FRD

CURSO COMPLETO

DE

MATHEMATICAS PURAS

POR

L. — B. FRANCOEUR

CALCULO DIFFERENCIAL

E

CALCULO INTEGRAL

POR

L.—B. FRANCOEUR

NOVAMENTE TRADUZIDOS, CORRECTOS E AUGMENTADOS

PELOS

LENTES JUBILADOS DA FACULDADE DE MATHEMATICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Francisco de Castro Freire

E

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto

TERCEIRA EDIÇÃO

Da Faculdade

Para uso da Aula

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1878

ADVERTENCIA

Nesta nova edição, approvada pelo Conselho da Faculdade de Mathematica, a cujo juizo a sujeitámos, fizeram-se numerosos e consideraveis accrescentamentos e modificações, com o fim de a enriquecer e melhor accommodar ao ensino.

Para o conseguir foi-nos muito util a coadjuvação que fez a fineza de offerecer-nos o nosso collega Lente de Prima da Faculdade de Mathematica o sr. dr. Raymundo Venancio Rodrigues, a quem devemos indicações judiciosas sobre a utilidade d'alguns d'aquelles melhoramentos, suggeridas pela sua longa practica na regencia da cadeira respectiva, e a revisão d'uma das provas de quasi todas as folhas.

Folgâmos de agradecer aqui esta cooperação, que foi para nós um obsequio valioso e para a Universidade um serviço importante.

TABOA DAS MATERIAS

CALCULO DIFFERENCIAL

I

Regras geraes de differenciação

Pag.

II

Applicações do calculo differencial

NOTA

CALCULO INTEGRAL

I

Integração das funcções d'uma só variavel

II

Integração das equações differenciaes de primeira ordem entre duas variaves

I

III

Integração das equações differenciaes que contêm tres variaveis

IV

Calculo das variações

V

Differenças e series

NOTAS

CALCULO DIFFERENCIAL

I

REGRAS GERAES DE DIFFERENCIAÇÃO

Noções preliminares

1. Seja $$y = fx$$

uma equação entre duas variaveis x, y.

Por dois pontos M (x, y) e M$'$ $(x + h, y + k)$ da curva BMM$'$ (Fig. 1), que suppomós ser o logar geometrico d'esta equação, tire-se a secante SMM$'$. Teremos:

$$y = fx = \mathrm{MP},\ y + k = f(x + h) = \mathrm{M'P'},\ k = f(x + h) - fx = \mathrm{M'Q};$$

e o triangulo rectangulo MM$'$Q dará:

$$\operatorname{tang} \mathrm{M'MQ} = \frac{\mathrm{M'Q}}{\mathrm{MQ}} = \frac{k}{h} = \frac{f(x + h) - fx}{h}.$$

Mas, se tirarmos a tangente MH no ponto M, e chamarmos θ, i, os angulos HMQ, HMM′, será:

$$\operatorname{tg} M'MQ = \operatorname{tg}(\theta - i) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg} i}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} i} = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tang} i}{\cos^2\theta(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg} i)} = \operatorname{tg}\theta + \alpha.$$

A expressão de $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ tem pois a fórma

$$\frac{f(x+h)-fx}{h} = y' + \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

sendo $y' = \operatorname{tang}\theta$ independente de h, e α uma expressão que a hypothese $h=0$ fará desapparecer. E assim deve ser, por isso que a direcção da tangente em M não depende da posição do ponto M′.

Este raciocinio deixaria de ter logar quando não houvesse tangente no ponto M (x, y); o que só poderia acontecer em casos especiaes, em que se apresentam com effeito resultados que tambem precisam d'uma interpretação especial; mas, em quanto não descermos da generalidade, e considerarmos x qualquer, podemos dar como estabelecida a verdade da equação (1).

2. Fica portanto demonstrado que $f(x+h)$ pode, em geral, tomar, por calculos convenientes, a fórma

$$f(x+h) = fx + y'h + \alpha h.$$

O coefficiente y', nova funcção de x dependente da primitiva y, e independente de h, chama-se *derivada* da funcção y, e tambem se designa por $f'x$. E porque esta funcção suppõe a existencia d'uma curva, que é o seu logar geometrico, e cuja tangente ella determina, vê-se que é propria para exprimir a continuidade de y.

Veremos que a funcção α se pode egualmente desenvolver em uma serie de termos ordenados segundo as potencias ascendentes de h; e que os coefficientes d'esses termos dependem de y', sendo por isso tambem proprios para exprimir, ainda mais, a continuidade de y.

Por exemplo, sendo X um polynomio racional em x do gráu n, e designando respectivamente X', X'', X''', $X^{(n)}$ as funcções derivadas de X, X', $X'', \ldots X^{(n-1)}$, vimos (*Alg. Sup.* n.º 32 *) que é

$$f(x+h) = X + hX' + \frac{1}{2} h^2 X'' + \frac{1}{2.3} h^3 X''' + \ldots \frac{1}{2.3\ldots n} h^n X^{(n)}.$$

3. *O Calculo differencial é um ramo da analyse transcendente, no qual se procuram as derivadas das funcções, se investigam as suas propriedades, e se empregam essas derivadas na resolução dos problemas em que figura a continuidade das funcções.*

Como o segundo membro da equação (1) se approxima tanto mais de y' quanto é menor h, a differença $f(x+h) - fx$ pode approximar-se indefinidamente de $y'h$; e por isso se chama *differencial* esta parte da differença total, quando h é a *differencial* de x. Leibnitz, inventor do calculo infinitesimal, designou pela caracteristica d o augmento infinitamente pequeno attribuido a uma variavel: de maneira que dy e dx correspondem ás quantidades que designamos por k e h, consideradas no seu ultimo estado de grandeza; e a differencial de y é $dy = y'dx$. D'onde provém ainda o nome de *coefficiente differencial* á derivada y', e o de *Calculo differencial* ao calculo que acabamos de definir.

4. As definições de y' como limite da razão $\frac{f(x+h) - fx}{h}$ correspondente a $h = 0$; como coefficiente da primeira potencia de h no desenvolvimento de $f(x+h)$; e como coefficiente differencial $\frac{dy}{dx}$: são as bases respectivas de tres differentes modos de exposição dos principios do Calculo differencial. Mas na investigação da derivada, correspondente a cada funcção, procuraremos o limite da razão $\frac{f(x+h) - fx}{h}$, ou os dois primeiros termos $fx + y'h$ do desenvolvimento de $f(x+h)$, segundo a facilidade que a especie da funcção offerecer para um ou outro d'estes processos.

5. A variavel x, á qual se attribue um augmento dx, chama-se *variavel independente* ou *principal*; e a variavel y, cujo augmento dy resulta do augmento dx attribuido a x, em virtude da equação $y = fx$ que liga y com x, chama-se *variavel dependente*.

..

A derivada y' da funcção y chama-se *derivada da primeira ordem;* a derivada y'' de y' chama-se *derivada da segunda ordem* de y; e assim por diante.

Similhantemente os coefficientes differenciaes de primeira ordem, segunda ordem..., de y designam-se por $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dy'}{dx} = y''$,.........

E no caso de se tomar constante o augmento infinitesimo dx da variavel independente, como supporemos quando não advertirmos o contrario, designam-se por $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,...

Theorema de Taylor

6. No n.º 2 achamos os primeiros termos $y + hy'$ do desenvolvimento de $f(x+h)$ em ordem ás potencias ascendentes de h: os seguintes estão comprehendidos em αh. Procuremos todo o desenvolvimento.

Representando $y' + \alpha$ por P, a equação (1) toma a fórma

$$f(x+h) = fx + \mathrm{P}h \qquad \text{.................(2).}$$

Mudemos x em $x+i$, e h em $h-i$. Como, por esta mudança, $x+h=z$ não varía, só variará x em $\mathrm{P} = \mathrm{F}(x, h)$ posto debaixo da fórma $\mathrm{F}(x, z-x)$; e a equação (2) tornar-se-ha em $f(x+h) = y + y'i + \beta i + (\mathrm{P} + \mathrm{P}'i + \gamma i)(h-i)$; ou, attendendo á mesma equação, e ordenando segundo as potencias ascendentes de i,

$$0 = (y' - \mathrm{P} + \mathrm{P}'h)i + \ldots$$

Depois, egualando a zero separadamente os coefficientes das potencias de i, e substituindo em (2), teremos

$$\mathrm{P} = y' + \mathrm{P}'h, \text{ e } f(x+h) = fx + y'h + \mathrm{P}'h^2 \qquad \text{........(3).}$$

Similhantemente, mudando x em $x+i$ e h em $h-i$ na primeira das equações (3), egualando a zero os coefficientes das potencias de i, e substituindo em $f(x+h)$, teremos

$$2P' = y'' + P''h,$$

e $$f(x+h) = fx + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{2}P''h^3.$$

Em geral, suppondo

$$(n-1)P^{(n-2)} = y^{(n-1)} + P^{(n-1)}h,$$

e $$f(x+h) = fx + y'h + \frac{y''h^2}{2} + \ldots \frac{y^{(n-1)}h^{n-1}}{2\ldots(n-1)} + \frac{P^{(n-1)}h^n}{2\ldots(n-1)}:$$

se operarmos nestas como fizemos para obter (3), resultarão

$$nP^{(n-1)} = y^{(n)} + P^{(n)}h,$$

e $$f(x+h) = fx + y'h + \frac{y''h^2}{2} + \ldots \frac{y^{(n)}h^n}{2\ldots n} + \frac{P^{(n)}h^{n+1}}{2\ldots n}.$$

Portanto a lei é geral.

A ultima equação

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{1}{2}h^2f''x + \ldots \frac{1}{2.3\ldots n}h^n f^{(n)}x + \ldots . \text{(A)}$$

é conhecida pelas denominações de *Theorema de Taylor* ou *Fórmula de Taylor*, do nome do geometra celebre a quem se attribue a sua descoberta.

E vê-se que esta fórmula será definida, se puder determinar-se o factor $P^{(n)}$ do termo que a completa, como adiante veremos.

7. Fica assim demonstrado que, attribuindo a x um augmento h em fx, a funcção variada $f(x+h)$ se desenvolve em uma serie (A) de termos, que só contêm *potencias inteiras e positivas de h*, ao menos em quanto x conservar um valor indeterminado. A serie (A) fará conhecer este desenvolvimento, quando soubermos tirar de fx as derivadas successivas $f'x$, $f''x$,...., ou y', y'',....

Seja, por exemplo, $y=x^m$. Como a desenvolução de $(x+h)^m$ dá mx^{m-1} para coefficiente da primeira potencia de h, teremos $y'=mx^{m-1}$, e do mesmo modo $y''=m(m-1)x^{m-2}$,...; depois, substituindo em (A), virá a serie de Newton. Para achar os outros termos da serie, qualquer que seja o expoente m, basta pois saber que o segundo termo é mhx^{m-1}, ou que $\dfrac{(x+h)^m-x^m}{h}$ se reduz a mx^{m-1} quando h se anniquila.

Já desenvolvemos na *Algebra* diversas funcções em serie. Mas, como este desenvolvimento é uma applicação muito simples do calculo das derivações, deduzil-o-hemos da fórmula de Taylor, seguindo as regras d'este calculo; e não faremos uso das series, sem que de novo as tenhamos demonstrado por esse meio.

Outra demonstração do theorema de Taylor

8. Se na funcção $y=fx$ mudarmos successivamente x em $x+\Delta x$, sendo Δx constante, mudar-se-hão

x em $\quad x+\Delta x \quad x+2\Delta x \quad x+3\Delta x \quad \ldots\ldots\ldots$

e y em $\quad y+\Delta y \quad y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y) \quad y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y)+\Delta(y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y))$

ou $\quad y+\Delta y \quad y+2\Delta y+\Delta^2 y \quad y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y \quad \ldots\ldots\ldots,$

a que se pode dar a fórma

$$y+\Delta y,\ y+2\Delta y+\frac{2.(2-1)}{1.2}\Delta^2 y,\ y+3\Delta y+\frac{3.(3-1)}{1.2}\Delta^2 y+\frac{3.(3-1).(3-2)}{1.2.3}\Delta^3 y,\ldots$$

Seguindo a analogia, supponhamos que é

$$f(x+(n-1)\Delta x)=y+(n-1)\Delta y+\frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2}\Delta^2 y+\ldots$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1\ .\ 2\ldots k}\Delta^k y+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k+1))}{1\ .\ 2\ldots k+1}\Delta^{k+1} y\ldots$$

Mudando x em $x + \Delta x$, resultará ainda

$$f(x+n\Delta x)=y+\begin{array}{r}1\\+n-1\end{array}\Bigg|\,\Delta y+\ldots+\left.\begin{array}{l}\dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k}\\[2ex]+\dfrac{(n-1)(n-2)..(n-k)(n-(k+1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k\,.\,k+1}\end{array}\right|\Delta^{k+1}y+\ldots$$

$$=y+n\,\Delta y+\,.\,.\,.\,.+\frac{n(n-1)(n-2\ldots(n-k)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,k+1}\Delta^{k+1}y+\,.\,.\,.\,.\,.(1).$$

Donde se conclue que a lei (1), já verificada para $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, é geral.

Posto isto, para desenvolver $f(x+h)$ em serie, basta fazer $n\Delta x = h$ na fórmula (1), o que dará

$$f(x+h)=fx+h\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{h(h-\Delta x)}{1\,.\,2}\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}+\ldots\frac{h(h-\Delta x)..(h-k\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k+1}\frac{\Delta^{k+1}y}{(\Delta x)^{k+1}}+\ldots(2).$$

Mas, por ser o augmento h independente de Δx, não pode Δx entrar no desenvolvimento (2) senão apparentemente: se fizermos pois $\Delta x = 0$, ainda este desenvolvimento será o mesmo; e chamando então $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, . . . aquillo, em que nesta hypothese se tornam $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, . . . , a serie (2) transformar-se-ha na fórmula de Taylor.

Cumpre advertir que este raciocinio tem sómente logar quando Δx se pode tomar arbitrario e indefinidamente pequeno, isto é, quando nas n partes, de que se compõe h, a curva, cuja equação é $y = fx$, não tem pontos conjugados, de sorte que a hypothese $\Delta x = 0$ não torna imaginaria nenhuma das expressões $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, . . .

E tambem, que fazer $\Delta x = 0$ em 2) corresponde a desprezar Δx e as suas potencias, em comparação de h e das outras quantidades que não são arbitrarias e indefinidas. Por onde se vê quanto esta demonstração do theorema fundamental do calculo differencial é propria para dar idêas claras do mesmo calculo, e para justificar os desprezos das quantidades *indefinidamente pequenas*, que nelle se fazem (*Calc.* de Bezout, n.° 82, IV, *Calc. diff.* de Garnier, cap. 2; e *Calc.* de Navier, n.° 80).

Regras da differenciação das funcções algebricas

9. A composição da derivada y' em x depende da fórma da funcção primitiva y. É por isso necessario formar esta derivada para cada funcção proposta; o que se obtem por qualquer dos processos referidos no n.º 4.

Mas, para não repetir os mesmos raciocinios em todos os exemplos, daremos as regras pelas quaes se formam as derivadas das diversas especies de funcções; ficando assim reduzido o trabalho a practicar em cada caso estas operações por processos sabidos, do mesmo modo que na multiplicação, na extracção de raizes, e em outros calculos algebricos.

10. Seja $$y = fx = \mathrm{A} + \mathrm{B}u - \mathrm{C}t + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

designando A, B, C,... constantes, e u, t,... funcções de x.

Mudando x em $x+h$, não mudará A, tornar-se Bu em $\mathrm{B}(u+u'h+\alpha)$, Ct em $\mathrm{C}(t+t'h+\beta h)$,..., e fx em $f(x+h) = fx + (\mathrm{B}u' - \mathrm{C}t')h + (\mathrm{B}\alpha - \mathrm{C}\beta)h\ldots$;

logo $$y' = \mathrm{B}u' - \mathrm{C}t';$$

isto é: *Para ter a derivada d'um polynomio, sommem-se algebricamente as derivadas dos seus termos, conservados os mesmos coefficientes e signaes.*

A derivada d'um termo constante é nulla.

Por exemplo: $$y = a^2 + mx,\ y = 1 - 5x,$$

dão, respectivamente, $$y' = +m,\ y' = -5.$$

11. Sejam u e t funcções de x, e $y = ut$.

Será $$f(x+h) = (u + u'h + \alpha h)(t + t'h + \beta h) = fx + (u't + ut')h + \ldots;$$

e portanto $$y' = u't + ut'.$$

Seja $$y = utv.$$

Pondo $z = tv$, e por conseguinte $y = uz$, serão

$$z' = t'v + tv',\ y' = u'z + uz' = u'tv + t'uv + v'tu.$$

E procedendo do mesmo modo para qualquer numero de factores, teremos a regra seguinte:

Para formar a derivada do producto de muitos factores, considere-se ***successivamente cada um d'elles como o unico variavel, e sommem-se as derivadas assim obtidas;***

Por exemplo:

$$y = (a+x)(a-x) \quad \text{dá} \quad y' = (a-x).1 + (a+x).(-1) = -2x;$$

$$y = (a+bx)(c-dx)x \quad \text{dá} \quad y' = b(c-dx)x - d(a+bx)x + (a+bx)(c-dx).$$

12. Para $y = \frac{u}{t}$ teremos $u = yt$, $u' = y't + t'y$,

que dão (*) $$y' = \frac{u' - t'y}{t},\ \text{ou}\ y' = \frac{u't - t'u}{t^2}.$$

Logo: ***Para ter a derivada d'uma fracção, tire-se da derivada do numerador o producto da mesma fracção pela derivada do denominador, e divida-se a differença pelo denominador.***

Ou tambem: ***Multiplique-se o denominador pela derivada do numerador e o numerador pela derivada do denominador; subtráia-se o segundo producto do primeiro; e divida-se a differença pelo quadrado do denominador.***

(*) Se operassemos immediatamente sobre a fracção proposta, teriamos

$$f(x+h) = \frac{u + u'h + \alpha h}{t + t'h + \beta h} = \frac{u}{t} + \frac{tu' - ut'}{t^2} h + \ldots, \text{ que tambem daria } y' = \frac{tu' - ut'}{t^2}.$$

Por exemplo:

$$y=\frac{a^2-x^2}{a-x}=\frac{(a+x)(a-x)}{a-x} \text{ dá } y'=\frac{(a-x).(-2x)-(a^2-x^2).(-1)}{(a-x)^2}=1;$$

$$y=x\left(\frac{1}{a}-\frac{x}{1-x}\right) \text{ dá } y'=\frac{1}{a}-\frac{x}{1-x}-x.\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{a}-\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

13. No caso de ser u constante, é $u'=0$, e $y'=-\dfrac{ut'}{t^2}$.

Por tanto: *A derivada d'uma funcção de numerador constante é egual a menos o producto do numerador pela derivada do denominador, dividido este producto pelo quadrado do denominador.*

Por exemplo: $y=\dfrac{4}{1-x^2}=\dfrac{4}{(1+x)(1-x)}$ dá $y'=+\dfrac{8x}{(1-x^2)^2}$.

14. Passemos ás derivadas das potencias.

1.º Se m é inteiro e positivo, temos $y=x^m=x.x.x\dots,$

que dá (n.º 11) $y'=1.x^{m-1}+1.x^{m-1}+\dots=mx^{m-1}$.

E mais geralmente, para $y=z^m$, sendo $z=fx$, é

$$y'=mz^{m-1}.z'.$$

2.º Se m é inteiro e negativo, $m=-n$, temos

$$y=z^m=z^{-n}=\frac{1}{z^n}, \text{ e (13) } y'=-\frac{nz^{n-1}.z'}{z^{2n}}=-nz^{-n-1}z'=mz^{m-1}.z'.$$

3.° Se m é fraccionario, $m=\frac{p}{q}$, temos

$$y=z^m=z^{\frac{p}{q}},\ y^q=z^p,\ qy^{q-1}.y'=pz^{p-1}.z',\ y'=\frac{p}{q}z^{\frac{p}{q}-1}z'=mz^{m-1}.z'.$$

4.° Finalmente, se m é irracional ou imaginario, ainda se lhe applica a mesma fórmula (vid. *Alg. Sup.* n.° **11**, **3.°** e **4.°**). Logo, qualquer que seja o expoente m:

Para ter a derivada d'uma potencia, multiplique-se o expoente da potencia pela raiz elevada a esse expoente menos uma unidade, e pela derivada da raiz.

Por exemplo: $y=x^{\frac{3}{2}}(a+bx^{-2})$, fazendo $a+bx^{-2}=z$, dá

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.z+x^{\frac{3}{2}}z'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{-2})-2bx^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}.$$

15. Para $y=\sqrt[m]{z}=z^{\frac{1}{m}}$ é $y'=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}.z'=\frac{z'}{m\sqrt[m]{z^{m-1}}}.$

No caso de $m=2$, é $y'=\frac{z'}{2\sqrt{z}}$. E assim:

A derivada da raiz quadrada d'uma quantidade é egual á derivada da quantidade, dividida pelo dobro da raiz.

Por exemplo: $y=\sqrt[4]{(a+bx^2)^5}$

..

dá $$y'=\frac{5(a+bx^2)^4.2bx}{4\sqrt[4]{(a+bx^2)^{15}}}=\frac{5}{2}bx\sqrt[4]{(a+bx^2)};$$

e $$y=\frac{x}{-x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x(x+\sqrt{a^2+x^2})}{a^2}$$

dá $$y'=\frac{a^2}{(a^2+2x^2-2x\sqrt{a^2+x^2})\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{2x}{a^2}+\frac{a^2+2x^2}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

16. Obtida a derivada y' de y, podem depois formar-se as derivadas successivas y'', y''' . . .

Por exemplo: $$y=x^m,\ y=x^{-1},\ y=\sqrt{x},$$

dão respectivamente:

$$y'=mx^{m-1},\ y''=m(m-1)x^{m-2}..\ y^{(n)}=m(m-1)..(m-(n-1))x^{m-n};$$

$$y'=-\frac{1}{x^2},\ y''=+\frac{2}{x^3},\ \ldots\ldots\ y^{(n)}=\mp\frac{2.3\ldots n}{x^{n+1}};$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ y''=-\frac{1}{2^2\sqrt{x^3}},\ \ldots\ y^{(n)}=\pm\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}.$$

17. Sabendo derivar todas as funcções algebricas, facilmente se applica a serie de Taylor [(A) do n.° 6] ao desenvolvimento d'estas funcções em series ordenadas segundo as potencias ascendentes de h, quando se muda x em $x+h$.

I. Seja $y=x^{-1}$. Com as derivadas $y', y'', \ldots$ que acabamos de formar, a fórmula (A) dará a progressão arithmetica

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\pm\frac{h^n}{x^{n+1}}.$$

II. Seja $y=\frac{x^2-a^2}{x}=x-\frac{a^2}{x}$. Serão $y'=1+\frac{a^2}{x^2}$, $y''=-\frac{2a^2}{x^3}$,...,

e
$$f(x+h)=\frac{x^2-a^2}{x}+\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)h-\frac{a^2}{x^3}h^2\ldots\ldots$$

III. Seja $y=\sqrt{x}$. Com as derivadas y', y'',... que achamos, teremos

$$\sqrt{(x+h)}=\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}}-\frac{h^2}{8\sqrt{x^3}}+\ldots\pm\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}\cdot\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}.$$

IV. Seja $y=x^m$, e m qualquer. Teremos:

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\ldots\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ n}h^nx^{m-n}.$$

Mas cumpre advertir que uma serie só representa a funcção desenvolvida, quando é convergente para o valor da mesma funcção.

Outra demonstração da regra de derivação das potencias, para qualquer expoente

18. Mudando x em $x+h$, a funcção $y=x^m$ torna-se em

$$(x+h)^m=x^m+y'h+\ldots,$$

ou, dividindo por x^m, e pondo $h=zx$,

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^m=(1+z)^m=1+\frac{y'z}{x^{m-1}}+\ldots.$$

Como se pode variar h de modo que z fique constante, deve $(1+z)^m$ ser independente de x; o que dá $\dfrac{y'}{x^{m-1}} = \text{constante}.$

É pois $$y' = x^{m-1} fm;$$

representando fm uma funcção unicamente de m, sem x.

Para determinar m, temos assim

$$(x+h)^m = x^m + hx^{m-1} fm + \ldots\ldots,$$

e similhantemente

$$(x+h)^n = x^n + hx^{n-1} fn + \ldots, \quad (x+h)^{m+n} = x^{m+n} + hx^{m+n-1} f(m+n) + \ldots$$

Mas a multiplicação de $(x+h)^m$ por $(x+h)^n$ dá

$$(x+h)^{m+n} = x^{m+n} + hx^{m+n-1}(fm+fn) + \ldots\ldots;$$

logo $f(m+n) = fm + fn$, que é conhecida com o nome de equação da definição das funcções exponenciaes: da qual, considerando n como augmento de m, ou $f(m+n) = fm + nf'm + \ldots$, resulta $fn = nf'm$.

Esta equação mostra que, por ser n independente de m, devem ser $f'm$ uma constante a independente de m, e $f''m$, $f'''m$, ... nullos.

Será por tanto $fn = an$, e do mesmo modo $fm = am$: o que dá

$$(x+h)^m = x^m + mahx^{m-1} + \ldots$$

Para determinar a constante a, façamos $m = 1$ nesta equação.

Ficará $x + h = x + ah$; o que dá $a = 1$, e por conseguinte

$$y' = mx^{m-1}.$$

Para $y = z^m$, sendo z funcção de x, temos

$$f(x+h) = (z + hz' + \ldots)^m = z^m + mh^{m-1}z' + \ldots, \text{ que dá}$$

$$y' = mz^{m-1} z'.$$

Funcções de funcções

19. Em alguns dos exemplos precedentes, a expressão, que se pretendia derivar, não era funcção immediata da variavel principal, mas sim d'outra variavel tambem dependente da principal. Foi d'este modo que, suppondo z funcção de x, e $y = z^m$, achamos $y' = mz^{m-1}z'$.

Considerar assim a relação entre duas variaveis como expressa por intermedio de relações entre essas e outras variaveis, não só generaliza a investigação das derivadas, mas permitte muitas vezes simplifical-a, egualando a novas variaveis algumas das partes de funcções complicadas, á similhança do que se praticou no exemplo do n.º 14.

Tractemos pois d'esta classe de funcções, que se chamam *funcções de funcções.*

20. Supponhamos que, em vez da funcção

$$y = fx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

se dá o systema equivalente das duas

$$y = \varphi z,\ z = Fx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

da eliminação de z entre as quaes resultaria (1). Tracta-se de achar a derivada de (1), sem fazer essa eliminação.

Antes d'isso observaremos que, por haver, em (1) e na 1.ª de (2), duas variaveis principaes x e z, não se pode usar da mesma notação y' para exprimir a derivada de y em ordem a cada uma d'ellas; mas, como a derivada equivale ao coefficiente differencial (n.º 3), podemos designar por $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dy}{dz}$ as derivadas de y relativas a x e z: advertindo que, adoptada esta notação, não se devem executar operações analyticas sobre as differenciaes dx e dz; porque estas, escriptas como denominadores, não só indicam divisões, mas tambem mostram em ordem a qual das variaveis se fez a derivação designada pelo respectivo coefficiente differencial: nem tão pouco se devem suppor os dy eguaes, porque são differentes os relativos a cada uma das duas variaveis x, e z.

Bem entendido isto, se mudarmos x em $x+h$, mudar-se-hão z e y em

$$z+k=\mathrm{F}(x+h),\ f(x+h)=\varphi(z+k),$$

que dão:

$$k=h\frac{dz}{dx}+\ldots,\ f(x+h)=y+k\frac{dy}{dz}+\ldots=fx+h\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}+\ldots.$$

Mas é (eq. 1) $\quad f(x+h)=fx+h\dfrac{dy}{dx}+\ldots;$

logo $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$

Portanto: *Quando* y *é funcção de* z, *e* z *funcção de* x, *a derivada de* y *em ordem a* x *é egual ao producto das derivadas de* y *em ordem a* z *e de* z *em ordem a* x, *deduzidas de* (2), *nas quaes* z *e* x *são as respectivas variaveis principaes.*

21. Supponhamos que a equação (1) resulta das tres

$$z=\mathrm{F}x,\ u=\psi x,\ y=\varphi(z,u).$$

Mudando x em $x+h$, mudam-se z, u, y em

$$z+k=\mathrm{F}(x+h),\ u+i=\psi(x+h),\ f(x+h)=\varphi(z+k,u+i).$$

As duas primeiras dão

$$k=\frac{dz}{dx}h+\ldots,\ i=\frac{du}{dx}hx\ldots.$$

Em quanto á ultima, podemos mudar primeiro z em $z+k$, e depois mudar no resultado u em $u+i$, o que dará successivamente

$$\varphi(z+k, u)=\varphi(z, u)+k\frac{d\varphi}{dz}+\ldots, \varphi(z+k, u+i)=\varphi(z, u)+i\frac{d\varphi}{du}+k\frac{d\varphi}{dz}+\ldots$$

Substituindo depois na segunda d'estas as expressões de i e k, será emfim:

$$f(x+h)=fx+h\left(\frac{d\varphi}{du}.\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}.\frac{dz}{dx}\right)+\ldots.;$$

e comparando com

$$f(x+h)=fx+h\frac{dy}{dx}+\ldots.,$$

teremos $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}\ldots.$$

Em geral, se, em vez de (1), tivermos o systema equivalente:

$$z_1=\varphi_1(x),\ z_2=\varphi_2(x),\ldots,\ y=\psi(z_1,\ z_2,\ldots)\ldots\ldots(4):$$

mudando x em $x+h$, resultarão

$$z_1+k_1=\varphi_1(x+h),\ z_2+k_2=\varphi_2(x+h),\ldots;\ f(x+h)=\psi(z_1+k_1,\ z_2+k_2,\ldots),$$

que dão

$$k_1=h\frac{d\varphi_1}{dx}+\ldots;\ k_2=h\frac{d\varphi_2}{dx}+\ldots;\ f(x+h)=fx+k\frac{d\psi}{dz_1}+k_2\frac{d\psi}{dz_2}+\ldots,$$

ou $$f(x+h)=fx+h\left(\frac{d\psi}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dx}+\frac{d\psi}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{dx}+\ldots\right),$$

e por conseguinte $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dx}+\frac{dy}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{dx}+\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Portanto: *A derivada d'uma funcção y composta de qualquer modo de muitas funcções z_1, z_2,... é egual á somma das derivadas respectivas, que se obtém considerando só como variavel cada uma das componentes, isto é, applicando a equação* (3) *a cada uma.*

As derivações dos productos e dos quocientes são casos particulares d'este theorema.

Seja, por exemplo, $$y=\frac{(1-x^2)^2-(3-2x)x}{4-5x}.$$

Pondo $$z=1-x^2,\ u=3x-2x^2,\ t=4-5x,$$

e por conseguinte $$y=\frac{z^2-u}{t},$$ serão:

$$\frac{dz}{dx}=-2x,\ \frac{du}{dx}=3-4x,\ \frac{dt}{dx}=-5;\ \frac{dy}{dz}=\frac{2z}{t},\ \frac{dy}{du}=-\frac{1}{t},\ \frac{dy}{dt}=-\frac{z^2-u}{t^2},$$

e $$y'=-\frac{4zx}{t}-\frac{3-4x}{t}+\frac{5(z^2-u)}{t^2}=\frac{16x^3-15x^4-7}{(4-5x)^2}.$$

22. Quando as expressões das variaveis z, u,.... não viessem a ser complicadas, seria melhor não fazer a transformação precedente, e operar como se ella estivesse feita, suppondo-a tacitamente.

Por exemplo: $y=(a-2x+x^3)^3(a-x)$

dará $y'=3(a-2x+x^3)^2(-2+3x^2)(a-x)-(a-2x+x^3)^3,$

ou $y'=(a-2x+x^3)^2(-7a+8x+9ax^2-10x^3),$

Funcções exponenciaes e logarithmicas

23. Funcções exponenciaes. Seja $y=a^x$.

Mudando x em $x+h$, e depois dividindo por a^x, resultam successivamente

$$f(x+h)=a^{x+h}=a^x+y'h+\ldots,\ a^h=1+\frac{y'}{a^x}h+\ldots.$$

E como, por ser independente de x o primeiro membro da ultima equação, tambem o deve ser o segundo, teremos

$$y'=ka^x;$$

representando k uma constante, que vamos determinar.

Substituindo na serie de Taylor as derivadas successivas

$$y'=ka^x,\ y''=k^2a^x,\ldots.y^{(n)}=k^na^x,$$

vem $$a^{x+h}=a^x+ka^xh+\frac{1}{2}k^2a^xh^2+\frac{1}{2.3}k^3a^xh^3+\ldots:$$

que, para $x=0$, dá $$a^h=1+hk+\frac{1}{2}h^2k^2+\frac{1}{2.3}h^3k^3+\ldots;$$

e, para $x=0$, $h=1$, dá $$a=1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2.3}k^3+\ldots,$$

da qual se tira, pelo methodo inverso das series,

$$k=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3+\ldots.$$

24. As duas equações

$$a=1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2.3}k^3+\ldots,\; k=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3+\ldots,$$

estabelecem a relação entre a base a dos logarithmos definidos pela equação $y=a^x$ e a constante k; de sorte que, dada uma d'estas quantidades, se obtem logo a outra.

Assim, fazendo $k=1$, a expressão de a reduz-se á base dos logarithmos naturaes, ou neperianos,

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots=2,718281828\ldots.$$

E, fazendo $kh=1$, a expressão de a^h dá

$$a^{\frac{1}{k}}=e, \quad \text{ou} \quad k=\frac{\text{Log}\, a}{\text{Log}\, e}=la=\frac{1}{\log e}.$$

A primeira d'estas expressões de k tem logar em um systema de qualquer base, a segunda no systema de base e, e a terceira no de base a; systemas que se distinguem pelas tres notações Log., l, log., segundo a convenção adoptada (*Alg. Sup.*, n.º 154).

25. Sendo z funcção de x, e $y = a^z$,

teremos $$y' = ka^z z' = a^z z' \, la.$$

Portanto: *Acha-se a derivada d'uma funcção exponencial, multiplicando a mesma funcção pela derivada do expoente e pelo logarithmo natural da base.*

Por exemplo: $$y = e^{mz}, \quad y = a^{3x+1}, \quad y = a^{\sqrt{2x+1}},$$

dão, respectivamente: $y' = me^{mz}z'$, $y' = 3a^{3x+1}la$, $y' = a^{\sqrt{2x+1}} \cdot \dfrac{la}{\sqrt{2x+1}}$.

26. FUNCÇÕES LOGARITHMICAS. Seja $y = \operatorname{Log} x$.

Será $\operatorname{Log}(x+h) = \operatorname{Log} x + y'h + \ldots$, ou $\operatorname{Log} \dfrac{x+h}{x} = y'h + \ldots$,

ou, pondo $h = zx$, $\operatorname{Log}(1+z) = y'xz + \ldots$

Como, variando x, se pode tomar h tal que z fique constante, deve $y'x$ ser uma constante M independente de x, e por conseguinte $y' = \dfrac{M}{x}$. Determinemos M.

Substituindo na serie de Taylor as derivadas successivas

$$y' = \frac{M}{x}, \; y'' = -\frac{M}{x^2}, \; y''' = \frac{2M}{x^3}, \ldots \; y^{(n)} = \pm \frac{2.3\ldots(n-1)\,M}{x^n},$$

vem $$\operatorname{Log}(x+h) = \operatorname{Log} x + \mathrm{M}\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} \cdots \mp \frac{h^n}{nx^n}\right)$$

ou $$\operatorname{Log}(1+z) = \mathrm{M}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 \cdots\cdots\cdots \mp \frac{1}{n}z^n\right).$$

E se, chamando a a base dos logarithmos, fizermos $1+z=a$ nesta serie, resultará

$$1 = \mathrm{M}\left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 \cdots \mp \frac{1}{n}(a-1)^n\right],$$

isto é, $$1 = \mathrm{M}k = \frac{\mathrm{M}}{\log e}.$$

Logo (*) $$\mathrm{M} = \log e = \frac{1}{l\,a}.$$

27. A funcção $y=\log z$ dá $y' = \dfrac{\mathrm{M}z'}{z} = \dfrac{z'}{zla}$.

Logo: *Acha-se a derivada do logarithmo d'uma funcção dividindo a derivada d'essa funcção pela mesma funcção, e multiplicando pelo modulo.*

Não deve esquecer que nos logarithmos naturaes ou neperianos o modulo é egual á unidade.

(*) Como $y = a^{\log y} = e^{ly}$ dá $\log y = ly \log e = \mathrm{M}\,ly$, vê-se que M é o factor constante, chamado modulo, pelo qual se devem multiplicar os logarithmos naturaes para ter os d'outro systema de base a (*Alg. Sup.*, *n.*° 154).

Exemplos :

$$y = l\,\frac{u}{t},\ y' = \frac{tu' - ut'}{ut};\ y = \log z^n,\ y' = \frac{nz'}{z}\,\mathrm{M};$$

$$y = \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ y' = \frac{\mathrm{M}}{x(1+x^2)};$$

$$y = \log(x + \sqrt{1+x^2}),\ y' = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{1+x^2}};\ y = l\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)},\ y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y = l\,\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}},\ y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

28. Chamando *differencial logarithmica* de y a expressão $\frac{dy}{y}$, podem tomar-se facilmente de cór as regras fundamentaes da differenciação das funcções algebricas, dizendo que : *A differencial logarithmica d'um producto é a somma das differenciaes logarithmicas dos seus factores ; a do quociente é a differença das do dividendo e divisor ; e a da potencia é o producto do expoente pela da raiz.*

29. Tambem o uso dos logarithmicos facilita o calculo das derivadas. Assim :

I. $y = z^t$ dá $ly = t\,l z,\ \frac{y'}{y} = t\,\frac{z'}{z} + t' l z,\ y' = y\left(t\,\frac{z'}{z} + t' l z\right);$

e por isso a derivada de $y = z^z$ é $y' = z^z z' (1 + l z)$,

II. $y = a^{(b^z)}$ dá $ly = b^z\,l a,\ y' = y b^z z'\,l a\,l b = a^{(b^z)}\,b^z z'\,l a\,l b.$

III. $y = z^{(t^u)}$ dá $l\,y = t^u\, l\, z$, $y' = z^{(t^u)}\, t^u \left[\frac{z'}{z} + (u\,\frac{t'}{t} + u'\, l\, t)\, l\, z\right]$.

Outra demonstração das regras para differenciar as potencias, os logarithmos e as exponenciaes

30. Demonstraremos agora estas regras considerando as derivadas como o limite de $\frac{f(x+h) - fx}{h}$ correspondente a $h = 0$.

I. Sendo $$y = x^m\,, \quad \text{é} \quad y' = \lim.\,\frac{(x+h)^m - x^m}{h},$$

ou, pondo $h = \alpha\, x$, $$y' = \lim.\,\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}\, x^{m-1}.$$

Para α infinitesimo é $(1+\alpha)^m - 1 = \beta$ infinitesimo, quando em logar de m se põem os dois inteiros que o comprehendem, e portanto tambem para m qualquer.

E como de $(1+\alpha)^m - 1 = \beta$ se tira

$$m = \frac{\log(1+\beta)}{\log(1+\alpha)} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\log(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

ou, pondo $\alpha = \frac{1}{i}$, $\beta = \frac{1}{i'}$, $$\frac{\beta}{\alpha} = m\,\frac{\log\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}{\log\left(1 + \frac{1}{i'}\right)^{i'}},$$

será $$y' = m x^{m-1} \lim.\,\frac{\log\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}{\log\left(1 + \frac{1}{i'}\right)^{i'}}.$$

II. Sendo $y = \operatorname{Log} x$, é $y' = \lim. \dfrac{\operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x}{h}$,

ou, pondo $x = ih$, $$y' = \lim. \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{i}\right)^i}{x}.$$

III. Sendo $y = a^x$, é $y' = \lim. \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim. \dfrac{a^h - 1}{h}$,

ou, pondo $a^h = 1 + \dfrac{1}{i}$, $$y' = \lim. \frac{a^x \log a}{\log\left(1+\frac{1}{i}\right)^i},$$

isto é, $$y' = \frac{a^x \log a}{\lim. \log\left(1+\frac{1}{i}\right)^i}.$$

Para concluir a formação de y' nestas tres especies de funcções, resta portanto achar o limite da funcção $\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^i$, quando i tende para o infinito. O que faremos, seguindo o raciocinio empregado no logar respectivo do *Calc. diff.* de Serret.

1.º Se i é sempre inteiro e positivo, a fórmula do binomio de Newton dá

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1 + i \cdot \frac{1}{i} + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{i^2} + \ldots \frac{i(i-1)\ldots(i-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{i^n} + R_n,$$

sendo $$R_n = \frac{i(i-1)\ldots(i-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot i^n}\left[\frac{i-n}{(n+1)i} + \frac{(i-n)(i-n-1)}{(n+1) \cdot i \cdot (n+2)i} + \ldots\right];$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{i}\right)}{1 \cdot 2} + \ldots \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{i}\right)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} + R_n,$$

$$\text{sendo } R_n = \frac{1\left(1-\frac{1}{i}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{i}\right)}{1\,.\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\left[\frac{1-\frac{n}{i}}{n+1}+\frac{\left(1-\frac{n}{i}\right)\left(1-\frac{n+1}{i}\right)}{(n+1)\quad(n+2)}+\cdots\right].$$

A somma dos termos do segundo factor de R_n é evidentemente menor que a dos termos da progressão geometrica

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots=\frac{1}{n};$$

e por conseguinte é
$$R_n < \frac{1\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{i}\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Mas esta desegualdade mostra que R_n tende para zero, quando n tende para o infinito; logo, tendendo i para o infinito, é

$$\lim\left(1+\frac{1}{i}\right)^i=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots=e.$$

2.° Se o numero positivo i não é sempre inteiro, sejam μ e $\mu+1$ dois inteiros que o comprehendem, e que tendem com elle para o infinito. Será $\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$ comprehendido entre
$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^\mu \text{ e } \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1},$$

isto é, entre
$$\frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{1+\frac{1}{\mu+1}} \quad \text{e} \quad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Ora, segundo acabamos de ver (1.º), os limites de $\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}$ e $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$

são e; e os de $1+\frac{1}{\mu+1}$ e $1+\frac{1}{\mu}$ são 1: portanto o limite de $\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}$ tambem é e.

3.º Se i é um numero negativo, inteiro ou fraccionario, $i=-\mu$, será

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$$

que tem ainda por limite e.

É pois, em todos os casos, $\lim.\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}=e$;

o que substituido nas tres expressões de y' dá:

I. Para $y=x^{m}$ $\qquad y'=mx^{m-1}\frac{\log e}{\log e}=mx^{m-1}$.

II. Para $y=\text{Log}\, x$ $\qquad y'=\frac{\text{Log}\, e}{x}=\frac{\text{M}}{x}$.

III. Para $y=a^{x}$ $\qquad y'=a^{x}\frac{\log a}{\log e}=a^{x}\, l\, a$.

Funcções circulares

31. Linhas trigonometricas. Seja $y = \operatorname{sen} x$;

e supponhamos que o raio do circulo é a unidade.

Mudando x em $x + h$ e em $x - h$, resultam

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x + y'h + \ldots,\ \operatorname{sen}(x-h) = \operatorname{sen} x - y'h + \ldots,$$

cuja differença $2 \operatorname{sen} h \cos x = 2y'h + \ldots$, dá

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} = \frac{y'}{\cos x} + \ldots;$$

e porque o limite de $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ é 1, será

$$\frac{y'}{\cos x} = 1, \qquad \text{ou} \qquad y' = \cos x.$$

Para $y = \cos x$ podemos discorrer similhantemente; ou notar que, por ser $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$, é

$$y' = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \cdot \frac{d\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)}{dx} = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{sen} x. \; (*)$$

(*) Ás derivadas successivas pode dar-se a fórma:

$$\text{De } y = \operatorname{sen} x, \quad y' = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = \operatorname{sen}(x+\pi) \ldots, y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\text{De } y = \cos x, \quad y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = \cos(x+\pi) \ldots, y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Para

$$y = \text{tang}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \text{ é } \quad y' = \frac{\cos x . \cos x + \text{sen}\, x \,\text{sen}\, x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Para

$$y = \cot x = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \text{ é } \quad y' = -\sec^2\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\text{cosec}^2 x.$$

Teremos assim geralmente, sendo $z = fx$:

$$\frac{d\,\text{sen}\, z}{dx} = \cos z \,.\, z', \quad \frac{d\cos z}{dx} = -\text{sen}\, z \,.\, z',$$

$$\frac{d\,\text{tang}\, z}{dx} = \sec^2 z \,.\, z', \quad \frac{d\cot z}{dx} = -\text{cosec}^2 z \,.\, z'.$$

Portanto são eguaes:

A derivada do seno á do arco multiplicado pelo coseno; a derivada do coseno a menos a do arco multiplicada pelo seno; a derivada da tangente á do arco multiplicada pelo quadrado da secante; a derivada da cotangente a menos a do arco multiplicada pelo quadrado da cosecante.

Exemplos:

$$y = \cos l x, \; y' = -\frac{\text{sen}\, l x}{x}; \; y = \sec x, \; y' = \text{tang}\, x \sec x;$$

$$y = l\,\text{sen}\, x, \; y' = \cot x; \; y = l\,\text{tang}\, x, \; y' = \frac{1}{\cos^2 x\, \text{tang}\, x} = \frac{2}{\text{sen} 2x};$$

$$y = \cos x^{\text{sen}\, x}, \text{ ou } l y = \text{sen}\, x\, l \cos x, \; y' = \cos x^{\text{sen}\, x}\left(\cos x\, l \cos x - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\right).$$

32. Arcos. Seja y um arco cujo seno é x, o que se escreve assim:

$$y = \text{arc}\,(\text{sen} = x), \text{ ou } x = \text{sen}\,y;$$

onde são x a variavel principal, e y funcção de x.

Mudando x em $x+h$, vem $x+h = \text{sen}\,y + hy' \cos y + \ldots$; e por conseguinte $1 = y' \cos y$, ou $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. E do mesmo modo se procederá a respeito dos arcos expressos nas outras linhas trigonometricas.

Assim, sendo z e y funcções de x, teremos:

$$y = \text{arc}\,(\text{sen} = z),\ y' = \frac{z'}{\sqrt{1-z^2}};\ y = \text{arc}\,(\text{cos} = z),\ y' = -\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$y = \text{arc}\,(\text{tang} = z), y' = \frac{z'}{1+z^2};\ y = \text{arc}\,(\text{cot} = z),\ y' = -\frac{z'}{1+z^2}.$$

Logo:

A derivada d'um arco é egual á do seno repartida pelo coseno; ou a menos a do coseno repartida pelo seno; ou á da tangente multiplicada pelo quadrado do coseno; ou a menos a da cotangente multiplicada pelo quadrado do seno.

Se o raio fosse r, e não a unidade, bastaria restabelecer a homogeneidade nas fórmulas (*Geom. Anal.*, n.º 7).

Assim: $\quad y = \text{arc}\,(\text{sen} = z), \quad y = \text{arc}\,(\text{tang} = z), \quad y = \text{tang}\,z,$

dariam: $\quad y' = \dfrac{rz^1}{\sqrt{r^2 - z^2}}, \qquad y' = \dfrac{r^2 z'}{r^2 + z^2}, \qquad y' = \dfrac{r^2 z'}{\cos^2 z}.$

As funcções $\text{sen}\,x$, $\cos x, \ldots$ chamam-se *inversas* de $\text{arc}\,(\text{sen} = x)$, $\text{arc}\,(\cos = x), \ldots$; e reciprocamente.

Em geral, resolvendo em ordem a x a equação $y = fx$, a funcção resultante $x = \varphi y$ é inversa de f, e f é inversa de φ.

Derivadas das equações

33. Seja z uma funcção $z = f(x, y)$

de duas variaveis independentes x, y, isto é, de duas variaveis, cada uma das quaes pode variar, sem que a sua variação influa na outra. Discorrendo como no n.º 20, mudaremos x em $x + h$, e depois no resultado y em $y + k$; o que dará:

$$f(x+h, y) = f(x, y) + h\frac{dz}{dx} + \ldots,$$

e depois $$f(x+h, y+k) = f(x, y) + k\frac{dz}{dy} + h\frac{dz}{dx} + \ldots,$$

ou $$f(x+h, y+k) - f(x, y) = i = k\frac{dz}{dy} + h\frac{dz}{dx} + \ldots$$

Quando h e k forem os augmentos infinitesimos, ou differenciaes, de x e y, será i o correspondente de z; e a equação precedente dará:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Os coefficientes $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ são os *coefficientes differenciaes parciaes* de z

em ordem a x e a y; $\frac{dz}{dx}dx$ e $\frac{dz}{dy}dy$ são as *differenciaes parciaes* de z

em ordem a x e a y; e $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ é a differencial completa ou total, dz, de z, que se compõem das duas parciaes (*).

34. Similhantemente, quando for z funcção de qualquer numero de variaveis $x_1, x_2, x_3 \ldots$,

teremos $$i = h_1 \frac{dz}{dx_1} + h_2 \frac{dz}{dx_2} + h_3 \frac{dz}{dx_3} + \ldots,$$

ou, segundo a notação de Leibnitz, passando ás differenciaes,

$$dz = \frac{dz}{dx_1} dx_1 + \frac{dz}{dx_2} dx_2 + \frac{dz}{dx_3} dx_3 + \ldots,$$

onde são $\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2}, \frac{dz}{dx_3}, \ldots$ os coefficientes differenciaes parciaes de z em ordem a $x_1, x_2, x_3, \ldots$

(*) Alguns geometras designam por $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ o coefficiente differencial parcial de z em ordem a x; e por $\frac{dz}{dx}$ o coefficinte differencial, quando z é funcção só de x: outros designam o primeiro por $d\frac{z}{dx}$. Segundo estas notações:

em $\quad dz = z'dx \quad$ é $\quad z' = \frac{dz}{dx}$;

em $\quad dz = pdx + qdy \quad$ é $\quad p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ ou $= d\frac{z}{dx}$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ou $= d\frac{z}{dy}$.

35. Se na equação proposta tivessemos feito variar uma só variavel, achariamos immediatamente o coefficiente differencial parcial respectivo.

Assim $\dfrac{dz}{dx}=\lim.\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},\ \dfrac{dz}{dy}=\lim.\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$

E esta operação é permittida, por serem independentes as variaves x, y.

Por exemplo: $z=\text{arc}\left(\text{tang}=\dfrac{x}{y}\right)$

daria separadamente $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{dz}{dy}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}.$

36. Se fizermos variar x ou y em $\dfrac{dz}{dx}$, acharemos os coefficientes differenciaes de $\dfrac{dz}{dx}$ em ordem a x ou a y, os quaes se designam por $\dfrac{d^2z}{dx^2}$, $\dfrac{d^2z}{dxdy}$. E do mesmo modo obteremos $\dfrac{d^2z}{dydx}$, $\dfrac{d^2z}{dy^2}$, pelas variações de $\dfrac{dz}{dy}$ em ordem a x ou a y.

Assim, mudando y em $y+k$, em $\dfrac{dz}{dx}$; e x em $x+h$, em $\dfrac{dz}{dy}$: resultam

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\lim.\frac{\dfrac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)}{h}-\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}}{k},$$

$$\frac{d^2z}{dydx}=\lim.\frac{\dfrac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)}{k}-\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}}{h};$$

e, porque os segundos membros são identicos, teremos $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$.

Similhantemente acharemos que é $\frac{d^3z}{dx^2dy}=\frac{d^3z}{dxdydx}=\frac{d^3z}{dydx^2}$;

e, em geral, que é indifferente a ordem das differenciações.

Em conformidade com isto, e com o que se disse no n.º 5, serão (*)

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,\ d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2z}{dxdy}dx\,dy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2,$$

e, em geral $d^m z=\sum A_\alpha\, dx^\alpha dy^{m-\alpha}\frac{d^m z}{dx^\alpha dy^{m-\alpha}}$,

designando A_α coefficientes numericos $A_0, A_1, \ldots A_m$.

(*) Por ser $d\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)=\frac{d^{m+n+1}z}{dx^{m+1}dy^n}dx+\frac{d^{m+n+1}z}{dx^m dy^{n+1}}dy$,

que pode considerar-se como o producto de $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$ por $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, mudando depois nos numeradores os expoentes em indices: vê-se que, fazendo a mesma mudança, podemos escrever as *equações symbolicas:*

$$dz=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right],\ d^2z=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^2,\ldots d^m z=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^m.$$

E são assim A_α os coefficientes da fórmula do binomio de Newton.

Com effeito, se for $d^i z=\sum A_\alpha\, dx^\alpha dy^{i-\alpha}\frac{d^i z}{dx^\alpha dy^{i-\alpha}}=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^i$,

tambem será

$$d^{i+1}z=\sum A_\alpha\, dx^\alpha dy^{i-\alpha}\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^{i+1};$$

37. Seja agora $$F(x, y) = 0$$

uma equação implicita entre as variaveis x, y.

Poderemos, sem a resolver em ordem a y, o que daria $y = fx$, achar as derivadas y', y'',..., considerando $F(x, y)$ como egual a outra variavel z, e formando os coefficientes differenciaes de z pelas regras precedentes.

Assim $$z' = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} y' = 0 \text{ dá } y' = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}.$$

Por exemplo, de $y^2 + x^2 = r^2$, ou $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, tiram-se

$$\frac{dz}{dx} = 2x,\ \frac{dz}{dy} = 2y,\ y' = -\frac{x}{y}.$$

38. D'este modo vem y' expresso em x e y; e não em x sómente, como aconteceria se tivessemos resolvido a proposta em ordem a y. Querendo pois ter y' expresso unicamente em x, resta eliminar y entre a proposta e a sua derivada.

Eliminando, por exemplo, y entre $x^2 + y^2 = r^2$ e a sua derivada $2x + 2yy' = 0$, virá $y'^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$.

---

e portanto, sendo a lei verdadeira para dz, tambem o é para d^2z, d^3z,.. $d^m z$, ou geral.

Similhantemente, por ser

$$d\left(\frac{d^{m+n+p+\cdots}z}{dx^m\, dy^n\, dv^p \cdots}\right) = \frac{d^{m+1+n+p+\cdots}z}{dx^{m+1}\, dy^n\, dv^p \cdots} dx + \frac{d^{m+n+1+p+\cdots}z}{dx^m\, dy^{n+1}\, dv^p \cdots} dy + \frac{d^{m+n+p+1+\cdots}z}{dx^m\, dy^n\, dv^{p+1} \cdots} dv + \ldots,$$

que pode tomar-se como o producto *symbolico* de $\frac{d^{m+n+p+\cdots}z}{dx^m\, dy^n\, dv^p \cdots\cdots}$ por

$\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dv} dv + \ldots$, vê-se que, sendo x, y, v,... variaveis independentes, e

$$z = f(x, y, v, \ldots),$$

se pode escrever a *equação symbolica*: $$d^m z = \left[\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dv} dv + \ldots\right]^m.$$

**

Cumpre advertir que a eliminação eleva em geral y' ao gráu que tem y na proposta; porque, se esta é do gráu n, y tem n valores; e como o calculo da derivação conserva em y' os radicaes que tem y, vê-se que y' tem egualmente n valores, ou que a equação em y' deve ser do gráu n. Se y' entra linearmente na derivada de $F(x, y) = 0$, é porque y tambem alli se acha, e envolve os mesmos radicaes, que a eliminação e a resolução devem reproduzir explicitamente.

39. Se derivarmos a derivada z' da primeira ordem, teremos

$$z'' = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2\,d^2z}{dydx}y' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 + \frac{dz}{dy}y'' = 0,$$

a qual dará y'' em funcção de x, y, y'.

Querendo y'' em funcção de x e y sómente, eliminaremos y' entre as derivadas $z' = 0$, $z'' = 0$. E querendo y'' em funcção de x unicamente, eliminaremos y e y' entre a primitiva e as duas derivadas, $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$. Mas estas eliminações elevarão o gráu de y.

Por exemplo: $\quad z = x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$

dá $\quad z' = (2ax^2 - 3ay^2)y' + 4x^3 + 4axy = 0$

e $\quad z'' = (2ax^2 - 3ay^2)y'' + 8axy' - 6ayy'^2 + 12x^2 + 4ay = 0,$

entre as quaes e a proposta se deverão eliminar y' e y, para ter uma equação entre y'' e x.

40. Seja $\quad F(x, y, z) = 0$

uma equação implicita entre as tres variaveis, x, y, z.

Teremos $\quad \dfrac{dF}{dx}dx + \dfrac{dF}{dy}dy + \dfrac{dF}{dz}dz = 0.$

Se entre as mesmas variaveis houver outra relação

$$z = \varphi(x, y):$$

tirando d'ella $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, e substituindo na primeira, resultará

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}\right)dy = 0,$$

a qual dá a derivada $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}}{\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}},$$

sem que seja necessario eliminar z de $F(x, y, z) = 0$.

Se não houver a relação $z = \varphi(x, y)$, podemos suppril-a considerando φ como arbitraria; e como então é arbitraria $\frac{dy}{dx}$, a equação differencial parte-se nas duas parciaes:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

É inutil insistir na doutrina analoga relativamente ás ordens superiores: sendo claro que se poderá differenciar cada uma das equações differenciaes de primeira ordem relativamente a x e relativamente a y; o que dará tres equações distinctas: e assim por diante.

Eliminação das constantes e das funcções arbitrarias

41. Equações entre duas variaveis. As derivadas successivas da proposta podem tambem servir para eliminar algumas constantes, ou porque o processo da derivação as faz immediatamente desapparecer, ou pela eliminação d'ellas entre as equações derivadas e a proposta. Mas cumpre advertir que não podem, de qualquer modo, eliminar-se ao todo, entre derivadas, parametros e variaveis, senão tantas quantas são as derivações successivas da proposta; e por isso, se a derivação faz desapparecer um parametro, e tentamos eliminar outro entre a equação primitiva e a derivada, reapparece por essa eliminação o que desapparecera.

É evidente que as equações, que se obtêm desembaraçadas d'alguns parametros, devem exprimir propriedades da proposta, ou da curva que ella representa, independentes dos mesmos parametros.

Assim a derivada $x+yy'=0$ da equação do circulo, $x^2+y^2=r^2$, por não conter r, exprime uma propriedade commum a todos os circulos cujo centro é a origem das coordenadas. Do mesmo modo $y=ax+b$ dá $y'=a$, que exprime uma propriedade commum a todas as rectas parallelas á proposta; mas, se entre estas equações eliminarmos a, resultará $y=xy'+b$, na qual reapparece b.

42. Tambem se pode eliminar uma constante c, resolvendo a proposta em ordem a ella, $c=\varphi(x, y)$, e tomando a derivada d'esta equação. E como este processo, e o da eliminação da constante entre a proposta $F(x, y)=0$ e a sua derivada, devem conduzir a resultados equivalentes, é claro que pelo segundo se deve chegar a uma equação em y', que não será linear quando em $\varphi(x, y)$ houver radicaes provenientes do gráu de c na proposta.

Por exemplo $\quad y^2-2cy+x^2=c^2,\quad (y-c)y'+x=0,$

dão, eliminando c, $\quad (2y^2-x^2)y'^2+4xyy'+x^2=0.$

E a proposta, resolvida em ordem a c, e sendo derivada, daria

$$c = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2},\quad 0 = -y' \pm \frac{2yy' + x}{\sqrt{2y^2 + x^2}},$$

que, desembaraçada do radical, é identica com a precedente.

43. Do que fica exposto se vê que, differenciando n vezes uma equação $F(x, y) = 0$, não pode $y^{(n)}$ entrar na ultima derivada da ordem n senão no primeiro gráu. E por isso, quando apparece uma equação da ordem n, na qual $y^{(n)}$ não entra linearmente, é porque esta equação não proveio immediatamente da differenciação successiva, mas sim de se combinarem entre si e com a proposta as equações derivadas, para eliminar algumas das constantes, das variaveis, ou das derivadas de y de ordem inferior.

44. EQUAÇÕES ENTRE TRES VARIAVEIS. Nestas equações apresentam-se resultados mais extensos, podendo as derivadas servir para a eliminação de funcções arbitrarias.

Seja $$z = f(t)$$

uma funcção arbitraria de t; e t uma funcção dada, $t = F(x, y)$, das variaveis independentes x, y.

Derivando separadamente em ordem a x e em ordem a y, e dividindo uma das derivadas pela outra, vem

$$\frac{dz}{dx} = f't\frac{dt}{dx},\ \frac{dz}{dy} = f't'\frac{dt}{dy},\ \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dt}{dy} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dt}{dx};$$

desapparecendo a funcção arbitraria d'esta relação, que exprime a condição de ser z funcção de t.

Seja, por exemplo, $$z = f(x^2 + y^2);$$

onde $f(x^2+y^2)$ representa uma funcção arbitraria de x^2+y^2, como

$$\log(x^2+y^2),\ \sqrt{x^2+y^2},\ \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)},\ \text{etc. Teremos}$$

$$\frac{dz}{dx}=p=2xf'(x^2+y^2),\ \frac{dz}{dy}=q=2yf'(x^2+y^2);$$

e, eliminando $f'(x^2+y^2)$, virá $\quad py-qx=0,$

que é commum a todas as funcções de x^2+y^2.

Seja $\quad y-bz=f(x-az).$

Differenciando em ordem a x e z, e em ordem a y e z, vem

$$-bp=(1-ap).f',\quad 1-bq=-aq.f';$$

e eliminando f', resulta $\quad ap+bq=1,$

qualquer que seja a fórma de f.

Similhantemente $\quad \frac{y-b}{z-c}=f\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$

dá $\quad z-c=p(x-a)+q(y-b).$

Opportunamente faremos sentir a importancia d'esta theoria. Por agora limitamo-nos a dizer que as tres equações da segunda ordem poderiam servir para eliminar duas funcções arbitrarias que existissem na primitiva, etc.

Mudança da variavel independente

45. Quando se differencía uma variavel y considerando-a como funcção d'outra x, dá-se a x um augmento differencial arbitrario, e procura-se o correspondente de y; depois, querendo differenciar a primeira derivada, dá-se ainda a x um augmento differencial arbitrario, e procura-se o correspondente d'ella: e assim successivamente. Mas, tanto por simplicidade, como para tornar mais facilmente comparaveis entre si os augmentos da variavel y e das suas derivadas, costuma tomar-se o mesmo augmento para x nas differenciações successivas. E assim, considerando x como variavel independente em $y = fx$, e tomando dx constante, os coefficientes differenciaes ou derivadas successivos são (n.º 5)

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

46. Qualquer questão tractada pelo calculo differencial conduz a expressões em $x, y, y', y'', \ldots$, taes como

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots),$$

para fazer uso das quaes é necessario que da relação $y = Fx$, que liga y com x, se tirem $y', y'', \ldots$, e se substituam na mesma expressão.

Supponhamos porém que, ou por commodidade do calculo, ou pela natureza da questão, a variavel independente é t, e que por isso x e y se consideram como funcções de t. Devem então substituir-se em logar de y', $y'', \ldots$, nas quaes se toma x como variavel independente, as transformadas d'ellas, que resultam de considerar y como funcção de x, e x como funcção da variavel t, agora independente.

Temos assim (n.º 20) $\quad \dfrac{dy}{dt} = y' \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{dy'}{dt} = y'' \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{dy''}{dt} = y''' \dfrac{dx}{dt}, \ldots,$

que dão

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ y''' = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \ldots;$$

ou, substituindo em y'', y''',... as expressões de y', y'',... que se forem obtendo (n.º 12),

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dx^2}{dt^2}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}, \ldots$$

47. As expressões de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3} \ldots$, e de $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots$, que entram nas fórmulas precedentes, tiram-se das relações que ligam x e y com t.

Assim, se forem $x = \varphi t,\ y = f t,$

serão $\frac{dx}{dt} = \varphi' t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi'' t, \ldots,$ e $\frac{dy}{dt} = f' t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = f'' t, \ldots$

Se x e y forem funcções implicitas de t, ou se as relações entre ellas e t forem dadas por duas equações em x, y, t, tiraremos $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, das duas equações differenciaes de primeira ordem; depois $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, das de segunda ordem: e assim successivamente.

48. As fórmulas dos n.os 46 e 47 são geraes; e por isso se deduzem d'ellas as relativas aos casos particulares de se considerar x ou y como variavel independente.

No caso de ser x a variavel independente, é $t=x$; e aquellas fórmulas

dão $$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{d^2x}{dt^2}=0,\ldots,\ \text{e}\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\ldots$$

. . . .

No caso de ser y a variavel independente, é $t=y$; e as mesmas fórmulas

dão $$\frac{dy}{dt}=1,\ \frac{d^2y}{dt^2}=0,\ldots,\ \text{e}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},\ldots$$

49. Supponhamos, por exemplo, que a expressão de ψ do n.º 46 dá em coordenadas rectangulares a solução d'um problema relativo ás curvas planas; e que se quer applicar esta solução a uma curva cuja equação, $r=ft$, é dada em coordenadas polares r, t. Temos neste caso dois modos de applicar a expressão, de que se tracta: ou transformar a equação $r=ft$ em coordenadas rectangulares; ou transformar a expressão ψ em coordenadas polares pelo processo ensinado nos numeros precedentes, o que é quasi sempre mais commodo.

Referindo as coordenadas rectangulares á mesma origem e ao mesmo eixo dos x que as polares, a relação entre umas e outras é

$$x=r\cos t,\ y=r\,\text{sen}\,t.$$

Se considerarmos pois t como variavel independente, e r, x, y, como variaveis que dependem de t pelas equações

$$r=ft,\ x=r\cos t,\ y=r\operatorname{sen} t,$$

teremos: $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\cos t-r\operatorname{sen} t,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\operatorname{sen} t+r\cos t,$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\cos t-2\frac{dr}{dt}\operatorname{sen} t-r\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\operatorname{sen} t+2\frac{dr}{dt}\cos t-r\operatorname{sen} t,$$

....

por meio das quaes se formarão as expressões de y', y'', do n.º 46, que entram em ψ.

Assim a expressão $\psi=\dfrac{xy'-y}{yy'+x}$ .... (a)

dá

$$\psi=\frac{x\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}-y}{y\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}+x}=\frac{r\cos t\,\dfrac{r'\operatorname{sen} t+r\cos t}{r'\cos t-r\operatorname{sen} t}-r\operatorname{sen} t}{r\operatorname{sen} t\,.\dfrac{r'\operatorname{sen} t+r\cos t}{r'\cos t-r\operatorname{sen} t}+r\cos t}=\frac{r}{r'} \ldots\ldots (a').$$

Do mesmo modo $\psi=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ .... (b)

dá

$$\psi=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{r'\operatorname{sen} t+r\cos t}{r'\cos t-r\operatorname{sen} t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{(r'\cos t-r\operatorname{sen} t)(r''\operatorname{sen} t+2r'\cos t-r'\operatorname{sen} t)-(r'\operatorname{sen} t+r\cos t)(r''\cos t-2r'\operatorname{sen} t-r\cos t)}{(r'\cos t-r\operatorname{sen} t)^3}},$$

ou $$\psi=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(b').$$

E, para applicar ψ a uma curva, cuja equação $r=ft$ seja dada, restará substituir, em logar de r' e r'', as suas expressões

$$r'=\frac{dr}{dt}=f't,\ r''=\frac{d^2r}{dt^2}=f''t.$$

50. Com as derivadas da equação $y=fx$ é facil, pelo que se disse no n.º 48, achar as da equação inversa $x=\varphi y$, sem resolver a primeira em ordem a x; porque as equações d'aquelle numero relativas ao caso de ser $y=t$, dão as derivadas $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2},\dots$ expressas em $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2},\dots$

Por exemplo, para $y=a^x$,

com as derivadas $\frac{dy}{dx}=ka^x, \frac{d^2y}{dx^2}=k^2a^x,\dots$, achariamos

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{ka^x}=\frac{1}{ky},\ \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{k^2a^x}{k^3a^{3x}}=-\frac{1}{k(a^x)^2}=-\frac{1}{ky^2},\dots,$$

como achariamos pela resolução da proposta em ordem a x,

que dá $$x=\frac{l\,y}{l\,a}=\frac{l\,y}{k}.$$

Similhantemente

$y=\operatorname{sen}x$ dá $$\frac{dy}{dx}=\cos x;\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$y=\operatorname{tang}x$ dá $$\frac{dy}{dx}=\sec^2x;\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sec^2x}=\frac{1}{1+y^2}.$$

51. Nas derivadas da primeira ordem, por ser $\frac{dy}{dx}$ o quociente de $\frac{dy}{dt}$ dividida por $\frac{dx}{dt}$, qualquer que seja t (n.º 46), podemos empregar a notação $dy = \frac{dy}{dx} dx$, sendo dy e dx referidas a qualquer variavel independente. Por exemplo, sendo z e y qualquer variaveis, dependentes ou independentes, a equação $y = \operatorname{sen} z$ dá

$$dy = \cos z\, dz,\ dz = \frac{dy}{\cos z} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

52. Se na expressão de ψ entra mais d'uma variavel independente, pode ainda applicar-se o mesmo methodo. Assim, entrando nella as variaveis x, y, z, ligadas pela equação $z = \mathrm{F}(x, y)$, e querendo transformar as derivadas de z, relativas a x e y, em outras relativas a novas variaveis s, t, de que são funcções as primeiras, consideraremos z como funcção de x e y, e x e y como funcções de s e t; e teremos

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt},$$

que, eliminando, darão $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ expressos em $\frac{dz}{ds}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dy}{dt}$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{ds} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{ds}},\ \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dt}\frac{dx}{ds} - \frac{dz}{ds}\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{ds}}.$$

Depois teremos similhantemente as derivadas de $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ relativas a

x e y, expressas nas suas derivadas relativas a s e t. Por exemplo, derivando $\frac{dz}{dx}$, vem

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{ds}=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{ds},\quad \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dt}=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dt},$$

as quaes, depois de substituir nellas por $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{ds}$ e $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dt}$ as derivadas, em ordem a s e t, da fracção que achamos para valor de $\frac{dz}{dx}$, darão, eliminando, $\frac{d^2z}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dxdy}$.

Fórmula de Maclaurin

53. Fazendo $x=0$ na serie de Taylor, e designando f, f', f'',.... os valores correspondentes de fx, $f'x$, $f''x$,..., resulta

$$fh=f+hf'+\frac{1}{2}h^2f''+\frac{1}{1.2}h^3f'''+\ldots$$

Mudando h em x, o que não altera as funcções fx, $f'x$, $f''x$, que são independentes de h, nem por conseguinte f, f', f''...: fica

$$fx=f+xf'+\frac{1}{2}x^2f''+\frac{1}{2.2}x^2f'''+\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{B}).$$

Esta fórmula é a de Maclaurin ou de Stirling, a qual se deduz assim da de Taylor.

54. Mas tambem da serie de Maclaurin se pode deduzir a de Taylor. Com effeito, suppondo $fx = \varphi(x+h)$ em (B), vem

$$\varphi(x+h) = \varphi h + x\varphi' h + \frac{1}{2}x^2\varphi'' h + \frac{1}{2.3}\varphi''' h + \ldots,$$

na qual, chamando x e h o que se chamou h e x, vem a serie (A).

Vê-se pois que as duas fórmulas têm a mesma generalidade; e que a vantagem da de Taylor, para desenvolver em serie segundo as potencias de h as funcções da fórma $f(x+h)$, consiste em se poder fazer nestas $h=0$ antes da differenciação.

Mas a fórmula de Maclaurin é d'uma applicação muito extensa; e o seu uso preferivel frequentes vezes ao das outras na desenvolução em serie.

55. A duas fórmulas de Maclaurin e de Taylor demonstram-se tambem facilmente pelo methodo dos coefficientes indeterminados.

Fórmula de Maclaurin. Seja

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots..$$

Formando as derivadas successivas, teremos

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots,\ f''x = 2C + 2.3\,Dx + \ldots,\ f'''x = 2.3D + \ldots;$$

depois, fazendo $x = 0$, acharemos

$$f = A,\ f' = B,\ f'' = 2\,C,\ f''' = 2.3\,D, \ldots.$$

e por conseguinte (B).

Fórmula de Taylor. Seja

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots.$$

Formando as derivadas em ordem a h, e attendendo a que é (n.º 20)

$$\frac{df(x+h)}{dh}=f'(x+h)\cdot\frac{d(x+h)}{dh}=f'(x+h),$$

teremos

$$f'(x+h)=\mathrm{B}+2\mathrm{C}h+3\mathrm{D}h^2+\ldots,$$

$$f''(x+h)=2\mathrm{C}+2.3\mathrm{D}h+\ldots$$

$$f'''(x+h)=2.3.\mathrm{D}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

depois, fazendo $h=0$, acharemos

$$fx=\mathrm{A},\ f'x=\mathrm{B},\ f''x=2\mathrm{C},\ f'''x=2.3\,\mathrm{D},\ldots$$

e por conseguinte (A).

Esta demonstração do theorema fundamental do calculo differencial é sem duvida simplicissima; mas, além do emprego anticipado da fórma da serie, o qual é commum a outras demonstrações, suppõe conhecida a derivada das potencias.

Nem quizemos por isso omittil-a, nem podiamos collocal-a em primeiro logar.

Dos casos em que a serie de Taylor é insufficiente

56. A serie (A) do n.º 6 pode ser defeituosa e inapplicavel ao desenvolvimento da funcção $f(x+h)$, quando se dá a x um valor determinado a; porque, no caso de haver potencias negativas, ou radicaes, na funcção fx, pode acontecer que, mudando x em $x+h$, as constantes, que entram com $a+h$ nos denominadores ou debaixo dos radicaes, destruam a, e fique alli sómente h; havendo assim potencias negativas ou fraccionarias de h em $f(a+h)$, contra a hypothese em que se funda a serie (A).

Por exemplo, mudando x em $x+h$, e fazendo depois $x=a$, nas expressões

$$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{(x-a)^4},\ y=\frac{1}{(x-a)^m}+\sqrt{x},$$

teriamos, respectivamente,

$$Y=\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}+h^{\frac{3}{4}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}\ldots,\ Y=h^{-m}+\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}\ldots$$

Similhantemente $\qquad y=\cot x,\ y=\log x,$

dão, para $x=0$, $\qquad Y=\cot h,\ Y=\log h,$

que devem conter nos seus desenvolvimentos potencias negativas de h, por isso que $h=0$ as deve tornar infinitas.

Vê-se pois que, se as regras dadas subsistem em quanto não se attribuem a x valores determinados, nem sempre succede o mesmo quando x toma valores particulares; porque se pode então cair em uma excepção do theorema de Taylor. Convém por isso ter caracteres, que denunciem esta circumstancia; e saber como, dando-se ella, se poderá achar o verdadeiro desenvolvimento de $f(a+h)$.

53. Supponhamos que $x=a$ faz desapparecer um termo P de fx. Então P tem a fórma $P=Q(x-a)^m$.

1.° Se m é inteiro e positivo, a derivada da ordem m contém um termo sem $x-a$; e por isso o factor Q, que a hypothese $x=a$ faz desapparecer das $m-1$ primeiras derivadas, torna a apparecer nas da ordem m e seguintes. Neste caso o theorema de Taylor não é insufficiente.

Por exemplo, de $$y=(x-a)^2(x-b)-ax^2$$

tiram-se $$y'=(x-a)^2+2(x-a)(x-b)-2ax,$$
$$y''=4(x-a)+2(x-b)-2a,\ y'''=6,$$

que, para $x=a$, se reduzem a

$$y=-a^3,\ y'=-2a^2,\ y''=-2b,\ y'''=6;$$

e a serie de Taylor dá $Y=-a^3-2a^2h-bh^2+h^3$.

2.° Se m é uma fracção comprehendida entre os limites l e $l+1$, a hypothese $x=a$ anniquila todas as l primeiras derivadas de P; mas na seguinte, da ordem $l+1$, entra o factor $(x-a)^{m-l-1}$, que tem o expoente negativo, e que $x=a$ torna infinito: e o mesmo acontece d'ahi por diante; de sorte que a serie de Taylor é insufficiente a partir d'esse termo. E assim devia acontecer; porque o radical de $(x-a)^m$, desapparecendo da serie, mas conservando-se em $f(a+h)$, faria que os dois membros não tivessem egual numero de valores, se no segundo não entrasse h affecto do mesmo radical.

Por exemplo, em $$y=x^3+(x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}},$$

quando se faz $x=a$, tornam-se infinitas as derivadas da terceira ordem e das seguintes; sendo por isso a serie de Taylor insufficiente desde o quarto termo. E com effeito, mudando x em $a+h$, esta funcção torna-se

em $$Y=a^3+3a^2h+3ah^2+(a-b)h^{\frac{5}{2}}+h^3+h^{\frac{7}{2}}.$$

O mesmo acontece no primeiro exemplo do numero precedente, desde o terceiro termo.

3.° Se m é negativo, $x-a$ entra no denominador de P e de suas derivadas, as quaes a hypothese $x=a$ torna infinitas; sendo assim a serie de Taylor inapplicavel desde o primeiro termo ao desenvolvimento, no qual h tem potencias negativas.

Por exemplo $$y=(x^2-ax)^{-\frac{1}{2}}$$

dá, para $x=a$, $$\mathrm{Y}=\frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\ldots$$

O mesmo tem logar no segundo exemplo do numero precedente.

58. Para ver mais claramente a correspondencia que ha entre o apparecimento d'um termo com potencia fraccionaria ou negativa de h e o facto de se tornarem infinitas as derivadas a partir d'esse termo, supponhamos que, ordenado o desenvolvimento em relação a h, a menor potencia fraccionaria de h seja m, comprehendido entre os inteiros l e $l+1$, sendo $l<0$ no caso de m negativo. Teremos

$$f(a+h)=\mathrm{A}+\mathrm{B}h+\mathrm{C}h^2+\ldots\mathrm{L}h^l+\mathrm{M}h^m+\ldots$$

Tomando as derivadas successivas d'esta equação em ordem a h, vem:

$$f'(a+h)=\mathrm{B}+2\mathrm{C}h+3\mathrm{D}h^2+\ldots l\mathrm{L}h^{l-1}+m\mathrm{M}h^{m-1}+\ldots,$$

$$f''(a+h)=2\mathrm{C}+3.2\mathrm{D}h\ldots+l(l-1)\mathrm{L}h^{l-2}+m(m-1)\mathrm{M}h^{m-2}+\ldots,$$

....

$$f^{(l)}(a+h)=l(l-1)(l-2)\ldots1\mathrm{L}+m(m-1)(m-2)\ldots(m-l+1)\mathrm{M}h^{m-l}+\ldots,$$

$$f^{(l+1)}(a+h)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-l)\mathrm{M}h^{m-l-1}+\ldots$$

Se fizermos $h=0$, as l primeiras darão

$$B=f'a,\ C=\frac{1}{2}f''a,\ D=\frac{1}{1.2.3}f'''a,\ldots L=\frac{1}{1.2\ldots l}f^{(l)}a;$$

e a serie

$$f(a+h)=fa+hf'a+\frac{1}{2}h^2f''a+\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots l}h^l f^{(l)}a+Mh^m+\ldots$$

coincidirá com a de Taylor até o termo em h^l; mas a coincidencia acabará nesse termo, porque $h=0$ torna infinitas $f^{(l+1)}a$ e as derivadas seguintes. Portanto:

1.° *Em quanto* $x=a$ *não torna infinitas alguma das funcções* y, y', y'',..., *o desenvolvimento que dá a serie de Taylor não é defeituoso.*

2.° *Se* $x=a$ *torna infinita alguma das funcções* y, y', y'',..., *as seguintes o serão egualmente; o theorema de Taylor é defeituoso desde o termo que tem a primeira derivada infinita; e o expoente de* h *nesse termo deve ser negativo, ou fraccionario, e menor que o inteiro egual á ordem d'aquella derivada.*

Assim, se $x=a$ tornar y infinito, tambem y', y'',... serão infinitos, e h terá potencias negativas.

É necessario advertir que, no caso de ser fx a somma de muitas funcções, podem as derivadas da mesma ordem das funcções componentes ser umas infinitas e outras finitas; e por isso deve discorrer-se a respeito de cada uma d'ellas separadamente. Assim é que no primeiro exemplo do n.° 56 o termo $\sqrt{x}$ não dá derivada infinita para $x=a$, e o termo $\sqrt[3]{(x-a)^4}$ dá y'', y'''....... infinitas; e por isso deve sommar-se

$\sqrt{(a+h)}=\sqrt{a}+\dfrac{h}{2\sqrt{a}}-\dfrac{h^2}{8\sqrt{a^3}}+\ldots$, que só tem potencias inteiras e positivas de h, com $\sqrt[3]{(a+h-a)^4}=h^{\frac{4}{3}}$.

Como a derivada da ordem n de $y=x^m$ tem a fórma $y^{(n)}=Ax^{m-n}$, nenhum valor de x differente de zero a torna infinita; e por isso a fórmula do binomio $(x+h)^m$ tem logar para todos os valores de x differentes de zero. O mesmo se pode dizer das series do $\log(x+h)$, que, pondo $x=1$, dá a de $\log(1+h)$; e das de $\operatorname{sen}(x+h)$ e $\cos(x+h)$, que, pondo $x=0$, dão as de $\operatorname{sen} h$ e $\cos h$.

59. Para obter o desenvolvimento que, a partir do termo defeituso da serie de Taylor, deve substituir esta serie, mudaremos x em $a+h$ na funcção proposta, e, por meio das series conhecidas, desenvolveremos $f(a+h)$, ou $f(a+h)$ menos a parte achada.

Por exemplo $$y=c+(x-b)\sqrt{x-a}$$

dá $$y'=\frac{3x-2a-b}{2\sqrt{x-a}};$$

e como $x=a$ torna infinitas y' e as derivadas seguintes, deve h ter um expoente fraccionario entre 0 e 1. Com effeito, mudando x em $a+h$, resulta

$$Y=c+(a-b)h^{\frac{1}{2}}+h^{\frac{3}{2}},$$

que se compõem de c e da parte que não dá a serie de Taylor.

Do mesmo modo $$y=c+x+(x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}$$

dá

$$y'=1+(x-a)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(x-b)(x-a)^{\frac{1}{2}},\ y''=3(x-a)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}(x-b)(x-a)^{-\frac{1}{2}};$$

e como $x=a$ torna infinitas y'' e as derivadas seguintes, o desenvolvimento de $f(a+h)$ tem uma potencia fraccionaria de h entre 1 e 2. Com effeito, substituindo $a+h$ em logar de x na proposta, resulta

$$y=c+a+h+(a-b)h^{\frac{3}{2}}+h^{\frac{5}{2}},$$

que se compõem de $c+a+h$ e da parte que não dá a serie de Taylor.

60. Para desenvolver em serie $f(a+h)$ menos a parte achada pela fórmula de Taylor, podemos empregar o processo seguinte:

Seja A a parte achada pela fórmula de Taylor. Se dividirmos $f(a+h)-\text{A}$, depois de convenientemente reduzida, pela maior potencia h^m de h que for factor d'este resto, isto é, por uma potencia de h tal que $h=0$ não torne o quociente nullo nem infinito, teremos

$$\frac{f(a+h)-\mathrm{A}}{h^m}=\mathrm{M}.$$

Seja B a parte de M independente de h, isto é, o valor de M correspondente a $h=0$. Se dividirmos M — B pela maior potencia h^n de h que for factor d'este resto, teremos

$$\frac{\mathrm{M}-\mathrm{B}}{h^n}=\mathrm{N}.$$

E assim por diante. D'onde resulta, por substituições successivas,

$$f(a+h)=\mathrm{A}+\mathrm{B}h^m+\mathrm{C}h^{m+n}+\mathrm{D}h^{m+n+p}+\ldots.$$

61. Supponhamos que $x=a$ faz desapparecer de y um radical que subsiste em y', isto é, que a primeira potencia de $x-a$ multiplica este radical. Então y' tem, para $x=a$, mais valores do que tem y; porque, subsistindo em y' o radical que desapparecera de y, o numero dos valores de y' é, em geral, egual ao dos valores de y, multiplicado pelo gráu do mesmo radical.

Se, pela elevação ás potencias convenientes, fizermos desapparecer o radical da proposta, e differenciarmos a equação resultante, $z=f(x,y)=0$, teremos $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=0$. Mas, segundo o que fica dito, para $x=a$, devem corresponder a cada valor b de y dois, pelo menos, α e β de y': logo, chamando A e B os valores de $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ relativos ao systema de valores a e b que se considera, terão logar simultaneamente as equações $\mathrm{A}+\mathrm{B}\alpha=0$, $\mathrm{A}+\mathrm{B}\beta=0$, que dão $\mathrm{B}(\alpha-\beta)=0$; ou $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{A}=0$, $y'=\frac{0}{0}$.

Assim a equação da primeira ordem reduz-se a uma identidade, e não determina y'.

Como $x=a$ anniquila o primeiro termo da derivada de segunda ordem

$$\frac{dz}{dy}y''+\frac{d^2z}{dy^2}y'^2+2\frac{d^2z}{dxdy}y'+\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

e como em $\frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dx^2}$, não ha radicaes, esta equação derivada, do segundo gráu em y', dará dois valores α e β de y' correspondentes a cada um dos de y.

Se a cada valor de $y=fa$ corresponderem tres valores de y', anniquilar-se-hão tambem os tres coefficientes differenciaes de segunda ordem; e, para ter $y'=f'a$, será necessario recurrer á derivada de terceira ordem, na qual se anniquilarão os coefficientes de y'' e y''', e que dará tres valores de y' para cada valor de y.

Em geral, para ter y' por meio da equação desembaraçada do radical que $x=a$ faz desapparecer de y, será necessario recorrer á derivada da ordem d'esse radical.

Por exemplo, $x=a$ reduz a $y=a$ e $y'=1+\sqrt{a-b}$ respectivamente a equação $y=x+(x-a)\sqrt{x-b}$ e a sua derivada $y'=1+\sqrt{x-b}+\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}$, correspondendo assim dois valores de y' a $x=a$, $y=a$. Mas, se desembaraçarmos a proposta do radical, e tomarmos as duas primeiras derivadas, teremos

$$(y-x)^2=(x-a)^2(x-b),\ 2(y-x)(y'-1)=(x-a)(3x-a-2b),$$

$$(y-x)y''+(y'-1)^2=3x-2a-b,$$

que, para $x=a$, se reduzem respectivamente a

$$y=a,\ 0=0,\ (y'-1)^2=a-b;$$

e da ultima d'estas tiram-se os valores de y', $y'=1\pm\sqrt{a-b}$, identicos com os já achados.

Similhantemente a derivada de $y=(x-a)(x-b)^{\frac{1}{3}}$ reduz-se, para

$x=a$, a $y'=\sqrt[3]{(a-b)}$. Mas, fazendo desapparecer o radical, e tomando as tres primeiras derivadas, teremos

$$y^3=(x-a)^3(x-b),\quad 3y^2y'=(x-a)^2(4x-3b-a),$$

$$y^2y''+2yy'^2=2(x-a)(2x-a-b),\ y^2y'''+6yy'y''+2y'^3=2(4x-3a-b),$$

que $x=a$ reduz respectivamente a $y=0$, $0=0$, $0=0$, $y'^3=a-b$; e a ultima dá $y'=\sqrt[3]{(a-b)}$, como do primeiro modo.

Se $(x-a)^2$ multiplica o radical de y, este radical desapparecerá de y e y' pela hypothese $x=a$, mas reapparecerá em y''; e por isso a cada systema de valores de y e y' corresponderá mais d'um valor de y''. Desembaraçando pois do radical a proposta $y=fx$, e procurando y'' por meio da derivada de segunda ordem da equação implicita resultante $z=0$, esta equação deverá ser satisfeita independentemente dos valores de y'', e dar $y''=\frac{0}{0}$. De sorte que será necessario passar ás derivadas das ordens seguintes para obter y''.

Do mesmo modo discorreremos, quando $(x-a)^3$ for o multiplicador do radical de y; e assim por diante.

Por exemplo $x=a$ reduz a $y=a$, $y'=1$, $y''=2\sqrt{a}$, a equação $y=x+(x-a)^2\sqrt{x}$ e as suas primeira e segunda derivadas. Mas, se desembaraçarmos a proposta do radical, e tomarmos as quatro primeiras derivadas, teremos

$$(y-x)^2=(x-a)^4x,\ 2(y-x)(y'-1)=(x-a)^3(5x-a),$$

$$(y'-1)^2+(y-x)\,y''=2(x-a)^2(5x-2a),$$

$$3(y'-1)\,y''+(y-x)\,y'''=6(x-a)(5x-3a),$$

$$3y''^2+4(y'-1)\,y'''+(y-x)\,y^{\text{IV}}=12(5x-4a),$$

que a hypothese $x=a$ reduz respectivamente a

$$y=a,\ 0=0,\ y'=1,\ 0=0,\ y''=2\sqrt{a},$$

em conformidade com o que achamos pelo primeiro methodo.

Limites da serie de Taylor. Fórma do resto nas series de Taylor e de Maclaurin

62. Se considerarmos um termo Ah^α da serie ascendente de $f(a+h)$, a somma d'elle com os seguintes terá a fórma $h^\alpha(A+Bh^\beta)$; sendo β positivo, assim como todos os expoentes de h que entram em B. E como, fazendo h indefinidamente pequeno, Bh^β pode approximar-se contínua e indefinidamente de zero, poderá h tomar-se tão pequeno que seja $A > Bh^\beta$.

Portanto: *sempre será possivel dar a* h *valores tão pequenos, que qualquer termo da serie de* f(a + h) *seja maior que a somma de todos os seguintes.*

63. Quando fa e $f'a$ são finitos, pode pois tomar-se h tão pequeno na serie $f(a+h)=fa+hf'a+\ldots$, que seja $hf'a$ maior que a somma dos termos seguintes, e que por isso o signal da differença $f(a+h)-fa$ dependa do signal de $f'a$; sendo assim fa crescente ou decrescente, segundo for $f'a$ positivo ou negativo. Por exemplo, como $fa=\operatorname{sen} a$ e $fa=\cos a$ dão respectivamente $f'a=\cos a$ e $f'a=-\operatorname{sen} a$, vê-se que no primeiro quadrante o seno cresce com o arco, e o coseno decresce.

Assim: *se* f'x *se conservar positiva desde* x = a *até* x = a + h, *sem que nesse intervallo se torne infinita,* fx *crescerá em todo elle.*

64. Posto isto, fazendo crescer h desde 0 até b na funcção $f'(a+h)$, sejam h_1 o valor de h que dá o minimo resultado $f'(a+h_1)=f'p$, e h_2 o que dá o maximo resultado $f'(a+h_2)=f'q$.

Se fizermos $$f(a+h)=fa+Mh\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

e chamarmos P, Q, dois limites entre os quaes M esteja comprehendido, teremos

$$f(a+h)-fa-Ph>0,\quad -f(a+h)+fa+Qh>0:$$

quantidades que são nullas para $h=0$; e que, pelo que acabâmos de vêr, crescerão desde $h=0$ até $h=b$, ficando ambas maiores que zero, se, entre estes limites, as suas derivadas em ordem a h forem positivas, isto é, se forem

$$f'(a+h)-\mathrm{P}>0, \quad -f'(a+h)+\mathrm{Q}>0.$$

E porque é evidente que estas condições se verificarão se tomarmos por P o minimo valor de $f'(a+h)$ e por Q o maximo, teremos (1), ficando M comprehendido entre $f'p$ e $f'q$.

Sejam $f''(a+h_1)=f''p$ e $f''(a+h_2)=f''q$ o minimo e o maximo valor de $f''(a+h)$, desde $h=0$ até $h=b$.

Se fizermos $$f(a+h)=fa+hf'a+\mathrm{M}h^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

e chamarmos P, Q, dois limites entre os quaes M esteja comprehendido, isto é, dois numeros taes que sejam

$$f(a+h)-fa-hf'a-\mathrm{P}h^2>0, \; -f(a+h)+fa+hf'a+\mathrm{Q}h^2>0,$$

satisfaremos, pelo que acabamos de vêr, a estas condições, entre os dois valores 0 e b de h, se, entre elles, forem as derivadas

$$f'(a+h)-f'a-2\mathrm{P}h>0, \; -f'(a+h)+f'a+2\mathrm{Q}h>0;$$

e estas serão egualmente satisfeitas, entre os mesmos limites de h, se, entre elles, forem as suas derivadas

$$f''(a+h)-2\mathrm{P}>0, \quad -f''(a+h)+2\mathrm{Q}>0.$$

E porque é evidente que estas desegualdades se verificarão, entre os mesmos valores de h, tomando por 2P e 2Q o minimo e o maximo valor de $f''(a+h)$, teremos (2), sendo M comprehendido entre $\frac{1}{2}f''p$ e $\frac{1}{2}f''q$.

Seguindo o mesmo discurso: se chamarmos $f^{(n)}(a+h_1)=f^{(n)}p$ e $f^{(n)}(a+h_2)=f^{(n)}q$ o minimo e o maximo valor de $f^{(n)}(a+h)$, entre os limites 0 e b de h; e se, fazendo

$$f(a+h)=fa+hf'a+\frac{1}{2}h^2f''a+\ldots\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}a+\mathrm{M}h^n\ ,\ldots(3),$$

procurarmos dois numeros P e Q que comprehendam M, ou para os quaes sejam

$$f(a+h)-fa-hf'a\ldots-\mathrm{P}h^n>0,\ -f(a+h)+fa+hf'a\ldots+\mathrm{Q}h^n>0:$$

facilmente se vê que chegaremos ás condições

$$f^{(n)}(a+h)-1.2\ldots n\mathrm{P}>0,\ -f^{(n)}(a+h)+1.2\ldots n\mathrm{Q}>0,$$

ás quaes evidentemente satisfazem

$$1.2\ldots n\mathrm{P}=f^{(n)}p,\ 1.2\ldots n\mathrm{Q}=f^{(n)}q.$$

Teremos pois (3), sendo M comprehendido entre $\dfrac{f^{(n)}p}{1.2\ldots n}$ e $\dfrac{f^{(n)}q}{1.2\ldots n}$.

65. Como $1.2\ldots n.\mathrm{M}$ está comprehendido entre o minimo $f^{(n)}p$ e o maximo $f^{(n)}q$ dos valores que toma $f^{(n)}x$ desde $x=a$ até $x=a+h$, segue-se que o seu valor será um d'entre estes, correspondente a $x=a+\theta h$, representando θ um numero positivo e menor que a unidade. Logo, se, desde x até $x+h$, nenhuma das derivadas das n primeiras ordens for infinita, será, com a fórma dada por Lagrange,

$$f(x+h)=fx+hf'x+\ldots\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}x+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)\ldots(\mathrm{A}').$$

D'este modo poderemos apreciar o limite do erro que se commette quando se pára em um termo da serie de Taylor, até a ordem do qual as derivadas são finitas.

66. Tambem se pode exprimir do modo seguinte o resto da fórmula de Taylor.

Sejam x, z, variaveis independentes;

$$\text{e} \qquad fz - fx - (z-x)f'x \ldots - \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}x = \varphi(z, x) \ldots (a).$$

Differenciando em ordem a x, e reduzindo, vem

$$-\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}x = \frac{d\varphi(z, x)}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Segundo o que vimos no numero precedente, é

$$\varphi(x, z) = \varphi(x, y+z-y) = \varphi(x, y) + (z-y)\frac{d[\varphi(x, y+\theta_1(z-y))]}{d[y+\theta_1(z-y)]},$$

que, fazendo $x=z$, e attendendo a ser $\varphi(z, x)=0$ em virtude de (a),

se reduz a $$0 = \varphi(z, y) + (z-y)\frac{d[\varphi(z, y+\theta_1(z-y))]}{d[y+\theta_1(z-y)]},$$

ou pondo x em logar de y, a

$$\varphi(z, x) = -(z-x)\frac{d[\varphi(z, x) + \theta_1(z-x)]}{d[z, x+\theta_1(z-x)]}.$$

Mudando x em $x+\theta_1(z-x)$ na expressão (b) de $\frac{d\varphi(z,x)}{dx}$, e substituindo o resultado nesta de $\varphi(z,x)$, vem

$$\varphi(z,x)=\frac{(z-x)^n(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2.\ldots.(n-1)}f^{(n)}[x+\theta_1(z-x)].$$

Finalmente, substituindo esta em (a), e pondo $z=x+h$, resulta a fórma dada por Cauchy,

$$f(x+h)=fx+hf'x+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}x+\frac{h^n(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(x+\theta_1h)..(A'').$$

Sendo assim $(1-\theta_1)^n f^{(n+1)}(x+\theta_1h)$ o factor que no n.º 6 chamamos $P^{(n)}$.

67. Como já notámos (n.º 53), a serie de Tayler converte-se na de Maclaurin, fazendo $x=0$, e mudando depois h em x.

Operando pois esta mudança em (A′) e (A″), obteremos as fórmas analogas da serie completa de Maclaurin:

$$fx=f+xf'+\ldots\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)\ldots\ldots(B'),$$

$$fx=f+xf+\ldots\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}+\frac{(1-\theta_1)^{n-1}x^n}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta_1x)\ldots(B'').$$

68. Para que uma serie represente a funcção desenvolvida, é necessario, como dissemos no fim do n.º 17, que seja convergente para a funcção, isto é, que o resto convirja para zero. O que poderá verificar-se recorrendo a alguma das fórmas que tem o resto nas fórmulas (A′) e (A″), (B′) e (B″) (*).

Exemplos:

I. A expressão $y = a^x$ dá $\qquad y' = ka^x,\ y'' = k^2 a^x, \ldots y^{(n)} = k^n a^x.$

Como estas derivadas são finitas para os valores finitos de x, a serie

$$a^{x+h} = a^x + kha^x + \ldots + \frac{k^{n-1}h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} a^x + \frac{k^n h^n}{1.2\ldots n} a^{x+\theta h}$$

será convergente, por tender para zero a razão $\frac{hk}{i}$ de dois termos consecutivos.

E o resto convergirá para zero; porque, tomando $i > hk$, e escrevendo o coefficiente de $a^{x+\theta h}$ debaixo da fórma $\frac{hk}{1}.\frac{hk}{2}\ldots\frac{hk}{i-1} \times \frac{hk}{i}.\frac{hk}{i+1}\ldots\frac{hk}{n}$, vê-se que, para n infinito, o segundo factor é infinitesimo. Portanto a serie representa a^{x+h}, qualquer que seja o valor finito de x.

II. Tomando as derivadas de Log x, acha-se

$$\mathrm{Log}(x+h) = \mathrm{Log}\, x + \frac{h}{x}\ldots \mp \frac{h^{n-1}}{(n-1)x^{n-1}} \pm \frac{1}{(n-1)} \frac{h^n(1-\theta_1)^{n-1}}{(x+\theta_1 h)^n}.$$

Como a razão de dois termos consecutivos, $\frac{i}{i+1}.\frac{h}{x} = \frac{1}{1+\frac{1}{i}}.\frac{h}{x}$, tende

(*) A serie de Taylor pode transformar-se em fracção continua. (Veja-se o opusculo do sr. Francisco Gomes Teixeira, intitulado: *Desenvolvimento das funcções em fracção continua*. Coimbra, 1871).

para o limite $\frac{h}{x}$, a serie é convergente, nos casos de ser $\frac{h}{x} < 1$, ou $\frac{h}{x}$ negativo e $-\frac{h}{x} < 1$. E em ambos estes casos, o limite do resto,

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{h}{x}\right)^n\left(\frac{1}{1+\theta_1\frac{h}{x}}\right)\cdot\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1\frac{h}{x}}\right)^{n-1}$$

é zero. Portanto a serie representa $\operatorname{Log}(x+h)$, quando $\frac{h}{x}$ está comprehendido entre -1 e $+1$.

III. Seja a serie do binomio de Newton

$$(x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + .. \frac{m.(m-1)..(m-(n-1))}{1.2......(n-1)} h^n(1-\theta_1)^{n-1}(x+h\theta_1)^{m-n}.$$

Como a razão $\frac{m-(i-1)}{i}\cdot\frac{h}{x}$ de dois termos consecutivos tende para o limite $\frac{h}{x}$, a serie é convergente nos casos de ser $\frac{h}{x}$ positivo e < 1 ou $-\frac{h}{x}$ positivo e < 1.

Sendo $m-i < i$, $m < i' < m+1$, e escrevendo o resto debaixo da fórma de producto dos factores $\pm m.\frac{m-1}{1}..\frac{m-i+1}{i-1}, \frac{m-i}{i}..\frac{m+1-i''}{i'-1}$,

$$\frac{i'-m}{i'}..\frac{n-1-m}{n-1},\left(1+\theta_1\frac{h}{x}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^n\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1\frac{h}{x}}\right)^{n-1} x^m \text{; onde}$$

o primeiro factor é finito, o segundo é o producto de fracções proprias, o terceiro é o producto de fracções que tendem para o limite superior 1, e o quarto tende para zero: vê-se que, em ambos os casos, o limite d'esse producto é zero. Portanto a serie representa $(x+h)^m$, ou quando m é inteiro e positivo, ou quando $\frac{h}{x}$ está comprehendido entre -1 e $+1$.

Fórmula de Lagrange

69. Sejam as equações

$$u = fy,\ y = \psi(t + x\varphi y) \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Tracta-se de desenvolver u em ordem ás potencias de x, sem eliminar y entre as propostas (1).

Derivando a primeira separadamente em ordem a x e a t, e depois eliminando $f'y$, teremos

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot f'y,\ \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot f'y,\ \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt};$$

ou, multiplicando por $\varphi' y$,

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{d\varphi y}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\varphi y}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Similhantemente, derivando a segunda das mesmas equações (1), e eliminando ψ', acharemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \varphi y,$$

ou, multiplicando por $f'y$, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\varphi y$ . . . . (3).

Derivando esta equação em ordem a x, e attendendo a (2), vem

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dt}\frac{d\varphi y}{dx} + \frac{d^2u}{dxdt}\varphi y = \frac{du}{dx}\frac{d\varphi y}{dt} + \frac{d^2u}{dxdt}\varphi y = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\varphi y\right)}{dt};$$

ou, em virtude de (3), $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dt}(\varphi y)^2\right)}{dt}$.

Em geral, se for $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}\left(\frac{du}{dt}(\varphi y)^{n-1}\right)}{dt^{n-2}}$,

a derivação, attendendo a (2) e a (3), dará

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^{n-2}\left(\frac{d^2u}{dtdx}(\varphi y)^{n-1} + (n-1)\frac{du}{dt}\frac{d\varphi y}{dx}.(\varphi y)^{n-2}\right)}{dt^{n-2}}$$

$$= \frac{d^{n-2}\left(\frac{d^2u}{dtdx}(\varphi y)^{n-1} + (n-1)\frac{du}{dx}\frac{d\varphi y}{dt}(\varphi y)^{n-2}\right)}{dt^{n-2}}$$

$$= \frac{d^{n-1}\left(\frac{du}{dx}(\varphi y)^{n-1}\right)}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{du}{dt}(\varphi y)^n\right)}{dt^{n-1}}.$$

Portanto a lei é verdadeira para qualquer valor de n.

70. Posto isto, fazendo $x=0$, ficam

$$u=f(\psi t),\ \varphi y=\varphi(\psi t),\ \left(\frac{du}{dt}\right)=f'(\psi t)\cdot\psi' t;$$

e a fórmula de Maclaurin dá

$$(\mathrm{C})\ldots\ldots u=\left\{\begin{array}{l} f(\psi t)+xf'(\psi t).\psi' t.\varphi(\psi t)+\dfrac{x^2}{2}\,\dfrac{d\,[f'(\psi t).\psi' t.(\varphi(\psi t))^2]}{dt} \\ +\ldots\dfrac{x^n}{1.2\ldots n}\,\dfrac{d^{n-1}[f'(\psi t).\psi' t.(\varphi(\psi t))^n]}{1.2\ldots n\,dt^{n-1}}. \end{array}\right.$$

Da fórmula (C) resulta immediatamente a que achou Lagrange para $u=fy,\ y=t+x\varphi y$ (*), que é

$$u=ft+xf't.\varphi t+\frac{x^2}{2}\frac{d[f't.(\varphi t)^2]}{dt}+\ldots\frac{x^n d^{n-1}[f't.(\varphi t)^n]}{1.2\ldots n\,dt^{n-1}}\ldots(\mathrm{C}_1).$$

Quando for $u=y$, deverá na fórmula (C) fazer-se $ft=\psi t$, e $f'(\psi t)=1$; e na fórmula (C_1) fazer-se $ft=t$, e $f't=1$.

(*) E tambem a fórmula (C) resulta de (C_1), substituindo nesta $f(\psi t)$ em logar de ft, e $\varphi(\psi t)$ em logar de φt.

Com effeito, fazendo $t+x\varphi y=z$ nas equações (1), e por conseguinte $y=\psi z$, estas equações equivalem a $u=f(\psi z)$, $z=t+x\varphi(\psi z)$, ás quaes, applicando a fórmula (C_1), vem (C). (Bertrand, *Calc. diff.*, n.º 312.)

Desenvolvimento em serie das funcções de muitas variaveis

71. I. Extensão da Fórmula de Taylor. Seja $z=f(x, y)$ uma funcção de duas variaveis independentes, x, y.

Para desenvolver $Z=f(x+h, y+k)$

em serie ordenada segundo as potencias e productos de h e k, podemos mudar primeiramente x em $x+h$, e depois y em $y+k$ no resultado; ou mudar primeiramente y em $y+k$, e depois x em $x+h$.

Mudando x em $x+h$, virá

$$f(x+h, y)=z+h\frac{dz}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots;$$

e depois, mudando y em $y+k$, os termos d'esta tornar-se-hão em

$$z+k\frac{dz}{dy}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2}+\ldots,\ h\left(\frac{dz}{dx}+k\frac{d^2z}{dxdy}+\ldots\right),\ \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots\right),$$

e assim por diante; e portanto será

$$Z=z+k\frac{dz}{dy}+h\frac{dz}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2}+kh\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots,$$

cujo termo geral é $\dfrac{h^m\,k^n}{1.2\ldots m\times 1.2\ldots n}\cdot\dfrac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}$;

excepto para $m=0$ ou para $n=0$, aos quaes corresponderão os termos respectivos $\dfrac{k^n}{1.2\ldots n}\dfrac{d^nz}{dy^n}$, $\dfrac{h^m}{1.2\ldots m}\dfrac{d^mz}{dx^m}$.

Se mudassemos y em $y+k$ e depois x em $x+h$, teriamos

$$Z=z+h\frac{dz}{dx}+k\frac{dz}{dy}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}+hk\frac{d^2z}{dydx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2}+\ldots,$$

cujo termo geral é $\dfrac{k^nh^m}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots m}\cdot\dfrac{d^{n+m}z}{dy^ndx^m}$.

72. Comparando termo a termo estes resultados, que devem ser identicos, acha-se que é $\dfrac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}=\dfrac{d^{n+m}z}{dy^n\,dx^m}$. D'onde resulta, em conformidade com o que já vimos no n.º 36, que: *para tomar as derivadas successivas d'uma funcção relativamente a duas variaveis, é indifferente a ordem pela qual se faz a differenciação.*

Por exemplo, de $z=\dfrac{x^3}{y^2}$ tiram-se:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2}{y^2},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{2x^3}{y^3},\ \frac{d^2z}{dydx}=\frac{d^2z}{dxdy}=-\frac{6x^2}{y^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{6x}{y^2},\ \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{6x^3}{y^4},\ \frac{d^3z}{dx^2dy}=\frac{d^3z}{dydx^2}=\frac{d^3z}{dxdydx}=-\frac{12x}{y^3},$$

$$\frac{d^3z}{dy^2dx}=\frac{d^3z}{dydxdy}=\frac{d^3z}{dxdy^2}=\frac{18x^2}{y^4}.$$

73. Discorrendo d'um modo similhante áquelle pelo qual chegámos ás fórmulas dos n.os 65 e 66; ou, antes, fazendo $h=\alpha h'$, $k=\alpha k'$, e desenvolvendo z em ordem a α pela fórmula de Maclaurin: vê-se que, depois d'um termo da ordem $n-1$, o resto da serie é (*)

$$R_n=\sum\frac{h^i k^{n-i} d^n f(x+\theta h, y+\theta k)}{1.2\ldots i\times 1.2\ldots(n-i)dx^i\,dy^{n-i}},$$

ou $$R_n=n(1-\theta_1)^{n-1}\sum\frac{h^i k^{n-i} d^n f(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)}{1.2\ldots i\times 1.2\ldots(n-i)\,dx^i\,dy^{n-i}}.$$

74. Para desenvolver as funcções de tres, quatro, ou mais variaveis $Z=f(x_1+h_1, x_1+h_2, x_3+h_3,\ldots)$, seguiremos um processo similhante: mudando x_1 em x_1+h_1, e desenvolvendo $f(x_1+h_1, x_2, x_3,\ldots)$; depois mudando, nos termos d'este desenvolvimento, x_2 em x_2+h_2, o que dará $f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3,\ldots)$; e assim por diante.

75. II. Extensão da Fórmula de Maclaurin. Seja

$$y=f(x, x_1, x_2,\ldots x_{n-1})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a).$$

Ponhamos $$y=f+\Sigma\,(qx, x_1, x_2,\ldots\times x^p\,.\,x_1^{p_1}\,.\,x_2^{p_2}\ldots)\ldots(b).$$

(*) Se usarmos da notação symbolica empregada na pag. 34, isto é, se tomarmos $\left[\frac{du}{dx}\right]^i\times\left[\frac{du}{dy}\right]^{n-i}$ como representando $\frac{d^{i+n-i}u}{dx^i\,dy^{n-i}}$, este resto exprimir-se-ha pelas fórmulas symbolicas:

$$R_n=\frac{\left(h\left[\frac{du}{dx}\right]+k\left[\frac{du}{dy}\right]\right)^n}{1.2\ldots\ldots n},\text{ ou } R_n=\frac{(1-\theta_1)^{n-1}\left(h\left[\frac{dv}{dx}\right]+k\left[\frac{dv}{dy}\right]\right)^n}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)};$$

sendo $u=f(x+\theta h, y+\theta k)$, $v=f(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)$.

Differenciando p vezes em ordem a x, depois p_1 vezes em ordem a x_1, depois p_2 vezes em ordem a x_2, e assim por diante; e fazendo por fim nullos $x, x_1, x_2, \ldots$: vê-se que é

$$q_{x, x_1, x_2, \ldots} = \frac{d^{p+p_1+p_2+\ldots} y}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 \times dx_1^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx_2^{p_2} \times \ldots} \ldots (c);$$

onde se devem fazer nullos $x, x_1, x_2, \ldots$ depois da differenciação.

Assim a proposta (a) desenvolve-se em serie ordenada segundo as potencias e productos de $x, x_1, x_2, \ldots$, pela fórmula (b), na qual f e $q_{x, x_1, x_2, \ldots}$ são os valores (a) de y e (c) de

$$\frac{d^{p+p_1+p_2+\ldots} y}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 dx_1^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx_2^{p_2} \times \ldots},$$

depois de nelles ter feito $x, x_1, x_2, \ldots$ nullos.

Parando no termo da ordem $p + p_1 + \ldots - 1 = n - 1$, vê-se, como no n.º 73, que o resto é

$$R_n = \sum \frac{x^p . x_1^{p_1} . x_2^{p_2} \ldots \times d^{p+p_1+p_2+\ldots} f^{(n)}(\theta x, \theta x_1, \theta x_2, \ldots)}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 dx^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx^{p_2} \times \ldots},$$

ou

$$R_n = n(1-\theta_1)^{n-1} \sum \frac{x^p . x_1^{p_1} . x_2^{p_2} \ldots \times d^{p+p_1+p_2+\ldots} f^{(n)}(\theta x, \theta x_1, \theta x_2, \ldots)}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 dx^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx^{p_2} \times \ldots}$$

76. III. Fórmula de Laplace. Sejam as equações

$$\left.\begin{array}{c} u = f(y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_1 = \psi_1(t_1 + x_1 z_1),\ y_2 = \psi_2(t_2 + x_2 z_2), \ldots y_n = \psi_n(t_n + x_n z_n), \\ z_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots y_n),\ z_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots y_n), \ldots z_n = \varphi_n(y_1, y_2, \ldots y_n), \end{array}\right\} \ldots (1);$$

onde $x_1, x_2, \ldots x_n$ e $t_1, t_2, \ldots t_n$ entram como variaveis independentes, Serão $\frac{dy_1}{dt_1}=\left(1+x_1\sum\frac{dz_1}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dt_1}\right).\psi'_1,\ \frac{dy_1}{dx_1}=\left(z_1+x_1\sum\frac{dz_1}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}\right).\psi'_1;$

e, eliminando ψ'_1 e reduzindo, virá

$$\frac{dy_1}{dx_1}-z_1\frac{dy_1}{dt_1}=x_1\sum_2^n\frac{dz_1}{dy_i}\left(\frac{dy_1}{dt_1}.\frac{dy_i}{dx_1}-\frac{dy_1}{dx_1}.\frac{dy_i}{dt_1}\right).$$

Mas, se entre as $n-1$ ultimas equações da segunda linha de (1) eliminassemos todas as $n-1$ variaveis $y_2, y_3, \ldots$, menos uma d'ellas y_i, ficaria uma equação entre y_1 e y_i, que, resolvida em ordem a y_i, daria

$$y_i=\mathrm{F}(y_1, x_2, x_3, \ldots, t_2, t_3, \ldots);$$

depois, derivando em ordem a x_1 e em ordem a t_1, e por fim eliminando F′ entre as duas derivadas, viria

$$\frac{dy_i}{dx_1}\cdot\frac{dy_1}{dt_1}-\frac{dy_i}{dt_1}\cdot\frac{dy_1}{dx_1}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

e por conseguinte $\sum_2^n\frac{dz_1}{dy_i}\left(\frac{dy_i}{dx_1}\ \frac{dy_1}{dt_1}-\frac{dy_i}{dt_1}\cdot\frac{dy_1}{dx_1}\right)=0.$

Portanto é $$\frac{dy_1}{dx_1}-z_1\frac{dy_1}{dt_1}=0;$$

e do mesmo modo $$\frac{dy_i}{dx_i}-z_i\frac{dy_i}{dt_i}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Attendendo a (3) e (2), teremos pois

$$\frac{du}{dx_1}=\sum_1^n \frac{du}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}=z_1\frac{du}{dt_1}-\sum_2^n\left(z_1\frac{du}{dy_i}\frac{dy_i}{dt_1}-\frac{du}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}\right)$$

$$=z_1\frac{du}{dt_1}-\frac{1}{\frac{dy_1}{dt_1}}\sum_2^n\frac{du}{dy_i}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\frac{dy_i}{dt_1}-\frac{dy_1}{dt_1}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}\right)=z_1\frac{du}{dt_1}.$$

Similhantemente $$\frac{du}{dx_i}=z_i\frac{du}{dt_i}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

que, applicada a $u=z_i$ dá $$\frac{dz_i}{dx_i}=z_i\frac{dz_i}{dt_i}\ldots;$$

e, eliminando z_i entre esta e (4), vem

$$\frac{du}{dx_i}\cdot\frac{dz_i}{dt_i}=\frac{du}{dt_i}\cdot\frac{dz_i}{dx_i}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

77. Differenciando (4), e attendendo a (5) e a (4), acha-se

$$\frac{d^2u}{dx_i^2}=\frac{dz_i}{dx_i}\cdot\frac{du}{dt_i}+z_i\frac{d^2u}{dt_i\,dx_i}=\frac{dz_i}{dt_i}\cdot\frac{du}{dx_i}+z_i\frac{d^2u}{dt_i\,dx_i}=\frac{d\left(z_i\frac{du}{dx_i}\right)}{dt_i}=\frac{d\left(z_i^2\frac{du}{dt_i}\right)}{dt_i}.$$

Em geral, se for $\dfrac{d^{p-1}u}{dx_i{}^{p-1}} = \dfrac{d^{p-2}\left(z_i{}^{p-1}\dfrac{du}{dt_i}\right)}{dt_i{}^{p-2}}$,

será

$$\frac{d^p u}{dx_i^p} = \frac{d^{p-2}\left[(p-1)\,z_i{}^{p-2}\dfrac{dz_i}{dx_i}.\dfrac{du}{dt_i} + z_i{}^{p-1}\dfrac{d^2u}{dt_i\,dx_i}\right]}{dt_i{}^{p-2}}$$

$$= \frac{d^{p-2}\left[(p-1)\,z_i{}^{p-2}.\dfrac{dz_i}{dt_i}.\dfrac{du}{dx_i} + z_i{}^{p-1}\dfrac{d^2u}{dx_i\,dt_i}\right]}{dt_i{}^{p-2}},$$

ou

$$\frac{d^p u}{dx_i^p} = \frac{d^{p-1}\left(z_i{}^{p-1}\dfrac{du}{dx_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}} = \frac{d^{p-1}\left(z_i^p\dfrac{du}{dt_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Portanto esta fórmula tem logar para qualquer valor de p.

78. Como, em virtude de (6), a expressão de $\dfrac{d^p u}{dx_i^p}$ correspondente a $x_i = 0$ é a mesma, quer se supponha x_i nullo antes da differenciação, quer depois; e como, em virtude de (4), $\left(z_i^p\dfrac{du}{dt_i}\right)$ pode formar-se achando o coefficiente differencial $\dfrac{du}{dx_i}$, mudando nelle z_i em $z_i{}^p$, e fazendo depois x_i nullo: teremos, seguindo este processo,

$$\frac{d^p u}{dx_i^p} = \frac{d^{p-1}\left(z_i^p\dfrac{du}{dt_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}} = \frac{d^{p-1}\left[\dfrac{du}{dx_i}\right]}{dt_i{}^{p-1}},$$

e por conseguinte

$$\frac{d^{p+p'}u}{dx_i{}^p dx_{i'}{}^{p'}}=\frac{d^{p-1}\left(\dfrac{d^{p'}\left[\dfrac{du}{dx_i}\right]}{dx_{i'}{}^{p'}}\right)}{dt_i{}^{p-1}}=\frac{d^{p-1}\left(\dfrac{d\left[\dfrac{d^{p'}u}{dx_{i'}{}^{p'}}\right]}{dx_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}}.$$

Mas, suppondo $x_{i'}=0$, será tambem, com a mesma interpretação,

$$\frac{d^{p'}u}{dx_{i'}{}^{p'}}=\frac{d^{p'-1}\left[\dfrac{du}{dx_{i'}}\right]}{dt_{i'}{}^{p'-1}};$$

logo

$$\frac{d^{p+p'}u}{dx_i{}^p\,dx_{i'}{}^{p'}}=\frac{d^{p+p'-2}\left[\dfrac{d^2u}{dx_i\,dx_{i'}}\right]}{dt_i{}^{p-1}dt_{i'}{}^{p'-1}};$$

comtanto que se mudem z_i em $z_i{}^p$ e $z_{i'}$ em $z_{i'}{}^{p'}$, e se façam x_i e $x_{i'}$ nullos depois da differenciação, em $\left[\dfrac{d^2u}{dx_i\,dx_{i'}}\right]$.

79. Progredindo do mesmo modo, vê-se que se pode escrever a fórmula (b) assim:

$$u=\mathrm{u}+\sum x_1{}^{p_1}.x_2{}^{p_2}..x_n{}^{p_n}\,\frac{d^{p_1+p_2\ldots-n}\left[\dfrac{d^nu}{dx_1.dx_2\ldots dx_n}\right]}{1.2..p_1dt_1{}^{p_1-1}\times1.2..p_2dt_2{}^{p_2-1}..\times1.2..p_ndt_n{}^{p_n-1}}..\text{(D)};$$

entendendo-se que em $\left[\dfrac{d^nu}{dx_1.dx_2\ldots dx_n}\right]$ se devem mudar respectivamente $z_1, z_2, \ldots z_n$ em $z_1{}^{p_1}, z_2{}^{p_2}, \ldots z_n{}^{p_n}$, e fazer $x_1, x_2, \ldots x_n$ nullos.

Tal é a fórmula de Laplace (*Mec. Cel.*, liv. 2.°, n.° 21).

80. Nesta fórmula comprehende-se a de Lagrange, quando é $n=1$, ou $u=fy$ e $y=\psi(t+xz)$.

Com effeito teremos então

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{d(t+xz)}\cdot\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)=\frac{du}{d(t+xz)}\left(z+x\frac{dz}{dx}\right),$$

que, pelas mudanças indicadas, se torna em $\frac{du}{dt}z^p$, e por conseguinte (D) em

$$u=\mathrm{u}+\sum\frac{x^p}{1.2\ldots p}\,\frac{d^{p-1}\left(\frac{du}{dt}\cdot z^p\right)}{dt^{p-1}},$$

identica á fórmula (C).

II

APPLICAÇÕES DO CALCULO DIFFERENCIAL

Desenvolvimento em serie das funcções d'uma variavel

Faremos applicação das fórmulas que ficam demonstradas.

81. I. Da Fórmula de Taylor. Seja

$$y = \log \operatorname{sen} (x + h).$$

Chamando M o modulo, teremos

$$y' = \mathrm{M} \cot x,\ y'' = -\frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sen}^2 x},\ y''' = \frac{2\mathrm{M}\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}, \ldots,$$

e $$\log \operatorname{sen} (x + h) = \log \operatorname{sen} x + \mathrm{M}h \cot x - \mathrm{M}h^2 \frac{\cot x}{\operatorname{sen} 2x} + \ldots$$

A differença $\log \operatorname{sen} (x + h) - \log \operatorname{sen} x = \Delta$ será

$$\Delta = \mathrm{M}h \cot x \left(1 - \frac{h}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{h^2}{3 \operatorname{sen}^2 x}\right) - \frac{\mathrm{M}h^4}{4 \operatorname{sen}^4 x}\left(1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 x\right) \ldots;$$

e similhantemente

$$\Delta_1 = \log\cos(x+h) - \log\cos x,\ \Delta_2 = \log\operatorname{tang}(x+h) - \log\operatorname{tang} x,$$

serão

$$\Delta_1 = -Mh\operatorname{tang} x\left(1 + \frac{h}{\operatorname{sen}2x} + \frac{h^2}{3\cos^2 x}\right) - \frac{Mh^4}{4\cos^4 x}\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2 x\right)\ldots,$$

$$\Delta_2 = \frac{2Mh}{\operatorname{sen}2x}\left(1 - h\cot 2x + \frac{2}{3}h^2(1 + 2\cot^2 2x)\right) + \frac{4Mh^4\cos 2x}{\operatorname{sen}^4 2x}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{6}\right)\ldots:$$

onde h representa o augmento do arco rectificado (Vid. *Alg. Sup.*, n.º 158).

Tendo, por exemplo, $\log\operatorname{sen} 27°30'$, e querendo $\log\operatorname{sen} 27°33'$, poremos $h = \operatorname{arc}$ de $3' = 3\operatorname{sen} 1'$, e faremos o calculo do modo seguinte:

$\log h$	6.94085		6.94085	1.º termo	0,00072803
$\log M$	9.63778		6.86215	2.º	78
$\log\cot x$ ...	0,28352	c. sen $2x$	0.08664	3.º	0
	6.86215		3.88964	Δ	0,0007273
			$\log\operatorname{sen} 27°30'$		9.6644056
			$\log\operatorname{sen} 27\ 33'$		9.6651329.

Este methodo é principalmente util quando se querem calcular os logarithmos dos senos com grande approximação (Vej. o *Conn. des Temps* para 1817).

82. Da Fórmula de Maclaurin. Seja $y = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x)$. Serão

$$y' = \cos^2 y,\ y'' = -\operatorname{sen}2y \,.\, y' = -\operatorname{sen}2y\cos^2 y,\ y''' = -2\cos^3 y\cos 3y;$$

e, em geral, se for $y^{(2n-1)} = A_{2n-1}\cos(2n-1)\,y\cos^{(2n-1)}y$, teremos

$$y^{(2n)} = A_{2n}\operatorname{sen}2ny\cos^{2n}y,\ y^{(2n+1)} = A_{2n+1}\cos(2n+1)\cos^{2n+1}y,$$

sendo $A_{2n} = -(2n-1)A_{2n-1}$, $A_{2n+1} = 2A_{2n}$:

logo, [fórm. (B)], $\quad \text{arc}(\text{tang} = x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \ldots;$

fórmula que dá a expressão notavel $\quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$

Similhantemente se acharão as series de $\text{sen}\, x$, $\cos x$, a^x, $\log(1+x)$; e, em geral, as de todas as funcções de x, cujo desenvolvimento proceder segundo as potencias inteiras e positivas d'esta variavel.

83. Para desenvolver y em ordem ás potencias descendentes de x, basta mudar na sua expressão x em $\frac{1}{t}$, desenvolver y em ordem ás potencias ascendentes de t, e depois restituir $\frac{1}{x}$ em logar de t.

Por exemplo $\quad y = \sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = x\sqrt{1 - t^2}$

dá $\quad y = x\left(1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \ldots\right) = x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \ldots$

84. Tambem pode servir o theorema de Maclaurin para resolver as equações entre duas variaveis em ordem a uma d'ellas, e para desenvolver as funcções implicitas; como se vê nos exemplos seguintes:

1.° De $\quad my^3 - yx = m,$

derivando e fazendo $x=0$, tiram-se

$$f=1,\ f'=\frac{1}{3m},\ f''=0,\ f'''=-\frac{2}{27m^3},\ldots;$$

e [fórm. (B)], $$y=1+\frac{x}{3m}-\frac{x^3}{81m^3}+\ldots$$

2.° De $$\operatorname{sen} y = x \operatorname{sen}(P+y)$$

tiram-se

$$y'=\frac{\operatorname{sen}(P+y)}{\cos y - x\cos(P+y)}=\frac{\operatorname{sen}^2(P+y)}{\operatorname{sen} P},$$

$$y''=\frac{\operatorname{sen} 2(P+y)}{\operatorname{sen} P}y',\ y'''=\frac{2y'^2\cos 2(P+y)+y''\operatorname{sen} 2(P+y)}{\operatorname{sen} P}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}(P+y)\operatorname{sen} 3(P+y)}{\operatorname{sen}^2 P}y';$$

....

depois $$f=0,\ f'=\operatorname{sen} P,\ f''=\operatorname{sen} 2P,\ f'''=2\operatorname{sen} 3P,\ldots;$$

e, [fórm. (B)], $$y\operatorname{sen} 1''=x\operatorname{sen} P+\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2P+\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen} 3P+\ldots$$

3.° De $$\cos m-\cos(m+y)=x\operatorname{sen} m$$

tiram-se

$$y'=\frac{\operatorname{sen} m}{\operatorname{sen}(m+y)},\ y''=-\frac{\operatorname{sen}^2 m\cos(m+y)}{\operatorname{sen}^3(m+y)},\ y'''=\frac{\operatorname{sen}^3 m\,(1+2\cos^2(m+y))}{\operatorname{sen}^3(m+y)};$$

depois $\quad f=0,\ f'=1,\ f''=-\cot m,\ f'''=1+3\cot^2 m, \ldots,$

e [fórm. (B)] $\quad y \operatorname{sen} 1''=x-\frac{1}{2}x^2\cot m+\frac{1}{6}x^3(1+3\cot^2 m)+\ldots$

4.º De $\cos(z+y)=-x\operatorname{sen}z\cos A+\cos z\sqrt{1-x^2}=Bx+\cos z\sqrt{1-x^2}$,

querendo y em serie ordenada segundo as potencias de x, tiram-se:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x\cos z}{\sqrt{1-x^2}}-B}{\operatorname{sen}(z+y)},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{\cos z\operatorname{sen}(z+y)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\left(\frac{x\cos z}{\sqrt{1-x^2}}-B\right)^2\frac{\cos(z+y)}{\operatorname{sen}(z+y)}}{\operatorname{sen}^2(z+y)}\ldots;$$

depois $\quad f=0,\ f'=\cos A,\ f''=\cot z\operatorname{sen}^2 A, \ldots,$

e, [fórm. (B)], $\quad y\operatorname{sen} 1''=x\cos A+\frac{1}{2}x^2\cot z\operatorname{sen}^2 A+\ldots$

85. Se alguma das funcções $f, f', f'', \ldots$ é infinita, não se pode applicar a fórmula de Maclaurin, porque a serie não procede segundo as potencias inteiras e positivas da variavel. E então é necessario recorrer ao processo indicado no n.º 60, ou antes transformar a funcção de modo que naquella, que depois houver de ser desenvolvida, não se dê o mesmo inconveniente.

Para isso muitas vezes aproveita a hypothese $y=x^k z$, determinando a constante k de modo que $x=0$ não torne infinita nenhuma das funcções $z, z', z'', \ldots$

Por exemplo, o desenvolvimento de $y=\cot x$ não pode proceder segundo as potencias positivas de x, por ser $\cot 0 = \infty$. Mas, fazendo $y = \frac{z}{x}$, não ha o mesmo inconveniente em $z = x \cot x = \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$, na qual, desenvolvendo o numerador e o denominador, e simplificando, vem

$$z = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4 \ldots}{1 - \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 \ldots};$$

depois $$f = 1,\ f' = 0,\ f'' = -\frac{2}{3},\ f''' = 0, \ldots,$$

o que dá $$z = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2.5} \ldots,$$

e finalmente $$y = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} \ldots$$

86. III. Da Fórmula de Lagrange. Exemplos:

1.° Para $$u = y^m,\ y = t + xy^n$$

são $$ft = t^m,\ f't = mt^{m-1},\ \varphi t = t^n,$$

e [form. (C_1)] $$y^m = t^m + mxt^{m+n-1} + \frac{m(m+2n-1)}{2}x^2 t^{m+2n-2} + \ldots$$

2.° Para resolver a equação $\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots = 0$, fariamos $t = -\frac{\alpha}{\beta}$, $x = 1$, $\varphi y = -\frac{\gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots}{\beta}$, $fy = y$.

E para resolver $\alpha + \beta y + \gamma y^n = 0$,

fariamos $t = -\frac{\alpha}{\beta}$, $x = -\frac{\gamma}{\beta}$, $\varphi y = y^n$, $fy = y$.

3.º Na equação transcendente $y = t + e \operatorname{sen} y$,

que pertence ao *problema de Kepler*, quando e é a razão da excentricidade da ellipse para o semieixo maior, t a anomalia media, e y a anomalia do excentrico, temos $x = e$, $\varphi y = \operatorname{sen} y$, $fy = y$; e (form. C_1)

$$y = t + e \operatorname{sen} t + \frac{e^2}{2} \frac{d(\operatorname{sen}^2 t)}{dt} + \frac{e^3}{1.2.3} \frac{d(\operatorname{sen}^3 t)}{dt^3} + \ldots,$$

ou $$y = t + e \operatorname{sen} t + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{e^3}{8} (\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t) + \cdots$$

4.º Para $u = y^m$, $y = \cos(t + x \log y)$,

teriamos

$$(u) = \cos^m t,\ (\varphi) = \log \cos t,\ \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right) = \frac{d^{n-1}[-m \cos^{m-1} t \operatorname{sen} t\,(\lg \cos t)^n]}{dt^{n-1}},$$

e (fórm. C)

$$u = \cos^m t - x . m \cos^{m-1} t \operatorname{sen} t \log \cos t$$

$$+ \frac{x^2}{2} m \log \cos t \left[\begin{array}{l}(m-1) \operatorname{sen}^2 t \cos^{m-2} t \log \cos t \\ - \cos^m t \log \cos t + 2\,\mathrm{M} \operatorname{sen}^2 t \cos^{m-2} t\end{array}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Resolução das equações

87. Pelos principios expostos podem verificar-se, a respeito das equações, muitos theoremas que por outro modo já demonstráramos.

I. Seja $$fx = (x-a)^m (x-b)^n \ldots \times \mathrm{P};$$

designando P o producto dos factores lineares deseguaes.

A derivação dá

$$f'x = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} \ldots [m\mathrm{P}(x-b)\ldots + n\mathrm{P}(x-a)\ldots + \ldots]:$$

por onde se vê que $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$ é o maior divisor commum de $fx=0$ e da sua derivada $f'x=0$; theorema conhecido a respeito das raizes eguaes (*Alg. Sup.*, n.º 49).

II. A funcção $$fx = \log(\cos x \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} x)$$

dá $$f'x = \frac{-\operatorname{sen} x \pm \sqrt{-1}\cos x}{\cos x \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} x} = \pm\sqrt{-1} = \frac{d(\pm x\sqrt{-1})}{dx};$$

logo $$\log(\cos x \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} x) = \pm x\sqrt{-1},$$

sem ajuntar constante A, porque $x=0$ mostraria que é $\mathrm{A}=0$.

D'onde se conclue o theorema conhecido (*Alg. Sup.*, n.º 159), do qual seria facil deduzir as fórmulas (K), (L) e (M), e por conseguinte os factores de $x^m \pm a^m$ (*Alg. Sup.*, n.os 102 e 103).

III. Supponhamos $fx = x^m + px^{m-1} + \ldots + u$ decomposta nos seus factores lineares $x - a$, $x - b, \ldots$ Será, identicamente,

$$\log fx = \log(x-a) + \log(x-b) + \ldots$$

Tomando as derivadas, recairemos na equação (1) do n.º 117 da *Alg. Sup.*; e por conseguinte no theorema de Newton sobre as sommas das potencias das raizes, as quaes formam uma serie recurrente cuja escala de relação é $-p, -q, \ldots -u$.

IV. Seja k o valor approximado d'uma das raizes da equação

$$fx = x^m + px^{m-1} + \ldots u = 0,$$

e y o erro. Teremos

$$x = k + y,\ 0 = f(k+y) = fk + yf'k + \frac{1}{2} y^2 f''k + \frac{1}{6} y^3 f'''k + \ldots,$$

ou $$x = k + y,\ y = -\frac{fk}{f'k} - \frac{1}{2}\frac{y^2 f''k}{f'k} - \frac{1}{6}\frac{y^3 f'''k}{f'k} \ldots (*).$$

Usando de duas approximações successivas de y, isto é, substituindo $-\frac{fk}{f'k} - \frac{1}{2}\left(\frac{fk}{f'k}\right)^2 \frac{f''k}{f'k}$ em logar de y no segundo membro, e desprezando

(*) Para a transformação em fracção continua pode vêr-se o n.º 10 do já citado *Desenvolvimento das funcções em fracções continuas*.

os termos de ordem $\left(\frac{fk}{f'k}\right)^4$, acharemos

$$y=-\frac{fk}{f'k}-\frac{1}{2}\left(\frac{fk}{f'k}\right)^2\frac{f''k}{f'k}+\frac{1}{6}\left(\frac{fk}{f'k}\right)^3\left(\frac{f'''k}{f'k}-3\left(\frac{f''k}{f'k}\right)^2\right).$$

O mesmo se acharia applicando a fórmula (C_1), como se fez no n.° 86, 2.°, com $\alpha=fk$, $\beta=f'k$, $\gamma=\frac{1}{2}f''k$, $\delta=\frac{1}{6}f'''k$; a qual daria

$$y=t-\frac{\frac{1}{2}t^2f''k+\frac{1}{6}t^3f'''k+\ldots}{f'k}+\frac{tf''k+\ldots}{f'k}\times\frac{\frac{1}{2}t^2f''k+\ldots}{f'k}+\ldots$$

Por exemplo, da equação $fx=x^3-2x-5=0$ tira-se $k=2,1$ para valor approximado d'uma das raizes (*Alg. Sup.*, n.° 70); e por conseguinte: $fk=0{,}061$; $f'k=11{,}23$; $f''k=12{,}6$; $f'''k=6$. O que dá

$$\frac{fk}{f'k}=\frac{61}{11230},\ \frac{f''k}{f'k}=\frac{1260}{1123},\ \frac{f'''k}{f'k}=\frac{600}{1123};$$

e portanto

$$x=2{,}1-0{,}00543188-0{,}0000165{5}-0{,}0000000{9}=2{,}09455148.$$

Das expressões

$$\frac{0}{0},\ 0\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^{\circ},\ \infty^{\circ},\ \infty-\infty.$$

88. Fórma $\frac{0}{0}$. Vimos (*Alg. Sup.*, n.º 29, 2.º) que, se $x=a$ reduz a $\frac{0}{0}$ uma fracção $\frac{fx}{Fx}$, é $x-a$ factor commum dos seus termos; e que, para ter nesse caso o valor da fracção, é necessario desembaraçar os termos da potencia mais elevada de $x-a$ que divide ambos.

Mudando x em $x+h$, vem

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)}=\frac{fx+hf'x+\frac{1}{2}h^2f''x+\ldots}{Fx+hF'x+\frac{1}{2}h^2F''x+\ldots};$$

depois, fazendo $x=a$, o que torna fx e Fx nullos, e simplificando, fica

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'a+\frac{1}{2}hf''a+\ldots}{F'a+\frac{1}{2}hF''a+\ldots};$$

e finalmente, pondo $h=0$, acha-se $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$.

No caso de ser tambem $f'a=0$, ou $F'a=0$, a fracção será nulla, ou infinita.

Se, além de $fa=0$ e $Fa=0$, forem $f'a=0$ e $F'a=0$, a fracção $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$, simplificando e fazendo $h=0$, será $\frac{fa}{Fa}=\frac{f''a}{F''a}$. E em geral, se forem nullos $fa, f'a, \ldots f^{(n)}a$ e $Fa, F'a, \ldots F^{(n)}a$, a fracção

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{fa+hf'a+\ldots\ldots\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}h^{n+1}f^{(n+1)}a}{Fa+hF'a+\ldots\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}h^{n+1}F^{(n+1)}a},$$

simplificando e fazendo $h=0$, reduzir-se-ha a $\frac{fa}{Fa}=\frac{f^{(n+1)}a}{F^{(n+1)}a}$.

Logo: *Para ter o valor d'uma fracção que a hypothese* $x=0$ *reduz á fórma* $\frac{0}{0}$, *derivaremos simultaneamente os seus dois termos tantas vezes quantas forem necessarias para que aquella hypothese não anniquile a derivada de um d'elles.*

E necessariamente alguma das derivadas ha de deixar de anniquilar-se; porque, se assim não acontecesse, seriam $f(a+h)$ e $F(a+h)$ nullos para todos os valores de h, isto é, seriam fx e Fx nullos para todos os valores de x.

89. Exemplos:

I. A expressão $\frac{x^n-1}{x-1}$, que equivale a $\Sigma(1+x+\ldots . x^{n-1})$, toma a fórma $\frac{0}{0}$ para $x=1$. A differenciação dos dois termos dá, para essa hypothese, o seu valor $\frac{nx^{n-1}}{1}=n$; como deve dar.

II. A hypothese $x=0$ dá a $\frac{a^x-b^x}{x}$ a fórma $\frac{0}{0}$. Derivando, acha-se o seu valor $\frac{a^x la-b^x lb}{1}=l\left(\frac{a}{b}\right)$.

III. A hypothese $x = 90^\circ$ reduz $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}$ á fórma $\dfrac{0}{0}$. A derivação dá o seu valor $\dfrac{-\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1$.

Do mesmo modo se vê que:

para $x = a$, é
$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{(ax^3)}} = \frac{16a}{9};$$

para $x = a$, é
$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = 0.$$

IV. A hypothese $x = c$ reduz á fórma $\dfrac{0}{0}$ a fracção

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{ax^2 + ac^2 - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2}, \text{ e tambem } \frac{f'x}{F'x} = \frac{ax - ac}{bx - bc};$$

mas, recorrendo a nova derivação, acha-se $\dfrac{a}{b}$.

Para $x = 1$ são
$$\frac{1 - x + lx}{1 - \sqrt{2x - x^2}} = -1, \quad \frac{x^2 - x}{1 - x + lx} = -2.$$

90. O methodo exposto, por se fundar no theorema de Taylor, deixa de ser applicavel quando este theorema o não fôr até a ordem do primeiro termo que não se anniquila. O que facilmente se reconhece, por se tornar então infinita alguma das derivadas a que chegarmos.

Neste caso: desenvolveremos o numerador e o denominador em serie das potencias de h (n.º 60); faremos $x = a$; supprimiremos nos dois termos a potencia mais elevada de h, que os dividir ambos; e faremos $h = 0$.

Seja, por exemplo, a fracção $\dfrac{fx}{\mathrm{F}x}=\dfrac{(x-c)\sqrt{(x-b)}+\sqrt{(x-c)}}{\sqrt{2c}-\sqrt{(x+c)}+\sqrt{(x-c)}}$,

que $x=c$ reduz a $\dfrac{0}{0}$. Como esta hypothese torna infinita a derivada de $\sqrt{(x-c)}$, não podemos applicar o theorema de Taylor senão ao desenvolvimento dos primeiros termos; e para $\sqrt{(x-c+h)}$ servir-nos-hemos da fórmula do binomio.

Teremos assim
$$\frac{f(c+h)}{\mathrm{F}(c+h)}=\frac{h^{\frac{1}{2}}+h\sqrt{c-b}+\ldots}{h^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2c}}h+\ldots},$$

que, dividindo por $h^{\frac{1}{2}}$ e fazendo $h=0$, se reduz a $\dfrac{fc}{\mathrm{F}c}=1$.

91. Fórma $0\times\infty$. Supponhamos que a hypothese $x=a$, tornando fx nulla e $\mathrm{F}x$ infinita, dá a $fx\times\mathrm{F}x$ a fórma $0\times\infty$. Por ser então $\dfrac{fa}{\dfrac{1}{\mathrm{F}a}}=\dfrac{0}{0}$,

será
$$fa\times\mathrm{F}a=\frac{f'a}{\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}a}\right)'}=-\frac{f'a}{\mathrm{F}'a}\times(\mathrm{F}a)^2.$$

Por exemplo a expressão $(1-x)\operatorname{tang}\dfrac{1}{2}\pi x$, que $x=1$ reduz a $0\times\infty$, é, nesta hypothese, pelas fórmulas precedentes,

$$\frac{-1}{\dfrac{-\dfrac{1}{2}\pi}{\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{2}\pi}}=\frac{2}{\pi},\ \text{ou}\ -\frac{-1}{\dfrac{\dfrac{1}{2}\pi}{\cos^2\dfrac{1}{2}\pi}}\times\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\pi=\frac{2}{\pi}.$$

92. Fórma $\frac{\infty}{\infty}$. Se a hypothese $x=a$ reduz $\frac{fx}{Fx}$ a $\frac{\infty}{\infty}$, tornando fx e Fx infinitas, será $\frac{fa}{Fa}=\frac{\frac{1}{Fa}}{\frac{1}{fa}}=\frac{0}{0}$, e por conseguinte

$$\frac{fa}{Fa}=\frac{\left(\frac{1}{Fa}\right)'}{\left(\frac{1}{fa}\right)'}=\frac{F'a}{f'a}\times\left(\frac{fa}{Fa}\right)^2;$$

ou tambem, simplificando (*), $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$.

Assim, para $x=a$, é $\dfrac{\dfrac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi x}{a}\right)}{x^2}}{\dfrac{x^2}{a(x^2-a^2)}}=\dfrac{\left(\frac{1}{Fa}\right)}{\left(\frac{1}{fa}\right)}=-\frac{4a}{\pi}$.

93. Reduz-se a estes casos o de ter Fx^{fx} a fórma indeterminada, por ser $fa=0$ e $Fa=\infty$, ou $fa=\infty$ e $Fa=1$, ou $fa=0$ e $Fa=0$. Porque é $Fx^{fx}=e^{fx\,l\,Fx}$; e nestas hypotheses $fx\,l\,Fx=\frac{fx}{\frac{1}{lFx}}=\frac{lFx}{\frac{1}{fx}}$ toma a uma das fórmas $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

(*) Se $\frac{fa}{Fa}$ for nulla, não o será $\frac{fa}{Fa}+C=\frac{fa+CFa}{Fa}=\frac{f'a+CF'a}{F'a}=\frac{f'a}{F'a}+C$; e portanto ainda teremos $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$. Se $\frac{fa}{Fa}$ for infinita, será nulla $\frac{Fa}{fa}=\frac{F'a}{f'a}$, e portanto infinita $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$. Assim, para $x=\infty$, sendo a positivo, é

$$\frac{a^x}{x}=\frac{f'}{F'}=\frac{a^x\log a}{1}=\infty.$$

Assim, por ser $x\,l\,x = \dfrac{lx}{\dfrac{1}{x}} = 0$ para $x = 0$, é $0^0 = e^0 = 1$. E, por ser $x\,l\dfrac{1}{x} = \dfrac{l\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = 0$ para $x = 0$, é $\infty^0 = e^0 = 1$.

94. Fórma $\infty - \infty$. Finalmente, se $x = a$ reduz $fx - \mathrm{F}x$ a $\infty - \infty$, tornando fx e $\mathrm{F}x$ infinitas, é

$$fa - \mathrm{F}a = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{F}a} - \dfrac{1}{fa}}{\dfrac{1}{\mathrm{F}a \times fa}} = \frac{0}{0} = \frac{\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}a} - \dfrac{1}{fa}\right)'}{\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}a \times fa}\right)'}.$$

Por exemplo, para $x = \dfrac{1}{2}\pi$, é

$$x \tang x - \frac{\pi}{2}\sec x = \frac{\dfrac{2\cos x}{\pi} - \dfrac{\cot x}{x}}{\dfrac{2}{\pi x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}}{\dfrac{2}{\pi x}\cot x} = -1.$$

95. O methodo exposto, fundado no que se disse no n.º 88, suppõe que são determinadas as derivadas de fx e $\mathrm{F}x$, para $x = a$; mas ha casos em que não tem isso logar. Por exemplo, $\dfrac{fx}{\mathrm{F}x} = \dfrac{x + \cos x}{x + \operatorname{sen} x}$ dá $\dfrac{f'x}{\mathrm{F}'x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$, onde são $f'x$ e $\mathrm{F}'x$ indeterminadas para $x = \infty$, em quanto que na mesma hypothese é

$$\frac{fx}{\mathrm{F}x} = \frac{1 + \dfrac{\cos x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Dos maximos e minimos

96. Funcções d'uma variavel. Seja $y = fx$.

Se, dando a x valores consecutivos, a funcção fx, sempre *crescente* ou sempre *decrescente* para os valores de x comprehendidos entre $x - \varepsilon$ e a, se tornar sempre *decrescente* ou sempre *crescente* para os comprehendidos entre a e $a + \varepsilon$, sendo ε tão pequeno quanto se quizer: o valor de y, correspondente ao de $x = a$, que separa os incrementos das diminuições, chama-se *maximo* no primeiro caso, e *minimo* no segundo.

Assim, sendo h uma quantidade muito pequena comprehendida entre 0 e ε, teremos respectivamente:

$$\text{Para} \qquad fa \left\{ \begin{matrix} \text{maxima} \\ \\ \text{minima} \end{matrix} \right\} \cdots\cdot \left\{ \begin{matrix} fa > f(a \pm h) \\ \\ fa < f(a \pm h) \end{matrix} \right\}.$$

E como na serie $f(a \pm h) - fa = \pm hf'a + \frac{1}{2}h^2 f''a \pm \ldots$ se pode sempre tomar h tão pequena que o signal do segundo membro seja o do seu primeiro termo, vê-se que, em quanto subsistir este termo, não pode haver maximo nem minimo.

Portanto, a condição de ser fa maxima ou minima exige que seja $f'a = 0$.

97. Satisfeita esta condição, a serie precedente torna-se em

$$f(a \pm h) = fa + \frac{1}{2}h^2 f''a \pm \ldots,$$

a qual mostra que fa será maxima quando $f''a$ for negativa, e será minima quando $f''a$ for positiva (*).

98. Se for tambem $f''a=0$, a serie

$$f(a \pm h) = fa \pm \frac{1}{2.3} h^3 f'''a + \frac{1}{2.3.4} f^{\text{IV}} a \pm \ldots,$$

feitos raciocinios similhantes, mostra que a condição, tanto do maximo como do minimo, exige que seja $f'''a=0$; e que, satisfeita ella, será fa maxima ou minima, segundo for $f^{\text{IV}} a$ negativa ou positiva.

Do mesmo modo proseguiremos quando se desvanecerem mais derivadas. E teremos a regra geral seguinte:

Achadas as raizes reaes da equação $f'x=0$, *substitua-se cada uma d'ellas por* x *em* $f''x$, $f'''x, \ldots$, *até apparecer uma derivada que não seja nulla. Se esta derivada for de ordem par e positiva, a raiz corresponderá a uma funcção* minima; *se for de ordem par e negativa, a raiz corresponderá a uma funcção* maxima; *e se for de ordem impar, não haverá maximo nem minimo.*

99. Exemplos:

I. $y=\sqrt{2px}$ dá $y'=\frac{p}{\sqrt{2px}}$; e porque nenhum valor finito de x anniquila y', a funcção y não tem maximo, nem minimo.

II. $y=b-(x-a)^2$ dá $y'=-2(x-a)$, $y''=-2$; logo $x=a$ corresponde a um maximo $y=b$; o que por outra parte é manifesto.

Pelo contrario $y=b+(x-a)^2$ dá um minimo.

(*) Pondo $a-h=a_1$ e $a+h=a'$, teremos

$$fa = fa_1 + hf'a_1 + \ldots, \quad fa = fa' - hf'a' + \ldots$$

Logo, para que fa seja maxima, devem ser $f'a_1$ positiva, e $f'a'$ negativa; e o contrario para que seja minima.

Poderemos pois tambem reconhecer se fa é maxima ou minina, examinando se $f'x$ muda de signal, passando, em $x=a$, de positiva a negativa, ou inversamente.

Em geral $y' = X(x-a)^n$ dá $y^{(n+1)} = n(n-1)\ldots 2.1\,X + K(x-a)$: por conseguinte, se n for impar, a raiz $x=a$ corresponderá a y maximo ou minimo, segundo fizer X negativo ou positivo.

III. De $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ tiram-se

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} - 2yy';$$

logo $x=1$ corresponde ao maximo $\frac{1}{2}$; e $x=-1$ corresponde ao minimo $-\frac{1}{2}$, ou ao maximo negativo.

IV. Dividir o numero a em duas partes taes que o producto da potencia do gráu m d'uma pela potencia do gráu n da outra seja o maximo.

Chamando x uma das partes, o producto proposto e as suas primeira e segunda derivadas são:

$$y = x^m(a-x)^n,\ y' = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - x(m+n)],$$

$$y'' = x^{m-2}(a-x)^{n-2}[(m+n-1)(m+n)\,x^2 - \ldots]:$$

logo $y'=0$ dá: $x=0$, para m não menor que 1; $x=a$, para n não menor que 1; e $x = \dfrac{ma}{m+n}$.

A ultima d'estas raizes corresponde ao maximo $m^m n^n \left(\dfrac{a}{m+n}\right)^{m+n}$; as outras correspondem ao minimo, quando m e n são respectivamente pares.

O mesmo se vê mais facilmente applicando a y' o que se disse na nota ao n.º 97.

Para dividir a em duas partes cujo producto seja o maximo, basta fazer $m=n=1$ nesta solução; o que dá $x=\frac{1}{2}a$, e o maximo $\frac{1}{4}a^2$.

V. Achar o numero x, cuja raiz do gráu x é maxima.

Temos $y=\sqrt[x]{x}$, $y'=y\frac{1-lx}{x^2}$; e por conseguinte $y'=0$ dá $lx=1$, ou $x=e=2{,}71828\ldots$, base dos logarithmos de Neper.

VI. Achar o numero x, que tem o maior excesso sobre a sua potencia do gráu m.

Temos $y=x-x^m$, $y'=0=1-mx^{m-1}$, $x=\sqrt[m-1]{\frac{1}{m}}$.

VII. Determinar as cordas supplementares da ellipse, que fazem entre si o maior angulo.

Chamando a, b, os semieixos, α a tangente do angulo que uma das cordas supplementares faz com o eixo maior, e θ o angulo d'essas cordas, deve ser maxima (*Geom. Anal.*, n.º 80) a funcção $\operatorname{tang}\theta=\frac{a^2\alpha^2+b^2}{\alpha(a^2-b^2)}$, ou, omittindo o factor constante do denominador, a funcção $y=a^2\alpha+\frac{b^2}{\alpha}$, que dá $y'=a^2-\frac{b^2}{\alpha^2}$, $y''=+\frac{2b^2}{\alpha^3}$. Logo o maximo, positivo ou negativo, corresponde a $\alpha=\pm\frac{b}{a}$, e as cordas pedidas concorrem em uma das extremidades do eixo menor. Por onde se vê que fazem entre si o maior angulo os diametros conjugados eguaes (*Geom. Anal.*, n.os 80, 4.º e 94, 3.º).

VIII. D'entre os triangulos de egual perimetro $2p$ ou *isoperimetros*, e da mesma base a, achar o que tem a maior superficie y.

Designando x e $2p-a-x$ os dois lados desconhecidos, a area

$$y=\sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)},$$

dá

$$\frac{2y'}{y}=-\frac{1}{p-x}+\frac{1}{a+x-p},\quad \frac{2(yy''-y'^2)}{y^2}=-\left(\frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(a+x-p)^2}\right).$$

Fazendo pois $y'=0$, será $x=p-\frac{1}{2}a$, e y'' negativa; e o maximo

$y=\frac{1}{2}a\sqrt{p(p-a)}$: e por ser o outro lado $2p-x-a=p-\frac{1}{2}a$, o triangulo pedido é isosceles.

Para achar a base a do triangulo cuja área é a maior das de todos os triangulos isosceles isoperimetros, isto é, para achar o valor de a correspondente ao maximo de $z=a^2(p-a)$, teremos

$$z'=2ap-3a^2=0,\quad z''=2p-6a,$$

que dão
$$a=\frac{2}{3}p,\quad z''=-2p.$$

Portanto, d'entre todos os triangulos isoperimetros, o equilatero é o de maior área.

E, em geral, o polygono equilatero é o de maior área d'entre todos os isoperimetros. Com effeito seja ABCDE (Fig. 2) o polygono maximo. Se AB não é egual a BC, construa-se o triangulo isosceles AIC tal, que seja $AI+IC=AB+BC$: será a área do triangulo AIC maior que a de ABC, e por conseguinte AICDE > ABCDE, o que é contra a hypothese.

IX. Achar o minimo de todos os triangulos construidos sobre uma base de grandeza dada $BC=a$ (Fig. 3), e circumscriptos ao circulo OF.

Sejam: o raio $OF=r$, $BF=BD=x$, o perimetro $=2p$, e conseguintemente $CF=CE=a-x$, $AE=AD=p-a$. Serão a, $p-x$, $p-a+x$ os tres lados; e $y=\sqrt{px(p-a)(a-x)}$ a área do triangulo, ou, por ser $p=\frac{y}{r}$, $\quad r^2y=x(y-ar)(a-x)$,

que dá
$$y=\frac{ar(x^2-ax)}{r^2-ax+x^2},\quad \frac{y'}{ar^3}=\frac{2x-a}{(r^2-ax+x^2)^2},$$

$$\frac{y''}{2ar^3}=\frac{1}{(r^2-ax+x^2)^2}-\frac{(2x-a)^2}{(r^2-ax+x^2)^3}.$$

Como $y'=0$ dá $x=\frac{1}{2}a$ e $y=\frac{a^3r}{a^2-4r^2}$, este valor de x satisfaz ao problema para $\frac{1}{2}a > r$; o ponto F é o meio de BC; e os outros dois lados são eguaes entre si e (*) a $\frac{a^3}{a^2-4r^2}-\frac{1}{2}a$.

X. Tomemos sobre os lados d'um quadrado ABCD (Fig. 4) as partes eguaes Aa, Bb, Cc, Dd: a figura $abcd$ será um quadrado. Com effeito: 1.° por serem eguaes os quatro triangulos dAa, aBb, bCc, cDd, que têm eguaes dois a dois os lados que comprehendem os angulos rectos A, B, C, D, é $abcd$ equilatero; 2.° por serem complementares os angulos Aad e Bab, é recto o angulo dab, assim como os outros b, c, d.

Posto isto, procuremos o menor de todos os quadrados y^2 assim inscriptos no quadrado dado.

Sendo $AB = m$, $Aa = x$, será $aB = m - x$; e do triangulo Aad tira-se $y^2 = 2x^2 - 2mx + m^2$, que, para $y' = 0$, dá $x = \frac{1}{2}m$, e y'' positiva. Portanto o ponto a está no meio de AB.

XI. D'entre os parallelipipedos rectangulos, eguaes em volume a um cubo dado a^3, e construidos sobre a mesma base b, achar o de menor superficie.

Chamando x e z as outras duas arestas, serão: $bxz = a^3$ o volume; e bx, $bz = \frac{a^3}{x}$, $xz = \frac{a^3}{b}$, as áreas d'estas faces. Pretende-se achar o minimo da área total, que é o dobro da somma d'aquellas tres,

$$y = \frac{2a^3}{b} + \frac{2a^3}{x} + 2bx:$$

o que dá $$y' = 2b - \frac{2a^3}{x^2} = 0, \ x = \sqrt{\frac{a^3}{b}} = z, \text{ e } y'' \text{ positiva.}$$

(*) Pondo $OA = t$, a figura (3) daria

$$AC^2 = t^2 + r^2 + 2rt + \frac{1}{4}a^2, \ AC = \frac{1}{2}a + \sqrt{t^2 - r^2},$$

entre as quaes, eliminando AC, resolvendo a resultante em ordem a t, usando do valor positivo e substituindo-o em AC, viria o mesmo valor $\frac{a^3}{a^2-4r^2}-\frac{1}{2}a$, que dá a substituição de $x = \frac{1}{2}a$ em $p - x$; como devia ser.

Se o lado b não é dado: chamando x cada um dos outros eguaes, $x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, a condição de ser minima a área total $\frac{2a^3}{b}+4a\sqrt{ab}$ dá $b=a$.

Logo, de todos os parallelipipedos rectangulos de egual volume, é o cubo o de minima superficie.

100. Se a equação é de fórma implicita, $f(x, y)=0$: derivando duas vezes, virão

$$\frac{df}{dx}+y'\frac{df}{dy}=0,\ \frac{d^2f}{dx^2}+2y'\frac{d^2f}{dxdy}+y''\frac{df}{dy}+y'^2\frac{d^2f}{dy^2}=0,$$

que a condição do minimo ou maximo, $y'=0$, reduz a

$$\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy}=0,\ \frac{d^2f}{dx^2}+y''\frac{df}{dy}=0.$$

A primeira d'estas e a proposta darão os valores de x e y; e depois a segunda mostrará, pelo signal de y'', se esses valores correspondem ao maximo de y, se ao minimo.

Assim, se a proposta é a equação d'uma curva (Fig. 5): para $x=\mathrm{A}p$, serão y'' negativa, e a ordenada $y=p\mathrm{O}$ maxima; para $x=\mathrm{A}p''$, serão y'' positiva, e a ordenada $y=p''\mathrm{O}''$ minima. Mas, se, em vez d'uma equação entre x e y, forem m as equações entre ellas e mais $m-1$ variaveis, a eliminação das derivadas d'estas variaveis entre as differenciaes das m equações em ordem a x dará $\frac{dy}{dx}$, e depois as differencias de segunda ordem darão $\frac{d^2y}{dx^2}$.

E se a condição do maximo ou minimo se referir, não a uma variavel y, mas a uma funcção, $u=\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$, de m variaveis ligadas entre si por

$m-1$ equações, accrescentaremos a estas a equação $u-\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)=0$; e acharemos, como fica dito, o maximo ou o minimo da variavel u.

Exemplos:

I. De $y^2-2mxy+x^2=a^2$ tiram-se $y'=\dfrac{my-x}{y-mx}$, $y''=\dfrac{2my'-y'^2-1}{y-mx}$; e eliminando entre $y'=0$, ou $my-x=0$, e a proposta, acha-se

$$x=\frac{\pm ma}{\sqrt{1-m^2}},\ y=\frac{\pm a}{\sqrt{1-m^2}},\ y''=\frac{\mp 1}{a\sqrt{1-m^2}}.$$

Ha pois um maximo e um minimo.

II. A equação do *folium* de Descartes, $x^3-3axy+y^3=0$, dá $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}=0$, $(y^2-ax)\,y''+2x=0$; e combinando $ay-x^2=0$ com a proposta, resultam os pontos $(x=a\sqrt[3]{2},\ y=a\sqrt[3]{4})$, $(x=0, y=0)$.

Para o primeiro d'estes pontos, é $y''=-\dfrac{2}{a}$; por conseguinte a ordenada será maxima ou minima, segundo for a positiva ou negativa.

Para o segundo, apparece y' debaixo da fórma $\dfrac{0}{0}$; mas as derivadas segunda e terceira da proposta darão $y'=0$, $y''=\dfrac{2}{3a}$; sendo por conseguinte a ordenada minima ou maxima, segundo for a positiva ou negativa.

101. Qando o desenvolvimento de $f(a\pm h)$ pelo theorema de Taylor for defeituoso nos termos a que é necessario recorrer para achar os maximos e minimos, procuraremos o verdadeiro desenvolvimento (n.º 60), e examinaremos se com effeito $f(a+h)$ e $f(a-h)$ são ambos maiores ou ambos menores que fa.

Exemplos:

I. $y=b+(x-a)^{\frac{5}{3}}$ dá $y'=\frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}$, $y''=\frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}$; e como de $y'=0$ resulta $x=a$, que torna y'' infinita, a fórmula de Taylor é deficiente. Mas, pondo $x=a\pm h$, vem $f(a\pm h)=b\pm h^{\frac{5}{3}}$; por onde se vê que não ha maximo nem minimo.

II. De $y=b+(x-a)^{\frac{4}{3}}$ tira-se $f(a\pm h)=b+h^{\frac{4}{3}}$; por conseguinte $x=a$ corresponde a um minimo.

III. Para $y=b-(x-a)^{\frac{4}{3}}$ achar-se-hia um maximo.

102 Funcções de duas variaveis. Seja $z=f(x,y)$.

Mudando x e y em $x\pm h$ e $y\pm k$, e desenvolvendo, resulta

$$Z=z\pm h\left(\frac{dz}{dx}+\frac{k}{h}\,\frac{dz}{dy}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{k}{h}\,\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{k^2}{h^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}\right)+\ldots$$

Para que, entre limites muito pequenos de h e k, seja sempre $Z>z$, ou sempre $Z<z$, é necessario que o segundo termo seja nullo; e porque $\frac{k}{h}$ é arbitraria, esta condição exige as duas

$$\frac{dz}{dx}=0,\ \frac{dz}{dy}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Quando as condições (1) se verificarem, a funcção correspondente z será maxima se for negativo o terceiro termo, e minima se for positivo. Mas, quando não se verificarem, não haverá maximo nem minimo.

Eliminando pois x e y entre as equações (1), cujas raizes são as que podem convir ao maximo ou ao minimo, é necessario que, substituindo estas raizes no polynomio $h^2\frac{d^2z}{dx^2}+2hk\frac{d^2z}{dxdy}+k^2\frac{d^2z}{dy^2}$, o resultado da substituição tenha sempre o mesmo signal, quaesquer que sejam os valores e signaes que se attribuam a $\frac{k}{h}$. Ora a quantidade

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{k^2}{A}\left[\left(A\frac{h}{k} + B\right)^2 + AC - B^2\right]$$

não conservará, para $\frac{k}{h}$ qualquer, o mesmo signal, que será o de A, senão quando forem A e C ambos positivos ou ambos negativos, e $AC - B^2 > 0$.

Portanto, se as tres derivadas da segunda ordem satisfizerem á condição

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

haverá maximo ou minimo, segundo forem $\frac{d^2z}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dy^2}$ ambos negativos ou ambos positivos.

No caso de ser $B^2 = AC$, ainda o trinomio $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ será em geral positivo ou negativo, segundo o for A. Nesse caso o trinomio anni-quilar-se-ha para $\frac{h}{k} = -\frac{B}{A}$; mas, se então este valor de $\frac{h}{k}$ anniquilar tambem os termos da terceira ordem, e der aos da quarta o signal de A, subsistirá a mesma regra, qualquer que seja o valor de $\frac{h}{k}$.

Quando as raizes das equações (1) tornarem tambem nullos os tres coefficientes differenciaes da segunda ordem, será necessario, para haver maximo ou minimo, que os da terceira ordem sejam egualmente nullos, e que os da quarta ordem dêem sempre o mesmo signal. E assim por diante.

103. Exemplo: Achar a recta de mais curta distancia entre duas rectas dadas.

Tomando uma das rectas dadas para eixo dos x, as equações da outra serão

$$z = ax + \alpha,\quad y = bx + \beta.$$

E chamando R a distancia de qualquer ponto da segunda a qualquer ponto da primeira correspondente á abscissa x', será

$$R^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2 = (x - x')^2 + (bx + \beta)^2 + (ax + \alpha)^2 = t;$$

da qual se tiram

$$\frac{dt}{dx} = 2[x - x' + b(bx + \beta) + a(ax + \alpha)],\quad \frac{dt}{dx'} = -2(x - x'),$$

que, egualando $\frac{dt}{dx}$ e $\frac{dt}{dx'}$ a zero, dão $x = x' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}$.

Por ser $x = x'$, a recta procurada é perpendicular ao eixo dos x; e como se podia tomar a outra recta dada para eixo dos x, a procurada tambem é perpendicular a ella, como já sabiamos (*).

(*) Pode tambem mostrar-se, sem recorrer á mudança d'eixos, que a minima distancia é perpendicular á segunda recta. Com effeito, ás equações d'esta recta pode dar-se a fórma $x = mz + p$, $y = nz + q$, sendo $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{b}{a}$; e as equações da minima distancia, que passa pelos pontos $\left(x' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2},\ y' = 0,\ z' = 0\right)$ e $\left(x'' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2},\ y'' = bx + \beta = \frac{a(a\beta - b\alpha)}{a^2 + b^2},\ z'' = -\frac{b(a\beta - b\alpha)}{a^2 + b^2}\right)$, têm a fórma $x = m'z + p'$, $y = n'z + q'$, sendo $m' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'} = 0$, $n' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'} = -\frac{a}{b}$; por tanto é $nn' + 1 = 0$, condição de perpendicularidade das projecções sobre o plano dos yz; e por ser tambem $m' = 0$, a fórmula (*Geom. An.* n.° 178, eq. 12)

$$\cos A = \frac{1 + mm' + nn'}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m'^2 + n'^2)}}$$

dá $\cos A = 0$.

Como a substituição d'estes valores de x e x' dá

$$\frac{d^2t}{dx^2}=2(1+a^2+b^2),\ \frac{d^2t}{dx'^2}=2,\ \frac{d^2t}{dxdx'}=-2,$$

dos quaes os primeiros são positivos, e que satisfazem á equação (2) por ser $4(a^2+b^2)>0$, é minima a distancia correspondente, $R=\frac{a\beta-b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

104. Funcções de muitas variaveis. Discorrendo d'um modo similhante no caso de haver tres variaveis independentes, acha-se que devem ser nullos os tres coefficientes differenciaes da primeira ordem, e conservar sempre o mesmo signal a somma dos termos da segunda ordem, quaesquer que sejam as grandezas e os signaes das relações entre os augmentos das tres variaveis. E assim por diante (Vid. o *Calc.* de Navier, n.º 150).

A expressão, que deve conservar o mesmo signal, é

$$h^2\frac{d^2z}{dx^2}+2h\,\Sigma k_i\frac{d^2z}{dxdy_i}+2\,\Sigma k_i k_{i'}\frac{d^2z}{dy_i\,dy_{i'}}+\Sigma k_i^2\frac{d^2z}{dy_i{}^2},$$

na qual os sommatorios Σ se referem ás variaveis independentes $y_1, y_2, \ldots$ e aos augmentos respectivos $k_1, k_2, \ldots$

Dando a esta expressão a fórma $Ah^2+2hB+C$, vê-se, como no n.º 102, que deve verificar-se a condição

$$AC-B^2>0.$$

A funcção $AC-B^2$ é homogenea do segundo gráu, como era $Ah^2+2Bh+C$, relativamente aos augmentos; mas tem de menos a variavel h. Poderemos pois estabelecer a condição de ser ella positiva, como fizemos a respeito da primeira, dando-lhe a fórma $A_1 k_1^2+2k_1 B_1+C_1$; o que nos conduzirá a outra funcção homogenea com menos o augmento k_1. E assim por diante (*Calc.* de Serret, n.º 153).

Methodo das tangentes

105. Chamando: X, Y, as coordenadas correntes da tangente á curva plana BMM′ (Fig. 1) no ponto M; x, y, as coordenadas d'este ponto; e α o angulo que faz a mesma recta com o eixo das abscissas: a equação da tangente é

$$Y-y=\text{tang}\,\alpha.\,(X-x).$$

I. Sendo $y=fx$ a equação da curva, a sua derivada é $y'=f'x=\text{tang}\,\alpha$; principio em que se fundou a existencia das derivadas de todas as funcções d'uma variavel x, e todo o calculo differencial.

A equação da tangente é pois $\quad Y-y=y'(X-x).$

II. E a equação da normal $\quad (Y-y)\,y'+X-x=0,$

por ser a normal perpendicular á tangente (*Geom. Anal.* n.º 31, 2.º).

III. Fazendo $Y=0$ nas equações da tangente e da normal, resultam as abscissas AT e AN das intersecções d'aquellas rectas com o eixo dos x, isto é, as abscissas dos pés da tangente e da normal; por onde teremos os $x-X$ e $X-x$ correspondentes,

$$\text{Subt. TP}=\frac{y}{y'},\ \text{subnorm. PN}=yy'.$$

Quando estes valores sairem negativos, as linhas respectivas terão posições contrarias ás que suppõe a figura da qual agora se deduziram; mas bastará examinar se o signal — provém de y, ou se provém de y', para conhecer facilmente a situação d'ellas.

IV. Os triangulos PMT e PMN dão

$$\text{tang. MT} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},\ \text{norm. MN} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

V. Applicando o raciocinio já empregado (*Geom. Anal.*, n.º 73) ao caso de ser qualquer o angulo θ das coordenadas, ver-se-ha que ficam as mesmas a equação da tangente e a expressão da subtangente.

Mas, por ser (*Geom. Anal.* n.º 31, not. eq. 7)

$$a' = -\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta} = -\frac{1+y'\cos\theta}{y'+\cos\theta},$$

a equação da normal é $$Y - y = -\frac{1+y'\cos\theta}{y'+\cos\theta}(X-x),$$

ou $$y'[Y-y+(X-x)\cos\theta]+(Y-y)\cos\theta+X-x=0.$$

VI. Se a equação da curva for implicita, $f(x,y)=0$, o que dá $y' = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$, a equação da tangente será

$$(Y-y)\frac{df}{dy}+(X-x)\frac{df}{dx}=0.$$

106. Exemplos:

I. Na parabola são $y^2=2px$, $yy'=p$, $\frac{y}{y'}=2x$, $\text{MN}=\sqrt{2px+p^2}$.

II. Na ellipse e na hyperbole, pondo norm. $=$ N e $c^2 = a^2 \mp b^2$, são

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,\ y' = \pm \frac{b^2x}{a^2y},\ \mathrm{N} = \frac{b\sqrt{\pm(a^4 - c^2x^2)}}{a^2}\ (*).$$

III. A equação $y^m = a^{m-n}x^n$ dá $\dfrac{y}{y'} = \dfrac{mx}{n}$.

Por ser a parabola um caso particular d'estas curvas, a equação d'ellas se diz a geral das *parabolas*, quando m e n são positivos. A equação da *primeira parabola cubica* é $y^2 = a^2x$; a da *segunda parabola cubica* é $y^3 = ax^2$.

A equação $x^n y^m = a^{m+n}$, que se chama a geral das *hyperboles*, dá a mesma expressão da subtangente que a das parabolas, mas com signal contrario, $\dfrac{y}{y'} = -\dfrac{mx}{n}$.

IV. A equação do *folium*, $x^3 - axy + y^3 = 0$,

dá $$\text{subt.} = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2},\ \text{etc.}$$

V. A equação da logarithmica, $y = a^x$, dá a subtangente $\dfrac{y}{y'} = \dfrac{1}{la} =$ *modulo* (*Alg. Sup.*, n.º 154).

(*) Chamando: δ, δ' os raios vectores d'um ponto M da ellipse; t o angulo que a tangente faz com um d'elles; e p a perpendicular abaixada do respectivo foco sobre ella: é (*Geom. Anal.*, n.^{os} 83, 51)

$$\cot t = \frac{cy}{b^2},\ \operatorname{sen} t = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + c^2y^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - c^2 + c^2\dfrac{a^2 - x^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}},$$

$$p = \delta \operatorname{sen} t = b\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}},\ \mathrm{N} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'}.$$

..

VI. Sendo (Fig. 6) $AP = x$, $PM = y$, $MQ = z = \sqrt{2ry - y^2}$, e tomando o arc (sen $= z$) no circulo gerador MGD, cujo raio é r, a equação da cycloide AMF é

$$x = \text{arc}\,(\text{sen} = z) - z,$$

contando o arco desde D.

Derivando as expressões de x e z, o que dá

$$1 = \frac{rz'}{\sqrt{r^2 - z^2}} - z', \quad z' = \frac{(r-y)\,y'}{\sqrt{2ry - y^2}},$$

e eliminando z e z', resulta a derivada da cycloide

$$yy' = \sqrt{2ry - y^2}, \text{ ou } y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)}.$$

O valor da subnormal, $yy' = \sqrt{2ry - y^2} = z = MQ = TD$, mostra que a recta MD, tirada do ponto M para o ponto D de contacto do circulo gerador com o eixo AE, é a normal, e que a corda MD é a sua grandeza. E com effeito, da equação derivada tira-se o valor da normal $y\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{2ry} =$ corda MD.

A corda supplementar MG é a tangente. Portanto, se pelo ponto M tirarmos MN parallela ao eixo AE, depois a corda KF, e finalmente MG parallela a KF, será esta a direcção da tangente.

Se mudarmos a origem das coordenadas de A para o ponto mais alto F, fazendo $FS = u = \pi r - x$, $MS = t = 2r - y$, a equação da cycloide referida a estes novos eixos, e a sua derivada, serão

$$u = \text{arc}\,(\text{sen} = z) + z, \quad t' = \sqrt{\left(\frac{t}{2r - t}\right)},$$

contando o arco desde G.

107. As mesmas fórmulas podem servir para resolver muitos problemas relativos ás tangentes, taes como os de tiral-as por um ponto exterior, parallelamente a uma recta dada, etc. (Vej. *Geom. Anal.*, n.os 78 e 84).

Para determinar, por exemplo, o angulo β que faz a tangente MT (Fig. 7) com o raio vector AM tirado da origem para o ponto de contacto M (x, y): chamando θ e α os angulos do raio vector e da tangente com o eixo dos x, temos

$$\tang\theta = \frac{y}{x},\ \tang\alpha = y',\ \tang(\theta - \alpha) = \tang\beta = \frac{y - y'x}{x + y'y}.$$

Assim a equação do circulo $x^2 + y^2 = r^2$ dá $\tang\beta = \infty$; como devia dar.

108. Quando a curva BM (Fig. 7) está referida a coordenadas polares $AM = r$, $MAP = \theta$, as fórmulas precedentes não podem applicar-se immediatamente á sua equação, $r = f\theta$. É pois mister: ou transformar esta equação em x e y, por meio das relações $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $x^2 + y^2 = r^2$; ou, inversamente, transformar em r e θ as expressões precedentes da tangente, da normal, etc., e applical-as depois á equação da curva.

Assim, tomando θ para variavel principal em logar de x, a transformação, que já se fez (n.° 49), dá

$$\tang\beta = -\frac{r}{r'}.$$

109. Nas coordenadas polares chama-se *subtangente* a parte AT que a tangente á curva intercepta na perpendicular ao raio vector AM. Nesta accepção, por dar $AT = r\tang\beta$ o triangulo TAM, é

$$\text{Subt. } AT = \pm\frac{r^2}{r'};$$

adoptando aquelle dos signaes $\pm$ que fizer a expressão positiva.

Exemplos. I. Na spiral d'Archimedes (Fig. 8) é (*Geom. Anal.* n.° 137)

$$r = \frac{a\theta}{2\pi},\ \frac{r^2}{r'} = \theta r,\ \frac{r}{r'} = \tang(\alpha - \theta) = \tang\beta = \theta.$$

Por onde se vê que nesta curva a subtangente é egual em grandeza ao arco de circulo, descripto com o raio vector $AM=r$, que subtende o angulo $MAx=\theta$. O angulo β cresce com o arco θ; e como $2n\pi+\theta$ sómente se torna infinito depois de infinitas revoluções, vê-se que o angulo recto é o limite de β.

II. Na spiral hyperbolica (Fig. 106 da *Geom. Anal.*) é

$$r=\frac{a}{\theta},\ \text{subt.}=a,\ -\frac{r}{r'}=\text{tang}\,(\theta-\alpha)=\text{tang}\,\beta=\theta.$$

Assim θ, β e $CD-MN$ (*Geom. Anal.*, n.º 137) tendem indefinidamente para zero quando r tende para o infinito; e por isso a direcção da tangente tende indefinidamente para coincidir com a de ED, e o ponto de contacto para estar em ED.

A subtangente é pois constante; a asymptota é o limite de todas as tangentes; e o angulo do raio vector com a tangente é agudo, e cresce á medida que θ augmenta, tendo por limite o angulo recto na origem em que é $2\pi n+\theta$ infinito.

III. Na spiral logarithmica (*Geom. Anal.*, n.º 137) temos

$$r=a^{\theta},\ \text{tang}\,(\alpha-\theta)=\text{tang}\,\beta=\frac{1}{la},\ \text{subt.}=\frac{r}{la}.$$

Portanto, a curva corta todos os seus raios vectores debaixo do mesmo angulo β, que é de 45° quando a é a base dos logarithmos neperianos. A subtangente cresce proporcionalmente ao raio vector.

Nas equações d'estas tres curvas, quando θ passar de 2π, deverá substituir-se por elle $2n\pi+\theta$, como fizemos.

Rectificações e quadraturas

110. Rectificações. Seja $y = fx$ .... (1)

a equação d'uma curva BMM′ (Fig. 1); e $BM = s$ um arco d'ella comprehendido entre os dois pontos B e $M(x, y)$.

Supposto fixo o ponto B, a grandeza de s variará com a posição do ponto M, e será uma funcção $s = Fx$ da sua abscissa.

Dando a x um augmento $PP' = h$, tal que o arco MM′ volte sempre a concavidade para o mesmo lado, os augmentos $M'Q = k$ de y, e $MM' = l$ de s serão

$$k = f(x+h) - fx = y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \ldots, \quad l = F(x+h) - Fx = s'h + \frac{1}{2} s''h^2 + \ldots,$$

$$\text{corda } MM' = \sqrt{h^2 + k^2} = h\sqrt{1 + y'^2 + y'y''h + \ldots}$$

E como são $QH = y'h$, $MH = h\sqrt{1 + y'^2}$, $M'H = QH - k = -\frac{1}{2} y''h^2 - \ldots$,

teremos
$$\frac{\text{corda } MM'}{MH + M'H} = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + y'y''h + \ldots\ldots}}{\sqrt{1 + y'^2 - \frac{1}{2} y''h - \ldots}}.$$

Porque o segundo membro d'esta equação se approxima indefinidamente da unidade ao passo que h decresce, o seu limite é 1. E porque o arco

MM′ fica sempre comprehendido entre a corda MM e a linha quebrada MH + M′H, tambem é 1 o limite da razão entre a corda e o arco,

$$1 = \lim. \frac{\text{corda MM}'}{\text{arco MM}'} = \lim. \frac{\sqrt{1 + y'^2 + y'y''h + \ldots}}{\sqrt{s' + \frac{1}{2}s''h + \ldots\ldots}} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{s'}.$$

Assim é $$s' = \sqrt{1 + y'^2}, \text{ ou } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots\ldots\ldots (2);$$

ou, traduzindo em coordenadas polares,

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)'.$$

Estas fórmulas servem para rectificar os arcos de curvas planas. Substituindo em (2) em logar de y' o seu valor $f'x$ tirado de (1), forma-se a derivada do arco, $s' = Fx$; e d'esta se reverterá para a sua primitiva, $s = Fx$, pelas regras que hão de ensinar-se no *Calculo integral*.

Por exemplo, da equação do circulo, $x^2 + y^2 = r^2$, tiram-se

$$yy' + x = 0, \; s' = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \pm \frac{r}{y} = \pm \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

derivada s' do arco de circulo s expressa no seu seno ou no seu coseno.

111. Por meio da expressão de s', as expressões de $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, e as fórmulas do n.º 105 podem tomar as fórmas mais simples,

$$\operatorname{tang}\alpha = y' = \frac{dy}{dx}, \; \cos\alpha = \frac{1}{s'} = \frac{dx}{ds}, \; \operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\text{tangente} = \frac{ys'}{y'} = y\frac{ds}{dy}, \; \text{normal} = ys' = y\frac{ds}{dx}.$$

112. Quadraturas. Seja $t = \varphi x$ a área BCPM comprehendida entre as ordenadas dos pontos B e M, o eixo das abscissas e a curva. Mudando x em $x + h$, os augmentos correspondentes, k de y e i de t, serão

$$k = y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \ldots, \quad i = t'h + \frac{1}{2} t''h^2 + \ldots$$

E como a razão $\frac{y}{y+k}$ dos rectangulos $MPP'Q = yh$, $DPP'M' = (y+k)h$, tem por limite 1, é 1 o limite da razão $\frac{MPP'Q}{MPP'M'} = \frac{y}{t' + \frac{1}{2} t''h + \ldots}$;

isto é, $$t' = y, \text{ ou } dt = ydx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Portanto, para ter a área t, substituir-se-ha em logar de y o seu valor tirado de (1), e reverter-se-ha da equação derivada $t' = fx$ ou $dy = fxdx$, para a sua primitiva.

Se o angulo das coordenadas for α, será $t' = y \operatorname{sen} \alpha$.

113. A área $MAK = \sigma$ (Fig. 7), comprehendida entre o raio vector fixo AK e o variavel AM, é

$$\sigma = ABMK - (ABMP - AMP) = ABMK - t + \frac{1}{2} xy.$$

Se, para tomar a derivada de σ, fizermos variar o ponto M, ficará ABMK constante, por não mudarem os pontos B e K; e teremos

$$\sigma' = -t' + \frac{xy' + y}{2} = \frac{xy' - y}{2}, \text{ ou } d\sigma = \frac{xdy - ydx}{2},$$

ou, em coordenadas polares,

$$d\sigma = \frac{1}{2} r^2 d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)'.$$

114. As fórmula $(2)'$ e $(4)'$, tambem se podem achar directamente.

Chamando $\Delta\theta$ o augmento de θ, e Δs e Δr os correspondentes de s e r, é

$$\frac{\text{corda MM}'}{\text{arco MM}'}=\frac{\sqrt{r^2+(r+\Delta r)^2-2r(r+\Delta r)\cos\Delta\theta}}{s'\Delta\theta+\frac{1}{2}s''\Delta\theta^2+\ldots\ldots}=\frac{\sqrt{\Delta r^2+r(r+\Delta r)\Delta\theta^2-\ldots}}{s'\Delta\theta+\frac{1}{2}s''\Delta\theta^2+\ldots\ldots},$$

ou, passando ao limite,
$$1=\frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{s'}.$$

A superficie está comprehendida entre os sectores de circulo $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ e $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$, cuja razão $\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^2$ tem 1 por limite. Portanto, é tambem 1 o limite de

$$\frac{\text{superf.}}{\text{sect. circ.}}=\frac{\sigma'\Delta\theta+\frac{1}{2}\sigma''\Delta\theta^2+\ldots}{\frac{1}{2}r^2\Delta\theta},\ \text{isto é,}\ 1=\frac{\sigma'}{\frac{1}{2}r^2}.$$

(R. G. Osorio, *Instituto* de Coimbra, t. 3.º, pag. 323.)

Das osculações

115. Sejam $$y = fx,\ \mathrm{Y} = \mathrm{F}x,$$

as equações de duas curvas planas.

Para seguir o curso d'estas curvas, mudemos x em $x+h$ nas expressões de y e Y: as ordenadas correspondentes serão

$$y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \ldots,\quad \mathrm{Y} + \mathrm{Y}'h + \frac{1}{2}\mathrm{Y}''h^2 + \ldots.$$

Se as curvas se cortam no ponto correspondente á abscissa X, é $y = \mathrm{Y}$ para $x = \mathrm{X}$; e a distancia dos pontos d'ellas correspondentes á abscissa $\mathrm{X}+h$ é

$$\delta = (y' - \mathrm{Y}')h + \frac{1}{2}(y'' - \mathrm{Y}'')h^2 + \ldots$$

Por conseguinte o gráu de approximação das duas curvas depende da pequenez de δ em uma curta e determinada extensão de h.

Se para $x = \mathrm{X}$ não é sómente $y = \mathrm{Y}$, mas ainda $y' = \mathrm{Y}'$, a distancia dos pontos das duas curvas correspondentes á abscissa $\mathrm{X}+h$ é

$$\delta = \frac{1}{2}(y'' - \mathrm{Y}'')h^2 + \frac{1}{6}(y''' - \mathrm{Y}''')h^3 + \ldots.$$

Então as curvas, nas visinhanças do ponto commum, approximam-se mais uma da outra do que se approximaria uma terceira curva, que passasse pelo mesmo ponto, mas que não satisfizesse á condição de serem eguaes as derivadas da primeira ordem. Com effeito a distancia entre os pontos d'esta terceira curva, cuja equação seja $\gamma = \varphi x$, e da primeira, correspondentes á mesma abscissa $X + h$, será

$$\Delta = (\gamma' - y')\,h + \frac{1}{2}(\gamma'' - y'')\,h^2 + \ldots;$$

na qual poderá tomar-se h tão pequeno, que seja $\Delta > \delta$ (n.º 62), tendo esta desegualdade logar não só para esse valor senão tambem para os outros menores que elle: por conseguinte, em toda a extensão de h, d'uma e d'outra parte do ponto commum, a curva, cuja equação é $Y = Fx$, approxima-se mais de $y = fx$ do que a terceira $\gamma = \varphi x$.

Se, além de $y = Y$ e $y' = Y'$, for tambem $y'' = Y''$, ver-se-ha que as duas curvas se approximam uma da outra, nos pontos visinhos da sua intersecção, mais do que qualquer outra que não satisfaça ás mesmas condições. E assim por diante.

116. Quando duas linhas satisfazem sómente ás condições $y = Y$, $y' = Y'$, para a mesma abscissa $x = X$, diz-se que entre ellas ha um *contacto de primeira ordem,* ou que são tangentes uma á outra. Quando satisfazem ás condições $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$, ha um *contacto de segunda ordem;* e assim por diante. E fica demonstrado que, se duas curvas têm um contacto de certa ordem, approximam-se uma da outra, nas visinhanças do ponto commum, mais do que se approximaria qualquer outra que só tivesse com ellas um contacto de ordem inferior.

D'onde resulta que, se as equações de duas curvas, $y = fx$, $Y = Fx$, tiverem $n + 1$ constantes arbitrarias, poderemos dispôr d'estas constantes para tornar eguaes as ordenadas correspondentes a um dado ponto e as suas n primeiras derivadas; ficando assim determinadas a situação e as dimensões das curvas de modo que ellas tenham, no ponto de que se tracta, um contacto da ordem n.

117. Tangente. Appliquemos estes principios á linha recta.

Seja a equação d'uma curva $\qquad y = fx.$

Para determinar uma recta, $Y = aX + b$, que tenha com ella um contacto da primeira ordem no ponto cuja abscissa é x_1, formaremos as equações $y_1 = ax_1 + b$, $y' = a$, por meio das quaes, eliminando os parametros, resulta a equação do n.º 105 da recta procurada,

$$y_1 - Y = y'(x_1 - X).$$

Como os parametros se determinaram todos pelas condições propostas, este contacto é o mais intimo que se pode estabelecer entre a curva e uma recta. Por onde se vê que a tangente tem a propriedade de não passar, pelo ponto de contacto, entre ella e a curva nenhuma outra recta.

118. Circulo osculador. Raciocinemos d'um modo similhante a respeito do circulo osculador.

Das equações da curva proposta e d'este circulo,

$$y = fx, \quad (X - b)^2 + (X - a)^2 = R^2,$$

na segunda das quaes a e b designam as coordenadas do centro e R o raio, tiram-se as derivadas

$$y' = f'x, \; y'' = f''x, \; (Y - b)Y' + (X - a) = 0, \; (Y - b)Y'' + Y'^2 + 1 = 0.$$

Imprimindo pois nestas as tres condições $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$, resultam

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = R^2, \; (y - b)y' + x - a = 0, \; (y - b)y'' + y'^2 + 1 = 0 \ldots (1).$$

As duas primeiras das equações (1) pertencem ao contacto de primeira ordem, sendo a segunda a equação da normal, entre as coordenadas correntes a e b: por conseguinte ha uma infinidade de circulos, que tocam a curva, e cujos centros estão todos na normal. Mas um d'esses circulos tem com a curva o contacto mais intimo: é o que satisfaz tambem á terceira equação (1).

Vê-se com effeito que, d'entre os circulos descriptos com differentes raios, tomados sobre a normal a partir do ponto M d'uma curva, uns são exteriores, outros interiores, á curva, e que na passagem de interiores para exteriores deve haver um mais proximo d'ella que os outros.

As equações (1) dão as coordenadas do centro do circulo osculador e o raio:

$$\left.\begin{aligned} a&=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\frac{y's'^2}{y''},\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{s'^2}{y''},\\ R&=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm\frac{s'^3}{y''}.\end{aligned}\right\}\ldots(2).$$

Para que R seja sempre positivo, como deve ser, toma-se o signal $\pm$ segundo é y'' positivo ou negativo, isto é, segundo volta a curva a convexidade ou a concavidade para o eixo dos x. Em quanto a a e b, é facil ver, pela combinação dos signaes de y' e y'', e pelos signaes das differenças correspondentes $x-a$ e $y-b$, que o centro está sempre collocado da parte da concavidade.

119. Para mudar de variavel independente nas expressões de a, b e R, generalisaremos esta variavel conforme o que se disse nos n.[os] 46 e 47, o que dará

$$\left.\begin{aligned} a&=x-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}=x-\frac{s'^2y'}{x'y''-y'x''},\\ b&=y+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}=y+\frac{s'^2x'}{x'y''-y'x''},\\ R&=\pm\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'-y'x''}=\pm\frac{s'^3}{x'y''-y'x''}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(2)';$$

e depois tomaremos como independente a variavel que quizermos.

Querendo, por exemplo, tomar o arco s por variavel principal, ou fazer $x'^2+y'^2=s'^2=1$, acharemos

$$\left.\begin{aligned} a&=x+\frac{x'y'}{y''}=x-\frac{y'^2}{x''},\quad b=y+\frac{x'^2}{y''}=y-\frac{x'y'}{x''},\\ R&=\pm\frac{x'}{y''}=\mp\frac{y'}{x''}.\end{aligned}\right\}\ldots(2)''.$$

120. Se as coordenadas são polares, $AM = r$, $MAP = \theta$, (Fig. 7), exprimiremos x e y em funcção d'ellas; e depois substituiremos estas expressões, e as suas derivadas, nas de a, b, R.

Assim, tomando θ por variavel principal, teremos (n.º 49)

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\theta - \frac{(r'\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta)(r'^2+r^2)}{r^2+2r'^2-rr''}, \\ b &= r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{(r'\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta)(r'^2+r^2)}{r^2+2r'^2-rr''}, \\ \mathrm{R} &= \frac{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''} = \frac{s'^3}{r^2+2r'^2-rr''} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(2)'''.$$

121. CURVATURA; ANGULO DE CONTINGENCIA. Sejam α, α', os angulos que fazem com o eixo das abscissas as tangentes nos pontos (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, e $\alpha' - \alpha = \Delta\alpha$.

Quanto mais for variando a direcção da tangente a partir do ponto $M(x, y)$, tanto maior será a curvatura neste ponto. O limite para o qual tende a relação $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ quando Δx tende para zero, e que vamos procurar, é proprio para avaliar esta curvatura.

De $$\mathrm{tang}\,\alpha = y',\ \mathrm{tang}\,\alpha' = y' + y''\Delta x + \frac{1}{2}y'''\Delta x^2 + \ldots.$$

tira-se $$\mathrm{tang}\,\Delta\alpha = \frac{y''\Delta x + \frac{1}{2}y'''\Delta x^2 + \ldots..}{1+y'^2+y'y''\Delta x + \ldots..},$$

e portanto $$\frac{\mathrm{tang}\,\Delta\alpha}{\mathrm{corda}} = \frac{y'' + \frac{1}{2}y'''\Delta x + \ldots...}{(1+y'^2+y'y''\Delta x+\ldots)\sqrt{1+y'^2+y'y''\Delta x+\ldots}}.$$

Mas é $\quad \lim. \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim. \frac{\Delta\alpha}{\operatorname{tang} \Delta\alpha} \times \lim. \frac{\text{corda}}{\Delta s} \times \lim. \frac{\operatorname{tang} \Delta\alpha}{\text{corda}};$

cujos dois primeiros factores têm por limite a unidade: logo a medida da curvatura é

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R},$$

inversamente proporcional ao raio de curvatura.

Por isso tambem se chama *raio de curvatura* o raio R do circulo osculador; e *centro de curvatura* o centro d'este circulo.

Chama-se *angulo de contingencia* o angulo $\qquad d\alpha = \frac{ds}{R} \ldots\ldots (3).$

122. Evoluta. Para cada ponto (x, y) ha um centro de curvatura (a, b); e a reunião de todos estes centros fórma a curva que se chama *evoluta.*

A equação, $b = \varphi a$, da evoluta, a respeito da qual a proposta é a *evolvente,* obter-se-ia eliminando x e y entre as duas primeiras equações (1) e a equação da evolvente, $y = fx$; isto é, substituindo naquellas as expressões de y, y', y'', tiradas d'esta em funcção de x, e eliminando depois x.

Differenciando totalmente a segunda das equações (1), vem

$$(y-b)\,y'' + y'^2 - a' + 1 = 0,$$

que a terceira reduz a $\qquad b'y' + a' = 0;$

e como a tangente trigonometrica do angulo que a tangente á evoluta faz com o eixo dos x, seria $\varphi' a' = \frac{b'}{a'} = \frac{db}{da}$, vê-se que é $y'\varphi' a + 1 = 0$, isto é, que *a tangente á evoluta é normal á evolvente,* ou o raio de curvatura tangente á evoluta.

123. Derivando totalmente a primeira das equações (1), e attendendo á segunda, vem

$$-(y-b)b'-(x-a)x'=RR'.$$

Depois, substituindo nesta equação, em logar de $x-a$ e $y-b$, os seus valores tirados das duas primeiras equações (1), e $-\frac{a'}{b'}$ em logar de y', vem

$$\frac{a'^2R+b'^2R}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=-RR', \text{ ou } R'=\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

Se tomarmos a por variavel principal, será $R'=\sqrt{1+b'^2}$ a derivada do raio de curvatura em ordem a a; e como a derivada do arco s da evoluta em ordem a a é $s'=\sqrt{1+b'^2}$, será $R'=s'$; equação, á qual satisfaz evidentemente a primitiva $R=s+A$, sendo A uma constante arbitraria. Para outro arco s_1 da evoluta, cuja origem seja a mesma que a do primeiro, será tambem $R_1=s_1+A$; e por conseguinte teremos

$$s-s_1=R-R_1, \quad \text{ou} \quad R=R_1+s-s_1.$$

D'onde resulta que, se O e D (Fig. 9) são os centros de curvatura dos pontos B e M, o arco OD da evoluta é egual á differença dos raios de curvatura BO e MD da evolvente. Portanto se, depois de curvar um fio sobre a evoluta IOD, o formos desenvolvendo de sobre ella, a sua extremidade B descreverá a evolvente BM: propriedade esta, que deu origem á denominação d'aquellas curvas. E como o valor inicial $AI=A$ de R é arbitrario, vê-se que a cada evoluta IOD correspondem infinitas evolventes, que seriam descriptas pelos pontos do fio AI.

124. Exemplos: I. A equação da parabola $y^2=2px$,

chamando N a grandeza da normal (n.° 105, IV), dá

$$y'=\frac{p}{y},\ y''=-\frac{p^2}{y^3},\ s'=\sqrt{\left(\frac{2x+p}{2x}\right)},\ R=\frac{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}=\frac{N^3}{p^2}.$$

Logo: *o raio de curvatura da parabola é egual ao cubo da normal, dividido pelo quadrado do semiparametro.*

No vertice A (Fig. 9), onde $x=0$, é $R=p$; isto é, a distancia AI do vertice ao centro de curvatura correspondente é dupla da distancia focal. Depois, quanto mais x cresce, mais diminue a curvatura, e indefinidamente.

Eliminando x e y entre a equação da curva e as expressões de a e b, $y^2=2px$, $a=3x+p$, $b=-\dfrac{2xy}{p}$, e fazendo $a-p=a'$, vem a equação da evoluta

$$b^2=\frac{8}{27p}(a-p)^3=\frac{8}{27p}a'^3,$$

que é a equação da segunda parabola cubica referida á origem $I(p, 0)$.

II. A equação da ellipse $\qquad m^2y^2+n^2x^2=m^2n^2,$

chamando c a distancia $\sqrt{m^2-n^2}$ do foco ao centro, dá

$$y'=-\frac{n^2x}{m^2y},\ y''=-\frac{n^4}{m^2y^3},\ 1+y'^2=\frac{n^2}{m^4}\cdot\frac{m^4-c^2x^2}{y^2};$$

e portanto $\qquad a=\dfrac{c^2x^3}{m^4},\ b=-\dfrac{c^2y^3}{n^4},\ R=-\dfrac{(m^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{m^4n}.$

Comparando o valor de R com os da normal N e do parametro $2p$, acha-se

$$R=\frac{m^2N^3}{n^4}=\frac{N^3}{p^2};$$

theorema identico com o que tem logar na parabola (*).

(*) Sejam δ, δ', os raios vectores d'um ponto. Por ser (n.° 106 *) $N=\dfrac{n}{m}\sqrt{\delta\delta'}$, o valor de R pode tomar a fórma

$$R=\frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{mn}.$$

A expressão de R mostra que nas extremidades dos eixos (Fig. 36) é R maximo ou minimo, e por isso a curvatura minima ou maxima. Assim:

nos vertices O, O′ são curv. max., $a = \pm \frac{c^2}{m}$, $b = 0$, $R = \frac{n^2}{m}$;

nos vertices D, D′ são curv. min., $a = 0$, $b = \pm \frac{c^2}{n}$, $R = \frac{m^2}{n}$.

Os pontos h, h', i, i' assim determinados são os centros de curvatura das extremidades dos eixos.

Substituindo na equação da ellipse os valores de x e y tirados das expressões de a e b, e chamando q e p os valores de a e b, $Ch = \frac{c^2}{m}$ e $Ci = \frac{c^2}{n}$, correspondentes ás extremidades dos eixos, teremos a equação da evoluta:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{b^2n^2}{c^4}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2m^2}{c^4}\right)} = 1, \text{ ou } \sqrt[3]{\left(\frac{b}{p}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{q}\right)^2} = 1.$$

Adiante veremos que a curva tem quatro pontos de reversão h, h', i, i'; e que se compõem de quatro arcos que voltam as convexidades para os eixos, a respeito dos quaes ella é symetrica. Estes quatro arcos são marcados com pontos na figura 36.

Já vimos que um arco de evoluta é egual á differença dos raios de curvatura da evolvente que partem das extremidades do mesmo arco; e como na parabola e na ellipse estes raios são funcções algebricas das abscissas, o arco é rectificavel. O mesmo acontece a respeito de todas as curvas algebricas.

III. Para a hyperbole basta mudar n em $n\sqrt{-1}$ nos resultados que se acharam para a ellipse.

IV. A cycloide (Fig. 6) dá (pag. 108)

$$y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)}, \; y'' = -\frac{r}{y^2}, \; s'^2 = \frac{2r}{y}, \; R = 2\sqrt{ry} = 2N.$$

Sendo pois o raio de curvatura o dobro da normal, se produzirmos MD e tomarmos $DM' = MD$, acharemos um centro de curvatura M' da cycloide proposta, ou um ponto M' da sua evoluta.

Para ter a equação da evoluta, tiraremos das expressões de a e b, que são $a = x + 2\sqrt{2ry - y^2}$ e $b = -y$, os valores de x e y, e substituil-os-hemos na equação da cycloide, ou antes na sua derivada, por ser transcendente aquella equação; isto é, eliminaremos y e y' entre as tres equações

$$y' = \sqrt{\left(\frac{2r-y}{y}\right)},\ a' = \frac{2r-y}{y},\ b' = -y',$$

o que dá
$$\frac{b'}{a'} = -\sqrt{\left(\frac{y}{2r-y}\right)} = -\sqrt{\left(\frac{-b}{2r+b}\right)}.$$

E, se mudarmos a em $\pi r - a_1$ e b em $b_1 - 2r$, para transportar a origem a $L(\pi r - 2r)$, teremos

$$\frac{b'_1}{a'_1} = \sqrt{\left(\frac{2r-b_1}{b_1}\right)};$$

equação d'uma cycloide egual. Por onde se vê que a evoluta LA da cycloide é outra cycloide egual a ella; sendo o arco LA identico a FA', e A o vertice.

V. Na spiral logarithmica (Fig. 8) é $\quad r = a^{\theta};$

o que dá
$$R = \sqrt{1 + l^2 a} = r \sec \eta = \frac{r}{\cos \eta};$$

sendo η o angulo do raio vector com a normal (pag. 110)

$$AMN = ATM = \text{ang.}\ (\text{tang} = la).$$

Como a projecção do raio de curvatura MN sobre o raio vector é

$R \cos \eta = r$, a perpendicular AN, levantada no pólo A sobre o raio vector, encontra a normal no centro de curvatura.

Portanto AM é a subtangente da evoluta, AN é o seu raio vector, e AM faz com a tangente da curva MI o mesmo angulo β que AN faz com a da evoluta; sendo assim a evoluta a mesma evolvente collocada em sentido inverso.

Do que fica exposto facilmente se vê como se applicaria a theoria das osculações a curvas de ordem mais elevada (Vej. *Fonct. anal.*, pag. **117**).

125. A differença entre as ordenadas de duas curvas, correspondentes á mesma abscissa $x+h$, tem a fórma $\delta = Mh^m + Nh^{m+1} + \ldots$. E como se pode tomar h tão pequeno que o signal d'esta expressão seja o do primeiro termo Mh^m, a curva fica acima ou abaixo da sua osculatriz, junto do ponto de contacto, segundo é Mh^m positivo ou negativo.

Quando m é impar, o signal de Mh^m muda com o de h; e então a osculatriz corta a curva no ponto commum a ambas. Por onde se vê que: ***uma curva é sempre cortada pelo seu circulo osculador, e só tocada pela tangente.***

Das asymptotas

126. Quando $f(x+h)$ não pode desenvolver-se pela fórmula de Taylor, a curva $y=fx$ sómente é osculatriz de $y=Fx$ quando o desenvolvimento de $F(x+h)$ procede segundo a mesma lei que o de $f(x+h)$, pelo menos nos primeiros termos que se devem egualar entre si para estabelecer a osculação (Vej. *Fonct. anal.*, n.º 120).

Supponhamos que, desenvolvendo as funcções propostas

$$y=fx, \quad y=Fx,$$

segundo as potencias descendentes de x (n.º 83), se obtem expressões da fórma

$$Ax^a+Bx^{a-b}+\ldots Mx^{-m}+Nx^{-m-n}+\ldots.$$

Se, antes de um termo Mx^{-m} de expoente negativo, forem todos os expoentes d'estes desenvolvimentos em uma das series os mesmos que na outra, e podérmos dispor d'um numero sufficiente de constantes para as sujeitar ás condições de egualdade dos coefficientes respectivos, a differença $Mx^{-m}+Nx^{-m-n}+\ldots$, que ficará subsistindo entre duas quaesquer ordenadas correspondentes d'estas curvas, approximar-se-ha indefinidamente de zero ao passo que x for crescendo, sem nunca se anniquilar. Logo as curvas tambem se approximarão indefinidamente uma da outra, sem chegarem a tocar-se; e haverá um termo, passado o qual outra curva, que não satisfaça ás mesmas condições, não poderá approximar-se de nenhuma d'ellas tanto quanto ellas se approximam entre si. As duas curvas serão pois *asymptotas* uma da outra.

Por onde se vê que, se uma curva se extende indefinidamente, pode ter uma infinidade de asymptotas; as quaes se acharão desenvolvendo $y=fx$ em serie descendente das potencias de x, e tomando para ordenada da linha pedida a somma dos primeiros termos do desenvolvimento que precedam um em que x tenha expoente negativo; ou, mais geralmente, compondo uma funcção de modo que o seu desenvolvimento comece por esses primeiros termos.

127. Sejam $\qquad y = fx,\ y = \mathrm{F}(x, y', x'),$

as equações da curva proposta e d'uma osculatriz d'ella de certa ordem no ponto (x', y'). Se, substituindo na equação da osculatriz a expressão de y' em x' ou de x' em y' tirada da proposta, e depois fazendo $x' = \infty$ ou $y' = \infty$, resultar uma equação $y = \varphi x$, será esta equação a das asymptotas d'aquella ordem.

Querendo, por exemplo, as asymptotas rectilineas, substituiremos na equação da tangente, $y - y' = \dfrac{dy'}{dx'}(x - x')$, os valores de y' e $\dfrac{dy'}{dx'}$ em x', tirados de $y' = fx'$, e faremos $x' = \infty$, o que dará as asymptotas não parallelas ao eixo dos y; e substituiremos os valores de x' e $\dfrac{dx'}{dy'}$ tirados da mesma proposta, e faremos $y' = \infty$, o que dará as asymptotas não parallelas ao eixo dos x.

128. Mas, se houver difficuldade em resolver a equação da curva em ordem a uma das coordenadas, poderemos achar as asymptotas rectilineas empregando o methodo indicado na nota ao n.° 87 da *Geom. Anal.*

Demos á proposta a fórma $x^m \mathrm{F}\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{m-1} f\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{m-2}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$

Fazendo $\dfrac{y}{x} = c_1$ e $x = \infty$, virá $\mathrm{F}(c_1) = 0$. Depois, substituindo $c_1 x + l_1$ em logar de y, e attendendo a $\mathrm{F}(c_1) = 0$, teremos

$$x^{m-1}[l_1\mathrm{F}'(c_1) + f(c_1)] + x^{m-2}\left[\frac{1}{2} l_1^2 \mathrm{F}''(c_1) + l_1 f'(c_1) + \varphi(c_1)\right] + \ldots = 0;$$

que, para $x = \infty$, dá $l_1\mathrm{F}'(c_1) + f(c_1) = 0$; ou, no caso de sairem $\mathrm{F}'(c_1)$ e $f(c_1)$ nullos, $\dfrac{1}{2} l_1^2 \mathrm{F}''(c_1) + l_1 f'(c_1) + \varphi(c_1) = 0$; e assim por diante.

Portanto determinam os parametros c_1 e l_1 das asymptotas não parallelas aos y as equações:

$$\mathrm{F}(c_1) = 0, \quad l_1\mathrm{F}'(c_1) + f(c_1) = 0;$$

ou, no caso de sairem $F'(c_1)$ e $f(c_1)$ nullos, as equações:

$$F(c_1)=0,\ \frac{1}{2}l_1^2F''(c_1)+l_1f'(c_1)+\varphi(c_1)=0;$$

e assim por diante.

Similhantemente se discorrerá a respeito das asymptotas não parallelas aos x, dando á proposta a fórma

$$y^mF\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\ldots=0.$$

Exemplos: I. A equação $\qquad y=\dfrac{k}{\sqrt{a^2-x^2}}$

pertence a uma curva que se compõe de quatro ramos symetricos em relação ao eixo dos x, e cuja figura é facil conhecer.

1.° Processo. Desenvolvendo em ordem ás potencias de x, ou em ordem ás de y, vem

$$y=kx^{-1}+\ldots,\quad x=a+\frac{k^2}{2a}y^{-2}\ldots;$$

logo as rectas, que têm por equações $y=0$, $x=a$, são asymptotas. A hyperbole que tem por asymptotas os eixos dos x e dos y, e cuja potencia é k, tambem é asymptota da curva proposta, e mais proxima d'ella do que as rectilineas.

2.° Processo. Substituindo em $y-y'=\dfrac{dy'}{dx'}(x-x')$ as expressões, tiradas da proposta,

$$y'=\frac{k}{(x'^2-a^2)^{\frac{1}{2}}},\ dy'=-\frac{kx'}{(x'^2-a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e fazendo $x'=\infty$, achariamos $y=0$.

Substituindo em $x-x'=\frac{dx'}{dy'}(y-y')$ as expressões, tiradas da proposta,

$$x'=\sqrt{a^2+\frac{k^2}{y'^2}},\ \frac{dx'}{dy'}=-\frac{k^2}{y'^3\sqrt{a^2+\frac{k^2}{y'^2}}},$$

e fazendo $y'=\infty$, achariamos $x=a$.

Tudo como achamos pelo primeiro processo.

II Seja (Fig. 10) a equação do *folium* de Descartes $y^3-3axy+x^3=0$.

1.° Processo. Pondo $y=zx$, $x=\frac{1}{t}$, e desenvolvendo n.° 84, vem

$$y=-x-a+\frac{1}{3}a^3x^{-2}-\frac{1}{3}a^4x^{-3}\ldots.$$

Portanto a recta, $y=-x-a$, é uma asymptota, que se construe tomando AB = AC = a, e tirando BC.

3.° Processo. Dando á proposta a fórma

$$x^3\left(\left(\frac{y}{x}\right)^3+1\right)-3ax^2\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

temos $\qquad \mathrm{F}(c_1)=c_1^3+1,\ \mathrm{F}'(c_1)=3c_1^2,\ f(c_1)=-3ac_1;$

por conseguinte são $\qquad c_1=-1,\ l_1=-\frac{f(c_1)}{\mathrm{F}'(c_1)}=-a,$

e a equação da asymptota é $\qquad y=-x-a.$

III. Finalmente seja $\quad y^4-2x^2y^2-x^4+2axy^2-5ax^3=0.$

Pondo $p=\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$, vem

$$y=\pm px\pm\frac{a(\pm 3\sqrt{2}-4)}{8p}+Ax^{-1}+\ldots.$$

Usando pois dos valores reaes de p, e construindo as rectas GF e GH (Fig. 11), que têm por equações

$$y=\pm px\pm\frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p},$$

acharemos as asymptotas rectilineas da curva proposta.

O 3.º processo daria, mais facilmente,

$$c_1^4-2c_1^2-1=0,\ l_1=\frac{5a-2ac_1^2}{4c_1^3-4c_1},$$

isto é, $\quad c_1=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{2}}=\pm p,\ l_1=\pm\dfrac{a(\pm 3\sqrt{2}-4)}{8p};$

ou, para o valor real de p,

$$c_1=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}=\pm p,\ l_1=\pm\frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p}.$$

Bastam estes exemplos para mostrar como devem applicar-se os processos 1.º, 2.º, 3.º, indicados respectivamente nos n.os 126, 127 e no presente 128.

Concavidade, convexidade e pontos singulares

129. Concavidade e Convexidade. Mudemos (Fig. 1) x em $x+h$ na equação d'uma curva $y=fx$; e comparemos as ordenadas $P'M'=f(x+h)$ e $P'H'$, d'ella e da tangente em $M(x, y)$, correspondentes á mesma abscissa $x+h$. Serão

$$P'M'=y+hy'+\frac{1}{2}h^2y''+\ldots,\quad P'H'=y+y'h.$$

Tomando h tão pequeno que o signal de $\frac{1}{2}h^2y''$ seja o de $\frac{1}{2}h^2y''+\ldots$, será $P'M'>$ ou $<P'H'$, e por conseguinte voltará a curva a convexidade ou a concavidade para o eixo dos x, segundo for y'' positiva ou negativa. Assim: *a curva volta para o eixo dos* x *a convexidade ou a concavidade, segundo são* y *e* y'' *do mesmo signal ou de signaes contrarios.*

Nos pontos de inflexão M (Fig. 18 e 19), onde a curva passa de concava a convexa, ou inversamente, deve pois y'' mudar de signal, e conseguintemente ser nulla ou infinita neste ponto: exceptuando o caso de mudar y de signal com y''; porque então o ponto, de que se tracta, está no eixo dos x.

130. Pontos singulares. Além das particularidades que offerecem os pontos limites e da maxima e minima ordenada, de que antes tractamos, e os de inflexão, de que acabamos de tractar, ha outras, provenientes da concorrencia de muitos ramos da curva em um ponto; particularidades que dão a estes pontos o nome de *pontos singulares.*

Se no ponto singular se cortam muitos ramos, extendendo-se para um e outro lado, este ponto chama-se *multiplo* (A, Fig. 10).

Se na visinhança, d'um e d'outro lado, não ha curva, o ponto chama-se *solitario* ou *conjugado* (Fig. 13).

Se dois ramos se tocam, extendendo-se só para um dos lados, o ponto é de *reversão.* E chama-se: *ceratoide,* ou de reversão da primeira especie (Fig. 24 e 25), quando os dois ramos ficam para differentes lados da tangente; *ramphoide*, ou de reversão da segunda especie, quando ambos os ramos ficam para o mesmo lado (Fig. 23).

Nas curvas, cuja equação é transcendente, ha ainda os pontos de *suspensão* (*d'arrêt*), onde um ramo da curva pára (Fig. 28); e os pontos *salientes* ou *angulosos*, onde concorrem dois ramos, sem tangente commum, extendendo-se só para um lado (Fig. 29).

131. Todos os casos, que ficam indicados, podem caracterizar-se figurando um circulo descripto em volta do ponto, com um raio extremamente pequeno. Este circulo: cortará a curva de ambos os lados em muitos pontos, cujos raios farão entre si angulos finitos, se o ponto for *multiplo;* cortal-a-ha d'um só lado em dois pontos, cujos raios farão entre si um angulo infinitesimo, se o ponto for de *reversão*, ou farão um angulo finito, se o ponto for *anguloso;* cortal-a-ha d'um só lado, em um ponto, se o ponto for de *suspensão;* e não a cortará, se o ponto for *solitario*.

132. Tractemos de reconhecer a existencia d'estes diversos pontos em uma curva cuja equação é dada.

1.° Equações explicitas. Seja a equação explicita $y = fx$.

Se esta equação tem radicaes pares, e desapparece um d'elles para $x=a$, a ordenada $f(a+h)$, correspondente a um pequeno augmento h de x, terá mais valores do que tem fa. Por conseguinte (a, fa) é um ponto *multiplo;* e a multiplicidade dependerá do gráu do radical eliminado.

Como $x = a$ pode expellir o radical, ou anniquilando-o, ou anniquilando um factor que o multiplique; e como no primeiro caso os coefficientes differenciaes successivos passarão de nullos a infinitos, e no segundo de infinitos a nullos: vê-se que o apparecimento de coefficientes differenciaes nullos até certa ordem, ou infinitos desde certa ordem, pode indicar a possibilidade da existencia de pontos multiplos; mas não é signal certo d'ella, por ser commum a outros pontos.

Se o radical desapparecer por se anniquilar o seu multiplicador, o expoente d'este mostrará se ha uma simples intersecção, se uma osculação.

133. Quando as ordenadas $f(a \pm h)$, d'um e d'outro lado do ponto que devia ser multiplo, são imaginarias, este ponto é *solitario*. Mas, se $f(a \pm h)$ tem valores reaes e valores imaginarios, consideram-se como coexistentes nelle um ponto simples ou multiplo, e um *conjugado invisivel*.

Concebe-se que a mudança d'alguns parametros pode tornar imaginarios valores que eram reaes, e transformar assim pontos multiplos em conjugados; como acontece na equação $y^2 = ax^2 + bx^3$, segundo é a positivo ou negativo (Fig. 12 e 13). O que explica a ligação d'estas duas especies de pontos.

134. Sejam a ordenada correspondente á abscissa $a+h$, e as duas derivadas,

$$f(a+h) = b + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \ldots, \; f'(a+h) = A\alpha h^{\alpha-1} + B\beta h^{\beta-1} + \ldots,$$

$$f''(a+h) = A\alpha(\alpha-1)\, h^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)\, h^{\beta-2} + \ldots.$$

I. Se α é uma fracção $\frac{m}{n} < 1$, são infinitas as derivadas $f'a$ e seguintes, e a tangente em (a, b) é perpendicular ao eixo dos x.

1.° Supponhamos que nos expoentes da serie não ha fracções de denominador par. Se m e n são impares, e se toma h sufficientemente pequeno para que as differenças reaes $f(a+h)-b$, $f(a-h)-b$, tenham signaes contrarios, assim como $f''(a \pm h)$, ha uma inflexão em (a, b) (Fig. 16 ou 17). Se m é par, têm os mesmos signaes, para h sufficientemente pequeno, $f(a+h)-b$ e $f(a-h)-b$, assim como $f''(a \pm h)$; e o ponto (a, b) é um *ceratoide* (Fig. 24 ou 25).

2.° Supponhamos que nos expoentes da serie ha fracções de denominador par. Se é n este denominador, $f(a+h)$ e $f(a-h)$ são uma real, outra imaginaria; (a, b) é um limite da curva no sentido dos x; e o signal duplo do radical mostra que as ordenadas reaes são uma maior, outra menor que b, e que as suas derivadas de segunda ordem têm signaes contrarios, ou que um dos ramos volta a convexidade e outro a concavidade para o eixo dos x (Fig. 21). Se o denominador par não é n, são ainda $f(a \pm h)$ uma real, outra imaginaria; mas as ordenadas reaes são ambas maiores ou menores que b, e as suas derivadas de segunda ordem do mesmo signal: pelo que é (a, b) um *ramphoide* (Fig. 22), a curva termina, e os seus ramos voltam ambos a convexidade ou a concavidade para o eixo dos x.

II. Se é $\alpha = 1$ e β fraccionario, será $f''a$ nullo ou infinito, segundo for $\beta >$ ou < 2; porque teremos

$$f(a+h) = b + Ah + Bh^{\beta} + \ldots, \; f'(a+h) = A + B\beta h^{\beta-1} + \ldots,$$

$$f''(a+h) = B\beta(\beta-1)\, h^{\beta-2} + \ldots.$$

1.° Supponhamos que nos expoentes da serie não ha fracções de denominador par. Se β é par, ou uma fracção de numerador par, a curva não apresenta particularidade alguma no ponto (a, b); e o signal da differença $Bh^{\beta} + \ldots$ entre a sua ordenada $f(a+h)$ e a da tangente $b + Ah$, e de $f''(a+h)$, é o mesmo que o de B; mas, se é $A = 0$, ha maximo ou minimo. Se β é impar, ou uma fracção de numerador impar, $f''(a+h)$ e $f''(a-h)$ têm signaes contrarios; e ha em (a, b) uma inflexão, cuja disposição depende da tangente e do signal de B.

2.° Supponhamos que nos expoentes da serie ha fracções de denominador par. Se β é fracção de denominador par, $f(a+h)$ e $f(a-h)$ são uma real e outra imaginaria; e, para o valor real, cada par de signaes conjugados $\pm$ dá dois ramos, entre os quaes passa a tangente, havendo assim um ceratoide (Fig. 27). Se essa fracção não é β, ainda ha muitos ramos que se reunem em (a, b); mas a tangente passará acima ou abaixo de todos elles, segundo o signal de B, sendo então o ponto um ramphoide (Fig. 23).

135. Exemplos:

I. Na equação $y = (1-x)\sqrt{2-x}$ perde y, para $x = 1$, o radical, que não desapparece de $y' = \dfrac{3x-5}{2\sqrt{2-x}}$. Assim (Fig. 14): o ponto $C(1, 0)$, onde é $y' = \pm 1$, é duplo; nos pontos D e D' $\left(\dfrac{5}{3}, \pm \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, onde $y' = 0$, é a ordenada maxima; e o ponto $A(2, 0)$, onde $y' = \infty$, limita a curva.

II. Em $y = fx = (2-x)\sqrt{1-x}$ perde y o radical, para $x = 2$, e são imaginarios $y' = \dfrac{3x-4}{2\sqrt{1-x}}$ e $f\left(2 \pm \dfrac{1}{\infty}\right)$.

Portanto é $(2, 0)$ um ponto solitario.

III. Em $y = x\sqrt{x-b}$ a origem é um ponto solitario.

IV. Sendo $a > b$, a equação $\quad y = (x-a)^2\sqrt{x-b} + c$

pertence á curva EDGF formada (Fig. 15) de dois ramos que têm no ponto D a tangente commum ED. Se $x - a$ estivesse elevado ao cubo, os dois ramos teriam um circulo osculador, etc.

V. Descripto um circulo sobre $AI=2r$ como diametro (Fig. 14), façamos gyrar em volta de A uma recta AF, em quanto PN, perpendicular a AI, se move parallelamente a si mesma, de modo que o ponto N fica sempre no meio do arco AF, isto é, de modo que são perpendiculares entre si as rectas AF e CN, e por conseguinte similhantes os triangulos AMP, CNP. Procuremos a curva AMC gerada pela intersecção contínua das rectas AF, NP.

Pondo a origem em C, as equações das duas rectas, e a similhança dos triangulos, dão

$$x=\alpha,\ y=\beta(x-r),\ \frac{r-\alpha}{\beta(\alpha-r)}=\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{\alpha}=-\frac{1}{\beta},$$

das quaes, pela eliminação dos parametros α e β, resulta $y=x\sqrt{\dfrac{r-x}{r+x}}$;

e por conseguinte $$y'=\frac{r^2-x^2-rx}{(r+x)\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Estas equações mostram: que a origem C é um ponto duplo, no qual é $y'=\pm 1$, ou 45° a inclinação da tangente sobre AI; e que a folha AC tem um maximo em $D\left(\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1),\ \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)}\right)$, e por limite o vertice $A(r, 0)$. Para cada posição da recta AF, os meios N, N′ dos arcos ANF, AN′F dão dois pontos M, M′ da curva; ha dois ramos infinitos CO, CO′; e a tangente ao circulo no ponto $I(-r, 0)$ é asymptota.

VI. Em $y=b\pm(x-a)^{\frac{3}{5}}$ é a tangente perpendicular aos x em $M(a, b)$, e ha inflexão (Fig. 16 e 17).

Em $y=x\pm(x-a)^3$, ou $y=x\pm(x-a)^{\frac{4}{3}}$, ha uma inflexão (Fig. 18 e 19).

Em $y=-x+(x-a)^{\frac{7}{3}}$ ha uma inflexão (Fig. 20).

VII. Em $y=b\pm(x-a)^{\frac{3}{4}}$ e $y=b\pm(a-x)^{\frac{3}{4}}$ ha um limite (Fig. 21).

VIII. Em $y=b+k(x-a)^{\frac{1}{3}}+l(x-a)^{\frac{1}{4}}$ ha um ramphoide (Fig. 22).

Em $y=\beta+x\pm ax^2+b\sqrt{x^5}$ ha um ramphoide (Fig. 23).

IX. Em $y=b\pm(x-a)^{\frac{2}{3}}$ é a tangente perpendicular aos x, e ha um ceratoide (Fig. 24 e 25); assim como em $2y=-1-x+2(x-1)^{\frac{5}{2}}$, e $y=b+x+(x-a)^{\frac{3}{2}}$ (Fig. 26 e 27).

X Na equação transcendente $y=e^{\frac{1}{x}}$ diminue y desde $\left(+\frac{1}{\infty}, \infty\right)$ até $(+\infty, 1)$; e cresce desde $\left(-\frac{1}{\infty}, 0\right)$ até $(-\infty, 1)$; sendo y'' nullo para $x=-\frac{1}{2}$. Portanto a curva (Fig. 28) compõem-se de dois ramos discontinuos, de um dos quaes MN são asymptotas os eixos, e do outro AN′ é asymptota a parallela, $y=1$, ao eixo dos x; e neste ramo a origem A é um ponto de *suspensão*, e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ um ponto de inflexão.

XI. Na equação transcendente $$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

a curva passa pela origem A (Fig. 29), e extende-se indefinidamente para os x positivos e negativos. Mas a tangente em A faz com o eixo dos x angulos cujas tangentes trigonometricas, ou os limites de $\frac{y}{x}$ correspondentes ao limite 0 de x, são $\frac{1}{1+e^{\pm\infty}}$, isto é, 0 para os x positivos e 1 para os negativos; por conseguinte o ponto A é *anguloso*.

136. Equações implicitas. Sejam $V=0$, $My'+N=0$,

a equação implicita, desembaraçada dos radicaes, e a sua derivada.

1.° Se os ramos da curva se cortam em um ponto, ha nelle muitas tangentes, e por isso muitos valores de y'. Já vimos (n.° 61) que esta condição anniquila M e N.

2.° Se dois ramos se tocam, e o contacto é da ordem $n-1$ (n.° 116), cada uma das derivadas $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ tem um só valor, e $y^{(n)}$ deve ter muitos valores. Mas a equação derivada da ordem n tem a fórma $My^{(n)}+\ldots=0$, sendo o coefficiente M o mesmo que os de $y, y'', \ldots y^{(n-1)}$ nas derivadas successivas, 1.ª, 2.ª,.... $(n-1)^a$; e é linear em ordem a $y^{(n)}$: logo a condição de ter $y^{(n)}$ muitos valores exige que seja $M=0$, e por isso tambem $N=0$; como no caso precedente.

Differem porém as condições analyticas d'estes dois pontos multiplos, por intersecção e por contacto, em ter y' no segundo um só valor, e no primeiro muitos valores.

Portanto: *Para achar os pontos multiplos de uma curva algebrica cuja equação* $V=0$ *está desembaraçada de radicaes, egualaremos a zero a derivada* N *d'esta equação relativa a* x, *e a* M *relativa a* y; *e depois eliminaremos* x *e* y *entre duas das tres equações*

$$M=0,\ N=0,\ V=0\ldots\ldots(1).$$

Os valores de x *e* y, *que satisfizerem tambem á terceira, serão os unicos que podem pertencer a pontos multiplos.*

Como a resultante $\varphi x=0$ da eliminação de y entre as duas ultimas equações (1) proviria de substituir na terceira a expressão de $y=fx$ tirada da segunda, será

$$\varphi' x=\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dy}f'x=M+Nf'x;$$

por onde se vê que não poderá haver pontos singulares quando aquella resultante não tiver raizes eguaes.

137. Substituindo na derivada da segunda ordem,

$$My''+Py'^2+Qy'+R=0,\ldots\ldots(2),$$

um dos systemas (x, y) que satisfazem ás tres equações (1), desapparecerá y''; e y' será dada por uma equação do segundo gráu.

Se as raizes d'esta equação são reaes, o ponto (x, y) é duplo.

138. Se as raizes da equação do segundo gráu forem imaginarias, o ponto será conjugado ou solitario (*).

Para ver que nestes pontos se devem com effeito *verificar* as equações (1), supponhamos que a resolução da proposta $V=0$ em ordem a y dá $y=f(x)$. Sendo a a abscissa do ponto conjugado, devem $f(a\pm h)$ ser imaginarias para h muito pequeno; por conseguinte alguns dos coefficientes differenciaes de $f(a)$ tambem devem ser imaginarios. Mas qualquer derivada, $My^{(n)}+\ldots=0$ de $V=0$ não pode dar $y^{(n)}$ debaixo de fórma imaginaria, por isso que nem contém radicaes, nem os pode nella introduzir a eliminação de $y', y''\ldots\ldots y^{(n-1)}$, feita por meio das derivadas precedentes: logo deve ser $M=0$, e por conseguinte $N=0$.

Portanto os pontos conjugados satisfazem ás equações (1); mas distinguem-se dos outros, para os quaes se verificam as mesmas condições, em serem nelles imaginarias algumas das derivadas de y.

139. Se as raizes das equações (1) anniquilassem tambem os termos da derivada da segunda ordem, seria necessario recorrer á terceira ordem, na qual desappareceriam y'' e y''', e ficaria y' no terceiro gráu. Haveria pois um ponto triplo, se as tres raizes fossem reaes; e um ponto simples, ou antes um ponto simples e um conjugado invisivel, se uma só das raizes fosse real.

Se as raizes de (1) anniquilassem tambem os termos da derivada da

---

(*) Mas cumpre notar que nem sempre y' é imaginario nestes pontos, com quanto o seja $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pode com effeito acontecer que y' se conserve real tornando-se imaginarias as derivadas das outras ordens, quando, pela mudança do valor de um parametro, o ponto multiplo, onde se reuniam por contacto alguns ramos da curva, se transforme em conjugado. Para explicar geometricamente este facto, basta notar que no contacto são communs ás curvas, que se tocam, dois ou mais pontos consecutivos infinitamente visinhos, isto é, um ou mais elementos de curva consecutivos: por conseguinte, ainda que as ordenadas se tornem imaginarias fóra do elemento que produzido dá a tangente, esta pode continuar a existir.

Seja, por exemplo, a equação $$y^2-ax^4-bx^5=0.$$

Derivando, teremos $2yy'-4ax^3-5bx^4=0$; e as equações $M=0$, $N=0$, darão o ponto $(0, 0)$, cujas coordenadas satisfazem á proposta. Tornando a derivar, virá $2yy''+2y'^2-12ax^2-20bx^3=0$, que no ponto $(0, 0)$ dá $y'=\pm 0$, isto é, dois ramos que se reunem por contacto e cuja tangente commum é parallela aos x.

Duas novas derivações darão, no mesmo ponto, $y''=2\sqrt{a}$. D'onde resulta que, segundo for a positivo ou negativo, assim o ponto $(0, 0)$ será multiplo por contacto ou conjugado; ficando porém $y=0$ em ambos os casos.

terceira ordem, recorreriamos á da quarta; e teriamos um ponto quadruplo, ou um duplo com um conjugado invisivel, ou um solitario, segundo fossem as quatro raizes reaes, ou duas reaes e duas imaginarias, ou todas imaginarias. E assim por diante.

140. Verificando-se as equações (1), as coordenadas do ponto da curva infinitamente visinho $(a+h,\ b+k)$ substituidas em $V=0$ darão

$$f(a+h,\ b+k)=\frac{1}{2}(Pk^2+2Qhk+Rh^2)+\Sigma_0^3 A_i h^i k^{3-i}+h^4R_3=0;$$

ou, chamando t_1 e t_2 as raizes $\frac{k}{h}$ da equação do 2.° gráu $P\frac{k^2}{h^2}+2Q\frac{k}{h}+R=0$,

$$f(a+h, b+k)=\left[\frac{1}{2}P\left(\frac{k}{h}-t_1\right)\left(\frac{k}{h}-t_2\right)+h\varphi\left(\frac{k}{h}\right)+h^2R_3\right]h^2=0\ldots(3).$$

Se as raizes t_1 e t_2 são reaes e deseguaes, podemos tomar $\frac{k}{h}$ tão visinho de t_1 ou de t_2 que o primeiro termo de (3) seja positivo ou negativo, e que a somma d'elle com os seguintes se reduza a zero; tanto para h positivo como para h negativo. Teremos pois um ponto $(a,\ b)$ duplo, como já haviamos dito, no qual t_1 e t_2 são as direcções das tangentes.

Se são imaginarias, teremos um ponto solitario.

Se são reaes e eguaes, t_0, o primeiro termo terá sempre o signal de P: por conseguinte só haverá curva para o lado dos h positivos, ou dos h negativos, segundo forem $\varphi(t_0)$ e P de differente signal ou do mesmo signal; e o ponto duplo será um ceratoide, por ser

$$\frac{k}{h}=t_0\pm\sqrt{-\frac{2h\varphi(t_0)}{P}},$$

dando t_0 a direcção da tangente commum.

141. Supponhamos que é $\varphi(t_0)=0$.

Pondo $\left(\frac{k}{h}\right)=t_0+\lambda h+\ldots$, teremos

$$\varphi\left(\frac{k}{h}\right)=\lambda h\varphi'(t_0)+\ldots,\ \psi\left(\frac{k}{h}\right)=\psi(t_0)+\ldots,$$

para substituir em

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{k}{h}-t_0\right)^2+h\varphi\left(\frac{k}{h}\right)+h^2\psi\left(\frac{k}{h}\right)+h^3\mathrm{R}_4=0;$$

o que dá
$$h^2\left[\frac{1}{2}\mathrm{P}\lambda^2+\lambda\varphi'(t_0)+\psi(t_0)+h\mathrm{K}\right]=0.$$

E chamando λ_1, λ_2, as raizes de $\frac{1}{2}\mathrm{P}\lambda^2+\lambda\varphi'(t_0)+\psi(t_0)=0$, a equação precedente toma a fórma

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)+h\mathrm{K}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Se λ_1 e λ_2 são reaes e deseguaes, discorrendo como no numero precedente, podemos achar dois valores de λ, um muito proximo de λ_1 e outro de λ_2, que satisfaçam a (4); tanto para h positivo como para h negativo: e teremos um ponto em que se tocam dois ramos.

Se são imaginarios, o ponto é solitario.

Se são reaes e eguaes, λ_0, só haverá λ real para os h positivos ou para os h negativos, $\lambda=\lambda_0\pm\sqrt{-\frac{2\mathrm{K}h}{\mathrm{P}}}$. Será pois $\frac{k}{h}=t_0+\lambda_0 h\pm h^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{P}}}+\ldots$; e o ponto duplo um ramphoide, por dar $\lambda_0 h$ o signal á série desde o segundo termo.

Mas no caso particular de $\lambda_0=0$ o ponto é um ceratoide.

142. Exemplos: I. Seja $y^2-x^3+(a-b)x^2+abx=0$.

Egualando a zero as derivadas em ordem a x e em ordem a y, vem $y=0$, $3x^2+2(b-a)x-ab=0$, as quaes só concordam com a proposta e accusam a possibilidade da existencia d'um ponto multiplo ou conjugado nos casos de ser nullo a ou b (Fig. 30) (*Geom. Anal.* n.° 136).

1.° Se $a=0$, o ponto (0, 0) pode ser multiplo, e a equação de segunda ordem dá então $y'=\pm\sqrt{b}$. Ha pois dois ramos, cujas tangentes ficam symmetricamente collocadas acima e abaixo do eixo das abscissas; e a expressão $y=\pm x\sqrt{b+x}$ mostra que a curva se extende para a esquerda do ponto duplo, desde $x=0$ até $x=-b$, e para a direita até o infinito.

2.° $b=0$ dá $y'=\pm\sqrt{-a}$. O ponto A é solitario; e a expressão $y=\pm x\sqrt{x-a}$ mostra que não ha curva á esquerda d'elle, nem á direita até $x=a$.

II. A equação $$x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$$

pertence a uma curva (Fig. 31) symmetrica em relação ao eixo dos y, e para a qual $M=0$, $N=0$, são $(y+a)y=0$, $x(x^2-a^2)=0$.

A estas e á proposta satisfazem D e D′ $(\pm a,\ 0)$ e E $(0,-a)$; e a segunda derivada $-6a(2y+a)y'^2+12x^2-4a^2=0$ mostra que estes pontos são duplos: sendo em E, $y'=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; e em D e D′, $y'=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$.

É $y'=0$, ou a tangente parallela aos x, em F$\left(0,\frac{1}{2}a\right)$ e em H e O$\left(\pm a,-\frac{3}{2}a\right)$.

Em E $(0,-a)$, D e D′ $(\pm a,\ 0)$, vem $y'=\frac{0}{0}$; e por isso se recorreu á derivada de segunda ordem, achando-se estes pontos duplos. Finalmente nos pontos I e G $(\pm a\sqrt{2},\ -a)$ a tangente é parallela aos y, por ser $y'=\infty$.

III. Á equação $y^4-x^5+x^4+3x^2y^2=0$, e a $M=0$, $N=0$,

satisfaz a origem (0, 0); e como estas coordenadas anniquilam as derivadas da segunda e da terceira ordem, e a da quarta se reduz a $y'^4+3y'^2+1=0$, cujas raizes são imaginarias, aquelle ponto é solitario.

IV A $x^4+2ax^2y-ay^3$, e a $M=0$, $N=0$,

satisfaz (Fig. 32) a origem; a derivada da segunda ordem anniquila-se; e a da terceira ordem dá $y'=0$, $y'=\pm\sqrt{2}$: portanto o ponto A é triplo. Em H e O $(\pm a,\ -a)$, e em F e G$\left(\pm\frac{4}{9}a\sqrt{6},-\frac{8}{9}a\right)$ as tangentes são respectivamente parallelas aos x e aos y.

V. Na equação (Fig. 33) $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$,

recorrendo á terceira derivada, acha-se que a origem é um ponto triplo, no qual são $y' = 0$, e $y' = \infty$, ou os eixos tangentes á curva.

VI. Na equação (Fig, 34) $y^4 + x^4 - 3ay^3 + 2bx^2y = 0$

a origem é um ponto triplo.

VII. Na equação (n.° 128) $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$

é triplo o ponto (0, 0), no qual são $y' = \infty$, e $y' = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$.

O espaço comprehendido entre as ordenadas dos pontos

$$\left(-\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}a\sqrt{3}\right),\ (-a,\ \pm a\sqrt{2})$$

separa as duas partes da curva; e nestes pontos, assim como em $(-5a, 0)$, é $y' = \infty$.

VIII. Á equação $(2y + 1 + x)^2 - 4(x - 1)^5 = 0$ e a $M = 0$, $N = 0$,

satisfaz o ponto $(1, -1)$; a segunda derivada dá as raizes eguaes $y' = t_0 = -\frac{1}{2}$; e esta raiz não anniquila a funcção

$$\frac{d^3V}{dy^3}y'^3 + 3\frac{d^3V}{dy^2dx}y'^2 + 3\frac{d^3V}{dydx^2}y' + \frac{d^3V}{dx^3} = \varphi(t):$$

portanto o ponto M (Fig. 26) é um ceratoide (n.° 140).

IX. Á equação $(y - \beta - x - ax^2)^2 - b^2x^5 = 0$ e a $M = 0$, $N = 0$,

que pertence a MBN ou M'BN' (Fig. 23), satisfaz o ponto $(0, \beta)$; a segunda derivada dá as raizes eguaes $y' = t_0 = 1$; e esta raiz anniquila φt: o ponto é um ramphoide (n.° 141).

Superficies e curvas no espaço

143. Sejam $$z=f(x, y),\ Z=F(X, Y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

as equações de duas superficies. Para que estas superficies tenham um ponto commum, é necessario que a $x=X$, $y=Y$, corresponda $z=Z$.

Tomemos sobre cada uma das superficies outro ponto correspondente a $x+h$, $y+k$; e chamemos p, q,... e P Q,... as derivadas parciaes das differentes ordens de (1). Designando $\frac{k}{h}$ por m, serão (n.° 71)

$$f(x+h, y+k)=z+h(p+mq)+\frac{1}{2}h^2(r^2+2sm+tm^2)+\ldots,$$

$$F(x+h, y+k)=z+h(P+mQ)+\frac{1}{2}h^2(R^2+2Sm+Tm^2)+\ldots;$$

e a distancia entre os dois pontos será $\Delta=h[(P-p)+m(Q-q)+\ldots]$.

144. Se no ponto commum as differenças parciaes da primeira ordem são respectivamente eguaes, $P=p$ e $Q=q$, os raciocinios do n.° 115 mostrarão que uma terceira superficie não poderia approximar-se das duas propostas tanto como ellas se approximam uma da outra, se não satisfizesse a seu respeito ás mesmas condições; havendo assim entre as propostas um contacto de primeira ordem.

Para haver um contacto de segunda ordem de duas superficies, é necessario que sejam tambem eguaes entre si as differenças parciaes da segunda ordem, $R=r$, $S=s$, $T=t$.

Para ter as osculações d'uma curva com uma superficie, mudaremos x em $x+h$ nas equações da curva, o que dará os $y+k$ e $z+l$ correspondentes; depois mudaremos x em $x+h$ e y em $y+k$ na equação da superficie, o que dará o $z+l'$ correspondente; e finalmente egualaremos l a l' até a ordem da osculação.

Para ter as osculações de duas curvas, mudaremos x em $x+h$ nas suas equações, o que dará $y+k$ e $z+l$ para uma, $y+k'$ e $z+l'$ para a outra; depois egualaremos k a k' e l a l', até a ordem da osculação.

145. Contactos de primeira ordem.

Como as tres constantes da equação do plano,

$$Z = AX + BY + C,$$

fixam a sua posição, podemos determinal-as de modo que haja um contacto de primeira ordem.

Chamando x, y, z, as coordenadas do ponto commum, as condições d'este contacto serão

$$z = Ax + By + C, \; p = A, \; q = B;$$

onde p, q, representando os coefficientes differenciaes parciaes da primeira ordem tirados da equação da superficie $z = f(x, y)$.

E a eliminação de A, B, C, por meio d'aquellas condições dará a equação do plano tangente á superficie no ponto (x, y, z),

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \ldots\ldots\ldots\ldots (A).$$

Se a equação da superficie for implicita, $F(x, y, z) = 0$, substituiremos em (A) as expressões de p e q tiradas das duas differenciaes parciaes d'ella,

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0,$$

o que dará a (A) a fórma

$$(Z - z)\frac{dF}{dz} + (Y - y)\frac{dF}{dz} + (X - x)\frac{dF}{dx} = 0 \ldots\ldots (A').$$

146. Achada a equação do plano tangente, será facil deduzir d'ella tudo o que respeita á sua posição.

Por exemplo, os cosenos dos angulos que elle faz com os dos xy, xz, e yz, são (*Geom. Anal.*, n.° 179, 1.°):

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\dfrac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2}},\\
\cos\beta &= \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\dfrac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2}},\\
\cos\gamma &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\dfrac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(B)$$

147. Como a normal em um ponto (x, y, z) deve ser perpendicular ao plano tangente, as equações d'esta recta (*Geom. Anal.*, n.° 174) são:

$$X-x+p(Z-z)=0,\ Y-y+q(Z-z)=0\ldots\ldots\ldots(C),$$

ou $$(X-x)\frac{dF}{dz}=(Z-z)\frac{dF}{dx},\ (Y-y)\frac{dF}{dz}=(Z-z)\frac{dF}{dy}\ldots\ldots(C').$$

E os cosenos dos angulos que ella faz com os eixos dos z, dos y e dos x, (*Geom. Anal.*, n.° 178, 1.°), são respectivamente os mesmos que os α, β, γ do numero precedente, mudando p e q em $-p$ e $-q$.

148. Podemos sempre considerar uma curva como intersecção de dois cylindros perpendiculares a dois dos planos coordenados.

Como o plano tangente a qualquer d'estes cylindros, em um ponto da curva, contém a tangente á curva, a aresta e a tangente ao traço do mesmo cylindro no plano coordenado respectivo, traço que é a projecção da curva nesse plano; vê-se que *a tangente á projecção da curva é a projecção da tangente á curva.*

Sejam pois
$$z = fx,\ z = Fy,$$
as equações dos dois cylindros projectantes sobre os planos dos zx, zy. Como estas equações são as da curva, isto é, as das suas projecções sobre os planos zx, zy; as da tangente serão

$$\left.\begin{aligned} &Z - z = (X - x) f',\ Z - z = (Y - y) F'; \\ \text{ou}\quad &X - x = (Z - z)\frac{dx}{dz},\ Y - y = (Z - z)\frac{dy}{dz} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (D).$$

Se entre as quatro equações da curva e da tangente no ponto (x, y, z) eliminarmos x, y, z, a resultante em X, Y, Z, será a das tangentes a todos os pontos da curva, isto é, a da superficie gerada pelo movimento continuo d'uma recta que fica sempre tangente á curva. E, segundo for esta superficie um plano, ou não o for, assim a curva será plana ou de dupla curvatura.

Os cosenos dos angulos, que a tangente faz com os eixos coordenados, são:

$$\cos\alpha = \lim.\frac{\Delta x}{\text{corda}} = \lim.\frac{\Delta x}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\text{corda}} = \frac{dx}{ds},\ \cos\beta = \frac{dy}{ds},\ \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

que dão
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Em cada ponto da curva ha uma infinidade de normaes, todas situadas no plano normal, cuja equação facilmente se vê (*Geom. An.*, n.º 174) que é

$$Z-z+\frac{X-x}{f'}+\frac{Y-y}{F'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E).$$

Se as equações da curva forem $z=fx,\ y=\psi x,$

será $f'=F'\times\psi'$; e as equações da tangente e do plano normal serão (*):

$$Z-z=(X-x)f',\ Z-z=(Y-y)\frac{f'}{\psi'} \ldots\ldots\ldots (D'),$$

$$(Z-z)f'+(Y-y)\psi'+X-x=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E').$$

149. Se a curva se considerar como intersecção de duas superficies, cujas equações são

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0,\ \chi(x,\ y,\ z)=0,$$

a derivação d'estas equações dará

$$\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{1}{f'}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{1}{F'}=0,\ \frac{d\chi}{dz}+\frac{d\chi}{dx}\cdot\frac{1}{f'}+\frac{d\chi}{dy}\cdot\frac{1}{F'}=0;$$

e a substituição de f' e F' tiradas de (D), dará ás equações da tangente a fórma:

$$(Z-z)\frac{d\varphi}{dz}+(Y-y)\frac{d\varphi}{dy}+(X-x)\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

$$(Z-z)\frac{d\chi}{dz}+(Y-y)\frac{d\chi}{dy}+(X-x)\frac{d\chi}{dx}=0 \ldots\ldots (D'');$$

sendo portanto esta recta a intersecção dos planos tangentes ás duas superficies.

(*) No caso de ser a curva plana, tomando por xy o plano d'ella, será $fx=0$; e a equação (E′) se reduzirá a $X-x+(Y-y)\psi'=0$. Por conseguinte o plano normal é perpendicular ao da curva, e o seu traço é a normal.

150. Nos exemplos seguintes veremos o uso que se pode fazer das equações (A) e (C).

I. Superficies cylindricas. A propriedade caracteristica dos cylindros é que a linha de contacto da sua superficie com qualquer plano tangente é uma recta generatriz, parallela a outra cujas equações, $x = az$, $y = bz$, são dadas. Traduzindo pois analyticamente esta propriedade (*Geom. Anal.*, n.º 173), teremos a equação geral dos cylindros

$$ap + bq = 1.$$

O mesmo daria a equação finita (*Geom. Anal.*, n.º 167)

$$y - b = \mathrm{F}(x - az),$$

applicando o que se disse no n.º 44.

II. Superficies conicas. Se na equação (A) substituirmos, em logar de X, Y, Z, as coordenadas a, b, c, d'um ponto fixo, teremos a equação dos cones, de que este ponto é vertice,

$$z - c = p(x - a) + q(y - b).$$

O mesmo se obteria applicando o que se disse no n.º 44 á equação finita (*Geom. Anal.*, n.º 168)

$$\frac{y-b}{z-c} = \mathrm{F}\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

III. Superficies conoides. Se uma recta se move, encontrando sempre uma curva e um eixo dados, e conservando-se parallela a um plano director dado, a superficie gerada por ella chama-se um *conoide*. Exprimamos analyticamente a propriedade, que caracteriza estas superficies, de ser uma sua intersecção com o plano tangente sempre parallela ao plano director.

Tomando para origem a intersecção do eixo com o plano director, teremos as equações:

do eixo $\quad \mathrm{X} = az, \ \mathrm{Y} = bz;$

da intersecção com o plano tangente $\quad \mathrm{Z} = z, \ (\mathrm{X} - x)p + (\mathrm{Y} - y)q = 0.$

E exprimindo a condição de se cortarem estas rectas, virá a equação dos conoides

$$(x-az)p+(y-bz)q=0.$$

Se traduzissemos analyticamente a geração do conoide por uma parallela ao plano director, que se movesse encontrando sempre o eixo e uma directriz (*Compl. de Geom. Descr.*, n.º 8), teriamos as equações:

da generatriz $\quad z=\beta,\ y=mx+n;$

das directrizes $\quad x=az,\ y=bz;\ f=0,\ \varphi=0.$

Por dever a generatriz encontrar a primeira directriz no ponto $(a\beta, b\beta, \beta)$, as suas equações tornar-se-iam em $z=\beta,\ y-b\beta=m(x-a\beta)$; e depois a segunda condição, de encontrar a outra directiz, daria $\beta=F(m)$. Portanto a equação finita da superficie é $z=F\left(\dfrac{y-bz}{x-az}\right)$; e pelo n.º 44 achariamos a equação differencial precedente.

No caso do conoide recto, isto é, de $a=0$, $b=0$, estas equações reduzem-se a

$$z=F\left(\frac{y}{x}\right),\ \text{e}\ px+qy=0.$$

IV. Superficies de revolução. Como todas as normaes de qualquer superficie de revolução encontram o eixo, vê-se que, se eliminarmos X, Y, Z, entre as equações (C) da normal e as do eixo, a resultante será a equação d'estas superficies. Assim, se o eixo de revolução é o dos z, a eliminação entre as suas equações $X=0$, $Y=0$ e (C) dá

$$py-qx=0.$$

Obter-se-ia tambem esta equação applicando o que se disse no n.º 44 á finita (*Geom. Anal.*, n.º 169) $z=F(x^2+y^2)$.

V. Superficies planificaveis. Nestas superficies a recta generatriz deve mover-se de modo que o plano tangente seja o mesmo em todos os pontos d'ella.

Sejam as equações da generatriz $\quad x=az+\alpha,\ y=bz+\beta;$

Como $p, q, z-px-qy$, não devem variar ao longo d'esta recta: suppondo substituidas nellas as expressões de x e y, egualaremos a zero as suas derivadas; o que dará

$$ra+sb=0,\ sa+tb=0,\ 1-ap-bq=0.$$

Eliminando $\frac{b}{a}$ entre as duas primeiras, vem a equação das superficies planificaveis

$$rt-s^2=0.$$

A terceira mostra (*Geom. Anal.*, n.° 173) que a generatriz é parallela ao plano tangente; e que está no mesmo plano, por ser, além disso, o ponto de contacto commum a ella e ao plano. Com effeito a condição (*Geom. Anal.*, n.° 173) $\alpha p+\beta q+z-p(az+\alpha)-q(bz+\beta)=0$, de cortarem ambos o eixo dos z no mesmo ponto, reduz-se tambem a $1-ap-bq=0$.

Se considerassemos a superficie como gerada pelo movimento d'uma recta sempre tangente á *aresta de reversão*, $x=\varphi z$, $y=\psi z$, a sua equação finita resultaria de eliminar a arbitraria α entre as equações da generatriz assim definida, $x-\varphi(\alpha)=(z-\alpha)\varphi'\alpha$, $y-\psi(\alpha)=(z-\alpha)\psi'\alpha$; sendo $(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha)$ o ponto variavel de contacto (*Compl. de Geom. descr.*, n.° 12).

Mas a derivação d'estas equações da generatriz em ordem a x e a y daria quatro, entre as quaes, se se eliminassem α, $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$, resultaria uma da fórma $p=\mathrm{F}(q)$; e portanto a eliminação de $\mathrm{F}'q$ entre as duas derivadas d'esta daria a equação que achamos.

VI. Superficies regradas. Nestas superficies, das quaes são um caso particular as planificaveis, o plano tangente contém a generatriz,

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta;$$

condição que se exprime, como no caso precedente, por

$$ap+bq=1.$$

Suppondo pois substituidas nesta equação as expressões de x e y, e derivando duas vezes, resultam, para eliminar a e b, as equações

$$a^2r + 2abs + b^2t = 0,\ a^3u + 3a^2bm + 3ab^2n + b^3v = 0;$$

onde u, m, n, v representam as derivadas da terceira ordem

$$\frac{d^3z}{dx^3},\ \frac{d^3z}{dx^2dy},\ \frac{d^3z}{dxdy^2},\ \frac{d^3z}{dy^3}.$$

E eliminando $\frac{b}{a}$, como se fez nos *Compl. de Geom. descr.*, pag. 100, resulta a equação das superficies regradas

$$A^2r - 2ABs + B^2t = 0;$$

sendo $\quad A = 3rnt - 2rsv - t^2u,\ B = 3rmt - 2stu - r^2v.$

Se considerassemos a superficie como gerada pelo movimento d'uma recta que encontra sempre tres directrizes, a eliminação de tres parametros pelas tres condições dos encontros deixaria um só parametro arbitrario nas duas equações da generatriz, o systema das quaes equivaleria á equação finita da superficie. Depois a eliminação entre as equações provenientes de derivar aquellas equações tres vezes consecutivas, considerando esse parametro e uma das variaveis como funcções das outras duas, daria a mesma equação differencial que acabamos de achar. Advertindo que da escolha das duas variaveis independentes pode depender em parte a facilidade do calculo (*Compl. de Geom. descr.*, n.° 14 e pag. 100; *Calc. diff.* de Cournot, n.° 244; *Calc. diff.* de Serret, n.° 358).

151. Contactos de segunda ordem. Appliquemos a theoria dos contactos d'esta ordem ás curvas de dupla curvatura (V. *Fonct. Anal.*, n.° **141**, e *An. appl.* de Monge).

1.° Plano osculador. Sejam as equações d'uma curva, e a do plano osculador em um ponto (x, y, z) d'ella:

$$z = fx,\ y = \psi x;\ Z - z = A(X - x) + B(Y - y).$$

Para determinar A e B de modo que se dê o contacto de segunda ordem, devemos (n.° 144) mudar nas equações da curva x em $x+h$, o que dará $y+k$ e $z+l$; depois substituir na equação do plano X por $x+h$ e Y por $y+k$, o que dará $z+l'$; e finalmente egualar os termos em h e os termos em h^2 de l aos respectivos de l'. Teremos assim:

$$\text{na curva} \quad k=h\psi'+\frac{1}{2}h^2\psi''+\ldots,\ l=hf'+\frac{1}{2}h^2f''+\ldots;$$

$$\text{no plano} \quad l'=\mathrm{A}h+\mathrm{B}k=(\mathrm{A}+\mathrm{B}\psi')h+\frac{1}{2}\mathrm{B}h^2\psi''+\ldots:$$

$$\text{e depois} \quad \mathrm{A}+\mathrm{B}\psi'=f',\ \mathrm{B}\psi''=f'',$$

por meio das quaes, eliminando A e B, a equação do plano osculador fica (*)

$$\psi''(\mathrm{Z}-z)=(f'\psi''-f''\psi')\cdot(\mathrm{X}-x)+f''\cdot(\mathrm{Y}-y)\ldots\ldots(\mathrm{F});$$

á que satisfazem as (D') da tangente, como devem satisfazer.

2.° **Circulo osculador.** Considerando este circulo como intersecção d'uma esphera do mesmo raio com um plano central, e chamando a, b, c, as coordenadas do centro e ρ o raio da esphera, as equações do circulo serão:

$$\mathrm{Z}-c=\mathrm{A}(\mathrm{X}-a)+\mathrm{B}(\mathrm{Y}-b),\ (\mathrm{X}-a)^2+(\mathrm{Y}-b)^2+(\mathrm{Z}-c)^2=\rho^2\ldots(1).$$

Devemos (n.° 144) mudar x em $x+h$ nas equações da curva, e X em $x+h$ nas do circulo, o que dará $y+k$ e $z+l$ nas primeiras, $y+k'$ e $z+l'$ nas segundas; e depois egualar k a k' e l a l', independentemente dos valores de h; isto é, pôr k e l por k' e l', eliminar k e l, e egualar a zero, em cada uma das resultantes, os termos em h e os termos em h^2.

Teremos assim, até h^2:

$$\text{nas equações (1)} \quad l=\mathrm{A}h+\mathrm{B}k,\ 2(x-a)h+h^2+2(y-b)k+k^2+2(z-c)l+l^2=0;$$

$$\text{nas equações da curva} \quad k=h\psi'+\frac{1}{2}h^2\psi''+\ldots,\ l=hf'+\frac{1}{2}h^2f''+\ldots$$

(*) Se a curva fosse plana, e tomassemos o seu plano por xy, seriam f' e f'' nullos; e esta equação, reduzindo-se a $\mathrm{Z}=z$, mostraria, como devia mostrar, que nas curvas planas o plano osculador é o plano d'ellas.

Depois substituindo nas duas primeiras as expressões de k e l dadas pelas duas ultimas; e finalmente egualando separadamente a zero os termos em h e os termos em h^2, virão:

$$\left.\begin{array}{c} A+B\psi'=f',\ B\psi''=f'', \\ x-a+(y-b)\psi'+(z-c)f'=0,\ 1+(y-b)\psi''+(z-c)f''+\psi'^2+f'^2=0 \end{array}\right\}\ldots(2).$$

As duas primeiras mostram (1.°) que o plano do circulo é o plano osculador.

Eliminando A, B, a, b, c, ρ entre (2) e (1), resultarão as coordenadas do centro e o raio do circulo osculador:

$$\left.\begin{array}{l} a=x-\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)(\psi'\psi''+f'f'')}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2},\ b=y+\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)[\psi''+f'(f'\psi''-f''\psi')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2}, \\ c=z+\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)[f''+\psi'(\psi'f''-\psi''f')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2},\ \rho=-\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{[f''^2+\psi''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2]^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\}..(3)$$

Generalisando a variavel independente (n.° 46), isto é, substituindo

$$\psi'=\frac{dy}{dx},\ \psi''=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3},\ f'=\frac{dz}{dx},\ f''=\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dx^3},$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

e pondo $\quad X=dyd^2z-dzd^2y,\ Y=dzd^2x-dxd^2z,\ Z=dxd^2y-dyd^2x,$

as equações (3) tomam a fórma:

$$\left.\begin{array}{l} a=x+\dfrac{ds^2(Ydz-Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2},\ b=y+\dfrac{ds^2(Zdx-Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2}, \\ c=z+\dfrac{ds^2(Xdy-Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2},\ \rho=\dfrac{ds^3}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\}\ldots\ldots(4).$$

Emfim, porque, em virtude de $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z$, são

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2[(d^2z)^2 + (d^2y)^2 + (d^2x)^2 - (d^2s)^2],$$

$$Ydz - Zdy = ds^3 d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ Zdx - Xdz = ds^3 d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ Xdy - Ydx = ds^3 d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

$$(d^2z)^2 + (d^2y)^2 + (d^2x)^2 - (d^2s)^2 = ds^2\left[\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2\right],$$

as formulas (4) transformam-se em:

$$\left.\begin{aligned}
a &= x + \frac{dsd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2},\\
b &= y + \frac{ds\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2},\\
c &= z + \frac{dsd\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2},\\
\rho &= \frac{ds}{\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

ou:

$$\left.\begin{aligned} a=x+\rho^2\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ b=y+\rho^2\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\ c=z+\rho^2\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}, \\ \rho=\frac{ds}{\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}\ldots(6).$$

152. Angulos de flexão, e de torsão. Sejam c, c', c'', os cosenos dos angulos que a tangente a uma curva plana faz com os eixos coordenados; e $c+\delta c$, $c'+\delta c'$, $c''+\delta c''$, os dos angulos que faz com os mesmos eixos a tangente consecutiva. Designando α o angulo de contingencia, e attendendo a $c^2+c'^2+c''^2=1$, $(c+\delta c)^2+(c'+\delta c')^2+(c''+\delta c'')^2=1$, é

$$2\cos\alpha=2c(c+\delta c)+2c'(c'+\delta c')+2c''(c''+\delta c'')=2-(\delta c^2+\delta c'^2+\delta c''^2);$$

ou $\qquad 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha=\alpha=\sqrt{\delta c^2+\delta c'^2+\delta c''^2}$; isto é, (n.º 121)

$$\alpha=\sqrt{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}=\frac{ds}{\rho}\ldots\ldots(7).$$

Imaginemos agora que, em cada ponto da curva de dupla curvatura, se construe um elemento, no plano osculador do antecedente, e fazendo com este o mesmo angulo de contingencia, o qual mede a *flexão;* e que se faz gyrar o elemento, assim construido, em volta do mesmo ponto, até que coincida com o elemento da curva. É evidente que o angulo θ, chamado de *torsão*, que por este movimento ficam fazendo entre si os dois planos osculadores consecutivos, e o angulo de *flexão* determinam a posição de cada elemento da curva.

Chamando $c_{\prime}$, $c_{\prime}'$, $c_{\prime}''$, e $c_{\prime}'+dc_{\prime}$, $c_{\prime}'+dc_{\prime}'$, $c_{\prime}''+dc_{\prime}''$, os cosenos dos angulos que fazem com os eixos coordenados as perpendiculares aos dois planos osculadores consecutivos, teremos, como ha pouco,

$$\theta=\sqrt{\delta c_{\prime}'^2+\delta c_{\prime}'^2+\delta c_{\prime}''^2}.$$

••

Mas, generalisando a variavel independente, como no n.º **151**, e usando das notações do mesmo numero, a equação (F) do plano osculador transforma-se em

$$X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0;$$

por conseguinte as equações da perpendicular a este plano são

$$x_1-x=\frac{X}{Z}(z_1-z),\ y_1-y=\frac{Y}{Z}(z_1-z);$$

e os cosenos c_i, c_i', c_i'', (*Geom. Anal.*, n.º 179, 1.º) são

$$c_i=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ c_i'=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ c_i''=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

que dão $\delta c_i=-\dfrac{Y(XdY-YdX)+Z(XdZ-ZdX)}{(X^2+Y^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}$; e similhantemente $\delta c_i'$, $\delta c_i''$.

Substituindo pois na expressão de θ, e pondo

$$A=XdY-YdX,\ B=XdZ-ZdX,\ C=YdZ-ZdY,$$

vem

$$\theta^2=\frac{A^2(Y^2+X^2)+B^2(Z^2+X^2)+C^2(Z^2+Y^2)-2ACXZ+2BCXY+2ABZY}{(X^2+Y^2+Z^2)^3},$$

que, attendendo a serem

$$A^2Z^2=AZ(BY-CX),\ B^2Y^2=BY(CX+AZ),\ C^2X^2=CX(BY-AZ),$$

se transforma em $\qquad \theta=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{X^2+Y^2+Z^2};$

e finalmente, por serem

$$A dy + B dz = 0,\ A dx - C dz = 0,\ B dx + C dy = 0,$$

isto é

$$C = \frac{A dx}{dz},\ B = -\frac{A dy}{dz},$$

a expressão do angulo de torsão θ toma a fórma:

$$\theta = \frac{A ds}{dz (X^2 + Y^2 + Z^2)} = \frac{A}{d\cancel{s}} \cdot \frac{\rho^2}{ds^5} \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$ z

sendo

$$\frac{A}{dz} = dz(d^2x d^3y - d^2y d^3x) + dy(d^2z d^3x - d^2x d^3z) + dx(d^2y d^3z - d^2z d^3y).$$

153. Esphera osculatriz. Como a equação da esphera,

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 = \rho^2,$$

tem quatro parametros, pode sujeitar-se a um simples contacto com a superficie em um ponto (x, y, z); o que dará as condições:

$$\left.\begin{array}{c} (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \rho^2, \\ x - a + p(z - c) = 0,\ y - b + q(z - c) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (9),$$

sendo p e q os valores de $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ tirados da equação da superficie $z = f(x, y)$.

Para qualquer raio ρ, estas equações darão as coordenadas a, b, c, do do centro; e ter-se-hão assim tantas espheras que tocam a superficie no ponto dado, quantos forem os valores que se attribuirem a ρ.

Pondo, por abreviar, $(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} = \varphi$, a eliminação dará:

$$c = z \pm \rho\varphi,\ b = y \mp \rho q \varphi,\ a = x \mp \rho p \varphi \ldots\ldots (10).$$

Por se terem supposto os P e Q tirados da equação da esphera eguaes respectivamente aos p e q tirados da equação da superficie proposta, é commum o plano tangente; e por serem então as duas ultimas equações (9) as da normal, o centro (a, b, c) está sobre esta recta.

154. Restando só a arbitraria ρ, nem sempre se pode satisfazer ás condições de osculação de segunda ordem, isto é, de serem tambem R, S, T, tiradas da equação da esphera eguaes respectivamente a r s, t, tiradas da equação da superficie proposta; e por isso, geralmente fallando, nem sempre ha esphera osculatriz para as superficies, como ha circulo osculador para as curvas; isto é, nem sempre ha uma esphera que tenha um contacto de segunda ordem com a superficie, em todas as direcções á roda do ponto (x, y, z).

155. Vejamos porém se, em uma direcção, se pode estabelecer a osculação de segunda ordem no ponto dado.

Seja
$$m = \frac{dy}{dx} = \text{lim.}\,\frac{k}{h} = \text{tang}\, i$$

a tangente trigonometrica do angulo i que faz com o eixo dos x a projecção sobre o plano xy d'uma das tangentes á superficie no ponto (x, y, z).

Para que nessa direcção haja uma osculação de segunda ordem, basta que sejam eguaes as sommas dos termos de segunda ordem (n.° 151)

$$r + 2sm + tm^2 = \text{R} + 2\text{S}m + \text{T}m^2.$$

Ora as derivadas da segunda ordem da equação da esphera relativas a x e y, attendendo ás condições do contacto de primeira ordem, são

$$(z-c)\,\text{R} + 1 + p^2 = 0,\ (z-c)\,\text{S} + pq = 0,\ (z-c)\,\text{T} + 1 + q^2 = 0:$$

tirando pois d'estas tres equações os valores de R, S, T, e substituindo-os na precedente, resulta

$$(z-c)(r + 2ms + tm^2) + 1 + p^2 + 2pqm + (1 + q^2)m^2 = 0 \ldots (11).$$

Esta equação dá $z-c$ em funcção de x, y, m; depois as equações (10) darão ρ, a, b, c, isto é, o raio de curvatura da secção feita na superficie por um plano tirado pela normal e pela tangente de que se tracta, e as coordenadas do centro:

$$\left.\begin{array}{l}\rho=\dfrac{\pm[1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2].\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2sm+tm^2},\\[2ex] a=x\pm\rho\cos\alpha,\ b=y\pm\rho\cos\beta,\ c=z\pm\rho\cos\gamma,\end{array}\right\}\ldots(\mathrm{E}),$$

chamando α, β, γ, os angulos feitos pela normal com os eixos dos x, dos y, e dos z (n.° 147).

Como ρ deve ser positivo, e o multiplicador do radical no numerador de (E) sempre o é, deverão empregar-se em ρ, a, b, c os signaes $\pm$, segundo for positivo ou negativo o denominador de ρ: ou tambem empregar sempre o signal superior, tomando o radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ de ρ, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ com o signal do denominador de (E); ou sempre o signal inferior, tomando o radical com o signal contrario ao do denominador de (E).

D'este modo acharemos as curvaturas da superficie em todas as direcções das secções normaes d'ellas.

156. Differenciando $dz=pdx+qdy$, para a superficie e para o plano tangente, vem, para aquella e para este, respectivamente:

$$d^2z=pd^2x+qd^2y+dx^2(r+2ms+m^2t),\ (d^2z)=pd^2x+qd^2y.$$

Portanto será $d^2z <$ ou $> (d^2z)$, e o plano tangente, na direcção dada por m, ficará acima ou abaixo do consecutivo, conforme for negativa ou positiva a expressão $r+2ms+m^2t$, que é denominador de (E); isto é, será a curva *concava* ou *convexa* para o plano xy, segundo for negativo ou positivo o denominador de (E).

E como o signal de $\quad r+2sm+tm^2=\dfrac{1}{t}[(mt+s)^2-(s^2-rt)]$

muda na passagem de m por $\dfrac{1}{t}(-s\pm\sqrt{s^2-rt})$, quando $s^2-rt>0$; é invariavel quando $s^2-rt<0$; e tambem invariavel quando $s^2-rt=0$, mas tornando-se a expressão nulla para $m=-\dfrac{s}{t}$: distinguem-se assim os casos em que a curvatura muda de sentido na passagem da tangente por duas direcções: em que se conserva no mesmo sentido para todas as direcções, e em que é nulla numa direcção.

157. Para ter as secções nas quaes a curvatura é maxima, faremos $\frac{d\rho}{dm}=0$. Assim a derivada de (11) em ordem a m, attendendo a que, em virtude da primeira das equações (10), a condição $\frac{d\rho}{dm}=0$ equivale a $\frac{dc}{dm}=0$, dá

$$(z-c)(s+tm)+pq+(1+q^2)m=0 \ldots\ldots\ldots (12),$$

entre a qual e (11) se deve eliminar m.

Podemos, para effectuar esta eliminação, abater (11) ao primeiro gráu, multiplicando (12) por m e subtrahindo de (11), o que conduz a

$$(z-c)sm+pqm+(z-c)r+1+p^2=0 \ldots\ldots\ldots (13);$$

depois, pondo $\quad A=tr-s^2,\ B=r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs,$

a eliminação dá $\quad A(z-c)^2+B(z-c)+\rho^{-2}=0 \ldots\ldots\ldots (14).$

Com os dois valores de $z-c$, que se tiram de (14), a primeira das equações (10) dará os raios ρ de maxima e minima curvatura da superficie no ponto (x, y, z), e depois uma das equações (12) ou (13) dará m, que determina a direcção das duas curvaturas.

Concebamos estas duas linhas de maxima e minima curvatura traçadas na superficie proposta. Por serem ellas independentes do systema de eixos a que se refere a superficie, podemos tomar o ponto dado para origem das coordenadas, e o plano tangente para plano dos xy; o que, tornando x, y, z, p, q, nullos, reduzirá as equações (12) e (13) a

$$c(s+tm)=m,\ c(sm+r)=1 \ldots\ldots\ldots (15),$$

e por conseguinte $\quad sm^2+(r-t)m-s=0 \ldots\ldots\ldots (16).$

Por ser -1 o producto das raizes d'esta equação, as duas secções cortam-se perpendicularmente. E portanto, exceptuando casos particulares nos quaes a equação (14) se reduzisse a uma identidade, podemos concluir que: *Em qualquer ponto d'uma superficie ha duas secções normaes, perpendiculares uma á outra, na direcção das quaes a curvatura é maxima ou minima.*

Estas secções chamam-se *principaes*.

158. No mesmo systema de coordenadas a expressão do raio de curvatura de qualquer secção normal é (n.º 155) $\rho = \frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}$.

Se tomarmos por eixos dos x e dos y as duas tangentes ás secções principaes, será em uma d'ellas $m=0$ e na outra $m=\infty$; e uma das equações (15) mostra que será $s=0$. Chamando pois ρ' um dos raios e ρ'' o outro, serão

$$\rho' = \frac{1}{r},\ \rho'' = \frac{1}{t};$$

e por conseguinte $$\frac{1}{\rho} = \frac{r}{1+m^2} + \frac{t}{1+\frac{1}{m^2}} = \frac{\cos^2 i}{\rho'} + \frac{\operatorname{sen}^2 i}{\rho''} \ldots (16),$$

que é o theorema de Euler.

Para outra secção perpendicular a esta, será

$$\frac{1}{\rho_{\prime}} = \frac{\operatorname{sen}^2 i}{\rho'} + \frac{\cos^2 i}{\rho''};$$

d'onde resulta $$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_{\prime}} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Os pontos onde é $\rho' = \rho''$, e por conseguinte (eq. 16) $\rho = \rho'$ para qualquer secção normal, chamam-se *umbilicaes* ou *de curvatura espherica*.

159. Se tivessemos tambem feito no n.º 153 o mesmo que fizemos no n.º 155, egualando entre si a totalidade dos termos de primeira ordem, satisfariamos ás condições do contacto de segunda ordem; e ficaria ainda uma indeterminada, da qual poderiamos dispôr para achar a curvatura em todas as direcções em que m fosse o mesmo. Por onde se vê que é possivel estabelecer o contacto de segunda ordem na direcção de quaesquer secções differentes da normal: o que vamos fazer.

Sejam: ρ, α, β, γ, o raio de curvatura da secção normal que passa por uma tangente á superficie, e os angulos que elle faz com os eixos dos x, y, z; ρ', α', β', γ', o raio de curvatura e os angulos analogos de outra secção, que passa pela mesma tangente, e cujo plano faz com o da primeira o angulo ω.

É (n.º 151, (6))

$$\cos\alpha' = \frac{a'-x}{\rho'} = \rho'\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ \cos\beta' = \rho'\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\ \cos\gamma' = \rho'\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds},$$

e (n.º 147)

$$\cos\alpha = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\beta = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Portanto $\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$

$$= \rho'\frac{\dfrac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} - q\dfrac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} - p\dfrac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}}{\sqrt{1+p^2+p^2}}\ (*);$$

a qual, attendendo a que a proposta $z=f(x,y)$ dá $\dfrac{dz}{ds} = p\dfrac{dx}{ds} + q\dfrac{dy}{ds}$,

e $$\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = p\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} + q\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} + r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

se transforma em

$$\cos\omega = \rho'\frac{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou $$\cos\omega = \rho'\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2(r+2sm+tm^2)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

(*) Como esta expressão dá $\rho' = A\cos\omega$, sendo A independente de ω: se fizermos $\omega=0$, a que corresponde $\rho'=\rho$, teremos $\rho=A$, e por conseguinte será $\rho'=\rho\cos\omega$; ficando assim muito abreviada a demonstração do theorema de Meusnier (Vej. Cournot, *Calc. diff.*, n.º 275).

Mas as equações

$$\frac{dz}{ds} = (p + qm)\frac{dx}{ds}, \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \frac{dy}{ds} = m\frac{dx}{ds},$$

dão $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{1}{1 + p^2 + 2pqm + (1 + q^2)m^2};$$

logo

$$\rho' = \frac{[1 + p^2 + 2pqm + (1 + q^2)m^2]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2sm + tm^2}\cos\omega = \rho\cos\omega \ldots (F).$$

Esta equação comprehende o theorema de Meusnier, segundo o qual o raio de curvatura de qualquer das secções, que passam por uma tangente á superficie, é egual ao da secção normal, que passa pela mesma tangente, multiplicado pelo coseno do angulo que fazem entre si as duas secções; isto é, o raio de curvatura da secção proposta é egual ao da secção normal projectado sobre o plano da primeira.

Podem consultar-se sobre esta materia: a *Theoria dos contactos das superficies e curvas no espaço, Coimbra, 1869*, do sr. *Luiz da Costa e Almeida*; e o *Additamento ás notas do Calculo differencial e integral de Francoeur, Coimbra, 1845, pag. 11 até 21.*

Limites das superficies

160. Para achar o maximo e o minimo z d'uma superficie curva, cuja equação é $z=f(x, y)$, ou $F(x, y, z)=0$, devemos (n.° 102) pôr $p=0$ e $q=0$, ou (n.° 40) $\frac{dF}{dx}=0$ e $\frac{dF}{dy}=0$, que são as condições do parallelismo do plano tangente ao dos xy; e eliminar x, y, z entre as tres equações:

$$z=f(x, y),\ p=0,\ q=0;\ \text{ou}\ F(x, y, z)=0,\ \frac{dF}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}=0.$$

E depois a condição (2) do n.° 102 mostrará se nos pontos assim determinados ha maximo ou ha minimo.

161. A condição de ser o plano tangente perpendicular ao dos zy exige (n.° 146) que seja $p=0$, ou $\frac{dF}{dx}=0$. Portanto, para que o plano tangente em um ponto seja perpendicular ao dos zy, é necessario que as coordenadas d'este ponto satisfaçam ás equações:

$$z=f(x, y),\ p=0;\ \text{ou}\ F(x, y, z)=0,\ \frac{dF}{dx}=0.$$

Todos os pontos, que satisfizerem a estas duas equações, estarão sobre uma curva limite da superficie no sentido dos yz; e, eliminando x, acharse-ha a projecção d'esta curva, e da superficie, sobre o plano dos yz.

Do mesmo modo se obterá a projecção da superficie sobre o plano dos zx, eliminando y entre as equações $z=f(x, y)$, $q=0$; ou entre $F(x, y, z)=0$, $\frac{dF}{dy}=0$.

Assim na esphera, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$, é $\frac{dF}{dz}=z-c$; e a eliminação entre $\frac{dF}{dz}=0$ e a proposta dá, como devia dar, a equação d'um circulo, projecção sobre o plano dos xy,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Rectificações, áreas e volumes

162. I. Projectado sobre o plano dos xy um arco de curva no espaço, *planifiquemos* o cylindro recto, cuja base é projecção do arco; e sejam s o arco, λ a sua projecção, t a área da porção do cylindro comprehendida entre a curva e a projecção. Como λ fica desenvolvido em linha recta, podemos referir o arco s ás coordenadas orthogonaes z e λ, e teremos então

$$dt = z d\lambda,\ ds^2 = d\lambda^2 + dz^2;$$

que, por ser, no plano da base, $d\lambda^2 = dx^2 + dy^2$,

se transformam em

$$dt = z\sqrt{dx^2 + dy^2},\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Se das equações da curva, $M = 0$, $N = 0$, que são as de duas superficies de cuja intersecção ella resulta, tirarmos z, y, dz e dy em funcção de x e dx, e os substituirmos nas expressões precedentes de dt e ds, a integração, isto é, a reversão das expressões differenciaes ás primitivas, dará a área t da porção do cylindro, e o comprimento do arco s.

163. II. Dada a equação d'uma curva plana, $y = fx$, procuremos o volume $v = Fx$ e a superficie $u = \varphi x$ do solido gerado pela revolução em volta de Ax do trapezio curvilineo CBMP (Fig. 1), comprehendido entre um arco d'ella, o eixo dos x, e as ordenadas extremas.

Mudando x em $x + PP' = x + h$, os augmentos k, i, l, de y, v, u, serão

$$k = y'h + \ldots,\ i = v'h + \ldots,\ l = u'h + \ldots;$$

representando i, l, o volume e a área do solido gerado pela revolução do trapezio curvilineo PMM'P'.

Mas o volume do solido gerado pela revolução d'este trapezio está comprehendido entre os volumes dos cylindros gerados pela revolução dos rectangulos PMQP', PLM'P'; e a área do mesmo solido está comprehendida entre as áreas dos troncos de cone descriptos pelos trapezios rectilineos PMM'P, PMHP'; portanto os limites para os quaes tendem a razão dos volumes dos dois solidos, e a das áreas dos dois troncos de cone, serão os mesmos para que tendem a razão entre o volume d'um d'aquelles cylindros e i, e a razão entre a área d'um d'aquelles cones troncados e l; e como aquelles limites são

$$\lim. \frac{\pi(y+k)^2 h}{\pi y^2 h} = 1,\ \lim. \frac{\pi(2y+y'h).\mathrm{MH}}{\pi(2y+k).\mathrm{MM'}} = \lim. \frac{\pi(2y+y'h)}{\pi(2y+k)} \lim. \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MM'}} = 1,$$

serão tambem
$$1 = \lim. \frac{i}{\pi y^2 h} = \lim. \frac{v' + \frac{1}{2} v'' h + \ldots}{\pi y^2} = \frac{v'}{\pi y^2},$$

$$1 = \lim. \frac{l}{\pi(2y+k).\mathrm{MM'}} = \lim. \frac{u' + \frac{1}{2} u'' h + \ldots}{\pi(2y+k)\sqrt{1+y'^2+2y'y''h+ \ldots}} = \frac{u'}{2\pi y\sqrt{1+y'^2}},$$

que dão
$$v' = \pi y^2,\ u' = 2\pi y\sqrt{1+y'^2} = 2\pi y.s';$$

ou
$$dv = \pi y^2 dx,\ du = 2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Substituindo pois nestas equações fx em logar de y e $f'xdx$ em logar de dy, e integrando, ter-se-hão v e u.

164. III. Sobre o plano ABC (Fig. 35) tracemos um trapezio CDEF, cujos lados parallelos CD, EF, sejam perpendiculares á intersecção AB do plano com outro que faz com o primeiro um angulo α; e seja $cdef$ a projecção d'este trapezio sobre o segundo plano. Será a área

$$cdef = \frac{1}{2}(cd+ef).\mathrm{GH} = \frac{1}{2}(\mathrm{CD}\cos\alpha + \mathrm{EF}\cos\alpha).\mathrm{GH} = \mathrm{CDEF}\cos\alpha.$$

Esta razão entre os trapezios e as suas projecções tem egualmente logar para os triangulos; porque (Fig. 36), tirando CD e LF perpendiculares a AB, e CE parallela a DF, forma-se o parallelogrammo CDLF, cuja área é dupla da do triangulo DIF, e cuja projecção é dupla da projecção do triangulo.

Como as figuras rectilineas se podem decompor em triangulos, a mesma relação subsiste para qualquer polygono plano; e pode ainda extender-se, pelo methodo dos limites, a qualquer área plana. Portanto:

A projecção P *de qualquer área plana* A *sobre um plano é egual ao producto* A $\cos\alpha$ *d'esta área pelo coseno do angulo* α *dos dois planos.*

Assim, chamando α, α', α'' os angulos que faz uma área plana A com os tres planos coordenados; e P, P$'$, P$''$, as suas projecções sobre os mesmos planos: teremos

$$\mathrm{P}=\mathrm{A}\cos\alpha,\quad \mathrm{P}'=\mathrm{A}\cos\alpha',\quad \mathrm{P}''=\mathrm{A}\cos\alpha'',$$

que dão
$$\mathrm{P}^2+\mathrm{P}'^2+\mathrm{P}''^2=\mathrm{A}^2.$$

Logo: *O quadrado d'uma área plana é egual á somma dos quadrados das suas projecções sobre tres planos que se cortem rectangularmente.*

Estes theoremas servem para avaliar as áreas planas, situadas no espaço, por meio d'outras situadas nos planos rectangulares coordenados, isto é, por meio d'outras expressas cada uma em funcção de duas variaveis.

165. IV. Seja a equação d'uma superficie, $z=f(x, y)$;

e M (Fig. 37) um ponto (x, y, z) d'ella.

Tirando quatro planos: dois parallelos aos xz, e correspondentes a y, $y+k$; dois parallelos aos yz, e correspondentes a x, $x+h$: chamemos v o volume do tronco mixtilineo, que é terminado pelo plano dos xy, pela superficie e por aquelles quatro planos, e cuja base no plano dos xy é o rectangulo comprehendido por h e k; e u a área da porção da superficie, que termina este tronco. E chamemos $\mathrm{V}=\mathrm{F}(x, y)$ o tronco comprehendido entre os seguintes limites: plano dos xy; planos parallelos a xz, um á distancia y, outro a uma distancia dada b do mesmo plano; planos parallelos a yz, um á distancia x, outro a uma distancia dada a do mesmo plano.

Procurando o augmento de V no sentido dos y, ou o tronco cuja base é o rectangulo xk; e depois o augmento d'este tronco no sentido dos x, ou o tronco v cuja base é o rectangulo hk: teremos

$$v = F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - [F(x, y+k) - F(x, y)].$$

E similhantemente a respeito da área u.

Emfim, desenvolvendo estas funcções pelo theorema de Taylor, e reduzindo, virá:

$$v = hk\frac{d^2V}{dxdy} + \ldots, \quad u = hk\frac{d^2U}{dxdy} + \ldots;$$

suppondo h e k sufficientemente pequenos para que a curvatura da porção de superficie u seja no mesmo sentido em todos os seus pontos. Posto isto:

1.° Os prismas cuja base commum é a base do tronco v, e cujas alturas são a minima $z+\alpha$ e a maxima $z+\beta$ das quatro ordenadas $f(x, y)$, $f(x+h, y)$, $f(x, y+k)$, $f(x+h, y+k)$, comprehendem aquelle tronco; e como a razão d'estes prismas $\frac{hk(z+\alpha)}{hk(z+\beta)}$, tem por limite a unidade, será tambem esta o limite da razão de qualquer d'elles para o tronco; isto é,

$$1 = \lim.\frac{v}{hk(z+\alpha)} = \lim.\frac{\frac{d^2V}{dxdy} + \ldots}{z+\alpha} = \frac{\frac{d^2V}{dxdy}}{z}.$$

2.° Como a unidade é o limite da razão entre cada um dos arcos de curva, traçados por M na superficie u, e a tangente respectiva; e como estas tangentes existem no plano tangente: concebe-se que é tambem 1 o limite da razão entre u e a porção do plano tangente intercepta pelo tronco v, produzido indefinidamente. Mas, chamando θ o angulo que faz esta superficie plana com o plano dos xy, e attendendo a que a projecção d'ella neste plano é hk, temos (n.° 164)

$$\text{superf. tang. plana} = \frac{hk}{\cos\theta} = hk\sqrt{1+p^2+q^2};$$

por conseguinte (*)

$$1 = \lim. \frac{u}{hk\sqrt{1+p^2+q^2}} = \lim. \frac{\frac{d^2U}{dxdy}+\ldots}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\frac{d^2U}{dxdy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

166. Portanto, para ter V e U substituir-se-hão nas differenciaes

$$d^2V = zdxdy,\ d^2U = dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

por z, p, q, as suas expressões em x e y, tiradas da equação da superficie $z=f(x, y)$ e das suas derivadas em ordem a x e em ordem a y; e depois integrar-se-ha duas vezes, uma relativamente a y desde b até y, outra relativamente a x desde a até x.

(*) O mesmo se acha partindo (*Fonct. anal.*, n.º 79) do principio de estar u comprehendido entre a maxima e a minima das secções feitas no tronco pelos quatro planos tangentes á superficie tirados pelas extremidades das quatro ordenadas $f(x, y)$, $f(x+h, y)$, $f(x, y+k)$, $f(x+h, y+k)$. Por quanto, sendo 1 o limite da razão d'aquellas duas secções,

$$\frac{\frac{hk}{\cos\theta_{,}}}{\frac{hk}{\cos\theta_{,,}}} = \frac{\sqrt{1+(p+\alpha_{,,})^2+(q+\beta_{,,})^2}}{\sqrt{1+(p+\alpha_1)^2+(q+\beta_1)^2}},$$

tambem deve ser 1 o limite da razão d'uma d'ellas para u; isto é, deve ser

$$1 = \lim. \frac{u}{hk\sqrt{1+(p+\alpha_{,})^2+(q+\beta_{,})^2}} = \lim. \frac{\frac{d^2U}{dxdy}+\ldots}{\sqrt{1+(p+\alpha_{,})^2+(q+\beta_{,})^2}} = \frac{\frac{d^2U}{dxdy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Do methodo infinitesimal

167. Quando se applica o methodo dos limites a uma equação entre constantes e variaveis indefinidamente pequenas, está demonstrado que a equação subsiste separadamente entre a totalidade dos termos constantes e entre a dos variaveis; e que, por isso, se pretendermos tão sómente obter uma relação entre as constantes, poderemos desprezar no decurso do calculo os termos compostos das variaveis, sem que esta omissão torne inexactos os resultados; seguros de não deverem influir as quantidades desprezadas. O mesmo dissemos por occasião de expôr o methodo das tangentes (*Geom. Anal.*, n.º 73).

Poderemos pois, em questões d'esta natureza, omittir os termos indefinidamente pequenos, que os geometras têm chamado, com Leibnitz, *infinitamente pequenos*, ou *infinitesimos*; omissão que abreviará os calculos, sem os tornar inexactos: apresentando-se a theoria com todo o rigor, quando se provar que as quantidades omittidas são da ordem d'aquellas, que por fim devem desapparecer dos resultados.

Importa muito que não nos privemos do auxilio d'este methodo; porque é elle precioso para gravar na memoria os resultados e para facilitar as investigações analyticas complicadas, sem lhe faltar na realidade o rigor de que parece carecer.

168. Appliquemos estas noções ao calculo differencial.

Sejam $y, z, t, \ldots$ funcções dadas de x. Suppondo a x um augmento Δx, os correspondentes de $y, z, t, \ldots$, tirados das equações que ligam estas variaveis com x, terão a fórma

$$\Delta y = A\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots, \quad \Delta z = A'\Delta x + B'(\Delta x)^2 + \ldots$$

Para fazer calculos sobre estas expressões, temos de combinar entre si as quantidades $\Delta y, \Delta z, \ldots$, formando equações $M = 0$ em que ellas entrem. Mas a substituição das expressões de $\Delta y, \Delta z, \ldots$ dará resultados que, ordenando relativamente ás potencias de Δx, se comporão de termos, d'entre os quaes ficarão elevados a menor expoente os que provierem de $A\Delta x, A'\Delta x, \ldots$ Portanto, se dividirmos a equação pela potencia de Δx que for factor commum, só ficarão desembaraçados d'esta quantidade os coefficientes A, A',...; e se ella é tal, que pode diminuir indefinidamente, sem que por isso variem x, y, z,..., deverá subsistir a equação $M=0$ entre os termos não multiplicados por B, B',... Por onde se vê que poderemos, no principio do calculo, supprimir os termos d'esta especie, e escrever $dy=Adx$, $dz=A'dx$,... dizendo, para evitar circumlocuções, que se desprezam os outros termos como *infinitamente pequenos d'ordem superior*.

Neste modo de tractar o calculo differencial concebem-se as grandezas como formadas de partes elementares, a que se dá o nome de *differenciaes*, e que se designam pela caracteristica d, como já dissemos (n.º 3). Estas differenciaes não são os elementos realizaveis, mas differem d'elles em quantidades que se podem desprezar, e que o calculo faria desapparecer se as tivessemos conservado. E assim, não influindo no resultado os erros provenientes de taes desprezos, somos conduzidos pela introducção d'essas quantidades auxiliares a calculos e considerações que abreviam muito os processos.

Tal é a ideia que devemos fazer das quantidades auxiliares dx, dy, dz,... introduzidas no calculo como elementos das quantidades x, y, z,..., em logar dos elementos realisaveis dos quaes ellas podem differir tão pouco quanto se quizer; sendo portanto inutil considerar essas differenças, as quaes pelo decurso do calculo deveriam desapparecer, sem ficar d'ellas vestigio nas relações procuradas entre x, y, z,....

169. Para fazer pois a substituição dos valores auxiliares, é necessaria, primeiro que tudo, a certeza de que as differenças entre elles e as verdadeiras variações viriam a destruir-se no resultado. E assim, para que o methodo se possa empregar com segurança, é necessario satisfazer á condição indispensavel *da egualdade dos limites ou das ultimas razões*, que consiste em comparar as grandezes verdadeiras com as que se lhes substituem, e fazel-as variar simultaneamente, para ver se, em sua diminuição progressiva, a razão entre ellas tende sempre e indefinidamente para a unidade, como seu limite.

Por exemplo, suppondo que o arco BM (Fig. 1) recebe o augmento infinitesimo MM', poderemos tomar pelo arco MM' a corda MM'; a qual será differencial do arco BM, porque, á medida que M se approximar de M', o arco e a corda diminuirão, e a sua razão tenderá constantemente para o limite 1 (n.º 110). Mas não podemos tomar MQ por differencial de BM, ainda que MM' e MQ se tornem conjunctamente nullos, por isso que não é 1 o limite da razão $\frac{MM'}{MQ}=\sec M'MP=\sqrt{1+\left[f'x+\frac{1}{2}hf''(x+h\theta)\right]^2}$.

..

O mesmo succede com ax^2 e bx; porque, a pezar de se anniquilarem simultaneamente quando $x = 0$, comtudo o limite da sua razão é 0 e não 1.

Quando não se consideram só estes limites, o calculo apresenta-se como um meio de approximação; mas, logo que se applica á investigação das *ultimas razões,* que são as mesmas para as differenças auxiliares e para as verdadeiras, adquire todo o rigor algebrico, e a sua linguagem e notação são exactas; porque nas palavras *infinitamente pequenas* e *differenciaes* vae subentendida a condição de usar d'estas quantidades para obter resultados relativos, não a ellas taes como se introduziram no calculo, mas ás suas ultimas razões.

A *differencial é assim uma parte da differença, cuja razão com ella tem a unidade por limite.*

170. Ha tambem neste genero de considerações um principio que não se deve perder de vista: é o da *homogeneidade,* o qual consiste em deverem as differenciaes ser da mesma especie que as respectivas grandezas de que se consideram como elementos, e da mesma ordem entre si. Não se deve pois tomar senão um solido por differencial d'outro solido, uma superficie por differencial d'outra superficie,...; o que corresponde a dizer que não é permittido considerar uma linha como um aggregado de pontos, uma superficie como um aggregado de linhas,...: e, além d'isso, não deve uma fórmula differencial conter senão termos que sejam expressões differenciaes da mesma ordem de grandeza.

APPLICAÇÕES

171. Funcções elementares. Representando z e t funcções de x, seja

$$y = zt.$$

Se mudarmos x em $x + h$, e desprezarmos o producto $dzdt$ da segunda ordem, que só pode conter dx^2, dx^3,..., teremos:

$$dy = (z + dz)(t + dt) - zt = tdz + zdt.$$

Desprezando do mesmo modo dz^2, dt^2, $dzdt$,..., a expressão $y = z^m$ dá

$$dy = (z + dz)^m - z^m = mz^{m-1}dz.$$

Por ser $a^h = 1 + kh + \ldots$, a expressão $y = a^z$ dá

$$dy = a^z(a^{dz} - 1) = ka^z dz.$$

A expressão $y = \log z$ dá

$$dy = \log(z + dz) - \log z = \log\left(1 + \frac{dz}{z}\right),$$

e por conseguinte

$$a^{dy} = 1 + kdy + \ldots = 1 + \frac{dz}{z}, \text{ ou } dy = \frac{1}{k}\,\frac{dz}{z} = \mathrm{M}\,\frac{dz}{z}.$$

E a expressão $y = \operatorname{sen} z$ dá (*Alg. Sup.*, n.º 156)

$$dy = \operatorname{sen}(z + dz) - \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} z(\cos dz - 1) + \cos z \operatorname{sen} dz = \cos z dz$$

172. Arcos. Seja $\mathrm{BM} = s$ (Fig. 1) um arco de curva plana terminado no ponto $\mathrm{M}(x, y)$, e $y = fx$ a equação da curva. Considere-se a tangente MT como prolongamento do elemento infinitesimo MM′, ou da corda MM′, que, podendo approximar-se indefinidamente de MH, faz que $\frac{\mathrm{M'Q}}{\mathrm{MQ}} = \operatorname{tang} \mathrm{MM'Q}$ se approxime tambem indefinidamente de tang HMQ, não differindo d'ella senão em uma quantidade infinitesima. O triangulo MM′Q, cujos lados são dx, dy, ds, attendendo a ser lim. $\frac{\text{corda}}{ds} = 1$, dá

$$\operatorname{tang} \mathrm{T} = \frac{dy}{dx},\ \cos \mathrm{T} = \frac{dx}{ds},\ \operatorname{sen} \mathrm{T} = \frac{dy}{ds},\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Do mesmo modo, sendo t a área CBMP, e tomando por dt o rectangulo infinitesimo MPP′Q, acha-se $dt = ydx$.

173. Coordenadas polares. Appliquemos este processo ás coordenadas polares. Do pólo A como centro (Fig. 8), e a partir de $M(r, \theta)$, descreva-se o arco $MQ = rd\theta$; e depois prolongue-se o elemento $MM' = ds$ até encontrar em T a perpendicular AT a AM. Será M'T a tangente; e os triangulos similhantes MM'Q, MTA, darão

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{AT}{r}, \text{ ou subt. } AT = \frac{r^2d\theta}{dr}.$$

O triangulo MM'Q dará tambem

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2, \text{ ou } ds^2 = r^2d\theta^2 + dr^2.$$

Finalmente a área $ABM = \tau$, comprehendida entre dois raios vectores, tem por differencial AMM', que se pode tomar por AMQ; e como é $AMQ = \frac{1}{2} AM . MQ$, resulta

$$d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

174. Áreas e volumes de solidos. I. Sejam v o volume e u a superficie do solido que a área CBMP (Fig. 1) gera na sua revolução em volta de Ax. A differencial de u é a superficie do tronco descripto pela revolução do arco MM', que tem por expressão $\frac{1}{2} \overline{MM'}$ (circumf. PM + circumf. $\overline{P'M'}$); ou $\overline{MM'}$. circumf. $\overline{PM}$, desprezada a differença $\overline{P'M'} - \overline{PM}$: e a differencial de v é o volume gerado pela revolução da área MPP'M', o qual se pode considerar como o cylindro descripto por MPP'Q, que tem por expressão $\overline{PP'}$. circumf. $\overline{PM}$.

Logo $$du = 2\pi y ds, \quad dv = \pi y^2 dx.$$

II. Seja BD (Fig. 37) uma superficie, cuja equação é $z = F(x, y)$. Quando se attribuir a x o augmento dx, o do volume $V = EFMN$ será

$MBFR = \frac{dV}{dx} dx$; e se depois neste resultado dermos a y o augmento dy, o do volume MBFR será $MCSP = \frac{d^2V}{dxdy} dxdy$. O augmento de $MN = U$ será similhantemente $MC = \frac{d^2U}{dxdy} dxdy$.

Mas: 1.° o plano $Mrsq$ (Fig. 33), parallelo ao xy, fórma o parallelipipedo MPSs, que se pode suppor egual a MPCS, e cujo volume é $zdxdy$; 2.° o plano $Mr's'q'$ pode suppor-se confundido com a superficie na extensão de MC; e como (n.° 164), designando θ a inclinação d'este plano sobre o dos xy, a base PS ou $dxdy$ é $MC \cos\theta$, teremos

$$MC = \frac{dxdy}{\cos\theta} = dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Logo $\qquad d^2V = zdxdy, \quad d^2U = dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$

175. Raios de curvatura das curvas planas. Sejam (Fig. 39) M_1M e MM' dois elementos consecutivos d'uma curva plana. As perpendiculares levantadas no meio das cordas d'estes elementos determinam o centro O, e o raio da curvatura $MO = \rho$.

O angulo de contingencia ω é o das tangentes consecutivas MT_1, $M'T$, isto é, o dos raios OM, OM', perpendiculares a ellas. E como, chamando c a corda MM', é $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}c}{\rho}$, se passarmos para os arcos, que differem das cordas em infinitesimos da terceira ordem, será $\omega = \frac{ds}{\rho}$.

Designando α o angulo da tangente com o eixo dos x, serão

$$\tang\alpha = y', \quad \omega = d\alpha = \frac{d(\tang\alpha)}{1 + \tang^2\alpha} = \frac{y''dx}{1 + y'^2}.$$

Portanto $\qquad \rho = \frac{ds}{\omega} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$

O angulo $\frac{1}{2}\omega$ é o feito pela corda com a tangente; e a perpendicular M'P' á tangente é

$$M'P' = c \operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega = \frac{ds^2}{2\rho}.$$

176. Normaes ás superficies. Sejam θ o angulo que a normal O_1N (Fig. 40) a uma superficie, no ponto O_1 infinitamente proximo de O, faz com a sua projecção O_1P sobre o plano da tangente OO_1x' e da normal Oz no ponto O; e ω o angulo O_1PO que esta projecção faz com Oz. Os angulos θ e ω determinam a posição de O_1N, quando é conhecida a de Oz.

Tomando o plano tangente em O para plano dos xy, como no n.º 157, são p e q nullos; e portanto, na passagem para o ponto O_1, tornam-se p e q em $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$; ou, chamando α o angulo que OO_1 faz com Ox, e δ o elemento OO_1,

$$dp = \delta(r\cos\alpha + s\operatorname{sen}\alpha),\quad dq = \delta(s\cos\alpha + t\operatorname{sen}\alpha);$$

e as equações da normal serão (n.º 147)

$$X - x + (Z - z)\,dp = 0,\quad Y - y + (Z - z)\,dq = 0.$$

Se passarmos para o systema de eixos Ox' e Oy', situados no mesmo plano tangente, teremos

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha,\quad y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha;$$

e as equações da normal transformar-se-hão em

$$(X' - x')\cos\alpha - (Y' - y')\operatorname{sen}\alpha + (Z - z)\,dp = 0,$$

$$(X' - x')\operatorname{sen}\alpha + (Y' - y')\cos\alpha + (Z - z)\,dq = 0,$$

que, eliminando alternadamente $Y' - y'$ e $X' - x'$, e pondo

$$dp\cos\alpha + dq\operatorname{sen}\alpha = dp',\quad dq\cos\alpha - dp\operatorname{sen}\alpha = dq',$$

tomam a fórma

$$X' - x' + (Z - z)\,dp' = 0,\ Y' - y' + (Z - z)\,dq' = 0.$$

Serão portanto (n.º 147):

$$\cos NO_1y_1' = -\operatorname{sen}\theta = \frac{-dq'}{\sqrt{1+dp'^2+dq'^2}};$$

e $$\cos O_1PZ\cos\theta = -\cos\omega\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+dp'^2+dq'^2}},$$

que dá $$\operatorname{sen}\omega = \frac{dp'}{\sqrt{1+dp'^2}};$$

ou, por serem dp' e dq' infinitesimos,

$$\operatorname{sen}\theta = dq' = \delta.[s(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (t-r)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha],$$

$$\operatorname{sen}\omega = dp' = \delta.(r\cos^2\alpha + 2s\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha).$$

Tomando para eixos dos x' e y' as tangentes ás secções principaes, serão (n.º 158) $\quad s=0,\ t-r = \dfrac{1}{\rho''} - \dfrac{1}{\rho'};$

e o theorema de Euler dará

$$\cos^2\alpha = \frac{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{1}{\rho''}}{\dfrac{1}{\rho'} - \dfrac{1}{\rho''}},\ \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\dfrac{1}{\rho'} - \dfrac{1}{\rho}}{\dfrac{1}{\rho'} - \dfrac{1}{\rho''}};$$

o que, substituido na expressão de $\operatorname{sen}^2\theta$, a transformará em

$$\operatorname{sen}^2\theta = \delta^2.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho''}\right)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right).$$

Portanto será $\theta = 0$, quando for $\rho = \rho''$, ou $\rho = \rho'$, isto é, quando OO_1 for uma secção principal.

O conhecimento dos angulos θ e ω é importante para o estudo das superficies á roda de cada normal. (Vej. *Calc. diff.* de Bertrand, n.os 650 e seguintes).

177. Superficies envolventes. Seja $$M = 0$$

a equação d'uma superficie; designando M uma funcção de x, y, z, e d'uma constante arbitraria α. Esta equação será a d'uma familia de superficies, cuja fórma geral dependerá da fórma de M, mas que se distinguirão umas das outras em virtude dos valores que se derem á arbitraria α.

Considerando α em dois estados consecutivos infinitamente proximos, teremos as equações

$$M = 0,\ M + \frac{dM}{d\alpha} d\alpha = 0;\ \text{ou}\ M = 0,\ \frac{dM}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots (1).$$

Estas equações caracterizam, para cada valor de α, a curva de contacto das duas superficies consecutivas, curva que tem o nome de *caracteristica*. E é claro que, se entre ellas eliminarmos α, a resultante em x, y, z, pertencerá a uma superficie, logar de todas as caracteristicas, a qual se chama *envolvente* das superficies *envolutas*, de que $M = 0$ é a equação.

178. Para verificar que a envolvente toca as envolutas em todos os pontos das caracteristicas, notaremos que, suppondo resolvida em ordem a α a segunda equação (1), e substituida essa expressão de α em M, resultará a equação da envolvente $\varphi(x, y, z) = 0$, que dá

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy} = \frac{dM}{dy} + \frac{dM}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dM}{dz} + \frac{dM}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dz};$$

ou, em virtude da mesma equação (1),

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dM}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy} = \frac{dM}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dM}{dz}.$$

Por onde se vê que são communs ás duas superficies os planos tangentes

$$\frac{dM}{dx}(x-x')+\frac{dM}{dy}(y-y')+\frac{dM}{dz}(z-z')=0,$$

ou $$\frac{d\varphi}{dx}(x-x')+\frac{d\varphi}{dy}(y-y')+\frac{d\varphi}{dz}(z-z')=0;$$

tendo logar o contacto ao longo das caracteristicas, que são as linhas communs a ambas as superficies.

179. Fazendo variar α em (1), vem as tres equações

$$M=0,\ \frac{dM}{d\alpha}=0,\ \frac{d^2M}{d\alpha^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}.$$

As equações $M=0$, $\frac{dM}{d\alpha}=0$, tornando-se em $\frac{dM}{d\alpha}=0$, $\frac{d^2M}{d\alpha^2}=0$, dão outra caracteristica infinitamente visinha da primeira; e os pontos communs a ambas satisfarão ás equações (2).

Portanto, fazendo passar α por valores infinitamente proximos successivos, achar-se-hão os pontos de contacto das caracteristicas consecutivas, que são pontos communs a tres superficies consecutivas. E se eliminarmos α entre estas equações, as duas resultantes em x, y, z, por serem independentes de α, representarão a curva, logar de todos os pontos communs ás caracteristicas consecutivas, á qual se dá o nome de *aresta de reversão:* sendo facil mostrar que a aresta de reversão toca todas as caracteristicas, como a envolvente toca todas as envolutas.

180. Finalmente, eliminando α entre

$$M=0,\ \frac{dM}{d\alpha}=0,\ \frac{d^2M}{d\alpha^2}=0,\ \frac{d^3M}{d\alpha^3}=0,$$

acha-se, em geral, um ponto singular da aresta de reversão.

181. Se for M funcção de x, y, z, e de duas variaveis, α, β, poderemos considerar α e β como sujeitas a satisfazer a uma relação arbitraria $\beta=\varphi\alpha$. Então, eliminando β de M, para uma fórma de φ, ficará só α arbitraria; e attribuindo a α valores consecutivos, ou eliminando entre (1) e (2), teremos as respectivas evolutas, envolvente, caracteristicas e aresta de reversão. Depois, fazendo variar a fórma de φ, teremos outros systemas consecutivos das mesmas linhas. Por onde se vê que a equação proposta $M=0$ representa uma serie infinita, ou genero de familias de envolutas, envolventes, caracteristicas e aresta de reversão de cada familia; $\varphi=0$ a familia; α o individuo.

182. Se a superficie movel, $M=0$, for um plano, as caracteristicas serão linhas rectas, por serem lineares as suas equações,

$$M=Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\frac{dM}{d\alpha}=\frac{dA}{d\alpha}x+\frac{dB}{d\alpha}y+\frac{dC}{d\alpha}z+\frac{dD}{d\alpha}=0;$$

e a envolvente, compondo-se assim de elementos infinitesimos separados por linhas rectas, será *planificavel*, isto é, poderá desdobrar-se sobre um plano, sem duplicatura nem ruptura, fazendo gyrar cada elemento em torno da recta caracteristica que o separa do elemento consecutivo, até ficar no plano d'elle.

As *superficies planificaveis* podem assim considerar-se como compostas de elementos planos de comprimento indefinido. Taes são o cone e o cylindro.

183. Procuremos a equação geral d'estas superficies, qualquer que seja a natureza do movimento que toma o plano movel.

Como o plano tangente coincide com um elemento plano da superficie, é claro que x, y, z, podem variar, sem que por isso varie este plano tangente.

Differenciemos pois em ordem a x, y, z, a equação do plano tangente

$$Z=pX+qY+z-px-qy;$$

e exprimamos que p, q, $z-px-qy$ não variam.

O calculo mostra que uma d'estas condições está comprehendida nas outras, e ha só duas distinctas

$$dp = 0, \; dq = 0,$$

ou

$$r + sy' = 0, \; s + ty' = 0.$$

Finalmente, eliminando y', que depende da direcção segundo a qual varía o ponto de contacto, vem a equação geral de todas as superficies planificaveis (n.º 150, V), qualquer que seja o modo particular de geração de cada uma,

$$rt - s^2 = 0.$$

Para a expressão analytica das propriedades que caracterizam as diversas *familias* de superficies, e para outras applicações da doutrina infinitesimal, relativas a ellas, consultem-se: o *Calcul différentiel* de Cournot e o de Serret, os *Complementos da Geom. descr.* de Fourcy, e principalmente a *Analyse appliquée à la géométrie* de Monge.

Linhas de curvatura das superficies

184. Chamam-se *linhas de curvatura* d'uma superficie as curvas formadas pelos pés das normaes á superficie que estão duas a duas no mesmo plano, isto é, que pertencem a uma superficie planificavel.

Sejam (n.° 147) as equações da normal nos pontos consecutivos (x, y, z), $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$,

$$X - x + p(Z - z) = 0,\ Y - y + q(Z - z) = 0 \ldots\ldots (1),$$

$$\left.\begin{aligned} X - x + p(Z - z) - dx - pdz + (Z - z)\,dp = 0,\\ Y - y + q(Z - z) - dy - qdz + (Z - z)\,dq = 0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (2).$$

Eliminando $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ entre estas equações, teremos a condição de estarem as duas rectas no mesmo plano,

$$(dx + pdz)\,dq - (dy + qdz)\,dp = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

a qual equação e a da superficie são as das linhas de curvatura.

185. Se quizermos a equação do plano das duas normaes, exprimiremos as condições de satisfazerem identicamente ambos os systemas (1) e (2) a

$$Z - z = A(X - x) + B(Z - z) \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

substituindo nesta as expressões de $X - x$, $Y - y$, tiradas d'elles.

Teremos assim

$$1 + Ap + Bq = 0,\ A[dx + pdz - (Z - z)\,dp] + B[dy + qdz - (Z - z)\,dq] = 0,$$

a segunda das quaes, para ser identica, se decompõe nas duas

$$A(dx+pdz)+B(dy+qdz)=0,\ Adp+Bdq=0.$$

A eliminação de $\frac{B}{A}$ entre estas reproduziria a (3); e a combinação de qualquer d'ellas com a primeira, $1+Ap+Bq=0$, dá os parametros que determinam a posição do plano,

$$A=\frac{dq}{qdp-pdq},\ B=-\frac{dp}{qdp-pdq}.$$

É por conseguinte

$$[X-x+p(Z-z)]\,dq-[Y-y+q(Z-z)]\,dp=0\ldots.(5)$$

a equação d'estes planos, tangentes á superficie planificavel formada pelas normaes consecutivas da superficie proposta que estão duas a duas em cada um d'elles.

186. Se na equação (3), ou $\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq}=M$, substituirmos por dz, dp, dq, as expressões de definição, $dz=pdx+qdy$, $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, acharemos a equação do 2.º gráu em $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pqdy}{rdx+sdy}=\frac{(1+q^2)\,dy+pqdx}{sdx+tdy},$$

que é a equação differencial das projecções das linhas de curvatura sobre o plano dos xy.

E se, como no n.º 157, tomarmos o plano tangente para plano dos xy, isto é, se fizermos $p=0$, $q=0$, esta equação será

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\,\frac{dy}{dx}-1=0;$$

por onde se vê que: *as duas linhas de curvatura se cortam perpendicularmente.*

Esta mesma equação, comparada com a ultima d'aquelle numero, mostra que é $m = \frac{dy}{dx}$, isto é, que: *as linhas de curvatura são tangentes ás secções principaes.*

187. As equações das caracteristicas da superficie planificavel são a (5) e a sua differencial, que, attendendo a (3), é

$$[X - x + p(Z - z)]\, d^2q - [Y - y + q(Z - z)]\, d^2p = 0 \ldots\ldots (6);$$

equações a que satisfazem as da normal nos pontos da linha de curvatura, como deve ser.

E, para ter a aresta de reversão, será necessaria tambem a differencial seguinte, a qual, attendendo ás (5) e (6) ou ás da normal, é

$$(Z - z - M)(dpd^2q - dqd^2p) = 0, \text{ ou } (Z - z) - M = 0 \ldots (7).$$

As equações (5) (6) e (7), ou a (7) e as da normal, dão as coordenadas

$$X = x - Mp,\ Y = y - Mq,\ Z = M,$$

dos pontos de contacto das caracteristicas da superficie planificavel com a aresta de reversão; e a serie d'estes pontos, correspondentes ás caracteristicas consecutivas, é a mesma aresta.

188. Como a distancia R d'estes pontos de contacto aos respectivos da superficie proposta é

$$\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} = M\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

será, attendendo ás equações de definição,

$$R = \frac{1 + p^2 + pqm}{r + ms}\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{pq + (1 + q^2)m}{s + mt}\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

ou, tomando o plano tangente para plano dos xy,

$$R=\frac{1}{r+ms}=\frac{m}{s+mt}=\frac{1}{\frac{s}{m}+t}.$$

E como, tomando para eixos coordenados os eixos principaes de curvatura, os valores de m são $m'=0$, $m''=\infty$, os correspondentes de R serão (n.º 158)

$$R'=\frac{1}{r}=\rho',\ R''=\frac{1}{t}=\rho'';$$

isto é, os pontos de contacto são os centros de curvatura das secções principaes da superficie proposta.

Portanto: *a aresta de reversão da superficie planificavel, formada pelas normaes da superficie proposta nos pontos d'uma linha de curvatura, é a serie dos centros de curvatura das secções principaes tangentes á mesma linha de curvatura.*

Vej. o *Calculo diff.* de Serret, n.os 322 e 323.

NOTA

Sobre a minima distancia entre duas rectas (n.º 103); e applicações

I. **189.** Sem particularizar as posições dos eixos coordenados, sejam as equações das duas rectas:

$$x = mz + \alpha,\ y = nz + \beta;\ x = m'z + \alpha',\ y = n'z + \beta'.$$

A distancia d'um ponto (x, y, z) da primeira a um ponto (x', y', z') da segunda é

$$R = \sqrt{(m'z' - mz + \alpha' - \alpha)^2 + (n'z' - nz + \beta' - \beta)^2 + (z' - z)^2}.$$

E as condições do minimo dão as derivadas:

$$(m'z' - mz + \alpha' - \alpha)\, m' + (n'z' - nz + \beta' - \beta)\, n' + z' - z = 0,$$

$$(m'z' - mz + \alpha' - \alpha)\, m + (n'z' - nz + \beta' - \beta)\, n + z' - z = 0.$$

Tirando pois d'estas os valores de z' e z, substituindo na expressão de R, e pondo

$$m' = m + \Delta m,\ n' = n + \Delta n,\ \alpha' = \alpha + \Delta\alpha,\ \beta' = \beta + \Delta\beta,$$

..

será a minima distancia entre as duas rectas

$$R=\frac{\Delta m\Delta\beta-\Delta n\,.\,\Delta\alpha}{\sqrt{(\Delta m)^2+(\Delta n)^2+(m\Delta n-n\Delta m)^2}}.$$

E, se as rectas forem infinitamente visinhas,

$$R=\frac{dmd\beta-dnd\alpha}{\sqrt{(dm)^2+(dn)^2+(mdn-ndm)^2}}.$$

As duas condições do minimo, ou, dividindo por $z'-z$,

$$\frac{x'-x}{z'-z}m'+\frac{y'-y}{z'-z}n'+1=0,\ \frac{x'-x}{z'-z}m+\frac{y'-y}{z'-z}n+1=0,$$

mostram que a minima distancia é perpendicular ás duas rectas.

190. No caso particular de serem as rectas parallelas, são nullos Δm e Δn, tomando a expressão de R a fórma indeterminada.

Neste caso as duas equações do minimo reduzem-se a uma só, que dá $z'-z=k$, sendo $k=\varphi(m, n, \alpha'-\alpha, \beta'-\beta)$, e ficando z' ou z indeterminada.

Depois, substituindo na expressão geral de R, vem

$$R=\sqrt{(mk+\alpha'-\alpha)^2+(nk+\beta'-\beta)^2+k^2}.$$

D'onde resulta que, para qualquer ponto (x, y, z) de uma das rectas parallelas, o valor de R é o mesmo; como deve ser.

191. Se as posições successivas da recta dependem d'uma quantidade ξ que varía por lei de continuidade, por exemplo, das posições consecutivas dos pontos d'uma curva, são:

$$m=F\xi,\ \alpha=f\xi,\ n=F_1\xi,\ \beta=f_1\xi;$$

e por conseguinte:

$$\Delta m = h F' \xi + \frac{1}{2} h^2 F'' \xi + \frac{1}{6} h^3 F''' \xi + \ldots\ldots,$$

$$\Delta n = h F_1' \xi + \frac{1}{2} h^2 F_1'' \xi + \frac{1}{6} h^3 F_1''' \xi + \ldots\ldots,$$

$$\Delta \alpha = h f' \xi + \frac{1}{2} h^2 f'' \xi + \frac{1}{6} h^3 f''' \xi + \ldots\ldots,$$

$$\Delta \beta = h f_1' \xi + \frac{1}{2} h^2 f_1'' \xi + \frac{1}{6} h^3 f_1''' \xi + \ldots\ldots$$

Das quaes, pondo

$$A = F' \xi f_1' \xi - F_1' \xi f' \xi,\ B = \frac{dA}{d\xi},\ C = 2\frac{d^2A}{d\xi^2} + F_1'' \xi f'' \xi - F'' \xi f_1'' \xi,$$

se deduz

$$\Delta m \,.\, \Delta\beta - \Delta n \,.\, \Delta\alpha = Ah^2 + \frac{1}{2} Bh^3 + \frac{1}{12} Ch^4 + \ldots\ldots$$

No caso de ser identicamente $A = 0$, tambem é $B = 0$. E portanto: *se, na passagem da posição d'uma recta para outra infinitamente visinha, é identicamente* $dmd\beta - dnd\alpha = 0$, *a minima distancia das duas posições, ou é nulla, o que concorda com a condição do encontro,* $0 = (m' - m)(\beta' - \beta) - (n' - n)(\alpha' - \alpha) = \Delta m \Delta\beta - \Delta n \Delta\alpha$, *ou é infinitesima ao menos da terceira ordem relativamente ás variações dos parametros.*

II. **192.** Applicando esta doutrina ás equações (D) da tangente (n.º 148),

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z),\ Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

temos $\quad m = \dfrac{dx}{dz},\ n = \dfrac{dy}{dz},\ \alpha = x - z\dfrac{dx}{dz},\ \beta = y - z\dfrac{dy}{dz},$

o que dá

$$\frac{dmd\beta - dnd\alpha}{dz^2} = \frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{dy}{dz} - \frac{dy}{dz} - z\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dx}{dz} - \frac{dx}{dz} - z\frac{d^2x}{dz^2}\right) = 0,$$

Assim a distancia entre duas tangentes infinitamente visinhas *a uma curva de dupla curvatura* é infinitesima ao menos da terceira ordem (*Calc. diff.*, de Duhamel, n.º 271).

III. **193.** Para applicar a mesma doutrina ás equações da perpendicular ao plano osculador levantada pelo centro de curvatura (n.ºs 152 e 153),

$$x-a=\frac{X}{Z}(z-c),\ z-b=\frac{Y}{Z}(z-c),$$

temos $$m=\frac{X}{Z},\ n=\frac{Y}{Z},\ \alpha=a-mc,\ \beta=b-nc;$$

$$dmd\beta-dnd\alpha=dm(db-ndc)-dn(da-mdc).$$

Mas, attendendo ás expressões de B e C do n.º 152, é

$$dm=-\frac{B}{Z^2}=+\frac{Ady}{Z^2dz},\ dn=-\frac{Adx}{Z^2dz};$$

e, se chamarmos D o denominador das expressões (5) de a, b, c do n.º 151, teremos, tomando s para variavel independente, isto é, pondo $d^2s=0$,

$$da=\frac{D^2dx+Dd^3x-d^2xdD}{D^2},$$

$$db=\frac{D^2dy+Dd^3y-d^2ydD}{D^2},$$

$$dc=\frac{D^2dz+Dd^2z-d^2zdD}{D^2}:$$

que dão

$$dmd\beta-dnd\alpha=\frac{A}{Z^2dz}\left(dxda+dydb-\frac{Xdx+Ydy}{Z}dc\right);$$

ou, em virtude das expressões de X, Y, Z (n.º 151),

$$dmd\beta-dnd\alpha=\frac{A}{Z^2dz}(dxda+dydb+dzdc);$$

ou, finalmente, attendendo a que é $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0$,

$$dmd\beta - dnd\alpha = \frac{A}{Z^2Ddz}(Dds^2 + dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z)$$

$$= \frac{A}{Z^2Ddz} d(dsd^2s) = 0.$$

Portanto a minima distancia entre as perpendiculares infinitamente visinhas a dois planos osculadores consecutivos d'uma curva, levantadas pelos centros de curvatura, é infinitesima ao menos da terceira ordem.

IV. **194**. Querendo applicar a mesma doutrina ás equações (C) (n.° 147) das normaes a uma superficie infinitamente visinhas,

$$x - x' = -p(z - z'), \; y - y' = -q(z - z'),$$

temos $m = -p, \; n = -q, \; \alpha = x' + pz', \; \beta = y' + qz'$.

E a condição $\qquad dmd\beta - dnd\alpha = 0,$

é $$dq(dx' + pdz') - dp(dy' + qdz') = 0,$$

identica com a do n.° 186, que, em virtude das equações de definição

$$dz' = pdx' + qdy', \; dp = rdx' + sdy', \; dq = sdx' + tdy',$$

toma a fórma

$$[s(1+q^2) - pqt]dy'^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]dy'dx' + [pqr - s(1+p^2)]dx'^2 = 0 \,..(a).$$

Por onde se vê que, d'entre os systemas de normaes consecutivas a uma superficie $F(x', y', z') = 0$, sómente satisfazem á condição de ser a minima distancia nulla ou infinitesima ao menos da terceira ordem os das normaes tiradas pelos pontos consecutivos das linhas de curvatura, cujas equações são $F = 0$ e (a). (*Calc. diff.* de Duhamel, n.° 272).

FIM.

ou, finalmente, attendendo a que é $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0$,

$$dmd\mathfrak{z} - dnd\mathfrak{x} = \frac{A}{Z^2Dds}(Dds^2 + dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z)$$

$$= \frac{A}{Z^2Dds}\, d(dsd^2s) = 0.$$

Portanto a minima distancia entre as perpendiculares infinitamente visinhas a dois planos osculadores consecutivos d'uma curva, levantadas pelos centros de curvatura, é infinitesima ao menos da terceira ordem.

IV. **194.** Querendo applicar a mesma doutrina ás equações (C) (n.° 147) das normaes a uma superficie infinitamente visinhas,

$$x - x' = -p(z - z'),\quad y - y' = -q(z - z'),$$

temos $\qquad m = -p,\ n = -q,\ \mathfrak{x} = x' + pz',\ \mathfrak{z} = y' + qz'.$

E a condição $\qquad dmd\mathfrak{z} - dnd\mathfrak{x} = 0,$

é $\qquad dq(dx' + pdz') - dp(dy' + qdz') = 0,$

identica com a do n.° 186, que, em virtude das equações de definição

$$dz' = pdx' + qdy',\ dp = rdx' + sdy',\ dq = sdx' + tdy',$$

toma a fórma

$$[s(1+q^2)-pqt]dy'^2+[r(1+q^2)-t(1+p^2)]dy'dx'+[pqr-s(1+p^2)]dx'^2=0\ldots(a).$$

Por onde se vê que, d'entre os systemas de normaes consecutivas a uma superficie $F(x', y', z') = 0$, sómente satisfazem á condição de ser a minima distancia nulla ou infinitesima ao menos de terceira ordem os das normaes tiradas pelos pontos consecutivos das linhas de curvatura, cujas equações são $F = 0$ e (a) (*Calc. diff.* de Duhamel, n.° 272).

FIM.

CALCULO INTEGRAL

CALCULO INTEGRAL

I

INTEGRAÇÃO DAS FUNCÇÕES D'UMA SÓ VARIAVEL

Noções preliminares

195. O objecto do CALCULO INTEGRAL é reverter das funcções differenciaes ás suas primitivas.

Para designar o integral d'uma funcção differencial, escreve-se antes d'ella o signal $\int$. Por exemplo: o integral de $dy = 4x^3dx$ indica-se por $y = \int 4x^3dx$.

Assim, quando se dá a derivada $\frac{dy}{dx} = \text{X}$ d'uma funcção y de x, ou a sua differencial $dy = \text{X}dx$, o problema, que se resolve nesta primeira parte do *Calculo integral*, consiste em achar a funcção primitiva $y = \int \text{X}dx$.

196. Este signal $\int$ corresponde a *somma*.

Com effeito, considerando (Fig. 41) o espaço PP′ dividido em partes eguaes Δx, a somma dos rectangulos $fx.\Delta x$ tenderá para ser egual á somma dos espaços $mpp'm'$, que é MPP′M′, ao passo que Δx tender para zero; e por isso, chamando x_1, x_2, os valores de x correspondentes ás ordenadas extremas, será

$$\int_{x_1}^{x_2} fx dx = \sum_{x_1}^{x_2} mpp'm' = \lim \sum_{x_1}^{x_2} fx\Delta x = \text{MPP'M'}.$$

197. Examinemos a relação que deve existir entre as funcções primitivas fx, Fx, da mesma derivada $y' = \varphi(x)$.

O theorema de Taylor dá

$$f(x+h) = f(x) + h\varphi(x) + \frac{1}{2} h^2 \varphi'(x + \theta h),$$

$$F(x+h) = F(x) + h\varphi(x) + \frac{1}{2} h^2 \varphi'(x + \theta h);$$

das quaes se tira $\quad f(x+h) - F(x+h) = f(x) - F(x) = C;$

sendo C uma quantidade que não varía, como se vê, pela mudança de x em $x+h$, isto é, uma constante.

O mesmo se representa na figura. Por quanto, sendo mm' elemento da curva $Y = \varphi(x)$, os integraes MPP'M' e $M_{,}P_{,}P'M'$ só differem entre si na constante $M_{,}P_{,}PM$, a qual depende de se contarem as duas áreas, uma a partir de MP, outra a partir de $M_{,}P_{,}$.

Differindo pois só no termo constante as funcções primitivas que têm a mesma derivada: *daremos a um integral a fórma mais geral, que pode ter, ajunctando-lhe uma constante.*

Regras fundamentaes da integração

198. Estas regras derivam-se das correspondentes do *Calculo differencial*. Assim:

I. *O integral d'um polynomio é a somma dos integraes de todos os seus termos, conservando a cada um o seu signal e o seu coefficiente* (n.º 10).

II. *Integra-se* $z^m dz$ *ajunctando uma unidade ao expoente de* z, *e dividindo por* dz *e pelo expoente assim augmentado* (n.º 14, 4.º).

Assim:

$$\int Az^n dz = \frac{Az^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{Adz}{z^n} = \int Az^{-n} dz = \frac{Az^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)\,z^{n-1}} + C.$$

Estas regras são applicaveis ás expressões que, por transformações convenientes, se podem reduzir á fórma $Az^n dz$.

Por exemplo, fazendo $b + cx^n = z$, o que dá $x^{n-1}dx = \frac{dz}{nc}$, teremos

$$\int ax^{n-1}dx\,(b+cx^n)^m = \int \frac{a}{nc}\, z^m\, dz = \frac{az^{m+1}}{(m+1)\,nc} + C,$$

ou $$\int ax^{n-1}dx\,(b+cx^n)^m = \frac{a\,(b+cx^n)^{m+1}}{(m+1)\,nc} + C.$$

Na practica, sem fazer explicitamente esta transformação, basta operar como se ella estivesse feita. Por exemplo:

$$\int 6\sqrt{4x^2+3}.xdx = \int\frac{6}{8}\sqrt{4x^2+3}.d\,(4x^2+3) = \frac{1}{2}(4x^2+3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

III. Quando $m = -1$, a regra precedente torna-se defeituosa; e parece dar o integral infinito.

Neste caso o integral pertence a outra especie de funcções; e é (n.º 27) (*)

$$\int z^{-1}dz = \int\frac{dz}{z} = lz + C.$$

(*) Pela regra precedente é $\int z^{-1}dz = \infty + C$; e na origem é $0 = \infty + C$, que dá $C = -\infty$.

Por conseguinte $\int z^{-1}dz = \infty - \infty$.

Para determinar esta quantidade, notemos que, devendo o integral

$$\int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$$

ser nullo na origem, a qual corresponderá a um certo valor a de z, temos

$$0 = \frac{a^{m+1}}{m+1} + C,\ C = -\frac{a^{m+1}}{m+1}, \int z^m dz = \frac{z^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

que, no caso de $m = -1$, toma a fórma $\frac{0}{0}$. Applicando pois a doutrina do n.º 88, acharemos $\frac{z^{m+1}lz - a^{m+1}la}{1}$, que, para $m = -1$, dá $lz - la$, ou $lz + C$.

O mesmo se acharia (n.º 94) pela derivação dos termos de

$$\frac{\frac{m+1}{a^{m+1}} - \frac{m+1}{z^{m+1}}}{\frac{(m+1)^2}{(az)^{m+1}}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^{-(m+1)} - z^{-(m+1)}}{(m+1)(az)^{-(m+1)}}.$$

Do mesmo modo $\int (a+x)^{-1}dx = \int \frac{dx}{a+x} = l\,(a+x) + C.$

Portanto: *O integral d'uma fracção, cujo numerador é differencial do denominador, é egual ao logarithmo hyperbolico do denominador.*

Nestes integraes convem dar á constante arbitraria a fórma lc, para commodidade dos calculos. Por exemplo:

$$\int \frac{5x^2dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\int \frac{12x^3dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\,l\,[c(3x^4+7)].$$

IV. *Integra-se* $a^z dz$ *dividindo a exponencial* a^z *pelo logarithmo hyperbolico da base* (n.° 25).

Assim $$\int Aa^z dz = \frac{Aa^z}{la} + C.$$

V. *O integral d'uma fracção, cujo denominador é um radical quadrado e cujo numerador é differencial da quantidade affecta do radical, é o dobro do mesmo radical* (n.° 15).

Por exemplo $$\int \frac{Adz}{\sqrt{z}} = 2A\sqrt{z} + C.$$

VI. *O integral da differencial do seno repartida pelo coseno; ou de menos a differencial do coseno repartida pelo seno; ou da differencial da tangente repartida pelo quadrado da secante; ou de menos a differencial da cotangente repartida pelo quadrado da cosecante: é egual ao arco* (n.° 31).

Assim:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc}\,(\text{sen} = z) + C, \quad \int -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc}\,(\cos = z) + C,$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\,(\text{tang} = z) + C, \quad \int -\frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\,(\cot = z) + C.$$

Se o raio se suppozesse egual a r, os segundos membros seriam os respectivos valores de

$$\int\frac{rdz}{\sqrt{r^2-z^2}},\int-\frac{rdz}{\sqrt{r^2-z^2}},\int\frac{r^2dz}{r^2+z^2},\int-\frac{r^2dz}{r^2+z^2}.$$

Por exemplo, pondo $z\sqrt{\frac{b}{a}}=t$, teremos

$$\int\frac{mdz}{a+bz^2}=\frac{m}{a}\int\frac{dz}{1+\frac{b}{a}z^2}=\frac{m}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{m}{\sqrt{ab}}\text{arc}\left(\text{tg}=z\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\text{C}.$$

Do mesmo modo $\displaystyle\int\frac{mdz}{\sqrt{a-bz^2}}=\frac{m}{\sqrt{b}}\text{arc}\left(\text{sen}=z\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\text{C}.$

199. Uma das regras mais importantes, por suas muitas applicações, é a da *integração por partes*.

De $$d(ut)=tdu+udt$$

resulta $$\int udt=ut-\int tdu.$$

Portanto: *decomponha-se a expressão differencial proposta em dois factores, um dos quaes se saiba integrar pelas regras dadas; integre-se o producto, considerando o outro factor como constante; differencie-se depois o resultado em ordem a este factor, que se tomára como constante; e emfim subtráia-se o seu integral do primeiro.*

Exemplos:

$$\int lx.dx=xlx-\int x.d(lx)=xlx-\int dx=xlx-x+\text{C};$$

$$\int x.\cos xdx=x\,\text{sen}\,x-\int\text{sen}\,xdx=x\,\text{sen}\,x+\cos x+\text{C}.$$

Esta regra tem a vantagem de fazer depender um integral d'outro;

mas, para applical-a utilmente, deve decompor-se a funcção proposta em dois factores taes que o segundo integral, de que se faz depender o primeiro, seja conhecido ou mais simples que este.

Se, por exemplo, decompozessemos $x \cos x dx$ em $\cos x$ e $x dx$, teriamos

$\int \cos x . x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \operatorname{sen} x dx$, reduzindo assim o integral proposto a outro ainda mais complicado.

200. Formula de Bernoulli.

Applicando successivamente a regra de integração por partes, acha-se

$$\int u dt = ut - \int t du$$

$$\int t du = \int t dt . u' = \frac{1}{2} t^2 u' - \frac{1}{2} \int t^2 du',$$

$$\int t^2 du' = \int t^2 dt . u'' = \frac{1}{3} t^3 u'' - \frac{1}{3} \int t^3 du'',$$

. . . .

$$\int t^{n-1} du^{(n-2)} = \int t^{n-1} dt . u^{(n-1)} = \frac{1}{n} t^n u^{(n-1)} - \frac{1}{n} \int t^n du^{(n-1)}.$$

D'onde resulta

$$\int u dt = ut - \frac{1}{2} t^2 u' + \frac{1}{1.2.3} t^3 u'' .. \pm \frac{t^n u^{(n-1)}}{1.2. \ldots n} \mp \frac{1}{1.2 \ldots n} \int t^n du^{(n-1)} \ldots (A);$$

sendo $$\frac{du}{dt} = u', \; \frac{du'}{dt} = u'', \ldots . \frac{du^{(n-1)}}{dt} = u^{(n)}:$$

ou $$\int u dt = \sum_0^{n-1} (-1)^i \frac{u^{(i)} t^{i+1}}{1.2 \ldots (i+1)} + (-1)^n . \frac{1}{1.2 \ldots n} \int t^n du^{(n-1)};$$

sendo $$u^{(0)}=u.$$

Se t é a variavel independente, a formula (A) torna-se mais simples,

$$\int udt = ut - \frac{1}{1.2}t^2\frac{du}{dt} + \frac{1}{1.2.3}t^3\frac{d^2u}{dt^2} \ldots \pm \frac{1}{1.2..n}t^n\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} \mp \frac{1}{1.2..n}\int t^n\frac{d^nu}{dt^{n-1}},$$

ou $$\int udt = \sum_0^{n-1}(-1)^i\frac{t^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)}\cdot\frac{d^iu}{dt^i} + (-1)^n\frac{1}{1.2\ldots n}\int t^n\frac{d^nu}{dt^{n-1}};$$

sendo $$\frac{d^0u}{dt^0}=u.$$

A formula (A) de Bernoulli é para o calculo integral o mesmo que é para o differencial a de Taylor, da qual tambem se deduz, como veremos quando tractarmos da integração por series.

201. Com as regras da differenciação das funcções elementares e das funcções de funcções ficâmos habilitados para differenciar quaesquer funcções propostas.

Não succede porém o mesmo em quanto á integração, porque só a sabemos fazer exactamente em alguns casos; sendo necessario nos outros recorrer a processos de approximação.

Das fracções racionaes

202. Na *Algebra Superior* (n.º 138) ensinamos o processo geral para decompor uma fracção racional $\mathrm{N}dx$ em outras cuja forma seja alguma das seguintes:

$$\frac{\mathrm{A}dx}{x-a},\ \frac{\mathrm{A}dx}{(x-a)^n},\ \frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx}{x^2+px+q},\ \frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx}{(x^2+px+q)^n};$$

sendo A, B, p, q, n constantes, e x^2+px+q os factores reaes do segundo gráu, compostos de factores imaginarios do primeiro.

Tracta-se pois de reverter d'estas fracções componentes ás primitivas de que ellas são differenciaes.

Para mais facilidade notaremos que, expellindo do denominador das duas ultimas o segundo termo, pela hypothese $x=z-\frac{1}{2}p$ (*Alg. Sup.* n.º 34), e pondo a quantidade positiva $q-\frac{1}{4}p^2=\beta^2$, estas fracções se reduzirão simplesmente a

$$\frac{(\mathrm{A}z+\mathrm{B}')\,dz}{z^2+\beta^2},\ \frac{(\mathrm{A}z+\mathrm{B}')\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

1.º Caso. É (n.º 198, III) $\int\frac{\mathrm{A}dx}{x-a}=\mathrm{A}lc(x-a)$.

Por exemplo:

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}[l(a+x)-l(a-x)]+lc=\frac{1}{2a}l\left(\frac{c(a+x)}{a-x}\right);$$

$$\int\frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2}=-\int\frac{2dx}{x-2}-\int\frac{2dx}{x+1}=l\left(\frac{c}{(x^2-x-2)^2}\right).$$

2.° CASO. É (n.° 198, II) $\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$

Por exemplo:

$$\int \frac{(x^3+x^2+2)\,dx}{x^5-2x^3+x} = \int \left(\frac{2dx}{x} + \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}dx}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}dx}{(x+1)^2} - \frac{\frac{5}{4}dx}{x+1} \right)$$

$$= 2lx - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\,l\,(x-1) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{4}\,l\,(x+1) + C.$$

3.° CASO. É $\int \frac{(Az+B)\,dz}{z^2+\beta^2} = \int \frac{Azdz}{z^2+\beta^2} + \int \frac{Bdz}{z^2+\beta^2},$

ou (n.° 198, III e VI)

$$\int \frac{(Az+B)dz}{z^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\,l\,(z^2+\beta^2) + \frac{B}{\beta}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{z}{\beta}\right) + C.$$

Seja, por exemplo,

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{x-1} - \int \frac{\frac{1}{3}(x-1)\,dx}{x^2+x+1}.$$

O primeiro integral do segundo membro é $\frac{1}{3}\,l\,(x-1)$. Para achar o segundo, fazendo $x = z - \frac{1}{2}$, teremos

$$-\int \frac{\frac{1}{3}zdz}{z^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{6}\,l\left(z^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2z}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\,l\sqrt{(x^2+x+1)} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

E portanto:

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left[l(x-1) - l\sqrt{(x^2+x+1)} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C.$$

Para outro exemplo, teremos:

$$\int \frac{(x^2-x+1)\,dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int\left(\frac{3}{2}\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{(x+1)\,dx}{x^2+1}\right)$$

$$= l\frac{c\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x) + C.$$

4.° Caso. É $\displaystyle\int \frac{(Az+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = -\frac{A}{2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \int \frac{Bdz}{(z^2+\beta^2)^n}$;

ou $\dfrac{1}{2}Al(z^2+\beta^2)$ em logar do primeiro termo, no caso de $n=1$.

Para facilitar a integração do segundo termo, fazendo-a depender d'outra na qual seja menor o expoente do denominador, temos (n.° 199)

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} = \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{z^2dz}{(z^2+\beta^2)^n};$$

ou, por ser $\displaystyle\frac{z^2dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} - \frac{\beta^2dz}{(z^2+\beta^2)^n}$,

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{z}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + 2(n-1)\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} \\ -2(n-1)\beta^2\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}.\end{array}\right.$$

da qual se tira

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}=\frac{z}{2(n-1)\beta^2(z^2+\beta^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}\ldots(a).$$

Querendo pois integrar uma serie de fracções

$$\int\frac{\mathrm{A}dz}{(z^2+\beta^2)^n}+\int\frac{\mathrm{B}dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}+\int\frac{\mathrm{C}dz}{(z^2+\beta^2)^{n-2}}+\ldots,$$

reduziremos a integração da primeira a $\int\frac{\mathrm{A}'dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$, que sommaremos com a segunda; depois $\int\frac{(\mathrm{A}'+\mathrm{B})\,dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$ a $\int\frac{\mathrm{A}''dz}{(z^2+\beta^2)^{n-2}}$, que sommaremos com a terceira; e assim por diante, até chegar a $\int\frac{\mathrm{K}dz}{z^2+\beta^2}$, que já conhecemos (n.º 198, VI).

Seja, por exemplo:

$$\int\frac{(x^4+x^3+3x^2+3)\,dx}{(x^2+1)^3}=\int\frac{(1-2x)dx}{(x^2+1)^3}+\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

A parte, em que entra x nos numeradores, dá

$$\int\frac{-2xdx}{(x^2+1)^3}+\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2(x^2+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}.$$

As outras partes dão, reduzindo (a) e sommando successivamente,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{7}{8}\frac{x}{x^2+1}+\frac{15}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Integrando pois o ultimo termo e sommando todas as partes, será

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3}{(x^2+1)^3} = \frac{x+2}{4(x^2+1)^2} + \frac{7x-8}{8(x^2+1)} + \frac{15}{8} \operatorname{arc}(\mathrm{tg} = x) + C.$$

Pelo mesmo processo se integrará

$$\frac{dx}{(1+x)\,x^2\,(x^2+2)\,(x^2+1)^2}.$$

Decomposta esta fracção (*Alg. Sup.*, pag. 226), os unicos termos, cuja integração pode offerecer alguma difficuldade, são

$$\int \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{1}{4}\,\frac{(x-1)\,dx}{x^2+1};$$

e estes, sendo tractados pelo methodo precedente, dão

$$-\frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{8}\, l\,(x^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arc}(\mathrm{tang} = x) + C.$$

Sirvam ainda para exercicio os dois exemplos seguintes:

$$\int \frac{b^3 dx}{x^6 - a^6} = \frac{b^3}{3a^5} \left\{ \begin{array}{l} l\,\dfrac{(x-a)\sqrt{x^2-ax+a^2}}{(x+a)\sqrt{x^2+ax+a^2}} - \sqrt{3}\operatorname{arc}\left(\mathrm{tang} = \dfrac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right) \\ -\sqrt{3}\operatorname{arc}\left(\mathrm{tang} = \dfrac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right) + C \end{array} \right\},$$

$$\int \frac{(x^3-6x^2+4x-1)\,dx}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6} = l\,\frac{(x-2)(x+1)}{x-3} + \frac{1}{x+1} + C.$$

Funcções irracionaes

203. Do que fica dicto segue-se que sabemos integrar todas as funcções algebricas racionaes.

Das que são irracionaes nem sempre é possivel obter integraes de fórma finita; mas, quando é possivel, o processo ordinariamente empregado consiste em tornal-as racionaes, pela substituição da variavel em funcção de outra, ligada com ella por uma relação propria para esse fim.

204. Comecemos pelos radicaes monomios, aos quaes se reduzem tambem os polynomios lineares.

Seja a expressão $$\frac{(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+x^2)\,dx}{x+\sqrt{x}}.$$

Por ser 6 multiplo de 2 e 3, é claro que a hypothese $x=z^6$ fará desapparecer a irracionalidade; e a expressão transformar-se-ha em

$$\frac{6(z^{14}+z^{11}+z^4)dz}{z^3+1}=6z^{11}dz+6zdz-\frac{6zdz}{z^3+1},$$

cujo integral é

$$\frac{1}{2}z^{12}+3z^2-2\,lc\,\frac{\sqrt{z^2-z+1}}{z+1}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right).$$

A expressão $\frac{\sqrt{x}.dx}{x-1}$, fazendo $x=z^2$, dará

$$\int\frac{\sqrt{x}.dx}{x-1}=\int\frac{2z^2dz}{z^2-1}=2z+lc\frac{z-1}{z+1}=2\sqrt{x}+lc\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

205. Radicaes do segundo gráu. Consideremos agora as funcções em que entra o radical $\sqrt{a+bx\pm x^2}$.

Tractaremos separadamente dos dois casos de ser x^2 affecto do signal $+$ ou do signal $-$.

1.º Caso. Pondo $\sqrt{a+bx+x^2}=z\pm x$,

quadrando e resolvendo, teremos

$$x=\frac{z^2-a}{b\mp 2z},\ dx=\frac{2\,[bz\mp(z^2+a)]\,dz}{(b\mp 2z)^2},$$

e

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{bz\mp(z^2+a)}{b\mp 2z};$$

ficando assim racional tudo o que compõe a funcção proposta.

Exemplo. Usando dos signaes inferiores, é:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\int\frac{2dz}{2z+b}=l\,\frac{1}{2}\,c(2z+b)=lc\left(\frac{1}{2}\,b+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right).$$

Do mesmo modo $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=lc\,(x+\sqrt{x^2\pm a^2}).$

Para $dy=dx\sqrt{a^2+x^2}$,

podemos tambem fazer $\sqrt{a^2+x^2}=z-x$,

e abreviar depois do modo seguinte:

$$dx=\frac{dz}{2}+\frac{a^2dz}{2z^2},\ dy=zdx-xdx,\ y=-\frac{1}{2}\,x^2+\int zdx;$$

e portanto

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}a^2lcz = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}a^2lc(x + \sqrt{a^2+x^2});$$

dando á constante a fórma $\frac{1}{2}a^2lc$.

Para $dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ou $dy\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$,

é $$y\sqrt{-1} = l(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Mas, suppondo $x=1$ quando $y=0$, a mesma equação tambem dá $\cos y = x$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,y$, e é $C=0$: logo a formula precedente reduz-se á da *Algebra Superior* (n.º 159, 1),

$$\pm y\sqrt{-1} = l(\cos y \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,y).$$

2.º Caso. Quando o radical proposto, que suppomos real, é $\sqrt{a+bx-x^2}$, sería necessario, para seguir o processo antecedente, igualal-o a $z \pm x\sqrt{-1}$, introduzindo imaginarios. Podemos porém, no caso de ser a positivo, fazer $\sqrt{a+bx-x^2} = zx \pm \sqrt{a}$, sem o mesmo inconveniente.

Em todos os casos, chamando α e β as raizes de $x^2 - bx - a = 0$, que devem ser reaes para que o radical o possa ser, se fizermos

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (x-\alpha)z,$$

e depois quadrarmos e supprimirmos o factor commum $x-\alpha$, acharemos

$$x = \frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2},\ dx = \frac{2(\alpha-\beta)zdz}{(1+z^2)^2},\ \sqrt{a+bx-x^2} = \frac{(\beta-\alpha)z}{1+z^2},$$

que são racionaes.

Exemplos:

Pondo $\sqrt{a+bx-x^2}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(x-\alpha)z,$

é $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\mathrm{C}-2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}\right).$$

Pondo $$\sqrt{1-x^2}=(1-x)z,$$

é $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{2dz}{z^2+1}=\mathrm{C}+2\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=z)\,;$$

e portanto, se corresponder $x=0$ á origem do integral, será

$$\mathrm{arc}\,(\mathrm{sen}=x)=-\frac{1}{2}\pi+2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Pondo $$\sqrt{a^2-x^2}=(a-x)z,$$

é $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{2a^2z}{(1+z^2)^2}+\frac{a^2z}{1+z^2}+a^2\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=z)+\mathrm{C},$$

ou $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)+\mathrm{C}.$$

Pode tambem applicar-se este processo ao primeiro caso, quando as raizes de $a+bx+x^2=0$ são reaes.

206. O habito de calcular muitas vezes indica transformações mais convenientes.

Assim, reduzindo o radical ás fórmas $\sqrt{z^2\pm a^2}$ ou $\sqrt{a^2\pm z^2}$, pela expulsão do segundo termo, a integração de $\frac{\mathrm{X}dx}{\sqrt{a+bx\pm x^2}}$, sendo X um polynomio racional, reduzir-se-ha á de termos da fórma $\frac{z^m dz}{\sqrt{z^2\pm a^2}}$, ou $\frac{z^m dz}{\sqrt{a^2\pm z^2}}$: e estes tornar-se-hão racionaes, pondo $\sqrt{a^2\pm z^2}=a-uz$, o que dá

$$z=\frac{2au}{u^2\mp 1},\ \sqrt{a^2\pm z^2}=-\frac{a(u^2\pm 1)}{u^2\mp 1},\ dz=-2adu\frac{u^2\pm 1}{(u^2\mp 1)^2};$$

ou tambem $$\sqrt{z^2-a^2}=(z-a)x.$$

Assim, pondo $$x=b-z,$$

acha-se

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2bx-x^2}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{b^2-z^2}}=\mathrm{C}+\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{z}{b}\right)=\mathrm{C}+\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{b-x}{b}\right).$$

Do mesmo modo, pondo $x=z-a$, acha-se

$$y=\int\frac{\pm adx}{\sqrt{2ax+x^2}}=\int\frac{\pm adz}{\sqrt{z^2-a^2}}=alc\,(x+a\pm\sqrt{2ax+x^2}),$$

que é a equação da catenaria (*Duh. Mec.* t. 1.º, n.º 159, eq. 5).

207. Adiante tractaremos dos radicaes do segundo gráu, nos quaes o polynomio debaixo do radical é do terceiro ou do quarto gráu.

Differenciaes binomias

208. Proponhamo'-nos agora integrar as expressões differenciaes binomias da fórma

$$Xdx = Kx^m dx (a + bx^n)^p;$$

sendo m, n, p, numeros inteiros ou fraccionarios, positivos ou negativos.

O caso de ser p fraccionario é o mais importante; porque o de ser inteiro é o da integração d'uma serie de monomios ou d'uma fracção racional.

Pondo $$z = a + bx^n,$$

resolvendo esta equação em ordem a x, elevando á potencia $m+1$, differenciando, e substituindo, teremos

$$x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}},\quad x^m dx = \frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{nb^{\frac{m+1}{n}}} dz,$$

$$Kx^m dx (a + bx^n)^p = K \frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1} z^p dz}{nb^{\frac{m+1}{n}}}.$$

Se $\frac{m+1}{n}$ é inteiro, a integração reduz-se, pela desenvolução de $(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$, á d'uma serie de monomios, quando $\frac{m+1}{n} - 1$ é positivo; á de $z^p dz$, quando $\frac{m+1}{n} - 1$ é egual a zero; e á d'uma fracção racional, quando $\frac{m+1}{n} - 1$ é negativo.

E applicando isto á mesma expressão posta debaixo da fórma

$$Kx^{m+np}dx\,(ax^{-n}+b)^p,$$

vê-se que tambem a sabemos integrar no caso de ser inteiro $\dfrac{m+np+1}{-n}$: reduzindo-se, do mesmo modo, a integração á d'um polynomio, d'um monomio, ou d'uma fracção racional; segundo for $-\left(\dfrac{m+1}{n}+p+1\right)$ positivo, nullo, ou negativo.

Portanto, sabemos integrar a expressão proposta: 1.º *Quando o expoente de* x *fóra do binomio, sendo augmentado d'uma unidade e depois dividido pelo expoente de* x *dentro do binomio, der um quociente inteiro:* 2.º *Quando este quociente for fraccionario, mas for inteira a somma algebrica d'elle com o expoente do binomio.*

209. No caso de ser p um numero fraccionario $\dfrac{h}{k}$, facilita-se o calculo, pondo $a+bx^n=z^k$.

Seja, por exemplo,

$$Xdx=x^{-2}dx\,(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}=x^{-7}(ax^{-3}+1)^{-\frac{5}{3}}dx,$$

que é integravel, por satisfazer á condição $\dfrac{-2+1}{3}-\dfrac{5}{3}=$ inteiro, ou $\dfrac{-7+1}{-3}=$inteiro. Pondo $ax^{-3}+1=z^3$, o que dá

$$x=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}},\ x^{-6}=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^2,\ -6x^{-7}dx=\frac{6z^2(z^3-1)}{a^2}dz,$$

virá

$$\int Xdx=\int-\frac{(1-z^{-3})dz}{a^2}=C-\frac{z+\frac{1}{2}z^{-2}}{a^2}=C-\frac{3x^3+2a}{2a^2x\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}.$$

Similhantemente se achará

$$\int\frac{adx}{(b^2\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ax}{b^2\sqrt{b^2\pm x^2}}+C.$$

Reducção d'um integral a outro

210. Quando a differencial binomia proposta não satisfaz ás condições de integralidade (n.º 208), faz-se depender o seu integral d'outro que mais facilmente se possa obter; usando para isso do methodo de integrar por partes.

Assim, considerando primeiro $a+bx^n$ como constante, a integração por partes dá

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^p-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}\ldots(1):$$

e, por ser $\quad x^m(a+bx^n)^p=ax^m(a+bx^n)^{p-1}+bx^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}$,

tambem temos

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p=a\int x^m\,dx(a+bx^n)^{p-1}+b\int x^{m+n}dx\,(a+bx^n)^{p-1}\ldots(2).$$

Depois, eliminando $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ entre (1) e (2), vem

$$\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}=\frac{x^{m+1}(a+bx)^p}{b(m+1+np)}-\frac{a(m+1)}{b(m+1+np)}\int x^m\,dx(a+bx^n)^{p-1};$$

ou, mudando m em $m-n$ e p em $p+1$,

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m+1-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(m+1+np)}-\frac{a(m+1-n)}{b(m+1+np)}\int x^{m-n}dx(a+b^n)^p\ldots(A.$$

Se entre (1) e (2) eliminarmos $\int x^{m+n} dx\,(a+bx^n)^{p-1}$, virá

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{nap}{m+1+np}\int x^m\,dx(a+bx^n)^{p-1} \ldots (B).$$

Finalmente, se resolvermos a equação (A) em ordem a $\int x^{m-n} dx(a+bx^n)^p$, e mudarmos m em $m+n$; e se resolvermos a equação (B) em ordem a $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}$, e mudarmos p em $p+1$: teremos

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)\,a} - \frac{b(m+np+n+1)}{(m+1)\,a}\int x^{m+n} dx(a+bx^n)^p \ldots (C),$$

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na\,(p+1)} + \frac{m+np+n+1}{na\,(p+1)}\int x^m\,dx(a+bx^n)^{p+1} \ldots (D).$$

211. Vejamos o uso d'estas formulas:

1.° A formula (A) faz depender o integral $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ d'outro $\int x^{m-n} dx\,(a+bx^n)^p$, no qual o expoente de x fóra do binomio tem de menos n unidades; podendo assim abater-se successivamente $n, 2n, \ldots in$ unidades ao expoente de x fóra do binomio, até que o integral proposto dependa de $\int x^{m-in} dx\,(a+bx^n)^p$.

2.° A formula (B) faz depender o integral $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ de outro $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}$, no qual o expoente do binomio tem de menos uma unidade; podendo assim abater-se $1, 2, \ldots i$ unidades a este expoente, até que o integral proposto dependa de $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-i}$.

3.° As formulas (C) e (D) servem, inversamente, para reduzir um integral binomio a outro no qual se augmentam in unidades ao expoente de x fóra do binomio, ou i unidades ao expoente do binomio.

212. Pouca attenção basta para ver que, se mudarmos m em $m-n$, $m-2n, \ldots m-(i-1)n$, e fizermos $m-in=s$, isto é, $i=\dfrac{m-s}{n}$, a formula (A) dará, por substituições successivas,

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \left\{\begin{array}{l}(a+bx^n)^{p+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1}A_\alpha x^{n\alpha}\\ \qquad + R\int x^s\,dx\,(a+bx^n)^p\end{array}\right\}\ldots\ldots (A)'.$$

E similhantemente a applicação successiva da formula (B) dará

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p = \left\{\begin{array}{l}x^{m+1}(a+bx^n)^{q+1}\sum_0^{p-(q+1)}A_\alpha (a+bx^n)^\alpha\\ \qquad + R\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^q\end{array}\right\}\ldots (B)'.$$

213. Para reduzir $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ a $\int x^s\,dx\,(a+bx^n)^q$, sendo $p-q$ inteiro, podem empregar-se successivamente as formulas (A)′ e (B)′.

Mas é mais expedito: desenvolver em serie $(a+bx^n)^{p-q}$, o que dá

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p = \int dx\,(a+bx^n)^q(Ax^m + Bx^{m+n} + \ldots Qx^{m+(p-q)n});$$

applicar a formula (A)′ a cada um dos termos, pondo respectivamente por m os numeros $m, m+n, \ldots m+(p-q)n$; e sommar.

Teremos assim:

$$\int Ax^m\,dx(a+bx^n)^q = (a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1}A_\alpha x^{n\alpha} + R_0\int x^s\,dx(a+bx^n)^q,$$

$$\int Bx^{m+n}dx(a+bx^n)^q = (a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i}B_\alpha x^{\alpha n} + R_1\int x^s\,dx\,(a+bx^n)^q,$$

....

$$\int Qx^{m+(p-q)n}dx\,(a+bx^n)^q = \left\{\begin{array}{l}(a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1+p-q}Q_\alpha x^{n\alpha}\\ \qquad + R_{p-q}\int x^s\,dx\,(a+bx^n)^q;\end{array}\right.$$

cuja somma é:

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \left\{\begin{array}{l}(a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1+p-q} A_\alpha x^{n\alpha} \\ \quad + R\int x^s dx\,(a+bx^n)^q\end{array}\right\} \ldots (E),$$

sendo $$i=\frac{m-s}{n}.$$

(Veja-se o *Calculo* de Bezout, n.os 128 até 132).

214. Para fazer uso da formula (E), e por conseguinte das (A)′ e (B)′, que se comprehendem nella quando se suppõe respectivamente $p=q$ ou $m=s$, podemos determinar os $i+p-q+1$ coefficientes A_0, A_1,...$A_{i-1+p-q}$, R, differenciando, simplificando pela divisão por $x^s dx\,(a+bx^n)^q$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados.

Com effeito, differenciando e simplificando por aquella divisão, acha-se

$$x^{ni}(a+bx^n)^{p-q} = \left\{\begin{array}{l} nb\,(q+1)\sum_0^{i+p-q} A_\alpha x^{n\alpha} \\ \\ +(a+bx^n)(s+1)\sum_0^{i-1+p-q} A_\alpha x^{n\alpha} \\ \\ +n(a+bx^n)\sum_0^{i-1+p-q} \alpha A_\alpha x^{n\alpha} + R.\end{array}\right.$$

Ora, o exame d'esta equação mostra que todos os expoentes de x são multiplos de n; e que no primeiro membro entram todas as potencias de x^n desde o gráu i até $i+p-q$, e no segundo membro todas as potencias de x^n desde o gráu 0 até $i+p-q$: portanto o methodo dos coefficientes indeterminados dá as $i+p-q+1$ equações necessarias para determinar A_0, A_1,...$A_{i+p-q-1}$, R.

215. Exemplos:

I. Reduzir $$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ a } \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por ser $\frac{5-1}{2}=2=i$, a reducção é possivel; e a formula (A)′ dá

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(Ax^2+Bx^4)+R\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Differenciando pois, dividindo por $x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados, teremos:

$$x^4=(1-x^2)(2A+4Bx^2)-(Ax^2+Bx^4)+R;$$

depois $\quad 1=-4B-B,\ -2A-A+4B=0,\ 2A+R=0,$

que dão $\quad B=-\frac{1}{5},\ A=-\frac{4}{15},\ R=\frac{8}{15};$

e finalmente, pela substituição d'estes,

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{15}x^2+\frac{1}{5}x^4\right)+\frac{8}{15}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{8}{5}+\frac{4}{15}x^2+\frac{1}{5}x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C.$$

A reducção de

$$\int\frac{x^kdx}{\sqrt{\beta x-x^2}}=\int\frac{x^{k-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta-x}} \text{ a } \int\frac{dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}=\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta-x}}$$

é possivel, por ser $\quad \frac{k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1}=k=i,$

Faremos portanto

$$\int \frac{x^{k-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta - x}} = (\beta - x)^{\frac{1}{2}} \sum_0^{k-1} A_\alpha x^{\frac{1}{2}+\alpha} + R \int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta - x}};$$

depois, differenciando e dividindo por $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta - x}}$, teremos

$$x^k = \beta \sum_0^{k-1} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) A_\alpha x^\alpha - \sum_0^{k-1} (1 + \alpha) A_\alpha x^{\alpha+1} + R,$$

a qual, pelo methodo dos coefficientes indeterminados, dará

$$\frac{1}{2} A_0 \beta + R = 0, \ldots \left(\frac{3}{2} + \alpha\right) \beta A_{\alpha+1} - (1 + \alpha) A_\alpha = 0, \ldots 1 + k A_{k-1} = 0;$$

e d'esta emfim deduziremos successivamente, a partir da ultima, A_{k-1}, $A_{k-2}, \ldots R$; ficando assim conhecido o integral

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \sqrt{\beta x - x^2} \sum_0^{k-1} A_\alpha x^\alpha + R \int \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}.$$

II. Para reduzir $\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}$ a $\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$,

reducção possivel, por ser $p - q = -n + 1 + n = 1$, a formula (B)′ dá

$$\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} = (z^2 + \beta^2)^{-n+1} Az + R \int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n};$$

depois, differenciando, dividindo por $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados, teremos

$$1 = -2A(n-1) + A, \quad \beta^2 = A\beta^2 + R,$$

que dão $$A = -\frac{1}{2n-3}, \quad R = 2\beta^2 \frac{n-1}{2n-3};$$

e por tanto

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} = -\frac{z}{(2n-3)(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)\beta^2}{2n-3} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

Esta equação, resolvida em ordem ao integral do segundo membro, dá dá a equação (a) da pag. 206.

III. Para reduzir $\int x^2 dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ a $\int dx (x^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$,

como é possivel, por serem $\frac{m-s}{n} = 1$, $p - q = 1$, a formula (E) dá

$$\int x^2 dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} (Ax + Bx^3) + R \int dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

depois differenciando, dividindo por $dx(\beta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados, acharemos as condições

$$-1 = -3B - 3B, \quad \beta^2 = -3A - A + 3\beta^2 B, \quad A\beta^2 + R = 0,$$

que dão $$B = \frac{1}{6}, \quad A = -\frac{1}{8}\beta^2, \quad R = \frac{1}{8}\beta^4;$$

e finalmente

$$\int x^2 dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\beta^2 x}{8} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\beta^4}{8} \int dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

216. Quorendo reduzir $\int x^s dx\,(a+bx^n)^q$ a $x^m dx\,(a+bx^n)^p$, podemos usar do mesmo modo da formula (E), resolvendo-a em ordem ao integral que entra no segundo membro.

217. Quando R sahe nullo, como acontece na reducção de

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2-x^2}} \text{ a } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

isto é, de $\quad \int x^{-5}dx\,(a^2x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ a $\int x^{-1}dx\,(a^2x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$,

a proposta integra-se immediatamente pelo processo exposto.

Quando $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$ se pode reduzir a $\int x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$, a funcção é integravel; e, para acabar de integral-a, basta accrescentar $\text{R}\dfrac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)}$ á parte integrada. Esta reducção tem logar no caso de ser inteiro $\dfrac{m-(n-1)}{n}$; o que é com effeito a condição de integrabilidade considerada no n.º 208.

218. Vimos no n.º 206 que a integração das funcções algebricas, affectas, no denominador, do radical $\sqrt{\text{A}+\text{B}x+\text{C}x^2}$, se pode reduzir, expellindo o segundo termo, á de expressões da fórma $\dfrac{z^n dz}{\sqrt{\pm(a^2\pm z^2)}}$.

Segundo o que fica dicto, a integração d'estas novas expressões pode reduzir-se á de $\dfrac{zdz}{\sqrt{\pm(a^2\pm z^2)}}$, no caso de ser n impar; e á de $\dfrac{dz}{\sqrt{\pm(a^2\pm z^2)}}$, no caso de ser n par.

E como as ultimas expressões se integram, a primeira algebricamente, e a segunda por arcos de circulo, vê-se que as funcções propostas se podem integrar.

219. As integrações fazem-se muitas vezes mais promptamente com o auxilio das seguintes formulas, que não são mais do que a applicação das (A), (C), (B).

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2 \pm 1}}{n} \mp \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}};$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{2m-1}{m}a\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}dx.\sqrt{a^2-x^2}.$$

Das funcções exponenciaes

220. Por ser (n.° 198, IV) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la}$,

podemos já integrar as funcções exponenciaes em dois casos:

1.° Se for $z = f(a^x) = fu$,

e soubermos integrar $fudu$, será

$$\int za^x dx = \int \frac{fudu}{la}.$$

Por exemplo $\int \frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}} = \frac{1}{la}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^n}}$.

2.° De $d(ze^x) = e^x dx\,(z + z')$

tira-se $\int e^x dx\,(z + z') = ze^x + C$;

o que ensina a integrar qualquer funcção que seja producto de $e^x dx$ pela somma de duas partes uma derivada da outra.

Exemplos:

$$\int e^x dx(3x^2+x^3-1) = \int e^x dx\left(x^3 - 1 + \frac{d(x^3-1)}{dx}\right) = e^x(x^3-1) + C,$$

$$\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \int e^x dx\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{ex}{1+x} + C.$$

221. Nos outros casos recorre-se á integração por partes.

Por exemplo, $x^n a^x dx$, considerando em primeiro logar x^n como constante, dá

$$\int x^n a^x dx = \frac{x^n a^x}{la} - \frac{n}{la}\int x^{n-1} a^x dx;$$

depois, mudando n em $n-1$, $n-2$, ..., e substituindo successivamente, acha-se por fim

$$\int x^n a^x dx = a^x\left(\frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{l^2a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{l^3a} \ldots \pm \frac{1.2.n}{l^{n+1}a}\right) + C,$$

ou $$\int x^n a^x dx = a^x\left[\frac{x^n}{la} + \sum_1^n\left((-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)\,x^{n-i}}{l^{i+1}a}\right)\right] + C.$$

O mesmo calculo se applica a $za^x dx$, onde z é uma funcção algebrica e inteira de x; o que dá

$$\int za^x dx = \frac{za^x}{la} - \int\frac{a^x z' dx}{la},$$

mudando depois z em z', z'', ..., e substituindo, successivamente.

222. No caso de ser negativo o expoente n, vê-se, reflectindo no espirito do methodo precedente, que convém augmentar o expoente de x.

Para isso, integraremos, suppondo primeiro a^x constante; ou resolveremos a primeira equação do numero precedente em ordem ao integral que entra no segundo membro, escrevendo $-n+1$ em logar de n: o que dará

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}.$$

Depois, mudando n em $n-1$, $n-2$, ..., 2, e substituindo successivamente, obtem-se

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -a^x \sum\nolimits_1^{n-1} \left(\frac{l^{i-1}a}{(n-1)..(n-i)x^{n-i}} \right) + \frac{l^{n-1}a}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{a^x dx}{x}$$

Ficamos pois reduzidos a procurar o integral $\int \frac{a^x dx}{x}$, que tem sido objecto de repetidos trabalhos dos analystas, e que é forçoso considerar como funcção transcendente d'uma especie particular, a qual não depende d'arcos de circulo nem de logarithmos.

Na falta de methodo rigoroso para obter este integral, empregam-se as series.

Assim, por ser $\quad \frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + la + \frac{l^2 a}{1.2} x + \frac{l^3 a}{1.2.3} x^2 + \ldots,$

é $$\int \frac{a^x dx}{x} = lx + xla + \frac{x^2 l^2 a}{1.2.2} + \frac{x^3 l^3 a}{1.2.3.3} + \ldots + C.$$

223. No caso de ser n fraccionario, um dos processos precedentes reduziria o integral a outro, no qual o expoente de x ficasse comprehendido entre 1 e -1; e depois o desenvolvimento em serie serviria para achar por approximação este ultimo integral.

Tudo isto se pode egualmente applicar a $za^x dx$, quando z é uma funcção algebrica de x.

224. Mais geralmente, sendo z uma funcção transcendente de x, e pondo

$$\int z^m dx = Z,\ \int Z dx = Z_1,\ \int Z_1 dx = Z_2, \ldots,$$

é $$\int P z^m dx = PZ - P' Z_1 + P'' Z_2 - \ldots.$$

225. Se Pdx se sabe integrar, pode tambem considerar-se em primeiro logar z^m como constante. E assim, pondo

$$z'\int Pdx = P_1,\ z'\int P_1 dx = P_2 \ldots,$$

será

$$\int Pz^m\,dx = z^m \int Pdx + \sum_1^m (-1)^i \,.\, m(m-1)\ldots(m-i+1)z^{m-i}\int P_i\,dx.$$

No caso de ser negativo o expoente de z: pondo

$$P = z'\int Q_1 dx,\ Q_1 = z'\int Q_2 dx, \ldots$$

será $$\int \frac{Pdx}{z^m} = \int \frac{P}{z'} \cdot \frac{dz}{z^m} = -\frac{P}{(m-1)z^{m-1}z'} + \frac{1}{m-1}\int \frac{Q_1 dx}{z^{m-1}};$$

e portanto

$$\int \frac{Pdx}{z^m} = -\sum_0^{m-2} \frac{Q_i}{(m-1)(m-2)\ldots(m-i-1)z^{m-i-1}z'} + \frac{1}{(m-1)(m-2)\ldots 1}\int \frac{Q_{m-1}dx}{z},$$

sendo $Q_0 = P$.

Das funcções logarithmicas

226. Se m é inteiro e positivo: a primeira formula do n.º 225, pondo $z=lx$, dará

$$\int Pl^m x dx = l^m x \int P dx - ml^{m-1}x \int P_1 dx + m(m-1)l^{m-2}\int P_2 dx \ldots$$

Por exemplo, sendo $P=x^n$, o que dá

$$z' \int P dx = \frac{x^n}{n+1} = P_1,\ z' \int P_1 dx = \frac{x^n}{(n+1)^2} = P_2, \ldots,$$

teremos

$$\int x^n l^m x dx = x^{n+1}\left(\frac{l^m x}{n+1} - \frac{ml^{m-1}x}{(n+1)^2} + \frac{m(m-1)l^{m-2}x}{(n+1)^3} - \ldots\right) + C.$$

227. Se m é inteiro negativo: a segunda formula do n.º 225, pondo $z=lx$, dará

$$\int \frac{P dx}{l^m x} = -\frac{Px}{(m-1)l^{m-1}x} - \frac{Q_1 x}{(m-1)(m-2)l^{m-2}x} - \ldots + \frac{1}{(m-1)(m-2)\ldots 1}\int \frac{Q_{m-1}dx}{lx}.$$

Por exemplo, sendo $P=x^n$, o que dá

$$Q_1 = \frac{d\left(\frac{P}{z'}\right)}{dx} = (n+1)x^n,\ Q_2 = \frac{d\left(\frac{Q_1}{z'}\right)}{dx} = (n+1)^2 x^n, \ldots$$

teremos

$$\int\frac{x^n dx}{l^m x}=\begin{cases}-\frac{x^{n+1}}{m-1}\left[\frac{1}{l^{m-1}x}+\frac{n+1}{(m-2)l^{m-2}x}+\ldots\frac{(n+1)^{m-2}}{(m-2)(m-3)..1\,lx}\right]\\ +\frac{(n+1)^{m-1}}{(m-1)(m-2)..1}\int\frac{x^n dx}{lx}.\end{cases}$$

Se fizermos $x^{n+1}=z$, $lz=u$, teremos $\int\frac{x^n dx}{lx}=\int\frac{e^u du}{u}$, que se pode integrar pelas series, como no n.º 222.

228. Se m é fraccionario, quer positivo, quer negativo: uma das formulas precedentes faz depender $\int Pl^m x dx$ d'outro integral da mesma fórma, no qual m fica entre 1 e -1. E para obter este ultimo, recorrer-se-ha ao desenvolvivento em serie.

Das funcções circulares

229. Quando numa expressão differencial entram arcos de circulo, vê-se, por ser a differencial d'estes arcos funcção algebrica das linhas trigonometricas, que, se integrarmos por partes, considerando em primeiro logar os arcos como constantes, a funcção, que fica por integrar, deve apparecer desembaraçada d'elles. Por exemplo:

$$\int zdx \text{ arc } (\text{sen} = x) = \text{arc } (\text{sen} = x) \int zdx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int zdx,$$

$$\int zdx \text{ arc } (\text{tang} = x) = \text{arc } (\text{tg} = x) \int zdx - \int \frac{dx}{1+x^2} \int zdx.$$

230. Mas, quando as funcções contêem linhas trigonometricas, ha muitos modos de as integrar, cada um dos quaes poderá ser mais ou menos vantajoso segundo a fórma da differencial proposta. Exponhamos os principaes:

231. Primeiro methodo. A hypothese $\text{sen}\, x = z$ ou $\cos x = z$ reduz as funcções a differenciaes binomias, porque $\text{sen}\, x = z$ dá $\cos x = \sqrt{1-z^2}$ e $dx = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Assim $$\text{sen}^m x \cos^n x dx = z^m dz\, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

E então: o expoente de $1-z^2$ é inteiro, quando n é impar; a expressão satisfaz á primeira condição de integrabilidade, $\dfrac{m+1}{2} =$ inteiro, quando m é impar; e á segunda, $\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{m+n}{2} =$ inteiro, quando m e n são pares,

Exemplos:

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx = \int z^4 dz(1 - z^2) = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C,$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3}(3 - \cos^2 x)\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{\left(\operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x\right)\cos x}{4} + \frac{1.3x}{2.4} + C.$$

232. SEGUNDO METHODO. Como são $\int dx \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix} kx = \pm \frac{1}{k} \begin{matrix}\operatorname{sen}\\ \cos\end{matrix} kx + C$, e já sabemos desenvolver as potencias de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em series de senos e cosenos de arcos multiplos de x, só teremos que applicar estas formulas a cada um dos termos do desenvolvimento respectivo.

Por exemplo (*Alg. Sup.*, n.° 162)

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{80}\operatorname{sen} 5x + \frac{5}{48}\operatorname{sen} 3x + \frac{5}{8}\operatorname{sen} x + C.$$

Este methodo emprega-se mais vezes do que o precedente, por ser mais facil obter as soluções numericas quando se preferem ás potencias dos senos e dos cosenos os senos e cosenos de arcos multiplos.

233. TERCEIRO METHODO. Transformam-se os senos e os cosenos, e suas potencias, em exponenciaes, pelas formulas ((K), n.° 159 da *Alg. Sup.*); o que reduz a integração á d'estas ultimas funcções.

234. QUARTO METHODO. Integra-se por partes, começando por considerar $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$ como constante.

Assim:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^n x \operatorname{sen} x dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x d\left(-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2} x \operatorname{sen}^{m-2} x d x.$$

Depois, substituindo nesta expressão $\cos^n x(1-\operatorname{sen}^2 x)$ em vez de $\cos^{n+2} x$, e resolvendo em ordem a $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$, ou fazendo um calculo similhante a respeito de sen x, acharemos

$$\left.\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x dx &= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\cos^{n+1} x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\cos^n x dx,\\ \int \operatorname{sen}^m x\cos^n x dx &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x\cos^{n-2} x dx\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{I});$$

por meio das quaes se abaterão successivamente os expoentes de sen x ou cos x.

A segunda d'estas equações deduz-se immediatamente da primeira, mudando reciprocamente m em n, e x em $90°-x$. E o mesmo terá logar nas equações (K) e (L).

Por exemplo:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x dx = -\frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x}{5}+\frac{2}{5}\int \operatorname{sen} x\cos^2 x dx$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x}{5}+\frac{2\operatorname{sen}^2 x\cos x}{15}-\frac{2\cos x}{15}+C.$$

235. Quando o expoente de cos x ou de sen x é negativo, a primeira e a segunda das formulas (I), mudando n em $-n$ ou m em $-m$, dão, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}^m x dx}{\cos^n x} &= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x}{(m-n)\cos^{n-1} x}+\frac{m-1}{m-n}\int \frac{\operatorname{sen}^{m-2} x}{\cos^n x}dx,\\ \int \frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x} &= -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{m-1} x}-\frac{n-1}{m-n}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\operatorname{sen}^m x}dx\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{K}).$$

Finalmente, mudando n em $-n$ na segunda das formulas (I) ou m em $-m$ na primeira, resolvendo em ordem ao integral do segundo membro, e depois, mudando respectivamente n em $n-2$ ou m em $m-2$: vem

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{\operatorname{sen}^m x dx}{\cos^n x}&=\frac{\operatorname{sen}^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{m+2-n}{n-1}\int\frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^{n-2}x}dx,\\ \int\frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x}&=-\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1}x}-\frac{n+2-m}{m-1}\int\frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^{m-2}x}dx\end{aligned}\right\}\ldots.(L).$$

236. Se nas equações (I) e (L) fizermos n ou m nullo, teremos

$$\int\operatorname{sen}^m x dx=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1}x\cos x}{m}+\frac{m-1}{m}\int\operatorname{sen}^{m-2}x dx,$$

$$\int\cos^n x dx=\frac{\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx,$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^m x}=-\frac{\cos x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2}x},$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\operatorname{sen}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

237. Quando os expoentes de $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ são ambos negativos: multiplicando o numerador por $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$, resulta

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^m x\cos^n x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2}x\cos^n x}+\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^m x\cos^{n-2}x};$$

formula por meio da qual, sendo m e n inteiros, se chega a fracções sem $\operatorname{sen}x$ ou sem $\cos x$ no denominador.

E no caso de $m=n$, é

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x \cos^n x} = 2^{n-1} \int \frac{d(2x)}{\operatorname{sen}^n 2x};$$

que, para $n=1$, se reduz a $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{d(2x)}{\operatorname{sen} 2x}$.

238. Por meio das formulas dos n.os 234 a 237 o integral de $\operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$, sendo m e n numeros inteiros, positivos ou negativos ou nullos, ficará dependente de alguns dos seguintes:

$$\int dx, \int dx \cos x \text{ ou } \int dx \operatorname{sen} x, \int dx \operatorname{sen} x \cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} \text{ ou } \int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}, \int \frac{dx \cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ ou } \int \frac{dx \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Ora estes integraes são:

1.° $\int dx = x + C$;

2.° $\int dx \cos x = \operatorname{sen} x + C$, ou $\int dx \operatorname{sen} x = -\cos x + C$;

3.° $\int dx \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$;

4.° $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int -\frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2} l\left(c\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) = l\left(c \operatorname{tang} \frac{1}{2} x\right)$;

e $\int \frac{dx}{\cos x} = l\left[c \cot\left(45° - \frac{1}{2} x\right)\right] = l\left[c \operatorname{tang}\left(45° + \frac{1}{2} x\right)\right]$;

5.° $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{d(2x)}{\operatorname{sen} 2x} = l(c \operatorname{tang} x)$;

6.° $\int \frac{dx \cos x}{\operatorname{sen} x} = l(c \operatorname{sen} x)$, ou $\int \frac{dx \operatorname{sen} x}{\cos x} = l\left(\frac{c}{\cos x}\right)$:

sabemos pois integrar a funcção proposta.

239. A integração por partes dá ainda os integraes seguintes, que se encontram muitas vezes:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a}\left[\operatorname{sen} ax\left(1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \dots\right) + \cos ax\left(\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} \dots\right)\right] + C,$$

$$\int x^n \operatorname{sen} ax dx = -\frac{x^n}{a}\left[\cos ax\left(1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \dots\right) - \operatorname{sen} ax\left(\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \dots\right)\right] + C.$$

Radicaes quadrados de polynomios racionaes do terceiro e quarto gráu

240. Sejam $f(x, X)dx$ funcções nas quaes entra o radical

$$X = \sqrt{a + bx + cx^2 + ex^3 + gx^4},$$

representando f uma funcção racional de x e X.

Para simplificar esta expressão, desembaraçando-a das potencias impares da variavel, façamos

$$x = \frac{r + st}{1 + t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a);$$

onde r e s são duas indeterminadas, das quaes disporemos para aquelle fim, e t a nova variavel.

Decompondo X nos seus factores lineares, poderemos escrever

$$X^2 = g(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

E a hypothese (a) dará:

$$dx = \frac{(s-r)}{(1+t)^2}dt,$$

$$X = \frac{\sqrt{g[r-\alpha+(s-\alpha)t][r-\beta+(s-\beta)t][r-\gamma+(s-\gamma)t][r-\delta+(s-\delta)t]}}{(1+t)^2}.$$

As potencias impares de t debaixo do radical desapparecerão, pondo

$$(r-\alpha)(s-\beta)+(r-\beta)(s-\alpha)=0,\ (r-\gamma)(s-\delta)+(r-\delta)(s-\gamma)=0'$$

isto é,

$$2rs-(\alpha+\beta)(r+s)+2\alpha\beta=0,\ 2rs-(\gamma+\delta)(r+s)+2\gamma\delta=0,$$

que dão

$$r+s=\frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)},\ rs=\frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)-\gamma\delta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}.$$

E como r e s são raizes da equação do segundo gráu, da qual o segundo termo tem $-(r+s)$ por coefficiente, e o ultimo termo é rs, serão essas raizes reaes, se for

$$(r+s)^2>4rs, \text{ isto é, } \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{[\alpha+\beta-(\gamma+\delta)]^2}>0.$$

Se α, β, γ, δ, são reaes, e se suppõem escriptas na ordem descendente, esta condição verifica-se, como é manifesto.

Se duas são imaginarias, $\alpha=\mu+\nu\sqrt{-1}$, $\beta=\mu-\nu\sqrt{-1}$,

a substituição tambem satisfaz; porque dá

$$\frac{[(\mu-\gamma)^2+\nu^2)][(\mu-\delta)^2+\nu^2]}{[2\mu-(\gamma+\delta)]^2}>0.$$

E se todas são imaginarias,

$$\alpha=\mu+\nu\sqrt{-1},\ \beta=\mu-\nu\sqrt{-1},\ \gamma=\mu'+\nu'\sqrt{-1},\ \delta=\mu'-\nu'\sqrt{-1},$$

a substituição ainda satisfaz; porque dá

$$\frac{[(\mu-\mu')^2+(\nu-\nu')^2][(\mu-\mu')^2+(\nu+\nu')^2]}{4(\mu-\mu')^2}>0.$$

No caso particular de ser $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, as expressões de $r+s$ e rs

tornar-se-iam infinitas; mas então é

$$X^2 = g[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta][x^2 - (\alpha + \beta)x + \gamma\delta)],$$

de cujos factores, por ser nelles o mesmo o termo em x, se expelle este termo, pondo

$$x = t + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

E no caso de ser $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, é racional a funcção

$$X = [x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]\sqrt{g},$$

da qual se expelle do mesmo modo o termo em x.

Portanto sempre é possivel reduzir a expressão proposta $f(x, X)\,dx$ a outra $\varphi(t, T)\,dt$ racional em t e T, na qual T^2 seja um polynomio racional do quarto gráu em t, sem potencias impares d'esta variavel.

241. Se o polynomio X^2 é do terceiro gráu, a hypothese (a) dará

$$dx = \frac{s-r}{(1+t)^2}dt, \; X = \frac{\sqrt{e[r-\alpha+(s-\alpha)t][r-\beta+(s-\beta)t][r-\gamma+(s-\gamma)t][1+t]}}{(1+t)^2}.$$

Sem fazer novo calculo, vê-se que basta substituir a unidade em logar de $r-\delta$ e $s-\delta$ na segunda das equações de-condição

$$(r-\alpha)(s-\beta)+(r-\beta)(s-\alpha)=0, \; (r-\gamma)(s-\delta)+(r-\delta)(s-\gamma)=0,$$

as quaes ficarão sendo

$$r + s = 2\gamma, \; rs - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta = 0;$$

e a condição $(r+s)^2 - 4rs > 0$ tornar-se-ha em

$$\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta > 0, \text{ ou } (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) > 0,$$

que se verifica, chamando γ a menor ou a maior das tres quantidades α, β, γ.

Por conseguinte a expressão proposta ainda se reduz, pela hypothese (a), á fórma $\varphi(t, \mathrm{T})\,dt$, na qual T^2 representa um polynomio racional par do quarto gráu em t, quando X^2 é um polynomio racional do terceiro gráu em x.

242. A funcção racional $\varphi(t, \mathrm{T})$ pode ter em geral a fórma $\frac{\mathrm{M}+\mathrm{NT}}{\mathrm{P}+\mathrm{QT}}$, onde M, N, P, Q, representam funcções racionaes de t. E porque, multiplicando ambos os termos por $\mathrm{P}-\mathrm{QT}$, se pode dar a esta expressão a fórma

$$\frac{\mathrm{MP}-\mathrm{T}^2\mathrm{NQ}}{\mathrm{P}^2-\mathrm{T}^2\mathrm{Q}^2}+\frac{(\mathrm{MQ}-\mathrm{NP})\mathrm{T}^2}{\mathrm{P}^2-\mathrm{T}^2\mathrm{Q}^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{T}},$$

cujo primeiro termo, assim como o coefficiente de $\frac{1}{\mathrm{T}}$ no segundo, são racionaes em t, vê-se que o integral $\int\varphi(t, \mathrm{T})\,dt$ depende de outro da fórma $\int\frac{\psi t}{\mathrm{T}}\,dt$.

243. A funcção racional ψt pode ter em geral a fórma $\frac{\mathrm{G}+\mathrm{H}t}{\mathrm{I}+\mathrm{L}t}$, sendo G, H, I, L, funcções de t^2.

Ora, procedendo como acabamos de proceder, é

$$\frac{\mathrm{G}+\mathrm{H}t}{\mathrm{I}+\mathrm{L}t}=\frac{\mathrm{HI}-\mathrm{HL}t^2}{\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2}-\frac{(\mathrm{GL}-\mathrm{HI})\,t}{\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2};$$

e por conseguinte

$$\int\frac{\psi t}{\mathrm{T}}\,dt=\int\frac{\mathrm{GI}-\mathrm{HL}t^2}{\mathrm{T}(\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2)}\,dt-\int\frac{\mathrm{GL}-\mathrm{HI}}{2\mathrm{T}(\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2)}\,d(t^2),$$

da qual o segundo termo, por ser da fórma *funcção* $(t^2, \mathrm{T})\,d(t^2)$ e ser T^2 do segundo gráu em relação a t^2, pertence ao caso de que se tractou no n.º 205, e no coefficiente de $\frac{dt}{T}$ do primeiro só entram potencias pares de t: portanto o integral $\int \frac{\psi(t)}{T}dt$ depende de $\int \frac{\pi(t^2)}{T}dt$.

211. Decompondo T^2 nos seus factores do segundo grau, pode dar-se-lhe a fórma

$$T^2 = (m \pm nt^2)(\pm m' \pm n't^2), \text{ ou } T^2 = nn'(p^2 \pm t^2)(\pm q^2 \pm t^2),$$

suppondo

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}, \text{ ou } \frac{p^2}{q^2} < 1.$$

Os signaes dos factores de T dão as seguintes combinações:

$$1.^\circ \quad \sqrt{(p^2 - t^2)(q^2 - t^2)}; \qquad 2.^\circ \quad \sqrt{(p^2 - t^2)(-q^2 + t^2)};$$

$$3.^\circ \quad \sqrt{(p^2 - t^2)(q^2 + t^2)}; \qquad 4.^\circ \quad \sqrt{(p^2 - t^2)(-q^2 - t^2)};$$

$$5.^\circ \quad \sqrt{(p^2 + t^2)(q^2 + t^2)}; \qquad 6.^\circ \quad \sqrt{(p^2 + t^2)(\ \ q^2 - t^2)};$$

$$7.^\circ \quad \sqrt{(p^2 + t^2)(-q^2 + t^2)}; \qquad 8.^\circ \quad \sqrt{(p^2 + t^2)(-q^2 - t^2)};$$

A ultima reduz-se á quinta, multiplicando pela $\sqrt{-1}$ os termos da fracção $\frac{\pi(t^2)}{T}$.

Em quanto ás outras: attendendo ás condições necessarias para que o radical seja real, vê-se que satisfazem a estas condições, dando $x < 1$, $k < 1$ e $\frac{dt}{T} = \frac{Adx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$, as hypotheses seguintes:

$$1.^\circ \quad x = \frac{t}{p}, \text{ ou } x = \frac{q}{t}, \text{ e } \frac{p^2}{q^2} = k^2;$$

2.° $x^2 = \frac{q^2 - t^2}{q^2 - p^2}$, e $\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2$;

3.° $x^2 = \frac{p^2 - t^2}{p^2}$, e $\frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2$;

4.° $x^2 = \frac{t^2 - p^2}{t^2}$, e $\frac{q^2}{p^2 + q^2} = k^2$;

5.° $x^2 = \frac{t^2}{t^2 + p^2}$, e $\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2$;

6.° $x^2 = \frac{q^2 - t^2}{q^2}$, e $\frac{q^2}{p^2 + q^2} = k^2$;

7.° $x^2 = \frac{t^2 - q^2}{t^2}$, e $\frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2$.

E por tanto o integral $\int \frac{\pi(t^2)}{T} dt$ toma a fórma

$$\int \frac{F(x^2)\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

245. A funcção $F(x^2)$ pode compor-se de termos inteiros da fórma $A_i x^{2i}$, ou de fracções racionaes (n.° 202) $\frac{B_i}{(x^2 + a)^i}$.

1.° Pondo $R = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} = \sqrt{1 - (1 + k^2)x^2 + k^2 x^4}$, é $$\frac{d\,(\mathrm{R}x^{2i-3})}{dx}=(2i-3)\,\mathrm{R}x^{2i-4}-\frac{1+k^2-2k^2x^2}{\mathrm{R}}x^{2i-2}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{R}}[(2i-3)x^{2i-4}-2(i-1)(1+k^2)x^{2i-2}+(2i-1)k^2x^{2i}];$$

e conseguintemente

$$\int\frac{x^{2i}\,dx}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{R}x^{2i-3}}{(2i-1)k^2}+\frac{2(i-1)(1+k^2)}{(2i-1)\,k^2}\int\frac{x^{2i-2}dx}{\mathrm{R}}-\frac{2i-3}{(2i-1)k^2}\int\frac{x^{2i-4}dx}{\mathrm{R}}.$$

Por esta formula dependerá $\int\frac{x^{2i}\,dx}{\mathrm{R}}$ de $\int\frac{x^2dx}{\mathrm{R}}$ e $\int\frac{dx}{\mathrm{R}}$.

2.° É

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{R}x}{(x^2+a)^{i-1}}\right)}{dx}=\frac{[1-2(1+k^2)x^2+3k^2x^4](x^2+a)-2(i-1)[1-(1+k^2)x^2+k^2x^4]x^2}{(x^2+a)^i\,\mathrm{R}};$$

e como o coefficiente de $\frac{1}{\mathrm{R}}$ se pode reduzir a

$$\frac{b}{(x^2+a)^i}+\frac{c}{(x^2+a)^{i-1}}+\frac{e}{(x^2+a)^{i-2}}+\frac{g}{(x^2+a)^{i-3}},$$

será

$$\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^i}=\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{R}x}{b\,(x^2+a)^{i-1}}-\frac{c}{b}\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^{i-1}}\\&-\frac{e}{b}\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^{i-2}}-\frac{g}{b}\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^{i-3}};\end{aligned}\right.$$

formula, pela qual dependerá $\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^i}$ de $\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)}$, $\int\frac{dx}{\mathrm{R}}$, $\int\frac{(x^2+a)dx}{\mathrm{R}}$;

isto é de $$\int \frac{dx}{R(x^2+a)}, \int \frac{dx}{R}, \int \frac{x^2dx}{R},$$

ou, mudando a em $\frac{1}{n}$, de $$\int \frac{dx}{R(1+nx^2)}, \int \frac{dx}{R}, \int \frac{x^2\,dx}{R}.$$

246. Fica pois demonstrado que o integral proposto (n.º **240**) se faz depender, pelas transformações indicadas, dos tres:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$v = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2((1-k^2x^2)}};$$

$$w = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

247. Para exemplo de integraes binomios, que se podem reduzir a estes, tomemos

$$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Pondo $$\sqrt[3]{1-x^3} = (1-x)\,t,$$

isto é, $$(1-x)^2t^3 = 1+x+x^2 = \frac{3(1+x)^2+(1-x)^2}{4},$$

o que dá $$\frac{1-x}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}} \text{ e } \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-x}{1+x}dt,$$

ficará $$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{dt\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}},$$

o qual, segundo o que fica dito, se reduz a alguns dos integraes u, v, w.

Funcções ellipticas

248. No caso de ser $k=0$, os integraes u, v, w, são:

$$u+C=\text{arc}\,(\text{sen}=x);$$

(n.° 219) $$v+C'=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}u;$$

$$w+C''=\frac{1}{\sqrt{1+n}}\,\text{arc}\,(\text{tang}=t\sqrt{1+n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+n}}\,\text{arc}\left(\text{tang}=x\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

pondo $t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, que dá $x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Para $n=-1$ o ultimo integral toma a fórma $\frac{0}{0}$; mas (n.° 88), derivando os dois termos em ordem a n, ou, mais facilmente, em ordem a $\sqrt{1+n}$, acha-se logo $w+C''=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

249. No caso de $k^2=1$, os integraes são

(n.° 202) $$u+C=\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}=l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$v + C' = \int \frac{x^2 - 1}{1 - x^2} dx + \int \frac{dx}{1 - x^2} = -x + u;$$

$$w + C'' = \frac{1}{1+n}\left[\int \frac{ndx}{1+nx^2} + \int \frac{dx}{1-x^2}\right] = \frac{1}{1+n}[\sqrt{n}\,\mathrm{arc}(\mathrm{tg} = x\sqrt{n}) + u].$$

Mas, se o coefficiente de x^2 é negativo, $-n$, o terceiro integral é

$$w + C'' = \frac{1}{1-n}\left[\int \frac{-ndx}{1-nx^2} + \int \frac{dx}{1-x^2}\right] = \frac{1}{1-n}\left[l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{n}\, l\sqrt{\frac{1+x\sqrt{n}}{1-x\sqrt{n}}}\right].$$

Para $n = 1$ esta expressão reduz-se a $\frac{0}{0}$; derivando porém em ordem a n, acha-se

$$w + C'' = l\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x}{2(1-x^2)}.$$

250. Nos outros casos não se podem obter os integraes, a não ser pelas series.

Fazendo $x = \mathrm{sen}\,\varphi$, as expressões integraes tomam a fórma

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}},$$

$$v = \int \frac{\mathrm{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}},$$

$$w = \int \frac{d\varphi}{(1 + n\,\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}}.$$

E, por ser $\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}} = \frac{1}{k^2\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}} - \frac{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}}{k^2},$

vem elles emfim a depender dos tres seguintes:

$$F(k,\varphi)=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)},$$

$$E(k,\varphi)=\int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)},$$

$$\pi(k,n,\varphi)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\ldots\ldots\text{(III)};$$

segundo a notação de Legendre.

Os integraes (I), (II), (III), que não se podem exprimir em funcções algebricas, exponenciaes, logarithmicas, ou circulares de φ, formam uma nova classe de transcendentes, ás quaes se deu o nome de *funcções ellipticas* de 1.ª, 2.ª e 3.ª especie, pela razão que veremos quando tractarmos da rectificação das secções conicas.

O angulo φ chama-se a *amplitude*, a constante k o *modulo*, e a constante n o *parametro*.

Dois modulos k, k', ligados entre si pela relação $k^2+k'^2=1$, dizem-se *complementares*.

251. Os trabalhos de geometras abalisados, especialmente os de Legendre e depois os de Jacobi e Abel, têm dado grande importancia a estas funcções, e feito conhecer muitas propriedades notaveis d'ellas.

Aqui limitar-nos-hemos a algumas fundamentaes e mais elementares.

252. De
$$F\left(k,\frac{1}{2}\pi+\varphi\right)=f(\varphi)+C$$

tira-se, pela mudança de φ em $-\varphi$ que só muda o signal da differencial,

$$F\left(k,\frac{1}{2}\pi-\varphi\right)=-f(\varphi)+C';$$

por conseguinte

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right) + F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = C + C' = \text{const.}$$

E como, pondo $\varphi = 0$, resulta $2F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \text{const.}$

teremos $F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right) = 2F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right).$

Se nesta equação mudarmos φ em $\pi + \varphi$, virá

$$F\left(k, \frac{3}{2}\pi + \varphi\right) = 2F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) + F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right)$$

$$= 4F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right);$$

e teremos successivamente, assim como mudando depois φ em $\varphi + \frac{1}{2}\pi$,

$$\left.\begin{aligned} &F\left(k, \frac{2i+1}{2}\pi + \varphi\right) = (2i+2)F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right), \\ &F(k, (i+1)\pi + \varphi) = (2i+2)F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) + F(k, \varphi). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(1).$$

Obter-se-ha por estas equações o integral respectivo a qualquer amplitude maior que $\frac{1}{2}\pi$, quando forem dados os correspondentes a amplitudes não maiores que $\frac{1}{2}\pi$.

253. Se tomarmos uma nova amplitude φ_1 e um novo modulo k_1, taes quaes sejam

$$\operatorname{sen}(2\varphi_1-\varphi)=k\operatorname{sen}\varphi,\quad k_1=\frac{2\sqrt{k}}{k+1},\ldots\ldots\ldots(a),$$

será
$$\cos(2\varphi_1-\varphi)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi},$$

e por conseguinte

$$\cos 2\varphi_1=\cos((2\varphi_1-\varphi)+\varphi)=\cos\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}-k\operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$\operatorname{sen}^2\varphi_1=\frac{1-\cos\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}+k\operatorname{sen}^2\varphi}{2},$$

$$d\varphi_1=\frac{k\cos\varphi+\cos(2\varphi_1-\varphi)}{2\cos(2\varphi_1-\varphi)}d\varphi=\frac{k\cos\varphi+\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{2\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}d\varphi;$$

valores que, substituidos em $\dfrac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}}$,

dão
$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}}=\frac{1+k}{2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Portanto as equações

$$\operatorname{sen}(2\varphi_1-\varphi)=k\operatorname{sen}\varphi,\quad k_1=\frac{2\sqrt{k}}{k+1},\quad F(k_1,\varphi_1)=\frac{1+k}{2}F(k,\varphi),$$

farão depender $F(k,\varphi)$ de $F(k_1,\varphi_1)$.

E como, por serem

$$k_1-k=\frac{2\sqrt{k}-k-k^2}{1+k},\quad 1-k_1=\frac{(1-\sqrt{k})^2}{k+1},$$

é k_1 maior que k, e vai approximando-se successivamente da unidade, a equação

$$F(k_i,\varphi_i)=\frac{1+k_{i-1}}{2}\cdot\frac{1+k_{i-2}}{2}\cdots\frac{1+k}{2}F(k,\varphi)\ldots\ldots(2),$$

sendo $$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}\ldots k_i=\frac{2\sqrt{k_{i-1}}}{1+k_{i-1}},$$

e $$\operatorname{sen}(2\varphi_1-\varphi)=k\operatorname{sen}\varphi,\ldots\operatorname{sen}(2\varphi_i-\varphi_{i-1})=k_{i-1}\operatorname{sen}\varphi_{i-1},$$

fará depender $F(k,\varphi)$ d'outra $F(k_i,\varphi_i)$, na qual se possa considerar o modulo k_i como proximamente egual á unidade, isto é, de (n.º 238)

$$\int\frac{d\varphi_i}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi_i}}=\int\frac{d\varphi_i}{\cos\varphi_i}=l\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi_i\right).$$

254. Se quizermos prolongar a serie para a esquerda de k e φ, teremos

$$k=\frac{2\sqrt{k_{-1}}}{1+k_{-1}},\ \operatorname{sen}(2\varphi-\varphi_{-1})=k_{-1}\operatorname{sen}\varphi_{-1};$$

sendo $k_{-1}=\dfrac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$ menor que k, e approximando-se successivamente de zero.

E continuando assim, chegaremos a um modulo k_{-i} muito proximo de zero, para o qual se poderá suppor

$$\int\frac{d\varphi_i}{\sqrt{1-k_{-i}^2\operatorname{sen}^2\varphi_{-i}}}=\varphi_{-i}.$$

Portanto:

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_{-1}}{2} \cdot \frac{1+k_{-2}}{2} \cdots \frac{1+k_{-i}}{2} F(k_{-i}, \varphi_{-i}) \cdots (3).$$

Esta formula, applicada a $F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right)$, dá a expressão notavel

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1+k_{-1}}{2} \cdot \frac{1+k_{-2}}{2} \cdots \frac{1+k_{-i}}{2} \cdots \frac{1}{2}\pi,$$

sendo o coefficiente de $\frac{1}{2}\pi$ o limite para o qual tende o producto respectivo quando i tende para o infinito; expressão exacta, se é $k_{-\infty} = 0$.

255. Das duas formulas (2) e (3) deve escolher-se a que mais depressa conduzir no integral procurado.

E, calculada assim $F(k, \varphi)$ para o valor de φ desde 0 até $\frac{1}{2}\pi$, as formulas (1) darão depois o mesmo integral para as amplitudes maiores que $\frac{1}{2}\pi$.

256. Emquanto ás funcções $E(k, \varphi)$, a substituição das expressões de $d\varphi_1$, k_1 e $\operatorname{sen}^2 \varphi_1$ do n.º 253 dá

$$d\varphi_1 \sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1} = \frac{(k \cos \varphi + \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi})^2}{2(1+k)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} d\varphi;$$

ou, desenvolvendo o numerador, attendendo á transformação

$$\frac{k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

e simplificando:

$$d\varphi_1\sqrt{1-k_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}=\frac{(k^2-1)\,d\varphi}{2(1+k)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}+\frac{d\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1+k}+\frac{k\cos\varphi\,d\varphi}{1+k}.$$

Por conseguinte

$$(1+k)\,\mathrm{E}(k_1,\varphi_1)=-\frac{1-k^2}{2}\mathrm{F}(k,\varphi)+\mathrm{E}(k,\varphi)+k\operatorname{sen}\varphi\ldots(4).$$

E como são $\quad \mathrm{E}(1,\varphi_i)=\operatorname{sen}\varphi_i,\ \mathrm{E}(0,\varphi_i)=\varphi_i,$

vê-se que pela equação (4), applicada successivamente, se fará depender, com approximação indefinida, a funcção elliptica de segunda especie $\mathrm{E}(k,\varphi)$ de funcções F da primeira especie, e de $\mathrm{E}(1,\varphi_i)$ ou $\mathrm{E}(0,\varphi_i)$, que se sabem integrar.

Theorema de Landen. Façamos $x=\operatorname{sen}\varphi$ na equação da ellipse da qual são 1 o eixo maior e k a excentricidade. Será $y=b\cos\varphi$, e o arco de ellipse, pondo $\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\Delta$,

$$\mathrm{S}_e=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\Delta d\varphi=\mathrm{E}(k,\varphi).$$

Na hyperbole da qual são 1 a excentricidade, k o semieixo transverso, e $b=\sqrt{1-k^2}$ o semieixo conjugado, se fizermos $x=k\sqrt{1+b^2\operatorname{tg}^2\varphi}$, ou $y=b^2\operatorname{tg}\varphi$, o arco será

$$\mathrm{S}_h=\int\frac{b^2d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi},$$

que, attendendo a $\quad k^2\cos^2\varphi=k^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi=k^2-1+\Delta^2=\Delta^2-b^2,$

e por ser

$$d(\Delta\operatorname{tg}\varphi)=\frac{\Delta\,d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{k^2d\varphi\operatorname{sen}^2\varphi}{\Delta}=\frac{b^2\,d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}+\frac{k^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta},$$

se transforma em

$$S_h = \Delta \tang \varphi - k^2 \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\Delta} = \Delta \tang \varphi - E(k, \varphi) + b^2 F(k, \varphi).$$

Finalmente, eliminando $F(k, \varphi)$ entre esta expressão de S_h e (4), virá

$$S_h = \Delta \tang \varphi + 2k \operatorname{sen} \varphi + S_e - 2(1+k) S_{1e} \dots\dots\dots (5),$$

que é o theorema de Landen.

Este theorema mostra que a expressão d'um arco de hyperbole se compõe d'uma parte algebrica, e de mais dois termos dependentes dos arcos S_e e S_{1e} de ellipses, cujas amplitudes e modulos são ligados entre si pelas equações (a) do n.º 253.

Integração por series

257. Se a funcção proposta não pode integrar-se exactamente, é necessario recorrer ás approximações.

Assim, para ter $\int y dx$, desenvolveremos y em serie ordenada segundo as potencias de x, e depois integraremos o producto de cada um dos termos por dx.

Exemplos:

1.° Seja $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}(\text{tang} = x).$$

Desenvolvendo $\frac{1}{1+x^2}$, o que dá

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_0^\infty (-1)^i x^{2i},$$

e integrando o segundo membro, vem

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \text{C} = \sum_0^\infty (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + \text{C};$$

e portanto $$\text{arc}(\text{tang} = x) = n\pi + \sum_0^\infty (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

2.° Seja $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\text{sen} = x).$$

Teremos, seguindo o mesmo processo,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_0^\infty \frac{1 \ldots (2i+1)}{2 \ldots (2i+2)} x^{2i+2},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} \cdot \frac{x^{2i+3}}{2i+3} + \mathrm{C};$$

$$\text{arc}\,(\text{sen} = x) = n\pi + x + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} \cdot \frac{x^{2i+3}}{2i+3}.$$

Já nos servimos em outro logar da primeira d'estas formulas para achar a razão do diametro para a circumferencia.

A segunda pode servir para o mesmo fim, pondo $n=0$, e

$$\text{arc}\,(\text{sen} = x) = \text{arc}\left(\text{sen} = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi;$$

o que dá

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} \cdot \frac{1}{(2i+3)\,2^{2i+3}}.$$

258. Tambem se pode algumas vezes integrar a funcção proposta, decompondo-a em dois factores, desenvolvendo um d'elles em serie, e integrando depois os productos dos termos d'este desenvolvimento pelo outro factor.

Por exemplo, desenvolvendo $\frac{1}{\sqrt{1-bx}}$ em serie, virá

$$\frac{1}{\sqrt{1-bx}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \ldots \frac{1\ldots(2i-1)}{2\ldots 2i} b^i x^i + \ldots,$$

e por conseguinte

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(1-bx)}} = \int \frac{1 + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} b^{i+1} x^{i+1}}{\sqrt{ax-x^2}} dx.$$

Temos assim de integrar uma serie de termos da fórma $\frac{x^p dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, o que faremos (n.os 215, I e 206) reduzindo

$$\int \frac{x^p dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{x^{p-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a-x}} \text{ a } \int \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2x}{a}\right).$$

259. Mas, como é necessario que a serie seja convergente, convém escolher, entre os processos que se podérem seguir nestas integrações, o que melhor satisfizer áquella condição.

Façamos $x = -h$ na serie de Taylor. Então será $f(x+h)$ uma constante $f(0) = c$;

e $$c = y - xy' + \frac{1}{2}x^2 y'' - \frac{1}{2.3}x^3 y''' + \ldots\ldots$$

Mudando pois nesta expressão y em $\int y dx$, e por conseguinte y', y'', em y, y', ..., teremos

$$\int y dx = c + xy + \sum_1^n (-1)^i \frac{x^{i+1} y^{(i)}}{1.2\ldots(i+1)} + \text{R}_n.$$

Vimos no n.º 200 que esta serie é a de Bernoulli, e que o resto R_n é

$$\text{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{1\ldots(n+1)} \int x^{n+1} d(y^{(n)}).$$

Por exemplo, em $$\int y dx = \int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$$

é $$c = a,\ y = \frac{1}{a+x},\ y' = \frac{1}{(a+x)^2}, \ldots y^{(i)} = (-1)^i \frac{1\ldots i}{(a+x)^{i+1}};$$

e conseguintemente

$$l(a+x)=la+\sum_0^n \frac{1}{i+1}\left(\frac{x}{a+x}\right)^{i+1}+\int\frac{x^{n+1}dx}{(a+x)^{n+2}}.$$

260. A formula de Maclaurin

$$fx=f+xf'+\frac{1}{2}x^2f''+\ldots\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

dá

$$\int fxdx=c+xf+\frac{1}{2}x^2f''+\ldots\frac{1}{1.2\ldots n}\int x^nf^n(\theta x)\,dx.$$

Sejam P e Q o maior e o menor dos valores de $f^{(n)}(\theta x)$, correspondentes aos de x desde 0 até x. Ficará $\int x^n f^n(\theta x)dx$ comprehendido entre $Px^n.\frac{x}{n+1}$ e $Qx^n\frac{x}{n+1}$; por onde se vê que, se a serie dada pela formula da Maclaurin for convergente, tambem a serie integral d'aquella o será.

Por exemplo, para $\int fxdx=\int e^xdx=e^x$, são $f=1$, $f'=1,\ldots$,

e $$\int e^xdx=c+x+\frac{x^2}{2}+\ldots\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots;$$

conseguintemente $$e^x=\sum_0^\infty\frac{x^i}{1.2..(i+1)}.$$

261. O theorema de ser convergente o integral d'uma serie, quando esta o é, mostra-se, qualquer que seja o processo empregado no desenvolvimento.

Sejam as fracções: $\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \frac{A'''}{B'''}, \ldots$; e $\frac{A^{(m)}}{B^{(m)}}, \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ a minima e a maxima d'ellas.

As desegualdades $\frac{A^{(i)}}{B^{(i)}} > \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}}, \frac{A^{(i)}}{B^{(i)}} < \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}},$

ou $A^{(i)} = B^{(i)} \cdot \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}} + B^{(i)} \cdot \alpha, \ A^{(i)} = B^{(i)} \cdot \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} - B^{(i)} \cdot \beta,$

dão $\Sigma A^{(i)} > \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}} \Sigma B^{(i)}, \ \Sigma A^{(i)} < \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} \Sigma B^{(i)},$

ou $\frac{\Sigma A^{(i)}}{\Sigma B^{(i)}} > \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}}, \frac{\Sigma A^{(i)}}{\Sigma B^{(i)}} < \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$;

isto é, a fracção cujos termos são a somma dos numeradores e a somma dos denominadores das propostas, está comprehendida entre a maxima e a minima d'ellas.

Dividamos a differença $x_n - x_0$ nas partes $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots x_n - x_{n-1}$.

A somma $fx_0 . (x_1 - x_0) + fx_1 . (x_2 - {}_1) + \ldots fx_{n-1} . (x_n - x_{n-1})$

terá por limite o integral $\int fxdx$ tomado entre $x = x_0$ e $x = x_n$ (n.º 196), com tanto que fx seja continua e não se torne infinita nesse intervallo.

Se tomarmos outra funcção $\varphi(x)$, que tenha o mesmo signal desde $x = x_0$ até $x = x_n$, a somma dos numeradores e dos denominadores das fracções

$$\frac{fx_0 . (x_1 - x_0)}{\varphi x_0 . (x_1 - x_0)}, \frac{fx_1 . (x_2 - x_1)}{\varphi x_1 . (x_2 - x_1)}, \ldots \frac{fx_{n-1} . (x_n - x_{n-1})}{\varphi x_{n-1} . (x_n - x_{n-1})},$$

dará, pelo que fica dicto,

$$\frac{\Sigma_0^{n-1} fx_i \cdot (x_{i+1} - x_i)}{\Sigma_0^{n-1} \varphi x_i \cdot (x_{i+1} - x_i)} = \frac{f\zeta}{\varphi\zeta},$$

suppondo $x_0, x_1, \ldots x_n$, tão proximas que entre as funcções $\frac{fx_i}{\varphi x_i}$ se acha uma egual ao primeiro membro.

Finalmente, tomando $\varphi x = 1$, e passando ao limite de Σ, será

$$\int_0^n fx dx = f\zeta \cdot (x_n - x_0).$$

Por isto, seja Fx uma funcção que se pode desenvolver em serie convergente

$$Fx = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + fx,$$

tendo o resto fx zero por limite.

Será $$\int_0^n Fx dx = \int u_0 dx + \int u_1 dx + \ldots + \int_0^n fx dx,$$

ou $$\int_0^n Fx dx = \Sigma \int u_i dx + f\zeta \cdot (x_n - x_0).$$

E como $f\zeta . (x_n - x_0)$ tende para zero, quando i tende para o infinito, segue-se que a serie, que dá o integral $\int_0^n Fx dx$, será convergente, quando o for a serie na qual se desenvolveu Fx (Vej. *Calc. int.* de Cournot, 2.ª ed., n.os 316 e 317).

262. Em quanto ás integrações de segunda, terceira... ordens das funcções d'uma variavel, nada diremos, porque, para as effectuar, basta o que temos exposto. Sómente advertimos que a expressão finita, resultante d'essas integrações, deve ter 2, 3, ... n constantes arbitrarias, quando a ordem do integral é 2, 3, ... n.

Querendo, por exemplo, integrar $\iint \frac{(a^2-x^2)dx^2}{(x^2+a^2)^2}$, decomporemos a fracção proposta nas duas $\frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2}-\frac{1}{x^2+a^2}$: a primeira integração dará

$$\int\frac{2a^2dx}{(x^2+a^2)^2}-\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\int\frac{dx}{x^2+a^2}+c;$$

e fazendo a segunda integração d'este integral multiplicado por dx, acharemos emfim

$$\int\left(\frac{xdx}{x^2+a^2}+cdx\right)=l\sqrt{x^2+a^2}+cx+c'$$

para integral duplo da expressão proposta.

Constantes arbitrarias. Integraes definidos

263. Seja P o integral de uma expressão differencial $\int f x dx$, e c a constante, que se ajuncta a este integral para ser tomado na maior generalidade (n.º 197); isto é, seja

$$\int f x dx = P + c.$$

Quando se applica o integral a uma questão determinada, desapparece a arbitrariedade da constante c, que deve então satisfazer ás condições da mesma questão.

Pedindo-se, por exemplo, a área BCMP (Fig. 1) comprehendida entre as ordenadas BC e MP, correspondentes ás abscissas a e b, será nullo o integral correspondente á abscissa BC; de sorte que, chamando A o valor de P correspondente á abscissa $x = a$, e B o correspondente a $x = b$, teremos

$$0 = A + c, \quad t = B + c,$$

ou

$$t = B - A.$$

O integral chama-se *indefinido*, quando a sua origem não está fixada; e nesse caso sómente é completo quando involve uma constante arbitraria.

Quando porém os limites a e b são dados, e são A e B os valores de P que lhes correspondem, o valor numerico $t = B - A$ é o integral *definido*, comprehendido entre aquelles limites. Logo:

Para ter o integral definido entre os limites $x = a$ *e* $x = b$, *basta substituir successivamente estes valores no integral indefinido* P, *e subtrahir um resultado do outro.*

Para designar commodamente os integraes definidos, applicam-se ao signal de integração $\int$ dois indices, um inferior relativo ao primeiro limite do integral, outro superior relativo ao segundo limite, como temos feito; notação imaginada por Fourier.

Assim, para designar o integral de $Fxdx$, comprehendido entre os limites correspondentes a $x=a$ e $x=b$, isto é, tomado desde $x=a$ até $x=b$, escreve-se $\int_a^b Fxdx$.

Por exemplo $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \operatorname{sen} xdx = -\left(\cos\pi - \cos\frac{1}{2}\pi\right) = +1.$

Quando se escreve $\int_a^x Fxdx$, indica-se um só limite; isto é, indica-se que o integral começa em $x=a$ e se extende a um valor indefinido da variavel x.

264. Mudança de limites. Podem trocar-se os limites, mudando o signal do integral, porque são

$$\int_a^b f'xdx = fb - fa = \mathrm{B} - \mathrm{A}, \quad \int_b^a f'xdx = \mathrm{A} - \mathrm{B},$$

ou $$\int_a^b xf'dx = -\int_b^a f'xdx.$$

E tambem se podem mudar os limites:

Se no integral definido $\int_{x_1}^{x_2} f'xdx$ fizermos $x=\varphi t$, e tomarmos t_1 e t_2 taes, que satisfaçam ás condições $x_1=\varphi t_1$, $x_2=\varphi t_2$, o integral proposto transformar-se-ha em $\int_{t_1}^{t_2} f'[\varphi(t)].\varphi'(t)\,dt$.

Sendo, por exemplo, $x_2 = x_1 + h$, e $\varphi(t) = x_1 + h - t$, o que dá

$$\varphi'(t) = -1, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 0,$$

teremos $$\int_{x_1}^{x_1+h} f'xdx = -\int_h^0 f'(x_1 + h - t)\,dt.$$

265. Seja $\int_a^b f'xdx = fb - fa.$

Como a formula de Taylor dá

$$fb - fa = f(a + b - a) - fa = f'a.(b-a) + \frac{1}{2}f''a.(b-a)^2.+\ldots,$$

será $$\int_a^b f'xdx = f'a.(b-a) + \frac{1}{2}f''a.(b-a)^2 + \ldots$$

Mas cumpre advertir que esta formula só pode applicar-se quando a serie de Taylor não é insufficiente.

266. No caso de ser applicavel a serie de Taylor, para os valores de x comprehendidos entre a e b, podemos fazel-a convergir tanto quanto quizermos.

Para isso bastará repartir o intervallo $b - a$ em um grande numero de partes n, cada uma egual a i; isto é, suppôr $b - a = ni$. Então, substituindo $a + i$ em logar de b na serie, depois $a + 2i$ e $a + i$, $a + 3i$ e $a + 2i, \ldots a + ni$ e $a + (n-1)i$, em logar de b e a, e chamando A_α, A'_α, $A''_\alpha, \ldots$ os coefficientes differenciaes da formula de Taylor correspondentes a $f(a + \alpha i)$, teremos

$$f(a+i) - fa = A_0 i + \frac{1}{2}A_0'i^2 + \frac{1}{2.3}A_0''i^3 + \ldots,$$

$$f(a+2i) - f(a+i) = A_1 i + \frac{1}{2}A_1'i^2 + \frac{1}{2.3}A_1''i^3 + \ldots$$

....

$$f(a+ni) - f[a+(n-1)i] = A_{n-1}i + \frac{1}{2}A'_{n-1}i^2 + \frac{1}{2.3}A''_{n-1}i^3 + \ldots;$$

e a somma é

$$f(a+ni)-fa=i\Sigma_0^{n-1}A_\alpha+\frac{1}{2}i^2\Sigma_0^{n-1}A'_\alpha+\frac{1}{2.3}i^3\Sigma_0^{n-1}A''_\alpha+\ldots,$$

que, se tomarmos i tão pequeno, que possam desprezar-se os termos em i^2, i^3..., ficará reduzida a

$$\int_a^b f'xdx=i\Sigma_0^{n-1}A_\alpha.$$

O segundo membro é a somma dos valores que toma a funcção $f'xdx$, quando nella se fazem $x=a$, $x=a+i$,... $x=a+(n-1)i$, e $dx=i$.

E d'ahi vem que no methodo infinitesimal se considera o integral como *somma* d'um numero infinito de elementos, os quaes são os valores consecutivos que toma a funcção differencial proposta, quando nella se faz passar a variavel por todos os valores intermedios entre os seus limites; o que é conforme com o que dissemos no n.º 197 (*).

Sobre as approximações dos integraes definidos podem consultar-se uma memoria de Poisson (*Ac. das Sc.* de 1826), a sua theoria do calor, os escriptos de Cauchy sobre o mesmo objecto, e a theoria do calor de Fourier.

267. Se acontecer que, entre os limites a e b, haja alguns valores x_1, x_2, x_i de x, para os quaes $f'x$ se torne infinita, poderá ainda a somma dos elementos representar-se por

$$\int_a^{x_1-\varepsilon}f'xdx+\int_{x_1+\gamma_1}^{x_2-\varepsilon_2}f'xdx+\ldots\int_{x_i+\gamma_i}^{b}f'xdx,$$

somma dos limites, para os quaes tendem os integraes que a compõem, quando ε_1, ε_2,... e γ_1, γ_2,... tendem para o limite zero.

(*) Esta demonstração só prova que o integral é a somma dos valores da differencial infinitamente proximos, quando, entre os limites de que se tracta, a funcção $f'x$ não se torna infinita. No entretanto, quando apparecem valores de $f'x$ infinitos entre os correspondentes aos valores reaes de x desde a até b, ainda é possivel fazer passar x, desde a até b, por valores imaginarios, para os quaes não seja $f'x$ infinita; e então ainda tem logar o theorema de que se tracta (*Journ. de l'École. Polyt.*, cahier 18, pag. 320).

Assim a somma, desde $x=-\alpha$ até $x=a$, dos elementos $\frac{dx}{x^n}$, dos quaes é infinito o correspondente a $x=0$, póde representar-se por

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n}+\int_{\eta}^{a} \frac{dx}{x^n}=\frac{1}{1-n}\left[(-\varepsilon)^{1-n}-\eta^{1-n}-(-\alpha)^{1-n}+a^{1-n}\right]:$$

a qual, para n comprehendido entre 0 e 1 e $1-n$ de numerador par, é $\frac{a^{1-n}-\alpha^{1-n}}{1-n}$; e, para $n>1$ e $n-1$ impar ou fraccionario de termos impares, é infinita (*Calc. int.* de Serret, n.os 476 e 477.)

268. Para calcular a formula do numero precedente,

$$Fa_n-Fa=i\,\Sigma_a^{a_{n-1}}F'x+\frac{1}{2}i^2\Sigma_a^{a_{n-1}}F''x+\frac{1}{6}i^3\Sigma_a^{a_{n-1}}F'''x+\ldots(1),$$

é melhor exprimir $\Sigma_a^{a_{n-1}}f'x$, $\Sigma_a^{a_{n-1}}f''x$,... em fa_n-fa, $f'a_n-f'a$,... por meio d'esta formula applicada a fa_n-fa, $f'a_n-f'a$,..., que dá, para $\alpha=1, 2, \ldots \alpha$,

$$f^{(\alpha)}a_n-f^{(\alpha)}a=i\Sigma_a^{a_{n-1}}f^{(\alpha+1)}x+\frac{1}{2}i^2\Sigma_a^{a_{n-1}}f^{(\alpha+2)}x+\frac{1}{6}i^3\Sigma_a^{a_{n-1}}f^{(\alpha+3)}x+\ldots$$

Assim, querendo desprezar em fa_n-fa as potencias de i superiores ao quadrado, teremos

$$i^3\Sigma_a^{a_{n-1}}f'''x=i^2(f''a_n-f''a),\quad i^2\Sigma_a^{a_{n-1}}f''x=i(f'a_n-f'a)-\frac{1}{2}i^2(f''a_n-f''a);$$

o que, substituido em $fa_n-fa=fb-fa$, dá

$$fb-fa=i\,\Sigma_a^{a_{n-1}}f'x+\frac{1}{2}i\,(f'b-f'a)-\frac{1}{12}i^2(f''b-f''a)\ldots\ldots(2).$$

269. Quando a fórma da funcção $f'x$ for dada, poderemos calcular immediatamente pelas formulas do numero precedente o integral definido $\int_a^b f'xdx$; e tambem o poderemos fazer, se na formula (2) desprezarmos os termos inferiores á primeira ordem de i, quando não conhecermos essa fórma, mas se derem os $n-1$ valores numericos de $f'x$ desde $f'a$ até $f'b$.

Este segundo caso equivale á somma de fa com a dos trapezios cuja base é i e cujos lados perpendiculares á base, em $fa_n - fa = fb - fa$, são $f'a, f'a_1, f'a_2, \ldots f'a_{n-1}, f'b$.

Estas formulas serão tanto mais exactas, quanto menor for a differença $i = \frac{b-a}{n}$, e quanto menos rapidamente variarem os valores de $f'x$ entre a e b (*Mec.* de Poisson, n.º 15.)

270. Os integraes definidos servem para determinar o resto da serie de Taylor.

Com effeito é $\quad \mathrm{F}(x_1+h) - \mathrm{F}x_1 = \int_{x_1}^{x_1+h} \mathrm{F}'xdx,$

ou (n.º 264) $\mathrm{F}(x_1+h) - \mathrm{F}x_1 = -\int_h^0 \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt = \int_0^h \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt.$

Mas é (n.º 200)

$$\int \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt = t\mathrm{F}'(x_1+h-t) + \frac{1}{2}t^2\mathrm{F}''(x_1+h-t) + \ldots + \int \frac{t^n\mathrm{F}^{(n+1)}(x_1+h-t)}{1.2.3\ldots n}dt,$$

que, entre os limites 0 e h dá

$$\int_0^h \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt = h\mathrm{F}'x_1 + \frac{1}{2}h^2\mathrm{F}''x_1 + \ldots + \int_0^h \frac{t^n\mathrm{F}^{(n+1)}(x_1+h-t)dt}{1.2.3\ldots n}.$$

Temos pois

$$F(x_1+h)=Fx_1+hF'x_1+\frac{1}{2}h^2F''x_1+\ldots\int_0^h \frac{t^nF^{(n+1)}(x_1+h-t)\,dt}{1.2.3\ldots n}.$$

Fazendo $x_1=0$, e depois mudando h em x_1, teremos similhantemente o theorema de Maclaurin

$$Fx_1=F(0)+x_1F'(0)+\frac{1}{2}x_1^2F''(0)+\ldots\int_0^{x_1}\frac{t^nF^{(n+1)}(x_1-t)\,dt}{1.2\ldots n}.$$

As expressões $\int_0^h \frac{t^nF^{(n+1)}(x_1+h-t)\,dt}{1.2\ldots n}$ e $\int_0^{x_1}\frac{t^nF^{(n+1)}(x_1-t)\,dt}{1.2\ldots\ldots n}$

dos restos das series de Taylor e Maclaurin equivalem ás dos n.^{os} 65 a 67, mas assignam os valores definidos d'elles, em quanto que as outras só assignavam limites que os comprehendiam.

Variações dos integraes definidos

271. Tanto para demonstrar alguns theoremas de analyse, como para determinar alguns integraes definidos, convém achar a variação d'um integral definido, resultante da mudança de elementos variaveis que entrem na funcção ou nos limites.

Seja $$u = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

um integral definido, no qual $f(x, \alpha)$ não se torna infinita entre os limites a e b de x.

Supponhamos que α varía e que a e b são funcções de α.

Pondo $\int f(x, \alpha)\, dx = \mathrm{F}(x, \alpha)$ e por conseguinte

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \mathrm{F}(b, \alpha) - \mathrm{F}(a, \alpha),$$

a variação do integral definido será

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{d[\mathrm{F}(b, \alpha) - \mathrm{F}(a, \alpha)]}{d\alpha} + \frac{db}{d\alpha} \cdot \frac{d\mathrm{F}(a, \alpha)}{db} - \frac{da}{d\alpha} \cdot \frac{d\mathrm{F}(a, \alpha)}{da};$$

Mas a expressão de $\int f(x, \alpha)\, dx$ dá $f(x, \alpha) = \dfrac{d\mathrm{F}(x, \alpha)}{dx}$;

e, por serem x e α independentes, é

$$\frac{d\int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx.$$

..

Ficará pois

$$\frac{du}{d\alpha}=\int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx+\frac{db}{d\alpha}.f(b,\alpha)-\frac{da}{d\alpha}f(a,\alpha)\ldots\ldots(A);$$

equação que, no caso de serem a e b constantes, se reduz, como deve ser, a

$$\frac{d\int_a^b f(x,\alpha)dx}{d\alpha}=\int_a^b \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx.$$

272. A equação (A) tambem se pode deduzir de considerações geometricas.

Com effeito, pondo $y=f(x,\alpha)$, o integral $\int_a^b ydx$ é a área comprehendida entre a curva, o eixo das abscissas, e as duas ordenadas correspondentes a $x=a$ e $x=b$.

Se α variar em y, não variando porém os limites, o integral proposto $\int_a^b\left(y+\frac{dy}{d\alpha}d\alpha\right)dx$ será a área comprehendida entre a nova curva, o eixo das abscissas e as duas ordenadas correspondentes ás mesmas abscissas.

Mas, se os limites receberem os augmentos $\frac{da}{d\alpha}d\alpha$ e $\frac{db}{d\alpha}d\alpha$, a área receberá: em virtude do primeiro, a diminuição $f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}d\alpha$; e, em virtude do segundo, o augmento $f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}d\alpha$.

A área, variada por estas tres causas, será pois

$$\int_a^b\left(y+\frac{dy}{d\alpha}d\alpha\right)dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}d\alpha-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}d\alpha;$$

subtrahindo da qual a primitiva $\int_a^b ydx$, acharemos

$$\frac{du}{d\alpha}=\int_a^b\frac{dy}{d\alpha}dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

273. THEOREMA SOBRE A INTEGRAÇÃO DOS INTEGRAES DEFINIDOS.

Seja o integral duplo $u = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx,$

onde se suppõem independentes as variaveis x, α, e os limites x_0, α_0;

ou, pondo $\int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx = \mathrm{F}(x, \alpha),$

$$u = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathrm{F}(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Differenciando em ordem a x, teremos

$$\frac{du}{dx} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\mathrm{F}(x, \alpha)}{dx} d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha;$$

e, revertendo para o integral em ordem á mesma variavel,

$$u = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Por onde se vê que, para obter o integral proposto, se pode integrar em qualquer ordem, isto é, primeiro em ordem a x e depois em ordem a α, ou inversamente.

274. Por esta occasião advertiremos que nas integrações se devem tomar os integraes na maxima generalidade, para evitar contradicções apparentes que algumas vezes se offerecem.

Seja, por exemplo (*Calc. int.* de Cournot, 2.ª ediç. n.º 356),

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

Segundo se integrar primeiramente em ordem a x ou em ordem a y, assim ficará para integrar $2\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2}$ ou $2\int_{-1}^{+1}-\frac{dx}{1+x^2}$, que parecem dar respectivamente π e $-\pi$, concluindo-se que neste caso não é indifferente a ordem das integrações.

Notemos porém que os valores mais geraes de $\int\frac{dy}{1+y^2}$ para $y=+1$ e para $y=-1$ são $n\pi+\frac{1}{4}\pi$ e $n'\pi-\frac{1}{4}\pi$; o que dá:

$$2\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2}=2[(n-n')\pi+\frac{1}{2}\pi],$$

$$2\int_{-1}^{+1}-\frac{dx}{1+x^2}=2[(n'''-n'')\pi-\frac{1}{2}\pi]=2[(n'''-n''-1)\pi+\frac{1}{2}\pi].$$

Portanto as duas expressões do integral concordam, e são ambas $2(\pi i+\frac{1}{2}\pi)$; dando $i=0$ o valor particular π, e $i=-1$ o valor particular $-\pi$.

Determinação de alguns integraes definidos

275. Alguns integraes definidos podem obter-se sem que se conheçam os integraes geraes; e outros gozam de propriedades, que só a elles pertencem e não aos geraes.

Sem tractar de todos os integraes definidos interessantes cujos valores os geometras têm assignado, limitar-nos-hemos a alguns, que por suas applicações se tornaram mais importantes, e dos quaes se derivam muitos outros, ou pela transformação das coordenadas e dos limites, ou pela differenciação e pela integração debaixo do signal $\int$, feitas segundo as regras até aqui expostas, ou finalmente pela passagem das expressões reaes para as imaginarias.

276. Seja o integral definido $\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$

Se integrarmos successivamente o integral duplo $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$ teremos

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\times\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Mas, pondo $y=tx$, formando dy sem variar x, por serem y e x independentes, e integrando successivamente em ordem a x e em ordem a t, o primeiro membro transforma-se em

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)}xdxdt=\int_0^\infty\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{1}{4}\pi;$$

logo
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

E como, pondo $-y=x$, o que muda o signal dos limites, é

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \int_{\infty}^{0} (-e^{-y^2} dy) = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

resulta
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Substituindo em (1) e (2) $x\sqrt{m}$ em logar de x, vem

$$\int_{0}^{\infty} e^{-mx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}},\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{m}} \ldots\ldots (3).$$

E substituindo nestas $\sqrt{x}$ em logar de x, vem

$$\int_{0}^{\infty} e^{-mx} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{m}},\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \ldots\ldots (4).$$

277. Mudando em (3) m em $\mp m\sqrt{-1}$, e sommando ou diminuindo, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{+mx^2\sqrt{-1}} \pm e^{-mx^2\sqrt{-1}} \right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{m}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\sqrt{-1}}} \pm \frac{1}{\sqrt{+\sqrt{-1}}} \right).$$

Mas pondo $\sqrt{+\sqrt{-1}} \pm \sqrt{-\sqrt{-1}} = z$, vem $\pm 2 = z^2$, que dá

$$z = \sqrt{2},\ z = \sqrt{2}.\sqrt{-1}.$$

Substituindo pois na expressão precedente, será

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{+mx^2\sqrt{-1}} + e^{-mx^2\sqrt{-1}} \right) dx = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{+mx^2\sqrt{-1}} - e^{-mx^2\sqrt{-1}} \right) dx = \sqrt{2}\sqrt{-1}\sqrt{\frac{\pi}{m}}:$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(mx^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(mx^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \ldots\ldots\ldots (5).$$

E, se fizermos $m = \frac{1}{2}\pi$, será

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\pi x^2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi x^2\right) dx = 1 \ldots\ldots (6).$$

278. Se na formula (3) mudarmos x em $x\sqrt{m} \pm \frac{n}{m\sqrt{m}}$, o que não mudará os limites da integração, a semisomma dos resultados correspondentes aos dois signaes será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2x^2} \frac{e^{2nx} + e^{-2nx}}{2} dx = e^{\frac{n^2}{m^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{m} \ldots\ldots\ldots (7).$$

E se nesta mudarmos n em $n\sqrt{-1}$, virá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2x^2} \cos 2nx = e^{-\frac{n^2}{m^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

279. Mudando na formula (3) $\sqrt{m}$ em $m(1 + n\sqrt{-1})$, virá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2+2n\sqrt{-1})x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+n\sqrt{-1})} = \frac{\sqrt{\pi}.(1-n\sqrt{-1})}{m(1+n^2)},$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2)} dx[\cos(2m^2nx^2) - \sqrt{-1}\operatorname{sen}(2m^2nx^2)] = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+n^2)} - \frac{n\sqrt{\pi}\sqrt{-1}}{m(1+n^2)}.$$

E, por conseguinte, separando os termos reaes dos imaginarios,

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2)}\cos(2m^2nx^2)dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+n^2)},\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2)}\operatorname{sen}(2m^2nx^2)dx &= \frac{n\sqrt{\pi}}{m(1+n^2)}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(9).$$

280. Mas cumpre advertir que a substituição de quantidades reaes por imaginarias só se justifica claramente quando os dois membros podem desenvolver-se em series convergentes ordenadas segundo as potencias inteiras das mesmas quantidades; porque, sendo então identicos os coefficientes nessas series, ellas subsistem, quaesquer que sejam os valores ou symbolos que se substituam em logar das quantidades.

No numero antecedente verifica-se esta condição quando é $n < 1$. (*Calc. Int.* de Serret, n.º 499).

281. Integrando successivamente por partes, acha-se

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{m^k}\int_0^{\infty} x^{n-k}e^{-mx}dx\ldots(a).$$

Se n é inteiro, e fizermos $k=n$, será

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{n(n-1)\ldots2.1}{m^{n+1}}.$$

Se n é da fórma $n=\frac{2i-1}{2}$, fazendo $k=i$, será

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{2i-1}{2}} e^{-mx}dx = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots1}{2^i m^i}\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-mx}dx,$$

ou, (4),

$$\int_0^\infty x^{\frac{2i-1}{2}} e^{-mx}dx = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 1}{2^i m^{\frac{2i+1}{2}}}\sqrt{\pi}\ldots\ldots\ldots(10).$$

282. Empregando as formulas de reducção (n.º 236), teremos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-2} x dx;$$

e por conseguinte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2i} x dx = \frac{1.3..(2i-1)}{2.4\ldots 2i}\,\frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2i+1} x dx = \frac{2.4\ldots 2i}{3.5..(2i+1)}..(11).$$

Os integraes $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1} x\,dx$, têm evidentemente os mesmos valores que estes.

Como, crescendo m, decresce $\operatorname{sen}^m x$, e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx$ é a somma de elementos differenciaes, tambem este integral decresce.

Serão pois

$$\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots 2i}.\frac{\pi}{2} > \frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i+1)} > \frac{1.3\ldots(2i+1)}{2.4\ldots(2i+2)}.\frac{\pi}{2},$$

isto é, $\frac{\pi}{2}$ comprehendido entre

$$\left(\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i-1)}\right)^2.\frac{1}{2i+1} \text{ e } \left(\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i-1)}\right)^2.\frac{1}{2i+1}.\frac{2i+2}{2i+1}.$$

..

E como a razão $\frac{2i+2}{2i+1}$ d'estes dois limites tende para a unidade quando i tende para o infinito, será

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots 2i-1}\right)^2.\frac{1}{2i+1} \text{ ou } \left(\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots 2i+1}\right)^2.(2i+2),$$

tanto mais exactamente, quanto maior for i.

Tal é a formula de Wallis.

Sobre esta formula veja-se o *Instituto de Coimbra*, vol. v, n.º 18, pag. 215.

283. Se differenciarmos a formula (3) i vezes em ordem ao parametro m, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx^2} x^{2i}dx=\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2^i} m^{-\frac{2i+1}{2}} \sqrt{\pi}\ldots(12);$$

que, para $m=1$, será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2i}dx=\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

284. Mudando x em $-x$, os dois primeiros integraes do n.º 239, que que se tornam em

$$\int e^{-ax}\cos bxdx=-\frac{a\cos bx-b\,\mathrm{sen}\,bx}{a^2+b^2}e^{-ax}+\mathrm{C},$$

$$\int e^{-ax}\,\mathrm{sen}\,bxdx=-\frac{a\,\mathrm{sen}\,bx+b\cos bx}{a^2+b^2}+\mathrm{C},$$

tomados entre os limites 0 e ∞, são

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Se multiplicarmos estes integraes por da, e integrarmos em ordem a a, teremos

$$\int_0^\infty \left(-\frac{e^{-ax}\cos bx}{x}dx + \mathrm{C}\right) = \log\sqrt{a^2+b^2} + \mathrm{C}'$$

$$\int_0^\infty \left(-\frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{x}dx + \mathrm{C}\right) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{a}{b}\right) + \mathrm{C}'.$$

Tomando, na segunda d'estas formulas, o integral em ordem a a entre os limites 0 e ∞, será

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

E, se na formula (13) mudarmos b em $a+b$, depois em $a-b$, suppondo $a-b>0$, o que dará

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

e formarmos a somma e a differença d'estas, virá

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax\cos bx}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx\cos ax}{x}dx = 0.$$

Por onde se vê que o integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax\cos bx}{x}dx$ será $\frac{\pi}{2}$ ou 0, segundo for $a>b$ ou $b>a$.

No caso de $a=b$, subsistiria só a primeira equação

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,(a+b)\,xdx}{x}=\frac{\pi}{2},$$

que daria
$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,2\,ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

em conformidade com (13).

285. Multipliquemos por $\dfrac{\cos bdb}{b}$ o integral $\int_0^\infty e^{-ax}\text{sen}\,bxdx=\dfrac{b}{a^2+b^2}$, e integremos em ordem a b entre os limites 0 e ∞, isto é

$$\int_0^\infty\left(e^{-ax}dx\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,bx\cos b\,db}{b}\right)=\int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2}.$$

Se decompozermos o primeiro membro na somma dos dois integraes, um entre os limites $x=0$ e $x=1$, outro entre os limites $x=1$ e $x=\infty$, será no primeiro $b>bx$ e no segundo $b<bx$; e por conseguinte (n.º 284) naquelle $\int_0^\infty \dfrac{\text{sen}\,bx\cos b}{b}\,db$ será 0, e neste $\dfrac{\pi}{2}$. Teremos pois

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx\int_1^\infty \frac{\text{sen}\,bx\cos b}{b}\,db=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

Assim
$$\int_0^\infty \frac{a\cos b\,db}{a^2+b^2}=\frac{\pi\,e^{-a}}{2};$$

ou, fazendo $b=ax$, o que não muda os limites,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi\,e^{-a}}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (14).$$

286. Seja o integral definido $\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$,

onde são n e m inteiros, e $2n > 2m+1$.

Como as raizes da equação $1+x^{2n}=0$, que são

$$x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

dão os n factores do segundo gráu

$$\left(x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^2 + \mathrm{sen}^2\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

a fracção racional $\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$ transformada e integrada dá

$$-\frac{1}{2n}\sum_1^n \cos\frac{(2m+1)\pi(2k-1)}{2n}\, l\left[1 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + x^2\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_1^n \mathrm{sen}\,\frac{(2m+1)\pi(2k-1)}{2n}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\mathrm{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right).$$

Para ter o valor d'este integral entre os limites $-\infty$ e ∞, podemos tomal-o entre os limites $-h$ e h, e depois fazer $h=\infty$.

Operando assim, acha-se

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\left[\mathrm{sen}\,\frac{(2m+1)\pi}{2n} + \mathrm{sen}\,\frac{3(2m+1)\pi}{2n} + \ldots \mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)(2m+1)\pi}{2n}\right];$$

que por ser

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \ldots \operatorname{sen}(2n-1)a$$

$$= \frac{e^{(2n-1)a\sqrt{-1}} \cdot e^{2a\sqrt{-1}} - e^{a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\,(e^{2a\sqrt{-1}}-1)} - \frac{e^{-(2n-1)a\sqrt{-1}} \cdot e^{-2a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\,(e^{-2a\sqrt{-1}}-1)}$$

$$= \frac{e^{2na\sqrt{-1}} - 1 + e^{-2na\sqrt{-1}} - 1}{2\sqrt{-1}\,(e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}})} = \frac{1-\cos 2na}{2\operatorname{sen} a},$$

se transforma em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n}\,\frac{1-\cos(2m+1)\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{2m+1}{2n}\pi} = \frac{\pi}{n\operatorname{sen}\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Por conseguinte é $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\operatorname{sen}\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}}.$

(*Calc. Int*. de Bertrand, n.º 140).

Assim, para qualquer valor de p comprehendido entre 0 e 1, tomando dois numeros m e n que satisfaçam a $\dfrac{2m+1}{2n} = p$, será

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\operatorname{sen} p\pi},$$

ou, pondo $x^{\frac{1}{2n}}$ em logar de x,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

287. Integraes eulerianos. Os dous integraes definidos

$$\int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx \text{ e } \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx,$$

sendo p, q, n, numeros positivos quaesquer, chamam-se respectivamente *integraes eulerianos* de primeira e segunda especie, por ser Euler o primeiro que d'elles se occupou. O primeiro destes integraes costuma designar-se pelo signal $(p|q)$, e o segundo pelo signal Γn.

288. Comecemos pelo integral euleriano de *segunda especie*,

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;$$

ao qual, pondo $x=y^2$, tambem se pode dar a fórma

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}dy.$$

Fazendo $m=1$ em (a), e mudando n em $n-1$, resulta

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\,\Gamma(n-k)\ldots\ldots(16);$$

e, se for n inteiro,

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots2.1.$$

289. Fazendo $m=1$ em (10), resulta

$$\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3\ldots(2i-3)(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}\ldots\ldots(17).$$

Este mesmo resultado se obteria differenciando i vezes consecutivas em ordem a m os dous membros da primeira das equações (3) e fazendo depois $m=1$, o que daria

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2i}dx=\frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)}{2^{i+1}}\sqrt{\pi};$$

porque, fazendo $x^2=y$, é

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2i}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{i-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{2}\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right).$$

E para $i=0$, é, em virtude da equação (1)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(18).$$

290. Pondo $2i$ em vez de n na formula (16) e tomando $k=i$, vem

$$\Gamma(2i)=(2i-1)(2i-2)\ldots i\,\Gamma(i)=\frac{(2i-1)(2i-2)\ldots i\times(i-1)(i-2)\ldots2.1}{(i-1)(i-2)\ldots.2.1}\Gamma(i)$$

$$=\frac{(2i-1)(2i-3)..3.1\times2(i-1).2(i-2)..2}{(i-1)(i-2)\ldots.2}\Gamma(i)=(2i-1)(2i-2)..1\times2^{i-1}\Gamma(i),$$

dividindo a qual por (17), vem

$$\Gamma(2i)=\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(i).\frac{2^{2i-1}}{\sqrt{\pi}}\ldots\ldots\ldots(19).$$

Logo veremos que esta formula é geral para todos os valores de i inteiros ou fraccionarios.

291. Pela formula (16) podem calcular-se successivamente as funcções

Γ com o intervallo 1, partindo de $\Gamma(1)=1$; e pela formula (17), partindo de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

292. Passemos ao integral euleriano de primeira especie

$$(p|q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Integrando successivamente em ordem a y e a x a expressão

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,y^{2p-1}x^{2q-1}dydx,$$

acha-se

$$P=\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}dy\times\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2q-1}dx=\frac{1}{4}\Gamma(p)\times\Gamma(q).$$

Para obter debaixo d'outra fórma este integral, façamos $y=xt$: os limites serão os mesmos, e teremos

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}x^{2(p+q)-1}\,t^{2p-1}dtdx.$$

Depois façamos $(1+t^2)x^2=r^2$: os limites são ainda os mesmos, e fica

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{p+q}}\,drdt,$$

que, integrada em ordem a r, dá

$$P=\frac{1}{2}\Gamma(p+q)\times\int_0^\infty\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{p+q}}\,dt.$$

Finalmente, fazendo $\frac{1}{1+t^2}=1-z$, os limites 0 e ∞ mudar-se-hão em 0 e 1, e ficará

$$P=\frac{1}{4}\Gamma(p+q)\times\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz=\frac{1}{4}\Gamma(p+q)\times(p|q).$$

Logo
$$(p|q)=\frac{\Gamma(p)\times\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20);$$

formula que faz depender os integraes eulerianos de primeira especie dos de segunda especie.

293. Para $q=1-p$, sendo $p<1$, a formula (20) dá

$$p\,|\,(1-p)=\Gamma p\,.\,\Gamma(1-p),$$

ou, porque $x=\frac{y}{1+y}$ transforma $p\,|\,q$ em $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}$,

$$\Gamma p\,.\,\Gamma(1-p)=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x},$$

isto é (form. 15)

$$\Gamma p\,.\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21).$$

295. Fazendo $p=q=\frac{1}{2}$, e $x=y^2$, a formula (20) dá

$$\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)=2\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi=\frac{\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)},$$

isto é
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

E como, fazendo $x=y^2$, é

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

recahimos na formula (1).

295. Tomando $q=p$ na equação de definição de $p\,|\,q$, será

$$p\,|\,p=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}dx,$$

ou, pondo $x=y+\frac{1}{2}$,

$$p\,|\,p=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^{p-1}dy=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^{p-1}dy,$$

ou em fim, pondo $y=\frac{1}{2}\sqrt{z}$,

$$p\,|\,p=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 (1-z)^{p-1}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2^{2p-1}}\left(\frac{1}{2}\middle|\,p\right);$$

que, substituindo em logar de $p\,|\,p$ e $\frac{1}{2}\big|\,p$ as respectivas expressões (20), e attendendo a (18), se transforma na equação (19) para qualquer valor de p, inteiro ou fraccionario.

Quadraturas e rectificações

296. A expressão da área comprehendida entre o eixo das abscissas d'uma curva plana, a curva, e duas ordenadas correspondentes ás abscissas x_1, x_2, é (n.° 112)

$$t=\int_{x_1}^{x_2} y dx,$$

D'onde vem o nome de *methodo das quadraturas*, que se dá aos processos pelos quaes se obtem os integraes das funcções d'uma só variavel; mas este nome mais especialmente se consagra á integração d'aquellas funcções feita pelos methodos d'approximação.

Exemplos: I. A equação da parabola conica (Fig. 42) é $y^2=2px$;

logo $$\int y dx=\int \sqrt{2p}.x^{\frac{1}{2}} dx=\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}xy+c,$$

$$t=\frac{2}{3}(x_2 y_2-x_1 y_1).$$

Se a área se contar do vertice A, teremos $x_1=0$, e $t=\frac{2}{3}x_2y_2$. Logo:

A área do segmento da parabola é egual a duas terças partes do rectangulo circumscripto M'N'NM.

Para as parabolas de todos os gráus, cuja equação é $y^m=ax^n$,

temos $$t=\frac{m}{m+n}(x_2 y_2-x_1 y_1).$$

Assim estas curvas são quadraveis.

II. Para a hyperbole equilatera MN (Fig. 43), entre as asymptotas Ax, Ay, temos $xy = m^2$ (*Geom. Anal.* n.º 89); logo

$$t = \int y dx = m^2 \int \frac{dx}{x} = m^2 lx + c.$$

A área não se pode contar desde o eixo Ay, porque $x = 0$ daria $t = 0$, $c = -m^2 l0 = \infty$. Mas, contando-a a partir da ordenada BC, que passa pelo vertice C, temos, por ser AB $= m$,

$$c = -m^2 lm, \quad t = m^2 l \frac{x}{m}.$$

Por onde se vê, que, para $m = 1$, é $t = lx$, isto é, *que então as áreas contadas desde* BC *são os logarithmos naturaes das abscissas.*

Se o angulo das asymptotas é α, temos a área

$$t = \int y dx \,.\, \text{sen}\,\alpha = m^2 \int \frac{dx \,.\, \text{sen}\,\alpha}{x};$$

por conseguinte, quando $m = 1$, vem $t = \log x$, sendo este logarithmo tomado no systema cujo modulo é M $= \text{sen}\,\alpha$. Mas, se o angulo α é recto, M $= 1$, recahiremos no primeiro caso, e teremos os logarithmos de Neper. Fazendo pois variar o angulo das asymptotas, podemos obter todos os systemas para os quaes é M < 1. Por exemplo, sendo M $= 0{,}4342944819$ para a base 10, teremos $\alpha = 25^\circ.44'.25'',47$: de sorte que em uma hyperbole, cuja potencia é 1 e cujas asymptotas fazem entre si este angulo, as áreas são logarithmos tabulares das abscissas respectivas.

Por onde se vê com quanta impropriedade se dá o nome de *logarithmos hyperbolicos* aos de Neper, sendo que a todos os systemas de logarithmos, para os quaes é M < 1, correspondem hyperboles cujas áreas os representam.

III. Para o circulo, cuja equação referida ao centro é $y^2 = a^2 - x^2$, temos [n.º 210, form. (B)]

$$t = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} a \int \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

mas a formula $ds^2 = dx^2 + dy^2$ applicada ao circulo dá

$$ds = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

logo, tomando o arco s entre os mesmos limites que o integral proposto, é finalmente

$$t = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}as + c.$$

Ponhamos $CA = b$, $AB = k$ (Fig. 36). Se tomarmos o integral entre os limites $x = b$, $x = a$, e dobrarmos, teremos a área $\frac{a}{2}$ arc $BOB' - bk$ do segmento $B'OB$; e se a esta área ajuntarmos o triangulo CBB', acharemos o sector $BCOB' = \frac{1}{2}CO$. arc BOB'.

Para ter a área do circulo desenvolveremos o radical, e integraremos; o que dá

$$t = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2} = a\int_0^x dx\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{2.4.a^4} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6a^6} - ..\right);$$

$$= ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} - ...;$$

depois faremos $x = a$, e multiplicaremos por 4. Virá assim

$$\text{sup. circ.} = \pi a^2 = 4a^2\left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7} - ...\right).$$

D'onde resulta a razão do diametro para a circumferencia,

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7} - \ldots \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6.8.2n\times(2n+1)}\ldots\right).$$

IV. Para a ellipse (Fig. 44) temos $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

e
$$t = \frac{b}{a}\int dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}.z;$$

chamando z a área da parte do circulo circumscripto comprehendida entre as ordenadas limites.

Como as áreas t e z têm entre si a razão constante $\frac{b}{a}$: *a área do circulo é para a da ellipse, ou a área d'um segmento do circulo para a do segmento da ellipse inscripta terminado pelas mesmas ordenadas, como o eixo maior para o menor.* Assim a área da ellipse $= \pi a^2 . \frac{b}{a} = \pi ab$.

V. Na cycloide FMA (Fig. 6), pondo a origem em F, e chamando $FS = x$, $SM = y$, são

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)},\ t = \int y dx = \int \sqrt{2ry - y^2}.dy.$$

Por ser este integral a área da porção FKN do circulo gerador, temos

$$FyAM = FKEN = \frac{1}{2}\pi r^2;$$

e, por ser $AE = \pi r$, é o rectangulo $yE = 2\pi r^2$:

logo $$\mathrm{AFE} = y\mathrm{E} - \mathrm{F}y\mathrm{AM} = \frac{3}{2}\pi r^2,\quad \mathrm{AFA'E} = 3\pi r^2.$$

Assim: *a área da cycloide* AFA′ *é tripla da do seu circulo gerador.*

297. Quando a equação da curva proposta não for dada, ou quando for tal que não se possa deduzir convenientemente a expressão de $\int y dx$, podemos recorrer á *regra de Simpson.*

A pequena área BCMPB (Fig. 45) compõe-se do trapezio CBPMC e do segmento CEMC,

$$\text{área CBPMC} = \text{seg. CEMC} + \text{trap. CBPMC}.$$

Procuremos separadamente cada uma destas partes.

O arco CM pode considerar-se approximadamente como pertencente á parabola osculatriz cujo vertice L corresponde ao meio I da corda; e então toma-se como expressão do segmento a seguinte

$$\text{seg. CEMC} = \frac{2}{3}\,\mathrm{CM}.\mathrm{LI},$$

que, por os triangulos LEI e MCH darem $\mathrm{LI} = \mathrm{EI}\cos\alpha$, $\mathrm{CM} = \frac{\mathrm{CH}}{\cos\alpha}$,

se transforma em $$\text{seg. CEMC} = \frac{2}{3}\,\mathrm{EI}\,.\,\mathrm{CH}.$$

Mas, chamando y', y'', y''' as tres ordenadas equidistantes CB, EK, MP, e h a sua distancia BK, são

$$\mathrm{EI} = \mathrm{EK} - \mathrm{IK} = y'' - \frac{1}{2}(y' + y''') = \frac{1}{2}(2y'' - y' - y''');$$

conseguintemente $$\text{seg. CEMC} = \frac{2}{3}\,h\,(2y'' - y' - y''').$$

Em quanto ao trapezio, é trap. CBPMC$=h(y'+y''')=\frac{h}{3}(3y'+3y''')$;

e portanto área CBPMC $=\frac{1}{3}h(y'+4y''+y''')$.

Supponhamos agora: que a área plana BACD (Fig. 46), que se pretende medir, é determinada pela curva AC, pela recta BD, e pelas ordenadas extremas $AB=y'$, $CD=y^{(2n+1)}$; que se divide a base BD em um numero par $2n$ de partes eguaes, cada uma das quaes tem o comprimento h; e que pelos pontos de divisão se levantam as perpendiculares y', y'', $y'''\ldots y^{(2n+1)}$; ficando assim a área partida em $2n$ partes. As superficies compostas de duas d'estas partes consecutivas serão proximamente, como acabamos de mostrar,

$$\frac{1}{3}h(y'+4y''+y'''),\ \frac{1}{3}h(y'''+4y^{\text{IV}}+y^{\text{V}}),\ldots,\ \frac{1}{3}h(y^{(2n-1)}+4y^{(2n)}+y^{(2n+1)});$$

e por conseguinte a superficie total é

$$\frac{1}{3}h(y'+4y''+2y'''+4y^{\text{IV}}+2y^{\text{V}}\ldots+2y^{(2n-1)}+4y^{(2n)}+y^{(2n+1)}),$$

ou

$$\frac{2}{3}h[(y'+y''\ldots+y^{(2n+1)})+(y''+y^{\text{IV}}+\ldots y^{(2n)})-\frac{1}{2}(y'+y^{(2n+1)})].$$

O segundo modo de escrever corresponde ao enunciado seguinte:

Havendo traçado um numero impar de ordenadas equidistantes, sommal-as-hemos todas; ajuntaremos á somma a das ordenadas de ordem par, e subtrahiremos a semisomma das ordenadas extremas; e finalmente multiplicaremos o resultado por $\frac{2}{3}$ *da distancia* h *entre as ordenadas consecutivas.*

A mesma regra se applica evidentemente ao caso em que a área é terminada, como ACFE, por duas curvas planas, chamando então y', y'',... as grandezas totaes de cada parallela.

Quanto menor é h, mais o resultado se approxima da área pedida. Este theorema pode applicar-se a qualquer figura irregular; por quanto sempre a podemos decompor em outras, que avaliaremos pela mesma regra, e que ajuntaremos ou subtrahiremos, conforme for necessario, para compor a área pedida.

Quando a curva corta a base, ainda tem logar a mesma regra suppondo nulla a ordenada do ponto de secção.

298. No methodo infinitesimal podemos considerar a área t como a somma de pequenos rectangulos $m = dxdy$ (Fig. 47); e então será t o integral duplo, tomado entre os limites convenientes,

$$t = \int\int dxdy.$$

Quando a área, de que se tracta, ficar entre duas curvas BM e DE cujas equações $Y = Fx$ e $y = fx$ são dadas, integraremos relativamente a y, desde PE até PM, e depois relativamente a x, isto é, integraremos relativamente a x a expressão $(Y - y)dx$, que representa o elemento ME comprehendido entre duas ordenadas infinitamente visinhas; e este integral será tomado desde o menor valor de x até o maior.

Se a área fica comprehendida entre quatro ramos de curvas BM, BI, IK, KM, é facil dividil-a por parallelas aos eixos em porções que se avaliam separadamente, conforme os principios precedentes.

Por exemplo, procuremos a porção da área FAF′CF (Fig. 48) comprehendida entre as parabolas eguaes e oppostas AF, AF′, e a parallela FF′ aos x. Sendo $y^2 = 2px$, $y^2 = -2px$ as equações das duas curvas, integraremos $dxdy$ relativamente a x desde M até M′ isto é, desde $x = -\dfrac{y^2}{2p}$ até $x = +\dfrac{y^2}{2p}$, o que dará a área da secção MM′, $\dfrac{y^2dy}{2p} - \left(-\dfrac{y^2dy}{2p}\right) = \dfrac{y^2dy}{p}$; e depois integraremos $\dfrac{y^2dy}{p}$ desde $y = 0$ até y, o que dará $\dfrac{y^3}{3p} = \dfrac{2}{3}xy$. Achar-se-ia o mesmo subtrahindo a somma das áreas comprehendidas pelo eixo dos x, pelas duas parabolas, e pelas ordenadas de F e F′, do rectangulo comprehendido por FF′ e pelas ordenadas, o que daria

$$2xy - \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}xy.$$

A ordenada y da curva não se deve tornar infinita entre os limites da área.

Se a curva corta o eixo dos x entre os limites da área, é necessario calcular cada uma das partes que ficam d'um e outro lado d'este eixo, e ajuntal-as; porque uma sae positiva e outra negativa, e a somma deve achar-se reunindo os valores absolutos, sem attender ao signal.

Seja, por exemplo a curva KACD (Fig. 49), cuja equação é $y = x - x^3$; sendo KA = AI = 1, e a origem em A.

A área é
$$t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c.$$

Se a fizermos começar no ponto B, onde $AB = \sqrt{\frac{1}{3}}$, teremos $c = -\frac{5}{36}$, e por conseguinte $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{36}$; e se ED, correspondente a $AE = \sqrt{\frac{5}{3}}$, for o segundo limite, acharemos $t = 0$: o que indica sómente que as áreas BCI e IED são eguaes e de signaes contrarios. Com effeito entre $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e $x = 1$ acha-se $BCI = \frac{1}{9}$, e entre $x = 1$ e $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ acha-se $(-DIE) = -\frac{1}{9}$; por conseguinte a área $ABCED = \frac{2}{9}$.

Do mesmo modo desde K até I acha-se $(-KAO) = -\frac{1}{4}$ e $ACI = \frac{1}{4}$, isto é, $KOIC = \frac{1}{2}$.

299. Para achar a área comprehendida entre dous raios vectores, servindo-nos das coordenadas polares, podemos considerar como elemento o trapezio infinitesimal comprehendido pelos lados parallelos $rd\theta$ e $(r+dr)d\theta$, e pelos obliquos dr; o que, por se dever desprezar $dr^2d\theta$, dá o elemento

$$rd\theta dr.$$

Por exemplo no circulo (Fig. 50), sendo C o centro, e querendo a área de um annel circular comprehendido entre os raios r' e r, teremos, integrando relativamente a θ desde $\theta=0$ até $\theta=2\pi$, $\quad 2\pi r dr$,

e depois relativamente a r desde r' até r, $\quad \pi r^2 - \pi r'^2$,

que, fazendo $r'=0$, dará a área do circulo.

Para a ellipse (Fig. 44), cuja equação é $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, integraremos primeiramente em ordem a r, desde $r=0$ até $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, o que dá

$$t=\frac{1}{2}\int\frac{a^2(1-e^2)^2\,d\theta}{(1+e\cos\theta)^2};$$

e depois integraremos esta expressão desde $\theta=0$ até $\theta=2\pi$, para ter a área da ellipse.

Se quizermos a área d'um segmento de circulo AOB (Fig. 51), podemos referir as coordenadas á perpendicular AE ao diametro $AD=2a$, que passa por uma das extremidades A, e ao pólo A. Então, integrando relativamente a r, desde $r=0$ até $r=2a\,\mathrm{sen}\,\theta$, teremos $2a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta$, que se deve integrar relativamente a θ desde $\theta=0$ até $\theta=\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\dfrac{r}{2a}\right)$. Mas é mais simples converter esta integração relativa a θ em outra relativa a r, substituindo em logar de $\mathrm{sen}^2\,\theta$ e $d\theta$ as suas expressões em r,

$$\mathrm{sen}^2\theta=\frac{r^2}{4a^2},\ d\theta=\frac{dr}{2a\,\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{dr}{2a\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}}=\frac{dr}{\sqrt{4a^2-r^2}},$$

o que dá

$$t=\int 2a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta)=\int\frac{1}{2}\,\frac{r^2dr}{\sqrt{4a^2-r^2}}$$

$$=\int\frac{r^2dr}{4a}\left(1+\frac{1.r^2}{2.2^2.a^2}+\frac{1.3r^4}{2.4.2^4a^4}+\frac{1.3.5.r^6}{2.4.6.2^6.a^6}+\ldots\right)$$

$$=\mathrm{C}+\frac{1}{4a}\left(\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{2.2^2.5a^2}+\frac{1.3r^7}{2.4.2^4.7a^4}+\frac{1.3.5.r^9}{2.4.6.2^6.9.a^6}+\ldots\right);$$

e tomar este integral desde o limite inferior $r=0$, o que dá a constante $\mathrm{C}=0$.

Fazendo $r=2a$, resulta a área do semicirculo $\frac{1}{2}\pi a^2$, e por conseguinte

$$\pi=4\left\{\begin{matrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1.3}{2.4.7}+\frac{1.3.5}{2.4.6.9}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.11}+\\ +\ldots\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n\times(2n+3)}\end{matrix}\right\}.$$

300. Podemos tambem achar a área comprehendida entre dous raios vectores, quando a curva está referida a coordenadas rectilineas, usando da formula (n.° **113**),

$$t=\frac{1}{2}\int(xy'-y)dx.$$

Seja por exemplo (Fig. 44) a equação da ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Teremos
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y};$$

e a área, comprehendida entre o eixo dos x e o raio correspondente á abscissa x, será

$$t=-\frac{1}{2}\int_a^x\left(\frac{b^2x^2}{a^2y}+y\right)dx=-\frac{1}{2}\int_a^x\frac{b^2}{y}dx=-\frac{1}{2}\int_a^x\frac{abdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}ab\,\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{x}{a}\right).$$

Se chamarmos τ a área do sector do circulo descripto sobre o eixo maior como diametro, comprehendido entre o eixo dos x e o raio cuja extremidade tem a abscissa x, teremos

$$\tau = -\frac{1}{2}\int_a^x \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{a}\right);$$

por conseguinte $t = \dfrac{b}{a}\tau$:

e como, chamando s o arco de circulo, é $\tau = \dfrac{1}{2} as$, será $t = \dfrac{1}{2} bs$.

Assim sect. MCOM $= \dfrac{1}{2}$ CD . arc. OB, sect. BCOB $= \dfrac{1}{2}$ CO . arc. OB,

$$\text{sect. MCOM} = \frac{b}{a}\,\text{sect. BCOB}.$$

Para a hyperbole MN (Fig. 43), referida ás asymptotas, temos

$$xy = m^2;$$

logo $y' = -\dfrac{y}{x}$, $t = -\displaystyle\int y dx$,

o que mostra que é

sect. hyperb. CAMC = área CBPMC.

301. Demos alguns exemplos da formula (n.º 110) das rectificações,

$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

I. Para a parabola, $y^2 = 2px$,

temos $ydy = pdx, \ s = \int \frac{dy}{p} \sqrt{y^2 + p^2}$,

cujo integral é (n.º 205)

$$s = c + \frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{1}{2} pl(y + \sqrt{p^2 + y^2}).$$

Se o arco s começa em A (Fig. 22), $y = 0$ dá $s = 0$: d'onde se tira $c = -\frac{1}{2} plp$, e por conseguinte

$$\text{ACM} = \frac{y\sqrt{p^2 + y^2}}{2p} + \frac{1}{2} pl\left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right).$$

II. Para a segunda parabola cubica, $y^3 = ax^2$,

temos $s = \int dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}} = \frac{8}{27} a \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^3} + c.$

Em geral, para $y = ax^n$,

que representa todas as parabolas ou todas as hyperboles, conforme n é uma fracção positiva ou negativa,

temos $s = \int dx \sqrt{1 + n^2 a^2 x^{2n-2}}$.

Por onde se vê que, todas as vezes que $\frac{1}{2(n-1)}$, ou $\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}$, for numero inteiro, o arco s se achará debaixo de fórma finita (n.º 208).

III. Para o circulo temos

$$y^2 = r^2 - x^2, \text{ ou } y^2 = 2rx - x^2,$$

segundo for origem o centro ou a extremidade do diametro.

Em ambos os casos acharemos

$$s = \int \frac{rdx}{y};$$

onde, substituindo em logar de y o seu valor, se vê que a integração só se pode fazer por series (n.º 257), ou por arcos de circulo, o que traz a questão á mesma difficuldade que se pretendia vencer.

IV. Para a ellipse, $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$,

fazendo $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$, onde e designa a razão da excentricidade para o semieixo maior, temos

$$s = \int \frac{dx}{a} \sqrt{\left(\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2 - x^2}\right)} = \int dx \,.\, \frac{\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Não se pode integrar esta expressão se não por series; mas é necessario dispôr o calculo de maneira que a serie seja convergente.

Para isso poderemos desenvolver $\sqrt{a^2 - e^2x^2}$.

Ou tambem, chamando θ o arco OB (Fig. 44) do circulo circumscripto, o que dá

$$\text{CA} = x = a\cos\theta, \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -d\theta,$$

será $$s = -a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} d\theta \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}.$$

Teremos assim de integrar uma serie de termos da fórma A $\cos^{2m}\theta\,d\theta$; pelo que o arco OM dependerá, por uma serie, do arco correspondente OB do circumscripto.

Assim, desenvolvendo $\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$ em serie, e applicando o processo indicado no n.º 236, teremos

$$s=\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} a\left(-1+\frac{1}{2}e^2\cos^2\theta+\frac{1}{2.4}e^4\cos^4\theta+\frac{1.3}{2.4.6}e^6\cos^6\theta+..\right)d\theta+C,$$

sendo

$$\int -d\theta=-\theta,\ \int\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta,$$

$$\int\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta+\frac{1.3}{2.4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{1.3}{2.4}\theta.$$

....

Tomando este integral entre os limites $\theta=\frac{1}{2}\pi$ e $\theta=0$, acharemos o comprimento do quarto da ellipse

$$\frac{1}{2}\pi a\left\{\begin{array}{l}1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2\cdots\\ -\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.3\ldots2n-1}{2.4\ldots2n}e^n\right)^2\cdots\end{array}\right\},$$

sendo n o numero dos termos precedentes.

Similhantemente, fazendo $x=a\sec\theta$, e attendendo a que é $a^2+b^2=a^2e^2$, acharemos para a hyperbole

$$s=a\int_0^\theta\frac{e\,d\theta}{\cos^2\theta}\left(1-\frac{1}{2e^2}\cos^2\theta-\frac{1}{2.4e^4}\cos^4\theta-\frac{1.3}{2.4.6e^6}\cos^6\theta-\ldots\right),$$

que integraremos como para a ellipse.

Tomando a differença $r - s$ entre s e o comprimento r da parte da asymptota cuja extremidade tem a mesma abscissa x, a qual é

$r = \frac{x}{a} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = ae \sec\theta$; e depois fazendo $x = \infty$, ou $\theta = \frac{\pi}{2}$:

acharemos

$$\lim(r-s) = \frac{\pi a}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4e^2}\right)^2 + \ldots \frac{1}{n+1}\left(\frac{1.3..(2n-1)}{2.4..(2n.e^n)}\right)^2\right].$$

V. Na cycloide (Fig. 6), sendo a origem em F, teremos (n.° 106, VI)

$$y' = \sqrt{\frac{y}{2r-y}},\ s = \int\sqrt{\frac{2r}{y}} \cdot dy = 2\sqrt{2ry},$$

não se ajunctando constante, por começar em F o arco s.

Por ser $\sqrt{2ry} = \mathrm{KF}$, é $\mathrm{FM} = 2 \times$ corda KF.

302. Na pagina 251 vimos que a expressão $E(k, \varphi)$ do n.° 250 representa um arco de ellipse; d'onde veio o nome de *funcções ellipticas* a esta funcção, e ás outras duas que d'ella dependem. E na pagina 252 mostramos que a fórmula (5) d'ella dá um arco da hyperbole, cujo semieixo transverso, tomando a excentricidade por unidade, é k, pela somma de duas funcções algebricas com dois arcos de ellipses, cujo semieixo maior é 1, e cujas excentricidades k, k_1 e amplitudes φ, φ_1, estão ligados entre si pelas relações (a) da pagina 248: sendo nessa formula $\operatorname{sen}\varphi = x$ e $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$.

303. Se as coordenadas são polares, temos

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

Por exemplo, a spiral de Archimedes, cuja equação é $2\pi r = a\theta$,

dá
$$s = \int\frac{2\pi\, dr}{a}\sqrt{\frac{a^2}{4\pi^2} + r^2}.$$

Comparando esta expressão com a do arco de parabola, vê-se que as grandezas dos arcos d'estas curvas são eguaes, quando é r a ordenada da parabola e $\frac{a}{\pi}$ o seu parametro.

Na spiral logarithmica, cuja equação é $\theta = lr$,

acha-se $$s = \int dr\sqrt{2} = r\sqrt{2} + c.$$

Se o arco começa no pólo, temos $c = 0$ e $s = r\sqrt{2}$. Assim, ainda que sómente depois d'um numero infinito de revoluções a curva chegaria ao pólo, no entretanto o arco s, contado d'este ponto, é finito, e egual á diagonal do quadrado construido sobre o raio vector que o termina.

A respeito das curvas de dupla curvatura, veja-se o que se disse n.º 162.

Seja, por exemplo, o helice traçado sobre um cylindro recto, cujas ordenadas são proporcionaes aos arcos da base. As equações d'esta curva,

$$x = R\cos\theta,\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = kR\theta,$$

dão

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{\theta_0}^{\theta} R\sqrt{1 + k^2}\,d\theta = R\sqrt{1 + k^2}\,(\theta - \theta_0).$$

Áreas e volumes dos corpos

304. Corpos de revolução. O volume v e a área u d'um solido de revolução em volta do eixo dos x acham-se pelos integraes (n.º 163)

$$v = \int \pi y^2 dx, \quad u = \int 2\pi y ds = \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Façamos algumas applicações d'estas formulas.

I. Para a ellipse, recorrendo ao valor de ds (n.º 301, IV), temos

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2)\, dx, \quad u = \frac{2\pi be}{a} \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)}\, dx.$$

O integral da primeira dá $v = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} + c\right)$; onde $c = -\frac{2}{3}a$, no caso de ser o vertice um dos limites. Chamando pois z a altura do segmento de ellipsoide, ou $x = a - z$, o seu volume é $= \frac{\pi b^2 z^2}{3a^2}(3a - z)$, que para o ellipsoide inteiro, isto é, para $z = 2a$, se tornará em $\frac{4}{3}\pi b^2 a$. D'onde resulta que: 1.º o volume da esphera é $\frac{4}{3}\pi a^3$; 2.º o ellipsoide de revolução é para a esphera circumscripta :: $b^2 : a^2$; 3.º cada um d'estes corpos é $\frac{2}{3}$ do cylindro circumscripto; 4.º em fim o segmento espherico é $\pi z^2 \left(a - \frac{1}{3} z\right)$.

O integral, que entra no valor de u, é evidentemente a área de uma porção de circulo concentrico á ellipse, comprehendida entre os mesmos limites que o arco gerador, e de raio $\frac{a}{e}$. Chamando z esta área, que facilmente se obtem, teremos $u = \frac{2\pi bez}{a}$.

Se se tracta da esphera, temos (n.º 301, III)

$$ds = \frac{rdx}{y}; \text{ logo } u = 2\pi \int rdx.$$

D'onde resultará facilmente $2\pi rz$ para a expressão da superficie da callote espherica, ou da zona, cuja altura é z; e $4\pi r^2$ para a área de toda a esphera.

II. Para a parabola, $y^2 = 2ax$, acham-se

$$v = \int 2\pi axdx = \pi ax^2 + c,$$

$$u = \int \frac{2\pi}{a} ydy\sqrt{y^2 + a^2} = \frac{2\pi}{3a}\left[\sqrt{(y^2 + a^2)^3} + C\right].$$

Se a origem é no vertice, temos $c = 0$ e $C = -a^3$. Taes são o volume e a área d'um segmento de paraboloide de revolução.

III. Seja a equação $\qquad y^m = ax^n,$

que pertence a todas as parabolas, ou a todas as hyperboles, conforme n é positivo ou negativo. Teremos

$$v = \int \pi \sqrt[m]{a^2} \,.\, \sqrt[m]{x^{2n}} \,.\, dx = \frac{m\pi x}{m + 2n} \sqrt[m]{(ax^n)^2} = \frac{m\pi xy^2}{m + 2n}.$$

Se quizermos o volume ou a área descripta pela figura plana comprehendida entre duas ordenadas e os arcos de duas curvas, ou de duas partes da mesma curva, que ellas interceptam, usaremos das formulas

$$v = \int \pi (y'^2 - y^2)\, dx,\ u = \int 2\pi dx\left(y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx^2}} - y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right),$$

sendo y, y', as ordenadas dos dois arcos, e tomando os integraes entre as abscissas correspondentes ás duas ordenadas que terminam a figura.

305. Corpos quaesquer. O volume V e a área U d'um corpo qualquer são dados pela integração das formulas (n.º 166)

$$V = \iint z dx dy,\ U = \iint dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

integraes, que se devem entender do modo seguinte. Tirados das equações da superficie proposta os valores de z, p e q, em funcção de x e y, integraremos as expressões precedentes, primeiro em ordem a uma das variaveis, x ou y, conforme a facilidade dos calculos, e depois em ordem á outra variavel; e nestes integraes attenderemos aos limites que a questão assigna.

Supponhamos, por exemplo, que a área U deve ficar comprehendida entre dois planos parallelos aos xz ($y=a$ e $y=b$), e que a integração se faz primeiro em ordem a y: então é necessario tomar o integral entre os limites a e b, considerando x como constante. D'onde resultará a área MB (Fig. 37) d'uma secção de solido, de espessura dx infinitamente pequena, terminada nos dous planos MF e SB de que se tracta. Integrando depois este primeiro integral, que é da fórma $\varphi x . dx$, e tomando o novo integral desde o menor valor de x até o maior, teremos a área pedida, considerada como somma d'uma serie infinita de secções similhantes.

Se o corpo é terminado lateralmente por superficies curvas, devemos introduzir no primeiro integral funcções de x por limites de y, procedendo d'um modo analogo ao do n.º 298. O que tudo melhor se perceberá á vista dos seguintes exemplos:

Na esphera (Fig. 52), $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$

temos $\qquad p = -\dfrac{x}{z},\ q = -\dfrac{y}{z},\ \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \dfrac{r}{z},$

que, substituidos em U e V, os transformam em

$$U = \iint \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},\ V = \iint dx dy \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Integremos primeiro em ordem a x, suppondo y constante.

A integração dá, em U, rdy arc $\left(\text{sen} = \frac{x}{A}\right)$, sendo $A = \sqrt{r^2 - y^2}$. Ora a intersecção do plano xy com a esphera é um circulo Cy, que tem por equação $x^2 + y^2 = r^2$, e no qual a abscissa $AF = \pm A$ é o raio do do circulo formado pelo plano secante DmC: se tomarmos pois este integral desde $x = -A$ até $x = +A$ isto é, desde $\frac{x}{A} = -1$ até $\frac{x}{A} = 1$, teremos a área $DmC = \pi r dy$, de espessura infinitesima, d'uma secção parallela aos xz traçada no hemispherio superior.

Integrando agora $\pi r dy$, teremos o segundo integral $\pi r y$, que tomado entre os limites $-r$ e $+r$, isto é, entre o minimo e o maximo valor de y, dá $2\pi r^2$ para área do hemispherio superior, ou $4\pi r^2$ para área da esphera.

Façamos o mesmo a respeito do volume V: teremos (n.º **210**, (B))

$$\int\sqrt{A^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{A^2 - x^2} + \frac{1}{2}A^2 \text{ arc}\left(\text{sen} = \frac{x}{A}\right).$$

Tomando este integral entre os mesmos limites $-A$ e $+A$ que tomámos para a superficie, o primeiro termo desapparece, e o segundo reduz-se a $\frac{1}{2}\pi A^2$. Assim temos de integrar de novo $\frac{1}{2}\pi(r^2 - y^2)dy$, que representa o volume da secção $DmCD$; o que dá $\frac{1}{2}\pi\left(r^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)$; e tomando este resultado entre os limites $-r$, $+r$, vem finalmente o volume do hemispherio

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3, \text{ ou o da esphera} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

306. Se o volume V é comprehendido entre duas superficies no sentido dos z, integra-se o seu elemento $dxdydz$, primeiro em ordem a z, desde o z correspondente á superficie inferior, que limita o corpo, até o z da superficie superior; sendo estes valores de z funcções de x e y tiradas das equações das duas superficies. Integra-se depois em ordem a x, para formar a somma de todos os prismas que compõe uma secção de espessura dy, comprehendida entre dous planos parallelos aos xz, sendo os limites d'este integral dados pelas expressões de x tiradas da equação da projecção da superficie sobre o plano xy. Supponhamos que o volume V está inscripto em um cylindro MNg (Fig. 37), levantado sobre uma base dada mng. Os limites do integral resultam d'uma secção qualquer Pmn feita no corpo por um plano perpendicular aos y: assim, deveremos tomar o integral desde $x = \mathrm{P}m$ até $x = \mathrm{P}n$, sendo Pm e Pn valores dados em funcções de y pela equação da curva $mfng$, base do cylindro. Sejam $x = fy$, $x = \mathrm{F}y$, estes valores: substituindo-os successivamente em logar de x no integral, e subtrahindo um resultado do outro, teremos por fim de integrar uma funcção de y, desde o menor valor AB de y até o maior AC; valores estes que tambem se tiram da equação da base fng.

Procuremos, por exemplo, o volume d'um cone recto. Se tomarmos para eixo dos y o eixo d'este cone, e para origem das coordenadas o seu vertice, teremos (*Geom. Anal.*, n.º 168) a equação $l^2y^2 = z^2 + x^2$, onde l é a tangente do angulo formado pelas generatrizes com o eixo. Tomando pois $z\,dx\,dy$ desde $z = -\sqrt{l^2y^2 - x^2}$ até $z = +\sqrt{l^2y^2 - x^2}$, teremos $2\sqrt{l^2y^2 - x^2}\,.\,dxdy$. O integral d'esta expressão em ordem a x é

$$x\sqrt{l^2y^2 - x^2} + l^2y^2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{ly}\right) + c.$$

Para achar os limites, entre os quaes se deve tomar este integral, tiraremos $x = \pm ly$ da equação da projecção do cone sobre o plano dos xy; e tomando-o entre $x = -ly$ e $x = +ly$ o que dá πl^2y^2, será $\pi l^2y^2 dy$ o volume d'um tronco de cone, de altura infinitesima dy, comprehendido entre dous planos parallelos aos xz. Finalmente, integrando esta expressão desde o vertice $(y = 0)$ até a base $(y = h)$, acharemos o volume do cone recto $\frac{1}{3}\pi l^2h^3$; o que é o theorema conhecido, por ser $l \times h$ o raio da base.

Do mesmo modo, para achar o volume V do ellipsoide cujos semieixos são a, b, c, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

e $$V=2\int_{-b}^{b}dy\int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}dx.c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$=2\frac{c}{a}\int_{-b}^{b}dy\int_{-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)}}^{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)}}dx\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)-x^2},$$

ou, fazendo $$\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}=A,$$

$$V=2\frac{c}{a}\int_{-b}^{b}dy\,.\,\frac{\pi A^2}{2}=\pi ac\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy,$$

isto é $$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Similhantemente, se os limites da área são determinados por uma curva FMNG, traçada sobre a superficie de que se tracta, procuraremos á sua projecção fg sobre o plano xy (*Geom. Anal.*, n.º 162), que determinará um cylindro recto, e para este raciocinaremos do mesmo modo. Teremos assim de integrar $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ entre os limites acima designados: como se vê no exemplo seguinte.

Tracemos no plano xy as duas parabolas eguaes e oppostas FAE, F'AE' (Fig. 35), cujas equações são $y^2=+nx$, $y^2=-nx$; e depois a parallela FF' ao eixo dos x, correspondente á ordenada $AC=b$. De mais concebamos um cone recto de base circular, que tivesse por vertice a origem A, e por eixo o dos z, de maneira que a sua equação fosse $z=k\sqrt{x^2+y^2}$.

Pede-se a área do cone comprehendida no cylindro recto elevado sobre

AMFF'M'. A equação do cone dá

$$p = \frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1+p^2+q^2 = 1+k^2:$$

portanto o elemento da área do cone é $\sqrt{1+k^2}\,.\,dxdy$; e a sua projecção é em m. O integral em ordem a x é $\sqrt{1+k^2}\,.\,xdy$, que tomado desde M' até M, isto é, desde $x = -\frac{y^2}{n}$ até $x = +\frac{y^2}{n}$, dá a área da secção, de espessura infinitesima, projectada em MM', $\frac{2y^2}{n}\sqrt{1+k^2}\,.\,dy$.

Depois integrando esta expressão em ordem a y, vem $\frac{2y^3}{3n}\sqrt{1+k^2}$, que se deve tomar desde A até C, isto é, desde $y=0$ até $y=b$.

A área pedida será pois $$\frac{2b^3}{3n}\sqrt{1+k^2}.$$

Estes principios são especialmente applicaveis na Mechanica á investigação dos centros de gravidade e dos momentos de inercia.

307. Supponhamos que a equação da superficie é dada em coordenadas polares,

$$r = f(\theta,\ \psi).$$

Se o plano projectante MAP (Fig. 53) gyra em volta de AZ, o arco descripto por M, perpendicularmente áquelle plano, é o mesmo que o descripto por P, isto é,

$$r \operatorname{sen} \theta\, d\psi.$$

No mesmo plano projectante, o raio AM, gyrando em volta de A, descreve o arco $rd\theta$ perpendicular a AM.

Portanto os tres elementos perpendiculares em M são $r \operatorname{sen} \theta d\psi$, $rd\theta$, dr, lados do parallelipipido elementar, cujo volume é assim $r^2 dr d\psi d\theta \operatorname{sen} \theta$; e temos

$$V = \iiint r^2 dr d\psi d\theta \operatorname{sen} \theta = \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \operatorname{sen} \theta \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr;$$

sendo r_1 e r_0 os dois limites, entre os quaes está comprehendido r, para cada systema de ψ, θ; e θ_1, θ_0, ψ_1, ψ_0, os limites de θ e ψ.

Assim, para o volume da esphera, cuja equação polar é $r = a$, temos

$$\int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3} a^3, \ \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta = \frac{2}{3} a^3;$$

por conseguinte

$$V = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

II

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA PRIMEIRA ORDEM ENTRE DUAS VARIAVEIS

Separação das variaveis. Equações homogeneas

308. Uma equação differencial $$Mdy + Ndx = 0 \ldots\ldots\ (1)$$ nem sempre resulta immediatamente d'outra primitiva $f(x, y) = 0$; por que muitas vezes provirá de combinações da primitiva com a sua derivada, ou, mais geralmente, de multiplicações por factores. Podé pois a proposta não ser uma differencial exacta, e comtudo ser susceptivel de tornar-se tal por operações convenientes.

309. Supponhamos que a equação proposta é de primeira ordem entre duas variaveis x, y.

Se as variaveis estão nella separadas, isto é, se M só contém y e N só contém x, o integral procurado é a somma dos integraes dos dois termos, os quaes se obtem pelas regras precedentes,

$$\int Mdy + \int Ndx = 0.$$

310. O mesmo dirémos de qualquer equação, na qual se possam separar as variaveis, multiplicando-as por factores convenientes; como nos casos seguintes:

1.° Se M é funcção de x e N de y, a proposta, sendo multiplicada por $\frac{1}{MN}$, fica separada,

$$\frac{dy}{N}+\frac{dx}{M}=0.$$

Por exemplo $$dx\sqrt{1+y^2}-xdy=0$$

dá
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$
e por conseguinte

$$l(cx)=l(y+\sqrt{1+y^2}),\ cx=y+\sqrt{1+y^2}.$$

2.° Se M e N são productos de funcções de x por funcções de y, $M=XY$, $N=X_1Y_1$, a multiplicação por $\frac{1}{XY_1}$ dá a equação separada

$$\frac{Y}{Y_1}dy+\frac{X_1}{X}dx=0.$$

3.° Se a proposta é homogenea do gráu m, isto é, $M=\Sigma Ay^gx^h$, $N=\Sigma By^ix^k$, $g+h=i+k=m$: fazendo $y=zx$, será $\frac{N}{M}=\frac{\Sigma B z^i}{\Sigma A z^g}$ uma funcção Z de z; e a multiplicação pelo factor $\frac{1}{My+Nx}=\frac{1}{(Mz+N)x}$ transformal-a-ha na separada

$$\frac{Mxdz+(Mz+N)dx}{(Mz+N)x}=\frac{dz}{z+Z}+\frac{dx}{x}=0.$$

Exemplos

I. Seja $$(ax + by)\,dy + (fx + gy)\,dx = 0.$$

Dividindo por $(ax + by)y + (fx + gy)x$, e pondo $y = zx$, vem

$$\frac{(a + bz)\,dz}{bz^2 + (a + g)z + f} + \frac{dx}{x} = 0,$$

equação separada, que facilmente se integra

Assim a equação $$ydy + (x + 2y)\,dx = 0,$$

que se deduz da precedente pondo $a = 0,\ b = 1,\ f = 1,\ g = 2,$

dá $$\frac{zdz}{(1 + z)^2} + \frac{dx}{x} = 0 = \frac{dz}{1 + z} - \frac{dz}{(1 + z)^2} + \frac{dx}{x},$$

cujo integral é $$l(1 + z) + \frac{1}{1 + z} + l(cx) = 0,$$

ou $$lc(x + xz) + \frac{1}{1 + z} = lc(x + y) + \frac{x}{x + y} = 0.$$

II. Seja $$ay^m\,dy + (x^m + by^m)\,dx = 0.$$

Dividindo por $ay^{m+1} + (x^m + by^m)x$, e pondo $y = xz$, resulta a separada

$$\frac{dx}{x} + \frac{az^m\,dz}{az^{m+1} + bz^m + 1} = 0.$$

III. Seja $$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2+y^2}.$$

Dividindo por $xy - (y + \sqrt{x^2+y^2})x$, e fazendo $y = xz$, resulta a separada,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}},$$

cujo integral é $x = c(z + \sqrt{1+z^2})$, ou $x^2 - c(y + \sqrt{x^2+y^2}) = 0$. Este integral, desembaraçado do radical pela transposição e elevação ao quadrado, dá

$$x^2 = 2cy + c^2.$$

IV. Qual é a curva cuja área BCMP (Fig. 42) é egual ao cubo da ordenada, que a termina, dividido pela abscissa; e isto para cada um dos pontos, a partir d'uma ordenada fixa BC?

Differenciando a equação correspondente a este enunciado

$$\int ydx = \frac{y^3}{x},$$

resulta a equação homogenea $$(x^2y + y^3)\,dx = 3xy^2dy,$$

que, pela regra exposta, se reduz a $$\frac{dx}{x} = \frac{3zdz}{1-2z^2},$$

e integrada dá $$x^4(1-2z^2)^3 = c, \text{ ou } (x^2 - 2y^2)^3 = cx^2.$$

311. Do que fica dicto resulta, que será integravel qualquer equação que por transformações convenientes se poder tornar homogenea.

Seja por exemplo a equação

$$(ax + by + c)\,dy + (mx + ny + p)\,dx = 0.$$

Pondo $\qquad ax + by + c = z,\ mx + ny + p = t,$

que dão $\qquad dy = \frac{mdz - adt}{mb - na},\ dx = \frac{bdt - ndz}{mb - na},$

e substituindo na proposta, resulta a equação homogenea

$$(mz - nt)\,dz + (bt - az)\,dt = 0.$$

No caso de ser $mb - na = 0$ não tem logar este calculo; mas, como então é $m = \frac{na}{b}$, a proposta torna-se em

$$bcdy + bpdx + (ax + by)(bdy + ndx) = 0,$$

na qual é facil separar as variaveis, pondo $ax + by = v$, substituindo, e dividindo depois pelo coefficiente de dx, o que dá

$$\frac{c + v}{bp - ac + (n - a)v}\,dv + dx = 0.$$

312. Equação linear. Seja a equação linear, ou do primeiro gráu em y,

$$dy + Pydx = Qdx,$$

na qual P e Q representam funcções de x.

Fazendo $y = zt$, o que deixa arbitrario um dos factores z, t, podemos partir por isso a transformada $tdz + (dt + Ptdx)z = Qdx$ nas duas

$$dt + Ptdx = 0,\ tdz = Qdx,$$

a primeira das quaes dará $\quad -lt = \int Pdx = u$, ou $t = e^{-u}$,

e depois a outra $\quad z = \int Qe^u dx + c$,

ou $\quad y = e^{-u}(\int Qe^u dx + c)$.

313. Reduz se a esta a integração de

$$dy + Pydx = Qy^n dx,$$

fazendo $\dfrac{y^{1-n}}{1-n} = z$, que a transforma em

$$y^n dz + Pydx = Qy^n dx, \text{ ou } dz + (1-n) Pzdx = Qdx.$$

O integral é portanto

$$y^{1-n} = (1-n) e^{-(1-n)\int Pdx} (\int Qe^{(1-n)\int Pdx} dx + c).$$

Exemplos

I. Em $\quad dy + ydx = ax^3 dx$,

temos $\quad P = 1,\ Q = ax^3;\ u = \int Pdx = x;$

por conseguinte

$$ye^u = a\int x^3 e^u dx + c = ae^u (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c.$$

II. Em $\quad (1 + x^2) dy - xydx = adx$

temos

$$P = -\frac{x}{1+x^2},\ Q = \frac{a}{1+x^2},\ u = -\int \frac{xdx}{1+x^2} = -l\sqrt{1+x^2};$$

logo $e^u = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},\ y = e^{-u}(\int Qe^u dx + c) = ax + c\sqrt{1+x^2}.$

III. Em

$$dy - \mu y dx - \frac{2g}{a}\cos x dx = 0$$

temos $\qquad P = -\mu,\ Q = \frac{2g}{a}\cos x,\ \int Pdx = -\mu x = u;$

e

$$\int Qe^u dx = \frac{2g}{a}\int e^{-\mu x}\cos x dx:$$

ou, porque de $\qquad \int e^{-\mu x}\cos x dx$

$$= e^{-\mu x}\operatorname{sen} x + \mu\int e^{-\mu x}\operatorname{sen} x dx$$

$$= e^{-\mu x}\operatorname{sen} x - \mu e^{-\mu x}\cos x - \mu^2\int e^{-\mu x}\cos x dx$$

se tira

$$\int e^{-\mu x}\cos x dx = \frac{e^{-\mu x}\operatorname{sen} x - \mu e^{-\mu x}\cos x}{1+\mu^2},$$

$$\int Qe^u dx = \frac{2g}{a(1+\mu^2)}(e^{-\mu x}\operatorname{sen} x - \mu e^{-\mu x}\cos x).$$

Portanto $\qquad y = Ce^{\mu x} + \frac{2g}{a(1+\mu^2)}(\operatorname{sen} x - \mu\cos x).$

(*Mec. de Poisson* n.º 188).

314. Equação de Riccatti. Tractemos finalmente da equação de Riccatti, primeiro geometra que se occupou d'ella:

$$dy + by^2dx = ax^m\,dx.$$

1.° Se $m = 0$, temos (*Alg. Sup.* pag. 224)

$$dx = \frac{dy}{a - by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{dy}{\sqrt{a} + y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}\right),$$

que dá

$$2\sqrt{ab}\,(x + c) = l\,(y\sqrt{b} + \sqrt{a}) - l\,(y\sqrt{b} - \sqrt{a}),$$

ou
$$y = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{(e^{2(x+c)\sqrt{ab}} + 1)}{e^{2(x+c)\sqrt{ab}} - 1};$$

e, no caso de terem a e b signaes differentes, $\pm a$ e $\mp b$,

$$y = \sqrt{\left(\mp\frac{a}{b}\right)}\cot\left[(x + c)\sqrt{\mp ab}\right].$$

2.° Se m não é nullo, ponhamos $y = b^{-1}x^{-1} + zx^{-2}$:

teremos
$$x^2dz + bz^2dx = ax^{m+4}dx,$$

transformada, que é homogenea no caso de $m = -2$, e que se integra por separação das variaveis no caso de $m = -4$.

3.° Nos outros casos façamos $z = t^{-1}$, $x^{m+3} = u$,

e depois
$$n = -\frac{m+4}{m+3},\ b' = \frac{a}{m+3},\ a' = \frac{b}{m+3}:$$

resultará a equação similhante á proposta

$$dt + b't^2du = a'u^n du,$$

que se poderá tractar como a precedente, e integrar nos casos de $n = -2$ e $n = -4$.

Mas se n não é -2 nem -4, poderemos ainda fazer uma transformação analoga á precedente; e se continuarmos assim successivamente pelo mesmo processo, seremos conduzidos á integração d'equações da mesma fórma que a proposta, tendo successivamente por expoente da variavel no segundo membro os numeros

$$n = -\frac{m+4}{m+3},\ n' = -\frac{n+4}{n+3},\ n'' = -\frac{n'+4}{n'+3}, \ldots$$

isto é, os numeros

$$-\frac{m+4}{m+3}, -\frac{3m+8}{2m+5}, -\frac{5m+12}{3m+7}, -\frac{7m+16}{4m+9} \ldots -\frac{(2k-1)m+4k}{km+2k+1}.$$

Quando uma d'estas fracções for nulla, ou -2 ou -4, isto é, quando for $m = -\frac{4i}{2i-1}$, i designando qualquer numero positivo, ou zero, o integral se achará facilmente.

Se tivessemos começado por fazer $y = t^{-1}$, $x^{m+1} = z$, na proposta, o mesmo calculo nos conduziria a achar que a integração é possivel quando $m = \frac{-4i}{2i+1}$.

Sabe-se pois integrar a equação de Riccati nos casos em que é

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$$

Do factor que torna integravel uma equação differencial da primeira ordem

315. I. Condição de integrabilidade. Se o primeiro membro da equação $$Mdy + Ndx = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

é uma differencial exacta $du = Mdy + Ndx$,

serão M e N os coefficientes differenciaes parciaes $\frac{du}{dy}$ e $\frac{du}{dx}$; e conseguintemente a relação $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$, será $$\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

A primeira condição $\frac{du}{dy} = M$ satisfaz-se pondo $u = \int[Mdy] + X$, isto é, integrando na supposição de x constante e ajuntando uma funcção de x; e desta, que dá $\frac{du}{dx} = \int\left[\frac{dM}{dx}dy\right] + \frac{dX}{dx}$, resulta, por ser $\frac{du}{dx} = N$ em virtude da segunda condição, $X = \int dx\left(N - \int\left[\frac{dM}{dx}dy\right]\right) + c.$

Portanto $$u = \int[Mdy] + \int dx\left(N - \int\left[\frac{dM}{dx}dy\right]\right) + c,$$

ou $$u = \int[Mdy] + \int dx\left(N - \frac{d[\int Mdy]}{dx}\right) + c.$$

Este calculo será possivel, e obter-se-ha assim o integral procurado, quando a expressão $N - \int\left[\frac{dM}{dx}dy\right]$, que entra debaixo do integral em X, for uma funcção de x sómente, isto é, quando for nulla a sua derivada em ordem a y,

$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = 0.$$

Logo: *a equação* Mdy + Ndx *será differencial exacta quando se verificar a condição* (2); *e só então o será.*

Se tivessemos começado por integrar Ndx em ordem a x, chegariamos do mesmo modo ás expressões

$$u = \int[Ndx] + \int dy\left(M - \int\left[\frac{dN}{dy}dx\right]\right) + c,$$

ou
$$u = \int[Ndx] + \int dy\left(M - \left[\frac{d[\int Ndx]}{dy}\right)\right) + c.$$

Preferir-se-ha, dos dois processos, o que mais facilitar o calculo.

Exemplos

I. Em $\quad \frac{a(xdx + ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} + 3by^2dy$

temos
$$M = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2} + 3by^2,$$

$$N = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2};$$

e a condição (2) verifica-se.

Estas expressões dão

$$\int \mathrm{N}dx = a\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{y}\right), \quad \frac{d(\int \mathrm{N}dx)}{dy} = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2};$$

logo (form. (2') $\quad u = a\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{y}\right) + by^3 + c.$

No caso de serem nullos a e b, este integral reduz-se ao conhecido

$$\int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{y}\right) + c.$$

II. Do mesmo modo se achará

$$\int \frac{dx\,(x+\sqrt{x^2+y^2}) + ydy}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{l.}\,c\,(x+\sqrt{x^2+y^2}).$$

316. II. REDUCÇÃO Á CONDIÇÃO DE INTEGRABILIDADE. No caso de não satisfazer a proposta á condição de integrabilidade, vejamos se é possivel, multiplicando-a por uma funcção conveniente de x e y, reduzil-a a satisfazer a essa condição.

A equação $\quad \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dx = 0$

deve coincidir com a que resulta de eliminar uma constante c entre a primitiva e a sua differencial immediata.

Supponhamos que a primitiva, resolvida em ordem a c, toma a fórma

$$c = \varphi\,(x,\, y).$$

Da differencial immediata d'esta,

$$d\varphi = \mathrm{P}dy + \mathrm{Q}dx = 0$$

tira-se $$\frac{d\varphi}{P} = dy + \frac{Q}{P}\,dx = 0,$$

a qual, por não entrar nella a constante c, deve ser identica com

$$dy + \frac{N}{M}\,dx = 0,$$

isto é, deve ser $$dy + \frac{N}{M}\,dx = \frac{d\varphi}{P},$$

ou $$d\varphi = \frac{P}{M}\,(Mdy + Ndx):$$

e porque o primeiro membro é uma differencial exacta, tambem o segundo o deve ser. Logo:

Se a proposta de primeira ordem $Mdy + Ndx = 0$ *tem uma primitiva, sempre ha um factor,* $\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} = z$, *proprio para tornar integravel a funcção differencial* $z\,(Mdy + Ndx)$.

Para obter este factor, a condição de integrabilidade de $Mzdy + Nzdx$,

que é $$\frac{d\,(Mz)}{dx} = \frac{d\,(Nz)}{dy},$$

dá $$z\left(\frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy}\right) = N\,\frac{dz}{dy} - M\,\frac{dz}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

a qual deve determinar z.

317. Esta equação ás differenciaes parciaes poucas vezes pode servir para isso, por causa da difficuldade dos calculos; mas deduzem-se d'ella algumas propriedades notaveis.

1.° Se o integral u de $z(\mathrm{M}dy+\mathrm{N}dx)$ fosse conhecido, facilmente se acharia o factor z, porque seriam $\frac{du}{dy}=\mathrm{M}z$, $\frac{du}{dx}=\mathrm{N}z$,

e portanto
$$z=\frac{\frac{du}{dy}}{\mathrm{M}}=\frac{\frac{du}{dx}}{\mathrm{N}}.$$

2.° Multiplicando a equação identica $du=z(\mathrm{M}dy+\mathrm{N}dx)$ por qualquer funcção φu de u, vem

$$\varphi u du=z\varphi u(\mathrm{M}dy+\mathrm{N}dx).$$

E como o primeiro membro é uma differencial exacta, tambem o deve ser o segundo: por conseguinte ha uma infinidade de factores $z\varphi u$ proprios para tornar integravel a equação proposta, e o conhecimento de um d'elles z basta para achar os outros.

3.° Se z é funcção sómente d'uma das variaveis, x ou y, será facil determinal-o.

Com effeito, se z é funcção unicamente de x, a equação (3) reduz-se a

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{\mathrm{M}}\left(\frac{d\mathrm{N}}{dy}-\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4);$$

e z obter-se-ha integrando esta equação (4), cujo segundo membro deve, segundo a hypothese, ser uma funcção de x.

Similhantemente dará z a integração de

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{\mathrm{N}}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx}-\frac{d\mathrm{N}}{dy}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

quando o segundo membro, e por conseguinte z, for uma funcção de y.

Cumpre observar que em (4) e (5) a parte comprehendida entre parenthesis se torna nulla, como deve ser, quando $\mathrm{M}dy+\mathrm{N}dx$ é differencial exacta.

4.° Se M é funcção de x e N de y, a expressão $z=\frac{1}{MN}$ reduz (3) a uma identidade; e se M e N são productos XY e X_1Y_1 de funcções de x por funcções de y, a expressão $z=\frac{1}{XY_1}$ tambem reduz (3) a uma identidade: o que concorda com o que se disse no n.° 310.

5.° Seja $F(x, y, \ldots)$ uma funcção homogenea, do gráu m, de muitas variaveis. Se multiplicarmos estas variaveis por $1+h$, isto é, se mudarmos $x, y, \ldots$ em $x+hx$, $y+hy, \ldots$, a funcção F tornar-se-ha em

$$F'=(1+h)^m F=\left(1+mh+m\frac{m-1}{2}h^2+\ldots\right)F,$$

e tambem em

$$F'=F(x+hx, y+hy, \ldots)$$

$$=F+\frac{dF}{dx}hx+\frac{dF}{dy}hy+\frac{d^2F}{2dx^2}h^2x^2+\frac{d^2F}{2dy^2}h^2y^2+\frac{d^2F}{dxdy}h^2xy+\ldots;$$

d'onde resulta, pela comparação das duas expressões de F′,

$$(a)\ldots\left\{\begin{array}{l} mF=\frac{dF}{dx}x+\frac{dF}{dy}y;\ m(m-1)F=\frac{d^2F}{dx^2}x^2+\frac{d^2F}{dy^2}y^2+2\frac{d^2F}{dxdy}xy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

que é o *theorema das funcções homogeneas.*

Posto isto, quando forem M, N, funcções homogeneas do gráu p, vejamos se ha um factor homogeneo z do gráu n, que torne differencial exacta o primeiro membro de (1).

Porque Nz é uma funcção homogenea do gráu $p+n$, será (1.ª eq. (a))

$$(p+n)Nz=x\frac{d(Nz)}{dx}+y\frac{d(Nz)}{dy},$$

a qual, em virtude da condição de integrabilidade, $\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy}$, de

$Mzdy + Nzdx$, se torna em

$$(p+n)\,Nz = x\frac{d(Nz)}{dx} + \frac{d(Myz)}{dx} = \frac{d(Nzx+Myz)}{dx} - Nz,$$

ou

$$(p+n+1)\,Nz = \frac{d[z(My+Nx)]}{dx}.$$

E como a esta equação satisfaz a hypothese $z = \dfrac{1}{My+Nx}$, ou $z(My+Nx) = 1$, reduzindo-a a $0 = 0$, por ser então zero o grâu $n+p+1$ de $z(My+Nx)$, fica assim satisfeita por aquella hypothese a condição de integrabilidade.

Exemplos

I. Seja $$dx + (adx + 2bydy)\sqrt{1+x^2} = 0.$$

A condição (2) de integrabilidade não tem logar, por isso que é

$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = -\frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}};$$

mas, como o quociente d'esta quantidade dividida por $M = 2by\sqrt{1+x^2}$ é uma funcção $\dfrac{-x}{1+x^2}$ de x, segue-se que a equação se tornará integravel por meio d'um factor funcção de x, e que este, em virtude da equação (4), a qual dá

$$lz = \int \frac{-xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}l(1+x^2) = -l\sqrt{1+x^2},$$

é $z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Introduzindo pois o factor z, a proposta torna-se em

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + adx + 2bydy = 0,$$

que dá $$ax + lc\,(x + \sqrt{1+x^2}) + by^2 = 0.$$

II. Na equação $$dy + Pydx = Qdx,$$

do n.º 312, são $$M = 1,\ N = Py - Q,$$

e por isso $$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = P.$$

Como $\frac{P}{M}$ é uma funcção de x, a equação (4) dá

$$\frac{dz}{z} = Pdx,\ lz = \int Pdx,\ z = e^{\int Pdx} = e^u;$$

e pela introducção d'este factor, a proposta torna-se em

$$e^u dy + e^u(Py - Q)\,dx = 0,$$

para cuja integração seguiremos o processo indicado no n.º 315. Assim, integrando $e^u dy$ em ordem a y, acha-se $e^u y + X$, cuja differencial em ordem a x, comparada com $e^u(Py - Q)\,dx$, dá $dX = -e^u Qdx$; por conseguinte $X = -\int e^u Qdx$, e o integral procurado é

$$e^u y = \int Qe^u dx + c,$$

como já sabiamos.

III. Do mesmo modo $$x^3dy + \left(4x^2y - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 0$$

dá $lz = lx$. Multiplicando pois a proposta pelo factor x, afim de a tornar integravel, e integrando, acharemos $x^4y + \sqrt{1-x^2} = c$.

IV. Para integrar $xdy - dx\,(y + \sqrt{x^2+y^2}) = 0$,

na qual os coefficientes de dy e dx são funcções homogeneas de x e y, temos o factor $z = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$; o que torna o primeiro termo em $\dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Integrando este termo em ordem a y, vem $l\,(y + \sqrt{x^2+y^2})$; depois ajunctando X a este integral, differenciando em ordem a x, e comparando com $\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}}\,dx$, acha-se

$$dX = -\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}\,[y+\sqrt{x^2+y^2}]}\right)dx$$

$$= -\left(\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})}\right)2\,dx$$

$$= -\frac{2dx}{x};$$

logo $$X = lc - lx^2;$$

e o integral procurado é $cy + c\sqrt{x^2+y^2} = x^2$.

Das equações da primeira ordem nas quaes as differenciaes passam do 1.° gráu

318. Seja $$F(x, y, y', \ldots y'^m) = 0$$

uma equação da primeira ordem do gráu m, cujo integral $f(x, y, c) = 0$ se pretende conhecer.

Este integral deve ter uma constante c; e deve ser do gráu m em ordem a ella, para que, eliminando-a entre o mesmo integral e a sua differencial immediata, resulte a proposta. Com effeito, para cada valor de c tirado de $f(x, y, c) = 0$ e substituido na derivada $\frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0$, esta dará um de y'; e como y' deve ter m valores, outros tantos deverá ter c, isto é, deverá $f(x, y, c) = 0$ ser do gráu m em c.

Chamando $X_1, X_2 \ldots X_m$, as m raizes da proposta resolvida em ordem a y', demos a esta a fórma

$$(y' - X_1)(y' - X_2) \ldots (y' - X_m) = 0.$$

Os integraes $\quad P_1 = 0, P_2 = 0, \ldots P_m = 0,$

das m equações $\quad y' - X_1 = 0, y' - X_2 = 0, \ldots y' - X_m = 0,$

satisfazem a esta; e tambem lhe satisfaz o seu producto, porque, em virtude de $P'_\alpha = 0$, e por conseguinte da proposta, é

$$(P_1 . P_2 \ldots P_m)' = \sum_1^m \frac{P_1 . P_2 \ldots P_m}{P_\alpha} . P'_\alpha = 0.$$

Suppondo pois a constante a mesma em todos os integraes particulares $P_1 = 0, \ldots P_m = 0$, o producto $P_1 . P_2 \ldots P_m = 0$, que satisfaz á proposta, e no qual é m o gráu mais elevado de c, será o integral completo que se procura.

Por exemplo $\quad yy'^2 + 2xy' = y$

dá $$y' = \frac{-x \pm \sqrt{y^2 + x^2}}{y}, \text{ ou } 1 \mp \frac{yy' + x}{\sqrt{y^2 + x^2}} = 0,$$

cujo integral, por ser o segundo termo evidentemente a derivada de $\mp \sqrt{y^2 + x^2}$, é

$$x \mp \sqrt{y^2 + x^2} + c = 0.$$

O integral completo é pois

$$(x - \sqrt{y^2 + x^2} + c)(x + \sqrt{y^2 + x^2} + c) = 0,$$

ou $$y^2 = 2cx + c^2.$$

319. Quando a equação, for d'uma das fórmas,

$$F(x, y') = 0, \; F(y, y') = 0:$$

1.º Se puder resolver-se em ordem a y', teremos immediatamente:

no primeiro caso $$y' = fx, \; y = \int fxdx;$$

e no segundo $$y' = fy, \; x = \int \frac{dy}{fy}.$$

2.º Se for da primeira fórma, e puder resolver-se em ordem a x, dando $x = fy'$, teremos

$$y = \int y'dx = y'x - \int xdy' = y'fy' - \int fy'dy';$$

e, feita a integração do segundo termo, eliminaremos y' entre esta equação e a proposta.

Por exemplo, $(1+y'^2)x=1$, dá

$$fy'=\frac{1}{1+y'^2},\ y=\frac{y'}{1+y'^2}-\int\frac{dy'}{1+y'^2}=\frac{y'}{1+y'^2}-\text{arc}\,(\text{tg}=y')+c;$$

e, eliminando y', vem o integral procurado

$$y=\sqrt{x-x^2}-\text{arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+c.$$

3.° Se for da segunda fórma e puder resolver-se em ordem a y, $y=fy'$,

teremos $$x=\int\frac{d.fy'}{y'}=\frac{fy'}{y'}+\int\frac{fy'.dy'}{y'^2};$$

e a eliminação de y' dará o integral pedido.

320. II. Quando a proposta tiver a fórma $y=\text{F}(x,\ y')$,

será $$y'=\frac{d\text{F}}{dx}+\frac{d\text{F}}{dy'}.\frac{dy'}{dx};$$

e, se soubermos integrar esta equação, a eliminação de y' entre o seu integral e a proposta dará o integral procurado.

Assim $$y=x\varphi y'+\psi y'$$

dará $$y'dx=\varphi y'.dx+x\varphi' y'.dy'+\psi' y'.dy',$$

ou $$dx+\frac{x\varphi'(y')}{\varphi(y')-y'}dy'+\frac{\psi'(y')}{\varphi(y')-y'}dy'=0,$$

equação de que se tractou no n.° 312.

321. No caso de ser $\varphi(y') = y'$, neste exemplo, isto é, de ser a proposta $y = xy' + \psi(y')$, a equação differencial reduz-se a

$$[x + \psi'(y')]\, dy' = 0.$$

Egualando a zero cada um dos factores, teremos

$$y' = c,\quad x + \psi'(y') = 0\,;$$

e restará eliminar y' entre qualquer d'estas equações e a proposta.

A segunda não dará se não uma solução das chamadas *singulares*, de que logo tractaremos. Mas a primeira conduzirá ao integral completo; porque a eliminação de c entre ella e a sua primitiva, $y = cx + C$, satisfaz á proposta, suppondo $C = \psi c$, e é por conseguinte $y = cx + \psi c$ este integral.

Por exemplo $\quad ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2},$

ou $$y = y'x + a\sqrt{1 + y'^2},$$

dá $$y' = c,\quad x + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

A primeira fornece o integral geral $\quad y = cx + a\sqrt{1 + c^2}.$

A segunda dá a solução singular $\quad y^2 + x^2 = a^2,$

quando se tira d'ella o valor de y' para o substituir na proposta.

..

Das soluções singulares das equações differenciaes da primeira ordem

322. Sejam: uma equação differencial proposta da primeira ordem, e o seu integral completo, com a constante arbitraria c:

$$f(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots (1); \quad F(x, y, c) = 0 \ldots\ldots (2).$$

A proposta (1) deve resultar da eliminação de c entre a primitiva (2)

e a sua differencial immediata $\quad \dfrac{dF}{dx} + y' \dfrac{dF}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$

Se differenciassemos porém (2), fazendo tambem variar c, teriamos

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dc}\left(\frac{dc}{dx} + y' \frac{dc}{dy}\right) = 0 \ldots\ldots (4);$$

a qual concorda com (3) nos casos de serem $\dfrac{dc}{dx}$ e $\dfrac{dc}{dy}$ nullos, ou de ser $\dfrac{dF}{dc}$ nullo, ou de serem $\dfrac{dF}{dx}$ e $\dfrac{dF}{dy}$ infinitos.

No primeiro d'estes casos é $c = \text{const}$, como suppõe (2). No segundo a eliminação de c entre $\dfrac{dF}{dc} = 0$ e (2) dará uma equação $\varphi(x, y) = 0$, a qual será um integral particular ou será uma *solução singular*, segundo estiver ou não estiver comprehendida na primitiva (2). No terceiro a eliminação de c entre $\frac{dF}{dx} = \infty$, $\frac{dF}{dy} = \infty$, e (2) dará duas equações que, se concordarem entre si, serão a solução $\varphi(x, y) = 0$.

323. 1.° D'onde resultam dois processos differentes para obter a solução procurada, no caso de se conhecer o integral completo: um correspondente a $\frac{dF}{dc} = 0$, outro a $\frac{dF}{dx} = \infty$ e $\frac{dF}{dy} = \infty$; o segundo dos quaes poderá ser util, quando a primitiva não estiver desembaraçada de radicaes.

Exemplos

I. Sejam $(x^2 - 2y^2)\, y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0$, $y^2 - 2cy + x^2 = c^2$,

a equação differencial proposta e a sua primitiva.

Derivando a primitiva em ordem a c, e eliminando c entre ella e a derivada, $c + y = 0$, vem

$$2y^2 + x^2 = 0,$$

a qual é uma *solução singular*, por isso que satisfaz á proposta sem estar comprehendida na primitiva geral.

II. A primitiva $(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2cy) + (x^2 - b)\, c^2 = 0$

dá $$\frac{dF}{dc} = 0 = -y\,(x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b)\, c;$$

e, eliminando c entre estas equações, resulta

$$y^2\,(y^2 + x^2 - b) = 0,$$

a qual é um integral particular, por isso que a ella se reduz a primitiva dada quando se toma $c=0$.

III. A primitiva $c^2-(x+y+1)c+x+y=0$

dá $$\frac{dF}{dc}=2c-x-y-1=0,\ c=\frac{x+y+1}{2},$$

que reduz a mesma primitiva, escripta sob a fórma $(c-1)(c-x-y)=0$, a $(x+y-1)^2=0$; e esta é um integral particular, proveniente de se fazer $c=1$ depois de ter dividido por $c-1$.

IV. A primitiva $y=x+(c-1)^2(c-x)^2$

dá $$\frac{dF}{dc}=2\,(c-x)(c-1)(2c-x-1)=0.$$

O valor $c=1$ dá o integral particular $y=x$; $c=x$ dá o mesmo, e não uma solução singular, apesar de ser c variavel; emfim $c=\frac{x+1}{2}$ dá a solução singular.

V. A primitiva $y^2+x^2=2cx$ dá $\frac{dF}{dc}=2x=0,$

que se pode considerar como um caso particular do integral completo, correspondente a $c=\infty$.

VI. A derivada $(x^2-b)\,y'^2-2xyy'-x^2=0$

tem por integral completo $x^2-2cy=b+c^2,$

que dá $\frac{dF}{dc} = c + y = 0$, e conseguintemente, eliminando c, a solução singular $x^2 + y^2 = b$.

O outro processo, depois de posta a primitiva debaixo da fórma

$$\sqrt{x^2+y^2-b} - y - c = 0,$$

dá $\frac{dF}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-b}} = \infty$, $\frac{dF}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-b}} - 1 = \infty$,

a ambas as quaes satisfaz $\quad x^2 + y^2 = b.$

Neste exemplo, como a primitiva está resolvida em ordem a

$$c = \sqrt{x^2 + y^2 - b} - y = \psi(x, y),$$

sendo por conseguinte $\quad \frac{dc}{dx} = \frac{d\psi}{dx}, \; \frac{dc}{dy} = \frac{d\psi}{dy},$

as equações precedentes equivalem a $\frac{dc}{dx} = \infty$, $\frac{dc}{dy} = \infty$, que dão com effeito o mesmo.

324. 2.° Se não conhecermos a primitiva da proposta, mas soubermos determinar o factor que torna esta integravel, esse factor servirá para obter as soluções singulares.

Seja $\quad y' + k = 0$

uma equação, e z o factor que a torna derivada exacta,

$$z(y' + k) = \varphi'(x, y) = 0.$$

Como na primitiva $\varphi(x, y) = c$ d'esta não deve ser comprehendida a solução singular $S = 0$, a expressão $y = \psi x$, tirada da mesma solução, não deve reduzir $\varphi(x, y)$ a uma constante, nem por conseguinte annular a derivada $\varphi'(x, y)$.

Portanto, devendo $y=\psi x$ annular $y'+k$, mas não annular $z(y'+k)$, é necessario que torne z infinito.

Por onde se vê que as soluções singulares fazem infinitos os factores proprios para tornar integraveis as equações differenciaes. Mostra-se até que as soluções singulares d'uma equação são factores algebricos que por uma transformação conveniente se podem pôr em evidencia, e separar inteiramente d'ella (*Calc. infinit.* de Cournot n.os 478, 480). Consulte-se no n.º 13.º do *Journal de l'École Polytechnique* uma memoria de Poisson, na qual se mostra que sempre se pode desembaraçar qualquer equação de primeira ordem da sua solução singular, ou introduzir-lhe uma.

Seja por exemplo a equação

$$y^2-a^2=2xyy'+y'^2(a^2-x^2),$$

ou, resolvendo em ordem a y',

$$(a^2-x^2)y'+xy=a\sqrt{x^2+y^2-a^2}.$$

Como, multiplicando pelo factor $z=\dfrac{1}{(a^2-x^2)\sqrt{y^2+x^2-a^2}}$, esta equação satisfaz á condição de integrabilidade, será $y^2+x^2-a^2=0$ uma solução singular; o que logo se verá confirmado por outro processo (n.º 326 exemplo III).

325. Se a solução singular fosse dada, $x^2+y^2-a^2=0$, e quizessemos obter o integral geral, poderiamos, visto que $x^2-a^2=0$ satisfaz á proposta, examinar se o factor z, que a faz integravel e se torna infinito para a solução singular, tem a fórma $(x^2-a^2)^{-m}(y^2+x^2-a^2)^{-n}$, sendo m e n indeterminados. Assim, multiplicada a proposta por esta funcção, estabelecendo a condição de integrabilidade (n.º 315), achariamos que aquella condição é satisfeita por $m=1$, $n=\dfrac{1}{2}$; e integrariamos a proposta, depois de a multiplicar por $\dfrac{1}{(x^2-a^2)(y^2+x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$.

É um exemplo de taes artificios de calculo tirado da *Memoria* de Trembley (*Mem. da Academ. das Scienc.* de Turin, 1790—1791).

326. Quando não se conhecer a primitiva da equação proposta, nem o factor pelo qual seria necessario multiplical-a para a tornar differencial immediata, poderemos deduzir da mesma proposta meios para reconhecer as soluções singulares d'ella.

Antes de expor este processo, procuremos a interpretação geometrica das soluções singulares.

Por ser c arbitraria, podemos considerar o integral geral $f(x, y, c) = 0$ como equação d'uma infinidade de curvas, que só differem entre si em virtude dos differentes valores attribuidos ao parametro c.

Suppondo pois que se dão successivamente a c todos os valores possiveis, separados por differenças infinitamente pequenas, as linhas correspondentes consecutivas, que são integraes particulares, encontrar-se-hão duas a duas em uma serie de pontos, cujo systema formará uma envolvente, tangente a todas ellas; como se pode vêr discorrendo d'um modo analogo ao do n.º 178.

Assim, para cada uma das curvas representadas pela equação $f(x, y, c) = 0$, o parametro c é constante, mas, na passagem d'uma d'ellas para outra, ou na passagem d'um ponto para outro da envolvente que as toca, c é uma funcção variavel das coordenadas d'esse ponto.

Por onde se vê que: para cada valor de c, será $f(x, y, c) = 0$ um integral particular; mas a equação resultante da eliminação de c entre $f = 0$ e $\frac{df}{dc} = 0$, que é a da envolvente, será, em geral, differente das equações das envolutas, e por isso uma solução singular.

Ha pois, em geral, duas ou mais tangentes diversas na intersecção de duas linhas que são integraes particulares da equação proposta; mas, quando essa intersecção é um ponto da curva de contacto, duas ao menos d'aquellas tangentes devem confundir-se. D'onde resulta que nos pontos pertencentes á curva de contacto deve a proposta (1), resolvida em ordem a y', ter raizes eguaes; e conseguintemente deve nestes pontos verificar-se (n.º 73) a equação

$$\frac{dV}{dy'} = 0.$$

327. *Exemplos:*

I. A equação $\quad V = (x^2 - 2y^2)\, y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0$

dá $$\left(\frac{dV}{dy'}\right) = (x^2 - 2y^2)\, y' - 2xy = 0;$$

e, eliminando y' entre estas equações, vem a solução singular

$$x^2 + 2y^2 = 0.$$

II. A equação $$xdx + ydy = dy\sqrt{y^2 + x^2 - a^2},$$

ou $$x^2 + 2xyy' + y'^2(a^2 - x^2) = 0,$$

dá $$\frac{dV}{dy'} = 2xy + 2y'(a^2 - x^2) = 0;$$

e, eliminando y', vem $$x^2 + y^2 = a^2.$$

III. A equação $$ydx - xdy = ads = a\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou $$y^2 - a^2 = 2xyy' + y'^2(a^2 - x^2),$$

dá $$\frac{dV}{dy'} = 2xy + 2y'(a^2 - x^2) = 0,$$

e, pela eliminação de y', a solução singular $x^2 + y^2 = a^2$,

achada por outro processo no n.º 324.

IV. Para $$y = xy' + Y_1,$$

onde Y_1 representa uma funcção de y', temos

$$x + \frac{dY_1}{dy'} = 0;$$

e a solução singular resultará da eliminação de y' entre estas duas equações.

328. 4.° Este methodo suppõem a equação desembaraçada de radicaes relativamente a y'. Suppondo-a porém resolvida em ordem a y', pode ainda servir o que fica exposto para obter a solução singular. Com effeito, se derivarmos a equação (1) em ordem a y, e em ordem a x, considerando y' como funcção d'estas variaveis, teremos

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

que dão
$$\frac{dy'}{dy} = - \frac{\frac{dV}{dy}}{\frac{dV}{dy'}}, \quad \frac{dy'}{dx} = - \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dy'}}:$$

e como na curva de contacto é $\frac{dV}{dy'} = 0$, devem ser

$$\frac{dy'}{dy} = \infty, \quad \frac{dy'}{dx} = \infty.$$

Seja ainda, por exemplo, a equação

$$y = xy' + a\sqrt{y'^2 + 1},$$

que é a do n.° 324 e do n.° 327, ex. III.

Teremos
$$\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{x+\frac{ay'}{\sqrt{y'^2+1}}}.$$

Depois, eliminando y' entre a proposta e $\frac{dy'}{dy}=\infty$, isto é, entre as equações

$$y=xy'+a\sqrt{y'^2+1},\ x\sqrt{y'^2+1}+ay'=0,$$

ou
$$xy+a^2y'=x^2y',\ x^2(y'^2+1)=a^2y'^2,$$

acharemos
$$x^2+y^2=a^2.$$

Nesta solução singular confirma-se a interpretação geometrica que temos dado a taes soluções.

Com effeito a primitiva geral da equação proposta é

$$y=cx+a\sqrt{c^2+1}.$$

E como (*Geom. Anal.*, n.º 39, 3.º) esta equação pertence a uma recta tangente ao circulo de raio a, cujo centro está na origem das coordenadas, vê-se que a solução singular $x^2+y^2=a^2$ é a equação do circulo tangente a todas as rectas comprehendidas no integral geral $y=cx+a\sqrt{c^2+1}$, conformemente com o que tinhamos dito.

329. Os differentes processos, que ficam expostos, fundam-se em propriedades pertencentes ás soluções singulares: mas não examinámos ainda se algum d'elles depende de propriedades exclusivas e caracteristicas d'estas soluções. É o que vamos fazer.

Supponhamos que $y=X$ satisfaz a uma equação proposta $y'=F(x,y)$, sendo X uma funcção dada de x, sem constante arbitraria; de maneira que tenhamos

$$X'=F(x,X)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Procuremos conhecer se $y = X$ *é uma solução singular, ou se é um integral particular da proposta:*

Seja $y = \psi(x, a)$ o integral completo de $y' = F(x, y)$, designando a a constante arbitraria. Se $y = X$ é um caso particular do integral $y = \psi(x, a)$, isto é, se $\psi(x, a)$ se torna em X quando se attribue a a um certo valor b, deve $\psi(x, a) - X$ ser zero quando $a = b$, e por conseguinte ser divisivel por $a - b$.

Portanto $$\psi(x, a) - X = (a - b)^m z,$$

sendo m a mais alta potencia de $a - b$, e z uma funcção de x e a, que não se torna nulla nem infinita quando $a = b$.

Representemos $(a - b)^m$ por c: o integral completo de $y' = F(x, y)$ será assim

$$y = X + cz.$$

Substituindo este valor de y em $y' = F(x, y)$, resultará a relação identica

$$X' + cz' = F(x, X + cz).$$

Ora, por uma parte, como $c = 0$ não torna z infinito nem nullo, o desenvolvimento de z em ordem a c tem a fórma (n.º 60)

$$z = K + Ac^{\alpha} + Bc^{\beta} + \ldots,$$

sendo α, β, ... expoentes crescentes e positivos, e K, A, B, ... funcções de x; o que dá

$$X' + cz' = X' + K'c + A'c^{\alpha + 1} + \ldots$$

Por outra parte o desenvolvimento de $F(x, X + cz)$ deve egualmente ser

$$F(x, X + cz) = F(x, X) + Nc^n z^n + Mc^m z^m + \ldots,$$

sendo n, m, ... expoentes crescentes e positivos, e M, N, ... funcções de x. E é facil determinar, tanto os expoentes m, n,... d'esta serie, como os coefficientes M, N,....

Substituindo pois estes desenvolvimentos de z e F em

$$X' + cz' = F(x, X + cz),$$

teremos, attendendo á equação (5),

$$K'c + A'c^{\alpha+1} + \ldots = Nc^n (K + Ac^\alpha + \ldots)^n$$

$$+ Mc^m (K + Ac^\alpha + \ldots)^m$$

$$+ \text{etc.}$$

Tracta-se agora de saber se é possivel determinar os coefficientes A, B,.... e os expoente α, β,.... de modo que tornem esta equação identica: porque, se isso não for possivel, $y = X$ será uma solução singular; mas se o for, teremos então um integral particular.

Offerecem-se tres casos:

1.° Se $n > 1$, não ha termo similhante que se possa reduzir com $K'c$. Faremos pois $K' = 0$, ou $K = \text{const.}$: poremos $\alpha + 1 = n$, $A' = NK^n$, o que determinará $\alpha = n - 1$ e $A = \int NK^n dx$; e assim dos outros termos. Portanto a identidade é sempre possivel neste caso, e $y = X$ é um integral particular.

2.° Se $n = 1$, o mesmo tem logar. Porque, pondo $K' = NK$, teremos $lK = \int N dx$. Será pois facil ordenar os dois membros; e, comparando entre si os expoentes e coefficientes respectivos dos termos da mesma ordem, determinaremos os expoentes α, β,... e os coefficientes K, A, B,...

3.° Em fim, se $n < 1$, não haverá termo similhante que se reduza com Nc^nK^n, por não haver no primeiro membro expoente de c que seja < 1: logo, como K não pode ser nullo, será impossivel satisfazer á identidade; e conseguintemente $y = X$ será uma solução singular.

330. Como acabamos de ver que $y = X$ é uma solução singular, quando $n < 1$, segue-se que então, pondo $X + cz$ em logar de y, o desenvolvimento de $F(x, y)$, effectuado pelo theorema de Taylor, deve ser defeituoso entre o 1.° e 2.° termo; portanto a derivada de $F(x, y)$ em ordem á y deve ser infinita (n.º 58, 2.º). Reciprocamente, um valor $y = X$, que satisfizer a $y' = F(x, y)$ e tornar $\frac{dF}{dy}$ infinito, será uma solução singular; porque dará ao desenvolvimento de $F(x, X + cz)$ a fórma $X' + Nc^n K^n \ldots$, n sendo < 1.

Logo a condição $\frac{dF}{dy} = \infty$, ou $\frac{dy'}{dy} = \infty$, exprime o verdadeiro caracter das soluções singulares; e vê-se que, para que ella se verifique, deve a funcção F, se for algebrica, conter um radical, que a hypothese $y = X$ fará desapparecer (n.º 57, 2.º).

Poderemos pois obter as soluções singulares, sem conhecer o integral completo, tirando $\frac{dy'}{dy}$ *da equação differencial, e egualando ao infinito.*

Seja
$$\frac{dy'}{dy} = \frac{U}{T}.$$

Faremos $T = 0$, ou $U = \infty$; e, d'entre os factores d'estas equações, os resultados, que satisfazem tambem a $y' = F(x, y)$, serão as soluções singulares.

Exemplos

I. No exemplo VI do n.º 323 é

$$y' = \frac{x\left(y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - b}\right)}{x^2 - b}, \quad \frac{dy'}{dy} = \frac{x}{x^2 - b}\left(1 \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}}\right);$$

e esta ultima fracção torna-se infinita em virtude da solução singular $y^2 = b - x^2$.

II. Em $y' = a(y - n)^k$ a condição $ak(y - n)^{k-1} = \infty$ exige que seja $k < 1$ e $y = n$. E como $y = n$ só satisfaz á proposta quando k é positivo, segue-se que esta não é susceptivel de solução singular senão quando k está entre 0 e 1; sendo nesse caso $y = n$ aquella solução.

O integral completo é
$$\frac{(y - n)^{1-k}}{1 - k} = ax + c.$$

331. Para applicar o theorema, que fica demonstrado, não é necessario resolver a proposta em ordem a y', porque, segundo o que vimos no n.º **328**, temos

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{\dfrac{dV}{dy}}{\dfrac{dV}{dy'}};$$

e por isso, se for $\dfrac{dV}{dy} = \infty$, ou $\dfrac{dV}{dy'} = 0$, verificar-se-ha a condição caracteristica das soluções singulares.

Mas, se forem $\dfrac{dV}{dy}$ e $\dfrac{dV}{dy'}$ nullos ou infinitos ao mesmo tempo, procuraremos, pelo processo ensinado no calculo differencial, o valor da fracção $\dfrac{\dfrac{dV}{dy}}{\dfrac{dV}{dy'}}$; e, segundo sahir este valor infinito ou finito, assim haverá ou não haverá soluções singulares.

Constantes arbitrarias; e integração das equações differenciaes de qualquer ordem pelas series

332. Seja $$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a equação differencial proposta da ordem n.

Se de $F = 0$ e das suas differenciaes successivas tirarmos as expressões de $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}, \ldots$, e fizermos nellas $x = 0$, teremos $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}, \ldots$ expressas em $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$; e, substituindo-as na formula de Maclaurin

$$y = y_0 + xy'_0 + \ldots \frac{x^{n-1}}{1.2.(n-1)} y_0^{(n-1)} + \frac{x^n}{1.2\ldots n} y_0^{(n)} + \ldots (2),$$

será este o integral da proposta, o qual conterá as n constantes arbitrarias $y_0, y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$.

333. Este modo de integração não se pode empregar quando a hythese $x = 0$ torna infinitas algumas das funcções $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$; porque é então insufficiente a formula de Maclaurin.

Nesse caso tomemos por a na serie de Taylor,

$$f(a+h) = fa + hf'a + \frac{1}{2} h^2 f''a + \ldots,$$

uma quantidade tal que a hypothese $a = 0$ não torne infinita nenhuma das expressões $fa, f'a, \ldots$ Depois, pondo $h = x - a$, teremos

$$y = y_a + (x-a) y'_a + \ldots \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.(n-1)} y_a^{(n-1)} + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} y_a^{(n)} + \ldots (3).$$

O mesmo processo acima empregado dará $y_a^{(n)}$, $y_a^{(n+1)}$,... expressos em $y_a, y'_a \ldots y_a^{(n-1)}$; e (3) será o integral da proposta (1), com as n constantes arbitrarias $y_a, y_a' \ldots y_a^{(n-1)}$.

D'onde podemos concluir que:

1.º *Sempre ha uma serie que é integral de qualquer equação differencial proposta entre duas variaveis; e sabemos o modo de achar esta serie, não tendo que vencer senão as difficuldades que o calculo apresentar.*

2.º *O integral contém sempre um numero de constantes arbitrarias egual á ordem da derivada.*

Esta consequencia, posto que fundada na theoria das series, tem no entretanto todo o rigor que se pode desejar; por quanto, se uma serie é o desenvolvimento d'uma expressão finita $y=fx$, deve essa expressão conter tantas constantes arbitrarias quantas contém a serie.

3.º *De qualquer modo que se houver chegado a uma equação integral, que tenha o numero de constantes arbitrarias exigido pela ordem da differencial, esta equação integral será a primitiva da proposta, e nella se conterá outro qualquer integral, que tambem lhe satisfizer e tiver o mesmo numero de constantes arbitrarias.*

334. Fazendo $h=-x$ nas equações

$$f(x+h)=y+hy'+\frac{1}{2}h^2y''+\ldots$$

....

$$f^{(n-1)}(x+h)=y^{(n-1)}+hy^{(n)}+\frac{1}{2}h^2y^{(n+1)}+\ldots,$$

teremos:

$$f(0)=y-xy'+\frac{1}{2}x^2y''-\ldots.$$

....

$$f^{(n-1)}(0)=y^{(n-1)}-xy^{(n)}+\frac{1}{2}x^2y^{(n+1)}-\ldots.$$

E, substituindo nestas n equações as expressões de $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$... tiradas de (1) e de suas derivadas, a eliminação de y', y'',...$y^{(n-1)}$ entre ellas dará uma resultante em x e y, com as n constantes arbitrarias $f(0)$, $f'(0)$,....$f^{(n-1)}(0)$.

Logo: *uma equação differencial da ordem* n *tem* n *integraes da ordem* n — 1.

Se estes n integraes forem conhecidos, a eliminação das $n-1$ primeiras derivadas entre elles dará o integral finito.

Se forem conhecidos só $n-i$ integraes da ordem $n-1$, a eliminação das $n-i-1$ derivadas $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$,... $y^{(i+1)}$ entre elles reduzirá a resolução do problema a integrar a resultante da ordem (i).

Exemplos

I. Da equação $$y'+y+x^3=0$$

tiram-se

$$y'=-y-x^3,\ y''=-y'-3x^2,\ y'''=-y''-6x,$$

$$y^{\text{IV}}=-y'''-6,\ldots y^{(4+i)}=(-1)^i y^{(4)};$$

e por conseguinte

$$y_0'=-y_0,\ y_0''=y_0,\ y_0'''=-y_0,\ldots y_0^{(4+i)}=(-1)^i(y_0-6);$$

o que substituindo na formula (2) dá

$$y=y_0\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2.3}x^3\right)+(y_0-6)\sum_0^\infty(-1)^i\frac{x^{4+i}}{2.3\ldots(4+i)}.$$

II. Á equação $$xy'+y+x^2=0,$$

da qual se tiram

$$y' = -\frac{y}{x} - x,\ y'' = \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} - 1,\ y''' = -\frac{2y}{x^3} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{y'y''}{x}, \ldots,$$

não se pode applicar a serie (2), porque $x = 0$ torna y' infinita.

Mas, para $x = a$, tiram-se d'estas expressões

$$y'_a = -\frac{y_a}{a} - a,\ y''_a = \frac{2y_a}{a^2},\ y'''_a = -\frac{6y_a}{a^3} - \frac{2}{a}, \ldots,$$

que substituidas em (3) darão o integral pedido.

III. Seja a equação $\qquad xy'' + y = 0.$

Como d'ella se tiram

$$y'' = -\frac{y}{x},\ y''' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2},\ y^{\text{IV}} = -\frac{y''}{x} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3}, \ldots,$$

que $x = 0$ torna, em geral, infinitas, poremos nestas $x = a$, e substituiremos em (3) para obter o integral.

Mas, no caso particular de ser $y_0 = 0$, as derivadas da proposta, não resolvida, $xy''' + y'' + y' = 0$, $xy^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0$, $xy^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} + y''' = 0, \ldots$

dariam $\qquad y''_0 = -y'_0,\ y'''_0 = \frac{1}{2} y'_0,\ y^{\text{IV}}_0 = -\frac{1}{2.3} y'_0, \ldots,$

de cuja substituição em (2) resultaria o integral

$$y = y_0'\left(x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} - \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \ldots\right) = C_1 Y_1.$$

Este integral é um integral particular, por não conter duas constantes; mas pode completar-se do modo seguinte.

É claro que podemos em $y = C_1 Y_1$ considerar C_1 como variavel, comtanto que a substituição na equação differencial dê o mesmo que se C_1 fosse constante.

Applicando isto á equação proposta, que é linear da segunda ordem,

teremos $$xC_1 Y''_1 + C_1 Y_1 + x(2C'_1 Y'_1 + C''_1 Y_1) = 0,$$

a qual coincidirá com a relativa a C_1 constante, pondo $2C'_1 Y'_1 + C''_1 Y_1 = 0$.

E como, multiplicando por $\dfrac{1}{C'_1 Y_1}$, o integral primeiro d'esta equação, ou de $\dfrac{2dY_1}{Y_1} + \dfrac{dC'_1}{C'_1} = 0$, é $\log C'_1 Y_1{}^2 = \log c_1$, ou $C'_1 = \dfrac{c_1}{Y_1{}^2} = \dfrac{dC_1}{dx}$,

será $$C_1 = c_1 \int \frac{dx}{Y_1{}^2} + c_2;$$

por conseguinte $$y = Y_1\left(c_1 \int \frac{dx}{Y_1{}^2} + c_2\right),$$

com as duas constantes c_1, c_2.

O methodo de que acabamos de servir-nos, e que se chama *methodo da variação das constantes arbitrarias, ou da variação dos parametros,* é muitas vezes empregado na integração das equações differenciaes.

335. A theoria que acabamos de expôr, ainda que demonstrada completamente, nem sempre é propria para fazer conhecer o integral approximado, a não se recorrer a transformações que reduzam a funcção ao estado necessario para se lhe poderem applicar os principios precedentes.

O methodo dos coefficientes indeterminados é ordinariamente mais util, principalmente se o integral deve proceder segundo as potencias fraccionarias ou negativas de x.

Façamos $$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

sendo a, b, c, expoentes, que tractaremos de determinar, assim como os coefficientes A, B, C, . . .

Para isso tiraremos de (4) as expressões de y', y'',... e substituil-as-hemos na derivada proposta, que por esta substituição se deverá tornar identica; depois, ordenando relativamente a x, e comparando termo a termo as potencias da mesma ordem, e seus coefficientes, do mesmo modo que na pag. 280 da *Alg. Sup.*, determinaremos A, a, B, b,...

Exemplos

I. Para
$$(1+y')\,y=1,$$
teremos
$$(1+\mathrm{A}ax^{a-1}+\mathrm{B}bx^{b-1}+\ldots)(\mathrm{A}x^a+\mathrm{B}x^b+\ldots)=1;$$
o que dá
$$\left.\begin{array}{llll} \mathrm{A}^2ax^{2a-1} & +\mathrm{AB}ax^{a+b-1} & +\mathrm{AC}ax^{a+c-1} & +\ldots \\ & +\mathrm{AB}bx^{a+b-1} & +\mathrm{B}^2bx^{2b-1} & +\ldots \\ & & +\mathrm{AC}x^{a+c-1} & +\ldots \\ -1 & +\mathrm{A}x^a & +\mathrm{B}x^b & +\ldots \end{array}\right\}=0;$$
por conseguinte
$$2a-1=0,\ a+b-1=a,\ a+c-1=b=2b-1,\ldots$$
ou
$$a=\frac{1}{2},\qquad b=1,\qquad c=\frac{3}{2}\ldots;$$
e depois
$$\mathrm{A}^2a=1,\qquad \mathrm{AB}\,(a+b)+\mathrm{A}=0,$$
ou
$$\mathrm{A}=\sqrt{2},\quad \mathrm{B}=-\frac{2}{3},\ \mathrm{C}=\frac{1}{18}\sqrt{2}\ldots$$

Finalmente, substituindo na serie, teremos o integral
$$y=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{2}}+\frac{1}{18}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\ldots$$

Se tivessemos presumido que a lei dos expoentes fosse $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, poderiamos logo empregal-a na serie (4), o que simplificaria os calculos; e tambem poderiamos applicar a serie de Maclaurin, fazendo $x = z^2$.

Pelo mesmo processo se pode ver que a equação

$$dy + ydx = ax^m\,dx$$

dá

$$\frac{y}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{(m+1)\ldots(m+3)} - \ldots$$

336. O integral assim obtido não é geral, porque lhe falta a constante arbitraria; mas, se na equação differencial proposta mudarmos x em $z+a$ e y em $t+b$, e desenvolvermos t em z, de modo que a $z=0$ corresponda $t=0$, acharemos o integral pedido substituindo neste desenvolvimento $x-a$ em logar de z e $y-b$ em logar de t. Das constantes a, b, só uma será arbitraria, porque a condição de ser $t=0$ quando é $z=0$, em $t=\mathrm{F}(a, b, z)$, dá uma relação entre a e b.

Nas ordens superiores completam-se tambem os integraes particulares do modo que adiante exporemos.

II. Seja a equação $\quad y'' = kx^n y.$

A substituição de $\quad y = \mathrm{A}_1 x^{\alpha_1} + \mathrm{A}_2 x^{\alpha_2} + \ldots = \Sigma \mathrm{A}_i x^{\alpha_i}$

dá

$$\Sigma \alpha_i(\alpha_i - 1)\mathrm{A}_i x^{\alpha_i - 2} = \Sigma k \mathrm{A}_i x^{\alpha_i + n},$$

á qual se satisfaz, pondo

$$\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0,\ \alpha_i = \alpha_{i-1} + n + 2,\ \alpha_i(\alpha_i - 1)\mathrm{A}_i = k\mathrm{A}_{i-1};$$

ou, por formarem assim $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ uma progressão arithmetica cuja razão é $n+2$,

$$\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0,\ \alpha_i = \alpha_1 + i(n+2),\ \alpha_i(\alpha_i - 1)\mathrm{A}_i = k\mathrm{A}_{i-1} \ldots (a).$$

As duas primeiras condições (a) darão α_i; a terceira fará depender A_i de A_1, que ficará sendo a constante arbitraria.

Aos valores $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, corresponderão as duas series

$$y = C_1X_1, \ y = C_2X_2.$$

Ora é evidente que, se as substituições de $y = C_1X_1$, $y = C_2X_2, \ldots$ em uma equação linear relativamente a y e suas derivadas, a reduzem a uma identidade, o mesmo deve acontecer á substituição de $y = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots$; por isso que, sendo M_1, $M_2, \ldots$ os resultados d'aquellas substituições, o d'esta é $M_1 + M_2 + \ldots$. O integral completo será pois

$$y = C_1X_1 + C_2X_2.$$

III. As equações $\quad y'' + xy = 0, \ y'' + \dfrac{y}{x} = 0,$

são casos particulares da precedente; para o primeiro dos quaes é $k = -1$ e $n = 1$; e para o segundo é $k = -1$ e $n = -1$.

Mas os integraes particulares da segunda correspondentes a $\alpha_1 = 0$ tornam-se infinitos em virtude de $n = -1$; subsistindo por isso só os integraes particulares correspondentes a $\alpha_1 = 1$.

337. Tambem se podem achar os integraes approximados por meio das fracções continuas.

Supponhamos $\quad y = Ax^a, \ Bx^b, \ Cx^c, \ldots,$

isto é, $\quad y = \dfrac{Ax^a}{1+z}, \ z = \dfrac{Bx^b}{1+u}, \ u = \dfrac{Cx^c}{1+t}, \ldots$

Como A, a, B, $b, \ldots$ devem ficar os mesmos quando x se suppõem infinitesimo, substituiremos Ax^a em logar de y, e a comparação dará A e a; depois faremos $y = \dfrac{Ax^a}{1+z}$ substituindo Bx^b em logar de z, e a comparação dará B, b; depois na equação em z faremos $z = \dfrac{Bx^b}{1+u}$, e em logar de u

substituiremos Cx^c; e assim por diante, levando a approximação até onde quizermos.

Seja por exemplo $my + (1+x)y' = 0.$

Fazendo $y = Ax^a$, resultará $$(m+a) \,.\, Ax^a + a \,.\, Ax^{a-1} = 0;$$

logo $a = 0$, e A fica indeterminado.

Fazendo depois $y = \frac{A}{1+z}$, teremos $$m(1+z) = (1+x)z',$$

que, pondo $z = Bx^b$, se torna em $$m + Bx^b(m-b) = bBx^{b-1};$$
logo $b = 1$, $B = m$.

Fazendo depois $z = \frac{mx}{1+t}, \ldots$ e continuando successivamente do mesmo modo, acharemos o integral em fracção contínua,

$$y = A,\ mx,\ -\frac{1}{2}(m-1)x,\ \frac{1}{6}(m+1)x,\ -\frac{1}{6}(m-2)x, \ldots$$

Como por outra parte a integração da proposta dá tambem

$$m \log(1+x) + \log y = \log A, \text{ ou } y = A(1+x)^{-m},$$

teremos assim o desenvolvimento d'esta funcção em fracção contínua, que poderemos reduzir á fórma de serie. (*Alg. Sup.*, pag. 202, nota).

Pelo mesmo processo acharemos para integral da equação

$$dx = (1+x^2)\,dy,$$

$$y = \text{arc}\,(\text{tang} = x) = x,\ \frac{x^2}{3},\ \frac{(2x)^2}{3.5},\ \frac{(3x)^2}{5.7},\ \frac{(4x)^2}{7.9}, \ldots,$$

Para maior desenvolvimento d'esta materia pode consultar-se o tomo 2.º n.º 598 do *Calculo Integral* de Lacroix.

Da construcção das equações differenciaes

338. Quando a equação differencial proposta pertence a uma curva, pode ser conveniente construir essa curva, sem integrar a equação; para o que se operará do modo seguinte:

Supponhamos primeiramente que a equação é da primeira ordem

$$F(x, y, y')=0;$$

e concebamos que a constante é determinada pela condição de ser $y=b$, quando $x=a$. Tomando $AB=a$, $BC=b$ (Fig. 54), marcaremos o ponto C sobre a curva procurada. Substituindo depois $x=a$, $y=b$ em $F=0$, tiraremos d'esta equação o valor de y', que fixará a direcção da tangente KC no ponto C. Tomemos sobre ella um ponto D tão visinho de C, que sem erro consideravel se possa suppôr a recta CD confundida com o arco da curva; $AF=a'$, $FD=b'$, serão as coordenadas d'um segundo ponto D da curva: e fazendo $x=a'$, $y=b'$, na equação, teremos o valor correspondente de y', que dará a direcção da tangente IE, um pouco afastada da primeira. Continuaremos a operar do mesmo modo para um terceiro ponto, e assim por diante, de maneira que a curva ficará substituida por um polygono CDEZ que se approximará tanto mais d'ella quanto mais vizinhos se tomarem os pontos B, D, E,...

Tambem se poderia discorrer do modo seguinte. Tirando da equação $F=0$ e sua derivada as expressões de y' e y'', e substituindo nellas a e b em logar de x e y, achariamos a direcção da tangente e o raio R de curvatura no ponto C (n.os 105 e 118). Traçando depois a tangente KC, levantando-lhe a perpendicular $CN=R$, e descrevendo do ponto N como centro, e com este raio, um pequeno arco de circulo CD, considerariamos o ponto D, cujas coordenadas a' e b' differem muito pouco de a e b, como um ponto da curva. Neste ponto tirariamos a tangente ID, e o raio de curvatura DO, etc. Substituiriamos assim á curva um systema de arcos de circulo contiguos. É claro que nesta construcção o erro seria menor do que usando das tangentes, de sorte que, para obter o mesmo grâu de approximação não seria necessario tomar os pontos C, D, E,... tão vizinhos uns dos outros; o que tornaria as construcções menos trabalhosas.

A cada ponto arbitrario de partida (a, b) corresponderá uma curva; e por isso a primitiva, cuja derivada deve representar todas estas curvas, terá uma constante arbitraria.

339. Se a equação differencial proposta é da segunda ordem

$$F(x, y', y'') = 0,$$

escolheremos um ponto arbitrario C para um dos da curva, e tambem uma recta arbitraria KC para tangente; condições estas, que determinarão as duas constantes. Depois tiraremos da equação o valor de y''; com y' e y'' acharemos o raio de curvatura, e descreveremos o pequeno arco CD, do mesmo modo que precedentemente: e suppondo então que o ponto D d'este arco pertence á curva, tiraremos n'elle a normal conduzindo a recta DN do primeiro centro N para D. Teremos assim no segundo ponto as duas coordenadas a', b', e o valor de y', dado pela direcção da tangente ID: com estes dados calcularemos y'' e o raio R'; e tomando OD = R', descreveremos o arco DE: o que determinará um terceiro ponto E, no qual se conhecerá a direcção da normal, e as coordenadas. E assim por diante.

Por meio d'um raciocinio similhante poderiamos substituir á curva uma serie de parabolas osculatrizes,

$$y - b = A(x - a) + B(x - a)^2,$$

pondo em logar de A o valor de y' que se tomou arbitrariamente, e em logar de B o valor de $\frac{1}{2}y''$ tirado da equação da curva.

A cada ponto arbitrario de partida (a, b) corresponderá um systema de curvas que diffirirão entre si em virtude dos valores arbitrarios da derivada b'; e por isso a primitiva, cuja derivada deve representar todos estes systemas de curvas, terá duas constantes arbitrarias.

Tambem se poderiam applicar estes principios ás equações differenciaes da terceira ordem; mas então, além d'um ponto C e da tangente KC, tomar-se-ia tambem arbitrariamente o raio CN do circulo osculador neste primeiro ponto, o que determinaria as tres constantes arbitrarias. Depois não se poderia substituir á curva senão uma serie de parabolas, cujo contacto fosse da terceira ordem. O mesmo se dirá das ordens superiores.

Do que fica dicto podemos concluir que: *uma equação differencial entre duas variaveis se pode construir por meio d'uma curva, que tem tantos parametros variaveis, quantas são as unidades da ordem da equação.* O que concorda com o n.º 333, onde se provou que esta equação tem sempre um integral.

Das equações das ordens superiores; e especialmente da segunda ordem

340. Comecemos pelas equações da segunda ordem

$$F(y'', y', y, x) = 0;$$

e entre ellas pelos casos particulares:

$$F(y'', x) = 0, \ F(y'', y') = 0, \ F(y'', y) = 0,$$

$$F(y'', y', x) = 0, \ F(y'', y', y) = 0,$$

nos quaes entram só uma ou duas das quantidades y', y, x.

341. I. Seja $F(y'', x) = 0.$

Resolvendo em ordem a y'', e attendendo a que são $y'' = \frac{dy'}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dx}$, acham-se

$$y'' = fx, \ y' = \int fx dx + c_1, \ y = \int dx \int fx dx + c_1 x + c_2,$$

sendo c_1 e c_2 duas constantes arbitrarias.

E, em geral, $F(y^{(n)}, x)$

resolvida em ordem a $y^{(n)}$, dará

$$y^{(n)} = fx,\ y^{(n-1)} = \int fx dx + c_1, \ldots y = \int^{(n)} fx dx + \sum_1^n c_{n-i+1} x^{i-1},$$

indicando $\int^{(n)}$ que devem fazer-se n integrações successivas.

Exemplo

$$y'' = ax^n$$

dá $$y' = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c_1,\ y = \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + c_1 x + c_2.$$

E nos casos particulares de $n = -1$, $n = -2$:

$$n = -1, \qquad y' = alx + C,\ y = a(xlx - x) + Cx + c_2 = axlx + c_1 x + c_2;$$

$$n = -2, \qquad y' = -\frac{a}{x} + c_1,\ y = -alx + c_1 x + c_2.$$

II. Seja $$F(y'', y') = 0.$$

Substituindo $\frac{dy'}{dx}$ em logar de y'', e resolvendo em ordem a dx, teremos

$$dx = fy'dy',\ dy = y'dx = y'fy'dy',$$

entre cujos integraes

$$x = \int fy'dy' + c_1,\ y = \int y'fy'dy' + c_2,$$

eliminando y', virá a primitiva, com as constantes c_1 e c_2.

Em geral
$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$$

substituindo $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$ em logar de $y^{(n)}$, dará

$$dx = fy^{(n-1)}dy^{(n-1)}, \ x = \int fy^{(n-1)}dy^{(n-1)} + c;$$

depois successivamente desde $n-2$ até 0, isto é, desde $y^{(n-2)}$ até y, teremos

$$y^{(i)} = \int y^{(i+1)}dx = \int y^{(i+1)} fy^{(n-1)}dy^{(n-1)};$$

e finalmente, eliminando $y^{(n-1)}$ entre as expressões de y e x, virá a primitiva com as n constantes dos integraes successivos x, $y^{(n-1)}, \ldots y$.

Exemplo

$$ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

dá
$$dx = -\frac{ady'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \ dy = -\frac{ay'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

entre cujos integraes,
$$x = c_1 - \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}, \ y = c_2 + \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}},$$

eliminando y', resulta a primitiva

$$(c_1 - x)^2 + (c_2 - y)^2 = a^2.$$

Como se suppoz a constante, vê-se que o circulo, e só elle, tem a propriedade de ser constante o seu raio de curvatura.

III. Seja $$F(y'', y) = 0.$$

Resolvendo em ordem a y'', e substituindo em $y'dy' = y''dy$, que se tira de $dy' = y''dx$ e $dy = y'dx$, resultam:

$$y'' = fy,\ y'dy' = fydy,\ y' = \sqrt{2\int fydy},\ x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int fydy}},$$

com as constantes arbitrarias das duas integrações.

Em geral, $$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

resolvendo em ordem a $y^{(n)}$, e substituindo em $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$, que se tira de $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ e $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$, dá

$$y^{(n)} = fy^{(n-2)},\ y^{(n-1)} = \sqrt{2\int fy^{(n-2)}dy^{(n-2)}},\ \text{ou}\ \varphi(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

que está no caso (II).

Tambem se pode eliminar $y^{(n)}$ entre a proposta e $d^2y^{(n-2)} = y^{(n)}dx^2$, que se tira de $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ e $d^2y^{(n-2)} = dy^{(n-1)}dx = y^{(n)}dx^2$, reduzindo assim a proposta a

$$F\left(\frac{d^2y^{(n-2)}}{dx^2}, y^{(n-2)}\right) = 0;$$

e esta dá $$x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int fy^{(n-2)}dy^{(n-2)}}},\ \text{ou}\ \varphi(y^{(n-2)}, x) = 0,$$

que está no caso I.

Exemplos

1.º $$a^2y' + y = 0$$

dá

$$y'' = fy = -\frac{y}{a^2},\ 2\int fy\,dy = \frac{C^2-y^2}{a^2},\ x = \int \frac{a\,dy}{\sqrt{C^2-y^2}} = a \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{y}{C}\right) + C',$$

que equivale a $$y = c_1 \operatorname{sen}\frac{x}{a} + c_2 \cos\frac{x}{a}.$$

2.º $$y''\sqrt{ay} - 1 = 0$$

dá $$y'' = fy = \frac{1}{\sqrt{ay}},\ 2\int fy\,dy = 4\frac{\sqrt{y}+c_1}{\sqrt{a}},\ x = \int \frac{\sqrt[4]{a}\,dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+c_1}},$$

que, pondo $\sqrt{y} + c_1 = z^2$, é

$$x = \sqrt[4]{a}\left(\frac{2}{3}z^3 - 2c_1 z\right) + c_2 = \frac{2}{3}\sqrt[4]{a}\sqrt{c_1 + \sqrt{y}}\,(\sqrt{y} - 2c_1) + c_2.$$

IV. Seja $$F(y'', y', x) = 0.$$

Substituindo $\frac{dy'}{dx}$ em logar de y'', reduz-se a proposta a uma equação differencial de primeira ordem em y' e x, cujo integral será o pedido.

Em geral $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, x) = 0,$$

substituindo $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$ em logar de $y^{(n)}$, reduz-se a uma equação differencial de primeira ordem em $y^{(n-1)}$ e x; e, eliminando x entre o integral d'esta e a proposta, obtem-se uma resultante $\varphi(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$, que está no caso II.

Exemplos

1.° $$2x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = a^2 y''$$

reduz-se a $2xdx = \dfrac{a^2 dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, cujo integral é $x^2 + c_1 = \dfrac{a^2 y'}{\sqrt{1+y'^2}}$;

e depois acha-se $y = \int y'dx = \int \dfrac{(x^2+c_1)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2+c_1)^2}}$.

Assim a fórma da linha na qual os raios de curvatura, $\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, são $\dfrac{a^2}{2x}$, inversamente proporcionaes ás abscissas, é a que dá uma **lamina** *elastica* quando se curva.

A equação mais geral $$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = fx$$

daria, pelo mesmo processo,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{fx} = \mathrm{V},\ y = \int \frac{\mathrm{V}dx}{\sqrt{1-\mathrm{V}^2}}.$$

Tal é a solução do *problema inverso dos raios de curvatura.*

2.° $$(1+y'^2) + xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}$$

reduz-se a $\quad dx(1+y'^2)+xy'dy'=ady'\sqrt{1+y'^2},$

que é linear e, dividindo por $\sqrt{1+y'^2}$, dá o integral

$$x=\frac{ay'+c_1}{\sqrt{1+y'^2}};$$

e depois $\quad y=\int y'dx=y'x-\int xdy'=y'x-\int\frac{(ay'+c_1)\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$

$$=y'x-a\sqrt{1+y'^2}-c_1\,l\,\frac{y'+\sqrt{1+y'^2}}{c_2}$$

$$=\frac{c_1y'-a}{\sqrt{1+y'^2}}-c_1\,l\,\frac{y'+\sqrt{1+y'^2}}{c_2}.$$

Finalmente, eliminando y' entre as expressões de x e y, e pondo

$$z=\sqrt{a^2+c_1^2-x^2},$$

acha-se $\quad z=\sqrt{a^2+c_1^2-x^2},\ y=z-c_1\,l\,\frac{x+a}{c_2(c_1-z)}.$

3.° A equação $\quad 2(a^2y'^2+x^2)\,y''=xy',$

substituindo $\frac{dy'}{dx}$ em logar de y'', é uma differencial homogenea, que, pondo $x=y'z$, se transforma na separada $\frac{dy'}{y'}=\frac{zdz}{2a^2+z^2}$; e integrando successivamente, vem

$$l\,y' = l\,c_1\sqrt{2a^2 + z^2},\quad x = c_1 z\sqrt{2a^2 + z^2},$$

$$y = \int y'dx = \frac{2}{3}\,c_1{}^2 z\,(3a^2 + z^2) + c_2.$$

O systema das expressões de x e y, ou antes a resultante da eliminação de z entre ellas, será o integral procurado.

V. Seja $$F(y'', y', y) = 0.$$

Substituindo $y'' = \frac{y'dy'}{dy}$, a equação reduz-se a uma differencial da primeira ordem entre y e y'; depois substituindo $y' = \frac{dy}{dx}$ no integral d'esta, e integrando, obter-se-ha o integral finito.

Ou tambem, resolvendo o primeiro integral em ordem a y, differenciando, e substituindo em $x = \int \frac{dy}{y'}$, a eliminação de y' entre as duas expressões de x e y dará o integral pedido.

Em geral $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

substituindo $\frac{y^{(n-1)}dy^{(n-1)}}{dy^{(n-2)}}$ em logar de $y^{(n)}$, reduz-se a uma differencial de primeira ordem entre $y^{(n-1)}$ e $y^{(n-2)}$; e eliminando $y^{(n-1)}$ ou $y^{(n-2)}$ entre o integral d'ella e a proposta, fica-se no caso III ou no caso II.

Exemplos

1.º $$y''(yy' + a) = y'(1 + y'^2),$$

substituindo $y'' = \frac{y'dy'}{dy}$, e integrando (n.º 313, II), dá

$$y = ay' + c_1\sqrt{1+y'^2},$$

e depois

$$x = \int\frac{dy}{y'} = \int\frac{ady'}{y'} + \int\frac{c_1dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = alc_2y' + c_1 l(y' + \sqrt{1+y'^2});$$

restando finalmente eliminar y' entre estas expressões.

No caso de ser $c_1 = 0$, a eliminação dá

$$x = al\frac{c_2y}{a}, \text{ ou } y = \frac{a}{c_2}e^{\frac{x}{a}} = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

2.º $$aby'' = \sqrt{y^2 + a^2y'^2}$$

reduz-se do mesmo modo a uma differencial homogenea, que a hypothese $y' = \frac{y}{z}$ transforma em

$$abzdy - abydz = z^2dy\sqrt{z^2 + a^2}.$$

Depois, separando e pondo $\sqrt{a^2 + z^2} = tz$,

vem a nova transformada $\frac{dy}{y} = \frac{-btdt}{bt^2 - at - b}$.

Integrando esta, derivando a expressão de y que ella dá, e substituindo em $x = \int \frac{dy}{y'}$, teremos y e x em funcção de t; e depois a eliminação de t dará o integral pedido.

3.º $$y'' + Ay' + B = 0,$$

representando A e B constantes, reduz-se á differencial homogenea

$$y'dy' + Ay'dy + Bydy = 0,$$

na qual pondo $y' = yu$, e chamando a e b as raizes de $u^2 + Au + B = 0$,

virá $$\frac{dy}{y'} = \frac{dy}{yu} = -\frac{du}{u^2 + Au + B} = -\frac{du}{(u-a)(u-b)},$$

e por conseguinte

$$\frac{dy}{y} - adx = \frac{dy}{y} - a\frac{dy}{y'} = -\frac{du}{u-b}, \quad \frac{dy}{y} - bdx = -\frac{du}{u-a},$$

cujos integraes são $y(u-b) = c_1 e^{ax}$, $y(u-a) = c_2 e^{bx}$;

e, eliminando u, vem

$$y(b-a) = c_2 e^{bx} - c_1 e^{ax}, \text{ ou } y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}.$$

No caso de serem a e b imaginarios, da fórma $a = k + h\sqrt{-1}$, $b = k - h\sqrt{-1}$, a substituição no integral dá

$$y = e^{kx}\left(C_1 e^{hx\sqrt{-1}} + C_2 e^{-hx\sqrt{-1}}\right),$$

ou, exprimindo $e^{hx\sqrt{-1}}$ e $e^{-hx\sqrt{-1}}$ em funcções circulares (*Alg. Sup.* n.° 159, eq. (L))

$$y = C'_1 e^{kx} \cos(hx + C'_2).$$

Finalmente, no caso de serem as raizes eguaes, as equações

$$\frac{dy}{y} = -\frac{udu}{(u-a)^2},\ dx = -\frac{du}{(u-a)^2},$$

darão $\quad y(u-a) = c_1 e^{\frac{a}{u-a}},\ x + c_2 = \frac{1}{u-a},$

entre as quaes eliminando $u - a$, virá

$$y = c_1(x + c_2)e^{a(x+c_2)} = C e^{ax}(x + c_2).$$

342. A integração de $\qquad y'' + Py' + Qy = 0,$

representando P e Q funcções de x, faz-se depender da de uma da primeira ordem entre duas variaveis, pondo $y = e^{\int udx}$.

Com effeito esta hypothese dá $y = e^{\int udx}$, $y' = ue^{\int udx}$, $y'' = e^{\int udx}(u' + u^2)$, que transformam a proposta, dividida por $e^{\int udx}$, em

$$u' + u^2 + Pu + Q = 0,$$

da primeira ordem em u e x.

Exemplos

Appliquemos ao exemplo ultimo do numero precedente, isto é, supponhamos P e Q constantes.

É evidente que cada uma das raizes $u=a$ e $u=b$ de $u^2+Pu+Q=0$ satisfaz á transformada, o que dá os integraes particulares da proposta

$$y=e^{\int udx}=e^{ax+m}=c_1 e^{ax},\ y=e^{bx+n}=c_2 e^{bx};\ldots\ldots(1)$$

e a somma d'estes valores $\quad y=c_1 e^{ax}+c_2 e^{bx}$,

por satisfazer (n.º 336, II) á proposta, que é linear, e conter duas constantes arbitrarias c_1, c_2, é o integral completo d'ella.

Quando a e b são imaginarias, este integral, toma, como vimos, a fórma

$$y=C_1 e^{kx}\cos(hx+C_2).$$

Quando são eguaes, é necessario integrar a equação

$$du+(u-a)^2dx=0,$$

o que dá $\quad u-a=\dfrac{1}{x+k},\ \int udx=l(x+k)+ax+D,$

e por conseguinte $\quad y=e^{\int udx}=Ce^{ax}(x+k)$:

tudo como tinhamos achado no numero precedente.

343. A integração de $\quad y''+Py'+Qy=R,$

representando P, Q, R, funcções de x, reduz-se á do numero precedente, pondo (como no n.º 312) $y=tz$; o que dá

$$y'=tz'+zt',\ y''=tz''+2t'z'+zt''.$$

Com effeito, substituindo estas expressões, e attendendo a ser arbitraria uma das variaveis z, t, podemos partir a proposta nas duas

$$(1)\ldots\ldots z''+Pz'+Qz=0,\qquad (2)\ldots\ldots t''+t'\left(P+\frac{2z'}{z}\right)=\frac{R}{z}.$$

Supponhamos (1) integrada pelo numero precedente, e resolvida depois em ordem a z: substituindo $t''=\frac{dt'}{dx}$, ficará (2) uma differencial linear da primeira ordem entre t' e x, e integrar-se-ha facilmente pelo n.º 312, mudando no integral alli achado y em t', P em $P+\frac{2z'}{z}$, Q em $\frac{R}{z}$. Teremos assim

$$u=\int\left(P+\frac{2z'}{z}\right)dx=\int Pdx+lz^2=l\left(z^2e^{\int Pdx}\right),\ t'=e^{-u}\int\frac{R}{z}e^{u}dx;$$

e depois
$$y=tz=z\int\frac{dx}{z^2e^{\int Pdx}}\int Rze^{\int Pdx}dx\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Como os integraes, que envolve (3), contêm duas constantes arbitrarias, podemos suppor nullas as constantes que contêm (1) e (2), ou dar-lhes os valores que forem convenientes para simplificar o calculo.

Exemplos

1.º Em
$$y''+\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{a}{x^2-1}$$

temos
$$P=\frac{1}{x},\ Q=-\frac{1}{x^2},\ R=\frac{a}{x^2-1}.$$

Assim (1) torna-se em $z''+\frac{z'}{x}-\frac{z}{x^2}=0$;

ou, pondo $z=e^{\int udx}$, $\qquad du+\left(u^2+\frac{u}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=0.$

Pondo $u=v^{-1}$, para fazer esta equação homogenea, e separando-a por meio da hypothese $x=vs$ (n.º 310, 3.º), acharemos

$$\frac{dv}{v}=-\frac{s^2+s-1}{s(s^2-1)}ds, \text{ que dá } v=-\frac{1}{s}\sqrt{\frac{s+1}{s-1}},$$

sem ajuntar constante.

E repondo u^{-1} e ux em logar de v e s, teremos

$$u=\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}, \int udx=l\frac{x^2-1}{x}, \ z=e^{\int udx}=\frac{x^2-1}{x},$$

$$\int \mathrm{R}ze^{\int \mathrm{P}dx}dx=\int adx=ax+c_1;$$

o que substituido em (3) dá (*Alg. Sup.*, n.º 138)

$$y=\frac{x^2-1}{x}\int\frac{(ax+c_1)xdx}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{4x}\int\left(\frac{a-c_1}{(x+1)^2}-\frac{a}{x+1}+\frac{a+c_1}{(x-1)^2}+\frac{a}{x-1}\right)dx$$

$$=-\frac{ax+c_1}{2x}+\frac{a(x^2-1)}{4x}l\left(c_2\frac{x-1}{x+1}\right).$$

2.° Em $$y'' - \frac{a^2-1}{4x^2}y = \frac{m}{\sqrt{x^{a+1}}},$$

a equação (1) é $z'' - \dfrac{(a^2-1)z}{4x^2} = 0;$

sendo por conseguinte nella

$$P = 0,\ Q = -\frac{a^2-1}{4x^2},\ R = \frac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}.$$

Poremos pois $\quad z = e^{\int u dx},\ u' + u^2 - \dfrac{a^2-1}{4x^2} = 0.$

Fazendo na segunda $u = v^{-1}$, $x = vs$, acharemos $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{(4s^2 - a^2 + 1)ds}{4s\left(s - s^2 + \dfrac{a^2-1}{4}\right)}$,

ou. pondo $s = y + \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{dv}{v} = \frac{(4y^2 + 4y - a^2 + 2)\,dy}{(4y+2)\left(\dfrac{a}{2} + y\right)\left(\dfrac{a}{2} - y\right)} = -\frac{4dy}{4y+2} + \frac{\dfrac{1}{a}dy}{y + \dfrac{a}{2}} - \frac{\dfrac{1}{a}dy}{y - \dfrac{a}{2}},$$

cujo integral, repondo $y = s - \dfrac{1}{2}$, dá

$$vs = x = \left(\frac{c_1\left(s + \dfrac{a-1}{2}\right)}{s - \dfrac{a+1}{2}}\right)^{\frac{1}{a}},\ s = \frac{\dfrac{a+1}{2}x^a + \dfrac{a-1}{2}c_1}{x^a - c_1},$$

$$u = \frac{s}{x} = \frac{(a+1)x^a + (a-1)c_1}{2x(x^a - c_1)} = \frac{1-a}{2x} + \frac{ax^{a-1}}{x^a - c_1},$$

$$\int u dx = lc_2 x^{\frac{1-a}{2}}(x^a - c_1),$$

e portanto $$z = c_2 x^{\frac{1-a}{2}} (x^a - c_1).$$

Quando se fazem $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, vem o integral particular $z = \sqrt{x^{a+1}}$, de que usaremos.

Emfim $$\int \mathrm{R} z e^{\int \mathrm{P} dx} dx = \int m dx = mx + \mathrm{C}_1,$$

depois no resultante,

$$y = z \int \frac{(mx + \mathrm{C}_1)\, dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{a-1}}} \left(\mathrm{C}_2 x^a - \frac{\mathrm{C}_1}{a} - \frac{mx}{a-1} \right).$$

344. Quando, contados x, y, dx, dy, d^2y por factores lineares, isto é, x e y por factores lineares, y' por factor da ordem 0, e y'' da ordem -1, for homogenea a proposta $\mathrm{F}(x, y, y', y'') = 0$:

fazendo nella $$y = ux,\ y'' = \frac{z}{x},$$

e dividindo pela potencia mais elevada de x, poderemos reduzil-a a

$$z = f(y', u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Com effeito, sendo $a + b - d = n$ a ordem de $x^a y^b y'^c y''^d$, o gráu de x na expressão transformada $x^a \cdot u^b x^b \cdot y'^c \cdot z^d x^{-d}$ é $a + b - d = n$; conseguintemente x desapparece pela divisão por x^n.

Ora temos $$dy = y' dx = u dx + x du,\ x dy' = z dx,$$

das quaes se tiram $$\frac{dx}{x} = \frac{du}{y' - u},\ \frac{du}{y' - u} = \frac{dy'}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Substituindo pois (4) na segunda (5), ficará uma equação da primeira

..

ordem entre y' e u, que se integrará; depois a substituição de y', tirado d'este integral, na primeira (5), e a integração dará $lx = \varphi u$; e finalmente a substituição de $u = \frac{y}{x}$ nesta dará o integral da proposta, com as constantes que provierem das duas integrações. Ou tambem o dará a substituição de u, tirado do primeiro integral, na primeira de (5); a integração d'esta; a eliminação de y' entre os dois integraes; e a substituição de $u = \frac{y}{x}$ na resultante.

Exemplo

A equação $\quad xy'' - y' = 0 \quad$ dá $\quad z = y'$;

e a segunda (5) é $\quad \frac{dy'}{y'} = \frac{du}{y' - u}$, ou $y'dy' = y'du + udy'$,

cujo integral, $y'^2 = 2y'u + c$ reduz a primeira (5) a $\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'}$, que dá $x = c_2 y'$.

Eliminando pois y' entre estes dois integraes, e substituindo $\frac{y}{x}$ em logar de u, resulta emfim o integral $\quad x^2 - 2c_2 y = c_1$.

345. Quando a proposta for homogenea do gráu n, contando só y, y', y'' como factores, a hypothese $y = e^u$ dará

$$y' = u'e^u, \; y'' = (u'^2 + u'')\, e^u;$$

depois a substituição d'estas expressões, e a divisão por e^{nu}, fará desapparecer e^u da proposta, que tomará a fórma

$$f(x, u', u'') = 0,$$

ficando assim no caso IV do n.º 341.

Equações lineares de todas as ordens entre duas variaveis

346. Chamam-se *equações lineares* aquellas cujos termos são lineares em ordem á variavel dependente e ás suas derivadas; tendo assim a fórma

$$K + Ay + A_1y' + \ldots . A_ny^{(n)} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

onde K, A, $A_1, \ldots . A_n$ representam funcções de x ou constantes.

Eram d'esta classe as equações de segunda ordem de que tractamos no ultimo exemplo do n.º **317** e nos n.ºs **312** e **343**.

347. Quando falta o termo K, é propriedade de taes equações que, se a ellas satisfizerem as finitas

$$Y = 0,\ Y_1 = 0 \ldots .,$$

tambem lhes satisfará a sua somma $\quad \Sigma Y_i = 0.$

Foi esta propriedade a de que já nos servimos no n.º **336**, II.

Com effeito a somma das equações

$$AY + A_1Y' + A_2Y'' + \ldots . A_nY^{(n)} = 0,$$

$$AY_1 + A_1Y'_1 + A_2Y_1'' + \ldots A_nY_1^{(n)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

é

$$A\Sigma Y_i + A_1\Sigma Y'_i + \ldots\ldots A_n\Sigma Y_i^{(n)} = 0,$$

que, por serem Y, $Y_1, \ldots$ funcções lineares de y, e por conseguinte

$$\Sigma Y_i' = (\Sigma Y_i)', \ \Sigma Y_i'' = (\Sigma Y_i)'' \ldots,$$

se reduz a

$$A\Sigma Y_i + A_1(\Sigma Y_i)' + A_2(\Sigma Y_i)'' \ldots + A_n(\Sigma Y_i)^{(n)} = 0.$$

348. I. Supponhamos o caso mais simples de serem A, $A_1, A_2, \ldots A_n$ constantes e K nullo.

Fazendo $y = ce^{hx}$, e substituindo na proposta, vem

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots A_n h^n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (M).$$

Se tomarmos pois por h as n raizes $h_1, h_2, \ldots h_n$ da equação (M), satisfarão respectivamente á proposta as equações

$$y = c_1 e^{h_1 x}, \ y = c_2 e^{h_2 x}, \ldots y = c_n e^{h_n x};$$

e como a somma

$$y = c_1 e^{h_1 x} + c_2 e^{h_2 x} + c_n e^{h_n x} \ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

tambem lhe satisfaz, segundo acabamos de mostrar, e contém as n constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$, será (N) o integral completo.

349. No caso de haver raizes imaginarias: como estas raizes hão de ser em numero par, e duas a duas da fórma $a \pm b\sqrt{-1}$, a somma dos dois termos de (N), correspondentes a cada par, terá a fórma

$$e^{ax}(c_i e^{bx\sqrt{-1}} + c'_i e^{-bx\sqrt{-1}}),$$

que (*Alg. Sup.*, pag. 269, eq. (L)) se reduz a

$$e^{ax}(m \cos bx + n \operatorname{sen} bx) = Ce^{ax} \cos(bx + l),$$

sendo C e l constantes arbitrarias.

350. No caso de ter a equação (M) raizes eguaes, parece que é (N) um integral particular, e não o integral completo, porque os seus termos respectivos ás raizes eguaes se fundem em um só, cujo coefficiente é a somma dos coefficientes d'elles; reduzindo-se assim a $n-r+1$ o numero das constantes arbitrarias, se for r o das raizes eguaes.

Removeu d'Alembert este inconveniente, como se segue:

Se é $h_1 = h_2$: comecemos por suppor $h_2 = h_1 + \omega$; e, depois das reducções convenientes, façamos $\omega = 0$.

A somma dos termos correspondentes é assim

$$e^{h_1 x}(c_1 + c_2 e^{\omega x}) = e^{h_1 x}\left(c_1 + c_2 + c_2\omega x + \frac{1}{2}c_2\omega^2 x^2 + \ldots\right),$$

que, pondo $c_2\omega = C_2$, $c_1 + c_2 = C_1$, se reduz, para $\omega = 0$, a $e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x)$. E portanto o integral completo tem a fórma

$$y = e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x) + c_3 e^{h_3 x} + c_4 e^{h_4 x} + c_n e^{h_n x}.$$

Se houver mais uma raiz egual, $h_3 = h_1$: fazendo $h_3 = h_1 + \omega$, os tres termos da ultima expressão de y serão

$$e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x + c_3 + c_3\omega x + \frac{1}{2}c_3\omega^2 x^2 + \frac{1}{6}c_3\omega^3 x^3 + \ldots),$$

que, pondo $\frac{1}{2}c_3\omega^2 = D_3$, $C_2 + c_3\omega = D_2$, $C_1 + c_3 = D_1$,

se reduz, para $\omega = 0$, a $e^{h_1 x}(D_1 + D_2 x + D_3 x^2)$;

tomando por isso o integral completo a fórma

$$y = e^{h_1 x}(D_1 + D_2 x + D_3 x^2) + c_4 e^{h_4 x} + \ldots c_n e^{h_n x}.$$

E assim por diante, no caso de haver maior numero de raizes eguaes.

Para satisfazer ás equações

$$c_2\omega = C_2, \; c_1 + c_2 = C_1,$$

de modo que C_1 e C_2 possam ser finitas, é necessario suppôr c_1, c_2, infinitas, e c_1 de signal contrario a c_2; o que dará a C_2 e a C_1 as fórmas indeterminadas $\infty \times 0$ e $\infty - \infty$.

Para satisfazer a

$$\frac{1}{2} c_3\omega^2 = D_3, \; C_2 + c_3\omega = (c_2 + c_3)\omega = D_2, \; C_1 + c_3 = c_1 + c_2 + c_3 = D_1,$$

de modo que D_1, D_2 e D_3 possam ser finitas, é necessario suppôr c_2 e c_3 infinitos de segunda ordem e de signaes contrarios.

E assim por diante.

351. Como a introducção de infinitos e de desenvolvimentos em serie tornam esta demonstração menos clara e subjeita a difficuldades, justifiquemos directamente as fórmas do integral a que ella conduziu.

No caso de duas raizes eguaes, substituamos $y = e^{h_1x}(C_1 + C_2x)$ na proposta (1). Esta substituição dará facilmente

$$e^{h_1x}(C_1 + C_2x)M + C_2 e^{h_1x} \cdot \frac{dM}{dh} = 0;$$

e como, por serem h_1 raiz de (M) e outra das raizes egual a h_1, são $(M) = 0$ e $\left(\frac{dM}{dh}\right) = 0$, vê-se que a expressão substituida satisfaz á proposta.

Se forem tres as raizes eguaes, a substituição de $y = e^{h_1x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$ em (1) dará tres grupos de termos, dos quaes serão respectivamente factores os primeiros membros de (M), $\frac{d(M)}{dh}$ e $\frac{d^2(M)}{dh^2}$; e como estes factores são nullos por serem h_1 raiz de (M) e outras duas das raizes eguaes a h_1, a expressão substituida satisfaz á proposta. E assim por diante (*).

(*) Suppondo $$y = e^{h_1 x}(c_1 + c_2 x + \ldots . c_n x^{n-1}) = \mathrm{P} e^{h_1 x} \ldots\ldots\ldots (a),$$

teremos $$y' = e^{h_1 x}(h_1 \mathrm{P} + \mathrm{P}'),\ y'' = e^{h_1 x}\left(h_1^2 \mathrm{P} + 2h_1 \mathrm{P}' + \frac{2(2-1)}{2}\mathrm{P}''\right).$$

E, se for

$$y^{(i)} = e^{h_1 x}[h_1^{\,i}\mathrm{P} + .. \frac{i(i-1)..(i-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha} h_1^{\,i-\alpha}\mathrm{P}^{(\alpha)} + \frac{i(i-1)..(i-\alpha)}{1.2\ldots(\alpha+1)} h_1^{\,i-\alpha-1}\mathrm{P}^{(\alpha+1)} + ..],$$

a derivação d'esta dará ainda

$$y^{(i+1)} = e^{h_1 x}\left(h_1^{\,i+1}\mathrm{P} + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots(i-\alpha+1)}{1\,.\,2\ldots\alpha}\right)\left(1 + \frac{i-\alpha}{\alpha+1}\right) h_1^{\,i-\alpha}\mathrm{P}^{(\alpha+1)} + \ldots$$

$$= e^{h_1 x}\left(h_1^{\,i+1}\mathrm{P} + \ldots \frac{(i+1)i\ldots(i+1-\alpha)}{1\,.\,2\ldots(\alpha+1)}\right) h_1^{\,i+1-(\alpha+1)}\mathrm{P}^{(\alpha+1)} \ldots$$

Portanto a lei é geral.

A hypothese (a), substituida na equação proposta (1), dará pois

$$e^{h_1 x}(\mathrm{P}\Sigma \mathrm{A}_i h_1^{\,i} + \mathrm{P}'\Sigma \mathrm{A}_i i h_1^{\,i-1} + \ldots . \mathrm{P}^{(\alpha)}\Sigma \mathrm{A}_i \frac{i(i-1)\ldots\ldots(i-\alpha+1)}{1\,.\,2\ldots .\alpha} h_1^{\,i-\alpha} + ..),$$

ou

$$e^{h_1 x}\left[\mathrm{P}\,.\,(\mathrm{M}) + \mathrm{P}'\,.\,\frac{d\,(\mathrm{M})}{dh} + \ldots \frac{\mathrm{P}^{(\alpha)}}{1\ldots\alpha}\,.\,\frac{d^{\alpha}(\mathrm{M})}{dh^{\alpha}} \ldots + \frac{\mathrm{P}^{(n)}}{1.2\ldots n}\,.\,\frac{d^{n}(\mathrm{M})}{dh^{n}}\right] = 0\,;$$

equação satisfeita, porque, sendo h_1 raiz da equação (M), e sendo n o numero das raizes eguaes h_1, serão nullos (M), $\frac{d\,(\mathrm{M})}{dh^1} \ldots \frac{d^n(\mathrm{M})}{dh^n}$.

Portanto, se (M) tiver i raizes eguaes h_1, será o integral completo

$$y = e^{h_1 x}(c_1 + c_2 x + \ldots c_i x^{i-1}) + c_{i+1} e^{h_{i+1} x} + \ldots c_n e^{h_n x}.$$

Entendendo-se que, se entre as raizes, $h_{i+1}, \ldots h_n$, houver alguns pares imaginarios, por exemplo, $h_{i+p} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $h_{i+q} = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, substituiremos, em logar da somma dos termos respectivos, $c_{i+p} e^{h_{i+p} x} + c_{i+q} e^{h_{i+q} x}$, a expressão $\lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x + \gamma)$, sendo λ e γ constantes arbitrarias.

352. II. Se K não for nullo, bastará fazer $y = z - \frac{K}{A}$, para que a transformada de (1) em z esteja no caso I.

353. III. Se K é uma funcção $K = -X$ de x, multipliquemos a proposta

$$Ay + A_1 y' \ldots + A_n y^{(n)} = X$$

por um factor e^{-hx} que torne integravel o primeiro membro; o que dará um resultado da fórma

$$e^{-hx}(ay + a_1 y' + \ldots a_{n-1} y^{(n-1)}) = \int e^{-hx} X dx = P + c \ldots \text{(O)}.$$

Para determinar os coefficientes $a, a_1, \ldots a_{n-1}$, differenciemos (O), e comparemos com a proposta. Teremos

$$A = -ah,\ A_1 = a - a_1 h,\ A_2 = a_1 - a_2 h, \ldots A_n = a_{n-1}.$$

A formação d'estas equações mostra que são

$$A + A_1 h = -a_1 h^2,\ A + A_1 h + A_2 h^2 = -a_2 h^3, \ldots$$

e finalmente $\quad A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_n h^n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(M)}.$

As raizes de (M) farão conhecer os respectivos systemas de coefficientes,

$$a = -\frac{A}{h},\ a_1 = -\frac{A_1 - a}{h},\ a_2 = -\frac{A_2 - a_1}{h}, \ldots a_{n-2} = \frac{A_{n-2} - a_{n-3}}{h},\ a_{n-1} = A_n;$$

e estes systemas, substituidos em (O), darão outros tantos integraes da ordem $n-1$ da fórma (O), sobre qualquer dos quaes operaremos successivamente do mesmo modo, até chegar ao integral finito.

Mas, se conhecermos as n raizes de (M), poderemos obter o integral finito, eliminando $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ entre os n integraes (O) da ordem $n-1$. E, se apenas conhecermos $n - i > 1$ d'essas raizes, poderemos eliminar $y^{(i+1)}, y^{(i+2)}, \ldots y^{(n-1)}$, entre os $n - i$ integraes (O) correspondentes; e depois applicar o methodo exposto á equação resultante da ordem i. (*Calc. Int.* de Euler, t. II, pag. 402).

354. IV. Se são K nullo e A, $A_1, \ldots$ funcções de x, a propriedade referida no n.º 347 faz depender o integral geral dos n integraes particulares; mas nem sempre se sabe achar estes.

Supponhamos que se conhecem alguns; e seja $y_1 = fx$ um d'elles.

Pondo $y = y_1 \int z dx$, substituindo na proposta, e attendendo a ella, acha-se um resultado da fórma

$$Bz + B_1 z' + \ldots B_{n-1} z^{(n-1)} = 0.$$

Se forem conhecidos alguns dos integraes particulares d'esta, a substituição em $y = y_1 \int z dx$ dará outros tantos da proposta.

E tambem, se for conhecido outro integral da proposta, $y_2 = f_1 x$, e chamarmos z_1 o correspondente de z, a equação $y_2 = y_1 \int z_1 dx$ dará

$$z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Obtido um valor z_1 de z, a hypothese $z = z_1 \int u dx$ reduzirá similhantemente a equação em z a

$$Cu + C_1 u' + \ldots C_{n-2} u^{(n-2)} = 0;$$

depois a integração d'esta, ou a formula $u_1 = \frac{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}{dx}$, abaterá a ordem a $n-3$ pela hypothese $u = u_1 \int t dx$. E assim por diante (Courn. *Calc. Int.*, n.° 462).

355. V. Finalmente, se K, A, $A_1, \ldots$ são funcções de x, não tem logar o theorema do n.° 347.

Supponhamos porém que se conhecem n integraes particulares $y_1, y_2, \ldots y_n$ da proposta privada do termo K.

Ponhamos
$$y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots X_n y_n = \Sigma X_i y_i,$$

sendo $X_1, X_2, \ldots X_n$, funcções indeterminadas de x.

Differenciando, vem

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma X_i \frac{dy_i}{dx} + \Sigma y_i \frac{dX_i}{dx},$$

que, fazendo
$$\Sigma y_i \frac{dX_i}{dx} = 0,$$

se reduz a
$$\frac{dy}{dx} = \Sigma X_i \frac{dy_i}{dx}$$

Supponhamos que, egualando sempre a zero as derivadas nas quaes X_i se considerava variavel, chegavamos a $\frac{d^{\alpha-1} y}{dx^{\alpha-1}} = \Sigma X_i \frac{d^{\alpha-1} y_i}{dx^{\alpha-1}}$.

A derivada seguinte seria

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \Sigma X_i \frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha} + \Sigma \frac{d^{\alpha-1} y_i}{dx^{\alpha-1}} \cdot \frac{dX_i}{dx},$$

que, fazendo do mesmo modo $\Sigma \dfrac{d^{\alpha-1}y_i}{dx^{\alpha-1}} \cdot \dfrac{dX_i}{dx} = 0,$

se reduz a $\dfrac{d^{\alpha}y}{dx^{\alpha}} = \Sigma X_i \dfrac{d^{\alpha}y_i}{dx^{\alpha}}.$

Substituindo pois na proposta esta expressão geral, excepto a da ultima derivada $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \Sigma X_i \dfrac{d^n y_i}{dx^n} + \Sigma \dfrac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} \cdot \dfrac{dX_i}{dx}$, na qual se fará $\Sigma \dfrac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} \cdot \dfrac{dX_i}{dx} = -\dfrac{K}{A_n}$, teremos

$$\Sigma X_i (Ay_i + A_1 y'_i + \ldots . A_n y_i^{(n)}) = 0;$$

e, como, em virtude da definição de y_i, o segundo factor de cada parte de Σ é nullo, esta equação fica satisfeita.

Portanto será $y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots X_n y_n$

o integral completo, com tanto que $X_1, X_2, \ldots . X_n$ se determinem pelas n equações:

$$y_1 \frac{dX_1}{dx} + y_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots . y_n \frac{dX_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dX_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dX_2}{dx} + \ldots \frac{dy_n}{dx} \frac{dX_n}{dx} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{(n-1)}y_1}{dx} \frac{dX_1}{dx} + \frac{d^{(n-1)}y_2}{dx} \frac{dX_2}{dx} + \ldots \frac{d^{(n-1)}y_n}{dx} \frac{dX_n}{dx} + \frac{K}{A_n} = 0.$$

Ora estas equações são lineares em ordem ás derivadas $\frac{dX_1}{dx}$, $\frac{dX_2}{dx}$,... $\frac{dX_n}{dx}$. Conseguintemente a eliminação, e depois a integração de

$$\frac{dX_1}{dx}=\varphi'_1x,\ \frac{dX_2}{dx}=\varphi'_2x,\ldots\ldots\frac{dX_n}{dx}=\varphi'_nx,$$

darão os valores de $X_1=\varphi_1x+c_1,\ X_2=\varphi_2x+c_2\ldots X_n=\varphi_nx+c_n$;

sendo assim o integral pedido

$$y=(c_1+\varphi_1x)\,y_1+(c_2+\varphi_2x)\,y_2+\ldots(c_n+\varphi_nx)\,y_n.$$

(Navier, *Calc. Int.*, n.º 442).

Eliminação entre as equações differenciaes simultaneas

356. Se for dado um numero i de equações differenciaes entre a variavel principal t e as i dependentes $x_1, x_2, \ldots x_i$; e se estas equações forem: a primeira das ordens $m_1, m_2, \ldots$ relativamente a $x_1, x_2, \ldots$; a segunda das ordens $n_1, n_2 \ldots$ relativamente ás mesmas variaveis; e assim por diante: poderemos reduzir as equações propostas a um systema de outras i entre duas variaveis, a principal e cada uma das dependentes.

Com effeito, se differenciarmos a primeira equação n_1 vezes e a segunda m_1 vezes, estas duas equações com as suas differenciaes farão o numero $m_1 + n_1 + 2$ de equações, entre as quaes eliminando x_1 e os seus $m_1 + n_1$ coefficientes differenciaes das ordens $m_1 + n_1, m_1 + n_1 - 1, \ldots 1$, ficará uma resultante sem x_1.

Do mesmo modo differenciando respectivamente p_1 vezes e m_1 vezes a primeira e a terceira equação, e eliminando x_1 e os seus $m_1 + p_1$ coefficientes differenciaes entre as $m_1 + p_1 + 2$ equações, obteremos outra equação sem x_1. E continuando assim a combinar a primeira equação com cada uma das outras, formaremos $i - 1$ equações sem x_1.

Depois, operando similhantemente sobre estas, obteremos $i-2$ equações sem x_2; e assim por diante, até chegar a uma só equação entre x_i e t.

Pelo mesmo theor chegaremos a uma equação entre x_{i-1} e t, a outra entre x_{i-2} e t, e assim por diante. E formando d'este modo o systema de i equações entre x_1 e t, entre x_2 e $t, \ldots$ entre x_i e t, ficaremos reduzidos ao problema já tractado da integração de equações differenciaes entre duas variaveis; devendo notar-se que estas equações serão lineares, se as propostas o forem.

357. Assim, differenciando uma vez as equações lineares

$$Mx + Ny + P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} = R,$$

$$M_1x + N_1y + P_1\frac{dx}{dt} + Q_1\frac{dy}{dt} = R_1,$$

obteriamos duas, tambem lineares,

$$A + Bx + Cy + D\frac{dx}{dt} + E\frac{dy}{dt} + P\frac{d^2x}{dt^2} + Q\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$A_1 + B_1x + C_1y + D_1\frac{dx}{dt} + E_1\frac{dy}{dt} + P\frac{d^2x}{dt^2} + Q\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Depois estas quatro dariam, pela eliminação de $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, e pela eliminação de $y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$, as duas

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \; f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

358. No caso de serem as propostas lineares, como neste exemplo, a eliminação entre ellas e a integração das equações finaes podem fazer-se commodamente do modo que vamos expôr.

Se eliminarmos dy, e dividirmos o resultado pelo coefficiente de dx, e se fizermos o mesmo a respeito de dx e do coefficiente de dy, o systema proposto tomará a fórma mais simples

$$\left.\begin{aligned} (ax + by)\,dt + dx &= T dt \\ (a'x + b'y)\,dt + dy &= S dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

representando a, b, a', b', S, T, funcções de t, ou constantes.

Multiplicando a segunda equação (1) por uma funcção indeterminada k de t, e sommando com a primeira, teremos

$$(a + a'k)\left(x + \frac{b + b'k}{a + a'k}y\right)dt + dx + kdy = (T + Sk)\,dt.$$

Pondo $x+ky=u$, que dá $\quad x=u-ky,\ dx+kdy=du-ydk,$

substituindo, e egualando a zero o coefficiente de y, resultam

$$[b+b'k-(a+a'k)\,k]\,dt-dk=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$[(a+a'k)\,u-\mathrm{T}-\mathrm{S}k]\,dt+du=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Do integral da primeira d'estas equações, que é da primeira ordem entre k e t, tirar-se-ha k em funcção de t; depois a substituição do valor de k em (3) reduzirá esta equação a uma da primeira ordem entre u e t, a qual integrada dará u em funcção de t; e finalmente as funcções k e u de t, substituidas na equação $x+ky=u$, reduzil-a-hão a uma finita entre x, y, t. Tirando pois t d'esta ultima equação, substituiremos em qualquer das propostas (1), que ficará reduzida a uma da primeira ordem entre x e y e pela integração dará a procurada. Ou, se a integração de (2) der mais d'uma solução para k, a substituição de duas d'estas soluções successivamente em (3), e depois a d'essas e das correspondentes de (3) em $u=x+ky$, dará duas equações, das quaes, pela eliminação t, resultará a procurada.

359. Sendo k', k'', as raizes de $\quad (a+a'k)\,k-b-b'k=0\ldots(4),$

a equação (2) tomar a fórma $\quad a'(k-k')(k-k'')\,dt+dk=0\ldots(2)'.$

Se a, b, a', b', forem constantes, os valores constantes k', k'', de k satisfarão á equação $(2)'$; mas, além d'esses, satisfarão tambem os outros que der o integral d'esta equação.

Em quanto á equação (3), o seu integral é (n.º 312)

$$u=e^{-\int(a+a'k)\,dt}\int(\mathrm{T}+\mathrm{S}k)\,e^{\int(a+a'k)\,dt}\,dt\ldots\ldots(5);$$

ficando envolvida a constante arbitraria no factor que tem de integrar-se.

360. I. No caso de serem as raizes constantes de (4) reaes e deseguaes, o integral (5) reduz-se a dois da fórma

$$u = e^{-(a+a'k)t}\int(\mathrm{T}+\mathrm{S}k)\,e^{(a+a'k)t}\,dt \,\ldots\ldots\ldots (5)',$$

entre os quaes se eliminará t.

II. No caso de serem as raizes de (4) imaginarias, $k = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, as duas equações $(5)'$ serão

$$\left(x+(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})y\right) = \left(\begin{array}{l} e^{-(a+a'\alpha)t}(\cos a'\beta t \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a'\beta t) \\ \times \left\{ \int[\mathrm{T}+\mathrm{S}(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})]\,e^{(a+a'\alpha)t}\,dt\,(\cos a'\beta t \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a'\beta t) \right. \\ \qquad + m \mp n\sqrt{-1} \end{array} \right\};$$

isto é

$$\left(x+(\alpha+\beta\sqrt{-1})y\right) = \left(\begin{array}{l} e^{-(a+a'\alpha)t}(\cos a'\beta t - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a'\beta t) \\ \times \left\{ \int[\mathrm{T}+\mathrm{S}(\alpha+\beta\sqrt{-1})]\,e^{(a+a'\alpha)t}\,dt\,(\cos a'\beta t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a'\beta t) \right. \\ \qquad m - n\sqrt{-1} \end{array} \right\}$$

$$\left(x+(\alpha-\beta\sqrt{-1})y\right) = \left(\begin{array}{l} e^{-(a+a'\alpha)t}(\cos a'\beta t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a'\beta t) \\ \times \left\{ \int[\mathrm{T}+\mathrm{S}(\alpha-\beta\sqrt{-1})]\,e^{(a+a'\alpha)t}\,dt\,(\cos a'\beta t - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,a'\beta t) \right. \\ \qquad m + n\sqrt{-1} \end{array} \right\},$$

cujas somma e differença dão

$$x+\alpha y = e^{-(a+a'\alpha)t}\left\{\begin{array}{l}\cos a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha \\ -S\beta \operatorname{tg} a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\cos a'\beta t \\ +\operatorname{sen} a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha \\ +S\beta\cot a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\operatorname{sen} a'\beta t \\ +m\cos a'\beta t - n\operatorname{sen} a'\beta t\end{array}\right.$$

$$\beta y = e^{-(a+a'\alpha)t}\left\{\begin{array}{l}\cos a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha \\ +S\beta\cot a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\operatorname{sen} a'\beta t \\ -\operatorname{sen} a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha \\ -S\beta \operatorname{tg} a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\cos a'\beta t \\ -n\cos a'\beta t - m\operatorname{sen} a'\beta t.\end{array}\right.$$

III. Finalmente, no caso de serem eguaes as raizes de (4): tiraremos do integral $u = ft = x + ky$ os valores de t e dt em funcção de x e y e suas differenciaes; substituiremos estes valores em uma das propostas (1), e integral-a-hemos.

361. Na mesma hypothese de a, a', b, b', constantes, podemos tambem proceder do modo seguinte, em conformidade com o que fica prevenido no n.º 359.

O integral de $(2)'$ é $\qquad \dfrac{1}{k'-k''}\, l\, \dfrac{k-k'}{k-k''} + a't + lc = 0,$

ou $$C\frac{k-k'}{k-k'}e^{a't(k'-k'')} = 1$$

Tomando pois por C dois valores, os correspondentes de k, substituidos em (5), darão dois de $x+ky$, entre os quaes se deve eliminar t.

I. Por exemplo $C=0$ e $C=\infty$ darão $k=k''$ e $k=k'$, como no n.º 359.

II. Se forem $k' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $k' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, e por conseguinte $(k-k')(k-k'') = (k-\alpha)^2 + \beta^2$, a equação $(2)'$ será

$$a'\left[(k-\alpha)^2 + \beta^2\right]dt + dk = 0,$$

cujo integral é $$\frac{1}{\beta}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{k-\alpha}{\beta}\right) + a't = c,$$

ou $$k - \alpha = \beta\,\mathrm{tang}\,(c - a't)\,\beta:$$

tomando pois nesta dois valores por c, e procedendo como fica dito, acharemos a equação procurada.

Por exemplo, tomando successivamente $\beta c = \pi$, $\beta c = \frac{1}{2}\pi$, e substituindo em (5) os valores correspondentes, $k = \alpha - \beta\,\mathrm{tang}\,a'\beta t$, $k = \alpha + \beta\cot a'\beta t$, acharemos duas expressões u', u'', de $u = x + ky$, por meio das quaes se obterão as duas

$$x + \alpha y = u' + \beta y\,\mathrm{tg}\,a'\beta\,t = u'' - \beta y\cot a'\beta\,t,\quad \beta y = \frac{u'' - u'}{\cot a'\beta\,t + \mathrm{tang}\,a'\beta\,t},$$

que, attendendo a serem

$$\int(a + a'\alpha - a'\beta\,\mathrm{tg}\,a'\beta\,t)\,dt = (a + a'\alpha)\,t + \log\cos a'\beta\,t,$$

$$\int(a + a'\alpha + a'\beta\cot a'\beta t)\,dt = (a + a'\alpha)\,t + \log\mathrm{sen}\,a'\beta\,t,$$

coincidem com as do n.° 360.

III. Se forem k' e k'' eguaes, ou $(k-k')(k-k'') = (k-k')^2$, a equação $(2)'$ dará

$$\frac{1}{k-k'} - a't - c = 0;$$

com a qual, tomando dois valores de c, procederemos como nos outros casos.

Por exemplo $c=\infty$, $c=0$, dão $k=k'$, $k=k'+\frac{1}{a't}$, que se devem substituir em $u=x+ky$ e depois em (5).

362. Se tivermos agora tres equações da primeira ordem entre as quatro variaveis x, y, z, t, reduzil-as-hemos em primeiro logar, como no caso precedente, á fórma

$$(ax+by+cz)\,dt+dx=\mathrm{T}dt,$$

$$(a'x+b'y+c'z)\,dt+dy=\mathrm{S}dt,$$

$$(a''x+b''y+c''z)\,dt+dz=\mathrm{R}dt.$$

Suppondo que os coefficientes são funcções de t ou constantes, e que T, S, R, são funcções de t, multipliquemos a segunda e a terceira por indeterminadas k, l, em geral funcções de t; e sommemos. Virá

$$(a+a'k+a''l)\left(x+\frac{b+b'k+b''l}{a+a'k+a''l}y+\frac{c+c'k+c''l}{a+a'k+a''l}z\right)dt+dx+kdy+ldz,$$

$$=(\mathrm{T}+\mathrm{S}k+\mathrm{R}l)\,dt.$$

Fazendo nesta equação $\quad x+ky+lz=u;$

substituindo em logar de x e $dx+kdy+ldz$ as suas expressões tiradas d'aquella hypothese,

$$x=u-ky-lz,\ dx+kdy+ldz=du-ydk-zdl;$$

e egualando depois a zero os coefficientes de y e z: teremos as tres transformadas

$$[b+b'k+b''l-(a+a'k+a''l)\,k]\,dt-dk=0\,\ldots\ldots(7),$$

$$[c+c'k+c''l-(a+a'k+a''l)\,l]\,dt-dl=0\,\ldots\ldots(8),$$

$$[a+a'k+a''l)\,udt-(\mathrm{T}-\mathrm{S}k-\mathrm{R}l)\,dt+du=0\,\ldots\ldots(9),$$

Se os coefficientes $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, forem constantes, é claro que satisfaremos a (7) e (8) tomando por k e l numeros constantes dados pelas equações

$$b + b'k + b''l - k(a + a'k + a''l) = 0,$$

$$c + c'k + c''l - l(a + a'k + a''l) = 0.$$

Como a resultante d'estas equações é do terceiro gráu, se chamarmos (k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), tres systemas de valores que satisfaçam a ellas, e os substituirmos successivamente em (9), teremos os tres integraes

$$x + k_1 y + l_1 z = e^{-(a+a'k_1+a''l_1)t}\left(\int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k_1 + \mathrm{R}l_1)\, e^{(a+a'k_1+a''l_1)t}\, dt + c_{,}\right),$$

$$x + k_2 y + l_2 z = e^{-(a+a'k_2+a''l_2)t}\left(\int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k_2 + \mathrm{R}l_2)\, e^{(a+a'k_2+a''l_2)t}\, dt + c_{,,}\right),$$

$$x + k_3 y + l_3 z = e^{-(a+a'k_3+a''l_3)t}\left(\int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k_3 + \mathrm{R}l_3)\, e^{(a+a'k_3+a''l_3)t}\, dt + c_{,,,}\right),$$

entre os quaes se devem eliminar t e z.

É evidente que um processo analogo se pode applicar a mais equações, e que estas se integram sempre quando os coefficientes de x, y, z são constantes.

363. Exemplos da integração das equações simultaneas de primeira ordem:

$$\text{I.} \qquad dx + \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{A}}\, ny\,dt = 0, \quad dy + \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{B}}\, nx\,dt = 0.$$

Comparando com as equações (1), temos

$$a = 0,\ b = \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{B})n}{\mathrm{A}},\ a' = \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{C})n}{\mathrm{B}},\ b' = 0,\ \mathrm{T} = 0,\ \mathrm{S} = 0,$$

e as equações (4) e (3) são $\quad a'k^2 = b,\ a'kudt + du = 0.$

A primeira dá
$$k = \mp\sqrt{\frac{b}{a'}};$$

depois a segunda dá, para cada um dos valores de k,

$$u' = \mathrm{M}e^{\sqrt{a'b}.t},\ u'' = \mathrm{M}'e^{-\sqrt{a'b}.t};$$

e finalmente, substituindo em $x + ky = u$, acha-se

$$x - y\sqrt{\frac{b}{a'}} = \mathrm{M}e^{t\sqrt{a'b}},\ x + y\sqrt{\frac{b}{a'}} = \mathrm{M}'e^{-t\sqrt{a'b}};$$

d'onde resultam os integraes procurados

$$x = \frac{\mathrm{M}}{2}e^{t\sqrt{a'b}} + \frac{\mathrm{M}'}{2}e^{-t\sqrt{a'b}},\ y\sqrt{\frac{b}{a'}} = \frac{\mathrm{M}'}{2}e^{-t\sqrt{a'b}} - \frac{\mathrm{M}}{2}e^{t\sqrt{a'b}}.$$

Se para dar a estas expressões uma fórma simples, puzermos

$$\mathrm{M}' = \frac{he^{m\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}},\ \mathrm{M} = -\frac{he^{-m\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}},$$

ficarão

$$x = h\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{a'b}.\sqrt{-1} + m),\ y\sqrt{-1} = h\sqrt{\frac{a'}{b}}\cos\,(t\sqrt{a'b}.\sqrt{-1} + m),$$

ou, fazendo

$$\sqrt{a'b}.\sqrt{-1}=n\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}=l,\ \frac{h\sqrt{\frac{a'}{b}}}{\sqrt{-1}}=h\sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}}=h',$$

$$x=h\,\mathrm{sen}\,(lt+m),\ y=h'\cos(lt+m).$$

II. $$dx+nydt=-h\,\mathrm{sen}\,(lt+m)\,dt,$$

$$dy-nxdt=\quad h'\cos(lt+m)\,dt;$$

designando n, h, l, m, as mesmas quantidades que no exemplo precedente.

Comparando com as equações (1), temos

$$a=0,\ b=n,\ a'=-n,\ b'=0,$$

$$T=-h\,\mathrm{sen}\,(lt+m),\ S=h'\cos(lt+m);$$

e as (4) e (3) são $\quad -nk^2=n,\ -nkudt+du=(T+kS)\,dt.$

A primeira d'estas dá $k=\pm\sqrt{-1}$; e depois a segunda torna-se, para os dous valores de k, respectivamente em

$$-nudt\sqrt{-1}+du=-h\,\mathrm{sen}\,(lt+m)dt+h'\cos(lt+m)\sqrt{-1}\,dt=Q\,dt,$$

$$+nudt\sqrt{-1}+du=-h\,\mathrm{sen}\,(lt+m)dt-h'\cos(lt+m)\sqrt{-1}\,dt=Q'dt,$$

cujos integraes (n.º 312) são

$$u' = e^{nt\sqrt{-1}}\left(\int e^{-nt\sqrt{-1}}\,Q\,dt + c\right),\ u'' = e^{-nt\sqrt{-1}}\left(\int e^{nt\sqrt{-1}}\,Q'\,dt + c'.\right)$$

Substituindo em logar de Q e Q' as suas expressões; transformando $\operatorname{sen}(lt+m)$ e $\cos(lt+m)$ em exponenciaes; integrando, e fazendo

$$e^{(lt+m)\sqrt{-1}} = z,\ e^{-(lt+m)\sqrt{-1}} = z':$$

ficam

$$u' = h\left(\frac{z}{2(l-n)} + \frac{z'}{2(l+n)}\right) + h'\left(\frac{z}{2(l-n)} - \frac{z'}{2(l+n)}\right) + ce^{nt\sqrt{-1}},$$

$$u'' = h\left(\frac{z}{2(l+n)} + \frac{z'}{2(l-n)}\right) - h'\left(\frac{z}{2(l+n)} - \frac{z'}{2(l-n)}\right) + c'e^{-nt\sqrt{-1}}.$$

E como a equação $u = x + ky$ se torna nas duas

$$u' = x + y\sqrt{-1},\ u'' = x - y\sqrt{-1},$$

que dão
$$x = \frac{u' + u''}{2},\ y = \frac{u' - u''}{2\sqrt{-1}}:$$

attendendo a
$$\frac{z + z'}{2} = \cos(lt+m),\ \frac{z - z'}{2\sqrt{-1}} = \operatorname{sen}(lt+m),$$

e fazendo
$$c = fe^{g\sqrt{-1}},\ c' = fe^{-g\sqrt{-1}},$$

teremos
$$x = \frac{lh + nh'}{l^2 - n^2}\cos(lt+m) + f\cos(nt+g),$$

$$y = \frac{nh + lh'}{l^2 - n^2}\operatorname{sen}(lt+m) + f\operatorname{sen}(nt+g),$$

nas quaes, em virtude das relações entre l e n, e entre h e h', do exemplo precedente, que dão

$$lh = nh'\frac{B-C}{A},\ lh' = nh\frac{A-C}{B},\ l^2 - n^2 = -n^2\frac{C(A+B-C)}{AB},$$

serão $$\frac{lh+nh'}{l^2-n^2} = -\frac{Bh'}{Cn},\ \frac{nh+lh'}{l^2-n^2} = -\frac{Ah}{Cn}.$$

364. Como applicação do processo indicado no n.º **356**, integremos tambem por elle as equações do exemplo I do numero precedente, ou, pondo $\frac{B-C}{A}n=a$, $\frac{A-C}{B}n=b$, as equações $dx-aydt=0$, $dy+bxdt=0$

Differenciando, virá

$$d^2x - adydt = 0,\ d^2y + bdxdt = 0;$$

depois, eliminando dy entre a segunda e a terceira, e dx entre a primeira e a quarta, achar-se-hão

$$d^2x + abxdt^2 = 0,\ d^2y + abydt^2 = 0;$$

e finalmente integrando (n.º **341**, III), teremos

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt{-2ab\int xdx}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{dx}{h^2-x^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\text{arc}\left(\text{sen} = \frac{x}{h}\right) - m\right],$$

ou $$x = h\,\text{sen}\,(t\sqrt{ab}+m),\ y = h'\,\text{sen}\,(t\sqrt{ab}+m').$$

Por se haverem differenciado as propostas, apparecem a mais duas constantes, as quaes determinaremos de modo que os integraes satisfaçam ás mesmas propostas. E teremos assim as condições

$$h\sqrt{ab}\cos(t\sqrt{ab}+m)-ah'\operatorname{sen}(t\sqrt{ab}+m')=0,$$

$$h'\sqrt{ab}\cos(t\sqrt{ab}+m')+bh\operatorname{sen}(t\sqrt{ab}+m)=0,$$

ás quaes evidentemente satisfazem $m'=90^\circ+m$, $h'=h\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Emfim, substituindo estes valores, e pondo $l=\sqrt{ab}$, recahiremos nos integraes achados no numero precedente.

365. Passemos ás equações de segunda ordem. Se tivermos as equações

$$d^2y+(ady+bdx)\,dt+(cy+gx)\,dt^2=\mathrm{T}dt^2,$$

$$d^2x+(a'dy+b'dx)\,dt+(c'y+g'x)\,dt^2=\mathrm{S}dt^2,$$

e fizermos $$dy=pdt,\ dx=qdt,$$

teremos, em logar das duas equações de segunda ordem entre x, y, t, as quatro de primeira ordem entre x, y, z, p, q, t,

$$dp+(ap+bq+cy+gx)\,dt=\mathrm{T}dt,$$

$$dq+(a'p+b'q+c'y+g'x)\,dt=\mathrm{S}dt,$$

$$dy=pdt,\ dx=qdt,$$

as quaes tractaremos pelo modo indicado para esta especie de equações.

Reflectindo neste processo, vê-se que elle é applicavel a qualquer numero de equações do primeiro gráu e de qualquer ordem.

366. Algumas vezes a simples inspecção das equações mostra a fórma

••

dos seus integraes. Por exemplo, em logar das equações, importantes na Mechanica,

$$A'\frac{d^2x}{dt^2}+D'\frac{d^2y}{dt^2}+E'\frac{d^2z}{dt^2}-Ax-Dy-Ez=0,$$

$$D'\frac{d^2x}{dt^2}+B'\frac{d^2y}{dt^2}+F'\frac{d^2z}{dt^2}-Dx-By-Fz=0,$$

$$E'\frac{d^2x}{dt^2}+F'\frac{d^2y}{dt^2}+C'\frac{d^2z}{dt^2}-Ex-Fy-Cz=0,$$

nas quaes A, A'... são coefficientes constantes, poderiam substituir-se as seis de primeira ordem

$$A'\frac{dx'}{dt}+D'\frac{dy'}{dt}+E'\frac{dz'}{dt}-Ax-Dy-Ez=0,$$

$$D'\frac{dx'}{dt}+B'\frac{dy'}{dt}+F'\frac{dz'}{dt}-Dx-By-Fz=0,$$

$$E'\frac{dx'}{dt}+F'\frac{dy'}{dt}+C'\frac{dz'}{dt}-Ex-Fy-Cz=0,$$

$$\frac{dx}{dt}=x',\ \frac{dy}{dt}=y',\ \frac{dz}{dt}=z',$$

que se integrariam pelo methodo exposto. Mas é evidente que, reproduzindo-se os senos e cosenos nas suas derivadas de ordem par, as expressões

$$x=\mathrm{H}\operatorname{sen}(mt+n),\ y=\mathrm{H}k\operatorname{sen}(mt+n),\ z=\mathrm{H}k'\operatorname{sen}(mt+n)$$

substituidas nas equações propostas devem ter $\operatorname{sen}(mt+n)$ por factor commum, e reduzir-se a simples equações de condição entre as constantes.

Com effeito a substituição dá, fazendo $m^2 = \rho$,

$$\rho(A' + D'k + E'k') + A + Dk + Ek' = 0,$$

$$\rho(D' + B'k + F'k') + D + Bk + Fk' = 0,$$

$$\rho(E' + F'k + C'k') + E + Fk + Ck' = 0,$$

que determinarão ρ, k, k', de modo que as expressões precedentes de x, y, z, satisfaçam ás propostas.

Chamando pois ρ_1, ρ_2, ρ_3, os tres valores de ρ que dá a equação final do terceiro gráu, e designando pelos mesmos indices inferiores os valores de k e k' correspondentes, teremos os integraes completos da proposta

$$x = \mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_1} + n) + \mathrm{H}'\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_2} + n') + \mathrm{H}''\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_3} + n''),$$

$$y = \mathrm{H}k_1\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\rho_1} + n) + \mathrm{H}'k_2\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_2} + n') + \mathrm{H}''k_3\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_3} + n''),$$

$$z = \mathrm{H}k'_1\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\rho_1} + n) + \mathrm{H}'k'_2\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_2} + n') + \mathrm{H}''k'_3\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_3} + n''),$$

sendo H, H', H'', n, n' n'', as seis constantes arbitrarias.

367. A eliminação entre as equações lineares, cujos coefficientes são os mesmos em todas, offerece um theorema elegante e util.

Sejam

$$A_i \frac{d^i x^{(1)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(1)}}{dt^{i-1}} + \ldots + A_0 x^{(1)} = 0,$$

$$A_i \frac{d^i x^{(2)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(2)}}{dt^{i-1}} + \ldots + A_0 x^{(2)} = 0,$$

....

$$A_i \frac{d^i x^{(n)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(n)}}{dt^i} + \ldots + A_0 x^{(n)} = 0,$$

n equações d'estas da ordem i, ou

$$\sum_0^i \mathrm{A}_m \frac{d^m x^{(1)}}{dt^m} = 0,\ \sum_0^i \mathrm{A}_m \frac{d^m x^{(2)}}{dt^m} = 0, \ldots \sum_0^i \mathrm{A}_m \frac{d^m x^{(n)}}{dt^m} = 0 \ldots \ (a);$$

sendo $\dfrac{d^0 x}{dt^0} = x$, notação conforme com $d^{m-1}\,x = \int d^m x$.

Se multiplicarmos $n-k$ d'estas equações respectivamente por $\overset{(1)}{\underset{p}{a}}, \overset{(2)}{\underset{p}{a}}, \ldots \overset{(n-k)}{\underset{p}{a}}$, e sommarmos os productos, teremos evidentemente a resultante

$$\sum_0^i \mathrm{A}_m \left(\overset{(1)}{\underset{p}{a}} \frac{d^m x^{(1)}}{dt^m} + \overset{(2)}{\underset{p}{a}} \frac{d^m x^{(2)}}{dt^m} + \ldots + \overset{(n-k)}{\underset{p}{a}} \frac{d^m x^{(n-k)}}{dt^m} \right) = 0 \ldots (b);$$

a qual se tornará n'aquella das equações (a), que é relativa á variavel $x^{(n-k+p)}$, pondo

$$x^{(n-k+p)} = \overset{(1)}{\underset{p}{a}} x^{(1)} + \overset{(2)}{\underset{p}{a}} x^{(2)} \ldots + \overset{(n-k)}{\underset{p}{a}} x^{(n-k)} \ \ldots\ldots (c).$$

Logo a equação (c) satisfaz ás propostas.

Fazendo variar o indice p desde 1 até k, teremos assim k equações da fórma (c), que satisfazem ás propostas, e contém $(n-k)k$ arbitrarias $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$; e ficarão para integrar $n-k$ das equações (a), que deverão dar $i\,(n-k)$ arbitrarias.

Mas, para que as k equações (c) sejam integraes completos das propostas (a), é necessario que, além de satisfazerem a estas equações, involvam um numero de arbitrarias que juncto ás $i\,(n-k)$ perfaça o total ni. Teremos pois a condição

$$(n-k)\,k + i\,(n-k) = ni,$$

que dá as raizes $k=0$, e $k=n-i$. D'onde resulta que $n-i$ é o maior numero de integraes da fórma (c), que satisfazem ás equações differenciaes (a).

Alguns problemas de geometria

368. Quando na equação d'uma curva $F(x, y, c) = 0$ se attribuem successivamente á constante c todos os valores possiveis, resulta um systema infinito de linhas. Chamam-se *Trajectorias* as curvas que têm a propriedade de cortar estas linhas sempre debaixo do mesmo angulo, isto é, de fazerem as suas tangentes com as d'ellas um angulo constante, para todos os pontos onde se encontram. A trajectoria é *orthogonal* quando as tangentes tiradas a esta curva e á curva variavel, na sua intersecção, fazem uma com a outra um angulo recto.

Procuremos a equação das trajectorias, $f(x, y) = 0$; sendo conhecida a equação da curva variavel, e o angulo constante das suas tangentes com as d'aquellas.

Seja
$$F(X, Y, c) = 0$$

a equação da curva que varía com o parametro c. Para um dado valor de c esta curva toma uma posição determinada AM (Fig. 47); e chamando Y', y', os valores das derivadas das ordenadas Y, y, da curva AM e da trajectoria na sua intersecção M, a tangente trigonometrica do angulo T'MT, que fazem entre si as tangentes MT' e MT, será

$$a = \frac{y' - Y'}{1 + y'Y'},$$

ou
$$(1 + y'Y')\,a + Y' - y' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

onde devemos substituir x e y em logar de X e Y, por ser o ponto M commum ás duas curvas, e tomar por a a constante ou funcção dada para valor da tangente trigonometrica do angulo das tangentes ás duas curvas.

Raciocinando como na pag. 154 da *Geom. Anal.*, vê-se que, se eliminarmos c entre $F(x, y, c) = 0$ e (1), depois de nesta substituir y em logar de Y, a resultante será a equação differencial da trajectoria, que deveremos integrar.

Se a trajectoria é orthogonal, ou $a = \infty$, a equação (1) reduz-se a

$$1 + Y'y' = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Procuremos, por exemplo, a curva que corta rectangularmente uma recta, que gira em torno da origem. Como a equação da recta é $Y = cX$, teremos $Y' = c$, o que reduz (2) a $\quad 1 + cy' = 0.$

Eliminando pois c entre esta e $y = cx$, a equação differencial da trajectoria será

$$xdx + ydy = 0$$

cuja integração dá

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Por onde se vê, que neste caso a trajectoria é um circulo de raio arbitrario e que tem a origem por centro.

Mas, se a trajectoria deve cortar a recta debaixo d'outro angulo dado cuja tangente é a, o mesmo calculo, applicado á equação (1), dá a differencial homogenea

$$y + ax = y'(x - ay),$$

cujo integral é

$$al\,(C\sqrt{x^2 + y^2}) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

Logo a trajectoria é uma spiral logarithmica (*Geom. Anal.*, n.º 137), como facilmente se vê transformando esta equação em coordenadas polares (*Geom. Anal.*, n.º 49).

O mesmo calculo applicado á equação $\quad X^m Y^n = c,$

que pertence ás parabolos e hyperboles de todas as ordens, dá a equação homogenea

$$(nx + amy)\,y' = anx - my.$$

Se a trajectoria deve ser orthogonal, esta equação torna-se em $myy' = nx$, cujo integral é $my^2 - nx^2 = \mathrm{A}$. Conseguintemente a curva será então uma hyperbole do segundo gráu, ou uma ellipse, conforme for positivo ou negativo o expoente n.

A trajectoria do circulo, que tem por equação $y^2 = 2cx - x^2$, é $y^2 + x^2 = \mathrm{A}\left(y - \dfrac{x}{a}\right)$; e, se deve ser orthogonal, isto é, se $a = \infty$, torna-se em outro circulo, $y^2 + x^2 = \mathrm{A}y$. Construiremos este circulo tomando para centro um ponto qualquer do eixo dos y, e para raio a distancia d'esse ponto á origem.

369. Quando se tracta de achar uma curva cuja subtangente, ou cuja tangente, deve ser uma funcção dada φ de x e y, é necessario integrar a equação respectiva $y = y'\varphi$, ou $y\sqrt{1 + y'^2} = y'\varphi$. D'onde veio o nome de *methodo inverso das tangentes* ao ramo de calculo que tem por objecto a integração das equações differenciaes de primeira ordem entre x e y.

Exemplos

370. *Achar a curva, na qual, em cada um de seus pontos, ha uma relação dada* $\mathrm{n} = \mathrm{F}t$ *entre a grandeza* n *da normal e a da abscissa* t *do pé da mesma normal.*

Por serem $\quad t = x + yy', \; n = y\sqrt{1 + y'^2},$

o problema proposto reduz-se a integrar a equação

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \mathrm{F}(x + yy').$$

Supponhamos, por exemplo, que $n = \mathrm{F}t$ deve ser a equação $u^2 = 2pt$ d'uma parabola, cujo parametro é $2p$. Substituindo na equação precedente,

vem $$y^2(1 + y'^2) = 2p(x + yy').$$

Para integrar esta equação, resolvamol-a em ordem a yy', e dividamos depois tudo pelo radical; o que dá

$$\frac{p-yy'}{\sqrt{p^2+2px-y^2}}+1=0.$$

Como o primeiro termo é evidentemente a derivada do seu denominador, teremos $\sqrt{p^2+2px-y^2}=a-x$, ou, quadrando e substituindo c em logar da constante arbitraria $a+p$,

$$y^2+x^2-2cx+c^2-2pc=0.$$

Logo a curva procurada é um circulo, que tem o centro em qualquer ponto do eixo dos x, e cujo raio é a meia proporcional entre $2p$ e a distancia c d'este ponto á origem: o que por outra parte é visivel.

Mas, além d'esta infinidade de circulos que satisfazem ao problema, acha-se tambem, para uma das soluções, a parabola. Com effeito, remontando-nos aos processos dos n.os 323 e 330, acharemos a solução singular $y^2=2px+p^2$, que é a equação d'uma parabola; e será facil verificar (como se viu no n.º 326) que esta parabola resulta da intersecção contínua de todos os circulos successivos que se comprehendem na solução geral.

371. *Achar uma curva tal que as perpendiculares abaixadas de dois pontos fixos sobre todas as suas tangentes formem um rectangulo constante* $=$ k.

Tomemos para eixo dos x a linha, que passa pelos dois pontos dados; e fixando a origem n'um d'elles, chamemos $2a$ a sua distancia. A equação de qualquer tangente é

$$\mathrm{Y}-y=y'(\mathrm{X}-r),$$

e as distancias dos dois pontos a esta linha são (*Geom. Anal.*, n.º 34)

$$\frac{2ay'+y-y'x}{\sqrt{1+y'^2}},\ \frac{y-y'x}{\sqrt{1+y'^2}};$$

logo $$(2ay'+y-y'x)(y-y'x)=k(1+y'^2)\dots\dots\dots(a).$$

Para integrar esta equação, differenciemol-a primeiro, o que dá

$$y''(y-y'x)(2a-x)-y''x(2ay'+y-y'x)=2ky'y''.$$

Como y'' é factor commum, teremos $y''=0$, e

$$(y-y'x)(2a-x)-(2ay'+y-y'x)=2ky'\dots\dots\dots(b).$$

A primeira dá $y'=c$, o que muda a proposta em

$$(2ac+y-cx)(y-cx)=k(1+c^2);$$

equação que se decompõe nas de duas rectas: e com effeito é facil verificar que estas satisfazem ao problema. Demais, o numero dos systemas de duas rectas, que se comprehendem na equação, é infinito.

Em quanto á equação (b): se d'ella tirarmos o valor de y', e o substituirmos em (a), mudando x em $x+a$ para transportar a origem ao meio da recta, teremos

$$y^2(a^2+k)+x^2=k(a^2+k);$$

equação d'uma ellipse, cujos fócos são os pontos fixos dados, e cujos semi-eixos são $\sqrt{k+a^2}$ e $\sqrt{k}$. Esta curva é uma solução singular do problema, e resulta da intersecção successiva das rectas comprehendidas no integral completo.

Poderão tambem servir de exercicio nesta especie de problemas as questões seguintes:

Achar uma curva tal que todas as perpendiculares abaixadas d'um ponto dado sobre as suas tangentes sejam eguaes.

Achar uma curva tal que as linhas tiradas de qualquer dos seus pontos para os dois pontos fixos sejam egualmente inclinadas sobre a tangente.

III

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFFERENCIAES QUE CONTÊM TRES VARIAVEIS

Equações differenciaes totaes

372. Equações lineares em ordem ás differenciaes. Como a differencial exacta d'uma equação $z=f(x, y)$ é $dz=pdx+qdy$, as funcções p e q de x e y devem satisfazer á condição de integrabilidade (n.º 315)

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Quando uma d'estas equações satisfizer á condição (1), integrar-se-ha a differencial exacta $pdx+qdy$ pelo processo exposto no n.º 315, e o resultado será a expressão $f(x, y)$ de z.

373. Se a equação differencial proposta é implicita

$$\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)',$$

designando P, Q, R funcções de x, y, z, podemos dar-lhe a fórma $dz=pdx+qdy$, pondo

$$p=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}},\; q=-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}.$$

Neste caso terá ainda logar a equação (1) quando a proposta for integravel. Como porém então p e q não só contém os x e y explicitos, mas tambem os implicitos em z, é necessario, para formar os dois membros de (1), differenciar em ordem a cada variavel x ou y explicita, e em ordem a z considerada como funcção d'ella; o que dá, em vez de (1), a seguinte

$$\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{dz},$$

ou, pondo as expressões de p e q em P, Q, R,

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0\ldots\ldots\ldots(2);$$

condição necessaria para que z seja funcção de duas variaveis independentes, ligada com ellas por uma só equação (*).

(*) Tambem se mostra do modo seguinte que a equação (2) é necessaria para ser (1)′ integravel:

Se (1)′ é integravel, seja μ o factor que torna differencial exacto o seu primeiro membro; isto é, que torna $\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\mu R\,dz=du$. Serão:

$$\frac{du}{dx}=\mu P,\ \frac{du}{dy}=\mu Q,\ \frac{du}{dz}=\mu R;$$

e por conseguinte (n.º 36)

$$\frac{d(\mu P)}{dy}=\frac{d(\mu Q)}{dx},\ \frac{d(\mu P)}{dz}=\frac{d(\mu R)}{dx},\ \frac{d(\mu Q)}{dz}=\frac{d(\mu R)}{dy}.$$

Multiplicando estas equações respectivamente por R, Q, P, e sommando, resulta a equação (2); porque a somma dos termos multiplicados por $d\mu$, para formar a qual bastaria que na dos outros se mudassem μ, dP, dQ, dR, respectivamente em $d\mu$, P, Q, R, é nulla.

Quando pois (1)′ tem um integral $u=0$, deve verificar-se a condição (2).

374. Para integrar $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, consideraremos primeiramente uma das variaveis, por exemplo z, como constante; e integraremos $Pdx + Qdy = 0$: o que dará $F(x, y, z, Z) = 0$; representando Z uma constante arbitraria, ou uma funcção $\varphi(z)$ de z. Depois, differenciando esta equação completamente, e comparando com a proposta, deverá resultar para dZ uma expressão, que $F = 0$ reduzirá a funcção unicamente de Z e z, se a proposta é integravel; e a integração d'ella fará conhecer a expressão Z, que torna $F(x, y, z, Z)$ o integral da mesma proposta.

Com effeito, se differenciassemos o integral $M = 0$ de $(1)'$, suppondo z constante, a integração de $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = 0$, feita na mesma hypothese, reproduziria $M = 0$. Ora a differencial deve ser então a mesma que $Pdx + Qdy = 0$; portanto deve o integral $M = 0$ ser identico com $F(x, y, z, Z) = 0$, determinando Z convenientemente.

Seja por exemplo,

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (x^2 + xz + z^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0,$$

ou
$$\frac{dx}{x^2 + xz + z^2} + \frac{dy}{y^2 + yz + z^2} + \frac{(x^2 + xy + y^2)\,dz}{(x^2 + xz + z^2)(y^2 + yz + z^2)} = 0.$$

Fazendo dz nullo, o integral é

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{z + 2x}{z\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{z + 2y}{z\sqrt{3}}\right)\right] = fz,$$

ou, por ser $\quad \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = m) + \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = n) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{m + n}{1 - mn}\right),$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{(x + y + z)\,z\sqrt{3}}{z^2 - zx - zy - 2xy}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,zfz = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = Z\sqrt{3}),$$

e portanto $\quad \dfrac{(x + y + z)\,z}{z^2 - zx - zy - 2xy} = \dfrac{(x + y + z)\,z}{D} = Z \ldots\ldots (\alpha).$

Differenciando em ordem a z, e egualando ao termo em dz da proposta, vem

$$2\,(x^2z+3xyz+y^2z+z^2x+z^2y+x^2y+y^2x)\,dz+D^2dz=0,$$

ou, pondo por D a sua expressão e supprimindo o factor commum $x+y+z$,

$$2\,(xy+yz+xz)\,Z^2dz+(x+y+z)\,z^2dZ=0.$$

Depois, substituindo $xz+yz=\dfrac{z^2Z-z^2-2xyZ}{Z+1}$, que se tira de (α), e dividindo pelo factor commum $2Z\,(z^2-xy)$, fica

$$Z\,(Z-1)\,dz+zdz=0,$$

que dá $\quad z=\dfrac{cZ}{Z-1}$, e por conseguinte $Z=\dfrac{z}{z-c}$.

Finalmente substituindo em (α), temos o integral pedido, a que se pode dar a fórma

$$xy+xz+yz=c\,(x+y+z).$$

375. Posto isto, seja μ o factor que torna integravel a somma dos dois primeiros termos da equação $(1)'$, supposto z constante, e u o integral respectivo.

Para completar o integral da proposta, ajunctaremos uma funcção $Z=\varphi z$ de z. E, comparando a differencial de $u+\varphi z$ com a proposta, será

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\,dz+\varphi'(z)\,dz=P\mu dx+Q\mu dy+R\mu dz;$$

ou, por serem os dois primeiros termos do primeiro membro identicos com os dois primeiros do segundo membro, $\quad \dfrac{du}{dz}+\varphi'(z)=R\mu.$

Satisfará pois á proposta o systema das duas equações

$$u+\varphi\,(z)=0,\ \frac{du}{dz}+\varphi'\,(z)=R\mu\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(3).$$

376. 1.º Se, attendendo á primeira equação (3), a segunda dá a expressão de $\varphi(z)$ em z, sem x nem y: substituindo esta expressão na primeira das mesmas equações, virá o integral

$$F(x, y, z) = 0,$$

da proposta, o qual representa superficies distinctas umas das outras pelo parametro c proveniente d'aquella integração.

377. Acontece isto, quando a proposta $(1)'$ satisfaz á condição (2); como vamos mostrar.

Com effeito, se a primeira das equações (3) é o integral de $(1)'$, deve a sua differencial, na hypothese de z constante, coincidir com $P\mu dx + Q\mu dy = 0$; o que dá então $dy = -\frac{P}{Q}dx$. E para que a segunda das mesmas equações dê a expressão de $\varphi(z)$ em z, é necessario e basta que, attendendo á primeira, $R\mu - \frac{du}{dz}$ se reduza a uma funcção de z, isto é, que, na mesma hypothese de z constante, a sua differencial se anniquille; sendo assim

$$\frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dx}dx + \frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dy}dy = 0,$$

ou

$$\frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dx} - \frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dy} \cdot \frac{P}{Q} = 0,$$

isto é,

$$Q\left(R\frac{d\mu}{dx} + \mu\frac{dR}{dx} - \frac{d^2u}{dxdz}\right) - P\left(R\frac{d\mu}{dy} + \mu\frac{dR}{dy} - \frac{d^2u}{dydz}\right) = 0\ldots\ldots(a).$$

Mas, por ser u integral de $\mu Pdx + \mu Qdy$, e por conseguinte

$$\frac{du}{dx} = \mu P,\ \frac{du}{dy} = \mu Q,$$

são $$\frac{d^2u}{dxdz}=P\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{dP}{dz},\ \frac{d^2u}{dydz}=Q\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{dQ}{dz}\ldots\ldots\ldots(b);$$

e a condição respectiva de integrabilidade (n.º 315) dá

$$\frac{d(\mu Q)}{dx}-\frac{d(\mu P)}{dy}=\mu\frac{dQ}{dx}+Q\frac{d\mu}{dx}-\mu\frac{dP}{dy}-P\frac{d\mu}{dy}=0\ldots(c).$$

Deve pois attender-se ás equações (b) e (c); e, porque ellas reduzem (a) a (2), segue-se que é (2) a condição necessaria e sufficiente para que a segunda das equações (3) dê a expressão de $\varphi(z)$ em z, e portanto a condição de integrabilidade da equação $(1)'$.

378. 2.º Mas, se a proposta $(1)'$ não satisfizer á condição de integrabilidade, isto é, se $\frac{du}{dz}-\mu R$ não for reduzivel a uma funcção de z, tomaremos φz arbitrariamente; e o systema (3) representará curvas que satisfazem á proposta, distinctas umas das outras pela funcção φz.

379. Portanto o systema de equações (3), que satisfaz á proposta $(1)'$, representa linhas, que se distinguem umas das outras pela funcção φz; mas, no caso de, em virtude da primeira, se reduzir a segunda a uma differencial entre φz e z, o que tem logar quando $(1)'$ satisfaz á condição de integrabilidade (2), as linhas estão todas sobre uma superficie, cuja equação resulta de eliminar φz entre a primeira das mesmas (3) e o integral da segunda.

Noutro tempo chamavam-se *absurdas* as equações que não satisfaziam á condição (2) de integrabilidade; estabelecendo-se como principio que taes equações nada significavam, e que um problema susceptivel de solução nunca podia conduzir a esta especie de relações, as quaes se suppunham equivalentes aos imaginarios. Monge, apresentando a theoria precedente, provou que similhante opinião é falsa.

380. Notaremos que as relações que ligam p e q com P, Q, R, (n.º 373),

$$p = -\frac{P}{R},\ q = -\frac{Q}{R},$$

ou $$Rp + P = 0,\ Rq + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d),$$

são duas equações differenciaes parciaes da primeira ordem.

Assim o problema, que fica resolvido, equivale a achar uma funcção $M = 0$ tal que, tirando d'ella as expressões de p e q, estas satisfaçam a (d), e por conseguinte $(M) = 0$ a $dz = pdx + qdy$. (*Calc.* de Serret, n.º 784).

381. *Exemplos:*

I. Para $$(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0,$$

que satisfaz á condição (2), o factor μ é $\dfrac{1}{(y+z)(x+z)}$, e é $R = x + y$.

Temos pois $$u = l\,(y+z)\,(x+z);$$
e as equações (3) são

$$(y+z)(x+z)\,e^{\varphi(z)} = 1,\ \frac{x+y+2z}{(y+z)(x+z)} + \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{x+y}{(y+z)(x+z)}.$$

A segunda d'estas reduz-se, em virtude da primeira, a

$$2\,z\,e^{\varphi z}dz + d\,\varphi(z) = 0;$$

e eliminando $\varphi(z)$ entre o seu integral, $z^2 - e^{-\varphi(z)} + c = 0$ e a primeira, vem o integral procurado

$$xy + xz + yz = c.$$

II. Para $$zdx + xdy + ydz = 0,$$

que não satisfaz á condição (2), são

$$\mu = x^{-1},\ R = y,$$

o que dá $$u = y + zlx.$$

Por conseguinte o systema de equações, que satisfaz á proposta, é

$$y + zlx + \varphi(z) = 0,\quad lx + \varphi'(z) = yx^{-1}.$$

III. Para $$[x(x-a) + y(y-b)]\,dz = (z-c)[xdx + ydy],$$

que sómente satisfaz á condição (2) no caso de serem a e b nullos, é $R = x(x-a) + y(y-b)$; e, se fizermos $\mu = \dfrac{1}{z-c}$, acharemos

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Por conseguinte o systema das equações (3) será

$$x^2 + y^2 + 2\varphi(z) = 0,\quad \frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c} + \varphi'(z) = 0.$$

No caso de serem a e b nullos, a segunda d'estas equações, attendendo á primeira, dá $\varphi(z) = A(z-c)^2$; e substituindo na primeira, obtem-se o integral da proposta

$$x^2 + y^2 + 2A(z-c)^2 = 0.$$

382. Equações não lineares em ordem ás differenciaes. Qualquer que seja o integral nestas equações, é claro que, differenciando, ha de o resultado poder reduzir-se á fórma $Pdx + Qdy + Rdz$; conseguintemente a proposta deve tambem ser reductivel a ella. Por onde se vê que, se resolvermos a proposta em ordem a dz, os dx e dy não deverão ficar affectos de radical, e que ella não será integravel quando não podér decompor-se em factores lineares.

Assim a equação

$$Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddxdy + Edxdz + Fdydz = 0,$$

resolvida em ordem a dz, dá o radical

$$\sqrt{(E^2 - 4AC)\,dx^2 + 2\,(EF - 2DC)\,dxdy + (F^2 - 4BC)\,dy^2},$$

que a condição

$$(EF - 2DC)^2 - (E^2 - 4AC)\,(F^2 - 4BC) = 0 \ldots\ldots (4).$$

reduzirá a $\qquad dx\sqrt{E^2 - 4AC} + dy\sqrt{F^2 - 4BC}.$

Portanto, se a equação (4) for satisfeita, teremos de integrar duas equações da forma

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

das quaes a proposta é o producto.

Equações differenciaes parciaes da primeira ordem

383. Temos tractado de reverter d'uma equação $dz = pdx + qdy$, na qual p e q são os coefficientes differenciaes dados de z em ordem a x e y, ao seu integral $z = f(x, y)$. Agóra vamos procurar o integral $z = f(x, y)$, quando é conhecido sómente um dos coefficientes p, q, ou uma relação entre elles.

384. Comecemos pelo caso em que não entra q na relação proposta, isto é, em que essa relação tem a fórma

$$F(x, y, z, p) = 0.$$

Por serem independentes as variaveis x, y, e não entrar q na proposta, esta equação suppõem que sómente x e z variaram, isto é, que, para passar do integral $z = f(x, y)$ á proposta, o deveriamos differenciar parcialmente em ordem a x.

Basta pois, quando se quer achar o integral, fazer na proposta $p = \frac{dz}{dx}$, e integrar a equação em x e z, suppondo y constante. Então a constante, que se ajuncta ao integral, deve ser uma *funcção arbitraria* de y, que representaremos por φy.

Assim: *para integrar* $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{p}) = 0$, *devemos eliminar* p *por meio de* $\mathrm{dz} = \mathrm{pdx}$; *integrar, suppondo* y *constante; e ajunctar ao integral a funcção arbitraria* y.

Por um processo similhante se integrará $F(x, y, z, q) = 0$; e teremos a mesma regra, mudando respectivamente nella x, y, p em y, x, q.

Exemplos

I. A equação $$x = p\sqrt{x^2 + y^2}$$

dá
$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}=dz,\ z=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi y.$$

II. A equação $\qquad p\sqrt{a^2-y^2-x^2}=a$

dá $\quad dz=\dfrac{adx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}},\ z=a\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)+\varphi y.$

III.
$$qxy+az=0$$

dá
$$\frac{xdz}{z}+\frac{ady}{y}=0,\ z^xy^a=\varphi x.$$

IV. Em fim a equação $\qquad p(x^2+y^2)=y^2+z^2$

dá a homogenea $\quad (x^2+y^2)\,dz-(y^2+z^2)\,dx=0,$
e depois

$$\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{z}{y}\right)-\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x}{y}\right)=\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=\mathrm{Y}),$$

ou
$$\frac{y(z-x)}{y^2+zx}=\mathrm{Y}.$$

385. Em geral o integral $f(x,\ y,\ z,\ \varphi\rho)=0$ d'uma equação differencial parcial da primeira ordem entre tres variaveis deve conter uma só funcção arbitraria. Com effeito, derivando este integral em ordem ás duas variaveis independentes, as duas equações resultantes

$$\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}+\frac{df}{d(\varphi\rho)}\varphi'\rho\left(\frac{d\rho}{dx}+p\frac{d\rho}{dz}\right)=0,$$

$$\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}+\frac{df}{d(\varphi\rho)}\varphi'\rho\left(\frac{d\rho}{dy}+q\frac{d\rho}{dz}\right)=0,$$

e

$$f(x,\,y,\,z,\,\varphi\rho)=0,$$

formarão um systema de tres equações, entre as quaes eliminando $\varphi\rho$ e $\varphi'\rho$ resultará a equação differencial parcial sem funcção arbitraria.

386. Para interpretar geometricamente a introducção da funcção arbitraria, lembremo-nos de que o plano tangente em qualquer ponto d'uma superficie fica determinado quando se conhecem as tangentes nesse ponto a duas curvas, que por elle passam, traçadas na superficie. Assim, tirando por um ponto da superficie dois planos respectivamente parallelos aos dos xz e dos yz, as tangentes nelle ás curvas de intersecção, que serão dadas pelos coefficientes differenciaes $\frac{dz}{dx}=p$ e $\frac{dz}{dy}=q$, determinarão o plano tangente á superficie no mesmo ponto.

Posto isto, como a equação $\quad F(x,\,y,\,z,\,p,\,q)=0$

deixa arbitrario um dos coefficientes $p,\,q$: se, traçando um plano parallelo aos xz, e descrevendo nelle uma curva arbitraria, tirarmos depois o valor de p da equação d'essa curva, e o substituirmos na proposta, esta dará q; por conseguinte os valores de p e q assim obtidos em toda a extensão da curva determinarão os respectivos planos tangentes, isto é, o cylindro circumscripto á superficie ao longo d'essa curva. Depois, se cortarmos este cylindro por um plano parallelo aos xz, e tão proximo do precedente que a superficie do cylindro, comprehendida entre ambos, se possa considerar como elemento da superficie curva, poderemos fazer, a partir da nova curva, uma construcção similhante, com a qual obteremos outra porção de superficie; e assim por diante.

Por onde se vê que, traçando arbitrariamente a curva inicial, podemos construir a superficie curva que representa a equação proposta. Conseguintemente a equação finita d'esta superficie $f(x,\,y,\,z,\,\varphi)=0$ deve conter a funcção arbitraria φ correspondente á mesma curva inicial. (*Calc.* de Navier, n.º 470).

387. Equações lineares. Passemos á equação linear da primeira ordem

$$Pp + Qq = V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

sendo P, Q, V, funcções de x, y, z.

Eliminando p por meio da equação de definição $dz = pdx + qdy$, resulta

$$Pdz - Vdx = q\,(Pdy - Qdx) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2):$$

equação, á qual se deve satisfazer da maneira mais geral, independentemente do valor de q; porque, segundo a equação proposta, este coefficiente fica indeterminado.

388. Quando as variaveis x, y, z estão separadas nos dois membros, entrando só duas em cada um d'elles, podem ambos, prescindindo de q, tornar-se integraveis multiplicando-os por factores convenientes.

Sejam π e ρ os integraes de $\mu'\,(Pdz - Vdx)$ e $\mu\,(Pdy - Qdx)$, isto é, sejam $\mu'\,(Pdz - Vdx) = d\pi$, $\mu\,(Pdy - Qdx) = d\rho$.

A equação (2) será $\mu\, d\pi = q\,\mu'\, d\rho$.

E, como q é arbitrario, podemos tomal-o tal que $\dfrac{\mu' q}{\mu}$ seja uma funcção qualquer $\varphi'\rho$ de ρ; de sorte que o integral d'esta equação será o pedido

$$\pi = \varphi\rho;$$

represéntando φ uma funcção arbitraria.

389. Supponhamos porém que x, y, z estão misturados em $Pdz - Vdx$ e $Pdy - Qdx$. Se for possivel substituir o systema das equações $Pdz - Vdx = 0$, $Pdy - Qdx = 0$, pelo d'outras da fórma $d\pi = 0$, $d\rho = 0$, resultantes da sua combinação, esta combinação exprimir-se-ha do modo mais geral, como é sabido, multiplicando por factores convenientes, e sommando.

Sejam pois A, B, A', B', factores convenientes, que tornem

$$A\,(Pdz - Vdx) + B\,(Pdy - Qdx) = d\pi,$$
$$A'\,(Pdz - Vdx) + B'(Pdy - Qdx) = d\rho.$$

Teremos $Pdz - Vdx = \frac{B'd\pi - Bd\rho}{AB' - A'B}$, $Pdy - Qdx = \frac{Ad\rho - A'd\pi}{AB' - A'B}$,

que, substituindo em (2), dão $\quad B'd\pi - Bd\rho = q\,(Ad\rho - A'd\pi)$,

ou
$$d\pi = \frac{Aq + B}{A'q + B'}\,d\rho.$$

Assim, tomando q tal que seja $\frac{Aq+B}{A'q+B'}$ uma funcção qualquer $\varphi'\rho$ de ρ, será $\pi = \varphi\rho$ o integral da proposta.

Por exemplo, na equação

$$p - q\left(\frac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right) = \frac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z},$$

são :

$$P = 1,\ Q = -\left(\frac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right),\ V = \frac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z};$$

e portanto

$$Pdz - Vdx = dz - dx\left(\frac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z}\right),$$

$$Pdy - Qdx = dy + dx\left(\frac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right).$$

Multiplicando por A e B, A' e B', sommando, e pondo $x^2 + y + z = u^2$, o que dá $dz = 2udu - 2xdx - dy$, teremos

$$A'\left[dz - dx\left(\frac{1}{2} - x + u\right)\right] + B'\left[dy + dx\left(\frac{1}{2} + x - u\right)\right] = d\rho,$$

$$A\left[2udu - 2xdx - dy - dx\left(\frac{1}{2} - x + u\right)\right] + B\left[dy + dx\left(\frac{1}{2} + x - u\right)\right] = d\pi,$$

que, tomando $A' = -B' = 1$, $A = B = \frac{1}{2u}$, se reduzem a

$$dz - dx - dy = d\rho, \quad du - dx = d\pi.$$

Portanto o integral $\pi = \varphi\rho$ é

$$u - x = \sqrt{x^2 + y + z} - x = \varphi(z - y - x).$$

390. Se eliminassemos q de (1), o que daria $Vdy - Qdz = p(Pdy - Qdx)$, operariamos semelhantemente a respeito de $Vdy - Qdz$ e $Pdy - Qdx$.

391. Em qualquer d'estes casos é claro que os integraes $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, do systema das equações

$$Pdz - Vdx = 0, \; Pdy - Qdx = 0, \; Qdz - Vdy = 0, \ldots\ldots (3),$$

cada uma das quaes resulta das outras duas, são integraes particulares da proposta, porque $\rho = \text{const.}$ dá $\pi = \varphi\rho = \text{const.}$

Logo: *para integrar a equação linear ás differenciaes parciaes da primeira ordem* (1), *basta achar funcções* $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, *que satisfaçam ás equações* (3), *e pôr depois* $\pi = \varphi(\rho)$, *sendo* $\varphi(\rho)$ *uma funcção arbitraria de* ρ.

392. Para mostrar que $\pi = \varphi(\rho)$ é integral de (1), podemos tambem proceder do modo seguinte.

Para que o integral $\pi = \varphi(\rho)$ satisfaça a (1), é necessario que, differenciando-o debaixo da fórma $dz = pdx + qdy$, os valores de p e q assim achados reduzam (1) a uma identidade. É o que vamos verificar.

Sendo as differenciaes de $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$,

$$d\pi = \text{A}dx + \text{B}dy + \text{C}dz, \quad d\rho = adx + bdy + cdz,$$

as de $\pi - \varphi(\rho) = 0$, serão:

em ordem a z e x $\qquad (\text{C} - c\varphi'\rho)p + \text{A} - a\varphi'\rho = 0,$

em ordem a z e y $\qquad (C - c\varphi'\rho)\,q + B - b\varphi'\rho = 0.$

Tirando d'estas equações as expressões de p e q para as substituir em (1), resulta a transformada

$$AP + BQ + CV = (aP + bQ + cV)\,\varphi'\rho.$$

Mas, substituindo nas expressões de $d\pi = 0$, $d\rho = 0$, os valores de duas das differenciaes dx, dy, dz, tirados das equações (3), ás quaes satisfazem $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, resultam

$$AP + BQ + CV = 0,\ aP + bQ + cV = 0,$$

que reduzem a uma identidade a mesma transformada: logo é $\pi = \varphi\rho$ o integral pedido.

493. Raciocinando d'um modo analogo, podemos integrar uma equação differencial parcial linear da primeira ordem entre qualquer numero de variaveis.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seja} & P_1 \dfrac{dz}{dx_1} + P_2 \dfrac{dz}{dx_2} \ldots + P_n \dfrac{dz}{dx_n} = V, \\ \\ \text{ou} & \sum_1^n P_k \dfrac{dz}{dx_k} = V \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

a equação linear de primeira ordem entre n variaveis independentes; na qual $x_1, x_2, \ldots . x_n$ designam estas variaveis, e $P_1, P_2, \ldots . P_n$, os coefficientes, que podem ser funcções d'ellas e de z.

Formando n equações da fórma

$$\left.\begin{array}{r} P_k dx_l - P_l dx_k = 0 \\ \\ P_k\, dz - V dx_k = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2],$$

e procurando n equações finitas

$$A^{(1)}=c^{(1)},\ A^{(2)}=c^{(2)}\ldots\ldots A^{(n)}=c^{(n)}\ldots\ldots\ldots\ldots[3]$$

que satisfaçam a [2], o integral da proposta [1] será

$$A^{(1)}=\varphi(A^{(2)},\ A^{(3)},\ldots.A^{(n)})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[4],$$

designando φ uma funcção arbitraria. É o que passamos a mostrar, raciocinando de um modo analogo ao do numero precedente.

Se differenciarmos a equação [4] separadamente em ordem ás n variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots x_n$, teremos n equações, nas quaes entram os $n-1$ coefficientes differenciaes $\frac{d\varphi}{dA^{(2)}}, \frac{d\varphi}{dA^{(3)}}, \ldots \frac{d\varphi}{dA^{(n)}}$; e eliminando entre ellas estes coefficientes, resultará uma equação de primeira ordem, sem funcção arbitraria, que se deve comparar com a proposta para determinar a fórma das funcções $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(n)}$, de modo que estas duas equações sejam identicas, isto é, de modo que a equação [4] seja integral da proposta.

Sejam

$$\left.\begin{array}{l}
dA^{(1)}=a_1^{(1)}dx_1+a_2^{(1)}dx_2+\ldots a_n^{(1)}dx_n+a^{(1)}dz \\
dA^{(2)}=a_1^{(2)}dx_1+a_2^{(2)}dx_2+\ldots a_n^{(2)}dx_n+a^{(2)}dz \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dA^{(n)}=a_1^{(n)}dx_1+a_2^{(n)}dx_2+\ldots a_n^{(n)}dx_n+a^{(n)}dz
\end{array}\right\}\ldots\ldots[5].$$

Differenciando [4] em ordem a x_1, resulta

$$\frac{dA^{(1)}}{dx_1}-S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}}\cdot\frac{dA^{(i)}}{dx_1}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[6];$$

onde escrevemos S para designar sommas relativas ás funcções $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(n)}$, do mesmo modo que Σ designa sommas relativas ás variaveis $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Em virtude das equações [5], que dão

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA^{(1)}}{dx_1} &= a_1^{(1)} + a^{(1)}\frac{dz}{dx_1} \\ \frac{dA^{(2)}}{dx_1} &= a_1^{(2)} + a^{(2)}\frac{dz}{dx_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dA^{(n)}}{dx_1} &= a_1^{(n)} + a^{(n)}\frac{dz}{dx_1} \end{aligned}\right\},$$

reduz-se [6] a $a_1^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_1^{(i)} + \frac{dz}{dx_1}\left\{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}\right\} = 0;$

da qual se tira

$$\frac{dz}{dx_1} = -\frac{a_1^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_1^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}},$$

e similhantemente

$$\frac{dz}{dx_2} = -\frac{a_2^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_2^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz}{dx_n} = -\frac{a_n^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_n^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)} \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}}.$$

Substituindo estas expressões de $\frac{dz}{dx_1}$, $\frac{dz}{dx_2}$,... $\frac{dz}{dx_n}$ na proposta [1], e attendendo a que, em virtude da independencia dos symbolos Σ e S, é $\Sigma S = S\Sigma$, resulta

$$\Sigma_1^n a_k^{(1)} P_k + a^{(1)} V = S_{(2)}^{(n)} \left\{ \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} (\Sigma_1^n a_k^{(i)} P_k + a^{(i)} V) \right\} \ldots\ldots [7];$$

equação que se deve reduzir a uma identidade, para que [4] satisfaça sempre á proposta [1].

Ora, se as funcções $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,... $A^{(n)}$, forem taes que as equações [3] satisfaçam a [2], a substituição de $dx_k = P_k \frac{dz}{V}$, tirado da segunda de [2], em $dA^{(1)} = 0$, $dA^{(2)} = 0$,... $dA^{(n)} = 0$, dará, supprimindo o factor commum $\frac{dz}{V}$, as equações

$$\Sigma_1^n P_k a_k^{(1)} + a^{(1)} V = 0, \ \Sigma_1^n P_k a_k^{(2)} + a^{(2)} V = 0, \ldots \Sigma_1^n P_k a_k^{(n)} + a^{(n)} V = 0,$$

que reduzem [7] a uma identidade. Logo, se $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,... $A^{(n)}$, se determinarem de modo que as equações [3] satisfaçam a [2], será [4] o integral da proposta (1).

Na pratica a formação das equações [2] pode facilitar-se: escrevendo as duas linhas, uma de differenciaes, outra de coefficientes,

$$\begin{array}{ccccc} dx_1 & dx_2 & dx_3 \ldots\ldots dx_n & dz \\ P_1 & P_2 & P_3 \ldots\ldots P_n & V; \end{array}$$

multiplicando em cruz as quatro quantidades de cada par de columnas, combinadas estas duas a duas; e egualando a zero a differença dos dois productos respectivos.

Exemplo

Seja a equação $$0 = x\frac{du'}{dx'} + y\frac{du'}{dy'} + z\frac{du'}{dz'},$$

onde x, y, z, x', y', z', designam as seis variaveis independentes, e u' a dependente.

Escrevendo, como fica dito, as duas linhas,

$$\begin{array}{ccccccc} dx & dy & dz & dx' & dy' & dz' & du' \\ 0 & 0 & 0 & x & y & z & 0, \end{array}$$

e multiplicando em cruz, formaremos as equações da fórma [2], que todas se reduzirão ás sete

$$du' = 0,\ dx = 0,\ dy = 0,\ dz = 0,$$

$$xdy' - ydx' = 0,\ xdz' - zdx' = 0,\ ydz' - zdy' = 0.$$

Escolhendo as seis primeiras d'estas, que dão

$$u' = c,\ x = c_1,\ y = c_2,\ z = c_3,\ c_1y' - c_2x' = c_4,\ c_1z' - c_3x' = c_5,$$

o integral da proposta será

$$u' = \varphi\,(xy' - yx',\ xz' - zx',\ x,\ y,\ z).$$

Se com a primeira nos tivessemos servido de outras cinco, nas quaes entrasse uma differente d'aquellas de que acabamos de servir-nos, o integral, posto que parecesse differente, não o seria na realidade; porque ha uma relação entre as seis funcções $x, y, z, xy' - yx', xz' - zx', yz' - zy'$, que reduz a cinco o numero das distinctas.

Com effeito, sejam $\quad xy' - yx' = a,\ xz' - zx' = b.$

Eliminando x', vem $\quad zy' - yz' = \dfrac{az}{x} - \dfrac{by}{x}.$

Portanto, dando ao integral (*Mec. Cel.*, liv. 2.° n.° 18) a fórma

$$u' = \varphi\,(zy' - yz',\ xy' - yx',\ xz' - zx',\ x,\ z,\ y),$$

deve entender-se que esta fórma só é mais geral apparentemente, e que debaixo de φ não ha senão cinco combinações distinctas.

A mesma observação deve fazer-se em outros casos, em que apparentemente figura como menos geral o integral que resulta do processo exposto. Se apparece debaixo da funcção arbitraria maior numero de funcções que o das variaveis independentes menos uma, é por ser alguma d'essas quantidades funcção das outras. Nem outra cousa podia acontecer; porque, se taes combinações fossem distinctas, as equações resultantes da differenciação do integral em ordem a todas as variaveis independentes não dariam, como devem dar, pela eliminação dos coefficientes differenciaes, uma equação final independente d'estes coefficientes.

394. Vejamos agora o que acontece em diversos casos.

1.° Se V é nullo, uma das equações (3) torna-se em $dz = 0$, e dá $z = \alpha = \pi$; o que substituido na outra, a reduzirá a uma equação entre as duas variaveis x e y, cujo integral $\rho = \beta$ se achará pelos methodos acima expostos. Assim $z = \varphi\rho$ será o integral da proposta.

Exemplos

I. $\qquad \dfrac{dx}{d\alpha} = z\,\dfrac{dx}{dt}$, sendo $z = fx$ (*Mec. Cel.*, n.° 21).

As duas primeiras equações (3) dão $dx = 0,\ dt + zd\alpha = 0$: o integral da primeira é $x=c$; e o da segunda, depois de feita a substituição de $x=c$, é $t+\alpha fc=c'$;

logo $$x=c,\ t+\alpha z=c',$$

e o integral da proposta é $$x=\varphi(t+\alpha z).$$

II. Em $$py=qx,$$

temos $$P=y,\ Q=-x,\ V=0;$$

o que reduz as duas primeiras equações (3) a

$$dz=0,\ ydy+xdx=0;$$

logo $$\pi=\alpha=z,\ \rho=\beta=x^2+y^2,$$

e o integral é $$z=\varphi(x^2+y^2),$$

equação finita das superficies de revolução em volta do eixo dos z (*Geom. Anal.*, n.º 169, e *Calc. Diff.* n.º 150, IV).

III. Em $$px+qy=0,$$

temos $$xdy-ydx=0,$$

que dá $$ly=lax,\ y=\alpha x,\ \frac{y}{x}=\alpha=\rho;$$

logo $$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

que é a equação dos conoides (n.º 150, III).

IV. Do mesmo modo $q = p\text{P}$,
onde P não contém z, dá

$$\rho = \int \text{F}\,(dx + \text{P}dy),\ z = \varphi\rho,$$

designando por F o factor, que torna integravel $dx + \text{P}dy$.

2.° Quando duas das equações (3) não contêm senão duas variaveis e suas differenciaes, a integração dá facilmente π e ρ.

I. Seja, por exemplo, $px + qy = nz$.

As equações (3) dão $xdz = nzdx,\ xdy = ydx$,

das quaes resulta $z = \alpha x^n,\ y = \beta x$.

Tirando d'estas os valores de α e β, e substituindo em $\alpha = \varphi(\beta)$, será

portanto o integral $z = x^n \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Vê-se que φ é uma funcção arbitraria homogenea; e como a proposta é o enunciado do theorema das funcções homogeneaes (n.° **317**, 5.°), aqui temos outra demonstração d'este theorema para o caso de duas variaveis.

II. Para $px^2 + qy^2 = z^2$,

temos $x^2dz = z^2dx,\ x^2dy = y^2dx$;

logo $z^{-1} - x^{-1} = \pi,\ y^{-1} - x^{-1} = \rho$;

e o integral é $$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right),$$

ou $$\frac{x - z}{xz} = \varphi\left(\frac{x - y}{xy}\right).$$

III. Para $$q = pX + V,$$

onde X e V designam funcções de x, temos

$$Xdz + Vdx = 0,\ Xdy + dx = 0;$$

logo $$z = -\int \frac{Vdx}{X} + \varphi\left(y + \int \frac{dx}{X}\right).$$

3.° Quando uma das equações (3) contém só duas variaveis, a sua integração dará $\pi = \alpha$: eliminando depois por meio d'este integral uma das variaveis de qualquer das outras duas equações (3), e integrando, teremos $\rho = \beta$: finalmente repondo π em logar de α na expressão ρ, será o integral $\pi = \varphi\rho$, ou $\rho = \varphi_1 \pi$.

I. Seja, por exemplo, $$qxy - px^2 = y^2.$$

Teremos $$x^2dz + y^2dx = 0,\ x^2dy + xydx = 0.$$

A segunda dá $$xy = \beta = \rho;$$

e substituindo $y = \dfrac{\beta}{x}$ na primeira, virá $$dz + \frac{\beta^2 dx}{x^4} = 0,$$

que dá $$z = \frac{1}{3}\,\frac{\beta^2}{x^3} + \alpha;$$

depois, pondo xy em logar de β, $$z - \frac{1}{3}\,\frac{y^2}{x} = \alpha = \pi;$$

sendo portanto o integral pedido

$$3zx = y^2 + 3x\varphi(xy).$$

II. Para $$px + qy = n\sqrt{x^2+y^2},$$

temos $$xdz = ndx\sqrt{x^2+y^2},\ xdy = ydx.$$

A segunda dá $y = \beta x$; e eliminando y da primeira, fica

$$dz = n\sqrt{1+\beta^2}\,.\,dx,$$

que dá $$z - nx\sqrt{1+\beta^2} = \alpha;$$

logo $$\frac{y}{x} = \beta = \rho,\ z - nx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \alpha = \pi,$$

e $$z = n\sqrt{y^2+x^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

395. Mas, quando x, y e z entram ao mesmo tempo em todas as equações (3), não é possivel integrar cada uma d'estas equações em particular; porque y não se pode suppôr constante na primeira, nem z na segunda, etc.

Neste caso é forçoso recorrer a artificios particulares de analyse. Assim nas equações seguintes (que resultam da integração por partes, applicada a $dz = pdx + qdy$),

$$z = px + \int(qdy - xdp)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

$$z = py + \int(pdx - ydq)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

$$z = px + qy - \int(xdp + ydq)\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

substituindo, em logar de p ou q, o seu valor tirado da proposta, muitas vezes se consegue integral-a.

Seja, por exemplo, p uma funcção dada de q,

$$p = Q.$$

A relação (6) dá $\quad z = Qx + qy - \int x(Q' + y)\,dq:$

logo o factor de dq não deve conter x, nem y; e teremos

$$xQ' + y = \varphi' q,\ z = Qx + qy - \varphi q,$$

sendo φ uma funcção arbitraria. Eliminando depois q entre estas duas equações, para cada fórma da funcção φ, resultará o integral pedido.

396. Quando a equação $Pp + Qq = V$ for homogenea em x, y e z, faremos $x = tz$, $y = uz$: P, Q, V mudar-se-hão em $P_1 z^n$, $Q_1 z^n$, $V_1 z^n$; e as equações (3) darão

$$(P_1 - tV_1)\,dz = zV_1 dt,\ (Q_1 - uV_1)\,dz = zV_1 du,$$

ou, eliminando dz,

$$(P_1 - tV_1)\,du = (Q_1 - uV_1)\,dt.$$

Como esta ultima equação contém sómente as variaveis t e u, podemos achar o seu integral, e servir-nos d'elle para eliminar t ou u d'uma das duas precedentes, que então se saberá tambem integrar: em fim, eliminando u e t dos dois integraes assim achados por meio de $x = tz$ e $y = uz$, acharemos as soluções π e ρ das equações (3), e por conseguinte o integral $\pi = \varphi\rho$.

Seja, por exemplo, a equação $\quad pxz + qyz = x^2.$

Teremos $\quad (1 - t^2)\,dz = ztdt,\ u(1 - t^2)\,dz = zt^2du;$

logo $\quad udt = tdu,\ t = \alpha u,\ z\sqrt{1 - t^2} = \beta,$

ou, eliminando t e u por meio de $x = tz$ e $y = uz$,

$$x = \alpha y,\ \sqrt{z^2 - x^2} = \beta,$$

e

$$z^2 = x^2 + \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

397. Equações não lineares. A integração das equações differenciaes parciaes não lineares da primeira ordem pode reduzir-se á d'aquellas, de que acabamos de tractar, pelo processo seguinte:

Seja $$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

uma equação não linear da primeira ordem.

Resolvendo-a em relação a um dos coefficientes differenciaes, por exemplo a q, virá

$$q = f(x, y, z, p) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Por serem p e q funcções de x, y, z, e z funcção de x, y, é

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)p, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy} = \left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)q;$$

d'onde resulta, differenciando (1) em ordem a x,

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)q = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)p + \left(\frac{df}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)p\right],$$

ou

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) + \left[p\left(\frac{df}{dp}\right) - q\right]\left(\frac{dp}{dz}\right) = -\left(\frac{df}{dx}\right) - p\left(\frac{df}{dz}\right) \ldots (2).$$

Esta ultima equação ficará linear da primeira ordem, quando nella se substituir a expressão (1) de q, e se considerar p como funcção das variaveis principaes x, y, z; e o seu integral será, como fica ensinado,

$$A = \varphi(B, C) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

398. Como porém as variaveis x, y, z, estão ligadas pela relação

$$dz = p\,dx + q\,dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

á qual deverão satisfazer para que z seja funcção de x e y, será necessario sujeitar (3) a esta equação de condição, de modo que a torne integravel.

Por serem A, B, C, funcções de x, y, z, p, poderão exprimir-se por meio d'ellas tres d'estas ultimas variaveis em funcção da quarta e de A, B, C. Exprimindo pois assim x, y, z, e substituindo em (4), resultará

$$GdA + HdB + KdC + Ldp = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Mas, porque no integral da proposta não pode encontrar-se senão uma funcção distincta debaixo da funcção arbitraria (n.° 385), na equação (5) simplificada devem entrar sómente A, B, C (*), isto é, deve (5) reduzir-se a

$$GdA + HdB + KdC = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)'.$$

399. Para integrar esta equação pelo processo do n.° 375, consideremos A como constante; e chamando μ o factor que torna $\mu HdB + \mu KdC$ integravel, seja M o seu integral. Satisfará a (5) o systema das equações

$$M + \varphi A = 0, \ \frac{dM}{dA} + \varphi'(A) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Exemplos

I. Seja $\quad p^2 + q - y = 0$, ou $q = y - p^2$.

Formando a equação (2), e integrando, acham-se:

$$A = p, \ B = -2py + x, \ C = -2pz + p^2x + xy - \frac{x^2}{4p}.$$

(*) Para a demonstração directa d'esta proposição podem consultar-se o *Calc. Int.* de Cournot, n.° 533, e os *Estudos sobre o n.° 231 do Calculo Integral* de Francoeur, pag. 12, 13 e 14, do sr. Luiz da Costa e Almeida.

Exprimindo p, x, z em funcção de A, B, C, y, e substituindo em (4), acha-se a correspondente (5)' entre A, B, C, como tinhamos dicto,

$$(2AC + 2A^3B + B^2)\, dA - (2A^4 + AB)\, dB - 2A^2 dC = 0;$$

depois, dividindo por $4A^3$, e integrando na hypothese de A constante, vem

$$M = -\frac{1}{2}AB - \frac{B^2}{8A^2} - \frac{C}{2A} - \varphi(A) = z + A(Ay - x) - \frac{1}{2}y^2 - \varphi A = 0.$$

Por conseguinte o systema das equações (6) é

$$z + A(Ay - x) - \frac{1}{2}y^2 - \varphi A = 0,\ 2Ay - x - \varphi' A = 0,$$

que, para cada fórma de φ, dará o integral pedido, eliminando A entre ellas.

II. Seja $$z - pq = 0.$$

Formando a equação (2), e integrando, acham-se:

$$A = y - p,\ C = \frac{z}{p^2},\ B = x - \frac{z}{p}.$$

Exprimindo x, y, z em funcção de A, B, C, p, e substituindo em (4), vem

$$AB + CdA = 0,$$

cujo integral, na hypothese de A constante, é

$$M = B - \varphi A = x - \frac{z}{y - A} - \varphi A.$$

O systema pedido (6) é pois

$$x - \frac{z}{y - A} - \varphi A = 0,\ \frac{z}{(y - A)^2} + \varphi' A = 0.$$

400. Pode usar-se d'um processo similhante, sem conhecer todos os integraes A, B, C.

Seja $$f_1(x, y, z, p, q, A) = 0$$

um dos integraes particulares que satisfazem á equação (2).

Achando os valores de p e q pela eliminação entre $f_1 = 0$ e a proposta $F(x, y, z, p, q) = 0$, e substituindo-os na equação de definição $dz = pdx + qdy$, o integral d'esta será

$$f_2(x, y, z, A, a) = 0,$$

representando a a constante arbitraria.

Mas, se derivassemos $f_2 = 0$ na hypothese, em que se integrou, de serem A e a constantes, a eliminação entre ella e as derivadas

$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,\ \frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

reproduziria a proposta.

E se, considerando a como uma funcção arbitraria $\varphi(A)$ de A, derivassemos suppondo A variavel, as derivadas

$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{df_2}{dA} + \frac{df_2}{d\varphi A}\varphi' A\right)\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{df_2}{dA} + \frac{df_2}{d\varphi A}\varphi' A\right)\left(\frac{dA}{dy} + \frac{dA}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

seriam ainda as mesmas que as precedentes, comtanto que se estabelecesse a condição $\frac{df_2}{dA} + \frac{df_2}{d\varphi A}\varphi' A = 0$; e por conseguinte a eliminação entre ellas e $f_2 = 0$ ainda reproduziria a proposta.

Portanto o systema das equações

$$f_2(x, y, z, A, \varphi A) = 0, \quad \frac{df_2}{dA} + \frac{df_2}{d\varphi A}\varphi' A = 0 \ldots\ldots (7),$$

por satisfazer á proposta e conter a funcção arbitraria φ, dará todos os integraes procurados, eliminando A entre ellas, para cada fórma que se attribuir a φ.

Exemplos

I. Assim no primeiro exemplo $\qquad q = y - p^2$

do numero precedente achou-se $p = A$, e por conseguinte $q = y - A^2$, o que, substituindo em $dz = pdx + qdy$, e integrando, dá

$$z = Ax + \frac{1}{2}y^2 - A^2 y + \varphi A;$$

e por conseguinte as equações (7) são

$$z + (Ay - x)A - \frac{1}{2}y^2 - \varphi A = 0, \quad 2Ay - x - \varphi' A = 0,$$

identicas com as que se obtiveram naquelle numero.

II. No segundo exemplo do mesmo numero $\qquad z = pq$

achou-se $p = y - A$, e por conseguinte $q = \dfrac{z}{y - A}$, o que, substituindo em $dz = pdx + qdy$, dividindo por $y - A$, e integrando, dá

$$x = \frac{z}{y - A} + \varphi A;$$

sendo portanto as equações (7)

$$x-\frac{z}{y-A}-\varphi A=0,\ \frac{z}{(y-A)^2}+\varphi' A=0,$$

identicas com as obtidas pelo processo empregado naquelle numero.

401. O methodo da variação das constantes arbitrarias, que acabamos de empregar, e que é muito util na integração das equações de ordens superiores, pode applicar-se, qualquer que seja o modo de obter o integral particular $F_2(x, y, z, A, \varphi A)=0$.

Se, suppondo p ou q, ou qualquer funcção em que entre um d'estes coefficientes, uma constante A, e substituindo em $dz=pdx+qdy$, depois de tirar da proposta a expressão do outro, soubermos achar o integral particular $F_2(x, y, z, A, a)=0=F_2(x, y, z, A, \varphi A)$, procederemos em seguida como fica dicto, comparando as derivadas d'este integral, obtidas na hypothese de ser A constante, com as obtidas na hypothese de ser A variavel, e escrevendo a condição necessaria para que fiquem identicos os dois resultados.

É assim que no segundo exemplo proposto $\quad z=pq,$

pondo $p=y-A$ ou $q=x-A$, e procedendo como fica dicto, achamos o systema integral debaixo de qualquer das fórmas:

$$x-\frac{z}{y-A}-\varphi A=0,\ \frac{z}{(y-A)^2}+\varphi' A=0,$$

$$y-\frac{z}{x-A}-\varphi A=0,\ \frac{z}{(x-A)^2}+\varphi' A=0.$$

A symmetria da proposta a respeito de p e q fazia logo prever que, dada uma d'estas fórmas, tambem existia a outra.

402. D'este modo facilita-se muitas vezes a integração introduzindo uma indeterminada A, com o fim de partir em duas a equação proposta.

Seja esta $\quad f(p, x)=F(q, y).$

Se fizermos $f(p, x) = A$, teremos $F(q, y) = A$; e resolvendo estas equações em ordem a p e q, resultará

$$p = \psi(x, A),\ q = \chi(y, A),\ dz = \psi\, dx + \chi\, dy.$$

Ora, se considerarmos A como constante, ψ e χ serão respectivamente funcções das variaveis x e y; logo, integrando nesta hypothese, teremos

$$z + \varphi A = \int \psi dx + \int \chi dy.$$

Em fim, derivando em ordem a A, e eliminando A entre a primitiva e a derivada, depois de haver determinado a funcção φ, acharemos o integral pedido.

Por exemplo, em $$a^2pq = x^2y^2$$

temos $$\frac{ap}{x^2} = \frac{y^2}{aq} = A;$$

logo $$p = \frac{x^2 A}{a} = \psi,\ q = \frac{y^2}{aA} = \chi,$$

e por conseguinte $$3az + \varphi A = x^3 A + \frac{y^3}{A},\ \varphi' A = x^3 - \frac{y^3}{A},$$

cujo systema satisfará A proposta, e dará o integral d'ella, quando se houver determinado φ e eliminado A.

Reflexões sobre a integração das equações differenciaes parciaes que não são identicas com aquellas derivadas.

403. Para que o integral primitivo seja *geral*, é necessario não só que satisfaça á proposta, mas tambem que, tomando d'uma parte as suas derivadas até uma ordem não inferior á da mesma equação, e da outra parte as derivadas d'esta equação até áquella ordem, os resultados das duas derivações coincidam.

Se o integral satisfizer sómente á primeira das duas condições, será *particular* ou *singular*, segundo se contiver ou não contiver no *geral*.

404. Seja, por exemplo, a proposta

$$z = px + qy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

É claro que satisfaz a esta equação a primitiva

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Agora, se integrarmos (a) applicando o processo do n.º 391 para as equações lineares, ou os processos do n.º 401 para todas, acharemos:

o integral $$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ou o systema $$z = ax + y\varphi a = 0,\ x + y\varphi' a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Mas qualquer das fórmas do integral, (2) e (3), derivada até a segunda ordem, e feitas as convenientes eliminações, conduz ás derivadas de (a)

$$xr + ys = 0,\ xs + yt = 0,$$

e é por conseguinte *geral;* em quanto que (1), derivada até a mesma ordem, conduz a

$$r=0,\ s=0,\ t=0,$$

que não são identicas com aquellas derivadas.

Não é pois (1) o integral geral. E como para $\psi\left(\frac{y}{x}\right)=A+B\frac{y}{x}$ e para $\varphi a=B+k(a-A)$, se reduzem respectivamente (2) e (3) a (1), este integral é *particular.*

405. Portanto o integral primitivo d'uma equação differencial parcial da ordem m deve, para que possa ser o integral geral, conter um numero tal de arbitrarias, que, derivando-o até a ordem $m+i$, e derivando tambem a equação differencial proposta até a mesma ordem, a eliminação das arbitrarias reduza o numero de equações do primeiro systema ao das equações do segundo.

Ora, nas equações de duas variaveis independentes, por serem $\frac{d^kF}{dx^\alpha dy^{k-\alpha}}=0$ as derivadas d'uma ordem k de $F=0$, tomado α desde 0 até k, e ser conseguintemente $k+1$ o numero de derivadas d'esta ordem, o numero total das equações do primeiro systema é a somma $\frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2}$ da progressão geometrica natural que começa por 1 e acaba por $m+i+1$; e do mesmo modo, por ser no segundo systema $k+1$ o numero de equações da ordem $m+k$, o numero total das equações, desde a ordem m até a ordem $m+i$, é a somma $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$ da progressão geometrica natural que começa por 1 e acaba por $i+1$.

O numero das arbitrarias, extranhas á equação proposta, não deve pois ser menor que

$$h=\frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2}-\frac{(i+1)(i+2)}{2}=(m+i+1)m-\frac{1}{2}m(m-1).$$

E assim deverá o integral, para ser *geral,* compor-se de modo que o numero das arbitrarias cresça com as derivações successivas, satisfazendo sempre á condição de não ser inferior a h.

406. O modo mais ordinario de conseguir este fim é introduzir no integral, implicita ou explicitamente, funcções arbitrarias das variaveis; porque a derivação d'estas funcções augmenta o numero das arbitrarias.

Assim nas equações da primeira ordem, isto é, para $m=1$, se tomarmos $i=0$, será $h=2$. E portanto basta fazer entrar no integral uma funcção arbitraria φ, para que esse integral, formando com as suas duas derivadas parciaes um systema de tres equações com duas arbitrarias estranhas φ e φ', da eliminação das quaes resultaria uma equação identica com a proposta, seja por conseguinte o integral geral.

407. Limitamos-nos aqui a estas noções fundamentaes, que serviram de ponto de partida a Ampere, a Imschenetsky e ao sr. Gomes Teixeira nos seus importantes trabalhos sobre a integração das equações differenciaes parciaes, especialmente sobre a das equações da segunda ordem (*Memorias d'Ampere* nos tomos X e XI do *Jornal da Eschola Polytechnica de Paris; Etudes sur l'intégration des équations*, etc., de V. G. Imschenetsky; *Integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem*, por F. G. Teixeira).

408. Só accrescentaremos que o sr. Gomes Teixeira generalisou a expressão do numero total das equações derivadas, desde a ordem 0 até a $m+i$, extendendo-a a qualquer numero n de variaveis independentes, pela fórmula $[(m+i+n)\,Cn]$ do numero de combinações de $m+i+n$ letras n a n (*Alg. Sup.*, pag. 40).

Assim, no caso de duas variaveis independentes, esta expressão é

$$[(m+i+2)\,C2]=\frac{(m+i+2)(m+i+1)}{2}.$$

Equações differenciaes parciaes da segunda ordem

409. Uma equação differencial parcial da segunda ordem pode conter, além dos coefficientes p e q da primeira ordem, os da segunda,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}=s,\ \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

As equações de definição são pois

$$\left.\begin{array}{l} dz=pdx+qdy,\ dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy, \\ d^2z=dpdx+dqdy=rdx^2+2sdxdy+tdy^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots(A).$$

410. Comecemos por alguns casos, nos quaes só entra um dos coefficientes differenciaes da segunda ordem:

1.° Seja $$r=Pp+Q,$$

representando P e Q funcções de x, y, z.

Nesta equação, por não entrarem as derivadas q, s e t relativas a y, deve considerar-se y como constante. E temos assim de integrar uma equação differencial de segunda ordem entre x e z; ajunctando porém, em vez da constante, uma funcção arbitraria φy de y,

Se P e Q não contém z, a proposta $\frac{dp}{dx}=Pp+Q$ é linear entre p e x, e tem por integral (n.° 312)

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{\int Pdx}\left(\int e^{-\int Pdx}Qdx+\varphi y\right).$$

Depois, integrando esta, e ajunctando outra funcção arbitraria ψy, vem o integral, com duas funcções arbitrarias,

$$z=\int e^{\int \mathrm{P}dx} dx\left(\int e^{-\int \mathrm{P}dx}\mathrm{Q}dx+\varphi y\right)+\psi y;$$

que, no caso de $\mathrm{P}=0$, se reduz a

$$z=\int dx\,(\mathrm{Q}dx+\varphi y)+\psi y.$$

Por exemplo, o integral da equação

$$xyr=(n-1)\,py+a,$$

na qual P e Q representam respectivamente $\dfrac{n-1}{x}$ e $\dfrac{a}{xy}$,

é $$z=-\frac{ax}{(n-1)\,y}+\frac{x^n}{n}\varphi y+\psi y.$$

Similhantemente $$t=\mathrm{Q}q+\mathrm{P},$$

não entrando z em P e Q, dá

$$z=\int e^{\int \mathrm{Q}dy} dy\left(\int e^{-\int \mathrm{Q}dy}\mathrm{P}dy+\varphi x\right)+\psi x;$$

que, no caso de $\mathrm{Q}=0$, se reduz a

$$z=\int dy\left(\int \mathrm{P}dy+\varphi x\right)+\psi x.$$

Por exemplo o integral da equação $at=xy$,

na qual Q e P representam respectivamente 0 e $\dfrac{xy}{a}$, é

$$6az=y^3x+y\varphi x+\psi x.$$

2.º O integral de $$s=\frac{d^2z}{dxdy}=\mathrm{M},$$

que se encontra na theoria das curvaturas, é

$$z=\int dx\int \mathrm{M}dy+\varphi x+\psi y.$$

Por exemplo $$s=ax+by$$

dá $$z=\frac{1}{2}xy(ax+by)+\varphi x+\psi y.$$

3.º A equação $$s=\frac{dp}{dy}=\mathrm{M}p+\mathrm{N},$$

integrada como linear entre p e y, no caso de M e N não conterem z, dá

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{\int \mathrm{M}dy}\left(\int e^{-\int \mathrm{M}dy}\mathrm{N}dy+\varphi' x\right),$$

e depois

$$z=\int e^{\int \mathrm{M}dy}dx\int e^{-\int \mathrm{M}dy}\mathrm{N}dy+\int e^{\int \mathrm{M}dy}\varphi' x dx+\psi y.$$

Por exemplo $$sxy=bpx+ay$$

dá $$p=-\frac{ay}{(b-1)x}+y^b\varphi' x,$$

e depois $$z=\frac{aybx}{1-b}+y^b\varphi x+\psi y.$$

411. Equação linear de segunda ordem.
Passemos á equação linear

$$Rr+2Ss+Tt+V=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

na qual R, S, T, V, representam funcções dadas de x, y, z, p, q.

Eliminando t por meio da terceira das equações de definição (A), resulta

$$Rr+\left(2S-T\frac{dx}{dy}\right)s+V+T\frac{dq}{dy}=0,$$

ou
$$R\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(2S-T\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right)+V+T\frac{dq}{dx}=0 \ldots\ldots (2).$$

Esta equação (2), com a primeira de definição (A), está no caso das lineares da primeira ordem, nas quaes são p a variavel dependente, e x e y as principaes. Applicando-lhe pois o que se disse na integração das equações d'aquella ordem, teremos

$$Rdy-\left(2S-T\frac{dx}{dy}\right)dx=0,\ Rdp+\left(V+T\frac{dq}{dy}\right)dy=0,$$

ou $Rdy^2+Tdx^2-2Sdydx=0,\ Rdpdy+Tdqdx+Vdydx=0 \ldots (3);$

cujos integraes $c=A$, $c'=B$, dão o da primeira ordem da proposta

$$A=\varphi(B).$$

A applicação da regra, que serve para integrar as equações da primeira ordem, á transformada (2) suppõem que R, S, T, V, p, e q são funcções de x e y, ou que z é funcção das mesmas variaveis. Esta condição é expressa pela primeira equação de definição (A), a qual por isso se deve ajunctar ás equações (3), quando se tracta de obter os seus integraes.

Procedendo como no n.º 392, podiamos verificar que $A=\varphi(B)$ satisfaz com effeito á proposta (1) (*Calc. El.* de Lacroix, n.º 349).

412. A solução, a que acabamos de chegar, é applicavel á proposta mais geral

$$Rr + 2Ss + Tt + V + N(rt - s^2) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

objecto especial do estudo de Monge e dos outros Geometras que depois d'elle se tem occupado da integração das equações differenciaes parciaes da segunda ordem.

Com effeito a expressão $\quad rt - s^2 = \dfrac{dpdq - sdpdx - sdqdy}{dxdy}$,

que se tira da segunda e terceira das equações (A), sendo substituida em (4), transforma-a em

$$Rr + \left[2S - N\left(\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dx}\right)\right]s + Tt + V + N\frac{dpdq}{dxdy} = 0;$$

para reduzir á qual a fórma (1), basta mudar nesta 2S em $2S - N\left(\dfrac{dp}{dy} + \dfrac{dq}{dx}\right)$ e V em $V + N\dfrac{dpdq}{dxdy}$. Por conseguinte, fazendo aquellas mudanças nas equações (3), resultarão as correspondentes ao problema actual:

$$\left.\begin{aligned} &Rdy^2 - 2Sdxdy + N(dpdx + dqdy) + Tdx^2 = 0, \\ &Rdpdy + Tdqdx + Vdydx + Ndpdq = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5),$$

as quaes se tornam em (3), como deve ser, quando é $N = 0$.

Substituindo na primeira (5), por $dpdx + dqdy$, a expressão que dá a ultima das equações de definição (A), e resolvendo em ordem a $\dfrac{dy}{dx}$, acha-se, depois de posta por $(rt - s)^2$ a sua expressão tirada de (4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S - Ns \pm \sqrt{S^2 - RT + VN}}{R + Nt} = \frac{S - Ns \pm \sqrt{G}}{R + Nt},$$

isto é, $$Rdy + N(tdy + sdx) - (S \pm \sqrt{G})\,dx = 0,$$

ou, em virtude da 3.ª equação (A),

$$Rdy + Ndq - (S \pm \sqrt{G})\,dx = 0.$$

Depois, eliminando T entre as duas equações (5), e substituindo na resultante a expressão de Ndq tirada da equação precedente, vem

$$Rdp + Vdx + (S \mp \sqrt{G})\,dq = 0.$$

As equações pois, que dão as funcções A e B de $A = \varphi(B)$, são:

$$\left.\begin{array}{l} S^2 - RT + VN = G, \\ \text{e} \quad Rdy + Ndq - (S \pm \sqrt{G})dx = 0,\ Rdp + Vdx + (S \mp \sqrt{G})dq = 0, \\ dz = pdx + qdy. \end{array}\right\} \ldots (6).$$

Dos dois signaes, superior ou inferior, de $\sqrt{G}$ escolher-se-ha aquelle que mais convier para fazer as integrações.

Em vez da segunda ou da terceira, pode usar-se de

$$Ndp - (S \mp \sqrt{G})\,dy + Tdx = 0,$$

que resulta da eliminação de dq entre ellas.

413. Como as equações (5) e a de definição $dz = pdx + pdy$ contêm as cinco variaveis x, y, z, p e q, a eliminação de duas d'estas variariaveis, para effectuar a qual se indicaram os processos no capitulo relativo á integração das equações simultaneas, dará uma resultante que conterá tres das mesmas variaveis. Por conseguinte, segundo satisfizer ou não satisfizer esta resultante á condição (2) de integrabilidade do n.º 373, assim haverá ou não haverá uma equação que seja o integral d'ella, isto é, assim a proposta terá ou não terá um integral intermedio da primeira ordem: sem que d'ahi no entretanto se possa concluir que á falta do integral intermedio corresponde a do primitivo.

Não acontece porém o mesmo na integração das equações differenciaes parciaes da primeira ordem (n.º 391); porque nessas as duas equações differenciaes totaes, que devem dar $\pi=\alpha$, $\rho=\beta$, contêm as tres variaveis x, y, z, e portanto, eliminando uma d'estas, fica a equação resultante entre duas variaveis, a qual por isso tem sempre um integral.

Assim, para $ar=q$, que se encontra na theoria mathematica do calor (*Calc.* de Navier, n.º 489), as equações (6) reduzem-se a

$$dy=0,\ dp-qdx=0,$$

das quaes a segunda entre as tres variaveis p, q e x não tem um integral (n.º 373). Não ha pois uma equação unica integral da proposta. E com tudo, pondo

$$z=Ce^{\alpha x+\beta y},$$

e substituindo na proposta, vem $a\alpha^2-\beta=0.$

Por onde se vê que, tomando por α quaesquer numeros α_i, satisfarão á proposta as primitivas

$$z=C_i e^{\alpha_i x+a\alpha_i^2 y},$$

e conseguintemente a sua somma

$$z=\Sigma C_i e^{\alpha_i x+a\alpha_i^2 y}.$$

414. O processo, que acabamos de empregar, applica-se á equação differencial parcial linear de qualquer ordem n, de coefficientes constantes; porque da substituição de $z=e^{\alpha x+\beta y}$, e da suppressão do factor $e^{\alpha x+\beta y}$, resulta $f(\alpha,\beta)=0$: e por isso o integral é

$$z=\Sigma C_i e^{\alpha_i x+\beta_i y},$$

dando valores arbitrarios a uma das quantidades α_i, β_i, e tomando por valores correspondentes da outra os tirados da equação $f(\alpha_i,\beta_i)=0$.

415. Se, applicando á segunda ordem, isto é, a $m=2$, o que se disse no n.° 406, tomarmos $i=0$, será $h=5$.

Assim o integral geral d'uma equação da segunda ordem deverá compor-se de tal modo que o numero de arbitrarias da sua derivada de segunda ordem não seja inferior a cinco. O que pode conseguir-se, fazendo entrar nelle duas funcções arbitrarias φ e ψ das variaveis; porque as duas derivações successivas introduzirão as quatro funcções φ', ψ', φ'', ψ''; sendo assim seis o numero total das arbitrarias extranhas á equação proposta.

No modo de integração exposto no n.° **411** entram com effeito no integral primitivo aquellas duas funcções.

Exemplos

I. Seja a equação $\quad q^2r-2pqs+p^2t=0.$

Comparando com (1), temos

$$R=q^2,\ S=-pq,\ T=p^2,\ V=0.$$

Portanto as equações (6) são

$$G=0,$$

$$q^2+pqdx=0,\ q^2dp-pqdq=0,$$

das quaes a primeira, equivalente a $dz=0$, dá $z=B$, e a segunda dá $\dfrac{p}{q}=A$; sendo assim o integral intermedio $\quad \dfrac{p}{q}=\varphi(z).$

Para integrar de novo, o processo do n.° **391** dará

$$dz=0,\ dy=-\varphi(z)\,dx;$$

depois

$$z=\alpha,\ y+x\varphi(\alpha)=\beta;$$

e finalmente

$$y+x\varphi(z)=\psi(z).$$

II. Do mesmo modo $\quad rx^2 + 2xys + y^2t = 0,$

na qual são $\quad R = x^2,\ S = xy,\ T = y^2,\ V = 0,$

dará $G = 0$, e portanto (eq. 6) successivamente:

primeiro $\psi\,.\,\varphi\,,\quad x^2dy - xydx = 0,\ x^2dp + xydq = 0,$

$$y = Bx,\ p + Bq = A,\ px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

depois $\quad xdy - ydx = 0,\ dz - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0,$

$$y = \alpha x,\ z = x\varphi(\alpha) + \beta = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \beta,$$

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. Seja $\quad r(1 + q^2 + pq) + s(q^2 - p^2) - t(1 + p^2 + pq) = 0,$

ou, pondo $\quad p = \frac{1}{2}(m + n),\ q = \frac{1}{2}(m - n),$

$$r(1 + mq) + sm(q - p) - t(1 + mp) = 0,$$

na qual $\quad R = 1 + mq,\ S = \frac{1}{2}m(q - p),\ T = -(1 + mp),\ V = 0.$

Por ser $\quad G = \frac{1}{4}(q - p)^2m^2 + (1 + mq)(1 + mp),$

$$= \frac{(q - p)^2m^2 + 4(1 + mq)[1 + mq + m(q - p)]}{4},$$

ou

$$G = \frac{[(q - p)m - 2(1 + mq)]^2}{4},\ S - \sqrt{G} = 1 + mq,\ S + \sqrt{G} = -(1 + mp),$$

as equações (6) dão

$$dy - dx = 0,\ (1 + mq)\,dp - (1 + mp)\,dq = 0,$$

ou $$dy - dx = 0,\ mndm - (2 + m^2)\,dn = 0\,;$$

e depois $$y - x = \alpha,\ \beta\sqrt{2 + m^2} = n,$$

$$n = \sqrt{2 + m^2}\,\varphi'(y - x).$$

Para integrar esta equação da primeira ordem, substituamos em $dz = pdx + qdy$ os valores

$$p = \frac{1}{2}[m + \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi'(y - x)],\ q = \frac{1}{2}[m - \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi'(y - x)],$$

o que dá $$2dz = m\,(dx + dy) + \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi'(y - x)\,(dy - dx).$$

E, applicando o processo do n.º 375, supposta m constante, o integral será representado pelo systema das duas equações:

$$2z + \psi(m) = m\,(x + y) + \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi(y - x),$$

$$\psi'(m) = x + y + \frac{m}{\sqrt{2 + m^2}}\,.\,\varphi(y - x).$$

IV. Seja $$y^2 t + r + yq = 0.$$

Temos $$\mathrm{R} = 1,\ \mathrm{T} = y^2,\ \mathrm{S} = 0,\ \mathrm{V} = yq,$$

o que dá

$$G = -y^2,\ S - \sqrt{G} = -y\sqrt{-1},\ S + \sqrt{y} = +y\sqrt{-1},$$

e portanto as equações (6)

$$dy - y\sqrt{-1}\,dx = 0,\ dp - y\sqrt{-1}\,dq + yqdx = 0.$$

Integrando estas equações, virá

$$ye^{-x\sqrt{-1}} = B,\ p - Bq\sqrt{-1}\,e^{x\sqrt{-1}} = A,$$

$$p - yq\sqrt{-1} = \varphi'_1(ye^{-x\sqrt{-1}}).$$

Depois, integrando as equações do n.º 391,

$$dy + y\sqrt{-1}\,dx = 0,\ dz - \varphi'_1(ye^{-x\sqrt{-1}})\,dx = 0,$$

teremos $\quad ye^{x\sqrt{-1}} = \alpha,\ z - \varphi(\alpha e^{-2x\sqrt{-1}}) = z - \varphi(ye^{-x\sqrt{-1}}) = \beta$

e finalmente $\quad z = \varphi(ye^{-x\sqrt{-1}}) + \psi(ye^{x\sqrt{-1}}),$

ou (*Alg. Sup.*, n.º 159)

$$z = \varphi[y(\cos x - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,x)] + \psi[y(\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,x)].$$

É a equação da attracção dos cylindros (*Mec. Cel.*, liv. 2.º, n.º 13).

V. Seja $\quad r = b^2 t,$

isto é, $\quad R = 1,\ S = 0,\ T = -b^2,\ V = 0;$

e portanto $\quad G = b^2.$

As equações (6) dão

$$dy - adx = 0,\ dp - adq = 0,$$

$$p - aq = \varphi_1 (y - ax);$$

e depois teremos

$$dy + adx = 0,\ dz - \varphi_1 (y - ax)\, dx = 0,$$

$$z = \varphi (y - ax) + \psi (y + ax).$$

A equação proposta é a das cordas vibrantes (*Cal.* de Navier, n.º 493).

VI. Seja $$rt = s^2,$$

isto é, $$R = 0,\ S = 0,\ T = 0,\ V = 0,\ G = 0,\ N = 1.$$

As equações do n.º 412,

$$Rdy + Ndq - (S \pm \sqrt{G})\, dx = 0,\ Ndp - (S \mp \sqrt{G})\, dy + T\, dx = 0,$$

dão $$dq = 0,\ dp = 0,$$

$$q = \varphi (p).$$

Substituindo depois em $dz = pdx + qdy$, integrando na hypothese de p constante, e continuando a proceder como se disse no n.º 391, acharemos o systema

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p),\ 0 = x + y\varphi'(p) + \psi'(p).$$

A proposta é a equação das superficies planificaveis (n.ºs 150, V, e 183).

416. A complicação d'estes calculos torna-os muitas vezes de execução difficilima. Por isso exporemos desenvolvidamente o modo como deve proceder-se quando os coefficientes R, S, T, são constantes, N nullo e V uma funcção de x e y; caso que tem muitas applicações.

Então, pondo $$\frac{S+\sqrt{G}}{R}=m \text{ e } \frac{S-\sqrt{G}}{R}=n,$$

as equações (6) dão

$$y-mx=B,\ Rp+nRq+\int Vdx=A,$$

$$Rp+nRq+\int Vdx=\varphi_1(y-mx).$$

Para integrar esta equação, eliminaremos p entre ella e $dz=pdx+qdy$, o que dará

$$Rdz+dx\int Vdx-dx\,\varphi'(y-mx)=Rq(dy-ndx);$$

e teremos (n.° 391)

$$y-nx=\beta,\ Rz+\int dx\int Vdx-\int dx\varphi_1(y-mx)=\alpha,$$

$$Rz+\int dx\int Vdx=\varphi(y-mx)+\psi(y-nx).$$

Para effectuar este calculo, convém fazer as seguintes observações:

1.° Em V deve substituir-se $mx+B$ por y, e, achando então $\int Vdx$, restituir depois $y-mx$ em logar de B.

2.° Em $dx\int Vdx$ e $dx\varphi_1(y-mx)$ devem substituir-se $nx+\beta$ por y, e, achados então $\int dx\int Vdx$ e $\int dx\varphi_1(y-mx)$, restituir depois $y-nx$ em logar de β.

Exemplo. Seja $$r-s-2t-\frac{k}{y}=0,$$

isto é, $$R=1,\ S=-\frac{1}{2},\ T=-2,\ V=-ky^{-1};$$

e portanto $\qquad G = 2\frac{1}{4},\ n = -2,\ m = 1.$

Teremos: $\qquad \int V dx = -k \int \frac{dx}{x + B} = -kl(x + B) = -kly,$

e (n.º 199)

$$\int dx \int V dx = -\int k dx l(-2x + \beta) = \frac{1}{2} k[(\beta - 2x) l(\beta - 2x) - (\beta - 2x)]$$

$$= \frac{1}{2} k(yly - y);$$

$$\int dx\varphi_1(y - mx) = \int dx\varphi_1[(n - m)x + \beta] = \varphi(y - mx);$$

e portanto $\qquad z + \frac{1}{2} k(yly - y) = \varphi(y - x) + \psi(y + 2x).$

417. Integra-se algumas vezes segundo o processo do n.º 402, que consiste em partir em duas a proposta, introduzindo uma indeterminada θ.

Por exemplo a equação $\qquad rt - s^2 = 0,$

de que tractámos no exemplo VI do numero precedente, dá

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = \theta,$$

das quaes se tiram $r = s\theta$, $s = t\theta$, e por conseguinte

$$rdx + sdy = \theta(sdx + tdy), \text{ ou } dp = \theta dq.$$

Esta equação só é integravel no caso de ser θ funcção de q; e o seu integral é $p = \varphi(q)$. Depois continuando como naquelle numero, acharemos o integral procurado.

Integração das equações differenciaes parciaes por meio das series

418. Muitas vezes convém, ou torna-se necessario pela deficiencia dos methodos geraes, procurar por approximação os integraes das equações differenciaes parciaes.

Supponhamos dada uma equação da primeira ordem entre p, q, x, y, z. Para desenvolver o seu integral n'uma serie ordenada relativamente a uma das variaveis x, temos a formula de Maclaurin

$$z = f + xf' + \frac{1}{2}x^2f'' + \frac{1}{6}x^3f''' + \ldots,$$

sendo as funcções $f, f' \ldots$ de y aquillo em que se torna o integral $z = f(x, y)$, e suas derivadas em ordem a x, quando nellas se faz $x = 0$.

E no caso de $x = 0$ tornar infinitas algumas das funcções $f, f' \ldots$ recorrer-se-ha ao que fica dicto no n.º 333.

419. Para determinar as funcções, $f, f' \ldots$ supponhamos a proposta resolvida em ordem a p, $\quad p = F(q, x, y, z)$.

Fazendo $x = 0$, teremos $\quad f' = F\left(\frac{df}{dy}, (x=0), y, f\right)$.

Portanto f', e as suas derivadas successivas $f'', f''', \ldots$ dependerão da funcção f, que fica arbitraria.

Do mesmo modo, resolvendo em ordem a r a equação da segunda ordem,

$$r = F(p, s, t, x, y, z),$$

e fazendo $x = 0$, teremos $\quad f'' = F\left(f', \frac{df'}{dy}, \frac{d^2f}{dy^2}, (x=0), y, f\right)$,

a qual faz depender $f'', f''', \ldots$ de f e f', que ficam arbitrarias.

Para a terceira ordem mostrariamos por um raciocinio similhante que a serie precedente é o integral, com as tres funcções arbitrarias f, f', f''.

Em geral: *qualquer equação differencial parcial da ordem* n *tem um integral com* n *funcções arbitrarias.*

420. Seja, por exemplo, a equação $\frac{dx}{d\alpha} = z\frac{dx}{dt}$,

de que tractámos no n.º 394, sendo z uma funcção de x.

Se partirmos da proposta, e mais geralmente de

$$\frac{d^n x}{d\alpha^n} = \frac{d^{n-1}\left(z^n \frac{dx}{dt}\right)}{dt^{n-1}},$$

acharemos, attendendo á mesma proposta e á independencia de α e t,

$$\frac{d^{n+1}x}{d\alpha^{n+1}} = \frac{d^{n-1}\left[z^n \frac{d^2x}{d\alpha dt} + nz^{n-1}\frac{dz}{d\alpha}\frac{dx}{dt}\right]}{dt^{n-1}}$$

$$= \frac{d^{n-1}\left[z^{n+1}\frac{d^2x}{dt^2} + (n+1)z^n\frac{dz}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]}{dt^{n-1}} = \frac{d^n\left(z^{n+1}\frac{dx}{dt}\right)}{dt^n}.$$

Chamando pois φt aquillo a que se reduz x quando se faz $\alpha = 0$, temos

$$f = \varphi t,\ f' = z\varphi' t,\ f'' = \frac{d(z^2\varphi' t)}{dt}, \ldots\ f^{(n)} = \frac{d^{n-1}(z^n\varphi' t)}{dt^{n-1}}.$$

E substituindo na formula de Maclaurin, vem

$$x = \varphi t + \alpha z\varphi' t + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d(z^2\varphi' t)}{dt} + \frac{1}{6}\alpha^3\frac{d^2(z^3\varphi' t)}{dt^2} + \ldots,$$

que é [p. 67, f. (C_1)] o desenvolvimento de $x = \varphi(t + \alpha z)$.

421. Lagrange propoz tambem a approximação dos integraes por meio dos coefficientes indeterminados.

Faz-se $$z = \varphi(y) + x\psi(y) + x^2\chi(y) + x^3\pi(y) + \ldots;$$

depois, tomando as differenciaes necessarias, substituem-se na proposta, e comparam-se os termos em que x tem o mesmo expoente. D'onde resultam diversas equações, por meio das quaes se determinam as funcções de y que não devem ficar arbitrarias.

Seja por exemplo a equação $ar = q$,

de que se tractou no n.º **413.**

Para ella a serie precedente dá

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r = 2\chi + 6x\pi + \ldots, \quad \frac{dz}{dy} = q = \varphi' + x\psi' + \ldots;$$

depois, substituindo na proposta e comparando, acham-se

$$\chi = \frac{1}{2a}\varphi', \quad \pi = \frac{1}{6a}\psi', \ldots;$$

por conseguinte $$z = \varphi + x\psi + \frac{1}{2a}x^2\varphi' + \frac{1}{6a}x^3\psi' + \ldots$$

Do mesmo modo, integrando a equação

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

acharemos

$$z = \varphi + x\psi - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) + \ldots.$$

422. No raciocinio, que empregámos no n.º 418 para mostrar que a equação da ordem n tem n funcções arbitrarias, suppozemos em geral a equação completa. Mas é possivel que a serie obtida em casos particulares não dê o numero completo de funcções arbitrarias: como acontecerá se a ordem mais elevada dos coefficientes differenciaes não for a mesma para todas as variaveis independentes; por isso que a derivação de ordem mais elevada, relativamente á variavel segundo as potencias da qual se faz o desenvolvimento, deixa arbitrario um numero de funcções egual a essa ordem.

Assim, no primeiro exemplo do numero precedente, se em vez de ordenar o desenvolvimento relativamente ás potencias de x, o ordenarmos relativamente ás potencias de y, acharemos outra serie

$$z = \omega(x) + ay\omega''(x) + \frac{1}{2}a^2y^2\omega^{\text{IV}}(x) + \ldots,$$

com uma só funcção arbitraria $\omega(x)$.

E fazendo, como Poisson, na primeira

$$\varphi(y) = \text{A} + \text{B}y + \frac{1}{2}\text{C}y^2 + \ldots,$$

$$\psi(y) = \text{A}' + \text{B}'y + \frac{1}{2}\text{C}'y^2 + \ldots,$$

depois substituindo nella estas expressões, e finalmente pondo

$$\text{A} + \text{A}'x + \frac{\text{B}x^2}{2} + \frac{\text{B}'x^3}{6} + \ldots = \omega(x),$$

aquelle integral coincidirá com o ultimo.

Cumpre porém não esquecer que no uso d'estas series, como no de todas as outras, é necessario verificar a sua convergencia, sem a qual o emprego d'ellas daria resultados illusorios.

Integração das equações differenciaes parciaes por integraes definidos

423. Para exemplo d'esta integração tomemos a equação do n.º 413

$$ar = q,$$

cujo integral é
$$z = \Sigma C_i e^{\alpha_i x + a \alpha_i^2 y}.$$

Pondo $\omega - \alpha \sqrt{ay}$ em vez de ω na equação (2) do n.º 276,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi},$$

fica
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 + 2\alpha\omega\sqrt{ay} - a\alpha^2 y} d\omega = \sqrt{\pi},$$

que dá
$$e^{a\alpha^2 y} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 + 2\alpha\omega\sqrt{ay}} d\omega.$$

Substituindo pois na expressão de z, vem

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma C_i e^{\alpha_i (x + 2\omega\sqrt{ay})} e^{-\omega^2} d\omega;$$

ou, pondo $\varphi(x + 2\omega\sqrt{ay})$ em logar de $\Sigma C_i e^{\alpha_i (x + 2\omega\sqrt{ay})}$,

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\omega\sqrt{ay}) e^{-\omega^2} d\omega.$$

Mas, para que esta formula seja applicavel, é necessario dar a φ uma fórma tal que o integral definido conserve um valor finito, quaesquer que sejam x e y.

Soluções singulares das equações differenciaes parciaes da primeira ordem

424. Sejam $$F = 0,\ V = 0,$$

uma equação differencial parcial entre as derivadas independentes $x_1, x_2, \ldots x_n$, e o seu integral *completo*, com n arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_n$.

O integral $V = 0$ ainda satisfará a $F = 0$, suppondo variaveis as arbitrarias, com tanto que seja nulla a sua differencial em relação a ellas, isto é, com tanto que seja

$$\frac{dV}{da_1} da_1 + \frac{dV}{da_2} da_2 \ldots + \frac{dV}{da_n} da_n = 0 \ldots\ldots (A).$$

Agora:

1.° Se em (A) tomarmos $da_1 = 0,\ da_2 = 0, \ldots\ da_n = 0$, o integral $V = 0$ será *completo*.

2.° Se entre duas, a_i e a_k, das arbitrarias estabelecermos uma relação arbitraria $a_i = \varphi(a_k)$, o que dará $da_i = \varphi'(a_k)\, da_k$, substituirmos em (A), egualarmos depois a zero os $n - 1$ coefficientes das restantes, e eliminarmos entre estas e $V = 0$ aquelles coefficientes, resultará o integral *geral*.

3.° Se entre $V = 0$ e os n coefficientes de (A) egualados a zero se eliminarem as n arbitrarias, resultará um integral *particular* ou uma *solução singular*.

Applicando isto á equação $$z = px + qy + f(p, q),$$

á qual satisfaz o integral $$z = ax + by + f(a, b),$$

teremos:

1.° O integral *completo* $$z = ax + by + f(a, b).$$

2.° O systema integral *geral*

$$z = ax + y\,\varphi(a) + f(a, \varphi a),\ 0 = x + y\,\varphi'(a) + \frac{df}{da} + \frac{d\varphi}{d\varphi(a)}\varphi' a.$$

3.° O systema integral *particular*, ou a *solução singular*

$$z = ax + by + f(a, b),\ x + \frac{df}{da} = 0,\ y + \frac{df}{db} = 0.$$

(*Calc.* de Serret, n.os 805 e 806).

Das funcções arbitrarias

425. O que dissemos (n.º 263) a respeito das constantes introduzidas nas integrações ordinarias, tem applicação ás funcções arbitrarias φ, ψ,... das equações differenciaes parciaes. Em quanto só pretendemos integrar, isto é, achar uma expressão que por meio das regras do calculo differencial reproduza a proposta, são φ, ψ,..... realmente arbitrarias: mas, logo que tivermos de applicar os resultados a questões de Geometria, Mechanica, etc., estas funcções poderão tomar fórmas determinadas, e deixar de ser arbitrarias. Melhor se entenderá isto por meio de alguns exemplos.

I. A equação das superficies cylindricas é (n.º 44, e *Geom. Anal.* n.º 167)

$$y - bz = \varphi(x - az), \text{ ou } ap + bq = 1.$$

A primeira d'estas equações é integral da segunda; e φ é uma funcção arbitraria, cuja fórma depende da curva directriz. Se a base do cylindro está situada no plano dos xy, e é dada por sua equação $y = fx$, deverá φ ser tal que essa base seja comprehendida entre os pontos do espaço designados pela equação $y - bz = \varphi(x - az)$, isto é, que satisfaça a esta equação. Fazendo pois $z = 0$, as equações $y = \varphi x$ e $y = fx$ deverão ser identicas, tendo por conseguinte φ e f a mesma fórma; e a equação do cylindro particular, de que se tracta, será

$$y - bz = f(x - az).$$

Em geral, sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações da directiz. Fazendo $x - az = u$, podemos, pela eliminação, achar x, y, z, e portanto $y - bz$ em funcção de u; o que dá a fórma da funcção φ, e por conseguinte a equação $y - bz = \varphi(x - az)$ da superficie cylindrica particular, de que se tracta.

II. Similhantemente as superficies de revolução em torno do eixo dos z têm por equação $py = qx$, cujo integral é $x^2 + y^2 = \varphi z$ (n.º 44, e *Geom. Anal.* n.º 169). Em quanto a generatriz fica indeterminada, a funcção φ é arbitraria: mas se esta curva é dada por suas equações $M=0$, $N=0$, então, pondo $z=u$, eliminando x, y e z por meio d'estas tres equações, e substituindo em $x^2+y^2=\varphi u$, ficará determinada a fórma da funcção φ; de sorte que a equação $x^2+y^2=\varphi z$ será exclusivamente a da superficie proposta, cuja generatriz é $M=0$, $N=0$.

Supponhamos que o corpo é gerado pela revolução d'uma superficie movel, invariavelmente ligada com o eixo dos z, e dada pela equação $M=0$. Considerando esta superficie n'uma das suas posições, poderemos tirar da equação $M=0$ as expressões de p e q em x, y e z; e substituindo-as em $py-qx=0$, teremos a outra equação $N=0$ da curva de contacto da superficie generatriz com o corpo gerado, por isso que os planos tangentes são communs a ambos. Assim, as equações $M=0$, $N=0$ são as d'uma curva, que se pode considerar como generatriz; o que faz recair no caso precedente.

III. O conoide tem por equação $px+qy=0$, cujo integral é $y=x\varphi z$ (n.os 150, III, e 394, III). Fazendo $z=u$, e exprimindo x, y e z em u por meio das equações $M=0$, $N=0$, da curva directriz, determinaremos a fórma de $\varphi u=\frac{y}{x}$; e por conseguinte a equação particular $y=x\varphi z$ do conoide proposto.

Quando a directriz é um circulo descripto num plano parallelo aos yz,

cujas equações são $$x=a,\ y^2+z^2=b^2,$$

acha-se $$a^2y^2+z^2x^2=b^2x^2.$$

IV. O integral da equação dos cónes (n.º 44, e *Geom. Anal.*, n.º 168)

$$z-c=p(x-a)+q(y-b),$$

é $$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Para que a base do cóne seja um circulo descripto no plano dos xy, e com o centro na origem, devemos ter

$$z=0,\ x^2+y^2=r^2,\ \text{e}\ x-a=u(z-c),$$

o que dá $$z=0,\ x=a-cu,\ y=\sqrt{r^2-(a-cu)^2}.$$

Substituindo estes valores em $y-b=(z-c)\varphi u$, resultará a fórma de φ; e substituindo na proposta, $\dfrac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right)$, teremos a equação do cóne, de que se tracta,

$$(cy-bz)^2+(az-cx)^2=r^2(z-c)^2.$$

426. Estes exemplos bastam para mostrar como devem determinar-se as funcções arbitrarias, quando se tracta de applicar os calculos geraes aos casos particulares. Seja em geral $K=\varphi(L)$ um integral, com a funcção arbitraria φ, representando K e L funcções dadas de x, y e z; e supponhamos que a equação deve reduzir-se a $F(x,y,z)=0$, quando se suppõe $f(x,y,z)=0$. Esta condição corresponde em Geometria a pedir que a superficie procurada, cuja equação é $K=\varphi L$, passe pela curva dada, que tem por equações $F=0$, $f=0$. Para lhe satisfazer, faremos $L=u$, e eliminando x, y, z entre esta equação e as duas precedentes, substituiremos em $K=\varphi(u)$ as suas expressões em u, assim achadas; o que determinará a fórma da funcção φ e o integral procurado.

Se tivessemos de determinar duas funcções arbitrarias, sería necessario que se dessem duas condições; e um calculo similhante ao precedente faria conhecer a fórma d'essas funcções.

427. Mas se a natureza da questão não permitte determinar as funcções arbitrarias (o que acontece em muitos problemas de Physica e Geometria transcendente), ellas ficam indeterminadas, e as propriedades, que se acham sem particularisar estas funcções, têm logar em geral.

Para explicar este caso geometricamente, supponhamos que nas expressões, de que se tracta, entra um termo da fórma φx. Se descrevessemos no plano xy a linha que tem por equação $y=\varphi x$, as suas ordenadas y seriam os valores da funcção φ: e, sendo φ arbitraria, esta curva poderia, não só ter uma fórma qualquer, mas até ser traçada á mão por um movimento livre e irregular; e ainda ser *discontinua*, isto é, formada de ramos differentes unidos pelas extremidades; ou *discontigua*, isto é, formada de partes isoladas e separadas umas das outras. Foi Euler quem pôz estes principios fóra de toda a dúvida, até contra a opinião de Alembert, que se pode considerar como o inventor do calculo ás differenças parciaes; calculo cujos recursos são immensos, cujas applicações são d'uma utilidade illimitada, e que serve, como acabamos de ver, para submetter as funcções irregulares á analyse mathematica.

CALCULO DAS VARIAÇÕES

428. Antes da descoberta do Calculo das variações muitos geometras já se tinham occupado dos problemas dos isoperimetros; mas, como para resolver cada um d'elles empregavam um methodo particular e artificios de analyse ás vezes muito complicados, os processos, de que se serviam, não formavam um corpo de doutrina.

Estava reservado para Lagrange reduzir todas as questões a um methodo uniforme que vamos expor.

Posta uma funcção $Z = F(x, y, y', y'', \ldots)$, na qual $y', y'', \ldots$ designam as derivadas de y considerada como funcção $y = \varphi x$ de x, pode exigir-se que Z tenha certas propriedades, por exemplo, de ser maxima ou minima, quer assignando ás variaveis x, y, valores que satisfaçam a essa condição, quer estabelecendo relações entre as variaveis, e ligando-as por equações.

429. Quando a equação $y = \varphi x$ é dada, tiram-se d'ella $y', y'', \ldots$. em funcção de x, e substituem-se na proposta, que se torna em $Z = fx$. Nesse caso as regras conhecidas do Calculo differencial ensinam a achar os valores de x que tornam fx maxima ou minima; o que corresponde a determinar, d'entre os pontos de uma curva dada, aquelles para os quaes a funcção proposta é maior ou menor do que para os outros pontos da mesma curva visinhos dos primeiros.

Mas quando a equação $y = \varphi x$ não é dada, então, attribuindo successivamente a φ differentes fórmas, tambem $Z = fx$ tomará differentes expressões em x. E, se quizermos assignar a φx uma fórma tal que o Z correspondente a cada valor de x seja maior ou menor do que para qualquer outra fórma de φx infinitamente visinha, o problema pertencerá ao *Calculo das variações*.

430. Este calculo não se limita unicamente á theoria dos maximos e minimos; mas contentar-nos-hemos com a exposição d'ella, por ter applicação em questões muito importantes, e por bastar para a intelligencia das regras do mesmo calculo.

Cumpre advertir que, em tudo o que vamos dizer, as variaveis x e y não são independentes; mas a equação $y = \varphi x$, que as liga, é desconhecida, e a fórma de φx pode variar independentemente de x.

431. Substituindo $y+k$ em logar de y, $y'+k'$ em logar de y',.... onde k, k',.... representam uma funcção arbitraria de x e as suas derivadas, tornar-se-ha $Z=F(x, y, y', y'',...)$ em

$$Z_1 = F(x, y+k, y'+k', y''+k'',...);$$

e como o theorema de Taylor tem logar, quer sejam dependentes, quer independentes, as quantidades y, y',... e os seus augmentos k, k',... será

$$Z_1 = Z + k\frac{dZ}{dy} + k'\frac{dZ}{dy'} + k''\frac{dZ}{dy''} + ...,$$

com tanto que, para achar este desenvolvimento, operemos como se x, y, y',.... fossem variaveis independentes.

Posto isto, tracta-se de determinar a fórma de φx de modo que, para o mesmo valor de x, se tenha sempre $Z_1 < Z$ ou sempre $Z_1 > Z$, suppondo k, k',.... muito pequenos; e, discorrendo como na theoria dos maximos e minimos ordinarios, vê-se que esta propriedade não pode verificar-se sem que os termos da primeira ordem sejam nullos, isto é, sem que seja

$$k\frac{dZ}{dy} + k'\frac{dZ}{dy'} + k''\frac{dZ}{dy''} + ... = 0.$$

Como k é arbitraria, para cada valor de x, e pode variar o seu valor ou a sua fórma independentemente de x, tambem k', k'',.... são arbitrarias.

Portanto a equação precedente parte-se, em virtude da independencia, nas

$$\frac{dZ}{dy} = 0,\ \frac{dZ}{dy'} = 0,\ \frac{dZ}{dy''} = 0, ...$$

respectivas ao maximo ou minimo em ordem a cada uma das quantidades y, y', y'',....

Para que haja maximo ou minimo, é necessario que estas equações subsistam simultaneamente, qualquer que seja o valor de x; e, havendo-o, a equação $y=\varphi x$, que resultar d'ellas, será a procurada, isto é, a que tem a propriedade de tornar Z maior ou menor, para cada valor de x, do que o correspondente a outra fórma muito visinha.

Para distinguir o maximo do minimo, attenderemos aos termos da segunda ordem de Z, conforme a theoria ordinaria.

Mas, se estas equações não derem todas a mesma relação entre x e y, o problema será impossivel, ao menos no estado de generalidade em que foi proposto. Então, se algumas d'ellas concordarem, a funcção Z terá maximos ou minimos relativos a algumas das quantidades $y, y', y'', \ldots,$ sem que os tenha absolutos e communs a todas estas quantidades; e as equações, que concordam, darão os maximos e minimos relativos. Se quizermos porém fazer Z maximo ou minimo sómente em ordem a uma das quantidades $y, y', y'', \ldots,$ o problema será sempre possivel, por não ser necessario nesse caso satisfazer a mais d'uma condição.

432. Se na mudança de fórma da curva $y = \varphi x$ quizessemos considerar as variações de x e y, accrescentariamos $i\dfrac{dZ}{dx}$ á expressão de Z_1, e $\dfrac{dZ}{dx} = 0$ ás equações respectivas ao maximo e ao minimo (*Cal. Int.* de Garnier, pag. 563).

433. Appliquemos estas noções geraes a alguns exemplos.

I. Sobre o eixo dos x tomemos duas abscissas m e n d'uma curva plana, e nas suas extremidades levantemos parallelas indefinidas ao eixo dos y, existindo estes eixos no plano da curva. Suppondo que por qualquer ponto da curva se tira a tangente, e chamando h, l, as ordenadas dos pontos onde ella corta as duas parallelas, temos

$$h = y + y'(m - x), \; l = y + y'(n - x).$$

Se é dada a equação $y = \varphi x$ da curva, conhecem-se a fórma de φ e por conseguinte as expressões de h e l. Mas, se não é dada, e se pergunta qual é a curva que goza da propriedade ser o producto lh das ordenadas menor, em cada um dos pontos de tangencia, do que para qualquer outra curva, isto é, de ser $Z = lh = minimo$, tracta-se de dar a φ uma fórma tal que se verifique esta propriedade.

Ora, segundo o enunciado do problema, as curvas que passam pelo mesmo ponto (x, y) têm tangentes de direcções diversas; e, d'entre ellas, a que se procura deve ter uma tangente de tal modo dirigida que se verifique a condição do *minimo.* Devem portanto considerar-se x e y como constantes, e y' como variavel, em

$$dZ=0=d\,[y+(m-x)\,y'][y+(n-x)\,y'];$$

o que dá

$$\frac{dZ}{dy'}=0=[y+(m-x)\,y']\,[n-x)+[y+(n-x)\,y']\,(m-x),$$

ou

$$\frac{2y'}{y}=\frac{2x-m-n}{(x-m)(x-n)}=\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n},$$

e, integrando,

$$y^2=C\,(x-m)\,(x-n).$$

A curva será uma ellipse ou uma hyperbole, conforme for C negativo ou positivo; e os vertices serão determinados por $x=m$, $x=n$. No primeiro caso o producto $Z=lh$ é um *maximo,* por ter y'' o signal —; no segundo é um *minimo,* ou antes um *maximo negativo.* De mais o producto lh é constante e $=-\frac{1}{4}C\,(m-n)^2=$ quadrado do segundo semieixo; como se pode verificar substituindo em Z os valores de y e y'.

II. Achar a curva plana para a qual o quadrado da somma da subnormal com a abscissa é um *minimo.*

A condição proposta, $Z=(yy'+x)^2=minimo$, dá

$$\frac{dZ}{dy}=2\,(yy'+x)\,y'=0,\ \frac{dZ}{dy'}=2\,(yy'+x)\,y=0;$$

e a estas satisfaz $yy'+x=0$, cujo integral é $x^2+y^2=r^2$. Logo todos os circulos descriptos da origem como centro, e só elles, resolvem o problema.

434. Ainda que a theoria exposta não tenha applicações muito extensas, serve com tudo de esclarecimento para facilitar a intelligencia de outro problema mais vasto, o qual consiste em applicar os raciocinios precedentes a uma funcção da fórma $\int Z$. Neste caso a funcção Z é differencial;

e tracta-se de fazer maximo ou minimo o seu integral, tomado entre limites, mas sem effectuar a integração indicada, que em geral não pode executar-se.

435. Supponhamos um fio flexivel, ao qual se podem dar differentes fórmas e posições.

A mudança de coordenadas dos seus pontos pode provir: da passagem de um ponto para outro, quando se conserva invariavel a fórma e a posição do fio; ou da mudança d'estas.

Assim, quando sobre a mesma curva MN (Fig. 55) consideramos o ponto M e o consecutivo M′, se chamamos x, y, as coordenadas do primeiro, são $x+dx$, $y+dy$, as do segundo. Mas, quando o fio se defórma e se move de sorte que o ponto M passa para a posição consecutiva M'_1, adopta-se a notação δ, anteposto ás coordenadas, para designar esta *variação*, isto é, são $x+\delta x$, $y+\delta y$, as coordenadas de M'_1.

Por onde se vê: que, tanto os dx e dy, como os δx e δy, são funcções das coordenadas; mas que os primeiros se referem a passagens d'uns pontos para outros consecutivos na mesma curva, e os segundos a mudanças de posição dos mesmos pontos em virtude de deformação ou transporte da curva.

Similhantemente se torna dx em $d(x+\delta x)$, de sorte que o seu augmento é $d\delta x$; o de d^2x é $d^2\delta x$; e assim por diante.

436. Cumpre observar que as variações indicadas pelo signal δ são independentes das que designa a caracteristica d; e por isso, sendo egualmente independentes as operações a que se referem estes signaes, não deve influir no resultado a ordem em que ellas se executam; de sorte que são teremos

$$\delta . dy = d . \delta y;\ \ d^2\delta y = \delta d^2 y, \ldots . \int \delta U = \delta \int U.$$

Com effeito, suppondo (Fig. 55) $PP' = dx$, $MM_1 = \delta y$, é claro que

$$M'_1P' = M'P' + M'_1M' = y + dy + \delta(y + dy),$$

$$M'_1P' = M_1P + M'_1P' - M_1P = y + \delta y + d(y + \delta y):$$

o que dá $\delta dy = d\delta y$; e por conseguinte tambem $d^2\delta y = dd\delta y = d\delta dy = \delta d^2 y$, e assim por diante.

E, escrevendo $U = d\int U$, vem

$$\delta U = \delta d \int U = d\delta \int U, \int \delta U = \delta \int U.$$

437. Tem isto logar ainda que se considere δy como $M'_1P' - MP$ resultante da variação de x e da mudança da curva; porque então (Fig. 55)

$$\delta y = M'_1P' - MP,\ dy = M'P' - MP,$$

dão $$d\delta y = M_1''P'' - M'_1P' - (M'P' - MP),$$

$$\delta dy = M_1''P'' - M'P' - (M'_1P' - MP),$$

e por conseguinte $$d\delta y = \delta dy.$$

438. Tracta-se agora de estabelecer entre x, y, z relações taes que $\int Z$ seja um *maximo* ou um *minimo, entre limites designados.* Para fazer os calculos symmetricos, não supporemos constante nenhuma das differenciaes; e só consideraremos o caso de tres variaveis, porque, além de ser isso bastante para a intelligencia da theoria, facilmente se poderão generalisar os resultados para maior numero d'ellas.

Posto isto, seja

$$Z = F(x, dx, d^2x, \ldots y, dy, d^2y, \ldots z, dz, d^2z, \ldots),$$

a funcção cujo integral deve ser um maximo ou um minimo. Teremos

$$\delta \int Z = 0, \text{ ou } \int \delta Z = 0.$$

Seja

$$(A) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \delta Z = {} & m\delta x + n\delta dx + p\delta d^2x + \ldots\ldots\ldots \\ & + M\delta y + N\delta dy + P\delta d^2y \ldots\ldots \\ & + \mu\delta z + \nu\delta dz + \pi\delta d^2z + \ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

onde $m, n, p, \ldots, M, N, P, \ldots, \mu, \nu, \pi, \ldots$ representam os coefficientes differenciaes $\frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{d^2x}, \frac{dZ}{d^3x}; \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{d^2y}, \frac{dZ}{d^3y}, \ldots, \frac{dZ}{dz}, \frac{dZ}{d^2z}, \frac{dZ}{d^3z}, \ldots$

Em virtude dos theoremas precedentes, a primeira linha de (A) transforma-se em

$$m\delta x + nd\delta x + pd^2\delta x + \ldots,$$

e do mesmo modo as outras.

Tracta-se de integrar δZ; e o processo do calculo fará ver que se devem desembaraçar, quanto é possivel, os termos que contêm differenciaes das variações das coordenadas.

Para isso, empregando o processo da integração por partes, teremos

$$\int nd\delta x = n\delta x - \int dn\delta x,$$

$$\int pd^2\delta x = pd\delta x - dp\delta x + \int d^2p\delta x,$$

$$\int qd^3\delta x = qd^2\delta x - dqd\delta x + d^2q\delta x - \int d^3q\delta x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

e similhantemente para as outras variaveis y, z.

439. Reunindo estes resultados, e egualando separadamente a zero a parte integrada e a não integrada, o integral de (A) dá

$$(B)\ldots\ldots\ldots \int \left\{ \begin{array}{l} (m - dn + d^2p - d^3q\ldots)\,\delta x \\ + (M - dN + d^2P - d^3Q\ldots)\,\delta y \\ + (\mu - d\nu + d^2\pi - d^3\chi\ldots)\,\delta z \end{array} \right\} = 0,$$

$$(C)\ldots \left\{ \begin{array}{l} (n - dp + \ldots)\ \delta x + (N - dP + \ldots)\,\delta y + (\nu - d\pi + \ldots)\,\delta z \\ + (p - dq + \ldots)\,d\delta x + (P - dQ + \ldots)\,d\delta y + (\pi - d\chi + \ldots)\,d\delta z \\ + (q - dr + \ldots)\,d^2\delta x + (Q - dR + \ldots)\,d^2\delta y + (\chi - d\rho + \ldots)\,d^2\delta z \end{array} \right\} = 0$$

sendo K a constante.

Partimos a equação em duas por que, não se podendo integrar os termos que ficam debaixo do signal $\int$ (a não se darem a $\delta x, \delta y, \delta z$, valores particulares, o que é contra a hypothese), as duas partes são irreductiveis, e por isso não pode $\int \delta Z$ tornar-se nulla se não aniquilando-se separadamente cada uma d'ellas.

Logo, para achar as relações entre x, y, z que fazem $\int Z$ maximo ou minimo, devemos differenciar a funcção dada Z em ordem á caracteristica δ, considerando $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z\ldots$ como variaveis independentes. Comparando depois o resultado d'esta variação com a equação (A), teremos as expressões de m, M, $\mu,\ldots n$, N, $\nu,\ldots p$, P, $\pi,\ldots$, em x, y, z e suas differenciaes. Finalmente, substituindo estas expressões nas equações (B) e (C), das quaes a segunda é relativa aos limites que devem comprehender o maximo, obteremos as relações procuradas.

440. Se forem independentes as variações $\delta x, \delta y, \delta z$, a equação (B) partir-se-ha nas tres

$$m-dn+d^2p-\ldots=0,\ \mathrm{M}-d\mathrm{N}+d^2\mathrm{P}-\ldots=0,\ \mu-d\nu+d^2\pi-\ldots=0\ldots(\mathrm{D}).$$

Se não o forem, as equações, que as ligarem entre si, servirão para eliminar de (B) outras tantas d'ellas; e egualar-se-hão a zero os coefficientes de cada uma das restantes: de sorte que, em todo o caso, será tres o numero das equações que se formam.

Estas tres equações, que são differenciaes em x, y, z, não podem exprimir tres condições distinctas, porque, se as exprimissem, dariam valores numericos para as variaveis. No caso de pertencer a proposta a um problema de geometria, devem ellas reduzir-se a uma da superficie ou a duas da curva que tem a propriedade exigida.

441. Como o integral effectuado (C) se deve tomar entre os limites assignados, x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2, a equação

$$\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1=0,$$

na qual L_2 e L_1 representam os termos de (C) que precedem K, applicando-lhes os respectivos indices 2 e 1, será relativa a estes limites.

Geometricamente, podem as extremidades do fio, que acima figuramos, conservar-se fixas, e dependerem as variações só da deformação d'elle; pode conservar-se uma das extremidades fixa, e dependerem as variações do movimento da outra e da deformação do fio; e podem finalmente ter logar tanto o movimento das duas extremidades como a deformação do fio, dependendo então as variações de ambas estas causas.

442. Consideremos os differentes casos.

1.º Se é fixo tudo o que pertence aos limites, isto é, se os valores de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, e das derivadas das variaveis dependentes são constantes nos limites, as variações respectivas são nullas; por conseguinte todos os termos de L_1 e L_2 aniquilam-se, e a equação $L_2 - L_1 = 0$ reduz-se a uma identidade.

Neste caso, para determinar as constantes que a integração introduz nas equações (D), devem substituir-se nos seus integraes, e nas differenciaes até a ordem d'ellas, os valores de x, y, z, e dos coefficientes differenciaes das variaveis dependentes, relativos a cada um dos dois limites.

2.º Se os limites são arbitrarios e independentes, cada um dos coefficientes de δx_1, δx_2,... na equação (C) é nullo separadamente.

3.º Se ha condições relativas aos limites, isto é, se a natureza da questão estabelece equações entre algumas das quantidades x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, como acontece, por exemplo, se a questão proposta se refere a uma porção de curva, a qual deve terminar em pontos, que não são fixos, mas estão sobre duas curvas ou duas superficies dadas: differenciaremos essas equações, para tirar d'ellas tantas variações δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, quantas podermos, em funcção das outras, o que substituido em $L_2 - L_1 = 0$ reduzirá as variações ao menor numero possivel; e como as variações, que ficam, são independentes, a equação partir-se-ha em tantas quantas ellas são, egualando separadamente a zero os seus coefficientes.

Podemos tambem neste caso usar do processo seguinte, que é mais elegante.

Sejam $u = 0$, $v = 0$,... as equações de condição dadas. Multiplicando as suas variações por indeterminadas λ, λ',..., e ajunctando os productos ao primeiro membro de $L_2 - L_1 = 0$, teremos

$$L_2 - L_1 + \lambda\delta u + \lambda'\delta v + \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E).$$

Então, tractando como independentes todas as variações δx_1, δx_2,..., δy_1, δy_2,...., egualaremos a zero os seus coefficientes, e eliminaremos depois entre as equações assim obtidas os coefficientes λ, λ'...

Convém observar que de satisfazerem os valores das variaveis nos limites a qualquer das equações $u = 0$, $v = 0$,.... não se segue que tambem as differenciaes d'estas coordenadas, dadas pelas derivadas dos integraes das equações (D), satisfaçam á respectiva das equações differenciaes $du=0$, $dv=0, \ldots$ Por exemplo, em Geometria, para que tenha isso logar, é necessario que haja um contacto de certa ordem entre a curva procurada e a superficie cuja equação é $u=0$, ou $v=0, \ldots$ E, no caso de coexistirem estas condições, entrarão respectivamente na equação (E), além dos termos $\lambda\delta u, \lambda'\delta v, \ldots$ os termos $\lambda''\delta du, \lambda'''\delta dv, \ldots$

4.° Nada diremos do caso em que deve um dos limites ser fixo, e o outro estar sujeito a certas condições ou ser inteiramente arbitrario: como acontece em Geometria, quando uma das extremidades da curva procurada deve passar por um ponto fixo, e a outra ser qualquer e existir sobre uma curva ou superficie dada, porque este caso está comprehendido nos tres precedentes.

É necessario advertir que, se a funcção Z contém algumas coordenadas dos limites, ou coefficientes differenciaes d'ellas, deve na variação attender-se aos termos que provém d'essas quantidades, e incluil-os na equação (C). Por exemplo, se Z contém x_1, deve ao primeiro membro de (C) accrescentar-se o termo $\int \frac{dZ}{dx_1}\delta x_1 = \delta x_1 \int \frac{dZ}{dx_1}$.

443. As mais das vezes é Z dada debaixo da fórma Vdx, sendo V uma funcção de x e y e seus coefficientes differenciaes $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

Designemos pela caracteristica δ_1 as variações relativas a y e não a x; em quanto que a caracteristica δ se applica ás variações completas, nas quaes se fazem variar x e y.

Representando V ordenadas da curva (Fig. 55), são evidentemente

$$M'_1N'_1Q'P' = M_1N_1QP + N_1N'_1Q'Q - M_1M'_1P'P,$$

$$\delta_1 \int Vdx = M_1N_1QP - MNQP,$$

$$\delta \int Vdx = M'_1N'_1Q'P' - MNQP;$$

e por conseguinte

$$\delta \int Vdx = \delta_1 \int Vdx + M'_1N'_1Q'P' - M_1N_1QP$$

$$= \delta_1 \int Vdx + N_1N'_1Q'Q - M_1M'_1P'P,$$

ou, desprezando as quantidades de segunda ordem,

$$\left.\begin{aligned}\delta\int \mathrm{V}dx &= \delta_1\int \mathrm{V}dx + \mathrm{V}_2\delta x_2 - \mathrm{V}_1\delta x_1\\ &= \int dx\delta_1\mathrm{V} + \mathrm{V}_2\delta x_2 - \mathrm{V}_1\delta x_1\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(a).$$

Mas a variação de $y=\varphi(x)$, proveniente da mudança de fórma de φ e da variação de x, é

$$\delta y = \delta_1 y + y'\delta x,$$

que dá (*) $\qquad \delta_1 y = \delta y - y'\delta x:$

similhantemente $\qquad \delta_1\dfrac{dy}{dx} = \delta\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d^2y}{dx^2}\,\delta x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b);$

e assim por diante.

Portanto as equações (b) darão as variações δ_1 das coordenadas e dos coefficientes differenciaes de y, relativas a y, por meio das variações δ, relativas a x e y; e as equações (a) darão as variações δ do integral proposto por meio das variações δ_1 do mesmo integral.

(*) Com effeito é (Fig. 55)

$$\mathrm{M'_1P'} = \mathrm{MP} + \delta\mathrm{MP} = \mathrm{M_1P} + (\mathrm{M'_1P'} - \mathrm{M_1P}),$$

isto é $\qquad y + \delta y = y + \delta_1 y + \dfrac{d\,(y+\delta_1 y)\,\delta x}{dx},$

ou, por ser $\dfrac{d\delta_1 y}{dx}\delta x$ da segunda ordem, $\qquad y + \delta y = y + \delta_1 y + y'\delta x.$

Pode considerar-se tambem a variação de fórma como devida á variação d'um parametro (Costa e Almeida, *Calc. das variações*, pag. 6, **); o que dá do mesmo modo

$$\delta y = \delta f\,(x,\,\alpha) = \frac{dy}{d\alpha}\,\delta\alpha + \frac{dy}{dx}\,\delta x = \delta_1 y + y'\delta x.$$

444. Posto isto, seja

$$\delta V = N\delta y + P\delta \frac{dy}{dx} + Q\delta \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (A)'.$$

Attendendo a (*a*), a condição do maximo ou do minimo será

$$0 = \int \left(N\delta_1 y + P\delta_1 \frac{dy}{dx} + \ldots \right) dx + V_2 \delta x_2 - V_1 \delta x_1 ;$$

e, procedendo como no n.º 438, chegaremos a

$$\left(P_2 - \frac{dQ_2}{dx} + \ldots \right) \delta_1 y_2 - \left(P_1 - \frac{dQ_1}{dx} \right) \delta_1 y_1$$

$$+ \left(Q_2 - \frac{dR_2}{dx} \right) \delta_1 \frac{dy_2}{dx} - \left(Q_1 - \frac{dR_1}{dx} \right) \delta_1 \frac{dy_1}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots \right) \delta_1 y :$$

onde, por $\delta_1 y_1$ e $\delta_1 \frac{d^i y_1}{dx^i}$, devemos substituir respectivamente $\delta y_1 - \frac{dy_1}{dx} \delta x$, $\delta \frac{d^i y_1}{dx^i} - \frac{dy_1{}^{i+1}}{dx^{i+1}} \delta x_1$; e o mesmo a respeito do segundo limite.

O termo debaixo do signal $\int$ egualado a zero dá a equação correspondente (B)

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (B)'.$$

Os termos fóra do integral dão os correspondentes de (C), com a addição dos termos $V_2\delta x_2 - V_1\delta x_1$:

$$L_2 - L_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)';$$

sendo $$L_1 = V_1\delta x_1 + \left(P_1 - \frac{dQ_1}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_1 + \ldots$$

$$L_2 = V_2\delta x_2 + \left(P_2 - \frac{dQ_2}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_2 + \ldots$$

445. Se V é uma funcção de x e de duas variaveis y e z dependentes de x, como acontece nas questões relativas a curvas de dupla curvatura, deve accrescentar-se ao segundo membro de (A)' outra linha similhante

$$n\delta z + p\,\delta\,\frac{dz}{dx} + q\delta\,\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots;$$

e as equações da curva procurada e dos limites serão

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y + \left(n - \frac{dp}{dx} + \ldots\right)\delta_1 z = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(P_2 - \dfrac{dQ_2}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_2 + \ldots + \left(p_2 - \dfrac{dq_2}{dx} + \ldots\right)\delta_1 z_2 + \ldots \\[2ex] -\left(P_1 - \dfrac{dQ_1}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_1 - \ldots - \left(p_1 - \dfrac{dq_1}{dx} + \ldots\right)\delta_1 z_1 - \ldots \\[2ex] \quad + V_2\,\delta x_2 - V_1\delta x_1\end{array}\right\} = 0;$$

devendo substituir-se, em logar das variações δ_1 de y e z e dos coefficientes differenciaes $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$ as suas expressões (b) nas correspondentes variações δ.

446. Nos casos particulares é muitas vezes preferivel executar sobre a funcção dada debaixo do signal $\int$ todos os calculos que conduziram ás equações (B) e (C), em vez de comparar cada caso particular com as fórmulas geraes.

447. Se a natureza da questão sujeitasse as variações δx, δy, δz, a certas condições $\varepsilon = 0$, $\theta = 0$, e isto independentemente dos limites; como, por exemplo, se a curva procurada devesse estar sobre uma superficie dada: procederiamos como no n.º 442; servindo aquellas equações de condição para eliminar algumas variações da primeira das equações do n.º 439, que se formou egualando a zero a expressão que ficava debaixo do signal $\int$.

448. Entre essas condições cumpre notar a de ser a curva procurada tal que um certo integral definido $\int_{x_1}^{x_2} U dx$ conserve um valor determinado. Devem então verificar-se as equações

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}\, dx = 0, \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U} dx = 0.$$

E como estas equações se podem combinar multiplicando uma d'ellas por uma constante arbitraria λ e sommando, fica reduzida a questão a tornar minima a expressão

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{V} + \lambda \mathrm{U})\, dx,$$

e portanto, a satisfazer á condição do maximo ou minimo

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{V} + \lambda \mathrm{U})\, dx = 0.$$

A funcção assim obtida é a que se chama um maximo ou minimo *relativa.*

A esta classe de condições pertencem as dos *isoperimetros.*

449. O que fica exposto mostra que, tanto no caso do maximo como no do minimo, deve ser $\delta \int Z$ ou $\delta \int V dx = 0$. Agora, para distinguir o maximo do minimo, no caso de duas variaveis, citaremos a regra de Legendre.

Esta regra consiste em differenciar duas vezes a funcção V, considerando como variavel independente o coefficiente differencial d'ordem mais elevada que entra n'esta funcção, e ver qual é o signal do resultado. Se este signal for positivo, haverá minimo; e se for negativo, haverá maximo. Assim, se a funcção proposta é $V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right)$, differenciaremos esta expressão duas vezes consecutivas em ordem a $\frac{d^m y}{dx^m} = M$; e substituindo em $\frac{d^2V}{dM^2}$ os valores de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots$ que resultam das equações (B) ou (D), o signal $\pm$ d'este coefficiente mostrará se ha minimo, ou se ha maximo. (*Mem. da Ac. das Scienc. de Paris*, 1786). Veja-se tambem uma these de Mr. Delaunay no *Jornal de Mathematica* de Mr. Liouville, de junho de 1841.

Taes são os principios do *Calculo das Variações.* Appliquemol-os a alguns exemplos.

EXEMPLOS

450. I. *Achar a curva plana* CMK (Fig. 7) *cujo comprimento* MK, *comprehendido entre os dois raios vectores* AM *e* AK, *é um minimo.*

Temos (n.º 110) $$s = \int \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = \int Z;$$

e queremos achar a relação $r = \varphi(\theta)$ que torna $\int Z$ um minimo.

A variação de Z é $$\delta Z = \frac{r d\theta^2 \delta r + r^2 d\theta \delta d\theta + dr \delta dr}{ds},$$

a qual comparada com (A), suppondo $x = \theta$ e $y = r$, dá

$$m = 0,\ n = \frac{r^2 d\theta}{ds},\ M = \frac{r d\theta^2}{ds},\ N = \frac{dr}{ds},\ 0 = p = P \ldots;$$

e portanto as equações (D) são:

$$\frac{r^2 d\theta}{ds} = c, \quad \frac{r d\theta^2}{ds} = d\left(\frac{dr}{ds}\right).$$

Como estas equações concordam entre si (*), basta integrar a primeira d'ellas, ou $d\theta = \frac{-d\left(\frac{c}{r}\right)}{\sqrt{1-\frac{c^2}{r^2}}}$; o que dá a equação polar da linha recta

$$c = r\cos(\theta + a).$$

451. Se quizessemos usar da equação (A′), achariamos

$$V = \sqrt{r^2 + r'^2}, \ \delta V = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}\delta r + \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\delta r',$$

que dá $N = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}$, $P = \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$. Portanto a equação (A′), $N - \frac{dP}{dx} = 0$, seria $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, a qual, pondo $r = \frac{1}{z}$, daria $z + z'' = 0$, e os integraes successivos

$$z^2 + z'^2 = \frac{1}{c^2}, \ cz = \operatorname{sen}(\theta + c'), \text{ ou } c = r\cos(\theta + a).$$

(*) Eliminando $d\theta^2$ entre a segunda e $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$, resulta $ds = d\left(\frac{rdr}{ds}\right)$, ou $rdr = \frac{rdr}{ds} d\left(\frac{rdr}{ds}\right)$, cujo integral $r^2 = \frac{r^2 dr^2}{ds^2} + c^2$ é identico com o resultado da eliminação de $d\theta$ entre a outra $\frac{r^2 d\theta}{ds} = c$ e $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$.

452. Ainda que do enunciado do problema facilmente se conclua que a funcção proposta não é susceptivel se não de *minimo*, mostremos isto mesmo pela analyse, empregando o processo ensinado no n.° 449.

Pondo $\frac{dr}{d\theta}=p$, temos $s=\int d\theta\sqrt{r^2+p^2}$;

e differenciando $V=\sqrt{r^2+p^2}$ duas vezes em ordem a p, virá

$$\frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}},\ \frac{d^2V}{dp^2}=\frac{r^2}{(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por ser esta expressão positiva, a funcção proposta $s=\int Vd\theta$ é com effeito um minimo.

453. II. *Achar a linha mais curta entre dois pontos dados, ou entre duas curvas dadas.*

Tracta-se de fazer minima a expressão do comprimento d'uma linha,

$$s=\int Z=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

A variação $\delta Z=\frac{dx}{ds}\delta dx+\frac{dy}{ds}\delta dy+\frac{dz}{ds}\delta dz$

comparada com a fórmula (A) dá

$$m=0,\ M=0,\ \mu=0,\ n=\frac{dx}{ds},\ N=\frac{dy}{ds},\ \nu=\frac{dz}{ds},$$

e nullos os outros coefficientes p, P, π,....

As equações (D) são pois neste caso

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\ d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,\ d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Estas equações dão

$$dx=ads,\ dy=bds,\ dz=cds,$$

das quaes, quadrando e sommando, resulta a condição $a^2+b^2+c^2=1$, a que devem satisfazer as constantes a, b, c, para que as tres equações possam existir.

Eliminando ds, resulta $\quad dy=\frac{b}{a}dx,\ dz=\frac{c}{a}dx;$

e, integrando, vem $\quad ay=bx+a',\ az=cx+b',$

Por onde se vê, que as projecções da linha procurada sobre dous planos coordenados são linhas rectas; e conseguintemente esta linha tambem é uma recta. Para fixar a sua posição é necessario determinar as cinco constantes a, b, c, a', b'.

1.º Se a linha pedida deve ser a mais curta entre dous pontos fixos, A, C (Fig. 56), cujas coordenadas são x_1, y_1 e x_2, y_2, a equação (C) tornar-se-ha identica, por serem nullos $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$ Substituindo nas duas equações das rectas os dous systemas (x_1, y_1, z_1), e (x_2, y_2, z_2), resultam quatro equações de condição, as quaes com $a^2+b^2+c^2=1$, perfazem o numero de cinco, necessario para determinar as cinco constantes.

2.º Se os limites estão sobre duas curvas, dadas pelas equações

$$F(x_1, y_1, z_1)=0,\ f(x_1, y_1, z_1)=0;\ \varphi(x_2, y_2, z_2)=0,\ \psi(x_2, y_2, z_2)=0:$$

substituindo em logar de δy_1, δz_1, e δy_2, δz_2, as suas expressões

$$\delta y_1=A_1 dx_1,\ \delta z_1=B_1\delta x_1,\ \text{e}\ \delta y_2=A_2\delta x_2,\ \delta z_2=B_2\delta x_2,$$

tiradas d'estas equações, vê-se que a equação (C)

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dx}{ds}\right)_2\delta x_2+\left(\frac{dy}{ds}\right)_2\delta y_2+\left(\frac{dz}{ds}\right)_2\delta z_2\\[2ex] -\left(\frac{dx}{ds}\right)_1\delta x_1-\left(\frac{dy}{ds}\right)_1\delta y_1-\left(\frac{dz}{ds}\right)_1\delta z_1\end{array}\right\}=0$$

se decompõe nas duas

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_2 \delta x_2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_2 \delta y_2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_2 \delta z_2 = 0;$$

ou
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdot \frac{\delta y_1}{\delta x_1} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_1 \cdot \frac{\delta z_1}{\delta x_1} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \cdot \frac{\delta y_2}{\delta x_2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_2 \cdot \frac{\delta z_2}{\delta x_2} = 0.$$

Por conseguinte em cada um dos pontos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), se ambos estiverem sujeitos a existir em curvas dadas, ou só naquelle que o estiver, a linha mais curta é perpendicular á respectiva curva limite. Se os limites fossem superficies curvas, tirar-se-hia uma conclusão similhante a respeito da perpendicularidade da linha mais curta ás superficies limites.

454. Supponhamos agora, que a linha mais curta pedida deve ser traçada sobre uma superficie curva cuja equação é

$$u = 0.$$

É necessario combinar a equação (B) com $\delta u = 0$; para o que accrescentaremos a (B) o termo $\lambda \delta u$, e depois, egualando a zero os coefficientes de δx, δy, δz, acharemos as relações

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \lambda \frac{\delta u}{dx} = 0,\ d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \lambda \frac{\delta u}{dy} = 0,\ d\left(\frac{dz}{ds}\right) + \lambda \frac{\delta u}{dz} = 0,$$

entre as quaes eliminando λ, resultam as duas equações da curva procurada

$$\frac{du}{dz}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{dx}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right),\ \frac{du}{dy}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\frac{du}{dz}\,d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

A condição de perpendicularidade do plano osculador da curva (n.º 151)

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,z=\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)x+\frac{d^2z}{dx^2}\,y+\mathrm{A}$$

ou

ao plano tangente á superficie (n.º 145)

$$z\frac{du}{dz}+y\frac{du}{dy}+x\frac{du}{dx}+\mathrm{B}=0$$

é (*Geom. Anal.*, n.º 179)

$$1-\frac{\dfrac{dz}{dx}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}\,\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dz}}=\frac{\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{\dfrac{du}{dy}}{\dfrac{du}{dz}}=0.$$

Substituindo nesta equação, em logar de $\dfrac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}$ e $\dfrac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}$, as suas expressões tiradas das equações da curva,

$$\frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dz}}=\frac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)},\ \frac{\dfrac{du}{dy}}{\dfrac{du}{dz}}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)},$$

resulta uma identidade; por conseguinte *o plano osculador da curva mais curta traçada sobre a superficie é sempre perpendicular a esta superficie.*

Tomemos para exemplo a mais curta distancia A′C′ entre dous pontos d'uma esphera cujo centro é a origem: teremos

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,\ \frac{du}{dx} = 2x,\ \frac{du}{dy} = 2y,\ \frac{du}{dz} = 2z.$$

Substituindo nas duas equações precedentes, tomado ds constante, vem

$$zd^2x = xd^2z,\ zd^2y = yd^2z,$$

das quaes resulta $\qquad yd^2x = xd^2y;$

e integrando,

$$zdx - xdz = ads,\ zdy - ydz = bds,\ ydx - xdy = cds.$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por $-y$, a segunda por x, a terceira por z, e sommando, resulta $ay = bx + cz$: ora esta equação é a d'um plano, que passa pela origem das coordenadas; logo a curva procurada é o circulo maximo A′C′ (Fig. 56), cujas equações são

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,\ bx + cz - ay = 0,$$

e que, passando pelos dous pontos A′ e C′, é normal ás duas curvas A′B e C′D que servem de limite e são dadas sobre a superficie espherica.

455. III. Quando um corpo se move num fluido, experimenta da parte d'este uma resistencia que, pondo de parte as outras circumstancias, depende da sua fórma: e se o corpo é de revolução, e se move no sentido do eixo, prova-se em Mechanica que a resistencia é minima quando a equação da curva generatriz satisfaz á condição

$$\int \frac{ydy^3}{dx^2 + dy^2} = minimo.$$

Determinemos esta curva generatriz do *solido da menor resistencia.*

Temos $$Z=\frac{yy'^3dx}{1+y'^2};$$

e tomando a variação, para comparar com a equação (A), achamos

$$m=0,\ n=\frac{-2ydy^3dx}{(dy^2+dx^2)^2}=\frac{-2yy'^3}{(1+y'^2)^2},\ p=0,\ldots,$$

$$M=\frac{dy^3}{dx^2+dy^2}=\frac{y'^3dx}{1+y'^2},\ N=\frac{yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2},\ldots.$$

A primeira equação (D), $m-dn=0$, dá immediatamente

$$-dn=0=d\left(\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}\right).$$

A segunda daria

$$\frac{y'^3dx}{1+y'^2}=d\left(\frac{yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2}\right)=d\left(\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}\right)+d\left(\frac{yy'^2}{1+y'^2}\right),$$

ou $$0=d\left(\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}\right)+\frac{2yy'}{(1+y'^2)^2}dy',$$

ou $$0=y'd\left(\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}\right)+\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}dy'=d\left(\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}\right):$$

por onde se vê que as duas equações concordam entre si.

Temos pois

$$\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}=a,\ x=\int\frac{dy}{y'}=\frac{y}{y'}+\int\frac{ydy'}{y'^2},$$

ou $$\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}=a,\ x=a\frac{(1+y'^2)^2}{2y'^4}+\frac{a}{2}\int\frac{(1+y'^2)^2dy'}{y'^5}.$$

Feita a integração, e eliminando depois y' entre as duas equações, resultará a equação da curva procurada, com duas constantes arbitrarias que se determinarão pelas condições dadas.

456. IV. *Qual é a curva* ABM (Fig. 9) *na qual a área* BODM, *comprehendida entre o arco* BM, *os raios de curvatura* BO *e* MD *das suas extremidades, e o arco* OD *da evoluta, é minima?*

Esta área é o integral do producto do elemento do arco AM pelo raio de curvatura MD. Ora o elemento de AM é $ds=dx\sqrt{1+y'^2}$, e o raio de curvatura MD (n.º 118) é $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$: deve pois tornar-se *minimo* o integral

$$\int Z=\int\frac{(1+y'^2)^2}{y''}dx.$$

Empregando o processo exposto no n.º **444**, e a notação alli adoptada, temos

$$N=0,\ P=\frac{4y'(1+y'^2)}{y''},\ Q=-\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2};$$

e R,... nullos: por conseguinte a equação d'aquelle numero, correspondente a (B), é

$$d\left(P-\frac{dQ}{dx}\right)=0,\ \text{ou}\ P-\frac{dQ}{dx}=4a.$$

Ora, attendendo a esta equação, é

$$d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right)=\mathrm{P}dy'+\mathrm{Q}dy''=4ady'+\frac{d\mathrm{Q}}{dx}dy'+\mathrm{Q}dy'',$$

ou

$$=4ady'+d(\mathrm{Q}y'')=4ady'-d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right),$$

ou

$$2d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right)=4ady';$$

logo

$$2\frac{(1+y'^2)^2}{y''}=4ay'+4b,$$

ou

$$y''=\frac{(1+y'^2)^2}{2(ay'+b)}=\frac{dy'}{dx},\ dx=\frac{2(ay'+b)\,dy'}{(1+y'^2)^2}.$$

Finalmente, integrando, vem

$$x=c+\frac{by'-a}{1+y'^2}+b\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=y').$$

Para achar y, temos

$$y=\int y'dx=y'x-\int xdy'=y'x-cy'-\int\frac{by'-a}{1+y'^2}dy'-\int bdy'\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=y');$$

e como este ultimo termo se integra por partes, resulta em fim

$$y=y'x-cy'-(by'-a)\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=y')+f.$$

Eliminando arc (tang $=y'$) entre estas duas expressões de x e y, vem

$$by=a(x-c)+\frac{(by'-a)^2}{1+y'^2}+bf,$$

$$\sqrt{by-ax+g}=\frac{(by'-a)\,dx}{ds},\ ds=\frac{bdy-adx}{\sqrt{by-ax+g}};$$

e finalmente, integrando, $\qquad s=2\sqrt{by-ax+g}+h.$

Esta equação comparada com a do n.º 301, V, mostra que a curva procurada é uma cycloide. As quatro constantes determinar-se-hão por um numero egual de condições dadas.

457. V. *Achar a curva, para a qual a funcção*

$$\int Z=\int\frac{ds}{\sqrt{z-z_1}}=\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{\sqrt{z-z_1}}$$

é minima. Este problema corresponde em Mechanica a achar a curva AC′ (Fig. 57), que deve descrever um corpo sollicitado pela gravidade para chegar de C′ a A no menor tempo possivel (*Elem. de Mech.*, n.º 78). Formando $\int Z$, e comparando com A, acham-se

$$\mu=-\frac{ds}{2\sqrt{(z-z_1)^3}},\ n=\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_1}},\ \mathrm{N}=\frac{dy}{ds\sqrt{z-z_1}},\ \nu=\frac{dz}{ds\sqrt{z-z_1}};$$

e $\qquad m=\mathrm{P}\ldots=0.$

Logo as equações (D) dão

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_1}}\right)=0,\ d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{z-z_1}}\right)=0\ldots\ldots\ldots(1).$$

Omittimos a terceira equação, porque se pode demonstrar que ella está comprehendida nas outras; condição sem a qual o problema sería absurdo (*).

458. Integrando (1), e dividindo os resultados um pelo outro, vem $dy = adx$; o que prova que a projecção da curva sobre o plano dos yx é uma recta, e por conseguinte que a curva está toda em um plano perpendicular aos xy.

Suppondo este plano um dos coordenados, por exemplo o dos xz, a primeira das equações (1) será sufficiente; e integrando-a, virá

$$kdx = ds\sqrt{z-z_1} = \sqrt{dx^2+dz^2}\,.\sqrt{z-z_1},$$

ou

$$dx = \frac{dz\sqrt{z-z_1}}{\sqrt{k^2-z+z_1}}.$$

Fazendo $k^2-z+z_1=u$, reconhece-se que esta equação é a d'uma cycloide vertical, sendo k^2 o diametro do circulo gerador (n.° 106, VI).

1.° Se os limites são dous pontos fixos A e C′, não ha outras condições a satisfazer senão as de passar a cycloide por estes dous pontos, o que determina as constantes k e z_1.

2.° Se o primeiro limite é um ponto fixo (z_1, x_1), e o segundo uma curva AB, situados ambos no plano vertical dos xz, temos $\delta x_1 = 0$, $\delta z_1 = 0$, e $\delta x_2 = A\delta z_2$, sendo esta expressão de δx_2 tirada da equação

---

(*) Com effeito, substituindo na terceira equação,

$$\frac{-ds}{2\sqrt{(z-z_1)}} = d\left(\frac{dz}{ds\sqrt{z-z_1}}\right).$$

o valor de ds dado pelas duas primeiras,

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{1-(c^2+c'^2)(z-z_1)}},$$

resulta uma identidade.

$x = fz$ de AB. São pois

$$L_1 = 0,\ L_2 = \frac{dx_2}{ds_2\sqrt{z_2 - z_1}}\delta x_2 + \frac{dz_2}{ds^2\sqrt{z_2 - x_1}}\delta z_2;$$

e a equação dos limites $L_2 - L_1 = 0$ é $\quad dx_2 \delta x_2 + dz_2 \delta z_2 = 0$,
ou, eliminando δx_2,

$$dz_2 + A dx_2 = 0.$$

Por onde se vê, que a cycloide deve cortar perpendicularmente a curva dada AB no segundo limite (z_2, x_2). A constante k determinar-se-ha comparando a equação da cycloide com a precedente neste ponto commum ás duas curvas.

3.º Se o primeiro limite tambem é uma curva, estamos no caso indicado no fim do n.º 442; e por isso é necessario accrescentar ao primeiro membro de (C) o termo $\delta z_1 \int \frac{dZ}{dz_1}$. Assim as equações (D) da curva ficam as mesmas

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_1}} = c,\ \frac{dy}{ds\sqrt{z - z_1}} = c',\ \frac{dz}{ds\sqrt{z - z_1}} + \int \frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}} = c'' \ldots (2);$$

porém deve accrescentar-se á equação dos limites o termo

$$\delta z_1 \int \frac{dZ}{dz_1} = \delta z_1 \int \frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}};$$

o que dá

$$\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{ds\sqrt{z - z_1}} + \delta z_1 \int \frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}} + K = 0 \ldots (3).$$

Entre os dois limites, de que se tracta, a ultima equação (2) e a equação

(3), eliminando entre ellas $\int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{2\sqrt{(z-z_1)^3}}$, e fazendo

$$\frac{dz}{ds\sqrt{z-z_1}} = t = c\frac{dz}{dx} = c'\frac{dz}{dy},$$

dão $\quad c\delta x_2 + c'\delta y_2 + t_2\delta z_2 - c\delta x_1 - c'\delta y_1 - t_1\delta z_1 + \delta z_1(t_1 - t_2) = 0,$

ou $$c\delta x_2 + c'\delta y_2 + t_2\delta z_2 - c\delta x_1 - c'\delta y_1 - t_2\delta z_1 = 0 \ldots\ldots (4).$$

4.º Se os dous limites estiverem sobre duas curvas situadas no plano da cycloide, que supporemos o dos xz, e forem nelles

$$\delta x_1 = A\delta z_1,\ \delta x_2 = B\delta z_2,$$

as equações differenciaes d'estas curvas: a equação (4), que se tornará, em virtude d'ellas, em $\quad (Bc + t_2)\,\delta z_2 - (Ac + t_2)\,\delta z_1 = 0,$
dará as duas

$$B\frac{dx_2}{dz_2} + 1 = 0,\ A\frac{dx_2}{dz_2} + 1 = 0.$$

Estas equações mostram (*Geom. Anal.*, n.º **31**) que a tangente da cycloide é perpendicular á da curva no segundo limite; e que uma parallela a esta tangente $\left(\text{para as quaes } \frac{dx_1}{dz_1} = \frac{dx_2}{dz_2}\right)$ é perpendicular á da curva no primeiro limite. Portanto as duas curvas limites são parallelas nestes pontos.

5.º Se os limites estiverem sobre duas curvas não situadas no mesmo plano, e forem nelles

$$\delta x_1 = A\delta z_1,\ \delta y_1 = a\delta z_1,\ \delta x_2 = B\delta z_2,\ \delta y_2 = b\delta z_2,$$

as equações differenciaes d'estas curvas: a equação (4), que se tornará, em virtude d'ellas, em

$$(Bc + bc' + t_2)\,\delta z_2 - (Ac + ac' + t_2)\,\delta z_1 = 0,$$

dará $$B\frac{dx_2}{dz_2} + b\frac{dy_2}{dz_2} + 1 = 0,\ A\frac{dx_2}{dz_2} + a\frac{dy_2}{dz_2} + 1 = 0.$$

Estas equações mostram (*Geom. Anal.*, n.º 178, 6.º), como no caso precedente, que a tangente á cycloide no segundo limite e uma parallela a ella no primeiro limite são perpendiculares ás duas curvas sobre as quaes devem estar estes limites.

6.º Finalmente, se os limites estiverem sobre duas superficies curvas, e forem nelles

$$\delta z_1 = A\delta x_1 + a\delta y_1,\ \delta z_2 = B\delta x_2 + b\delta y_2,$$

as equações differenciaes d'estas superficies: a equação (4), que se tornará, em virtude d'ellas, em

$$(c + Bt_2)\,\delta x_2 + (c' + bt_2)\,\delta y_2 - (c + At_2)\,\delta x_1 - (c + at_2)\,\delta y_1 = 0,$$

dará $$\frac{dx_2}{dz_2} + B = 0,\ \frac{dy_2}{dz_2} + b = 0,\ \frac{dx_2}{dz_2} + A = 0,\ \frac{dy_2}{dz_2} + a = 0.$$

Ora estas equações, comparadas com as differenciaes das superficies, satisfazem (*Geom. Anal.*, n.º 174) á condição de perpendicularidade entre os planos tangentes e a tangente da cycloide no segundo limite, e entre os mesmos planos e uma parallela a esta tangente no primeiro limite; por isso que os traços dos planos, $dz = A\delta x$, $\delta z = a\delta y$, $\delta z = B\delta x$, $\delta z = b\delta y$, são perpendiculares, em virtude das equações precedentes, ás projecções da tangente e da sua parallela: logo as duas superficies são parallelas entre si nos dous limites, e perpendiculares á tangente da cycloide no segundo limite e á sua parallela tirada pelo primeiro limite. Pode tambem consultar-se sobre esta materia a *Mec.* de Poisson, 1.ª edição, desde n.º 289 até 203.

459. Quando a curva deve ser traçada sobre uma superficie dada por sua equação $u=0$, a equação (B) não se parte em tres, senão depois de lhe haver ajunctado o termo $\lambda\delta u$. Assim, em logar das tres equações (1), teremos outras, entre as quaes eliminando λ resultarão as da curva procurada.

Se os limites forem dous pontos fixos, as constantes se determinarão pela condição de passar a curva por esses dous pontos.

Quando os limites deverem estar sobre duas curvas, a pedida cortal-as-ha debaixo d'um angulo recto, como no primeiro caso.

Portanto, o resto do problema é o mesmo em ambos os casos (*).

460. VI. *Qual é a curva* BM (Fig. 58), *de comprimento dado, que passa pelos pontos* B *e* M, *e que intercepta entre as ordenadas* BC, PM, *e o eixo* Ax, *a área maxima?*

Como deve ser *maxima* a área $\int y dx$, e constante o arco s, é necessario combinar a variação de $\int Z=\int y dx$ com a de $\int\sqrt{dx^2+dy^2}=$ const., como se viu no n.º 448, a fim de poder partir em duas a equação (B).

A variação completa é

$$\int\left(y\delta dx+dx\delta y+\frac{\lambda dx\delta dx+\lambda dy\delta dy}{ds}\right)=0;$$

d'onde resulta $\quad m=0,\ n=y+\lambda\dfrac{dx}{ds},\ \mathrm{M}=dx,\ \mathrm{N}=\lambda\dfrac{dy}{ds};$

e as duas equações, em que se parte a equação (B), são

$$y+\lambda\frac{dx}{ds}=c,\ x-\lambda\frac{dy}{ds}=c'.$$

(*) Para verificar que a funcção é susceptivel de *minimo* e não de *maximo*, appliquemos o processo do n.º 449. Temos $\mathrm{V}=\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z-z_1}}$, d'onde se tira

$$\frac{d\mathrm{V}}{dp}=\frac{1}{\sqrt{z-z_1}}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ \frac{d^2\mathrm{V}}{dp^2}=\frac{1}{\sqrt{z-z_1}}\cdot\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quantidade positiva: logo a funcção proposta é um *minimo*, como se suppoz no texto.

Estas equações são identicas, porque a integração d'uma conduz ao mesmo resultado que a da outra: não se deve pois eliminar λ entre ellas.

Substituindo na primeira $\sqrt{dx^2+dy^2}$ em logar de ds, vem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\lambda^2-(y-c)^2}}{y-c},$$

o que dá
$$(x-c')^2+(y-c)^2=\lambda^2.$$

O mesmo resultaria da combinação das duas equações; porque tirando d'ellas

$$\lambda^2\frac{dx^2}{ds^2}=(c-y)^2,\ \lambda^2\frac{dy^2}{ds^2}=(x-c')^2,$$

a somma daria
$$(x-c')^2+(y-c)^2=\lambda^2.$$

Logo a curva procurada é um circulo. Para determinar as constantes c, c' e λ, recorreremos ás condições de passar o circulo pelos pontos B e M, e de ter o arco BM o comprimento exigido. Tal é o mais simples dos problemas dos *isoperimetros*.

461. Esta e outras questões do minimo relativo, reduzem-se ás do minimo absoluto, ajunctando debaixo do integral a funcção constante. Assim, quando $y=\varphi x$ fizer $\int(ydx+\lambda ds)$ um minimo absoluto, tambem fará $\int ydx$ um minimo relativamente ás curvas para as quaes $\int ds$ for o mesmo.

Para applicar agora a regra da distincção entre o maximo e o minimo, é necessario combinar á segunda condição de ser $\int ds$ constante com a do maximo ou minimo. Ora, a equação

$$y+\lambda\frac{dx}{ds}=c$$

dá
$$\lambda=\frac{(c-y)\,ds}{dx}=(c-y)\sqrt{1+p^2};$$

logo, substituindo em $\int(ydx + \lambda ds)$, temos

$$\int dx[y + (c-y)(1+p^2)];$$

e a regra de Legendre dá $\frac{d^2V}{dp^2} = 2(c-y)$.

Como c é a ordenada do centro, a qual para a parte convexa é $> y$, e para a concava $< y$, segue-se que $\frac{d^2V}{dp^2}$ será positivo ou negativo, e a funcção proposta um minimo ou um maximo, conforme o arco de circulo voltar a *convexidade* ou a *concavidade* para o eixo Ax. O mesmo faremos nos problemas seguintes.

462. VII. *Qual é a curva* BM, *que, para a área dada* BCPM (Fig. 58), *tem o menor arco possivel?* Temos de combinar as duas condições $\int\sqrt{dx^2+dy^2} = minimo$, $\int ydx = \text{const.}$; o que dá, imitando os raciocinios precedentes,

$$\frac{dy}{ds} + \lambda y = c,\ \lambda x - \frac{dy}{ds} = c'.$$

Estas equações são visivelmente as mesmas achadas no problema precedente: logo o circulo é a curva procurada.

463. VIII. *Qual é a curva, de comprimento dado entre dous pontos fixos, para a qual* $\int yds$ *é um minimo?*

Temos $$\delta\int(yds + \lambda ds) = 0.$$

A primeira das equações (D) dá

$$(y+\lambda)\frac{dx}{ds} = c;$$

logo a curva pedida é uma catenaria, que tem o eixo horizontal.

A segunda daria $ds = d\left[(y+\lambda)\frac{dy}{ds}\right]$,

ou $(y+\lambda)\,dy = (y+\lambda)\frac{dy}{ds}\,d\left[(y+\lambda)\frac{dy}{ds}\right]$,

cujo integral $(y+\lambda)^2 = (y+\lambda)^2\frac{dy^2}{ds^2} + c^2$,

ou $\frac{(y+\lambda)^2\,dx^2}{ds^2} = c^2$

é identico com a primeira.

464. Para examinar se ha maximo, se minimo, temos a funcção proposta

$$\int (yds + \lambda ds),$$

e a equação achada $(y+\lambda)\frac{dx}{ds} = c$,

que exprime a condição commum a ambas as propriedades.

Tirando d'esta equação o valor de λ, e substituindo-o na funcção, esta será

$$\int \frac{cds^2}{dx} \text{ ou } \int cdx\,(1+p^2).$$

A regra do n.º 449 dá $\frac{d^2V}{dp^2} = 2c$.

Ora, comparando a equação achada $dx = \frac{\pm\,cdy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}$

com a da catenaria $dx = \frac{bdy}{\sqrt{(a-y)^2 - b^2}}$ (*Elem. de Mec.* n.º 75), onde $\lambda = -a$ e $b = \pm c$, vê-se que $y + \lambda$, e por conseguinte tambem c è negativo: logo a funcção proposta é um minimo.

Com effeito a equação da catenaria $dx = \frac{bdy}{\sqrt{(a-y)^2 - b^2}}$

suppõe que o eixo dos x é horizontal e corta a curva num ponto onde a *tensão* é a. Então a curva volta a concavidade para o eixo das abscissas, a constante a é $> y$, e tem logar o que acaba de dizer-se, para que a equação achada se possa comparar *immediatamente* com a da catenaria.

Mas, no caso de ser $\lambda = 0$ a equação achada, que então é $dx = \frac{\pm cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}}$, não se pode comparar com a da catenaria sem mudar nesta $a - y$ em y, isto é, sem transportar o eixo dos x parallelamente a si mesmo, e collocal-o abaixo do ponto infimo da curva, a qual voltará a convexidade para este novo eixo. Ora a equação $y\frac{dx}{ds} = c$, em que se torna $(y + \lambda)\frac{dx}{ds} = c$, dá c positivo: logo temos neste caso um minimo, como deve ser, isto é, um maximo a respeito do primeiro eixo. Similhantemente raciocinariamos quando λ fosse positivo, ou negativo e $< y$.

DIFFERENÇAS E SERIES

Methodo directo das differenças. Interpolação

465. Sendo dada uma serie $a, b, c, d, \ldots$, subtrahamos cada um dos seus termos d'aquelle, que se lhe segue; teremos a serie das primeiras *differenças*

$$a' = b - a,\ b' = c - b,\ c' = d - c, \ldots$$

Do mesmo modo as differenças dos termos consecutivos d'esta serie darão a serie das segundas *differenças*,

$$a'' = b' - a',\ b'' = c' - b', \ldots;$$

e assim por diante.

Costumam designar-se as differenças pela caracteristica Δ affecta d'um expoente, que designa a ordem d'ellas: assim Δ^n é um termo da serie das differenças da ordem n. Toma-se cada differença com o signal respectivo: $+$, se é tirada d'uma serie crescente; $-$, se é tirada d'uma serie decrescente.

Por exemplo, se na funcção $y = x^3 - 9x + 6$ fizermos successivamente $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$, teremos uma serie de numeros, cujo termo geral é y, da qual se tiram as differenças successivas do modo seguinte:

Raizes	$x = 0$	1	2	3	4	5	...
Funcções	$y = 6$	-2	-4	6	34	86	...
1.as diff.	$\Delta y = -$ 8	-2	10	28	52	....	
2.as diff.	$\Delta^2 y =$	6	12	18	24	....	
3.as diff.	$\Delta^3 y =$		6	6	6	....	
4.as diff.	$\Delta^4 y =$			0	0	....	

466. Vê-se que neste exemplo as differenças 4.^{as} são nullas, as 3.^{as} constantes, e as 2.^{as} equidifferentes. Em geral, tomando para x numeros equidifferentes, sempre chegaremos a differenças nullas, uma vez que y seja funcção racional e inteira de x; como vamos mostrar.

Seja
$$y = kx^m + px^{m-1} + px^{m-2} + \ldots = f(x)$$
o polynomio proposto, e m o maior expoente de x.

Substituindo por x os numeros equidistantes α, $\alpha + h$, $\alpha + 2h$, ... isto é, mudando successivamente α em $\alpha + h$, teremos

$$\Delta = f(\alpha + h) - f\alpha = h\frac{df}{d\alpha} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \ldots,$$

$$\Delta' = f(\alpha + 2h) - f(\alpha + h) = \Delta + h\frac{d\Delta}{d\alpha} + \ldots,$$

isto é,
$$\Delta^2 = h\frac{d\Delta}{d\alpha} + \ldots = h^2\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \ldots$$

E do mesmo modo

$$\Delta^3 = h\frac{d\Delta^2}{d\alpha} + \ldots = h^3\frac{d^3f}{d\alpha^3} + \ldots,$$

....

$$\Delta^m = h\frac{d\Delta^{m-1}}{d\alpha} + \ldots = h^m\frac{d^mf}{d\alpha^m},$$

isto é,
$$\Delta^m = 1.2\ldots.kh^m.$$

Logo: *em qualquer polynomio racional e inteiro do gráu* m, *a differença da ordem* m *é constante, e a da ordem* m + 1 *nulla, quando se substituem por* x *numeros equidifferentes.*

467. Por onde se vê que, se houvermos de substituir numeros equidifferentes, como acontece na resolução das equações numericas (*Alg. Sup.*, n.º 73), bastará procurar os primeiros $m+1$ resultados, e formar as suas differenças 1.as, 2.as,.... até a da ordem m, a qual será constante e $=1.2.3\ldots mkh^m$. Depois a serie d'estas ultimas differenças constantes, que se podem escrever indefinidamente, dará, pela addição ás da ordem precedente, a continuação da serie da ordem $m-1$; esta dará, pela addição, a continuação da serie da ordem $m-2$; e assim successivamente até chegar á serie dos resultados da substituição na equação, que se continuará pela addição das primeiras differenças.

Seja, por exemplo, a funcção $y=x^3-x^2-2x+1$:

Como	temos
$x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3$	$\Delta^3=\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6\ldots$
dá $y=1\ ,-1\ ,\ 1\ ,\ 13$	$\Delta^2=\ 4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28,\ 34\ldots$
$\Delta=-2,\ 2\ ,\ 12$	$\Delta=-2,\ 2,\ 12,\ 28,\ 50,\ 78\ldots$
$\Delta^2=\ 4,\ 10$	$y=\ 1,-1,\ 1,\ 13,\ 41,\ 91\ldots$
$\Delta^3=\ 6,$	para $x=\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$

Estas series deduzem-se da serie das differenças constantes 6, 6, 6,..., e dos termos iniciaes já achados para cada uma; de maneira que: *qualquer termo d'uma das series se acha ajunctando o que na mesma serie lhe fica á esquerda com o que na precedente fica acima d'este ultimo.* Tambem se podem continuar as series em sentido contrario, para achar os resultados correspondentes a $x=-1,\ -2,\ -3,\ldots$: *subtrahindo do numero, que fica á direita do termo desconhecido, aquelle que fica acima do mesmo termo.*

Quando taes series se formam com o fim de resolver uma equação, não é necessario prolongar a serie dos resultados além do termo, passado o qual estes devem ter sempre o mesmo signal; o que acontece, logo que são todos positivos os termos d'uma columna qualquer, situada á esquerda dos que falta calcular, ou de signal alternado os da columna situada á direita. Com effeito as addições e subtracções successivas, que servem para prolongar as series, conservam constantemente os mesmos signaes nos resultados. Por este modo se obtem os limites das raizes, tanto positivas, como negativas.

468. Designaremos por y_x a funcção de x, que é o termo geral da serie proposta; termo que gera todos os outros, fazendo $x=0, 1, 2, 3, \ldots$ Assim y_5 denotará o termo, que se obtem fazendo $x=5$ no geral; isto é, aquelle que tem 5 antes de si (como é o numero 91 no exemplo precedente).

Conforme esta notação, teremos

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0,\quad y_2 - y_1 = \Delta y_1,\quad y_3 - y_2 = \Delta y_2, \ldots$$

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0,\ \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,\ \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2, \ldots$$

$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0,\ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1,\ \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2, \ldots$$

Em geral
$$y_x - y_{x-1} = \Delta y_{x-1},$$
$$\Delta y_x - \Delta y_{x-1} = \Delta^2 y_{x-1},$$
$$\Delta^2 y_x - \Delta^2 y_{x-1} = \Delta^3 y_{x-1}, \text{ etc.}$$

469. Formemos as differenças d'uma serie qualquer

$$\begin{array}{l|l}
y \ldots a,\ b,\ c,\ d,\ e, \ldots & b = a + a',\ c = b + b',\ d = c + c', \ldots \\
\Delta \ldots a',\ b',\ c',\ d',\ e', \ldots & b' = a' + a'',\ c' = b' + b'',\ d' = c' + c'', \ldots \\
\Delta^2 \ldots a'',\ b'',\ c'',\ d'',\ e'', \ldots & b'' = a'' + a''',\ c'' = b'' + b''',\ d'' = c'' + c''', \ldots \\
\Delta^3 \ldots a''',\ b''',\ c''',\ d''',\ e''', \ldots & b''' = a''' + a^{\text{IV}},\ c''' = b''' + b^{\text{IV}},\ d''' = c''' + c^{\text{IV}}, \ldots
\end{array}$$

Eliminando $b, b', c, c', \ldots$ das equações da primeira linha, reduziremos os segundos membros a não conter senão $a, a', a'', \ldots$ Tambem se podem obter valores de $a', a'', a''', \ldots$ que não contenham nenhuma letra accentuada.

Teremos assim:

$$b=a+a',\ c=a+2a'+a'',\ d=a+3a'+3a''+a''',$$

$$e=a+4a'+6a''+4a'''+a^{\text{IV}},\ f=a+5a'+10a''\ \text{etc.}$$

$$a'=b-a,\ a''=c-2b+a,\ a'''=d-3c+3b-a\ldots$$

Ora, como os iniciaes a', a'', a''',.... são Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$,....; e a, b, c, d,.... são y_0, y_1, y_2,....: as equações precedentes dão

$$\begin{array}{l|l}
y_1=y_0+\Delta y_0, & \Delta y_0=y_1-y_0, \\
y_2=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0, & \Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0, \\
y_3=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0, & \Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0, \\
y_4=y_0+4\Delta y_0+6\Delta^2 y_0+4\Delta^3 y_0+\Delta^4 y_0, & \Delta_4 y_0=y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Em geral

$$y_x=y_0+x\Delta y_0+x\frac{x-1}{2}\Delta^2 y_0+x\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\Delta^3 y_0+\ldots.\ (\text{A}),$$

$$\Delta^n y_0=y_n-ny_{n-1}+n\frac{n-1}{2}y_{n-2}-n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}y_{n-3}+\ldots(\text{B});$$

ou $$y_x=y_0+\Sigma\frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots i}\Delta^i y_0,$$

$$\Delta^n y_0=y_n+\Sigma(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots.i}y_{n-i}.$$

470. A primeira d'estas equações dá o termo de qualquer ordem x, isto é, o termo geral, quando se conhecem os iniciaes de todas as ordens de differenças: a segunda dá o termo inicial da serie das differenças de qualquer ordem n, quando se conhecem os termos da serie $y_0, y_1, y_2, \ldots$

Para applicar a primeira serie (A) ao exemplo do n.º 465, faremos

$$y_0=1,\ \Delta y_0=-2,\ \Delta^2 y_0=4,\ \Delta^3 y_0=6,\ \Delta^4 y_0=0, \ldots$$

o que dá

$$y_x=1-2x+2x(x-1)+x(x-1)(x-2)=x^3-x^2-2x+1.$$

471. As equações (A) e (B) facilmente se gravam na memoria, notando que os coefficientes das differenças $\Delta^1, \Delta^2, \ldots$ em (A), e os dos termos $y_n, y_{n-1}, \ldots$ em (B), são os mesmos que os coefficientes dos desenvolvimentos de $(1+\Delta y_0)^x$ e $(y-1)^n$ pela fórmula do binomio: de maneira que podemos escrever

$$y_x=(1+\Delta y_0)^n,\ \Delta^n y_0=(y-1)^n;$$

com tanto que nos desenvolvimentos d'estas expressões se substituam em logar das potencias de Δy_0 os expoentes de Δ que marcam a ordem das differenças, e em logar das potencias de y os indices; pondo além d'isso y_0 em logar do primeiro termo 1.

472. Qualquer que seja a serie proposta $a, b, c, d \ldots$, podemos sempre concebel-a tirada d'outra, na qual se tivessem omittido periodicamente certos termos, isto é, da qual $a, b, c, d \ldots$ fossem os termos tomados de 2 em 2, ou de 3 em 3, ou de 4 em 4, ... Supponhamos pois que, dada a primeira serie $a, b, c, d \ldots$ ou antes o seu termo geral y_x (eq. A), nos propomos achar a serie primitiva, que designaremos por

$$a.a'.a'' \ldots a^{(h-1)}.b.b'.b'' \ldots b^{(h-1)}.c.c'.c'' \ldots c^{(h-1)} \ldots \text{etc.} \ldots \quad (C).$$

Suppõ-se que d'esta serie resulta a primeira supprimindo $h-1$ termos entre a e b, $h-1$ entre b e c, $h-1$ entre c e $d, \ldots$; termos sujeitos á mesma lei de geração que a serie $a, b, c, d, \ldots$, a qual faz parte da primitiva.

A inserção d'um numero designado de termos entre os de uma serie proposta, sujeitando-os á mesma lei, chama-se *interpolação;* de maneira que *interpolar* consiste em achar estes termos intermedios, ou antes o termo geral da serie (C). Para isto basta evidentemente fazer $x=\frac{z}{h}$ na equação (A), que representa o termo geral da serie $a, b, c, \ldots$; z designando a ordem d'um termo da nova serie (C). Com effeito fazendo

$$z=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots h,\ h+1,\ h+2\ldots 2h\ldots \text{ etc.},$$

temos $$x=0,\ \frac{1}{h},\ \frac{2}{h},\ \frac{3}{h}\ldots 1,\ 1+\frac{1}{h},\ 1+\frac{2}{h}\ldots 2\ldots$$

na qual se acha para x a serie $0, 1, 2, \ldots$ com $h-1$ termos intercalados entre 0 e 1, outros tantos entre 1 e 2, etc.; e por conseguinte para a serie (A) os termos dados $a, b, c, d \ldots$ com os $h-1$ interpolados entre cada dous consecutivos. Substituindo pois $x=\frac{z}{h}$ na serie (A), teremos a fórmula de *interpolação*

$$y_z=y_0+\frac{z.\Delta^1}{h}+\frac{z(z-h)}{2}.\frac{\Delta^2}{h^2}+\frac{z(z-h)(z-2h)}{2.3}.\frac{\Delta^3}{h^3}+\ldots\text{(D)}.$$

Esta equação dará os termos interpolados; e reproduzirá tambem os primitivos $a, b, c, d, \ldots$, supponde $z=hx=h.(0, 1, 2, \ldots)$. As differenças de todas as ordens, (cujos termos iniciaes representam Δ^1, $\Delta^2, \ldots$) tiram-se da serie proposta $a, b, c, d, \ldots$

Mas é necessario chegar a differenças constantes, para que a serie se componha d'um numero finito de termos; ou ao menos a differenças Δ^1, Δ^2, $\Delta^3 \ldots$ decrescentes, que tornem convergente a serie (D). Então a fórmula (D) dará a grandeza approximada d'um termo correspondente a qualquer valor de z: bem entendido que não se deve tomar z tal que os factores das differenças destruam a convergencia da serie, o que restringe z dentro de certos limites.

Por exemplo, acha-se na Geometria que, sendo **1000,0** a corda do arco de **60°**, correspondem

aos arcos x as cordas y;

$x=60^\circ \ldots\ldots\ldots y=1000,0$			
$65^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots 1074,6$	$\Delta^1=74,6$		$\Delta^2=-2,0$
$70^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots 1147,2$	$72,6$		$-2,3.$
$75^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots 1217,5$	$70,3$		

Como as differenças 2.^{as} são quasi constantes, ao menos no intervallo de 60° a 75°, podemos, entre estes limites, empregar a equação (D), fazendo $h=5$; o que dá

$$y_z=1000,0+\frac{1}{5}.74,6.z-\frac{2}{50}z(z-5)=1000,0+15,12.z-0,04z^2.$$

Assim, tomando $z=1, 2, 3,\ldots$, acharemos por esta fórmula as cordas de 61°, 62°, 63°,...; e tomando para z valores fraccionarios, acharemos as cordas de quaesquer outros arcos intermedios entre 60° e 75°. Mas não se deve estender o uso das differenças assim obtidas além dos limites d'onde ellas foram tiradas.

Mais um exemplo:

Temos $\log 3100=y_m=4913617$			
$\log 3110 \quad =4927604$	$\Delta^1=13987$		$\Delta^2=-45$
$\log 3120 \quad =4941546$	13942		$-45;$
$\log 3130 \quad =4955443$	13897		

considerando a parte decimal do logarithmo como se fosse inteira.

Fazendo $h=10$, vem

$$y_z=\log 3100+1400,95.z-0,225.z^2;$$

onde basta fazer $z=1, 2, 3,\ldots$ para achar os logarithmos de **3101, 3102, 3103....**: e se quizermos o logarithmo de **3107,58**, faremos

$z = 7,58$, o que dará

$$\log 3107,58 = \log 3100 + 0,0010606 = 3,4924223.$$

Veja-se a *Astron. Prat.*, n.º 77, e a *Géod.*, n.º 378.

473. Estes processos empregam-se com vantagem para abreviar os calculos das taboas dos logarithmos dos senos, das cordas, etc. Para as formar, procuram-se sómente os resultados de espaço a espaço, e enchem-se os intervallos pela *interpolação*.

As mais das vezes a serie proposta $a, b, c, d, \ldots$, ou a taboa de numeros, que se quer interpolar, corresponde ás ordens $1, 2, 3, \ldots$ Temos então $h = 1$: e a fórmula (D), que se reduz a

$$y_z = y_0 + z\Delta^1 + z\frac{z-1}{2}\Delta^2 + z.\frac{z-1}{2}.\frac{z-2}{3}\Delta^3 + \ldots \text{(E)},$$

serve para achar qualquer termo intermedio entre y_0 e y_1 correspondente á ordem z.

1.º Quando Δ^2 é nulla, ou muito pequena, a serie reduz-se a $y + z\Delta^1$; d'onde resulta que a differença $y_n - y_0$ cresce então proporcionalmente a z, isto é, *que, para ter* y_n, *basta accrescentar a* y_0 *a parte de* Δ_1 *proporcional a* z.

2.º Quando Δ^2 é constante, ou Δ^3 muito pequena, como as mais das vezes acontece, fica

$$y_z = y_0 + z\left(\Delta^1 + \frac{1}{2}(z-1)\Delta^2\right).$$

D'onde resulta a regra seguinte:

Forme-se $\frac{1}{2}(z-1)\Delta^2$, *e ajuncte-se com o seu signal á differença* Δ^1; *depois com esta differença assim correcta faça-se o resto do calculo como no caso precedente* (1.º).

Por exemplo

	y	Δ^1	Δ^2
$\log 310 =$	$2,4913617$		
		13987	
$\log 311 =$	27604		-45
		13942	
$\log 312 =$	41546		-45
		13897	
$\log 313 =$	55443		

Como os Δ^2 são constantes: se quizermos $\log 310,758$, faremos $z=0,758$; calcularemos $\frac{1}{2}(z-1)\,\Delta^2 = 0,121 \,.\, 45 = 5,445$, que ajunctaremos a Δ_1; depois multiplicaremos a somma $13992,445$ por z, o que dará $10606,27$; e em fim ajunctando o resultado $0,0010606$ a $\log 310$, teremos $\log 310,758 = 2,4924223$.

3.° Quando Δ^3 é constante, ou Δ^4 muito pequena, a serie (E) tem só quatro termos. Então é necessario *corrigir* Δ^2 *de* $\frac{1}{3}(z-2)\,\Delta^3$; *e operar com o* Δ^2 *assim correcto como no caso precedente* (2.°).

Acham-se applicações d'esta theoria a pag. 101 das taboas dos logarithmos de Callet, onde se calculam os logarithmos com 20 decimaes.

4.° Reciprocamente, se os termos y_z e y_0 são dados, e se pede a ordem z do 1.°, sendo constante a differença 2.ª; temos

$$z = \frac{y_z - y_0}{\Delta^1 + \frac{1}{2}(z-1)\,\Delta^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(F)}.$$

Para calcular esta expressão, despreza-se primeiramente o segundo termo do denominador, o que dá um valor approximado de z; depois substitue-se este valor de z no segundo membro da fórmula (F), sem nada omittir d'ella.

Assim, se no exemplo precedente se conhece o resultado y_z do calculo: subtrahe-se d'elle $y_0 = \log 310$, e fica $10606,27$, que dividido por $\Delta^1 = 13987$ dá uma primeira approximação $z=0,758$: depois substituindo este valor no segundo membro de (F), resulta $z = \frac{10606,27}{13992} = 0,758$.

O problema inverso se resolverá do mesmo modo, quando Δ^3 for constante, etc.

474. Quando Δ^2 é constante, e se querem interpolar n numeros successivos entre y_0 e y_1, pode fazer-se o calculo muito commodamente, do modo seguinte. Mudando z em $z+1$ na fórmula (D), e subtrahindo um resultado do outro, virá o valor geral da differença primeira para a nova serie interpolada; depois, fazendo o mesmo nesta, virá a differença segunda. D'este modo acharemos

$$\text{diff. 1.}^{\text{a}},\ \delta^1 = \frac{\Delta^1}{h} + \frac{2z-h+1}{2h^2}.\Delta^2; \quad \text{diff. 2.}^{\text{a}},\ \delta^2 = \frac{\Delta^2}{h^2}.$$

Supponhamos que se querem inserir n termos entre y_0 e y_1. É necessario tomar nas fórmulas precedentes $h=n+1$; e depois fazer $z=0$, para ter o termo inicial das differenças

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{(n+1)^2},\ \delta^1 = \frac{\Delta^1}{n+1} - \frac{1}{2}n\delta^2.$$

Por estas fórmulas calcular-se-ha δ^2, e depois δ^1; o termo inicial δ^1, com a differença constante δ^2, servirá para compor as differenças primeiras da serie interpolada; e estas differenças, com y_0, darão a serie pedida, por addições successivas.

Por exemplo, para calcular (pag. 504) os logarithmos de 3101, 3102, 3103,... basta interpolar 9 numeros entre os dados log 3100 e log 3110. Para isso temos $n=9$; o que dá $\delta^2=-0,45$, e $\delta^1=1400,725$. Com este δ^1 inicial, e com a differença constante δ^2, forma-se a serie das differenças primeiras

1400,725, 1400,275, 1399,825, 1399,375, 1398,925,....

Em fim, esta serie, com o termo inicial log 3100, dará os logarithmos consecutivos que se procuram.

Supponhamos que de 12^{h} em 12^{h} se observou um phenomeno physico, e que os resultados medidos foram

horas	y	Δ^1	Δ^2
0^{h}.....	78		
		222	
12.....	300		144
		366	
24.....	666		144
		510	
36.....	1176		
..			

Para achar os resultados correspondentes a 4^h e 8^h,.... é necessario interpolar 2 termos. Temos então $n=2$, $\delta^2=16$, $\delta^1=58$: com o primeiro termo 58, e com a razão 16, comporemos as equidifferenças que formam a serie das differenças primeiras; depois, com esta serie e com o termo 78, formaremos a serie pedida:

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{Diff. 1.}^{\text{as}}\ \delta^1 \ldots & 58\,. & 74\,. & 90\,. & 106\,. & 122\,. & 138 \ldots\ldots, & \\
\text{Serie} \ldots\ldots\ldots & 78\,. & 136\,. & 210\,. & 300\,. & 406\,. & 528\,. & 666 \ldots \\
 & 0^h, & 4^h, & 8^h, & 12^h, & 16^h, & 20^h, & 24^h \ldots
\end{array}$$

A supposição das differenças segundas constantes convém a quasi todos os casos, quando se podem escolher intervallos convenientes. Usa-se frequentes vezes d'este methodo em Astronomia; e até, quando a observação ou o calculo dá resultados cujas differenças segundas offerecem um andamento pouco regular, imputa-se este defeito a erros, que se corrigem restabelecendo um andamento uniforme.

475. As taboas astronomicas, geodesicas, etc., são formadas segundo estes principios. Calculam-se directamente alguns termos, tão proximos uns dos outros que as differenças primeiras ou segundas sejam constantes; depois interpola-se para obter os numeros intermedios. (Vej. *Astr. prat.*, n.º 78).

Assim, quando uma serie convergente dá o valor de y, por meio d'uma variavel x: em vez de calcular y para cada valor de x, (o que se tornaria muito laborioso, sendo frequente o uso da fórmula), determinam-se os resultados y para grandezas de x gradualmente crescentes, de maneira que estes resultados sejam pouco differentes; e fórma-se uma taboa, na qual se inscreve cada valor de y ao lado do correspondente de x, que se chama *Argumento* da taboa. Então, querendo achar os valores de y correspondentes aos x intermedios, obtem-se immediatamente os resultados procurados por meio de partes proporcionaes.

Quando y depende de duas variaveis ou argumentos, x e z, dispõe-se os valores de y em taboas *de duas entradas*, como a de Pythagoras; de maneira que, tomando x e z como coordenadas, o resultado acha-se na casa, que elles determinam. Assim, para $z=1$, escrevem-se na primeira linha os resultados correspondentes a $x=1, 2, 3,\ldots$; para $z=2$, escrevem-se na segunda linha os resultados correspondentes aos mesmos valores de x; com $z=3$ fórma-se a terceira linha, etc. Então, querendo achar, por exemplo, o resultado correspondente a $x=3$ e $z=5$, basta procurar a terceira columna, e nella a quinta casa, que dará o resultado pedido. Os valores intermedios obter-se-hão d'uma maneira analoga ao que fica dicto.

476. Temos até aqui supposto que os x crescem por equidifferenças. Não acontecendo assim, e conhecendo os resultados $y=a, b, c, d\ldots$ correspondentes a hypotheses quaesquer $x=\alpha, \beta, \gamma,\ldots$, podemos recorrer á theoria, que se expoz (*Geom. Anal.*, pag. 171), quando se tractava de fazer passar uma curva parabolica por uma serie de pontos dados. Tambem se pode proceder do modo seguinte:

Com os valores correspondentes conhecidos $a, \alpha, b, \beta,\ldots$ formam-se as fracções consecutivas:

$$A=\frac{b-a}{\beta-\alpha},\ A_1=\frac{c-b}{\gamma-\beta},\ A_2=\frac{d-c}{\delta-\gamma},\ A_3=\frac{e-d}{\varepsilon-\delta}\ldots,$$

$$B=\frac{A_1-A}{\gamma-\alpha},\ B_1=\frac{A_2-A_1}{\delta-\beta},\ B_2=\frac{A_3-A_2}{\varepsilon-\gamma}\ldots,$$

$$C=\frac{B_1-B}{\delta-\alpha},\ C_1=\frac{B_2-B_1}{\varepsilon-\beta}\ldots,$$

$$D=\frac{C_1-C}{\varepsilon-\alpha}\ldots.$$

Eliminando entre estas equações, acha-se successivamente

$$b=a+A(\beta-\alpha),$$

$$c=a+A(\gamma-\alpha)+B(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),$$

$$d=a+A(\delta-\alpha)+B(\delta-\alpha)(\delta-\beta)+C(\delta-\beta)(\delta-\gamma),$$

e em geral

$$y_x = a + A(x-\alpha) + B(x-\alpha)(x-\beta) + C(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + \ldots$$

Para calcular esta fórmula, tomam-se as differenças primeiras entre os resultados $a, b, c, d, \ldots\ldots$, e dividindo-as pelas differenças das hypotheses respectivas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, obtem-se A, A_1, A_2: tractando depois $A, A_1, \ldots$ d'um modo analogo, deduzem-se $B, B_1, B_2, \ldots$; depois, por meio d'estes, acham-se $C, C_1, C_2, \ldots$; e assim por diante: em fim, substituindo na fórmula, acha-se o termo geral pedido y_x.

Executando as multiplicações, a expressão precedente toma a fórma $a + a'x + a''x^2 + \ldots$ d'um polynomio racional e inteiro; o que provém de se terem desprezado as differenças d'ordens superiores (n.º 466).

Por exemplo de resultam

Corda de 60°	$= 1000$				
62. 20′	$= 1035$	35	$A = 15$		
65. 10	$= 1077$	42	$A_1 = 14{,}82$	$-0{,}18$	$B = -0{,}035$
69. 0	$= 1133$	56	$A_2 = 14{,}61$	$-0{,}21$	$B_1 = -0{,}031$;

e são $\alpha = 0,\ \beta = 2\frac{1}{3},\ \gamma = 5\frac{1}{6},\ \delta = 9$:

por conseguinte, desprezando as terceiras differenças, teremos

$$y_x = 1000 + 15{,}082 . x - 0{,}035 . x^2.$$

477. Considerando qualquer funcção y_x de x como termo geral da serie dos resultados correspondentes a $x = m,\ m + h,\ m + 2h, \ldots\ldots$, o termo geral das differenças entre estes resultados será a differença primeira da funcção proposta y_x, que se representa por Δy_x. Para ter esta differença basta mudar x em $x + h$ na funcção proposta y_x, e subtrahir y_x do resultado: o resto gerará a serie das differenças primeiras, fazendo $x = m,\ m + h,\ m + 2h, \ldots$

Por exemplo: $$y_x = \frac{x^2}{a+x}$$

dá $$\Delta y_x = \frac{(x+h)^2}{a+x+h} - \frac{x^2}{a+x};$$

expressão, que se terá de reduzir, ou de desenvolver em ordem ás potencias de h....

Em geral, o theorema de Taylor dá

$$\Delta y_x = y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \frac{1}{2.3} y'''h^3 + \ldots$$

Para ter a differença segunda, fariamos a respeito de Δy_x o mesmo que fizemos a respeito de y_x; e semelhantemente para as differenças terceiras, quartas, etc.

Integração das differenças. Somma das series

478. Integração das differenças. Esta integração consiste em reverter d'uma differença, dada em x, á funcção que a produziu; isto é, em achar o termo y_x d'uma serie y_m, y_{m+h}, y_{m+2h}, ..., quando se conhece o da serie das suas differenças de qualquer ordem. Esta operação indica-se pelo signal Σ.

Seja, por exemplo, $\Sigma(3x^2+x-2)$, suppondo $h=1=\Delta x$. Esta expressão indica que uma certa funcção desconhecida y_x dá, para $x=0$, 1, 2, ..., uma serie de termos taes que o termo geral das suas differenças primeiras -2, 2, 12, 28, . . . é $3x^2+x-2$. Assim, tracta-se de achar uma funcção fx de x tal que seja

$$f(x+1)-fx=3x^2+2x-2.$$

Ora facilmente se vê que:

1.° os signaes Δ e Σ se compensam; do mesmo modo que $\int$ e d: assim $\Sigma\Delta fx=fx$.

2.° $\Delta(ay)=a\Delta y$; por conseguinte $\Sigma ay=a\Sigma y$.

3.° $\Delta(\mathrm{A}t-\mathrm{B}u)=\mathrm{A}\Delta t-\mathrm{B}\Delta u$; logo $\Sigma(\mathrm{A}t-\mathrm{B}u)=\mathrm{A}\Sigma t-\mathrm{B}\Sigma u$, sendo t e u funcções de x.

479. O problema, que consiste em achar y_x por meio da sua primeira differença, não contém os dados necessarios para se resolver completamente. Com effeito, supponhamos que -2, 2, 12, 28, ... é a serie das primeiras differenças: para recompôr a serie primitiva bastará tomar o primeiro termo $y_0=a$, e junctar successivamente as differenças, o que dará a, $a-2$, $a+2$, $a+12$, ...; mas a ficará arbitrario.

Qualquer integral pode sempre julgar-se comprehendido na equação (A) do n.° 469: porque, tomando $x=0$, 1, 2, 3, . . . na differença primeira dada em x, formar-se-ha a serie das differenças primeiras; as differenças successivas d'estas darão a serie das segundas; as d'estas as terceiras, etc. Os termos iniciaes d'estas series serão $\Delta^1 y_0$, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, . . .; e estes valores substituidos em (A) darão y_x. Assim, no exemplo precedente (que é o do n.º 467, quando $a=1$) temos (n.º 470)

$$\Delta^1 y_0 = -2,\ \Delta^2 y_0 = 4,\ \Delta^3 y_0 = 6,\ \Delta^4 y_0 = 0, \ldots;$$

logo
$$y_x = y_0 - 2x - x^2 + x^3.$$

Em geral, o primeiro termo y_0 da equação (A) é uma constante arbitraria, que se deve ajunctar ao integral.

Se a funcção dada é uma differença segunda, será necessario por uma primeira integração reverter á differença primeira, e d'esta a y_x; o que introduzirá duas constantes arbitrarias. Com effeito a equação (A) faz ainda conhecer y_x, achando $\Delta^2, \Delta^3, \ldots$; mas ficam arbitrarios y_0 e $\Delta^1 y_0$. Semelhantemente discorreremos a respeito das ordens superiores.

480. Proponhamo-nos, por exemplo, achar Σx^m, sendo m um expoente inteiro e positivo. Representemos este desenvolvimento por

$$\Sigma x^m = px^a + qx^b + rx^c + \ldots,$$

sendo $p, q, r, \ldots$ coefficientes, e $a, b, c, \ldots$ expoentes decrescentes, que se tracta de determinar.

Para tomar a differença, temos de supprimir o signal Σ no primeiro membro, e mudar no segundo x em $x+h$, e de subtrahir; o que dá, parando nos segundos termos,

$$x^m = pahx^{a-1} + \frac{1}{2}pa(a-1)h^2x^{a-2} + qbhx^{b-1} + \ldots:$$

ora, para que os dous membros d'esta equação sejam identicos, é necessario que tenhamos, em quanto aos expoentes,

$$a-1=m,\ a-2=b-1, \text{ ou } a=m+1,\ b=m;$$

e, em quanto aos coefficientes,

$$1 = pah,\ -\frac{1}{2}pa(a-1)h = qb, \text{ ou } p = \frac{1}{(m+1)},\ q = -\frac{1}{2}.$$

Em quanto aos outros termos, é visivel que os expoentes são todos inteiros e positivos; e até se pode reconhecer que devem faltar de dous em dous; o que tambem resulta do calculo seguinte. Ponhamos

$$\Sigma x^m = px^{m+1} - \frac{1}{2}x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-3} + \gamma x^{m-5} + \ldots$$

Para determinar $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tomemos a differença primeira, pondo $x+h$ em logar de x, e subtrahindo. Passando $px^{m+1} - \frac{1}{2}x^m$ para o primeiro membro, e observando que $ph(m+1) = 1$, este membro reduzir-se-ha a

$$\mathrm{A}\frac{h^2}{2.3}x^{m-2} + \mathrm{A}''\frac{m-3}{4}\cdot\frac{3h^4}{2.5}x^{m-4} + \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}\frac{m-5}{6}\cdot\frac{5h^6}{2.7}x^{m-6} + \ldots;$$

onde omittimos, por abreviar, os termos do desenvolvimento de dous em dous, os quaes o calculo provaria que se destruem, e designamos por $1, m, \mathrm{A}, \mathrm{A}'', \ldots$ os coefficientes do binomio.

Fazendo o mesmo calculo sobre o segundo membro $\alpha x^{m-1} + \beta x^{m-3} + \ldots$, teremos

$$\left.\begin{array}{l}(m-1)\alpha h x^{m-2} + \dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha h^3 \\ \qquad\qquad + (m-3)\beta h\end{array}\right| x^{m-4} + \ldots$$

Comparando termo a termo estes dous membros, acharemos

$$\alpha = \frac{mh}{3.4},\ \beta = \frac{-\mathrm{A}''h^3}{2.3.4.5},\ \gamma = \frac{\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}h^5}{6.6.7}, \ldots;$$

e será assim finalmente,

$$\left.\begin{aligned}\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{x^m}{2} + mahx^{m-1} + \mathrm{A}''bh^3x^{m-3} \\ + \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}ch^5x^{m-5} + \mathrm{A}^{\mathrm{VI}}dh^7x^{m-7} + \ldots\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{D}).$$

Os coefficientes d'este desenvolvimento são os do binomio, de dous em dous termos, multiplicados por certos factores numericos $a, b, c, \ldots$, que se chamaram *Numeros Bernoullianos,* por ser Jacques Bernoulli o primeiro que os determinou.

Como estes factores têm muito uso na theoria das series, ensinaremos (n.º 482) um meio facil de os calcular: mas desde já damos os seus valores:

$$a = \frac{1}{12},\ b = -\frac{1}{120},\ c = \frac{1}{252},\ d = -\frac{1}{240},\ e = \frac{1}{132},$$

$$f = -\frac{691}{32760},\ g = \frac{1}{12},\ h = -\frac{3617}{8160},\ i = \frac{43867}{14364} \ldots$$

481. Por onde se vê que para achar Σy^m, quando m é um numero inteiro e positivo, é necessario, além dos dous primeiros termos $\frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{x^m}{2}$, tomar o desenvolvimento de $(x+h)^m$, supprimindo os termos d'ordem impar 1.º, 3.º, 5.º,..., e multiplicar os termos, que se aproveitam, respectivamente por $a, b, c, \ldots$. Nestes termos x *e* h *não têm senão expoentes pares, quando* m *é impar, e reciprocamente,* e por isso deve rejeitar-se tambem o ultimo h^m, quando elle é da ordem dos que não servem. O numero dos termos é $\frac{1}{2}m+2$, quando m é par; e $\frac{1}{2}(m+3)$, quando m é impar; de maneira que este numero de termos vem a ser o mesmo para um inteiro par e para o impar consecutivo.

Por exemplo, para $m = 10$, desenvolveremos $(x+h)^{10}$, e conservando os termos 2.º, 4.º, 6.º,... d'este desenvolvimento, teremos de ajunctar e será assim finalmente,

$$10x^9ah+120x^7bh^3+\ldots a\frac{x^{11}}{11h}-\frac{1}{2}x^{10};\ \text{o que dá}$$

$$\Sigma x^{10}=\frac{x^{11}}{11h}-\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9h-x^7h^3+x^5h^5-\frac{1}{2}x^3h^7+\frac{5}{66}xh^9.$$

Por este modo se obtem os seguintes integraes:

$$\Sigma x^0=\frac{x}{h},\ \Sigma x^1=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2},$$

$$\Sigma x^2=\frac{x^3}{3h}-\frac{x^2}{2}+\frac{hx}{6},$$

$$\Sigma x^3=\frac{x^4}{4h}-\frac{x^3}{2}+\frac{hx^2}{4},$$

$$\Sigma x^4=\frac{x^5}{5h}-\frac{x^4}{2}+\frac{hx^3}{3}-\frac{h^3x}{30},$$

$$\Sigma x^5=\frac{x^6}{6h}-\frac{x^5}{2}+\frac{5hx^4}{12}-\frac{h^3x^2}{12},$$

$$\Sigma x^6=\frac{x^7}{7h}-\frac{x^6}{2}+\frac{hx^5}{2}-\frac{h^3x^3}{6}+\frac{h^5x}{42},$$

$$\Sigma x^7=\frac{x^8}{8h}-\frac{x^7}{2}+\frac{hx^6}{12}-\frac{7h^3x^4}{24}+\frac{h^5x^2}{12},$$

$$\Sigma x^8=\frac{x^9}{9h}-\frac{x^8}{2}+\frac{2hx^7}{3}-\frac{7h^3x^5}{15}+\frac{2h^5x^3}{9}-\frac{h^7x}{30},$$

$$\Sigma x^9=\frac{x^{10}}{10h}-\frac{x^9}{2}+\frac{3hx^8}{4}-\frac{7h^3x^6}{10}+\frac{h^5x^4}{2}-\frac{3h^7x^2}{20},$$

$$\Sigma x^{10}=\frac{x^{11}}{11h}-\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9h-x^7h^3+x^5h^5-\frac{1}{2}x^3h^7+\frac{5}{66}xh^5,\ \text{etc.}$$

482. Podemos achar facilmente os numeros bernoullianos, a, b, c, d,... por meio da equação (D). Para isso façamos $x=h=1$ nesta equação: como Σx^m é o termo geral da serie, que tem x^m por differença primeira, este termo será $\Sigma 1$, e a serie será a dos numeros 0, 1, 2, 3,.... Tomando zero para primeiro membro, e transpondo os dous primeiros termos, teremos

$$-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2}=\frac{m-1}{2(m+1)}=am+b\mathrm{A}''+c\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}+d\mathrm{A}^{\mathrm{VI}}\ldots+km.$$

Ora, se fizermos nesta equação $m=2$, o segundo membro reduzir-se-ha a am, e teremos $a=\frac{1}{12}$; se fizermos $m=4$, o segundo membro será $am+b\mathrm{A}''$, e teremos $\frac{3}{10}=4a+4b$, que dá $b=-\frac{1}{120}$; do mesmo modo $m=6$ dará o segundo membro $am+b\mathrm{A}''+6c$ e por conseguinte $c=\frac{1}{252}\ldots$; e continuando assim a proceder segundo as potencias pares, $m=2, 4, 6\ldots$, obteremos equações que irão tendo successivamente um termo de mais, $2a$, $4b$, $6c$,....mk, e que servirão por isso para determinar os numeros a, b, c,....k.

483. Tomemos a differença do producto

$$y_x=(x-h)\,x\,(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih).$$

Substituindo $x+h$ em logar de x, e subtrahindo, vem

$$\Delta y_x=x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih)\times(i+2)\,h.$$

Dividindo esta segunda equação pelo factor constante $(i+2)\,h$, integrando, e substituindo a expressão y_x dada pela primeira, teremos

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih)=\frac{x-h}{(i+2)\,h}.x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih);$$

equação, que dá o *integral do producto de factores que formam uma equidifferença.*

484. Tomando a differença do segundo membro, verifica-se a equação

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih)} = \frac{-1}{ihx(x+h)\ldots[x+(i-1)h]}.$$

485. Para $y_x = a^x$, temos $\Delta y_x = a^x(a^h - 1)$,

que dá $$y_x = \Sigma a^x (a^h - 1) = a^x,$$

e por conseguinte $$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + \text{const.}$$

486. É

$$\Delta \cos x = \cos(x+h) - \cos x = -2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}h\right) \operatorname{sen}\frac{1}{2}h;$$

d'onde, integrando e mudando $x + \dfrac{1}{2}h$ em z,

resulta $$\Sigma \operatorname{sen} z = -\frac{\cos\left(z - \frac{1}{2}h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h} + \text{const.}$$

Semelhantemente se acharia

$$\Sigma \cos z = \frac{\operatorname{sen}\left(z - \frac{1}{2}h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h} + \text{const.}$$

Para integrar as potencias de senos, basta transformal-as em senos e cosenos d'arcos multiplos (*Alg. Sup.*, n.º 162); e integrar os termos resultantes da fórma A sen qx ou A cos qx por meio das equações precedentes, pondo $qx = z$.

487. Para achar Σuz, sendo u e z funcções conhecidas de x, representemos este integral por

$$\Sigma uz = u\Sigma z + t,$$

onde t representa uma funcção de x, que se tracta de determinar. Se mudarmos x em $x+h$, mudar-se-hão u, z e t em

$$u + \Delta u,\ z + \Delta z,\ \text{e}\ t + \Delta t,$$

e $\quad u\Sigma z + t \quad$ em $u\Sigma z + uz + \Delta u\Sigma(z + \Delta z) + t + \Delta t.$

Subtrahindo d'este resultado o precedente $u\Sigma z + t$, teremos a differença de Σuz,

$$uz = uz + \Delta u\Sigma(z + \Delta z) + \Delta t;$$

d'onde se tira $\quad t = -\Sigma[\Delta u\Sigma(z + \Delta z)];$

e portanto $\quad \Sigma uz = u\Sigma z - \Sigma[\Delta u . \Sigma(z + \Delta z)],$

fórmula, que corresponde á integração por partes das funcções differenciaes.

488. Ha só um pequeno numero de funcções, das quaes se conheça o integral finito; e por isso, quando se não sabe integrar exactamente, recorre-se ás series.

A serie de Taylor $\quad \Delta y_x = y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \ldots$

dá $\quad y_x = h\Sigma y' + \frac{1}{2}h^2\Sigma y'' + \frac{1}{6}h^3\Sigma y''' + \ldots,$

onde $y', y'', y''', \ldots$ são as derivadas successivas de y_x.

Se considerarmos y' como uma funcção dada z de x, teremos

$$y'=z,\ y''=z',\ y'''=z'',\ldots,\ \text{e}\ y_x=\int y'dx=\int zdx:$$

logo $$\int zdx=h\Sigma z+\frac{1}{2}h^2\Sigma z'+\frac{1}{5}h^3\Sigma z''\ldots.$$

e $$\Sigma z=h^{-1}\int zdx-\frac{1}{2}h\Sigma z'-\frac{1}{6}h^2\Sigma z''\ldots.,$$

equação, que dá Σz, quando se conhecem $\Sigma z', \Sigma z'',\ldots.$

Tomemos a sua derivada: virá

$$\Sigma z'=h^{-1}z-\frac{1}{2}h.\Sigma z''\ldots,$$

isto é, $\Sigma z'$ expresso em $\Sigma z'', \Sigma z''',\ldots.$ Tomando a derivada d'este resultado, achariamos $\Sigma z''$ expresso em $\Sigma z''', \Sigma z^{\text{IV}}\ldots$; e assim por diante. Mas, sem fazer estes calculos, facilmente se vê que o resultado das substituições successivas será da fórma

$$\Sigma z=h^{-1}\int zdx+\mathrm{A}z+\mathrm{B}hz'+\mathrm{C}h^2z''+\ldots,$$

onde resta determinar os coefficientes A, B, C,....

Para isso seja $z=x^m$: tirando d'esta equação $\int zdx, z', z'',\ldots$ e substituindo, acha-se uma serie, que, por isso que deve ser identica com (D), não pode conter as potencias $m-2,\ m-4,\ldots$ de h.

Assim

$$\Sigma z=\frac{\int zdx}{h}-\frac{1}{2}z+\frac{a}{1}hz'+\frac{b}{1.2.3}h^3z'''+\frac{c}{2.3.4.5}h^5z^5+\ldots,$$

sendo $a, b, c,\ldots$ os numeros bernoullianos.

Por exemplo, para $z=lx$ e $h=1$, temos

$$\int zdx=\int lx\,.\,dx=xlx-x,\ z'=x^{-1},\ z'''=\ldots;$$

e portanto $\quad \Sigma lx=C+xlx-x-\frac{1}{2}\,lx+ax^{-1}+bx^{-3}+cx^{-5}\ldots.$

489. Somma das series. Sendo $a,\ b,\ c,\ d,\ldots$ uma serie, que tem $a',\ b',\ c',\ldots.$ por differenças primeiras, são

$$b=a+a',\ c=b+b',\ d=c+c',\ldots l=k+k';$$

equações, cuja somma é $\quad l=a+a'+b'+c'+\ldots.k'.$

Se $a',\ b',\ c',\ldots.$ são numeros conhecidos, podemos sempre consideral-os como differenças primeiras d'uma serie $a,\ b,\ c,\ d,\ldots.$ que facilmente se comporia por meio do primeiro termo a e das differenças dadas: e como por definição (n.° 479) sabemos que um termo qualquer l' da serie $a',\ b',\ldots$ é Δl, por isso que $l'=m-l$, segue-se que, integrando $l'=\Delta l$, teremos $\Sigma l'=l$, ou

$$\Sigma l'=a'+b'+c'+\ldots.k',$$

incluindo o termo inicial a na constante da caracteristica Σ. Logo: *o integral de qualquer termo d'uma serie é egual á somma de todos os termos, que o precedem,*

$$\Sigma y_x=y_0+y_1+y_2+\ldots y_{x-1}.$$

Mas, se na somma quizermos comprehender o termo geral y_x, será necessario ajunctal-o ao integral, ou mudar neste x em $x+1$, ou finalmente mudar x em $x+1$ na expressão de y_x antes de integrar. Para determinar a constante, basta fazer a somma $=y_0$, quando $x=1$.

490. Pelo que fica dicto, *sabemos achar o termo sommatorio de qualquer serie, cujo termo geral se conhece em funcção racional e inteira* *de* x. Assim, o termo sommatorio da serie que tem por termo geral $y_x = Ax^m - Bx^n + C$, sendo m e n positivos, até y_x exclusivamente, é $A\Sigma x^m - B\Sigma x^n + C\Sigma x^0$. Antes ou depois de haver determinado este integral por meio da equação (D), mudar-se-ha x em $x+1$, para comprehender y_x na somma, e determinar-se-ha convenientemente a constante.

I. Seja, por exemplo, $y_x = x(2x-1)$. Mudando x em $x+1$, e integrando o resultado, teremos

$$2\Sigma x^2 + 3\Sigma x + \Sigma x^0 = \frac{4x^3+3x^2-x}{2.3} = x.\frac{x+1}{2}.\frac{4x-1}{3};$$

sem ajunctar constante, porque $x=0$ deve reduzir a somma a zero.

II. A somma da serie das potencias $1^m, 2^m, 3^m, \ldots$ dos numeros naturaes acha-se integrando x^m (eq. D); mas é necessario accrescentar ao integral o termo da ordem x, que é x^m, isto é, mudar o segundo termo $-\frac{1}{2}x^m$ da eq. (D) em $\frac{1}{2}x^m$. E para determinar depois a constante, é necessario attender ao termo pelo qual a somma deve começar.

Por exemplo, para a somma dos quadrados, temos de tomar Σx^2 (pag. 516), mudando o signal do segundo termo, o que dá

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = x.\frac{2x+1}{2}.\frac{x+1}{3};$$

não ajunctando constante, por ser a somma nulla quando $x=0$.

Mas, se quizermos que a somma comece por n^2, extendendo-se de n^2 a x^2, então deve ella ser nulla, quando $x=n-1$, o que dá

$$\text{a constante} = -n\frac{n-1}{2}.\frac{2n-1}{3},$$

III. Esta theoria applica-se á somma dos numeros figurados. Por exemplo, querendo sommar os x primeiros numeros pyramidaes $1, 4, 10, 20, \ldots$ (*Alg. Sup.*, n.^os 17 e 19), devemos primeiramente integrar o termo geral

$$\frac{1}{6}x(x+2)(x+1), \text{ o que dá (n.° 483) } \frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2);$$

e depois, mudando x em $x+1$, acharemos a somma pedida

$$\frac{1}{24}x(x+1)(x+2)(x+3).$$

A constante é nulla.

491. *Os numeros figurados inversos* são fracções, que têm por numerador a unidade e por denominador uma serie figurada. O termo x^{mo} da ordem p (*Alg. Sup.*, pag. **31**) é

$$\frac{1.2.3\ldots(p-1)}{x(x+1)\ldots(x+p-2)},$$

que tem por integral $C-\frac{1.2.3\ldots p-1}{(p-2)\,x(x+1)\ldots(x+p-3)}$ (n.° **484**).

Mudando pois x em $x+1$, e determinando depois a constante de modo que a somma seja nulla quando $x=0$, teremos $C=\frac{p-1}{p-2}$, e a somma dos x primeiros termos será

$$\frac{p-1}{p-2}-\frac{1.2.3\ldots p-1}{(p-2)(x+1)(x+2)\ldots(x+p-2)}.$$

Se fizermos sucessivamente $p=3,\ 4,\ 5,\ldots$, acharemos

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\cdots\frac{1.2}{x(x+1)}=\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\cdots\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}=\frac{3}{2}-\frac{3}{(x+1)(x+2)},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}\cdots\frac{1.2.3.4}{x\ldots\ldots(x+3)}=\frac{4}{3}-\frac{2.4}{(x+1)\ldots(x+3)},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}\cdots\frac{1.2.3.4.5}{x\ldots\ldots(x+4)}=\frac{5}{4}-\frac{2.3.5}{(x+1)\ldots(x+4)};$$

..

e assim por diante. Para ter a somma total d'estas series, é necessario pôr $x = \infty$; o que dá o limite $\frac{p-1}{p-2}$, do qual ellas se approximam indefinidamente ao passo que x cresce.

Para a serie sen a, sen $(a+2h)$. . . . . temos o integral (n.º 486)

$$\Sigma \operatorname{sen}(a+hx) = C - \frac{\cos\left(a+hx-\frac{1}{2}h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h},$$

no qual, mudando x em $x+1$, e determinando a constante C pela condição de ser nulla a somma quando $x=-1$, acharemos o termo sommatorio

$$\frac{\cos\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+hx+\frac{1}{2}h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h},$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{1}{2}hx\right)\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}h\left(x+1\right)\right]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}.$$

Do mesmo modo se achará que o termo sommatorio da serie cos a, cos $(a+h)$, cos $(a+2h)$, ... é

$$\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}hx\right)\operatorname{seu}\left[\frac{1}{2}h\left(x+1\right)\right]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}.$$

492. Fazendo $a = 0$, temos

$$\sum\nolimits_x^0 \cos hx = \frac{\cos\frac{1}{2}hx \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}h\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} hx \cos\frac{1}{2}h + (1 + \cos hx)\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\right)h}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h} + \frac{1}{2};$$

e

$$\sum\nolimits_x^1 \cos hx = \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\right)h}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h} - \frac{1}{2}.$$

FIM.

NOTAS

Pag. 5. Theorema de Taylor

Demonstração de Lagrange

Se em qualquer funcção fx de x mudarmos x em $x+h$, o desenvolvimento de $f(x+h)$, ordenado relativamente ás potencias ascendentes de h, terá a fórma

$$(1)\ldots\ldots\ldots f(x+h)=fx+\mathrm{A}h+\mathrm{B}h^2+\mathrm{C}h^3+\ldots,$$

começando por fx, e não contendo termos com expoente negativo, nem fraccionario, de h. Com effeito, se este desenvolvimento podesse conter um termo da fórma $\mathrm{M}h^{-m}$, a hypothese $h=0$ tornaria infinito o desenvolvimento da funcção $f(x+h)$, ao mesmo tempo que esta funcção não desenvolvida se reduziria, naquella hypothese, a fx; o que é contradictorio: e se podesse conter um termo da fórma $\mathrm{M}h^{\frac{n}{m}}$, os m valores d'este radical combinados com os de fx dariam a $f(x+h)$ mais valores do que a fx; o que é absurdo (*). Demais, o desenvolvimento de $f(x+h)$ deve ser

(*) Se no desenvolvimento entrassem radicaes, poderiam estes combinar-se uns com os outros de modo que o numero dos valores distinctos de $f(x+h)$ fosse egual ao dos valores de fx? E se entrassem potencias negativas, poderiam estas combinar-se de fórma que, para $h=0$, déssem resultados indeterminados, taes como $\infty-\infty$? Para evitar a primeira difficuldade, segue Poisson o mesmo processo de demonstração que Lagrange, com a modificação de suppor ao desenvolvimento de $f(x+h)$ a fórma

$$f(x+h)=fx+\mathrm{P}h^a+\mathrm{Q}h^b+\mathrm{S}h^c+\ldots.$$

onde a, b, c, ... designam numeros crescentes indeterminados. Depois, mudando tal que a hypothese $h=0$ o reduza a fx; por conseguinte fx deve ser o termo d'elle independente de h.

Assim, a equação (1) tem logar em geral. Resta só determinar os coefficientes A, B, C,.... que são funcções de x desconhecidas.

Mudemos x em $x+i$ na equação (1): virá

$$f(x+i+h)=f(x+i)+A_1h+B_1h^2+C_1h^3+\ldots.;$$

A_1, B_1, C_1,.... designando as funcções em que se tornam A, B, C,..., quando nestas se muda x em $x+i$. Ora, se applicarmos a estas funcções a fórmula (1), teremos

$$f(x+i)=fx+Ai+Bi^2+\ldots.,$$

$$A_1=A+A'i+\ldots.,$$

$$A_1=B+B'i+\ldots.,$$

$$C_1=C+C'i+\ldots.,$$

A', B', C',... sendo funcções, que se derivam respectivamente de A, B, C,... pelo mesmo modo que A se deriva de fx. Substituindo pois estes valores no desenvolvimento de $f(x+i+h)$, e não attendendo ás potencias de i superiores á primeira, teremos

$$(2)\ldots\ldots\ldots f(x+i+h)=fx+Ai$$
$$+Ah+A'hi$$
$$+Bh^2+B'h^2i$$
$$+Ch^3+\ldots$$

---

separadamente h em $2h$ e x em $x+h$, e comparando entre si os dous desenvolvimentos que d'ahi resultam a $f(x+2h)$, determina o expoente a. Finalmente, mudando h em $h+i$, depois x em $x+i$, e comparando simultaneamente os coefficientes e expoentes dos dous desenvolvimentos de $f(x+h+i)$, determina b, c,... e P, Q, R,... (Vej. *Calc. diff.* de Garnier, nota 1.ª). No entretanto fôra talvez mais seguro dizer, como o sr. *J. Anastacio da Cunha*, em casos similhantes, que os calculos ulteriores, pelos quaes se determinam A, B, C,... justificam a fórma do desenvolvimento (1).

Mas, se na equação (1) mudarmos h em $h+i$, e não attendermos ás potencias superiores de i, teremos

$$(3)\ldots\ldots\ldots f(x+h+i)=fx+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots$$
$$+Ai+2Bhi+3Ch^2i\ldots\ldots:$$

logo, comparando os segundos membros das equações (2) e (3), que devem ser identicos, acharemos

$$A'=2B,\ B'=3C,\ C'=4D,\ldots$$

ou $$B=\frac{1}{2}A',\ C=\frac{1}{3}B',\ D=\frac{1}{4}C'\ldots$$

Ora, como A é a derivada de fx (n.º 4), designando-a por $f'x$, e as derivadas successivas d'esta por $f''x$, $f'''x,\ldots.$, teremos, em virtude das equações precedentes,

$$B=\frac{1}{2}f''x,\ C=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}f'''x,\ D=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}f^{\text{IV}}x,\ldots.,$$

e assim por diante. Substituindo pois estes valores em (1), resultará finalmente a fórmula de Taylor

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{1}{2}h^2f''x+\frac{1}{2.3}h^3f'''x+\ldots.$$

Ao n.º 297. Regra de Simpson

Dividamos, por exemplo, o intervallo $b-a$ em um numero par $2n$ de partes eguaes, e supponhamos que os arcos de curva interceptados por tres ordenadas consecutivas tiradas pelos pontos de divisão, a contar da primeira fa, se podem considerar como arcos de parabola. Temos nesse caso, para qualquer d'estes arcos, $y = A + Bx + Cx^2$:

e como a fórmula de interpolação (eq. D do n.º 472) dá, para o primeiro arco comprehendido entre fa e $f(a+2i)$,

$$f(a+x) = fa + \frac{x}{i}[f(a+i)-fa] + \frac{x(x-1)}{2i^2}[f(a+2i) - 2f(a+i) + fa],$$

comparando com a precedente, acharemos

$$C = \frac{f(a+2i) - 2f(a+i) + fa}{2i^2} \ (*).$$

Do mesmo modo, para o segundo arco de curva comprehendido entre $f(a+2i)$ e $f(a+4i)$, acharemos

$$C_{,} = \frac{f(a+4i) - 2f(a+3i) + f(a+2i)}{2i^2};$$

e assim por diante.

Ora a equação $$y = A + Bx + Cx^2,$$

dá $$y' = B + 2Cx;$$

(*) Citamos a formula (D) sómente para poupar o trabalho de eliminar A, B, C, entre as tres equações correspondentes a $x = a$, $x = a + i$, $x = a + 2i$.

d'onde resulta $\quad f'(a+2i)-f'a=4Ci$:

semelhantemente $\quad f'(a+4i)-f'(a+2i)=4C_{,}i$,

e assim por diante: logo

$$f'(a+2i)-f'a=\frac{2}{i}[f(a+2i)-2f(a+i)+fa],$$

$$f'(a+4i)-f'(a+2i)=\frac{2}{i}[f(a+4i)-2f(a+3i)+f(a+2i)],$$

$$f'(a+6i)-f'(a+4i)=\frac{2}{i}[f(a+6i)-2f(a+5i)+f(a+4i)],$$

....

$$f'b-f'[a+(2n-2)i]=\frac{2}{i}[fb-2f(a+(2n-1)i)+f(a+(2n-2)i)].$$

Sommando estas equações, e chamando I a somma das ordenadas impares, isto é, da 1.ª, 3.ª,.... até a ultima fb inclusivamente, e P a somma das pares, isto é, da 2.ª, 4.ª,... até a penultima $f(a+(2n-1)i]$ inclusivamente, teremos

$$f'b-f'a=\frac{2}{i}(2I-fa-fb-2P).$$

Substituindo este valor no segundo membro da equação (2) do n.º 268, teremos

$$Fb-Fa=i\left[I+P-fb+\frac{1}{2}fb-\frac{1}{2}fa-\frac{1}{6}(2I-fa-fb-2P)\right]$$

$$=\frac{2}{3}i\left[I+P+P-\frac{1}{2}(fa+fb)\right],$$

que é a regra de Simpson.

Esta demonstração tem a vantagem de se ver nella a ordem das quantidades que se desprezam.

Ao n.º 347

Para maior clareza, damos aqui á doutrina d'este numero a fórma seguinte:

Quando falta o termo K, é propriedade de taes equações que, se lhes satisfizerem $y = X_1, y = X_2, \ldots y = X_i, \ldots,$

tambem lhes satisfará $y = \Sigma X_i$.

Com effeito a somma das equações

$$A X_1 + A_1 X'_1 + \ldots\ldots + A_n X^{(n)}_1 = o$$

$$A X_2 + A_1 X'_2 + \ldots\ldots + A_n X^{(n)}_2 = o$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

é $$A \Sigma X_i + A_1 \Sigma X'_i \quad \ldots\ldots + A_n \Sigma X_i{}^{(n)} = o,$$

ou $$A \Sigma X_i + A_1 \Sigma (X_i)' + \ldots\ldots + A_n \Sigma (X_i)^{(n)} = o.$$

O integral completo $y = \Sigma X_i$ deve conter n constantes arbitrarias. É o que tem logar, por exemplo, sendo X_i da fórma $C_i X_i$ e n o maior dos indices i.

Ao n.º 399

Aqui chama-se dM a differencial completa de M, em ordem a A, B, C,

$$dM = \left(\frac{dM}{dA}\right) dA + \left(\frac{dM}{dB}\right) dB + \left(\frac{dM}{dC}\right) dC = \left[\left(\frac{dM}{dA}\right) - G\mu\right] dA.$$

No n.º 375 chamou-se $\dfrac{du}{dz}$ a derivada de u em ordem a z.

Esta advertencia torna manifesta a identidade das equações correspondentes.

FIM.

ERRATAS

Ao nosso já mencionado collega o sr. Dr. R. V. Rodrigues devemos ainda o obsequio, que egualmente agradecemos, da indicação da maior parte das erratas seguintes, colligida durante a regencia da cadeira respectiva no anno lectivo de **1878** para **1879**:

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
14	2 sub	$mh^{m-1}z'$	$mz^{m-1}hz'$
31	6	n.º 20	n.º 21
34	1 sub	$A_\alpha\, dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}[$	$A_\alpha\, dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}\dfrac{d^i z}{dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}}[$
61	1 sub	$\dfrac{d[\varphi\,(z, x) + \theta_1\,(z - x)]}{d\,[z, x + \theta_1\,(z - x)]}$	$\dfrac{d\varphi\,[z, \varphi + \theta_1\,(z - x)]}{d\,[x + \theta_1\,(z - x)]}$
64	3 sub	i''	i'
67	3	$u = \;\; ; \varphi y; \dfrac{du}{dt}$	$u_0 = \;\; ; \varphi y_0; \left(\dfrac{du}{dt}\right)_0$
»	6	$1.2\ldots n \quad 1.2\ldots n dt^{n-1}$	$1.2\ldots n \quad dt^{n-1}$
»	10	$ft = \psi t$	$f(\psi t) = \psi t$
70	4 e 5	R_n	R_{n-1}
78	11	78	—78
79	2	$2A_{2n}$	$2nA_{2n}$
80	1 sub	$y'' =$	$y'' = -$
»	»	$\dfrac{\text{sen}^3 m\,(1 + 2\cos^2(m + y))}{\text{sen}^3(m + y)}$	$\dfrac{\text{sen}^3 m\,(1 + 2\cos^2(m + y)}{\text{sen}^5(m + y)}$

Pag.	Linh.	Erros	Emendas
83	9	$\frac{d \operatorname{sen}^3 t}{dt^3}$	$\frac{d^2 \operatorname{sen}^3 t}{dt^2}$
»	10	$(\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t)$	$(3 \operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t)$
93	5	$x - ,$	$a - ,$
94	6 sub	$a + h = a_1$	$a - h = a_1$
96	17	$\alpha = \pm$	$\alpha = \mp$
107	12	$x^3 - axy + y^3$	$x^3 - 3axy + y^3$
111	3 sub	$\sqrt{1 + y'^2 - \frac{1}{2} y'' h - \ldots}$	$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{1}{2} y'' h - \ldots$
113	6	DPP′M′	LPP′M′
115	16	δ	δ_1
117	12	$(X - b)^2$	$(Y - b)^2$
118	2 sub	$a = x + \frac{x'y'}{y''} = x - \frac{y'^2}{x''}$	$a = x - \frac{x'y'}{y''} = x + \frac{y'^2}{x''}$
120	14	as duas primeiras	as duas ultimas
»	19	$-a' + 1$	$-b'y' - a' + 1$
123	15	na fig. 36	na fig. 44
»	6 sub	o arco é rectificavel	os arcos das suas evolutas são rectificaveis
128	8	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
»	20	dy'	$\frac{dy'}{dx'}$
131	5, 7, 9	P′ H′	P′ H
132	26	infinitos a nullos	nullos a finitos
136	10	desde *os eixos, leia-se:*	o eixo dos y e a parallela $y = 1$ ao eixo dos x, e do outro a mesma parallela; e neste a origem O é etc.
»	14	origem A	origem O
137	5	$y, y'', \ldots$	$y', y'', \ldots$
138	ult.	$y = 0$	$y' = 0$
155	1 sub	$dc_1'^2 + dc_1'^2 + dc_1''^2$	$dc_1^2 + dc_1'^2 + dc_1''^2$
157	6	$\frac{A}{ds}, \frac{\rho^2}{ds^5}$	$\frac{A}{dz}, \frac{\rho^2}{ds^5}$
»	2 sub	$\pm, \mp,$	$\mp, \pm$

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
159	5	$\pm$	$\mp$
167	4	CE	CL
199	7	$5\,x^2\,dx$	$5\,x^3\,dx$
206	11	$x^4 + z^3$	$x^4 + 2x^3$
210	5	$dy\sqrt{-1}$	ou $dy\sqrt{-1}$
215	ult.	$dx\,(a + b^n)^p$	$dx\,(a + bx^n)^p$
219	11	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{15}$
239	5 sub	$\mathrm{HI} - \mathrm{HL}t^2$	$\mathrm{GI} - \mathrm{HL}t^2$
276	ult.	$\overline{\qquad\qquad} + \mathrm{C}$	$\overline{\qquad\qquad}\, e^{-ax} + \mathrm{C}$
282	11	$(2i-1)\,(2i-2 \ldots 1 \times 2^{i-1}\,\Gamma(i)$	$(2i-1)\,(2i-3) \ldots 1 \times 2^{i-1}\,\Gamma(i)$
288	7	Fig. 36	Fig. 44
290	n.° 297	E	F
294	3 sub	$2a \operatorname{sen} \theta$	$2a \cos \theta$
336	20	n. 326	n.° 327
348	3	$-\frac{y'y''}{x}$	$-\frac{y''}{x}$
351	ult.	$+\,i\,(n+2)$	$+\,(i-1)\,(n+2)$
381	ult.	dx	dx^{n-1}
407	8	zdz	$zd\mathrm{Z}$
411	1 e 3 sub	$\mathrm{A}\,(z-c)^2$	$\mathrm{A}^2\,(z-c)^2$
419	12	493	393
431	2 sub	n.° 231	n.° 331
432	14	AB	AdB
»	6 e 16	M	$\mathrm{M} - \varphi\, a$
436	3 sub	$x^3 - \frac{y^3}{\mathrm{A}}$	$x^3 - \frac{y^3}{\mathrm{A}^2}$
»	2 »	A proposta	á proposta
438	19 e 23	geometrica	arithmetica
441	6	$\mathrm{Q}dx$	$\int \mathrm{Q}dx$
442	ult.	$ay\,bx$	$ay \log x$
443	8	$\mathrm{T}\frac{dq}{dx}$	$\mathrm{T}\frac{dq}{dy}$

Pag.	Linh.	Erros	Emendas
»	13	$\left(\mathrm{V}+\mathrm{T}\frac{dq}{dy}\right)dy$	$\left(\mathrm{V}+\mathrm{T}\frac{dq}{dy}\right)dx$
446	9	$dp - qdx$	$adp - qdx$
447	18	$q^2 + pqdx$	$q^2\,dy + pqdx$
451	2,3,6,5	a	b
467	25	que são	que
471	29	$n = 0$	$u = 0$
481	ultima	∂u	du

Fig. 1

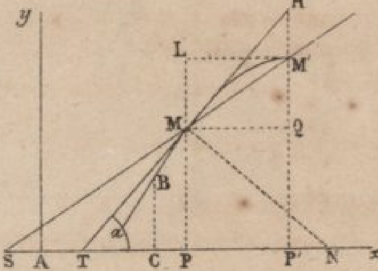


Fig. 2

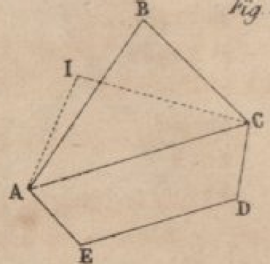


Fig. 3

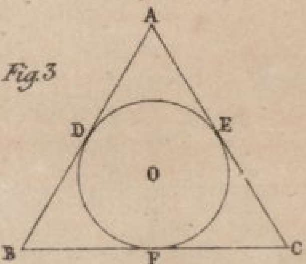


Fig. 4

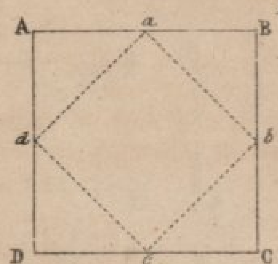


Fig. 5

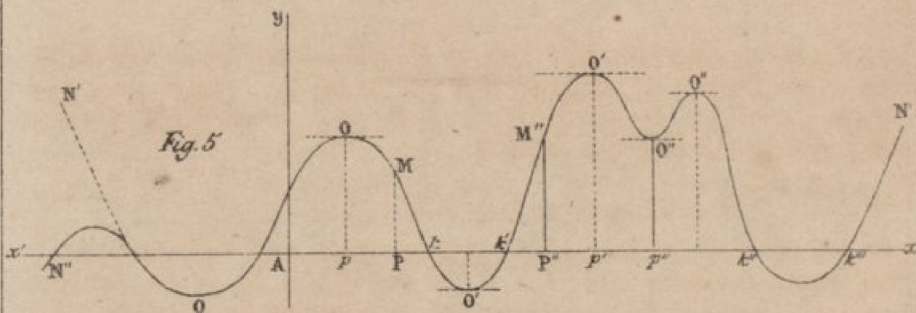
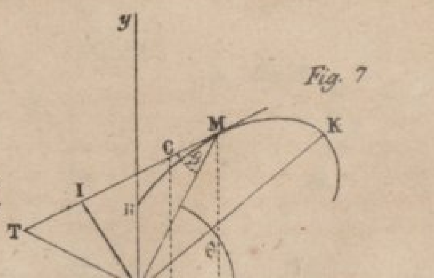


Fig. 6

Fig. 7



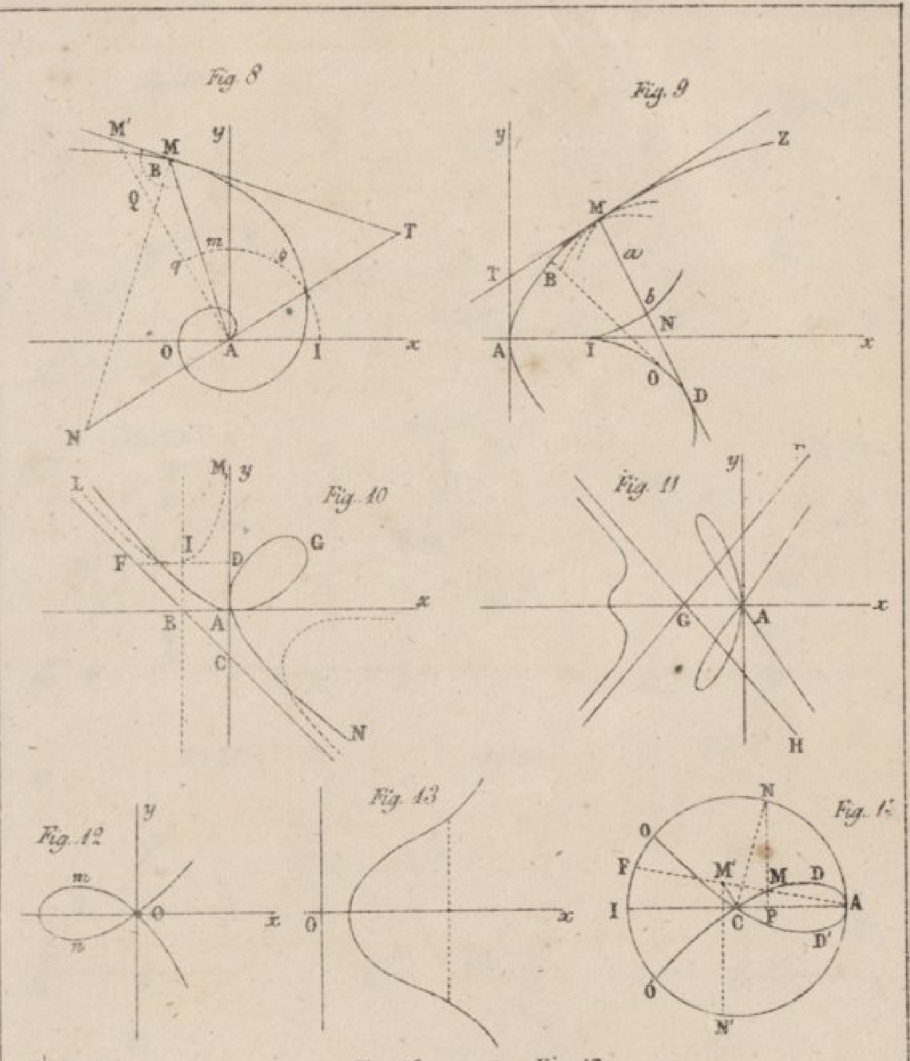


Fig. 8
M'
M
y
B
Q
m
q
g
T
O
A
I
x
N
Fig. 9
y
Z
M
T
B
a
b
N
A
I
x
O
D
Fig. 10
L
M
y
I
D
G
F
B
A
x
C
N
Fig. 11
y
G
A
x
H
Fig. 12
y
m
n
O
x
Fig. 13
O
x
Fig. 14
N
O
F
M'
M
D
I
C
P
A
D'
O
N'
y
Fig. 15
E
D
G
F
A
B
C
x
Fig. 16
y
D
M
B
A
P
Fig. 17
B
M
D
P
Fig. 18
y
D
M
B
A
P
x

Fig. 19

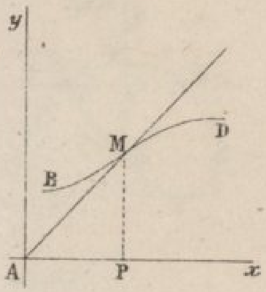


Fig. 20

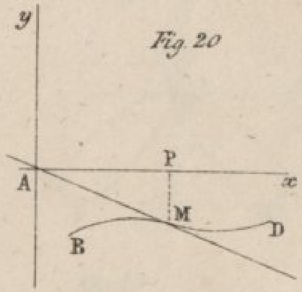


Fig. 21

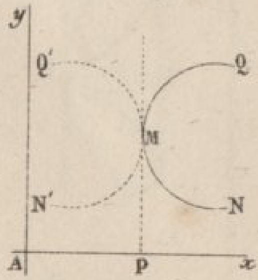


Fig. 22

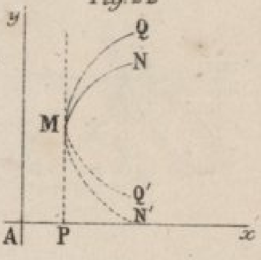


Fig. 23

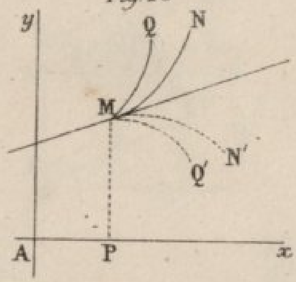


Fig. 24

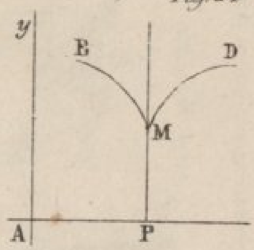


Fig. 25

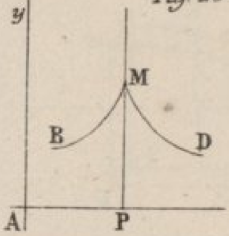


Fig. 26

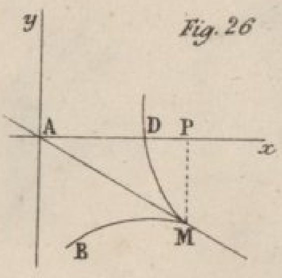


Fig. 27

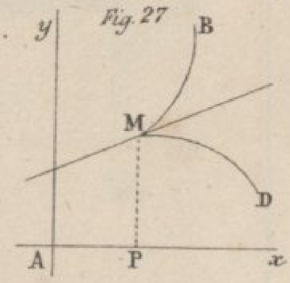


Fig. 28

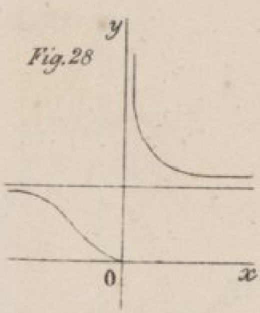


Fig. 29

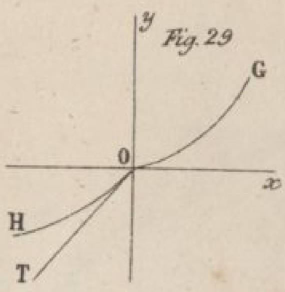
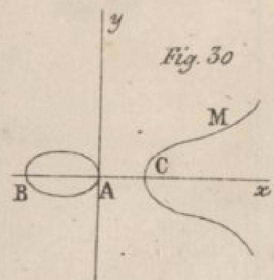


Fig. 30



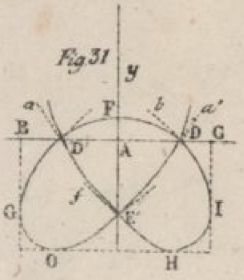


Fig. 31

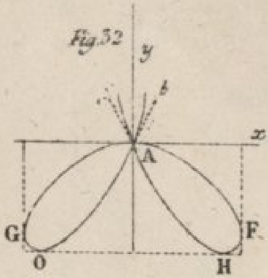


Fig. 32

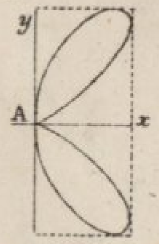


Fig. 33

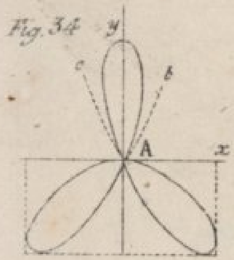


Fig. 34

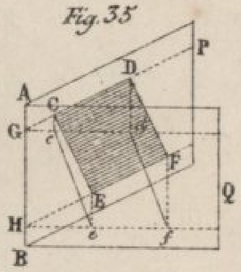


Fig. 35

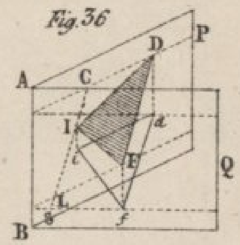


Fig. 36

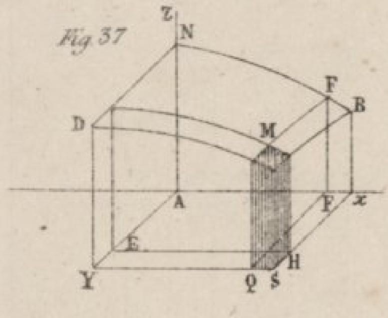


Fig. 37

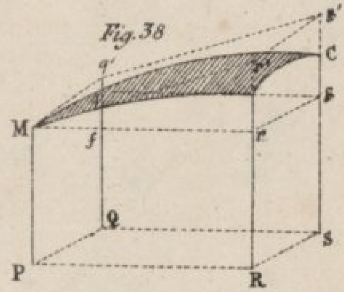


Fig. 38

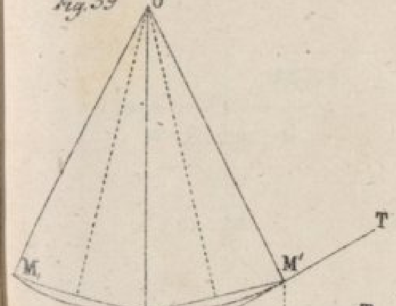


Fig. 39

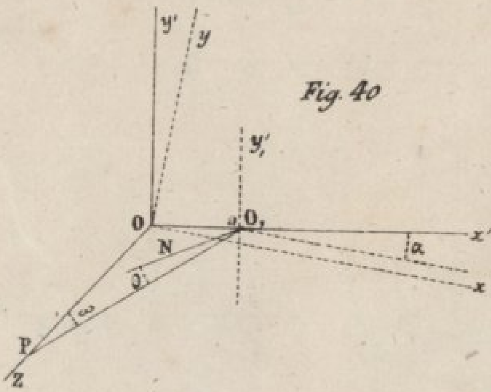


Fig. 40

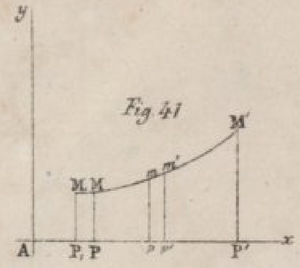


Fig. 41

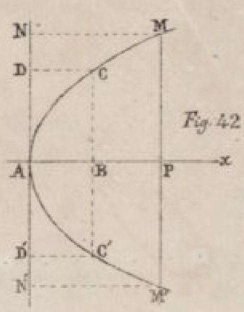


Fig. 42

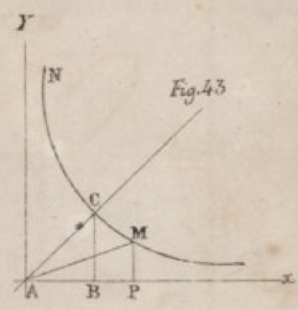


Fig. 43

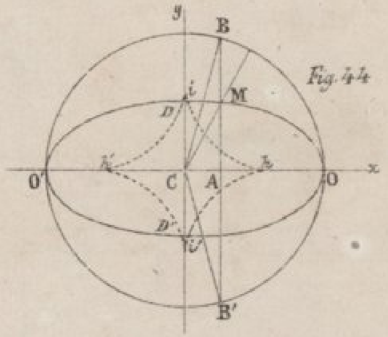


Fig. 44

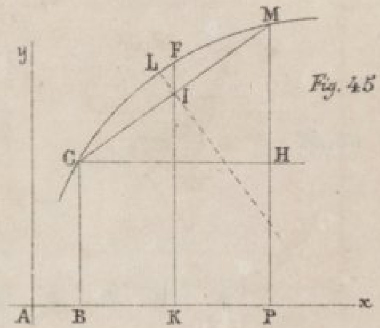


Fig. 45

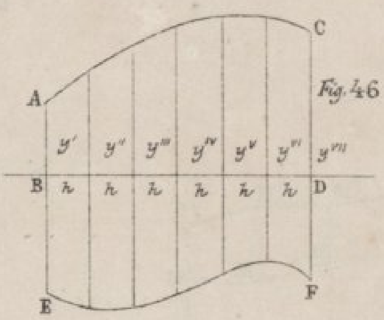


Fig. 46

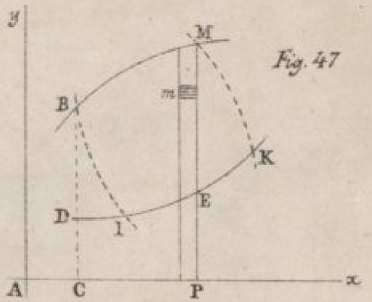


Fig. 47

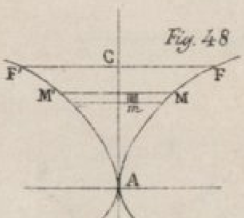


Fig. 48

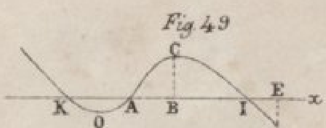


Fig. 49

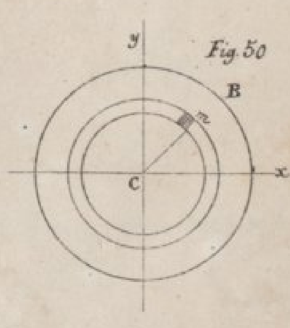


Fig. 50

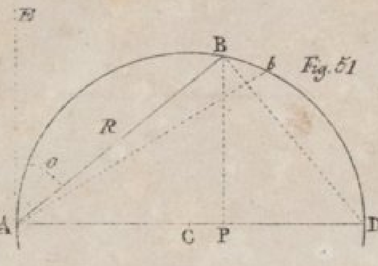


Fig. 51

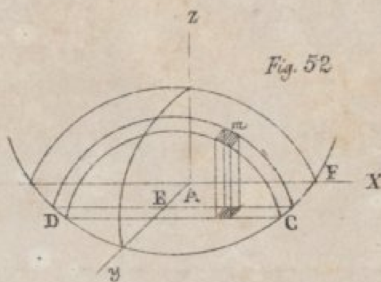


Fig. 52

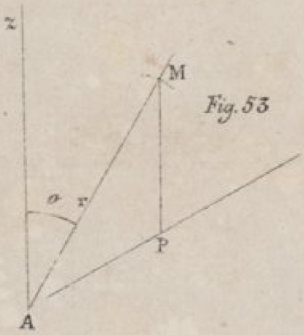


Fig. 53

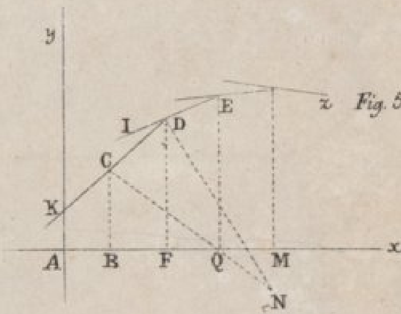


Fig. 54

Fig. 55

Fig. 57

Fig. 56

Fig. 58

(É a fig. 47 da Est.a V)

FRANCOEUR