

Sala 5  
Gab. -  
Est. 56  
Tab. 20  
N.º 10

Sala 5  
Gab. -  
Est. 56  
Tab. 20  
N.º 10

MA  
N  
VIMARA



UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Biblioteca Geral



1301088055

Dissertação

123  
215

132  
313

321  
231

31  
2  
3

31  
2  
3

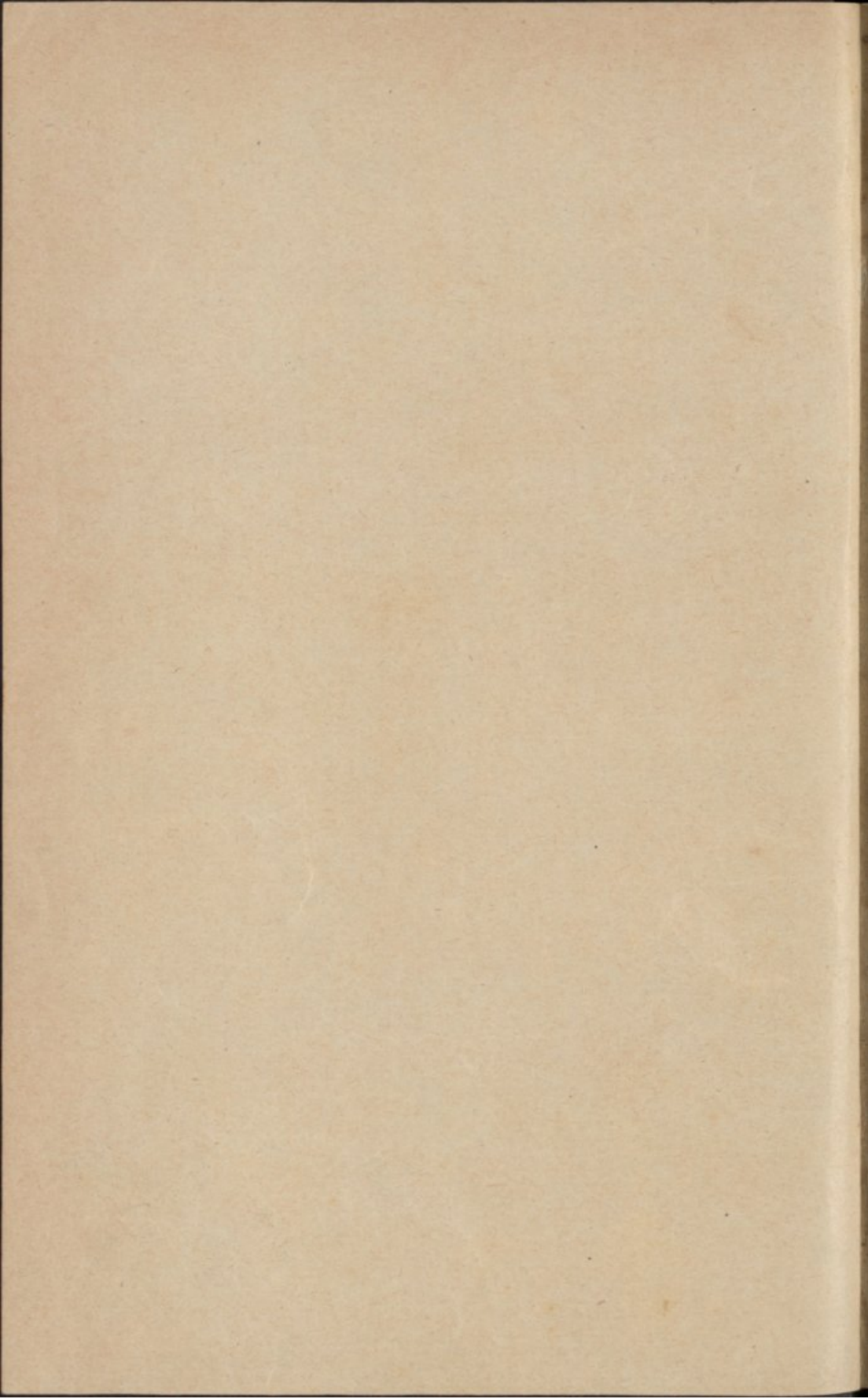
31  
2  
3

31  
2  
3

31  
2  
3

31  
2  
3

016829529



ELEMENTOS

DE

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

POR

DIOGO PACHECO D'AMORIM



COÍMBRA

Imprensa da Universidade

1914



ELEMENTOS  
DE  
CÁLCULO DAS PROBABILIDADES





ELEMENTOS

DE

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

POR

DIOGO PACHECO D'AMORIM

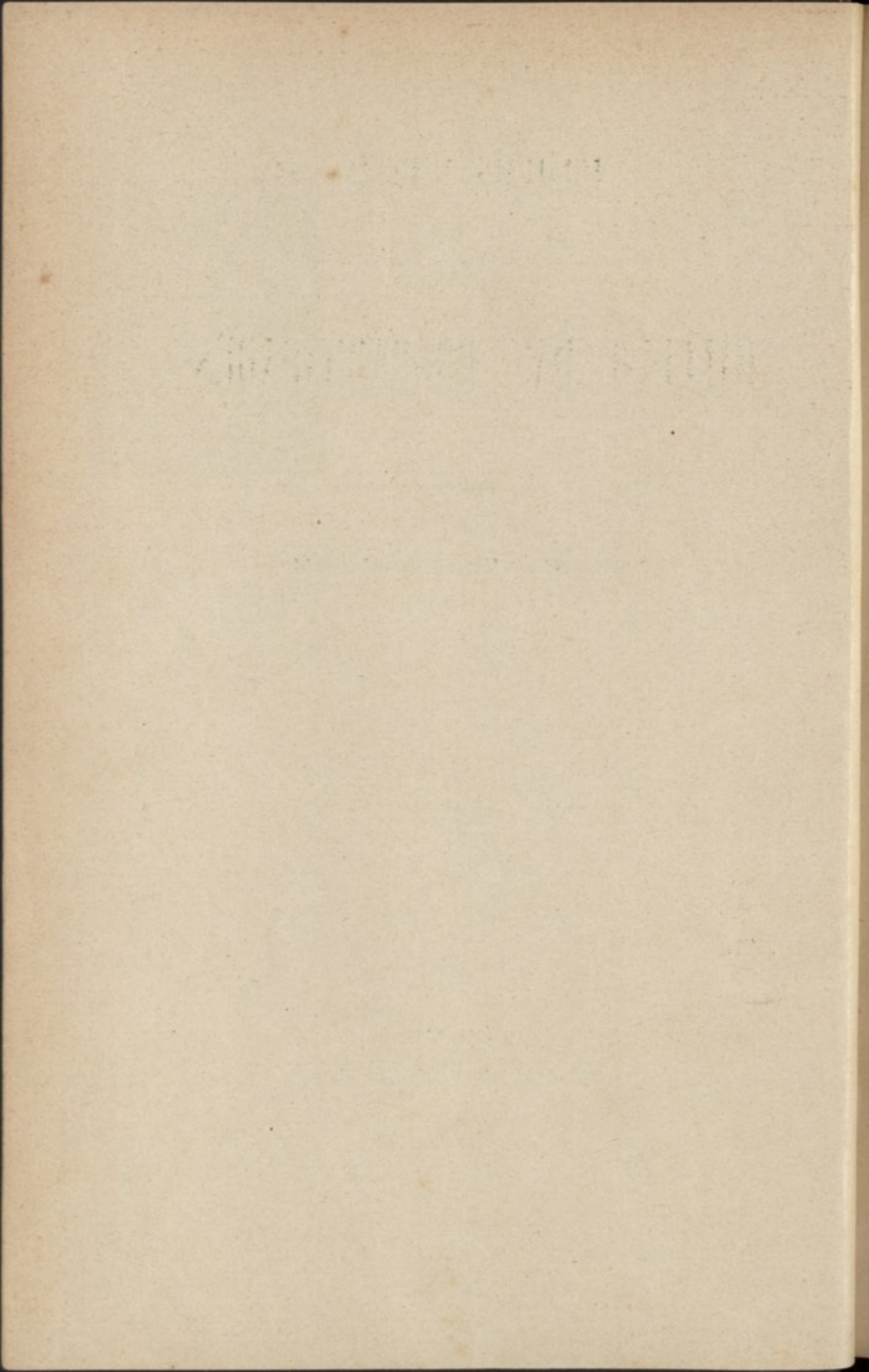


23 JUN 16

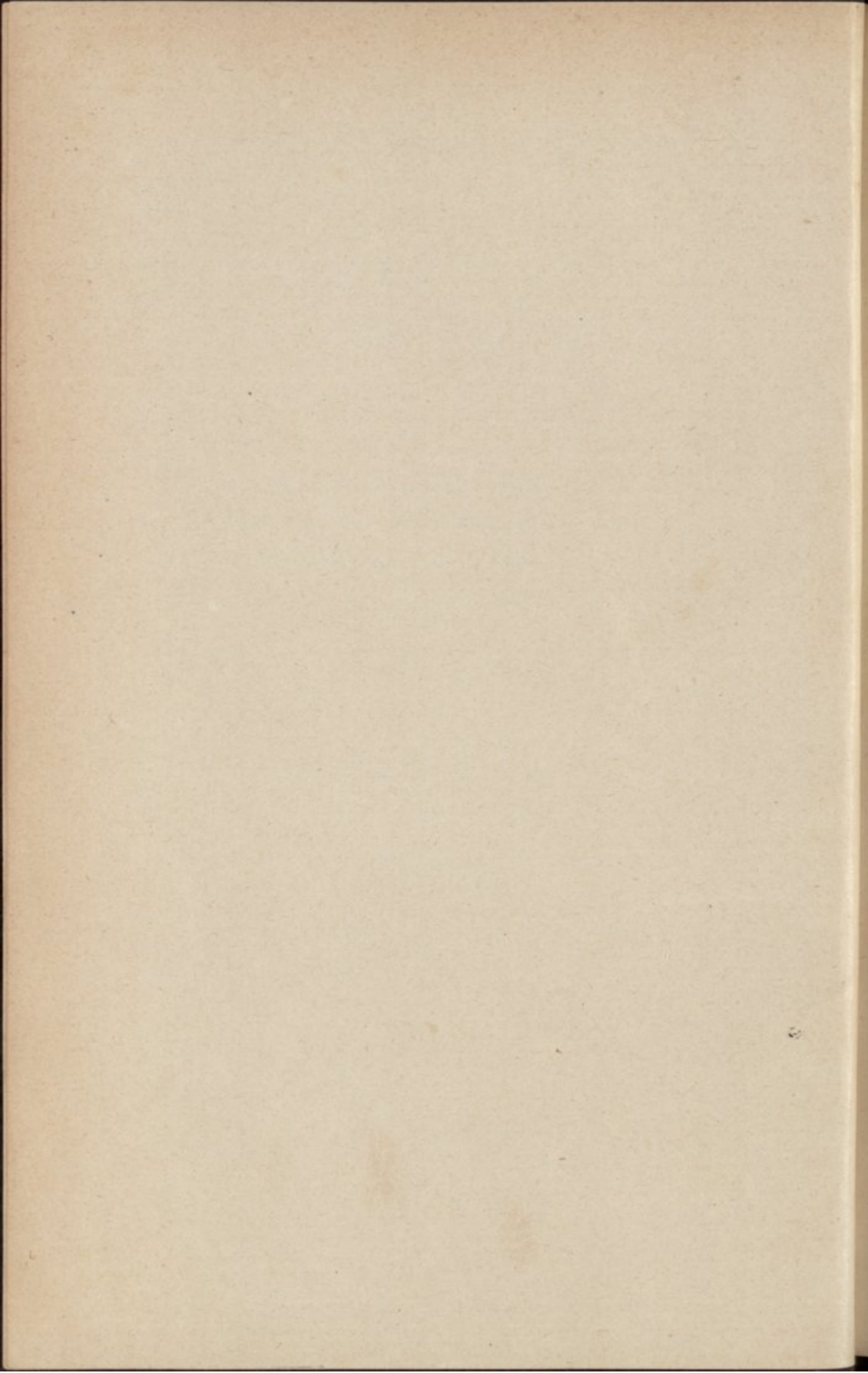
COÍMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1914



*Dissertação inaugural para o acto  
de doutoramento na Faculdade de  
Matemática, na Universidade de  
Cóimbra.*



A meus Pais

## PREFACE

The present volume contains a selection of the most important papers published in the Journal of the Royal Society of Medicine during the year 1909. The papers are arranged in the order in which they were presented to the Society. The first section contains the papers read at the meeting held on the 11th of January, 1909, and the second section contains the papers read at the meeting held on the 18th of February, 1909. The third section contains the papers read at the meeting held on the 15th of March, 1909, and the fourth section contains the papers read at the meeting held on the 12th of April, 1909. The fifth section contains the papers read at the meeting held on the 9th of May, 1909, and the sixth section contains the papers read at the meeting held on the 6th of June, 1909. The seventh section contains the papers read at the meeting held on the 3rd of July, 1909, and the eighth section contains the papers read at the meeting held on the 31st of August, 1909. The ninth section contains the papers read at the meeting held on the 28th of September, 1909, and the tenth section contains the papers read at the meeting held on the 26th of October, 1909. The eleventh section contains the papers read at the meeting held on the 23rd of November, 1909, and the twelfth section contains the papers read at the meeting held on the 21st of December, 1909. The papers are printed in the order in which they were presented to the Society, and the titles are printed in the order in which they appear in the index. The names of the authors are printed in the order in which they appear in the index. The names of the subjects are printed in the order in which they appear in the index. The names of the subjects are printed in the order in which they appear in the index.

## PREFÁCIO

O presente volume que mais pròpriamente se poderia chamar — *Uma tentativa de racionalização do Cálculo das Probabilidades* — põe em especial relêvo uma proposição a que, até hoje, ninguém deu a importância devida — a proposição *tirar, à sorte, um elemento duma classe, ou lançar, à sorte, um ponto numa região.*

HENRIQUE POINCARÉ diz mesmo que ela, por si, não tem significação nenhuma <sup>(1)</sup>. Ora a verdade é que ela tem um sentido muito preciso e claro quando nós mesmos sômos os agentes das tiragens ou lançamentos e isso permite-nos construir a teoria das probabilidades com toda a clareza e rigor. Partindo dela, a teoria das probabilidades pode reduzir-se a uma sucessão de proposições e definições, como qualquer outro ramo das Matemáticas Puras; a probabilidade contínua e a probabilidade descontínua aparecem com feições em tudo idênticas; os paradoxos desaparecem.

---

(1) H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, pag. 226.

Construída a teoria da probabilidade dos fenómenos correspondentes a tiragens ou lançamentos, feitos à sorte, por nós mesmos, é fácil de estender as suas conclusões aos fenómenos correspondentes a tiragens, ou lançamentos, feitos por agentes a nós semelhantes, caso essas tiragens sejam feitas em certas circunstâncias.

Para aplicar os resultados da teoria, assim construída, aos fenómenos naturais, teremos de regeitar, *à priori*, a hipótese determinista que é, aliás, incompatível com qualquer teoria das probabilidades; em seguida, a aplicação faz-se muito naturalmente.

\*

O ponto de vista em que nos colocamos, levou-nos a alterar, em certos pontos, a forma e mesmo a essência desta ciência. Tivemos de generalizar a definição de probabilidade, generalização essa já necessária na dedução da fórmula de BAYES, mas absolutamente indispensável na probabilidade contínua, como claramente mostra o prob. 3.<sup>o</sup> da pag. 48.

Tivemos de fazer a distinção entre a probabilidade dum ponto e a probabilidade dum outro que seja *sua imagem*, o que nos levou ao conceito da *lei da probabilidade*, etc.

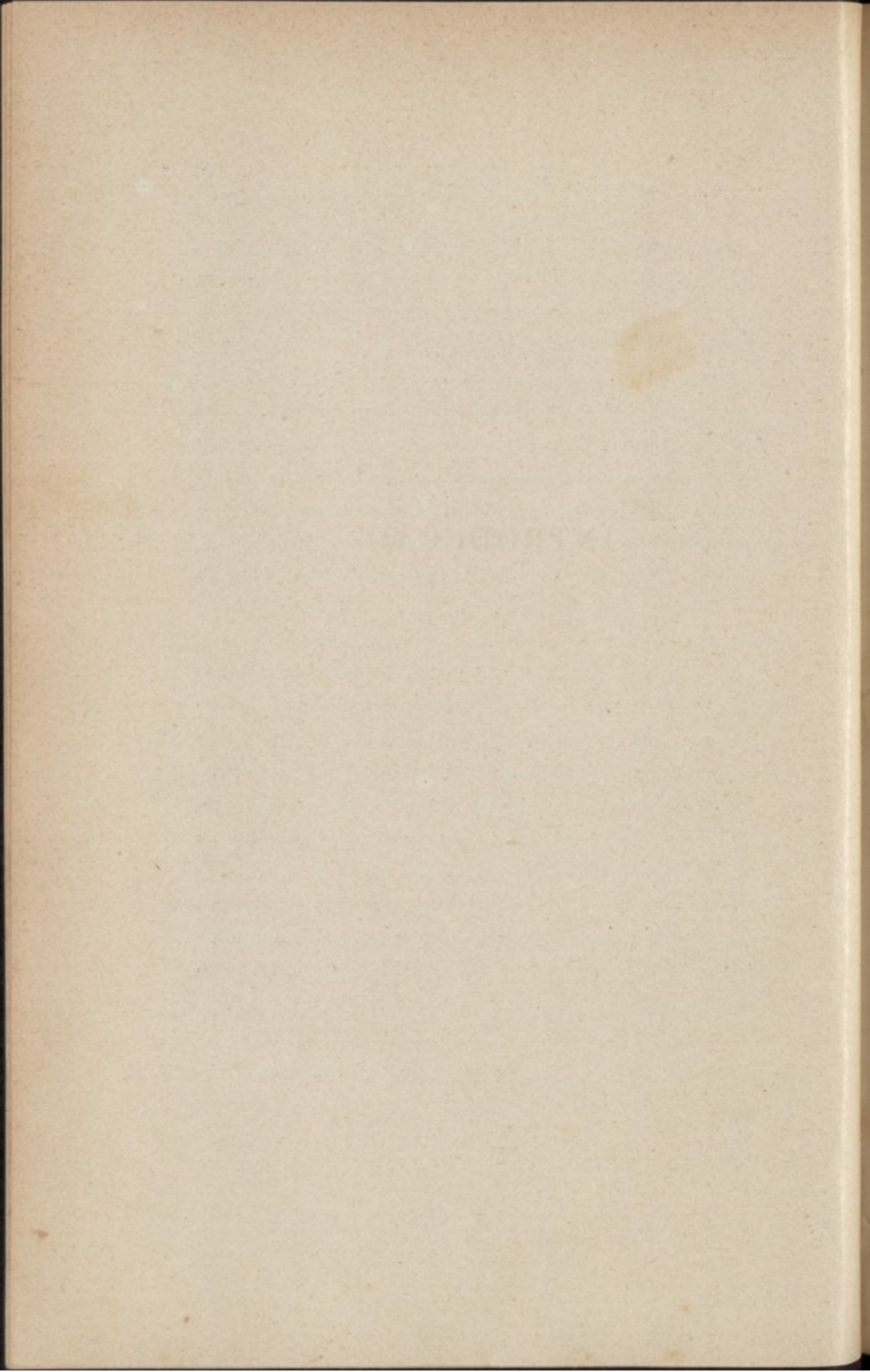
A ordem das matérias também teve de sair das normas clássicas.



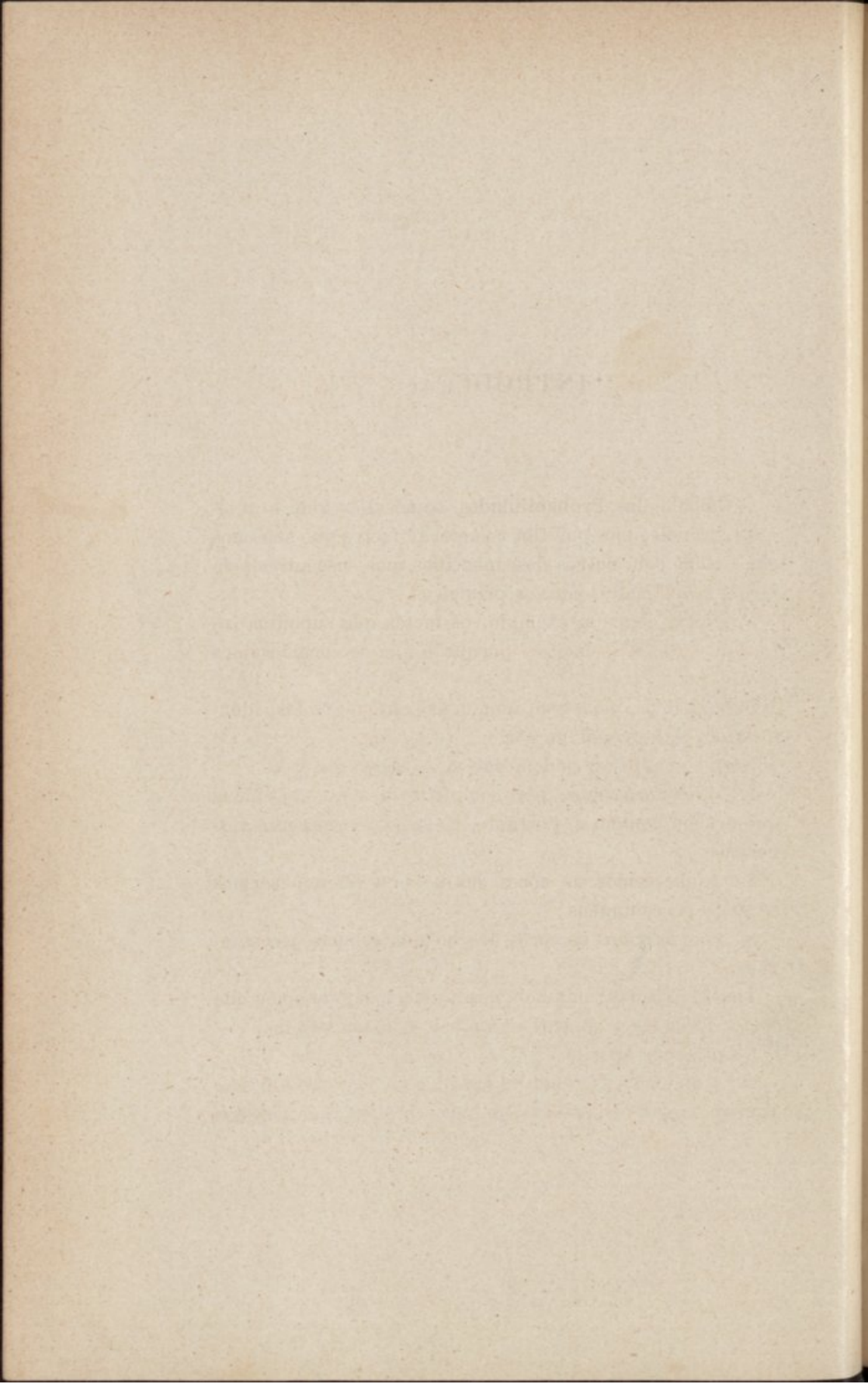
---

A probabilidade continua passou a ocupar o lugar e o desenvolvimento que lhe competia ao lado da probabilidade descontínua. Os Teorêmas de BERNOULLI seguem-se-lhes na exposição, porque se aplicam igualmente a ambas as probabilidades. A seguir ao 3.<sup>o</sup> teorêma de BERNOULLI colocamos umas generalizações do mesmo teorêma, feitas para dar à dedução da lei dos desvios que naturalmente se lhes segue, o rigôr que lhe faltava. A seguir collocamos a teoria da *Esperança Matemática*, porque o valôr deste conceito se torna muito mais evidente com a applicação do 3.<sup>o</sup> teorêma de BERNOULLI, do que com a propria definição de esperança matemática. Por fim, alargamos o campo de acção desta sciência, fazendo a sua applicação a fenómenos de que nós não sômos os agentes. Reservamos também para o fim a classificação dos fenómenos de que se ocupa esta sciência, porque só depois do estudo dos fenómenos que directamente se ligam com o fenómeno tipo, apresentado na Introducção, se torna clara e racional essa classificação. Tencionavamos terminar com uma justificação da nossa maneira de considerar a teoria da probabilidade, seguida dum Apêndice onde se estudasse a probabilidade dos conjuntos *numeráveis*, depois de *numerados*; mas a já demasiada extensão desta dissertação impede-nos de o fazer.

---



INTRODUÇÃO



## INTRODUÇÃO

O Cálculo das Probabilidades, como aliás toda e qualquer sciência, tem por fim relacionar factos que supomos conhecidos com outros desconhecidos mas susceptíveis de serem relacionados com os primeiros.

Vejam, com um exemplo, os factos que supomos conhecidos nesta sciência e porque é que os consideramos como tais.

Suponhamos, para isso, uma urna contendo bolas, idênticas em tudo menos na côr.

Nestas condições, podem dar-se os seguintes casos :

1.º desconhecemos, por completo, as côres das bolas que a urna contém e, portanto, as suas percentagens respectivas;

2.º conhecermos as côres das bolas e desconhecemos as suas percentagens;

3.º conhecermos as côres das bolas e as suas percentagens.

Tire-se, à sorte, uma bola dessa urna e suponhamos que somos forçados a apostar numa côr, à nossa escolha.

Em que côr apostar ?

No primeiro caso, não o saberemos. Visto que desconhecemos, por completo, o conteúdo da urna, não teremos

razão nenhuma para apostar na côr branca ou em qualquer outra.

No segundo caso, a nossa ignorância é um pouco mais restrita, visto que sabemos que a bola a tirar ou é branca ou é preta.

Mas como desconhecemos as percentagens das bolas brancas e pretas, ainda não temos razões que nos decidam por uma ou outra destas côres.

Suponhamo-nos, porém, no terceiro caso e para fixar ideias, suponhamos que na urna há uma percentagem de nove décimos de bolas brancas, para um décimo de pretas.

Nestas condições não hesitaremos em apostar na côr branca.

Evidentemente que nada sabemos de certo acêrca da côr da bola que vai sair que poderá ser branca ou preta, mas nem por isso hesitaremos na aposta.

É isto que distingue essencialmente o terceiro caso que acabâmos de considerar, dos dois antecedentes: êle pode servir-nos de guia de conduta em certas circunstâncias.

Por isso, supô-lo-hemos *conhecido*.

\*

Êle consiste numa tiragem, feita à sorte, numa urna de composição conhecida qualitativa e quantitativamente.

Nós suporemos, pois, que todo o fenómeno que pode identificar-se com uma tiragem, feita à sorte, numa urna de composição qualitativa e quantitativamente conhecida, fica explicado logo que essa identificação seja feita. Dum modo mais geral, nós suporemos explicado todo o fenó-

meno que possa identificar-se com uma tiragem, feita à sorte, numa classe finita e qualquer, logo que essa classe seja conhecida qualitativa e quantitativamente.

\*  
\*   \*  
\*

Como vimos, supunhamos conhecido o terceiro caso atrás considerado, por êle nos poder servir de guia de conduta em certas circunstâncias que nós sintetisámos numa aposta.

Vejamos, porém, quais as razões que nesse exemplo nos levavam a apostar na côr branca.

A primeira era, sem dúvida, o conhecimento de que na urna havia mais bolas brancas do que pretas, ou, como atrás dissémos, que a percentagem das bolas brancas era superior à das pretas.

A segunda era o conhecimento de que a tiragem em questão era feita à sorte.

Sem estas duas condições não teriamas razões para apostar na côr branca.

A explicação da primeira destas condições é-nos dada pela Aritmética; a explicação da segunda, porém, não nos é dada por sciência nenhuma até hoje constituida.

Ela leva-nos, por isso, a admitir como primitiva a seguinte proposição:

«Tirar, à sorte, um elemento duma classe finita de elementos».

É sôbre esta proposição que nós assentaremos as bases do Cálculo das Probabilidades.

\*  
\* \* \*

É conveniente notar que não tomâmos para base desta sciência a noção de *sorte* ou de *acaso*, noção esta demasiado vaga para sôbre ela assentar as bases de qualquer sciência, mas sim a proposição «tirar, à sorte, um elemento duma classe finita de elementos», o que é muito diferente.

Alguem dirá que esta proposição, visto ser formada com a palavra *sorte* e dela tirar todo o seu valor, fica tão vaga como a noção que essa palavra indica.

A isso responderemos dizendo que pouco interesse tem que a noção de *sorte* seja ou não vaga, logo que a proposição que com ela formamos seja entendida e com ela se exprima uma ideia capaz de nos orientar em dadas circunstâncias.

Tudo quanto acêrca dessa proposição se diga, não tem interesse nem debaixo do ponto de vista matemático nem debaixo do ponto de vista utilitário.

O mesmo acontece em Geometria com a noção de *espaço* e em Mecânica com a noção de *tempo*.

As questões levantadas à volta destas noções teem um mero interesse filosófico, nada mais. Pode mesmo dizer-se que estas noções nada teem que vêr com a Matemática.

O edificio matemático *podia* ser o mesmo se essas noções não existissem.

As verdades da Geometria, da Mecânica, ficariam latentes no simbolismo da Análise. Mas, embora invisíveis, essas verdades lá estavam.

As noções de espaço e de tempo servem apenas, como os reagentes córantes na microscópia, para dar às ver-



dades analíticas uma coloração que as torne visíveis nos vários campos em que podem ser aplicados.

\*  
\* \* \*

Uma pergunta há, porém, que é legítimo de fazer-se: como distinguir uma tiragem feita à sorte, doutra que o não é?

Evidentemente que nem todas as tiragens feitas numa urna são feitas à sorte e forçoso é, por isso, dar um critério de distinção.

Para se dar êsse critério, admitiremos que todo o indivíduo sabe distinguir uma tiragem feita à sorte, doutra que o não é, logo que *êsse mesmo indivíduo seja o agente da tiragem.*

\*

Dentro desta hipótese nós construiremos a teoria das probabilidades que ficará sendo uma ciência subjectiva, como toda a ciência pura. Essa teoria dar-nos-há depois o critério que nos deve guiar quando o agente da tiragem seja outrem que não nós.

Mas essa parte do Cálculo das Probabilidades está já no limiar das suas aplicações.

\*  
\* \* \*

A utilidade das sciências, em geral, provêm de nos ensinarem a prever os acontecimentos com uma aproximação praticamente suficiente.

O Cálculo das Probabilidades, porém, parece não atingir este fim utilitário.

Com efeito, como prever a cor duma bola que se tire à sorte duma urna que contém duas bolas brancas e uma preta ?

Evidentemente que o Cálculo das Probabilidades no-lo não diz.

Se em vez de duas bolas brancas e uma preta, a urna contivesse mil bolas brancas e uma preta, o Cálculo das Probabilidades continuava a nada prever, mas a nossa intuição principiava a prever a chegada duma bola branca.

É nessa previsão que a intuição nos sugere quando o número de bolas brancas é muito maior que o das pretas que reside o valor prático do Cálculo das Probabilidades.

Essa intuição ficará irredutivelmente separada da certeza, por mais que da unidade se aproxime a percentagem das bolas brancas. Mas nem por isso ela deixa de ter para nós um valor prático real.

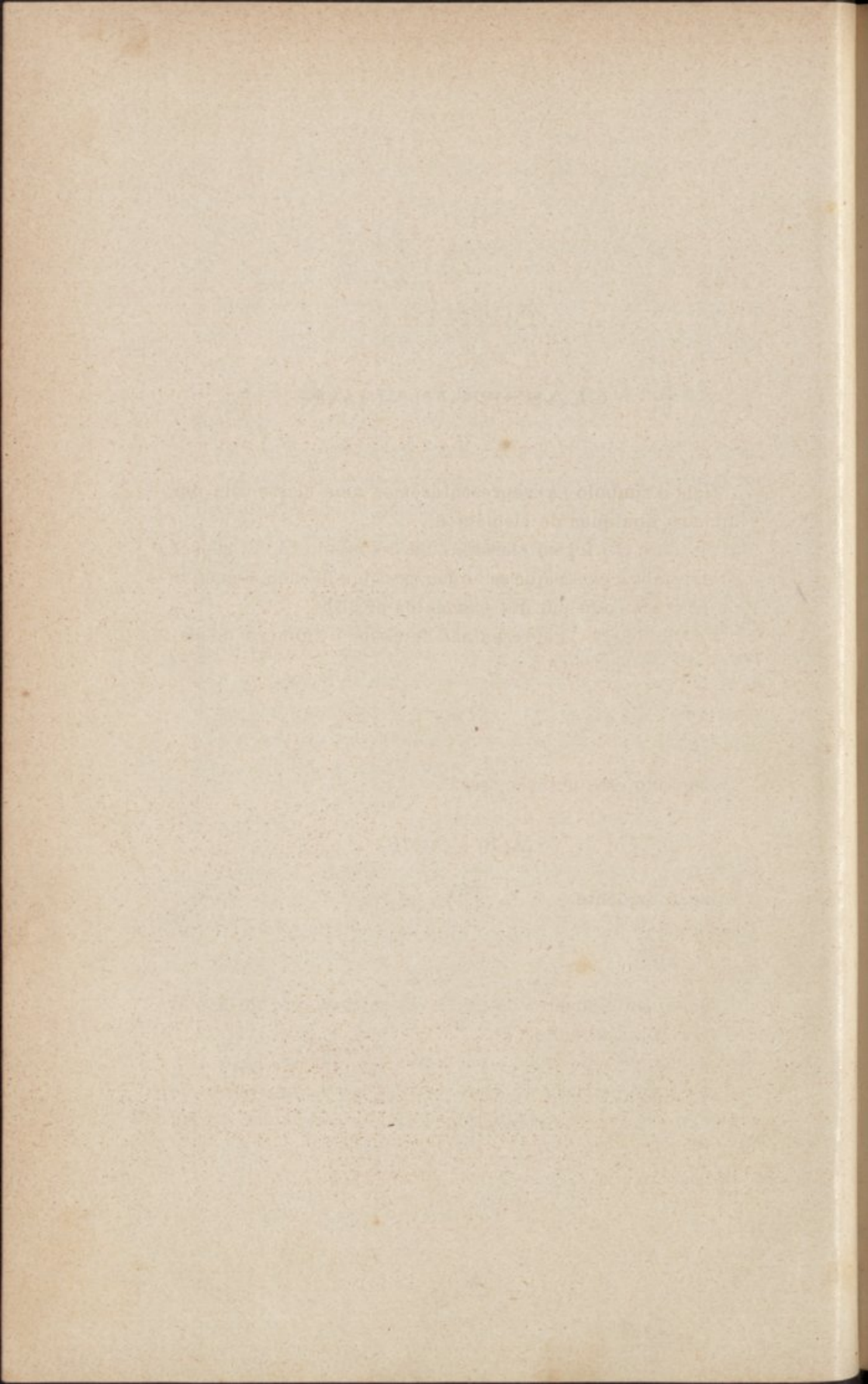
\*

O que se disse duma tiragem feita, à sorte, numa classe finita de elementos, dir-se-há também do lançamento *dum ponto*, feito à sorte, numa região finita, a um número qualquer de dimensões.

---

CAPÍTULO I

CLASSES FINITAS



## CAPÍTULO I

### CLASSES FINITAS

Com o símbolo (A) representaremos uma classe com um número qualquer de elementos.

Se (A) e (B) forem classes, com o símbolo (A, B) representaremos a classe que se obtêm associando cada elemento de (A) com cada um dos elementos de (B).

O símbolo (A) representará também o número de elementos da classe (A).

\*

Segundo esta notação, será

$$(A, B) = (A) \cdot (B)$$

como é evidente.

\*

Qualquer elemento de (A, B) diz-se *composto* de A e B e representa-se por (A B).

A classe (A, B) diz-se *composta* das classes (A) e (B). Uma classe qualquer de elementos compostos (que pode não ser uma classe composta) representá-la-hemos por (A B).

### Proposição primitiva

a)

A proposição: *tirar, à sorte, um elemento da classe (A)* consideramo-la como primitiva, isto é, como tendo um sentido próprio e não precisando, por isso, de explicação.

b)

A proposição: *A é um elemento tirado, á sorte, da classe (A)* tem o mesmo sentido que a proposição *a)*, mas presta-se melhor para o simbolismo da lógica matemática, enquanto que *a)* se presta melhor para o uso da linguagem vulgar.

\*

Segundo a hipótese que acabamos de fazer, as proposições «tirar, à sorte, uma carta dum baralho», «lançar, à sorte, um dado» (tirar, à sorte, uma face dum dado), «tirar, à sorte, uma bola de uma urna», etc., não precisam de explicação.

#### DEFINIÇÃO 1.<sup>a</sup>

*Tirar, à sorte, um elemento de (A) ou (B) ou (C)...*, significa, por definição, *tirar, à sorte, um elemento da classe (A + B + C...)*, representando  $(A + B + C + \dots)$  a classe constituída pela totalidade dos elementos das classes (A), (B), (C)...

DEFINIÇÃO 2.<sup>a</sup>

a)

*Tirar, à sorte, um elemento de (A) e outro de (B) significa, por definição, tirar, à sorte, um elemento de (A, B).*

b)

*Tirar, à sorte, um elemento de (A), outro de (B) e outro de (C) significa, por definição, tirar, à sorte, um elemento de (A, B) e outro de (C), etc.*

\*

Segundo esta definição, *tirar, à sorte, um naipe e tirar à sorte um número* (1) *significa, tirar, à sorte, uma carta dum baralho e reciprocamente.*

DEFINIÇÃO 3.<sup>a</sup>

a)

Seja (A) uma classe, a cada elemento da qual se faz corresponder outra classe (B), variável, em geral, de elemento para elemento.

Nestas condições, *tirar, à sorte, um elemento de (A) e outro na classe (B) correspondente ao elemento tirado de (A) significa ainda, por definição, tirar, à sorte, um elemento de (A, B).*

---

(1) Chamaremos *número* a qualquer carta, abstração feita do naipe.

b)

Se a cada elemento de (B), se fizer corresponder uma nova classe (C), *tirar, à sorte, um elemento de (A), outro da classe (B) correspondente a A e outro da classe (C) correspondente a B*, significa, *tirar, à sorte, um elemento de (A, B) e outro da classe (C) correspondente ao elemento B, tirado em (B)*, etc.

## Possibilidade

### 1.º — Elementos possíveis

Segundo as definições que acabamos de dar, ou bem se trata de tiragens, feitas à sorte, numa só classe (proposição primitiva, def. 1.ª e 2.ª), ou se trata de tiragens feitas, à sorte, num complexo de classes [def. 3.ª, a) b)].

Tudo depende do sistema de tiragens que se considerar e das classes em que elas se efectuarem.

No caso das tiragens serem feitas numa só classe ou de tudo se passar como se tal se desse (prop. primit., def. 1.ª e 2.ª), dizem-se *possíveis* todos os elementos dessa classe.

No caso das tiragens serem feitas num complexo de classes, como na prop. 3.ª a), dizem-se *possíveis* todos os elementos que se obtem associando cada elemento A de (A) com os elementos da classe (B) que lhe corresponde.

No caso da prop. 3.ª b), dizem-se *possíveis* todos os elementos que se obtem associando cada elemento A B, *possível* em relação às duas primeiras tiragens, com cada um dos elementos da classe (C) correspondente a B, etc.



## 2.º — Classes possíveis

Uma classe diz-se *possível* quando é constituída por elementos *possíveis*.

Á classe constituída pela totalidade de elementos possíveis, chamaremos *classe total possível*.

## DEFINIÇÃO 4.ª

Representando por  $(A)$  o número de elementos da classe  $(A)$ , ao número

$$\pi_A = \frac{1}{(A)}$$

chamarei *possibilidade dum elemento A* qualquer, tirado à sorte, de  $(A)$ , ou ainda, *possibilidade por unidade*.

\*

Os elementos provenientes de tiragens efectadas numa mesma classe, ou a tal equivalentes, serão *igualmente possíveis*.

## Proposição I

A possibilidade dum elemento composto é igual ao produto das possibilidades dos elementos componentes.

Com efeito, visto que

$$(A, B) = (A) \cdot (B),$$

será

$$\frac{1}{(A, B)} = \frac{1}{(A)} \cdot \frac{1}{(B)}$$

e por isso,

$$\pi_{A \cdot B} = \pi_A \cdot \pi_B$$

c. d. d.

#### DEFINIÇÃO 5.<sup>a</sup>

Chama-se possibilidade duma classe possível  $(A)$ , à soma das possibilidades dos seus elementos

$$\omega_{(A)} = \sum_{(A)} \pi_{(A)}$$

#### Proposição II

Se  $(A)$  é uma classe possível, tal que

$$(A) = (A_1) + (A_2) + \dots + (A_n),$$

será,

$$\omega_{(A)} = \omega_{(A_1)} + \omega_{(A_2)} + \dots + \omega_{(A_n)},$$

como resulta imediatamente da definição de  $\omega_{(A)}$ .

## Proposição III

A possibilidade da classe total possível é igual à unidade.

Com efeito:

a)

Se os elementos são todos provenientes de tiragens feitas numa só classe (A), a prop. é evidente:

$$\omega_{(A)} = \sum_{(A)} \frac{1}{(A)} = \frac{(A)}{(A)} = 1.$$

b)

Consideremos, agora, o caso de os elementos serem provenientes de tiragens feitas num complexo de classes e, para fixar ideias, suponhamos que se trata do sistema de tiragens da def. 3.<sup>a</sup> a).

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , os elementos de (A) e  $(B_1), (B_2), \dots, (B_n)$  as classes correspondentes. A possibilidade de qualquer elemento da classe que se obtêm associando  $A_1$  com cada um dos elementos de  $(B_1)$  é (prop. I)

$$\pi_{A_1 B_1} = \frac{1}{(A)(B_1)}.$$

A possibilidade desta classe, será

$$\sum_{(B_1)} \pi_{A_1 B_1} = \frac{1}{(A)} \cdot \sum_{(B_1)} \frac{1}{(B_1)} = \frac{1}{(A)}.$$

A possibilidade da classe total será (prop. II)

$$\sum_{(A)} \frac{1}{(A)} = 1$$

c. d. d.

Esta demonstração estende-se facilmente a qualquer sistema de tiragens.

#### Proposição IV

Se a classe (A, B) fôr composta das classes (A) e (B), será

$$\varpi_{(A, B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}$$

visto que a possibilidade de cada elemento de (A, B) é o produto da possibilidade dum elemento de (A) pela possibilidade dum elemento de (B).

### Probabilidade

#### DEFINIÇÃO 6.ª

Seja (A) uma classe possível e (A') outra nela contida; chamaremos «probabilidade de (A') em relação a (A)» ao número

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}}$$

sendo  $\varpi_{(A')}$  e  $\varpi_{(A)}$  as possibilidades respectivas de (A') e de (A).

À classe  $(A')$  costuma chamar-se *favorável* e à classe  $(A) - (A')$ , *classe contrária*.

Às vezes emprega-se a palavra *caso* como sinónimo de *elemento*.

\*

Se os elementos de  $(A)$  forem igualmente possíveis, será

$$\omega_{(A)} = (A) \pi_A, \quad \omega_{(A')} = (A') \pi_{A'}$$

e

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{(A')}{(A)}$$

Logo: quando os elementos da classe possível forem igualmente possíveis, a probabilidade é dada pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

\*

Quando a classe possível fôr constituída pela totalidade dos elementos possíveis, será

$$\omega_{(A)} = 1$$

e

$$P_{(A)}^{(A')} = \omega_{(A')} \quad (1)$$

---

(1) A definição mais geral que LAPLACE deu da probabilidade, coincide com este caso particular ser  $\omega_{(A)} = 1$ .

Se a classe favorável fôr idêntica à classe possível, será

$$P = 1$$

e a probabilidade toma, neste caso, o nome de *certeza*.

Se a classe favorável fôr nula, diremos que

$$w_{(A)} = 0$$

e, portanto,

$$P = 0.$$

A probabilidade toma, neste caso, o nome de *impossibilidade*.

A probabilidade varia, pois, entre os dois números limites, 0 e 1.

### Postulado

Sejam S e S' dois sistemas de tiragens, dando origem a elementos qualitativamente iguais. Nós diremos que estes dois sistemas são equivalentes, quando *classes* qualitativamente iguais tiverem em S e S' as mesmas probabilidades.

\*

A palavra *equivalente* empregada neste postulado, significa que tanto uma tiragem feita em S como uma feita em S', despertam em nós os mesmos móveis de acção.

Este postulado reduz-nos todos os sistemas de tiragens que definimos, a tiragens feitas numa só classe.

### Proposição V

#### Da probabilidade total

Se a classe possível  $(A')$  for constituída pelas classes parciais  $(A_1), (A_2), \dots (A_n)$ , de tal modo que

$$(A') = (A_1) + (A_2) + \dots + (A_n),$$

será (prop. II)

$$\omega_{(A')} = \omega_{(A_1)} + \omega_{(A_2)} + \dots + \omega_{(A_n)},$$

e, portanto

$$p_{(A)}^{(A')} = p_{(A)}^{(A_1)} + \dots + p_{(A)}^{(A_n)}$$

isto é, a probabilidade da classe total é igual à soma das probabilidades das classes parciais.

### Proposição VI

#### Da probabilidade composta

a)

Se  $(A, B)$  é uma classe possível, composta de  $(A)$  e  $(B)$  e  $(A', B')$  outra nela contida <sup>(1)</sup>, será (prop. IV)

<sup>(1)</sup> Em geral, com  $(A')$  designaremos uma classe contida em  $(A)$ .

$$\omega_{(A,B)} = \omega_{(A)} \cdot \omega_{(B)}$$

e

$$\omega_{(A', B')} = \omega_{(A')} \cdot \omega_{(B')}$$

e, por isso,

$$P_{(A, B)}^{(A', B')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(B)}^{(B')}.$$

Se as classes (A) e (B) forem independentes, esta proposição pode enunciar-se: *a probabilidade dum classe composta é igual ao produto das probabilidades das classes componentes.*

b)

A prop. VI ficou demonstrada para o caso das classes favorável e possível serem ambas compostas. Ela pode, porém, generalizar-se para os casos seguintes:

1.º

Se

$$\omega_{(A, B)} = 1,$$

isto é, se a classe possível fôr a classe total possível, será

$$\omega_{(A)} = \omega_{(B)} = \omega_{(A)} \cdot \omega_{(B)} = 1$$

e, portanto,

$$P_{(A, B)}^{(A', B')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(B)}^{(B')}.$$

2.º

Se fôr

$$\omega_{(A, B)} = \omega_{(A)},$$

isto é, se a classe possível se obtiver da classe total pos-



sível, pela exclusão de certos elementos de (A) com todos os elementos das classes (B) que lhes correspondem, será ainda

$$\varpi_{(B)} = 1,$$

e

$$P_{(A, B)}^{(A', B')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(B)}^{(B')}.$$

### Proposição VII

Sejam (A), (A'), (A'') classes tais que (A) contenha (A') e (A') contenha (A''). Teremos,

$$\frac{\varpi_{(A'')}}{\varpi_{(A)}} = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}} \cdot \frac{\varpi_{(A'')}}{\varpi_{(A')}};$$

logo,

$$P_{(A)}^{(A'')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(A')}^{(A'')} \quad (1)$$

### Corolário

De (1) tira-se

$$P_{(A')}^{(A'')} = \frac{P_{(A'')}^{(A'')}}{P_{(A)}^{(A')}}.$$

### Proposição VIII

*Formula de Bayes*

Da probabilidade das causas

Quando as tiragens, à sorte, se effectuarem como ficou indicado na definição 3.<sup>a</sup>, à classe (A) chama-se *causa* e às classes (B), *efeitos*.

O problema chamado *das probabilidades das causas*, tem por tipo o problema seguinte:

Consideremos um grupo de  $N$  urnas, das quais  $n_1$ , tem uma percentagem  $p_1$  de bolas brancas,  $n_2$ , uma percentagem  $p_2$ , etc.

Tire-se, à sorte, uma urna de entre as  $N$  urnas, e da urna que saír, tire-se, à sorte, uma bola que, por hipótese, sáe branca.

Qual a probabilidade de que a bola tirada pertença a uma urna de percentagem  $p_i$ ?

*Resp. :*

Visto que supomos que a bola saída é branca, a classe possível é constituída pela totalidade de elementos compostos de

urna — bola branca.

Designando por  $\omega_{(A)}$  a possibilidade desta classe, será (prop. II e IV)

$$\omega_{(A)} = \frac{n_1}{N} p_1 + \frac{n_2}{N} p_2 + \dots,$$

ou, pondo

$$\frac{n_i}{N} = \omega_i,$$

$$\omega_{(A)} = \sum \omega_i p_i.$$

A classe favorável é formada pela totalidade dos elementos compostos de

urna de ordem  $i$  — bola branca;

logo (prop. IV)

$$\omega_{(A')} = \omega_i p_i.$$

Logo (def. 6.<sup>a</sup>)

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\omega_i p_i}{\sum \omega_i p_i} \quad (2)$$

que é a expressão conhecida pelo nome de fórmula de BAYES.

Nesta expressão,  $\omega_i$  representa a probabilidade de tirar, dentre as N urnas, uma urna de ordem  $i$  e por isso chama-se-lhe *probabilidade à priori* da classe das urnas de ordem  $i$  ou duma urna de ordem  $i$ , mais simplesmente.

A probabilidade  $P_{(A)}^{(A')}$  representa a probabilidade da mesma classe, *depois* de feita a primeira tiragem e de sair uma bola branca; por isso se lhe chama *probabilidade à posteriori*.

\*  
\*   \*

Compreende-se que as *causas*, atrás consideradas, possam ser provenientes não duma tiragem feita numa só classe, mas dum sistema qualquer de tiragens.

Generalizemos a fórmula (1) para esse caso :

Sejam

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

as probabilidades *à priori* das  $n$  causas que podem dar lugar à saída de uma bola branca e sejam

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

as probabilidades que cada uma dessas causas dá à saída duma bola branca.

Designemos por (A) a classe que se obtêm associando cada uma das causas a cada uma das *bolas* a que ela pode dar origem. Designemos por (A') a classe que se obtêm associando cada uma das causas às *bolas brancas* a que ela pode dar origem. E designemos por (A'') a classe que se obtêm associando cada causa de ordem  $i$  com as *bolas brancas* a que cada uma dessas causas pode dar origem.

Teremos (prop. VI, b, 1.º)

$$P_{(A)}^{(A'')} = \omega_i p_i; \quad (3)$$

por outro lado (prop. VII),

$$P_{(A)}^{(A'')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(A')}^{(A'')}, \quad (4)$$

sendo (prop. V)

$$P_{(A)}^{(A')} = \Sigma \omega_i p_i,$$

visto que

$$(A') = \Sigma (A'').$$

Logo

$$P_{(A)}^{(A'')} = \frac{\omega_i p_i}{\Sigma \omega_i p_i}.$$

\*  
\*   \*   \*

Esta dedução que acabamos de fazer, mostra bem como é erronea a dedução que desta fórmula se faz nos livros de probabilidades. Com efeito, no caso das urnas não terem o mesmo número de bolas, a dedução é feita por meio das igualdades (3) e (4), mas justificando-as a ambas com o princípio das probabilidades compostas. Ora a prop. VI é irreduzível à proposição VII, porque a prop. VII não se aplica a elementos considerados como compostos.

Êste erro passava encoberto debaixo da falta de precisão na significação do termo *fenómeno composto*.

De resto, sem êste sofisma, seria impossível deduzir a fórmula de BAYES com a definição de probabilidade dada nesses livros, pela simples razão de que a fórmula de BAYES se refere a um caso de probabilidades que não está previsto nessa definição: o caso de, não sendo os elementos igualmente possíveis, a *classe possível* ser menor do que a *classe total possível*.

### Proposição IX

#### Fórmulas inversas da de Bayes

Representando a probabilidade à posteriori duma causa de ordem  $i$  por  $P_i$ , teremos, como vimos,

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\sum \omega_i p_i} \quad (5)$$

Esta fórmula é simétrica em relação em relação a  $\omega$  e  $p$  e nela supõem-se dados  $p$  e  $\omega$ .

Consideremos, agora, o caso de serem dados  $P$  e  $p$ ; neste caso teremos

$$\omega_i = \frac{\frac{P_i}{p_i}}{\sum \frac{P_i}{p_i}}.$$

Com efeito, de (5) tira-se

$$\frac{P_i}{p_i} = \frac{\omega_i}{\sum \omega_i p_i};$$

donde

$$\sum \frac{P_i}{p_i} = \frac{\sum \omega_i}{\sum \omega_i p_i} = \frac{1}{\sum \omega_i p_i} \quad ? \frac{P_i}{\omega_i p_i}$$

e por isso

$$\omega_i = \frac{\frac{P_i}{p_i}}{\sum \frac{P_i}{p_i}}.$$

Pela simetria de (5), será ainda

$$p_i = \frac{\frac{P_i}{\omega_i}}{\sum \frac{P_i}{\omega_i}}.$$

## Proposição X

Consideremos o seguinte problema, em que se supõem as coisas dispostas como para o caso das probabilidades das causas.

«Tire-se, à sorte, uma urna e da urna tirada, uma bola que se verifica ser branca. Metida a bola na urna, pergunta-se: qual a probabilidade de que, feita outra tiragem na mesma urna, se obtenha uma bola branca?»

## 1.ª solução

Resolvamos êste problema applicando directamente a definição de probabilidade.

A classe possível, pode ser considerada como a totalidade dos elementos compostos de

urna qualquer — bola branca — bola qualquer ;

será, pois,

$$\omega_{(A)} = \sum \omega_i p_i \cdot 1 = \sum \omega_i p_i.$$

A classe favorável será constituída pela totalidade dos elementos compostos de

urna qualquer — bola branca — bola branca ;

logo

$$\omega_{(A')} = \sum \omega_i p_i p_i = \sum \omega_i p_i^2.$$

Logo

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\sum \omega_i p_i^2}{\sum \omega_i p_i}.$$

## 2.ª solução

Podemos ainda considerar as coisas do seguinte modo: a primeira tiragem equivale a substituir as urnas de probabilidade  $\omega$ , por outras de probabilidade  $P$ , sendo  $\omega$  as probabilidades à priori e  $P$  as probabilidades à posteriori. O problema em questão é, portanto, equivalente a este outro:

Se  $n$  causas de probabilidades

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

dão a um determinado efeito, as probabilidades

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

respectivamente, qual a probabilidade desse efeito?

A probabilidade pedida será (prop. V)

$$P = \Sigma P_i p_i = \frac{\Sigma \omega_i p_i^2}{\Sigma \omega_i p_i},$$

como já tínhamos achado.

\*

Dum modo mais geral:

Se numa urna, tirada à sorte, fizermos  $m + n$  tiragens (metendo na urna cada bola tirada, antes de feita a tiragem imediata) e dessas tiragens nos resultarem  $m$  bolas



brancas e  $n$  pretas, a probabilidade de que a tiragem de ordem  $m+n+1$  dê uma bola branca, é

$$P = \frac{\sum \omega_i p_i^{m+1} q_i^n}{\sum \omega_i p_i^m q_i^n},$$

resultado êste que se pode obter, ainda, pelos dois processos empregados para o caso particular de duas tiragens.

#### Corolário

Se as urnas tiverem a mesma probabilidade à priori, isto é, se

$$\omega_i = \text{const.},$$

será

$$P = \frac{\sum p_i^{m+1} q_i^n}{\sum p_i^m q_i^n}.$$

#### Problema

Dá-se uma urna contendo  $N$  bolas, brancas e pretas, de percentagens desconhecidas. Supondo que todas as percentagens são igualmente prováveis, qual a probabilidade de tirar uma bola branca na tiragem de ordem  $m+n+1$ , sabendo-se que nas primeiras  $m+n$  tiragens se obtiveram  $m$  bolas brancas e  $n$  pretas?

\*

Êste problema é idêntico a êste outro.

Dão-se  $N + 1$  urnas, contendo a primeira  $N$  bolas pretas, a segunda uma bola branca e  $N - 1$  pretas, a terceira 2 bolas brancas e  $N - 2$  pretas, etc., a última  $N$  bolas brancas.

Tira-se uma urna, à sorte, e fazem-se dela  $m + n$  tiragens (tornando a pôr na urna cada bola, antes de tirar a seguinte) que dão  $m$  bolas brancas e  $n$  pretas. Pergunta-se: qual a probabilidade de que a tiragem de ordem  $m + n + 1$ , dê uma bola branca ?

\*

O problema é resolvido, portanto, pela fórmula do corolário antecedente; pondo

$$p_i = \frac{N - \alpha}{N} \quad \text{e} \quad q_i = \frac{\alpha}{N},$$

virá

$$P = \frac{\sum_{\alpha=0}^N \left( \frac{N - \alpha}{N} \right)^{m+1} \left( \frac{\alpha}{N} \right)^n}{\sum_{\alpha=0}^N \left( \frac{N - \alpha}{N} \right)^m \left( \frac{\alpha}{N} \right)^n},$$

ou, aproximadamente,

$$P = \frac{\int_0^N \left( \frac{N - \alpha}{N} \right)^{m+1} \left( \frac{\alpha}{N} \right)^n dx}{\int_0^N \left( \frac{N - \alpha}{N} \right)^m \left( \frac{\alpha}{N} \right)^n dx}$$

ou, pondo

$$\alpha = Nx,$$

$$P = \frac{\int_0^1 (1-x)^{m+1} x^n dx}{\int_0^1 (1-x)^m x^n dx}.$$

Ora

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

e, sendo  $n$  inteiro,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Logo

$$P = \frac{\Gamma(m+2) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+3)} \cdot \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1) \Gamma(n+1)}$$

ou

$$P = \frac{(m+1)!}{(m+n+2)!} \cdot \frac{(m+n+1)!}{m!} = \frac{m+1}{m+n+2},$$

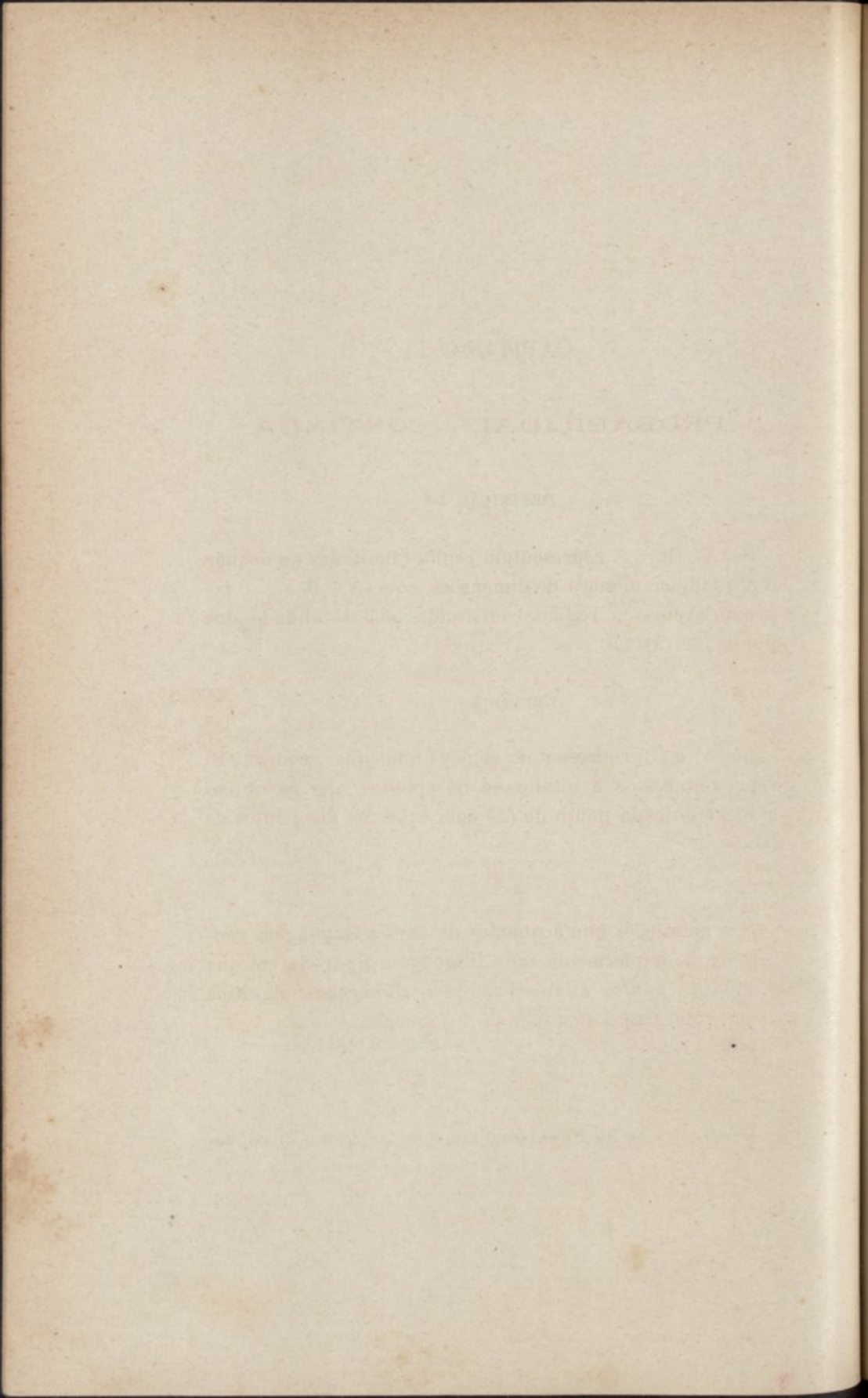
sendo esta fórmula tanto mais aproximada quanto maior fôr  $N$ .

CHAPTER II

PROBABILIDADE CONTRA

CAPÍTULO II

PROBABILIDADE CONTÍNUA



## CAPITULO II

### PROBABILIDADE CONTÍNUA

#### DEFINIÇÃO 1.ª

Se  $(A)$ ,  $(B)$ , ... representam regiões limitadas quaisquer e a qualquer número de dimensões, com  $(A + B + \dots)$  representaremos a região constituída pela totalidade dos pontos de  $(A)$ ,  $(B)$ , ...

#### DEFINIÇÃO 2.ª

Se  $(A)$  e  $(B)$  representam regiões quaisquer, com  $(A, B)$  representaremos a totalidade dos pontos que se obtêm associando cada ponto de  $(A)$  com cada um dos pontos de  $(B)$ .

\*

Nas definições que acabamos de dar, a linguagem geométrica é simplesmente uma linguagem figurada em que a palavra *ponto*, num espaço a  $n$  dimensões, significa apenas um grupo qualquer de  $n$  números.

\*

Demonstra-se na Pangeometria que se  $(A)$  e  $(B)$  repre-

sentam regiões e os mesmos símbolos as suas *medidas* respectivas, se tem

$$(A, B) = (A) \cdot (B),$$

ou melhor, a Pangeometria generaliza a noção de *medida* do hyper-espaco de modo tal que se mantem a relação

$$(A, B) = (A) \cdot (B).$$

$(A, B)$  dir-se-há uma *região composta* de  $(A)$  e  $(B)$  e os seus pontos dir-se-hão *pontos compostos*, tal qual como na probabilidade descontínua.

### Proposição primitiva

a)

Análogamente ao caso da probabilidade das classes descontínuas e finitas, consideraremos como primitiva a proposição: *Lançar, à sorte, um ponto numa região  $(A)$  limitada e a um número qualquer de dimensões.*

b)

A proposição  $M$  é um ponto lançado, à sorte, em  $(A)$  tem uma significação análoga à da proposição precedente, mas presta-se melhor para o simbolismo da lógica.

#### DEFINIÇÃO 1.ª

*Lançar, à sorte, um ponto em  $(A)$  ou  $(B)$  ou ... significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto na região  $(A + B + \dots)$ .*



DEFINIÇÃO 2.<sup>a</sup>

a)

Lançar, à sorte, um ponto em (A) e outro em (B), significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto em (A, B).

b)

Lançar, à sorte, um ponto em (A) e outro em (B) e outro em (C), significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto em (A, B) e outro em (C), etc.

Assim, lançar, à sorte, um ponto  $M$  no segmento  $AB$  e um ponto  $N$  no segmento  $AC$ , significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto  $P$  no paralelogramo  $ABDC$  (fig. 1).

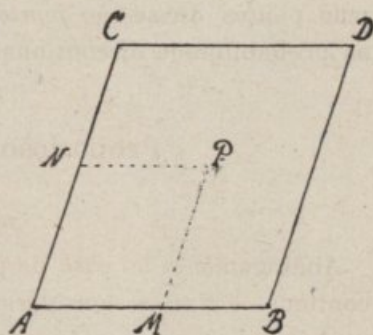


Figura 1

Lançar, à sorte, um ponto num arco de curva qualquer e outro num segmento de recta, seria o mesmo que lançar, à sorte, um ponto num segmento de superfície cilíndrica, etc.

DEFINIÇÃO 3.<sup>a</sup>

a)

Consideremos, agora, o caso do lançamento à sorte ser feito, não em regiões quaisquer, mas em regiões sujeitas a certa dependência.

Seja (A) uma região qualquer e suponhamos que a cada ponto de (A) se faz corresponder uma outra região (B), variável, em geral, com o ponto de (A) considerado.

Lançar, à sorte, um ponto em (A) e outro na região (B) correspondente ao ponto de (A) coincidente, significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto na região (A, B) sendo (B) a região correspondente ao ponto coincidente de (A).

b)

Se a cada ponto de (B) fizermos corresponder uma nova região (C), lançar, à sorte, um ponto em (A), outro na região (B) correspondente ao ponto coincidente de (A) e

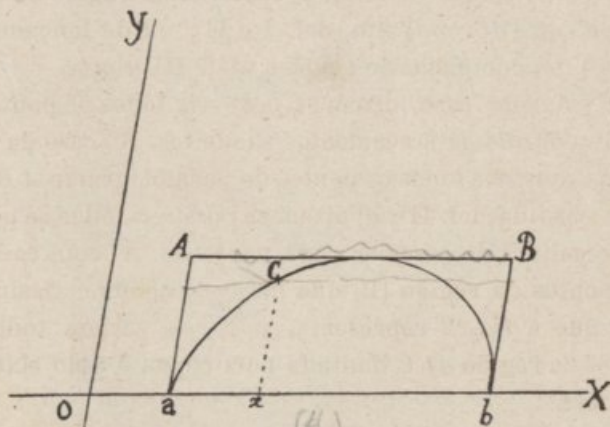


Figura 2

outro na região (C) correspondente ao ponto coincidente de (B), significa por definição, lançar, à sorte, um ponto em (A, B) e outro em (C), etc.

\*

Assim, suponhamos que (A) seja (fig. 2) o segmento  $ab$

e que as regiões (B) são as ordenadas dos pontos da curva  $aCb$ , correspondendo a cada ponto  $x$  a ordenada  $xC$ .

Se o ponto lançado à sorte em  $ab$  coincidir com  $x$ , o segundo lançamento far-se-há em  $xC$  e tudo se passará, segundo a definição, como se se fizesse um só lançamento num paralelogramo de base  $ab$ , com o lado superior passando por  $C$  e contido, portanto, no paralelogramo  $abBA$ .

### Possibilidade

Segundo as definições que acabamos de dar, ou bem se trata de lançamentos feitos à sorte numa região ou a tais equivalentes (prop. prim. def. I e II), ou de lançamentos feitos num complexo de regiões (def. III  $a$  e  $b$ ).

No primeiro caso, dizem-se *possíveis* todos os pontos da região em que os lançamentos são feitos. No caso da *fig. 1* seriam *possíveis* todos os pontos do paralelogramo  $ABDC$ .

No caso da def. III,  $a$ ) dizem-se *possíveis* todos os pontos que resultam de associar cada ponto de (A) com cada um dos pontos da região (B) que lhe corresponde. Assim, no caso que a *fig. 2* representa, *possíveis* seriam todos os pontos da região  $abC$  limitada pela curva e pelo eixo dos  $XX$ , etc.

### Possibilidade num ponto ou possibilidade por unidade

Seja (A) a grandeza duma região em que se faz um lançamento à sorte.

Ao número

$$\pi_A = \frac{1}{(A)}$$

chama-se *possibilidade no ponto A* ou *possibilidade por unidade*.

Podemos dizer que neste caso todos os pontos de (A) são *igualmente possíveis*, para nos servirmos duma linguagem análoga à da probabilidade descontínua, querendo dizer com *pontos igualmente possíveis*, pontos nos quais a possibilidade é sempre a mesma.

\*

Segundo esta definição, os pontos das regiões consideradas na *prop. prim.* e *def. I e II* são igualmente possíveis. Nos casos da *def. III* a possibilidade não será, em geral, a mesma para todos os pontos.

Em qualquer dos casos, porém, ela é perfeitamente determinada, visto que, segundo as definições dadas, cada ponto possível faz parte duma região e duma só, em que se efectua um lançamento à sorte, do qual lhe resulta a propriedade de ser *possível*.

A possibilidade num ponto fica sendo uma função definida das coordenadas do mesmo.

### Proposição I

Por razões perfeitamente idênticas às do caso análogo das <sup>possíveis</sup> probabilidades das classes finitas, a *probabilidade num ponto composto é igual ao produto das possibilidades nos pontos componentes*. *possível*

### Possibilidade duma região

Uma região diz-se *possível* quando é formada por pontos possíveis.

Chama-se possibilidade duma região (A), ao integral da possibilidade por unidade, estendido a toda essa região, caso êsse integral exista.

Representaremos por  $\varpi_{(A)}$  a possibilidade de (A).

### Proposição II

Em virtude da definição antecedente, será ainda,

$$\varpi_{(A)} = \varpi_{(A_1)} + \varpi_{(A_2)} + \dots + \varpi_{(A_n)}$$

todas as vezes que

$$(A) = (A_1) + (A_2) + \dots + (A_n).$$

\*

Chamaremos, ainda, *região total possível*, à totalidade dos pontos possíveis, em relação a determinado sistema de lançamentos.

### Proposição III

*A possibilidade da região total possível é igual à unidade como se demonstra de modo perfeitamente análogo ao da probabilidade descontínua.*

### Proposição IV

*Teremos ainda*

$$\varpi_{(A, B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}.$$

Com efeito, visto que a função  $\frac{1}{(B)}$  é independente das coordenadas dos pontos de (A), e visto que

$$\frac{1}{(A, B)} = \frac{1}{(A)} \cdot \frac{1}{(B)},$$

será

$$\varpi_{(A, B)} = \int_{(A, B)} \frac{d(A, B)}{(A, B)} = \int_{(A)} \frac{d(A)}{(A)} \cdot \int_{(B)} \frac{d(B)}{(B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}$$

c. d. d.

### Probabilidade

Seja (A) uma região *possível* relativamente a um dado sistema de lançamentos à sorte, e (A') outra nela contida.

Chama-se *probabilidade da região (A') em relação à região (A), ao número*

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}},$$

sendo  $\varpi_{(A')}$  e  $\varpi_{(A)}$  as possibilidades de (A') e de (A).

\*

Se os pontos de (A) forem *igualmente possíveis*, será

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{(A')}{(A)}.$$

Quando a *classe possível* coincidir com a *classe total possível*, será

$$\varpi_{(A)} = 1$$

e

$$P_{(A)}^{(A')} = \varpi_{(A')}.$$

Exemplos :

1.º

Parte-se, à sorte, um segmento em três partes : qual a probabilidade de que essas três partes formem um triângulo ?

Resp. :

Partir um segmento em três partes é considerar sôbre êle dois pontos ; parti-lo à sorte, será, por definição, lançar, à sorte, dois pontos sôbre êle, ou, o que é o mesmo (def. II), lançar, à sorte, um ponto num quadrado que tem êsse segmento de lado.

Seja  $AB$  o segmento dado (fig. 3) e seja  $ABCD$  o quadrado (fig. 4).

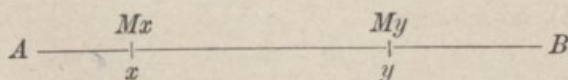


Figura 3

Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $M$  correspondente às posições  $Mx$  e  $My$  dos pontos lançados à sorte sôbre  $AB$ .

Supondo que os segmentos mencionados no enunciado do problema em questão são aditivos, teremos a determinar a probabilidade de que os segmentos  $Ax$ ,  $xy$  (caso  $x < y$ ) e  $yB$  formem um triân-

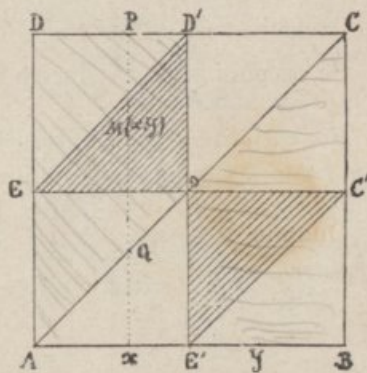


Figura 4

$$\begin{aligned} Ax &= x \\ xy &= (y-x) \\ yB &= 2-y \end{aligned}$$

gulo; caso  $y < x$ , os segmentos a considerar serão  $Ay$ ,  $yx$ ,  $xB$ .

Seja, em primeiro lugar,  $x < y$ .

Para que os três segmentos possam formar triângulo será necessário e suficiente que

$$\begin{aligned} x &< (y-x) + (\alpha-y) \\ y-x &< x + (\alpha-y) \\ \alpha-y &< x + (y-x) \end{aligned}$$

representando por  $\alpha$  o comprimento do segmento  $AB$ .

Estas condições são equivalentes a estas outras, como se vê imediatamente,

$$\begin{aligned} 0 &< y > \frac{\alpha}{2} \\ 0 &< x < \frac{\alpha}{2} \\ 0 &< y-x < \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

A região favorável ( $A'$ ) será, pois, constituída pela totalidade dos pontos do quadrado  $ABCD$  cujas coordenadas satisfaçam às condições (1).

A estas condições só satisfazem os pontos da região  $OD'E$ , como é óbvio.

No caso de  $x > y$ , a região favorável seria formada pelo triângulo simétrico em relação a  $AC$ .

E como todos os pontos são igualmente possíveis, a probabilidade pedida será dada pelo quociente das áreas das regiões favorável e possível, isto é,

$$P = \frac{1}{4}.$$



## 2.º

Suponhamos agora que partimos o mesmo segmento em dois e depois o segmento *maior* ainda em dois: qual a probabilidade de que os três segmentos possam formar triângulo?

Resp. :

O campo favorável é ainda o mesmo do problema antecedente; vejamos o campo possível.

Para  $x < \frac{a}{2}$ , será  $Ax < xB$  e por isso  $x < y < a$ , isto é, quando o primeiro ponto cae em  $x$  o segundo ponto cairá em qualquer ponto de  $xB$  e por isso todos os pontos de  $QP$  são possíveis e portanto são possíveis todos os pontos da região  $AOD'D$  (*fig. 4*).

Por razões idênticas é possível a região  $E'O'CB$ . Como a questão é simétrica em relação a  $AC$ , consideremos só a parte  $AOD'D$  como região possível e  $OD'E$  como região favorável.

No problema antecedente os elementos possíveis eram também igualmente possíveis, porque cada um dos pontos supunha-se lançado sobre todo o segmento, o que neste caso se não dá. Chamando  $F$  à região favorável e  $P$  à região possível, será

$$\omega_P = 1$$

e

$$\omega_F = \int_{OD'E} \frac{2dx}{a} \cdot \frac{dy}{a-x} = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{a-x} \cdot \int_{\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} dy$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_F &= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{x}{a-x} dx = \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \left[ -1 + \frac{a}{a-x} \right] dx = -1 + 2 \left[ -\log. (a-x) \right]_0^{\frac{a}{2}} = \\ &= 2 \log. 2 - 1 = 0,44 \dots \dots \end{aligned}$$

e, portanto,

$$P = 0,44 \dots \dots$$

isto é, a probabilidade augmentou, como era de esperar.

### 3.º

Consideremos ainda outra variante do mesmo problema.

Lança-se à sorte um ponto M em A E' (fig. 4) e outro M' no segmento MB e supõe-se que o ponto M' caiu entre E' e B; pede-se a probabilidade de que os três segmentos AM, MM' e M'B possam formar triângulo.

Resp. :

As regiões *total* possível, possível e favorável são respectivamente AOD'D, EOD'D e EOD'.

Teremos pois :

$$\begin{aligned} \omega_P &= \iint_{\text{EOD'D}} \frac{dx}{a} \cdot \frac{dy}{a-x} \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{a-x} \end{aligned}$$

ou,

$$\omega_P = \left[ -\log. (a-x) \right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= \log. a - \log. \frac{a}{2}.$$

$$= \log. 2$$

e (prob. 2.º)

$$\omega_F = 2 \log. 2 - 1 ;$$

logo

$$P = 2 - \frac{1}{\log. 2} = 0,6\dots$$

### Observação

Tudo o que se disse da probabilidade descontínua, diz-se da probabilidade contínua. Assim, as proposições V, VI, VII, demonstradas para a probabilidade descontínua, demonstram-se de modo idêntico para a probabilidade contínua e serão indicadas neste capítulo com os mesmos números. O «problema das probabilidades das causas» podia ser tratado aqui do mesmo modo que no capítulo antecedente.

No capítulo IV será esse problema tratado dum modo bastante diferente e mais geral.

### Proposição VIII

Se um ponto M, variando numa dada região, se puder decompor em dois componentes, M<sub>1</sub> e M<sub>2</sub> tais que, a cada

posição de  $M_1$  corresponda sempre para  $M_2$  o mesmo campo favorável e o mesmo campo possível,  $M_1$  será *independente* de  $M_2$  e por isso as suas probabilidades podem calcular-se separadamente, o que, em geral, facilita muito a resolução do problema. No caso particular da probabilidade de  $M_1$  ser igual à unidade, a probabilidade de  $M$  será independente dos parametros que definem a posição de  $M_1$  que por isso poderemos supôr *fixo*.

Quando a região em que se faz o lançamento de  $M$  tiver um elemento de simetria, será, em geral, aplicável esta proposição.

#### Exemplo :

Lançam-se, à sorte, dois pontos sôbre a superfície duma esfera. Pergunta-se : qual a probabilidade de que o menor arco do círculo máximo que liga os dois pontos, seja inferior a  $\alpha$  ?

Resp. :

Qualquer que seja a posição dum dos pontos  $M$ , por exemplo, para o outro corresponderá sempre a mesma região favorável e a mesma possível.

Supondo, então,  $M$  fixo, a região favorável será dada pela calote tendo o ângulo  $2\alpha$  de abertura e  $M$  por vértice, a região possível, sendo toda a superfície da esfera. O problema é, pois, equivalente a êste outro : qual a probabilidade de que um ponto lançado à sorte na superfície duma esfera, cáia sôbre um segmento dessa superfície ? Problema êste de solução imediata.

## Proposição IX

«Se o campo da variação de M se puder decompor em partes, de modo que a probabilidade de M seja a mesma em cada uma delas, teremos que a probabilidade no campo total será igual à probabilidade em qualquer das partes».

Com efeito, sejam (A), (B), ... (L), as partes do campo possível e (A'), (B') ... (L') as partes correspondentes do campo favorável; teremos que, por hipótese,

$$P = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}} = \frac{\varpi_{(B')}}{\varpi_{(B)}} = \dots = \frac{\varpi_{(L')}}{\varpi_{(L)}}.$$

Logo

$$P = \frac{\sum \varpi_{(L')}}{\sum \varpi_{(L)}}$$

que é a probabilidade de M,

c. d. d.

## DEFINIÇÃO 4.ª

A proposição *lançar, à sorte, um ponto em (A)* sendo (A) ilimitada, significa, *lançar, à sorte, um ponto em (A')* sendo (A') uma região contida em (A), limitada e arbitrariamente grande.

Se M é um ponto lançado à sorte em (A) e (A) é ilimitada, chama-se probabilidade de M na região (A) ao limite da probabilidade de M em (A') quando (A) aumenta indefinidamente, isto é, ao número P tal que a todo o  $\delta > 0$

corresponda uma região (C) tal que

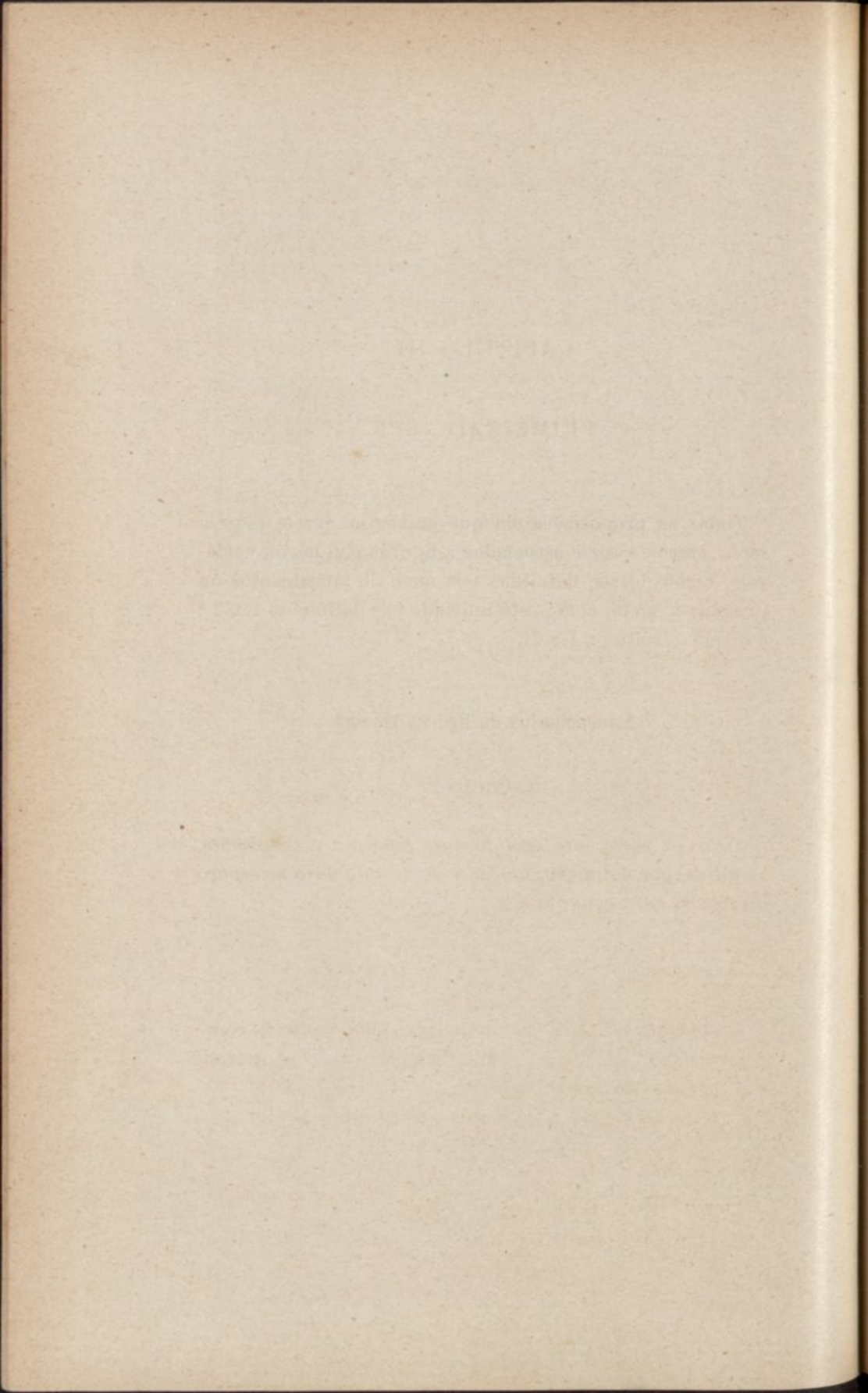
$$| P - P_{(B)} | < \delta$$

para todas as regiões (B) tais que

$$(B) > (C).$$

Trataremos mais desenvolvidamente d'êste caso num *apêndice* em que estudaremos a probabilidade dos conjuntos numeráveis, depois de numerados.

CAPÍTULO III





## CAPÍTULO III

### PRIMEIRA PARTE

Todas as proposições em que entrem as frases *tirar à sorte*, *lançar à sorte* associadas a figuras rígidas ou variáveis, terão de ser definidas por meio de lançamentos ou tiragens à sorte, como está indicado nas definições 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> dos capítulos I e II.

#### Lançamentos de figuras rígidas

##### DEFINIÇÃO 1.<sup>a</sup>

*Tirar, à sorte, um sentido num espaço a n dimensões, significa, por definição, lançar à sorte um ponto no espaço da figura cuja equação é*

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 = 1.$$

O sentido será o do vector definido pelo ponto de coordenadas  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  como origem e pelo ponto lançado à sorte como extremidade.

O ponto  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  pode ser qualquer.

No caso particular de  $n = 2$ , o lançamento faz-se sobre uma circunferência e no de  $n = 3$ , sobre uma esfera.

Análoga definição serve para a tiragem, à sorte, duma direção.

DEFINIÇÃO 2.<sup>a</sup>

Sejam  $AB$  e  $A'B'$  dois segmentos de recta. Sobreponhamo-los de modo que o ponto  $A$  coincida com o ponto  $A'$  e façamos escorregar o segmento menor sobre o maior até que o ponto  $B$  coincida com o ponto  $B'$ . Dêste modo o segmento menor passa por todas as posições que êle pode ocupar em relação ao segmento maior e no final do percurso todos os pontos do segmento menor terão descrito segmentos de recta iguais.

*Lançar, à sorte, o segmento menor sobre o maior* significa, *lançar, à sorte, um ponto qualquer do segmento menor sobre o segmento que esse mesmo ponto descreve quando o segmento menor percorre o segmento maior.*

*Lançar, à sorte, o segmento maior sobre o menor*, significa o mesmo que *lançar o menor sobre o maior.*

\*

Para que esta definição seja correcta é necessário e basta que ela não dependa de nenhum ponto particular, isto é, que seja a mesma qualquer que seja o ponto considerado sobre o segmento. Ora de facto assim é, visto que todos os pontos do segmento descrevem segmentos iguais.

Como, em virtude do sistema das definições 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup>, tudo se resume ao lançamento dum ponto numa

região ou complexo de regiões, a cada figura lançada à sorte corresponderá, em geral, um ponto que lhe serve de definição no lançamento. A êsse ponto chamaremos ponto *equivalente* da figura em relação ao lançamento considerado. O ponto equivalente deve ser tal que, qualquer que seja a figura em questão, êle não dependa de nenhum dos pontos dessa figura.

### Problema

Dois amigos passeiam todas as tardes, durante meia hora, num jardim público que está aberto das duas horas até às quatro. Qual a probabilidade de que se encontrem em certo dia ?

Resp. :

Supõe-se casual a hora a que qualquer dos indivíduos se dirige para o jardim. Nestas condições, visto que o tempo é um *contínuo* a uma dimensão, podemos enunciar assim êste problema :

Dá-se um segmento de recta de comprimento  $a$  e mais dois outros de comprimentos  $b$  e  $c$ ; lançam-se  $b$  e  $c$ , à sorte, sôbre  $a$ : qual a probabilidade de que se sobreponham ?

No caso de  $b + c \geq a$ , os segmentos sobrepõem-se sempre e por isso

$$p = 1.$$

No caso de  $b + c < a$ , vejamos como as coisas se passam. Quando  $b$  percorrer o segmento  $a$ , qualquer dos seus pontos descreve segmentos iguais a  $a - b$  e, análogamente,

qualquer ponto de  $c$  descreve segmentos iguais a  $a - c$ . Lançar à sorte os dois segmentos sôbre  $a$ , é lançar à sorte um ponto de  $b$  em  $a - b$  e um ponto de  $c$  em  $a - c$ , ou, o que é o mesmo, lançar à sorte um ponto no rectângulo  $(a - b)(a - c)$ .

Escolhamos para pontos equivalentes de  $b$  e  $c$  as suas extremidades da direita e sejam  $x$  e  $y$  as distâncias dessas extremidades à origem 0 de  $a$  (fig. 5).

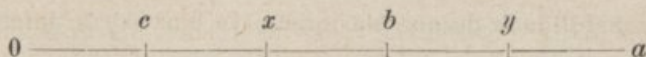


Figura 5

Para que  $b$  e  $c$  se não sobreponham terá de ser

$$y - x > b \quad \text{ou} \quad x - y > c.$$

As rectas cujas equações são

$$y - x = b \quad \text{e} \quad x - y = c$$

determinam sôbre o rectângulo  $(a - b)(a - c)$  dois semi-quadrados que são, para o problema proposto, a região *contrária*. E tem-se, como é fácil de vêr,

$$1 - P = \frac{\frac{1}{2}(a - b - c)^2 + \frac{1}{2}(a - c - b)^2}{(a - b)(a - c)} = \frac{(a - b - c)^2}{(a - b)(a - c)}.$$

Para

$$a = 2, \quad b = c = \frac{1}{2},$$

vem

$$P = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

DEFINIÇÃO 3.<sup>a</sup>

Lançar, à sorte, uma recta numa região (A), significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto em (A) e tirar, à sorte, uma direcção sendo a recta definida por estes dois elementos.

Exemplo:

Lança-se, à sorte, uma recta dentro dum círculo; qual a probabilidade de que ela intersecte uma corda inferior ao segmento  $c$ ?

Para lançar, à sorte, a recta, principiamos por tirar, à sorte, a sua direcção. Em virtude da simetria do círculo, a qualquer direcção da recta corresponde sempre, para o ponto lançado no círculo, o mesmo campo favorável  $S'$  (menor segmento de círculo limitado pela corda  $c$ ) e o mesmo possível  $S$  (área total). Logo (prop. VIII) a probabilidade pedida será independente da direcção  $D$  (fig. 6) da recta que, por isso, suporemos fixa e dependerá apenas de  $M$ . Logo

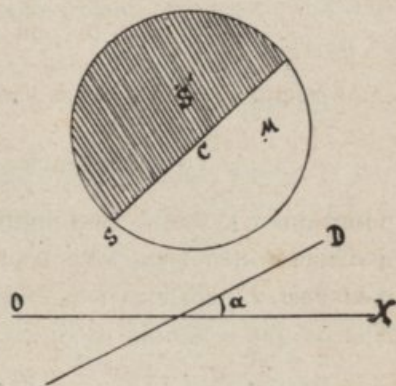


Figura 6

$$P = \frac{S'}{S} = \frac{\alpha - \text{sen } \alpha}{\pi}$$

$$S = \pi R^2$$

sendo  $\alpha$  o ângulo subtendido pela corda  $c$ , visto que a corda será maior ou menor que  $c$ , conforme  $M$  estiver ou não sobre  $S'$ .

\*

A solução generaliza-se imediatamente ao caso duma recta lançada numa esfera.

A mesma solução se daria ao problema que dêste resulta substituindo a recta por um plano e a corda pela área de uma secção plana.

#### DEFINIÇÃO 4.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, um segmento de recta numa região (A) significa, por definição, lançar, à sorte, uma recta em (A) (def. 3.<sup>a</sup>) e na parte dessa recta interior a (A), o segmento em questão (def. 2.<sup>a</sup>)*

Exemplo :

#### Problema da agulha

Lança-se, à sorte, uma agulha (segmento da recta) sobre uma folha de papel (plano ilimitado) cortada por linhas rectas paralelas e equidistantes; qual a probabilidade de que a agulha encontre uma dessas rectas ?

Resp. :

Seja  $l$  o comprimento da agulha e  $a$  a distância das paralelas  $AB, A'B', \dots$  (fig. 7).

Principiemos por tirar, à sorte, a direcção  $\alpha$  da recta que contém o segmento; em seguida teremos de lançar à sorte um ponto  $M$  dentro dum segmento do plano arbitrariamente grande (cap. II, def. 4.<sup>a</sup>). Por maior, porém,

que seja esse segmento do plano, poderemos sempre determinar um paralelogramo PQRS com os lados paralelos à direcção achada e às rectas AB, A'B', paralelogramo esse que contenha o segmento do plano considerado e fazer dentro d'êlo o lançamento de M. Suponhamos que estes dois lançamentos nos determinaram a recta DE. Determinada ela, resta lançar o segmento  $l$  sôbre o segmento DE (def. 4.<sup>a</sup>). Ora, qualquer que seja a posição do ponto M, a probabilidade de  $l$  encontrar uma das rectas é sempre a mesma. Logo (cap. II, def. 8.<sup>a</sup>) podemos supôr M fixo.

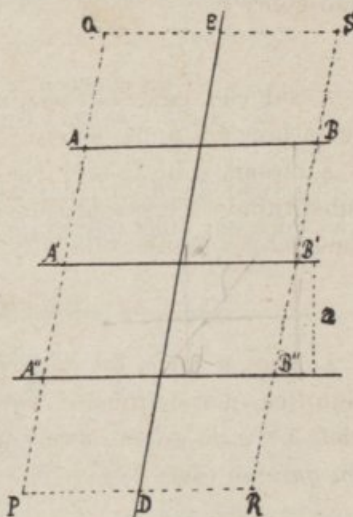


Figura 7

Posto isto, façamos percorrer a  $l$  a recta DE. Quando a origem de  $l$  percorrer um segmento de DE compreendido entre duas paralelas consecutivas, o espaço durante o qual esse segmento encontra uma das paralelas é sempre o mesmo.

As paralelas dividem, pois, o campo possível do lançamento de  $l$  sôbre DE em partes de igual probabilidade (desprezando as duas partes extremas, o que é legítimo em virtude da arbitrariedade do paralelogramo); logo (def. 9.<sup>a</sup>) bastará calcular a probabilidade numa dellas:

$$p = \frac{l}{BB'} = \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{a}$$

*Handwritten:*  $BB' = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$

(sendo  $\alpha$  o ângulo EDR), caso  $a > l$ ; por outro lado, a probabilidade por unidade de  $\alpha$  é  $\frac{1}{\pi}$ ; logo

$$P = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{a} d\alpha = \frac{l}{a\pi} (-\cos \alpha)_0^{\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

No caso de  $a < l$ , decomponhamos o campo da variação de  $\alpha$  em duas partes: a 1.<sup>a</sup> constituída pela totalidade

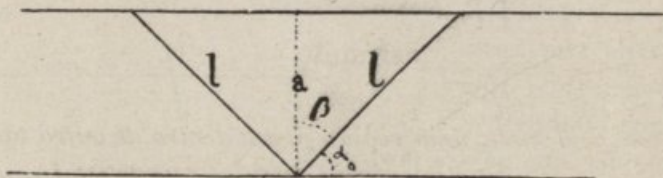


Figura 8

de valores de  $\alpha$  para os quais pode não haver o encontro; a 2.<sup>a</sup> constituída pelos outros valores. Aplicando os teoremas das probabilidades totais e compostas e pondo

$$a = l \cos B = l \operatorname{sen} \alpha_0,$$

virá

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi - 2\alpha_0}{\pi} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \int_0^{\alpha_0} \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{a} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha_0} \\ &= \frac{\pi - 2\alpha_0}{\pi} + \frac{2l}{a\pi} [1 - \cos \alpha_0] \\ &= \frac{2B}{\pi} + \frac{2l}{a\pi} (1 - \operatorname{sen} B). \end{aligned}$$



**Nota**

Convêm notar que a probabilidade de encontro é proporcional ao comprimento da agulha logo que  $l < a$ .

DEFINIÇÃO 5.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, um plano* <sup>(1)</sup> *dentro duma região (A) também plana, significa, por definição, tirar, à sorte, em (A) um sentido.*

DEFINIÇÃO 6.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, uma região plana dentro de outra também plana (A), significa, por definição, lançar em (A) um plano (def. 5.<sup>a</sup>) e em seguida lançar, à sorte, um ponto da região móvel ou a ela invariavelmente ligado, dentro da região que esse mesmo ponto descreve quando a figura móvel ocupa dentro de (A) todas as posições compatíveis com a orientação que a sorte designa para o seu plano.*

Evidentemente que o ponto equivalente terá sempre a mesma possibilidade qualquer que seja o ponto escolhido no plano da figura móvel, visto que, deslocando-se o plano da figura móvel paralelamente a si mesmo, todos os seus pontos descrevem regiões iguais.

---

(1) Êste plano fica perfeitamente orientado logo que se dê dêle uma semi-recta.

DEFINIÇÃO 7.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, um plano num espaço a  $n > 3$  dimensões, significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto nesse espaço e, á volta dele, dois sentidos.*

DEFINIÇÃO 8.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, num espaço a  $n$  dimensões, uma figura plana, significa, por definição, lançar, à sorte, um plano nessa região e, sôbre a parte do plano interior a essa região, a figura plana em questão.*

DEFINIÇÃO 9.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, um espaço a três dimensões, numa região (A) a três dimensões também, significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto em (A), e á volta dele dois sentidos (1).*

\*

A generalização destas definições para espaços de um número superior de dimensões é intuitiva.

**Nota**

Convém notar que, segundo estas definições, lançar, à sorte, a região finita (B) sôbre a região também finita (A), é equivalente a lançar, à sorte, um ponto numa região que depende de (A) e (B). Desta dependência se conclue imediatamente (basta analisar um caso particular, o do lan-

---

(1) Bastam dois sentidos para orientar três eixos.

çamento dum segmento de recta sôbre um segmento plano, por exemplo) que do lançamento, à sorte, do *todo*, se não conclue o lançamento, à sorte, de qualquer das *partes*, porque, no caso de regiões finitas, o ponto equivalente duma parte de (B) variará numa região diferente da do ponto equivalente de (B), isto é, lançando a parte junta ao todo, o campo de variação do seu ponto equivalente será um (campo do ponto de equivalência do todo), lançada separadamente, o seu campo de variação será outro.

No caso do lançamento ser feito em campo ilimitado, pode dar-se o caso de o lançamento à sorte do todo, arrastar o lançamento à sorte, da parte.

Assim, por exemplo, no problema da agulha (def. 4.<sup>a</sup>), o lançamento à sorte da agulha arrasta o lançamento à sorte de qualquer das suas partes, porque, quer uma parte da agulha seja lançada, à sorte, isoladamente, quer fazendo parte da agulha, o seu ponto equivalente terá sempre o mesmo campo possível.

## SEGUNDA PARTE

### Lançamento, à sorte, de figuras variáveis

#### DEFINIÇÃO 10.<sup>a</sup>

*Lançar, à sorte, uma figura variável numa dada região (A), significa, por definição, tirar, à sorte, a forma dessa figura e, em seguida, lançá-la, á sorte, em (A), como se fosse rígida.*

A segunda proposição de que se compõe esta definição

já foi tratada na primeira parte dêste capítulo. Resta-nos apenas dizer o que entendemos por «tirar, à sorte, a forma duma figura variável».

Evidentemente que a questão não pode ser resolvida dum modo geral. Nós trataremos a questão das figuras poligonais (abertas ou fechadas) articuladas e, como caso limite, as curvas flexíveis e inextensíveis.

#### DEFINIÇÃO 11.<sup>a</sup>

##### Figuras poligonais abertas

Uma figura poligonal articulada é, como se sabe, uma linha poligonal de ângulos variáveis.

*Fixar, à sorte, a sua forma, será, por definição, tirar, à sorte, a forma de cada um dos seus vértices.*

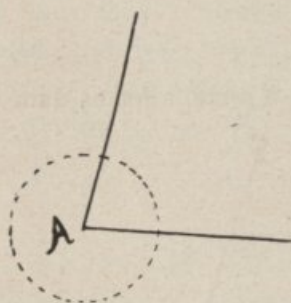


Figura 9

Para definir esta última proposição, consideremos um desses vértices ou articulações A (fig. 9) que podemos supôr localizado no

espaço a  $n$  dimensões e sejam  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  as coordenadas de A. Consideremos o espaço formado pelos pontos que satisfazem à equação

$$(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 = 1. \quad (1)$$

Suponhamos um dos ramos da articulação A fixo e o outro movendo-se de modo a ocupar em relação ao fixo

todas as posições possíveis. Seja (B) <sup>(1)</sup> a região por êle descrita sôbre o espaço (1). *Tirar, à sorte, a forma da articulação (A) é, por definição, lançar, à sorte, um ponto em (B).*

DEFINIÇÃO 12.<sup>a</sup>

## Figuras poligonais fechadas

a)

## No plano

Principiaremos pelas figuras planas e passaremos em seguida para as figuras articuladas no espaço.

1.<sup>o</sup>

Suponhamos que se trata de tirar, à sorte, a forma dum

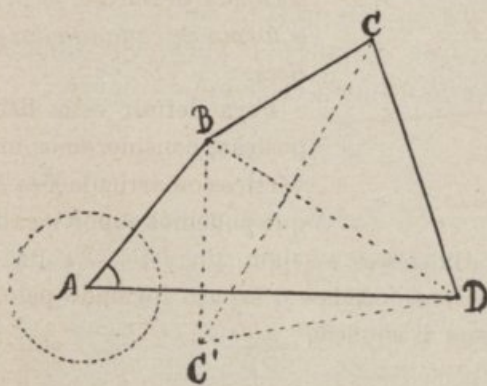


Figura 10

quadrilátero plano ABCD (*fig. 10*). Quando êste quadrilá-

<sup>(1)</sup> (B) pode não ser a totalidade da superfície da hiper-esfera.

tero passa por todas as formas possíveis, o ângulo A passa por duas espécies de valores: uns correspondentes à posição C do vértice que lhe é oposto; outros correspondentes à posição C'. Ou, o que é o mesmo, supondo que à volta de A se descrevera uma circunferência de raio unidade, e que AD se considera fixo, o ponto de intersecção do lado invariável com a circunferência, descreve duas regiões que podem sobrepôr-se no todo ou em parte<sup>(1)</sup> quando o quadrilátero passa por todas as posições possíveis. Mas nem por isso essas regiões deixam de ser distintas uma da outra. Representêmo-las por (A) e (A<sub>1</sub>). Logo que seja dado um ponto qualquer destas duas regiões, a figura fica definida na forma. Consideremos as mesmas duas regiões em B, C, D, e sejam (B) e (B<sub>1</sub>), (C) e (C<sub>1</sub>), (D) e (D<sub>1</sub>).

*Tirar, à sorte, a forma do quadrilátero* será, por definição, *tirar, à sorte, um ponto de (A) ou (A<sub>1</sub>) ou (B) ou (B<sub>1</sub>) ou (C) ou (C<sub>1</sub>) ou (D) ou (D<sub>1</sub>)* (def. I, cap. II).

Segundo esta definição o ponto equivalente não fica dependente de nenhum elemento da figura.

## 2.º

Consideremos, agora, um pentágono e vejamos como passar do lançamento dum quadrilátero para o desta figura.

Quando a articulação A (*fig. 11*) toma a forma particular A, o quadrilátero BCDE pode tomar uma infinidade

---

<sup>(1)</sup> As articulações podem estar sujeitas a ligações que não tornem possível a posição C'.

de formas, umas no semi-plano BCE, outras no semi-plano  $BC'E$ .

A essas formas correspondem grupos  $(B)$  e  $(B')$ ,  $(C)$  e  $(C')$ ,  $(D)$  e  $(D')$ ,  $(E)$  e  $(E')$ , para os ângulos de BCDE e grupos análogos, mas diferentes em geral, para o quadrilátero  $BC'D'E$ . Associemos os valores possíveis de  $A$  a cada um dos elementos dos grupos de BCDE e chamemos  $(A)$  ao

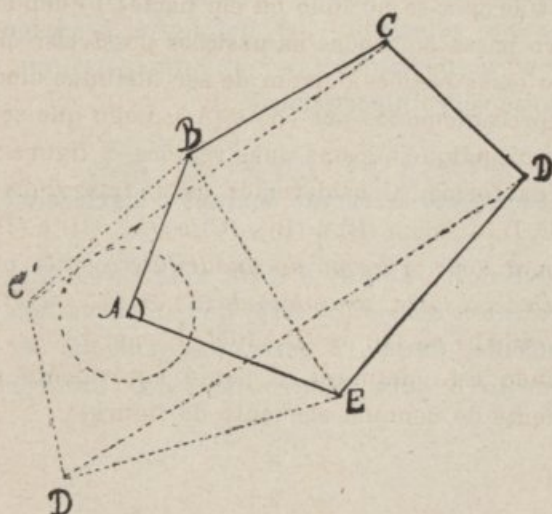


Fig. 11

conjunto obtido. Façamos o mesmo para o quadrilátero  $BC'D'E$  e chamemos ao conjunto obtido  $(A_1)$ . Um elemento qualquer destes dois conjuntos basta para definir o pentágono. Façamos o mesmo para todos os outros vértices e sejam  $(B)$  e  $(B_1)$ ,  $(C)$  e  $(C_1)$ , ..., os conjuntos obtidos.

*Tirar, à sorte, a forma dum pentágono*, significa, por definição, *tirar, à sorte, um elemento de  $(A)$  ou  $(A_1)$  ou  $(B)$  ou  $(B_1)$  ...*

Dum modo análogo se definia a tiragem, à sorte, da forma dum exágono, a dum eptágono, etc.

b)

### No espaço

Para o lançamento duma figura poligonal fechada num espaço a um número qualquer de dimensões, não teremos mais do que substituir, nas definições precedentes, os pontos que se moviam sôbre circunferências, por pontos movendo-se sôbre hiper-esferas.

### Lançamento de curvas flexíveis e inextensíveis

Por definição, *lançar, à sorte, uma curva flexível e inextensível, num espaço (A)* será, quer a curva seja aberta quer fechada, *lançar, à sorte, um polígono do mesmo comprimento e dum número de lados arbitrariamente grande.*

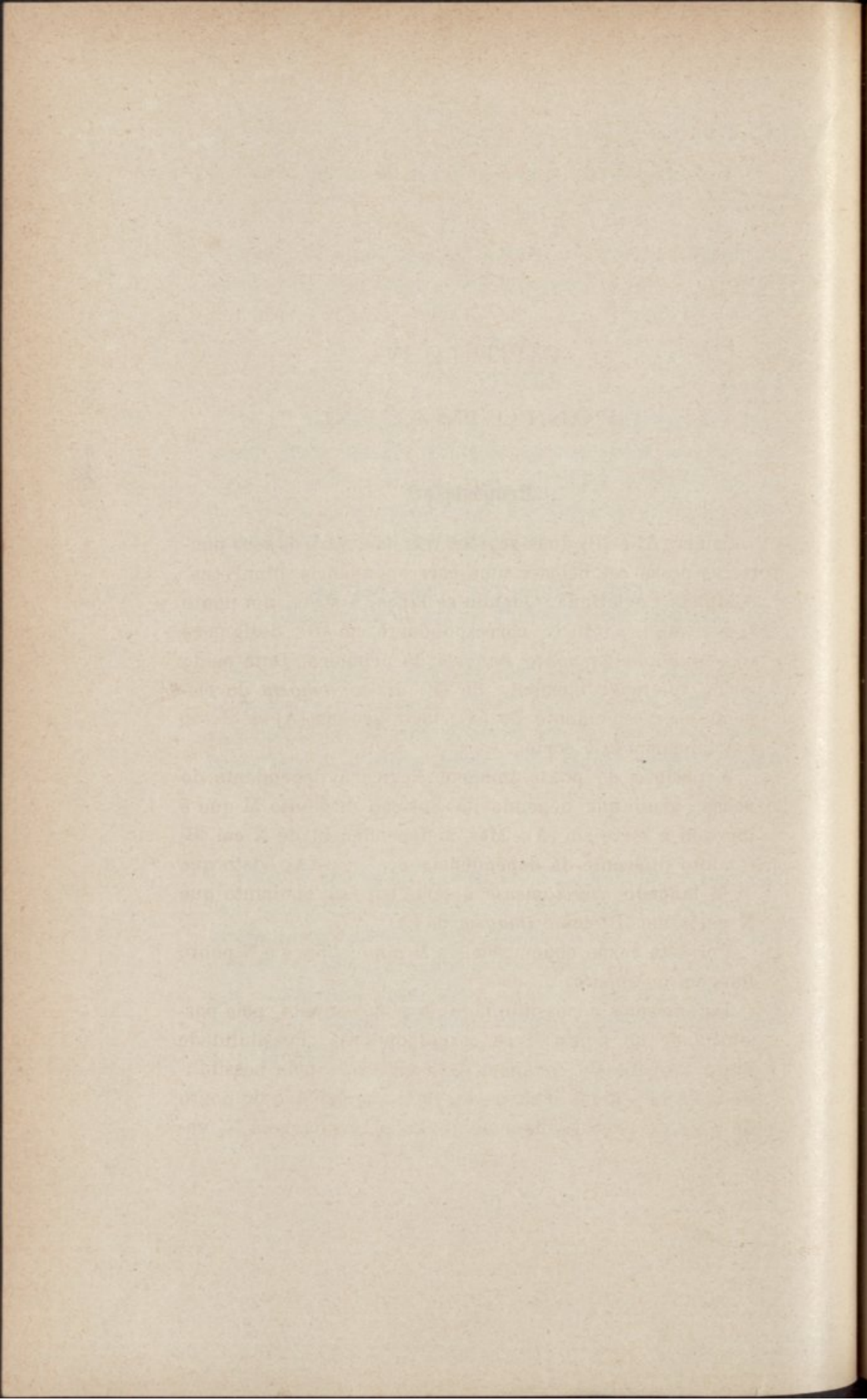
\*

Todo o problema relativo a um polígono articulado, com um número arbitrário de lados, terá uma solução dependente do número e grandeza desses lados. Se essa solução tender para um limite quando os lados do polígono tenderem para zéro, dir-se-há que esse limite é a solução do mesmo problema relativo a uma curva flexível e inextensível.



## CAPÍTULO IV

### DO PONTO IMAGEM



## CAPITULO IV

### PONTO IMAGEM

#### Proposição I

Sejam (A) e (B) duas regiões tais que entre os seus pontos se possa estabelecer uma correspondência biunívoca, completa e contínua. Quando se lança, à sorte, um ponto M em (A), o ponto N, correspondente em (B), designa-se com o nome de ponto imagem do primeiro. Dum modo geral, qualquer elemento de (B) diz-se *imagem* do elemento correspondente de (A), logo que em (A) se efetue um lançamento à sorte.

A posição do ponto imagem N ficará dependente do acaso, visto que depende da posição do ponto M que é lançado à sorte em (A). Mas a dependência de N em (B) é muito diferente da dependência de M em (A), visto que M é lançado *directamente* à sorte em (A), enquanto que N varia em (B) como *imagem* de (A).

Por esta razão chamaremos a M ponto livre e a N ponto imagem ou sujeito.

Definiremos a possibilidade no ponto sujeito, pela possibilidade no ponto livre correspondente. Possibilidade duma região (B'), imagem da região (A'), pela possibilidade de (A'). Dum modo geral, tudo que debaixo do ponto de vista da probabilidade se diz do ponto imagem N, va-

riando em (B), define-se por meio do ponto livre correspondente variando em (A). As propriedades mencionadas para o ponto livre, são ainda verdadeiras para o ponto imagem, como será fácil de vêr.

### Aplicação

Seja  $f(x)$  uma função, contínua e crescente, de  $x$ , num intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Tira-se, à sorte, um número d'êste intervalo e pergunta-se: qual a probabilidade de que o valor de  $y$  correspondente tenha o número dígito  $d$  na casa decimal da ordem  $a$ ?

Sejam  $\omega$  e  $\omega'$  os números inteiros que mais aproximadamente satisfazem às desigualdades

$$f(\alpha) < \frac{10\omega + d}{10^a}, \quad f(\beta) > \frac{10\omega' + d + 1}{10^a},$$

e representemos por  $f^{-1}(x)$  a função inversa de  $f(x)$ ; os valores de  $f(x)$  que satisfazem às condições do enunciado estão compreendidos nos intervalos

$$\left( \frac{10\omega + d}{10^a}, \frac{10\omega + d + 1}{10^a} \right),$$

$$\left( \frac{10(\omega + 1) + d}{10^a}, \frac{10(\omega + 1) + d + 1}{10^a} \right), \dots\dots$$

$$\left( \frac{10(\omega + i) + d}{10^a}, \frac{10(\omega + i) + d + 1}{10^a} \right), \dots\dots$$

$$\left( \frac{10 \omega' + d}{10^a}, \frac{10 \omega' + d + 1}{10^a} \right).$$

A probabilidade pedida será, pois, em virtude das definições antecedentes e do teorema das probabilidades totais,

$$P_{(d, a)}^{(\alpha, \beta)} = \frac{\sum \left\{ f^{-1} \left[ \frac{10(\omega + i) + d + 1}{10^a} \right] - f^{-1} \left[ \frac{10(\omega + i) + d}{10^a} \right] \right\}}{\beta - \alpha}$$

1.º

Apliquemos esta fórmula à função

$$y = \log_{\alpha} x$$

considerada no intervalo de variação de  $y$

$$\left( 0, \frac{10 \omega + 10}{10^a} \right).$$

Teremos, neste caso,

$$\begin{aligned} \omega = 0, \quad \omega' = \omega, \quad \text{e} \quad P_{(d, a)}^{(0, \omega)} &= \frac{\sum_{i=0}^{\omega} \left[ \alpha \frac{10i + d + 1}{10^a} - \alpha \frac{10i + d}{10^a} \right]}{\alpha \frac{10\omega + 10}{10^a} - 1} = \\ &= \alpha \frac{d}{10^a} \frac{\left[ \alpha \frac{1}{10^a} - 1 \right] \sum_{i=0}^{\omega} \alpha \frac{i}{10^{a-1}}}{\alpha \frac{\omega + 1}{10^{a-1}} - 1} = \alpha \frac{d}{10^a} \frac{\frac{1}{\alpha \frac{1}{10^a} - 1}}{\frac{1}{\alpha \frac{1}{10^{a-1}} - 1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

A fórmula (1) mostra que a probabilidade pedida não depende de  $\omega$  e portanto do intervalo em questão; podemos representá-la por  $P_{(d, a)}$ .

De (1) tira-se

$$\frac{P_{(d+1, a)}}{P_{(d, a)}} = \alpha \frac{1}{10^a}.$$

relação esta independente de  $d$ .

Facilmente se vê que  $P_{(d, a)}$  tende rapidamente para  $\frac{1}{10}$ , quando  $a$  aumenta.

2.º

Consideremos a função

$$y = \alpha^x, \quad \alpha > 1$$

no intervalo correspondente a  $(\omega, \omega')$ ; será

$$\begin{aligned} P_{(d, a)}^{(\omega, \omega')} &= \frac{\sum_{n=\omega}^{\omega'} \left[ \log_{\alpha} \frac{10n+d+1}{10^a} - \log_{\alpha} \frac{10n+d}{10^a} \right]}{\log_{\alpha} \frac{10\omega'+10}{10^a} - \log_{\alpha} \frac{10\omega}{10^a}} \\ &= \frac{\sum_{n=\omega}^{\omega'} \log_{\alpha} \left[ 1 + \frac{1}{10n+d} \right]}{\log_{\alpha} \frac{\omega'+1}{\omega}} \end{aligned}$$

o que mostra que a probabilidade pedida é independente de  $a$ .

\*

Facilmente se vê que

$$\lim_{\omega' = \infty} P_{(d, a)}^{(\omega, \omega')} = \frac{1}{10}.$$

Para o provar, mostraremos primeiro que a sucessão cujo termo geral é

$$U_n = \frac{\sum_{n=\omega}^n \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10n+d} \right)}{\sum_{n=\omega}^n \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}$$

é crescente; em seguida que se mantém inferior a 1.

a)

A sucessão  $U_n$  é crescente quando  $d > 9$  ( $d$  pode ser um número qualquer, na expressão de  $U_n$ ).

Com efeito, a função

$$f(n) = \frac{\log_{\alpha} \left[ 1 + \frac{1}{10n+d} \right]}{\log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}$$

que tem por derivada

$$f'(n) = \frac{\frac{-10}{(10n+d)(10n+d+1)} \log_{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} \log_{\alpha} \left(1 + \frac{1}{10n+d}\right)}{\log \alpha \cdot \log_{\alpha}^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

é crescente, pois  $f'(n) > 0$ . Com efeito, visto que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

é uma função crescente, será

$$\left(1 + \frac{1}{10n+d}\right)^{10n+d} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e também, se  $d > 9$

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{10n+d}\right)^{10n+d} \right\}^{10n+d+1} > \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{10n+10}$$

tirando os logaritmos de base  $\alpha$  a esta desigualdade, vê-se imediatamente que

$$f'(n) > 0.$$

Ora,  $U_n$  é um quebrado que tem por numerador a soma dos numeradores de

$$f(1), f(2), \dots, f(n)$$



e por denominador a soma dos denominadores e como  $f(n)$  é crescente,  $U_n$  sê-lo-há tambem.

2.º

$$U_n < 1$$

qualquer que seja  $n$ .

Com efeito

$$\log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10n+d} \right) < \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

logo

$$\Sigma \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10n+d} \right) < \Sigma \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

e por isso

$$U_n < 1.$$

Logo,  $U_n$  tende para um limite quando  $n$  tende para o infinito e  $d \geq 9$ .

\*

Pela expressão de  $U_n$  se vê que

$$U_n(0) > U_n(d) > U_n(10)$$

se

$$0 < d < 10;$$

logo

$$\begin{aligned}
 U_n(d) - U_n(10) &< U_n(0) - U_n(10) = \\
 &= \frac{\sum_{n=\omega}^n \left[ \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10n} \right) - \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10(n+1)} \right) \right]}{\log_{\alpha}(n+1) - \log_{\alpha}\omega} = \\
 &= \frac{\log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10\omega} \right) - \log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10(n+1)} \right)}{\log_{\alpha}(n+1) - \log_{\alpha}\omega} < \\
 &< \frac{\log_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{10\omega} \right)}{\log_{\alpha}(n+1)} < \delta
 \end{aligned}$$

qualquer que seja  $\delta > 0$ , logo que  $n$  seja suficientemente grande. Logo, existe o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(d)$$

qualquer que seja  $d$  e esse limite não depende de  $d$ ; mas como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{d=0}^9 U_n(d) = 1 = \sum_{d=0}^9 \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(d) = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(d)$$

segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(d) = \frac{1}{10}.$$

Facilmente se vê que  $U_n$  converge muito rapidamente para  $\frac{1}{10}$ .

### Nota

O problema geral que acabamos de resolver, dá-nos a distribuição dos algarismos numa tábua ideal que contivesse todos os valores duma função num intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Numa tábua qualquer, em que os valores da variável independente estejam em progressão aritmética, intervalos iguais, contidos em  $(\alpha, \beta)$ , compreendem, aproximadamente, o mesmo número de valores de  $x$  escritos na tábua, com erro relativo tanto menor quanto menor fôr a razão da progressão dos valores de  $x$ . De modo que a probabilidade de que um valor de  $x$ , tirado à sorte em  $(\alpha, \beta)$ , pertença a um intervalo parcial, será, aproximadamente, proporcional à amplitude do intervalo, tal qual como acontece na tábua ideal.

Esta tábua ideal será como que o limite duma sucessão de tábuas, em que a razão da progressão dos valores de  $x$  fosse decrescendo até zero. Portanto, a fórmula geral (1) dará tanto mais exactamente a distribuição dos algarismos numa tábua de  $f(x)$ , quanto mais pequena fôr a razão da progressão dos valores de  $x$ . Assim, numa tábua de logarithmos decimais, visto que a mantissa se não altera com a divisão de  $x$  por uma potência de 10 (inteira), segue-se que a fórmula

$$\frac{P^{(d+1, a)}}{P^{(d, a)}} = 10 \frac{1}{10^a}$$

deve ser muito mais aproximada no fim da tábua do que no princípio. E assim é, realmente. Numa tábua pode vêr-se que desde 1289 a 1319, e de 1319 a 1349 se encontram respectivamente os algarismos 1 e 2 na segunda

casa decimal, o que dá

$$\frac{P_{(2, 2)}}{P_{(1, 2)}} = \frac{30}{30} = 1;$$

e desde 10232 a 10471, e dêste número a 10715 se encontram os mesmos algarismos na mesma casa decimal, o que dá

$$\frac{P_{(2, 2)}}{P_{(1, 2)}} = \frac{244}{239} = 1,0209 \dots$$

número êste muito mais próximo do número teórico

$$\sqrt[100]{10} = 1,0233$$

do que o primeiro.

3.º

É curioso determinar a relação

$$\frac{P_{d+1}}{P_d}$$

para as diferenças tabulares dos logarithmos. Estas diferenças podem considerar-se como valores da função

$$y = \log(1+x) - \log(x)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

correspondentes a valores de  $x$  escritos em progressão aritmética. Ou, pondo

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{10\omega + d}{10^a},$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{x'}\right) = \frac{10\omega + d + 1}{10^a},$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{x''}\right) = \frac{10\omega + d + 2}{10^a},$$

será

$$\frac{P_{d+1}}{P_d} = \frac{x'' - x'}{x' - x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10 \frac{10\omega + d + 2}{10^a} - 1}}{\frac{1}{10 \frac{10\omega + d + 1}{10^a} - 1}} = \frac{1}{\frac{10\omega + d + 2}{10^a} - 1} \cdot \frac{1}{\frac{10\omega + d + 1}{10^a} - 1} =$$

muito aproximadamente

$$= \frac{\frac{1}{\frac{10\omega + d + 2}{10^a} \log 10}}{\frac{1}{\frac{10\omega + d + 1}{10^a} \log 10}} = \frac{1}{\frac{10\omega + d + 2}{10^a} \log 10} \cdot \frac{1}{\frac{10\omega + d + 1}{10^a} \log 10} =$$

$$= \frac{(10\omega + d)(10\omega + d + 1)}{(10\omega + d + 1)(10\omega + d + 2)} = \frac{10\omega + d}{10\omega + d + 2};$$

logo

$$\frac{P_d}{P_{d+1}} = 1 + \frac{2}{10N+d} = 1 + \frac{2}{10^a D}, \quad (1)$$

sendo

$$D = \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{10N+d}{10^a}.$$

Visto que  $10^a D$  é a parte inteira do produto duma qualquer diferença tabular, tendo o algarismo  $d$  na casa decimal de ordem  $a$ , por  $10^a$ , segue-se que: dada uma diferença tabular  $D$ , se pode obter imediatamente por meio de (1) a relação

$$\frac{P_d}{P_{d+1}}$$

sendo  $d$  o número dígito que  $D$  tem na casa decimal de ordem  $a$ . Assim, dada a diferença tabular 0,0000524, deduz-se, para  $a = 5$ ,

$$\frac{P_5}{P_6} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1,400.$$

Procurando nas tábuas vê-se que a diferença tabular 0,0000500 tem por número máximo, correspondente o número 8694; a diferença tabular 0,0000600, tem por correspondente o número 7243, a diferença 0,0000700 tem por número máximo correspondente, o número 6208; teremos, pois, segundo as tábuas,

$$\frac{P_5}{P_6} = \frac{1451}{1035} = 1,401.$$

### Observação

Para as casas inteiras, isto é, para  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ , a fórmula

$$\frac{P_{d+1}}{P_d} = 10^{\frac{1}{10^\alpha}}$$

é exacta, devido a que os números inteiros são logaritmos de valores de  $x$  escritos nas tábuas.

### Proposição II

#### Lei da possibilidade

Seja (A) uma região contendo a região (A') e sejam (B) e (B') imagens respectivamente de (A) e (A'). Consideremos em (A) o ponto livre M e a sua vizinhança  $\Delta S$  e em (B) o ponto imagem N com a vizinhança  $\Delta S'$ , imagem de  $\Delta S$ . Representando por  $\Delta \omega$  a possibilidade de  $\Delta S$ , será ainda  $\Delta \omega$  (prop. I) a possibilidade de  $\Delta S'$ . Consideremos o

$$\lim_{\Delta S' = 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta S'}$$

êste limite sendo tomado de modo que a maior dimensão de  $\Delta S'$  tenda para zero conjuntamente com  $\Delta S'$ . A totalidade de pontos N para os quais exista êste limite, forma o campo de existência duma função das coordenadas do ponto N, função cujo valor em cada ponto é dado por êsse limite e a que chamaremos lei da possibilidade.

**Corolário**

A possibilidade de (B') será dada por

$$\varpi_{(B')} = \int_{(B')} \left[ \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta \varpi}{\Delta S'} \right] dS'.$$

Conhecida a lei da possibilidade poderemos, pois, determinar a possibilidade de qualquer região (B'), independentemente da consideração da região (A') de que a primeira é imagem.

**Proposição III**

Lei da probabilidade

De modo idêntico se define a lei da probabilidade como a função que tem em cada ponto N o valor dado pelo

$$\lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S'}.$$

**Proposição IV**

Sendo (A) a região possível em relação à probabilidade  $\Delta P$  e  $\varpi(N)$  a lei da possibilidade de N, será

$$\lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S'} = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta \varpi}{\Delta S'} = \lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\int_{(A)} \varpi(N) d\varpi}{\Delta S'}$$



ou

$$\lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta \varpi}{\int_{(A)} \varpi(N) d\varpi} = \frac{\varpi(N)}{\int_{(A)} \varpi(N) d\varpi}$$

o que mostra que para uma dada região possível, a lei da probabilidade é proporcional à lei da possibilidade.

### Leis à priori e leis à posteriori

No que vai seguir-se, suporemos que o ponto cuja posição depende do acaso, varia numa região plana, para facilitar a exposição. As demonstrações ficarão, aliás, com toda a generalidade.

#### Lei à priori

Seja  $M(x, y)$  um ponto variando numa região plana (fig. 12) e  $m(x)$  a sua projecção sobre o eixo dos  $XX'$ .

Chamaremos *lei de probabilidade à priori do ponto*  $M(x, y)$ , à *lei da probabilidade da sua projecção*  $m(x)$ .

#### Proposição V

Sendo  $\varphi(x, y)$  a lei da probabilidade de  $M(x, y)$  na região (A), será

$$a(x) = \int \varphi(x, y) dy$$

a lei da probabilidade à priori do mesmo ponto.

Com efeito, consideremos um filete de espessura  $\Delta S$ , paralelo ao eixo do  $YY'$  e contendo os pontos de abscissa  $x$ .

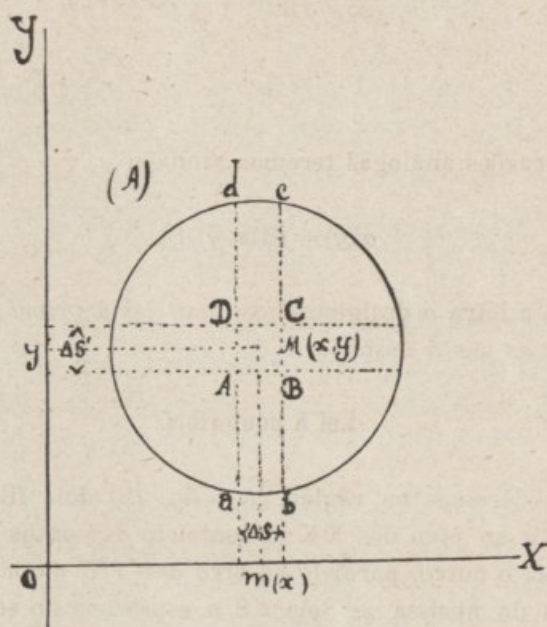


Figura 12

A probabilidade  $\Delta P$  de que o ponto  $m$  caia na vizinhança  $\Delta S$  de  $x$  é dada pela probabilidade de que o ponto  $M(x, y)$  caia dentro da região  $abcd$ ; logo,

$$\Delta P = \iint_{abcd} \varphi(x, y) dx dy = \Delta S \int_{y'_1}^{y'_2} \varphi(x, y) dy$$

sendo  $y'_1$  e  $y'_2$  a menor e maior ordenada dos pontos de (A)

de abscissa  $x_1$ . Ora, segundo a definição de lei *à priori*,

$$a(x) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x, y) dy$$

c. d. d.

\*

Por razões análogas teremos também

$$a(y) = \int \varphi(x, y) dx.$$

Com a letra  $a$  designaremos uma lei *à priori*; com a letra  $p$  as leis *à posteriori*.

#### Lei *à posteriori*

Consideremos na região (A) (*fig. 12*) dois filetes, um paralelo ao eixo dos  $XX'$  e contendo os pontos de ordenada  $y$ ; o outro, paralelo ao eixo dos  $YY'$  e contendo os pontos da abscissa  $x$ . Seja  $\Delta S$  a espessura do segundo e  $\Delta S'$  a do primeiro. A probabilidade da região ABCD em relação a  $abcd$  é (cap. II, prop. VII, observ.)

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\iint_{ABCD} \varphi(x, y) dx dy}{\iint_{abcd} \varphi(x, y) dx dy} = \frac{\Delta S \cdot \Delta S' \varphi(x', y')}{\Delta S \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x_1, y) dy} = \\ &= \frac{\Delta S' \varphi(x', y')}{\int_{y_1}^{y_2} \varphi(x_1, y) dy} \end{aligned}$$

sendo  $x'$  e  $x'_1$  funções de  $\Delta S$  que tendem para  $x$  quando  $\Delta S$  tende para zero. Ao

$$\lim_{\Delta S=0} \Delta P = \frac{\Delta S' \varphi(x, y)}{\int_{y'_1}^{y'_2} \varphi(x, y) dy}$$

chamaremos probabilidade *à posteriori* de  $\Delta S'$ .

Pode dizer-se que é a probabilidade de que  $y$  caia no intervalo  $\Delta S'$ , caso  $x$  tenha tomado o valor particular  $x$ .

Chamaremos lei *à posteriori* de  $y$  ao

$$\lim_{\Delta S'=0} \frac{\Delta P}{\Delta S'} = \frac{\varphi(x, y)}{\int \varphi(x, y) dy} = p(y). \quad (1)$$

### Proposição VI

De (1) e da prop. V tira-se

$$\varphi(x, y) = a(x) \cdot p(y) = a(y) \cdot p(x).$$

\*

As prop. V e VI são análogas às proposições relativas à probabilidade total e à probabilidade composta.

Destas duas proposições facilmente se deduz uma fórmula análoga à

Fórmula de Bayes,

o que justifica as designações de lei *à priori* e lei *à posteriori* das leis atrás definidas.

Com efeito, visto que (prop. VI)

$$\varphi(x, y) = a(x)p(y) = a(y)p(x)$$

e

$$a(y) = \int \varphi(x, y) dx = \int a(x)p(y) dx,$$

segue-se que

$$p(x) = \frac{\varphi(x, y)}{a(y)} = \frac{a(x)p(y)}{\int a(x)p(y) dx}$$

e, análogamente,

$$p(y) = \frac{a(y)p(x)}{\int a(y)p(x) dy},$$

fórmulas estas que nos dão as leis à *posteriori* duma das variáveis, logo que se conheça a sua lei à *priori*, a lei à *posteriori* da outra e o seu campo de variação.

\*

Desta fórmula podem tirar-se outras a que pode chamar-se

#### Fórmulas inversas da de Bayes

Com efeito, de

$$p(x) = \frac{a(x)p(y)}{\int a(x)p(y) dx},$$

tira-se, tomando as derivadas parciais em ordem a  $x$  e atendendo a que

$$\int a(x)p(y) dx$$

não dependa de  $x$ ,

$$\frac{\frac{\partial p(x)}{\partial x}}{p(x)} = \frac{a'(x)}{a(x)} + \frac{\frac{\partial p(y)}{\partial x}}{p(y)} ;$$

donde

$$\frac{a'(x)}{a(x)} = \frac{\frac{\partial p(x)}{\partial x}}{p(x)} - \frac{\frac{\partial p(y)}{\partial x}}{p(y)} ;$$

donde

$$a(x) = k(y) \frac{p(x)}{p(y)} ;$$

onde  $k(y)$  é uma função arbitrária de  $y$  que se determina pela condição de

$$\int a(x) dx = k(y) \int \frac{p(x)}{p(y)} dx = 1 ;$$

donde,

$$k(y) = \frac{1}{\int \frac{p(x)}{p(y)} dx}$$

e

$$a(x) = \frac{\frac{p(x)}{p(y)}}{\int \frac{p(x)}{p(y)} dy}$$

e, análogamente,

$$a(y) = \frac{\frac{p(y)}{p(x)}}{\int \frac{p(y)}{p(x)} dy}$$

fórmulas estas análogas às já achadas na probabilidade descontínua.

\*

As definições e demonstrações que acabamos de fazer são duma generalização imediata. O que se disse para um ponto variando numa região plana estende-se imediatamente a um ponto variando numa região qualquer. Do que acabamos de dizer, devemos excetuar a dedução das fórmulas inversas da fórmula de BAYES, dedução essa que não é suscetível de ser estendida imediatamente ao caso de muitas variáveis. A dedução pode fazer-se, dum modo geral, muito facilmente.

Com efeito, ainda que  $x$  e  $y$  representem complexos de variáveis, teremos sempre

$$a(x) \cdot p(y) = a(y)p(x) \quad (1)$$

sendo as funções  $a(x)$  e  $a(y)$  funções só dos complexos  $(x)$  e  $(y)$  respectivamente e  $p(y)$  e  $p(x)$  sendo funções dos dois complexos simultaneamente. De (1) tira-se

$$a(x) = a(y) \cdot \frac{p(x)}{p(y)}$$

donde,

$$\int_{(x)} a(x) d(x) = a(y) \int_{(x)} \frac{p(x)}{p(y)} d(x) = 1$$

e portanto

$$a(x) = \frac{\frac{p(x)}{p(y)}}{\int_{(x)} \frac{p(x)}{p(y)} d(x)},$$

em todos os casos.



CAPÍTULO V

TEOREMAS DE JACOB BERNOULLI

E

LEI DOS DESVIOS

CHAPTER

BRITISH

CHAPTER

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text appears to be organized into several paragraphs, but the characters are too light and blurry to be transcribed accurately.

Additional faint, illegible text at the bottom of the page, likely bleed-through from the following page.

## CAPITULO V

### PRIMEIRA PARTE

#### Teoremas de Jacob Bernoulli

A uma tiragem, à sorte, numa classe finita de elementos ou a um lançamento feito, à sorte, numa região, chamaremos: um *caso*, um *acontecimento* ou um *fenómeno*, conforme está estabelecido pelo uso. Um fenômeno, caso ou acontecimento, dir-se-há *favorável* ou *contrário*, conforme o elemento obtido na tiragem ou lançamento pertencer à classe favorável ou não.

Posto isto, seja  $p$  a probabilidade do acontecimento favorável e  $q$  a do acontecimento contrário. Será, como é evidente,

$$p + q = 1.$$

Se obrigarmos o acontecimento a produzir-se uma vez, dois casos poderão dar-se

$$p \quad \text{ou} \quad q$$

(representando os acontecimentos pelas suas probabilida-

des). Se obrigarmos o fenómeno a produzir-se duas vezes, quatro casos podem dar-se:

$$pp \quad \text{ou} \quad pq \quad \text{ou} \quad qp \quad \text{ou} \quad qq.$$

Se repetirmos o fenómeno três vezes, os casos possíveis seriam dados pelos arranjos com repetição dos dois objectos  $p$  e  $q$ , três a três, etc. Isto, supondo que a produção dum fenómeno não alterava a probabilidade do seguinte.

Daqui se conclue que:

### Proposição I

*A probabilidade de que, produzindo  $m$  vezes sucessivas o fenómeno cujas modalidades favorável e contrária são  $p$  e  $q$ ,  $m-i$  acontecimentos da probabilidade  $p$  e  $i$  de probabilidade  $q$  se produzam, segundo uma ordem previamente fixada, é*

$$P = p^{m-i} q^i = p^{m-i} \cdot q^i$$

*como resulta imediatamente das proposições relativas á probabilidade composta.*

### Corolário

*A probabilidade de que os fenómenos se sucedam segundo uma ordem previamente fixada, tende para zero quando o número de experiências aumenta.*

Com efeito, supondo, para fixar ideias, que  $p < q$ , será

$$P = p^{m-i} q^i < p^m;$$

Arranjos de  $m$   
objectos  $k$  a  $k$  com  
repetição =  $m^k$

e como  $p < 1$ , segue-se que  $p^m$  tende para zero quando  $m$  aumente indefinidamente.

\*

Se a probabilidade duma sucessão de  $m$  acontecimentos não depende da ordem por que se sucedem os seus elementos componentes, depende contudo do número de casos que nela entram duma ou outra categoria (favorável ou contrária). De que modo essa variação se faz, é o que vamos tratar neste capítulo.

Para tornar mais claro o enunciado dessa questão suporemos que os fenómenos considerados, são tiragens de bolas brancas e pretas, feitas à sorte numa urna que lhes dê as probabilidades respectivas  $p$  e  $q$ . É evidente que esta identificação só se poderá fazer quando  $p$  e  $q$  forem racionais; mas isso não se opõe a que nos sirvamos dela, como duma linguagem figurada, nos outros casos.

### Proposição II — *Lei binomial* —

*Fazendo numa urna que contém bolas brancas e pretas, m tiragens, a probabilidade de que se obtenham n bolas brancas e m - n pretas é, sendo p e q as probabilidades respectivas,*

$$P_{m, n} = \frac{m!}{(m-n)! n!} p^n q^{m-n}.$$

Com efeito, a probabilidade de qualquer sucessão de  $n$

bolas brancas e  $m - n$  pretas, é (prop. I)

$$p^n q^{m-n}.$$

Ora, o número de sucessões *distintas* que se podem obter com  $n$  bolas brancas e  $m - n$  pretas é dado pelo número de permutações de  $m$  objectos dos quais  $m - n$  e  $n$  são repetidos, isto é, por

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)! n!}.$$

Logo

$$P_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! n!} p^n q^{m-n},$$

c. d. d.

### Corolário

A probabilidade de tirar  $m - n$  bolas brancas e  $n$  pretas é dada pelo termo correspondente do desenvolvimento de

$$(p + q)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} p^i q^{m-i}$$

### Proposição III

Supondo  $m$  fixo, tem-se que:

1.º A probabilidade  $P_{m,n}$  cresce com  $n$  desde zero até ao maior número inteiro contido em

$$p(m+1);$$

2.º Diminue desde o menor inteiro  $n$  que contém

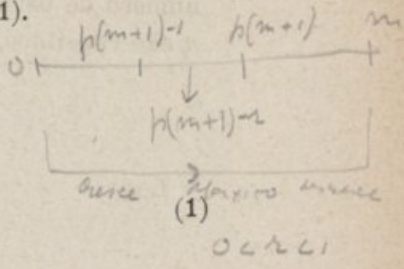
$$p(m+1) - 1$$

até  $n = m$ ;

3.º Torna-se máxima para o inteiro compreendido entre

$$p(m+1) - 1 \quad \text{e} \quad p(m+1).$$

Com efeito:



1.º

Se

$$n < p(m+1),$$

será dividido por  $p$

$$\frac{1}{p} < \frac{m+1}{n} = \frac{h+q}{h}$$

e

$$1 + \frac{q}{h} \leq \frac{m+1}{n}$$

e

$$\frac{q}{p} < \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{m-n+1}{n}$$

multiplicando por  $\frac{p}{q}$

$$1 < \frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{p}{q};$$

mas

$$\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{P_n}{P_{n-1}};$$

logo

$$P_{n-1} < P_n,$$

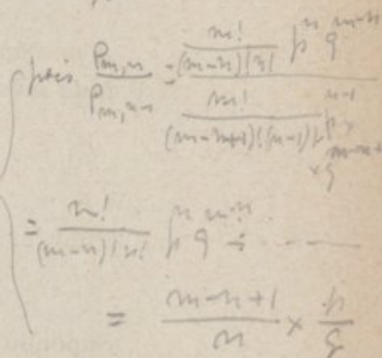
c. d. d.

2.º

Se

$$n > p(m+1) - 1$$

(2)



será, dividindo por  $h(n+1)$

$$\frac{1}{p} > \frac{m+1}{1+n}$$

$$\frac{p+q}{p} > \frac{m+1}{n+1}$$

e

$$\frac{n}{h(n+1)} > \frac{h(n+1)}{h(n+1)} - \frac{1}{h(n+1)}$$

$$1 + \frac{q}{p} > \frac{m+1}{1+n}$$

$$\frac{n}{h(n+1)} + \frac{1}{p(n+1)} \geq \frac{m+1}{n+1}$$

$$\frac{q}{p} > \frac{m-n}{n+1}$$

e

$$\frac{m+1}{h(n+1)} > \frac{m+1}{n+1}$$

$$1 > \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{p}{q};$$

mas

$$\frac{m-n}{n+1} \frac{p}{q} = \frac{P_{n+1}}{P_n};$$

logo

$$P_n > P_{n+1},$$

c. d. d.

3.º

Da primeira e segunda parte desta proposição se deduz que  $P_n$  será máximo quando  $n$  satisfizer a (1) e (2), isto é, quando fôr o inteiro da forma

$$p(m+1) - r, \quad (0 \ll r \ll 1).$$

Caso  $p(m+1)$  seja um número inteiro, haverá ambiguidade na determinação de  $n$ . A indeterminação levanta-se atendendo a que, neste caso, haverá o sinal de igualdade na primeira e segunda parte da proposição antece-



dente e por isso qualquer dos termos de ordem

$$p(m+1) \quad \text{ou} \quad p(m+1) - 1$$

será máximo, por serem iguais.

### Proposição IV

Consideremos todos os arranjos com repetição que se podem obter com dois objectos, tomados  $m$  a  $m$ .

Sejam os objectos uma bola branca e outra preta, por exemplo. A totalidade de arranjos com o mesmo número de bolas brancas e pretas, chamaremos uma *combinação*. Posto isto, teremos que :

*A probabilidade da combinação mais provável tende para zero quando o número das tiragens aumenta indefinidamente.*

Com efeito, segundo a prop. III, a probabilidade da combinação mais provável será dada por

$$P = \frac{m!}{\underbrace{[p(m+1) - r]!}_m \underbrace{[q(m+1) - 1 + r]!}_{m-r}} p^{p(m+1) - r} q^{(m+1) - 1 + r}$$

visto que, representando por  $(m+1)p - r$  o número mais provável de bolas brancas, será

$$m - \overbrace{(m+1)p + r}^m = \overbrace{m - mp - p + r}^{m - mp - p + r} = m(1-p) - p + r = m q - 1 + r = (m+1)q + r - 1 =$$

$p = 1 - q$

o número correspondente de bolas pretas.

*infinito*

Ora, pela fórmula de Stirling

$$m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m} (1 + \varepsilon_m),$$

*Fórmula de Stirling*

sendo  $\varepsilon_m$  uma função que tende para zero quando  $m$  tende para infinito. Podemos, pois, escrever

$$P = \frac{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m} (1 + \varepsilon_m)}{(mp)^{mp} e^{-mp} \sqrt{2\pi mp} (1 + \varepsilon_{mp}) (mq)^{mq} e^{-mq} \sqrt{2\pi mq} (1 + \varepsilon_{mq})} p^{mp} q^{mq}$$

expressão esta que se obtêm da antecedente de  $P$ , substituindo os factoriais pelas expressões equivalentes e desprezando  $r$  e  $1 - r$ , o que é legítimo quando  $m$  crescer além de todo o limite. Efectuando as reduções em  $P$ , resulta, imediatamente

$$P = \frac{1 + \alpha_m}{\sqrt{2\pi m p q}}$$

sendo  $\alpha_m$  uma função que tende para zero quando  $m$  tende para infinito.  $P$  tenderá, pois, para zero quando  $m$  aumenta indefinidamente,

c. d. d.

### Proposição V

(1.º Teorema de Jacob Bernoulli)

Seja  $p$  a probabilidade dum acontecimento favorável e  $q$  a do acontecimento contrário. Faça-se um determinado número de experiências e sejam  $(p)$  e  $(q)$  os números respectivos de acontecimentos, favoráveis e contrários, resul-

tantes. A razão  $\frac{(p)}{(q)}$  poderá tomar valores vários; mas o mais provável desses valores é aquele que menos se afasta de  $\frac{p}{q}$  e quanto mais  $\frac{(p)}{(q)}$  se afasta deste número, menos provável se torna.

A probabilidade de  $\frac{(p)}{(q)}$  a que se refere a proposição que acabamos de enunciar, é a da combinação de  $(p)$  acontecimentos favoráveis e de  $(q)$  contrários.

Posto isto, entremos na demonstração da proposição enunciada.

Como vimos já (prop. III, 3.º ponto) o número mais provável de casos favoráveis é dado pelo maior inteiro da forma

$$p(m+1) - r, \quad (0 \leq r < 1);$$

o número correspondente de acontecimentos contrários, será dado por

$$q(m+1) - 1 + r;$$

a razão destes dois números é

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{p(m+1) - r}{q(m+1) - 1 + r} = \frac{p}{q} + \frac{(1-r)p - qr}{(m+1)q - 1 + r} \cdot \frac{1}{q};$$

Supondo que o número de casos favoráveis cresce, a razão de probabilidade imediatamente inferior (prop. III,

2.<sup>a</sup> parte) é

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{p(m+1) - r + 1}{q(m+1) - 1 + r - 1} = \frac{p}{q} + \frac{p(1-r) - qr + 1}{q(m+1) - 1 + r - 1};$$

a imediata a esta, é

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{p(m+1) - r + 2}{q(m+1) - 1 + r - 2} = \frac{p}{q} + \frac{q(1-r) - qr + 2}{q(m+1) - 1 + r - 2};$$

sendo o número mais provável de acontecimentos favoráveis excedido de  $\alpha$  unidades, a razão em questão será,

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{p(m+1) - r + \alpha}{q(m+1) - 1 + r - \alpha} = \frac{p}{q} + \frac{p(1-r) - qr + \alpha}{q(m+1) - 1 + r - \alpha}.$$

Como estas igualdades mostram, a diferença

$$\frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q}$$

vai crescendo com  $\alpha$ ; logo (prop. III, 2.<sup>a</sup> parte), a sua probabilidade vai diminuindo,

e. d. d.

\*

Se o número de acontecimentos favoráveis diminuísse, consideravamos a razão  $\frac{(q)}{(p)}$  e ficavamos reduzidos ao caso antecedente.

### Proposição VI

(2.º Teorema de Bernoulli)

*Á medida que se multiplicam as experiências, a probabilidade de cada valor de  $\frac{(p)}{(q)}$  vai diminuindo, mas tanto mais rapidamente quanto maior fôr*

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{(p)}{(q)} \right|.$$

Chamando afastamento ao número  $\alpha$  que entra na proposição antecedente, a probabilidade de  $\frac{(p)}{(q)}$  será máxima quando o afastamento fôr nulo (prop. ant.) e como neste caso ela tende para zero quando  $m$  aumenta indefinidamente (prop. IV), por maioria de razão ela tenderá também para zero nos outros casos. Além disso, tem-se

$$\frac{P_{\alpha-1}}{P_{\alpha}} = \frac{q(m+1) + r + \alpha}{p(m+1) - r - \alpha + 1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{A + p\alpha}{B - q\alpha},$$

relação esta que mostra que, quanto maior fôr  $\alpha$ , maior é a razão

$$\frac{P_{\alpha-1}}{P_{\alpha}};$$

ou, o que é o mesmo, quanto maior fôr

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{(p)}{(q)} \right|,$$

visto que o que se diz do afastamento relativo a  $p$ , se diz igualmente do afastamento relativo a  $q$ .

### Proposição VII

(Lema de Vallée-Poussin)

Designemos por  $T_i$  a probabilidade duma combinação que tem  $i$  casos favoráveis e  $T_n$  a combinação mais provável.

Pondo

$$S = T_{n-\alpha} + T_{n-\alpha+1} + \dots + T_n + \dots + T_{n+\alpha},$$

teremos,

$$1 - S < \frac{m}{\left(1 + \frac{\alpha}{(m+1)pq}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Com efeito, tem-se

$$T_{n+1} = \frac{m-n}{n+1} \frac{p}{q},$$

onde

$$n = (m+1)p - r$$

e

$$n+1 = (m+1)p - r + 1$$

e

$$m-n = (m+1)q - 1 + r;$$

e, pondo

$$1 - r = \varepsilon, \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

virá

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(m+1)q - \varepsilon}{(m+1)p + \varepsilon} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{q(m+1)}}{1 + \frac{\varepsilon}{p(m+1)}}.$$

Ora,

$$\frac{1 - \frac{\varepsilon}{q(m+1)}}{1 + \frac{\varepsilon}{p(m+1)}} < \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{pq(m+1)}}$$

qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , como fácilmente se verifica; logo

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} < \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{pq(m+1)}}$$

Do mesmo modo se obtêm as desigualdades seguintes, visto  $\varepsilon$  poder ser qualquer número positivo

$$\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} = \frac{m-n-1}{n+1+1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1)q - \varepsilon - 1}{(m+1)p + 2 + 1} \cdot \frac{p}{q}$$

$$= \frac{(m+1)q - (1 + \varepsilon)}{(m+1)q + (1 + \varepsilon)} \cdot \frac{p}{q}$$

$$< \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon + 1}{pq(m+1)}};$$

dum modo geral

$$\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_{n+\alpha}} < \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon + \alpha}{pq(m+1)}}.$$

Multiplicando membro a membro estas desigualdades, vem

$$\begin{aligned} \frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n} &< \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{pq(m+1)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon+1}{pq(m+1)}} \cdots \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon+\alpha}{pq(m+1)}} \\ &< \frac{1}{1 + \frac{1}{pq(m+1)}} \cdots \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{pq(m+1)}} \\ &= \prod_{x=1}^{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{x}{pq(m+1)}}; \end{aligned}$$

invertendo a ordem a todos os factores dêste producto, vem

$$\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n} < \prod_{x=1}^{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\alpha+1-x}{pq(m+1)}};$$

multiplicando membro a membro estas duas desigualdades vem

$$\left( \frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n} \right)^2 < \prod_{x=1}^{\alpha} \left[ \frac{1}{1 + \frac{x}{pq(m+1)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha+1-x}{pq(m+1)}} \right];$$



mas

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{x}{pq(m+1)} \right] \left[ 1 + \frac{\alpha+1-x}{pq(m+1)} \right] = \\ & = 1 + \frac{\alpha+1}{pq(m+1)} + \frac{x(\alpha+1-x)}{[pq(m+1)]^2} \\ & > 1 + \frac{\alpha+1}{pq(m+1)} ; \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \left( \frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n} \right)^2 & < \prod_{x=1}^{\alpha} \left[ 1 + \frac{\alpha+1}{pq(m+1)} \right]^{-1} \\ & = \left[ 1 + \frac{\alpha+1}{pq(m+1)} \right]^{-\alpha} \\ & < \left[ 1 + \frac{\alpha}{pq(m+1)} \right]^{-\alpha} \end{aligned}$$

donde

$$T_{n+\alpha+1} < T_n \left[ 1 + \frac{\alpha}{pq(m+1)} \right]^{-\frac{\alpha}{2}}$$

e, visto que

$$T_n < 1,$$

$$T_{n+\alpha+1} < \left[ 1 + \frac{\alpha}{pq(m+1)} \right]^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Por outro lado, as probabilidades das combinações que

não entram em  $S$ , são todas inferiores a  $T_{n+\alpha+1}$  (prop. III); logo

$$1 - S < (2\alpha + 1) T_{n+\alpha+1} < m T_{n+\alpha+1}$$

$$< \frac{m}{\left[ 1 + \frac{\alpha}{pq(m+1)} \right]^{\frac{\alpha}{2}}},$$

e. d. d.

### Proposição VIII

(3.º Teorema de Bernoulli)

*Tem-se uma probabilidade sempre crescente de que a razão do número de acontecimentos favoráveis para o número de acontecimentos contrários se não afastará da razão das suas probabilidades respectivas além de certos limites; e, por mais apertados que esses limites sejam, a probabilidade de que se trata, aproximar-se-há da unidade tanto quanto se queira, logo que o número de experiências aumente suficientemente.*

Com efeito, como já vimos na proposição V, caso o afastamento  $\alpha$  seja positivo, teremos

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{p}{q} + \frac{p-r+\alpha}{mq-p+r-\alpha}$$

e portanto

$$\left| \frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q} \right| = \frac{p-r+\alpha}{mq-p+r-\alpha}.$$

Ora, para que

$$\left| \frac{\binom{p}{q}}{\binom{q}{q}} - \frac{p}{q} \right| > \varepsilon,$$

necessário se torna que

$$\frac{p-r+\alpha}{mq-p+r-\alpha} > \varepsilon$$

ou

$$p-r+\alpha > mq\varepsilon - p\varepsilon + r\varepsilon - \alpha\varepsilon$$

ou

$$\alpha(1+\varepsilon) > mq\varepsilon + \dots$$

ou

$$\alpha > A(m+1) + B; \tag{1}$$

onde A e B são constantes, sendo  $A > 0$ .

Mas, S representa na prop. VII a probabilidade de que o afastamento seja igual ou menor do que  $\alpha$ ;  $1-S$  representará a probabilidade de que o afastamento seja superior a  $\alpha$ .

Logo, a probabilidade de que

$$\left| \frac{\binom{p}{q}}{\binom{q}{q}} - \frac{p}{q} \right| > \varepsilon$$

será

$$1-S < \frac{m}{\left[ 1 + \frac{\alpha}{(m+1)pq} \right]^{\frac{\alpha}{2}}} < \frac{m}{\left[ 1 + \frac{A(m+1)+B}{pq(m+1)} \right]^{\frac{A(m+1)+B}{2}}}$$

expressão esta que tende para zero quando  $m$  tende para infinito, visto que  $A > 0$ .

Este teorema é também chamado *lei dos grandes números*:

#### Observação

Não consideramos o caso de  $a < 0$  porque para êle chegavamos a uma desigualdade análoga a (1), ficando por isso caídos no mesmo caso.

\*

O 3.º teorema de Bernoulli pode enunciar-se do seguinte modo:

*A probabilidade de que o afastamento seja da ordem do número de experiências, tende para zero quando o número de experiências tende para infinito.*

#### Proposição IX

*A probabilidade de que o afastamento  $a$  seja tal que*

$$\frac{a^{n+1}}{m^n} > \varepsilon, \quad (1)$$

*tende para zero quando  $m$  cresce, logo que  $n > 1$ .*

Com efeito, de (1) tira-se

$$\left[ 1 + \frac{a}{pq(m+1)} \right]^{\frac{a}{2}} < \left[ 1 + \frac{\varepsilon m^{\frac{n}{n+1}}}{(m+1)pq} \right]^{\frac{\varepsilon m^{\frac{n}{n+1}}}{2}}$$

Ora, ao segundo membro desta desigualdade pode dar-se a forma

$$\frac{m}{\left[1 + A m^{-\frac{1}{1+n}}\right] B m^{\frac{n}{n+1}}},$$

desprezando as parcelas finitas em presença das infinitas, ou ainda, pela mesma razão, a forma

$$\begin{aligned} & \frac{m}{1 + A_1 m^{\frac{n}{n+1}} \cdot m^{-\frac{1}{n+1}} + A_2 m^{\frac{2n}{n+1}} \cdot m^{-\frac{2}{n+1}} \dots} \\ &= \frac{m}{1 + A_1 m^{\frac{n-1}{n+1}} + A_2 m^{\frac{2n-1}{n+1}} + \dots} \\ &= \frac{1}{m^{-1} + A_1 m^{\frac{n-1}{n+1}-1} + A_2 m^{\frac{2n-1}{n+1}-1} + \dots} \end{aligned}$$

expressão esta que tenderá para zero logo que  $n > 1$ , porque neste caso haverá sempre um inteiro  $i$  tal que

$$i \frac{n-1}{n+1} - 1 > 0.$$

Esta proposição pode enunciar-se:

*Há uma probabilidade nula de que a ordem do número de experiencias em relação ao afastamento  $\alpha$ , seja inferior à segunda.*

## Proposição X

A probabilidade de que

$$\frac{\alpha}{\sqrt[n]{m}} < \varepsilon$$

tende para zero quando  $m$  aumenta indefinidamente, se  $n > 2$ .

Com efeito, visto que

$$T_{n-\alpha} < T_n = \frac{1 + \varepsilon_m}{\sqrt{2\pi p q m}},$$

segue-se que

$$S < 2\alpha T_n = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi p q m}} (1 + \varepsilon_m),$$

ou

$$S < \frac{\alpha}{\sqrt[n]{m}} C_m,$$

onde  $C_m$  tende para uma constante quando  $m$  tende para infinito. Ora, se

$$\frac{\alpha}{\sqrt[n]{m}} < \varepsilon,$$

será

$$S < \frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt{m}} \varepsilon C_m$$

$$= m^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} \varepsilon C_m$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S = 0$$

se

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} < 0, \quad \text{ou,} \quad n > 2,$$

c. d. d.

Logo, é nula a probabilidade de que o número de experiências seja de ordem superior à segunda, em relação  $\alpha$ .

Portanto

### Proposição XI

A ordem do número de experiências relativa ao afastamento será a segunda como resulta das proposições IX e X.

\*  
\* \* \*

↳ Todo o número se pode supôr escrito com a forma decimal e com um número infinito de casas. Assim, o número  $\frac{1}{2}$  pode escrever-se debaixo da forma 0,5000...

Supondo todos os números com esta forma, consideremos o seguinte

### Problema

↳ Tira-se, à sorte, um número do intervalo (0, 1); qual a probabilidade de que os seus algarismos se sucedam de modo a satisfazerem à lei de BERNOULLI?

Este problema, assim posto, não encontra solução nas definições que demos da probabilidade.

Com efeito, este problema pertence à probabilidade contínua, visto que a tiragem se faz no intervalo  $(0, 1)$  e nós, no capítulo correspondente dos presentes *Elementos*, definimos, apenas, probabilidade de *regiões* em relação a *regiões*. Portanto, para que este problema lá encontrasse resposta, necessário seria que os números que constituem a classe favorável, constituíssem intervalos completos, contidos no intervalo  $(0, 1)$ , o que não é verdade; ou, talvez melhor, o que não pode afirmar-se *à priori*.

Modifiquemos por isso o enunciado do problema, do seguinte modo: *qual a probabilidade de que os primeiros N algarismos do numero achado satisfaçam à lei de BERNOULLI?*

Este problema já tem uma solução, porque os números cujos primeiros N algarismos são idênticos, formam um intervalo.

Esses intervalos uns serão favoráveis, outros não.

A soma dos intervalos favoráveis, dividida pelo intervalo total, dará a solução pedida.

Ora, sendo estes intervalos todos iguais, eles serão igualmente possíveis e a possibilidade de cada um deles será

$$\frac{1}{10^N}$$

visto que  $10^N$  é o seu número.

Consideremos, agora, uma urna com 10 bolas, numeradas de 0 a 9. Qualquer número com N casas se pode



supôr obtido por meio de  $N$  tiragens nessa urna e a possibilidade de cada um dêsses números será

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdots \frac{1}{10} = \frac{1}{10^N},$$

isto é, a mesma de qualquer dos intervalos parciais precedentes.

Portanto, no problema em questão, tanto faz lançar à sorte um ponto no intervalo  $(0, 1)$ , como fazer  $N$  tiragens, à sorte, numa urna que contenha 10 bolas, numeradas de 0 a 9.

Á mesma conclusão podíamos chegar, servindo-nos da fórmula do problema tratado na página 74 dos presentes *Elementos*, onde teríamos de supôr  $f(x) = x$ , o que nos dava, imediatamente,

$$P = \frac{1}{10}$$

qualquer que fôsse  $a$  e  $d$ .

Mas sendo assim, a relação do numero de combinações que satisfazem ao teorema de BERNOULLI, para o número total de combinações, tende para 1, à medida que  $N$  aumenta. É nisto mesmo que consiste o teorema de BERNOULLI.

Logo, a probabilidade pedida no segundo inunziado, tende para 1, à medida que  $N$  aumenta. A probabilidade pedida no primeiro que corresponde ao limite para  $N = \infty$ , será igual a 1.

\*

Este mesmo raciocínio prova que é igual a 1 a probabilidade de que sejam satisfeitas todas as outras leis análogas às de BERNOULLI.

\*

*Daqui podemos concluir que a probabilidade de que o numero achado seja racional, é igual a zero.*

Com efeito, um número racional dá sempre logar a uma dizima periódica.

E, de duas uma: ou bem no período do número racional entram todos os algarismos de 0 a 9 e em proporções iguais; e nesse caso a distribuição dos algarismos satisfará à lei de BERNOULLI, mas não satisfará a nenhuma das outras, visto que o afastamento absoluto passará periodicamente pelos mesmos valores e portanto ficará inferior a certo máximo; ou o período do número racional não satisfaz à condição precedente e nesse caso não é satisfeita a lei de BERNOULLI.

Os números racionais correspondem pois, a uma classe de combinações que, ou não satisfazem à lei de BERNOULLI ou não satisfazem às leis análogas. A sua probabilidade será, pois, nula.

*Certo, ne*

## SEGUNDA PARTE

### Lei dos desvios

Demonstrado, dum modo rigoroso, o 3.º teorema de JACOB BERNOULLI e outros análogos, relativos à ordem de grandeza dos afastamentos ou desvios, vamos deduzir uma relação aproximada entre os desvios e as suas probabilidades.

#### Proposição XII

Representando por  $T_n$  a probabilidade da combinação de probabilidade máxima, combinação esta a que podemos chamar *normal*, a probabilidade de que o afastamento seja inferior, em valor absoluto, a  $k$ , será dada por

$$P(k) = T_{n-k} + \dots + T_n + \dots + T_{n+k} = \sum_{i=-k}^k T_{n+i}.$$

*(na seguinte p. T. 22 P)*

Ora,

$$T_{n+i} = \frac{m!}{(n+i)!(m-n-i)!} p^{n+i} q^{m-n-i},$$

onde  $n$  representa o número de bolas brancas da combinação normal e por isso é da forma

$$n = (m+1)p - r, \quad (0 \ll r \ll 1).$$

Supondo  $m$  bastante grande, poderemos, na fórmula aproximada que nos dá

$$(m-n+i)! \quad \text{e} \quad (n+i)!,$$

substituir

$$(m+1)p - r$$

por

$$mp = r$$

e  $T_{n+i}$  tomará a forma

$$\begin{aligned} T_{n+i} &= \frac{m^m e^{-m\sqrt{2\pi m}} p^{mp+i} q^{mq-i} (1+\alpha_m)}{(mp+i)^{mp+i} e^{-mp-i} \sqrt{2\pi(mp+i)} (mq-i)^{mq-i} e^{-mq-i} \sqrt{2\pi(mq-i)}} \\ &= \frac{\sqrt{m} p^{mp+i} q^{mq-i}}{\left(p+\frac{i}{m}\right)^{mp+i} \left(q-\frac{i}{m}\right)^{mq-i} \sqrt{2\pi(mp+i)} \sqrt{2\pi(mq-i)}} (1+\alpha_m) \\ &= \frac{p^{mp+i} q^{mq-i}}{\left(p+\frac{i}{m}\right)^{mp+i+\frac{1}{2}} \left(q-\frac{i}{m}\right)^{mq-i+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi m}} (1+\alpha_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{mp}\right)^{mp+i+\frac{1}{2}} \left(1-\frac{i}{mq}\right)^{mq-i+\frac{1}{2}}} (1+\alpha_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \cdot H \end{aligned}$$

sendo

$$H = \left(1 + \frac{i}{mp}\right)^{-mp-i-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{i}{mq}\right)^{-mq+i-\frac{1}{2}} (1+\alpha_m)^{-1}$$

e

$$\log H = - \left( m p + i + \frac{1}{2} \right) \log \left( 1 + \frac{i}{m p} \right) - \left( m q - i + \frac{1}{2} \right) \log \left( 1 - \frac{i}{m q} \right) - \log (1 + \alpha_n);$$

mas (3.º teorema de BERNOULLI) a probabilidade de que

$$\left| \frac{i}{m} \right| > \varepsilon$$

tende para zero quando  $m$  aumenta; haverá pois, uma probabilidade sempre crescente de que

*(para maior rigor, seria possível aplicar a fórmula de MacLaurin, bastando as 2 primeiras séries e o resto é desprezível)*

$$\begin{aligned} \log H &= - \left( m p + i + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{i}{m p} - \frac{i^2}{2 m^2 p^2} + \frac{i^3}{3 m^3 p^3} - \dots \right] \\ &\quad - \left( m q - i + \frac{1}{2} \right) \left[ - \frac{i}{m q} - \frac{i^2}{2 m^2 q^2} - \frac{i^3}{3 m^3 q^3} - \dots \right] \\ &\quad - \log (1 + \alpha^m) = \\ &= - \frac{i^2}{m} \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{m} \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right] \\ &\quad + \frac{i^2}{2 m} \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right] + \frac{i^3}{2 m^2} \left[ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{i^2}{2 m^2} \left[ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right] + \dots - \log (1 + \alpha_m) \\ &= - \frac{i^2}{2 m p q} - \frac{i}{2 m p q} + \frac{i^3}{2 m^2 p^2 q^2} + \dots + \log (1 + \alpha_m) \end{aligned}$$

Ora, o termo em  $\alpha_m$  tende para zero, como se sabe da fórmula de aproximação; os termos em

$$\frac{i}{m}, \frac{i^3}{m^3}, \dots, \frac{i^n}{m^n}, \frac{i^{n+1}}{m^n},$$

tem uma probabilidade de se manterem superiores a  $\varepsilon$ , por menor que  $\varepsilon$  seja, que tende para zero quando o número  $m$  aumenta (prop. IX e X); logo, haverá uma probabilidade sempre crescente com  $m$  de que H seja tal que

$$\log H = -\frac{i^2}{2mpq}$$

e portanto

$$H = e^{-\frac{i^2}{2mpq}}$$

e

$$T_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{i^2}{2mpq}}$$

e

$$\begin{aligned} P(k) &= \sum_{i=-k}^k T_{n+i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \sum_{i=-k}^k e^{-\frac{i^2}{2mpq}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi mpq}} \sum_{i=0}^k e^{-\frac{i^2}{2mpq}}; \end{aligned}$$

substituindo o  $\Sigma$  por um  $\int$  tomado entre os mesmos limites, virá

$$P(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi pqm}} \int_0^{k-\frac{x^2}{2mpq}} dx,$$

ou, fazendo

$$x = \lambda \sqrt{2mpq},$$

$$P(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi mpq}} \int_0^{\lambda_1} e^{-\lambda^2} d\lambda \cdot \sqrt{2mpq},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda_1} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{k}{\sqrt{2mpq}}.$$

A  $\lambda_1$  chama-se *afastamento relativo* para o distinguir do afastamento  $k$ , também chamado *afastamento absoluto*. Ao número

$$\sqrt{2mpq}$$

chama-se *unidade de afastamento*.

\*

Costuma chamar-se *probabilidade de  $\lambda$* , à probabilidade de que o afastamento relativo se mantenha, em valor absoluto, inferior a  $\lambda$ .

Portanto,

## Proposição XIII

Haverá uma probabilidade sempre crescente com  $m$  de que seja

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda$$

a probabilidade do afastamento  $\lambda$ .

A  $\theta(\lambda)$  costuma chamar-se *lei dos desvios*, *lei dos afastamentos* e também *lei de Gauss*.

\*

A lei que acabamos de deduzir é apenas uma lei *provável* e, além disso, aproximada. A sua probabilidade, porém, tende muito rapidamente para 1, quando  $m$  aumenta, e os erros cometidos na sua dedução tendem rapidamente para zero. A conveniência desta lei é tal que, em muitas aplicações, o resultado obtido é igual ao resultado verdadeiro. Na resolução dos problemas sobre os afastamentos é ela sempre que se emprega.

\*

A probabilidade de que a variável  $\lambda$  esteja compreendida entre 0 e  $\infty$  será

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$



resultado êste, rigoroso, como era de esperar; quando  $\lambda$  tende para infinito,  $m$  tende também para o infinito e nestas condições a lei torna-se *exacta*.

\*

As tabelas seguintes dão os valores de  $\theta(\lambda)$  de centesima em centesima. Por elas se vê quão rapidamente  $\theta(\lambda)$  tende para 1, quando  $\lambda$  cresce.

$\lambda$ .	$\theta$ .	$\lambda$ .	$\theta$ .	$\lambda$ .	$\theta$ .
0,00....	0,0000000	0,24....	0,2657000	0,48... .	0,5027498
0,01....	0,0112833	0,25....	0,2763263	0,49....	0,5116683
0,02... .	0,0225644	0,26....	0,2868997	0,50....	0,5204999
0,03....	0,0338410	0,27....	0,2974182	0,51....	0,5292437
0,04... .	0,0451109	0,28....	0,3078800	0,52....	0,5378987
0,05....	0,0563718	0,29....	0,3182834	0,53....	0,5464641
0,06... .	0,0676215	0,30... .	0,3286267	0,54....	0,5549392
0,07....	0,0788577	0,31....	0,3389081	0,55....	0,5633233
0,08....	0,0900781	0,32....	0,3491259	0,56....	0,5716157
0,09....	0,1012806	0,33....	0,3592785	0,57....	0,5798158
0,10....	0,1124630	0,34....	0,3693644	0,58....	0,5879229
0,11....	0,1236230	0,35... .	0,3793819	0,59... .	0,5959365
0,12....	0,1347584	0,36....	0,3893296	0,60... .	0,6038561
0,13....	0,1458671	0,37....	0,3992059	0,61....	0,6116812
0,14....	0,1569470	0,38....	0,4090093	0,62....	0,6194114
0,15....	0,1679959	0,39....	0,4187380	0,63....	0,6270463
0,16....	0,1790117	0,40....	0,4283922	0,64... .	0,6345857
0,17....	0,1899923	0,41....	0,4379690	0,65....	0,6420292
0,18....	0,2009357	0,42....	0,4474676	0,66....	0,6493765
0,19....	0,2118398	0,43....	0,4568867	0,67....	0,6566275
0,20....	0,2227025	0,44....	0,4662251	0,68....	0,6637820
0,21....	0,2335218	0,45....	0,4754818	0,69... .	0,6708399
0,22....	0,2442958	0,46....	0,4846555	0,70....	0,6778010
0,23....	0,2550225	0,47....	0,4937452	0,71....	0,6846654

$\lambda.$	$\theta.$	$\lambda.$	$\theta.$	$\lambda.$	$\theta.$
0,72...	0,6914330	1,08...	0,8733261	1,44...	0,9582966
0,73....	0,6981038	1,09....	0,8768030	1,45....	0,9596950
0,74....	0,7046780	1,10....	0,8802050	1,46....	0,9610535
0,75....	0,7111556	1,11....	0,8835330	1,47....	0,9623729
0,76....	0,7175367	1,12....	0,8867879	1,48....	0,9636541
0,77....	0,7238216	1,13....	0,8899707	1,49....	0,9648979
0,78....	0,7300104	1,14....	0,8930823	1,50....	0,9661052
0,79....	0,7361035	1,15 ...	0,8961238	1,51....	0,9672768
0,80. . .	0,7421010	1,16....	0,8990962	1,52....	0,9684135
0,81....	0,7480033	1,17....	0,9020004	1,53....	0,9695162
0,82....	0,7538108	1,18....	0,9048374	1,54....	0,9705857
0,83....	0,7595238	1,19....	0,9076083	1,55....	0,9716227
0,84....	0,7651427	1,20....	0,9103140	1,56....	0,9726281
0,85....	0,7706680	0,21....	0,9129555	1,57....	0,9736026
0,86....	0,7761002	0,22....	0,9155359	1,58....	0,9745470
0,87....	0,7814398	0,23....	0,9180501	1,59....	0,9754620
0,88....	0,7866873	1,24....	0,9205052	1,60....	0,9763484
0,89 ...	0,7918432	1,25....	0,9229001	1,61....	0,9772069
0,90....	0,7969082	1,26....	0,9252359	1,62....	0,9780381
0,91....	0,8018828	1,27....	0,9275136	1,63....	0,9788429
0,92....	0,8067677	1,28....	0,9297342	1,64....	0,9796218
0,93....	0,8115635	1,29....	0,9318987	1,65....	0,9803756
0,94....	0,8162710	1,30....	0,9340080	1,66....	0,9811049
0,95....	0,8208908	1,31....	0,9360632	1,67....	0,9818104
0,96....	0,8254236	1,32....	0,9380652	1,68....	0,9824928
0,97....	0,8298703	1,33....	0,9400150	1,69....	0,9831526
0,98....	0,8342315	1,34....	0,9419137	1,70....	0,9837904
0,99 ...	0,8385081	1,35....	0,9437622	1,71....	0,9844070
1,00 ...	0,8427008	1,36....	0,9455614	1,72....	0,9850028
1,01....	0,8468105	1,37....	0,9473124	1,73....	0,9855785
1,02....	0,8508380	1,38....	0,9490160	1,74. . .	0,9861346
1,03....	0,8547842	1,39....	0,9506733	1,75....	0,9866717
1,04....	0,8586499	1,40....	0,9522851	1,76....	0,9871903
1,05....	0,8624360	1,41....	0,9538524	1,77....	0,9876910
1,06....	0,8661435	1,42....	0,9553762	1,78....	0,9881742
1,07....	0,8697732	1,43....	0,9568573	1,79....	0,9886406

$\lambda.$	$\theta.$	$\lambda.$	$\theta.$	$\lambda.$	$\theta.$
1,80....	0,9890905	2,16....	0,9977472	2,52....	0,9996345
1,81....	0,9895245	2,17....	0,9978511	2,53....	0,9996537
1,82....	0,9899431	2,18....	0,9979505	2,54....	0,9996720
1,83....	0,9903467	2,19....	0,9980459	2,55....	0,9996893
1,84....	0,9907359	2,20....	0,9981372	2,56....	0,9997058
1,85....	0,9911110	2,21....	0,9982244	2,57....	0,9997215
1,86....	0,9914725	2,22....	0,9983079	2,58....	0,9997364
1,87....	0,9918207	2,23....	0,9983878	2,59....	0,9997505
1,88....	0,9921562	2,24....	0,9984642	2,60....	0,9997640
1,89....	0,9924793	2,25....	0,9985373	2,61....	0,9997767
1,90....	0,9927904	2,26....	0,9986071	2,62....	0,9997888
1,91....	0,9930899	2,27....	0,9986739	2,63....	0,9998003
1,92....	0,9933782	2,28....	0,9987377	2,64....	0,9998112
1,93....	0,9936557	2,29....	0,9987986	2,65....	0,9998215
1,94....	0,9939226	2,30....	0,9988568	2,66....	0,9998313
1,95....	0,9941794	2,31....	0,9989124	2,67....	0,9998406
1,96....	0,9944263	2,32....	0,9989655	2,68....	0,9998494
1,97....	0,9946637	2,33....	0,9990162	2,69....	0,9998578
1,98....	0,9948920	2,34....	0,9990646	2,70....	0,9998657
1,99....	0,9951114	2,35....	0,9991107	2,71....	0,9998732
2,00....	0,9953223	2,36....	0,9991548	2,72....	0,9998803
2,01....	0,9955248	2,37....	0,9991968	2,73....	0,9998870
2,02....	0,9957195	2,38....	0,9992369	2,74....	0,9998933
2,03....	0,9959063	2,39....	0,9992751	2,75....	0,9998994
2,04....	0,9960858	2,40....	0,9993115	2,76....	0,9999051
2,05....	0,9962581	2,41....	0,9993462	2,77....	0,9999105
2,06....	0,9964235	2,42....	0,9993793	2,78....	0,9999156
2,07....	0,9965822	2,43....	0,9994108	2,79....	0,9999204
2,08....	0,9967344	2,44....	0,9994408	2,80....	0,9999250
2,09....	0,9968805	2,45....	0,9994694	2,81....	0,9999293
2,10....	0,9970205	2,46....	0,9994966	2,82....	0,9999334
2,11....	0,9971548	2,47....	0,9995226	2,83....	0,9999372
2,12....	0,9972836	2,48....	0,9995472	2,84....	0,9999409
2,13....	0,9974070	2,49....	0,9995707	2,85....	0,9999443
2,14....	0,9975253	2,50....	0,9995930	2,86....	0,9999476
2,15....	0,9976386	2,51....	0,9996143	2,87....	0,9999507

$\lambda$ .	$\theta$ .	$\lambda$ .	$\theta$ .	$\lambda$ .	$\theta$ .
2,88...	0,9999536	3,24 ..	0,9999954	3,60...	0,99999964414
2,89 ..	0,9999563	3,25... ..	0,9999957	3,61...	0,99999966975
2,90 ..	0,9999589	3,26... ..	0,9999960	3,62...	0,99999969358
2,91... ..	0,9999613	3,27... ..	0,9999962	3,63...	0,99999971574
2,92... ..	0,9999636	3,28... ..	0,9999965	3,64...	0,99999973636
2,93... ..	0,9999658	3,29... ..	0,9999967	3,65...	0,99999975551
2,94 ..	0,9999679	3,30... ..	0,9999966	3,66...	0,99999977333
2,95... ..	0,9999698	3,31... ..	0,9999971	3,67... ..	0,99999978990
2,96... ..	0,9999716	3,32... ..	0,9999973	3,68... ..	0,99999980528
2,97... ..	0,9999733	3,33... ..	0,9999975	3,69... ..	0,99999981957
2,98... ..	0,9999750	3,34... ..	0,9999977	3,70... ..	0,99999983285
2,99... ..	0,9999765	3,35... ..	0,9999978	3,71 ..	0,99999984517
3,00 ..	0,9999779	3,36... ..	0,9999980	3,72 ..	0,99999985663
3,01... ..	0,9999793	3,37... ..	0,9999981	3,73... ..	0,99999986726
3,02... ..	0,9999805	3,38... ..	0,9999982	3,74... ..	0,99999987712
3,03... ..	0,9999817	3,39... ..	0,9999984	3,75... ..	0,99999988629
3,04... ..	0,9999829	3,40 ..	0,9999985	3,76 ..	0,99999989477
3,05... ..	0,9999839	3,41... ..	0,9999986	3,77... ..	0,99999990265
3,06... ..	0,9999849	3,42... ..	0,9999987	3,78... ..	0,99999990995
3,07... ..	0,9999859	3,43... ..	0,9999988	3,79... ..	0,99999991672
3,08... ..	0,9999867	3,44... ..	0,9999989	3,80... ..	0,99999992200
3,09... ..	0,9999876	3,45... ..	0,9999989	3,81... ..	0,99999992881
3,10... ..	0,9999884	3,46... ..	0,99999900780	3,82... ..	0,99999993421
3,11... ..	0,9999891	3,47... ..	0,99999907672	3,83... ..	0,99999993921
3,12... ..	0,9999898	3,48... ..	0,99999914101	3,84... ..	0,99999994383
3,13... ..	0,9999904	3,49... ..	0,99999920097	3,85... ..	0,99999994812
3,14... ..	0,9999910	3,50... ..	0,99999925691	3,86... ..	0,99999995208
3,15... ..	0,9999916	3,51 ..	0,99999930905	3,87... ..	0,99999995575
3,16... ..	0,9999921	3,52... ..	0,99999935766	3,88 ..	0,99999995915
3,17... ..	0,9999926	3,53 ..	0,99999940296	3,89... ..	0,99999996230
3,18... ..	0,9999931	3,54... ..	0,99999944519	3,90... ..	0,99999996522
3,19... ..	0,9999936	3,55... ..	0,99999948452	3,91... ..	0,99999996790
3,20 ..	0,9999940	3,56... ..	0,99999952115	3,92... ..	0,99999997039
3,21... ..	0,9999944	3,57 ..	0,99999955527	3,93 ..	0,99999997260
3,22... ..	0,9999947	3,58... ..	0,99999958703	3,94 ..	0,99999997482
3,23... ..	0,9999951	3,59... ..	0,99999961661	3,95... ..	0,99999997678

$\lambda.$	$\theta.$	$\lambda.$	$\theta.$	$\lambda.$	$\theta.$
3,96...	0,99999997860	4,10 ..	0,9999999330	4,50..	0,9999999981
3,97...	0,99999998028	4,20...	0,9999999714	4,60...	0,9999999992
3,98 ..	0,99999998183	4,30 . .	0,9999999880	4,70...	0,9999999997
3,99...	0,99999998327	4,40. .	0,9999999951	4,80...	0,9999999999
4,00...	0,99999998459				

### Proposição XIV

A um afastamento absoluto

$$k = \lambda \sqrt{2mpq}$$

corresponde para  $\frac{(p)}{(q)}$  uma expressão da forma

$$\frac{(p)}{(q)} = \frac{mp + \lambda \sqrt{2mpq}}{mq - \lambda \sqrt{2mpq}},$$

onde supomos o afastamento no sentido do acontecimento da probabilidade  $p$ ; donde,

$$\begin{aligned} \frac{(p)}{(q)} - \frac{p}{q} &= \frac{mp + \lambda \sqrt{2mpq}}{mq - \lambda \sqrt{2mpq}} - \frac{p}{q} \\ &= \frac{\lambda \sqrt{2mpq}}{mq^2 - \lambda q \sqrt{2mpq}} = \frac{\lambda \sqrt{2pq}}{q^2 \sqrt{m} - \lambda q \sqrt{2pq}}. \end{aligned}$$

Se o afastamento fosse considerado no sentido do  $q$ , não

tinhamos mais do que mudar o sinal ao  $\lambda$ . Em qualquer caso teremos que

$$\left| \frac{\binom{p}{q} - \frac{p}{q}}{\binom{q}{q} - \frac{p}{q}} \right| = \left| \frac{\lambda \sqrt{2pq}}{q^2 \sqrt{m} - \lambda q \sqrt{2pq}} \right| > \varepsilon,$$

se

$$|\lambda| > \frac{\varepsilon q^2 \sqrt{m}}{\sqrt{2pq} (1 \pm \varepsilon q)} \quad (1)$$

A probabilidade de que (1) seja satisfeita será (prop. XII)

$$P = 1 - \theta \left[ \frac{\varepsilon q^2 \sqrt{m}}{\sqrt{2pq} (1 \pm \varepsilon q)} \right].$$

Por mais pequeno que  $\varepsilon$  seja,  $P$  tenderá rapidamente para zero, por causa do factor  $\sqrt{m}$ .

Exemplo :

Jogam-se 200 jogos de *cara* ou *X*, a tostão cada jogo. Qual a probabilidade de ganhar ou perder uma quantia superior a 10 tostões ?

Resp. :

Neste caso é

$$p = q = \frac{1}{2} : m = 200 ; k > 10 ;$$

logo, se

$$k = \lambda \sqrt{2 \cdot 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10 \cdot \lambda > 10,$$

será

$$\lambda > 1 \quad \text{e} \quad 1 - \theta(1) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25},$$

aproximadamente.

### Proposição XV

BOREL (1) generalizou a lei dos desvios

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

para o caso das tiragens serem feitas em urnas de composições diferentes.

Assim, sejam

$$p_1 \text{ e } q_1, \quad p_2 \text{ e } q_2, \quad \dots \quad p_n \text{ e } q_n$$

as composições respectivas de  $n$  urnas contendo bolas brancas e bolas pretas.

Façamos  $m_1$  tiragens na primeira urna,  $m_2$  na segunda...  $m_n$  na última. O número mais provável de bolas brancas será

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_n p_n.$$

Mas, em geral, não será este número, a que poderíamos

---

(1) E. BOREL, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, deuxième édition, pág. 77.

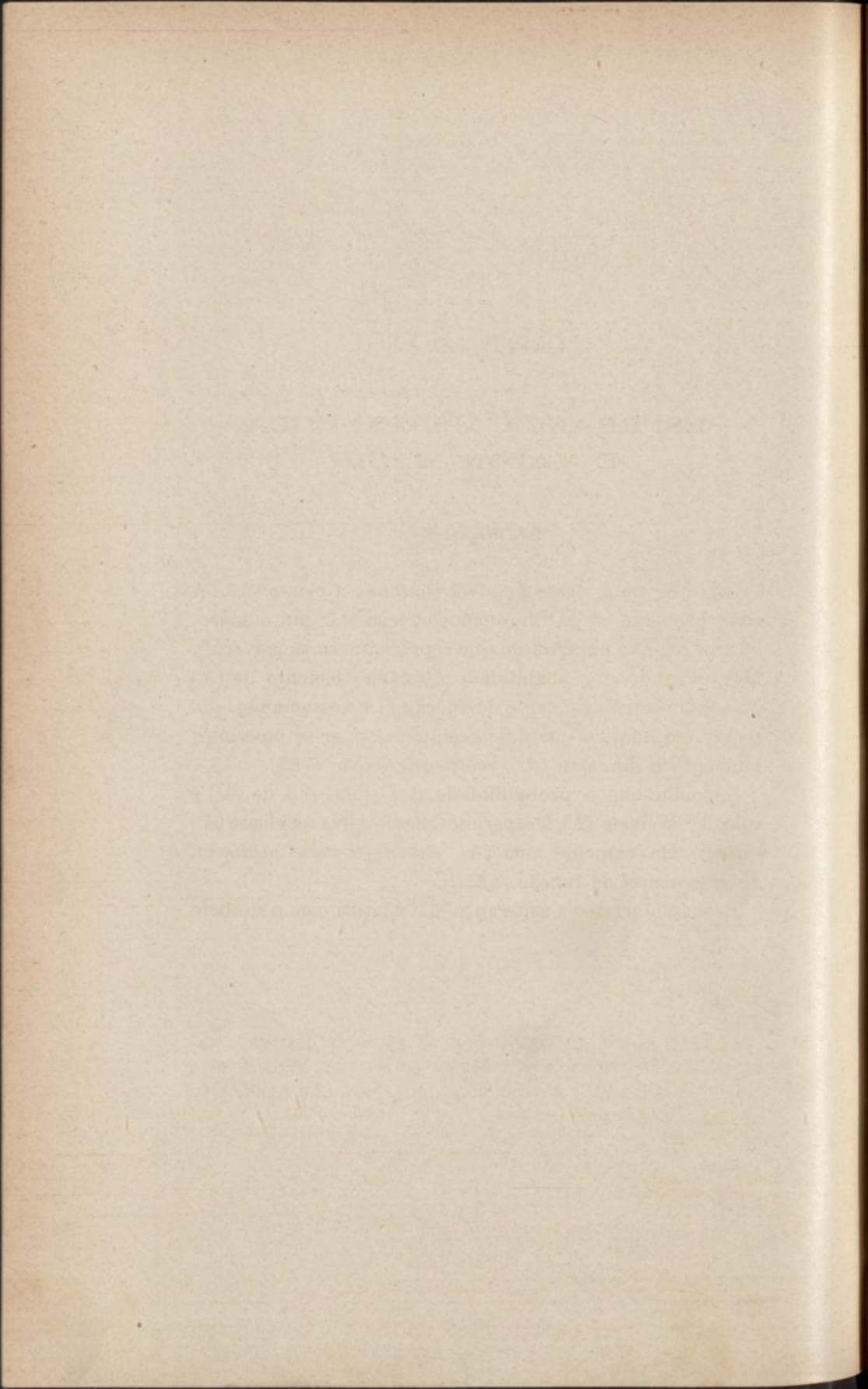
chamar *normal*, o obtido. Haverá, em geral, um afastamento absoluto  $h$ , soma algébrica de  $n$  afastamentos,  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , provenientes das urnas respectivas.

Ora BOREL demonstrou, dum modo muito fácil aliás, que a lei dos desvios ainda terá a mesma forma, caso se tome para unidade do afastamento  $h$  a raiz quadrada da soma dos quadrados dos afastamentos correspondentes às diversas urnas.



CAPÍTULO VI

ESPERANÇA MATEMÁTICA  
E VALOR MÉDIO



## CAPITULO VI

### ESPERANÇA MATEMÁTICA E VALOR MÉDIO

#### DEFINIÇÃO 1.ª

Seja (A) uma classe possível contendo a classe (A'). A cada elemento de (A') façamos corresponder um número. Obtemos assim uma função que representaremos por  $f(A')$ . Multiplicando a probabilidade de cada elemento de (A') pelo valor correspondente da função  $f(A')$  e somando, obtemos um número que é de costume chamar-se *esperança matemática da classe (A'), relativa à função  $f(A')$* .

Supondo que a probabilidade dos elementos de (A') é relativa à classe (A), a esperança matemática da classe (A') quando ela coincide com (A), chama-se *valor médio* ou *valor provável* da função  $f(A)$  <sup>(1)</sup>.

Representaremos a esperança matemática com o símbolo

$$E [f(A)]$$

---

(1) Embora esta distinção entre esperança matemática e valor médio não costume vir explicitamente feita nos livros de Probabilidades, todos os autores dão a estes termos a significação que acabamos de atribuir-lhes.

e o valor médio ou provável com o símbolo

$$M[f(A)].$$

Assim, se a cada face dum dado fizermos corresponder o respectivo número de pontos, construímos uma função cujo valor médio é

$$M = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5.$$

A esperança matemática relativa às faces 1, 2, será

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = 0,5.$$

### Proposição I

*A esperança matemática duma classe é igual à soma das esperanças matemáticas das suas partes, como resulta imediatamente da def. 1.<sup>a</sup>*

### Proposição II

*É igualmente evidente que a esperança matemática de uma soma é igual à soma das esperanças matemáticas das parcelas.*

### Proposição III

Sejam (A) e (B) duas classes possíveis e (A, B) a classe composta das duas e suponhamos que fazemos

$$f(A, B) = f(A) \cdot f(B).$$

Nestas condições teremos

$$E[f(A, B)] = E[f(A)] \cdot E[f(B)],$$

isto é, a esperança matemática da classe composta é igual ao produto das esperanças matemáticas das classes componentes.

Com efeito, representando por  $P_x$  a probabilidade do elemento  $x$ , teremos

$$E[f(A)] = \sum f(A) P_A; \quad E[f(B)] = \sum f(B) P_B;$$

$$E[f(A, B)] = \sum f(A, B) P_{A, B};$$

ora

$$\begin{aligned} \sum f(A, B) P_{A, B} &= \sum f(A) \cdot f(B) \cdot P_A \cdot P_B \\ &= \sum f(A) \cdot P_A \cdot \sum f(B) \cdot P_B; \end{aligned}$$

logo

$$E[f(A, B)] = E[f(A)] \cdot E[f(B)],$$

c. d. d.

## DEFINIÇÃO 2.ª

Seja  $M$  um ponto livre ou sujeito, variando numa região que contém a região  $(A)$  e representemos por  $P(M)$  a sua lei de probabilidade em relação a  $(A)$ . Seja, além disso,  $\varphi(M)$  uma função das coordenadas de  $M$ , definida em  $(A)$ . Sendo  $(A')$  uma região contida em  $(A)$ , ao número

$$E_{(A')}[\varphi(M)] = \int_{(A')} P(M) \varphi(M) d(A)$$

chamaremos *esperança matemática da região  $(A')$  relativa à função  $\varphi(M)$* . No caso particular de  $(A')$  coincidir com  $(A)$ , chamaremos a êsse número *valor médio* ou *valor provável* de  $\varphi(M)$ .

## Proposição IV

É evidente que, se

$$(A') = (A_1) + (A_2) + \dots + (A_n),$$

será

$$E(A') = E(A_1) + E(A_2) + \dots + E(A_n)$$

## Proposição V

É igualmente evidente que

$$E[\varphi_1(M) + \varphi_2(M) + \dots] = E[\varphi_1(M)] + E[\varphi_2(M)] + \dots$$

### Proposição IV

Se  $M$  for um ponto variando em  $(A)$  e  $N$  outro variando em  $(B)$ , será, análogamente ao caso da prop. III,

$$\begin{aligned} E_{(A, B)} [\varphi(M) \cdot \psi(N)] &= \int_{(A, B)} P(M) P(N) \varphi(M) \psi(N) d(A, B) \\ &= \int_{(A)} P(M) \varphi(M) d(A) \int_{(B)} P(N) \psi(N) d(B) \\ &= E_{(A)} [\varphi(M)] \cdot E_{(B)} [\psi(N)]. \end{aligned}$$

### Proposição VII

Seja  $M$  um ponto variando numa certa região que contém  $(A)$ ,  $f(M)$  uma dada função das suas coordenadas, e  $P(M)$  a sua lei de probabilidade relativamente a  $(A)$ . Já vimos que, por definição, é

$$E_{(A)} [f(M)] = \int_{(A)} P(M) f(M) d(A).$$

Ora, pondo  $f(M) = z$ , teremos

$$E = \int_{(A)} z P(M) d(A) = \int_{z_0}^{z^2} z \int P(M) d(A)$$

sendo o segundo integral estendido à região de  $(A)$  em

que  $z$  toma valores compreendidos entre  $z$  e  $z + dz$ . Mas este integral é, por definição de  $P(M)$ , a probabilidade de que  $z$  esteja compreendido entre  $z$  e  $z + dz$  e o seu valor pode representar-se por

$$P(z) dz,$$

sendo  $P(z)$  a lei da probabilidade de  $z$ . Logo,

$$E_{(A)} [\varphi(M)] = \int_{z_0}^z z P(z) dz = E_{(z)}(z).$$

Por um exemplo que adiante daremos, se verá a utilidade desta proposição na determinação das esperanças matemáticas.

### Proposição VIII

Sendo dada a lei da probabilidade da variável  $z$ , a esperança matemática de qualquer função de  $z$ ,  $\varphi(z)$ , será dada por

$$E_{(z)} [\varphi(z)] = \int_{z_0}^z \varphi(z) P(z) dz.$$

Para provar isto, bastaria fazer

$$f(M) = \varphi(z)$$

na proposição antecedente e tomar ainda o segundo inte-



gral estendido à região em que  $z$  toma valores compreendidos entre  $z$  e  $z + dz$ .

### Proposição IX

*A esperança matemática duma constante é igual à própria constante multiplicada pela probabilidade da região isto é*

$$E_{(A)}(C) = C \cdot P_{(A)}$$

como resulta imediatamente da definição.

Para o valor médio será

$$P_{(A)} = 1 \quad \text{e} \quad M(C) = C.$$

### Proposição X

*Se uma função  $f(M)$  é sempre positiva e o seu valor médio se pode tornar inferior a qualquer número  $\delta$ , por mais pequeno que  $\delta$  seja, a probabilidade de que  $f(M)$  se mantenha superior a certo numero  $m$ , numa região  $(A')$ , é menor do que  $\frac{\delta}{m}$ .*

Com efeito, se, ao longo de  $(A')$ , é

$$f(M) \geq m,$$

segue-se que

$$\int_{(A)} f(M) P(M) d(A) = \int_{(A-A')} f(M) P(M) d(A) + \int_{(A')} f(M) P(M) d(A)$$

$$\geq \int_{(A')} f(M) P(M) d(A)$$

$$\geq m \cdot P_{(A')} ;$$

logo

$$m \cdot P_{(A')} < \delta$$

e

$$P_{(A')} < \frac{\delta}{m}$$

c. d. d.

### Problema

Consideremos um polígono articulado aberto, de lados

$$l_1, l_2, \dots, l_n,$$

e sejam A e B os seus pontos extremos. Lança-se, à sorte, esse polígono sobre um plano: determinar

$$M_n(d^2),$$

sendo

$$d = AB.$$

### Solução

No cálculo de  $M_n(d^2)$  nós podemos (prop. VIII) entrar com a lei da probabilidade de  $d$ . Além disso, à lei da probabilidade de  $d$ , nós podemos substituir a lei de probabilidade de qualquer ponto  $M$ , a  $d$  convenientemente ligado (Prop. VII); o ponto equivalente do polígono, por exemplo. Posto isto, consideremos o caso do polígono ter um lado só,  $l_1$ ; será (prop. IX)

$$M_1(d^2) = M_1(l_1^2) = l_1^2.$$

Consideremos agora o caso do polígono ter dois lados; teremos (prop. VIII)

$$\begin{aligned} M_2(d^2) &= \int_0^{l_1+l_2} P(d) \cdot d^2 \cdot d(d); \\ &= \int_0^\pi \frac{dx}{\pi} (l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \alpha) \\ &= l_1^2 + l_2^2, \end{aligned}$$

sendo  $\alpha$  o ângulo de  $l_1$  com  $l_2$ .

Suponhamos que no caso de  $i$  lados ainda tínhamos

$$M_i(d^2) = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_i^2$$

e provemos que nesse caso ainda

$$M_{i+1}(d^2)$$

nos é dado pela mesma lei.

Representando por  $\delta$  o segmento que une a origem de  $l_i$  com a extremidade de  $l_i$ , teremos, por hipótese,

$$M_i(d^2) = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_i^2.$$

Ora, representando por  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ , os ângulos das articulações,  $d^2$  será uma função  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$  desses ângulos e o valor médio procurado será de forma

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= \int f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \dots \frac{d\alpha_i}{2\pi} \\ &= \int \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \dots \frac{d\alpha_{i-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \frac{d\alpha_i}{2\pi} \\ &= \int \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \dots \frac{d\alpha_{i-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} (\delta^2 + l_{i-1}^2 + 2\delta l_{i+1} \cos \alpha_i) d\alpha_i \\ &= \int \frac{d\alpha_1}{2\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{2\pi} \dots \frac{d\alpha_{i-1}}{2\pi} (\delta^2 + l_{i+1}^2) \\ &= M_i (\delta^2 + l_{i+1}^2) \\ &= M_i (\delta^2) + M_i (l_{i+1}^2) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_i^2 + l_{i+1}^2, \end{aligned}$$

c. d. d.

Logo,

$$M_n(d^2) = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2.$$

Se os lados forem todos iguais e representarmos o perímetro por  $L$ , será

$$M_n = n l_1^2 = \frac{L^2}{n}.$$

Daqui resulta, para  $n = \infty$ , que

*O valor provável do quadrado da distância que separa os pontos extremos duma curva flexível, lançada á sorte sôbre um plano, é nulo, qualquer que seja o comprimento da curva, logo que seja finito.*

### Proposição XI

A esperança matemática pode, às vezes, calcular-se sem a determinação prévia das parcelas que a constituem ou sem a determinação da lei da probabilidade. Determina-se a soma duma só vez. Vamos dar disso um exemplo curioso servindo-nos do problema da agulha. Como vimos na nota da página 64, dividindo a agulha em partes iguais, cada parte ficava com probabilidades iguais. Se as partes em vez de se conservarem topo a topo, e sôbre a mesma recta, tomarem outra posição relativa, a sua probabilidade ainda será a mesma, como fácilmente se pode vêr; se essas partes, em vez de se conservarem invariavelmente ligadas, formarem um sistema articulado, a probabilidade de cada parte a mesma será ainda, como resulta da defi-

nição de lançamento, à sorte, duma figura de forma variável.

Suponhamos, agora, que a cada encontro de qualquer lado do sistema que estamos considerando com uma das paralelas, fazemos corresponder um mesmo número, a unidade. A esperança matemática de cada parte será igual à sua probabilidade. A soma de todas estas esperanças, será proporcional ao número dessas partes que supomos de igual comprimento e, por isso, proporcional ao perímetro do sistema. Isto qualquer que seja o sistema, rígido ou articulado, qualquer que seja o comprimento dos seus lados. Passando para o limite, podemos ainda dizer que o integral das esperanças elementares duma curva flexível ou rígida é proporcional ao seu comprimento :

$$E(l) = Kl,$$

sendo  $K$  independente da forma, natureza e perímetro da figura considerada.

Para determinar  $K$ , consideremos uma circunferência de diâmetro igual à distância de duas paralelas consecutivas.

Lançando, à sorte, esta circunferência sôbre o plano das paralelas, ela encontrará sempre uma paralela e uma só, em dois pontos; logo

$$E(\pi a) = K \pi a = 2$$

e

$$K = \frac{2}{\pi a}.$$

O valor achado para  $K$  dá-nos

$$E(l) = \frac{2l}{\pi a}.$$

Este valor coincide com a probabilidade de encontro achado, no problema da agulha, para o caso de  $l < a$ . E assim deve ser, porque, caso  $l < a$ , a agulha só pode ter um encontro ou nenhum e por isso a sua esperança matemática coincidirá com a probabilidade. Podíamos aproveitar este facto para resolver o problema da agulha neste caso.

\*

Se as rectas paralelas fossem substituídas por círculos concêntricos e equidistantes, a esperança matemática seria a mesma, mas nada podíamos concluir acerca da probabilidade do encontro dum segmento rectilíneo com as circunferências desses círculos.

### Proposição XII

Consideremos um fenómeno de duas modalidades e sejam  $p$  e  $q$  as suas respectivas probabilidades; à modalidade de probabilidade  $p$  façamos corresponder o número  $a$  e à modalidade  $q$ , o número  $b$ .

O valor médio da função assim construída, será

$$M = ap + bq.$$

Provoquemos o fenómeno em questão um grande nú-

mero de vezes e suponhamos que a modalidade  $p$  se repete  $(p)$  vezes e a modalidade  $q$ ,  $(q)$  vezes.

Seja

$$M' = \frac{(p)a + (q)b}{(p) + (q)}$$

a média aritmética dos valores obtidos para a dita função.

Consideremos a expressão

$$\begin{aligned} |M - M'| &= \left| ap + bq - \frac{a(p) + b(q)}{(p) + (q)} \right| \\ &< |a| \cdot \left| p - \frac{(p)}{(p) + (q)} \right| + |b| \cdot \left| q - \frac{(q)}{(p) + (q)} \right|; \end{aligned}$$

ela tende para zero, à medida que  $(p) + (q)$  aumenta, ou melhor, a probabilidade de que  $|M - M'|$  se mantenha inferior a  $\varepsilon$ , por menor que  $\varepsilon$  seja, tendera para zero, à medida que  $(p) + (q)$  tenda para o infinito (3.º teorema de BERNOULLI).

\*

O que acaba de dizer-se dêsse fenómeno de duas modalidades diz-se dum fenómeno dum número qualquer de modalidades.

\*

O que se disse do valor médio, diz-se igualmente da esperança matemática de qualquer classe. Daí a seguinte proposição:

*A esperança matemática duma classe finita de elementos*



*numéricos, isto é, de elementos a que se fazem corresponder números, é igual ao limite da soma dos números dessa classe, obtidos numa série de experiências, dividida pelo número total de experiências, quando este último número tende para o infinito.*

É a esta proposição que a esperança matemática deve toda a sua importância.

No caso da classe considerada coincidir com a *classe possível*, a *esperança matemática* confunde-se com o *valor médio* e a proposição antecedente transforma-se nesta outra :

*O valor médio duma função susceptível de passar por um numero finito de valores, é igual ao limite da média aritmética dos valores achados para a função, numa série de experiências cujo numero aumenta indefinidamente.*

Daí toda a importância de que goza a média aritmética nas aplicações do Cálculo das Probabilidades.

\*

As proposições antecedentes podem ainda generalizar-se para uma função variando dum modo contínuo, numa dada região.

Generalizemos a proposição para o valor médio que só difere da esperança matemática, na forma.

Seja (A) a região,  $f(M)$  a função,  $P(M)$  a lei da probabilidade.

O valor médio da função será

$$M = \int_{(A)} f(M) \cdot P(M) \cdot d(A).$$

Decomponhamos (A) em  $n$  partes e numeremo-las de 1 a  $n$ . A esperança matemática da região parcial  $(A_i)$ , será

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{(A_i)} f(M) P(M) d(A) \\ &= f(M_i) \int_{(A_i)} P(M) d(A) \\ &= f(M_i) \cdot P_{(A_i)} \end{aligned} \tag{1}$$

visto que  $P(M)$  é uma função sempre positiva e portanto podemos aplicar o 1.º teorema da média; em (1),  $f(M_i)$  representará, portanto, o valor de  $f(M)$  num ponto de  $(A_i)$  e  $P_{(A_i)}$  a probabilidade da região  $(A_i)$ .

Por outro lado, teremos que

$$M = \Sigma E_i = \Sigma f(M_i) P_{(A_i)}.$$

Suponhamos agora que grupamos os valores obtidos para a função  $f(M)$  em classes correspondentes às regiões parciais  $(A_i)$  e, dentro de cada uma dessas regiões  $(A_i)$ , substituamos  $f(M)$  por  $f(M_i) + \varepsilon_i$  onde  $\varepsilon_i$ , em virtude da suposta continuidade de  $f(M)$ , será infinitamente pequeno em relação a  $f(M_i)$  e, portanto, tenderá para zero, à medida que  $(A_i)$  tenda para zero.

Consideremos a média dos valores de  $f(M)$  decomposta em duas parcelas, a primeira correspondente aos valores  $f(M_i)$  e a segunda correspondente aos valores de  $\varepsilon_i$ . Quando o número de experiências aumente indefinidamente, a primeira parcela tende (prop. antecedente) para  $\Sigma f(M_i) P_{(\lambda_i)}$  e portanto para  $M$ , qualquer que seja o modo da divisão de (A); a segunda parcela tenderá para um número cujo valor absoluto é inferior a outro número positivo, tão pequeno quanto se queira, visto que nós podemos fazer a divisão de (A) em partes tão pequenas quanto queiramos.

A segunda parcela tenderá, pois, para zero.

O limite da média dos valores de  $f(M)$  existirá, portanto, e será igual ao *valor médio* ou *provável* de  $f(M)$ ,

c. d. d.

\*  
\*   \*  
\*

Como vimos no capítulo precedente, a probabilidade de que o afastamento relativo  $\lambda$ , se mantenha, em valor absoluto, inferior a  $\lambda$  é dada por

$$\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda$$

A lei de probabilidade da variável  $\lambda$  será, pois,

$$P(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2}.$$

O valor médio de  $\lambda$ , será

$$M(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \lambda \, d\lambda = 0;$$

o valor médio de  $|\lambda|$ , será

$$\begin{aligned} M(|\lambda|) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} |\lambda| \, d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} 2e^{-\lambda^2} \lambda \, d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ -e^{-\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

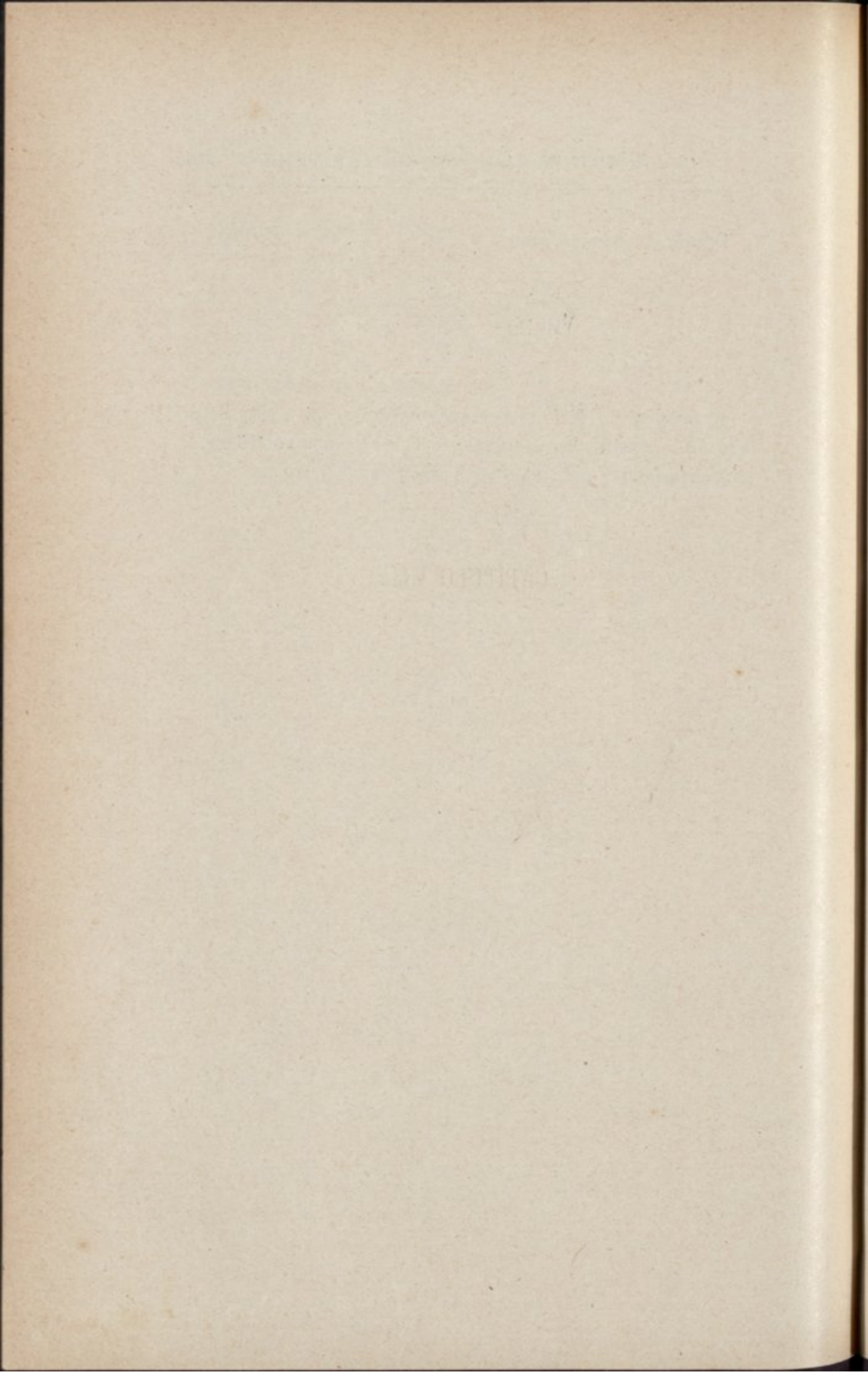
o valor médio de  $(\lambda^2)$ , será

$$\begin{aligned} M(\lambda^2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \lambda^2 \, d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda^2} 2\lambda \, d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ -\lambda e^{-\lambda^2} + \int e^{-\lambda^2} d\lambda \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donde se conclue que

$$\frac{M(\lambda^2)}{[M(|\lambda|)]^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{2}.$$

A proposição XII do presente capítulo, dá a esta relação uma significação notável: a de podermos rectificar a circunferência, por meio de lançamentos à sorte.



CAPÍTULO VII





## CAPÍTULO VII

Nos capítulos precedentes vimos o que se entende por probabilidade dum fenómeno que pode identificar-se com uma tiragem feita, à sorte, numa classe finita de elementos, ou com um lançamento, feito à sorte, numa região, no caso de sermos nós mesmos os agentes dessa tiragem ou lançamento e a classe ou região serem por nós conhecidas qualitativa e quantitativamente. Vimos também como reduzir qualquer conjunto de tiragens ou lançamentos, a uma só tiragem ou lançamento, feitos numa classe ou região.

Vejamos agora como, servindo-nos dos princípios neles estabelecidos, poderemos alargar o campo de acção desta sciência.

Mas, para mais fácil e claramente fazermos esse estudo, principiemos por fazer uma classificação dos factos que pretendemos estudar.

Para isso admitiremos que, seres a nós semelhantes e agentes doutra natureza, podem, *em certas circunstâncias*, fazer tiragens análogas às tiragens (ou lançamentos) feitas, à sorte, por nós mesmos. Depois justificaremos e esclareceremos esta hipótese.

Admitida ela, devidiremos os fenómenos que cahem debaixo da alçada desta sciência, em três grupos. No pri-

meiro grupo, ficarão os fenómenos que podem identificar-se com lançamentos ou tiragens, feitas à sorte, por nós mesmos; no segundo, os fenómenos análogos a tiragens ou lançamentos, feitos por um ser semelhante a nós; no terceiro, os fenómenos análogos a lançamentos ou tiragens feitas por agentes doutra natureza.

Cada um destes grupos, devidi-lo-hemos em dois sub-grupos. No 1.º desses sub-grupos, ficarão os fenómenos dos quais se considera um número finito de modalidades; no 2.º, os fenómenos dos quais se considera um conjunto de modalidades formando um *contínuo*.

Em cada um destes sub-grupos consideraremos, ainda, três casos. Assim, no 1.º sub-grupo de cada grupo, podemos conhecer o fenómeno qualitativa e quantitativamente (1.º caso); conhecê-lo qualitativamente e desconhecê-lo quantitativamente (2.º caso); ou desconhecê-lo qualitativa e quantitativamente (3.º caso).

No 2.º sub-grupo de cada grupo, podemos conhecer a lei de probabilidade do fenómeno e o seu campo de existência (1.º caso); conhecer o campo de existência, mas desconhecer a lei (2.º caso); desconhecer a lei e o seu campo de existência (3.º caso).

A primeira divisão tem por critério a natureza do agente da tiragem ou lançamento; a segunda, a natureza do fenómeno; a terceira o nosso grau de conhecimento.

Como vimos na Introdução a estes *Elementos*, nós supunhamos conhecido todo o fenómeno que podia indetificar-se com uma tiragem (ou lançamento) feita, à sorte, por nós mesmos, numa classe (ou região) conhecida qualitativa e quantitativamente. É esse o nosso *fenómeno padrão*, o nosso *facto elementar*. Todo o fenómeno, para

que possa fazer parte do estudo desta ciência, deve poder reduzir-se a este.

Principiaremos essa redução pelo

### 1.º Grupo

que, como já vimos, é caracterizado por nele, as tiragens ou lançamentos serem feitos, à sorte, por nós mesmos.

Neste grupo, vimos, também, haver dois sub-grupos, sendo o

#### 1.º SUB-GRUPO

constituído pelos fenómenos nos quais consideravamos um número finito de modalidades, isto é, por fenómenos análogos a tiragens feitas em classes finitas e descontínuas, ou a lançamentos feitos em regiões, divididas num número finito de partes.

O

#### 1.º caso

dêste sub-grupo foi já estudado nos capítulos I, II e III dos presentes *Elementos*. É nele que está incluído o fenómeno padrão e é, portanto, a ele que teremos de reduzir o

#### 2.º caso

que passamos a estudar e, em seguida o 3.º. Este 2.º caso é caracterizado por as tiragens serem feitas em classes conhecidas qualitativamente e desconhecidas quantitativamente.

Reduzir o 2.º caso ao 1.º, será, pois, determinar quantitativamente a classe em que as tiragens são feitas.

Essa determinação poder-se-há fazer com uma *probabi-*

lidade <sup>(1)</sup> e aproximação tão grandes quanto se queira, logo que possamos fazer tantas tiragens quantas quizermos (3.º teorema de J. BERNOULLI).

A determinação será, pois, *aproximada e provável*. Mas a probabilidade de que a aproximação dê lugar a um erro, em valôr absoluto, inferior a  $\varepsilon$ , por mais pequeno que  $\varepsilon$  seja, diferirá de *um* tão pouco quanto quizermos. Este 2.º caso, fica, pois, separado do 1.º, pelo mesmo hiato que separa a *probabilidade* da *certeza* <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Com «uma probabilidade tão grande quanto se queira» deve entender-se — uma probabilidade tão próxima de *um* quanto se queira.

<sup>(2)</sup> A *certeza* é, para nós, a *probabilidade* de tirar uma bola branca duma urna que só contêm bolas dessa côr. Para LAPLACE havia uma *diferença essencial* entre *probabilidade* e *certeza*: «Quand tous les cas sont favorables à un évènement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite source d'erreur» (LAPLACE, *Essai Philosophique sur Les probabilités*). Para JACOB BERNOULLI, essa *diferença essencial* não existia: «Certitudo rerum, spectata in ordine ad nós, non omnium eadem est, sed multipliciter variat secundum majis et minus. Illa de quibus revelatione, ratione, sensu, experientia, ἀνοψία aut aliter ita constat, ut de eorum existentia vel futuritione nullo modo dubitare possimus, summa et absoluta certitudine gaudent. Caetera omnia imperfectiorum ejus mensuram in mentibus nostris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores sunt probabilitates, quae suadent rem aliquam esse, fore aut fuisse».

*Probabilitas* enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pàrs à toto (J. BERNOULLI, *Ars Conjectandi*, Pars Quarta, C. I).

A identificação não poderá deixar de ser *provável*, mas à falta de melhor, aceitá-la-hemos, visto que o conhecimento duma probabilidade representa, para nós, alguma coisa de útil.

Na avaliação da probabilidade das coisas «reside toda a ciência dos filósofos e toda a prudência dos políticos» (... *in quo solo omnis Philosophi sapientia et Politici prudentia versatur*) (1).

A identificação do

### 3.º caso

com o 1.º, faz-se do mesmo modo; os elementos a determinar são, agora, dois, em vez de um. Mas o processo da sua determinação é ainda o mesmo do caso antecedente.

Consideremos, agora, o

## 2.º SUB-GRUPO

que, como vimos era constituído por fenómenos dos quais se considerava um número infinito de modalidades, formando um *contínuo* que nós suporemos de *segunda espécie*, na terminologia de H. POINCARÉ (2). Suporemos, pois, que a cada modalidade do fenómeno em questão, fazemos corresponder um ponto do espaço (a um número conveniente de dimensões). O

### 1.º caso

deste sub-grupo, que é caracterizado por nele se supôr conhecida a lei de probabilidade e o seu campo de exis-

(1) JACOB BERNOULLI, *Ars Conjectandi*, pars quarta, cap. II.

(2) H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, chap. II.

tência, foi já estudado nos capítulos II, III e IV. Passemos, portanto, para o

2.º caso

no qual se supõe conhecido o campo de existência da lei de probabilidade, sendo, porém, essa lei desconhecida. A redução deste grupo ao antecedente, consiste na determinação dessa lei.

Quando fazemos uma série de lançamentos, à sorte, numa região e observamos os pontos directamente lançados, a razão do número de pontos que caem dentro duma parte dessa região para o número de pontos que caem dentro doutra de igual extensão, tende para unidade, à medida que o número de pontos lançados aumenta (3.º teorema de BERNOULLI). Isto é, à medida que o número de lançamentos aumenta, a distribuição dos pontos lançados tende a tornar-se uniforme.

Já se não dá o mesmo se, em vez de observarmos o ponto lançado directamente, à sorte, observarmos uma sua imagem ou projecção. Neste caso, ainda em virtude do mesmo teorema de BERNOULLI, a distribuição far-se-há de harmonia com a correspondente *lei de probabilidade*. Os pontos observados condensar-se-hão nas vizinhanças dos *máximos* dessa lei. Conhecendo a lei de probabilidade podemos, pois, *prevêr* a distribuição das imagens ou projecções dos pontos lançados à sorte, com uma probabilidade que aumenta com o número de pontos a abservar.

Recíprocamente, nós poderemos, observando um grande número de lançamentos, determinar a lei de probabilidade do ponto observado, com uma probabilidade tão grande quanto se queira; ou antes, podemos determinar o valôr

do integral dessa função desconhecida, estendido a qualquer segmento da região considerada (3.º teorema de BERNOULLI).

Este facto fornece-nos dois métodos para a determinação da lei desconhecida.

## 1.º

Pode dar-se que, razões inerentes à natureza do fenómeno a estudar, nos justifiquem a adopção, *à priori*, duma lei de probabilidade, como, por exemplo, acontece com os erros de observação. Neste caso, faremos um grande número de séries de lançamentos, sendo cada série formada por um número de lançamentos suficientemente grande, para que seja deminuta a probabilidade de que a sua distribuição se não harmonize com a distribuição prevista pela lei admitida *à priori*, se essa lei fôr a verdadeira.

A razão do número de séries que se harmonizarem com a lei admitida, para o número total de séries, dar-nos-há um número a que (como já vimos no 2.º caso do 1.º grupo) poderemos chamar probabilidade dessa lei. Se julgarmos essa probabilidade suficiente, a lei será admitida; se não, será rejeitada.

O

## 2.º

método consiste no seguinte: divide-se a região em que varia o ponto observado, região esta que se supõe conhecida, num número de partes suficientemente <sup>(1)</sup> grande.

Faz-se, em seguida, um número suficientemente grande de lançamentos à sorte. A razão do número de pontos

---

(1) O número de partes e o número de lançamentos a fazer, dependerá do rigôr de que precisarmos nos resultados.

observados em cada uma dessas partes, para o número total de lançamentos, dár-nos-hã, com uma aproximação e probabilidade que podemos tornar tão grandes quanto queiramos, o integral da função desconhecida, ao longo de cada uma dessas regiões parciais.

Dividindo cada número achado, pela grandeza da região correspondente, obtemos outros tantos valôres da função procurada. Mas isto não basta para determinar a lei.

Hã uma infinidade de funções que, integradas ao longo das regiões consideradas, dão números iguais aos antecedentes. Como escolher uma, dentre tantas?

Todas as funções cujos integrais sejam iguais aos números achados, são igualmente bôas visto que se harmonizam igualmente com o 3.<sup>o</sup> teorema de BERNOULLI. Escolheremos, à falta de razão mais forte, aquela que mais bem se preste às aplicações que lhe quizermos dar, isto é, a mais simples, para o fim que tenhamos em vista.

Como no sub-grupo antecedente, o

### *3.<sup>o</sup> caso*

reduz-se ao 2.<sup>o</sup>. Os pontos observados distribuir-se-hão numa região de contôrno absolutamente arbitrário.

Podemos, mesmo, supôr que o campo de existência da lei é ilimitado em todos os sentidos; a determinação da lei nos diz depois quais as partes dessa região de probabilidade nula; isto é, a própria lei limitará o seu campo de existência.

Do mesmo modo, no 3.<sup>o</sup> caso do 1.<sup>o</sup> sub-grupo, nós podíamos supôr que o fenómeno era qualitativamente indeterminado; a determinação quantitativa da classe nos diria depois quais as modalidades de probabilidade nula.



Debaixo deste ponto de vista, estes dois últimos casos não são distintos um do outro. Convêm, porém, distingui-los, para facilitar a exposição.

### Nota

No que acabamos de dizer, nós supomos, implicitamente que as classes (ou regiões) em que as tiragens são feitas, se mantem qualitativa e quantitativamente invariáveis. De contrário, nada podia fazer-se. A não ser que a variação se fizesse duma maneira lenta e regular e fôsse possível determinar a lei de variação, de modo a poder fazer as devidas *correções*.

Passemos agora para o

### 2.º Grupo

de fenómenos e justifiquemos, em primeiro lugar, a hipótese em que apoiamos a sua construção, ou antes, expliquemos o que queremos dizer com ela.

A proposição *tirar, à sorte, um elemento duma classe*, tem para nós um sentido quando nós somos os agentes da tiragem.

Mas quando o agente da tiragem seja um ser semelhante a nós, essa proposição não tem, para nós, sentido, ou antes, não tem, para nós, um sentido diferente do da proposição *tirar um elemento duma classe*. Casos haverá, porém, em que seja legítimo dar a esta proposição o mesmo sentido da primeira.

Com efeito, em que condições devemos nós de fazer uma tiragem, para que a possamos dizer *feita, à sorte*?

Em primeiro lugar, devemos desconhecer, por completo,

a distribuição dos elementos na classe em que a tiragem é feita.

Em segundo lugar, devemos fazer a tiragem de modo que não possamos *prevêr* o elemento que vai sair, nem tão pouco a sua qualidade, não podendo essa *previsão* ser feita *por nós*, nem por nenhum *ser semelhante a nós*.

Ora, todas as vezes que as tiragens sejam feitas nestas circunstâncias, por um ser semelhante a nós, nada se opõe, *à priori*, a que façamos a hipótese de que as tiragens darão os mesmos resultados que dariam se elas fôsem feitas por nós mesmos.

Assim, dada uma urna, contendo nove décimos de bolas brancas para um décimo de bolas pretas, nós apostaríamos que sairia uma bola branca, numa tiragem feita, à sorte, se nós mesmos fôssemos os agentes da tiragem. E continuaríamos a apostar na mesma côr, se, o agente da tiragem sendo outrem, ela fôsse feita nas circunstâncias atrás descritas, isto é, se puzéssemos o agente da tiragem em condições de não poder *prevêr* o elemento que ia tirar, nem de poder ter o menor indicio da distribuição das bolas dentro da urna. É na admissão desta hipótese que se fundam todos os jogos de azar e é para a justificação dela que, por exemplo, se baralham as cartas dum baralho, antes de serem dadas e se dá ao verso das mesmas uma aparência idêntica.

Todas as vezes que esta hipótese não possa ser feita, por falta duma ou de ambas as condições, o fenómeno sairá fora do domínio desta sciência.

\*

A hipótese de que esse agente está a fazer tiragens à sorte, deve ser posta de parte, todas as vezes que os resultados se não harmonisem com as leis de BERNOULLI e análogas, porque aqui, como aliás em qualquer sciência, as condições exteriores podem enganar-nos.

Assim o pensava o padre GALIANI, filósofo e economista do século XVIII, como se vê por esta anedota que dele conta BERTRAND:

«Un jour, à Naples, un home de Basilicate, en présence de l'abbé GALIANI, agita trois dés dans un cornet e paria d'amener rafle de 6; il l'amena sur-le-champ. Cette chance est possible, dit-on; l'home réunit une seconde fois, et l'on répéta la même chose; il réunit les dés dans le cornet trois, quatre, cinq fois, et toujours rafle de 6. *Sangue di Bacco*, s'ecria l'abbé, *les dés sont pipés*» (1).

\*

Pelo que acabamos de vêr, os fenómenos do segundo grupo, ou bem se identificam com os do primeiro e nesse caso já estão estudados; ou não se identificam e nesse caso não fazem parte do objecto desta sciência.

\*

No que acabamos de dizer àcêrea dos fenómenos do

---

(1) J. BERTRAND *Calcul des Probabilités*, Préface.

segundo grupo, não nos referimos explicitamente aos fenómenos do segundo sub-grupo, porque a analogia que existe entre a *composição qualitativa* duma classe e o campo de existência da lei de probabilidade, *composição quantitativa* e *forma* da mesma lei, nos dispensa dessa referência.

Consideremos, agora, o

### 3.º Grupo

de fenómenos.

Quando fazemos uma série de tiragens (ou lançamentos), à sorte, os elementos obtidos sucedem-se desordenadamente, isto é, sem obedecerem a nenhuma lei. De contrário, podê-los-hiamos *prever*, o que é incompatível com o que a intuição nos diz das tiragens feitas à sorte, consideradas nos casos já estudados. Ora, quando as modalidades dum qualquer fenómeno se sucedem dum modo desordenado, esse facto desperta, também, em nós, uma vaga noção de *sorte* ou *acaso*.

Poderemos nós reduzir, identificar, esta vaga noção de *acaso*, agora considerada, com a de há pouco? Isto é, poderemos nós determinar *quantitativamente* uma classe, formada *qualitativamente* pelas modalidades do fenómeno em questão, de modo a podermos *supôr* que os fenómenos, produzidos pelas suas causas naturais, se sucedem como se fôsem tirados, à sorte, por nós mesmos, nessa classe? Ou, no caso de conhecermos apenas em parte o número de modalidades do fenómeno (o que podemos *sempre* supôr), poderemos nós determinar qualitativa e quantitativamente a classe correspondente?

Admitiremos que sim.

Como justificar esta hipótese?

Duma só maneira: verificando que as conclusões que dela se tiram, se harmonizam com os factos.

Essas conclusões teem todas, por remate, os teoremas de BERNOULLI e proposições análogas.

A primeira conclusão a verificar, seria a correspondente ao 3.º teorema de BERNOULLI, porque ela nos servia para determinar qualitativa e quantitativamente a classe.

Ora, o 3.º teorema de BERNOULLI diz-nos que: há uma probabilidade *sempre crescente* de que a razão do número de fenómenos observados duma modalidade para o número total de experiências, difira da probabilidade dessa modalidade tão pouco quante se queira. Por outras palavras: se, após cada experiência, dividirmos o número de vezes que obtivemos cada uma das modalidades, pelo número total de experiências, obtemos números que tendem para um limite que é a probabilidade da modalidade correspondente; a probabilidade de que esses números se avizinhem dos respectivos limites, aumenta com o número de experiências.

De modo que, enquanto o número de experiências fôr deminuto, os números obtidos variarão muito irregularmente (visto que a probabilidade de que se avizinhem do limite, é deminuta); mas essa irregularidade irá diminuindo à medida que o número de experiências aumentar.

Se os factos observados se não harmonizarem com o que acabamos de dizer, é porque a hipótese de que partimos não é ligítima, quer porque os fenómenos não sejam identicos a tiragens feitas à sorte, quer porque a classe em que as tiragens são feitas, varie.

Se a verificação se fizer, não só para o 3.º teorema de


BERNOULLI, mas também para as proposições análogas, é porque a hipótese era legítima durante o intervalo de tempo gasto nessa verificação.

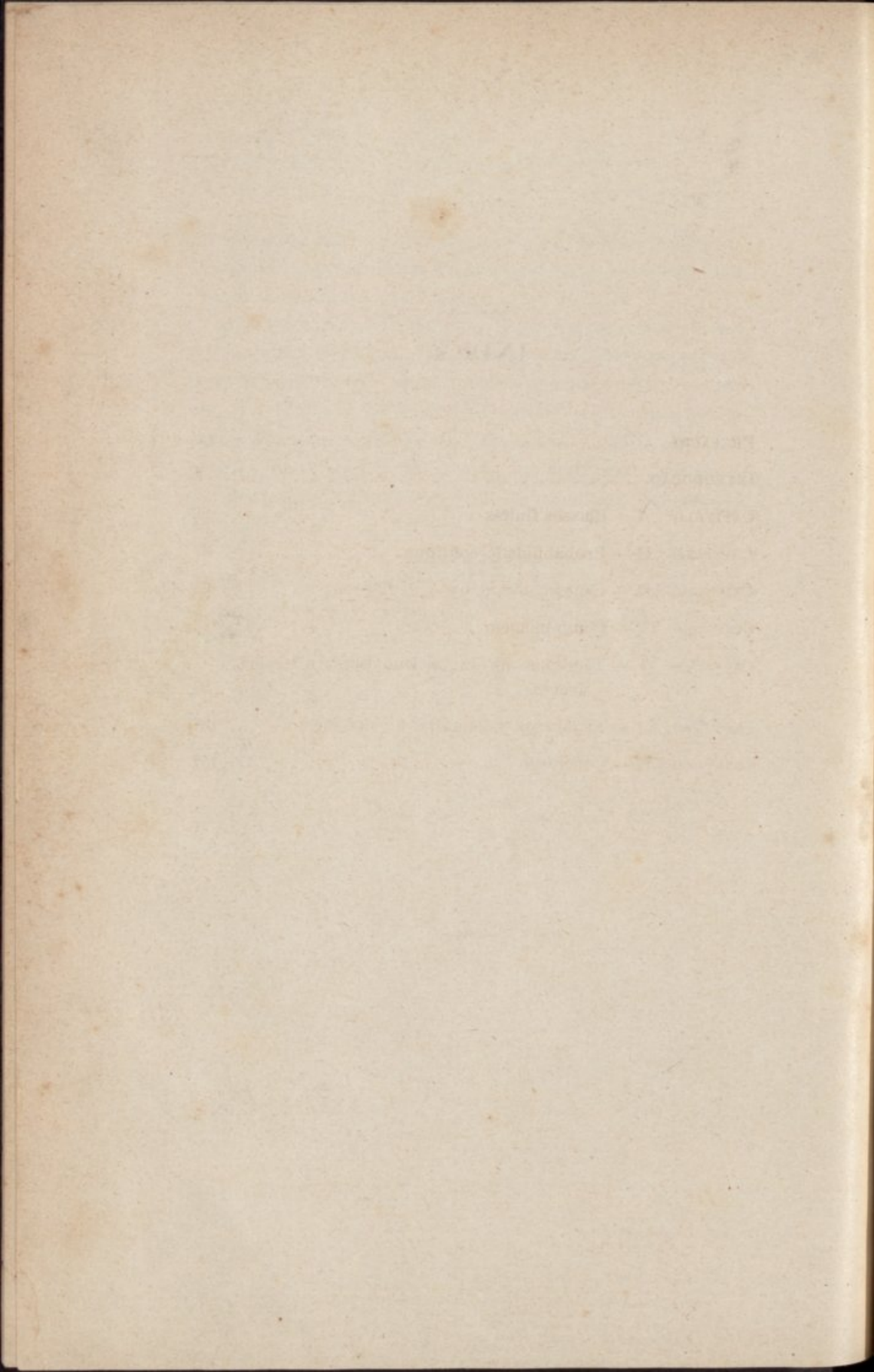
E, enquanto que o meio em que o fenómeno se produz, não variar sensivelmente, nada se opõe a que continuemos a ter a hipótese por aceitável. Se o meio variar, a hipótese ainda pode ser aceitável; mas pode a variação do meio alterar a composição da classe e nesse caso será preciso determiná-la de novo e tantas vezes quantas as precisas para determinar a lei de variação, se essa lei existir.



23 JUN 16

## INDICE



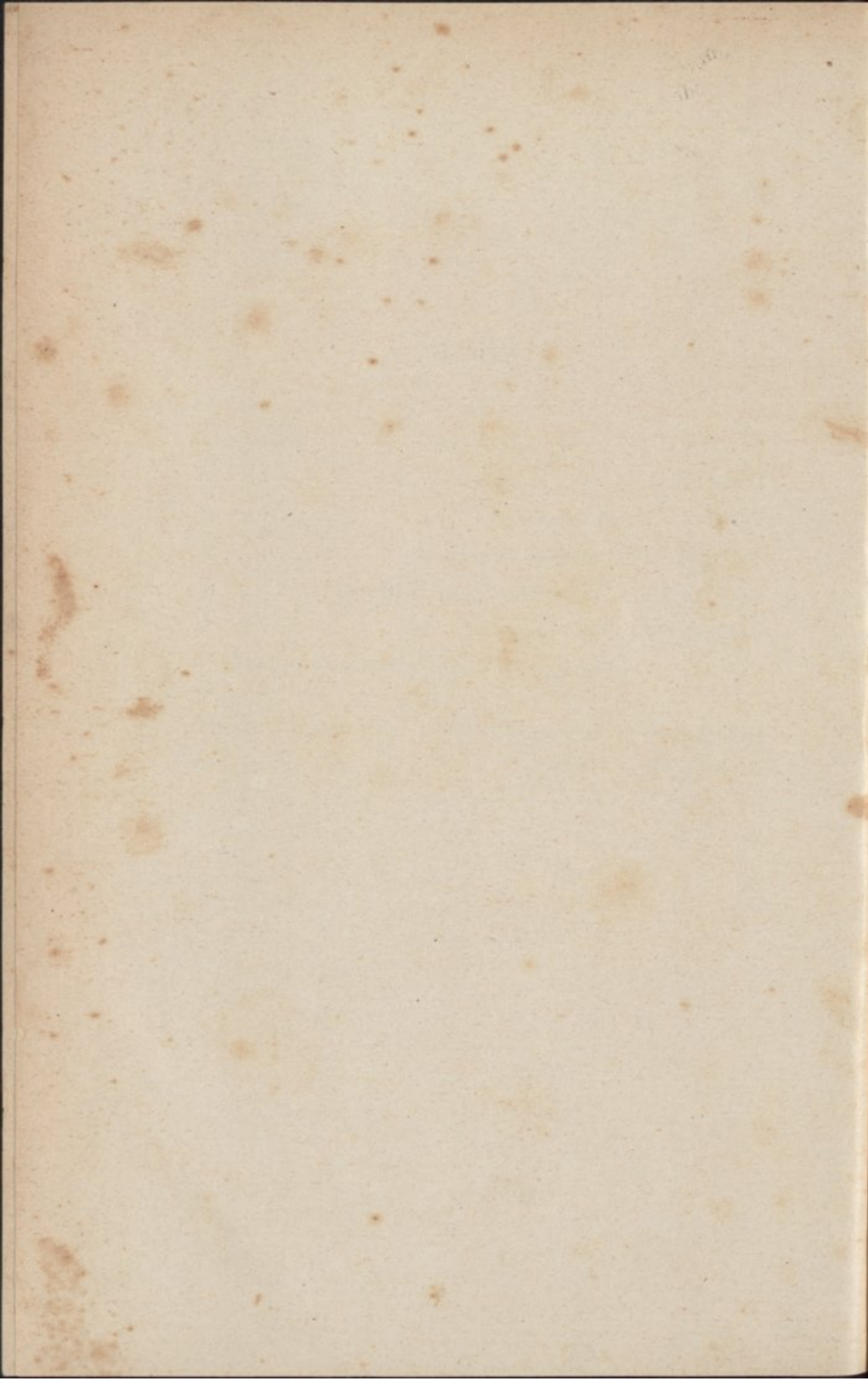


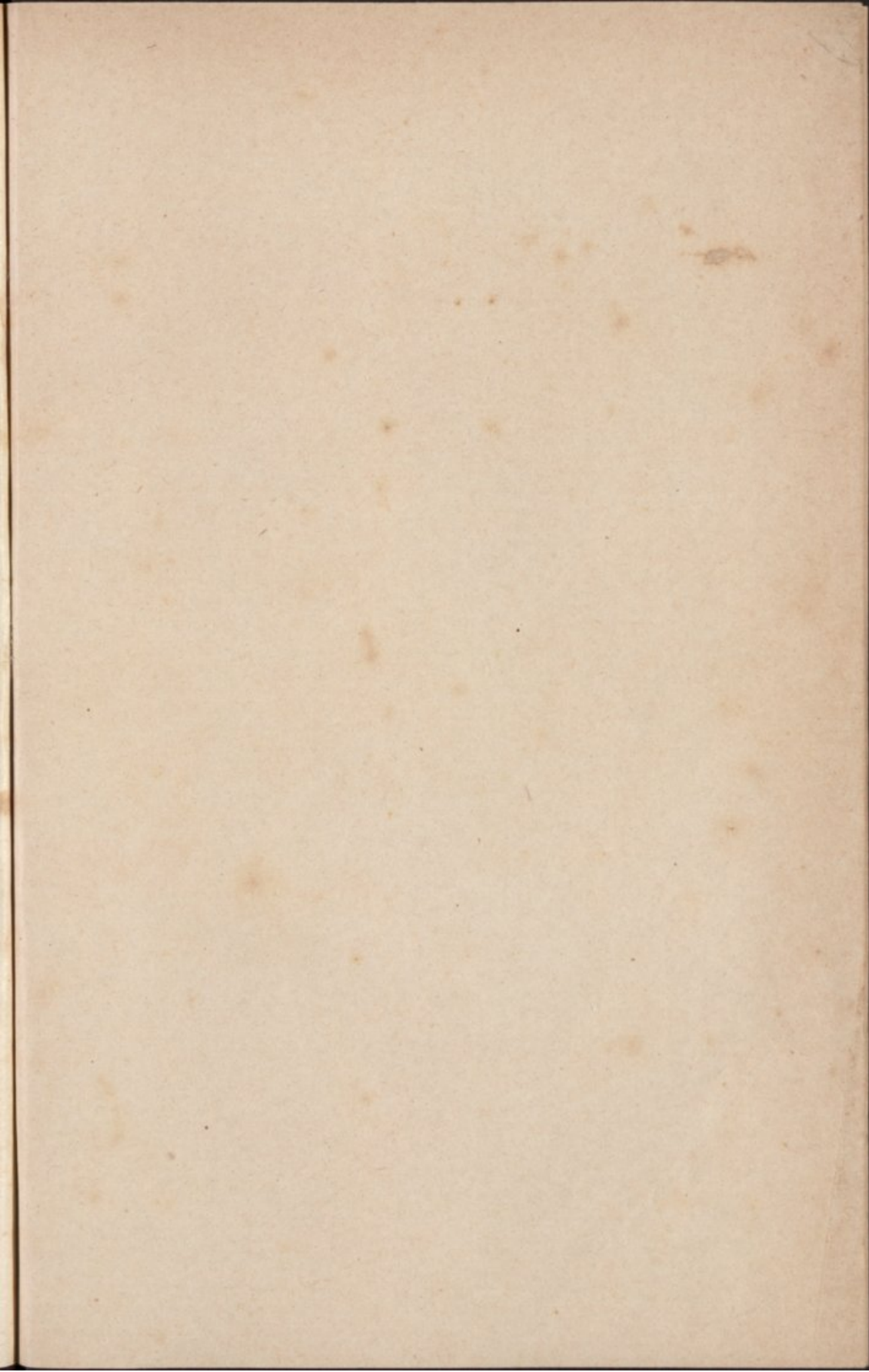


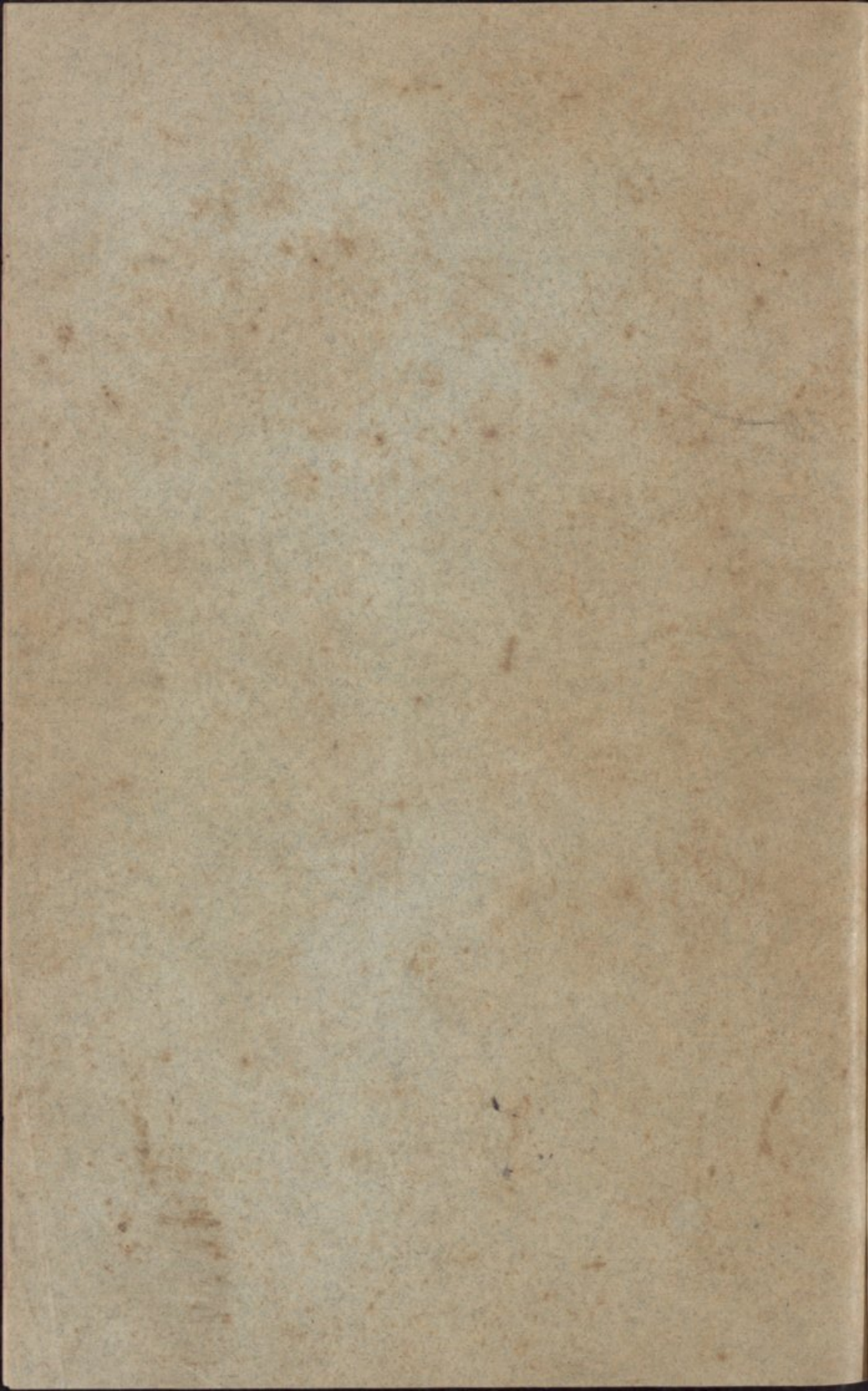
## INDICE

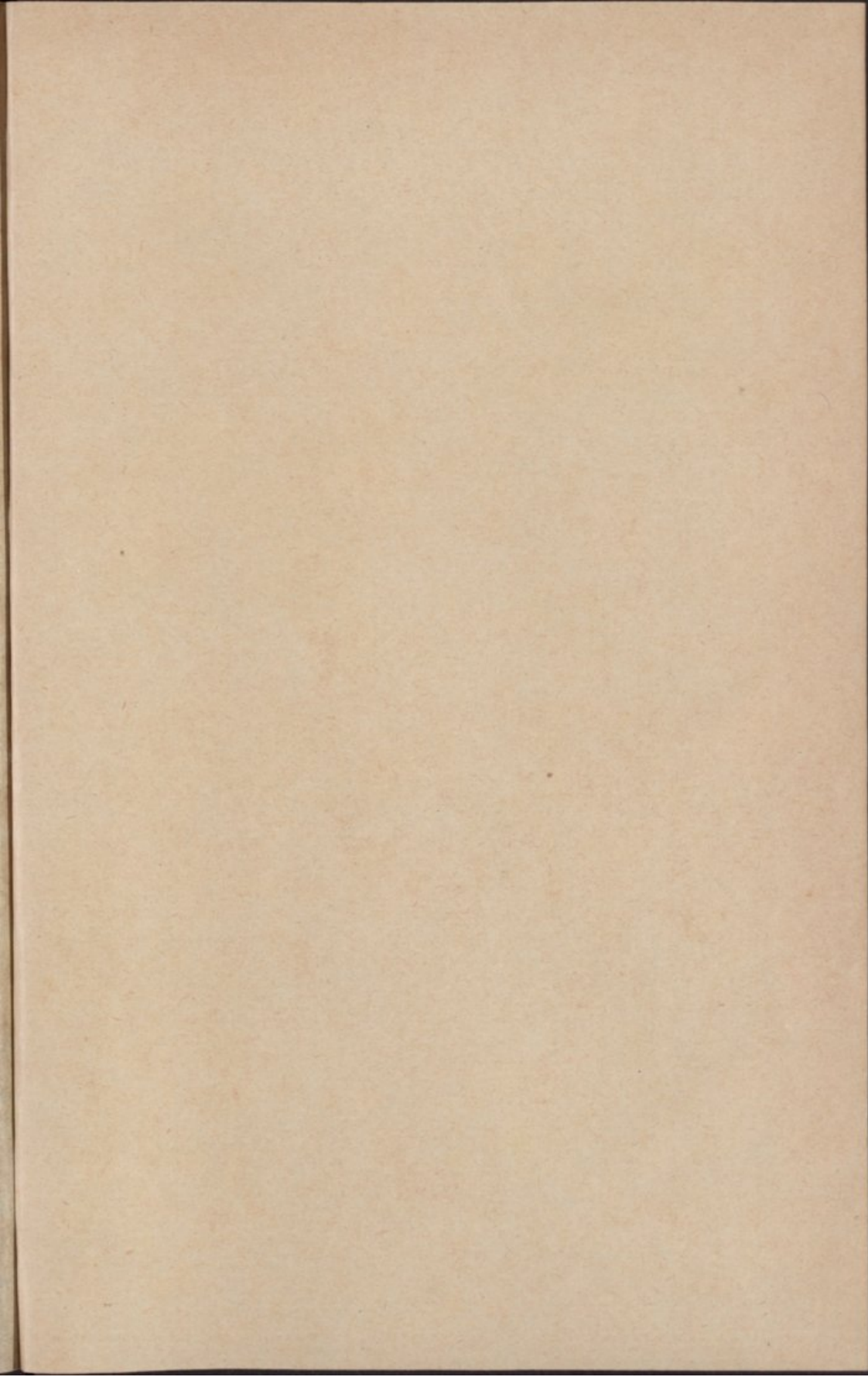
PREFÁCIO . . . . .	IX
INTRODUÇÃO. . . . .	3
CAPÍTULO I — Classes finitas . . . . .	11
CAPÍTULO II — Probabilidade contínua. . . . .	37
CAPÍTULO III — Lançamento, à sorte, de figuras. . . . .	55
CAPÍTULO IV — Ponto imagem . . . . .	73
CAPÍTULO V — Teoremas de JACOB BERNOULLI e lei dos desvios. . . . .	97
CAPÍTULO VI — Esperança matemática e valor médio . . .	137
CAPÍTULO VII — Conclusão . . . . .	159

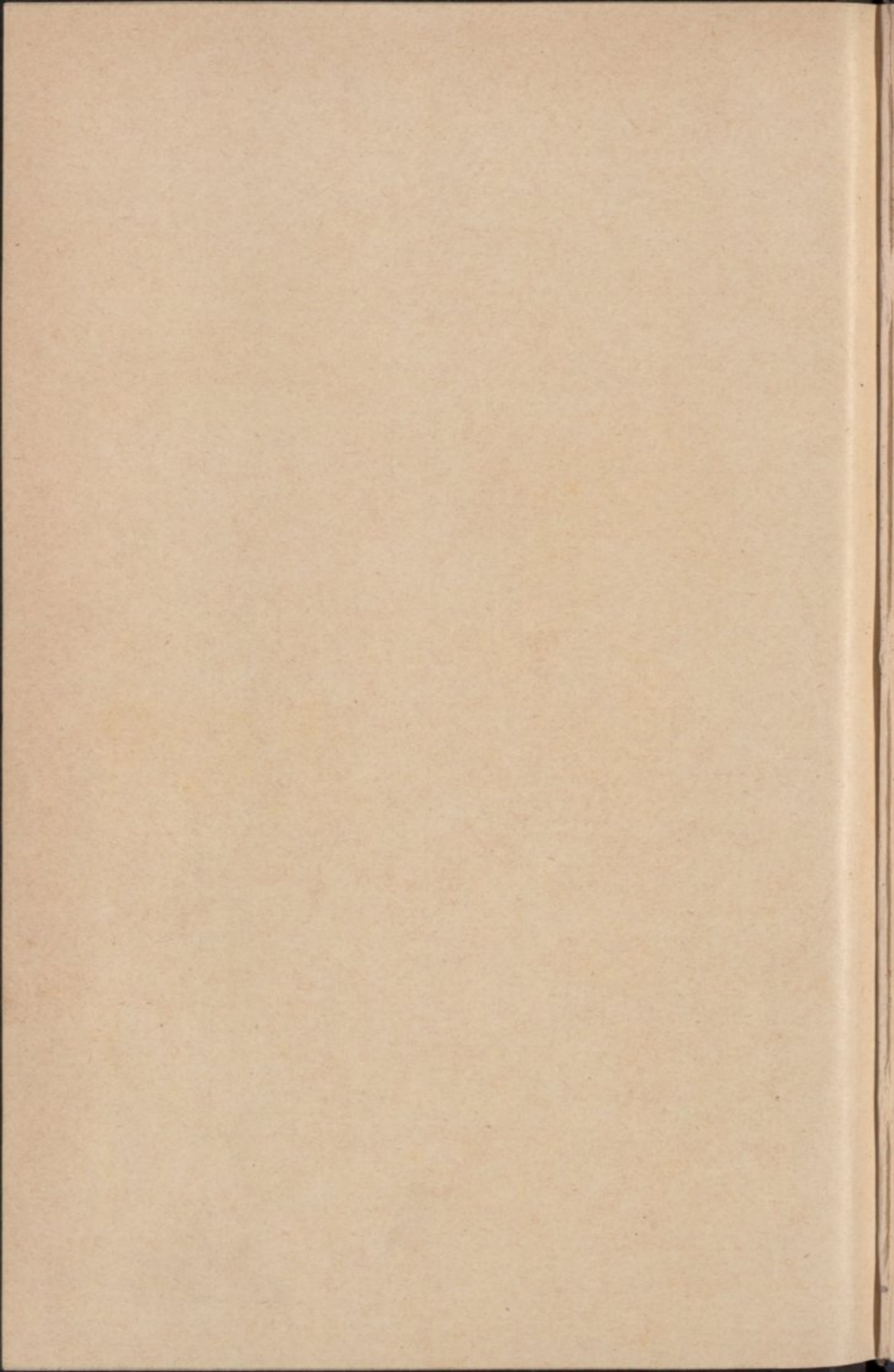


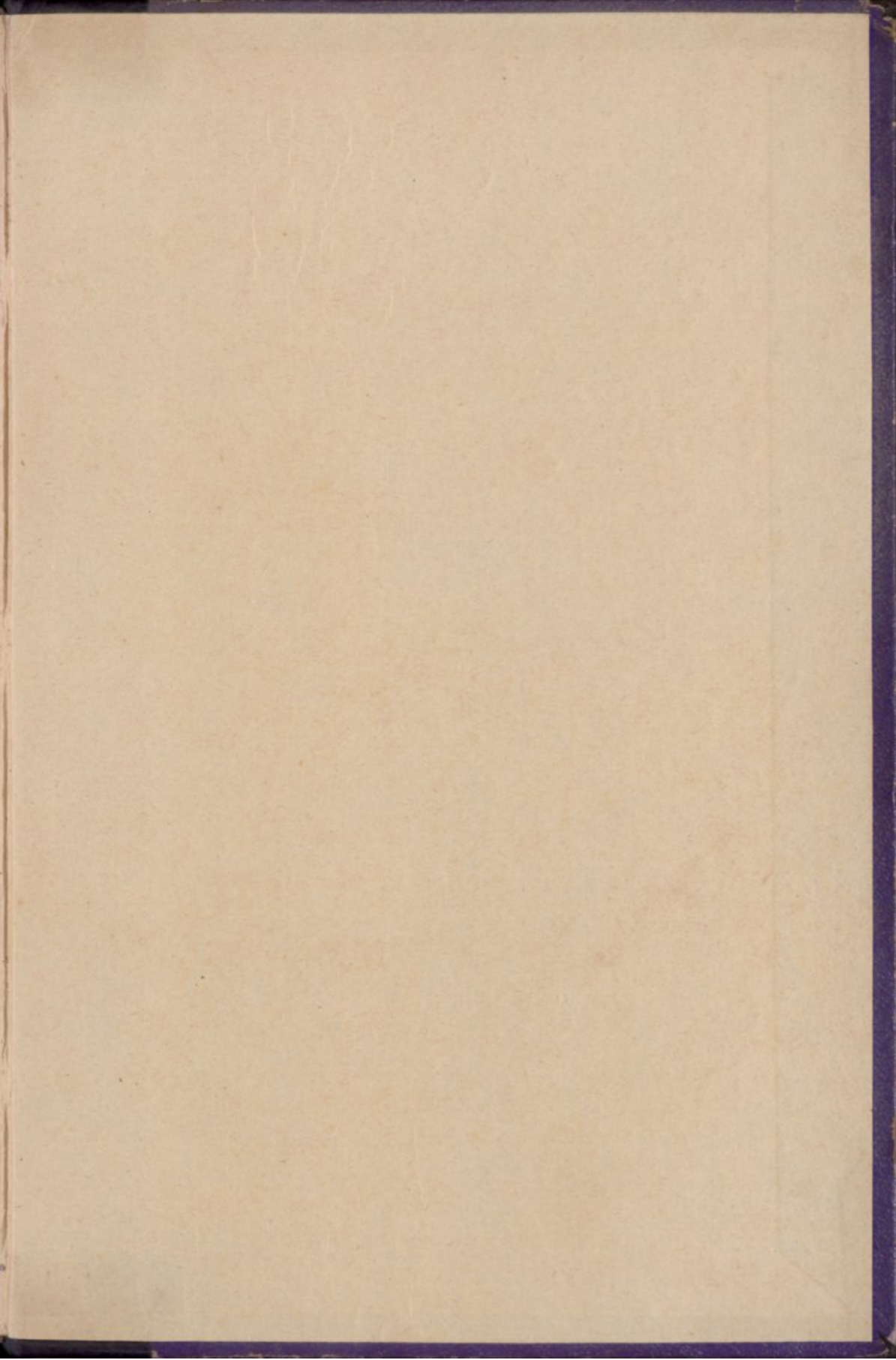


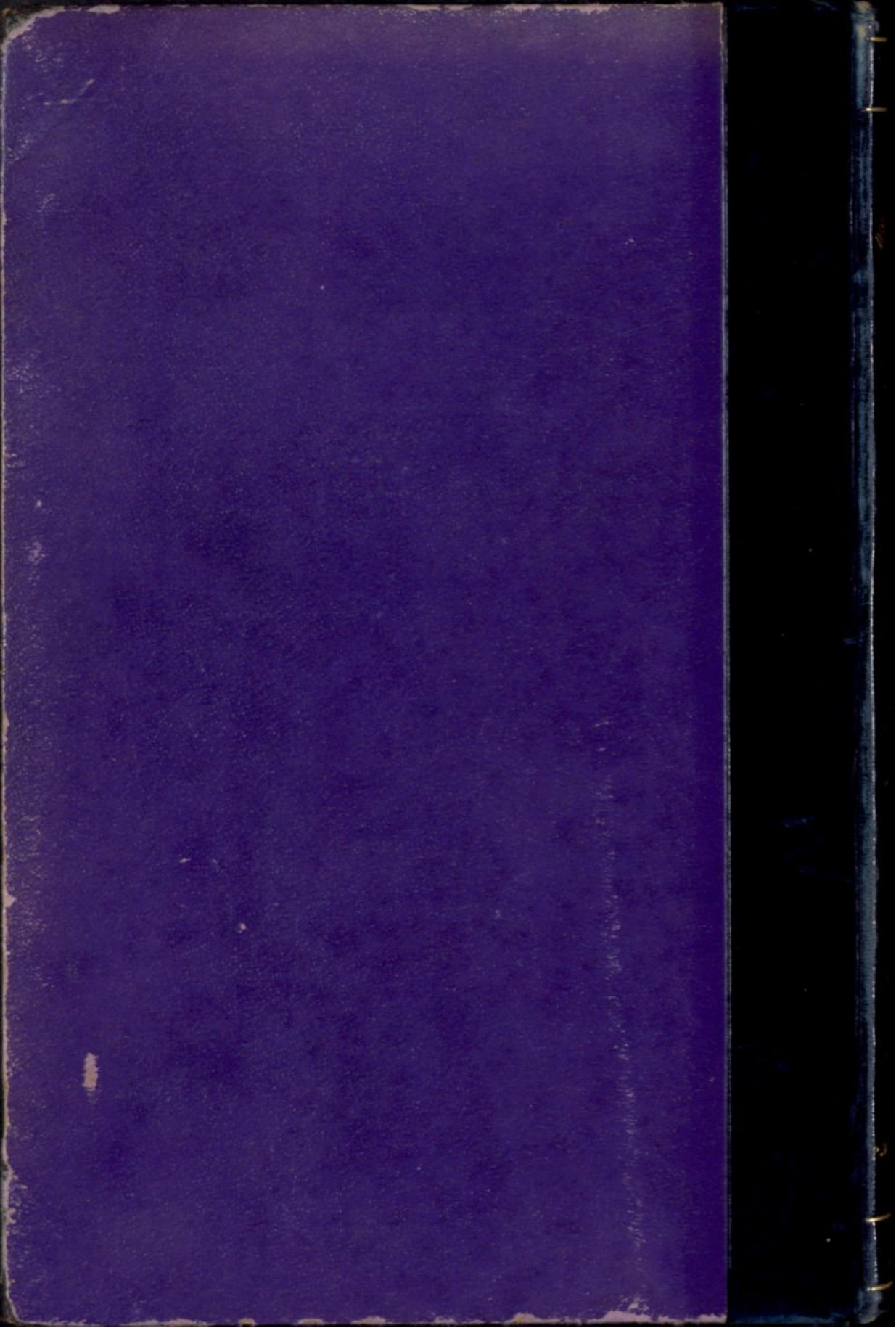














DISSERTAÇÃO

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

D. AMORIM