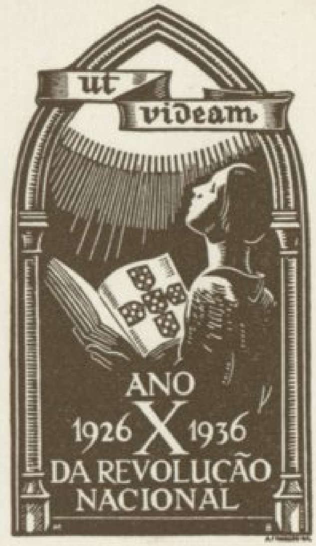
S. LUCAS - DISSERTA
1895


ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

ANTONIO DOS SANTOS LUCAS

TRANSFORMAÇÕES DE CONTACTO

Dissertação Inaugural

PORTO
Typ. de Arthur José de Sousa & Irmão
74 — Largo de S. Domingos — 76

1895

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O

ACTO DE CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

A MEU PAE

E

A' MEMORIA DE MINHA MÃE

Escolhi para objecto da minha dissertação inaugural a importantissima theoria das transformações de contacto.

Esta theoria, posto que seja o resultado de investigações contemporaneas, constitue, no seu conjuncto, um corpo de doutrina muito vasto, com varias applicações analyticas e geometricas, que seria impossivel abranger em um trabalho como este. Por tal motivo me limitei a considerar os seus pontos fundamentaes.

Dividi o assumpto em quatro capitulos:

No primeiro reuni algumas noções e principios auxiliares, de grande applicação nas theorias que desenvolvo nos capitulos seguintes.

O segundo encerra a definição e as propriedades fundamentaes das transformações de contacto, cuja determinação é feita no terceiro capitulo; n'este exponho tambem outras propriedades importantes d'aquellas transformações.

No quarto, finalmente, faço, muito em resumo, applicação das theorias precedentes á integração das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem e ao problema de Pfaff.

Procurei, quanto possivel, usar da maior clareza afim de tornar este trabalho util para as pessoas que queiram pela primeira vez tomar conhecimento d'esta doutrina, e modifiquei algumas demonstrações, já com o fim de as simplificar, já para poder deduzil-as dos principios expostos. Apezar d'isso, muitos defeitos decerto se encontrarão; sirvam-lhe de desculpa o pouco tempo de que dispuz, e a importancia e novidade do assumpto.

Coimbra, outubro de 1895.

CAPITULO I

Resolução de alguns casos particulares da equação de Pfaff — Multiplicidades

---

I

1. — Seja

$$(1) \qquad F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n = 0$$

uma equação differencial total, onde $F_1, \ldots, F_n$ designam funcções das n variaveis $x_1, \ldots, x_n$. Diremos que um systema de equações

$$(2) \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0,$$

que contem as variaveis $x_1, \ldots, x_n$, *satisfaz* á equação (1), ou que esta equação *tem logar* em virtude de (2), se todos os systemas de valores de $x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n$ que satisfazem ás equações

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$
$$d\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_l = 0,$$

verificarem a equação (1).

2

D'esta definição resulta immediatamente que, se um dado systema

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$

satisfizer á equação (1), esta equação é satisfeita por qualquer outro systema

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_l = 0,$$

equivalente áquelle, visto que os dois systemas

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0, d\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_l = 0$$

e

$$\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_l = 0, d\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\psi_l = 0$$

são verificados pelos mesmos valores de $x_1, \ldots, x_n$, $dx_1, \ldots, dx_n$.

2. — É sabido que a equação proposta (1) pode ter logar em virtude de uma equação da forma

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

quando os seus coefficientes $F_1, \ldots, F_n$ satisfazem identicamente ás relações conhecidas

$$\left(\frac{\partial F_p}{\partial x_q} - \frac{\partial F_q}{\partial x_p}\right) F_r + \left(\frac{\partial F_q}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_q}\right) F_p + \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_p} - \frac{\partial F_p}{\partial x_r}\right) F_q = 0$$

$$(p, q, r = 1, 2, \ldots, n).$$

No caso, porém, em que as relações precedentes se não verificam, a referida equação só póde ser satisfeita por systemas de equações.

A determinação d'estes systemas constitue um problema muito complicado, quando a equação (1) se apresenta sob a sua forma mais geral.

Aqui consideraremos apenas alguns casos particulares que, embora muito simples, teem grande importancia no estudo das transformações de contacto.

Em homenagem aos trabalhos de Pfaff sobre a equação (1), dão-lhe alguns geometras o nome de *equação de Pfaff* e ao seu primeiro membro o de *expressão de Pfaff*. Empregaremos estas designações algumas vezes.

3. — Supponhamos que não figuram em (1) as differenciaes de todas as variaveis, isto é, que a equação (1) tem a forma

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} G_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\, dx_i = 0.$$

Vamos demonstrar os seguintes principios:

I. — *Todo o systema de equações da forma*

$$(4) \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$

que satisfaz á equação de Pfaff (3) *e não determina relação alguma entre as variaveis* $x_1, \ldots, x_n$, *contem as equações*

$$G_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad \ldots, \quad G_n = 0.$$

Com effeito, na hypothese que consideramos, é a equação (3) satisfeita por cada systema de valores de $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ que verifica (4), quaesquer que sejam os valores que se deem a $dx_1, \ldots, dx_n$, visto nenhuma relação poder ligar estas differenciaes, isto é, annullam-se os coefficientes $G_1, \ldots, G_n$ de (3) para cada systema de valores de x, y, que satisfaz a (4), o que justifica o theorema enunciado.

II. — *Qualquer systema de equações da forma*

$$(4)\qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$

que satisfaz á equação de Pfaff (3) *e determina um certo numero de relações*

$$(5)\qquad \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0$$

entre as variaveis $x_1, \ldots x_n$, *comprehende as equações que resultam de*

$$(6)\quad \begin{cases} G_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \lambda_1 \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_i}, \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Effectivamente, a equação (3) tem logar, caso o systema (4) lhe satisfaça, para todos os systemas de valores de x, y, dx, dy, que verificam as equações

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0, \; d\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_l = 0,$$

ou, visto que $dy_1, \ldots, dy_m$ não figuram em (3), para todos os systemas de valores de x, y, dx, que satisfazem ás equações

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0, \; d\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\psi_k = 0$$

A cada solução $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ do systema (4) correspondem, pois, k numeros $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, taes que tem logar a expressão

$$(7)\qquad G_1 dx_1 + \ldots + G_n dx_n = \lambda_1 d\psi_1 + \ldots + \lambda_k d\psi_k$$

quaesquer que sejam os valores de $dx_1, \ldots, dx_n$, ou ainda, que são satisfeitas as equações (6), que resultam de egualar os coefficientes de $dx_1, \ldots, dx_n$ nos dois membros de (7), isto é, cada solução do systema (4) satisfaz ás equações provenientes de (6) pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, como queriamos demonstrar.

III. — Reciprocamente, *se k relações quaesquer da forma*

$$(5) \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k = 0$$

forem compativeis com as expressões

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} G_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ designam grandezas convenientemente escolhidas, o systema

$$(8) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k = 0, \quad V_1 = 0, \quad \ldots, \quad V_j = 0$$

no qual $V_1 = 0, \ldots, V_j = 0$ representam as equações que proveem de (6) *pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, satisfaz á equação de Pfaff* (3).

Na verdade, a cada systema de valores das variaveis x, y, que satisfaz ás equações (8), as quaes na nossa hypothese são manifestamente compativeis, correspondem claramente valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, que, conjunctamente com aquelles valores de x, y, verificam as relações (6).

Ora, cada solução x, y, λ das equações (6) satisfaz á relação differencial (7), quaesquer que sejam os valores de $dx_1, \ldots, dx_n$.

Por isso, a equação (3) é verificada por todas as soluções x, y, dx, dy do systema

$$\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \ldots$$

$$d\psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\psi_k = 0, \quad dV_1 = 0, \quad dV_2 = 0, \ldots$$

isto é, aquella equação tem logar em virtude de (8).

4. — Do que fica dicto em o n.º anterior resulta claramente que:

Todo o systema de equações que satisfaz á equação de Pfaff

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} G_i (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\, dx_i = 0,$$

está comprehendido em um dos systemas

$$(9) \qquad G_1 = 0, \quad \ldots, \quad G_n = 0, \ U_1 = 0, \ U_2 = 0, \ldots$$

ou

$$(10) \ \psi_1 = 0, \ldots, \psi_k = 0, V_1 = 0, \ldots, V_j = 0, W_1 = 0, W_2 = 0, \ldots$$

onde $U_1 = 0$, $U_2 = 0, \ldots$ *representam equações quaesquer, que conteem* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, *compativeis entre si e com* $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots,$ *e* $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots$ *equações que estão nas mesmas circumstancias em relação ás expressões* $\psi = 0$, $V = 0$.

Esta proposição indica-nos dois processos para determinar systemas de equações que satisfazem á equação de Pfaff (3).

O processo baseado nas formulas (9) só é applicavel quando ha systemas de valores de x, y, que annullam os coefficientes da equação de que se trata; o que corresponde ás formulas (10) exige, como vimos, a compatibilidade das equações (5) e (6).

5. — As considerações precedentes vão servir-nos para resolver da maneira mais geral as duas equações

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

e

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n = 0,$$

onde $p_1, \ldots, p_n$ designam quantidades variaveis.

Estas equações teem uma grande importancia no estudo das transformações de contacto e na theoria das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem.

6. — Seja dada, em primeiro logar, a equação

$$(11) \qquad dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

O primeiro processo indicado em o n.º 4 não permitte determinar systemas de equações que satisfaçam á equação de que tratamos, visto ter dz n'esta equação por coefficiente a unidade.

Estamos assim reduzidos ao segundo.

Para o applicarmos, consideremos de um modo geral $(k+1)$ relações distinctas

$$(12) \qquad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0,$$

entre as variaveis $z, x_1, \ldots, x_n$.

Estas equações são compativeis com

$$(13) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \psi_{k+1}}{\partial z} = 1 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x_i} = -p_i\,, \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

se forem resoluveis em ordem a z e k das variaveis x, Com effeito, se as equações (12) forem resoluveis em ordem a $z, x_1, \ldots, x_k$, por exemplo, o determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x_k}$$

é differente de zero para todos os systemas de valores de $z, x_1, \ldots, x_n$ que satisfazem a (12) e por isso estas equações, conjunctamente com as $(n-k)$ primeiras de (13), permittem determinar $z, x_1, \ldots, x_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ em funcção das variaveis $x_{k+1}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_k$. Pelas ultimas $(n-k)$ equações (13) podemos em seguida exprimir $p_{k+1}, \ldots, p_n$ nas mesmas variaveis.

As equações (12) e (13) podem assim resolver-se em ordem a $z, x_1, \ldots, x_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}, p_{k+1}, \ldots, p_n$ e são por isso compativeis.

Por outro lado, consideremos um systema

$$(14) \qquad \varphi(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$

que satisfaça á equação (11) e que determine $(k+1)$ relações distinctas

$$(12) \qquad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

entre $z, x_1, \ldots, x_n$.

Estas relações, sendo distinctas, podem resolver-se em ordem a $(k+1)$ das variaveis que ellas encerram.

Vamos ver que z é uma d'estas variaveis.

Na verdade, se as relações $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_{k+1} = 0$ não contiverem z ou contiverem esta variavel apenas *formalmente,* isto é, se forem equivalentes ás expressões

$$L_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad L_{k+1} = 0,$$

e se o systema (14) satisfizer á equação de Pfaff (11), deve esta equação ser satisfeita por todos os systemas de valores de x, y, dx, que verificam

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0, \; dL_1 = 0, \quad \ldots, \quad dL_{k+1} = 0 .$$

Ora, a este ultimo systema satisfazem claramente todas as soluções de (14), conjunctamente com $dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_n = 0$ e dz qualquer.

O mesmo deveria, portanto, acontecer com a equação (11), o que evidentemente não póde ter logar.

As equações (12) são, pois, resoluveis em ordem a z e k das variaveis x, caso resultem de um systema que satisfaça á equação (11).

Do que precede, resulta que é necessaria e sufficiente a resolubilidade das equações (12) em ordem a z e k das variaveis x, para que de (12) e (13) se deduza, pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, um systema que satisfaça á equação proposta (11). Notando que o systema resultante d'aquella eliminação se compõe de $(n+1)$ equações distinctas, podemos, pois, enunciar a seguinte proposição:

Obteem-se todos os systemas de $(n+1)$ equações que satisfazem á equação de Pfaff

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0,$$

eliminando as grandezas $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ de todos os systemas que resultam de

$$(12) \qquad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0,$$

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \quad \ldots \quad + \lambda_{k+1} \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial z} = 1 , \\ &\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \quad \ldots \quad + \lambda_{k+1} \frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x_i} = -p_i, \end{aligned} \right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

quando se faz k successivamente egual a o, 1, . . ., n *e se consideram todas as relações da fórma* (12) *que sejam resoluveis em ordem a z e k das variaveis* $x_1, \ldots, x_n$.

Designando agora por

$$(15) \qquad V_1 = 0, \quad \ldots, \quad V_{n-k} = 0$$

as equações que resultam das ultimas $(n+1)$ equações (13) pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ e attendendo ao n.º 4, podemos concluir que:

Para determinar todos os systemas de mais de $(n+1)$ *equações, que satisfazem á equação proposta* (11), *basta accrescentar a cada um dos obtidos pelo processo anterior relações quaesquer entre as variaveis z, x, p, que sejam compativeis entre si e com as equações* (15) *e* (12) *e que, conjunctamente com* (15), *não determinem relação alguma entre as variaveis* $z, x_1, \ldots, x_n$, *independente de* (12).

7. — Os resultados precedentes pódem ser enunciados de outra maneira, tomando as equações (12) sob a fórma

$$(12') \quad z - w(x_{\alpha_{k+1}}, \ldots, x_{\alpha_n}) = 0, \; x_{\alpha_i} - w_i(x_{\alpha_{k+1}}, \ldots, x_{\alpha_n}) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k+1),$$

onde as grandezas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ designam uma sequencia qualquer dos numeros 1, 2, . . ., n.

Effectivamente, as $(k+1)$ primeiras equações do systema (13) reduzem-se na nossa supposição ás expressões

$$\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -p_{\alpha_1}, \ldots, \; \lambda_{k+1} = -p_{\alpha_k},$$

que convertem as ultimas $(n-k)$ equações do mesmo systema em

$$(15') \quad p_j - \frac{\partial w}{\partial x_j} + p_{\alpha_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} + \ldots + p_{\alpha_k} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_j} = 0 ,$$

$$(j = \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) .$$

As equações (12) e (15) do n.º anterior reduzem-se assim respectivamente a (12′) e (15′), o que nos permitte concluir:

Obteem-se todos os systemas de $(n+1)$ equações que satisfazem á equação proposta (11), fazendo k successivamente equal a $0, 1, \ldots, n$ nas formulas (12′) e (15′), onde $w, w_1, \ldots$ são funcções arbitrarias dos seus argumentos. Os systemas de maior numero de equações pódem em seguida determinar-se juntando a cada um d'aquelles quaesquer relações entre as variaveis z, x, p, que sejam compátiveis entre si e com (12′) e (15′) e que não determinem, conjunctamente com (15′), relação alguma entre $z, x_1, \ldots, x_n$, independente de (12′).

8. — Da proposição que acabamos de enunciar deriva o theorema seguinte que se torna evidente, pondo $k=0$ nas formulas (12′) e (15′):

Todo o systema de $(n+1)$ equações distinctas que satisfaz á equação de Pfaff

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, d\, x_n = 0$$

e que apenas determina uma relação entre as variaveis $z, x_1, \ldots, x_n$, póde reduzir-se á fórma

$$z - w(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ p_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0,\ \ldots,\ p_n - \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0.$$

9. — Determinemos agora os systemas que satisfazem á equação de Pfaff

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n = 0.$$

Comecemos pelos de n equações.

Em primeiro logar, temos o systema evidente

$$p_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_n = 0.$$

Qualquer systema, além d'este, que satisfaça á equação proposta, determina um certo numero k de relações distinctas

$$(16) \qquad \psi_1 (x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0$$

entre as variaveis $x_1, \ldots, x_n$ e comprehende, além de (16), as equações provenientes de

$$(17) \qquad \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = p_i,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Por outro lado, k relações quaesquer da fórma (16) são evidentemente compativeis com (17), desde que possam resolver-se em ordem a k das variaveis x, isto é, desde que sejam distinctas.

D'isto resulta, pondo de parte o systema $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$:

Obteem-se todos os systemas de n equações que satisfazem á equação de Pfaff

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n = 0,$$

eliminando as grandezas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ das equações

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = p_i \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array}\right.$$

onde ao inteiro k devem ser dados todos os valores desde o até n e as equações $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_k = 0$ são quaesquer, mas distinctas.

Para determinar os systemas de mais de n equações, basta accrescentar a cada um dos obtidos pelo processo anterior relações quaesquer entre as variaveis x, p, que estejam em condições identicas ás referidas na segunda proposição do n.º 6.

Devemos ainda notar que, se considerarmos as equações (16) sob a fórma

$$x_{\alpha_i} - w_i(x_{\alpha_{k+1}}, \ldots, x_{\alpha_n}) = 0 , \ (i = 1, 2, \ldots, k),$$

as relações que resultam de (18) pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tomam a fórma:

$$p_j + p_{\alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \ldots + p_{\alpha_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = 0 ,$$

$$(j = \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Conclue-se d'aqui uma proposição analoga á do n.º 7.

II

10. — Sejam dadas $(n+1)$ variaveis $z, x_1, \ldots, x_n$. Consideraremos cada systema de valores $z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$, dados áquellas variaveis, como representando ou definindo um *ponto* do espaço a $(n+1)$ dimensões $z, x_1, \ldots, x_n$; as grandezas $z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ serão as *coordenadas* do ponto em questão.

Cada uma das coordenadas de um ponto póde receber uma infinidade de valores differentes, pelo que o espaço a $(n+1)$ dimensões contém um numero de pontos distinctos que podemos representar por ∞^{n+1}. Assim, diremos, por exemplo, que o plano encerra ∞^2 pontos distinctos, ou ainda, que o numero dos pontos do plano é duplamente infinito.

Posto isto, damos o nome de *multiplicidade pontual* ao conjuncto dos pontos definidos por uma ou mais equações que encerram as $(n+1)$ variaveis $z, x_1, \ldots, x_n$ e chamamos *ordem* de uma dada multiplicidade pontual ao numero das variaveis independentes que figuram nas equações que a definem.

D'este modo, uma equação da fórma

$$\varphi(z, x_1, \ldots, x_n) = o,$$

que define, entre os ∞^{n+1} pontos do espaço a $(n+1)$ dimensões, ∞^n pontos distinctos, representa uma multiplicidade pontual da ordem n.

Egualmente, um systema de equações distinctas

$$\varphi_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0,$$

entre as variaveis $z, x_1, \ldots, x_n$ define, na totalidade dos pontos do espaço a $(n+1)$ dimensões, ∞^{n+1-l} pontos distinctos e representa uma multiplicidade pontual da ordem $n+1-l$.

Da mesma fórma os pontos, as curvas e as superficies são as multiplicidades pontuaes do plano e do espaço ordinario e um ponto do espaço a um numero qualquer de dimensões constitue uma multiplicidade pontual da ordem zero.

Uma multiplicidade importante, no que vae dizer-se, é a definida pela equação linear

$$(19) \quad Z - z = p_1 (X_1 - x_1) + \ldots + p_n (X_n - x_n),$$

onde representam: $z, x_1, \ldots, x_n$ as coordenadas de um dado ponto; $Z, X_1, \ldots, X_n$ as coordenadas de um ponto variavel; e $p_1, \ldots, p_n$ coefficientes quaesquer.

A esta multiplicidade pontual dá-se o nome de *multiplicidade plana*, ou simplesmente *plano*, pela similhança que a equação (19) tem com a equação do plano; as grandezas $p_1, \ldots, p_n$ são os *coefficientes angulares* e $Z, X_1, \ldots, X_n$ as *coordenadas correntes*.

11. — Ao lado das multiplicidades pontuaes convém considerar as *multiplicidades de elementos* do espaço.

Chama-se *elemento* do espaço a $(n+1)$ dimensões a todo o systema de valores de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, isto é, ao conjuncto de um dado ponto e de um plano qualquer (19) que passe por esse ponto. Um elemento é completamente definido pelas suas *coordenadas* $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$: $z, x_1, \ldots, x_n$ fixam, por assim dizer, a *posição* do elemento e $p_1, \ldots, p_n$ determinam a sua *orientação*.

No caso de ser $n = 1$, a equação (18) define uma linha recta em um dado plano. Por isso. um elemento do plano é o conjuncto de um dado ponto (x, y) e de uma recta

$$Y - y = m(X - x)$$

que passa por esse ponto.

Os elementos do plano e do espaço ordinario são muitas vezes conhecidos respectivamente sob as designações de *elementos lineares* e *elementos de superficie.*

Posto isto, denominaremos *multiplicidade de elementos* do espaço a $(n + 1)$ dimensões o conjuncto dos elementos definidos por um certo numero de equações que ligam as variaveis $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ e satisfazem á equação de Pfaff

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0\,;$$

e diremos que uma multiplicidade d'este genero é da ordem l se fôr l o numero de variaveis independentes que figuram nas suas equações.

Representaremos uma multiplicidade de elementos pela letra M, ou ainda, pelo symbolo M_n, onde o indice n designará a ordem da multiplicidade em questão.

12. — O que ficou dito em os n.os 6 e 7, permittenos evidentemente determinar todas as multiplicidades de elementos respectivas a um dado espaço.

Vamos vêr que estas multiplicidades são susceptiveis de uma representação geometrica nos casos do plano e do espaço ordinario.

Considerêmos, por exemplo, o espaço a tres dimensões x, y, z.

É sabido que os systemas de equações que satisfazem á equação de Pfaff

$$(20) \qquad dz - pdx - qdy = 0 \,,$$

determinam uma, duas ou tres relações entre as variaveis x, y, z.

I. — Seja dado, em primeiro logar, um systema qualquer que satisfaça a (20) e apenas determine uma relação

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

entre aquellas variaveis.

Pelo que se disse em o n.º 6, o systema proposto contém, além da relação precedente, que é resoluvel em ordem a z, as equações

$$(21) \qquad p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \,, \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

que resultam de

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1 \,, \qquad \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -p \,, \qquad \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -q$$

pela eliminação de λ e não contém evidentemente outras que sejam distinctas de $\varphi = 0$ e (21), isto é, tem a fórma

$$(22) \qquad \varphi = 0 \,, \quad p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \,, \quad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \,.$$

Ora, é manifesto que cada elemento de (22) se compõe de um certo ponto da superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ e do plano tangente a esta superficie n'aquelle ponto; e que, reciprocamente, um ponto qualquer da referida superficie constitue, com o respectivo plano tangente, um elemento do espaço que pertence á multiplicidade M representada por (22).

Por isso, se chamarmos *elemento* de uma superficie $z - \varphi(x, y) = 0$ ao systema de um dos seus pontos e do plano que lhe é tangente n'este ponto e notarmos que as equações (22) definem ∞^2 elementos distinctos, podemos dizer:

A multiplicidade M *definida por um systema que satisfaz á equação*

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

e que apenas determina uma relação entre as variaveis x, y, z, *é de segunda ordem e compõe-se dos* ∞^2 *elementos da superficie determinada por aquella relação.*

II. — Consideremos agora um systema que satisfaz a (22) e que determina duas relações distinctas da fórma

$$\varphi_1(x,y,z) = 0 \quad , \quad \varphi_2(x, y, z) = 0 \ , \tag{23}$$

as quaes devem ser (§ 6) resoluveis em ordem a z e x ou em ordem a z e y.

O nosso systema contém, como se sabe, as equações (23) e a equação

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} \ , & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} \ , & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} \ , & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} \ , & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ -1 \ , & p \ , & q \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

que provém de

$$(25)\qquad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 1\,, \\[2ex] \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\,p\,, \\[2ex] \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\,q\,, \end{cases}$$

pela eliminação de λ_1 e λ_2; além d'estas, ou não contém outras equações que sejam distinctas de (23) e (24), ou contém mais uma, que é compativel com (23) e (24) e não determina, conjunctamente com (24), uma relação entre x, y, z, independente de (23).

No primeiro caso, isto é, se (23) e (24) forem as unicas equações distinctas do systema considerado, cada elemento da multiplicidade M que este systema define, compõe-se claramente de um dos pontos da curva $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ e de um qualquer dos planos que resultam de dar a p e q na equação

$$(26)\qquad Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y)$$

os systemas de valores que para estas variaveis se deduzem da equação (24), depois de n'ella substituir as coordenadas x, y, z do ponto em questão.

Ora, todos estes planos passam pela tangente á curva $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ no ponto (x, y, z), visto que a equação (26), attendendo ás relações (25), se transforma na expressão

$$(27)\begin{cases} \lambda_1\left[\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}(Z-z)+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}(Y-y)\right] \\ +\lambda_2\left[\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}(Z-z)+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}(Y-y)\right]=0, \end{cases}$$

que é a equação geral dos planos que conteem a referida tangente.

Cada elemento da multiplicidade a que nos vimos referindo, compõe-se por isso de um certo ponto da curva $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ e de um dos planos tangentes a esta curva n'aquelle ponto.

Reciprocamente, é visivel que cada ponto da curva $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ constitue com cada um dos planos tangentes á mesma curva n'aquelle ponto um elemento do espaço que pertence á multiplicidade definida por (23) e (24).

Portanto, chamando *elemento* da curva $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ ao systema de um ponto d'esta curva e de um dos seus planos tangentes n'este ponto, e notando que em (23) e (24) ficam independentes duas variaveis, podemos concluir:

Todo o systema que satisfaz á equação

$$dz - pdx - q\,dy = 0$$

e que determina duas relações distinctas entre x, y, z, define — caso contenha apenas tres equações independentes — uma multiplicidade M_2, que se compõe dos ∞^2 elementos da curva representada por aquellas duas relações.

No segundo caso, isto é, quando o systema considerado comprehende, além das equações (23) e (24), apenas uma outra distincta d'estas e satisfazendo ás condições acima enunciadas, a multiplicidade M que o mesmo systema define é evidentemente de primeira ordem e todos os seus elementos se encontram entre os da curva $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

III. — Consideremos finalmente um systema que satisfaz á equação proposta (20) e que determina tres relações distinctas entre as variaveis x, y, z.

Este systema tem uma das fórmas

$$x = a, \cdot y = b, \quad z = c$$

ou

$$x = a, \; y = b \; , \; z = c, \; \mathrm{U}(p, q) = 0 \; ,$$

onde a, b, c designam quantidades constantes e U uma funcção arbitraria, isto é, *representa, ou uma multiplicidade* M_2, *que se compõe de todos os elementos de que faz parte o ponto* (a, b, c), *ou uma multiplicidade* M_1, *cujos elementos se encontram entre os d'aquelle mesmo ponto.*

Reunindo o que até aqui temos dicto em relação ás multiplicidades M_2, temos a proposição:

Uma multiplicidade qualquer M_2 *do espaço ordinario compõe-se, ou de todos os elementos de uma superficie (pontos e planos tangentes), ou de todos os elementos de uma curva (pontos e planos tangentes), ou ainda, de todos os elementos de um ponto (ponto e planos que passam por esse ponto)*; reciprocamente, *a totalidade dos elementos de uma superficie, de uma curva, ou de um ponto, constitue uma multiplicidade* M_2.

Ficam excluidas d'esta proposição as superficies e as curvas no espaço, cujas equações não encerram a variavel z, como se reconhece immediatamente pela analyse anterior.

13. — Partindo da equação

$$dy - y'dx = 0$$

e seguindo o caminho do n.º 12, chega-se sem difficuldade á proposição seguinte, respectiva ao plano:

Uma multiplicidade M_1 *do plano compõe-se, ou de todos os elementos lineares de uma curva (pontos e tangentes), ou de todos os elementos lineares de um ponto (ponto e rectas que passam por esse ponto).*

Reciprocamente, *o conjuncto dos elementos lineares de um ponto, ou de uma curva plana, constitue uma multiplicidade* M_1.

Excluem-se as curvas, cujas equações não encerram a variavel y.

14. — Fazendo uso da linguagem hypergeometrica, podemos estender as conclusões dos dois numeros precedentes ao caso do espaço a um numero qualquer de dimensões.

Com effeito, seja dada a equação de Pfaff

$$(11) \qquad dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

e consideremos de um modo geral um systema de $(n+1)$ equações que satisfaça a (11) e determine $(k+1)$ relações distinctas

$$(12) \qquad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

entre $z, x_1, \ldots, x_n$.

É sabido que este systema apenas contém, além das relações precedentes, as equações que proveem de

$$(28) \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 1 \, , \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = -p_i \, , \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

A multiplicidade M que o mesmo systema define é, pois, da ordem n e cada um dos seus elementos se compõe de um certo ponto da multiplicidade pontual (12) e de um dos ∞^k planos representados pela equação

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) (Z - z) + \left(\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right) (X_1 - x_1) + \ldots \\ & \qquad + \left(\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \frac{\phi \partial_j}{\partial x_n} \right) (X_n - x_n) = 0 \end{aligned} \right.$$

que resulta manifestamente da combinação da equação

$$Z - z = p_1 (X_1 - x_1) + \ldots + p_n (X_n - x_n)$$

com as equações (28).

Reciprocamente, cada ponto de (12) constitue com cada plano (29) um elemento que pertence claramente á multiplicidade M definida pelas equações (12) e (29).

Ora, pela analogia que existe entre as equações (29) e (27), diremos que os planos definidos pela equação (29) são *tangentes* á multiplicidade (12) no ponto $z, x_1, \ldots, x_n$.

Por isso, chamando *elemento* de uma dada multiplicidade pontual (12) ao conjuncto de um ponto qualquer d'esta multiplicidade e de um dos seus planos tangentes n'este ponto, podemos concluir que:

A totalidade dos elementos de uma dada multiplicidade pontual (12) *constitue uma multiplicidade* M_n, ou ainda, *que toda a multiplicidade* M_n *do espaço a* $(n+1)$

dimensões se compõe dos elementos de uma dada multiplicidade pontual do mesmo espaço.

Excluem-se d'aqui as multiplicidades pontuaes, cujas equações não encerram a variavel z, como facilmente se reconhece pela primeira das equações (28).

A proposição precedente tem logar para todos os valores inteiros de k desde o até n.

No caso de ser $k=o$, as equações (12), (28) e (29) reduzem-se respectivamente ás seguintes:

$$(12') \qquad \phi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$(28') \qquad \lambda \frac{\partial \phi}{\partial z} = 1, \ldots, \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -p_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(29') \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z}(Z - z) + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(X_n - x_n) = 0$$

Por isso, o *conjuncto dos pontos definidos por uma equação da fórma*

$$\phi(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

constitue com os planos correspondentes dados por (13') *uma multiplicidade* M_n.

Devemos notar que esta proposição é analoga á que tem logar no espaço ordinario a respeito das superficies.

Se fôr $n = k$, as equações (12) podem tomar a fórma

$$z = c, \quad x_1 = a_1, \ldots, \quad x_n = a_n.$$

Os coefficientes angulares $p_1, \ldots, p_n$ ficam arbitrarios e por isso:

O conjuncto dos elementos relativos a um dado ponto do espaço constitue uma multiplicidade M_n.

CAPITULO II

Definição das transformações de contacto e relações analyticas que as caracterisam

I

15. — Seja dada uma transformação

$$(1) \quad x_1 = X(x, y, z), \; y_1 = Y(x, y, z), \; z_1 = Z(x, y, z),$$

entre as variaveis x, y, z e as variaveis x_1, y_1, z_1 e consideremos cada systema de valores de x, y, z e de x_1, y_1, z_1 como coordenados de um ponto do espaço em relação a tres eixos rectangulares quaesquer.

Esta transformação converte os pontos de uma dada superficie $z - \varphi(x, y) = 0$ nos de uma nova superficie, cuja equação se obtém, eliminando de $z - \varphi(x, y) = 0$, por meio de (1), as variaveis x, y, z.

Supponhamos que á equação da superficie transformada se póde dar a fórma $z_1 - \varphi_1(x_1, y_1) = 0$, o que acontecerá geralmente, e sejam (x, y, z) e (x_1, y_1, z_1) dois pontos que se correspondem nas duas superficies.

A cada ponto (x, y, z) da primeira superficie correspondem certos valores das derivadas $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, e ao ponto x_1, y_1, z_1, transformado de x, y, z, correspondem egualmente certos valores de $\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = p_1$, $\frac{\partial z_1}{\partial y_1} = q$. Isto mostra que as formulas (1), além de estabelecerem uma correspondencia entre os pontos das duas superficies, originam, para cada ponto (x, y, z), certas relações entre as grandezas p, q, p_1, q_1.

Para determinar estas relações, seja $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ um ponto qualquer da superficie primitiva, infinitamente proximo de (x, y, z), e $(x_1+dx_1,\ y_1+dy_1,\ z_1+dz_1)$ o ponto correspondente na superficie transformada; teremos:

$$(2)\qquad dz - pdx - qdy = 0\ ,\ dz_1 - p_1dx_1 - q_1dy_1 = 0,$$

A segunda d'estas equações toma, em virtude de (1), a fórma

$$dZ - p_1dX - q_1dY = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1} - p_1\frac{\partial X}{\partial x} - q_1\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - p_1\frac{\partial X}{\partial y} - q_1\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy$$
$$+\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - p_1\frac{\partial X}{\partial z} - q_1\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dz = 0\,.$$

Esta egualdade e a primeira das equações (2) são necessariamente equivalentes, visto que, por ser $(x+dx,\ y+dy, z+dz)$ um ponto da superficie $z - \varphi(x, y) = 0$, que apenas satisfaz á condição de ser infinitamente proximo de x, y, z, é

$$dz - pdx - qdy = 0$$

a unica relação a que devem satisfazer as differenciaes dx, dy, dz.

Existe, pois, uma funcção ρ de x, y, z, p, q, differente de zero e que não contém as differenciaes dx, dy, dz, tal que a relação differencial

$$(3) \qquad dZ - p_1 dX - q_1 dY = \rho(dz - pdx - qdy)$$

é satisfeita por todos os valores de dx, dy, dz.

D'esta identidade resultam claramente as expressões

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial z} - p_1 \dfrac{\partial X}{\partial z} - q_1 \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \rho, \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial x} - p_1 \dfrac{\partial X}{\partial x} - q_1 \dfrac{\partial Y}{\partial x} = -\rho p, \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial y} - p_1 \dfrac{\partial X}{\partial y} - q_1 \dfrac{\partial Y}{\partial y} = -\rho q, \end{cases}$$

das quaes se deduzem, eliminando ρ, as relações

$$(5) \begin{cases} p_1\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial z}\right) + q_1\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} + p\dfrac{\partial Y}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial Z}{\partial x} + p\dfrac{\partial Z}{\partial z} \\[2ex] p_1\left(\dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial z}\right) + q_1\left(\dfrac{\partial Y}{\partial y} + q\dfrac{\partial Y}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial Z}{\partial y} + q\dfrac{\partial Z}{\partial z}, \end{cases}$$

que ligam as variaveis x, y, z, p, q, p_1, q_1.

Ora, o determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} + p\dfrac{\partial X}{\partial z}, & \dfrac{\partial Y}{\partial x} + p\dfrac{\partial Y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial y} + q\dfrac{\partial X}{\partial z}, & \dfrac{\partial Y}{\partial y} + q\dfrac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

não póde annullar-se para todas as superficies

$$z - \varphi(x, y) = 0,$$

visto que, se isto acontecesse, seria nullo para todos os systemas de valores de x, y, z, p, q, e annullar-se-iam por isso identicamente todos os determinantes de segunda ordem do quadro

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial z}, & \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{matrix} \right\|,$$

o que não póde ter logar, porque, por hypothese, as formulas (1) definem uma transformação e são portanto distinctas as funcções X, Y, Z.

Em certos casos podemos, pois, deduzir das relações (5) equações da fórma

$$p_1 = P(x, y, z, p, q) \quad , \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q).$$

Estas equações são claramente resoluveis em ordem a p, q e por isso o systema

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = X(x, y, z) \quad , \quad y_1 = Y(x, y, z) \quad , \quad z_1 = Z(x, y, z) \\ \quad p_1 = P(x, y, z, p, q) \quad , \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{array} \right.$$

define uma transformação que faz corresponder um elemento de superficie (x, y, z, p, q) a um elemento $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$.

Além d'isto, o referido systema satisfaz identicamente, como é manifesto, á relação differencial

$$dZ - p_1\, dX - q_1\, dY = \rho\,(dz - pdx - qdy),$$

onde ρ é, como se reconhece por meio de (4), uma funcção de x, y, z, p, q, differente de zero e que não encerra as differenciaes dx, dy, dz.

As transformações da fórma (1) conduzem-nos assim muito naturalmente á consideração de transformações de elementos do espaço com a propriedade notavel de deixarem invariante a equação de Pfaff

$$(7) \qquad dz - pdx - qdy = 0.$$

E' de transformações com tal propriedade que teremos de occupar-nos n'esta dissertação.

16. — As formulas (6) não definem evidentemente a transformação mais geral de elementos do espaço.

Effectivamente, uma transformação d'esta natureza, é representada por qualquer systema da fórma

$$(8) \begin{cases} x_1 = X\ (x,y,z),\ y_1 = Y\ (x,y,z),\ z_1 = Z\ (x,y,z)\ , \\ p_1 = P_1\ (x,y,z,p,q),\ q_1 = Q_1\ (x,y,z,p,q) \end{cases}$$

ou da fórma mais geral

$$(9) \begin{cases} x_1 = X(x,y,z,p,q),\ y_1 = Y\ (x,y,z,p,q), z_1 = Z(x,y,z,p,q), \\ p_1 = P\ (x,y,z,p,q),\ q_1 = Q\ (x,y,z,p,q)\ , \end{cases}$$

que seja resoluvel em ordem a $x,y,z,p.q$.

Veremos adeante que existe uma infinidade de systemas da fórma (9) que satisfazem identicamente á relação differencial (3) ou, o que é o mesmo, deixam invariante a equação de Pfaff (7).

Á transformação definida por um systema em taes condições deu-se o nome de *transformação de contacto* do espaço ordinario.

Diremos pois :

Uma transformação da fórma

$$x_1 = X(x,y,z,p,q),\ y_1 = Y(x,y,z,p,q),\ z_1 = Z(x,y,z,p,q)$$

$$p_1 = P(x,y,z,p,q),\ q_1 = Q(x,y,z,p,q)$$

é uma transformação de contacto do espaço ordinario, se satisfizer identicamente á relação differencial

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \rho\,(dz - pdx - qdy),$$

onde ρ *designa uma funcção de* x, y, z, p, q, *differente de zero e que não contém* dx, dy, dz; ou ainda, *se deixar invariante a equação de Pfaff*

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

17. — Havemos de vêr mais tarde que uma dada superficie nem sempre se converte, por uma transformação de contacto da fórma (9), em uma nova superficie.

Consideremos, porém, o caso de termos duas superficies que, pela referida transformação, se convertem em duas novas superficies.

É facil de reconhecer que, se as superficies primitivas forem tangentes em um dado ponto, tambem as superficies transformadas serão tangentes em um certo ponto e reciprocamente.

Na verdade, se as superficies primitivas forem tangentes em um ponto (x,y,z), terá logar a relação

$$dz - pdx - qdy = 0$$

para todos os deslocamentos infinitamente pequenos dx, dy, dz do ponto x, y, z sobre as duas superficies. Da relação (3), onde ρ não é nullo, resulta immediatamente que tambem é

$$dZ - PdX - QdY = 0$$

para os pontos correspondentes das superficies transformadas, isto é, que estas duas superficies tambem são tangentes.

Claramente se vê que, inversamente, serão tangentes as duas superficies primitivas, desde que as transformadas o sejam.

O resultado precedente tem, evidentemente, sempre logar para as transformações de contacto da fórma particular (6).

Das considerações anteriores deriva naturalmente a designação das transformações a que nos vimos referindo.

18. — Partindo das formulas

$$(1') \qquad x_1 = X(x, y), \; y_1 = Y(x, y),$$

relativas ao plano, e seguindo a analyse dos n.os 1 e 2, chegariamos sem difficuldade alguma á consideração de transformações de elementos lineares da fórma

$$(8') \quad x_1 = X(x, y), \; y_1 = Y(x, y), \; y'_1 = P(x, y, y')$$

ou da fórma mais geral

$$(9') \quad x_1 = X(x, y, y') \; y_1 = Y(x, y, y') \; y'_1 = P(x, y, y')$$

com a propriedade de deixarem invariante a equação de Pfaff

$$(7') \qquad dy - y'\,dx = 0.$$

As formulas (8'), onde P designa o valor de y'_1 dado pela equação

$$y'_1\left(\frac{\partial X}{\partial y}y'+\frac{\partial X}{\partial x}\right)=\frac{\partial Y}{\partial y}y'+\frac{\partial Y}{\partial x}$$

que n'este caso substitue as equações (5), teem ainda a propriedade de converter as curvas que se tocam em um dado ponto em curvas tangentes no ponto transformado d'este; a mesma propriedade tem ainda logar para uma transformação da fórma mais geral (9'), que deixe invariante a equação (7'), quando se trata de curvas que, por essa transformação, se convertem em novas curvas.

Qualquer transformação da fórma (8') ou (9') que deixe invariante a equação (7'), define o que se chama — *uma transformação de contacto* do plano.

II

19. — As transformações de contacto não se limitam aos casos do plano e do espaço ordinario; podem ser consideradas no espaço a um numero qualquer de dimensões.

É sob este ponto de vista geral que as vamos estudar.

20. — Consideremos o espaço a $(n+1)$ dimensões $z, x_1, \ldots, x_n$.

Generalisando a definição do n.º 2, diremos que:

Uma transformação da fórma

$$(10) \quad \begin{cases} z' = Z\,(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \\ x'_i = X\,(z, x, p)\;,\; p'_i = P\,(z, x, p) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

é uma transformação de contacto do espaço a $(n+1)$ *dimensões* $z, x_1, \ldots, x_n$, *se as funcções* $Z, X_1, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$ *forem constituidas de modo que satisfaçam identicamente á relação differencial*

$$(11) \quad dZ - P_1dX_1 - \ldots - P_ndX_n = \rho(dz - p_1dx_1 - \ldots - p_ndx_n),$$

onde ρ *designa uma funcção de* $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *differente de zero, e que não contém as differenciaes* dz, $dx_1, \ldots, dx_n$; ou ainda, *se deixar invariante a equação de Pfaff*

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0.$$

Exemplo. — A transformação

$$z' = z - x_1\,p_1 - \ldots - x_q\,p_q$$

$$x'_1 = p_1, \ldots, x'_q = p_q,\; x'_{q+1} = x_{q+1}, \ldots, x'_n = x_n$$

$$p'_1 = -x_1, \ldots, p'_q = -x_q,\; p'_{q+1} = p_{q+1}, \ldots, p'_q = p_n,$$

onde q designa um qualquer dos numeros $1, 2, \ldots, n$, é um exemplo das transformações que vimos de definir, visto que, substituindo em (11) as grandezas Z, X, P pelas expressões de z', x', p', se encontra:

$$dz' - \sum_{i=1}^{n} p'_i\,dx'_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i$$

A grandeza ρ é aqui, como se vê, egual á unidade.

O exemplo que acabamos de apresentar comprehende, como casos particulares, as importantes transformações de Euler, Legendre e Ampère, as quaes correspondem respectivamente aos casos de ser:

$$q=1\,;\; n=3\;,\; q=2\,;\; n=3\;,\; q=1.$$

21. — A definição das transformações de contacto conduz-nos muito simplesmente ás seguintes propriedades das mesmas transformações:

I. — *A transformação inversa de uma transformação de contacto é ainda de contacto, isto é, as transformações de contacto são inversas duas a duas.*

É o que se reconhece immediatamente em presença das formulas (10) e (11).

II. — *Executando seguidamente duas transformações de contacto*

$$z' = Z(z, x, p)\;,\; x'_i = X_i(z, x, p), p'_i = P_i(z, x, p)$$

e

$$z'' = Z(z', x'_1, p'_1)\;,\; x''_i = X_i(z', x', p')\;,\; p''_i = P_i(z', x', p'),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

a transformação resultante é ainda de contacto, isto é, as transformações de contacto formam um grupo.

Effectivamente, por definição, teem logar as identidades

$$dz' - \sum_{i=1}^{n} p'_i dx'_i = \rho\,(z, x, p)\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i\right),$$

$$dz'' - \sum_{i=1}^{n} p''_i dx''_i = \rho_1\,(z', x', p')\left(dz' - \sum_{i=1}^{n} p'_i\, dx'_i\right),$$

onde ρ e ρ_1 designam funcções differentes de zero. D'estas duas relações resulta a expressão

$$dz'' - \sum_{i=1}^{n} p''_i dx''_i = \rho_1(Z, X, P).\rho(z, x, p)\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right)$$

que justifica a proposição enunciada.

III. — *Se cada um dos systemas de formulas*

$$z' = Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),\ x'_i = X_i(z, x, p),\ p'_i = P_i(z, x, p)$$

e

$$z' = L(\zeta, \chi_1, \ldots, \chi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n),\ x'_i = M_i(\zeta, \chi, \pi),\ p'_i = N_i(\zeta, \chi, \pi)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

definir uma transformação de contacto, tambem as expressões

$$Z(z, x, p) = L(\zeta_1 \chi_1 \pi),\ X_i = M_i,\ P_i = N_i,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

representarão uma transformação de contacto.

Reconhece-se isto claramente, escrevendo e comparando entre si as relações differenciaes da fórma (11) a que dão origem as duas transformações propostas.

22. — Consideremos duas funcções F e H das variaveis independentes z, x, p e designemos respectivamente pelos symbolos $\frac{dH}{dx_i}$ e [F, H] as operações

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z},\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dH}{dx_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dF}{dx_i}\right).$$

Vamos demonstrar o theorema seguinte, devido a Sophus Lie, e que é fundamental na theoria das transformações de contacto:

Se a relação differencial

$$(11)\qquad dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \rho(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i),$$

onde ρ *designa uma funcção, differente de zero, das variaveis independentes* z, x, p, *fôr identicamente satisfeita por* $(2n+1)$ *funcções* $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ *das mesmas variaveis, estas funcções são independentes e verificam identicamente as relações*

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{ll} [X_i, X_j] = [P_i, P_j] = [P_i, X_j] = 0 & (i \lesseqgtr j) \\ [Z, X_i] = 0\,,\ [P_i, X_i] = \rho\,,\ [Z, P_i] + \rho P_i = 0 & \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n). & \end{array} \right.$$

Este theorema foi deduzido por Sophus Lie dos trabalhos de Clebsch sobre o problema de Pfaff e estabelecido depois directamente por Mayer e Darboux.

Na demonstração que vamos dar seguimos o caminho indicado por Mayer.

Da relação (11), que deve ser satisfeita por todos os valores de $dz, dx_1, \ldots, dx_n$, resultam claramente as expressões

$$(13)\qquad \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = \rho,$$

$$(14)\qquad B_k = \frac{\partial Z}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0,$$

$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

$$(15)\qquad \frac{\partial Z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = -\rho p_k,$$

que teem logar identicamente ao mesmo tempo que (11).

A eliminação de ρ entre (13) e (15) dá-nos as expressões

$$(16) \qquad A_k = \frac{dZ}{dx_k} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dX_i}{dx_k} = 0, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

que podem considerar-se em vez de (15).

Podemos assim substituir a relação differencial (11) pelo systema de equações (13), (14) e (16).

Posto isto, consideremos o determinante funccional

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z}, & \frac{\partial Z}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial Z}{\partial x_n}, & \frac{\partial Z}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial Z}{\partial p_n} \\ \frac{\partial X_1}{\partial z}, & \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial X_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial z}, & \frac{\partial P_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial P_n}{\partial x_n}, & \frac{\partial P_n}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

das funcções $Z, X_1, \ldots X_n, P_1, \ldots, P_n$ em ordem a $z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots, p_n$.

Juntando aos elementos da primeira linha respectivamente os da segunda multiplicados por $-P_1$, os da terceira multiplicados por $-P_2$ e assim por deante até chegarmos á linha da ordem $(n+1)$, e attendendo em seguida ás expressões (13), (14) e (15), este determinante toma a fórma

$$
J = \begin{vmatrix}
\rho \;, & -\rho p_1 \;, & \ldots \;, & -\rho p_n \;, & 0 \;, & \ldots \;, & 0 \\
\dfrac{\partial X_1}{\partial z} \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial P_n}{\partial z} \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial x_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial x_n} \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_n}
\end{vmatrix} ,
$$

Addiccionemos ainda os elementos da primeira columna multiplicados por p_1 aos elementos da segunda columna, os da primeira multiplicados por p_2 aos da terceira, etc., ..., os da primeira multiplicados por p_n aos da ordem $(n+1)$; teremos:

$$
J = \begin{vmatrix}
\rho & 0 \;, & \ldots & 0 \;, & 0 \;, & \ldots \;, & 0 \\
\dfrac{\partial X_1}{\partial z} \;, & \dfrac{dX_1}{dx_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{dX_1}{dx_n} \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial P_n}{\partial z} \;, & \dfrac{dP_n}{dx_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{dP_n}{dx_n} \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_n}
\end{vmatrix} ,
$$

ou

$$J = \rho\,\Delta\,,$$

pondo

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\dfrac{dX_1}{dx_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{dX_1}{dx_n} \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{dP_n}{dx_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{dP_n}{dx_n} \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_1} \;, & \ldots \;, & \dfrac{\partial P_n}{\partial p_n}
\end{vmatrix} .
$$

Em vista d'isto, o determinante J é differente de zero e, portanto, as funcções Z, X, P são independentes umas das outras, desde que Δ não seja nullo.

Vamos ver que Δ não é nullo.

Para isso, consideremos um systema de $2n$ variaveis independentes $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ e liguemos este systema a um outro $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$, tambem com $2n$ variaveis, pelas equações lineares

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} u_j &= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{dX_j}{dx_s} y_s + \frac{\partial X_j}{\partial p_s} z_s \right) \\ v_j &= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{dP_j}{dx_s} y_s + \frac{\partial P_j}{\partial p_s} z_s \right), \end{aligned} \right. \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

nas quaes os coefficientes das grandezas y, z constituem o determinante de que tratamos.

Posto isto, derivemos a expressão

$$\frac{dZ}{dx_k} = \frac{\partial Z}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial Z}{\partial z}$$

successivamente em ordem a p_k e p_r; obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{dZ}{dx_k} = \frac{d}{dx_k} \frac{\partial Z}{\partial p_k} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \frac{dZ}{dx_k} = \frac{d}{dx_k} \frac{\partial Z}{\partial p_r} \qquad (r \lesseqgtr k).$$

Por outro lado, é

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial Z}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r} \frac{\partial Z}{\partial p_k}$$

e, como facilmente se verifica,

$$\frac{d}{dx_r} \frac{dZ}{dx_k} = \frac{d}{dx_k} \frac{dZ}{dx_r}.$$

Substituindo, nas quatro formulas precedentes, $\frac{dZ}{dx_k}, \frac{dZ}{dx_r}, \frac{\partial Z}{\partial p_k}, \frac{\partial Z}{\partial p_r}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ pelas suas expressões tiradas de (16), (14) e (13), acham-se depois de reducções muito simples as egualdades

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\,\frac{dX_i}{dx_k}-\frac{dP_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial X_i}{\partial p_k}\right)=\rho$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r}\,\frac{dX_i}{dx_k}-\frac{dP_i}{dx_k}\,\frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right)=0 \quad (k \lesseqgtr r)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dP_i}{dx_r}\,\frac{dX_i}{dx_k}-\frac{dP_i}{dx_k}\,\frac{dX_i}{dx_r}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r}\,\frac{\partial X_i}{\partial p_k}-\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\,\frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right)=0\ ,$$

ás quaes devem necessariamente satisfazer as funcções Z, X, P.

Effectuemos agora sobre as equações (17) as operações indicadas nas expressões $\sum_{j=1}^{n}\left(u_j\frac{\partial P_j}{\partial p_i}-v_j\frac{\partial X_j}{\partial p_i}\right)$, $\sum_{j=1}^{n}\left(u_j\frac{dP_j}{dx_i}-v_j\frac{dX_j}{dx_i}\right)$; encontra-se facilmente, attendendo ás relações precedentes, o systema linear

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\left(u_j\frac{\partial P_j}{\partial p_i}-v_j\frac{\partial X_j}{\partial p_i}\right)=\rho y_i\ ,\\ &\sum_{j=1}^{n}\left(u_j\frac{dP_j}{dx_i}-v_j\frac{dX_j}{dx_i}\right)=-\rho z_i \end{aligned}\right.$$

$$(i=1\,,2\,,\ldots,n)\ .$$

onde as equações são em numero egual ao das variaveis u, v. Estas equações são distinctas, visto que as variaveis y, z podem receber valores quaesquer e que ρ não é nullo: o determinante dos coefficientes de u, v é, portanto, differente de zero.

Conclue-se d'aqui, visto ser este determinante claramente egual a $\pm \Delta$, que são distinctas as funcções Z, X, P, o que justifica a primeira parte do nosso theorema.

Para demonstrar a segunda parte, mudemos no systema (18) os indices i, j respectivamente em s e k e comparemos os resultados obtidos com o systema (17); d'este modo, encontramos as expressões:

$$\rho u = \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{dX_j}{dx_s}\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\frac{\partial P_k}{\partial p_s} - v_k\frac{\partial X_k}{\partial p_s}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial X_j}{\partial p_s}\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\frac{dp_k}{dx_s} - v_k\frac{dX_k}{dx_s}\right)\right],$$

$$\rho v_j = \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{dP_j}{dx_s}\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\frac{\partial P_k}{\partial p_s} - v_k\frac{\partial X_k}{\partial p_s}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P_j}{\partial p_s}\sum_{s=1}^{n}\left(u_k\frac{dP_k}{dx_s} - v_k\frac{dX_k}{dx_s}\right)\right],$$

$$(j = 1\,, 2\,, \ldots\,, n)\,.$$

Ora, as grandezas $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ são independentes umas das outras, como se vê claramente pelo systema (17), visto ser differente de zero o determinante Δ dos coefficientes variaveis y, z no referido systema.

Por este motivo, são nullos os coefficientes de u, v nas formulas precedentes, quaesquer que sejam os valores que se dêem ás variaveis z, x, p, isto é, as funcções Z, X, P satisfazem identicamente ás relações

$$(19)\quad \begin{cases} [X_i, X_j] = [P_i, P_j] = o \quad , \quad [P_j, X_j] = \rho\,, \\ \qquad [P_i, X_j] = o \qquad\qquad (i \gtrless j)\,, \\ \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Além d'isto, designando por U uma funcção das variaveis z, x, p, deduz-se claramente de (14) e (16) a expressão

$$(20)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\left(B_k \frac{dU}{dx_k} - A_k \frac{\partial U}{\partial p_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Z}{\partial p_k}\frac{dU}{dx_k} - \frac{dZ}{dx_k}\frac{\partial U}{\partial p_k}\right) \\ \quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial p_k}\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dXi}{dx_k} - \frac{dU}{dx_k}\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X}{\partial p_k}\right) \\ \quad = [Z, U] + \sum_{i=1}^{n} P_i [U, X_i]\,, \end{cases}$$

d'onde resulta, egualando U successivamente a X_j e P_j e attendendo a (19):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \frac{dX_j}{dx} - A_k \frac{\partial X_j}{\partial p_k}\right) = [Z, X_j]\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \frac{dP_j}{dx_k} - A_k \frac{\partial P_j}{\partial p_k}\right) = [Z, P_j] + \rho P_j\,,$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Estas egualdades mostram que as funcções Z, X, P, que satisfizerem identicamente ás expressões $A_k = o$ e $B_k = o$, tambem verificarão identicamente as relações

$$(21)\quad [Z, X_i] = o, \quad \ldots, \quad [Z, P_i] + \rho P_i = o.$$

A segunda parte do theorema acha-se assim demonstrada, visto que o conjuncto das relações precedentes e das relações (19) constitue precisamente as expressões (12) da pag. 44.

O theorema que vimos de demonstrar admitte uma reciproca que o completa e a que mais tarde nos havemos de referir.

23. — *Se* $(n+1)$ *funcções distinctas* $Z, X_1, \ldots, X_n$ *das* $(2n+1)$ *variaveis independentes* $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *satisfizerem identicamente ás relações*

$$(21) \quad [Z, X_i] = 0, \ \ldots, \ [X_i, X_j] = 0, \ (i, j = 1, \ \ldots, n),$$

póde determinar-se um, e um só, systema de funcções $P_1, \ldots, P_n$ *das mesmas variaveis, taes que seja*

$$(10) \quad z' = Z(z,x,p), \ x'_i = X_i(z,x,p), \ p'_i = P_i(z,x,p), (i=1,\ldots,n)$$

uma transformação de contacto.

Com effeito, fazendo U successivamente egual a Z e X_j na expressão (20), obtéem-se as relações

$$\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \frac{dZ}{dx_k} - A_k \frac{\partial Z}{\partial p_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i [Z, X_i] \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(B_k \frac{dX_j}{dx_k} - A_k \frac{\partial X_j}{\partial p_k}\right) = [Z, X_j] + \sum_{i=1}^{n} P_i [X_j, X_i]$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n),$$

que, em vista das condições (21) e (19), se reduzem ás seguintes :

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(B_k\frac{dZ}{dx_k}-A_k\frac{\partial Z}{\partial p_k}\right)=0,\\
&\sum_{k=1}^{n}\left(B_k\frac{dX_j}{dx_k}-A_k\frac{\partial X_j}{\partial p_k}\right)=0,
\end{aligned}
\right.
\qquad (j=1,2,\ldots,n).
$$

Este systema contém apenas n equações distinctas, porque, multiplicando as que correspondem a $j=1,2,\ldots,n$ respectivamente por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e sommando os resultados obtidos, encontra-se a equação

$$
\sum_{k=1}^{n}\left[B_k\sum_{j=1}^{n}P_j\frac{dX_j}{dx_k}-A_k\sum_{j=1}^{n}P_j\frac{\partial X_j}{\partial p_k}\right]=0,
$$

que, attendendo a (14) e (16), se reduz immediatamente á primeira equação (22).

Posto isto, vamos ver que as equações (14) e (16) são compativeis e podem ser resolvidas em ordem a $P_1, \ldots, P_n$.

Para isso, consideremos o quadro rectangular

$$
\left|
\begin{array}{c}
\dfrac{dX_1}{dx_1},\ldots,\dfrac{dX_1}{dx_n},\ \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1},\ldots,\dfrac{\partial X_1}{\partial p_n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{dX_n}{dx_1},\ldots,\dfrac{dX_n}{dx_n},\ \dfrac{\partial X_n}{\partial x_n},\ldots,\dfrac{\partial X_n}{\partial p_n}
\end{array}
\right|
$$

que é constituido pelos coefficientes de A_k e B_k nas ultimas n equações (22), ou ainda, pelos coefficientes de $P_1, \ldots, P_n$ em (14) e (16).

Não podem ser identicamente nullos todos os determinantes da ordem n do systema precedente, porque, se o fossem, existiria entre os primeiros membros das equações

$$dX_i - \frac{\partial X_i}{\partial z}(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i) =$$

$$= \frac{dX_i}{dx_1} dx_1 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n} dx_n + \frac{\partial X_i}{\partial p_1} dp_1 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial p_n} dp_n,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

uma relação da fórma

$$\lambda_1 dX_1 + \ldots + \lambda_n dX_n - \mu (dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i) = 0,$$

onde as grandezas $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \mu$ não são todas nullas; e isto não póde ter logar, como vamos ver.

Na verdade, se aquella relação existisse e μ não fosse nullo, a equação

$$(23) \qquad dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$

seria satisfeita pelo systema

$$X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ designam constantes quaesquer, o que não póde ter logar, por ser $(n+1)$ o menor numero de equações de que se compõe (§ 6) um systema que satisfaz a (23). Se μ fosse nullo, haveria claramente uma relação, pelo menos, entre as funcções $X_1, \ldots, X_n$, o que é contra a hypothese.

Supponhamos, então, que não é identicamente nullo o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial X_n}{\partial p_1}, & \ldots, & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

N'este caso, podemos resolver as equações (14) em ordem a $P_1, \ldots, P_n$ e as ultimas n equações (22) mostram claramente que os valores obtidos para $P_1, \ldots, P_n$ satisfazem tambem ás equações (16). Determinadas as grandezas P, a equação (13) dá em seguida o valor de ρ.

Ha assim um, e um só, systema de valores de $P_1, \ldots, P_n, \rho$, que, conjunctamente com $Z, X_1, \ldots, X_n$, satisfazem identicamente á relação differencial (11), isto é, taes que as formulas (10) definem uma transformação de contacto, o que justifica o theorema enunciado.

24. — Devemos notar que o problema da determinação das funcções Z, X, P que definem uma transformação de contacto, não é bem determinado.

Na verdade, as equações

$$[Z, X_i] = 0 \quad , \quad [X_i, X_j] = 0 \, ,$$

a que as funcções Z e X devem satisfazer, deixam, como é sabido, indeterminada uma qualquer d'estas funcções.

Este resultado é ainda confirmado pelas equações (13), (14) e (15), que, consideradas conjunctamente, equivalem á relação differencial (11), visto que o numero d'aquellas equações é $(2n+1)$, emquanto que o das funcções ρ, Z, X, P é $(2n+2)$.

25. — *Se as formulas*

$$z' = Z(z, x, p) \quad , \quad x'_i = X_i(z, x, p) \quad , \quad p'_i = P_i(z, x, p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

definirem uma transformação de contacto, as equações

$$(24) \qquad [X_1, f] = 0 \, , \quad \ldots \, , \quad [X_k, f] = 0$$

formarão um systema completo de k equações distinctas.

Com effeito, as equações (24) são distinctas, como facilmente se reconhece, substituindo f successivamente por $P, \ldots, P_k$ e attendendo ás relações (12); além d'isto, admittem as soluções independentes $X_1, \ldots, X_n$, Z, $P_{k+1}, \ldots, P_n$ que são em numero egual ao excesso do numero das variaveis z, x, p sobre o numero das equações.

As referidas equações acham-se, portanto, nas condições acima enunciadas.

26. — *O symbolo* $[F, H]$, *onde* F *e* H *designam funcções das variaveis* $z, x_1, \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$, *é invariante em relação a uma transformação de contacto qualquer*

$$z' = Z(z, x, p), \; x'_i = X_i\,(z, x, p) \;\;, \;\; p' = P_i\,(z, x, p).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

Effectivamente, exprimindo, por meio das formulas precedentes, as funcções F e H em Z, X, P e desenvolvendo o colchete, acha-se:

$$[F, H] = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial H}{\partial X_i} [Z, X_i] + \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial H}{\partial P_i} [Z, P_i] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial H}{\partial Z} [X_i, Z] + \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial Z} [P_i, Z] \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial H}{\partial X_j} [X_i, X_j] + \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} [P_i, X_j] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial P_j} [P_i, P_j] + \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial H}{\partial P_j} [X_i, P_j] \right\}.$$

Esta expressão transforma-se, attendendo a (12), em

$$[F, H] = -\rho \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial Z} \right) +$$

$$+ \rho \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial H}{\partial X_i} - \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} \right),$$

d'onde resulta a egualdade

$$[F, H]_{z, x, p} = \rho \, [F, H]_{z', x', p'}$$

que justifica a proposição enunciada.

Convém notar que a funcção ρ deve ser deduzida da identidade

$$dz - \sum_{i=1}^{n} P_i \, dx_i = \rho \left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i \right)$$

III

27. — As transformações de contacto da fórma

$$z' = Z(z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots, p_n), \; x'_i = X_i(x, p), \; p'_i = P_i(x, p)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

ás quaes se dá o nome de *transformações em x, p*, constituem uma classe muito importante. D'ellas nos occupamos em seguida.

Temos em primeiro logar o theorema seguinte:

Se $(2n+1)$ *funcções* $z', x'_1, \ldots, x'_n, p'_1, \ldots, p'_n$ *da fórma*

$$(25)\quad z' = Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),\ x'_i = X_i(x,p),\ p_i = P_i(x,p)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfizerem identicamente á relação differencial

$$(11)\qquad dz' - \sum_{i=1}^{n} p'_i dx'_i = \rho\,(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i)\ ,$$

onde ρ *não é nullo, a grandeza* ρ *reduz-se a uma constante* A, *e* Z *tem a fórma*

$$(26)\qquad Z = Az + \Omega\,(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)\,;$$

além d'isto, as funcções Z, X, P *são independentes e teem logar identicamente as relações*

$$(27)\quad \begin{cases} [Az + \Omega\,, X_i] = 0 \quad , \quad [P_i, Az + \Omega] = AP_i\,, \\ (X_i\,, X_j) = (P_i\,, P_j) = (P_i\,, X_j) = 0 \qquad (i \gtrless j) \\ (P_i\,, X_i) = A \\ \qquad\qquad (i\,, j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Este theorema deduz-se muito simplesmente d'aquillo que ficou dito em o n.º 22.

Com effeito, as funcções Z, X, P verificam identicamente as relações (13), (14), (15) e (12) do n.º 22, visto que satisfazem á relação differencial (11).

Na hypothese que consideramos a relação (13) toma a fórma

$$(13')\qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = \rho$$

e as expressões (14) e (15), combinadas com a precedente, reduzem-se respectivamente ás seguintes:

$$(14') \qquad \frac{\partial \rho}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 Z}{\partial z \partial p_k} = 0 ,$$

$$(15') \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 Z}{\partial z \partial x_k} = - p_k \frac{\partial \rho}{\partial z} .$$

A expressão (14′) mostra que ρ não contém $p_1,\ldots,p_n$; e de (15′), que deve ser satisfeita para todos os systemas de valores de z, x, p, conclue-se em seguida que ρ tambem é independente de z, $x_1, \ldots, x_n$. A grandeza ρ é, pois, uma quantidade constante. A formula (13′) dá então, designando por A aquella constante, a expressão

$$Z = Az + \Omega(x_1, \ldots, x_n) ,$$

onde Ω é uma funcção que não contém a variavel z.

As relações (12), pelo seu lado, reduzem-se na nossa hypothese ás expressões (27), como se reconhece facilmente attendendo a (26) e notando que o colchete [F, H] se reduz ao parenthesis

$$(F, H) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right),$$

sempre que se trate de duas funcções F e H que não encerrem a variavel z.

Finalmente, as funcções Z, X, P são independentes (§ 22) por verificarem identicamente a relação differencial (11). O nosso theorema acha-se assim demonstrado.

28. — Substituindo, nas formulas (11) e (26) as funcções Z, X_1, ..., X_n respectivamente por AZ, AX_1, ..., AX_n e pondo em seguida

$$Z = z - \Pi(x, p),$$

o theorema do numero precedente reduz-se ao seguinte:

Se $(2n+1)$ *funcções* Π, X_1, ..., X_n, P_1, ..., P_n *das* $2n$ *variaveis indifferentes* x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n *satisfizerem identicamente á relação differencial*

$$d\Pi + \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i,$$

terão logar identicamente as relações

$$(X_i, X_j) = (P_i, P_j) = (P_i, X_j) = 0 \qquad (i \gtrless j)$$

$$(P_i, X_i) = 1 \quad , \quad [X_i, Z - \Pi] = 0 \quad , \quad [P_i, z - \Pi] = P_i$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

e as funcções X, P *são independentes umas das outras.*

29. — O theorema do n.º 27 diz-nos que as funcções Z, X, P, que figuram em uma transformação de contacto da fórma (25), satisfazem identicamente ás relações (27).

Devemos, porém, notar que são *sufficientes* para caracterisar uma tal transformação aquellas das expressões (27) que só conteem as funcções X, P.

Para vêr isto, demonstremos primeiro a proposição:

Dadas n *funcções* X_1, ..., X_n *das* $2n$ *variaveis independentes* x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n, *distinctas e em involução, podem determinar-se* $(n+1)$ *funcções* Π, P_1, ..., P_n *das mesmas variaveis, taes que tem logar identicamente a relação*

$$d\Pi + \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\,,$$

ou ainda, que as formulas

$$z' = z - \Pi\,(x, p)\,,\quad x_i' = X_i\,(x, p)\,,\quad p_i' = P_i\,(x, p)$$

definem uma transformação em x, p. A funcção Π é dada por uma quadratura e satisfaz identicamente ás relações

$$[z - \Pi,\ X_i] = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\,;$$

as funcções $P_1, \ldots, P_n$ são em seguida fornecidas por um systema de equações do primeiro grau e acham-se com as funcções X nas relações

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (X_i\,, X_j) = (P_i\,, P_j) = (P_i\,, X_j) = 0 & (i \gtrless j), \\ \qquad (P_i\,, X_i) = 1, & (i, j = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Com effeito, pela theoria das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, é sabido que as equações

$$(29)\qquad [X_1\,,\ \varphi] = 0, \qquad \ldots, \qquad [X_n\,,\ \varphi] = 0$$

constituem um systema completo de n equações distinctas, visto que as funcções $X_1, \ldots, X_n$ se acham em *involução,* isto é, satisfazem identicamente ás relações

$$(X_i\,, X_j) = 0\,, \qquad (i\,, j = 1,\ 2, \ldots, n).$$

Além d'isto, o systema (29) admitte claramente $(n + 1)$ integraes distinctos, (excesso do numero das variaveis z, x, p sobre o numero das equações), dos quaes um, pelo menos, conterá a variavel z; d'estes integraes são conhecidos $X_1, \ldots, X_n$.

Posto isto, transformemos o systema (29) por meio das formulas

(30) $z=z,\ y_1=X_1, \ldots, y_n=X_n,\ y_{n+1}=X_{n+1}, \ldots, y_{2n}=X_{2n}$,

onde $X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$ designam funcções dos variaveis x, p, escolhidas de modo que formem com $X_1, \ldots, X_n$ um systema de $2n$ equações distinctas. O systema que assim se obtém é ainda completo e admitte, como integraes, as grandezas $y_1, \ldots, y_n$.

Para effectuar a referida transformação, temos de substituir $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, \ldots$ por expressões analogas a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_{2n}}\frac{\partial y_{2n}}{\partial x_i}$$

e, em seguida, as variaveis $x_1, \ldots, x_n$, pelas variaveis $y_1, \ldots, y_{2n}, p_1, \ldots, p_n$. As equações transformadas teem, pois, a fórma

$$(31)\quad \left\{ \begin{array}{l} L_1^{(i)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{n+1}} + \ldots + L_n^{(i)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{2n}} + L_{n+1}^{(i)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \\ \qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

onde os coefficientes L são funcções de $y_1, \ldots, y_n$, $p_1, \ldots, p_n$, visto que, admittindo os integraes $y_1, \ldots, y_n$, não podem conter termos em $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n+1}}$.

O systema que acabámos de escrever é resoluvel em ordem a $\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial y_{2n}}$ porque, se o não fosse, teriamos $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ e não haveria portanto funcção alguma, contendo z, que satisfizesse ao systema (29), o que é contra o que acima dissemos; isto é, póde reduzir-se a um systema iacobiano da fórma

$$(32)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n+1}} + A_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_{2n}} + A_n\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,,$$

onde os coefficientes $A_1, \ldots, A_n$ não encerram z.

Ora, quando se tem um systema iacobiano

$$X_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_1^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + b_n^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}}\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots m)\,,$$

é sabido que são satisfeitas identicamente as relações

$$X_i(b_h^k) - X_k(b_h^i) = 0\,, \quad \begin{cases} (i, k = 1, 2, \ldots, m) \\ (h = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

No nosso caso estas condições reduzem-se a

$$\frac{\partial A_k}{\partial y_{n+i}} + A_i\frac{\partial A_k}{\partial z} = \frac{\partial A_i}{\partial y_{n+k}} + A_k\frac{\partial A_i}{\partial z}\,,$$

$$(i\,, k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

ou ainda, a

$$\frac{\partial A_k}{\partial y_{n+i}} = \frac{\partial A_i}{\partial y_{n+k}}\,, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

visto que os coefficientes $A_1, \ldots, A_n$ não conteem z.

Existe, pois, uma funcção Π que satisfaz á relação

$$d\Pi = A_1\, dy_{n+1} + \ldots + A_n\, dy_{2n},$$

ou, o que é o mesmo, ás expressões

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_{n+1}} = A_1, \; \ldots, \; \frac{\partial \Pi}{\partial y_{2n}} = A_n.$$

O systema (32) reduz-se ás relações precedentes, quando n'elle se suppõe $\varphi = z - \Pi$ e é por isso satisfeito pela funcção $\varphi = z - \Pi$.

D'aqui se conclue que podemos determinar por uma quadratura uma funcção Π das variaveis x, p que satisfaz identicamente ás relações

$$[z - \Pi, X_i] = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Conhecida a funcção Π, reconhece-se pelo raciocinio do n.º 23 que as equações

$$(13') \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = \rho,$$

$$(14) \qquad \frac{\partial Z}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0,$$

$$(15) \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = -\rho p_k,$$

permittem determinar, e de uma só maneira, valores de $\rho, P_1, \ldots P_n$, taes que tenha logar identicamente a relação

$$d(z - \Pi) - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dX_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i,$$

ou ainda, que as equações

$$z' = z - \mathrm{H}(x, p) \quad x_i = \mathrm{X}_i(x, p) \quad , \quad p'_i = \mathrm{P}_i(x, p),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

definam uma transformação em x, p e sejam satisfeitas identicamente as equações (28), o que justifica o theorema enunciado.

30. — O theorema que vimos de demonstrar permitte-nos estabelecer o seguinte, que justifica o que dissemos no principio do n.º precedente:

Se $2n$ funcções $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ das $2n$ variaveis independentes $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, satisfizerem identicamente ás equações

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{c} (\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j) = (\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j) = (\mathrm{P}_i, \mathrm{X}_j) = 0, \quad (i \lessgtr j), \\ (\mathrm{P}_i, \mathrm{X}_i) = \mathrm{A}, \end{array} \right.$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

onde A designa uma constante differente de zero, é a expressão

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i \, d\mathrm{X}_i - \mathrm{A} \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i$$

uma differencial exacta, isto é, póde determinar-se uma funcção Ω das mesmas variaveis, tal que tem logar identicamente a relação

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i \, d\mathrm{X}_i - d\,\Omega = \mathrm{A} \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i,$$

ou ainda, que as equações

$$(34) \quad \begin{cases} z' = \Lambda z + \Omega(x, p)\,,\ x'_i = X_i\,(x, p)\,,\ p'_i = P_i\,(x, p) \\ (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{cases}$$

definem uma transformação de contacto.

Em primeiro logar, é facil de vêr que as funcções X, P são independentes umas das outras.

Na verdade, se houvesse uma relação da fórma

$$P_k = L\,(P_1, \ldots, P_{k-1}, P_{k+1}, \ldots, P_n, X_1, \ldots, X_n)$$

entre aquellas funcções, deduzir-se-ia, attendendo ás condições (33), a expressão

$$(P_k, X_k) = (L.\ X_k) = o,$$

a qual não póde ter logar, como evidentemente se reconhece pelas mesmas condições.

Um resultado analogo se obtém, partindo de uma relação

$$X_k = M\,(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n)$$

entre as funcções X.

As funcções X, P são pois independentes umas das outras.

Visto que as funcções $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e se acham, por hypothese, em involução, podemos determinar, em vista do theorema do n.º precedente, $(n+1)$ funcções $U, \Pi_1, \ldots, \Pi_n$ que satisfazem identicamente ás equações

$$(35) \quad \begin{cases} (X_i, X_j) = (\Pi_i, \Pi_j) = (\Pi_i, X_j) = o\ ,\ (i \lesseqgtr j)\,, \\ (\Pi_i, X_i) = 1\ , \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{cases}$$

e á relação differencial

$$(36)\qquad dU + \sum_{i=1}^{n} \Pi_i dX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \,.$$

Comparando os dois grupos de formulas (33) e (35), obtéem-se claramente as identidades

$$(X_i, P_j - A\Pi_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

isto é, vê-se que cada funcção $P_j - A\Pi_j$ é uma solução commum das n equações differenciaes lineares

$$(X_1, f) = 0, \quad \ldots, \quad (X_n, f) = 0\,.$$

Estas equações são independentes, como facilmente se reconhece, substituindo, em vez de f, successivamente as funcções $P_1, \ldots, P_n$ e attendendo ás condições (33); admittem, portanto, visto que encerram $2n$ variaveis, n integraes distinctos, que são claramente as funcções $X_1, \ldots, X_n$. D'isto resulta que cada integral $P_j - A\Pi_j$ se póde exprimir nas funcções X, isto é, que se tem

$$(37)\quad P_j - A\Pi_j = W_j(X_1, \ldots, X_n)\,,\ (j = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Ora, visto que devem ser identicamente nullos os parenthesis

$$(P_i, P_j) = (A\Pi_i + W_i, A\Pi_j + W_j)\,,$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

os quaes, desenvolvidos, se transformam facilmente em

$$A\left(\frac{\partial W_j}{\partial X_i} - \frac{\partial W_i}{\partial X_j}\right), \quad (i, j, = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

existe uma funcção W que satisfaz á relação

$$dW = W_1 dX_1 + \ldots + W_n dX_n \,.$$

Por isso, podem as expressões (37) tomar a fórma

$$P_j = A\Pi_j + \frac{\partial W(X_1, \ldots, X_n)}{\partial X_j} \,, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

d'onde resulta

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = A \sum_{i=1}^{n} \Pi_i dX_i + dW \,,$$

ou, attendendo a (36),

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dX_i - A \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = d(W - AU) \,,$$

expressão que figura no enunciado do theorema, se suppozermos $W - AU = \Omega$.

A relação precedente póde ainda tomar evidentemente a fórma

$$d(Az + \Omega) - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = A\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right) \,,$$

d'onde se conclue, por serem independentes as funcções de X, P, que as formulas (34) definem uma transformação do contacto em x, p.

As expressões (33) caracterisam, pois, uma transformação em x, p, como tinhamos dicto no principio do n.º 29.

31. — O que se disse em o n.º 26 relativamente ás transformações de contacto geraes, é applicavel ás transformações de contacto em x, p.

Por isso, temos:

O parenthesis $(u, v)_{x,p}$, onde u e v designam funcções das variaveis x, p, converte-se, por uma transformação da fórma (34), na expressão $A\,(u, v)_{x',p'}$, em que A designa uma constante differente de zero.

A constante A deve determinar-se pela identidade

$$dz - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = A\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right).$$

32. — Reciprocamente, *sendo dada uma transformação*

$$x'_i = X_i(x_1, \ldots, x_n, p, \ldots, p_n) \quad , \quad p'_i = P_i(x,p)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

que deixa invariante o parenthesis $(u, v)_{x,p}$, onde u, v designa funcções das $2n$ variaveis independentes x, p, póde determinar-se uma funcção Ω das mesmas variaveis, tal que seja

$$z' = z + \Omega(x,p) \ , \ x'_i = X'_i(x,p) \ , \ p'_i = P_i(x,p)$$

uma transformação de contacto.

Esta proposição conclue-se directamente das relações

$$(X_i, X_j)_{x,p} = (X_i, X_j)_{x',p'} = (x'_i, x'_j)_{x',p'} = 0 \ ,$$
$$(P_i, X_j)_{x,p} = (P_i, X_j)_{x',p'} = (p'_i, x'_j)_{x',p'} = 0 \ ,$$
$$(P_i, P_j)_{x,p} = (P_i, P_j)_{x',p'} = (p'_i, p'_j)_{x',p'} = 0 \ ,$$
$$(P_i, X_i)_{x,p} = (P_i, X_i)_{x',p'} = (p'_i, x'_i)_{x',p'} = 1 \ ,$$

que mostram que as funcções X, P se acham nas condições a que se refere o theorema do n.° 30.

33. — Para terminarmos o que temos a dizer sobre as transformações em x, p, apresentemos ainda os principios seguintes, que se estabelecem do mesmo modo que os principios analogos (§ 21) relativos ás transformações de contacto geraes:

I. — *As transformações de contacto em x, p fórmam um grupo e conjugam-se duas a duas como inversas.*

II. — *A transformação resultante da eliminação de z', x', p' entre as duas transformações de contacto*

$$z' = \mathrm{A}z + \Omega(x, p)\ ,\ x'_i = \mathrm{X}_i(x, p)\ ,\ p'_i = \mathrm{P}_i(x, p)$$

e

$$z' = \mathrm{A}_1\zeta + \Lambda_1(\chi, \pi)\ ,\ x'_i = \mathrm{Y}_i(\chi, \pi)\ ,\ p'_i = \mathrm{P}_i(\chi, \pi)$$

é ainda uma transformação de contacto em x, p.

IV

34. — N'esta secção vamos considerar o caso particular muitissimo importante das transformações de contacto em x, p,

$$z' = \mathrm{A}z + \Omega(x, p)\ ,\ x'_i = \mathrm{X}_i(x, p)\ ,\ p'_i = \mathrm{P}_i(x, p)\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

em que a funcção Ω se reduz a uma constante.

Temos primeiro o theorema:

Se as formulas

$$(38)\quad \left\{ \begin{array}{c} z' = \mathrm{A}z + \mathrm{B}\ ,\ x'_i = \mathrm{X}_i(x, p)\ ,\ p'_i = \mathrm{P}_i(x, p)\,, \\ (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{array} \right.$$

onde A *e* B *designam constantes quaesquer (sendo* A *differente de zero), definirem uma transformação de contacto, as funcções* X, P *são homogeneas e respectivamente dos graus* 0 *e* 1 *em relação ás variaveis* $p, \ldots, p_n$ *e satisfazem ás relações*

$$(39)\quad \begin{cases} (X_i, X_j) = (P_i, P_j) = (P_i, X_j) = 0\,, & (i \lessgtr j)\,, \\ \qquad (P_i, X_i) = A\,, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \end{cases}$$

Com effeito, as formulas (38) estão nas condições a que se refere o theorema do n.° 27 e por isso as funcções $Az + B$, X, P satisfazem identicamente ás relações (27). Ora, sendo Ω constante, as duas primeiras d'aquellas equações reduzem-se ás seguintes:

$$\sum_{i=1}^{n} p_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j} = 0\,, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = P_i\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,;$$

d'estas expressões conclue-se, tendo em vista o theorema de Euler sobre as funcções homogeneas, que X, P são homogeneas e dos graus 0 e 1 em relação a $p_1, \ldots, p_n$. As outras equações (27) são exactamente as expressões (39).

O theorema acha-se assim demonstrado.

35. — Do theorema precedente, resulta immediatamente que:

Uma transformação de contacto da fórma (38) *converte cada funcção das variaveis* x, p, *homogenea em relação a* $p_1, \ldots, p_n$, *em uma funcção de* x', p', *homogenea em* $p'_1, \ldots, p'_n$.

Esta proposição póde inverter-se, como vamos vêr:

Se uma transformação de contacto da fórma

$$(34)\quad z' = \Lambda z + \Omega(x, p)\ ,\ x'_i = X_i(x, p)\ ,\ p'_i = P_i(x, p)\ ,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

converter cada funcção das variaveis x, p, homogenea em relação a $p_1, \ldots, p_n$, em uma funcção de x', p', homogenea em $p'_1, \ldots, p_n$, a funcção Ω reduz-se a uma constante.

Na verdade, como as formulas (34) definem uma transformação de contacto em x, p, as funcções $\Lambda z + \Omega$, X, P satisfazem identicamente ás relações

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} [X_i\,,\Lambda z + \Omega] = 0\ ,\qquad [P_i\,,\Lambda z + \Omega] = \Lambda P_i\ , \\ (X_i\,,X_j) = (P_i\,,P_j) = (X_i\,,X_j) = 0\ ,\ \ (i \lesseqgtr j)\ , \\ (P_i\,,X_i) = \Lambda\ ,\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right.$$

do n.º 27, das quaes as $2n$ primeiras podem tomar a fórma

$$(40)\ (X_i, \Omega) + \Lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j} = 0\ ,\ (P_i, \Omega) + \Lambda \sum_{j=1}^{n} (p_j \frac{\partial P_i}{\partial p_j} - P_i) = 0.$$

Ora, attendendo á condição imposta á transformação de contacto (34), reconhece-se immediatamente que as funcções X, P são homogeneas em relação a $p_1, \ldots, p_n$.

O grau de homogeneidade de $X_1, \ldots, X_n$ é 0, visto que deve ser homogenea em relação a $p, \ldots, p_n$ a funcção $X + X^2$, em que se transforma a expressão $x' + x'^2$, que é homogenea do grau 0 em $p'_1, \ldots, p'_n$. O grau de homogeneidade de $P_1, \ldots, P_n$ é 1, como facilmente se reconhece, attendendo ao grau das funcções X e aos parenthesis

$$(L_1, X_1) = \ldots = (P_n, X_n) = \Lambda,$$

que são homogeneos do grau 0 em $p_1, \ldots, p_n$. Em vista da homogeneidade das funcções X, P, as formulas (40) reduzem-se ás equações lineares

$$(X_i, \Omega) = o \ , \ (P_i, \Omega) = o \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad ,$$

que encerram as $2n$ variaveis x, p e são distinctas, como se vê, substituindo Ω successivamente por $X_1, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$ e tendo em attenção as formulas (27). D'aqui se conclue que é Ω necessariamente uma quantidade constante.

36. — Consideremos mais especialmente o caso particular, em que os coefficientes A e B das formulas (38) se reduzem respectivamente a 1 e 0, isto é, as transformações de contacto da fórma

$$z' = z, \quad x'_i = X_i\,(x, p), \quad p'_i = P_i\,(x, p) \ , (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Terá logar identicamente a relação

$$dz - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dX_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i$$

ou

$$(41) \quad P_1\, dX_1 + \ldots + P_n\, dX_n = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n.$$

Obtemos assim *transformações da fórma*

$$x'_i = X_i\,(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \quad , \quad p'_i = P_i\,(x, p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

entre as variaveis x, p e x', p', apenas, em que as funcções X, P *são constituidas de modo que verificam identicamente a relação differencial* (41).

Ás transformações d'esta cathegoria, que são de uma alta importancia, dá-se o nome de *transformações de contacto homogeneas*.

D'ellas nos vamos occupar em seguida.

37. — *Se a relação differencial*

$$(41)\quad P_1\, dX_1 + \ldots + P_n\, dX_n = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n$$

fôr identicamente satisfeita por $2n$ *funcções* $X_1, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$ *das* $2n$ *variaveis independentes* x, p, *estas funcções são distinctas e teem logar identicamente as relações*

$$(42)\quad \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = P_i, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j} = 0\,, \\ (P_i, X_j) = (X_i, X_j) = (P_i, P_j) = 0, \quad (i \lesseqgtr j)\,, \\ (P_i, X_i) = 1\,, \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Com effeito, na nossa hypothese é satisfeita identicamente a expressão

$$dz - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dx_n = dz - p_1\, dx_1 - \ldots p_n\, dx_n$$

e as formulas

$$z' = z,\ x'_i = X_i\,(x, p),\ \ p'_i = P_i\,(x, p),\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definem, por isso, uma transformação de contacto em x, p.

Esta transformação é um caso particular das transformações consideradas em o n.º (34), o que justifica evidentemente o nosso theorema.

38. — Reciprocamente, *se forem dadas $2n$ funcções $X_1, \ldots, X_n$ $P_1, \ldots, P_n$ das $2n$ variaveis $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, que satisfaçam identicamente ás expressões* (42), *terá identicamente logar a relação differencial* (41).

Em primeiro logar, as funcções X, P são distinctas, pelo que se disse em o n.º 30. Além d'isto, reconhece-se pelas $2n$ primeiras formulas (42) que teem logar identicamente as expressões

$$[z, X_i] = o\ , \quad [P_i, z] = P_i\ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Estas condições mostram, conjunctamente com

$$(43)\begin{cases} (P_i, X_j) = (X_i, X_j) = (P_i, P_j) = o\ , & (i \gtrless j), \\ (P_i, X_i) = 1\ , & (i, j, = 1, 2, \ldots, n)\ , \end{cases}$$

e attendendo ao que se disse em o n.º 29, que as funcções z, X, P satisfazem identicamente á relação differencial

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n\ ,$$

como queriamos demonstrar.

39. — Do que fica dito nos dois n.ºs precedentes resulta claramente o theorema:

Para que as formulas

$$x_i = X_i(x, p)\ , \ p_i = P_i(x, p)\ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definam uma transformação de contacto homogenea é necessario e sufficiente que as funcções X, P *sejam homogeneas e respectivamente dos graus* 0 *e* 1 *em relação ás variaveis $p_1, \ldots, p_n$ e que, além d'isso, satisfaçam identicamente ás expressões* (43).

40. — Demonstremos ainda o theorema:

Dadas n funcções $X_1, \ldots, X_n$ dos $2n$ variaveis independentes x, p, distinctas, em involução e homogeneas do grau 0 em relação a $p_1, \ldots, q_n$, póde determinar-se um, e um só, systema de funcções $P_1, \ldots, P_n$, que, conjunctamente com as funcções $X_1, \ldots, X_n$, definam uma transformação de contacto homogenea

$$(44) \qquad x_i = X_i(x, p), \quad p_i = P_i(x, p), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Na verdade, satisfazendo as funcções X ás condições $(X_i, X_j) = 0$, podemos determinar (§ 29) um, e um unico, systema de funcções $P_1, \ldots, P_n$, que verifica identicamente as condições

$$(X_i, X_j) = (P_i, P_j) = (X_i, X_j) = 0 \;, \; (i \lesseqgtr j) \,,$$

$$(P_i, X_i) = 1 \;, \; (i, j = 1, 2, \ldots, n) \,.$$

Por outro lado, sendo as funcções X homogeneas do grau 0, reconhece-se pelas expressões $(P_i, X_i) = 1$, como vimos em o n.º 35, que é tambem identicamente:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = P_i \,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \,.$$

São, portanto, satisfeitas todas as condições (42) e definem, por isso, as formulas (44) uma transformação de contacto homogenea.

41. — Para terminarmos o que temos a dizer sobre as transformações homogeneas, vamos ainda notar que subsistem para ellas as propriedades demonstradas em o n.º 21 para as transformações de contacto geraes:

I. — *As transformações de contacto homogeneas são inversas duas a duas.*

É o que resulta immediatamente da sua definição.

II. — *A transformação*

$$x''_i = \chi_i(X, P) \quad , \quad p''_i = \Pi_i(X, P) \, ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

resultante de duas transformações de contacto homogeneas

$$x'_i = X_i(x, p) \quad , \quad p'_i = P_i(x, p) \, ,$$

e

$$x''_i = \chi_i(x', p') \quad , \quad p''_i = \Pi_i(x', p') \, ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n) \, .$$

effectuadas seguidamente, é ainda uma transformação de contracto homogenea.

Com effeito, escrevendo e comparando as relações differenciaes correspondentes a estas duas transformações, obtem-se a expressão

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i(X, P) . d\chi(X, P) = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \, ,$$

que justifica a proposição enunciada.

III. — Finalmente, *se os dois grupos de formulas*

$$(44) \qquad x'_i = X_i(x, p) \quad , \quad p'_i = P_i(x, p) \, ,$$

e

$$(45) \qquad x'_i = Y_i(y, q) \quad , \quad p'_i = Q_i(y, q) \, ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

definirem transformações de contacto homogeneas, tambem as formulas

$$X_i(x, p) = Y_i(y, q) \quad , \quad P_i(x, p) = Q(y, q) \, ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

representarão uma transformação da mesma natureza.

Porque, evidentemente, estas ultimas equações satisfazem identicamente a expressão

$$q_1 dy_1 + \ldots + q_n dy_n = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n ,$$

que resulta de se suppôr que (44) e (45) representam transformações de contacto.

V

42. — Vamos agora ver que de uma transformação de contacto homogenea a $(2n+2)$ variaveis se póde deduzir uma transformação de contacto geral a $(2n+1)$ variaveis completamente determinada e que, reciprocamente, de uma transformação d'esta ultima natureza se póde passar para uma transformação homogenea.

Seja dada, em primeiro logar, uma transformação de contacto homogenea

$$(46) \quad y'_i = Y_i(y_1, \ldots, y_{n+1}, q_1, \ldots, q_{n+1}), \; q'_i = Q_i(y, q),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

a $(2n+2)$ variaveis $y_1, \ldots, y_{n+1}, q_1, \ldots, q_{n+1}$.

Ponhamos

$$(47) \left\{ \begin{array}{lll} y_{n+1} = z, \; y_1 = x_1, & \ldots, & y_n = x_n, \\ \dfrac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, & \ldots, & \dfrac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n, \\ y'_{n+1} = z', \; y'_1 = x'_1, & \ldots, & y'_n = x'_n, \\ \dfrac{q'_1}{q'_{n+1}} = -p'_1, & \ldots, & \dfrac{q'_n}{q'_{n+1}} = -p'_n, \end{array} \right.$$

Como é sabido, as funcções Y, Q são homogeneas e respectivamente dos graus 0 e 1 em relação ás variaveis $q_1, \ldots, q_n$; isto permitte-nos escrever:

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} Y_{n+1} &= Z\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right), \\ Y_i &= X_i\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right), \\ \frac{Q_i}{Q_{n+1}} &= -P_i\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Em vista d'isto, as formulas (46) e a relação differencial

$$(49)\quad Q_1 dY_1 + \ldots + Q_{n+1} dY_{n+1} = q_1 dy_1 + \ldots + q_{n+1} dy_{n+1},$$

que as funcções Y e Q verificam identicamente, reduzem-se respectivamente a

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} & z' = Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \\ & x'_i = X_i(z, x, p), \quad p'_i = P_i(z, x, p), \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right.$$

e

$$(51)\quad dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right),$$

onde ρ designa a expressão $\frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}}$. A grandeza ρ póde exprimir-se em funcção das variaveis z, x, p, visto que apenas encerra as variaveis y, q e é homogenea em relação a $q_1, \ldots, q_{n+1}$. A relação (51) será então satisfeita identicamente pelas relações (50), como a equação (49) o é em virtude de (46) e por isso as formulas (50) definem uma transformação de contacto em z, x, p.

Supponhamos agora que é dada uma transformação de contacto da fórma (50), a qual satisfaz identicamente á relação (51). Fazendo uso das formulas de ligação (47) e attendendo a (48), a relação (51) converte-se na expressão (49) que deve ser identicamente satisfeita pelo systema transformado de (50), o qual, tendo a fórma (46), representa uma transformação de contacto homogenea.

43. — A ligação que acabamos de desenvolver entre as transformações de contacto geraes e as transformações de contacto homogeneas é de uma grande importancia: permitte-nos determinar todas as transformações de uma d'aquellas classes, quando são conhecidas as da outra classe e constitue, além d'isto, um processo geral para converter cada theorema relativo ás transformações de contacto em z, x, p em um theorema sobre as transformações de contacto homogeneas e reciprocamente.

Façamos uma applicação do principio a que nos referimos, considerando o theorema do n.º 38, o qual, no caso de $(2n + 2)$ variaveis y, q, póde assim enunciar-se:

Para que $(2n + 2)$ funcções $Y_1, \ldots, Y_{n+1}, Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ das $(2n + 2)$ variaveis independentes $y_1, \ldots, y_{n+1}, q_1, \ldots, q_{n+1}$ satisfaçam identicamente á relação differencial

$$Q_1 dY_1 + \ldots + Q_{n+1} dY_{n+1} = q_1 dy_1 + \ldots + q_{n+1} dy_{n+1},$$

é necessario e sufficiente que tenham logar identicamente as relações

$$(52)\begin{cases}(Q_i, Q_j) = (Q_i, Y_j) = (Y_i, Y_j) = o, \quad (i \lesseqgtr j), \\ (Q_i, Y_i) = 1, \ \sum_{i=1}^{n} q_j \dfrac{\partial Y_i}{\partial q_j} = o, \ \sum_{j=1}^{n} q_j \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j} = Q_i, \\ \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1).\end{cases}$$

Para acharmos o theorema que procuramos, não temos mais do que substituir nas relações precedentes as variaveis y, q pelas variaveis z, x, p, fazendo uso, para isso, das formulas (47) e (48). Antes de fazermos esta substituição, notemos que, se transformarmos duas funcções F e H de $y_1, \ldots, y_{n+1}, \dfrac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, \dfrac{q_n}{q_{n+1}}$, pelas formulas (47), teremos identicamente

$$(53) \qquad (F, H)_{y, q} = -\frac{1}{q_{n+1}} [F, H]_{z, x, p}.$$

Isto reconhece-se, desenvolvendo o parenthesis (F, H) e attendendo ás expressões

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n+1}} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_i} = -\frac{1}{q_{n+1}} \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_{n+1}} = -\frac{1}{q_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial F}{\partial p_j},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

e ás que procedem d'estas pela mudança de F em H. Effectuemos agora a transformação (47).

A relação

$$Q_1\,dY_1 + \ldots + Q_{n+1}\,dY_{n+1} = q_1\,dy_1 + \ldots + q_{n+1}\,dy_{n+1}$$

reduz-se, como vimos, a

$$dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i\,dX_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i\right),$$

onde Z, X, P, ρ são funcções das $(2n+1)$ variaveis z, x, p. Achemos as transformadas das expressões (52).

As relações

$$(Y_i, Y_j)_{y,\,q} = 0 \quad , \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

tomam, em virtude de (53), a fórma

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [Z, X_i] = 0, (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Consideremos agora a expressão $(Q_{n+1}, Y_{n+1}) = 1$. Acha-se facilmente, attendendo ás egualdades $\frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}} = \rho$ e $(q_{n+1}, F)_{y,\,q} = \frac{\partial F}{\partial z}$, a relação

$$\begin{aligned}(Q_{n+1}, Y_{n+1}) &= \frac{1}{\rho}(q_{n+1}, Z) + q_{n+1}\left(\frac{1}{\rho}, Z\right)\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2}[\rho, Z]_{z,\,x,\,p},\end{aligned}$$

d'onde resulta que é $(Q_{n+1}, Y_{n+1}) = 1$ equivalente a

$$[\rho, Z] + \rho\frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2 = 0\,.$$

Do mesmo modo se obtéem para

$$(Q_{n+1}, Y_i) = o, \quad (Q_{n+1}, Q_i) = o, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

respectivamente a expressões

$$[\rho, X_i] + \rho\frac{\partial X_i}{\partial z} = o, \quad [\rho, P_i] + \rho\frac{\partial P_i}{\partial z} = o.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tem-se tambem

$$(Q_i, Y_i) = -Q_{n+1}.(P_i, Y_i) - P_i.(Q_{n+1}, Y_i) = \frac{1}{\rho}[P_i, X_i],$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'onde se deduz

$$[P_i, X_i] = \rho \;, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

visto ser $(Q_i, Y_i) = 1$; acha-se da mesma fórma que ás relações

$$(Q_i, Q_j) = o, \quad (Q_i, Y_j) = o, \quad (Q_i, Y_{n+1}) = o, \quad (i \lesseqgtr j),$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

correspondem respectivamente

$$[P_i, P_j] = o, \quad [P_i, X_j] = o, \quad [P_i, Z] = \rho\, P_i, \quad (i \lesseqgtr j),$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Finalmente, das condições de homogeneidade não procede relação alguma entre as funcções Z, X, P, ρ.

Do que precede, resulta pois que:

Para que $(2n+2)$ *funcções* $Z, X_1, \ldots, X_n$ $P_1, \ldots, P_n$, ρ *das* $(2+1)$ *variaveis independentes* $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ *satisfaçam identicamente á relação differencial*

$$dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dX_i = \rho\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i\right),$$

é necessario e sufficiente que sejam identicamente satisfeitas as expressões:

$$(54)\left\{\begin{aligned} &[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = [P_i, X_j] = 0\ , \ (i \gtrless j)\,, \\ &[P_i, X_i] = \rho\ , \ [Z, X_i] = [Z, P_i] + \rho\, P_i = 0\ , \ (\rho \lessgtr 0)\,, \\ &[\rho, X_i] + \rho\frac{\partial X_i}{\partial z} = [\rho, P_i] + \rho\frac{\partial P_i}{\partial z} = [\rho, Z] + \rho\frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2 = 0, \\ &\qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

As tres ultimas formulas do quadro precedente não são distinctas das anteriores, como se reconhece applicando ás funcções Z, X, P a formula

$$\Big[[u, v], w\Big] + \Big[[v, w], u\Big] + \Big[[w, u], v\Big]$$

$$= \frac{\partial w}{\partial z}[v, u] + \frac{\partial u}{\partial z}[w, v] + \frac{\partial v}{\partial z}[u, w],$$

devida a Mayer, e conhecida da theoria das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem.

O theorema que acabámos de demonstrar completa a proposição do n.º 22.

44. — Suppondo $\rho = 1$ nas ultimas tres formulas (54), obtém-se as expressões

$$\frac{\partial X_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 1 \ , \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ ,$$

que nos conduzem immediatamente ao theorema seguinte:

Se $(2n+1)$ *funcções* $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ *das* $(2n+1)$ *variaveis independentes* $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ *satisfizerem identicamente á relação*

$$dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \ ,$$

estas funcções teem a fórma:

$$Z = z + \Omega(x, p) \ , \ x'_i = X_i(x, p) \ , \ p'_i = P_i(x, p) \ .$$

CAPITULO III

Determinação das transformações de contacto — Diversas propriedades das mesmas transformações

I

45. — Cada uma das tres classes de transformações de contacto mencionadas no capitulo anterior é, como vimos, caracterisada por um systema de equações lineares ás derivadas parciaes de primeira ordem. Para obter, portanto, todas as transformações de uma qualquer d'aquellas classes não temos mais do que integrar, pelos methodos conhecidos, o systema de equações que a caracterisa. Na determinação das transformações de contacto póde, porém, seguir-se um processo, que é independente de quaesquer integrações. É este methodo que vamos expôr no presente capitulo, onde tambem reunimos diversas propriedades importantes das mesmas transformações.

46. — Consideremos primeiro as transformações de contacto homogeneas, isto é, as transformações de contacto da fórma

$$(1)\quad \begin{cases} x'_i = X_i(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad p'_i = P_i(x, p), \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Temos a seguinte proposição:

Obtéem-se todas as transformações de contacto da fórma (1), *eliminando as indeterminadas* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *de todos os systemas da fórma*

$$(2)\quad \begin{cases} \phi_1(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \phi_k = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = p_i, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x'_i} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x'_i} = -p'_i, \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

onde k *representa um dos numeros* $0, 1, \ldots, n$ *e* $\phi_1 = 0, \ldots, \phi_k = 0$ *relações distinctas quaesquer entre as variaveis* x, x', *em virtude das quaes se não annulle o determinante*

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x'_1}, \ldots, & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x'_n}, & 0, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x'_1}, \ldots, & \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x'_n}, & 0, \ldots, & 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial x'_1}, \ldots, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1\, \partial x'_n}, & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \ldots, & \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n\, \partial x_1}, \ldots, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n\, \partial x'_n}, & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_n}, \ldots, & \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

onde U *designa a expressão* $\lambda_1 \phi_1 + \ldots + \lambda_k \phi_k$.

Com effeito, por definição, as formulas (1) satisfazem identicamente á relação differencial

$$p'_1 dx'_1 + \ldots + p'_n dx'_n = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$$

e podem resolver-se em ordem ás variaveis x, p. O conjuncto das transformações de contacto da classe que consideramos obtém-se, pois, determinando todos os systemas de $2n$ equações que contéem as variaveis x, p, x', p' e satisfazem á equação de Pfaff

$$(3) \quad p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n - p' dx'_1 \ldots - p'_n dx'_n = 0 ,$$

e aproveitando apenas aquelles d'estes systemas que podem ser resolvidos tanto em ordem ás variaveis x, p, como em relação ás variaveis x', p'. Ora, é sabido (§ 9) que, pondo de parte a solução evidente

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p'_1 = \ldots = p'_n = 0 ,$$

todos os systemas de $2n$ equações que satisfazem a (3), se deduzem pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de todos os systemas da fórma (2), onde as relações $\psi_1 = 0, \ldots \psi_k = 0$ são *quaesquer*, *mas distinctas*, e onde k designa um dos numeros $0, 1, \ldots, 2n$; além d'isto, reconhece-se facilmente que um systema proveniente de (2) pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ é resoluvel em ordem ás variaveis x, p quando, e só quando, as equações (2) o fôrem em relação a x, λ, p e que considerações analogas teem logar a respeito das variaveis x', p'. A nossa questão reduz-se assim a examinar a resolubilidade das equações (2), onde k não deve agora evidentemente ser superior a n, em relação a cada um dos grupos de variaveis x', λ, p' e x, λ, p. E' o que vamos fazer.

Para isso, ponhamos

$$\lambda_1 \psi_1 + \ldots + \lambda_k \psi_k = U,$$

o que permitte dar ás equações (2) a fórma mais simples

$$(4)\quad \psi_1 = 0\,,\ldots,\,\psi_k = 0\,,\ -p_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0\,,\ p'_i + \frac{\partial U}{\partial x'_i} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Consideremos primeiro a resolubilidade d'estas equações em ordem a x', λ, p'. Para que ella tenha logar, é necessario que o determinante funccional dos seus primeiros membros em relação áquellas variaveis seja differente de zero para os diversos systemas de valores de x', λ, p', x, p que verificam (4). Escrevendo aquelle determinante, reconhece-se immediatamente que se reduz a

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x'_1}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x'_n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial x'_1}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_k}{\partial x'_n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x'_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x'_n}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x'_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x'_n}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Esta expressão é independente das variaveis p, p' e por isso só se annulla em virtude de (4), quando fôr nulla em virtude das relações

$$(5) \qquad \psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0,$$

quaesquer que sejam os valores que deem aos coefficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, que entram em U.

Da mesma fórma, para que as equações (4) sejam resoluveis em ordem ás variaveis x, λ, p é necessario e sufficiente que o determinante funccional dos seus primeiros membros em relação a estas variaveis não seja nullo para os systemas de valores de x, λ, p, x', p' que satisfazem ás mesmas equações. Ora, é facil de vêr que este determinante se reduz á expressão

$$J' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x'_1\, \partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x'_1\, \partial x_n}, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x'_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x'_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x'_n\, \partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x'_n\, \partial x_n}, & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x'_n}, & \ldots, & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x'_n} \end{vmatrix},$$

a qual se transforma claramente em J, se permutarmos as columnas e as linhas de modo que os elementos $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x'_1}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial\psi_k}{\partial x'_n}$ vão occupar respectivamente os logares de $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_n}$ e mudarmos em seguida as linhas em columnas.

D'aqui resulta que a condição a que as equações (2) devem satisfazer para serem resoluveis em ordem ás variaveis x, λ, p, é ainda a que tinha logar para a resolubilidade em ordem ás variaveis x', λ', p', a saber: que o determinante J se não annulle, quaesquer que sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, para os systemas de valores de x, x' que verificam as relações (5).

Isto justifica o theorema enunciado.

47. — A condição a que o theorema precedente sujeita as equações (5), exige que estas equações sejam resoluveis separadamente em ordem a k das variaveis x e em ordem a k das variaveis x'.

Com effeito, para que o determinante J não seja nullo em virtude de (5), é necessario que um, pelo menos, dos determinantes de k dimensões de cada um dos systemas

$$\left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x'_1}, \ldots, \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x'_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x'_1}, \ldots, \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x'_n} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

se não annulle em virtude das mesmas equações, isto é, que estas equações satisfaçam ás condições enunciadas.

48.— Supponhamos as equações $\psi_1 = o, \ldots, \psi_k = o$ escolhidas de modo que as relações (2) dêem origem pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a uma transformação de contacto.

Para obter commodamente esta transformação sob a sua fórma habitual

$$x'_i = X_i(x, p), \quad p'_i = P_i(x, p), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

podemos proceder da maneira que segue.

As equações

$$(6) \qquad \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = p_i, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

que fazem parte de (2), podem evidentemente escrever-se sob a fórma

$$\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_j}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_n}} = \frac{p_j}{p_n}, \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Eliminando d'estas equações as relações entre as grandezas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, obtemos $(n-k)$ equações que, conjunctamente com as k primeiras equações (2), dão as variaveis $x'_1, \ldots, x'_n$ expressas em funcção de $x_1, \ldots, x_n$, $\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots$ Substituindo, em seguida, as expressões obtidas para $x'_1, \ldots, x'_n$ nas formulas (6), podemos d'aqui tirar os valores dos parametros $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. As ultimas n equações (2) permittem depois exprimir $p'_1, \ldots, p'_n$ em funcção das variaveis x, p.

Devemos notar que as expressões obtidas para x', p' são homogeneas e respectivamente dos graus 0 e 1 em relação ás variaveis $p_1, \ldots, p_n$, o que concorda com o que se disse em o n.º 39 a respeito das transformações homogeneas.

49. — Consideremos agora as transformações de contacto mais geraes, isto é, as transformações da fórma

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
& z' = \mathrm{Z}(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)\,, \\
& x'_i = \mathrm{X}_i(z, x, p)\,, \quad p'_i = \mathrm{P}_i(z, x, p)\,, \\
& (i = 1, 2, \ldots, n)\,,
\end{aligned}
\right.
$$

que satisfazem identicamente á relação differencial

$$
(8)\qquad dz' - \sum_{i=1}^{n} p'_i dx'_i = \rho\,(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i)\,.
$$

Podemos enunciar o seguinte theorema:

Obteem-se todas as transformações de contacto da fórma (7), *eliminando as grandezas* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *de todos os systemas da fórma*

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \phi_1(z, x_1, \ldots, x_n, z', x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \phi_{k+1} = 0, \\
& \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \phi_{k+1}}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \phi_{k+1}}{\partial z}} = -\,p_i\,, \\
& \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x'_i} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \phi_{k+1}}{\partial x'_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial z'} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \phi_{k+1}}{\partial z'}} = -\,p'_i\,, \\
& (i = 1, 2, \ldots, n)\,,
\end{aligned}
\right.
$$

onde k *designa um qualquer dos numeros* $0, 1, \ldots, n$ *e* $\phi_1 = 0, \ldots, \phi_{k+1} = 0$ *relações escolhidas de modo que sejam resoluveis em ordem ás variaveis* z', x', p' *os systemas resultantes d'aquellas eliminações.*

Este theorema deduz-se muito simplesmente, tendo em vista o que dissemos em os n.os 42 e 46.

Ponhamos, com effeito,

$$(10)\left\{\begin{aligned} &z=y_{n+1}\,,\ x_i=y_i\,,\ p_i=-\frac{q_i}{q_{n+1}},\quad \rho=\frac{q_{n+1}}{q'_{n+1}},\\ &z'=y'_{n+1}\,,\ x'_i=y'_i\,,\ p'_i=-\frac{q'_i}{q'_{n+1}},\\ &(i=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

A equação (8) toma claramente, em vista d'estas formulas, a expressão

$$(11)\quad q'_1dy'_1+\ldots+q'_{n+1}dy'_{n+1}=q_1dy_1+\ldots+q_{n+1}dy_{n+1}.$$

É sabido (§ 43) que as transformações homogeneas definidas por esta relação se obtéem pela eliminação de $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ entre todos os systemas da fórma

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\Psi_1(y_1,\ldots,y_n,y_{n+1},y'_i,\ldots,y'_n,y'_{n+1})=0,\ \ldots,\ \Psi_{k+1}=0,\\ &\lambda_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_i}+\ldots+\lambda_{k+1}\frac{\partial\Psi_{k+1}}{\partial y_i}=q_i\,,\\ &\lambda_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial y'_i}+\ldots+\lambda_{k+1}\frac{\partial\Psi_{k+1}}{\partial y'_i}=-q'_i\,,\\ &(i=1,2,\ldots,n+1),\end{aligned}\right.$$

onde k designa um qualquer dos numeros $0,1,\ldots,n$ e $\Psi_1=0,\ldots,\Psi_{k+1}=0$ relações escolhidas de fórma que sejam resoluveis em ordem a y', q' os systemas provenientes d'aquellas eliminações, porque então, como vimos, tambem tem logar a resolubilidade dos mesmos systemas em ordem a y, q. Além d'isto, cada transformação homogenea definida por (11) é convertida (§ 42) pelas formulas (10) em uma transformação geral (7) e reciprocamente; por outro lado, cada systema da fórma (12) ou (9) transforma-se, ainda por meio de (10), em outro respectivamente da fórma (9) ou (12).

D'aqui se conclue que se obtéem todas as transformações de contacto que estamos considerando, eliminando $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de todos os systemas (9) que por aquella eliminação se reduzam a outros que sejam resoluveis em ordem a z', x', p', como queriamos demonstrar.

Devemos notar que podemos no enunciado do theorema substituir as variaveis z', x', p' por z, x, p.

Exemplos — Consideremos a relação

$$\psi_1 = y + y_1 - xx_1 = 0$$

que liga as variaveis y, x ás variaveis y_1, x_1. As formulas (9) reduzem-se n'este caso ao systema

$$y + y_1 - xx_1 = 0 , \quad -x_1 + y' = 0 , \quad -x + y'_1 = 0 ,$$

que é claramente resoluvel em ordem a cada um dos grupos de variaveis x, y, y' e x_1, y_1, y'_1 e que, por isso, representa uma transformação de contacto.

Do mesmo modo a relação

$$\psi = z + z_1 + xx_1 + yy_1 = 0$$

dá origem á transformação de contacto

$$x_1 = -p \quad , \quad y_1 = -q \quad , \quad z_1 = xp + yq - z$$

$$p_1 = -x \quad , \quad q_1 = -y$$

que é, como vimos (§ 20), a transformação de Legendre.

50. — O theorema precedente conduz-nos muito simplesmente ao seguinte, que nos permitte determinar as transformações em x, p:

Toda a transformação em x, p

$$(13)\begin{cases} z' = Az + \Omega(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \\ x'_i = X_i(x,p) \quad , \quad p'_i = P_i(x,p) \ , \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

se obtém pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *de um systema da fórma*

$$(14)\begin{cases} z' - Az - V(x,x') = 0 \ , \ V_1(x,x') = 0 \ , \ldots , \ V_k = 0, \\ \dfrac{-\lambda \dfrac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial V_k}{\partial x_i}}{\lambda A} = p_i \ , \\ \dfrac{\lambda \dfrac{\partial V}{\partial x'_i} - \lambda_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial x'_i} - \ldots - \lambda_k \dfrac{\partial V_k}{\partial x'_i}}{\lambda} = p'_i \end{cases}$$

onde k *designa um dos numeros* 0, 1,..., n *e* $V, V_1, \ldots, V_k$ *funcções escolhidas de fórma que sejam resoluveis em ordem a* z', x', p' *as equações que proveem d'aquella eliminação;* reciprocamente, *de qualquer systema da fórma* (14), *nas condições referidas, deduz-se uma transformação de contacto em* x, p.

Com effeito, qualquer transformação de contacto da fórma (13) acha-se comprehendida entre as transformações a que nos referimos em o n.º precedente e deve, por isso, poder ser deduzida de um systema da fórma (9).

Ora, eliminando $p_1, \ldots, p_n$ das $(n+1)$ primeiras formulas (13), obteem-se relações da fórma

$$(15)\begin{cases} z' - \Lambda z - \Omega\,(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0,\ \mathrm{M}_1\,(x, x') = 0, \\ \qquad \ldots,\ \mathrm{M}_k\,(x, x') = 0. \end{cases}$$

Estas expressões são as unicas relações entre as variaveis $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ que podem deduzir-se do systema a (13) e, por isso, são susceptiveis de tomar a fórma (15) as equações $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_{k+1} = 0$ de um systema (9) que dê origem a uma transformação em x, p, isto é, uma transformação d'esta natureza póde deduzir-se de um systema da fórma (14).

Reciprocamente, é claro que cada systema da fórma (14) dá origem a uma transformação de contacto em x, p.

II

51. — Agora vamos vêr como se comportam em presença de uma transformação de contacto os systemas de equações que satisfazem á relação differencial

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0.$$

Temos primeiro a proposição:

Todo o systema de equações da fórma

$$\varphi_1\,(z, x_1, \ldots, x_1, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0,$$

que satisfaz a equação de Pfaff

$$(16) \qquad dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0,$$

é convertido por uma transformação de contacto qualquer

$$(17) \quad z'=Z(z, x, p)\ ,\ x'_i=X_i(z, x, p)\ ,\ p'_i=P_i(z, x, p),$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

em um novo systema que satisfaz á relação differencial

$$(18) \qquad dz'-p'_1\,dx_1'-\ldots-p'_n\,dx'_n=0.$$

Este theorema resulta claramente da consideração de que a equação (16) se muda, por meio da transformação (17), em uma equação que só differe de (18) por um factor que não é nullo.

52. — Reciprocamente, *as formulas*

$$(17) \quad z'=Z(z, x, p)\ ,\ x'_i=X_i(z, x, p)\ ,\ p'_i=P_i(z, x, p),$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

definem uma transformação de contacto, se converterem cada systema que satisfaz á equação

$$dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n=0$$

em um systema que satisfaz a

$$dz'-p'_1\,dx'_1-\ldots-p'_n\,dx'_n=0.$$

Com effeito, a equação (16) é manifestamente satisfeita por todos os systemas da fórma

$$(19) \quad z-F(x_1, \ldots, x_n),\ p_i-\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\ (i=1, 2, \ldots, n).$$

Além d'isto, é facil de vêr que a ella se reduz qualquer outra da fórma

$$(20)\quad L(z, x, p)\,dz + \sum_{i=1}^{n} M_i(z, x, p)\,dx_i + \sum_{i=1}^{n} N_i(z, x, p)\,dp_i = 0$$

que gose da mesma propriedade. Na verdade, se esta ultima equação fôr satisfeita por todos os systemas (19), a expressão

$$L.\left(F, x, \frac{\partial F}{\partial x}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} M_i \left(F, x, \frac{\partial F}{\partial x}\right) dx_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} N_j \left(F, x, \frac{\partial F}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j} dx_i$$

annulla-se para todos os systemas de valores de $x_1 \ldots, x_n$, $dx_1, \ldots, dx_n$, qualquer que seja F, isto é, são nullas as expressões

$$L. \frac{\partial F}{\partial x_i} + M_i + \sum_{j=1}^{n} N_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

para todos os valores de x_i, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}$. D'aqui resulta que são identicamente satisfeitas as expressões

$$L. \frac{\partial F}{\partial x_i} + M_i = 0 \quad , \quad N_j = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

o que reduz a equação (20) á fórma

$$L\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n) = 0.$$

A equação (16) é, pois, a unica equação differencial total á qual satisfazem todos os systemas da fórma (19).

Posto isto, seja dada uma transformação da fórma (17) que satisfaça á condição estabelecida no enunciado do theorema.

Esta transformação converte a equação

$$dz' - p'_1\, dx'_1 - \ldots - p'_n\, dx'_n = 0$$

em outra da fórma

$$(21) \qquad \mathrm{L}dz + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i\, dx_i + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i\, dp_i = 0.$$

Á equação (21) devem satisfazer todos os systemas (19), visto que as expressões transformadas de (19) pelas formulas (17), verificam, por hypothese, a equação (18). Por este motivo, devemos ter identicamente $\mathrm{N}_i = 0$, $\mathrm{L}\, p_i = -\mathrm{B}_i$, o que dá a (21) a fórma

$$\mathrm{L}\,(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n) = 0.$$

As formulas (17) definem, pois, na hypothese referida, uma transformação de contacto, como queriamos demonstrar.

53. — Dos dois numeros precedentes conclue-se claramente que:

Para que uma transformação da fórma

$$z = \mathrm{Z}\,(z, x, p)\ ,\ x'_i = \mathrm{X}_i\,(z, x, p)\ ,\ p_i = \mathrm{P}_i\,(z, x, p),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

seja uma transformação de contacto, é necessario e suffi-

ciente que, por meio d'ella, todos os systemas que satisfazem á relação

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0,$$

sejam convertidos em systemas que satisfazem a

$$dz' - p'_1\, dx'_1 - \ldots - p'_n\, dx'_n = 0.$$

54. — Entre os systemas que satisfazem á relação differencial

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0,$$

consideremos mais especialmente os da fórma

$$(19) \quad z - \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_i - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Vamos demonstrar o seguinte:

Todo o systema da fórma (19) *é convertido por uma transformação de contacto qualquer*

$$(17) \quad z' = \mathrm{Z}(z,x,p)\ ,\ x'_i = \mathrm{X}_i(z,x,p)\ ,\ p'_i = \mathrm{P}_i(z,x,p)\ ,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

em um systema de fórma analoga

$$(22) \quad z' - \omega(x'_1, \ldots, x'_n) = 0\ ,\ p'_i - \frac{\partial \omega}{\partial x'_i} = 0, (i = 1, 2, \ldots, n),$$

exceptuando os casos em que a funcção $\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)$ *annulla identicamente o determinante*

$$
(23) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1}, & \dots, & \frac{dX_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dX_n}{dx_1}, & \dots, & \frac{dx_n}{dx_n} \end{vmatrix},
$$

onde o symbolo $\frac{dX_k}{dx_i}$ *designa a operação*

$$
\frac{\partial X_k}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial x_k}{\partial z} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial p_j}.
$$

Com effeito, o systema que resulta de (19) pela transformação de contacto (17), póde evidentemente determinar-se, eliminando as variaveis $x_1, \dots, x_n$ entre as equações

$$
z' = Z\left(F, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),
$$

$$
x'_i = X_i\left(F, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),
$$

$$
p'_i = P_i\left(F, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),
$$

$$
(i = 1, 2, \dots, n)
$$

que resultam da combinação das equações (19) e (17). Para que o systema assim obtido possa tomar a fórma (22), é necessario e sufficiente que nenhuma das suas equações ligue sómente as variaveis $x'_1, \dots, x'_n$, isto é, que a funcção $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ não annulle identicamente o determinante funccional de $X_1, \ldots, X_n$ em relação a $x_1, \ldots, x_n$, o qual não differe de (23), como se reconhece facilmente, attendendo a (19).

Por outro lado, o determinante (23) não póde annullar-se identicamente para toda e qualquer funcção F. Na verdade, se isto acontecesse, isto é, se o referido determinante fosse nullo para todos os systemas de valores de $x_i, p_i, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = p_{ij}$, tambem seria identicamente nullo o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} + p_{11} \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z} + p_{nn} \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_n}{\partial z} + p_{11} \frac{\partial X_n}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_n}{\partial z} + p_{nn} \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

que d'elle resulta, suppondo eguaes a 0 as derivadas p_{ij}, em que os indices i, j são differentes. Ora, este determinante só póde ser nullo para todos os valores de $p_1, \ldots, p_n$, quando se annullarem identicamente todos os determinantes de n dimensões do systema

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_1}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_n}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial X_n}{\partial z}, \frac{\partial X_n}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{matrix} \right\|,$$

ou ainda, os de n dimensões do systema

$$\left\| \begin{array}{c} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial p_n}, \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial X_1}{\partial p_i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_n}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial p_n}, \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial X_1}{\partial p_i} \end{array} \right\| .$$

Por isso, como os elementos d'este quadro são exactamente os coefficientes de $\frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial z}$ nas equações differenciaes lineares

$$[X_1, f] = o, \quad \ldots, \quad [X_n, f] = o,$$

o que se reconhece, desenvolvendo os colchetes, não seriam estas equações independentes, contra o que vimos em o n.º 25.

55. — A propriedade a que se refere a proposição do n.º 52, póde claramente ser tomada como definição das transformações de contacto. Assim, podemos dizer:

Uma transformação da fórma

$$z' = Z_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

$$x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(z, x, p),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

é uma transformação de contacto do espaço a $(n+1)$ *dimensões, se converter cada multiplicidade* M_n *em uma multiplicidade* M_n.

Esta definição é susceptivel de muitas consequencias geometricas, como vamos vêr.

Consideremos, por exemplo, o espaço a tres dimensões.

Em primeiro logar, combinando a definição precedente com os resultados do n.º 12, conclue-se immediatamente que uma transformação de contacto qualquer do espaço ordinario converte os ∞^2 elementos de uma dada superficie, ou nos elementos de uma nova superficie, ou nos elementos de uma curva, ou nos elementos de um ponto, isto é, que uma tal transformação muda uma superficie, ou n'uma superficie, ou n'uma curva, ou n'um ponto. Do mesmo modo se vê que uma curva e um ponto se convertem, ou n'uma curva, ou n'um ponto, ou n'uma superficie.

Sejam agora dadas duas multiplicidades M_2 do espaço ordinario que tenham um elemento commum. É evidente que uma transformação de contacto do mesmo espaço converte aquellas duas multiplicidades em outras duas, tambem com um elemento commum. D'aqui resulta que essa transformação converte duas superficies que se tocam n'um ponto, ou em duas novas superficies com a mesma propriedade, ou n'uma curva e n'uma superficie tangente a esta curva, ou n'uma superficie e n'um ponto situado sobre esta superficie, ou, finalmente, em duas curvas que cortam.

Se as multiplicidades propostas tiverem ∞^1 elementos communs, converter-se-hão em outros com as mesmas propriedades. Por isso, duas superficies tangentes ao longo de uma curva mudam-se, por uma transformação de contacto, ou em duas superficies com a mesma propriedade, ou n'uma superficie e n'uma curva traçada sobre esta superficie, ou em duas curvas tangentes n'um ponto, ou n'uma curva e n'um ponto d'esta curva.

Estes resultados completam o que dissemos em o n.º 17.

Podem fazer-se considerações analogas a respeito das curvas e pontos do plano, tendo em vista o n.° 13.

56. — Proseguindo nas considerações do n.° precedente, vamos examinar como são transformadas por uma dada transformação de contacto as multiplicidades pontuaes do plano e do espaço ordinario.

Seja dada, por exemplo, uma transformação de contacto do plano representada por uma equação da fórma

$$(24) \qquad \psi(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

É claro que por esta transformação todos os elementos de um dado ponto (a, b) são convertidos em elementos, cujos pontos satisfazem á equação

$$(25) \qquad \psi(a, b, x_1, y_1) = 0.$$

Ora, os elementos do ponto (a, b) constituem (§ 14) uma multiplicidade M_1 e por isso, segundo a definição do n.° 54, devem os elementos em que elles se transformam constituir tambem uma multiplicidade M_1, que é claramente (§ 12) a multiplicidade definida pelos elementos da curva (25); por outras palavras, a transformação de contacto (24) converte o ponto (a, b) na curva (25). Do mesmo modo se vê que a curva (25) é convertida no ponto (a, b).

Eguaes considerações se applicam ás transformações de contacto do espaço ordinario dadas por uma equação da fórma

$$\psi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

ou por um systema de duas equações distinctas

$$\psi_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \psi_2 = 0.$$

Estas transformações convertem, pois, cada ponto (a, b, c) respectivamente na superficie

$$\psi (a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

e na curva

$$\psi_1 (a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \psi_2 (a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

e, reciprocamente, a curva e a superficie definidas por estas equações no ponto (a, b, c).

Seja agora dada uma curva plana qualquer $\varphi (x, y) = 0$ que não esteja comprehendida nas curvas representadas pela equação (25). Como acabámos de vêr, cada ponto (a, b) d'esta curva é convertido, por uma transformação da fórma (24), na curva definida pela equação

$$\psi (a, b, x_1, y_1) = 0;$$

por este motivo os diversos pontos da referida curva são mudados nas curvas representadas pela equação precedente, onde os parametros (a, b) devem receber todos os systemas de valores que para elles se tiram da relação $\varphi (a, b) = 0$. Ora, tendo em vista o n.º 54, é evidente que cada uma das curvas transformadas toca n'um ponto a curva em que $\varphi (x, y) = 0$ se converte. A curva proposta transforma-se, pois, em uma outra que é a envolvente da familia de curvas

$$\psi (a, b, x_1, y_1) = 0,$$

e cuja equação se póde, portanto, obter, segundo as regras conhecidas do Calculo differencial.

Considerações inteiramente analogas tem logar para as superficies e curvas no espaço; não insistimos sobre este ponto.

Exemplo — A transformação

$$y + y_1 - xx_1 = 0,$$

considerada na pag. 94, converte cada ponto ($x = a$, $y = b$) na recta

$$(26) \qquad y_1 - ax_1 + b = 0$$

e, reciprocamente, cada recta (26) no ponto (a, b), isto é, muda o ponto (a, b) na sua polar em relação á secção conica $2y - x^2 = 0$ e cada recta no seu pólo em relação á mesma curva; além d'isto, converte uma dada curva $\varphi(x, y) = 0$ na curva envolvente das rectas representadas pela equação

$$b + y_1 - ax_1 = 0,$$

onde se devem dar a a e b todos os systemas de valores que satisfazem a $\varphi(a, b) = 0$.

III

57. — Consideremos as equações

$$
(9)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, z', x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \psi_{k+1}}{\partial z}} = -p_i, \\[4ex]
\dfrac{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x'_i} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x'_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z'} + \ldots + \lambda_{k+1} \dfrac{\partial \psi_{k+1}}{\partial z'}} = -p'_i, \\[4ex]
\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{array}
\right.
$$

É sabido (§ 49) que estas equações definem uma transformação de contacto, quando (e só n'este caso) as equações que d'ellas resultam pela eliminação de $\lambda_1, \ldots \lambda_{k+1}$ se podem resolver em ordem a um dos grupos de variaveis z, x, p e z', x', p', porque então, como vimos, tem logar a resolubilidade das mesmas equações em relação ao outro grupo.

Á condição precedente póde dar-se uma fórma geometrica, tendo em vista a doutrina da secção II do cap. I. Na verdade, para que a resolubilidade das referidas equações em ordem ás variaveis z', x', p' tenha logar, é necessario e sufficiente que as $(n+k+1)$ primeiras equações (9) não determinem relação alguma que contenha apenas as variaveis z, x, p. Ora, substituindo nas equações (9) as variaveis z', x'_1, ..., x'_n por parametros arbitrarios c', a'_1, ..., a_n e eliminando em seguida as indeterminadas λ_1, ..., λ_{k+1}, obtem-se (§ 14) ∞^{n+1} multiplicidades M_n, que se compõem de todos os elementos das multiplicidades pontuaes da ordem $n-k$

$$(27)\ (z, x_1, \ldots, x_n, c', a'_1, \ldots, a'_n)=0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1}=0.$$

Podemos, pois, enunciar a seguinte proposição:

Para que as $(k+1)$ *equações*

$$\psi_1 (z, x_1, \ldots, x_n, z'_1 x'_1, \ldots x'_n)=0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1}=0$$

definam uma transformação de contacto, é necessario e sufficiente que os elementos (z, x, p) *das* ∞^{n+1} *multiplicidades* (27) *não satisfaçam a relação alguma da fórma* $\varphi (z, x, p)=0$.

58. — Da proposição precedente deduz-se muito simplesmente a seguinte:

Se as equações

$$(27)\quad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, c', a'_1, \ldots, a'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1}=0,$$

onde c', a'_1, ..., a'_n *designam parametros arbitrarios, definirem* ∞^{n+1} *multiplicidades pontuaes do espaço, cujos elementos* (z, x, p) *não satisfazem a uma relação da fórma* $\varphi (z, x, p)=0$, *tambem as equações*

$$(28)\ \psi_1 (c, a_1, \ldots, a_n, z' x', \ldots, x')=0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1}=0$$

onde c, a_1, ..., a_n *designam egualmente parametros arbi-*

trarios, representarão ∞^{n+1} *multiplicidades differentes, cujos elementos* (z', x', p') *não verificam relação alguma* $f(z', x', p') = 0$ *entre* z', x', p'.

Com effeito, as relações

$$\psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, z', x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

que se obteem substituindo em (27) os parametros c', $a'_1, \ldots, a'_n$ respectivamente por $z', x'_1, \ldots, x'_n$, definem uma transformação de contacto, como se reconhece facilmente attendendo ao theorema do n.º anterior e ás condições em que suppozemos as equações (27). Sendo assim, os elementos (z', x', p') das ∞^{n+1} multiplicidades pontuaes (28) não satisfazem, em virtude do mesmo theorema, a relação alguma da fórma $\varphi(z, x, p) = 0$, como queriamos demonstrar.

59. — *A transformação do contacto definida por equações da fórma*

$$(29) \quad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, z', x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

converte o ponto $(z = c, x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n)$ *na multiplicidade pontual*

$$\psi_1(c, a_1, \ldots, a_n, z', x'_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

e a multiplicidade pontual

$$\psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, c', a_1', \ldots, a'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

no ponto $(z' = c', x_1' = a'_1, \ldots, x'_n = a'_n)$.

Para demonstrar o theorema, demos á transformação de contacto definida pelas formulas (29) a fórma habitual

$$(29') \quad z'=Z(z, x, p) \ , \ x'_i=X_i(z, x, p) \ , \ p'_i=P_i(z, x, p),$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

que se obteem, como é sabido, pela resolução em ordem a z', x', p' das equações que resultam de (9) pela diminuição de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Posto isto, appliquemos primeiro a transformação (29') aos ∞^n elementos (z, x, p), do ponto $(z=c\ x_1=a_1, \ldots, x_n=a_n)$. Obtém-se um conjuncto de elementos (z', x', p) que satisfaz ás equações (9), depois de n'ellas substituirmos $z, x_1, \ldots, x_n$ por $c, a_1, \ldots, a_n$. D'estas equações, só as $(k+1)$ primeiras não contéem $p', \ldots, p'_n$. Por isso, os elementos obtidos são os elementos da multiplicidade pontual (20), o que demonstra a primeira parte do theorema.

Appliquemos agora a transformação (29') aos ∞^n elementos da multiplicidade pontual

$$(27) \quad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, c', a'_1, \ldots, a'_n)=0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1}=0.$$

Estes elementos são definidos (§ 14) pelas equações que resultam de

$$(30)\begin{cases} \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, c, a_1, \ldots, a_n)=0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1}=0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}+\ldots+\lambda_{k+1}\dfrac{\partial\psi_{k+1}}{\partial z}=1, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_i}+\ldots+\lambda_{k+1}\dfrac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x_i}=-p_i, \\ (i=1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$. Substituindo em (29') os systemas de valores de z, x, p, que satisfazem ás equações resultantes d'esta eliminação, obtemos, pois, os elementos (z', x', p'), em que se transformam os elementos da multiplicidade (27). As coordenadas dos elementos (z', x', p'), assim obtidos, satisfazem claramente, com certos valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, ás equações (9), d'onde resulta, comparando as $(n+k+1)$ primeiras d'estas equações com (30), que deve ser:

$$z' = c', \; x'_1 = a'_1, \quad \ldots, \quad x'_n = a'_n .$$

Os elementos obtidos pertencem, pois, todos ao mesmo ponto, o que justifica a segunda parte do theorema.

O theorema que acabamos de estabelecer comprehende como caso particular o que dissemos em o n.º 55.

60. — *Se as equações*

$$(31) \quad V_1(z, x_1, \ldots, x_n, c', a'_1, \ldots, a'_n) = 0, \; \ldots, \; V_{k+1} = 0,$$

onde c', $a'_1, \ldots, a'_n$ designam parametros arbitrarios, definirem ∞^{n+1} multiplicidades pontuaes differentes, cujos elementos não satisfazem a nenhuma relação da fórma $\varphi(z, x, p) = 0$, e se conjugarmos os ∞^{n+1} pontos do espaço com aquellas multiplicidades, segundo uma lei qualquer, de fórma que a cada multiplicidade corresponda um unico ponto e a cada ponto uma unica multiplicidade, haverá uma, e só uma, transformação de contacto que converte cada multiplicidade no seu ponto conjugado.

Com effeito, conjuguemos as multiplicidades (31) com os diversos pontos do espaço, segundo a lei definida por um systema qualquer da fórma

$$(32) \quad z' = \alpha(c', a'_1, \ldots, a'_n), \quad x'_i = \beta_i(c', a'_1, \ldots, a'_n),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

a que possa dar-se a expressão

$$c' = \mathrm{C}(z', x'_1, \ldots, x'_n), \quad a'_i = \mathrm{A}_i(z', x'_1, \ldots, x'_n),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

e ponhamos

$$\mathrm{V}_j(z, x_1, \ldots, x_n, \mathrm{C}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n) = \psi_j(z, x_1, \ldots, x_n, z', x'_1, \ldots, x'_n),$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k+1).$$

Considerando $z', x'_1, \ldots, x'_n$ como parametros arbitrarios, as equações

$$(33) \quad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, z', x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \psi_{k+1} = 0$$

representam as mesmas multiplicidades pontuaes que as equações propostas (31). Em virtude da hypothese feita a respeito de (31), não existe, portanto, relação alguma de fórma $\varphi(z, x, p) = 0$ a que satisfaçam os elementos (z, x, p) das multiplicidades (33) e por isso definem (§ 9) as equações (33) uma transformação de contacto, quando se consideram $z', x'_1, \ldots, x'_n$ como variaveis. Esta transformação converte (§ 56) cada multiplicidade

$$\psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

em cada ponto (32), ou ainda, cada multiplicidade

$$\mathrm{V}_1(z, x_1, \ldots, x_n, c', a'_1, \ldots, a'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{V}_{k+1} = 0$$

em cada ponto

$$z' = \alpha(c', a'_1, \ldots, a'_n), \quad x'_i = \beta_i(c', a'_1, \ldots, a'_n).$$

Além d'isto, é facil de vêr que não ha outra transformação de contacto que effectue tal conversão. Na verdade, qualquer transformação de contacto que converter cada multiplicidade (31) em cada ponto (32), mudará tambem cada multiplicidade

$$\psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{k+1} = 0$$

em cada ponto $z' = \alpha$, $x'_1 = \alpha_1, \ldots, x'_n = \alpha_n$ e será por isso definida por equações que apenas determinam entre z, x, p, z', x', p' as relações (33), isto é, coincidirá com a transformação acima considerada.

O theorema fica assim demonstrado.

Exemplo — A equação

$$\psi = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

onde a e b designam parametros arbitrarios e r uma quantidade constante, define um conjuncto de ∞^2 circumferencias do mesmo raio.

Os elementos lineares d'estas circumferencias são definidos pelas equações

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad , \quad y' = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}},$$

ou

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (y - b)\, y' + (x - a) = 0,$$

d'onde não póde deduzir-se relação alguma entre x, y, y' apenas. As curvas representadas pela equação proposta estão, pois, nas condições que o theorema impõe ás multiplicidades (31). Fazendo corresponder a cada circumferencia o seu centro, isto é, o ponto $(x_1 = a,\ y_1 = b)$, a transformação de contacto definida pela equação

$$(33') \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

que n'este caso substitue (33), converterá, portanto, cada circumferencia no seu centro.

Querendo dar á transformação de contacto (33') a sua fórma habitual, emprega-se o processo do n.º 49, que dá immediatamente

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 \quad , \quad (x - x_1) + (y - y_1) y' = 0$$

$$(x - x_1) + (y - y_1)\, y'_1 = 0,$$

d'onde:

$$x_1 = x + \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad y_1 = y - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad y'_1 = y'.$$

Estas formulas mostram que a transformação considerada converte cada elemento em um elemento parallelo.

CAPITULO IV

Applicações das transformações de contacto

I

61. — Seja dado um systema de equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, distinctas e compativeis, da fórma

$$(1) \qquad F_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots, \quad F_l = 0,$$

onde $p_1, \ldots, p_n$ designam respectivamente os quocientes differenciaes $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$.

O problema da integração d'este systema, tal como é ordinariamente concebido, consiste em determinar todas as soluções communs ás equações (1), isto é, todas as funcções z das variaveis $x_1, \ldots, x_n$ que reduzem simultaneamente aquellas equações a identidades, ou ainda, o que é claramente o mesmo, em obter todos os systemas da fórma

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad p_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

que satisfazem identicamente ás equações (1).

É manifesto que cada systema da fórma (2) satisfaz identicamente á equação de Pfaff

$$(3) \qquad dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0.$$

Esta consideração, posto que inteiramente simples, conduziu Sophus Lie a formular do modo seguinte o problema a que nos vimos referindo:

A integração de um systema da fórma (1) *consiste em determinar todos os systemas de* $(n+1)$ *equações da fórma*

$$(4) \quad \varphi_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = 0$$

que satisfazem identicamente á equação (3) *e cujas soluções* (z, x, p) *verificam as equações* (1), ou mais brevemente, *em determinar todas as multiplicidades* M_n *do mesmo systema.*

Esta definição comprehende evidentemente como caso particular a definição ordinaria: determinadas todas as multiplicidades M_n de um dado systema (1), basta effectivamente escolher aquellas, cujas equações apenas determinem uma *unica* relação entre $z, x_1, \ldots, x_n$, isto é, cujas equações se possam reduzir á fórma (2), para termos todos os integraes propriamente dictos do mesmo systema.

Vamos vêr como podemos resolver o problema da integração sob este ponto de vista geral.

62. — Supponhamos que existe uma multiplicidade M_n definida por um systema de equações da fórma

$$(5)\quad \varphi(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_{n-l+1}) = 0, \ \ldots, \ \varphi_{n+1} = 0,$$

onde $a_1, \ldots, a_{n-l+1}$ designam constantes arbitrarias, do qual se deduza o systema proposto (1) pela eliminação d'aquellas constantes. A uma multiplicidade em taes circumstancias daremos o nome de *integral completo* do systema (1).

Posta esta definição, vamos demonstrar o seguinte theorema:

A integração de um systema da fórma (1) *reduz-se á determinação de um qualquer dos seus integraes completos.*

Com effeito, o systema (5) deve determinar, como é sabido (sec. I do cap. I), um certo numero $(k+1)$ de relações

$$(6)\quad \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-l+1}) = 0, \ \ldots, \ \psi_{k+1} = 0$$

entre $z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-l+1}$, resoluveis em ordem a z e k das variaveis $x_1, \ldots, x_n$, e póde tomar a fórma

$$(5')\quad \left\{ \begin{array}{l} z - \omega(x_{k+1}, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-l+1}) = 0, \quad x_i - \omega_i = 0, \\[2mm] \qquad p_j - \dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} + p_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_j} + \ldots + p_k \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = 0 \\[2mm] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \ \ j = k+1, \ldots, n), \end{array} \right.$$

suppondo que as equações (6) pódem resolver-se em ordem a $z, x_1, \ldots, x_k$. Ora, como o systema (1) deve resultar de (5') pela eliminação de $a_1, \ldots, a_{n-l+1}$, é claro que o conjuncto das equações (1) e (3) póde ser substituido pelo das equações (1) e (5′), desde que em (5′) se considerem $a_1, \ldots, a_{n-l+1}$ como incognitas a determinar. Além d'isto, pondo

$$b_i = \frac{\partial \omega_1}{\partial a_i} - p_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a_i} - \ldots - p_k \frac{\partial \omega_k}{\partial a_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n - l + 1),$$

tira-se de (5′) a relação

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = \sum_{j=1}^{n-l+1} b_j da_j$$

que nos mostra que podemos ainda substituir as equações (1) e (5′) pelo systema das equações (5′) e da equação

$$(7) \qquad b_1 da_1 + \ldots + b_{n-l+1} da_{n-l+1} = 0.$$

Obtéem-se, portanto, todos os integraes do systema proposto, determinando todos os systemas que satisfazem ás equações (5′) e (7). A estas equações póde satisfazer-se de qualquer dos modos que vamos indicar:

1.° — Pondo

$$a_1 = \text{C.}^{te}, \quad \ldots, \quad a_{n-l+1} = \text{C.}^{te},$$

o que nos conduz ao integral completo de que partimos.

2.° — Pondo

$$b_1 = 0, \quad \ldots, \quad b_{n-l+1} = 0$$

e eliminando as constantes $a_1, \ldots, a_{n-l+1}$ entre estas equações e (5′), o que dá um integral que não contém elementos arbitrarios e a que se chama *integral singular*.

3.° — Finalmente, considerando um certo numero h de relações distinctas

$$\varphi_1(a_1, \ldots, a_{n-l+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_h = 0$$

entre as grandezas $a_1, \ldots, a_{n-l+1}$, formando o systema

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_h = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_i} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial \varphi_h}{\partial a_i} = b_i, \\ (i = 1, 2, \ldots, n - l + 1) \end{cases}$$

e eliminando $\lambda_1, \ldots, \lambda_h, a_1, \ldots, a_{n-l+1}$ entre (5′) e (8), o que nos conduz a um integral que depende das funcções arbitrarias $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ e a que se dá o nome de *integral geral*.

Attendendo ao que dissemos na secção I do cap. I, reconhece-se que não ha outra maneira de satisfazer ao systema das equações (5′) e (7), isto é, que não existe integral algum do systema (1) que não esteja comprehendido em algum dos acima mencionados. Além d'isto, vê-se claramente que, determinado o integral completo (5′), todos os outros podem obter-se com o auxilio apenas de derivações e eliminações. A integração do systema (1) fica assim dependente do conhecimento de um dos seus integraes completos, como queriamos demonstrar.

Convém notar que a doutrina precedente comprehende como caso particular a theoria do *integral completo* das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, tal como foi considerada por Lagrange, Jacobi, Bour, etc., a qual corresponde ao caso de ser $k = 0$ nas formulas (5′), isto é, de resultar do systema (5), pela eliminação de $p_1, \ldots, p_n$, apenas uma relação entre as grandezas z, x, a.

Devemos tambem observar que algumas vezes se chama *integral completo* ao systema das equações (6), ou ainda ao d'aquellas equações (5′) que não conteem $p_1, \ldots, p_n$. Esta definição está mais de harmonia com as doutrinas de Lagrange e Jacobi, mas não differe no fundo da que acima démos, podendo, por isso, usar-se uma ou outra, conforme fôr mais commodo.

63. — A theoria das transformações de contacto conduz-nos muito simplesmente a um processo para determinar um integral completo de um dado systema de equações ás derivadas parciaes de primeira ordem—integral de que depende, como vimos, a determinação de todos os integraes do referido systema. É o que vamos mostrar.

Consideremos de uma maneira geral um systema de equações distinctas da fórma

$$(9)\ Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_o,\ X_1 = a_1,\ \ldots,\ X_{l-1} = a_{l-1}$$

e supponhamos que estas equações se acham em involução, isto é, que satisfazem identicamente ás relações

$$[Z, X_i] = o, \quad [X_i, X_j] = o, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, l-1),$$

o que não prejudica a generalidade do problema, visto que a um systema em taes circumstancias se póde sempre reduzir qualquer systema de equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, que admitta integraes communs.

Como as funcções Z, $X_1, \ldots, X_{l-1}$ são distinctas e se acham em involução, as equações

$$[Z, f] = o, \quad [X_1, f], \quad \ldots, \quad [X_{l-1}, f] = o$$

formam um systema completo de l equações independentes, o qual admitte $(n + 1 - l)$ integraes distinctos. Determinemos um qualquer X_l d'estes integraes, que seja differente de $Z, X_1, \ldots, X_{l-1}$. Em seguida formemos o systema completo

$$[Z, f] = o, \quad [X_1, f] = o, \quad \ldots, \quad [X_l, f] = o,$$

que admitte $(n + 1 - l)$ integraes distinctos, e determinemos um qualquer X_{l+1} dos seus integraes, differente de $Z, X_1, \ldots, X_l$. Continuemos d'esta fórma até chegarmos á consideração do systema completo

$$[Z, f] = o, \quad \ldots, \quad [X_{n-1}, f] = o,$$

de que determinaremos ainda um integral X_n, differente de $Z, X_1, \ldots, X_{n-1}$. D'este modo, teremos obtido $(n - l + 1)$ funcções $X_l, \ldots, X_n$, que formam com $Z, X_1, \ldots, X_{l-1}$ um systema de $(n + 1)$ funcções distinctas, satisfazendo ás relações

$$[Z, X_i] = o, \quad [X_i, X_j] = o, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pelo que se disse em o n.º 23, podemos agora determinar n funcções $P_1, \ldots, P_n$ das variaveis $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$, taes que a relação differencial

$$(10) \qquad dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i \, dX_i = \rho \left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i \right),$$

onde ρ não é nullo, tenha logar identicamente. Esta relação mostra-nos claramente que, pondo

$$(11) \quad Z = a_1, X_1 = a_1, \ldots, X_{l-1} = a_{l-1}, X_l = a_l, \ldots, X_n = a_n,$$

onde $a_l, \ldots, a_n$ designam constantes arbitrarias, se obtem um systema que satisfaz á relação differencial

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0$$

e que constitue claramente (§ 62) uma integral completo do systema proposto.

Do que fica dicto, resulta a proposição:

A determinação de um integral completo de um systema em involução da fórma (9) *reduz-se a procurar successivamente um unico integral de muitos systemas completos.*

64. — As considerações do n.º anterior são claramente applicaveis quando as equações do systema differencial proposto não encerram z, isto é, quando são da fórma

$$(12)\quad X_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_1, \quad \ldots, \quad X_l = a_l,$$

mas a relação (10) deve n'este caso ser substituida (§ 29) por

$$d(z - \Pi) + \sum_{i=1}^{n} P_i\,dX_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i.$$

Uma solução completa do systema proposto é então dada pelas equações

$$(13)\quad X_1 = a_1, \ldots, X_l = a_l,\ X_{l+1} = a_{l+1}, \ldots, X_n = a_n,\ z - \Pi = a_{n+1}$$

onde $a_{l+1}, \ldots, a_{n+1}$ designam constantes arbitrarias.

Por isso, podemos concluir que:

A determinação de um integral completo de um sys-

tema de equações distinctas da fórma (12), *em involução, reduz-se a effectuar uma quadratura e a determinar um integral de muitos systemas completos.*

65. — Convém notar que o processo de integração desenvolvido nos dois numeros precedentes é uma generalisação do methodo de Jacobi para a integração das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem.

Com effeito, considerando, por exemplo, o caso do n.º 63, o processo de Jacobi é representado, como se sabe, pelo systema (11), mas exige que as funcções $X_1,\dots,X_n$ sejam escolhidas de modo que o determinante $\frac{D(Z, X_1, \dots, X_n)}{D(z, p_1, \dots, p_n)}$ não se annulle para os systemas de valores de z, x, p que verificam simultaneamente as equações (11), isto é, exige que estas equações determinem, pela eliminação de $p_1, \dots, p_n$, uma unica relação entre as grandezas z, x, a; emquanto que o methodo acima desenvolvido deixa indeterminado o numero das relações entre z, x, a, resultantes d'aquella eliminação.

No caso do n.º 64, o methodo de Jacobi só considera as n primeiras equações (13) e exige que estas equações possam resolver-se em ordem a $p_1, \dots, p_n$, o que não acontece com o methodo acima apresentado.

66. — Dada uma transformação de contacto qualquer, podemos formar uma infinidade de systemas de equações ás derivadas parciaes de primeira ordem immediatamente integraveis. É o que resulta do seguinte theorema:

Se as formulas

$$z = Z(z, x, p), \quad x'_i = X_i, \quad p_i = P_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

definirem uma transformação de contacto, a integração de um systema qualquer da fórma

$$(14) \qquad \varphi_1 (Z, X_1, \ldots X_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$

reduz-se a operações algebricas.

Com effeito, a relação differencial

$$dz - \sum_{i=1}^{n} P_i \, dX_i = \rho \left(dz_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i \right)$$

que tem logar, por hypothese, mostra-nos que as equações

$$(15) \qquad Z = a_0, \quad X_1 = a_1, \quad \ldots, \quad X_n = a_n,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ designam constantes arbitrarias, satisfazem á relação differencial

$$(dz - p_1 \, dx_1 - \ldots - p_n \, dx_n) = 0$$

e que definem, por isso, uma multiplicidade M_n.

Ponhamos agora

$$\varphi_1 (a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_l = 0$$

e eliminemos de (15), por meio d'estas equações, l quaesquer das constantes $a_0, a_1, \ldots a_n$. O systema (15) converter-se-ha em um outro que apenas encerra $(n + 1 - l)$ constantes arbitrarias e que, pela eliminação d'estas constantes, se reduz ao systema proposto (14), isto é, dará (§ 62) um integral completo d'este systema, o que justifica o theorema enunciado.

67. — *Dados dois systemas de l equações distinctas*

$$(16) \qquad Z=0,\quad X_1=0,\quad \ldots,\quad X_{l-1}=0,$$

e

$$(17) \qquad Z'=0,\quad X'_1=0,\quad \ldots,\quad X'_{l-1}=0,$$

em involução e contendo as mesmas variaveis, podemos determinar uma transformação de contacto que converta cada um d'elles no outro.

Com effeito, determinemos $(2n-l+1)$ funcções $X_l, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$, que, conjunctamente com Z, $X_1, \ldots, X_{l-1}$, déem origem a uma transformação de contacto

$$z=Z(z,x,p),\quad x'_i=X_i,\quad p'_i=P_i,\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

É claro que esta transformação converte o systema (16) em

$$(18) \qquad z'=0,\quad x'=0,\quad \ldots,\quad x'_{l-1}=0.$$

Da mesma maneira podemos obter uma transformação de contacto que reduza o systema (17) ás relações (18). Executando seguidamente estas duas transformações, teremos uma nova transformação, que, sendo ainda de contacto (§ 21, II) satisfaz claramente ao enunciado do theorema.

68. — Consideremos ainda uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem

$$(19) \qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)=0$$

e seja

$$\psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)=0,\quad \ldots\quad \psi_l=0,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ designam constantes arbitrarias, um systema ao qual corresponda um integral completo de (19), isto é, do qual possa derivar-se uma multiplicidade M_n cujas equações se reduzam a (19) pela eliminação d'aquellas constantes. Mudando z em $z + a$, a equação (19) reduz-se a outra da fórma

$$(19') \qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, a, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

a qual terá um integral completo definido pelas equações que resultam de

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_l = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial z} + \ldots + \lambda_l \dfrac{\partial \psi_l}{\partial z} = 1, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_l \dfrac{\partial \psi_l}{\partial x_i} = -p_i, \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

pela eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$.

Como da eliminação de $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, a_1, \ldots, a_n$ entre as equações (20) deve resultar (19'), segue-se que este systema póde resolver-se em ordem ás grandezas a, λ, isto é, póde tomar a fórma

$$a = \varphi, a_1 = \varphi_1, \ldots, a_n = \varphi_n, \lambda_1 = \theta_1, \ldots, \lambda_l = \theta_l$$

onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \theta_1, \ldots, \theta_l$ designam funcções das variaveis z, x, p e a primeira equação não é mais do que a equação (19') resolvida em ordem a.

Além d'isto, as equações (20) dão, formando a expressão $\lambda_1 d\psi_1 + \ldots + \lambda_l d\psi_l$ e pondo

$$b_i = -\left(\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_i} + \ldots + \lambda_l \frac{\partial \psi_l}{\partial a_i}\right),$$

a expressão

$$(21) \qquad da - \sum_{i=1}^{n} b_i da_i = -(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i).$$

Podemos por isso concluir:

Conhecido um integral completo

$$a = \varphi\,(z,x,p), \quad a_1 = \varphi_1, \quad \ldots, \quad a_n = \varphi_n$$

de uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem da fórma (19′), *podemos, por operações algebricas, obter n funcções* $b_1, \ldots, b_n$ *de* z, x, p *que, conjunctamente com as funcções* a, $a_1 \ldots, a_n$, *satisfaçam á relação differencial* (21).

69. — O theorema precedente é susceptivel de muitas applicações interessantes que aqui não desenvolvemos. Limitamo-nos a apresentar as duas seguintes, que são muito importantes.

I. — Consideremos dois integraes completos de uma dada equação ás derivadas parciaes de primeira ordem e sejam $a_1, \ldots, a_n$ as constantes arbitrarias que figuram n'um d'elles e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as que figuram no outro.

Introduzindo uma nova constante arbitraria a pela mudança de z em $z + a$, podemos, pelo que acabamos de vêr, formar as duas expressões

$$da - \sum_{i=1}^{n} b_i\, da_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i,$$

$$da - \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, da_i = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i,$$

d'onde resulta:

$$b_1 da_1 + \ldots + b_n da_n = \beta_1 d\alpha_1 + \ldots + \beta_n d\alpha_n.$$

Esta equação define as transformações de contacto homogeneas; applicando-lhe o que ficou exposto em o n.º 46, obteremos umas formulas de ligação entre as grandezas a, b, α, β que nos permittem resolver o problema importante da passagem de um integral completo para outros.

II. — Seja dado um systema de equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, distinctas e em involução

$$Y_1 = 0, \ldots, Y_m = 0.$$

Korkine, para integrar este systema, propunha-se substituil-o por outro, tambem em involução, contendo apenas $(m-1)$ equações a $(m-1)$ variaveis. Este systema póde ser obtido por uma transformação de contacto, cuja determinação apenas depende do conhecimento de um integral completo de uma das equações do systema proposto.

Com effeito, supponhamos, por exemplo, conhecido um integral completo da equação $Y_1 = a_1$. Como vimos, podemos obter, por meio de operações algebricas, $2n$ funcções $Z, X_2 \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ que, conjunctamente com Y_1, originem uma transformação de contacto

$$z' = Z(z, x, p), \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; X_1 = Y_1).$$

Ora, esta transformação converte o systema proposto em

$$x'_1 = 0, \; Y'_2 = 0, \quad \ldots, \quad Y'_m = 0,$$

onde $Y'_2, \ldots, Y'_m$ designam funcções de z', x', p'. Estas equações acham-se em involução (§ 26); e, visto que teem logar identicamente as relações

$$[x'_1, Y'_i] = -\frac{\partial Y_i}{\partial p'_i} = 0, \quad (i = 2, \ldots, n),$$

as funcções Y'_i não encerram x'_1.

II

70. — Seja dada uma equação ás differenciaes totaes

$$(22) \qquad X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n = 0,$$

onde $X_1, \ldots, X_n$ designam funcções das n variaveis $x_1, \ldots, x_n$, não sujeitas ás condições mencionadas em o n.º 2.

O methodo de Pfaff para a integração d'esta equação funda-se na substituição da expressão

$$(23) \qquad X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx$$

por outra da mesma natureza, em que os coefficientes e as variaveis que figuram nos elementos differenciaes sejam independentes. A possibilidade d'aquella substituição póde demonstrar-se por meio dos dois theoremas seguintes, que se deduzem muito simplesmente da theoria das transformações de contacto:

I. — *Uma expressão da fórma* $dy_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i dy_i$ *póde converter-se em outra da fórma* $\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$, *desde que exista uma relação entre as* $(2n+1)$ *grandezas* $y_0, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n$.

Este theorema resulta immediatamente do que dissemos em o n.º 29. Com effeito, consideremos a relação

$$d\,\Pi + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i\, d\,\mathrm{X}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i,$$

ou, mudando Π em — Π,

$$(24) \qquad d\,\Pi + \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i\, d\,\mathrm{X}_i$$

e seja Π uma dada funcção de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Determinemos n funcções $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ que satisfaçam identicamente ás relações

$$(\mathrm{X}_i\,,\,\mathrm{X}_j) = o\;,\; (z - \Pi\,,\,\mathrm{X}_i) = o, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$(25) \quad (\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j) = o,\; (\Pi, \mathrm{X}_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial p_j}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pelo que se disse em o n.º 29, podemos em seguida obter, por meio de operações algebricas, n funcções $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$, taes que a relação (24) seja identicamente satisfeita, o que demonstra o theorema enunciado.

II. — *Uma expressão da fórma* $\sum_{i=1}^{n} q_i\, dy_i$ *póde reduzir-se á fórma* $dx_o + \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i$, *se existir uma relação entre as* $2n$ *grandezas* $q_1, \ldots, q_n, y_1, \ldots, y_n$.

Com effeito, supponhamos $\mathrm{X}_n = x_n$; das equações (25) e das relações (§ 29)

$$(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j) = 1, \quad (\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j), \quad (i,\; j = 1, 2, \ldots, n;\; i \gtrless j)$$

tira-se :

$$(\mathrm{P}_i, \mathrm{X}_n) = \frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial p_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_n) = \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial p_n} = 0, \quad (\mathrm{P}_n, \mathrm{X}_n) = \frac{\partial \mathrm{P}_n}{\partial p_n} = 1,$$

$$(\Pi, \mathrm{X}_n) = \Sigma\, p_j \frac{\partial \mathrm{X}_n}{\partial p_j} = 0.$$

D'aqui resulta que $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \Pi$ são independentes de p_n e que P_n tem a fórma

$$\mathrm{P}_n = p_n + \theta,$$

onde θ é uma funcção que não encerra p_n.

Em vista d'isto, a expressão (24) póde tomar a fórma

$$d\Pi + \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i\, d\mathrm{X}_i - p_n\, dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{P}_i\, d\mathrm{X}_i + \theta\, d\mathrm{X}_n$$

e as funcções $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \theta$, que apenas encerram as variaveis $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, acham-se ligadas por uma relação; o que justifica o theorema enunciado.

Devemos notar que os theoremas precedentes ainda teem logar, quando houver mais do que uma relação entre as grandezas q e y; mas n'este caso serão as quantidades p e x ligadas por um numero correspondente de relações.

71. — Applicando alternadamente á expressão de Pfaff (23) os theoremas que acabamos de demonstrar, reconhece-se claramente que aquella expressão póde receber a fórma

$$(26) \qquad F_1 df_1 + \ldots + F_n df_n,$$

onde as grandezas F, f são independentes e $2n \overline{\overline{<}} m$, ou a fórma

$$(27) \qquad dg_0 + G_1 dg_1 + \ldots + G_{n-1} dg_{n-1},$$

onde G, g são independentes e $2n - 1 \overline{\overline{<}} m$. Isto justifica o que dissemos no principio do numero precedente em relação á substituição da expressão (23).

As expressões (26) e (27) são conhecidas respectivamente pelas designações de *fórma normal de caracter par* e *formal normal de caracter impar.*

72. — Uma expressão de Pfaff (23) póde receber muitas fórmas normaes do mesmo caracter. A theoria das transformações de contacto permitte-nos passar de uma para as outras.

Sejam, com effeito,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} U_i du_i$$

duas fórmas normaes equivalentes a uma dada expressão de Pfaff (23). Teremos identicamente:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i = \sum_{i=1}^{n} U_i du_i.$$

Esta relação define, como sabemos, as transformações de contacto homogeneas e, por isso, applicando o principio do n.º 46, obteremos muitos systemas de relações que permittem exprimir as funcções F, f em U, v ou, inversamente, estas n'aquellas. Poderiamos ainda servir-nos (§ 38) das relações (42) da pag. 73.

Consideremos agora duas fórmas normaes de caracter impar

$$dg_0 + \sum_{i=1}^{n} G_i dg_i \quad , \quad dv_0 + \sum_{i=1}^{n} V_i dv_i.$$

Pondo $g_0 - v_0 = \Pi$, teremos identicamente a relação

$$d\Pi + \sum_{i=1}^{n} G_i dg_i = \sum_{i=1}^{n} V_i dv_i,$$

que define a classe das transformações de contacto a que temos chamado *transformações em* x, p. Para resolver a questão, não temos, pois, mais do que applicar o principio do n.º 50, ou ainda, o do n.º 29.

INDICE

ERRATA

PAGINAS	LINHAS	ERROS	EMENDAS
12	22	φ	ψ
18	21	$k+1$	k
19	3	$k+1$	k
23	31	(18)	(19)
31	15	(29)	(28)
33	9	coordenados	coordenadas
44	2	X	X_i
50	20	(21)	Deve suprimir-se este n.º
59	7	indifferentes	independentes
»	12	Z	z
61	13	$x_1, \ldots, x_n$	$x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$
»	14	$y_1, \ldots, y_{2n}, p_1, \ldots, p_n$	$y_1, \ldots, y_{2n}$
»	18	y_n	y_{2n}
»	19	$p_1, \ldots, p_n$	deve suprimir-se
»	20	y_{n+1}	y_n
63	10	satisfaz	satisfaça
69	11	A_1	Q_1
»	»	P_i	Q_i
74	26	L_1	P_1
104	24	que cortam	que se cortam

1895

S. LUCAS - DISSERTA ÃO INAUGURAL

MATHEMATICA