equação proposta. A esta curva dá-se o nome de *evoluta* da curva proposta (que se chama *evolvente*), e a respeito d'ella demonstraremos as duas proposições importantes seguintes:

1.º — A normal a uma curva dada no ponto (x, y) é tangente á sua evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente.

Com effeito, diferenciando as equações (6), considerando y , x_1 e y_1 como funcções de x , vem

$$dx_1 = dx - (1 + y'^2) dx - y'd \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$dy_1 = y' dx + d \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

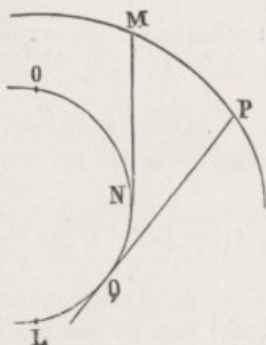
Multiplicando a segunda d'estas equações por y' e somando o resultado com a primeira, obtem-se a equação

$$(7) \quad y' \frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0$$

que, por ser y' o coeficiente angular da tangente á curva posta no ponto (x, y) e $\frac{dy_1}{dx_1}$ o coeficiente angular da tangente á evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente, mostra que estas duas linhas são perpendiculares.

2.º — A diferença entre os raios de curvatura correspondentes a dous pontos de uma curva dada é igual ao comprimento do arco da evoluta compreendido entre os seus respectivos centros de curvatura, quando entre os dous pontos o raio de curvatura cresce ou decresce sempre.

Seja MP o arco da curva considerada, NQ o arco correspondente da evoluta e O um ponto fixo a partir do qual se



contam os comprimentos dos arcos da evoluta. Chamando s_1 o comprimento do arco OQ , teremos:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2.$$

Diferenciando a equação (4), considerando x como variável independente e y, x_1 e y_1 como funções de x , e attendendo á equação (5), vem

$$(x - x_1) dx_1 + (y - y_1) dy_1 = - R dR.$$

A equação (7) dá também, attendendo a (5),

$$(x - x_1) dy_1 - (y - y_1) dx_1 = 0.$$

Elevando ao quadrado os dous membros das equações precedentes e sommando, vem

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Temos pois

$$\frac{ds_1}{dx} = \pm \frac{dR}{dx},$$

onde se deve empregar o signal $+$ ou $-$ segundo o raio R cresce ou diminue com s_1 no intervallo considerado (n.º 61).

No primeiro caso (o da figura) temos (n.º 62 th. 3.º—2.º)

$$s_1 = R + C,$$

e do mesmo modo, chamando R_0 o raio MN e s_0 o comprimento do arco ON ,

$$s_0 = R_0 + C;$$

e portanto

$$s_1 - s_0 = R - R_0.$$

No segundo caso (o da figura quando se toma o ponto L para origem dos arcos) vem do mesmo modo

$$s_0 - s_1 = R - R_0.$$

89. — EXEMPLOS. — **I** — Consideremos primeiro a parábola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

1) A equação da tangente no ponto (x, y) é

$$Y - y = \frac{P}{y} (X - x).$$

2) As expressões da subtangente, da subnormal e da normal são

$$\text{subt} = 2x, \text{subn} = p, \text{norm} = N = \sqrt{2px + p^2}.$$

3) As formulas (3) e (6) dão as expressões do raio de curvatura e das coordenadas do centro de curvatura :

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{\Lambda^3}{p^2},$$

$$x_1 = x + \frac{p^2 + y^2}{p} = 3x + p,$$

$$y_1 = y - \frac{(p^2 + y^2)y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

4) Eliminando x e y entre as duas ultimas equações e a da parabola, vem a equação da evoluta :

$$y_1^2 = \frac{8}{27p} (x_1 - p)^3,$$

que representa uma parabola cubica.

III — Consideremos em segundo logar a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Temos

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

e portanto :

1) A equação da tangente é

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y} (X - x).$$

2) A expressão da normal definida é

$$N = \sqrt{\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}}.$$

Do mesmo modo se acha a subtangente, subnormal, etc.

3) A expressão que dá o raio de curvatura é

$$R = \frac{\left(\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{\Lambda^3}{p^2},$$

2p representando o parametro.

Mudando b em $b\sqrt{-1}$ vê-se que esta expressão de R tem também logar no caso da hyperbole. Comparando-a com a expressão do raio de curvatura da parabola, conclue-se que em todas as secções conicas o raio de curvatura é igual ao cubo da normal dividido pelo quadrado do semiparametro.

As coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas formulas :

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

pondo $c^2 = a^2 - b^2$.

4) A equação da evoluta acha-se eliminando x e y entre as ultimas equações e a da ellipse, o que dá

$$\left(\frac{by_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ax_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Como esta equação não se altera pela mudança de x_1 em $-x_1$ e de y_1 em $-y_1$, vê-se que a curva é composta de quatro ramos iguaes, symetricos relativamente aos eixos coordenados. Basta portanto para conhecer a sua fórma discutir o ramo correspondente ás coordenadas positivas, para o que se deve attender á equação da curva e ás igualdades :

$$y'_1 = -\left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y''_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{y'_1 x_1 - y_1}{x_1^2}\right).$$

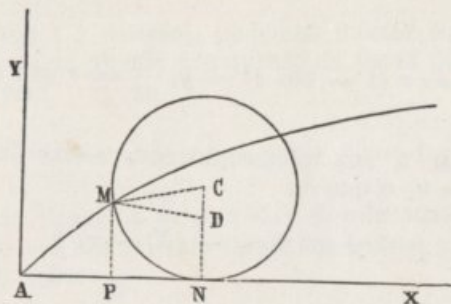
1.º—A curva corta o eixo das abscissas positivas no ponto $\left(+\frac{c^2}{a}, 0\right)$ e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y'_1 = 0$.

2.º—Quando x_1 diminue, y_1 augmenta, e a curva affasta-

se do eixo das abscissas conservando sempre a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto que y''_1 é positivo.

3.º — A curva corta o eixo das ordenadas positivas no ponto $(0, \frac{c^2}{b})$ e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y'_1 = \infty$.

4.º — Quando o valor absoluto de x_1 é maior de que $\frac{c^2}{a}$, y_1 é imaginario. Logo a estes valores de x_1 não correspondem pontos da curva. Do mesmo modo aos valores de y_1 maiores do que $\frac{c^2}{b}$ não correspondem pontos da curva.



III — Chama-se *cycloide* a curva gerada pelo ponto M de uma circumferencia que róla sem escorregar sobre uma recta dada.

Seja M um ponto da curva, C a posição correspondente do centro do circulo gerador, r o raio d'este circulo, A o ponto de partida de M , que tomaremos para origem das coordenadas, AN a recta dada que tomaremos para eixo das abscissas, e MD uma parallela a esta recta.

Para achar a equação da curva exprimamos as coordenadas de um ponto qualquer M em funcção do angulo MCN , que chamaremos t . Para isso notemos que é por definição

$$AN = MN = rt,$$

e portanto teremos

$$x = AN - PN = r(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = CN - CD = r(1 - \operatorname{cos} t).$$

Estas duas equações dariam, pela eliminação de t , a equação da curva, mas vamos discutil-a sem fazer esta eliminação.

1) A equação da normal

$$y'(Y - y) = -(X - x)$$

dá, tomando t para variavel independente,

$$\frac{dy}{dt}(Y - y) = -(X - x) \frac{dx}{dt},$$

onde é

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \operatorname{cos} t) = y, \quad \frac{dy}{dt} = r \operatorname{sen} t.$$

Para achar a sua intersecção com o eixo das abscissas façamos $Y = 0$, o que dá

$$-ry \operatorname{sen} t = -(X - x)y$$

e portanto

$$X = x + r \operatorname{sen} t = AN.$$

Logo a normal á cycloide n'um ponto dado passa pelo ponto onde o circulo gerador correspondente toca a recta sobre que gyra.

2) O valor da normal definida é dada pela formula

$$N^2 = y^2 + PN^2 = y^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t$$

e vem portanto

$$N = r \sqrt{2(1 - \operatorname{cos} t)} = 2r \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

3) As formulas do n.º 88 — II dão, tomando t para variavel independente, as expressões do raio de curvatura e do centro de curvatura. Para isso basta substituir n'essas formulas x' , y' , x'' , y'' pelos valores seguintes :

$$x' = r(1 - \cos t), \quad x'' = r \sin t$$

$$y' = r \sin t, \quad y'' = r \cos t,$$

e teremos a expressão do raio de curvatura

$$R = 2r \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2N,$$

que mostra que o raio de curvatura é igual ao dobro da normal; e as coordenadas do centro de curvatura

$$x_1 = r(t + \sin t), \quad y_1 = r(-1 + \cos t).$$

Estas equações dão, pela eliminação de t , a equação da evoluta da cycloide.

4) Como t é variavel, podemos n'estas equações mudar t em $t + \pi$ sem alterar a natureza da curva que ellas representam, e vem

$$x_1 = r(t + \pi - \sin t), \quad y_1 = r(-1 - \cos t).$$

Mudando depois a origem das coordenadas para o ponto $(\pi r, -2r)$, isto é, mudando x_1 em $x_1 + \pi r$ e y_1 em $y_1 - 2r$, vêem as equações:

$$x_1 = r(t - \sin t), \quad y_1 = r(1 - \cos t),$$

d'onde se conclue que a evoluta da cycloide é outra cycloide igual á primeira, cujo vertice está no ponto $(\pi r, -2r)$ e cujo circulo gerador gyra sobre uma recta parallela áquella sobre que gyra o circulo gerador da cycloide proposta.

II

Curvas no espaço

90. — *Tangentes e normaes.* — Consideremos a curva representada pelas equações

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

I — A *tangente* a esta curva no ponto (x, y, z) define-se, como no caso das curvas planas, como limite das posições da secante que passa pelo (x, y, z) e pelo ponto infinitamente proximo $(x + h, y + k, z + l)$.

Como a secante é uma recta que passa pelos dous pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ as suas equações são (chamando X, Y, Z as suas coordenadas correntes)

$$Y - y = \frac{k}{h} (X - x)$$

$$Z - z = \frac{l}{h} (X - x);$$

e portanto as equações da tangente serão

$$(2) \quad \begin{cases} Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x) \\ Z - z = \frac{dz}{dx} (X - x). \end{cases}$$

As derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ devem ser tiradas das equações da curva.

II — Os cosenos dos angulos α, β, γ formados pela tangente á curva no ponto (x, y, z) com os eixos coordenados

rectangulares são, em virtude de formulas bem conhecidas da Geometria Analytica,

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds} \\ \cos \beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dy}{ds} \\ \cos \gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dz}{ds} \end{cases}$$

III — Chama-se *plano normal á curva* no ponto (x, y, z) o plano que passa por este ponto perpendicularmente á tangente.

Applicando as formulas conhecidas de Geometria Analytica que dão a equação do plano perpendicular a uma recta dada, vem, suppondo as coordenadas rectangulares,

$$(4) \quad X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0$$

onde X, Y e Z representam as coordenadas correntes do plano.

Chama-se *normal á curva* no ponto (x, y, z) toda a recta que passa por este ponto e existe no plano normal.

IV — Chama-se *plano tangente á curva* no ponto (x, y, z) todo o plano que passa pela tangente á curva n'este ponto. Entre estes planos vamos especialmente considerar aquelle para que tende o plano que passa por esta tangente e por uma parallela á tangente á curva no ponto $(x + h, y + k, z + l)$, infinitamente proximo do ponto (x, y, z) , quando aquelle ponto tende para este.

Por serem y e z funcções de x , podemos pôr

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x).$$

A equação geral do plano que passa pelo ponto (x, y, z) é

$$X - x = A(Y - y) + B(Z - z),$$

que transformam a equação (5) na seguinte :

$$(6) \quad (z' y'' - y' z'') (X - x) + (x' z'' - z' x'') (Y - y) \\ + (y' x'' - x' y'') (Z - z) = 0.$$

§1. — *Curvatura e torsão.* — Consideremos uma curva no espaço, e supponhamos que tomamos para variavel independente uma variavel t , de modo que as coordenadas da curva se exprimam em funcção d'esta variavel por meio das equações :

$$x = \varphi (t), \quad y = \psi (t), \quad z = \pi (t).$$

Se pelo ponto (x, y, z) fizermos passar uma recta n'uma direcção determinada, de modo que, chamando a, b e c os cosenos dos angulos formados por ella com os eixos coordenados, seja

$$a = f_1 (t), \quad b = f_2 (t), \quad c = f_3 (t);$$

os cosenos a', b', c' dos angulos formados com os mesmos eixos pela recta correspondente que passa pelo ponto infinitamente proximo $(x + h, y + k, z + l)$ serão dados (n.º 53) pelas formulas :

$$a' = f_1 (t + dt) = f_1 (t) + dt [f'_1 (t) + \varepsilon_1]$$

$$b' = f_2 (t) + dt [f'_2 (t) + \varepsilon_2]$$

$$c' = f_3 (t) + dt [f'_3 (t) + \varepsilon_3]$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 são quantidades infinitamente pequenas com dt .

Posto isto, procuremos o limite para que tende a razão do angulo formado pelas duas rectas para o comprimento do arco comprehendido entre os pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

Chamando θ o angulo formado pelas duas rectas, temos

$$\cos \theta = aa' + bb' + cc',$$

d'onde se deduz

$$\text{sen } \theta = [(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo n'esta formula os valores de a' , b' , c' achados precedentemente, representando para brevidade $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ por f_1 , f_2 e f_3 , e attendendo ao primeiro principio do n.º 57, vem

$$\lim \frac{\theta}{ds} = \lim \frac{\text{sen } \theta}{ds}$$

$$= \frac{[(f_3 f'_2 - f_2 f'_3)^2 + (f_1 f'_3 - f_3 f'_1)^2 + (f_2 f'_1 - f_1 f'_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{dt}}$$

III — Supponhamos que as linhas dadas são as tangentes á curva nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$, de modo que (n.º 90—II)

$$a = f_1(t) = \frac{x'}{s'}, \quad b = f_2(t) = \frac{y'}{s'}, \quad c = f_3(t) = \frac{z'}{s'},$$

representando por s' , x' , y' , z' , x'' , y'' , etc. as derivadas de s , x , y , z relativamente a t . Teremos

$$f'_1 = \frac{x'' s' - s'' x'}{s'^2}, \quad f'_2 = \frac{y'' s' - s'' y'}{s'^2}, \quad f'_3 = \frac{z'' s' - s'' z'}{s'^2},$$

e (n.º 81)

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Logo, chamando ω o angulo formado pelas duas tangentes infinitamente proximas, virá,

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{[(z' y'' - y' z'')^2 + (x' z'' - z' x'')^2 + (y' x'' - x' y'')^2]^{\frac{1}{2}}}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{s'^3},$$

pondo

$$A = z' y'' - y' z'', \quad B = x' z'' - z' x'', \quad C = y' x'' - x' y''.$$

Ao limite, dado por esta formula, para que tende a razão do angulo formado pelas tangentes à curva dada nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes pontos dá-se o nome de *curvatura da curva no ponto (x, y, z)* ; a ω dá-se o nome de *angulo de contingencia*; e a $\lim \frac{ds}{\omega}$ dá-se o nome de *raio de curvatura*. Esta formula contém evidentemente a formula dada no n.º 88 para as curvas planas.

■ ■ — Supponhamos agora que as linhas dadas são as perpendiculares ao plano osculador.

A equação d'este plano é (n.º 90 — IV)

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

e, em virtude de formulas bem conhecidas de Geometria Analytica, temos

$$a = f_1(t) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$b = f_2(t) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$c = f_3(t) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Estas formulas dão

$$f_3 f'_2 - f_2 f'_3 = \frac{CB' - BC'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$f_1 f'_3 - f_3 f'_1 = \frac{AC' - CA'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$f_2 f'_1 - f_1 f'_2 = \frac{BA' - AB'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Logo, chamando τ o angulo formado pelas perpendicula-

res aos planos osculadores infinitamente proximos, temos a formula

$$\lim \frac{\tau}{ds} = \frac{[(CB' - BC')^2 + (AC' - CA')^2 + (BA' - AB')^2]^{\frac{1}{2}}}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} s'}$$

Pondo em logar de A, B, C e s' os seus valores e notando que é

$$CB' - BC' = Dx', AC' - CA' = Dy', BA' - AB' = Dz',$$

onde

$$D = Ax''' + By''' + Cz''',$$

vem emfim

$$(8) \quad \lim \frac{\tau}{ds} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Ao limite, dado pela formula precedente, para que tende a razão do angulo formado pelos planos osculadores nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes dous pontos dá-se o nome de *torsão da curva no ponto* (x, y, z) ; ao angulo τ dá-se o nome de angulo de torsão e ao $\lim \frac{ds}{\tau}$ dá-se o nome de *raio de torsão*.

EXEMPLO. — Consideremos a *helice*, gerada por um ponto que se move sobre a superficie d'um cylindro recto de base circular, de modo que a sua distancia á base seja proporcional ao comprimento do arco da base comprehendido entre um ponto fixo e o pé da generatriz do cylindro que passa pelo ponto gerador.

Tomando o centro da base para origem das coordenadas, o eixo do cylindro para eixo dos z , e chamando ρ o raio da base, as equações da curva são:

$$x = \rho \cos t, y = \rho \sin t, z = at,$$

que dão

$$\begin{aligned}x' &= -\rho \operatorname{sen} t, & x'' &= -\rho \cos t, & x''' &= \rho \operatorname{sen} t, \\y' &= \rho \cos t, & y'' &= -\rho \operatorname{sen} t, & y''' &= -\rho \cos t, \\z' &= a, & z'' &= 0, & z''' &= 0.\end{aligned}$$

Logo temos as formulas

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}, \quad \lim \frac{\tau}{ds} = \frac{a}{\rho^2 + a^2},$$

que dão a curvatura e a torsão da helice traçada na superficie do cylindro considerado.

Vê-se por estas formulas que a *curvatura e a torsão da helice traçada sobre um cylindro de base circular são constantes.*

III

Superficies

92.— *Plano tangente. Normal.* — **II** — Seja $z = f(x, y)$ a equação d'uma superficie dada, e pelo ponto (x, y, z) tracemos uma curva qualquer sobre a superficie, cujas equações sejam a equação proposta e a equação $\varphi(x, y, z) = 0$. Em virtude do que se disse no n.º 90 — I acha-se as equações da tangente a esta curva eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ entre as equações

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x), \quad Z - z = \frac{dz}{dx} (X - x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

o que leva a duas equações, uma das quaes é

$$(9) \quad Z - z = \frac{\partial z}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (Y - y).$$

Esta equação pertence a um plano, e é independente da equação $\varphi(x, y, z) = 0$; portanto *todas as tangentes ás curvas traçadas n'uma superficie, que passam pelo ponto (x, y, z) , estão assentes sobre um plano*. A este plano dá-se o nome de *plano tangente á superficie* no ponto (x, y, z) .

As derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtêm-se derivando a equação da superficie proposta, que pôde ser explicita ou implicita. Se a equação da superficie é $F(x, y, z) = 0$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z} (Z - z) = 0.$$

NOTA 1.^a — Se fôr

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

o plano tangente é paralelo á recta

$$x = az + \alpha, y = bz + \beta,$$

em virtude d'um theorema bem conhecido da Geometria Analytica.

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies cylindricas (n.^o 73), cujas geratrizes são paralelas á recta.

NOTA 2.^a — Se fôr

$$z - c = \frac{\partial z}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial z}{\partial y} (y - b),$$

o plano tangente passa pelo ponto (a, b, c) .

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies conicas (n.^o 73), cujo vertice é (a, b, c) .

III — Os cosenos dos angulos α, β, γ que o plano tangente fórma com os planos coordenados xy, xz e yz são, em virtude de formulas bem conhecidas de Geometria Analytica :

$$\cos \alpha = K \frac{\partial F}{\partial z}, \cos \beta = K \frac{\partial F}{\partial y}, \cos \gamma = K \frac{\partial F}{\partial x}$$

onde é

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

III — Chama-se *normal á superficie* no ponto (x, y, z) a perpendicular n'este ponto ao plano tangente. As suas equações são, em virtude das condições de perpendicularidade de uma recta a um plano conhecidas da Geometria Analytica,

$$(10) \quad X - x = -\frac{\partial z}{\partial x} (Z - z), \quad Y - y = -\frac{\partial z}{\partial y} (Z - z).$$

Se a equação da curva é $F(x, y, z) = 0$, as equações da normal tomam a fôrma symetrica

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

NOTA. — A condição para que a normal a uma superficie corte o eixo dos z obtem-se eliminando X, Y, Z entre as equações da normal e as equações $X = 0$ e $Y = 0$ do eixo, o que dá

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies da revolução (n.º 73), cujo eixo coincide com o eixo dos z .

A mesma eliminação dá

$$Z = z + \frac{x}{\frac{\partial z}{\partial x}},$$

ou, por ser $z = \varphi(x^2 + y^2)$ a equação da superficie,

$$Z = z + \frac{1}{2\varphi'(x^2 + y^2)} = z + \frac{1}{2\varphi'(r)},$$

chamando r o raio do paralelo; o que mostra que todas as normaes correspondentes aos pontos do mesmo paralelo encontram o eixo dos z no mesmo ponto.

Temos pois o theorema seguinte:

Todas as normaes a uma superficie de revolução nos pontos do mesmo paralelo encontram o eixo da superficie no mesmo ponto.

93. — *Curvatura das secções planas das superficies.* —

I — A curvatura da secção feita n'uma superficie por um plano qualquer obtém-se pela formula geral do n.º 91 — I. Aqui vamos procurar as relações que ha entre as secções feitas por planos que passam por um ponto dado da superficie, considerando primeiro as secções feitas por planos que passam pela normal á superficie no ponto dado, e em seguida as secções obliquas.

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superficie, ponhamos para brevidade

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

e representemos por p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 os valores que tomam p, q, r, s, t no ponto dado.

Para comparar a curvatura das secções feitas n'esta superficie por planos normaes que passam por um ponto dado, tomemos para eixo dos z a normal no ponto dado e para plano xy o plano tangente no mesmo ponto. N'este caso a equação do plano tangente será $Z = 0$, e portanto teremos (n.º 92)

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0.$$

Um plano qualquer que passe pela normal tem para equação $y = Ax$, onde A representa a tangente trigonometrica do angulo θ formado por elle com o plano xz ; e portanto, tomando x para variavel independente e representando por y', z', y'', z'' as derivadas de y e z relativamente a x , tiradas d'esta equação e da equação da superficie, teremos

$$y' = A, \quad y'' = 0, \quad z' = p + Aq,$$

$$z'' = r + 2As + A^2t.$$

Logo a expressão da curvatura c_n da secção normal será (n.º 94—1)

$$(11) \quad c_n = \frac{r_0 + 2As_0 + A^2t_0}{1 + A^2},$$

onde r_0 , s_0 e t_0 são tiradas da equação da superfície, e A depende da posição do plano normal considerado.

Derivando c_n relativamente a A , vem

$$c'_n = - \frac{2[s_0 A^2 - (t_0 - r_0)A - s_0]}{(1 + A^2)^2},$$

ou

$$c'_n = - \frac{2s_0(A - m_1)(A - m_2)}{(1 + A^2)^2},$$

pondo

$$m_1 = \frac{(t_0 - r_0) + \sqrt{(t_0 - r_0)^2 + 4s_0^2}}{2s_0}$$

$$m_2 = \frac{(t_0 - r_0) - \sqrt{(t_0 - r_0)^2 + 4s_0^2}}{2s_0}.$$

Vê-se pois que c'_n muda de signal quando A passa pelos valores m_1 e m_2 , e portanto a curvatura c_n passa (n.º 61) de crescente a decrescente e de decrescente a crescente, isto é, passa por um valor *maximo* e por um valor *minimo*.

De ser $m_1 \cdot m_2 = -1$ conclue-se que *as duas secções de curvatura maxima e minima são perpendiculares uma á outra.*

Tomando os planos d'estas duas secções para plano zx e zy teremos de fazer na formula (11) $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$, e portanto $A = 0$ e $A = \infty$, para obter as suas curvaturas que designaremos por c_1 e c_2 ; o que dá $c_1 = r_0$, e $c_2 = t_0$. Vem pois

$$c_n = \frac{1}{1 + A^2} c_1 + \frac{2A}{1 + A^2} s_0 + \frac{A^2}{1 + A^2} c_2.$$

Por outra parte, devendo ser uma das quantidades m_1 e

m_2 igual a zero, as expressões que dão os valores d'estas quantidades mostram que deve ser $s_0 = 0$. Logo

$$c_n = \frac{4}{4 + A^2} c_1 + \frac{A^2}{4 + A^2} c_2$$

ou

$$(12) \quad c_n = c_1 \cos^2 \theta + c_2 \sin^2 \theta.$$

Temos pois o theorema seguinte devido a Euler :

Entre as secções feitas n'uma superficie por planos que passam por uma mesma normal ha duas de curvaturas maxima e minima, perpendiculares entre si; e a curvatura d'aquellas está ligada com a curvatura d'estas por meio da relação (12).

As secções de curvatura maxima e minima dá-se o nome de *secções principaes*.

D'este theorema deduzem-se os corollarios seguintes :

1.º—*Se uma secção cuja curvatura é c'_n fôr perpendicular á secção cuja curvatura é c_n , teremos*

$$c_n + c'_n = c_1 + c_2.$$

Deduz-se este resultado sommando com a igualdade (12) a igualdade

$$c'_n = c_1 \sin^2 \theta + c_2 \cos^2 \theta.$$

2.º—*Se fôr $c_1 = c_2$ será a curvatura c_n constante, qualquer que seja o plano secante. Aos pontos que estão n'este caso dá-se o nome de *pontos umbilicaes*.*

III—*Consideremos agora uma secção feita por um plano que passe pelo ponto (x, y, z) mas não contenha a normal á superficie n'este ponto.*

Tomando para plano xy o plano tangente, para eixo dos xx a intersecção do plano considerado com o plano tangente, e para eixo dos zz a normal, a equação do plano considerado será

$$y = z \operatorname{tang} i = Bz,$$

chamando i o angulo formado por este plano com o plano normal zx . Teremos pois, em virtude d'esta equação e da equação da superficie, tomando x para variavel independente,

$$y' = Bz', \quad y'' = Bz'', \quad z' = p + qy'$$

$$z'' = r + 2s y' + ty'^2 + qy'',$$

ou, pondo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e notando que p_0 e q_0 são nullos,

$$x' = 1, \quad x'' = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = Br_0, \quad z'' = r_0.$$

Logo a curvatura c_0 da secção obliqua será (91 — I) dada pela formula :

$$c_0 = r_0 (1 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0}{\cos i}.$$

Por outra parte a formula (44) dá, pondo $\theta = 0$ ou $A = 0$, o valor r_0 para a curvatura da secção c_m feito na superficie pelo plano zx ; logo teremos a formula seguinte, devida a Meusnier:

$$c_0 = \frac{c_m}{\cos i},$$

que liga a curvatura de qualquer secção obliqua com a da secção normal que passa pela mesma tangente.

IV

Curvas e superficies envolventes

91. — *Curvas envolventes.* — I — Consideremos a familia de curvas cuja equação é

$$(1) \quad f(x, y, a) = 0,$$

onde a representa um parametro arbitrario, e f representa uma funcção cujas derivadas relativamente a x , y e a são funcções continuas d'estas variaveis.

Se dermos a a os valores $a_0, a_0 + h, a_0 + 2h, \text{ etc.}$ obtem-se uma série de curvas representadas pelas equações

$$(2) \quad f(x, y, a_0) = 0, f(x, y, a_0 + h) = 0, \text{ etc.}$$

Duas d'estas equações consecutivas tomadas simultaneamente representam os pontos d'intersecção das curvas correspondentes. Estes pontos approximam-se indefinidamente á medida que h diminue, e tendem a formar uma curva, que se chama *envolvente* da curva dada (*envolvida*), cuja equação vamos achar.

Consideremos para isso duas curvas consecutivas da série (2), isto é, as curvas cujas equações são

$$(3) \quad f(x, y, a) = 0, f(x, y, a + h) = 0.$$

A segunda d'estas equações dá (n.º 62)

$$f(x, y, a + h) = f(x, y, a) + h \frac{\partial f(x, y, a + \theta h)}{\partial a} = 0,$$

e portanto póde ser substituída pela equação

$$\frac{\partial f(x, y, a + \theta h)}{\partial a} = 0.$$

Esta equação simultaneamente com a primeira das equações (3) representam os pontos d'intersecção de duas curvas consecutivas da série (2), correspondentes ao valor que se dá a a , e pela eliminação de a dão uma equação a que todas estas intersecções devem satisfazer. Logo, fazendo tender h para zero, vêem as equações

$$(4) \quad f(x, y, a) = 0, \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0$$

que dão pela eliminação de a a equação da envolvente da curva proposta.

III — THEOREMA. — *A tangente á envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando a primeira das equações (4) consi-

derando a como função de x e y determinada pela segunda, vem a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} y' \right) = 0,$$

que dá o coeficiente angular y' da tangente à envolvente. Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, esta equação reduz-se à equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

que coincide com a que dá o coeficiente angular da tangente à envolvida. Logo as duas tangentes coincidem.

EXEMPLO. — Procuremos a envolvente das normaes à parábola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

A equação da normal é

$$p(Y - y) + y \left(X - \frac{y^2}{2p} \right) = 0.$$

Temos pois a procurar a envolvente das rectas representadas por esta equação, considerando X e Y como coordenadas correntes e y como parametro arbitrario.

Derivando esta equação relativamente a y e resolvendo a equação resultante relativamente a y^2 , vem

$$y^2 = \frac{2p}{3} (X - p).$$

Eliminando y entre esta equação e a anterior, vem a equação da envolvente perdida

$$Y^2 = \frac{8}{27p} (X - p)^3,$$

resultado que concorda com o que se disse no n.º 89.

95. — *Superfícies envolventes.* — **I** — Do mesmo modo que no caso das curvas, chama-se *superfície envolvente* das superfícies representadas pela equação

$$(1) \quad f(x, y, z, a) = 0$$

o logar geometrico das intersecções successivas de cada uma das superfícies representadas por esta equação com a que corresponde a um valor infinitamente proximo do parametro a . Às superfícies representadas pela equação (1) chama-se *envolvidas*, e às intersecções das envolvidas successivas chama-se *características*.

Acha-se a equação da superficie envolvente eliminando a entre a equação (1) e a equação

$$(2) \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0.$$

II — **THEOREMA.** — *O plano tangente á superficie envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á superficie envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x e y a primeira das equações (1) considerando a como função de x e y determinada pela equação (2), temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

que dão os coefficients $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da equação (n.º 92) do plano tangente á envolvente. Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

que são as mesmas que dão os coeficientes da equação do plano tangente à superfície envolvida. Logo os dous planos tangentes coincidem.

■■■ — A' linha envolvente das características dá-se o nome de *aresta de reversão*. Acha-se a sua equação procedendo como no caso das curvas planas. As equações d'uma característica são

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0;$$

e as da seguinte são

$$f(x, y, z, a + h) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a + h)}{\partial a} = 0,$$

e podem ser substituídas pelas equações

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a + \theta h)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, a + \theta_1 h)}{\partial a^2} = 0,$$

que no limite dão

$$(3) \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, a)}{\partial a^2} = 0.$$

Estas equações dão portanto pela eliminação de a as equações da *aresta de reversão*.

THEOREMA. — *A tangente á aresta da reversão n'um ponto qualquer é também tangente n'este ponto á característica correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x as duas primeiras equações (3) considerando a como função de x, y e z determinada pela terceira, vêem as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = 0,$$

que dão os coeficientes $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ que entram nas equações da tangente á envolvente (n.º 90). Mas por ser $\frac{df}{da} = 0$ e $\frac{d^2f}{da^2} = 0$, estas equações reduzem-se a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

que são as mesmas que dão os coeficientes das equações da tangente á característica. Logo as duas tangentes coincidem.

IV — Se a equação da superfície envolvida

$$f(x, y, z, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

contiver n parametros c_1, c_2, \dots, c_n , podemos pôr

$$c_2 = \varphi_2(c_1), c_3 = \varphi_3(c_1), \dots, c_n = \varphi_n(c_1),$$

representando por φ_2, φ_3 , etc. funções arbitrárias; e procurar depois, pelo processo anterior, a envolvente das superfícies

$$f[x, y, z, c_1, \varphi_2(c_1), \dots, \varphi_n(c_1)] = 0.$$

Chega-se assim a uma equação que contém também as funções arbitrárias φ_2, φ_3 , etc., e que representa porisso uma família de superfícies envolventes.

V — *Aplicações.* — 1.ª — Consideremos, como primeira aplicação, as superfícies de revolução, que se podem considerar como envolventes de uma esphera cujo centro se move sobre uma recta dada, e cujo raio varia de grandeza segundo uma lei dada.

Tomando a recta dada para eixo dos z , a equação da esphera é

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

ou, pondo $c = \varphi (R)$,

$$x^2 + y^2 + [z - \varphi (R)]^2 = R^2.$$

Derivando, vem

$$- [z - \varphi (R)] \varphi' (R) = R.$$

Esta ultima equação mostra que R é funcção arbitraria de z , e a anterior mostra portanto que z é funcção arbitraria de $x^2 + y^2$. Logo a equação pedida é

$$z = \phi (x^2 + y^2),$$

onde ϕ representa uma funcção arbitraria. Esta equação é a equação geral da familia das superficies de revolução, cujas especies se distinguem pelas differentes fórmas da funcção ϕ .

2.^a — Chama-se *superficies planificaveis* as superficies envolventes das posições que toma um plano que se move segundo uma lei qualquer. Procuremos a equação geral d'esta familia de superficies.

1) Seja

$$z = Ax + \varphi (A) y + \psi (A)$$

a equação do plano gerador, onde φ e ψ representam funcções arbitrarías.

Para achar a equação geral das superficies planificaveis é necessario eliminar A entre esta equação e a sua derivada

$$x + \varphi' (A) y + \psi' (A) = 0.$$

Como porém esta eliminação se não pôde effectuar sem especificar a fórma das funcções φ e ψ , considera-se estas duas equações simultaneas como representando a familia das superficies planificaveis, e effectua-se sómente a eliminação quando é dada a especie da superficie planificavel, isto é, quando são dadas as funcções φ e ψ .

2) Podemos achar facilmente a equação às derivadas parciaes das superficies planificaveis. Com effeito, derivando a

primeira das equações precedentes relativamente a x e y e atendendo á segunda, temos as equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(A),$$

que dão

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Derivando esta equação relativamente a x e a y , obtemos as equações

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

d'onde se deduz

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Esta equação, independente de funcções arbitrarías, é a equação ás derivadas parciaes das superficies planificaveis.

3) As superficies planificaveis gozam da seguinte propriedade importante:

Nas superficies planificaveis o plano tangente n'um ponto é tambem tangente em todos os outros pontos da mesma caracteristica.

Resulta esta propriedade do theorema II.

4) As superficies cylindricas e conicas estão comprehendidas na familia das superficies planificaveis. As primeiras são as envolventes das posições que toma um plano que se move parallelamente a uma recta dada. As segundas são as envolventes das posições que toma um plano que passa por um ponto dado. Para applicar a equação das superficies planificaveis, vamos procurar a equação da familia das superficies conicas.

Sendo (a, b, c) o ponto fixo por onde deve passar o plano gerador, temos as equações de condição

$$c = Aa + \varphi(A)b + \psi(A)$$

$$a + \varphi'(A)b + \psi'(A) = 0,$$

entre as quaes e as equações geraes das superficies planificaveis se deve eliminar uma das funcções arbitrarías, $\psi (A)$ e $\psi' (A)$ por exemplo. Vem pois

$$z - c = A (x - a) + \varphi (A) (y - b)$$

$$x - a + \varphi' (A) (y - b) = 0.$$

A primeira d'estas equações dá

$$\frac{z - c}{x - a} = A + \varphi (A) \frac{y - b}{x - a},$$

e como a segunda mostra que A é funcção de $\frac{y - b}{x - a}$, vem a equação geral das superficies conicas

$$\frac{z - c}{x - a} = \Psi \left(\frac{y - b}{x - a} \right)$$

onde Ψ representa uma funcção arbitraría.

3.^a — Procuremos a superficie envolvente dos planos osculadores de uma curva dada, cujas equações são

$$y = \varphi (x), z = \psi (x).$$

A equação do plano osculador é (n.º 90 — IV)

$$y'' (Z - z) = (z'y'' - y'z'') (X - x) + z'' (Y - y),$$

e portanto a equação da superficie pedida resulta de eliminar o parametro arbitrario x entre esta equação e a sua derivada relativamente a x :

$$y''' (Z - z) = (z'y''' - y'z''') (X - x) + z''' (Y - y).$$

Esta eliminação não póde ser effectuada sem se especificar primeiro as funcções φ e ψ .

Para achar as equações da aresta de reversão, temos de empregar, além das equações precedentes, a equação que resulta de derivar a segunda relativamente a x :

$$y^{(4)}(Z - z) = (z''y''' + z' y^{(4)} - y''z''' - y'z^{(4)})(X - x) \\ + z^{(4)}(Y - y),$$

e de eliminar depois x entre as tres equações. Como a estas tres equações se satisfaz pondo

$$X = x, Y = y, Z = z$$

segue-se que a curva proposta é aresta de reversão da superficie considerada.

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES D'ORDEM QUALQUER

I

Formação das derivadas d'ordem qualquer

96. — Por meio das regras dadas no capitulo II pode-se formar successivamente as derivadas y' , y'' , etc. da funcção $y = f(x)$. Ha porém questões em que é necessario conhecer a lei d'estas derivadas, isto é, a funcção de x e n que representa a derivada $y^{(n)}$; vamos pois agora achar esta funcção, considerando os mesmos casos que nos n.ºs 59 e 60, por ordem diversa.

97. — *Derivadas d'algumas funcções simples.*—1) Formando as derivadas successivas da funcção $y = x^k$, acha-se

$$y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}, \text{ etc.};$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = k(k-1) \dots (k-n+1)x^{k-n},$$

2) A funcção $y = e^x$ dá

$$y' = e^x, y'' = e^x, y''' = e^x, \dots;$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = e^x.$$

NOTA. — Se fôr $y = e^{kx}$, e k constante, teremos do mesmo modo $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Esta formula, dando a n valores negativos ou fraccionarios, define as derivadas d'ordem negativa ou fraccionaria da funcção e^{kx} . Esta noção estende-se depois a todas as funcções que forem susceptíveis de serem desenvolvidas em série convergente da fórma:

$$y = \Sigma A e^{kx},$$

onde A e k são constantes, pondo

$$y^{(n)} = \Sigma A k^n e^{kx},$$

se todavia esta série fôr tambem convergente. A respeito d'este assumpto, que aqui só podemos indicar, podem-se consultar varias memorias notaveis de Liouville (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*).

3) A funcção $y = \log x$ dá $y' = x^{-1}$, e portanto, derivando $n - 1$ vezes y' ,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n},$$

representando por $(n-1)!$ o producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$.

4) A funcção $y = \sin x$ dá

$$y' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \quad y'' = -\sin x = \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right), \text{ etc.};$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

5) A funcção $y = \cos x$ dá do mesmo modo

$$y^{(n)} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

98. — *Theoremas geraes.* — **I** — Seja

$$y = u_1 + u_2 + \dots + u_m,$$

onde u_1, u_2, \dots , etc. representam funcções de x . Teremos evidentemente

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \dots + u_m^{(n)}.$$

NOTA. — A derivada de ordem n da somma

$$y = \sum_{k=0}^m A_k x^k$$

é

$$y^{(n)} = \sum_{k=n}^m A_k k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}.$$

Fazendo $x = 0$ e chamando $y_0^{(n)}$ o valor correspondente da derivada $y^{(n)}$, vem o resultado

$$y_0^{(n)} = A_n n!.$$

II — Procuremos a derivada de ordem n do producto $y = u_1 u_2$ de duas funcções dadas.

Temos

$$y' = u'_1 u_2 + u_1 u'_2$$

$$y'' = u''_1 u_2 + 2u'_1 u'_2 + u_1 u''_2$$

$$y''' = u'''_1 u_2 + 3u''_1 u'_2 + 3u'_1 u''_2 + u_1 u'''_2$$

.....

Observa-se n'estas igualdades que os coefficients são os mesmos que os coefficients dos desenvolvimentos das potencias 1.^a, 2.^a, 3.^a do binomio $u_1 + u_2$, e que os indices superiores são os mesmos que os expoentes de u_1 e u_2 nos mesmos desenvolvimentos. Somos pois levados, por indução, a escrever a formula :

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} u_2 + \dots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i-1)} \\ + \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \dots + u_1 u_2^{(n)}$$

ou

$$(1) \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)},$$

representando por $\binom{n}{i}$ o numero de combinações de n letras tomadas a i a i .

Para demonstrar esta formula basta provar que, se é verdadeira para o indice n , tambem é verdadeira para o indice $n+1$. Para isso derivemos outra vez, o que dá

$$y^{(n+1)} = u_1^{(n+1)} u_2 + \dots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} \\ + \binom{n}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} + \dots + u_1 u_2^{(n+1)}$$

ou

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)},$$

por ser

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

A formula (1), devida a Leibnitz, pôde ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2)^n,$$

que significa que se deve desenvolver $(u_1 + u_2)^n$ pela formula do binomio e substituir no resultado os expoentes por indices de derivação.

Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y = u_1 u_2 \dots u_m$$

temos *symbolicamente*

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2 + \dots + u_m)^n = \sum \frac{n! u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \dots u_m^{(i_m)}}{i_1! i_2! \dots i_m!}$$

em que o sommatório se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = n.$$

Deduz-se esta formula da anterior por um processo análogo ao que se emprega em Algebra para passar da lei do desenvolvimento do binomio para a lei do desenvolvimento dos polynomios.

■■■ — Consideremos agora a funcção $y = \frac{u_1}{u_2}$. Temos

$$u_1 = y u_2$$

$$u_1' = y' u_2 + y u_2'$$

.....

$$u_1^{(n)} = y^{(n)} u_2 + \dots + \binom{n}{i} y^{(n-i)} u_2^{(i)} + \dots + y u_2^{(n)}.$$

Por meio d'estas igualdades obtem-se successivamente as derivadas y' , y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$ da fracção proposta; ou directamente a derivada $y^{(n)}$ expressa por um determinante.

■V — Seja y uma funcção de x determinada pelas equações:

$$(A) \quad y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x .

Temos

$$y' = \frac{dy}{du} u'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{du^2} u'^2 + \frac{dy}{du} u''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} u' u'' + \frac{dy}{du} u'''$$

.....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n de y é uma somma da fórmula:

$$y^{(n)} = \Sigma A \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda,$$

$A, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, i$ sendo numeros inteiros que vamos determinar. Para isso, applicuemos a formula precedente á funcção:

$$y = u^n, \quad u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n representam constantes arbitrarías; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n (n-1) \dots (n-i+1) u^{n-i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda,$$

e, pondo $x = 0$ e notando que é (n.º 98—1) $u_0^{(k)} = k! a_k$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma A n (n-1) \dots (n-i+1) (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda a_0^{n-i} a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\lambda,$$

Por outra parte, temos

$$y = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)^n \\ = \Sigma \frac{n! a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n} x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n}}{h_0! h_1! h_2! \dots h_n!}$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de h_0, h_1, \dots que satisfazem a equação

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = n,$$

devendo substituir-se $h_0!, h_1!, h_2!, \dots$ pela unidade quando é $h_0 = 0, h_1 = 0, h_2 = 0, \dots$

Derivando esta igualdade e pondo $x = 0$, vem (n.º 98—1)

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{(n!)^2 a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n}}{h_0! h_1! h_2! \dots h_n!},$$

onde o sommatorio se refere agora a todos os valores inteiros positivos de $h_0, h_1, h_2, \text{ etc.}$ que satisfazem às equações

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = n, h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n = n.$$

Os dous valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de achar, devem ser identicos, quaesquer que sejam os valores de $a_0, a_1, a_2, \text{ etc.}$; portanto vem

$$\alpha = h_1, \beta = h_2, \dots, \lambda = h_n, h_0 = n - i = n - (\alpha + \beta + \dots + \lambda),$$

$$A = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}.$$

Temos pois a formula (1)

$$(3) \quad y^{(n)} = \Sigma \frac{n! \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores de $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ que satisfazem à equação:

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda.$$

Deve observar-se que na formula (3) deve substituir-se nos denominadores os factores que forem nullos pela unidade, como se faz na lei do desenvolvimento dos polynomios d'onde a formula é tirada.

NOTA — A respeito dos coefficients numericos

$$A = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}$$

faremos algumas observações (2).

(1) Veja-se o nosso artigo *Sur les dérivées d'ordre quelconque* publicado no tomo XVIII do *Giornale di Matematiche* de Napoles, d'onde é tirada a demonstração precedente da formula (3)

(2) Veja-se o nosso artigo—*Ueber einen Satz der Zahlentheorie* publicado nos *Archiv der Mathematik und Physik* de Leipzig (1885)

1.º — *Estes coefficients são numeros inteiros.*

Esta propriedade resulta da demonstração precedente, e constitue um theorema interessante de Arithmetica a que se pôde tambem chegar por considerações relativas á theoria das com binações (1).

2.º — Sendo $y = u^k$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{dy}{du} = ku^{k-1}, \frac{d^2y}{du^2} = k(k-1)u^{k-2}, \dots, \frac{d^ky}{du^k} = k!,$$

$$\frac{d^{k+1}y}{du^{k+1}} = 0, \dots, u' = u'' = \dots = e^x;$$

e, pondo $x = 0$,

$$\left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0, \dots, \left(\frac{d^ky}{du^k}\right)_0 = k!, \dots$$

$$u'_0 = u''_0 = \dots = 1.$$

Substituindo em (3), vem a formula seguinte, de que adiante faremos uso:

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{d^k(e^x - 1)^k}{dx^k}\right)_0 = \Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficients da formula (3) que correspondem ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = k.$$

3.º — Sendo $y = e^u$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{d^iy}{du^i} = e^u, u' = u'' = \dots = e^x,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^iy}{du^i}\right)_0 = 1, u' = u'' = \dots = 1.$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*—tomo XCIII.

Logo, applicando (3), virá a formula

$$\left(\frac{d^n (e^{e^x} - 1)}{dx^n} \right)_0 = \Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficients da formula (3).

4.º—O quociente $\frac{\Sigma A}{n!}$ tende para o limite zero quando n augmenta indefinidamente (1).

V — Seja

$$y = f(u_1, u_2, \dots, u_l), u_1 = \varphi_1(x), u_2 = \varphi_2(x), \dots, u_l = \varphi_l(x),$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x .

Para resolver esta questão seguiremos o mesmo caminho que no nosso artigo publicado no *Giornale di Matematiche* (tomo xviii), que passamos a expôr.

Temos

$$y' = \frac{\partial f}{\partial u_1} u'_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} u'_2 + \dots$$

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} (u'_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} u'_1 u'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_1} u''_1 + \dots$$

.....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n é uma somma da fórma:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} y^{(n)} &= \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \dots} (u'_1)^a (u''_1)^b \dots (u_1^{(n)})^l \\ &\times (u'_2)^{a'} (u''_2)^{b'} \dots (u_2^{(n)})^{l'} \times \dots, \end{aligned} \right.$$

onde

$$m = a + b + c + \dots,$$

(1) Para a demonstração d'esta propriedade veja-se: Oliveira Ramos e C. J. de Faria—*Sobre os coefficients etc.* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*—tomo vii).

e onde $A, a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ são números inteiros que vamos determinar. Para isso appliquemos esta formula ás funcções:

$$y = u_1^n u_2^n \dots u_i^n$$

$$u_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$u_2 = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

.....

onde $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ representam constantes arbitrárias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1) \dots (n-a+1) \times n(n-1) \dots (n-b+1) \times \dots$$

$$\times u_1^{n-a} (u_1')^\alpha (u_1'')^\beta \dots \times u_2^{n-b} (u_2')^{\alpha'} \dots,$$

e, pondo $x = 0$,

$$y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} An(n-1) \dots (n-a+1) \times n(n-1) \dots (n-b+1) \times \dots \\ \times (2!)^{\beta + \beta' + \dots} (3!)^{\gamma + \gamma' + \dots} \dots (n!)^{\lambda + \lambda' + \dots} \\ \times a_0^{n-a} a_1^\alpha a_2^\beta \dots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \dots \times \dots \end{array} \right\}.$$

Por outra parte, applicando a formula de Leibnitz ao producto considerado, vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{h_1! h_2! \dots h_n!} (u_1^n)^{(h_1)} (u_2^n)^{(h_2)} \dots,$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros e positivos de h_1, h_2, \dots que satisfazem á equação

$$h_1 + h_2 + \dots + h_i = n;$$

ou, substituindo as derivadas $(u_1^n)^{(h_1)}, (u_2^n)^{(h_2)}, \dots$ pelos seus valores, que se obtém pela formula (3), e pondo $x = 0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{n! n(n-1) \dots (n-a+1) n(n-1) \dots (n-b+1) \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! \alpha'! \beta'! \dots \lambda'! \dots}$$

$$\times a_0^{n-a} a_1^\alpha a_2^\beta \dots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \dots \times \dots,$$

onde o sommatorio se refere aos valores inteiros e positivos de $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ que satisfazem às equações

$$\alpha + 2\beta + \dots + h_1 \lambda = h_1,$$

$$\alpha' + 2\beta' + \dots + h_2 \lambda' = h_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha^{(\alpha-1)} + 2\beta^{(\alpha-1)} + \dots + h_i \lambda^{(\alpha-1)} = h_i,$$

isto é, à equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \dots + n\lambda' + \dots$$

$$+ \alpha^{(\alpha-1)} + 2\beta^{(\alpha-1)} + \dots + n\lambda^{(\alpha-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \dots + \lambda, \quad b = \alpha' + \beta' + \dots + \lambda', \text{ etc.}$$

Os dous valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de obter, devem ser identicos qualquer que seja o valor das quantidades $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$; portanto os inteiros $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ devem ter os mesmos valores nas duas expressões de $y_0^{(n)}$, e deve ser

$$A = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! \times \alpha'! \beta'! \dots \lambda'! \times \dots \times (2!)^{\beta+\beta'+\dots} \dots (n!)^{\lambda+\lambda'+\dots}}.$$

Estão pois determinadas as constantes que entram na formula (b), e temos a formula seguinte, que resolve a questão proposta:

$$(4) \quad y^{(n)} = \Sigma \left\{ \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! \times \alpha'! \beta'! \dots \lambda'! \times \dots} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial u_1^\alpha \partial u_2^\beta \dots} \right.$$

$$\left. \times (u'_1)^\alpha \left(\frac{u''_1}{2!}\right)^\beta \dots \left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^\lambda \times (u'_2)^{\alpha'} \dots \left(\frac{u_2^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'} \times \dots \right.$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \dots + n\lambda' \\ + \alpha^{(t-1)} + 2\beta^{(t-1)} + \dots + n\lambda^{(t-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \dots + \lambda, \quad b = \alpha' + \dots + \lambda', \text{ etc.},$$

e

$$m = a + b + c + \dots$$

VI — Consideremos agora a função implicita y definida pela equação

$$f(x, y) = 0.$$

Temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

.....

por meio das quaes se obtem successivamente y' , y'' , etc.

A lei d'estas equações obtém-se applicando á função $f(x, y)$ a formula (4), pondo $u_2 = x$, $u_1 = y$ e considerando y como função de x , o que dá

$$(5) \quad \Sigma \frac{n!}{\alpha'! \alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{m-\alpha'}} (y')^\alpha (y'')^\beta \dots (y^{(n)})^\lambda = 0,$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha' + \alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$m = \alpha' + \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

A formula que precede dá a derivada de ordem n em funcção das anteriores. A formula que dá directamente $y^{(n)}$ é muito complicada e porisso não a exporemos aqui (1).

II

Aplicações

99.— *Derivada da funcção arc tang x .*— **II**— A funcção $y = \text{arc tang } x$ dá $y' = (1 + x^2)^{-1}$, d'onde se deduz (n.º 98 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(n-1)! i! (2x)^\alpha (1+x^2)^{-1-i}}{\alpha! \beta!}$$

onde $\alpha + 2\beta = n - 1$, $i = \alpha + \beta$; e portanto

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \Sigma (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta} \\ + (2x)^{n-1-2\beta} (1+x^2)^{\beta-n},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de β desde 0 até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

A' expressão da derivada de ordem n da funcção considerada pôde dar-se uma fórma differente da precedente. Pondo $x = \cot \varphi$, o que dá $\frac{d\varphi}{dx} = -\text{sen}^2 \varphi$, vem

$$y' = \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} = \text{sen}^2 \varphi, y'' = -\text{sen } 2\varphi \text{ sen}^2 \varphi, \text{ etc.}$$

(1) Vid. Duarte Leite—*Sobre as derivadas etc.* (Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas—tomo IV).

Em geral

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \operatorname{sen}^n \varphi \operatorname{sen} n \varphi.$$

Demonstra-se facilmente esta formula mostrando que, se é verdadeira para a derivada da ordem n , tambem é verdadeira para a derivada da ordem $n+1$.

II—A comparação das duas expressões de $y^{(n)}$, que vimos de achar, dá a igualdade importante:

$$\operatorname{sen} n \varphi = \operatorname{sen} \varphi \sum (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta} (2 \cos \varphi)^{n-1-2\beta}.$$

III—Se quizermos o valor de $y_0^{(n)}$ poremos $x=0$ na formula que dá $y^{(n)}$.

1.º—Se n é *impar*, todos os termos da formula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n-1-2\beta=0$; e teremos portanto

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!.$$

2.º—Se n é *par*, o expoente $n-1-2\beta$ não póde ser nullo, e teremos $y_0^{(n)}=0$.

100.—*Numeros de Bernoulli.*—**I**—Consideremos a funcção

$$y = (1 + e^x)^{-1},$$

e procuremos o valor que toma $y^{(n)}$ quando é $x=0$.

Pondo

$$\varphi(x) = y - \frac{1}{2} = \frac{1 - e^x}{2(1 + e^x)},$$

vem

$$\varphi(-x) = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)},$$

e portanto

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

e

$$\varphi'(x) = \varphi'(-x), \varphi''(x) = -\varphi''(-x), \text{ etc.}$$

Estas igualdades mostram que as derivadas de ordem par de $\varphi(x)$ se devem annullar quando se faz $x = 0$, porque, se assim não fosse, teriam dous valores differentes para $x = 0$, o que não pôde ter logar.

As derivadas de y são ignaes ás derivadas de $\varphi(x)$, e portanto temos $y_0^{(n)} = 0$, quando n é par.

As derivades d'ordem impar acham-se pondo $x = 0$ na formula (n.º 98 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n! i! e^{ix} (1 + e^x)^{-i-1}}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n, \quad i = \alpha + \beta + \dots + \lambda;$$

o que dá

$$y_0^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n! i!}{2^{i+1} \alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \dots (n!)^\lambda}.$$

Os numeros de Bernoulli B_n definem-se pela igualdade

$$(a) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} y_0^{(n)};$$

de modo que são nulos quando n é par, e quando n é impar podem ser calculados por meio da formula (1):

$$(6) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}-1} \Sigma (-1)^i \frac{i!}{2^{i+1} \alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda}$$

(1) Veja-se o nosso artigo *Sur les nombres de Bernoulli* publicado no *American Journal of Mathematics* de Baltimore — tomo VII.

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

III — De ser

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda}$$

um numero inteiro (n.º 98 — IV) e de ser $n + 1$ par resulta que os *numeros de Bernoulli não podem conter em denominador factores primos diferentes de 2 e dos factores primos de $2^n + 1 - 1$, e que 2 não pôde entrar em denominador com expoente superior a n .*

III — Da formula (6) vamos tirar outra mais propria para o calculo dos numeros de Bernoulli.

Com effeito, aquella formula dá

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n + 1 - 1} \sum_{i=1}^n \left[(-1)^i \frac{i!}{2^{i+1}} \times \sum' \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda} \right],$$

onde o sommatorio \sum' se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

que dão a i o mesmo valor; e portanto (n.º 98 — IV — *nota*)

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^n + 1 - 1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^i}{dx^n} \right)_0,$$

ou substituindo a derivada que entra no segundo membro pelo valor que se obtém desenvolvendo o binómio $(e^x - 1)^i$ e derivando n vezes o resultado,

$$(7) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left[i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2} (i-2)^n - \binom{i}{3} (i-3)^n + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^n \right].$$

Ou por meio d'esta formula, ou por meio da formula (6) obtém-se

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = \frac{5}{66}, \dots$$

XV. — Derivando n vezes a igualdade

$$y(e^x + 1) = 1$$

vem

$$y^{(n)}(e^x + 1) + e^x \left[ny^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1} y' + y \right] = 0.$$

Pondo $x = 0$ e attendendo á formula (a), resulta

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2^{n+1}-1}{2} B_n + (-1)^{\frac{n}{2}} n \frac{2^n-1}{n} B_{n-1} \\ + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2} \frac{2^n-1-1}{n-1} B_{n-2} \\ + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{3} \frac{2^n-2-1}{n-2} B_{n-3} + \dots \\ + (-1) \binom{n}{n-1} \frac{2^2-1}{2} B_1 + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

que, pondo $n = 2p - 1$, dá

$$2 \frac{2^{2p} - 1}{p} B_{2p-1} - \binom{2p-1}{2} \frac{2^{2(p-1)} - 1}{p-1} B_{2p-3} + \dots \\ \pm \binom{2p-1}{2p-2} \frac{2^2 - 1}{1} B_1 \mp 1 = 0;$$

e, pondo $n = 2p$, dá

$$2p \frac{2^{2p} - 1}{p} B_{2p-1} - \binom{2p}{3} \frac{2^{2p-2} - 1}{p-1} B_{2p-3} + \dots \\ \pm \binom{2p}{2p-1} \frac{2^2 - 1}{1} B_1 \mp 1 = 0.$$

Temos assim duas relações *lineares recorrentes* entre os números de Bernoulli, por meio de qualquer das quaes se póde calcular successivamente B_1, B_3, B_5 , etc.

▼—Os números de Bernoulli apparecem em muitas questões d'Analyse. Assim, por exemplo, os valores das derivadas da funcção

$$y = f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

correspondentes a $x = 0$ exprimem-se em funcção d'estes números.

Com effeito, derivando n vezes a igualdade

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1} = f(x) - f(2x)$$

vem (n.º 98 — II) a equação

$$x \frac{d^n \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)}{dx^{n-1}} = f^n(x) - 2^n f^n(2x)$$

que, pondo $x = 0$ e attendendo á formula (a), dá

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_{n-1}.$$

Vê-se por esta formula que as derivadas de ordem impar de y são nullas.

A formula que precede não dá os valores de y_0 e y'_0 . Para os achar, parte-se da equação

$$(e^x - 1) y = x,$$

que dá

$$(e^x - 1) y' + e^x y = 1$$

$$(e^x - 1) y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$$

e (pondo $x = 0$) $y_0 = 1$, $y'_0 = -\frac{1}{2}$.

VII—Do mesmo modo a funcção

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

dá para valor de $y_0^{(n)}$

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \frac{2^{n+1} - 1}{n + 1} B_n,$$

que é *nullo* quando n é par,

VIII—Consideremos finalmente uma questão d'Algebra em que entram os numeros de Bernoulli.

Seja

$$\begin{aligned} y &= 1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1}, \end{aligned}$$

e portanto

$$xy = (e^{nx} - 1) \frac{x}{e^x - 1}.$$

Derivando $k + 1$ vezes esta igualdade e pondo $z = \frac{x}{e^x - 1}$, vem

$$\begin{aligned} xy^{(k+1)} + (k+1)y^{(k)} &= n^{k+1} e^{nx} z + (k+1)n^k e^{nx} z' \\ &+ \left(\frac{k+1}{2}\right)n^{k-1} e^{nx} z'' + \dots + \left(\frac{k+1}{k}\right)n e^{nx} z^{(k)} \\ &+ (e^{nx} - 1) z^{(k+1)}, \end{aligned}$$

e, pondo $x = 0$,

$$\begin{aligned} y_0^{(k)} &= \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + \frac{kn^{k-1}}{2} B_1 \\ &- k(k-1)(k-2)n^{k-3} \frac{B_3}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Por outra parte, derivando k vezes y , vem

$$y^{(k)} = e^x + 2^k e^{2x} + \dots + (n-1)^k e^{(n-1)x},$$

e portanto

$$y_0^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k.$$

Temos pois a formula

$$\begin{aligned} 1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k &= \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + k \frac{n^{k-1}}{2} B_1 \\ &- k(k-1)(k-2)n^{k-3} \frac{B_3}{4} + \dots \end{aligned}$$

que dá o desenvolvimento, ordenado segundo as potencias de n , da somma das potencias de grão k dos $n - 1$ primeiros numeros inteiros.

101. — *Formula de Jacobi.* — Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y = (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}.$$

Applicando a formula (3), vem

$$y^{(n-1)} = \Sigma \frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})\dots(n-\frac{1}{2}-i+1)(-2x)^\alpha (-2)^\beta (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}-\alpha-\beta}}{\alpha! \beta! (2!)^\beta}$$

onde $\alpha + 2\beta = n - 1$, $i = \alpha + \beta$; ou

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \Sigma \frac{(-1)^{n-1-\beta} (n-1)(2n-1)\dots(2\beta+3)x^{n-1-2\beta} (1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n-1-2\beta)! \beta! 2^\beta} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.3\dots(2n-1)}{n} \Sigma (-1)^\beta \frac{n! x^{n-1-2\beta} (1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{1.3\dots(2\beta+1)(n-1-2\beta)! \beta! 2^\beta}, \end{aligned}$$

que, por ser

$$2^\beta \times 1.2.3\dots\beta \times 1.3\dots(2\beta+1) = (2\beta+1)!,$$

dá

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2n-1)}{n} \\ &\times \Sigma (-1)^\beta \frac{(n-2\beta)\dots nx^{n-1-2\beta} (1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(2\beta+1)!}, \end{aligned}$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros positivos de β desde 0 até $\frac{n-1}{2}$.

Pondo $x = \cos \omega$, vem

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= (-1)^{n-1} \frac{1.3\dots(2n-1)}{n} \\ &\times \Sigma (-1)^\beta \frac{(n-2\beta)\dots n \cos^{n-1-2\beta} \omega \operatorname{sen}^{2\beta+1} \omega}{(2\beta+1)!} \end{aligned}$$

ou, em virtude de uma formula bem conhecida de Trigonometria,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{n} \cdot \text{sen } n \text{ arc cos } x,$$

resultado devido a Jacobi.

102. — *Formula de Waring.* — Seja (1)

$$U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

uma equação dada e x_1, x_2, \dots, x_m as m raízes d'esta equação.

Por ser

$$\log U = \log A_0 + \Sigma \log (x - x_\omega),$$

temos, derivando n vezes,

$$\Sigma \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n \log U}{dx^n}.$$

Substituindo no segundo membro d'esta igualdade U pelo seu valor, applicando a formula (3) e attendendo ás igualdades $U^{(m+1)} = 0$, $U^{(m+2)} = 0$, etc., vem

$$\Sigma \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = (-1)^n n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! U^{-i} U'^\alpha U''^\beta \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (m!)^\lambda}$$

e portanto, pondo $x = 0$,

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{1}{x_\omega^n} &= n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! U_0^{-i} U_0'^\alpha U_0''^\beta \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (m!)^\lambda} \\ &= n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)! A_m^{-i} A_{m-1}^\alpha \dots A_0^\lambda}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \end{aligned}$$

(1) Esta demonstração é tirada do artigo intitulado — *Demonstration de la formule de Waring*, que publicamos nos *Nouvelles Annales des mathématiques* (3.^a série, tomo VII, pag. 382).

Applicando agora esta formula á equação

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0,$$

cujas raizes são reciprocas das raizes da equação primeiramente considerada, temos a *formula de Waring*

$$\sum_{\omega=1}^p x_{\omega}^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! A_0^{-i} A_1^{\alpha} A_2^{\beta} \dots A_m^{\lambda}}{\alpha! \beta! \dots \lambda!},$$

onde $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ são as soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + m\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Esta formula dá a somma das potencias de gráo n das raizes da equação proposta.

103. — *Derivadas das funcções compostas de funcções lineares de x .* — Seja na formula (4)

$$u_1 = A_1 + B_1 x, u_2 = A_2 + B_2 x, \dots, u_i = A_i + B_i x;$$

teremos

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!}{\alpha! \alpha'! \dots \alpha^{(l-1)}!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^{\alpha} \partial u_2^{\alpha'} \dots} B_1^{\alpha} B_2^{\alpha'} \dots,$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots + \alpha^{(l-1)} = n.$$

A formula que precede póde ser escripta *symbolicamente* da maneira seguinte:

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} B_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_i} B_i \right)^n,$$

devendo depois do desenvolvimento substituir-se $(\partial f)^n$ por $\partial^n f$.

III

Differenciaes d'ordem superior

104. — A diferencial dy de $y = f(x)$, que está ligada com a derivada de y pela equação

$$dy = y' dx,$$

é uma função de x , cuja diferencial $d(dy)$, que se representa por d^2y , se obtém differenciando o producto $y'dx$, o que dá

$$d^2y = y'' dx^2,$$

suppondo dx constante qualquer que seja x , o que é sempre possível, visto que x representa a variavel independente, e que portanto o seu augmento dx é arbitrario.

Do mesmo modo se acha

$$d^3y = y''' dx^3, \quad d^4y = y^{(4)} dx^4, \text{ etc.}$$

As differenciaes dy , d^2y , d^3y , etc. têm respectivamente os nomes de *differenciaes de primeira ordem*, de *segunda ordem*, etc. de y .

Seja h um augmento dado a x e $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ o augmento correspondente de y . Teremos (n.º 62)

$$\Delta y = h f'(x + \theta_1 h)$$

onde θ_1 representa uma quantidade comprehendida entre 0 e 1.

Chamando $\Delta^2 y$ o augmento $\Delta(\Delta y)$ da função Δy , correspondente ao augmento h de x , vem do mesmo modo

$$\Delta^2 y = h^2 f''(x + \theta_1 h + \theta_2 h),$$

Continuando do mesmo modo obtem-se a formula geral

$$\Delta^n y = h^n f^n (x + \theta_1 h + \theta_2 h + \dots + \theta_n h)$$

ou, pondo $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \theta$,

$$\Delta^n y = h^n f^n (x + \theta h),$$

θ representando uma quantidade comprehendida entre 0 e n .

A Δy , $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc. dá-se respectivamente os nomes de *diferença primeira*, *diferença segunda*, etc. da funcção $f(x)$.

Se a derivada $f^n(x)$ é continua, temos

$$\Delta^n y = h^n [f^n(x) + \varepsilon] = d^n y + \varepsilon h^n,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h ; logo a differencial de ordem n é a parte proporcional a h^n da differença de ordem n da funcção y , e é a parte principal d'esta differença quando h é sufficientemente pequeno.

105. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes $z = f(x, y)$, cuja *differencial total* é definida pela igualdade (n.º 67)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Esta differencial dz é uma funcção de x e y que, sendo differenciada, dá a *differencial total de segunda ordem*:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

ou *symbolicamente*

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2.$$

Continuando do mesmo modo acha-se, por inducção, a formula symbolica

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^n,$$

que se demonstra por meio de um calculo análogo ao do n.º 98 — II.

Do mesmo modo, no caso da funcção de muitas variaveis

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_l)$$

se acha

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_l} dx_l \right)^n.$$

IV

Relações entre as funcções e suas derivadas

106. — THEOREMA 1.º — *Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^m(x)$ finitas em todos os pontos do intervalo de x_0 a x , teremos a relação:*

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0)F'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!} F''(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} \\ &= \frac{\frac{(x - x_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n}{\frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(x_0) + R'_m} \end{aligned}$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n [x_0 + \theta(x - x_0)]$$

$$R'_m = \frac{(x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)!} F^m [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

(θ representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade ⁽¹⁾), se o denominador do segundo membro se conservar diferente de zero quando θ varia entre 0 e 1.

Para demonstrar este theorema applicuemos à função

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0) \\ &- f(z) - (x - z) f'(z) - \dots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z) \\ &- \left[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0) \right. \\ &- F(z) - (x - z) F'(z) - \dots - \left. \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(z) \right] \\ &\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} \end{aligned}$$

a formula conhecida (n.º 62—3.º)

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi' [x_0 + \theta (x - x_0)];$$

o que dá, suppondo $n \geq l + 1$ e $m \geq k + 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= - \frac{(x - x_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) \\ &- \left[- \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(x_0) \right] \end{aligned}$$

(1) Este theorema é extrahido do nosso artigo *Sur une formule d'Analyse* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* de Paris (tomo v da 3.ª série).

$$\begin{aligned} & \times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^{(l)}(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^{(k)}(x_0)} \\ & + (x - x_0) \left\{ - \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)] \right. \\ & \left. + \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)!} f^m [x_0 + \theta (x - x_0)] \frac{f(x) - \dots - \frac{(x - x_0)^l}{l!} f^{(l)}(x_0)}{F(x) - \dots - \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^{(k)}(x_0)} \right\}. \end{aligned}$$

D'esta formula tira-se o theorema enunciado.

Deve-se observar que o theorema que vimos de demonstrar ainda tem logar quando é $l = 0$ ou $k = 0$, convenciona-ndo substituir n'estes casos $\frac{f^{(0)}(x)}{0}$ por $f(x)$ e $\frac{F^{(0)}(x_0)}{0}$ por $F(x_0)$.

THEOREMA 2.º—*Se a funcção $f(x)$ admittir derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$ finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x , temos*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots \\ & + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n \end{aligned}$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)! m} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

θ representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade.

A formula precedente, conhecida pelo nome de *formula de Taylor*, do nome do geometra que a descobriu ⁽¹⁾, póde ser deduzida do theorema anterior pondo

(1) Taylor não deu a expressão de R_n . Foi Lagrange o primeiro geometra que deu uma expressão d'este resto.

$$F(x) = (x - x_0)^m, k = m - 1, l = n - 1,$$

e por consequencia,

$$F(x_0) = 0, F'(x_0) = 0, \dots F^{m-1}(x_0) = 0,$$

$$F^m(x_0) = m!, F^m[x_0 + \theta(x - x_0)] = m!.$$

A respeito d'esta formula faremos as seguintes observações:

1.º—Pondo $x - x_0 = h$, a formula de Taylor pôde ser escripta debaixo da fórma seguinte:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n \end{aligned}$$

onde

$$R_n = \frac{h^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)! m} f^n(x_0 + \theta h).$$

2.º—A R_n chama-se *resto da série de Taylor*. Da expressão d'este resto que vimos de achar, e que é devida a Schlömilch (1), deduz-se, pondo $m = n$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n[x_0 + \theta(x - x_0)] = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + \theta h),$$

devida a *Lagrange*; e, pondo $m = 1$, a formula

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n[x_0 + \theta(x - x_0)] \\ &= \frac{h^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x_0 + \theta h), \end{aligned}$$

devida a *Cauchy*.

(1) *Journal de Liouville*, 2.ª série, tomo III.

3.º — Se R_n tender para zero á medida que n tende para o infinito, a funcção $f(x)$ póde ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de $x - x_0$ por meio da formula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^a}{a!} f^a(x_0) + \dots$$

4.º — Se na formula de Taylor pozermos $x_0 = 0$, vem a formula

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)! m} f^n(\theta x),$$

conhecida pelo nome de *formula de Maclaurin*.

5.º — *Se tiver logar o desenvolvimento em série*

$$f(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + \dots \\ + A_a (x - x_0)^a + \dots$$

e as funcções $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^a(x)$ forem continuas no ponto x_0 , será

$$A_a = \frac{f^a(x_0)}{a!}.$$

Para demonstrar este theorema, notemos primeiro que, pondo $x = x_0$, vem $A_0 = f(x_0)$.

Notemos em segundo logar que, pondo $x - x_0 = h$, temos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A_1 h + A_2 h^2 + \dots,$$

d'onde se deduz

$$f'(x_0 + \theta h) = A_1 + A_2 h + \dots,$$

e portanto

$$A_1 = f'(x_0).$$

Para completar a demonstração do theorema, basta notar que, se é verdadeiro para o coefficiente A_n , ainda é verdadeiro para o coefficiente A_{n+1} . Com effeito, temos

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = & f(x_0) + h f'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) \\ & + A_{n+1} h^{n+1} + A_{n+2} h^{n+2} + \dots, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(x_0 + \theta h) = A_{n+1} + A_{n+2} h + \dots$$

d'onde se tira, fazendo tender h para zero,

$$A_{n+1} = \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}.$$

6.º — Do theorema 4.º pode-se deduzir a formula de Taylor com uma expressão do resto devida ao sr. Peano ⁽¹⁾, professor na Universidade de Turin, suppondo sómente que a funcção $f(x)$ admite derivadas até á ordem $n - 2$ finitas em todos os pontos desde x_0 até $x_0 + h$, e que admite uma derivada de ordem $n - 1$ finita no ponto x_0 .

Para isso, mudemos n'este theorema n e m em $n - 2$, e ponha-se depois $x = h$, $x_0 = 0$, $l = n - 3$, $k = n - 3$. Teremos

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0) - h f'(0) - \dots - \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} f^{n-3}(0)}{F(h) - F(0) - h F'(0) - \dots - \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} F^{n-3}(0)} \\ = \frac{f^{n-2}(\theta h)}{F^{n-2}(\theta h)}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Mathesis*, tomo IX, pag. 182.

Appliquemos agora esta igualdade ás funcções

$$f(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{n-1}(x_0)$$

$$F(h) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Como é

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{n-3}(0) = 0$$

$$f^{n-2}(h) = \varphi^{n-2}(x_0 + h) - \varphi^{n-2}(x_0) - h\varphi^{n-1}(x_0)$$

$$F(0) = 0, F'(0) = 0, \dots, F^{n-3}(0) = 0, F^{n-2}(h) = h,$$

temos

$$f(h) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{\varphi^{n-2}(x_0 + \theta h) - \varphi^{n-2}(x_0)}{\theta h} - \varphi^{n-1}(x_0) \right]$$

Mas, em virtude da definição de derivada, temos

$$\frac{\varphi^{n-2}(x_0 + \theta h) - \varphi^{n-2}(x_0)}{\theta h} = \varphi^{n-1}(x_0) + \varepsilon,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena ao mesmo tempo que h .

Logo é

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{n-1}(x_0) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \varepsilon,$$

e portanto, mudando φ em f ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \varepsilon,$$

ε representando uma quantidade que tende para 0 com h .

107. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes :

$$z = f(x, y),$$

para estender a estas funcções a formula de Taylor.

Pondo

$$x_0 + t(x - x_0) = u, \quad y_0 + t(y - y_0) = v$$

$$\varphi(t) = f(u, v) = f[x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)]$$

e applicando a formula de Maclaurin a esta funcção de t , vem

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{t^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)! m} \varphi^{(n)}(\theta t).$$

Para calcular os coefficients d'esta formula empregam-se as formulas

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y - y_0)$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(y - y_0)^2$$

.....

que, pondo $t = 0$, dão

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0)$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0 \partial y_0}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2}(y - y_0)^2$$

.....

Para achar o termo geral da expressão de $\varphi(t)$ pode-se recorrer á formula symbolica demonstrada no n.º 103, que dá

$$\varphi^i(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y - y_0) \right]^i,$$

e portanto

$$\varphi^i(0) = \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \right]^i;$$

e para achar o resto R_n pode-se recorrer á mesma formula, que dá

$$\varphi^n(\theta t) = \left[\frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y - y_0) \right]^n$$

onde é

$$u_1 = x_0 + \theta(x - x_0)t, \quad v_1 = y_0 + \theta(y - y_0)t.$$

Pondo agora nas formulas precedentes $t = 1$ vem a formula

$$\begin{aligned} z = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \right]^i \\ + \frac{(1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)! m!} \left[\frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y - y_0) \right]^n \end{aligned}$$

que tem os mesmos usos que a formula de Taylor.

Deve observar-se que, por ser baseada a doutrina precedente nos theoremas dos n.ºs 66 e 106 deve impôr-se á funcção $f(u, v)$ a condição de admittir derivadas parciaes relativas a u e v , até á ordem n , continuas nos intervallos de $u = x_0$ a $u = x$ e de $v = y_0$ a $v = y$.

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Desenvolvimento em série do binomio e de algumas funções algebraicas

108. — Consideremos em primeiro logar o binomio

$$y = (1 + x)^k,$$

onde k representa uma quantidade real qualquer.

Temos

$$y' = k (1 + x)^{k-1}$$

$$y'' = k (k-1) (1 + x)^{k-2}$$

.....

$$y^{(n)} = k (k-1) \dots (k-n+1) (1 + x)^{k-n},$$

e portanto

$$y_0 = 1, y'_0 = k, \dots, y_0^{(n-1)} = k (k-1) \dots (k-n+2).$$

Logo applicando a formula de Maclaurin com a expressão do resto de Cauchy, virá

$$\begin{aligned}
 (1+x)^k &= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots \\
 &+ \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n \\
 R_n &= \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} x^n (1-\theta)^{n-1} (1+\theta x)^{k-n} \\
 &= \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} (1+\theta x)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

1) Supponhamos primeiro que o valor absoluto de x é inferior á unidade.

Por ser a razão dos dous termos consecutivos de ordem $n-1$ e $n-2$ da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

igual a $\left(\frac{k}{n-1} - 1\right)x$, esta razão tende para o limite $-x$, cujo valor absoluto é inferior á unidade, quando n tende para o infinito; e portanto a série é (n.º 19—III) convergente. Logo o termo geral

$$\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

tende para 0, quando n tende para o infinito. Como, além d'isso, o factor $(1+\theta x)^{k-1}$ é finito e o factor $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é inferior á unidade, o resto R_n tende para 0, e a série

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-a+1)}{a!} x^a + \dots$$

converge para o limite $(1+x)^k$.

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, a série precedente é divergente, visto que a razão de dous termos consecutivos:

$$\frac{k - a + 1}{a} x = \left(\frac{k + 1}{a} - 1 \right) x$$

tende para um limite — x , cujo valor absoluto é superior à unidade, quando n tende para o infinito (n.º 19 — III).

109. — Do desenvolvimento em série do binómio, que vimos de obter, pode-se tirar o desenvolvimento em série de muitas outras funcções.

Assim, suppondo $f(x)$ uma funcção racional de x , da igualdade (n.º 39)

$$f(x) = \sum \frac{A}{(x-a)^k} = \sum (-1)^k \frac{A}{a^k} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-k}$$

tira-se o desenvolvimento em série

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{a} + A_2 \frac{x^2}{a^2} + \dots$$

onde é

$$A_0 = \sum (-1)^k \frac{A}{a^k}, \dots, A_n = \sum (-1)^k \binom{k}{n} \frac{A}{a^k}, \dots,$$

quando x é uma quantidade real cujo valor absoluto é inferior ao menor dos valores absolutos das quantidades designadas por a .

110. — Desenvolvamos agora a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

em série ordenada segundo as potencias de u .

Pondo esta funcção debaixo da fôrma

$$\begin{aligned} y &= (u - u_1)^{-\frac{1}{2}} (u - u_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= - (u_1 u_2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde u_1 e u_2 representam as raizes da equação

$$u^2 - 2ux + 1 = 0,$$

vê-se que um dos casos em que ella é susceptível de ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de u , é quando u_1 e u_2 são reaes e o valor absoluto de u é inferior ao de u_1 e u_2 .

Em todos os casos em que y é susceptível de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de u , o desenvolvimento é da forma

$$y = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \dots + X_k u^k + \dots$$

onde X_0, X_1 , etc. representam funcções de x que vamos determinar.

Por ser (n.º 98 — IV)

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \sum \frac{k!(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-i+1)(-2x+2u)^\alpha 2^\beta y^{2i+1}}{\alpha! \beta! 2^\beta} \\ &= \sum (-1)^\beta \cdot \frac{k! 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1) (x-u)^\alpha y^{2i+1}}{\alpha! \beta! 2^\beta} \end{aligned}$$

onde

$$\alpha + 2\beta = k, \quad i = \alpha + \beta,$$

teremos, representando por m o maior inteiro contido em $\frac{k}{2}$,

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}{\alpha! \beta! 2^\beta} x^\alpha.$$

ou, eliminando α ,

$$X_k = \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-2\beta-1)}{(k-2\beta)! \beta! 2^\beta} x^{k-2\beta}.$$

Esta formula serve para calcular os polynomios X_k , conhecidos pelo nome de *polynomios de Legendre*, do nome do geometra celebre que primeiro os considerou. Vamos estudar algumas das suas propriedades mais elementares.

■ — Derivando k vezes a identidade —

$$(x^2 - 1)^k = \sum_{\beta=0}^k (-1)^\beta \binom{k}{\beta} x^{2k-2\beta}$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} &= \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \binom{k}{\beta} (2k-2\beta) \dots (k-2\beta+1) x^{k-2\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \binom{k}{\beta} \cdot \frac{(2k-2\beta)!}{(k-2\beta)!} x^{k-2\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \cdot \frac{k \dots (k-\beta+1) \times 1 \cdot 3 \dots (2k-2\beta-1) \times 2 \cdot 4 \dots (2k-2\beta)}{\beta! (k-2\beta)!} x^{k-2\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^m (-1)^\beta \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-2\beta-1) 2^{\beta} k!}{\beta! (k-2\beta)!} x^{k-2\beta}. \end{aligned}$$

Comparando esta igualdade com a expressão de X_k anteriormente achada deduz-se a formula notavel

$$X_k = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k}.$$

III — Derivando a função

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

relativamente a u , vem

$$y' = (x - u) (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ou

$$y' (1 - 2ux + u^2) = (x - u) y.$$

Derivando agora k vezes esta equação, temos

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} (1 - 2ux + u^2) + ky^{(k)} (-2x + 2u) + 2 \binom{k}{2} y^{(k-1)} \\ = y^{(k)} (x - u) - ky^{(k-1)} \end{aligned}$$

e portanto, pondo $u = 0$,

$$y_0^{(k+1)} - (2k+1)xy_0^{(k)} + k^2y_0^{(k-1)} = 0.$$

Esta equação, pondo $X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}$, dá

$$(k+1)X_{k+1} - (2k+1)xX_k + kX_{k-1} = 0.$$

Temos assim uma relação *linear recorrente* entre tres polynomios consecutivos de Legendre, por meio da qual se póde formar successivamente estes polynomios a partir do terceiro.

III — Como a equação $(x^2 - 1)^k = 0$ tem k raizes iguaes a $+1$ e k raizes iguaes a -1 , a equação $\frac{d(x^2 - 1)^k}{dx} = 0$ terá $k - 1$ raizes iguaes a $+1$, $k - 1$ raizes iguaes a -1 , e (em virtude do theorema de Rolle) uma raiz real comprehendida entre $+1$ e -1 .

Pela mesma razão a equação

$$\frac{d^2(x^2 - 1)^k}{dx^2} = 0$$

terá $k - 2$ raizes iguaes a $+1$, $k - 2$ raizes iguaes a -1 e duas raizes desiguaes comprehendidas entre $+1$ e -1 .

Continuando o mesmo raciocinio conclue-se emfim que a equação $X_k = 0$ tem k raizes reaes e desiguaes, comprehendidas entre $+1$ e -1 .

IV — Pondo $(x^2 - 1)^k = z$, temos

$$k \log(x^2 - 1) = \log z,$$

e, derivando,

$$(x^2 - 1)z' - 2kxz = 0.$$

Derivando $k + 1$ vezes esta equação, vem

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)z^{(k+2)} + 2(k+1)xz^{(k+1)} + k(k+1)z^{(k)} \\ - 2k[xz^{(k+1)} + (k+1)z^{(k)}] = 0, \end{aligned}$$

ou, pondo $z^{(k)} = 2^k k! X_k$ e fazendo as reduções,

$$(x^2 - 1)X_k'' + 2xX_k' - k(k+1)X_k = 0.$$

Os *polynomios de Legendre* são pois soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem.

V — Da relação entre tres *polynomios de Legendre* consecutivos (II) vamos tirar o limite para que tende a razão

$$\frac{X_k}{X_{k+1}} = A_k \text{ quando } k \text{ augmenta indefinidamente, suppondo } |x| > 1.$$

Pondo primeiro n'esta relação $k = h + h_0$ e dividindo por $(h + h_0) X_{h+h_0+1}$, vem

$$1 + \frac{1}{h+h_0} - \left(2 + \frac{1}{h+h_0}\right) x^{1+h+h_0} + A_{h+h_0} \cdot A_{h+h_0-1} = 0.$$

Consideremos em seguida a equação

$$1 - 2x B_{h+h_0} + B_{h+h_0} \cdot B_{h+h_0-1} = 0$$

que determina uma série de funcções $B_0, B_1, \text{ etc.}$, dada uma d'ellas, que suppremos ser B_{h_0} e ser igual a A_{h_0} .

Chamando z_1 e z_2 as raizes da equação

$$1 - 2x z + z^2 = 0,$$

e notando que é $z_1 + z_2 = 2x$, $z_1 z_2 = 1$, podemos escrever a equação precedente debaixo da fórma

$$B_{h+h_0} B_{h+h_0-1} - B_{h+h_0} (z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0,$$

ou, multiplicando todos os termos por $z_2 - z_1$,

$$\begin{aligned} & B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_2 - B_{h+h_0} z_2^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1 z_2^2 \\ &= B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_1 - B_{h+h_0} z_1^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1^2 z_2 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{B_{h+h_0-1} - z_1}{B_{h+h_0-1} - z_2}.$$

Mudando n'esta equação successivamente h em $h-1$, $h-2$, ..., 2, 1 vem uma série de equações das quaes se deduz

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h \cdot \frac{B_{h_0} - z_1}{B_{h_0} - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h \frac{A_{h_0} - z_1}{A_{h_0} - z_2}.$$

Esta equação mostra que B_{h+h_0} tende para o limite z_2 quando h augmenta indefinidamente, se o valor absoluto de z_2 é maior do que o valor absoluto de z_1 ; e que B_{h+h_0} tende para o limite z_1 se o valor absoluto de z_2 é menor do que o de z_1 .

Por outra parte, as igualdades

$$A_{h_0+1} = \frac{1 + \frac{1}{h_0+1}}{\left(2 + \frac{1}{h_0+1}\right)x - A_{h_0}} = \frac{1 + \frac{1}{h_0+1}}{\left(2 + \frac{1}{h_0+1}\right)x - B_{h_0}}$$

$$A_{h_0+2} = \frac{1 + \frac{1}{h_0+2}}{\left(2 + \frac{1}{h_0+2}\right)x - A_{h_0+1}}$$

.....

e as igualdades

$$B_{h_0+1} = \frac{1}{2x - B_{h_0}}, \quad B_{h_0+2} = \frac{1}{2x - B_{h_0+1}}, \text{ etc.}$$

mostram que A_{h_0+1} , A_{h_0+2} , etc. tendem para os limites B_{h_0+1} , B_{h_0+2} , etc. quando h_0 augmenta indefinidamente.

Logo a razão A_k de dous polynômios de Legendre consecutivos tenderá para aquella das quantidades $x + \sqrt{x^2 - 1}$ e $x - \sqrt{x^2 - 1}$ que tiver menor valor absoluto, quando k augmenta indefinidamente.

111.—Terminaremos o que temos a dizer sobre as funcções algebraicas demonstrando um theorema notavel, devido ao eminente geometra allemão Eisenstein:

A série

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

onde a_0, a_1, a_2, \dots , representam fracções reduzidas á sua expressão mais simples, não pôde ser o desenvolvimento de uma funcção y , definida por uma equação algebraica com coefficients inteiros

$$(2) \quad F(x, y) = 0,$$

se augmentar indefinidamente o numero dos factores primos differentes contidos nos denominadores de a_0, a_1, a_2, \dots

A demonstração que vamos dar d'este theorema foi por nós publicada nos *Annales de l'École Normale supérieure de Paris* (3.^a série - tomo III) (1).

Notemos primeiro que, se a série (1) satisfaz á equação algebraica (2), tambem a série

$$(1') \quad y = a_m x^m + \dots + a_n x^n + \dots$$

satisfará a uma equação algebraica que resulta de mudar na precedente y em $y + a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}$. Podemos pois em logar da série (1) considerar a série (1').

Posto isto, escrevamos esta ultima equação debaixo da fórma

$$(3) \quad \Sigma A_a^{(b)} x^a y^b = 0,$$

onde $A_a^{(b)}$, a , b representam numeros inteiros, e a e b são positivos; e derivemol-a n vezes (n.º 98 — II), o que dá

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} (x^a)^{(i)} (y^b)^{(n-i)} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} a(a-1) \dots (a-i+1) x^{a-1} (y^b)^{(n-i)} = 0,$$

onde se deve substituir $\binom{n}{i} a(a-1) \dots (a-i+1)$ pela unidade quando é $a=0$.

Pondo agora $x=0$, vem

$$\Sigma A_a^{(b)} n(n-1) \dots (n-a+1) (y^b)_0^{(n-a)} = 0$$

ou (n.º 98 — II)

$$\Sigma A_a^{(b)} n(n-1) \dots (n-a+1) S \frac{(n-a)! y_0^{(\alpha)} y_0^{(\beta)} \dots y_0^{(\lambda)}}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} = 0,$$

(1) No nosso artigo — *Ueber den Eisenstein'schen Satz*, impresso nos *Archiv der Mathematik* de Leipzig (1886), publicámos uma demonstração do mesmo theorema fundada na formula (5) do n.º 98.

onde a somma S se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = n - a,$$

e onde o numero das quantidades $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ é igual a b .

Separaremos n'esta equação os termos que contêm a derivada d'ordem mais elevada, para o que se deve dar a a o valor zero, e a $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ os systemas de soluções

$$\alpha = n, \beta = 0, \dots, \lambda = 0$$

$$\alpha = 0, \beta = n, \dots, \lambda = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \dots, \lambda = n.$$

Teremos

$$\Sigma A_a^{(b)} S \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \cdot \frac{y_0^{(\beta)}}{\beta!} \dots \frac{y_0^{(\lambda)}}{\lambda!} + \Sigma A_0^{(b)} b y_0^{b-1} \frac{y_0^{(n)}}{n!} = 0,$$

ou, pondo

$$a_1 = y'_0, a_2 = \frac{y''_0}{2!}, a_3 = \frac{y'''_0}{3!}, \text{ etc.},$$

e notando que o coefficiente a_0 da série (1') é nullo,

$$A_0^{(1)} a_n = - \Sigma A_a^{(b)} S a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda.$$

Se $A_0^{(1)}$ é diferente de zero, d'esta igualdade tira-se immediatamente que a_n não póde contêr em denominador factores primos diferentes dos que entram nos denominadores dos coefficientes anteriores $a_\alpha, a_\beta, \text{ etc.}$, e d'aquelles que entram em $A_0^{(1)}$. Logo o numero dos factores primos diferentes que entram nos coefficientes da série (1) é limitado, como queriamos demonstrar.

Se porém é $A_0^{(1)} = 0$, a ultima equação da pagina anterior dá, separando os termos que contêm $y_0^{(n-1)}$, e notando que o coefficiente a_1 da série (1') é nullo,

$$A_1^{(1)} a_{n-1} = - \Sigma A_a^{(b)} S a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda$$

d'onde se tira ainda, como no caso anterior, o theorema enunciado, se $A_1^{(1)}$ é diferente de zero.

Se é $A_1^{(1)} = 0$ recorre-se aos termos que contêm $y_0^{(n-2)}$, e assim successivamente.

Em principios análogos se funda o theorema seguinte ⁽¹⁾:

Se os denominadores dos coefficients a_n, a_{n+1} , etc. da série (1) contêm indefinidamente factores primos respectivamente superiores a $n, n+1$, etc., esta série não pôde ser o desenvolvimento de uma função definida por uma equação

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde F representa uma função inteira de $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ com coefficients inteiros, sem annullar ao mesmo tempo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right)_{x=0} = 0.$$

II

Desenvolvimento em série de algumas funções transcendentess

112. — *Exponencial.* — **I** — Principiemos pela função exponencial $y = e^x$, que dá $y^{(n)} = e^x$, e portanto $y_0^{(n)} = 1$. Applicando a formula de Maclaurin, vem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Suppondo x comprehendido entre os dois inteiros m e $m+1$, o resto R_n é o producto dos tres factores

(1) Este theorema foi por nós publicado nos tomos II e IV dos *Annales de l'École Normale Supérieure de Paris*. Um erro de calculo levou-nos a enunciar-o de um modo inexacto que aqui corregimos.

$$\frac{x^m}{m!}, \frac{x}{m+1}, \frac{x}{m+2}, \dots, \frac{x}{n}, e^{bx},$$

dos quaes o primeiro e o terceiro são finitos, e o segundo, por ser menor do que $\frac{x}{n}$, tende para zero quando n tende para o infinito. Logo R_n tende também para 0, quando n tende para o infinito, e temos o desenvolvimento em série

$$(1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

II — Se x fôr positivo e menor do que $n + 1$, temos

$$R_n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots < \frac{x^n}{n!} \left[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \dots \right]$$

e portanto

$$R_n < \frac{(n+1)x^n}{n!(n+1-x)}.$$

Se x fôr negativo e inferior, em valor absoluto, a $n + 1$, temos (n.º 19 — VII)

$$R_n < \frac{|x|^n}{n!}.$$

Por meio d'estas formulas calcula-se um limite superior do erro que se commette quando se toma para valor de e^x a somma dos n primeiros termos do seu desenvolvimento.

III — Applicando a esta série o theorema de Eisenstein conclue-se que a função e^x é transcendente, visto que os coefficients contêm um numero illimitado de factores primos differentes.

IV — Pondo na formula (1) $x = 0$, vem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Por esta série calcula-se o valor de e mais rapidamente do que pelo processo do n.º 27.

Este numero e é irracional. Com effeito, se e fosse igual a uma fracção $\frac{m}{n}$, teriamos

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &< \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

ou

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!n},$$

ou

$$(n-1)!m - 2(n!) - \dots - 1 < \frac{1}{n};$$

e portanto o numero inteiro positivo, que o primeiro membro d'esta igualdade representa, seria menor do que uma fracção, o que é absurdo.

Lambert demonstrou que todas as potencias inteiras de e são irracionais, e modernamente o sr. Hermite demonstrou que este numero é transcendente, isto é, que não póde ser raiz de uma equação algebraica com coefficients racionais (1).

IV — Appliquemos agora a formula de Maclaurin á funcção

$$y = e^x + e^{-\frac{1}{x}},$$

onde $x > 0$, considerada por Cauchy para mostrar a necessidade da discussão do seu resto, ainda que a série a que se chegue, quando n augmenta indefinidamente, seja convergente.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tomo LXXVII.

Vamos vêr, com effeito, que pôde esta série ser convergente e todavia o resto não tender para zero.

Derivando n vezes a funcção y , vem (n.º 98 — IV)

$$y^{(n)} = e^x + \sum \frac{n! (x^{-2})^\alpha (-2x^{-3})^\beta \dots}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n)^\lambda} e^{-\frac{1}{x}},$$

resultado da fórmula

$$y^{(n)} = e^x + \sum A \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a}$$

onde A representa uma constante, e a é um numero inteiro positivo.

Pondo depois $\frac{1}{x} = z$, vem

$$y^{(n)} = e^x + \sum A \frac{z^a}{e^z}$$

$$= e^x + \sum A \frac{1}{z^{-a} + z^{-a+1} + \dots + \frac{1}{a!} + \frac{z}{(a+1)!} + \dots}$$

e, para $x = 0$ ou $z = \infty$, $y_0^{(n)} = 1$.

Applicando pois a formula de Maclaurin, vem

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Quando n augmenta indefinidamente, no segundo membro apparece uma série convergente cujo limite e^x é diferente de y ; e portanto o limite do resto R_n é diferente de zero.

113. — *Logarithmo de $1 + x$.* — Consideremos agora a funcção

$$y = \log(1 + x).$$

Por ser

$$y' = (1 + x)^{-1}, y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1 + x)^{-n},$$

a formula de Maclaurin dá

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1} x^n \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1+\theta x (1+\theta x)^{n-1}},$$

empregando a expressão do resto dada por Cauchy.

1) Se x estiver comprehendido entre $+1$ e -1 , a fracção $\frac{1}{1+\theta x}$ é finita, a fracção $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é menor do que a unidade, e x^n tende para zero quando n tende para o infinito. Logo R_n tem por limite zero quando n augmenta indefinidamente, e a função proposta póde ser desenvolvida em série pela formula

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots$$

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, esta série é divergente (n.º 49 — III), visto que a razão dos dous termos consecutivos $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ e $\frac{x^n}{n}$ tende para o limite x , superior á unidade, quando n tende para ∞ .

NOTA. — A formula precedente converge muito lentamente, e além d'isso por meio d'ella só podem ser calculados os logarithmos dos numeros comprehendidos entre 0 e 2; é portanto necessario obter uma formula mais propria para o calculo numerico dos logarithmos e applicavel a todos os casos. Ponhamos para isso

$$x = \frac{p-q}{p+q}$$

o que dá

$$\frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \log p - \log q &= \log(1+x) - \log(1-x) \\ &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right) \\ &= 2 \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^n + \dots \right], \end{aligned}$$

onde n é impar.

Esta série é tanto mais convergente quanto menor fôr $p - q$ e maior fôr $p + q$, e serve para calcular $\log p$ quando $\log q$ é conhecido. Pondo $q = 1$ dá immediatamente $\log p$.

O erro que se commette parando no termo de grão $n - 2$ d'esta série é inferior à somma da progressão

$$\frac{2}{n} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^n \left[1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^4 + \dots \right],$$

isto é, a

$$\frac{(p-q)^n}{2npq(p+q)^{n-2}}.$$

114. — *Funções circulares.* — **II** — Consideremos a função $y = \text{sen } x$. Temos, applicando a formula de Maclaurin,

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \text{sen} \left(\theta x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Visto que $\text{sen} \left(\theta x + n \frac{\pi}{2} \right)$ é finito e $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero quando n augmenta indefinidamente, a formula precedente dá a série:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \pm \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!} \mp \dots,$$

que tem logar qualquer que seja x .

■—Do mesmo modo se acha o desenvolvimento em série de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \pm \frac{x^{2a}}{(2a)!} \mp \dots$$

NOTA. — As funções $\sin x$ e $\cos x$ appareceram pela primeira vez na Trigonometria, e ahí foram deduzidas geometricamente as suas propriedades. Definindo estas funções pelas séries precedentes, pode se constituir analyticamente toda a sua theoria (4).

■■■ — Applicando a formula de Maclaurin á função

$$y = \text{arc tang } x$$

vem (n.º 99), considerando o valor de y comprehendido entre

$$-\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2},$$

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ sen}^n \varphi_1 \text{ sen } n \varphi_1,$$

onde φ_1 é dado pela igualdade $\theta x = \cot \varphi_1$. Logo, quando $|x|$ é igual ou inferior á unidade, R_n tende para zero quando n tende para o infinito, e temos a série

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots$$

Se é $x > 1$ a série precedente é divergente.

(4) Tannery: — *Introduction à la théorie des fonctions*, pag. 153.

.....
 $y_k, y'_k, \dots, y_k^{(\lambda)}$.

Ponhamos (1)

$$F(x) = (x - x_1)^\alpha \dots (x - x_i)^\beta \dots (x - x_k)^\lambda$$

e (n.º 39—I)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^k \left[\frac{M_1}{x - x_i} + \frac{M_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{M_\beta}{(x - x_i)^\beta} \right].$$

onde M_1, M_2, \dots, M_β são os coeficientes de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \dots, h^0$ no quociente $\frac{h^\beta f(x_i + h)}{F(x_i + h)}$.

Por outra parte, chamando $A_1, A_2, \dots, A_\alpha; \dots; B_1, B_2, \dots, B_\beta; \dots$ os numeradores das fracções simples em que se decompõe a fracção $\frac{1}{F(x)}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A_1 f(x)}{x - x_1} + \frac{A_2 f(x)}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x - x_1)^\alpha} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{B_1 f(x)}{x - x_i} + \frac{B_2 f(x)}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{B_\beta f(x)}{(x - x_i)^\beta} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{P_1 f(x)}{x - x_k} + \frac{P_2 f(x)}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{P_\lambda f(x)}{(x - x_k)^\lambda}. \end{aligned}$$

Pondo $x = x_i + h$, multiplicando por h^β e ordenando segundo as potencias de h , vem

(1) A analyse que segue é tirada do nosso artigo — *Sur une formule d'interpolation* publicado nas *Memoirs da Sociedade Real das Sciencias de Liège* — (2.ª série, tomo X).

+

$$+ \left(\frac{1}{(\beta-1)!} \cdot \frac{B_\beta}{x-x_i} y_i^{(\beta-1)} \right) \cdot$$

Esta formula dá uma funcção inteira do grão $\alpha + \beta + \dots + \lambda - 1$ que resolve a questão proposta. Vê-se que, para a applicar, é necessario decompôr em fracções simples a fracção

$$\frac{1}{F(x)}$$

NOTA.— Tanto esta formula, como a de Lagrange, quando algumas das quantidades k, α, β, \dots se tornam infinitas, dão séries, cuja convergencia será estudada n'outra parte d'este Curso.

IV

Desenvolvimentô em série das funcções implicitas

117. — A formula de Maclaurin applica-se tanto ás funcções explicitas, como ás funcções implicitas. Aqui vamos fazer applicação d'ella á funcção implicita y definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x \varphi_1(u) + x^2 \varphi_2(u) + \dots + x^k \varphi_k(u),$$

que vamos desenvolver em série ordenada segundo as potencias de x .

Derivando a segunda equação relativamente a x e a t , vem

$$\frac{du}{dx} = \varphi_1(u) + 2x \varphi_2(u) + \dots + kx^{k-1} \varphi_k(u)$$

$$+ [x \varphi_1'(u) + x^2 \varphi_2'(u) + \dots + x^k \varphi_k'(u)] \frac{du}{dx}$$

*

$$\frac{du}{dt} = 1 + [x \varphi'_1(u) + \dots + x^k \varphi'_k(u)] \frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} [\varphi_1(u) + 2x \varphi_2(u) + \dots + k x^{k-1} \varphi_k(u)]$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \theta_1 \frac{du}{dt},$$

pondo

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x \varphi_2(u) + \dots + k x^{k-1} \varphi_k(u).$$

Mas é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

logo teremos

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 \frac{dy}{dt}.$$

Derivando esta equação relativamente a x e a t e chamando θ_2 a derivada de θ_1 relativamente a x , considerando u como constante, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx dt} \theta_1 + \frac{dy}{dt} \left[\theta_2 + \theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt} \right]$$

$$\frac{d^2y}{dx dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \theta_1 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \theta_1^2 + \frac{dy}{dt} \left[\theta_2 + 2\theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \frac{du}{dt} \right]$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt} \theta_2.$$

Derivando esta equação relativamente a x obtem-se do mesmo modo

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^3\right)}{dt^2} + 3 \frac{d\left(\frac{dy}{dt} \theta_1 \theta_2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt} \theta_3,$$

e assim successivamente.

Em geral, podemos pôr

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sum A \frac{d^{i-1}\left(\frac{dy}{dt} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \dots \theta_k^\lambda\right)}{dt^{i-1}},$$

sendo A , i , α , β , etc. numeros inteiros que vamos determinar.

Para isso, applicuemos a formula precedente á funcção definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x + x^2 + \dots + x^k,$$

o que dá

$$\theta_1 = 1 + 2x + \dots + kx^{k-1} = \frac{du}{dx}, \quad \theta_2 = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \theta_3 = \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.};$$

e teremos

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sum A \frac{d^iy}{dt^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots \left(\frac{d^ku}{dx^k}\right)^\lambda.$$

Por outra parte, temos (n.º 98 — IV)

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (k!)^\lambda} \cdot \frac{d^iy}{dt^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots$$

onde o sommatório se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Comparando as duas formulas precedentes obtem-se o valor de A e os de α, β, \dots , e vem pois

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (k!)^\lambda} \cdot \frac{d^{i-1} \left[\frac{dy}{dt} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta \dots \theta_k^\lambda \right]}{dt^{i-1}}.$$

Pondo agora $x = 0$ nas formulas

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + \dots + kx^{k-1} \varphi_k(u)$$

$$\theta_2 = 2\varphi_2(u) + 2 \cdot 3x \varphi_3(u) + \dots + k(k-1)x^{k-2} \varphi_k(u)$$

.....

$$\theta_k = k! \varphi_k(u),$$

vem

$$\theta_1 = \varphi_1(u), \theta_2 = 2! \varphi_2(u), \dots, \theta_k = k! \varphi_k(u),$$

$$\theta_{k+1} = \theta_{k+2} = \dots = 0;$$

e portanto

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_0 = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{d^{i-1} [f'(t) (\varphi_1(t))^\alpha (\varphi_2(t))^\beta \dots (\varphi_k(t))^\lambda]}{dt^{i-1}}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = n, i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Applicando ás funcções propostas a formula de Maclaurin vem pois o desenvolvimento pedido:

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \sum_{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \frac{d^{i-1} [f'(t) \varphi_1(t)^\alpha \dots \varphi_k(t)^\lambda]}{dt^{i-1}} + R.$$

D'esta formula, que publicámos no nosso artigo *Sur le développement des fonctions implicites* (*Journal de Mathématiques de Liouville*—3.^a série, tomo VII), tira-se, pondo $k = 1$, a formula notavel

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1} [f'(t) \varphi_1(t)^n]}{dt^{n-1}} + R,$$

devida a Lagrange (¹), que dá o desenvolvimento em série da funcção y definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x\varphi_1(y).$$

As condições de convergencia das séries precedentes, que se não podem tirar da consideração do resto, por ser muito complicado, serão dadas n'outra parte d'este Curso.

V

Maximos e minimos

118. — Diz-se que a funcção $y = f(x)$ é *maxima* ou tem um valor *maximo* no ponto $x = x_1$ quando o valor $f(x_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella tem nos pontos visinhos de x_1 ; isto é, quando existe um valor h_1 tal que a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

é satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

(¹) *Oeuvres*, tomo III.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* ou tem um valor *minimo* no ponto $x = x_1$ se a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

é satisfeita por todos os valores de h compreendidos entre h_1 e $-h_1$.

Se a funcção dada tem uma derivada finita no ponto x_1 a funcção cresce com x na visinhança do ponto x_1 se o numero $f'(x_1)$ é positivo e decresce se este numero é negativo (n.º 61). Logo, para que no ponto x_1 a funcção tenha um valor maximo ou minimo, deve ser $f'(x_1) = 0$.

Supponhamos pois que é $f'(x_1) = 0$ e que a funcção $f(x)$ tem no ponto x_1 uma derivada de segunda ordem finita e diferente de zero. Temos (n.ºs 62 e 53)

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = hf'(x_1 + \theta h) = \theta h^2 [f''(x_1) + \varepsilon_1],$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com h , e θ uma quantidade positiva menor do que a unidade; e esta formula (attendendo a que, por ε_1 tender para zero quando h tende para zero, existe um numero positivo h_1 tal que a desigualdade $|\varepsilon_1| < |f''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h compreendidos entre h_1 e $-h_1$) mostra que é satisfeita pelos valores de h compreendidos entre h_1 e $-h_1$ a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

se o numero $f''(x_1)$ é positivo, ou a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

se o numero $f''(x_1)$ é negativo. Logo a $x = x_1$ corresponde um valor minimo de y quando $f''(x_1)$ é positivo, e um valor maximo quando $f''(x_1)$ é negativo.

Se fôr $f''(x_1) = 0$ e a funcção $f(x)$ tiver uma derivada de terceira ordem finita e diferente de zero no ponto x_1 , temos a igualdade

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) - f(x_1) &= \frac{1}{2} h^2 f''(x_1 + \theta h) \\ &= \frac{1}{2} \theta h^3 [f'''(x_1) + \varepsilon_2], \end{aligned}$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h ; e esta igualdade, attendendo a que existe um numero h_1 tal qual que a desigualdade $|\varepsilon_2| < |f'''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1 , mostra que o signal da differença $f(x_1 + h) - f(x_1)$ muda com o signal de h quando h varia desde $-h_1$ até h_1 . Logo no ponto x_1 a funcção $f(x)$ não póde ter valor maximo nem minimo.

Continuando do mesmo modo, chega-se á regra seguinte para achar os valores de x que toruam a funcção y maxima ou minima :

Resolve-se a equação $f'(x) = 0$, e substitue-se cada um dos valores obtidos para x nas derivadas seguintes $f''(x)$, $f'''(x)$, . . . , $f^n(x)$ até encontrar uma $f^n(x)$ que não se annulle. Se esta derivada fôr d'ordem impar, ao valor de x considerado não corresponde nem maximo nem minimo; se fôr de ordem par, ao valor de x considerado corresponde um maximo se este valor tornar $f^n(x)$ negativa, e um minimo se tornar $f^n(x)$ positiva.

Substituindo depois estes valores de x na funcção proposta obtém-se os valores maximos e minimos procurados.

EXEMPLO 1.º — Para achar os valores de x que tornam maxima ou minima a funcção

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

temos de resolver a equação

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

que dá $x = 1$ e $x = 2$.

Substituindo o valor $x = 1$ na derivada

$$y'' = 12x - 18$$

vem um resultado negativo, e portanto a $x = 1$ corresponde um maximo $y = 1$ da funcção considerada.

Substituindo o valor $x = 2$ na mesma derivada vem um resultado positivo e portanto a $x = 2$ corresponde um minimo $y = 0$.

EXEMPLO 2.º — Achar os pontos da cycloide onde o raio de curvatura é maximo, e onde é minimo.

Para isso basta procurar os valores de t que tornam (n.º 89 — III) a funcção

$$f(t) = 1 - \cos t$$

maxima ou minima.

Temos para isso, considerando uma arcada da cycloide, $f'(t) = \sin t = 0$, o que dá $t = 0, \pi, 2\pi$; e portanto os pontos onde o raio de curvatura pôde ser maximo ou minimo são:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x = \pi r \\ y = 2r \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x = 2\pi r \\ y = 0 \end{array} \right\}.$$

A derivada $f''(t) = \cos t$ é alternadamente igual a $+1$ e a -1 ; logo no primeiro ponto o raio de curvatura é minimo, no segundo é maximo e no terceiro é minimo.

Substituindo os valores de t na expressão de R vê-se que o maximo valor do raio de curvatura é $4r$ e o minimo valor é zero, como já sabemos.

EXEMPLO 3.º—No caso da funcção $y = \cos \frac{1}{x}$ temos de resolver a equação

$$y' = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} = 0$$

que dá, considerando só os valores positivos de x , $x = \frac{1}{k\pi}$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

A derivada segunda

$$y'' = -\frac{2}{x^3} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x}$$

dá $y'' = k^4 \pi^4 \cos k\pi$; logo a $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{1}{2\pi}$, etc. correspondem alternadamente o minimo -1 e o maximo $+1$.

Temos aqui o primeiro exemplo d'uma funcção que, quando x se approxima indefinidamente de zero, oscilla entre $+1$ e -1 ; de modo que, entre zero e um outro valor determinado dado a x , tem um numero infinito de maximos e minimos. No ponto $x = 0$ a funcção é indeterminada.

EXEMPLO 4.º — Consideremos a funcção $y = X_n$, X_n representando um polynomio de Legendre (n.º 410).

Como as n raizes da equação $X_n = 0$ são reaes e desiguaes e estão comprehendidas entre $+1$ e -1 , a equação $X'_n = 0$ tem (n.º 62) $n - 1$ raizes reaes e desiguaes comprehendidas entre os mesmos limites, e nenhuma d'ellas annulla X''_n . Logo o polynomio X_n terá $n - 1$ maximos e minimos comprehendidos no intervallo de $x = +1$ a $x = -1$. No caso, por exemplo, do polynomio

$$X_3 = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

a equação $X'_3 = 0$ dá $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$. A primeira raiz torna X''_3 positiva e a segunda torna-a negativa; logo á primeira corresponde um minimo $-\sqrt{\frac{1}{5}}$ e á segunda um maximo $+\sqrt{\frac{1}{5}}$.

119. — Pela regra precedente acham-se os pontos em que a funcção $f(x)$ é maxima ou minima e admite uma derivada finita. Para achar pois todos os pontos em que $f(x)$ é maxima ou minima, é necessario considerar ainda os pontos em que esta funcção não admite derivada, e os pontos em que a derivada é infinita.

Seja x_1 um d'estes pontos. Para vêr se n'elle a funcção é maxima ou minima, basta vêr se a derivada $f'(x_1 + h)$ muda ou não de signal com h , quando h varia desde $-h_1$ até $+h_1$. Com effeito, se $f'(x_1 + h)$ muda de signal com h e passa de negativa para positiva, a funcção $f(x)$ passa de (n.º 61) decrescente para crescente, e portanto no ponto x_1 é minima. Se $f'(x_1 + h)$ muda de signal como h e passa de positiva para negativa, a funcção $f(x)$ é maxima no ponto x_1 . Se $f'(x_1 + h)$ não muda de signal com h , a funcção $f(x)$ não é maxima nem minima no ponto x_1 .

Applica-se este mesmo methodo quando se procuram os maximos e minimos correspondentes aos pontos que satisfazem á equação $f'(x) = 0$, se á funcção $f(x)$ não admite no ponto x_1 algumas das derivadas a que é necessario recorrer no methodo exposto no numero anterior, ou se alguma d'es-

tas derivadas é infinita n'este ponto, e ainda se o methodo anterior leva a calculos complicados.

EXEMPLO. — A funcção

$$y = f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{2}{3} (x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

A derivada y' torna-se pois infinita quando é $x = a$, e póde portanto a funcção ser maxima ou minima no ponto a .

Pondo $x = a + h$ em $f'(x)$ vem o resultado $\frac{2}{3} h^{-\frac{1}{3}}$, e portanto $f'(a + h)$ passa no ponto a de negativa para positiva. A $x = a$ corresponde pois um valor minimo b da funcção dada.

120. — Se a funcção cujos maximos e minimos queremos achar, fór a funcção implicita y definida pela equação $F(x, y) = 0$, determinaremos, pela eliminação de x e y entre esta equação e a equação

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0,$$

os valores de x que tornam y maximo ou minimo e os valores de y correspondentes. Substituindo depois estes valores nas derivadas y'' , y''' , etc., vê-se, pela ordem da primeira derivada que não se annulla e pelo signal do resultado, quaes d'estes valores de y são maximos ou minimos.

EXEMPLO. — Procuremos as ordenadas maxima e minima da hyperbole cuja equação é

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 50 = 0.$$

Eliminando x e y entre a equação precedente e a equação

$$y' = \frac{4x + 3y}{4y - 3x} = 0,$$

ou

$$4x + 3y = 0,$$

vem $x = \pm 3$, $y = \mp 4$.

Derivando y' e pondo no resultado $x = 3$ e $y = -4$, vem para y'' um valor negativo; logo á abscissa $x = 3$ corresponde uma ordenada maxima $y = -4$, ou uma ordenada minima negativa cujo valor absoluto é igual a 4. Os valores $x = -3$, $y = 4$ dão a y'' um valor positivo; logo á abscissa $x = -3$ corresponde uma ordenada minima $y = 4$.

121. — *Funções de duas variaveis independentes.* —

Diz-se que a funcção de duas variaveis $z = f(x, y)$ é *maxima* no ponto $x = x_1$, $y = y_1$, se o valor $f(x_1, y_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella toma nos pontos visinhos de (x_1, y_1) ; isto é, se existe um valor δ tal que a desigualdade $f(x_1 + h, y_1 + k) < f(x_1, y_1)$ seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* no ponto (x_1, y_1) se a desigualdade

$$f(x_1 + h, y_1 + k) > f(x_1, y_1)$$

é satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Supponhamos agora que $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são funcções continuas de x e y , e procuremos os valores de x e y que podem tornar z maximo ou minimo. Para isso, podemos considerar a variavel independente y como funcção arbitraria de x , e portanto será condição necessaria para que z seja maximo ou minimo que seja satisfeita a equação

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' = 0,$$

que, por ser y' arbitraria, dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Estas equações determinam os valores de x e y que podem

dar a z um valor máximo ou mínimo. Seja x_1, y_1 um sistema dos valores de x e y que satisfazem a estas equações.

Derivando z' e attendendo à segunda das equações precedentes, vem o trinomio

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y'^2, \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[\left(y' + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \right)^2 + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2} \right], \end{aligned}$$

que, para aos valores x_1 e y_1 de x e y corresponder um valor máximo ou mínimo de z , deve ser nullo ou ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja o valor de y' (mesmo infinito), quando se substitue x e y por x_1 e y_1 . Para isso é necessario evidentemente que uma das condições

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \geq 0$$

seja satisfeita por estes valores de x e y ; e o signal de z'' será o mesmo que o signal que toma $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

A segunda d'estas condições é mesmo sufficiente para que no ponto (x_1, y_1) a funcção z seja maxima ou minima, porque, quando ella tem logar, z'' é diferente de zero e tem sempre o mesmo signal, qualquer que seja y' .

Se fôr $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} > 0$ no ponto (x_1, y_1) , a expressão

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y'$$

mostra que o signal de z'' muda com o valor de y' , e portanto a funcção z não é maxima nem minima no ponto (x_1, y_1) .

Se fôr no ponto (x_1, y_1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0,$$

z'' é nullo quando a y' se dá o valor α que tem a fracção $\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} : \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ no ponto considerado. Recorrendo n'este caso ás derivadas seguintes, ponha-se $x = x_1, y = y_1, y' = \alpha, y'' = y''' = \dots = 0$ nas expressões de $z''', z^{(4)}$, etc., até encontrar uma que não seja nulla. Se esta derivada fôr d'ordem impar, a funcção z não póde ser maxima nem minima no ponto (x_1, y_1) ; se esta derivada fôr d'ordem par e o seu signal fôr differente do signal de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, tambem z não é maxima nem minima no ponto considerado; finalmente se esta derivada fôr d'ordem par e tiver o signal de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, a funcção será maxima ou minima no ponto (x_1, y_1) segundo este signal é $-$ ou $+$.

Se os valores x_1 e y_1 satisfizerem ás equações $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, sem que annullem $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, o calculo anterior não é applicavel, mas pode-se em todo elle trocar x por y e obtém-se as formulas applicaveis a este caso.

Se fôr $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ no ponto (x_1, y_1) , z'' é identicamente nulla, e é portanto necessario recorrer á derivada z''' que deve ser nulla, qualquer que seja y' , para que n'este ponto possa z ser maxima ou minima, e depois á derivada $z^{(4)}$, que deve ser nulla ou ter sempre o mesmo signal qualquer que seja y' , etc.

Podemos resumir a parte principal d'esta discussão na regra seguinte:

Para achar os valores maximos e minimos de z , resolve-se relativamente a x e a y as equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e substitua-se cada systema dos valores resultantes na expressão

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Os systemas de valores que dão $A > 0$ tornam z ma-

ximo se o valor correspondente de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ é negativo, e mínimo se este valor é positivo.

Os sistemas de valores que dão $A < 0$ não tornam z máximo nem mínimo.

Para estudar o que acontece nos pontos em que é $A = 0$, é necessário recorrer ás derivadas de z de ordem superior á segunda.

EXEMPLO. — Achar a mais curta distancia entre um ponto (x_0, y_0, z_0) e um plano

$$z = Ax + By + C.$$

Temos de achar os valores de x e y que tornam maxima ou minima a funcção

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

onde z é dado em funcção de x e y pela equação do plano.

As equações que determinam x e y são pois

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = 2(x - x_0) + 2A(z - z_0) = 0, \quad \frac{\partial D^2}{\partial y} = 2(y - y_0) + 2B(z - z_0) = 0;$$

e como estas equações são as de uma recta perpendicular ao plano, segue-se que o ponto pedido é o pé da perpendicular abaixada do ponto sobre o plano, como já se sabia.

Tirando d'estas equações e da equação do plano os valores de x , y e z e substituindo na expressão de D , vem a formula

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C - z_0}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que dá a minima distancia pedida.

Podemos verificar que o precedente valor de D é um mínimo. Com effeito, pondo na expressão

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 2(A^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} = 2(B^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial x \partial y} = 2AB$$

vem o resultado $4(1 + A^2 + B^2)$, que, por ser positivo assim como a derivada $\frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2}$, mostra que o valor precedente de D^2 é um mínimo.

VI

Indeterminações

122.—Se a função $f(x)$ é indeterminada quando $x = a$, chama-se *verdadeiro valor da função* no ponto a o limite para que tende $f(x)$ quando x tende para a . Vamos procurar este limite em alguns casos mais importantes.

I— Se fôr

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

e as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ se annullarem quando $x = a$, a função reduz-se a $\frac{0}{0}$ e vamos achar o seu verdadeiro valor. Por ser (n.º 62)

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)},$$

quando as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são continuas no ponto a e admittem derivadas de primeira ordem finitas nos pontos vizinhos de a , temos, n'este caso,

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)}.$$

Se fôr $\varphi'(a) = 0$, $\psi'(a) = 0$, temos do mesmo modo

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi''(a+\theta_2 h)}{\psi''(a+\theta_2 h)}.$$

Em geral, se forem nullas as funcções $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{n-1}(a)$ e $\psi(a)$, $\psi'(a)$, ..., $\psi^{n-1}(a)$, teremos

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^n(a + \theta_n h)}{\psi^n(a + \theta_n h)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi^n(x)}{\psi^n(x)}.$$

Por esta formula calcula-se o valor de $f(a)$ quando se sabe achar o limite para que tende o seu segundo membro.

Se as funcções $\varphi^n(x)$ e $\psi^n(x)$ forem continuas no ponto a , esta formula dá

$$f(a) = \frac{\varphi^n(a)}{\psi^n(a)}.$$

No caso de ser $a = \infty$, podemos pôr $x = \frac{1}{t}$ e depois fazer tender t para 0. Temos d'este modo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t^2} \varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} \psi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

e a regra anterior é ainda applicavel.

EXEMPLO. — A funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x}$$

é indeterminado quando $x = 0$, assim como a funcção

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\sin x}{e^x - \cos x}.$$

A fracção

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{-\cos x}{e^x + \sin x}$$

é igual a -1 quando é $x = 0$; logo -1 é o verdadeiro valor de y correspondente a $x = 0$.

III — Seja agora $f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ e procuremos o verdadeiro valor d'esta fracção, isto é, o limite para que tende $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando x tende para a .

Representando por x_0 um numero tal que x esteja comprehendido entre x_0 e a , e suppondo que as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ admittem derivadas finitas no ponto x_0 e nos pontos comprehendidos entre x_0 e a e que $\psi'(x)$ é diferente de zero n'aquelles pontos, temos

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{[\varphi(x) - \varphi(x_0)] \left[1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right]}{[\psi(x) - \psi(x_0)] \left[1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right]} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta h) \left(1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right)}{\psi'(x_0 + \theta h) \left(1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right)},$$

onde é $h = x - x_0$.

Suppondo agora que a fracção $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ tende para um limite determinado A , quando x tende para a , tambem a fracção $\frac{\varphi'(x_0 + \theta h)}{\psi'(x_0 + \theta h)}$ tende para o mesmo limite quando x_0 tende para a , visto que $x_0 + \theta h$ está comprehendido entre x_0 e x e portanto entre x_0 e a . Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a que esta fracção diffira tão pouco quanto se queira de A .

Depois de escolher d'este modo x_0 , por ser

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = 1,$$

podemos dar a ε um valor tão pequeno que, para os valores de x comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, a fracção

$$\frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} \text{ diffira da unidade tão pouco quanto se queira.}$$

Podemos pois dar a x_0 um valor tão próximo de a e a ε um valor tão pequeno que, para todos os valores de x compreendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, a fracção $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ diffira tão pouco quanto se queira de A ; e temos portanto ⁽¹⁾

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

e, se $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ são continuas no ponto a ,

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Logo acha-se o verdadeiro valor da fracção considerada pela mesma regra que no caso anterior.

Se fôr $A = \infty$, teremos

$$\lim_{x=a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = 0,$$

e portanto $\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$. O theorema é pois ainda applicavel.

EXEMPLO. — A funcção

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\log x}{x^{-n}},$$

dá $\frac{\infty}{\infty}$ quando é $x = 0$. Mas o quociente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$$

é nullo quando $x = 0$; logo é tambem nulla a funcção considerada.

III — Se a funcção

⁽¹⁾ A demonstração precedente é tirada do *Calcolo differentiale* de Gnocchi e Peano (Turin, 1884).

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

se reduzir a $0 \times \infty$ quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á fracção $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, que

se reduz a $\frac{0}{0}$, ou a fracção $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, que se reduz a $\frac{\infty}{\infty}$.

EXEMPLO. — A funcção

$$y = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

dá $0 \times \infty$ quando é $n = \infty$. Para achar o seu verdadeiro valor, consideremos a fracção

$$y = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, e que dá, derivando o numerador e o denominador relativamente a n , a fracção

$$\frac{-\frac{1}{n^2} x^{\frac{1}{n}} \log x}{-\frac{1}{n^2}},$$

que se reduz a $\log x$ quando é $n = \infty$. Logo temos a formula notavel

$$\log x = \lim_{n = \infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

IV — Se a funcção $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ se reduzir a

$\infty - \infty$ quando é $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á fracção

$$\frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$.

V — Se a funcção $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ se reduzir a 0^0 , 1^∞ , ∞^0 quando é $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á funcção

$$\log y = \psi(x) \log \varphi(x)$$

que se reduz a $0 \times \infty$.

EXEMPLO. — A funcção

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

quando $n = \infty$, dá 1^∞ . Para achar o seu verdadeiro valor, determinemos o verdadeiro valor da funcção

$$\log y = n \log \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\log \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, o que dá $\log y = x$, e portanto $y = e^x$.

Temos pois a formula

$$e^x = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Curvas planas

123.—*Contacto das curvas planas.*—Sejam

$$y = f(x), Y = F(X)$$

as equações de duas curvas que passam por um ponto cujas coordenadas são x_0 e y_0 . Se a diferença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ de duas ordenadas das curvas, correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h , diz-se que as curvas têm no ponto (x_0, y_0) um *contacto de ordem n*.

Se pelo ponto (x_0, y_0) passar uma terceira curva $y = \varphi(x)$ que tenha com a curva $y = f(x)$ um contacto de ordem m e se fôr $n > m$, a segunda das curvas consideradas aproxima-se mais da curva $y = f(x)$, na visinhança do ponto (x_0, y_0) , do que a terceira curva $y = \varphi(x)$. Com effeito, representando por β e α as diferenças $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ e $\varphi(x_0 + h) - f(x_0 + h)$, é por definição

$$\beta = h^n (A + \varepsilon), \alpha = h^m (B + \varepsilon'),$$

onde A e B representam quantidades finitas diferentes de

zero, e ε e ε' quantidades infinitamente pequenas com h ; e portanto temos a igualdade

$$\alpha - \beta = h^m [B + \varepsilon' - h^{n-m} (A + \varepsilon)],$$

a qual faz vêr que se pôde dar a h_1 um valor tão pequeno que $\alpha - \beta$ tenha o signal de $h^m (B + \varepsilon')$, isto é o signal de α , quando $|h| < h_1$. Será pois, para todos os valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e $+h_1$, $\beta < \alpha$.

124. — As condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n decorrem immediatamente da formula de Taylor, que dá

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - f(x_0 + h) &= F(x_0) - f(x_0) \\ &+ h [F'(x_0) - f'(x_0)] + \dots + \frac{h^n}{n!} [F^n(x_0) - f^n(x_0)] \\ &+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} [F^{n+1}(x_0 + \theta h) - f^{n+1}(x_0 + \theta h)]. \end{aligned}$$

Com effeito, se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n + 1$ continuas no ponto x_0 , para que a differença $F(x_0 + h) - f(x_0 + h)$ seja infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h , é necessario e sufficiente que as differenças

$$F(x_0) - f(x_0), F'(x_0) - f'(x_0), \dots, F^n(x_0) - f^n(x_0)$$

sejam nullas, e que a differença $F^{n+1}(x_0) - f^{n+1}(x_0)$ seja differente de zero, o que dá o seguinte:

THEOREMA. — Se as funcções $F(x)$ e $f(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n + 1$ continuas no ponto x_0 , as condições necessarias e sufficientes para que as curvas consideradas tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de ordem n são:

$$f(x_0) = F(x_0), f'(x_0) = F'(x_0), \dots, f^n(x_0) = F^n(x_0),$$

e que $f^{n+1}(x_0) - F^{n+1}(x_0)$ seja differente de zero.

125. — Seja $y = f(x)$ a equação de uma curva dada e $Y = F(X)$ uma equação com $n + 1$ parametros arbitrarios,

que representa uma familia de curvas. A curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada no ponto (x_0, y_0) diz-se *osculadora* da curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) . Para obter esta curva deve-se dispôr dos $n + 1$ parametros de modo que sejam satisfeitas as $n + 1$ equações de condição precedentes, e o contacto das duas curvas será de ordem n ou de ordem superior a n , segundo a differença $f^{n+1}(x_0) - f^{n+1}(x_0)$ é diferente de zero ou igual a zero.

126. — A doutrina precedente, devida a Lagrange ⁽¹⁾, vae-nos apresentar, debaixo de um novo ponto de vista, alguns dos resultados obtidos no Capitulo III.

I — Se quizermos achar a *recta osculadora* da curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) , temos de determinar as constantes A e B que entram na equação

$$Y = AX + B$$

da recta, de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de primeira ordem :

$$y_0 = Ax_0 + B, f'(x_0) = A.$$

A equação da recta pedida é pois

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),$$

e portanto é tangente á curva dada.

Por ser $Y'' = Y''' = \dots = 0$, a tangente tem com a curva proposta um contacto de segunda ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \geq 0$; um contacto de terceira ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) = 0, f^4(x_0) \geq 0$; etc.

II — Se quizermos achar o *circulo osculador* da curva $y = f(x)$ no ponto (x_0, y_0) , temos de determinar as constantes arbitrarías a, b, R que entram na equação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

(1) Lagrange: — *Théorie des fonctions analytiques.*

de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de segunda ordem :

$$f(x_0) = F(x_0), f'(x_0) = F'(x_0), f''(x_0) = F''(x_0);$$

que, por serem as funções $F(x_0)$, $F'(x_0)$ e $F''(x_0)$ dadas pelas equações :

$$(x_0 - a)^2 + [F(x_0) - b]^2 = R^2$$

$$x_0 - a + [F(x_0) - b] F'(x_0) = 0$$

$$1 + [F'(x_0)]^2 + [F(x_0) - b] F''(x_0) = 0,$$

se reduzem a [pondo y_0 , y'_0 , y''_0 em lugar de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$]

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (y_0 - b) y'_0 = 0$$

$$1 + y_0'^2 + (y_0 - b) y_0'' = 0.$$

D'estas equações tiram-se os valores das coordenadas a e b do centro e o valor do raio R do circulo osculador :

$$R = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}, a = x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, b = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}.$$

Da comparação d'estas formulas com as que dão as coordenadas do centro e o raio do circulo de curvatura (n.º 88 — I), conclue-se que o circulo de curvatura e o circulo osculador, correspondentes ao mesmo ponto de uma curva dada, coincidem.

127. — *Pontos d'inflexão.* — A determinação dos pontos d'inflexão da curva $y = f(x)$ é facil de conseguir por meio do theorema do n.º 86 — III. Com effeito, se $f''(x)$ é uma função continua no ponto x_0 , da igualdade

$$f''(x_0 + h) = f''(x_0) + \epsilon_1,$$

onde ϵ_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com

h , conclue-se que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto x_0 , é necessario que seja $f''(x_0) = 0$. N'este caso, suppondo a funcção $f''(x)$ finita no ponto x_0 , a igualdade (n.º 52)

$$f''(x_0 + h) = h [f'''(x_0) + \varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h , mostra que $f''(x_0 + h)$ muda de signal com h , e portanto que (x_0, y_0) é um ponto d'inflexão, se $f'''(x_0)$ é diferente de zero.

No caso de ser $f'''(x_0) = 0$ e de a funcção $f^4(x)$ ser finita no ponto x_0 , a igualdade (n.ºs 62 e 52)

$$f''(x_0 + h) = \frac{h^2}{2!} f^4(x_0 + \theta h) = \frac{\theta h^3}{2!} [f^4(x_0) + \varepsilon_3]$$

mostra que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto (x_0, y_0) , é necessario que seja $f^4(x_0) = 0$. Logo, se esta igualdade não é satisfeita, (x_0, y_0) não é ponto d'inflexão.

Continuando do mesmo modo, conclue-se a regra seguinte:

Para achar os pontos de inflexão de uma curva cuja equação é dada, determinem-se x e y por meio da equação da curva e da equação $y'' = 0$.

Substitua-se depois cada grupo (x_0, y_0) de valores resultantes nas derivadas seguintes de y . Se a primeira derivada que não se annulla fôr de ordem impar, o ponto (x_0, y_0) é um ponto de inflexão, se fôr d'ordem par o ponto não é de inflexão.

EXEMPLO 1.º — Consideremos a curva cuja equação é

$$y = A \text{ sen } (ax + b) + B.$$

Teremos

$$y' = Aa \cos(ax + b), \quad y'' = -Aa^2 \text{ sen } (ax + b);$$

e como os valores de x que tornam y'' nulla são dados pela relação $ax + b = k\pi$, onde k representa um inteiro qualquer positivo, negativo ou nullo, e como estes valores de x não annullam a terceira derivada

$$y''' = -Aa^3 \cos(ax + b),$$

os pontos $\left(\frac{-b + k\pi}{a}, B\right)$ serão os pontos d'inflexão da curva considerada.

EXEMPLO 2.º — A funcção $y = x + (x - 1)^7$ dá

$$y' = 1 + 7(x - 1)^6, y'' = 7 \cdot 6(x - 1)^5, \dots, y^{(7)} = 7!$$

Como o valor $x = 1$ annulla a derivada y'' , e como a primeira das derivadas seguintes que este valor de x não annulla é d'ordem impar, o ponto $(1, 1)$ é um ponto d'inflexão.

128. — No processo anterior para achar os pontos d'inflexão parte-se da hypothese que a derivada y'' é continua. Logo póde ainda haver outros pontos d'inflexão em que esta derivada não exista ou seja discontinua. Além d'isso, se y'' é continua no ponto (x_0, y_0) , mas alguma das derivadas y''' , $y^{(4)}$, etc., a que é necessario recorrer, não existe ou é infinita n'este ponto, não se póde distinguir pelo processo anterior se o ponto (x_0, y_0) é ou não d'inflexão. N'estes casos, para achar os pontos d'inflexão, recorre-se principalmente ao theorema do n.º 86 — II.

EXEMPLO 1.º — A funcção $y = b + (x - a)^{\frac{5}{3}}$ dá

$$y' = \frac{5}{3}(x - a)^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9}(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Como $x = a$ torna y'' infinita, vamos vêr se o ponto (a, b) póde ser d'inflexão. Para isso, notemos que y'' é positiva quando é $x > a$ e é negativa quando é $x < a$; logo á direita do ponto (a, b) estando a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, e á esquerda d'este ponto estando a concavidade voltada no sentido contrario, o ponto é d'inflexão (n.º 86 — II).

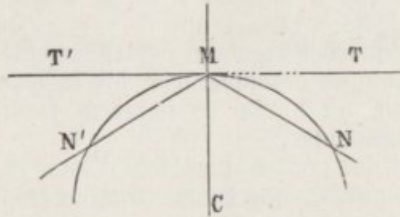
EXEMPLO 2.º — A funcção $y = b + (x - a)^{\frac{7}{3}}$ dá

$$y'' = \frac{28}{9}(x - a)^{\frac{1}{3}}, y''' = \frac{28}{27}(x - a)^{-\frac{2}{3}}.$$

No ponto (a, b) annulla-se y''' , mas y'' torna-se infinita, e o methodo anterior não é applicavel. Raciocinando porém como no exemplo anterior conclue-se que o ponto é de inflexão.

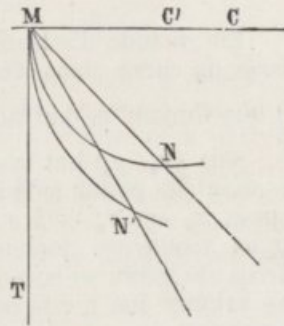
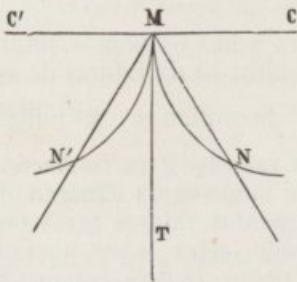
129. — *Pontos singulares das curvas planas.* — Chama-se *ponto ordinario* de uma curva plana o ponto M onde

se reúnem dois arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para direcções oppostas da mesma tangente TT' , quando N e N' tendem para M .



Aos pontos que não estão n'estas condições, chama-se *pontos singulares*. Taes são os pontos seguintes:

1.º—O *ponto de reversão de primeira especie*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para a mesma direcção MT da tangente, ficando uma de cada lado da tangente.



2.º—O *ponto de reversão de segunda especie*, isto é, o ponto d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes tendem para a mesma direcção da tangente, ficando ambas do mesmo lado da tangente.

3.º—O *ponto de suspensão*, que é aquelle d'onde parte só um arco de curva.

4.º—O *ponto angular*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas tangentes são diferentes.

5.º—O *ponto isolado*, que é aquelle que está completamente separado do resto da curva.

6.º — O ponto em que se cortam dois ou mais arcos de curva.

130. — Supponhamos que $F(x, y) = 0$ é a equação da curva dada, e que a função $F(x, y)$ tem um unico valor real correspondente a cada grupo de valores de x e y . Estão n'este caso as equações algebraicas relativamente a x e y , visto que se podem sempre desembaraçar dos radicaes. Estão tambem n'este caso, ou a elle se reduzem facilmente, muitas equações transcendentis.

A indagação dos pontos singulares d'estas curvas baseia-se no theorema seguinte, que é uma simples traducção geometrica do theorema 1.º do n.º 75:

Se a função $F(x, y)$ e as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ forem continuas, os pontos singulares da curva dada satisfazem ás equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Em virtude d'este theorema, para achar os pontos singulares da curva plana dada, deve procurar-se os valores de x e y que tornam as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ discontinuas ou nullas.

Seja (x_0, y_0) um systema d'estes valores. Para conhecer a especie do ponto singular (x_0, y_0) , mude-se na equação da curva x_0 em $x_0 + h$ e procure-se quantos valores reaes tem y na visinhança do ponto considerado, para saber quantos arcos de curva se encontram n'este ponto. Depois procure-se os valores que n'este ponto tem y' , para vêr se os arcos que se encontram no ponto (x_0, y_0) téem, ou não, a mesma tangente. Finalmente pelo signal de y''_0 veja-se a direcção da concavidade de cada arco (n.º 86).

Vamos agora dar alguns exemplos de determinação de pontos singulares, considerando sómente equações que se podem resolver relativamente a y ou a x , enviando, para um estudo desenvolvido do methodo para achar estes pontos nos outros casos, para o *Cours de Calcul différentiel* de J. A. Serret.

EXEMPLO 1.º — A equação da *lemniscata*

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0$$

dá, para a determinação dos pontos singulares, as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 4x^3 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0.$$

Logo esta curva tem um unico ponto singular (0, 0).

Derivando a equação dada vem

$$yy' - x + 2x^3 = 0, \quad yy'' + y'^2 - 1 + 6x = 0,$$

e portanto no ponto (0, 0) temos $y' = \pm 1$.

Por outra parte a equação da curva, escripta debaixo da fórma

$$y = \pm x \sqrt{1 - x^2}$$

mostra que do ponto (0, 0) partem quatro arcos da curva.

Logo o ponto (0, 0) é um ponto singular onde se cortam dois arcos de curva, e as tangentes a estes arcos fazem angulos de 45° com o eixo das abscissas.

EXEMPLO 2.º — A equação da *cissoide*

$$(a - x) y^2 = x^3$$

dá

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(x - a)y = 0,$$

e portanto esta curva só póde ter um ponto singular (0, 0).

Por ser

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$$

conclue-se que, na visinhança do ponto (0, 0), a cada valor negativo de x correspondem dois valores imaginarios de y , e a cada valor positivo de x correspondem dois valores reaes, iguaes e de signaes contrarios de y . Como, por outra parte, se obtem para y'_0 dois valores iguaes a zero, segue-se que no ponto (0, 0) se reuñem dois arcos de curva tangentes ao eixo das abscissas positivas. Logo o ponto (0, 0) é um ponto de reversão de primeira especie.

EXEMPLO 3.^o — A curva

$$y^2 - 2x^2y + x^4 + x^5 = 0$$

tem um ponto singular unico, que é a origem das coordenadas. Escrevendo esta equação debaixo da forma

$$y = x^2 \pm x^2 \sqrt{-x}$$

vê-se que na origem se reúnem dois arcos e que estão collocados do lado das abscissas negativas. Derivando-a e pondo nas equações resultantes $x = 0$ e $y = 0$, obtem-se para y'_0 dois valores iguaes a zero, e para y''_0 dois valores iguaes a $+2$, d'onde se conclue que ambos os arcos são tangentes ao eixo das abscissas e que têm a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas. Logo o ponto $(0, 0)$ é de reversão de segunda especie.

EXEMPLO 4.^o — A curva

$$y^2 - x^3 + x^2 = 0$$

tem um ponto singular, que é a origem das coordenadas. Derivando duas vezes esta equação e pondo no resultado $x = 0$, $y = 0$, obtem-se para y'_0 dois valores imaginarios e portanto a origem das coordenadas é um ponto solitario.

131. — *Pontos multiplos.* — Consideremos ainda a curva cuja equação é $F(x, y) = 0$ e o ponto (x_0, y_0) d'esta curva, e supponhamos que a funcção $F(x, y)$ admite derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a x e a y continuas no ponto (x_0, y_0) . Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0) , este ponto diz-se *ponto simples*.

Supponhamos agora que $F(x, y)$ admite as derivadas $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ continuas no ponto (x_0, y_0) . Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0) e as derivadas de primeira ordem $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ são nullas n'este ponto, diz-se que o ponto (x_0, y_0) é um *ponto duplo*.

Em geral, supponhamos que as derivadas parciaes da funcção $F(x, y)$ até á ordem n são todas continuas no ponto (x_0, y_0) . Se uma, pelo menos, das derivadas de ordem n não

é nulla no ponto (x_0, y_0) e se as derivadas de ordem inferior a n são todas nullas n'este ponto, diz-se que o ponto (x_0, y_0) é um ponto *multiplo* cujo gráo de multiplicidade é n .

Supponhamos que a equação proposta é algebraica e do gráo m , e que $f(x, y) = 0$ é outra equação algebraica do gráo m' cujos coefficients são constantes arbitrarías, excepto um que é determinado pela condição de a curva passar pelo ponto (x_0, y_0) . Supponhamos tambem que se excluem dos valores dados a estas constantes aquelles que annullam $\frac{\partial f}{\partial y}$. A equação $f(x, y) = 0$ determina y como funcção de x na vizinhança do ponto x_0 , e esta funcção admite derivada (n.º 75). Temos pois, pondo $x - x_0 = h$, representando por $\varphi(x)$ esta funcção e attendendo á igualdade $F(x_0, y_0) = 0$,

$$F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) \right] h \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0) \right] h^2 + \dots = 0.$$

Esta equação leva á determinação dos pontos em que se cortam as duas curvas consideradas na vizinhança do ponto (x_0, y_0) , visto que determina h e depois as equações $x = x_0 + h$, $y = \varphi(x)$ determinam as coordenadas d'estes pontos. Um d'estes pontos é o ponto (x_0, y_0) .

Se o ponto (x_0, y_0) é um ponto simples, uma das quantidades $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ é diferente de zero, e portanto a equação anterior tem, em geral, uma unica raiz igual a zero. Logo, em virtude de um theorema bem conhecido da theoria da eliminação algebraica (1), as curvas cortam-se, *em geral*, em $mm' - 1$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0) .

Se o ponto (x_0, y_0) é um ponto duplo, as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ são nullas, e a equação precedente tem, em geral, duas raizes iguaes a zero. Logo as curvas consideradas cortam-se,

(1) Serret: — Algèbre, tomo 1, pag. 165.
Longchamps — Algèbre, Paris, 1889, pag. 434.

em geral, em $mm' - 2$ pontos, reaes ou imaginarios, diferentes do ponto (x_0, y_0) .

Continuando do mesmo modo, vê-se que se o ponto (x_0, y_0) é um ponto multiplo cujo grão de multiplicidade é n , as curvas consideradas cortam-se, em geral, em $mm' - n$ pontos, diferentes do ponto (x_0, y_0) .

Vê-se pois que nas questões em que se procura o numero de pontos em que se cortam duas curvas, cada ponto duplo equivale a dois pontos simples, cada ponto triplo equivale a tres pontos simples, etc. Estas considerações têm uma importancia consideravel no *Calculo Integral*.

A doutrina que precede tem logar quando o ponto (x_0, y_0) é imaginario. Veremos, com effeito, n'outro logar que o theorema 4.º do n.º 75, que lhe serve de base, tem logar no caso das variaveis imaginarias.

II

Curvas no espaço

132. — *Contacto de duas curvas no espaço.* — Sejam

$$y = f(x), z = f_1(x); Y = F(X), Z = F_1(X)$$

as equações de duas curvas no espaço, que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0) . A distancia d de dois pontos d'estas curvas, correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, será dada pela formula

$$d = \sqrt{[F(x_0 + h) - f(x_0 + h)]^2 + [F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h)]^2}.$$

Se d fôr infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h , diz-se que as curvas consideradas têm no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n . Vê-se, como no n.º 123, que n'este caso as curvas approximam-se na visinhança do ponto considerado mais uma da outra do que de qualquer outra curva com a qual tenham um contacto de ordem inferior.

Procuramos as condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n no ponto considerado. Para isso, notemos que é condição necessaria e sufficiente para que d seja infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h que as diferenças

$$F(x_0 + h) - f(x_0 + h) = \alpha, F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h) = \beta$$

o sejam, ou que uma seja da ordem $n + 1$ e a outra de ordem superior. Com effeito, suppondo que uma das diferenças é da ordem $n + 1$ e que a outra é da ordem $n + 1 + i$, temos (n.º 50)

$$\beta = h^{n+1} (A + \varepsilon), \alpha = h^{n+i+1} (B + \varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas diferentes de zero, e ε e ε' são quantidades infinitamente pequenas com h ; e portanto

$$d = h^{n+1} \sqrt{(A + \varepsilon)^2 + h^{2i} (B + \varepsilon')^2},$$

d'onde se deduz que d é da ordem $n + 1$ relativamente a h .

Reciprocamente, se d fôr da ordem $n + 1$ relativamente a h , uma das quantidades α ou β será da ordem $n + 1$ e a outra da mesma ordem ou de ordem superior; porque, se aquella das quantidades que é de menor ordem fosse de ordem m diferente de $n + 1$, tambem d seria da ordem m , em virtude do que vimos de demonstrar.

Para achar pois as condições analyticas do contacto de ordem n basta exprimir que uma das quantidades α ou β é infinitamente pequena da ordem $n + 1$ relativamente a h , e que a outra é da mesma ordem ou de ordem superior. Raciocinando para isso como no caso das curvas planas (n.º 124) acha-se as equações de condição

$$f(x_0) = F(x_0), f'(x_0) = F'(x_0), \dots, f^n(x_0) = F^n(x_0)$$

$$f_1(x_0) = F_1(x_0), f'_1(x_0) = F'_1(x_0), \dots, f_1^n(x_0) = F_1^n(x_0).$$

Se uma das curvas fôr completamente dada e as equações $Y = F(X)$, $Z = F_1(X)$ representarem uma familia de curvas, a curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada diz-se *osculadora* da primeira. Para obter esta curva deve-se determinar os $2(n + 1)$ para-

metros arbitrarios que entram nas equações $Y = F(X)$, $Z = F_1(X)$ por meio das equações de condição precedentes.

133. — Appliquemos estes principios á linha recta, isto é, procuremos a recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) da curva $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ e que tem um contacto de ordem a mais elevada possivel com esta curva.

As equações da recta são de fórmula $Y = AX + B$, $Z = CX + D$, e podemos portanto determinar as quatro constantes A , B , C , D de modo a satisfazer ás quatro equações necessarias para o contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B, \quad z_0 = Cx_0 + D, \quad f'(x_0) = A, \quad f'_1(x_0) = C.$$

Logo as equações da recta pedida são

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0), \quad Z - z_0 = f'_1(x_0)(X - x_0),$$

e a recta é portanto tangente á curva no ponto (x_0, y_0) (n.º 90).

134. — Procuremos em segundo lugar o *circulo osculador* da curva $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ no ponto (x_0, y_0) .

Como toda a circumferencia pôde resultar da intersecção de uma esphera com um plano que passa pelo seu centro, as equações da circumferencia serão

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2, \quad Z = AX + BY + C.$$

N'estas equações ha sete constantes arbitrarias, que vamos determinar de modo a satisfazer ás seis equações necessarias para que a circumferencia e a curva dada tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de segunda ordem, e á condição de passar o plano pelo centro da esphera; isto é, ás sete equações seguintes:

$$(b) \begin{cases} z_0 = Ax_0 + By_0 + C, & c = Aa + Bb + C, \\ z'_0 = A + By'_0, & z''_0 = By''_0, \\ x_0 - a + (y_0 - b)y'_0 + (z_0 - c)z'_0 = 0, \\ 1 + (y_0 - b)y''_0 + y'^2_0 + (z_0 - c)z''_0 + z'^2_0 = 0. \end{cases}$$

Eliminando A , B e C entre a primeira, terceira e quarta das equações precedentes e a equação do plano, vem a equação

$$y''_0 (Z - z_0) = (z'_0 y'_0 - y'_0 z''_0) (X - x_0) + z'_0 (Y - y_0),$$

que pertence (n.º 90—IV) ao plano osculador da curva no ponto (x_0, y_0) .

Logo o círculo osculador n'um ponto da curva está no plano osculador da curva, correspondente ao mesmo ponto.

Eliminando agora A , B e C entre as quatro primeiras equações (b), o que dá

$$y''_0 (z_0 - c) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0) (x_0 - a) + z'_0 (y_0 - b),$$

e em seguida, eliminando a , b e c entre esta equação e as duas ultimas equações (b), vêem as formulas

$$a = x_0 - \frac{(1 + y'_0{}^2 + z'_0{}^2) (y'_0 y''_0 + z'_0 z''_0)}{y''_0{}^2 + z''_0{}^2 + (z'_0 y'_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$b = y_0 + \frac{(1 + y'_0{}^2 + z'_0{}^2) [z''_0 + y'_0 (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)]}{y''_0{}^2 + z''_0{}^2 + (z'_0 y'_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$c = z_0 + \frac{(1 + y'_0{}^2 + z'_0{}^2) [y''_0 + z'_0 (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)]}{y''_0{}^2 + z''_0{}^2 + (z'_0 y'_0 - y'_0 z''_0)^2},$$

que dão as coordenadas do centro do círculo osculador.

Substituindo depois os valores de $x_0 - a$, $y_0 - b$ e $z_0 - c$ na quinta das equações (b) vem, depois de algumas reduções, a formula

$$R = \frac{(1 + y'_0{}^2 + z'_0{}^2)^{\frac{3}{2}}}{[y''_0{}^2 + z''_0{}^2 + (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o raio do círculo osculador. Da comparação d'esta formula com a que dá (n.º 91—I) o raio de curvatura, tomando n'esta x para variavel independente (ponto $x' = 1$ e $x'' = 0$), conclue-se que o raio do círculo osculador de uma curva n'um ponto dado é igual ao raio de curvatura da curva no mesmo ponto.

III

Superficies

135. — *Contacto de uma curva com uma superficie.*—
Sejam

$$Z = F(X, Y)$$

$$y = \varphi(x), z = \psi(x)$$

as equações de uma superficie e de uma curva que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0) . Se pelo ponto $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ da curva, infinitamente proximo do ponto (x_0, y_0, z_0) , tirarmos uma parallela ao eixo dos zz , que encontra a superficie n'um ponto cujas coordenadas são

$$x_0 + h, \varphi(x_0 + h), F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)],$$

a differença entre as ordenadas correspondentes da curva e da superficie é

$$F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - \psi(x_0 + h).$$

Se esta differença fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h , diz-se que a curva e a superficie têm no ponto (x_0, y_0) um contacto de ordem n .

Raciocinando como no n.º 124 e pondo $F[x_0, \varphi(x_0)] = f(x_0)$, acha-se que as condições para que a curva e a superficie tenham um contacto de ordem n são

$$f(x_0) = \psi(x_0), f'(x_0) = \psi'(x_0), \dots, f^n(x_0) = \psi^n(x_0).$$

Se a curva fôr completamente dada assim como a especie da superficie, a superficie da especie considerada, que tem com a curva um contacto de ordem mais elevada no ponto (x_0, y_0) , diz-se *osculadora* da curva dada no ponto (x_0, y_0) .

Para achar esta superficie basta determinar as constantes arbitrarías, cujo numero supponemos igual a $n + 1$, que entram na equação $Z = F(X, Y)$, de modo que as $n + 1$ condições precedentes sejam satisfeitas.

II—Procuremos a equação do *plano osculador* da curva $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Temos para isso de determinar as constantes A , B e C que entram na equação do plano

$$Z = AX + BY + C.$$

de modo que sejam satisfeitas as equações de condição:

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C, A + B\varphi'(x_0) = \psi'(x_0), B\varphi''(x_0) = \psi''(x_0),$$

o que leva a uma equação que coincide com a equação (5) do n.º 90, justificando assim a designação que foi dada ao plano estudado n'esse numero.

136. — *Contacto de duas superficies.* — Sejam

$$z = f(x, y), Z = F(X, Y)$$

as equações de duas superficies que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0) , e $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l$ as coordenadas de um ponto infinitamente visinho de (x_0, y_0, z_0) .

Por serem y e x variaveis independentes, ponhamos $y = \varphi(x)$, representando por φ uma função arbitraría. Se a differença de duas ordenadas das duas superficies, correspondentes aos mesmos valores de $x_0 + h$ e $y_0 + k$ de x e y , isto é a differença

$$\begin{aligned} & F(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0 + k) \\ &= F[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)] - f[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)] \end{aligned}$$

fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h , qualquer que seja φ , diz-se que *as duas superficies têm no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n .*

Vê-se como no n.º 124 que, para que a differença precedente seja infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h , é necessario e sufficiente que as funções $F[x_0, \varphi(x_0)]$ e $f[x_0, \varphi(x_0)]$ e as suas n primeiras derivadas sejam respectivamente iguaes, e que as derivadas de ordem $n + 1$ sejam designaes, o que dá

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \varphi'(x_0)$$

.....

Devendo estas equações ter logar qualquer que sejam as funcções $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, etc., conclue-se que as condições para que as duas superficies tenham um contacto de primeira ordem no ponto (x_0, y_0) são :

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \quad \frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0} = \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

que as condições para que as duas superficies tenham um contacto de segunda ordem no ponto (x_0, y_0) são, além das precedentes, as seguintes :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2};$$

e assim successivamente.

137. — Uma superficie de especie dada $Z = F(X, Y)$ diz-se *osculadora* de uma superficie dada $z = f(x, y)$ se a primeira tem com a segunda o contacto de ordem mais elevada que as superficies da especie considerada podem ter com a superficie dada. Se a superficie $Z = F(X, Y)$ contém m constantes arbitrarías, podemos determinar estas constantes de modo que as superficies tenham, em geral, um contacto de ordem n , se m fôr igual ao numero de equações necessarias para haver contacto de ordem n . Se fôr menor, pode-se estabelecer só um contacto de ordem inferior a n , e a equação fica ainda com algumas constantes arbitrarías.

I — A equação do plano $Z = AX + BY + C$ contendo tres constantes arbitrarías, póde esta superficie ter um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$. Para achar o plano que satisfaz esta condição, determine-se as constantes arbitrarías por meio das tres equações de condição para haver contacto de primeira ordem, que dão

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

portanto a equação do *plano osculador* da superfície é

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0} (X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0} (Y - y_0),$$

e coincide com a equação do plano tangente (n.º 92).

■ — Consideremos, em segundo lugar, a esfera

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Podemos dispôr de tres das constantes arbitrarías que contém esta equação, de modo a satisfazer às tres equações de condição necessarias para que esta superfície tenha um contacto de primeira ordem com a superfície $z = f(x, y)$.

Para obter um contacto de segunda ordem é necessario que a equação da superfície osculadora contenha seis constantes arbitrarías, e portanto a esfera não pôde ter um contacto de segunda ordem com a superfície dada, excepto em alguns pontos particulares da superfície, como vamos vêr.

Para haver contacto de segunda ordem, os valores de Z , $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ tirados da equação da esfera e das equações

$$X - a + (Z - c) \frac{\partial Z}{\partial X} = 0, \quad Y - b + (Z - c) \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} + (Z - c) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = 0$$

devem ser iguaes respectivamente a $f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ quando n'ellas se faz $X = x_0$ e $Y = y_0$, o que dá as equações de condição:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2,$$

$$x_0 - a + (z_0 - c) \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad y_0 - b + (z_0 - c) \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + (z_0 - c) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + (z_0 - c) \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_0} + (z_0 - c) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} = 0.$$

As quatro primeiras equações servem para determinar as constantes arbitrárias a , b , c e R . As duas ultimas, eliminando $z_0 - c$ por meio da quarta, dão as equações

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right] \frac{\partial f}{\partial y_0^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0},$$

a que deve satisfazer o ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície $z = f(x, y)$, para que n'elle a superfície possa ter uma esphera osculadora.

Tomando o ponto (x_0, y_0, z_0) para origem das coordenadas, o plano tangente para plano dos xy e os planos das secções principaes para planos dos xz e yz , e chamando $z = f_1(x, y)$ a nova equação da superfície, as equações precedentes dão [representando por p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 os valores que tomam as derivadas $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$ no ponto $(0, 0, 0)$] $r_0 = t_0, s_0 = 0$, visto ser (n.º 93) $p_0 = 0, q_0 = 0$. Mas as curvaturas c_1 e c_2 das secções principaes que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) são (n.º 93) dadas pelas formulas $c_1 = r_0, c_2 = t_0$. Portanto teremos $c_1 = c_2$; o que prova que *os pontos em que a superfície tem um contacto de segunda ordem com uma esphera, coincidem com os pontos umbilicæes* (n.º 93).

Para um estudo mais desenvolvido e profundo da theoria do contacto consulte-se o bello *Cours d'Analyse* do sr. Hermite.

CAPITULO VII

FUNÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNÇÕES

I

Funções definidas por séries

138. — Vamos n'este Capitulo estudar as funções definidas por séries para estabelecer as condições da sua continuidade, e achar as suas derivadas. Em seguida, formaremos por meio d'estas funções exemplos das singularidades mais importantes relativamente á continuidade e ás derivadas, que as funções apresentam.

139. — *Continuidade das funções definidas por séries.*
— A este respeito vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. — *Se a série*

$$(1) \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots,$$

onde $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. representam funções continuas de x n'um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, fôr uniformemente convergente n'este intervallo, a função $f(x)$ é continua no mesmo intervallo.

Seja a um numero pertencente ao intervallo considerado. Por ser uniformemente convergente a série anterior, a cada

valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, deve corresponder (n.º 24) um numero m tal que será

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a) \right| \geq \frac{\delta}{3}, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(a+h) \right| \geq \frac{\delta}{3}.$$

Mas por ser continua a somma (n.º 33—2.º)

$$P_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x),$$

pode-se sempre dar a ε um valor tal que a desigualdade

$$\left| P_m(a+h) - P_m(a) \right| < \frac{1}{3} \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h inferiores a ε (n.º 33—4.º).

D'estas desigualdades e da igualdade

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= P_m(x+h) - P_m(x) \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

conclue-se pois que, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a δ , ha sempre um valor de ε tal que a desigualdade

$$\left| f(a+h) - f(a) \right| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a ε . Logo a funcção é continua n'um ponto qualquer a do intervallo considerado.

140. — *Derivadas das funcções definidas por séries.* — Principiaremos o que temos a dizer sobre as derivadas das funcções definidas por séries, fazendo notar que as séries, cujos termos são as derivadas dos termos de uma série convergente, póde ser divergente. E' o que mostra claramente a série $\Sigma (-1)^n \frac{x^n}{n}$, que é convergente quando é $x = 1$, em

quanto que a série $\Sigma (-1)^n x^{n-1}$, formada pelas derivadas dos seus termos, é divergente quando é $x = 1$.

Posto isto, vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. — *Se a série (1) fôr convergente n'um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, e se no mesmo intervallo fôr uniformemente convergente a série $\Sigma f'_n(x)$, formada com as derivadas dos termos da precedente, a funcção $f(x)$ admite derivada e é*

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

no intervallo considerado.

Seja a um valor qualquer de x pertencente ao intervallo considerado, e ponhamos para brevidade

$$R(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f_n(x), \quad R_1(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f'_n(x).$$

Teremos

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_1^m f'_n(a) &= \sum_1^{m+p} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] \\ &+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a) \\ &= \sum_1^m \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] + \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a + \theta h) - f'_n(a)] \\ &+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a), \end{aligned}$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Por ser uniformemente convergente a série $\Sigma f'_n(x)$ no intervallo considerado, se dermos a δ um valor tão pequeno quanto se queira, podemos determinar um valor correspondente para m tal que as desigualdades

$$\left| \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a) \right| \leq \frac{\delta}{10}, \quad \left| \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a + \theta h) \right| \leq \frac{\delta}{10}$$

sejam satisfeitas por qualquer valor de p . Logo no mesmo intervalo, a desigualdade

$$\left| \sum_{m+1}^{m+1} [f'_n(a + \theta h) - f'_n(a)] \right| < \frac{\delta}{5}$$

será também satisfeita.

Por outra parte, por ser

$$\sum_1^m f'_n(a) = \lim \sum_1^m \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h},$$

podemos concluir que ha um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\left| \sum_1^m \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] \right| < \frac{\delta}{5}$$

(onde m tem um valor finito anteriormente determinado) será satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1 .

Finalmente, por serem convergentes as séries $\sum f_n(x)$ e $\sum f'_n(x)$, a cada valor de h corresponderá um valor de p tal que será

$$\left| \frac{R(a+h)}{h} \right| < \frac{\delta}{5}, \quad \left| \frac{R(a)}{h} \right| < \frac{\delta}{5}, \quad |R_1(a)| < \frac{\delta}{5}.$$

Das desigualdades precedentes conclue-se que, dando a δ um valor tão pequeno quando se queira, ha sempre um valor correspondente h_1 tal que a desigualdade

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) \right| < \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5}$$

será satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1 ; e portanto teremos

$$\lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \sum_1^{\infty} f'_n(a),$$

que é o que se queria demonstrar.

II

Singularidades d'algumas funcções

141. — *Funcções descontinuas em pontos isolados.* — Uma funcção $f(x)$, definida na visinhança do ponto a , é descontinua no ponto $x = a$ quando n'este ponto se torna infinita ou passa de um valor a outro que differe do primeiro d'uma quantidade finita. Da primeira especie de descontinuidade temos até aqui encontrado muitos exemplos nas funcções racionais, quando a é raiz do denominador, na funcção $\text{tang } x$ quando é $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, etc. Para exemplo da segunda especie de descontinuidade, da qual não offerecem exemplo as funcções que até aqui temos estudado, apresentarei a funcção definida pela série seguinte:

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)} + \dots + \frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})} + \dots$$

Com effeito, temos evidentemente

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = -1 + \frac{2}{1+x^m}$$

$$\frac{1}{1+x^m} = \frac{1}{1+x^{m-1}} + \frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})}$$

$$\frac{1}{1+x^{m-1}} = \frac{1}{1+x^{m-2}} + \frac{x^{m-2}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^{m-2})}$$

.....

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{1-x}{2(1+x)},$$

* Decomponha o Σ em dois Σ , compreendendo
 de um os termos em que m tem expoente par, e
 entre os termos em 304 m tem expoente

d'onde se tira

$$\Sigma = \Sigma + \Sigma$$

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)} + \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)} + \dots + \frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-x^m}{1+x^m} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}$$

D'esta igualdade conclue-se que a funcção considerada é igual a $+1$ se o valôr absoluto de x é menor do que a unidade, que é igual a -1 se o valôr absoluto de x é maior do que a unidade, que é igual a zero se é $x = 1$ e que é igual ao infinito se é $x = -1$. A funcção é pois descontínua no ponto $x = 1$, onde passa do valôr $+1$ ao valôr -1 , e no ponto $x = -1$ onde é infinita.

142. — *Condensação das singularidades.* — As funcções que até aqui temos encontrado apresentam n'um intervallo finito um numero finito de pontos em que são descontínuas. Ha porém funcções que, n'um intervallo finito, são descontínuas em um numero infinito de pontos separados por outros em que são contínuas, e ha funcções que n'um intervallo finito são descontínuas em todos os pontos. Para formar funcções d'esta natureza pode-se seguir um methodo devido a Hankel (4) e por elle chamado *methodo da condensação das singularidades*, por meio do qual, partindo de uma funcção com um numero limitado de singularidades, se fôrma uma funcção com infinitas singularidades. Vamos aqui expôr o principio fundamental d'este methodo, que se pôde estudar desenvolvidamente no excellente livro de Dini: *Fundamenti per la teorica delle funzione di variabili reali*.

II — Represente-se por $\varphi(y)$ uma funcção de y que no intervallo entre $y = -1$ e $y = +1$, o ponto 0 sendo exceptuado, seja continua e menor do que uma quantidade M , que no ponto $y = 0$ seja nulla e que, quando y tende para zero passando por valores positivos e negativos, tenda para um limite differente de zero, ou para dois limites dos quaes um, pelo menos, seja differente de zero.

(4) Hankel: — *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstilligen Functionen* — Tubingue, 1870.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}(1-x)}{(1+x^{2n-1})(1+x^{2n})} = \frac{1-x}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n-1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n-1}} = 2 + \dots$$

A funcção φ ($\text{sen } p x \pi$), onde p é inteiro, será nulla e descontínua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$ (m inteiro), e será contínua nos outros pontos.

N'estes ultimos pontos, a funcção

$$(1) \quad f(x) = \sum_1^{\infty} A_n \varphi(\text{sen } n x \pi)$$

é tambem contínua se $A_1, A_2, \text{ etc.}$ representarem quantidades positivas taes que seja convergente a série $\sum_1^{\infty} A_n$. Com effeito, n'este caso, a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponderá um valor α_1 de α tal que a desigualdade

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} M A_n < \delta$$

será satisfeita quando $\alpha > \alpha_1$. Logo à *fortiori* a desigualdade

$$\left| \sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} A_n \varphi(\text{sen } n x \pi) \right| < \delta$$

será satisfeita pelos mesmos valores de α . A série (1) é pois uniformemente convergente nos pontos considerados, e portanto a funcção $f(x)$ é contínua (n.º 139) nos mesmos pontos.

Consideremos agora os pontos em que a funcção $\varphi(\text{sen } p x \pi)$ é descontínua; e seja primeiramente m um numero par.

Pondo $n = ap + b$, onde b representa um numero inteiro menor do que p , teremos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} A_{ap+b} \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]$$

onde $\sum_{a,b}$ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros e positivos de a e b , excluindo os termos correspondentes a $b = 0$, que são nullos.

Do mesmo modo teremos

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \sum A_{ap+b} \varphi\left[\text{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right]$$

ou, separando os termos correspondentes a $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \sum A_{ap+b} \varphi \left[\text{sen}(ap+b) \left(\frac{m}{p} + h\right) \pi \right] \\ + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi [\text{sen}(am\pi + aph\pi)].$$

Logo será

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} A_{ap+b} \left\{ \varphi \left[\text{sen}(ap+b) \left(\frac{m}{p} + h\right) \pi \right] \right. \\ \left. - \varphi \left[\text{sen}(ap+b) \frac{m}{p} \pi \right] \right\} + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi (\text{sen} aph\pi),$$

e, por ser a função $\sum_{a,b} A_{ap+b} \varphi \left[\text{sen}(ap+b) \frac{m}{p} \pi \right]$ continua quando b é diferente de zero,

$$\lim_{h=0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi (\text{sen} aph\pi).$$

Quer h tenda para zero passando por valores positivos, quer h tenda para zero passando por valores negativos, da uniformidade de convergencia da série

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi (\text{sen} aph\pi)$$

na vizinhança do ponto $h = 0$ conclue-se que, por mais pequeno que seja o valor que se dê a δ , ha sempre um valor α_1 tal que a desigualdade

$$\left| \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \varphi (\text{sen} aph\pi) \right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de α superiores a α_1 .

Por outra parte, por ser convergente a série $\sum A_{ap}$, existe um numero α_2 tal que a desigualdade

NB. O limite $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi)$ a $h=0$ é sempre o $\text{sen } \varphi$ de φ para
 seja a , e δ . Tanto pode h ir a $+\infty$ como a $-\infty$ e a ex-
 pressão em φ (sen $aph\pi$)

NB X $\left| \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \right| < M \left| \sum_{a=\alpha+1}^{\infty} A_{ap} \right| < \delta$? $\frac{\delta}{3}$?

é satisfeita quando $\alpha > \alpha_2$.

Logo as duas desigualdades precedentes são satisfeitas si-
 multaneamente pelos valores de m superiores a α_1 e α_2 .

Determinando assim α , ha sempre um valor h_1 tal que a
 desigualdade (n.º 12, 1.º), isto pela propria maneira
 de limite

$$\left| \sum_{a=1}^{\alpha} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) - \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\alpha} A_{ap} \right| < \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita quando $|h| < h_1$.

D'estas tres desigualdades resulta, somando-as,

$$\left| \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) - \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \right| < \delta$$

quando $|h| < h_1$; e portanto temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\text{sen } aph\pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap},$$

d'onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi) \cdot \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como, por hypothese, um pelo menos dos dois valores
 $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\text{sen } aph\pi)$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(-\text{sen } aph\pi)$, correspondentes
 um a valores positivos e outro a valores negativos de h , é dif-
 ferente de zero, a funcção $f(x)$ é descontínua nos pontos
 $x = \frac{m}{p}$.

Por uma analyse semelhante se mostra que a funcção $f(x)$
 é descontínua nos pontos $x = \frac{m}{p}$, quando m é impar.

Logo a funcção $f(x)$ é contínua quando a x se dá valores
 incommensuraveis, e é descontínua em todos os pontos em
 que x é commensuravel.

Para applicar o methodo anterior é necessario formar uma

função $\varphi(y)$ que satisfaça ás condições impostas anteriormente a esta função. Póde servir para este fim a função

$$\varphi(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k+1][(y+1)^{k-1}+1]},$$

que se deduz da série que considerámos no n.º 141 pondo $x = y + 1$.

Com effeito, sendo aquella série igual a $+1$, 0 , ou -1 segundo é $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$, será esta igual a $+1$, 0 , ou -1 segundo é $y < 0$, $y = 0$ ou $y > 0$.

Temos pois a função

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} n\pi x (\operatorname{sen} n\pi x + 1)^{k-1}}{[(\operatorname{sen} n\pi x + 1)^k + 1][(\operatorname{sen} n\pi x + 1)^{k-1} + 1]}$$

que é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e que é descontinua nos pontos onde x é commensuravel.

III — Partindo da série que vimos de empregar podemos formar agora uma função totalmente descontinua n'um intervallo finito. Com effeito, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! [\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2}$$

é igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ quando x é incommensuravel e é infinita quando x é commensuravel, porque no primeiro caso a função $[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2$ é igual a $+1$, e no segundo caso é nulla quando $n = p$ e $x = \frac{m}{p}$.

Logo a função

$$f(x) = \frac{e - 1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! [\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2}}$$

é igual a zero quando x é commensuravel, e é igual a $+1$ quando x é incommensuravel; e portanto é totalmente descontinua n'um intervallo qualquer.

143. — *Exemplo de uma função continua que não tem derivada.* — Pelo methodo de Hankel pode-se formar funções

continuas com um numero infinito de pontos onde não têm derivada. Não entraremos porém aqui n'esta parte do methodo de condensação das singularidades, e limitar-nos-hemos a apresentar um exemplo ⁽¹⁾ de uma funcção continua que não tem derivada em ponto algum, devido ao sr. Weierstrass, que tractaremos pela mesma analyse que o eminente geometra (*Jornal de Crelle* — tomo 79). Esta funcção é a seguinte:

$$f(x) = \sum_0^{\infty} b^n \cos a^n x \pi,$$

onde a que representa um inteiro impar, e b que representa um numero positivo menor do que a unidade, devem ser escolhidos de modo que seja $ab > 1 + \frac{3}{2} \pi$.

A série que define $f(x)$ é uniformemente convergente qualquer que seja o valor de x . Com effeito, por ser convergente a progressão Σb^n , a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponde um valor m_1 tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

é satisfeita quando $m > m_1$. Logo a desigualdade

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos a^n x \pi \right| < \delta$$

é *à fortiori* satisfeita pelos mesmos valores de m , qualquer que seja x , e a série é portanto uniformemente convergente.

D'aqui e de ser cada termo da série uma funcção continua de x conclue-se (n.º 139) que a funcção $f(x)$ é continua.

Posto isto, vejamos como o sr. Weierstrass demonstra que esta funcção não tem derivada.

Represente x_0 um valor qualquer de x , m um numero inteiro positivo e α_m um numero inteiro tal que seja

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leq \frac{1}{2}.$$

(1) Veja-se outros exemplos na memoria importante de Darboux intitulada — *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris*, 1875).

Representando esta diferença por x_{m+1} e pondo

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

vem

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

d'onde se conclue que x_0 está comprehendido entre x' e x'' , e que se pôde dar a m um valor tão grande que x' e x'' diffiram de x_0 tão pouco quanto se queira.

Por outra parte, temos

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} \right) = A + B,$$

põndo

$$A = \sum_0^{m-1} \left(a^n b^n \cdot \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} \right)$$

$$B = \sum_0^{\infty} \left(b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} x' \pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x' - x_0} \right).$$

Por ser

$$\frac{\cos(a^n x')\pi - \cos(a^n x_0)\pi}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi},$$

$$\left| \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \right| < 1, \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi \right)}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \right| < 1,$$

temos

$$|A| < \pi \sum_0^{m-1} a^n b^n < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m.$$

Como é

$$\cos a^{m+n} x' \pi = \cos a^n (\alpha_m - 1) \pi = - (-1)^{\alpha_m}$$

$$\cos a^{m+n} x_0 \pi = \cos (a^n \alpha_m + a^n x_{m+1}) \pi = (-1)^{\alpha_m} \cos a^n x_{m+1} \pi,$$

temos tambem

$$B = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos a^n x_{m+1} \pi}{1 + x_{m+1}} b^n;$$

e, por serem positivos todos os termos da somma

$$\sum_0^{\infty} \frac{1 + \cos a^n x_{m+1} \pi}{1 + x_{m+1}} b^n,$$

e o primeiro termo não ser menor do que $\frac{2}{3}$ (visto que x_{m+1} está comprehendido entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$),

$$(-1)^{\alpha_m} B > \frac{2}{3} (ab)^m.$$

Logo

$$B = (-1)^{\alpha_m} \frac{2}{3} \eta (ab)^m, \quad A = (-1)^{\alpha_m} \cdot \frac{\eta \varepsilon \pi}{ab - 1} (ab)^m,$$

onde η representa um numero positivo maior do que a unidade, e ε uma quantidade comprehendida entre $+1$ e -1 .
Temos pois

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{ab - 1} \right).$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = - (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1} \right).$$

Dando pois a a e b valores taes que seja $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$,
ou

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1},$$

conclue-se das igualdades precedentes que as razões

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \quad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

que entram nos seus primeiros membros, tendem para $+\infty$ e $-\infty$ quando m tende para o infinito, e portanto quando x' e x'' tendem para x_0 . Logo a funcção $f(x)$ não tem derivada em ponto algum x_0 .

CAPITULO VIII

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS IMAGINÁRIAS

I

Definições e principios geraes

144. — Tendo de tractar agora das funcções de variaveis imaginarias, recordemos primeiro que toda a variavel imaginaria $z = x + iy$ póde ser representada por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y ; e portanto que podemos fallar no ponto z , quando nos quizermos referir ao ponto (x, y) , e reciprocamente que podemos fallar no imaginario representado pelo ponto (x, y) quando quizermos fallar no imaginario z .

Toda a funcção da variavel imaginaria $z = x + iy$ que tem uma derivada finita em todos os pontos $x + iy$ do plano diz-se uma *funcção monogenea* ou *funcção analytica* da variavel z em todo o plano. Assim, por exemplo, são funcções monogeneas em todo o plano as funcções racionaes inteiras, as funcções transcendentés e^z , $\text{sen } z$, $\text{cos } z$, etc.

Se entre cada grupo de dois pontos de uma região A do plano, onde estão representados os valores de z , se poder traçar uma linha continua em todos os pontos da qual a funcção $f(z)$ tenha uma derivada finita, diz-se que $f(z)$ é uma *funcção monogenea* ou uma *funcção analytica* de z na área A .

A funcção monogenea $f(z)$ diz-se *uniforme* na área A

quando a cada ponto z da área corresponde um unico valor da funcção.

A respeito das definições precedentes faremos as observações seguintes:

1.^a— Suppondo que $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ admittem derivadas parciais de primeira ordem relativamente a x e y , e que estas derivadas são funcções continuas d'estas variaveis, para que uma expressão $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ seja funcção monogenea de uma variavel imaginaria $z = x + iy$ é necessario e sufficiente que $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ satisfaçam ás condições seguintes (n.º 68):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

2.^a— Uma funcção de uma variavel imaginaria z póde ser monogenea só em parte da área em que é determinada. Tem, por exemplo, esta propriedade a funcção (1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}$$

quando a , que representa um numero inteiro positivo impar, e b , que representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, satisfazem á condição $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Com effeito, a série considerada é convergente quando é $|z| < 1$ e quando é $|z| = 1$. Em todos os pontos que satisfazem á primeira condição, a funcção tem uma derivada finita, como adiante veremos. Nos pontos que satisfazem á segunda condição, a funcção não tem derivada, visto que, substituindo a variavel z por $\cos \omega + i \sin \omega$, vem

$$f(z) = \sum_0^{\infty} b [\cos(a^n \omega) + i \sin(a^n \omega)],$$

e a funcção $\sum_0^{\infty} b^n \cos(a^n \omega)$ não tem derivada (n.º 443) relativamente a ω .

3.^a— Uma funcção monogenea n'uma área A póde ser

(1) Weierstrass:—Zur Functionen-Lehre (Monatsbericht der K. Akademie zu Berlin, 1880).

uma parte de outra função monogênea n'uma área que contenha a primeira. Assim, por exemplo, a função definida pela série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

convergente quando é $|z| < 1$, faz parte da função $\frac{1}{1-z}$ monogênea em todo o plano, excepto no ponto $z = 1$.

Do mesmo modo, a função definida pela série (1)

$$f(z) = F(z) - \frac{1}{z-a} + (z-a-1) \left[\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-a)^3} + \dots \right]$$

é igual a $F(z)$ quando $|z-a| > 1$, e é igual ao infinito quando $|z-a| < 1$. Logo se $F(z)$ representa uma função monogênea em todo o plano, $f(z)$ representa uma parte d'essa função monogênea.

4.ª — Quando a região do plano em que uma expressão analytica $f(z)$ é determinada se compõe de muitas áreas separadas, $f(z)$ póde representar, n'estas differentes áreas, differentes funções monogêneas completamente independentes. Esta observação importante foi demonstrada pelo sr. Weierstrass da maneira seguinte:

Seja $\varphi(z)$ uma expressão igual a $+1$ quando $|z| < 1$, e igual a -1 quando $|z| > 1$. Pondo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

a expressão

$$F_0(z) + F_1(z) \varphi(z)$$

é igual a $f_1(z)$ quando $|z| < 1$, e é igual a $f_2(z)$ quando $|z| > 1$.

(4) Veja-se o nosso artigo: — *Exemples de fonctions à espaces lacunaires* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, tomo VI.

Ha varias expressões analyticas satisfazendo às condições impostas a $\varphi(z)$; aqui empregaremos a expressão (1)

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k - 1}{(1 + z^k - 1)(1 + z^k)}$$

estudada no n.º 141, no caso das variaveis reaes, e que tem logar tambem no caso das variaveis imaginarias. Com effeito, por ser

$$\varphi(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - z^m}{1 + z^m}$$

conclue-se que $\varphi(z) = 1$ quando $|z| < 1$, e que $\varphi(z) = -1$ quando $|z| > 1$.

Ha muitos outros meios de formar expressões analyticas satisfazendo às condições do theorema enunciado. Aqui exporemos ainda um, devido ao sr. Lerch, professor na Escola Polytechnica de Praga (2).

Sejam u_1 e u_2 duas funcções monogeneas independentes, e consideremos a fracção continua

$$f(z) = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \dots}}$$

cujas convergentes c_{n+1} e c_n estão ligadas pela relação

$$c_{n+1} = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{c_n},$$

ou

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_n - u_1}{c_n - u_2},$$

d'onde resulta

$$\frac{c_n - u_1}{c_n - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2}, \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-2} - u_1}{c_{n-2} - u_2}, \text{ etc.},$$

(1) Esta expressão é reciproca d'outra considerada pelos srs. Schröder e Tannery. Veja-se um artigo que a este respeito publiquei no *Bulletin des Sciences mathématiques* (tomo XXII).

(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2.ª série, tomo x.

e portanto

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} \cdot \frac{c_0 - u_1}{c_0 - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+2},$$

visto ser $c_0 = u_1 + u_2$.

D'esta igualdade conclue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = u_1$, se $|u_2| < |u_1|$, e que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = u_2$, se $|u_2| > |u_1|$; isto é, que a expressão $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$ representa u_1 na área onde é $|u_2| < |u_1|$, e que representa u_2 na área onde é $|u_2| > |u_1|$.

II

Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias

145. — THEOREMA. — *Se a funcção $f(z)$ tiver uma derivada finita para todos os valores que toma z , quando passa de z_0 para Z descrevendo a recta que une estes dois pontos, será ⁽¹⁾*

$$(1) \quad f(Z) - f(z_0) = \Re [(Z - z_0) f'(z_1)] + \Im [(Z - z_0) f'(z_2)],$$

z_1 e z_2 representando dois valores de z comprehendidos no caminho seguido por z para ir de z_0 a Z . Será tambem ⁽²⁾

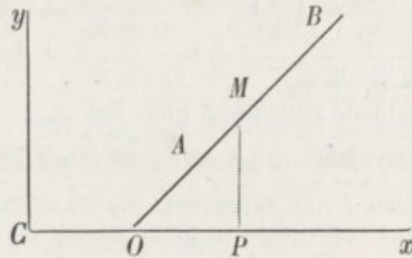
$$(2) \quad f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2} e^{ai} (Z - z_0) f'[z_0 + \theta (Z - z_0)],$$

λ e θ representando quantidades reaes positivas comprehendidas entre 0 e 1.

(1) Pelas notações $\Re [A]$ e $\Im [A]$ representa-se a parte real e a parte imaginaria de A .

(2) Esta formula importante é devida ao sr. Darboux (*Jornal de Liouville*, 3.^a série, tomo II). A demonstração que vamos dar d'ella é devida ao sr. Mansion (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3.^a série, tomo X).

Sejam AB a recta descripta pelo ponto z ; A , M e B os pontos correspondentes aos imaginarios z_0 , z e Z ; ω o angulo



BOx da recta com o eixo das abscissas; e ρ_0 , ρ , ρ' , b as distancias OA , OM , OB , CO . Será

$$z = CP + iMP = b + \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) = b + \rho e^{i\omega},$$

e do mesmo modo

$$z_0 = b + \rho_0 e^{i\omega}, \quad Z = b + \rho' e^{i\omega}.$$

Logo temos

$$f(z) = f(b + \rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

e, derivando relativamente a ρ ,

$$e^{i\omega} f'(z) = \varphi'(\rho) + i\psi'(\rho).$$

Applicando agora ás funcções $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ o theorema 3.º do n.º 62, vem

$$\varphi(\rho') = \varphi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0) \varphi'(\rho_1), \quad \psi(\rho') = \psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0) \psi'(\rho_2),$$

ρ_1 e ρ_2 representando dois valores de ρ correspondentes a dois valores z_1 e z_2 de z , comprehendidos no intervallo AB . Temos pois a igualdade

$$f(Z) = \varphi(\rho') + i\psi(\rho')$$

$$= \varphi(\rho_0) + i\psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0) [\varphi'(\rho_1) + i\psi'(\rho_2)]$$

$$= f(z_0) + (\rho' - \rho_0) \{ \varphi'(\rho_1) + i\psi'(\rho_2) \},$$

que, por ser

$$(\rho' - \rho_0) e^{i\omega} = Z - z_0,$$

dá a relação (1).

Pondo na formula (1)

$$Z - z_0 = B e^{ib}, f'(z_1) = C e^{ic}, f'(z_2) = D e^{id}$$

vem

$$f(Z) - f(z_0) = BC \cos(b + c) + BDi \sin(b + d) = H e^{i\alpha},$$

onde $H^2 = B^2 C^2 \cos^2(b + c) + B^2 D^2 \sin^2(b + d)$.

Suppondo agora $C \geq D$, temos $H^2 \leq 2B^2 C^2$ e portanto $H = \lambda BC \sqrt{2}$, onde λ representa um factor positivo igual ou inferior á unidade.

Logo temos a formula

$$f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2} e^{i(h - b - c)} (Z - z_0) f'(z_1)$$

que dá a formula (2) pondo $h - b - c = a$ e notando que das relações

$$Z - z_0 = (\rho' - \rho_0) e^{i\omega}, z_1 - z_0 = (\rho_1 - \rho_0) e^{i\omega}, \rho_1 - \rho_0 < \rho' - \rho_0$$

se tira $\rho_1 - \rho_0 = \theta (\rho' - \rho_0)$, e portanto $z_1 - z_0 = \theta (Z - z_0)$, θ representando uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Se fôr $D > C$, demonstra-se o theorema do mesmo modo, pondo $H = \lambda BD \sqrt{2}$.

146. — Do theorema que vimos de demonstrar deduz-se, applicando-o á funcção

$$\varphi(z) = f(Z) - \left[f(z) + \frac{Z - z}{1} f'(z) + \dots + \frac{(Z - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z) \right],$$

o theorema seguinte:

Se as funcções $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^n(z)$ forem finitas para todos os valores que toma z quando passa de z_0 a Z descrevendo a recta que une estes dois pontos, será

$$f(Z) = f(z_0) + (Z - z_0)f'(z_0) + \dots + \frac{(Z - z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z_0) + R_n,$$

$$R_n = \lambda \sqrt{z} e^{ai} \frac{(Z - z_0)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n [z_0 + \theta (Z - z_0)].$$

A formula precedente é, como se vê, a *formula de Taylor*, que foi demonstrada primeiro no caso das variaveis reaes, e que foi estendida por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias. A expressão que vimos de achar, do resto R_n é a expressão devida ao sr. Darboux ⁽¹⁾, com a fórma que lhe deu o sr. Mansion ⁽²⁾.

NOTA.—Baseando-se no theorema demonstrado no n.º 145, pode-se estender ao caso das variaveis imaginarias o theorema 1.º do n.º 106. Pondo depois no resultado $F(z) = (z - z_0)^{k+1}$ acha-se o theorema que vimos de demonstrar.

147.—*Desenvolvimento do binomio.*—Applicando a formula de Taylor á funcção $y = (1 + z)^k$, onde k é real, e considerando o ramo que dá $y = 1$ quando $z = 0$, vem como no n.º 108,

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{n-1} \binom{k}{a} z^a + R_n,$$

$$R_n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} z^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z} \right)^{n-1} (1+\theta z)^{k-1}.$$

1) Se o módulo ρ de $z = \rho e^{i\omega}$ é menor do que a unidade, a quantidade

$$\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} \rho^n$$

tende (n.º 108) para zero quando n tende para o infinito. Além d'isso é

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta z} \right| = \frac{1-\theta}{\sqrt{1+\theta^2 \rho^2 + 2\theta\rho \cos \omega}} \leq \frac{1-\theta}{1-\theta\rho} < 1.$$

⁽¹⁾ Loc. cit.

⁽²⁾ Loc. cit.

Logo R_n tende para 0 quando n tende para o infinito, e o binómio considerado pôde ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \binom{k}{a} z^a.$$

2) Se o módulo de z é maior do que a unidade, a série precedente é divergente. Com effeito, o módulo do quociente de dois termos consecutivos d'esta série tende para ρ , quando a tende para o infinito. Logo ha um valor de a a partir do qual os módulos dos termos da série crescem indefinidamente.

Para o estudo do caso em que o módulo de z é igual á unidade, assim como para o estudo do caso em que k é imaginario, pode-se consultar uma excellente memoria do sr. Mansion publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tomo ix).

Appliquemos agora a formula que vimos de obter á deducção d'algumas formulas de que teremos de fazer uso.

■ — A igualdade

$$\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dá

$$(2i)^k \text{sen}^k z = e^{kiz} (1 - e^{-2iz})^k.$$

Se k é um numero inteiro positivo, vem

$$\begin{aligned} (2i)^k \text{sen}^k z &= \sum_{a=0}^k (-1)^a \binom{k}{a} e^{(k-2a)iz} \\ &= \sum_{a=0}^k (-1)^a \binom{k}{a} [\cos(k-2a)z + i \text{sen}(k-2a)z]. \end{aligned}$$

D'esta igualdade tira-se, se k é par, attendendo a que os termos dependentes do seno se reduzem dois a dois,

$$(2i)^k \text{sen}^k z = \sum_{a=0}^k (-1)^a \binom{k}{a} \cos(k-2a)z,$$

e, se k é impar,

$$2^k i^{k-1} \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^k (-1)^a \binom{k}{a} \operatorname{sen} (k-2a) z.$$

Estas formulas importantes dão os desenvolvimentos da potencia k de $\operatorname{sen} z$ ordenados segundo os senos e os cosenos dos arcos multiples de z . O numero de termos d'estes desenvolvimentos é finito e os termos equidistantes dos extremos são iguaes, como é facil de vêr.

III—Por uma analyse semelhante á que vem de ser empregada se acha, quando k é inteiro e positivo:

$$2^k \cos^k z = \sum_{a=1}^k \binom{k}{a} \cos (k-2a) z.$$

III—Reciprocamente, das igualdades

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)^k = (e^{iz})^k = e^{ikz} = \cos kz + i \operatorname{sen} kz$$

$$(\cos z - i \operatorname{sen} z)^k = \cos kz - i \operatorname{sen} kz,$$

onde k é inteiro e positivo, deduz-se, devolvendo a potencia dos binomios que entram no primeiro membro e depois sommando-as e subtraindo-as,

$$\operatorname{sen} kz = k \cos^{k-1} z \operatorname{sen} z - \binom{k}{3} \cos^{k-3} z \operatorname{sen}^3 z$$

$$+ \binom{k}{5} \cos^{k-5} z \operatorname{sen}^5 z - \dots$$

$$\cos kz = \cos^k z - \binom{k}{2} \cos^{k-2} z \operatorname{sen}^2 z$$

$$+ \binom{k}{4} \cos^{k-4} z \operatorname{sen}^4 z - \dots$$

148.—*Desenvolvimento de e^z , $\operatorname{sen} z$, $\cos z$.*—Aplicando a formula de Taylor á funcção e^z , vem

$$e^z = 1 + z + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda \sqrt{2} e^{a_1} \frac{(1-\theta)^{n-1} z^n}{n-1!} e^{\theta z}.$$

Por $\frac{|z|^{n-1}}{n-1!}$ tender para zero quando n tende para o infinito, esta formula mostra que e^z é sempre susceptível de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$e^z = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{z^a}{a!}.$$

Por uma analyse semelhante se vê que as séries achadas no n.º 114 para o seno e o coseno d'uma variavel real ainda téem logar no caso das variaveis imaginarias.

149. — *Desenvolvimento do log (1 + z).* — Applicando a formula de Taylor a esta funcção, vem, como no caso das variaveis reaes,

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \dots + (-1)^{n-2} \frac{z^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \lambda \sqrt{2} e^{\alpha i} \cdot \frac{z^n}{1+\theta z} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z} \right)^{n-1},$$

considerando sómente aquelle ramo de $\log(1+z)$ cujo valor inicial é igual a zero. E' facil de vêr que, se o módulo de z é menor do que a unidade, temos o desenvolvimento em série

$$\log(1+z) = \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^{a-1} \frac{z^a}{a},$$

e que, se o módulo de z é maior do que a unidade, esta série é divergente.

150. — O processo anterior para achar o desenvolvimento das funcções em série é raras vezes applicavel por causa da complicação da expressão do resto R_n , que é necessario discutir, para saber se R_n tende para zero quando n tende para o infinito. Recorre-se porisso n'este caso a um theorema célebre de Cauchy, que será demonstrado no *Calculo Integral*, e ainda a um theorema importante, devido ao sr. Weierstrass, que aqui vamos demonstrar.

Demonstraremos porém primeiramente o seguinte:
 LEMMA — *Se a série*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z = x + iy$$

fôr convergente n'um circulo de raio dado, e se, em todos os pontos do interior d'este circulo que têm o mesmo módulo ρ , o módulo de $F(z)$ fôr menor do que uma quantidade positiva L , o módulo de cada termo da série será também menor do que L .

Com effeito, multiplicando a série proposta por z^{-m} , vem

$$\begin{aligned} z^{-m} F(z) &= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n z^{n-m} + R, \end{aligned}$$

R representando uma quantidade cujo módulo tende para zero quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é $|z^{-m} F(z)| < L\rho^{-m}$, e como, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a uma quantidade positiva δ , ha sempre um valor k_1 tal que é $|R| < \delta$, quando $k > k_1$, teremos (n.º 8—I)

$$|z^{-m} F(z) - R| < L\rho^{-m} + \delta,$$

ou

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n z^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta.$$

Dando agora n'esta desigualdade a z os valores

$$z = \rho, \rho e^{i\theta}, \rho e^{2i\theta}, \dots, \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valor maior do que os diferentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de z , temos as desigualdades

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)\theta} + c_m + \sum_{n=m+1}^k c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)\theta} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

que dão, sommando e attendendo ao theorema I do n.º 8,

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \dots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} \right) + \sum_{n=m+1}^k c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \dots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} \right) + ac_m \right| < a (L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \dots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A$$

e dando á quantidade θ um valor que não seja raiz da equação $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, isto é, um valor tal que A seja finito,

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n A \rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^k c_n A \rho^{n-m} \right| < a (L\rho^{-m} + \delta)$$

ou

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte da desigualdade precedente independente de c_m .

D'esta desigualdade tira-se

$$(a) \quad |c_m| \leq L\rho^{-m} + \delta;$$

porque, se fosse

$$|c_m| > L\rho^{-m} + \delta,$$

podia dar-se a a um valor tão grande que fosse

$$|c_m| - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

ou à fortiori

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser (n.º 8—I)

$$\frac{|B|}{a} + \left| c_m + \frac{B}{a} \right| \geq |c_m|.$$

Da desigualdade (a) tira-se o theorema enunciado; porque, se fosse $|c_m| > L\rho^{-m}$, podia dar-se a δ um valor tão pequeno que fosse $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$.

151. — THEOREMA. — *Se uma função $f(z)$ fôr susceptível de ser desenvolvida na série uniformemente convergente dentro de um círculo de raio R :*

$$(1) \quad f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z) + \dots,$$

e se as funções $P_0(z)$, $P_1(z)$, etc. forem susceptíveis de ser desenvolvidas nas séries ordenadas segundo as potencias de z , convergentes dentro do mesmo círculo:

$$(2) \quad P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}z + A_2^{(n)}z^2 + \dots + A_m^{(n)}z^m + \dots,$$

a função $f(z)$ será também susceptível de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z :

$$(3) \quad f(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_mz^m + \dots,$$

e será

$$(4) \quad A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)} + \dots$$

Este theorema foi demonstrado pelo sr. Weierstrass da maneira seguinte (4):

(4) Monatsberichte der Kön. Akademie de Wissenschaften zu Berlin—1880.

Seja ρ uma quantidade positiva menor do que R ; por ser uniformemente convergente a série (1) na circumferencia de raio ρ , a cada valor da quantidade positiva δ , por mais pequeno que seja, corresponderá um valor n_1 de n tal que a desigualdade

$$|P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \dots + P_{n+p}(z)| < \delta$$

será satisfeita por todo o valor de n superior a n_1 e por todos os valores de z que têm o módulo ρ , qualquer que seja p .

Mas temos (n.º 22)

$$P_{n+1}(z) + \dots + P_{n+p}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(n+1)} + \dots + A_m^{(n+p)}).$$

Logo, em virtude do lemma precedente, temos a desigualdade

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}| < \delta \rho^{-m},$$

d'onde se conclue a convergencia da série (4).

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja $R > \rho_1 > \rho$, podemos dar a n um valor tal que seja tambem

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}| < \delta \rho_1^{-m}$$

por maior que seja p ; e portanto

$$|\lim_{p \rightarrow \infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)})| \leq \delta \rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)} = A'_m,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}) = A''_m,$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m, \quad |A''_m| \leq \delta \rho_1^{-m},$$

vem, para os valores de z cujo módulo ρ é inferior a ρ_1 , a desigualdade

$$\begin{aligned} & |A'_0| + |A''_1 z| + \dots + |A''_m z^m| + \dots \\ & < \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \dots + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m + \dots \right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}, \end{aligned}$$

da qual se conclue que (n.º 20 — 2.º) a série:

$$A''_0 + A''_1 z + \dots + A''_m z^m + \dots$$

é absolutamente convergente.

Por outra parte, é também convergente (n.º 22) a série

$$\begin{aligned} P_0(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)}) \\ &= A'_0 + A'_1 z + \dots + A'_m z^m + \dots \end{aligned}$$

Temos pois

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + A''_m) z^m = \sum_{a=0}^n P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m$$

e portanto (n.º 8 — I)

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Como a δ se póde dar um valor tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m,$$

isto é, a igualdade (3), que se queria demonstrar.

EXEMPLO 1.º — A funcção $f(z) = \text{sen}(\text{sen } z)$ dá a série

$$f(z) = \operatorname{sen} z - \frac{\operatorname{sen}^3 z}{3!} + \frac{\operatorname{sen}^5 z}{5!} - \dots$$

que é uniformemente convergente qualquer que seja z (n.º 24). A função

$$\operatorname{sen}^n z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^n$$

póde ser desenvolvida (n.º 22) em série ordenada segundo as potencias de z , qualquer que seja z . Logo, em virtude do theorema precedente, tambem a função $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} z)$ póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z , qualquer que seja z .

EXEMPLO 2.º — Vê-se do mesmo modo que a função

$$f(z) = \operatorname{sen} [\log(z + 1)]$$

póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z quando o módulo de z é menor do que a unidade.

152. — Applicando o theorema precedente ás séries ordenadas segundo as potencias de $z - a$, sendo z variavel e a constante, deduz-se, como vamos vêr, o seguinte:

THEOREMA. — *Se a série*

$$(1) f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_n(z - a)^n + \dots$$

fôr convergente no interior d'um circulo de centro a e raio R , isto é quando $|z - a| < R$, e se z_0 representar um ponto do interior d'este circulo, as derivadas $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, etc. existem e são finitas e respectivamente iguaes ás sommas das derivadas de primeira ordem, de segunda ordem, etc. dos termos da série proposta, isto é:

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Em segundo logar, se fôr $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$, teremos

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \dots$$

Com effeito, pondo na série proposta $z = z_0 + h$, teremos

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + h - a)^n.$$

Esta série, considerada como função de h , é uniformemente convergente quando é $|z_0 + h - a| < R$, ou à *fortiori* (n.º 8—I) quando é $|z_0 - a| + |h| < R$. Desenvolvendo pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h , teremos, em virtude do theorema precedente,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h f_1(z_0) + h^2 f_2(z_0) + \dots,$$

onde é

$$f_1(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f_2(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Pondo agora $h = z - z_0$, vem

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f_1(z_0) + \dots + (z - z_0)^n f_n(z_0) + \dots,$$

com a condição $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$.

Para das formulas precedentes tirar o theorema enunciado, basta notar que a ultima dá (passando $f(z_0)$ para o primeiro membro, dividindo depois os dois membros por $z - z_0$ e fazendo finalmente tender z para z_0) $f_1(z_0) = f'(z_0)$, e que, como cada uma das funcções $f_1(z)$, $f_2(z_0)$, $f_3(z_0)$, etc. se deduz da anterior como $f'(z_0)$ se deduz de $f(z_0)$, temos $f_2(z_0) = f''(z_0)$, $f_3(z_0) = f'''(z_0)$, etc.

COROLLARIO. — *Se a série (1) fôr convergente no interior do circulo de raio R e centro a , a funcção é continua dentro do mesmo circulo.*

Com effeito, em todos os pontos do interior d'este circulo $f(z)$ tem uma derivada finita.

153. — A respeito das derivadas das séries enunciaremos ainda o theorema seguinte, que se demonstra do mesmo modo que o theorema análogo relativo ás funcções de variaveis reaes (n.º 140):

Se a série $\Sigma f_n(z)$ fôr convergente n'uma área dada, e se na mesma área fôr uniformemente convergente a série $\Sigma f'_n(z)$ formada com as derivadas dos termos da precedente, é $f'(z) = \Sigma f'_n(z)$ na mesma área.

III

Funcções regulares n'uma região do plano

154. — *Definição.* — Se a funcção $f(z)$, na visinhança do ponto z_0 , fôr susceptível de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, de modo que haja um numero positivo R tal que seja

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

quando $|z - z_0| < R$, diz-se que a funcção $f(z)$ é regular no ponto z_0 .

E' facil de vêr que $(1 + z)^k$, e^z , $\log(1 + z)$, etc. são funcções regulares em todo o plano excepto em pontos isolados.

1) O binomio $(1 + z)^k$ dá

$$\begin{aligned} (1 + z)^k &= (1 + z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0} \right]^k \\ &= (1 + z_0)^k \Sigma \binom{k}{n} \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0} \right)^n \end{aligned}$$

quando $|z - z_0| < |1 + z_0|$; e portanto é regular em todo o plano, exceptuando-se o ponto $z_0 = -1$ quando k não é inteiro e positivo.

2) Da série

$$e^z = e^{z-z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z_0} \left[1 + z - z_0 + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} + \dots \right]$$

conclue-se que a função e^z é regular em todo o plano.

3) Da igualdade

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= \log(1+z_0) + \log\left(1 + \frac{z-z_0}{1+z_0}\right) \\ &= \log(1+z_0) + \frac{z-z_0}{1+z_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

que tem logar quando é $|z-z_0| < |1+z_0|$, conclue-se que $\log(1+z)$ é uma função regular em todo o plano excepto no ponto $z_0 = -1$.

4) Do mesmo modo se mostra que $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ são funções regulares em todo o plano.

155. — THEOREMA 1.º — *Se uma função uniforme, regular em todos os pontos de uma área A , fôr constante em todos os pontos de uma linha finita contida na área A , é constante em toda a área.*

Este theorema é devido a Neumann, e foi por elle demonstrado do modo seguinte:

Representando por a o valor de z correspondente a um ponto qualquer da linha dada, teremos, para todos os valores de z representados pelos pontos de um circulo de centro a e raio R ,

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

ou (n.º 152)

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^n(a) + \dots$$

Mas por ser constante a função $f(z)$ em todos os pontos da linha dada, temos $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, etc. Logo será $f(z) = f(a)$ em todo o circulo considerado.

Tomando em seguida um ponto b do circulo anterior e repetindo o raciocinio precedente demonstra-se do mesmo modo que $f(z) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um segundo circulo, que é em parte distincto do anterior. Tomando um

ponto c d'este circulo acha-se do mesmo modo $f(z) = f(c) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um terceiro circulo. Continuando do mesmo modo até ao contórno da área A demonstra-se completamente o theorema.

THEOREMA 2.º—*Se duas funcções uniformes, regulares em todos os pontos de uma área A , forem iguaes em todos os pontos de uma linha finita contida na área A , são iguaes em toda a área.*

Este theorema é consequencia immediata do anterior, pois que a differença das duas funcções sendo nulla em todos os pontos da linha dada, será nulla em toda a área A .

THEOREMA 3.º—*Se uma funcção uniforme, regular no ponto a , se annulla assim como as suas derivadas até á ordem $m - 1$, quando é $z = a$, teremos*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$ é uma funcção uniforme regular na visinhança do ponto a .

Com effeito, sendo por hypothese

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \dots + c_m(z - a)^m + \dots$$

e $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, etc., temos

$$f(z) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{(z - a)}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \dots \right],$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

THEOREMA 4.º—*Os pontos em que uma funcção uniforme, regular n'uma área A , tem um mesmo valor, estão separados por intervallos finitos, se a funcção não é constante.*

Com effeito, por não ser constante a funcção $f(z)$ na área A , as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc. não podem ser todas iguaes a zero. Chamando pois $f^m(a)$ a primeira derivada que não é nulla, teremos a differença

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z - a}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \dots \right],$$

onde é possivel dar a $|z - a|$ um valor tão pequeno δ , que o módulo do seu primeiro termo seja maior que o módulo da somma dos seguintes quando $|z - a| \leq \delta$. Logo no cir-

culo de centro a e raio δ a diferença $f(z) - f(a)$ não pôde ser nulla em ponto differente de a .

THEOREMA 5.º—*A somma de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área A , é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Este theorema é uma consequencia immediata do theorema 4.º do n.º 22. Com effeito, chamando $f(z)$ e $F(z)$ as duas expressões dadas e a um ponto da área A , teremos

$$f(z) = \Sigma c_n (z - a)^n, \quad F(z) = \Sigma C_n (z - a)^n,$$

e portanto

$$f(z) + F(z) = \Sigma (c_n + C_n) (z - a)^n.$$

THEOREMA 6.º—*O producto de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área A , é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior, partindo do theorema 5.º do n.º 22.

THEOREMA 7.º—*O quociente de duas expressões $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, uniformes e regulares na área A , é regular nos pontos da mesma área em que o denominador $\psi(z)$ se não annulla.*

Com effeito, pondo

$$\psi(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \dots + c_n (z - a)^n + \dots,$$

onde c_0 é differente de zero, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi(z)} &= c_0 \left[1 + \frac{(z - a) (c_1 + c_2 (z - a) + \dots)}{c_0} \right]^{-1} \\ &= c_0 [1 + P(z - a)]^{-1}, \end{aligned}$$

pondo

$$\frac{(z - a) [c_1 + c_2 (z - a) + \dots]}{c_0} = P(z - a).$$

Dando a $|z - a|$ um valor tão pequeno que seja $|P(z - a)| < 1$, podemos desenvolver $[\psi(z)]^{-1}$ em série ordenada segundo as potencias de $z - a$, e teremos

$$\frac{1}{\phi(z)} = c_0 \left\{ 1 - P(z-a) + [P(z-a)]^2 - [P(z-a)]^3 + \dots \right\}.$$

Esta série é uniformemente convergente na vizinhança do ponto a assim como (n.º 22) as séries que resultam de $P(z-a)$, $[P(z-a)]^2$, etc.; logo (n.º 151) a função $\frac{1}{\phi(z)}$ é susceptível de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z-a$ na vizinhança do ponto a . Esta função é pois regular no ponto a , assim como, em virtude do theorema anterior, a função $\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \varphi(z) \cdot \frac{1}{\phi(z)}$.

IV

Funcções regulares em todo o plano

156. — A toda a função uniforme $f(z)$ regular em todos os pontos do plano chama-se *função inteira* ou *holomorpha*. Taes são, entre as funcções algebraicas, os polynomios racionaes inteiros relativamente a z , e, entre as funcções transcendentales, as funcções e^z , $\sin z$, $\cos z$ e, em geral, as funcções que podem ser desenvolvidas na série ordenada segundo as potencias inteiras positivas de z :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

qualquer que seja z . Com effeito, estas funcções são regulares em todos os pontos do plano, pois que, desenvolvendo segundo as potencias de $z-a$ os termos da série

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a+a) + \dots + c_n(z-a+a)^n + \dots,$$

obtem-se, em virtude do theorema do n.º 151, o desenvolvimento de $f(z)$ com série ordenada segundo as potencias de $z-a$, qualquer que seja a .

A theoria das funcções transcendentas inteiras é a continuação natural da theoria das funcções racionais inteiras, estudada na Algebra, e as suas propriedades são, em parte, análogas ás propriedades d'estas. São tambem susceptíveis de se exprimir por um producto de factores que tornam explicitas as raizes da funcção. Este resultado importante, demonstrado primeiro por Euler, Cauchy, Gauss, etc., em alguns casos particulares, foi completamente estabelecido pelo sr. Weierstrass (1). Antes porém de expôr o bello theorema devido ao eminente geometra de Berlim, vamos considerar as duas funcções $\text{sen } z$ e $\text{cos } z$ cuja decomposição em factores, devida a Euler, se obtém por considerações particulares.

157.—*Decomposição do seno e do coseno em factores.*

—Da expressão de $\text{sen } kz$ dada no n.º 147—III tira-se, quando k é impar, pondo $\text{cos}^2 z = 1 - \text{sen}^2 z$,

$$\text{sen } kz = f(\text{sen } z),$$

onde f representa uma funcção inteira do gráo k . Os k valores de $\text{sen } z$, que annullam esta funcção, devem corresponder aos valores de z que satisfazem á equação $\text{sen } kz = 0$ e que dão para $\text{sen } z$ valores distinctos, isto é, aos valores de z seguintes :

$$0, \pm \frac{\pi}{k}, \pm \frac{2\pi}{k}, \dots, \pm \frac{(k-1)\pi}{2k}.$$

Logo temos

$$\text{sen } kz = A \text{sen } z \left(1 - \frac{\text{sen}^2 z}{\text{sen}^2 \frac{\pi}{k}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{sen}^2 z}{\text{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right),$$

onde A é uma constante que vamos determinar. Para isso, divide-se os dois membros da igualdade precedente por kz e faça-se depois tender z para zero. O primeiro membro tendendo para a unidade e o segundo para $\frac{A}{k}$, teremos $A = k$.

(1) Weierstrass:—*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen* (Abhandlungen der K. Akademie zu Berlin—1876).

Mudando na igualdade precedente z em $\frac{\pi z}{k}$, temos

$$\operatorname{sen} \pi z = k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{k}} \right) \dots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}} \right).$$

Vamos agora procurar o limite para que tende o segundo membro d'esta igualdade quando k tende para o infinito.

Por tender para a unidade a razão do seno para o arco quando o arco tende para zero, é facil de vêr que, quando k tende para o infinito, teremos

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{4} \right) \left(1 - \frac{z^2}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} R_m$$

$$R_m = \frac{1}{2} \prod_{n=m}^{(k-1)} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} \right).$$

Por ser (em virtude do que se disse no n.º 148 e de ser $\frac{1}{2}(k-1)$ o maior valor que póde ter n)

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} - \frac{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^3}{3!} \cos \theta \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} \left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24} \right),$$

onde θ_n representa uma quantidade inferior á unidade em valor absoluto; e por ser

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k} = \frac{\pi^2 z^2}{k^2} (1 + \varepsilon)^2,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena quando k é infinitamente grande, teremos

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = 1 - \frac{z^2 (1 + \varepsilon)^2}{n^2 \left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24} \right)^2} = 1 + \frac{u_n}{n^2},$$

onde u_n representa uma quantidade cujo módulo não pôde ser infinito, qualquer que seja n . Logo

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \cdot \prod_m^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right).$$

Por outra parte, chamando L um numero maior do que as quantidades $u_1, u_2, \text{etc.}$, a série $\sum_1^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ é convergente, visto que os seus termos são menores do que os termos correspondentes da série (n.º 17) $\sum_1^{\infty} \frac{L}{n^2}$; e portanto é também convergente o producto infinito $\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$, e temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_m^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right) = \frac{\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)}{\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_1^{m-1} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)} = 1.$$

Vem pois a formula d'Euler

$$(a) \quad \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Do mesmo modo se decompõe $\cos \pi z$ em factores, o que dá

$$\cos \pi z = \prod_0^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

158. — THEOREMA DE WEIERSTRASS. — *Sendo dada a série de quantidades $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$, pode-se construir uma funcção transcendente inteira, pela formula*

$$(1) \quad f(z) = z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \quad S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

cujas raizes são $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, e cujos respectivos grãos de multiplicidade são $n_0, n_1, \dots, n_c, \dots$

Reciprocamente, se $f_1(z)$ representar uma função inteira cujas raízes são $0, a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$ e os respectivos graus de multiplicidade $n_0, n_1, \dots, n_c, \dots$, esta função pôde ser decomposta em factores, que tornam explicitas estas raízes, por meio da formula

$$(2) \quad f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c},$$

onde $\varphi(z)$ representa uma função inteira.

A demonstração que aqui vamos dar d'este importante theorema é devida ao sr. Mittag-Leffler, professor na Universidade de Stockholm (1).

Da série (n.º 149)

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = -n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

que tem logar quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$, deduz-se

$$(A) \quad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c S_c(1, \infty)}$$

pondo para brevidade

$$S_c(u, v) = \sum_{k=u}^v \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

Logo temos

$$(B) \quad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = e^{-n_c S_c(m_c + 1, \infty)}$$

onde m_c representa um numero inteiro ou zero, devendo n'este ultimo caso considerar-se $e^{n_c S(1, m_c)}$ como representando a unidade.

Considere-se agora uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1,$

(1) Acta Mathematica, tomo IV.

$\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_c, \dots$ taes que a somma $\sum_1^\infty \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valor tão grande que seja

$$(C) \quad n_c | S_c(m_c + 1, \infty) | < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valor que se dê a z , que satisfaça à condição $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon < 1$; o que é sempre possível por ser n'este caso uniformemente convergente a série $S_c(1, \infty)$. O producto ΠE_c , pondo

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = E_c,$$

representa uma funcção regular em todos os pontos do plano e que se annulla nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, como vamos vêr.

Consideremos um ponto qualquer z_0 do plano e os pontos visinhos d'este, isto é, os pontos que satisfazem à condição $|z - z_0| \leq \rho$, onde ρ é uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Por ser $\lim_{c=\infty} a_c = \infty$, é sempre possível dar a c_1 um valor tão grande que a desigualdade $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon$ seja satisfeita por todos os valores de c maiores do que c_1 , e por todos os valores de z que satisfaçam à condição $|z - z_0| \leq \rho$.

Por outra parte, por ser convergente a série $\sum_1^\infty \varepsilon_c$, é sempre possível dar a c_2 um valor tão grande que, dando a δ um valor tão pequeno quanto se queira, a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de c superiores a c_2 , qualquer que seja p .

Logo as duas desigualdades precedentes são satisfeitas ao mesmo tempo pelos valores de c maiores do que a maior das quantidades c_1 e c_2 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leq \rho$.

Das desigualdades precedentes e da desigualdade (C) conclue-se que a desigualdade

$$(D) \quad \sum_{t=c}^{c+p} \left| n_t S_t(m_t + 1, \infty) \right| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de c superiores a c_1 e c_2 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leq \rho$.

Por outra parte, a formula (B) dá

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t(m_t + 1, \infty)}$$

d'onde se tira

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log E_t = -\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t(m_t + 1, \infty),$$

e, em virtude da desigualdade (D),

$$\left| \sum_{t=c}^{c+p} \log E_t \right| < \delta.$$

Logo a série $\sum_{t=1}^{\infty} \log E_t$ é uniformemente convergente na região considerada do plano.

Posto isto, supponhamos primeiramente que z_0 é diferente de a_c e que a ρ se dá um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z_0 - a_c|$. O segundo membro da igualdade

$$\begin{aligned} \log E_c &= n_c \log \left(1 - \frac{z}{a_c} \right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k \\ &= n_c \log \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c} \right) + n_c \log \left(1 - \frac{z_0}{a_c} \right) \\ &\quad + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c} \right)^k \end{aligned}$$

é susceptível de ser desenvolvido em série ordenada segundo

as potencias de $z - z_0$, e temos $(1) \log E_c = P(z - z_0)$; e portanto, applicando o theorema do n.º 451,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log E_c = P_1(z - z_0),$$

d'onde se tira

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1(z - z_0)}.$$

D'esta formula tira-se depois

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \dots + \frac{P_1^n(z - z_0)}{n!} + \dots$$

ou (n.º 454)

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

o que prova que a funcção $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto z_0 , como se queria demonstrar.

Supponhamos agora que z_0 representa uma raiz a_j da funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valor tão pequeno que na área plana determinada pela condição $|z - a_j| \leq \rho$ não exista outra raiz da funcção considerada, teremos

$$\frac{\prod_1^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{P_3(z - a_j)}$$

visto que o primeiro membro não tem a raiz a_j ; e portanto

$$\prod_1^{\infty} E_c = \frac{(-1)^{n_j}}{a_j^{n_j}} (z - a_j)^{n_j} e^{P_3(z - a_j)},$$

(1) Empregaremos, como o sr. Weierstrass, as notações $P(z - z_0)$, $P_1(z - z_0)$, etc. para representar séries ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - z_0$.

d'onde se conclue, como no caso anterior, que a funcção $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto a_j .

As raizes $a_1, a_2, \text{ etc.}$ da funcção que vimos de formar, são todas diferentes de zero. Para que a funcção tenha tambem a raiz 0 basta multiplicar $\prod_1^{\infty} E_c$ por z^{n_0} . Com effeito, temos (n.º 22)

$$z^{n_0} \prod_1^{\infty} E_c = (z_0 + z - z_0) P_2 (z - z_0) = P_4 (z - z_0),$$

e portanto a nova funcção que se obtém é ainda regular em todo o plano.

De tudo o que precede conclue-se a primeira parte do theorema de Weierstrass, isto é, que se póde constituir pela formula (1) uma funcção que se comporta regularmente em todo o plano e que se annulla nos pontos 0, $a_1, a_2, \text{ etc.}$

Para demonstrar a segunda parte d'este theorema, basta notar que o quociente da funcção $f_1(z)$ dada pela funcção $f(z)$, que vimos de formar, não póde ser nullo nem infinito em ponto algum do plano. Logo este quociente representa (n.º 455—7.º) uma funcção $F(z)$ regular em todo o plano, que não se annulla em ponto algum.

Por ser, na visinhança do ponto z_0 ,

$$F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

onde b_0 é diferente de zero, teremos

$$\log F(z) = \log b_0 + \log \left[1 + \frac{(z - z_0)(b_1 + b_2(z - z_0) + \dots)}{b_0} \right].$$

Logo se a $|z - z_0|$ se der um valor tão pequeno que seja

$$\frac{|z - z_0| |b_1 + b_2(z - z_0) + \dots|}{|b_0|} < 1,$$

teremos, em virtude do theorema do n.º 451,

$$\log F(z) = P(z - z_0),$$

e portanto a funcção $\log F(z)$ é inteira. Temos pois, representando por $\varphi(z)$ esta funcção, $F(z) = e^{\varphi(z)}$, e portanto

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} \cdot f(z),$$

que é o que se queria demonstrar.

159. — *Determinação dos factores primarios das funcções inteiras.* — A cada um dos factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c S_c},$$

que entram nas formulas (1) e (2), chama o sr. Weierstrass um *factor primario* das funcções consideradas $f(z)$ e $f_1(z)$. Tanto para decompôr uma funcção inteira dada em factores primarios, como para achar uma funcção inteira que tenha raizes dadas, é necessario conhecer, para cada valor de c , um valor de m_c que satisfaça á desigualdade (C), e para isso basta, como vamos vêr, dar a m_c valores taes que seja convergente a série

$$(E) \quad \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|.$$

Com effeito, se esta série é convergente, podemos dar a ε_c o valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|,$$

chamando λ uma quantidade independente de z e de c .

Mas, por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

e

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|},$$

a desigualdade (C) pôde ser substituída pela seguinte:

$$\left| \frac{n_c z^{m_c + 1}}{a_c^{m_c + 1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|} < \varepsilon_c,$$

que é satisfeita, visto que se pôde dar a λ o valor máximo $\frac{1}{1 - \varepsilon}$

que toma $\frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|}$ quando é $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon < 1$.

Se houver pois um valor de m_c , constante qualquer que seja c , tal que a série (E) seja convergente, emprega-se este valor em todos os termos das formulas (1) ou (2). No caso contrario, põe-se $m_c = c$; com effeito, a série (E) transforma-se então na série $\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{c+1}}{a_c^{c+1}} \right|$, que é convergente (n.º

19—IV), visto que a raiz $\sqrt[c]{n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^{c+1}}$ tende para zero quando c tende para o infinito.

EXEMPLO.—Procuremos a fórmula geral das funções inteiras cujas raízes são $0, 1, -1, 2, -2, \dots, c, -c$, etc.

Como a série $\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{a_c^2} \right| = \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{z}{c} \right|^2$ é convergente qualquer que seja z (n.º 17), podemos pôr $m_c = 1$, e temos

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{c}\right) e^{\frac{z}{c}} \left(1 + \frac{z}{c}\right) e^{-\frac{z}{c}} \right],$$

ou

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

onde $\varphi(z)$ representa uma função inteira de z .

Faz parte das funções compreendidas na fórmula precedente a função $\text{sen } \pi z$. N'este caso é $e^{\varphi(z)} = \pi$ (n.º 157).

160.—Fundados no que precede pode-se achar um des-

envolvimento em série da função $\frac{f'_1(z)}{f_1(z)}$, em que se tornam explicitos os pontos onde esta função é infinita.

Derivando os logarithmos dos dois membros da formula (2) vem (n.º 153)

$$\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left[\frac{n_c}{z-a_c} + \sum_{k=1}^{m_c} \frac{n_c}{a_c} \left(\frac{z}{a_c}\right)^{k-1} \right]$$

ou

$$(F) \quad \frac{f'_1(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z-a_c)},$$

visto ser

$$\frac{1}{z-a_c} = -\frac{1}{a_c} \left[1 + \frac{z}{a_c} + \dots + \left(\frac{z}{a_c}\right)^{m_c-1} \right] + \frac{z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z-a_c)}.$$

Para completar a demonstração d'esta formula (F) vamos mostrar que a série que entra no seu segundo membro é uniformemente convergente, quando a série (E) é uniformemente convergente. Com effeito, por esta série ser uniformemente convergente e por $|a_t|$ tender para o infinito com t , a cada valor de δ , por mais pequeno que seja, corresponderá um valor t_1 tal que as desigualdades (n.º 124)

$$\lambda \sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right| < \delta, \quad \left| \frac{z}{a_t} \right| < \varepsilon$$

serão satisfeitas quando $t > t_1$ e $|z| < \rho$, ρ representando uma quantidade tão grande quanto se queira. Logo à fortiori teremos

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right| \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|} < \delta,$$

depois

$$\sum_{c=1}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right| \frac{1}{\left| 1 - \frac{z}{a_c} \right|} < \delta,$$

e finalmente

$$\sum_{c=1}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z - a_c)} \right| < \delta,$$

d'onde se conclue que a série que entra no segundo membro de (F) é uniformemente convergente em qualquer área, por maior que seja.

161.—*Caso em que m_c é constante.*—No caso de m_c ser constante, a função (2) tem propriedades notaveis que foram estudadas por Laguerre, Cesàro, etc. Aqui limitar-nos-hemos a demonstrar, no caso de $\varphi(z)$ ser constante e $n_0 = 0$, o theorema seguinte:

Se todas as raizes de $f_1(z)$ são reaes, tambem as raizes de $f'_1(z)$ o são.

Este theorema foi demonstrado por F. Chio nos casos de ser $m_c = 0$ e $m_c = 1$, e em seguida pelo sr. Cesàro no caso de m_c representar uma constante qualquer (1).

Seja $z_1 = \rho (\cos \omega + i \sin \omega)$ uma qualquer das raizes da equação $f'_1(z) = 0$. Substituindo este valor em logar de z na igualdade (F) e pondo $m_c = m$, vem

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a_c} \right)^m \cdot \frac{n_c (\cos m\omega + i \sin m\omega)}{\rho \cos \omega - a_c + i\rho \sin \omega} = 0.$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes, das quaes uma determina ρ e a outra ω :

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c} \right)^m \left\{ \rho \cos (m-1)\omega - a_c \cos m\omega \right\} = 0$$

(1) *Giornale di Mathematiche*, tomo XXII.

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c} \right)^m \left\{ \rho \sin(m-1)\omega - a_c \sin m\omega \right\} = 0$$

pondo $d_c = (\rho \cos \omega - a_c)^2 + \rho^2 \sin^2 \omega$.

Se m é ímpar, multiplicando a primeira d'estas igualdades por $\sin(m-1)\omega$, a segunda por $\cos(m-1)\omega$ e subtraindo, vem

$$\sin \omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c a_c^{m-1}} = 0,$$

d'onde se tira $\omega = 0$.

Se m é par, multiplicando a primeira equação por $\sin m\omega$, a segunda por $\cos m\omega$ e subtraindo, vem

$$\sin \omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c a_c^m} = 0,$$

d'onde se tira também $\omega = 0$.

Logo, em qualquer dos casos, será $z_1 = \rho$. As raízes de $f'_1(z) = 0$ são portanto reaes, como se queria demonstrar.

V

**Funções uniformes regulares
em todo o plano, excepto em pontos isolados**

162. — Das funções uniformes não inteiras limitar-nos-hemos a estudar as que são regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, taes que seja $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$, e na visinhança dos quaes tenhamos

$$(1) \quad f(z) = P(z - a_c) + G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right)$$

onde

$$(2) \quad G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) = \sum_{t=1}^m A_t \left(\frac{1}{z - a_c} \right)^t.$$

Estes pontos são os *pontos singulares* da função, e foram chamados pelo sr. Weierstrass *pólos* quando m é finito, *pontos singulares essenciaes* quando m é infinito.

As funções consideradas resultam naturalmente da generalização das funções racionais. Na verdade, toda a função racional $f(z)$ é susceptível da decomposição (n.º 39)

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + \Sigma \frac{B_b}{(z - a_2)^b} + \dots;$$

se agora z_0 representar um ponto diferente de $a_1, a_2, \text{etc.}$, temos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z_0 - a_1)^a} \left(1 + \frac{z - a_0}{z_0 - a_1}\right)^{-a} + \dots,$$

d'onde resulta (n.ºs 147 e 22)

$$f(z) = P(z - z_0),$$

e a função é portanto regular na vizinhança de z_0 ; se porém z_0 representa um dos pontos $a_1, a_2, \text{etc.}$, a_1 por exemplo, applicando a decomposição anterior só às parcelas correspondentes a $a_2, a_3, \text{etc.}$ vem um resultado da forma

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + P_1(z - a_1),$$

e o ponto a_1 é portanto um pólo.

Pertencem também ao grupo de funções que estamos considerando as funções $f_1(z)$ que são o quociente de duas funções transcendentis inteiras $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$. Com effeito, sendo $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$ as raizes do denominador e $n_1, n_2, \dots, n_c, \dots$ os seus respectivos grãos de multiplicidade, a função $f_1(z)$ será regular em qualquer ponto z_0 do plano, diferente dos pontos $a_1, a_2, \dots, \text{etc.}$ (n.º 155—7.º); e, na vizinhança do ponto a_c , teremos (n.º 158)

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{P(z - a_c)}{(z - a_c)^{n_c} e^{P_1(z - a_c)}} = \frac{P_2(z - a_c)}{(z - a_c)^{n_c}} \\ &= G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) + P_3(z - a_c). \end{aligned}$$

Logo a funcção considerada é regular em todo o plano excepto nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, que são pólos.

163. — Assim como acontece com as funcções racionais, as funcções que estamos estudando são susceptíveis de uma decomposição que torna explicitos os pólos e os pontos singulares essenciaes da funcção. Esta propriedade importante, estabelecida pelo sr. Weierstrass no caso de ser finito o numero de pontos singulares da funcção, foi em seguida estendida pelo sr. Mittag-Leffler ao caso de a funcção conter um numero infinito de pólos ou pontos singulares essenciaes. Antes porém de demonstrar o bello e importante theorema devido ao sabio professor da Universidade de Stockholm, vamos considerar o caso da funcção $\cot z$, cuja decomposição se obtém de um modo muito simples e dá origem a algumas formulas importantes.

A formula (a) do n.º 157 dá

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{c^2 \pi^2} \right),$$

e, derivando relativamente a z ,

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2 \pi^2},$$

ou

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi} \right).$$

Esta formula dá a decomposição de $\cot z$ em fracções simples que tornam explicitos os pólos $0, c\pi, -c\pi$ da funcção.

Do que precede tiram-se as seguintes consequencias :

II — Desenvolvendo o binomio que entra no segundo membro da penultima formula, vem

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2 \pi^2} + \frac{z^2}{c^4 \pi^4} + \frac{z^4}{c^6 \pi^6} + \dots \right)$$

quando é (n.º 147) $|z| < \pi$; e portanto, em virtude do theorema do n.º 151,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^2} - \frac{2z^3}{\pi^4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^4} - \frac{2z^5}{\pi^6} \sum_1^{\infty} \frac{1}{c^6} - \dots$$

Esta formula dá o desenvolvimento de $\cot z$ em série ordenada segundo as potencias de z , quando é $|z| < \pi$.

III—Por ser

$$z \cot z = \frac{iz (e^{2iz} + 1)}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$

temos (n.º 100—V), representando $z \cot z$ por u ,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2i)^n B_{n-1},$$

B_{n-1} designando os numeros de Bernoulli; e portanto, applicando a formula de Maclaurin,

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2 B_1}{2!} z^2 - \frac{2^4 B_3}{4!} z^4 - \frac{2^6 B_5}{6!} z^6 - \dots$$

Igualando os coefficients das potencias de grão $2m - 1$ de z nos dois desenvolvimentos de $\cot z$ que vimos de obter, resulta a relação importante:

$$\frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m-1}}{(2m)!} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{e^{2m}}$$

III—Do desenvolvimento de $\cot z$ que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento de $\tan z$, de $\sec z$ e de $\operatorname{cosec} z$ em série ordenada segundo as potencias de z , desenvolvendo os segundos membros das formulas conhecidas:

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z, \operatorname{cosec} z = \cot z + \tan \frac{1}{2} z,$$

$$\sec z = \tan z \operatorname{cosec} z;$$

e vê-se que a primeira e a terceira função são susceptíveis d'este desenvolvimento quando é $|z| < \frac{\pi}{2}$, e a segunda quando é $|z| < \pi$.

164.—THEOREMA DE MITTAG-LEFFLER.—*Dadas as quantidades $a_1, a_2, a_3, \dots, a_c, \dots$ collocadas segundo a or-*

dem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição
 $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$, e dadas as funcções

$$G_1 \left(\frac{1}{z - a_1} \right), G_2 \left(\frac{1}{z - a_2} \right), \dots, G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right), \dots,$$

que são da fôrma (2), é sempre possível formar uma funcção $f(z)$ da fôrma

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) + P_c(z) \right]$$

que seja regular em todos os pontos do plano diferentes de $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, e da qual estes pontos sejam pólos ou pontos singulares essenciaes.

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano excepto nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$, que são pólos ou pontos singulares essenciaes, pôde ser reduzida á fôrma

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) + P_c(z) \right],$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z (1).

Por ser uniformemente convergente a série

$$G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) = -\frac{A_1}{a_c} \left(1 - \frac{z}{a_c} \right)^{-1} + \frac{A_2}{a_c^2} \left(1 - \frac{z}{a_c} \right)^{-2} - \dots$$

quando z é diferente de a_c , e por ser cada termo d'esta série susceptível de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z quando é $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon < 1$, teremos em virtude do theorema do n.º 151

$$(A) \quad G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k$$

quando é $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon < 1$.

(1) Mittag-Leffler: — Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes, etc. (Acta Mathematica — tomo IV).

Consideremos agora, como no n.º 158, uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_c, \dots$ taes que a somma $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valor tão grande que seja

$$B) \quad \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_{k^{(c)}} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k \right| < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valor que se attribua a z que satisfaça á condição $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon < 1$, o que é sempre possível por ser uniformemente convergente a série (A) na região do plano determinada pela condição $\left| \frac{z}{a_c} \right| < 1$. A somma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z), \quad F_c(z) = G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_{k^{(c)}} \left(\frac{z}{a_c} \right)^k$$

satisfaz ás condições do theorema enunciado, isto é representa a funcção $f(z)$, como vamos vêr.

Seja z_0 um ponto do plano differente dos pontos a_1, a_2, \dots , e ρ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Por ser $\lim_{c \rightarrow \infty} |a_c| = \infty$, e por ser convergente a série

$\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, é sempre possível dar a c_1 um valor tão grande que as desigualdades

$$\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon, \quad \sum_{t=c}^{c+\frac{1}{p}} \varepsilon_t < \delta$$

sejam satisfeitas ao mesmo tempo por todos os valores de c superiores a c_1 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leq \rho$, qualquer que seja p .

D'estas desigualdades e da desigualdade (B) conclue-se que a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+\frac{1}{p}} \left| \sum_{k=m_t+1}^{\infty} A_{k^{(t)}} \left(\frac{z}{a_t} \right)^k \right| < \delta$$

ou (form. A)

$$\sum_{t=c}^{c+p} |F_t(z)| < \delta$$

será também satisfeita pelos valores de c superiores a c_1 , na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \geq \rho$.

Logo a série $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é uniformemente convergente na região definida pela condição $|z - z_0| \geq \rho$.

Posto isto, como z_0 é diferente de a_c , supponhamos que se dá a ρ um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z_0 - a_c|$. O segundo membro da igualdade

$$G_c \left(\frac{1}{z - a_c} \right) = \sum_{t=1}^m \frac{A_t}{z_0 - a_c} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c} \right)^{-t}$$

é susceptível (n.º 151) de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potências de $z - z_0$ na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leq \rho$; logo o mesmo acontece á função $F_c(z)$ e temos (n.º 151)

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

A função $\sum_1^{\infty} F_c(z)$ é pois regular no ponto z_0 .

Consideremos agora um ponto singular a_j de função que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valor tão pequeno que na região determinada pela condição $|z - a_j| \leq \rho$ não exista outro ponto singular da função considerada, teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

visto que o primeiro membro não tem o ponto singular a_j , e portanto

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j \left(\frac{1}{z - a_j} \right) + P_1(z - a_j),$$

Logo a_j é um pólo ou um ponto singular essencial de $\sum F_c(z)$.

Os pontos singulares $a_1, a_2, \text{ etc.}$ da função que vimos de formar são diferentes de zero. Para que o ponto 0 seja um

ponto singular da funcção, de modo que na visinhança d'este ponto tenhamos

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \quad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{c=1}^m \left(\frac{1}{z}\right)^c,$$

basta por

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

Com effeito, a funcção

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z_0 \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)}\right)$$

é (n.º 151) regular na visinhança de qualquer ponto z_0 diferente de 0; e na visinhança do ponto 0 a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é regular.

De tudo o que precede conclue-se que a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ tem todas as propriedades enunciadas na primeira parte do theorema do sr. Mittag-Leffler, e representa portanto a funcção $f(z)$ que queremos formar.

Para demonstrar a segunda parte basta notar que a differença

$$f_1(z) - \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$$

não tem pontos singulares, e portanto é igual a uma funcção inteira $\varphi(z)$.

165. — *Quociente de duas funcções inteiras.* — Vimos já (n.º 155 — 7.º) que o quociente de duas funcções inteiras é regular em todo o plano excepto nos pontos que são raizes do denominador, os quaes são pólos (n.º 162). A estas funcções é applicavel pois o theorema de Mittag-Leffler, isto é, podem ser reduzidas á fórma

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \varphi(z) + \sum_1^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + P_c(z) \right].$$

Reciprocamente, toda a função $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \dots, a_c, \dots$ que são pólos, é o quociente de duas funções inteiras. Com effeito, chamando n_1, n_2 etc. os expoentes dos factores $(z - a_1)^{n_1}, (z - a_2)^{n_2}$, etc. pelos quaes é necessario multiplicar $f_1(z)$ para fazer desaparecer os pólos, e construindo por meio do theorema de Weierstrass uma função inteira $\varphi_2(z)$, cujas raizes sejam a_1, a_2 , etc. com os grãos de multiplicidade n_1, n_2 , etc., o producto $f_1(z) \varphi_2(z)$ é regular em todo o plano, e representa portanto uma função inteira $\varphi_1(z)$. Temos pois

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

INDICE

INTRODUÇÃO

CAPITULO I

THEORIA DOS NUMEROS IRRACIONAES, DOS NUMEROS NEGATIVOS E DOS
NUMEROS IMAGINARIOS. REGRAS PARA O SEU CALCULO

	Paginas
I Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra . . .	1-3
II Theoria dos numeros irracionaes.	3-8
III Numeros negativos e numeros imaginarios	9-17
IV Noção de limite	18-29
V Séries	29-51
VI Productos infinitos	52-59
VII Fracções continuas	59-66

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS,
LOGARITHMICAS, ETC.

I Principios geraes	67-77
II Funcções algebraicas	77-84
III Funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares	85-99

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELEMINARES

I Noção de infinitamente pequeno e de derivada	101-106
II Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Cal- culo infinitesimal	107-113

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

I Theoremas geraes	114-117
II Derivadas das funcções algebraicas, logarithmicas, circula- res, etc.	118-123
III Relações entre as funcções e suas derivadas	123-126
IV Funcções de muitas variaveis	126-132
V Derivadas das funcções de variaveis imaginarias	133-136
VI Funcções implicitas	136-147

	Páginas
VII Derivadas dos determinantes. Determinantes funcionaes	147-155
VIII Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva	155-160
IX Mudança das variaveis	161-166

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

I Curvas planas	167-181
II Curvas no espaço	182-189
III Superficies	189-195
IV Curvas e superficies envolventes.	195-204

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES DE ORDEM QUALQUER

I Formação das derivadas de ordem qualquer	205-217
II Aplicações	217-227
III Differenciaes de ordem superior	228-230
IV Relações entre as funcções e suas derivadas	230-238

CAPITULO V

APPLICAÇÕES. ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I Desenvolvimento em série do binomio e de algumas funcções algebricas.	239-249
II Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentis	249-255
III Interpolação	256-259
IV Desenvolvimento em série das funcções implicitas	259-263
V Maximos e minimos.	263-273
VI Indeterminações	273-278

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I Curvas planas.	279-290
II Curvas no espaço	290-293
III Superficies	294-298

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

I Funcções definidas por séries	299-302
II Singularidades de algumas funcções	303-312

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

I Definições e principios geraes.	313-317
II Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias	313-331
III Funcções regulares n'uma região do plano	331-335
IV Funcções regulares em todo o plano	335-348
V Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados	348-356

ERRATA

Pag.	linha	erro	emenda
49	26	qualquer que seja p e } qualquer }	qualquer
98	12	seu iy	$-i \operatorname{sen} iy$
145	18	z^n	z_n
217	12	$+$	$>$
		p	m
227	5	Σ	Σ
235	4	A_n	A_a
255	19	x	$ x $

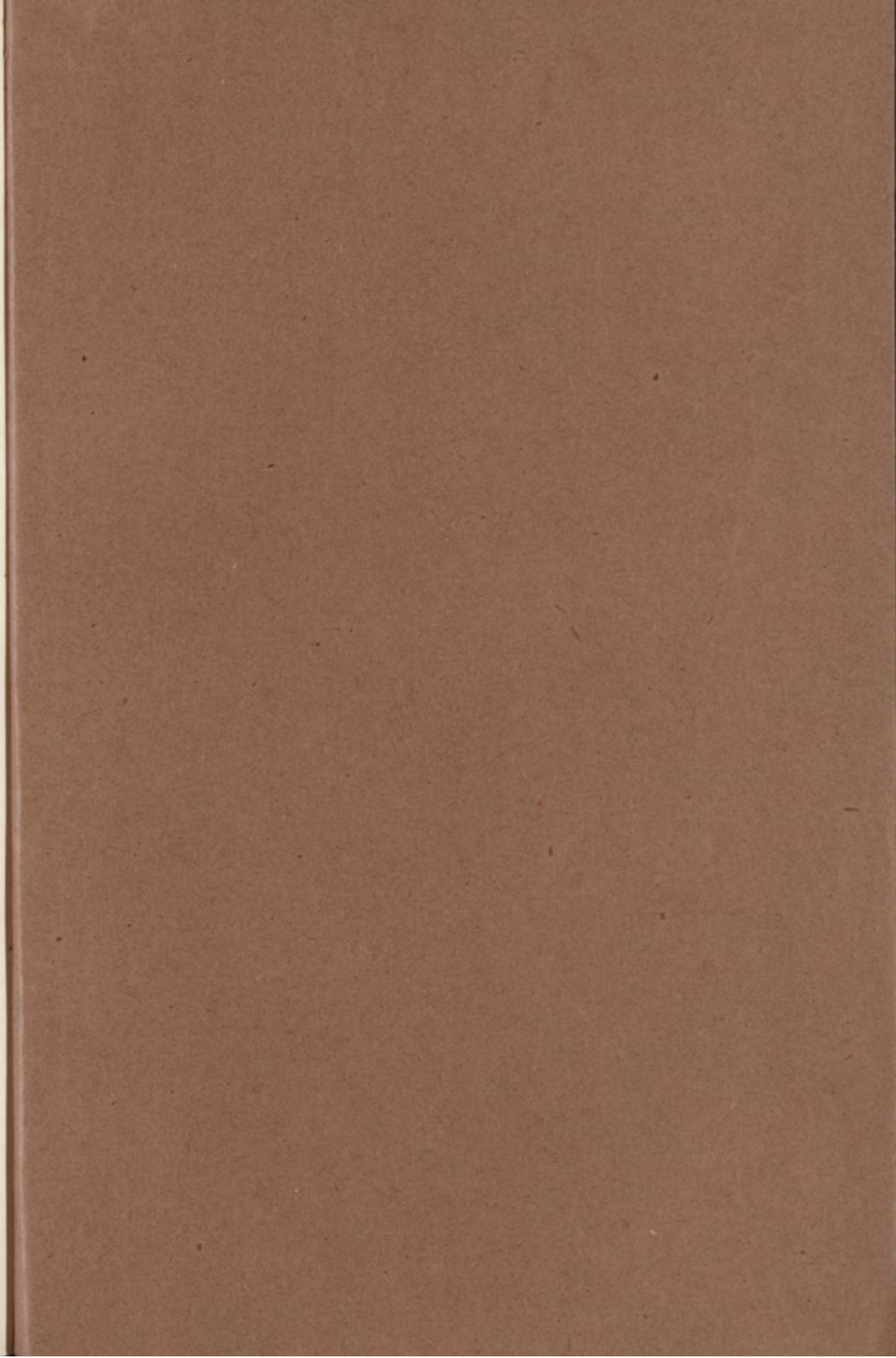
SUPPLEMENTO Á ERRATA DO CALCULO INTEGRAL

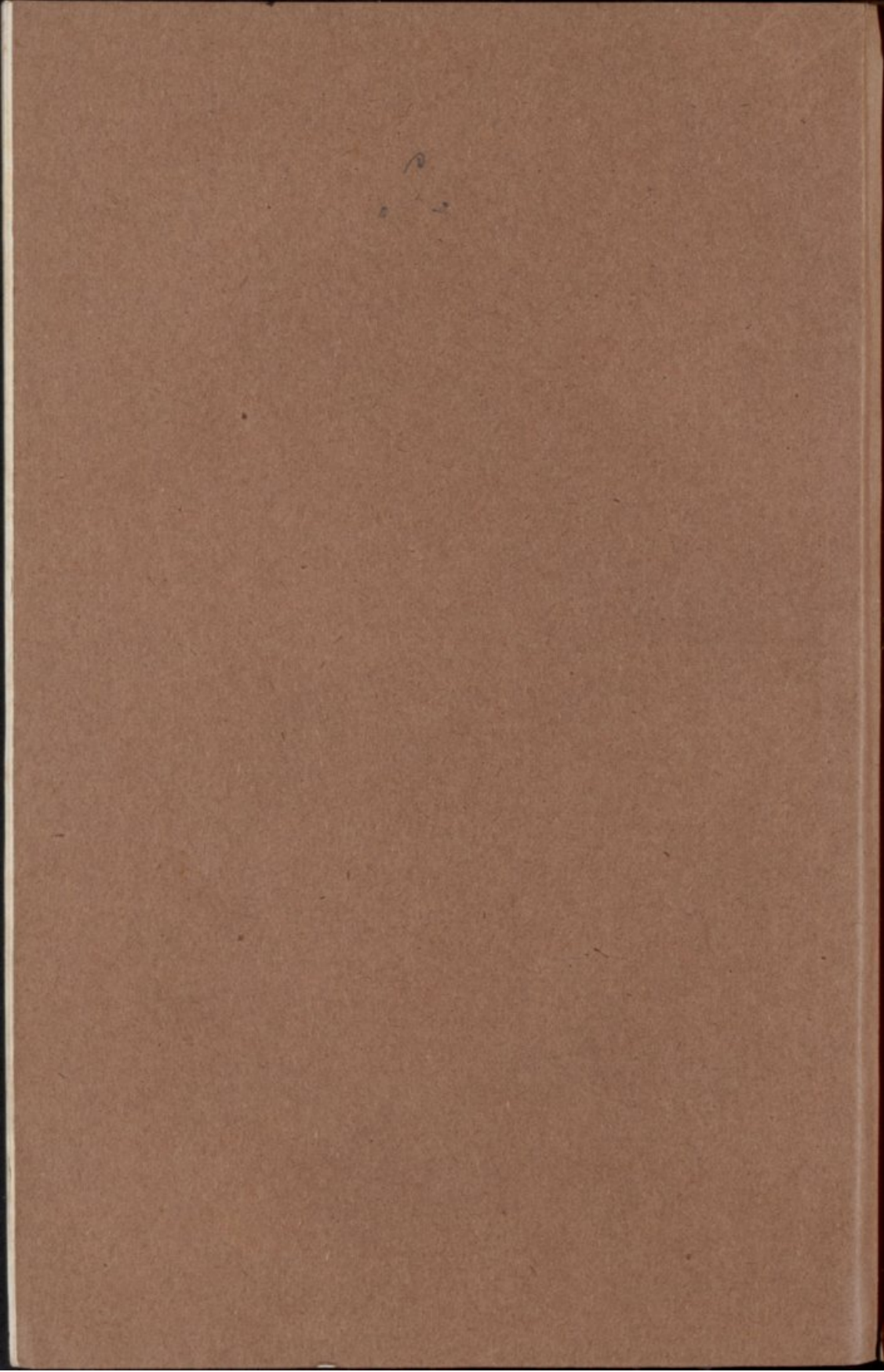
(PRIMEIRA PARTE)

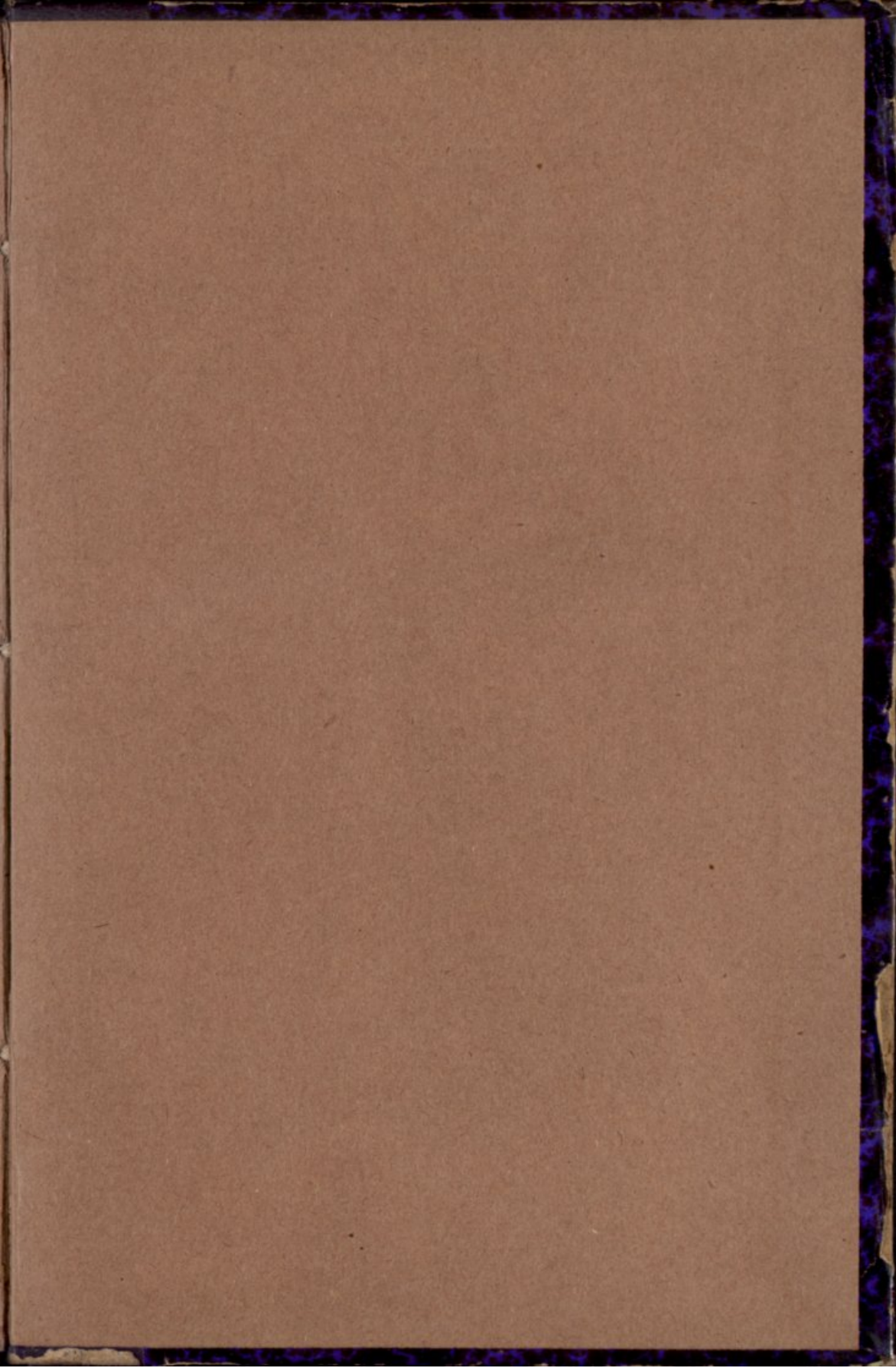
4	13, 15	u	x
32	21	ordinarios	simples
60	1	x	z
66	22	e^x e e^a	$e^x - e^a \neq 0$
78	7	u_m	$\int \frac{x^m dz}{\sqrt{1-x^2}}$
78	7	$u_m - 2$	$\int \frac{x^{m-2} dz}{\sqrt{1-x^2}}$
81	1	vimos no n.º 21 — 3.º que é	é (n.º 21 — 2.º)
81	2	$\frac{e^a}{a}$	$e^a \log \frac{X}{a}$
109	7	equação da curva	{ equação do arco OB e } { $y = f_1(x)$ a equação do } { arco OA da curva }
109	11	$\int_0^{x_1} f(x) dx$	$\int_0^{x_1} f_1(x) dx$
110	2	*	x
163	2	$F(x, y, c) = 0$	$F(x, y) = c$
163	18	$dF(x, y, c)$	$dF(x, y)$
164	1	$F(x, y, c)$	$F(x, y)$
204	17	n equações	equações
280	17	tangente	normal

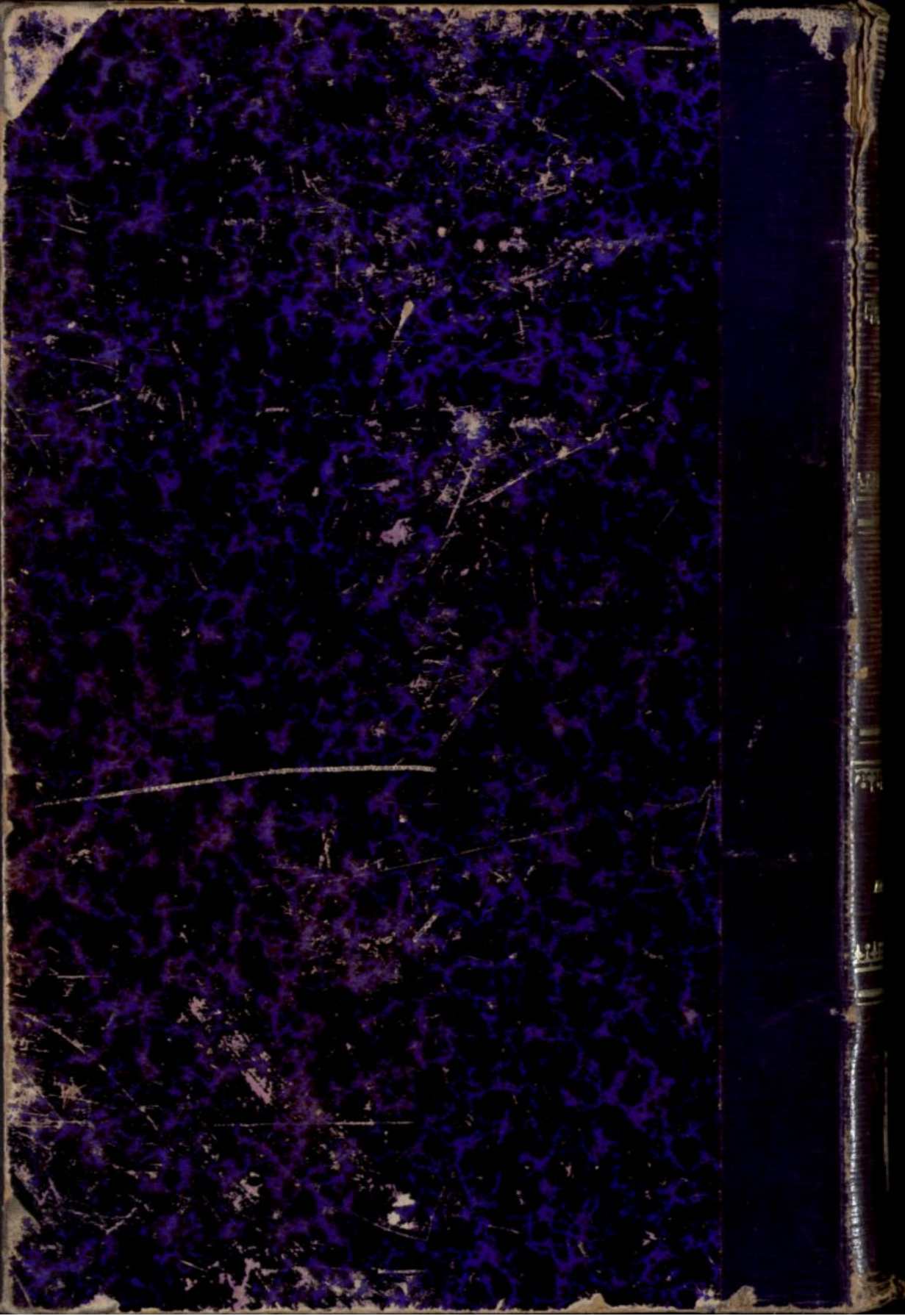
ERRATA











N. TEIXEIRA

ANALYSE

INFINITESIMAL

Est. B587

Tab. 3...

N.º 13.