
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O ACTO

DE

CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

POR

João José d'Antas Souto Rodrigues

L'Astronomie, par la dignité de son objet et par la perfection de ses théories, est le plus beau monument de l'esprit humain, le titre le plus noble de son intelligence.

LAPLACE — *Exp. du syst. du monde.*

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1869

Á

MEMORIA DE SEU AVÔ

JOSÈ MARIA D'ANTAS PEREIRA

CHEFE DE ESQUADRA, SOCIO EFFECTIVO E SECRETARIO
DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

... aussi bon mathématicien que profond économiste...

BALBI — *Essai Stat. sur le royaume de Portugal.*

O.

O Auctor.

THESE

A permanencia dos polos á superficie da terra tem ou não lugar?

Dada pela Congregação da Faculdade de Mathematica em 9 de Novembro de 1866.

INTRODUCÇÃO

.... Observer les astres pendant un grand nombre de siècles; reconnaître dans leurs apparences les mouvemens réels de la terre; s'élever aux lois des mouvemens planétaires, et, de ces lois, au principe de la pesanteur universelle; redescendre enfin de ce principe à l'explication complète de tous les phénomènes célestes, jusque dans leurs moindres détails. Voilà ce que l'esprit humain a fait dans l'Astronomie.

Laplace — *Exp. du syst. du monde.*

A theoria physica do systema do mundo resumia-se na antiguidade em alguns factos isolados e hypotheses engenhosas para explicar as irregularidades apparentes dos corpos celestes. Os astronomos d'esse tempo não tiveram conhecimento algum das leis que regulam o movimento dos astros no espaço.

Houve todavia entre elles habeis observadores. Hipparcho, e mais tarde Ptolomeu tiveram noções exactas sobre muitos pontos delicados de astronomia pratica; mas «*Il y a extrémement loin de la première vue du ciel à la vue générale par laquelle on embrasse aujourd'hui les états passés et futurs du système du monde*[1]».

Dois elementos indispensaveis lhes faltavam para fundar um systema: uma longa serie de observações feitas durante seculos, e a philosophia, creação dos tempos modernos, que, como diz M. de Poutécoulant: «*portant partout sa lumière, écartant les illusions de nos sens, méprisant les préjugés de l'habitude et de l'erreur, soumet à l'analyse de la raison toutes les idées reçues, touts les faits regardés jusque-là comme démontrés, et ne s'arrête, dans sa marche irrésistible, que lorsque l'accord de ses théories avec les phénomènes observés lui montre qu'elle a enfin atteint la vérité, noble but de toutes ses recherches.*»

Os astronomos arabes não fizeram mais do que transmittir-nos fielmente os conhecimentos que tinham recebido dos gregos; a elles deve a Europa os primeiros raios de luz que dissiparam as trevas de doze seculos de ignorancia.

Pelo meado do seculo XVI começou uma era nova para a astronomia. Copernico comparando, com os phenomenos que observava as hypotheses propostas pelos antigos para os explicar, reconheceu que a mais provavel de todas ellas era a da eschola de Pytagoras, que sustentava o movimento da terra e dos planetas em roda do sol, immovel no centro do mundo.

Depois d'elle Tycho-Brahe, seduzido pela ambição de

[1] Laplace — Exp. du syst. du monde.

ligar seu nome a um novo systema, procurou conciliar o systema de Copernico com a immobilidade da terra, que lhe parecia comprovada por algumas passagens da escriptura. Com este fim conservou o sol no centro das revoluções de todos os planetas, á excepção da terra, que suppoz fixa no centro do systema, fazendo girar em roda d'ella o sol e a lua. Entretanto a astronomia deve-lhe grandes progressos, não só em relação á natureza dos cometas, que os antigos consideravam como simples meteoros, mas tambem no estudo das refracções atmosphericas e da theoria da lua, e sobre tudo no aperfeiçoamento dos instrumentos astronomicos, e na preciosa serie de observações que fez durante trinta annos.

Kepler, discipulo e collaborador de Tycho Brahe, não adoptou o systema d'este astronomo; dotado de extraordinaria paciencia e guiado por um instincto admiravel da simplicidade dos meios empregados pela natureza, descobriu, ao fim de dezesete annos de laboriosas investigações, as verdadeiras leis que regulam os movimentos dos corpos celestes. Devemos ainda a Kepler muitas outras descobertas importantes; mas a estreiteza do espaço, de que dispomos, obriga-nos, e com maior razão, a dizer com M. Montucla: «*Il nous faudrait donner au seul Kèpler une partie considérable de la place que revendiquent tant d'autres astronomes, si nous entreprenions de faire connaître toutes ses découvertes.*»[1]

Galileo, seguindo os passos de Copernico e de Kepler, não contribuiu menos para o verdadeiro progresso da as-

[1] Montucla — Hist. des Math., tom. 2.º

tronomia. A descoberta dos satellites de Jupiter, das leis da acceleração dos graves, das phases de Venus, das manchas do sol, e muitas outras marcam uma epocha notavel na historia d'esta sciencia.

Depois Descartes, ampliando os dominios da algebra, da mechanica e da philosophia, tenta alem d'isso o primeiro esforço para remontar dos effeitos ás causas. O systema dos turbilhões, erroneo sem duvida, vulneravel em todas as suas partes, e explicando imperfeitamente alguns factos isolados, *romance physico*, como lhe chama Montucla, é todavia a primeira tentativa, que a sciencia registra, para deduzir dos phenomenos o principio que põe a materia em movimento.

Apparece finalmente Newton, a cujo genio estava reservada a gloria de descobrir a grande lei da attracção universal. Reflectindo sobre a causa que produz a quéda dos graves, e notando que estes são sempre actuados por aquella, qualquer que seja a altura a que se achem, pensou que a acção d'esta causa podia estender-se a maior distancia do que se julgava, e chegar ainda á lua ou mais longe: parecendo-lhe que ella devia variar com as distancias ao centro. Para descobrir a lei d'esta variação, reflectiu que, se é a attracção da terra que sustenta a lua na sua orbita, o mesmo deve acontecer ao sol em relação aos planetas principaes; e, comparando os tempos periodicos d'estes em tôrno d'aquelle com as distancias respectivas, achou que as forças centrifugas que nascem das revoluções dos planetas, e por tanto as forças ceutripetas que as contrabalançam, estão na razão inversa do quadrado das distancias.

Para verificar estas deducções Newton comparou o seno verso do arco que a lua descreve durante um minuto, com o espaço percorrido pelos graves á superficie da terra durante o mesmo tempo; e achou por esta forma que a quéda da lua durante aquelle intervallo é 3:600 vezes menor do que seria á superficie da terra. D'onde concluiu que a força que sustenta a lua na sua orbita é a mesma que faz cahir os graves para a terra; e que esta força diminue proporcionalmente ao quadrado das distancias.

Combinando depois a força attractiva do sol com o impulso primitivo que arrojou os corpos celestes no espaço, chegou ás mesmas leis que a observação já tinha revelado a Kepler: prova irrecusavel da verdade do principio da gravitação universal.

A tendencia, descoberta por Newton, que têm todas as moleculas da materia para se aproximarem umas das outras, é sobretudo admiravel na constituição geral do systema do mundo, porque os grandes intervallos que separam os astros fazem desapparecer os effeitos das causas secundarias, que embaraçam tantas vezes os movimentos á superficie da terra, e não deixam subsistir senão aquelles que provêm de suas attracções mutuas. Esta lei, combinada com os principios da mechanica, dá conta das mais pequenas irregularidades que a observação tem feito descobrir nos movimentos dos corpos celestes; extremamente simples, presta-se com a maior facilidade aos calculos mathematicos.

As deseguualdades dos movimentos planetarios, a forma particular dos corpos celestes, as deslocações de seus eixos de rotação no espaço e as oscillações dos fluidos que os cobrem, são outras tantas consequencias d'esta lei universal; e estes phenomenos que á primeira vista nos parecem tão diversos, estão ligados uns aos outros por este principio geral, e não poderiam existir separadamente. Não se segue porem do que fica dito que seja facil deduzir do principio tão simples, que acabamos de enunciar, as leis complicadas que regem todos aquelles phenomenos; Newton reconheceu que estas são consequencia immediata d'aquelle, mas a maior parte de suas investigações brilham muito mais pela sagacidade da deducção do que pelo rigor da demonstração. Só a mais profunda analyse podia tirar do fecundo principio da attracção universal todas suas legitimas consequencias, e essa começava de apparecer apenas no tempo de Newton; por isso o seu grande genio adivinhou mais do que demonstrou, e muitas vezes mesmo foi induzido em graves erros, que por certo evitaria se possuisse os vastos recursos da analyse. Isto mesmo parece tel-o adivinhado o profundo geometra, porque foi ainda elle quem lançou os primeiros germens d'esta sciencia. Coube a Euler, Bernouilli, Clairaut, d'Alembert e sobre todos a Lagrange e Laplace completar a grande obra do astronomo inglez.

Euler, dotado de todas as faculdades intellectuaes que fazem o grande geometra, enriqueceu a analyse com methodos preciosos, e foi o primeiro que ensinou a calcular as desegualdades planetarias.

D'Alembert fez na mechanica o que Euler tinha feito na analyse: dilatou seus dominios. Ensinando o meio de reduzir ás leis da Statica as do movimento dos corpos, facilitou a reducção a formulas de todas as questões de Dynamica. Alem d'isso procurou sujeitar ao calculo os phenomenos da precessão dos equinoxios e da nutação do eixo terrestre, o que pode considerar-se como uma das mais difficeis questões da Mechanica Celeste, e chegou a resultados exactos e em concordancia com as observações.

Deve-se a Clairaut, alem de importantes descobertas na theoria do equilibrio e movimento dos fluidos, uma solução particular do movimento dos tres corpos, que applicou ao movimento lunar, uma theoria mathematica da figura da terra, e a determinação do instante em que o cometa de Halley voltaria ao perihelio em 1759.

Este calculo, mostrando que os cometas só differem dos planetas pelo comprimento dos eixos maiores e excentricidades de suas orbitas, e que seguem as mesmas leis que os outros corpos do systema, era muito importante naquella epocha, como a prova mais irrefragavel do principio da gravidade universal.

Methodos difficeis e sem ligação commum, esboços informes de calculo, resultados muitas vezes inexactos e quasi sempre incompletos, tal era pois o estado da sciencia pelos fins do seculo XVIII. Foi então que appareceram, quasi ao mesmo tempo, dois genios egualmente ousados em suas concepções, egualmente felizes em seus esforços, Lagrange e Laplace, que levaram a mechanica celeste ao gráu de perfeição em que hoje se acha. Se aos olhos de Lagrange a analyse é a primeira de todas as sciencias, Laplace, ao contrario, parece ter por unico fito surprehender os segredos da natureza, e a analyse em suas mãos não é mais do que um instrumento, que elle molda com admiravel habilidade ás applicações mais variadas. Assim estes dois genios completam-se um ao outro; e parece que a natureza expressamente lhes deu direcções tão differentes para proveito e maior adiantamento da sciencia. Analysemos seus trabalhos em poucas palavras.

Tractaram primeiro de dar ás formulas que determinam os movimentos dos corpos celestes uma fórma tão simples como geral, e de substituir por uma analyse uniforme os methodos diversos que tinham sido empregados para resolver o difficil problema de suas perturbações.

Como primeiro resultado d'este trabalho preparatorio descobriu Lagrange o theorema sobre a invariabilidade dos eixos maiores e dos medios movimentos planetarios, proposição que julgou ao abrigo de toda a duvida, mas que tem sido muito contestada nos tempos modernos.

Por uma escolha feliz de variaveis, reduziu tambem a determinação das variações das inclinações e das longitudes dos nodos a um systema de equações differenciaes lineares; Laplace estendeu a mesma transformação ás excentricidades e ás longitudes dos perihelios, e obteve a expressão exacta das variações seculares d'estes diversos elementos.

A determinação das perturbações dos planetas e dos satellites offerecia ainda grandes embaraços, a pezar de Lagrange ter simplificado tanto as formulas geraes dos movimentos planetarios, pela difficuldade em distinguir no numero infinito d'aquellas desegualdades as que adquirem pela integração divisores que as tornam muito consideraveis, explicando assim as anomalias singulares que os astronomos tinham observado nos movimentos de alguns dos principaes planetas. Este genero de investigações convinha principalmente ao genio de Laplace, que não deixou uma só d'estas questões, tanto tempo controvertidas, sem passar por novo exame e ser definitivamente resolvida. A causa da grande deseguealdade observada nos movimentos de Jupiter e Saturno era desconhecida ainda apesar dos repetidos esforços dos mais distinctos geometras. Laplace descobre-a na quasi commensurabilidade da razão dos medios movimentos d'estes planetas, a qual torna consideraveis certas desegualdades, que, sem esta causa, se conservariam sempre insensiveis. A theoria dos satellites de Jupiter offerece uma difficuldade da mesma natureza e proveniente d'uma causa analoga; Laplace resolve-a com a mesma perspicacia.

Por ultimo, entre as numerosas desegualdades da lua, Laplace calcula novamente com todo o cuidado aquellas que dependem da parallaxe solar; discrimina aquellas que são produzidas pelo achatamento da terra; e descobre a causa da accelleração do medio movimento do nosso satellite, attribuindo-a unicamente á variação secular da excentricidade da orbitra terrestre. Os trabalhos recentes de Adams fazem na verdade suppor que não basta esta causa para explicar aquelle effeito; mas nem está plenamente demonstrado que a variação secular da excentricidade da orbita terrestre não seja causa *unica e exclusiva* da acceleração do medio movimento da lua, nem que o estivesse, deixaria por isso a descoberta d'esta causa de ser mais um titulo de gloria para ser auctor.

Os cometas formam na constituição do universo uma especie de astros perfeitamente distincta; movem-se em orbitas geralmente muito excentricas e cujas inclinações sobre o plano da ecliptica são muito consideraveis. Por isso os methodos empregados para calcular os movimentos planetarios, fundados em geral sobre os desenvolvimentos em series que a pequenez das excentricidades e das inclinações torna muito convergentes, não podem ser applicados á determinação do movimento elliptico ou do movimento perturbado dos cometas. Lagrange occupou-se da descoberta de novos methodos para submetter estes corpos ao calculo, e em 1778 apresentou successivamente á academia de Berlin duas memorias sobre a determinação da orbita d'um cometa por meio de tres observações; mas seu methodo, que debaixo do ponto de vista analytico nada deixa a desejar, e de que elle não fez applicação a cometa algum conhecido, foi depois ensaiado sem proveito. Laplace, tendo que tractar do mesmo assumpto na sua mechanica celeste, encarou-o por um lado muito differente; e a solução que deu a este problema recommenda-se não só por sua originalidade, mas ainda pela facilidade com que se presta ás applicações numericas e pela segurança que offerece aos calculadores. As duas soluções conservam pois o cunho distinctivo do genio de seus auctores; um seduzido sempre pela theoria, outro preoccupado acima de tudo pelas necessidades da practica.

O movimento de rotação dos corpos celestes em torno de seus centros de gravidade offerece-nos nova classe de phenomenos não menos interessantes do que o movimento de translação em volta do sol, mas muito mais difficeis de observar; e só a respeito de dois d'elles, a terra e a lua, se tem podido reunir até hoje numero sufficiente de factos bastante positivos para comparar os resultados da theoria com os da observação.

Como já dissemos, foi d'Alembert o primeiro que applicou a analyse á questão da *precessão* e da *nutação;* mostrou como estes dois phenomenos são consequencia necessaria do principio da attracção universal; chegou por meio da theoria ás formulas exactas que determinam suas leis; e até deduziu d'estas formulas as dimensões da pequena ellipse imaginada por Bradley para representar os dois movimentos do eixo da terra: mas o methodo que empregou tornava por extremo laboriosa a leitura de sua memoria. Euler, applicando a esta questão as formulas que tinha achado para determinar a rotação dos corpos solidos, confirmou por uma analyse tão elegante como facil os resultados a que chegara d'Alembert, e completou a solução de toda aquella parte d'este importante problema que diz respeito ao movimento do eixo e do equador terrestre em relação ás estrellas.

D'Alembert quiz ainda applicar á lua as considerações de que se tinha servido com tão bom resultado no problema da precessão dos equinoxios, mas não pôde vencer as difficuldades que encontrou. Lagrange, escolhendo variaveis habilmente accommodadas ao assumpto, foi quem primeiro chegou a verificar pela theoria as bellas observações de Cassini sobre a libração da lua, e os movimentos singulares do plano do seu equador: provando que todos estes phenomenos estão ligados entre si pela lei da gravitação universal.

A questão da figura das corpos celestes tem egualmente sido objecto dos trabalhos dos geometras mais distinctos; mas offerece taes difficuldades, que, apesar dos esforços perseverantes de Clairaut, d'Alembert, Malaurin, Legendre e Laplace, não póde ainda chegar ao estado de perfeição em que se acham as outras partes da theoria do systema do mundo.

A superficie da terra, e provavelmente a dos outros planetas, está em parte coberta por um fluido em equilibrio; e o phenomeno do fluxo e refluxo offerece-nos uma verificação tão simples e tão facil da lei da attracção universal, que este espectaculo sem duvida chamaria mais nossa attenção se não se repetisse todos os dias. Os geometras, logo depois da descoberta do grande principio dos movimentos celestes, tentaram submetter ás leis da gravitação as oscillações periodicas do Oceano, suppondo que as acções do sol e da lua são as unicas que perturbam seu estado de equilibrio. Bernouilli, apesar das difficuldades do problema, chegou a uma solução bastante approximada; Laplace depois tractou o mesmo assumpto por meio d'uma analyse mais elevada, e as leis do fluxo e refluxo foram emfim reduzidas a formulas analyticas que representam, com precisão maravilhosa, observações separadas por um intervallo de mais de cem annos.

Depois d'esta succinta exposição da maior parte dos trabalhos dos geometras sobre a theoria do systema do mundo, só nos resta fallar ainda d'uma questão, que por muito tempo foi impiricamente considerada como verdade incontroversa, e que todavia interessa no mais subido gráu a exactidão das taboas astronomicas e até a segurança das raças futuras destinadas a succeder-nos na superficie da terra. Referimos-nos ao problema de que havemos de occupar-nos neste trabalho. Já dissemos que os corpos celestes são animados d'um movimento de rotação em torno do seu centro de gravidade, que provem de não ser dirigido para este ponto o impulso primitivo que receberam; vimos tambem que as extremidades do eixo de rotação da terra não correspondem sempre aos mesmos pontos da esphera celeste; mas conservará sempre aquelle eixo no interior do globo a posição que actualmente occupa, e em que as mais rigorosas observações ainda não fizeram reconhecer variações sensiveis? Serão para sempre invariaveis os polos á superficie da terra? Concebe-se com effeito que uma variação muito varagosa mas successiva na posição dos polos alteraria a final todas as latitudes geographicas, ameaçando ao mesmo tempo a permanencia dos continentes. Foi M. Poisson quem resolveu por meio da analyse esta questão, que a observação só por si não poderia decidir, e cuja importancia se deprehende claramente do que acima dissemos.

Temos pois indicado, em resumo, qual foi a marcha do espirito humano neste ramo de nossos conhecimentos.

Os trabalhos dos geometras que succederam a Newton fizeram da mechanica celeste a obra mais perfeita talvez do genio do homem. Por meio de suas formulas podemos exprimir todos os movimentos do systema solar e suas variações successivas; comparar os resultados das theorias com as observações mais antigas de que ha noticia; predizer os estados futuros do systema e as mudanças que milhares de seculos serão necessarios para revelar aos observadores.

E entre estas haverá algumas, que affectem a posição dos pontos physicos a que correspondem as extremidades do eixo de rotação da terra? É este o problema que procuraremos resolver, servindo-nos de principal subsidio a memoria de M. Poison sobre o movimento de rotação da terra, publicada no volume 7.° das memorias do Instituto de França.

Dividimos este trabalho em duas partes; na primeira acham-se as equações differenciaes do movimento de rotação e o methodo de integração conhecido pelo nome de *variação dos parametros;* na segunda, applicam-se estes principios á solução do problema proposto.

PRIMEIRA PARTE

Or c'est cette idée claire du mouvement de rotation que j'ai taché de découvrir.

POINSOT — *Th. nouv. de la rot. des corps.*

CAPITULO PRIMEIRO

Equações differenciaes do movimento de rotação d'um systema de corpos que se attráem mutuamente, segundo a lei de Newton

I

Começaremos pelo caso mais simples, suppondo o systema de que se tracta reduzido a um corpo unico; e obteremos primeiro as equações de equilibrio d'este corpo, das quaes facilmente se passará para as equações do movimento por meio do principio de d'Alembert.

Não ha corpo solido na natureza, que não seja mais ou menos compressivel, e que não mude de forma quando é sollicitado por forças que se equilibram. Mas quando o corpo, de que vamos tractar, tiver tomado a fórma conveniente, poderemos considerar os pontos de applicação das forças que actuam sobre elle como nm systema de forma invariavel: e corresponderão a este estado as coordenadas d'aquelles differentes pontos, as quaes supporemos conhecidas.

Sejam M, M', M'', etc., este systema de pontos materiaes. Para cada ponto teremos a considerar sete quantidades, a saber: as suas tres coordenadas, a força que o sollicita e os tres angulos que determinam a direcção d'esta força.

Sejam P, P', P'', etc., as intensidades das forças applicadas respectivamente aos pontos $M(x, y, z)$, M' (x', y', z'), M'' (x'', y'', z'') etc.; α, β, γ os angulos que a direcção de P faz com os eixos dos x, dos y e dos z, que suppomos rectangulares; α', β', γ' os angulos que faz com os mesmos eixos a direcção de P'; e assim por diante.

Tome-se um plano fixo ao systema e movel com elle, e tracemos neste plano os eixos dos x e dos y. Decomponha-se cada uma das forças P, P', P'' etc., sem mudar seus pontos de applicação, em outras tres parallelas a cada um dos tres eixos coordenados. $P \cos \alpha$ $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, etc., serão as forças parallelas ao eixo dos x; $P \cos \beta$, $P' \cos \beta'$, $P'' \cos \beta''$ etc., as forças parallelas ao eixo dos y; $P \cos \gamma$, $P' \cos \gamma'$, $P'' \cos \gamma''$, etc., as forças parallelas ao eixo dos z.

Prolongando as linhas que representam as direcções d'estas ultimas até o plano dos xy, podemos transportar os pontos de applicação d'estas forças aos pontos onde aquellas linhas vão encontrar o plano fixo, e cujas coordenadas são respectivamente (x, y), (x', y'), (x'', y'') etc.

Não podemos dizer o mesmo a respeito das outras componentes, que são todas parallelas ao plano dos xy.

Podemos porem substituir estas forças por outras applicadas áquelle plano, pela maneira que vamos dizer: bastando fazer a construcção para as componentes P cos α e P cos β da força que sollicita o ponto M.

Appliquemos a este ponto duas forças eguaes e contrarias, que representaremos por $+Q$, $-Q$, o que não altera o systema; componha-se $+Q$ com P cos α, e sejam a e b as coordenadas do ponto em que a resultante produzida encontra o plano dos xy: fazendo a construcção, achariamos

$$a=x-\frac{zP\cos\alpha}{Q},\quad b=y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Transporte-se o ponto de applicação da resultante para o ponto (a, b), e decomponha-se esta força em duas parallelas aos eixos dos x e dos z, o que reproduz as forças P cos α e $+Q$, aquella dirigida no sentido da projecção de sua direcção primitiva sobre o plano dos xy, e esta applicada perpendicularmente a este plano.

Operando da mesma maneira sobre as forças P cos β e $-Q$, a primeira será transportada ao plano dos xy no sentido da projecção de sua direcção primitiva; e as coordenadas do novo ponto de applicação da força $-Q$ neste plano, serão

$$x,\quad y+\frac{zP\cos\beta}{Q}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

Procederemos da mesma maneira a respeito das tres componentes de cada uma das forças que actuam no systema e determinaremos os novos pontos de applicação das forças auxiliares $+Q'$, $-Q'$; $+Q''$, $-Q''$; etc., marcando com um, dois, etc., accentos as quantidades que entram nas expressões (a) e (b).

Entre as forças existentes agora no plano dos xy, umas são parellelas ao eixo dos x, que podemos tomar como recta invariavel neste plano, outras não. Façamos a respeito das primeiras, que são as forças $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, etc., uma transformação similhante áquella que já fizemos. Appliquemos a cada um dos pontos de applicação d'estas forças duas forças eguaes e contrarias, parallelas ao eixo dos y, e que representaremos por $+H$, $-H$; $+H'$, $-H'$; $+H''$ $-H''$; etc. Compondo $P\cos\alpha$ com $+H$, $P'\cos\alpha'$ com $+H'$, $P''\cos\alpha''$ com $+H''$, etc; transportando os pontos de applicação das resultantes aos pontos em que seus prolongamentos encontram o eixo dos x, e cujas abscissas são

$$x-\frac{yP\cos\alpha}{H},\ x'-\frac{y'P'\cos\alpha'}{H'},\ x''-\frac{y''P''\cos\alpha''}{H''},\ \text{etc.}; \ldots . (c)$$

decomponhamos depois cada uma d'estas resultantes em duas forças, uma dirigida no sentido do eixo dos x e outra perpendicular a este eixo: por meio d'esta construcção reproduzem-se novamente as forças primitivas.

Transportemos agora os pontos de applicação das forças $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, etc., á origem das coordenadas; e os das forças $P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''$, etc.,

$+H, +H', +H''$, etc., $-H, -H', -H''$, etc., aos pontos em que suas direcções produzidas encontram o eixo dos x: por esta construcção as forças $P\cos\beta$ e $-H$ ficam applicadas ao mesmo ponto d'este eixo; e o mesmo succederá ás forças $P'\cos\beta'$ e $-H'$, $P''\cos\beta''$, e $-H''$, etc.

Vê-se pois que por estas duas operações as forças dadas ficam transformadas noutras que formam tres grupos: forças dirigidas segundo o eixo dos x; forças perpendiculares a este eixo e comprehendidas no plano dos xy; e finalmente forças perpendiculares a este plano.

Demais, cada uma das forças P fica substituida por outras seis, a saber:

a) As tres forças $P\cos\gamma$, $+Q$ e $-Q$, parallelas ao eixo dos z e cujos pontos de applicação sobre o plano dos xy tem por coordenadas para a primeira x e y e para as outras duas as expressões (a) e (b) respectivamente.

b) As duas forças $P\cos\beta - H$ e $+H$, parallelas ao eixo dos y, e applicadas ao eixo dos x ás distancias x e

$x - \dfrac{yP\cos\alpha}{H}$ da origem.

c) A força $P\cos\alpha$, dirigida segundo o eixo dos x e applicada ao ponto que tomamos para origem das coordenadas.

Ora para que tenha logar o equilibrio do systema é necessario e basta que cada um d'estes tres grupos de forças se equilibre separadamente. Teremos por tanto de satisfazer ao equilibrio de forças parallelas existentes, em geral em diversos planos, que são as forças perpendiculares ao plano fixo; ao equilibrio de forças parallelas comprehendidas neste plano; e ao equilibrio de forças applicadas a um ponto e dirigidas segundo a mesma recta, para o qual basta que a somma d'estas forças seja nulla, o que dá a primeira equação

$$\Sigma\, P \cos \alpha = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Os outros dois grupos de forças hão de reduzir-se ao equilibrio segundo a theoria das forças parallelas.

Será pois necessario, em geral, que cada um d'elles satisfaça a tres equações, a primeira das quaes se forma egualando a zero a somma das forças, e exprime que estas não podem produzir movimento de traslacção; e as outras duas obtem-se egualando a zero as sommas dos momentos das mesmas forças em relação a dois planos parallelos a todas ellas, e exprimem que não pode haver movimento de rotação.

Tomando para estes planos parallelos á direcção das forças que compõem o primeiro grupo os dois planos coordenados dos xz e dos yz, as tres equações de equilibrio serão, attendendo ás expressões (a) e (b),

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma P \cos \gamma = o, \\ \Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = o, \quad \Sigma P(x \cos \gamma - z \cos \alpha) = o \end{array}\right\} \ldots . (e).$$

Quanto ao segundo grupo que comprehende as forças $P \cos \beta - H$, $P' \cos \beta' - H'$, etc., e $+H$, $+H'$, etc., parallelas ao eixo dos y e existentes no plano dos xy, tomando para planos parallelos a ellas os dois dos yz, e dos xy, e notando que a somma dos momentos em relação a este ultimo plano é identicamente nulla, veremos que as equações de equilibrio se reduzem a duas, que são, attendendo ás expressões (e),

$$\Sigma P \cos\beta = o, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = o \,.\,.\,.\,.\,.\,(f)$$

As seis equações (d), (e) e (f) exprimem portanto as condições de equilibrio d'um systema de pontos materiaes eigados invariavelmente entre si, ou d'um corpo solido no lstado em que o considerámos no principio d'este capitulo.

Para obter as equações do movimento d'um systema de corpos que reagem uns sobre os outros d'um modo qualquer, e são sollicitados por forças acceleratrizes quaesquer, procederemos da maneira seguinte:

Sejam m, m', m'', etc., as massas dos differentes corpos do systema; x, y, z; x', y', z'; etc., as coordenadas rectangulares que determinam suas posições respectivas; X, Y, Z, as tres forças acceleratrizes que actuam sobre a unidade da massa m parallelamente aos eixos coordenados; mX, mY, mZ serão as forças que sollicitam o corpo m na mesma direcção. Sejam $m'X'$, $m'Y'$, $m'Z'$ as forças que sollicitam m' parallelamente aos mesmos eixos, e assim por diante; designemos por t o tempo que tomaremos para variavel independente.

As velocidades que animam o corpo m no fim d'um instante qualquer serão representadas por $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; as forças que o sollicitam no sentido dos eixos dos x, dos y e dos z, serão pois $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$; e estas forças tornar-se-hão no instante seguinte, em virtude das forças acceleratrizes, em

$$m\frac{dx}{dt}+mXdt,\ m\frac{dy}{dt}+mYdt,\ m\frac{dz}{dt}+mZdt.$$

Mas os augmentos verdadeiros que toma parallelamente aos eixos coordenados a velocidade do corpo m, por causa de sua ligação com as outras partes do systema, e que se tracta de determinar, são $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt}$; e assim as forças motrizes effectivas, que sollicitam o corpo m no fim do instante dt, são

$$m\frac{dx}{dt}+m\frac{d^2x}{dt},\ m\frac{dy}{dt}+m\frac{d^2y}{dt},\ m\frac{dz}{dt}+m\frac{d^2z}{dt}.$$

Suppondo pois as tres primeiras forças applicadas ao ponto m em sentido contrario á sua direcção, as forças motrizes, que actuam sobre este corpo, serão

$$m\left(\frac{d^2x}{dt}-Xdt\right),\ m\left(\frac{d^2y}{dt}-Ydt\right),\ m\left(\frac{d^2z}{dt}-Zdt\right);\ \ldots(g)$$

marcando successivamente com um accento, dois accentos, etc., as letras m, x, y, z, X, Y, Z teremos as expressões das forças similhantes que provêm das variações do movimento de cada um dos corpos m', m'', etc.

Mas em virtude do principio de d'Alembert o systema inteiro está em equilibrio debaixo da acção de todas estas forças reunidas. Para exprimir esta condição basta substituir os valores d'estas forças, dados pelas equações (g), nas seis equações (d), (e), (f); e obteremos assim as expressões

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma mX,\quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma mY,\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma mZ;\\
&\Sigma m\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)=\Sigma m(xY-yX),\\
&\Sigma m\left(\frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}\right)=\Sigma m(zX-xZ),\\
&\Sigma m\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)=\Sigma m(yZ-zY).
\end{aligned}\right\}\ldots(h)$$

Taes são as equações do movimento de um systema qualquer de corpos inteiramente livre.

As tres primeiras referem-se ao movimento de translacção; as tres ultimas ao movimento de rotação: são pois estas as unicas que nos hão de ser necessarias.

As equações (h) podem facilmente applicar-se ao caso em que o systema que consideramos constitue um corpo solido: bastará suppor que as distancias mutuas das partes do systema são inalteraveis, e substituir as massas m, m', m'', etc., pelos elementos infinitamente pequenos do corpo de que se tracta.

Seja pois dm um d'estes elementos; designemos pelas outras letras que entram nas equações (h) as mesmas quantidades que acima; e substituamos o signal Σ pelo signal S relativo aos integraes ordinarios: as tres ultimas equações (h) tornar-se-hão em

$$\left.\begin{aligned} S.\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)dm &= S.(xY-yX)dm, \\ S.\left(\frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}\right)dm &= S.(zX-xZ)dm, \\ S.\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)dm &= S.(yZ-zY)dm; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

onde o signal S se refere á molecula dm, e deve estender-se á massa inteira do corpo.

II

Antes de passar adiante convem dar ás equações (A) uma forma mais simples, que tem a vantagem de mostrar muitas propriedades importantes do movimento de rotação.

Supponhamos a origem das coordenadas no ponto fixo em torno do qual se effectua aquelle movimento; tomemos tres novos eixos rectangulares fixos no interior do corpo e moveis no espaço, de maneira que baste conhecer em cada instante a posição dos novos eixos para determinar a do solido; sejam finalmente x', y', z' as coordenadas do elemento dm no novo systema.

Designemos por brevidade os cosenos dos angulos que o eixo dos x faz com os dos x', dos y' e dos z' por a, b, c; por a', b', c' os cosenos dos angulos que forma o eixo dos y com as mesmas linhas; e por a'', b'', c'', os cosenos dos angulos que faz com ellas o eixo dos z: d'estas nove quantidades só tres são indeterminadas, pois que entre ellas se dão, como é sabido, seis equações de condição perfeitamente distinctas.

Alem d'isso as formulas de transformação de coordenadas mostram que para passar dos eixos primitivos para os novos devemos fazer

$$\left.\begin{array}{c} x=ax'+by'+cz',\ y=a'x'+b'y'+c'z', \\ z=a''x''+b''y''+c''z'' \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

e comparando estas expressões com as tres equações de condição

$$aa'+bb'+cc'=o,\ aa''+bb''+cc''=o,$$
$$a'a''+b'b''+c'c''=o,$$

obteremos as nove relações

$$\left.\begin{array}{l} a=b'c''-b''c',\ a'=b''c-bc'',\ a''=bc'-cb' \\ b=a''c'-a'c'',\ b'=ac''-a''c,\ b''=a'c-ac' \\ c=a'b''-a''b',\ c'=a''b-ab'',\ c''=ab'-a'b \end{array}\right\}\ldots\ldots(a)$$

que não estabelecem condição alguma nova entre estas nove quantidades, mas que hão de servir para a transformação de que se tracta.

Multipliquemos as equações (A) por dt; integremos, e representemos por M, M', M'' a somma dos momentos das forças que actuam sobre cada um dos elementos do corpo, e que se referem respectivamente aos eixos dos x, dos y, e dos z; teremos

$$S.\left(\frac{ydz-zdy}{dt}\right)dm=\int Mdt,$$

$$S.\left(\frac{zdx-xdz}{dt}\right)dm=\int M'dt,$$

$$S.\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)dm=\int M''dt,$$

em que os integraes do primeiro membro se referem ao elemento dm, e os do segundo membro ao tempo t.

Substituamos nestas equações os valores de x, y, z dados pelas expressões (α), advertindo que devemos considerar as novas coordenadas como independentes do tempo t e as nove quantidades a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', como variaveis com elle; a primeira d'aquellas equações tornar-se-ha em

$$S.\left\{\left(\frac{a'da''-a''da'}{dt}\right)x'^2+\left(\frac{b'db''-b''db'}{dt}\right)y'^2+\right.$$

$$+\left(\frac{c'dc''-c''dc'}{dt}\right)z'^2+\left(\frac{a'db''-b''da'+b'da''-a''db'}{dt}\right)x'y'+$$

$$+\left(\frac{a'dc''-c''da'+c'da''-a''dc'}{dt}\right)x'z'+$$

$$+\left(\frac{b'dc''-c''db'+c'db''-b''dc'}{dt}\right)y'z'\Big\}dm=\int Mdt.$$

Substituindo nesta equação a', a'', b', b'', c', c'' por seus valores dados pelas expressões (a); fazendo

$$\left.\begin{array}{l} A=S.(y'^2+z'^2)dm,\ \ B=S.(x'^2+z'^2)dm, \\ \qquad\qquad C=S.(x'^2+y'^2)dm \\ F=S.y'z'dm,\ \ G=S.x'z'dm,\ \ H=S.x'y'dm \end{array}\right\}\ldots(b)$$

e

$$cdb+c'db'+c''db''=pdt,\ \ adc+a'dc'+a''dc''=qdt,$$

$$bda+b'da'+b''da''=rdt;$$

notando finalmente que tres das equações de condição entre as quantidades a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', dão

$$\left.\begin{array}{l} pdt=cdb+c'db'+c''db''=-bdc-b'dc'-b''dc'' \\ qdt=adc+a'dc'+a''dc''=-cda-c'da'-c''da'' \\ rdt=bda+b'da'+b''da''=-adb-a'db'-a''db'' \end{array}\right\}\ldots(c)$$

acharemos, depois de algumas reducções, a equação

$$aP+bQ+cR=\int Mdt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

na qual é

$$P=Ap-Gr-Hq,\ Q=Bq-Fr-Hp,$$
$$R=Cr-Fq-Gp$$

Por modo analogo achariamos as equações

$$\left.\begin{array}{l} a'P+b'Q+c'R=\int M'dt, \\ a''P+b''Q+c''R=\int M''dt. \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(e)$$

Para fazer desapparecer das equações (d) e (e) as quantidades a, b, c, etc., differenciemos estas equações, e sommemos as differenciaes depois de multiplicadas, a primeira por a, a segunda por a', e a terceira por a''; acharemos a equação

$$\frac{dP}{dt}-rQ+qR=aM+a'M'+a''M''\ldots\ldots\ldots\ldots(f)$$

Multipliquemos a primeira das mesmas differenciaes por b, a segunda por b' e a terceira por b'', e sommemos; virá

$$\frac{dQ}{dt}+rP-pR=bM+b'M'+b''M''\ldots\ldots\ldots\ldots(g)$$

Finalmente por um processo analogo obteremos a expressão

$$\frac{dR}{dt}+pQ-qP=cM+c'M'+c''M''\,\ldots\ldots\,(h)$$

As tres equações (f), (g) e (h), que não são mais que uma simples transformação das equações (A), servirão para determinar completamente o movimento de rotação de um corpo solido qualquer. Integrando-as obteremos os valores de p, q, r; e depois introduzindo estes valores nas equações (c) e integrando-as, acharemos tres relações finitas entre a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', que junctas ás seis equações de condição que, como dissemos, se dão sempre entre estas nove quantidades, completam o numero de equações necessario para a resolução do problema. Conheceremos pois a cada instante a direcção dos eixos moveis dos x', dos y' e dos z'.

Temos até aqui supposto inteiramente arbitraria a posição d'estes tres eixos no interior do corpo; mas as equações a que ultimamente chegamos tomam uma fórma muito simples, e que facilita em muitos casos a sua integração, quando dispomos das quantidades a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', tres das quaes ficaram indeterminadas, de maneira que sejam satisfeitas as equações

$$S.y'z'dm=o,\quad S.x'z'dm=o,\quad S.x'y'dm=o,$$

o que é sempre possivel.

A posição dos eixos dos x', dos y' e dos z' no interior do corpo fica então completamente determinada, e estes eixos chamam-se principaes.

Neste caso, sendo nullas as tres quantidades F, G, H, as equações (f), (g) e (h) tornam-se em

$$\left.\begin{array}{l} Adp+(C-B)qrdt=Ndt, \\ Bdq+(A-C)rpdt=N'dt, \\ Cdr+(B-A)pqdt=N''dt, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

fazendo

$$N=aM+a'M'+a''M'',\ N'=bM+b'M'++b''M''$$
$$N''=cM+c'M'+c''M'':$$

N, N', N'' são pois as sommas dos momentos, respectivamente relativos aos eixos dos x', dos y e dos z', das forças acceleratrizes que sollicitam cada um dos elementos do corpo.

As tres equações (B) darão pela integração os valores de p, q, r, e estes farão depois conhecer pelo modo que já indicamos a direcção no espaço dos tres eixos principaes, que passam pela origem das coordenadas, e por conseguinte a posição do corpo. Notemos porem que as nove quantidades a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', podem ser substituidas por tres independentes entre si; por quanto basta para determinar a posição dos tres planos que formam os eixos das novas coordenadas, conhecer a inclinação de um d'estes planos, do plano dos $x'y'$, por ex., sobre o dos xy, e os angulos que forma a intersecção d'estes dois planos com os eixos dos x e dos x'. Designando o primeiro d'estes angulos por θ, o segundo por ψ e o terceiro por φ, exprimindo pelas formulas conhecidas[1] a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', em funcção das tres quantidades θ, φ e ψ, differenciando depois, e substituindo todos estes valores nas expressões (c), estas se tornam em

$$\left.\begin{array}{l} d\varphi-\cos\theta d\psi=rdt, \\ \\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta d\psi-\cos\varphi d\theta=pdt, \\ \\ \cos\varphi \operatorname{sen}\theta d\psi+\operatorname{sen}\varphi d\theta=qdt. \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

Por meio d'estas equações determinaremos θ, φ e ψ, quando p, q, r, forem conhecidos; e é mais simples determinar assim a posição dos eixos, do que recorrer ás equações (c) e ás seis equações de condição.

Substituindo os mesmos valores nas expressões de N, N', N'', estas tres quantidades ficarão sendo tambem funcções dos tres angulos φ, ψ, θ. O estudo do movimento de rotação de um corpo solido, de figura qualquer, em roda de um ponto fixo, leva-nos finalmente a estabelecer seis equações differenciaes de primeira ordem, entre as seis indeterminadas p, q, r, φ, ψ, θ e a variavel independente t.

[1] Poisson, *Traité de Méc.*, 2.ª ed., n.º 378, formulas (5).

As quantidades A, B, C, que entram na equação (B) são os momentos de inercia do corpo em relação a cada um dos tres eixos coordenados.

As quantidades p, q, r, introduzidas pela primeira vez por Euler nas equações do movimento de rotação, gozam de muitas propriedades, que importa conhecer. As differenciaes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ representam, como é sabido, as componentes parallelas aos eixos dos x, dos y e dos z da velocidade de que se acha animado o elemento dm. Esta velocidade é nulla para os pontos que ficam immoveis durante o instante dt; differenciando pois as expressões (α) teremos, para determinar as coordenadas d'estes pontos, as equações

$$x'da + y'db + z'dc = o,$$

$$x'da' + y'db' + z'dc' = o,$$

$$x'da'' + y'db'' + z'dc'' = o.$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por c, a segunda por c' e a terceira por c'', e sommando, teremos

$$py' - qx' = o.$$

Fazendo as mesmas operações com as tres letras b, b', b'' que fizemos com c, c', c'', e sommando, acharemos

$$rx' - pz' = o.$$

Finalmente, multiplicando as mesmas equações por a, a', a'', e sommando, vem

$$qz' - ry' = o.$$

O logar geometrico d'estas tres equações, das quaes só duas são distinctas, é uma recta que passa pela origem; todos os pontos situados sobre esta recta se conservam immoveis durante o instante dt; e o corpo durante este intervallo gira em roda d'ella como em roda d'um eixo fixo.

Em virtude d'esta propriedade deu-se a esta recta o nome de *eixo instantaneo de rotação.* Sua posição em relação aos eixos principaes é determinada pelas tres quantidades p, q, r; e os cosenos dos angulos, que ella faz com cada um d'estes eixos são respectivamente expressos por

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \cos\alpha, \quad \dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \cos\beta, \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \cos\gamma. \end{array}\right\} \ldots (D)$$

Por outra parte, a velocidade angular de rotação em torno do eixo instantaneo é expressa pelo radical $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$: designando-a por ρ, teremos

$$p = \rho \cos\alpha, \quad q = \rho \cos\beta, \quad r = \rho \cos\gamma; \ldots\ldots (E)$$

as tres quantidades p, q, r, exprimem assim as componentes da velocidade de rotação segundo os tres eixos coordenados.

Por meio das quantidades p, q, r, podemos tambem dar uma forma muito simples á expressão da força viva do corpo. Com effeito designando esta quantidade por $2T$, será

$$T=\tfrac{1}{2}S.\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)dm;$$

substituindo nesta expressão $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ por seus valores tirados das tres equações (α), e observando que pelas equações de condição (c) é

$$(q^2+r^2)dt^2=da^2+da'^2+da''^2,$$

$$(p^2+r^2)dt^2=db^2+db'^2+db''^2,$$

$$(p^2+q^2)dt^2=dc^2+dc'^2+dc''^2,$$

acharemos para o valor de T a expressão

$$T=\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(F)$$

que ao diante nos ha de servir.

Vê-se pelo que precede que, qualquer que seja o movimento de um corpo solido em roda d'um ponto fixo, ou que suppomos tal, pode sempre considerar-se este movimento como effectuando-se em roda d'um eixo, que se conserva fixo durante o instante dt, e cuja posição varía d'um instante para o outro.

III

Postos estes principios, formemos as equações differenciaes do movimento de rotação de cada um dos corpos d'um systema, suppondo-os sujeitos a suas attracções mutuas, na razão directa das massas e inversa do quadrado das distancias, e tão distantes uns dos outros que se possa abstrair da figura dos corpos attrahentes, e consideral-os como massas concentradas no seu centro de gravidade.

Sejam m a massa d'um dos corpos do systema; x, y, z as coordenadas de um dos elementos dm de sua massa, referidas aos tres eixos principaes que se cruzam no centro de gravidade do corpo m; m', m'', etc., as massas dos differentes corpos attrahentes, que consideraremos como pontos materiaes; e x', y', z', x'', y'', z'', etc., as coordenadas de m', m'', etc., relativas aos mesmos eixos.

Designemos por δ a distancia do elemento dm ao corpo m'; a acção que, segundo a lei da attracção universal, este corpo exerce sobre dm será representada por $\frac{m'}{\delta^2}$; e como esta acção é dirigida segundo a recta δ, as suas componentes no sentido dos tres eixos coordenados serão respectivamente

$$m'\frac{d\frac{1}{\delta}}{dx},\ m'\frac{d\frac{1}{\delta}}{dy},\ m'\frac{d\frac{1}{\delta}}{dz}.$$

Accentuando com uma linha, duas linhas, etc., as letras x', y', z', que entram em δ e a letra m', acharemos expressões similhantes que representam as acções que os corpos m'', m''', etc., exercem sobre dm parallelamente aos tres eixos coordenados.

Seja pois

$$V' = \frac{m'}{\delta} + \frac{m''}{\delta'} + \frac{m'''}{\delta''} + \ldots..,$$

sendo δ', δ'', etc., as distancias do elemento dm aos corpos m'', m''', etc.; as forças que sollicitam o elemento dm parallelamente aos tres eixos coordenados e dirigidas em sentido contrario de sua origem, forças que na primeira parte d'este capitulo representamos por X, Y, Z, serão agora

$$X = \frac{dV'}{dx},\ Y = \frac{dV'}{dy},\ Z = \frac{dV'}{dz}.$$

Assim as quantidades, que representamos por N, N', N'' serão dadas pelas expressões

$$\left.\begin{array}{l} N = S.\left(y\dfrac{dV'}{dz} - z\dfrac{dV'}{dy}\right)dm, \\[2ex] N' = S.\left(z\dfrac{dV'}{dx} - x\dfrac{dV'}{dz}\right)dm, \\[2ex] N'' = S.\left(x\dfrac{dV'}{dy} - y\dfrac{dV'}{dx}\right)dm; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

e as equações (B) tornar-se-hão pela substituição d'estes valores em

$$\left.\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = S.\left(y\dfrac{dV'}{dz} - z\dfrac{dV'}{dy}\right)dm, \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = S.\left(z\dfrac{dV'}{dx} - x\dfrac{dV'}{dz}\right)dm, \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = S.\left(x\dfrac{dV'}{dy} - y\dfrac{dV'}{dx}\right)dm; \end{array}\right\} \ldots\ldots (H).$$

referindo-se, como precedentemente, o signal integral S á molecula dm, e devendo estender-se á massa inteira do corpo.

As formulas (C) resolvidas em ordem a $d\varphi$, $d\theta$ e $d\psi$ dão

$$\left.\begin{aligned} d\varphi&=\cos\theta\,.\,d\psi+r\,dt\\ d\theta&=\operatorname{sen}\varphi.q\,dt-\cos\varphi.\,p\,dt,\\ \operatorname{sen}\theta.d\psi&=\cos\varphi.q\,dt+\operatorname{sen}\varphi.p\,dt.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(L)$$

As equações (H) e (L) servirão para determinar os movimentos de m em torno do seu centro de gravidade, attendendo á acção que sobre elle exercem os outros corpos do systema.

CAPITULO SEGUNDO

Methodo da variação dos parametros

I

É sem duvida um dos mais fecundos methodos de analyse, que os geometras têm imaginado, aquelle que consiste em fazer variar as constantes arbitrarias que entram nos integraes das equações differenciaes, ou com o fim de obter soluções particulares, ou para tornar estes integraes extensivos a outras equações.

Para ver como se consegue este ultimo resultado, que mais particularmente importa considerar aqui, diremos como Lagrange deu a solução geral do problema.

Supponhamos que se conhece o integral completo $M=0$ da equação differencial do gráo n

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P=0,$$

na qual P é funcção de x, y e das differenciaes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,..... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; M será funcção de x, y e de n constantes arbitrarias a, b, c, etc. Resolvendo em ordem a y a equação $M=0$, acharemos a expressão

$$y=\varphi(x,\ a,\ b,\ c,....)$$

que satisfaz á proposta, quaesquer que sejam os valores das constantes a, b, c, etc. Tracta-se de determinar estes valores, considerando-os como variaveis, de modo que $M=0$ seja integral completo da equação

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P=Q, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

na qual Q é, da mesma maneira que P, funcção de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,.... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

A expressão de y tirada d'aquelle integral fica a mesma quando se fazem variar as constantes, mas as de dy, d^2y, d^3y, etc., são differentes; se porem nas differenciações successivas suppozermos nullas as partes das differenciaes dy, d^2y,.... $d^{n-1}y$ que resultam da variabilidade das constantes a, b, c, etc., teremos $n-1$ equações de condição entre estas constantes, a saber

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dy}{da}\right)da+\left(\frac{dy}{db}\right)db+\left(\frac{dy}{dc}\right)dc+..=0,\\ \left(\frac{d^2y}{dxda}\right)da+\left(\frac{d^2y}{dxdb}\right)db+\left(\frac{d^2y}{dxdc}\right)dc+..=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}da}\right)da+\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}db}\right)db+\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}dc}\right)dc+..=0.\end{array}\right\}(2)$$

Em virtude d'estas equações os valores dos coefficientes differenciaes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ serão ainda os mesmos que eram no caso de a, b, c,.... constantes; e por tanto acontecerá o mesmo a P, visto que na sua expressão entram unicamente aquelles coefficientes.

Differenciando totalmente a expressão $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, e encerrando em parentesis os coefficientes differenciaes parciaes, como fizemos nas equações (2), teremos

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)+\left(\frac{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{da}\right)\frac{da}{dx}+\left(\frac{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{db}\right)\frac{db}{dx}+\ldots\ldots$$

Em virtude d'esta equação e das equações (2), a equação (1) reduz-se, depois de substituidos em logar de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ os seus valores, a

$$\left(\frac{d^ny}{dx^{n-1}da}\right)da+\left(\frac{d^ny}{dx^{n-1}db}\right)db+\ldots\ldots=Qdx \quad \ldots\ldots(3)$$

Esta equação junctamente com as $(n-1)$ equações (2) formam um systema de n equações differenciaes de primeira ordem entre as n variaveis a, b, c, etc., e a variavel independente x. Integrando estas equações teremos os valores de a, b, c, etc., em funcção de x, que substituidos em $M=0$ darão o integral completo da proposta (1), com outras n constantes arbitrarias.

A integração das equações (2) e (3) offerecerá na maioria dos casos grandes difficuldades; e no estado de generalidade em que se resolveu o problema pouco poderá aproveitar o methodo da variação dos parametros.[1]

[1] J'avoue, diz Lagrange, que l'intégration des équations en a,

O principal uso que se faz d'este methodo consiste na integração por aproximação de equações, cujo integral completo se conhece despresando certas quantidades que se consideram muito pequenas.

É assim que em Mechanica, nos problemas que só podem resolver-se por aproximação, se acha a primeira solução tendo só em attenção as forças principaes que sollicitam os corpos, e se estende depois esta solução ás outras forças, que podem chamar-se perturbadoras, por meio do methodo, que acabamos de expor na maxima generalidade.

Na theoria das perturbações dos planetas é mesmo indicado este caminho pelas observações, ao menos no que diz respeito ás desegualdades seculares; porque as constantes arbitrarias são então os elementos do movimento elliptico, e, segundo a observação, estes elementos mudam, em geral, de seculo para seculo.

Foi Euler, quem primeiro procurou determinar pela analyse as variações d'estes elementos; suas formulas porem por extremo complicadas são de pouca utilidade. Lagrange depois tractando de resolver directamente a mesma questão, deduziu as differenciaes dos seis elementos ellipticos do

b, c, etc. sera le plus souvent très difficile, du moins aussi difficile que celle de l'équation proposée $\frac{d^n y}{dx^n}+P=Q$; et il n'y a peut-être que le seul cas des équations linéaires où l'intégration des équations dont il s'agit réussisse en général, à cause que les constantes a, b, c, etc., sont aussi nécéssairement linéaires dans l'intégrale complète $M=0$.

mesmo principio a que, pouco antes, tinha reduzido as soluções particulares das equações differenciaes.

Em 1808 Lagrange e Laplace exprimiram as differenciaes d'estes mesmos elementos em funcção das differenciaes da *funcção perturbadora* tomadas em relação a elles, e multiplicadas por expressões independentes do tempo e funcções d'aquelles mesmos elementos. Lagrange finalmente estendeu suas indagações ao movimento d'um systema qualquer de corpos sollicitados por forças que não tivessem sido consideradas em uma primeira aproximação, e chegou a formulas que exprimem as differenças parciaes d'uma funcção d'estas forças por meio das differenciaes das constantes primitivas multiplicadas por funcções d'estas constantes independentes do tempo. Quasi pelo mesmo tempo leu Poisson na classe de sciencias mathematicas do Instituto de França uma *memoria sobre a variação das constantes arbitrarias nas questões de Mechanica*, que foi impressa no *Journal de l'École polytechnique*. Nesta memoria apresenta seu auctor uma analyse, por meio da qual se chega a formulas inversas das de Lagrange, evitando-se as eliminações, que estas exigiam. Poisson obtem com effeito por um calculo longo e complicado expressões que dão immediatamente as differenciaes das constantes arbitrarias por meio das differenças parciaes da funcção perturbadora multiplicadas por coefficientes independentes do tempo.

Poisson applicou depois suas formulas ás perturbações do movimento de um ponto attrahido para um centro fixo segundo uma lei qualquer, e ás do movimento de rotação de um corpo solido, chegando sempre a formulas identicas; de maneira que as constantes analogas têm nos dois casos a mesma expressão differencial. É assim que as duas questões principaes da Mechanica celeste podem hoje ser tractadas da mesma maneira.

Terminaremos este capitulo expondo resumidamente os trabalhos de Lagrange e de Poisson sobre a applicação do methodo da *variação dos parametros* ás questões de Mechanica.

II

Lagrange na memoria publicada no volume das *Mémoires de l'Inst. de Fr. de 1808* considera um systema de corpos m, m', etc., que actuam uns sobre os outros d'um modo qualquer, e que são sollicitados por forças acceleratrizes P, Q, etc., P', Q' etc., dirigidas para centros fixos ou para corpos do systema, e proporcionaes a funcções quaesquer das distancias.

As condições do systema dependentes da disposição dos corpos entre si, traduzidas em analyse dão outras tantas equações de condição entre suas coordenadas x, y, z, x', y', z', etc., por meio das quaes algumas d'estas variaveis serão determinadas em funcção das outras; de sorte que ficará apenas um certo numero de variaveis independentes, que supporemos tres, por ser este o caso que ordinariamente tem logar: hypothese que simplifica a demonstração, sem a prejudicar. Representaremos por φ, ψ, θ as tres variaveis independentes e por φ', ψ', θ' as suas derivadas em ordem a t.

Sabe-se (Méc. Anal. part. II, sect. 4, n.º 10) que estas variaveis dão logar a outras tantas equações differenciaes, que, fazendo $T-V=U$, se podem escrever da maneira seguinte

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\dfrac{dU}{d\varphi'}}{dt}-\dfrac{dU}{d\varphi}=0,\quad \dfrac{d\dfrac{dU}{d\psi'}}{dt}-\dfrac{dU}{d\psi}=0, \\[2ex] \qquad \dfrac{d\dfrac{dU}{d\theta'}}{dt}-\dfrac{dU}{d\theta}=0. \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(A')$$

T e V são as mesmas expressões que Lagrange no logar citado designou por estas letras: e portanto T é funcção de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', em quanto que V é funcção unicamente de φ, ψ, θ. Esta circumstancia, a que mais vezes teremos de attender, serviu já para darmos ás equações (A') a forma que lhes supposemos.

As expressões finitas de φ, ψ, θ, dadas por estas equações, hão de conter seis constantes arbitrarias, que designaremos por a, b, c, f, g, h. Supponhamos que sabemos determinar estas expressões, e que procuramos resolver o problema no caso em que os differentes corpos do systema são sollicitados tambem por forças perturbadoras, da natureza das forças P, Q, etc., P', Q', etc., e cujos centros são moveis d'um modo qualquer no espaço. Representemos por $-\Omega$ aquillo em que se torna a funcção V para estas forças perturbadoras; devemos pôr $V - \Omega$ em logar de V nas equações (A') para obter as equações do movimento perturbado. Aquellas equações tornar-se-hão pois em

$$\left.\begin{array}{c} d\dfrac{dU}{d\varphi'} - \dfrac{dU}{d\varphi}dt = \dfrac{d\Omega}{d\varphi}dt,\quad d\dfrac{dU}{d\psi'} - \dfrac{dU}{d\psi}dt = \dfrac{d\Omega}{d\psi}dt, \\ \\ d\dfrac{dU}{d\theta'} - \dfrac{dU}{d\theta}dt = \dfrac{d\Omega}{d\theta}dt; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (B)$$

e, suppondo que as mesmas expressões de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', satisfazem ainda a estas equações considerando como variaveis as constantes arbitrarias, a questão fica reduzida ao problema geral de que já nos occupamos. Applicando portanto o methodo exposto, e designando pela caracteristica δ as differenciaes provenientes das variações das constantes, teremos para determinar estas novas variaveis as seis equações

$$\left.\begin{array}{l} \delta\varphi = 0,\quad \delta\psi = 0,\quad \delta\theta = 0, \\ \\ \dfrac{d^2U}{d\varphi'^2}\delta\varphi' + \dfrac{d^2U}{d\varphi' d\psi'}\delta\psi' + \dfrac{d^2U}{d\varphi' d\theta'}\delta\theta' = \dfrac{d\Omega}{d\varphi}dt, \\ \\ \dfrac{d^2U}{d\varphi' d\psi'}\varphi' + \dfrac{d^2U}{d\psi'^2}\delta\psi' + \dfrac{d^2U}{d\psi' d\theta'}\delta\theta' = \dfrac{d\Omega}{d\psi}dt, \\ \\ \dfrac{d^2U}{d\varphi' d\theta'}\delta\varphi' + \dfrac{d^2U}{d\psi' d\theta'}\delta\psi' + \dfrac{d^2U}{d\theta'^2}\delta\theta' = \dfrac{d\Omega}{d\theta}dt, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (C')$$

nas quaes as expressões $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\varphi'$, $\delta\psi'$, $\delta\theta'$ se deduzem das expressões de φ, ψ, θ e suas derivadas em funcção de a, b, c, f, g, h, expressões que suppomos conhecidas pela integração das equações (A').

As seis equações (C') comprehendem todas as condições do problema, e bastam para determinar as variações differenciaes das seis constantes arbitrarias; mas os processos ordinarios de eliminação introduziriam formulas muito complicadas, e por isso não podem empregar-se. O fim, que Lagrange teve em vista na sua memoria, foi remover esta difficuldade; e realisou-o pela forma seguinte.

A funcção perturbadora Ω sendo, como suppozemos, funcção unicamente de φ, ψ, θ, dará

$$\frac{d\Omega}{da}=\frac{d\Omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da}+\frac{d\Omega}{d\psi}\frac{d\psi}{da}+\frac{d\Omega}{d\theta}\frac{d\theta}{da};$$

expressão que, em virtude das equações (C'), se pode escrever assim

$$\frac{d\Omega}{da}dt=\frac{d\varphi}{da}\left[\frac{d^2U}{d\varphi'^2}\delta\varphi'+\frac{d^2U}{d\varphi'd\psi'}\delta\psi'+\frac{d^2U}{d\varphi'd\theta'}\delta\theta'\right]+$$

$$+\frac{d\psi}{da}\left[\frac{d^2U}{d\varphi'd\psi'}\delta\varphi'+\frac{d^2U}{d\psi'^2}\delta\psi'+\frac{d^2U}{d\psi'd\theta'}\delta\theta'\right]+$$

$$+\frac{d\theta}{da}\left[\frac{d^2U}{d\varphi'd\theta'}\delta\varphi'+\frac{d^2U}{d\psi'd\theta'}\delta\psi'+\frac{d^2U}{d\theta'^2}\delta\theta'\right]-$$

$$-\delta\varphi\left[\frac{d^2U}{d\varphi'^2}\frac{d\varphi'}{da}+\frac{d^2U}{d\varphi'd\psi'}\frac{d\psi'}{da}+\frac{d^2U}{d\varphi'd\theta'}\frac{d\theta'}{da}\right]-$$

$$-\delta\psi\left[\frac{d^2U}{d\psi'^2}\frac{d\psi'}{da}+\frac{d^2U}{d\varphi'd\psi'}\frac{d\varphi'}{da}+\frac{d^2U}{d\psi'd\theta'}\frac{d\theta'}{da}\right]-$$

$$-\delta\theta\left[\frac{d^2U}{d\varphi'd\theta'}\frac{d\varphi'}{da}+\frac{d^2U}{d\psi'd\theta'}\frac{d\psi'}{da}+\frac{d^2U}{d\theta'^2}\frac{d\theta'}{da}\right];$$

Obteriamos formulas similhantes para cada uma das outras constantes arbitrarias.

Substituindo na expressão precedente os valores de $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\varphi'$, $\delta\psi'$, $\delta\theta'$, em funcção de a, b, c, f, g, h, e ordenando os termos segundo as differenças da, db, dc, df, dg, dh, teremos uma expressão da forma

$$\frac{d\Omega}{da}dt=Ada+Bdb+Cdc+Fdf+Gdg+Hdh.$$

na qual é $A=0$ e B, C, F, G, H, expressões symetricas que se deduzem umas das outras por simples permutações das letras a, b, c, f, g, h, e cuja natureza se vae determinar.

As funcções φ, ψ, θ, φ', ψ', θ' satisfazem ás tres equações (A') considerando como constantes arbitrarias quaesquer as quantidades a, b, c, f, g, h, e como unica variavel a quantidade t que nellas entra. Assim, dando ás constantes augmentos quaesquer δa δb, etc., infinitamente pequenos e constantes, as equações differenciaes serão ainda satisfeitas pelos mesmos valores de φ, ψ, θ e suas derivadas. O mesmo terá logar se dermos ás constantes outros augmentos Δa, Δb, etc., da mesma natureza e independentes dos primeiros.

Designemos respectivamente por as caracteristicas δ e Δ as differenciaes de φ, ψ, θ, φ', ψ' θ' que resultam dos augmentos δa, δb, etc., Δa, Δb, etc., attribuidos ás constantes.

Sommemos as tres equações (A') depois de as ter multiplicado respectivamente por $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\theta$; teremos

$$d\left(\Delta\varphi.\frac{dU}{d\varphi'}+\Delta\psi.\frac{dU}{d\psi'}+\Delta\theta.\frac{dU}{d\theta'}\right)-\Delta U dt=0;$$

e da mesma maneira, mudando a caracteristica Δ em δ,

$$d\left(\delta\varphi.\frac{dU}{d\varphi'}+\delta\psi.\frac{dU}{d\psi'}+\delta\theta.\frac{dU}{d\theta'}\right)-\delta U dt=0.$$

Affectando todos os termos da primeira equação da caracteristica δ, e os da segunda da caracteristica Δ, e suppondo independentes entre si as variações representadas por estes dois symbolos, teremos duas expressões cuja differença será uma equação integravel em relação a t, e cujo integral será

$$\Delta\varphi.\delta\frac{dU}{d\varphi'}+\Delta\psi.\delta\frac{dU}{d\psi'}+\Delta\theta.\delta\frac{dU}{d\theta'}-\delta\varphi.\Delta\frac{dU}{d\varphi'}-$$

$$-\delta\psi.\Delta\frac{dU}{d\psi'}-\delta\theta.\Delta\frac{dU}{d\theta'}=K,$$

sendo K uma quantidade constante relativamente a t, e que pode portanto ser funcção de a, b, c, f, g, h e das differenças d'estas quantidades relativas ás caracteristicas δ e Δ.

Quanto ás differenças $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, etc., devem ser da forma

$$\delta\varphi=\frac{d\varphi}{da}\delta a+\frac{d}{db}\delta b+\frac{d}{dc}\delta c+\frac{d\varphi}{df}\delta f+\frac{d\varphi}{dg}\delta g+\frac{d\varphi}{dh}\delta h,$$

$$\delta\psi=\frac{d\psi}{da}\delta a+\frac{d\psi}{db}\delta b+\frac{d\psi}{dc}\delta c+\frac{d\psi}{df}\delta f+\frac{d\psi}{dg}\delta g+\frac{d\psi}{dh}\delta h,$$

etc.;

e o mesmo diremos das differenças $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, etc., mudando δ em Δ.

Ora, como as differenciaes δa, δb, δc, etc., bem como Δa, Δb, Δc, etc., são independentes de t e absolutamente arbitrarias, a equação precedente subsistirá sempre, quaesquer que sejam os valores que lhes attribuamos.

Faça-se primeiro

$$\Delta b=0,\ \Delta c=0,\ \ldots\ldots\ldots \Delta h=0,$$

$$\delta a=0,\ \delta c=0,\ \ldots\ldots\ldots \delta h=0;$$

aquella equação, depois de desenvolvidas as differenças

$$\delta\frac{dU}{d\varphi'},\ \delta\frac{dU}{d\psi'},\ \delta\frac{dU}{d\theta'},\ \Delta\frac{dU}{d\varphi'},\ \Delta\frac{dU}{d\psi'},\ \Delta\frac{dU}{d\theta'},$$

e de supprimido o factor commum $\Delta a\delta b$, torna-se em

$$B+\left(\frac{d^2U}{d\psi d\varphi'}-\frac{d^2U}{d\varphi d\psi'}\right)\left(\frac{d\varphi}{da}\,\frac{d\psi}{db}-\frac{d\varphi}{db}\,\frac{d\psi}{da}\right)+$$

$$+\left(\frac{d^2U}{d\theta d\varphi'}-\frac{d^2U}{d\varphi d\theta'}\right)\left(\frac{d\varphi}{da}\,\frac{d\theta}{db}-\frac{d\varphi}{db}\,\frac{d\theta}{da}\right)+$$

$$+\left(\frac{d^2U}{d\theta d\psi'}-\frac{d^2U}{d\psi d\theta'}\right)\left(\frac{d\psi}{da}\,\frac{d\theta}{db}-\frac{d\psi}{db}\,\frac{d\theta}{da}\right)=(\underline{a,b}),$$

sendo B a mesma quantidade que representamos por esta letra na expressão de $\frac{d\Omega}{da}\,dt$.

O symbolo $(\underline{a,\ b})$ representa uma quantidade independente de t, funcção das constantes arbitrarias, e que será egual áquillo em que se torna o primeiro membro da equação quando depois da substituição dos valores de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', em funcção de t, a, b, c, f, g, h, se faz $t=0$.

Da equação precedente se tirará sem difficuldade o valor de B, e por um processo similhante se achariam as expressões de C, F, G, H. Pela substituição de todos estes valores a expressão de $\frac{d\Omega}{da}\,dt$ tornar-se-ha, feitas as reducções, em

$$\frac{d\Omega}{da}dt=(\underline{a,b})db+(\underline{a,c})dc+(\underline{a,f})df+(\underline{a,g})dg+(\underline{a,h})dh;..(D')$$

e d'aqui podemos deduzir, pela analogia que se observa em todas estas formulas, as expressões das outras differenças parciaes da funcção perturbadora.

Quanto aos valores dos symbolos $(\underline{a,\ b})$, $(\underline{a,\ c})$, etc., notaremos que não dependem immediatamente da funcção U, mas unicamente de suas differenças parciaes em ordem a φ', ψ', θ'; de sorte que, como suppozemos $U=T-V$, e como V não é funcção d'estas quantidades, teremos simplesmente

$$\frac{dU}{\delta\varphi'}=\frac{dT}{d\varphi'}=s,\ \frac{dU}{d\psi'}=\frac{dT}{d\psi'}=u,\ \frac{dU}{d\theta'}=\frac{dT}{d\theta'}=v\,.........(E)$$

e por conseguinte

$$\left.\begin{array}{l}(\underline{a, b})=\frac{d\varphi}{da}\frac{ds}{db}-\frac{d\varphi}{db}\frac{ds}{da}+\frac{d\psi}{da}\frac{du}{db}\\ \quad -\frac{d\psi}{db}\frac{du}{da}+\frac{d\theta}{da}\frac{dv}{db}-\frac{d\theta}{db}\frac{dv}{da}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(F)$$

Para os outros symbolos achariamos expressões similhantes; e por ellas se vê que

$$(\underline{a, b})=-(\underline{b, a}),\ (\underline{a, a})=0.$$

Taes são as formulas apresentadas por Lagrange na memoria de que fallamos. Vê-se que ellas não dão directamente as expressões das variações differenciaes de cada uma das constantes arbitrarias, e que para as obter será necessario proceder á eliminação d'estas variações entre a equação (D') e as outras que d'ella se deduzem pelo modo que dissemos. Este trabalho, aliás de pequena difficuldade na practica, e que as formulas de Poisson evitam, é compensado pela facilidade com que pelo methodo de Lagrange se demonstra a propriedade importante que torna este processo de analyse tão util na theoria das desegualdades planetarias; consiste esta propriedade em serem constantes os coefficientes $(\underline{a, b})$, $(\underline{a, c})$, etc. em relação ao tempo.

Antes de expor o methodo de Poisson, devemos dizer que, depois de este geometra publicar o seu trabalho, procurou Lagrange deduzir de suas formulas outras que déssem directamente as expressões das variações differenciaes das constantes arbitrarias em funcção das differenças parciaes da funcção perturbadora: resultado que obteve na memoria publicada no volume das Memorias do Instituto de França de 1809.

III

Conservando as notações precedentes, e attendendo ás expressões (E'), as equações (A') podem, para mais simplicidade, escrever-se assim

$$\frac{ds}{dt}=\left(\frac{dU}{d\varphi}\right),\ \frac{du}{dt}=\left(\frac{dU}{d\psi}\right),\ \frac{dv}{dt}=\left(\frac{dU}{d\theta}\right);\ \ldots\ldots\ldots(a')$$

da mesma maneira em logar das equações (B') teremos

$$\left.\begin{aligned}
ds-\left(\frac{dU}{d\varphi}\right)dt&=\frac{d\Omega}{d\varphi}dt,\\
du-\left(\frac{dU}{d\psi}\right)dt&=\frac{d\Omega}{d\psi}dt,\\
dv-\left(\frac{dU}{d\theta}\right)dt&=\frac{d\Omega}{d\theta}dt;
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b')$$

e já vimos que, suppondo conhecidos os valores de φ, ψ, θ que satisfazem ás equações (a'), sujeitaremos esses valores a satisfazerem ás equações (b') determinando as variações dos parametros, de que elles são funcções, por meio das seis equações

$$\left.\begin{array}{l}\delta\varphi=0, \qquad \delta\psi=0, \qquad \delta\theta=0, \\ \\ \delta s=\dfrac{d\Omega}{d\varphi}dt,\ \delta u=\dfrac{d\Omega}{d\psi}dt,\ \delta v=\dfrac{d\Omega}{d\theta}dt.\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c')$$

As tres quantidades s, u, v são dadas pelas equações (E') em funcção de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ'; e reciprocamente poderemos tirar d'estas equações os valores de φ', ψ', θ', em funcção de φ, ψ, θ, s, u, v, e transformar por conseguinte uma funcção das seis primeiras quantidades em funcção das outras seis: observando todavia que as differenças parciaes d'esta funcção em ordem a φ, ψ, θ serão differentes nos dois casos. Nas equações (b') as differenças parciaes $\left(\dfrac{dU}{d\varphi}\right)$, $\left(\dfrac{dU}{d\psi}\right)$, $\left(\dfrac{dU}{d\theta}\right)$ são formadas considerando U como funcção de φ, ψ, θ, φ' ψ', θ', e por isso as encerramos em parentesis, reservando as mesmas expressões sem parentesis para representar aquellas differenças quando se suppõe que U é funcção de φ, ψ, θ, s, u, v.

Supponhamos que um dos integraes de primeira ordem das equações differenciaes do movimento não perturbado contem uma só arbitraria a; este integral, resolvido em ordem a esta constante, será da forma

$$a=f(\varphi, \psi, \theta, \varphi', \psi', \theta', t),$$

ou, conforme o que acima dissemos,

$$a=F(\varphi, \psi, \theta, s, u, v, t).$$

Se differenciarmos esta equação fazendo variar ao mesmo tempo as constantes e as variaveis, teremos simplesmente, em virtude das equações (c'),

$$da=\left(\frac{da}{ds}\frac{d\Omega}{d\varphi}+\frac{da}{du}\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{da}{dv}\frac{d\Omega}{d\theta}\right)dt.$$

Substituindo nesta expressão os valores de $\frac{d\Omega}{d\varphi}, \frac{d\Omega}{d\psi}, \frac{d\Omega}{d\theta}$ deduzidos pelo theorema de funcção de funcções considerando Ω como funcção de a, b, c, f, g, h, teremos

$$da=\left(A\frac{d\Omega}{da}+B\frac{d\Omega}{db}+C\frac{d\Omega}{dc}+\right.$$

$$\left.+F\frac{d\Omega}{df}+G\frac{d\Omega}{dg}+H\frac{d\Omega}{dh}\right)dt,$$

sendo

$$A = \frac{da}{ds}\frac{da}{d\varphi} + \frac{da}{du}\frac{da}{d\psi} + \frac{da}{dv}\frac{da}{d\theta},$$

e os outros coefficientes B, C, etc., expressões que se deduzem d'esta pela mudança successiva de a em b, c, f, g, h, no segundo factor de cada termo.

Finalmente observando que Ω não é funcção de s, u, v, por isso que o não é de φ', ψ', θ', e que portanto

$$\frac{d\Omega}{ds} = 0, \quad \frac{d\Omega}{du} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dv} = 0;$$

formando estas differenças parciaes pelo mesmo modo por que obtivemos as differenças da mesma funcção em ordem a φ, ψ, θ; multiplicando o primeiro d'estes desenvolvimentos por $\frac{da}{d\varphi}$, o segundo por $\frac{da}{d\psi}$ e o terceiro por $\frac{da}{d\theta}$; e finalmente sommando os productos e subtrahindo a somma do valor precedente de da, teremos

$$\left.\begin{array}{l} da = (a, b)\dfrac{d\Omega}{db}dt + (a, c)\dfrac{d\Omega}{dc}dt + (a, f)\dfrac{d\Omega}{df}dt \\[2ex] \quad + (a, g)\dfrac{d\Omega}{dg}dt + (a, h)\dfrac{d\Omega}{dh}dt. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (a')$$

Os symbolos (a, b), (a, c), etc., representam expressões que se formam pelo typo geral

$$\left.\begin{aligned}(f, f')=\frac{df}{ds}\frac{df'}{d\varphi}-\frac{df}{d\varphi}\frac{df'}{ds}+\frac{df}{du}\frac{df'}{d\psi}\\ -\frac{df}{d\psi}\frac{df'}{du}+\frac{df}{dv}\frac{df'}{d\theta}-\frac{df}{d\theta}\frac{df'}{dv};\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(c')$$

tendo por tanto logar ainda neste caso as relações

$$(f, f')=-(f', f);\ (f, f)=0\ldots\ldots(f')$$

Estas expressões tornam-se tambem independentes do tempo t, depois de substituir nellas os valores de φ, ψ, θ, s, u, v em funcção de t e das arbitrarias a, b, c, f, g, h.

Vejamos como se demonstra esta propriedade, á qual, como já dissemos, o methodo de integração que estamos expondo deve suas principaes vantagens. Bastará para isso demonstrar que é nulla a differencial completa das expressões (a, b), (a, c), etc., em ordem ao tempo t; e como o que dissermos a respeito de (a, b) se applica facilmente ás expressões representadas pelos outros symbolos, limitar-nos-hemos a demonstrar que este coefficiente goza d'aquella propriedade.

Tire-se da expressão

$$a=F(\varphi,\ \psi,\ \theta,\ s,\ u,\ v,\ t)$$

o valor de $\frac{da}{d\varphi}$, e differencie-se este valor em ordem a t; tome-se depois a differencial completa de a em ordem a t, que deve ser nulla.

Se na equação que se obtem egualando a zero esta differencial considerarmos φ', ψ', θ' como funcções de φ, ψ, θ, s, u, v, e substituirmos $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ pelos seus valores tirados das equações (b'), o seu primeiro membro tornar-se-ha funcção identicamente nulla de t, φ, ψ, θ, s, u, v, e portanto esta equação subsistirá ainda quando fizermos variar separadamente qualquer d'estas sete quantidades.

Supponhamos effectuada aquella substituição, e differenciemos a equação resultante em ordem a φ; teremos

$$\frac{d^2a}{d\varphi dt}+\frac{d^2a}{d\varphi^2}\varphi'+\frac{d^2a}{d\varphi d\psi}\psi'+\frac{d^2a}{d\varphi d\theta}\theta'+$$

$$+\frac{d^2a}{d\varphi ds}\frac{ds}{dt}+\frac{d^2a}{d\varphi du}\frac{du}{dt}+\frac{d^2a}{d\varphi dv}\frac{dv}{dt}+$$

$$+\frac{da}{d\varphi}\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\psi}\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\theta}\frac{d\theta'}{d\theta}+$$

$$+\frac{da}{ds}\frac{d^2\overline{s}}{d\varphi dt}+\frac{da}{du}\frac{d^2\overline{u}}{d\varphi dt}+\frac{da}{dv}\frac{d^2\overline{v}}{d\varphi dt}=0.$$

Em virtude d'esta equação, o valor de $d\,\dfrac{da}{d\varphi}$ torna-se em

$$d\frac{da}{d\varphi}=-\left(\frac{da}{d\varphi}\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\psi}\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{da}{d\theta}\frac{d\theta'}{d\varphi}+\frac{da}{ds}\frac{d^2\overline{s}}{d\varphi dt}+\frac{da}{du}\frac{d^2\overline{u}}{d\varphi dt}+\frac{da}{dv}\frac{d^2\overline{v}}{d\varphi dt}\right)dt. \quad ..(g')$$

Puzemos um traço sobre as differenças parciaes $\dfrac{d\overline{s}}{d\varphi dt}$, $\dfrac{d^2\overline{u}}{d\varphi dt}$, $\dfrac{d^2\overline{v}}{d\varphi dt}$, e o mesmo faremos ás expressões que d'estas se deduzem, mudando successivamente φ em ψ e θ, para recordar que nas differenciações que ellas indicam φ, ψ, θ, e s, u, v são consideradas como seis variaveis independentes.

Antes de passar adiante observaremos que entre estas expressões existem as relações

$$\frac{d^2\overline{s}}{d\psi dt}=\frac{d^2\overline{u}}{d\varphi dt},\ \frac{d^2\overline{s}}{d\theta dt}=\frac{d^2\overline{v}}{d\varphi dt},\ \frac{d^2\overline{u}}{d\theta dt}=\frac{d^2\overline{v}}{d\psi dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(h')$$

como facilmente se demonstraria por considerações analyticas.[1]

[1] A primeira equação (h'), e do mesmo modo as outras, obtem-se da maneira seguinte:

Como dissemos, U é funcção de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ'; considerando

Para $d\dfrac{da}{d\psi}$ e $d\dfrac{da}{d\theta}$ obteriamos expressões analogas a (g'); em

estas tres ultimas variaveis como funcções de $\varphi, \psi, \theta, s, u, v$, acha-se

$$\frac{dU}{d\varphi}=\left(\frac{dU}{d\varphi}\right)+\frac{dU}{d\varphi'}\frac{d\varphi'}{d\varphi}+\frac{dU}{d\psi'}\frac{d\psi'}{d\varphi}+\frac{dU}{d\theta'}\frac{d\theta'}{d\varphi},$$

e experssões analogas para $\dfrac{dU}{d\psi}$ e $\dfrac{dU}{d\theta}$. Tirando d'estas equações os valores de $\left(\dfrac{dU}{d\varphi}\right)$, $\left(\dfrac{dU}{d\psi}\right)$, $\left(\dfrac{dU}{d\theta}\right)$, substituindo-os nas equações (a'), e pondo s, u, v em logar de $\dfrac{dU}{d\varphi'}$, $\dfrac{dU}{d\psi'}$, $\dfrac{dU}{d\theta'}$, vem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{ds}{dt}&=\frac{dU}{d\varphi}-s\frac{d\varphi'}{d\varphi}-u\frac{d\psi'}{d\varphi}-v\frac{d\theta'}{d\varphi},\\
\frac{du}{dt}&=\frac{dU}{d\psi}-s\frac{d\varphi'}{d\psi}-u\frac{d\psi'}{d\psi}-v\frac{d\theta'}{d\psi},\\
\frac{dv}{dt}&=\frac{dU}{d\theta}-s\frac{d\varphi'}{d\theta}-u\frac{d\psi'}{d\theta}-v\frac{d\theta'}{d\theta}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Differenciando a primeira d'estas equações em ordem a ψ e a segunda em ordem a φ, considerando s, u, v como constantes, e subtrahindo-as depois uma da outra, acha-se

$$\frac{d^2\overline{s}}{d\psi dt}=\frac{d^2\overline{u}}{d\varphi dt}.$$

e, suppondo á constante b um valor similhante ao de a, acharemos da mesma maneira as expressões de

$$d\frac{db}{d\varphi},\ d\frac{db}{d\psi},\ d\frac{db}{d\theta},$$

que se deduzem das precedentes mudando a em b.

Por considerações analogas obteriamos as expressões das differenciaes

$$d\frac{da}{ds},\ d\frac{da}{du},\ d\frac{da}{dv},\ d\frac{db}{ds},\ d\frac{db}{du},\ d\frac{db}{dv}.$$

Posto isto multipliquemos respectivamente as expressões de $d\frac{da}{d\varphi}$, $d\frac{db}{d\varphi}$, $d\frac{da}{d\psi}$, $d\frac{db}{d\psi}$, $d\frac{da}{d\theta}$, $d\frac{db}{d\theta}$ por $-\frac{db}{ds}$, $\frac{da}{ds}$, $-\frac{db}{du}$, $\frac{da}{du}$, $-\frac{db}{dv}$, $\frac{da}{dv}$, e sommemos os productos attendendo ás relações (h').

Multipliquemos tambem respectivamente as expressões de $d\frac{da}{ds}$, $d\frac{db}{ds}$, $d\frac{da}{du}$, $d\frac{db}{du}$, $d\frac{da}{dv}$, $d\frac{db}{dv}$ por $\frac{db}{d\varphi}$, $-\frac{da}{d\varphi}$, $\frac{db}{d\psi}$, $-\frac{da}{d\psi}$, $\frac{db}{d\theta}$, $-\frac{da}{d\theta}$, e sommemos os productos, observando que deve ser[1]

$$\frac{d\psi'}{ds}=\frac{d\varphi'}{du},\ \frac{d\varphi'}{dv}=\frac{d\theta'}{ds},\ \frac{d\psi'}{dv}=\frac{d\theta'}{du}.$$

[1] Tomando a differença parcial de U em ordem a s; pondo em

$$\frac{d^2\overline{s}}{dsdt} = -\frac{d\varphi'}{d\varphi},\ \frac{d^2\overline{s}}{dudt} = -\frac{d\psi'}{d\varphi},\ \frac{d^2\overline{s}}{dvdt} = -\frac{d\theta'}{d\varphi},$$

$$\frac{d^2\overline{u}}{dsdt} = -\frac{d\varphi'}{d\psi},\ \frac{d^2\overline{u}}{dudt} = -\frac{d\psi'}{d\psi},\ \frac{d^2\overline{u}}{dvdt} = -\frac{d\theta'}{d\psi},$$

$$\frac{d^2\overline{v}}{dsdt} = -\frac{d\varphi'}{d\theta},\ \frac{d^2\overline{v}}{dudt} = -\frac{d\psi'}{d\theta},\ \frac{d^2\overline{v}}{dvdt} = -\frac{d\theta'}{d\theta}.$$

Sommando membro a membro as equações que resultam

logar de $\frac{dU}{d\varphi'}, \frac{dU}{d\psi'}, \frac{dU}{d\theta'}$ seus valores s, u, v; e differenciando a equação resultante em ordem a φ unicamente, acha-se

$$\frac{d^2U}{dsd\varphi} = s\frac{d^2\overline{\varphi'}}{dsd\varphi} + u\frac{d^2\overline{\psi'}}{dsd\varphi} + v\frac{d^2\overline{\theta'}}{dsd\varphi}.$$

Pondo este valor na expressão de $\frac{d^2\overline{s}}{dsdt}$ que se obtem differenciando em ordem a s a primeira das equações (α) da nota precedente sem fazer variar φ, ψ, θ, vem

$$\frac{d^2\overline{s}}{dsdt} = -\frac{d\varphi'}{d\varphi}.$$

Differenciando esta equação em ordem a u e $\frac{d^2\overline{s}}{dudt} = -\frac{d\psi'}{d\varphi}$ em ordem a s, e comparando os resultados, acha-se finalmente

$$\frac{d\varphi'}{du} = \frac{d\psi'}{ds}.$$

d'estas duas operações, veremos que a somma dos segundos membros é identicamente nulla; e que a somma dos primeiros é a differencial completa da expressão que representamos por (a, b).

Esta differencial é pois nulla, como era necessario demonstrar, e (a, b), depois de substituidos os valores de φ, ψ, θ, s, u, v em funcção de t e das arbitrarias a, b, c, f, g, h, é uma certa funcção d'estas constantes arbitrarias independente do tempo.

O mesmo diriamos dos coefficientes das differenças parciaes $\frac{d\Omega}{dc}$, $\frac{d\Omega}{df}$, etc.; de sorte que o valor da variação differencial da fica assim expresso por meio das differenças parciaes da funcção perturbadora tomadas em ordem ás arbitrarias a, b, c, f, g, h e multiplicadas por funcções d'estas mesmas quantidades independentes do tempo. O mesmo se dirá a respeito das variações das outras cinco arbitrarias, cujas expressões podem deduzir-se da formula (d') por simples permutações das letras a, b, c, etc.

Estas formulas constituem o methodo da variação dos parametros, como o expoz Poisson; e adiante havemos de applical-as á integração das equações do movimento de rotação. Integrando a expressão (d') e as outras analogas, teremos os valores finitos das variações das constantes a, b, c, f, g, h; valores que junctaremos respectivamente a estas constantes nas expressões que tivermos obtido para φ, ψ, θ numa primeira approximação, isto é, não attendendo ás forças perturbadores. Conhecemos assim os valores d'estas variaveis que satisfazem ás equações do movimento perturbado, e que devem determinar em cada instante a posição do corpo. Mas como as quadraturas de que dependem os valores das variações finitas das constantes arbitrarias não são possiveis em geral, teremos de determinal-as por approximações successivas, começando por attender unicamente á primeira potencia das forças perturbadoras; passando depois, por meio do valor approximado que assim se obtem, a considerar a segunda potencia das mesmas forças, e continuando assim successivamente até chegar ao gráo de approximação que se quizer obter.

Observemos tambem que, para chegar a estes resultados, se suppoz que cada uma das constantes arbitrarias é dada por uma funcção de t, φ, ψ, θ, s, u, v unicamente; e que por conseguinte parece que teremos de formar sempre equações d'esta natureza, procedendo á eliminação quando algumas das constantes entrarem simultaneamente na mesma equação: este trabalho porém evita-se facilmente.

Com effeito, seja por exemplo

$$b = f(t,\ \varphi,\ \psi,\ \theta,\ s,\ u,\ v,\ c,\ f,\ g):$$

será

$$\frac{db}{d\varphi} = \left(\frac{db}{d\varphi}\right) + \frac{db}{dc}\,\frac{dc}{d\varphi} + \frac{db}{df}\,\frac{df}{d\varphi} + \frac{db}{dg}\,\frac{dg}{d\varphi},$$

$$\frac{db}{ds} = \left(\frac{db}{ds}\right) + \frac{db}{dc}\,\frac{dc}{ds} + \frac{db}{df}\,\frac{df}{ds} + \frac{db}{dg}\,\frac{dg}{ds},$$

etc.

e substituindo estes valores na expressão de (a, b), teremos

$$(a,b) = (\overline{a, b}) + (a, c)\frac{db}{dc} + (a, f)\frac{db}{df} + (a, g)\frac{db}{dg}; \ldots (k')$$

representando pelo symbolo $(\overline{a, b})$ o valor que se acharia para (a, b) quando se combinassem as differenças parciaes de a e b, segundo a formula (e'), sem attender ás arbitrarias que entram no valor de b.

---

instante a posição do corpo. Mas como as quadraturas de que dependem os valores das variações finitas das constantes arbitrarias não se podem em geral obter [illegible] determinar [illegible] começando por attender unicamente á primeira potencia das forças perturbadoras; juntando depois [illegible] a consideração [illegible] e continuando assim successivamente até chegar ao grau de approximação que se quizer obter.

representando pelo symbolo (c, b) o valor que se achasia para (a, b) quando se combinassem as differenças parciaes de a e b, seguindo a formula (e'), sem attender ás alterações que cofram no valor de h.

Observemos tambem que, para chegar a estes resultados, se suppoz que cada uma das constantes arbitrarias é dada por uma funcção de t, [illegible] e que por conseguinte parece que teremos de formar sempre equações d'esta natureza, procedendo á eliminação quando algumas das constantes entrarem simultaneamente na mesma equação: este trabalho porém evita-se facilmente.

Com effeito, seja por exemplo

[illegible] b, c, e, f, g [illegible]

será

$$\frac{db}{dc} = \left(\frac{db}{dc}\right) + \frac{db}{de}\frac{de}{dc} + \frac{db}{df}\frac{df}{dc} + \frac{db}{dg}\frac{dg}{dc}$$

$$\frac{db}{de} = \left(\frac{db}{de}\right) + \frac{db}{de}\frac{de}{de} + \frac{db}{df}\frac{df}{de} + \frac{db}{dg}\frac{dg}{de}$$

etc.

SEGUNDA PARTE

On peut donc toujours confondre l'axe instantané de rotation de la terre, avec son troisième axe principal; et ses pôles de rotation répondent toujours, à très peu près, aux mêmes points de sa surface.

LAPLACE — *Méc. cél.*, L. V.

D'après les observations les plus précises et les plus longtemps continuées, la direction du plan du méridien et la hauteur du pôle restent invariablement constants dans chaque lieu de la terre.

BIOT, — *Trait. Élém. d'Astr. Phys.*

Já fallámos na importancia da determinação dos movimentos que o eixo instantaneo de rotação da terra possa ter no interior do globo. Esta questão é, pelo menos, tão interessante para nós como outra qualquer d'aquellas que prendem com o movimento de rotação do nosso planeta.

Entretanto Laplace na *Mécanique céleste* e na *Exposition du Système du Monde* diz unicamente a este respeito que todas as suas investigações lhe mostraram que são insensiveis aquelles movimentos[1]. Esta asserção não podia de forma alguma, em assumpto de tanto momento, supprir a falta de provas, que as observações astronomicas só por si tambem não podem ministrar. Tornava-se pois necessaria uma demonstração algebrica; e foi Poisson quem primeiro resolveu a questão por esta forma em uma memoria — de que não podémos tomar conhecimento senão por um

[1] L'axe terrestre se meut autour des pôles de l'écliptique; mais depuis l'époque où l'application du télescope aux instruments astronomiques a donné le moyen d'observer avec précision les latitudes

extracto publicado por M. de Pontécoulant[1] — na qual se demonstra directamente pela forma dos valores finitos das duas quantidades de que dependem as oscillações do eixo de rotação da terra em volta do seu terceiro eixo principal, que estas oscillações se conservam sempre insensiveis.

Em 30 de abril de 1827 leu Poisson na Academia das Sciencias uma outra memoria sobre o mesmo assumpto, na qual tractou de reduzir o estudo do movimento de rotação dos planetas a formulas analogas áquellas que se empregam no estudo do movimento elliptico, simplificando e aperfeiçoando d'esta forma os methodos antes empregados; porque *c'est, en effet, les rendre plus simples et les perfectionner*

terrestres, on n'a reconnu dans ces latitudes aucune variation qui ne puisse être attribuée aux erreurs des observations; ce qui prouve que l'axe de rotation a, depuis cette époque, répondu à très peu près au même point de la surface terrestre; il paraît donc que cet axe est invariable.

Lapl. — *Exp. du Syst. du monde*, liv. 4.ᵉ, chap. VIII.

[1] Esta memoria foi apresentada por seu auctor ao Instituto de França em 1809, e não se encontra nos poucos volumes que a livraria do Muzeu possue das memorias d'aquella sociedade scientifica. Examinando egualmente os volumes que existem na bibliotheca da Universidade, em nenhum d'elles appareceu; sendo para notar que dos annos de 1810, 1811 e 1812 não ha senão as partes correspondentes ao primeiro semestre de cada anno. É portanto de presumir que em alguma das partes que faltam aos volumes d'aquelles annos fosse publicado o trabalho de Poisson; e seria muito para desejar que se completasse aquella collecção, cujo valor será escusado encarecer.

que de les ramener autant qu'il est possible à l'uniformité[1].

Nesta memoria demonstra-se novamente a permanencia dos polos terrestres, ou, o que tanto vale, a invariabilidade do eixo de rotação da terra no interior do globo.

Finalmente, M. de Pontécoulant, empregando uma analyse similhante á d'esta ultima memoria na sua *Théorie analytique du système du monde*, chega ás mesmas consequencias, affirmando egualmente que o movimento de rotação da terra se effectua em torno do seu terceiro eixo principal.

Antes porem de dar conhecimento d'estes diversos trabalhos, é necessario integrar as equações do movimento de rotação dos corpos celestes, o que faremos no capitulo primeiro d'esta segunda parte.

[1] Poisson — Mémoire sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité.

CAPITULO PRIMEIRO

Integração das equações differenciaes do movimento de rotação

Poisson, na memoria publicada no volume 7.º das Memorias do Instituto de França (anno 1827), occupando-se unicamente do movimento de rotação da terra, dirige logo de principio a integração neste sentido, começando pelas considerações que a simplificam, e tornam mesmo possivel neste caso. Serve-se alem d'isto das formulas de Lagrange, que se deduziram no § II do capitulo 2.º da primeira parte, por lhe parecerem de uso mais facil.

Pontécoulant segue um caminho um pouco differente, e porventura mais methodico, na exposição do mesmo assumpto.

Intégra as equações geraes do movimento de rotação pelo methodo da variação dos parametros, servindo-se das formulas de Poisson, de que já tinha usado no estudo do movimento elliptico, e applica depois as formulas obtidas ao movimento de rotação da terra.

Pondo porem de parte esta pequena differença, ambos se empenham egualmente em tornar uniformes, quanto possivel, os methodos empregados para determinar as circumstancias dos movimentos de translação e de rotação dos corpos celestes. Assim, comparando os seis elementos arbitrarios do movimento de rotação da terra com os seis elementos do movimento elliptico, teremos a amplitude das oscillações dos polos e a longitude geographica do eixo de rotação numa epoca determinada, correspondendo á excentricidade da orbita e á longitude do perihelio; a inclinação do equador e a longitude do seu nodo sobre a ecliptica, quantidades analogas á inclinação e á longitude do nodo da orbita; finalmente a velocidade angular de rotação e a longitude geographica na origem do tempo d'uma recta traçada no plano do equador, substituindo o medio movimento e a longitude media da epoca.

Examinaremos com pouca demora os dois methodos de que acima fallámos.

I

Vimos no capitulo primeiro da primeira parte que são seis as equações differenciaes do movimento de rotação: as tres equações (H) que determinam em cada instante a posição do corpo m em relação aos tres eixos principaes que passam pelo seu centro de gravidade, e as tres equações (L) que determinam a posição d'estas linhas a respeito de tres eixos fixos.

As tres primeiras são susceptiveis de uma transformação muito util na theoria do movimento dos corpos celestes.

Consideremos, para maior simplicidade, a acção de um só astro perturbador L, cujas coordenadas serão x', y', z'; será

$$V' = \frac{L}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

ou

$$V = S\frac{Ldm}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

Attendendo a estas expressões, e considerando que as coordenadas x', y', z' não dependem senão da posição do astro L, e que o signal integral S não se applica senão ao elemento dm e ás quantidades que variam com elle, teremos

$$\left.\begin{aligned}
S.dm\left(y\frac{dV'}{dz}-z\frac{dV'}{dy}\right)&=z'\frac{dV}{dy'}-y'\frac{dV}{dz'},\\
S.dm\left(z\frac{dV'}{dx}-x\frac{dV'}{dz}\right)&=x'\frac{dV}{dz'}-z'\frac{dV}{dx'},\\
S.dm\left(x\frac{dV'}{dy}-y\frac{dV'}{dx}\right)&=y'\frac{dV}{dx'}-x'\frac{dV}{dy'};
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

onde é $V = S.V' dm$.

Transformando as coordenadas x', y', z' que se referem aos eixos moveis dos x, y, z, em outras coordenadas relativas a eixos fixos, a fim de introduzir em V os tres angulos φ, ψ, θ; observando que estas novas coordenadas, bem como x, y, z são independentes d'estes angulos, e que é por tanto

$$\frac{dV}{d\varphi}d\varphi+\frac{dV}{d\psi}d\psi+\frac{dV}{d\theta}d\theta=\frac{dV}{dx'}d'x'+\frac{dV}{dy'}d'y'+\frac{dV}{dz'}d'z',$$

designando por $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$ as differenciaes de x', y', z', que se obtêm fazendo variar unicamente os angulos φ, ψ, θ; substituindo nesta equação as expressões de $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$ pelos seus valores assim determinados; e, comparando os coefficientes de $d\varphi$, $d\psi$ e $d\theta$, em ambos os membros, acharemos

$$\frac{dV}{d\varphi}=y'\frac{dV}{dx'}-x'\frac{dV}{dy'},$$

$$\frac{dV}{d\theta}=\operatorname{sen}\varphi\left(x'\frac{dV}{dz'}-z'\frac{dV}{dx'}\right)+\cos\varphi\left(y'\frac{dV}{dz'}-z'\frac{dV}{dy'}\right),$$

$$\frac{dV}{d\psi}=\cos\theta\left(x'\frac{dV}{dy'}-y'\frac{dV}{dx'}\right)+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\left(x'\frac{dV}{dz'}-z'\frac{dV}{dx'}\right)+$$

$$+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\left(z'\frac{dV}{dy'}-y'\frac{dV}{dz'}\right).$$

Eliminando entre estas egualdades os segundos membros das equações (α), e pondo nas equações (H) os valores dos primeiros membros das mesmas equações (α) obtidos por esta forma, teremos finalmente as expressões

$$\left.\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=\frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)-\cos\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),\\
&B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=\frac{\cos\varphi}{\text{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)+\text{sen}\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),\\
&C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=\left(\frac{dV}{d\varphi}\right).
\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

Estas equações conservariam a mesma forma, qualquer que fosse o numero dos corpos do systema, e quando mesmo se quizesse attender á figura de alguns ou de todos elles; sendo neste ultimo caso a funcção V dada por duas integrações independentes: uma relativa ao espheroide attraído, outra aos corpos que actuam sobre elle.

A funcção V deve ser considerada em geral como funcção conhecida dos angulos φ, ψ, θ, na qual entra tambem o tempo t, por causa do movimento dos corpos que actuam sobre m; e podemos suppol-a desenvolvida em serie de senos e cosenos de angulos multiplos de φ.

As differenças parciaes de V são da ordem do achatamento do espheroide que se considera.

Multiplicando a primeira das equações (1) por p, a segunda por q, e a terceira por r, sommando os productos e substituindo no segundo membro por p, q e r os seus valores tirados das equações (L),[1] acharemos

$$Apdp + Bqdq + Crdr = d'V,$$

onde a caracteristica d' se refere unicamente ás variaveis φ, ψ e θ. Integrando depois esta equação, e attendendo á expressão (F), já achada (loc. cit.), teremos

$$\text{const.} = T - \int d'V \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\beta)$$

Nesta expressão T é uma funcção homogenea de duas dimensões de p, q, r, ou de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', designando por estas ultimas tres letras, como temos feito até aqui, as differenciaes $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$; será portanto

$$\frac{dT}{d\varphi}d\varphi + \frac{dT}{d\psi}d\psi + \frac{dT}{d\theta}d\theta + \frac{dT}{d\varphi'}d\varphi' + \frac{dT}{d\psi'}d\psi' + \frac{dT}{d\theta'}d\theta'$$

$$= \frac{dT}{dp}dp + \frac{dT}{dq}dq + \frac{dT}{dr}dr;$$

[1] Parte 1.ª, cap. 1.º, III.

d'onde, attendendo aos valores de dp, dq e dr, e á expressão (F), se deduz

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dT}{d\varphi}=(A-B)pq,\quad \frac{dT}{d\psi}=0,\\
&\frac{dT}{d\theta}=[\cos\theta(Ap\operatorname{sen}\varphi+Bq\cos\varphi)+Cr\operatorname{sen}\theta]\psi',\\
&\frac{dT}{d\varphi'}=Cr,\quad \frac{dT}{d\theta'}=Bq\operatorname{sen}\varphi-Ap\cos\varphi,\\
&\frac{dT}{d\psi'}=Ap\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+Bq\operatorname{sen}\theta\cos\varphi-Cr\cos\theta.
\end{aligned}\right\}\ldots(\gamma)$$

Substituindo o valor de T dado pela equação que exprime a propriedade conhecida das funcções homogeneas na expressão (β) — a qual dá $dT=d'V$ — e differenciando depois; subtrahindo d'esta ultima expressão, membro a membro, a egualdade $dT=d'V$ desenvolvida; egualando separadamente a zero os coefficientes das variações $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$; e finalmente pondo nas egualdades assim obtidas os valores (γ), acharemos as tres equações

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{d.[\operatorname{sen}\theta(Ap\operatorname{sen}\varphi+Bq\cos\varphi)-\cos\theta Cr]}{dt}=\frac{dV}{d\psi},$$

$$\frac{d(Bq\,\mathrm{sen}\varphi - Ap\cos\varphi)}{dt}$$

$$-[\cos\theta(Ap\,\mathrm{sen}\varphi + Bq\cos\varphi) + \mathrm{sen}\theta.\,Cr]\frac{d\psi}{dt} = \frac{dV}{d\theta}.$$

Estas equações são identicas com as equações (B')[1], supponde nestas ultimas $U = T$ e $\Omega = V$, e substituindo ás differenças parciaes da funcção T por seus valores; podemos por tanto integral-as pelo mesmo methodo, e os seus integraes convirão egualmente ás equações (1).

Suppondo portanto nullos os segundos membros das equações (1), os seus integraes serão[2]

$$\left.\begin{array}{l}
Aap + Bbq + Ccr = \beta, \\
Aa'p + Bb'q + Cc'r = \beta', \\
Aa''p + Bb''q + Cc''r = \beta'', \\
Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2, \\
t + l = \displaystyle\int \frac{\sqrt{AB}.\,Cdr}{\sqrt{[k^2 - Bh + (B-C)Cr^2][-k^2 + Ah + (C-A)Cr^2]}}, \\
\psi_{,} + g = \displaystyle\int \Bigg[\frac{k(Cr^2 - h)}{k^2 - C^2r^2} \times \\
\quad \times \dfrac{\sqrt{AB}.\,Cdr}{\sqrt{[k^2 - Bh + (B-C)Cr^2][-k^2 + Ah + (C-A)Cr^2]}}\Bigg],
\end{array}\right\} \ldots (2)$$

[1] Parte 1.ª, cap. 2.º, II.

[2] Poisson — *Traité de Mécan.* 2.ª ediç. n.os 414 e seguintes.

nos quaes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' representam as mesmas quantidades que designamos por estas letras no § II do Cap. 1.° da 1.ª parte; $\psi_{\prime}$ aquillo em que se torna o angulo ψ quando o referimos ao *plano invariavel;* e β β', β'', h, k, l e g as constantes arbitrarias introduzidas pela integração.

Quatro d'estas ultimas quantidades estão ligadas entre si pela relação

$$\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=k^2, \dots\dots\dots\dots\dots (\delta)$$

de forma que das sete equações (2) seis unicamente são distinctas. Notando porem que, designando por γ a inclinação do plano principal de projecção sobre um plano fixo qualquer, e por α a longitude do seu nodo contada desde uma origem arbitraria, se dão as egualdades

$$\text{tang.}\alpha=\frac{\beta}{\beta'}, \qquad \text{tang.}\gamma=\frac{\sqrt{\beta^2+\beta'^2}}{\beta''},$$

podemos substituir as tres arbitrarias β, β', β'' por as duas α e γ, que com h, k, l e g completam as seis que o problema comporta, e cujas variações teremos de determinar pelo methodo da variação dos parametros, a fim de poder applicar os integraes precedentes ás equações (1), nas quaes se attende á acção das forças perturbadoras.

Notemos tambem que o angulo $\psi_{,}$, bem como $\varphi_{,}$, e $\theta_{,}$, que são a respeito de φ e θ o mesmo que $\psi_{,}$ é a respeito de ψ, estão ligados com os angulos φ, ψ, θ, γ e α pelas relações

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\cos\gamma\cos\theta_{,}-\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta_{,}\cos\psi_{,}\\ \\ \operatorname{sen}(\varphi-\varphi_{,})\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\psi_{,}\operatorname{sen}\gamma\\ \\ \operatorname{sen}(\psi-\alpha)\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\psi_{,}\operatorname{sen}\theta_{,}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

As variações das constantes arbitrarias determinam-se por meio da formula geral (d')[1]; mas é necessario primeiramente exprimir estas constantes em funcção das variaveis independentes do problema, e das quantidades s, u, e v, que já definimos no logar citado.

Attendendo á formula (F), de que já nos temos servido, e ás expressões de s, u, v, será

$$s=Cr,$$

$$u=(Ap\operatorname{sen}\varphi+Bq\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta-Cr\cos,\theta$$

$$v=Ap\cos\varphi+Bq\operatorname{sen}\varphi,$$

[1] Parte 1.ª, cap. 2.º, III.

d'onde, em virtude das tres primeiras equações (2),

$$\beta=(s+u\cos\theta)\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}-v\cos\psi,$$

$$\beta'=(s+u\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}\theta}+v\operatorname{sen}\psi,$$

$$\beta''=-u;$$

e por meio d'estas expressões obteremos os valores de α e γ em funcção das quantidades φ, ψ, θ, s, u, v.

A quarta das equações (2) e a equação (δ) darão h e k em funcção das mesmas quantidades; e finalmente, pondo s, dentro do signal $\int$, em logar de Cr nas duas ultimas equações (2), e suppondo as integrações effectuadas, poderemos considerar as seis constantes h, k, α, γ, l, g como expressas em funcção das seis variaveis φ, ψ, θ, s, u, v.

Preparadas assim as expressões d'aquellas quantidades, resta achar os valores dos symbolos (k, α), (k, γ), etc., os quaes, feitos os calculos, se reconheceria serem todos nullos á excepção de quatro, a saber:

$$(h, l)=2,\ (k, g)=1,\ (\gamma, g)=\frac{\cos\gamma}{k\operatorname{sen}\gamma},\ (\gamma,\alpha)=\frac{1}{k\operatorname{sen}\gamma}.$$

Substituindo estes valores na formula geral (d'), já citada, e fazendo successivamente a egual a h, l, k, g, α e γ, teremos, para determinar as variações que a acção das forças perturbadoras produz nas seis constantes arbitrarias que entram nas equações do movimento de rotação, as seis expressões

$$\left.\begin{aligned}
dh&=2dt\left(\frac{dV}{dl}\right),\\
dl&=-2dt\left(\frac{dV}{dh}\right),\\
dk&=dt\left(\frac{dV}{dg}\right),\\
dg&=-dt\left(\frac{dV}{dk}\right)-\frac{\cos\gamma dt}{k\,\text{sen}\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right),\\
d\alpha&=-\frac{dt}{k\,\text{sen}\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right),\\
d\gamma&=\frac{\cos\gamma dt}{k\,\text{sen}\gamma}\left(\frac{dV}{dg}\right)+\frac{dt}{k\,\text{sen}\gamma}\left(\frac{dV}{d\alpha}\right).
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(3)$$

As equações (3) podem obter-se, independentemente do methodo da variação dos parametros, pela simples combinação das equações differenciaes do movimento de rotação, quando se suppõe muito pequena a influencia das forças perturbadoras.

Com effeito, egualando respectivamente a N, N', N'', para maior simplicidade, os segundos membros das equações (1), multiplicando a primeira por pdt, a segunda por qdt e a terceira por rdt, sommando os productos, e integrando a somma, obtem-se a equação

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=h,$$

simílhante á quarta das equações (2), mas na qual o segundo membro não é constante, e deve ser determinado pela formula

$$dh=2(pN+qN'+rN'')dt.$$

Pondo nesta expressão por p, q, r, N, N', N'' os seus valores, ella torna-se em

$$dh=2\left(\frac{dV}{d\varphi}d\varphi+\frac{dV}{d\psi}d\psi+\frac{dV}{d\theta}d\theta\right)=2\left(\frac{dV}{dl}\right)dt, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

que é a primeira das formulas (3), attendendo a que, sendo l a constante que entra junto ao tempo t nas expressões finitas das variaveis φ, ψ, θ, se considerarmos V como funcção d'estas variaveis, será $\dfrac{dV}{dl}=\dfrac{dV}{dt}$.

Multiplicando da mesma maneira a primeira das equações (1) por $Apdt$, a segunda por $Bqdt$ e a terceira por $Crdt$, sommando os productos e integrando a somma teremos

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2,$$

equação similhante á quinta das equações (2), mas na qual a constante, considerada como variavel, é determinada pela equação

$$dk^2=2(ApN+BqN'+CrN'')dt;$$

substituindo nesta expressão por N, N', N'', p, q, r, seus valores, e despresando as quantidades da ordem do quadrado das forças perturbadoras, isto é, suppondo $p=o$, $q=o$, $r=n$ e por tanto $k=Cn$, ella torna-se em

$$dk=dt\left(\frac{dV}{d\varphi}\right),$$

identica com a terceira das formulas (3), por ser, no caso supposto,

$$\frac{dV}{d\varphi}=\frac{dV}{dg}, \quad \frac{dV}{d\psi}=\frac{dV}{d\alpha}, \quad \frac{dV}{d\theta}=\frac{dV}{d\gamma} \ldots\ldots \quad (c)$$

Multiplique-se agora a primeira das equações (1) por adt, a segunda por bdt e a terceira por cdt, sommem-se os productos, e integre-se a somma; repita-se a mesma operação com as letras a', b', c', e com a'', b'', c'': acharemos exactamente as tres primeiras equações (2), sendo agora os segundos membros variaveis, e dados pelas formulas

$$\frac{d\beta}{dt}=aN+bN'+cN'',$$

$$\frac{d\beta'}{dt}=a'N+b'N'+c'N'',$$

$$\frac{d\beta''}{dt}=a''N+b''N'+c''N''.$$

Os segundos membros d'estas equações representam os momentos das forças motrizes que actuam sobre cada elemento do espheroide, decompostas parallelamente aos tres eixos fixos que se cruzam no seu centro de gravidade. Substituindo os valores d'estas quantidades, ou então pondo por a, b, c, etc as suas expressões em funcção de φ, ψ e θ, e por N, N', N'' os segundos membros das equações (1), as formulas precedentes transformam-se em

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\text{sen}\psi}{\text{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}+\cos\theta\frac{dV}{d\psi}\right)-\cos\psi\left(\frac{dV}{d\theta}\right)$$

$$\frac{d\beta'}{dt}=\frac{\cos\psi}{\text{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}+\cos\theta\frac{dV}{d\psi}\right)+\text{sen}\psi\left(\frac{dV}{d\theta}\right)$$

$$\frac{d\beta''}{dt}=-\left(\frac{dV}{d\psi}\right).$$

Differenciando a equação (δ), e substituindo por β, β', β'', $d\beta$, $d\beta'$, $d\beta''$ os seus valores, vê-se que ella tem ainda logar no caso do movimento perturbado; e differenciando os valores já conhecidos de tang. α e tang. γ, tirando dos resultados as expressões de $d\alpha$ e $d\gamma$, substituindo nellas aquelles mesmos valores de β, β' etc., e despresando as quantidades da ordem do quadrado das forças perturbadoras, acharemos para estas duas differenciaes as mesmas expressões que dão as equações (3), attendendo ás formulas (b) e á primeira das relações

$$\theta=\gamma,\ \psi=\alpha,\ \varphi=\varphi_{,}-\psi_{,},\ldots\ldots\ldots\ (d)$$

as quaes dependem todas de ser o angulo θ, da ordem das forças perturbadoras.

Resta determinar as variações das duas constantes l e g. Para isso notemos que a expressão

$$\frac{dV}{dh}dh+\frac{dV}{dk}dk+\frac{dV}{dl}dl+\frac{dV}{dg}dg+\frac{dV}{d\alpha}d\alpha+\frac{dV}{d\gamma}d\gamma=0$$

deve ser uma perfeita identidade; substituindo pois dh, dk, $d\alpha$ e $d\gamma$ por seus valores, egualando a zero os coefficientes de $\frac{dV}{dl}$ e de $\frac{dV}{dg}$, recahiremos exactamente na segunda e quarta das formulas (3), que teremos assim obtido todas, independentemente do methodo da variação dos parametros.

Para ter conhecimento dos phenomenos que a acção das forças perturbadoras produz no movimento de rotação dos corpos celestes, bastará desenvolver cada uma das formulas (3); mas, como a situação inicial do corpo, sua figura e suas dimensões tem sobre este movimento uma grande influencia, seria inutil examinar aquellas formulas em toda a sua generalidade, e pelo methodo que se emprega no estudo do movimento elliptico.

Todavia entre as arbitrarias do movimento de rotação ha uma cuja variação dá logar a observações importantes, e que por isso consideraremos aqui particularmente.

A formula (*a*) dá

$$dh = 2\left[\frac{dV}{d\varphi}\,d\varphi + \frac{dV}{d\psi}\,d\psi + \frac{dV}{d\theta}\,d\theta\right] = 2d'V,$$

e esta expressão mostra que h não pode conter o tempo t senão debaixo da forma periodica, quando na funcção perturbadora V elle entra tambem unicamente debaixo d'esta forma.

Com effeito, se attendermos sómente á primeira potencia das forças perturbadoras, caso em que podemos considerar como constantes as arbitrarias que entram em V, é claro que se o tempo t não apparecer nesta funcção senão dentro dos signaes de seno ou coseno, a differenciação relativa a t fará desapparecer todos os termos constantes, ou que dependem do tempo simplesmente por causa do movimento dos astros attrahentes; e por tanto a integração não poderá introduzir em h nenhum termo não periodico que cresça com o tempo. Ha apenas uma excepção, que tem logar quando na funcção V ha um termo da forma

$$M \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}(int - i'n't + H),$$

no qual $in = i'n'$, sendo i e i' numeros inteiros, nt o medio movimento de rotação do espheroide em volta do seu centro de gravidade, e $n't$ o medio movimento do astro attrahente.

O resultado precedente subsiste ainda mesmo quando se attende aos termos do quadrado das forças perturbadoras.

Representando por $V+\delta V$ aquillo em que se torna V neste caso, será

$$\delta V = \frac{dV}{dh}\delta h + \frac{dV}{dk}\delta k + \frac{dV}{dl}\delta l + \frac{dV}{dg}\delta g + \frac{dV}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dV}{d\gamma}\delta\gamma,$$

e

$$dh = 2d'\delta V,$$

considerando unicamente os termos da ordem do quadrado das forças perturbadoras.

A expressão de δV, pondo em logar de δh, δk, etc., os seus valores, fica composta de termos da forma

$$A\int B dt - B\int A dt,$$

podendo A e B, por hypothese, desenvolver-se em uma serie de termos da forma

$$M \begin{matrix}\cos\\ \mathrm{sen}\end{matrix} (it+i't+H),$$

nos quaes M, i e H são funcções dos parametros, e $i't$ dos angulos que provêm dos movimentos dos corpos attrahentes.

Seja pois $M\cos(it+i't+H)$ um termo qualquer de A, e $M'\cos(it+i't+H')$ o termo correspondente de B que tem o mesmo argumento; será necessario combinar entre si estes dois termos para que appareçam em

$$d'.(A\int Bdt-B\int Adt)$$

quantidades não periodicas. Formando assim esta expressão acha-se uma quantidade identicamente nulla; d'onde se segue que, sendo periodica a expressão de V, o valor de dh só conterá tambem termos periodicos, ao menos em quanto nas approximações se attende unicamente ás primeiras e segundas potencias das forças perturbadoras.

No movimento de rotação h representa a força viva do corpo em movimento, e temos

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=h;$$

já vimos[1] que as quantidades p, q e r determinam a po-

[1] Parte 1.ª, cap. 1.º, II.

sição do eixo instantaneo de rotação a respeito dos tres eixos principaes: ora, se no segundo membro da equação precedente não entra termo algum não periodico, o primeiro membro tambem os não pode conter; e como todos os seus termos são positivos, segue-se que nenhum d'elles cresce proporcionalmente ao tempo. D'onde pode concluir-se que o eixo instantaneo de rotação não poderá ser affectado de desegualdade alguma não periodica.

Devemos porem observar que não se attendeu no valor de V aos termos provenientes da variação dos elementos das orbitas dos astros attrahentes. Temos portanto de restringir neste sentido a generalidade do resultado precedente, e examinar mais particularmente o movimento de rotação da terra.

II

Voltando ás equações (H) e (L)[1], ou (1) e (L), procuremos integral-as por meio de approximações successivas, que podemos empregar quando se tracta do movimento de rotação da terra, por serem neste caso muito pequenas as forças perturbadoras.

Mas antes de passar adiante, notemos que, sendo r a velocidade de rotação, no caso de que se tracta, como se vê comparando a ultima das equações (D) com a ultima das equações (E)[2], rdt é o angulo descripto no instante dt por todos os pontos da terra, parallelamente ao plano do equador; este angulo seria $d\varphi$ se a intersecção d'este plano fixo permanecesse immovel. Como porem esta intersecção descreve um angulo $d\psi$ sobre o plano fixo, cuja projecção

[1] Parte 1.ª, cap. 1.º, III.

[2] Parte 1.ª, cap. 1.º, II.

sobre o plano movel é $\cos\theta d\psi$, segue-se que rdt é o excesso de $d\varphi$ sobre $\cos\theta d\psi$; resultado expresso pela primeira equação (L).

Despresando na primeira approximação a primeira potencia das forças perturbadoras, os segundos membros das equações (1) reduzem-se a zero; e como as observações têm mostrado que o eixo instantaneo de rotação da terra se afasta muitissimo pouco do eixo do maximo momento de inercia, as variaveis p, q são muito pequenas em relação a r; despresando o seu producto, a ultima das equações (1) dá, neste caso,

$$r=n,$$

sendo n uma constante arbitraria, que representa muito proximamente a velocidade de rotação da terra, e que supporemos positiva.

Substituindo n em logar de r nas outras duas equações (1), cujos segundos membros suppomos nullos; integrando, e fazendo para maior simplicidade

$$a=\sqrt{\frac{C-B}{A}},\quad b=\sqrt{\frac{C-A}{B}};$$

teremos

$$p=h\operatorname{sen}ab(nt+c),\qquad q=-h'\cos ab(nt+c).$$

Sendo as quantidades a e b reaes, por hypothese, as constantes h e h' deverão ser quantidades muito pequenas para que p e q o sejam tambem, como suppozemos; ora é $h'=h\frac{b}{a}=be$, fazendo $h=ae$ para desembaraçar do denominador; e as expressões precedentes tornam-se em

$$p=ae\operatorname{sen}ab(nt+c) \quad q=-be\cos ab(nt+c) \;\ldots\ldots\ldots (4)$$

nas quaes e será da mesma ordem das forças perturbadoras.

Substituindo depois estes valores de p e q na ultima das equações (1), cujo segundo membro continuaremos a suppor nullo, acha-se para r o valor

$$r=n-\frac{(B-A)e^2}{4nC}\cos 2ab(nt+c).$$

Introduzindo este segundo valor de r, nas duas equações d'onde deduzimos as expressões de p e q, obteremos novos valores d'estas quantidades, mais approximados do que os precedentes; e, continuando d'esta forma, acharemos para p, q e r expressões ordenadas segundo as potencias crescentes de e, entrando nas duas primeiras unicamente as potencias impares d'esta letra, e na ultima as potencias pares.

Não attendendo portanto aos cubos e potencias superiores de e, deveremos parar nos valores de p, q e r, que acabamos de obter.

Introduzindo estes valores nas equações (L), ou, o que tanto vale, nas equações (C)[1], e integrando tambem por approximações successivas, acharemos, despresando a primeira potencia de e, e designando por γ, α e l tres constantes arbitrarias,

$$\theta=\gamma,\ \psi=\alpha,\ \varphi=nt+l.$$

Os valores de θ e ψ são exactamente aquelles que dão as duas primeiras expressões (d).

Despresando as potencias de e superiores á primeira, e fazendo

$$k=\frac{Bb}{C}\cos(nt+l)\cos ab(nt+c)$$

$$-\frac{Aa}{C}\operatorname{sen}(nt+l)\operatorname{sen}ab(nt+c),$$

$$k'=\frac{Bb}{C}\operatorname{sen}(nt+l)\cos ab(nt+c)$$

$$+\frac{Aa}{C}\cos(nt+l)\operatorname{sen}ab(nt+c),$$

sendo a e b as mesmas quantidades que acima designamos por estas letras, teremos

$$\theta=\gamma+\frac{ke}{n},\quad \psi=\alpha-\frac{k'e}{n\operatorname{sen}\gamma},\quad \varphi=nt+l-\frac{k'e\cos\gamma}{n\operatorname{sen}\gamma}.$$

[1] Parte 1.ª, cap. 1.º, II.

Attendendo á segunda potencia de e, e fazendo

$$\frac{1}{8C^2}\left\{\begin{aligned}&[B(C-A)+A(C-B)](1-\cos 2(nt+l)\cos 2ab(nt+c)]\\&\quad -C(B-A)[\cos 2(nt+l)-\cos 2ab(nt+c)]\\&\quad +2ABab\,\mathrm{sen}\,2(nt+l)\,\mathrm{sen}\,2ab(nt+c)\end{aligned}\right\}=h,$$

$$\frac{1}{8C^2}\left\{\begin{aligned}&[B(C-A)+A(C-B)]\,\mathrm{sen}\,2(nt+l)\cos 2ab(nt+c)\\&\quad +C(B-A)\,\mathrm{sen}\,2(nt+l)\\&\quad +2ABab\cos 2(nt+l)\,\mathrm{sen}\,2ab(nt+c)\end{aligned}\right\}=h',$$

acharemos as expressões

$$\left.\begin{aligned}&\theta=\gamma+\frac{ke}{n}+\frac{he^2\cos\gamma}{n^2\,\mathrm{sen}\gamma},\ \psi=\alpha-\frac{k'e}{n\,\mathrm{sen}\gamma}+\frac{2h'e^2\cos\gamma}{n^2\,\mathrm{sen}^2\gamma},\\&\varphi=nt+l-\frac{k'e\cos\gamma}{n\,\mathrm{sen}\gamma}+\frac{h'e^2(1+\cos^2\gamma)}{n^2\,\mathrm{sen}^2\gamma},\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

na ultima das quaes o primeiro termo comprehende todos aquelles em que t entra fora dos signaes periodicos, para o que basta suppor que em logar de n se poz agora $n-\frac{(2C-A-B)e^2}{4nC}$, o que altera unicamente o valor de

φ e o de r que se torna em

$$r=n-\frac{(2C-A-B)e^2}{4nC}-\frac{(B-A)e^2}{4nC}\cos 2ab(nt+c)\ldots(6)$$

A solução approximada das equações do movimento de rotação, quando se suppõe nullas as forças perturbadoras, é dada pelas seis formulas (4), (5) e (6).

Para attender áquellas forças e applicar esta solução ás equações (1) e (L), que as contêm, emprega Poisson o methodo que expozemos no § II do capitulo 1.° da 1.ª Parte. Formando as quantidades s, u, v, por meio da expressão que encerra o principio das forças vivas, determinando depois os valores numericos de todos os coefficientes formados pelo typo da formula (F'), e introduzindo estes valores na expressão (D'), acha-se finalmente

$$\frac{dV}{dn}dt=C\cos\gamma d\alpha-Cdl,$$

$$\frac{dV}{de}dt=\frac{(C-A)(C-B)}{nC}(edl-edc-e\cos\gamma d\alpha),$$

$$\frac{dV}{dc}dt=\frac{(C-A)(C-B)}{nC}ede,$$

$$\frac{dV}{d\gamma}dt=-Cn\operatorname{sen}\gamma d\alpha,$$

$$\frac{dV}{d\alpha}dt=-C\cos\gamma dn+\frac{(C-A)(C-A)\cos\gamma}{nC}ede+Cn\operatorname{sen}\gamma d\gamma,$$

$$\frac{dV}{dl}dt=Cdn-\frac{(C-A)(C-B)}{nC}ede;$$

..

d'onde se tira reciprocamente

$$
\left.\begin{aligned}
dn&=\left(\frac{dV}{dc}+\frac{dV}{dl}\right)\frac{dt}{dc},\\
ede&=\frac{dV}{dc}\,\frac{Cndt}{(C-A)(C-B)},\\
edc&=-\frac{dV}{de}\,\frac{Cndt}{(C-A)(C-B)}-\frac{dV}{dn}\,\frac{edt}{C},\\
d\gamma&=\frac{dV}{d\alpha}\,\frac{dt}{Cn\operatorname{sen}\gamma}+\frac{dV}{dl}\,\frac{\cos\gamma dt}{Cn\operatorname{sen}\gamma},\\
d\alpha&=\frac{dV}{d\gamma}\,\frac{dt}{Cn\operatorname{sen}\gamma},\\
dl&=\frac{dV}{d\gamma}\,\frac{\cos\gamma dt}{Cn\operatorname{sen}\gamma}-\frac{dV}{dn}\,\frac{dt}{C}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7)
$$

Pelas expressões de φ, ψ e θ se vê que V deve ser funcção de n, $nt+c$, $nt+l$; designando pois por $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ a parte da differença parcial relativa aos n não comprehendidos em $nt+c$ ou em $nt+l$, será

$$\frac{dV}{dn}=\left(\frac{dV}{dn}\right)+t\frac{dV}{dc}+t\frac{dV}{dl};$$

e, em virtude das equações (7), teremos

$$c(dc+tdn)=-\frac{dV}{dc}\,\frac{Cndt}{(C-A)(C-B)}-\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{cdt}{C},$$

$$dl+tdn=\frac{dV}{d\gamma}\,\frac{\cos\gamma dt}{Cn\operatorname{sen}\gamma}-\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{dt}{C}.$$

Substituindo c e l respectivamente por $c-\int tdn$, $l-\int tdn$, a quantidade V tornar-se-ha funcção de n, $c+\int ndt$, $l+\int ndt$; e se fizermos $\int ndt=g$, as novas quantidades c e l serão ainda dadas pela terceira e quarta das equações (7), onde as differenças parciaes relativas a n se formarão considerando g como constante; e a quantidade n será dada pela expressão

$$Cdn=\frac{dV}{dg}dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Podemos transformar muitas das arbitrarias, que empregámos em outras, e exprimir as differenciaes d'estas por meio das differenças parciaes de V que lhes correspondem. Assim, fazendo

$$e\operatorname{sen}abc=f,\quad e\cos abc=f',$$

acharemos sem difficuldade

$$\left.\begin{aligned} df&=-\frac{dV}{df'}\,\frac{Cndt}{ABab}-\frac{dV}{dn}\,\frac{abf'dt}{C} \\ df'&=\frac{dV}{df}\,\frac{Cndt}{ABab}+\frac{dV}{dn}\,\frac{abfdt}{C}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Notemos tambem que as equações (4) dão

$$\frac{p^2}{a^2}=e^2\operatorname{sen}^2 ab(nt+c),\quad \frac{q^2}{a^2}=e^2\cos^2 ab(nt+c);$$

mas por outra parte a quarta e quinta das equações (2) dão

$$Ch-k^2=(C-A((C-B)\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

d'onde

$$\frac{Ch-k^2}{(C-A)(C-B)}=e^2.$$

A forma dos valores de p e q dá ainda logar a observações importantes. A constante e depende do angulo que na origem do movimento o eixo instantaneo de rotação faz com o terceiro eixo principal; se suppozermos este angulo nullo, será tambem $e=0$, as quantidades p e q serão sempre nullas, e o eixo de rotação coincidirá sempre com o terceiro eixo principal: é por este motivo que a estes eixos se dá o nome de *eixos naturaes de rotação.*

Se o eixo instantaneo conserva sempre a mesma posição no interior do corpo, é porque coincide com um dos eixos principaes. Com effeito, para que isto tenha logar, será necessario que seja $dp=0$, $dq=0$, $dr=0$, e por tanto

$$(C-B)qrdt=0,\quad (A-C)prdt=0,\quad (B-A)pqdt=0;$$

se os tres momentos de inercia forem deseguaes, será necessario suppor nullas duas das quantidades p, q e r, e o eixo instantaneo coincide com um dos principaes. Se dois dos momentos são eguaes, $A=B$ por exemplo, a ultima das equações precedentes é identica, e satisfaz-se ás outras duas suppondo $r=0$; o eixo de rotação está pois situado no plano perpendicular ao terceiro eixo principal, e todos os eixos comprehendidos neste plano são, neste caso, eixos principaes. Finalmente, se for $A=B=C$, aquellas equações tornam-se todas identicas, e qualquer valor de p, q e r lhes convem; mas, neste caso, todos os eixos do corpo são principaes.

A propriedade de *eixos invariaveis de rotação* convem pois exclusivamente aos eixos principaes: ha todavia uma distincção que fazer entre elles. O movimento de rotação é *stavel* em relação aos dois eixos principaes, que correspondem ao maior e ao menor momento de inercia, e não o é em relação ao terceiro.

se os tres momentos de inercia forem desiguaes, será necessario suppor nullas duas das quantidades p, q e r, e o eixo instantaneo coincide com um dos principaes. Se dois dos momentos são eguaes, $A=B$ por exemplo, a ultima das equações precedentes é identica, e satisfaz-se ás outras duas suppondo $r=0$; o eixo de rotação está pois situado no plano perpendicular ao terceiro eixo principal, e todos os eixos comprehendidos neste plano são, neste caso, eixos principaes. Finalmente, se for $A=B=C$, aquellas equações tornam-se todas identicas, e qualquer valor de p, q e r lhes convem; mas, neste caso, todos os eixos do corpo são principaes.

A propriedade de eixos permanentes de rotação convem pois exclusivamente aos eixos principaes: ha todavia uma distincção que fazer entre elles. O movimento de rotação é stavel em relação aos dois eixos principaes, que [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] nullas; e o eixo de rotação coincidirá sempre com o terceiro eixo principal: é por este motivo que a estes eixos se dá o nome de eixos naturaes de rotação.

Se o eixo instantaneo occupar sempre a mesma posição no interior do corpo, é preciso que coincida com um dos eixos principaes. Com effeito, para que isto tenha logar, será necessario que seja $dp=0$, $dq=0$, $dr=0$, e por tanto

$$(C-B)qrdt=0, \quad (A-C)prdt=0, \quad (B-A)pqdt=0;$$

CAPITULO SEGUNDO

Da permanencia dos polos terrestres

Para expor, com a maior generalidade, a questão do movimento da terra em tôrno do seu centro de gravidade, supporemos primeiro que força alguma acceleratriz perturba o movimento resultante do impulso primitivo, e examinaremos quaes deveriam ser neste caso as circumstancias iniciaes do movimento para que os resultados da theoria concordem com os phenomenos observados.

Consideraremos depois a acção perturbadora do sol e da lua, e veremos se ella pode produzir algumas alterações nos pontos physicos a que correspondem as extremidades do eixo de rotação á superficie do globo.

CAPITULO SEGUNDO

I

Da permanencia dos polos terrestres

Para determinarmos as oscillações, que dependem do estado inicial do movimento, voltemos ás equações (4), que dão os valores approximados de p e q quando se suppõem nullas as forças perturbadoras.

A segunda das equações $(L)^1$, dá

$$\frac{d\theta}{dt}=q\text{sen}\varphi-p\cos\varphi.$$

Despresando as quantidades de segunda ordem em relação, a p e q bastará substituir nesta equação, em logar de φ, o seu valor independente d'estas quantidades, ou $\varphi=nt+l$;

[1] Parte 1.ª, cap. 1.º, III.

e teremos assim, pondo por p e q os seus valores, integrando e designando por h a constante arbitraria,

$$\theta = h + \frac{(a+b)}{2n(1+ab)}\cos(nt+n't+l+l') -$$

$$-\frac{(a-b)e}{2n(1-ab)}\cos(nt-n't+l-l'),$$

onde se fez, para simplificar, $abn=n'$, $abc=l'$.

Por esta analyse se vê que, se a constante e tivesse um valor sensivel, os polos fariam á superficie da terra oscillações de extensão arbitraria, e cujo periodo, dependente dos momentos de inercia do espheroide terrestre, seria, conforme os dados que temos sobre os valores de A, B e C, de dois annos pouco mais ou menos.

O angulo θ mudaria tambem de valor neste espaço de tempo, e teria alem d'isso deseguældades dependentes do angulo nt; isto é, variaria dentro do curto intervallo de um dia. Todavia as observações, ainda as mais rigorosas, nunca revelaram variação alguma d'este genero na altura do polo; d'onde deve concluir-se que a constante e será sempre insensivel, e que as oscillações do eixo terrestre, dependentes do estado inicial do movimento, são nullas ha muito tempo.

Como não são rigorosos os valores de p e q, de que nos servimos, a demonstração precedente pode deixar alguma duvida, que será facil desvanecer. Com effeito a equação (10) mostra que se os valores de p e q são muito pequenos em um instante qualquer, a constante que forma o segundo membro será tambem muito pequena; e as quantidades p e q se conservarão sempre insensiveis, pois que cada uma d'ellas será menor do que aquella constante, quando tiverem o mesmo signal ambos os termos do primeiro membro de (10). É o que tem logar quando se tracta da terra, visto como o eixo em torno do qual ella gira é o menor de seus tres eixos principaes, e portanto aquelle ao qual se refere o maior momento de inercia.

Não nos resta já senão examinar a acção das forças perturbadoras, e ver qual a sua influencia sobre as oscillações dos polos terrestres: este exame será o objecto do resto d'este capitulo.

II

A funcção perturbadora V pode sempre reduzir-se a uma serie convergente ordenada segundo as potencias negativas das distancias da terra aos astros que actuam sobre seus differentes pontos. Os termos d'esta serie comprehenderão senos ou cosenos dos multiplos de g e de abg provenientes dos valores (5) de φ, ψ e θ, e variarão alem d'isso em virtude do movimento dos astros que se considerarem. Serão todos muito pequenos; e entre os termos correspondentes das differenciaes dos parametros, deveremos regeitar aquelles cujo periodo seja de um dia ou de um submultiplo do dia, conservando unicamente os termos constantes, se os houver, ou então os termos de longos periodos, que possam adquirir pela integração pequenos divisores, capazes de os tornar sensiveis nos valores finitos d'aquelles parametros.

Postos estes principios, seja L a massa de um dos astros que actuam sobre o espheroide terrestre; x', y', z' as coordenadas do centro de gravidade de L relativas respectivamente aos eixos dos momentos de inercia A, B e C; x, y, z, as tres coordenadas, relativas a estes mesmos eixos, de um ponto qualquer da terra; e dm o elemento de sua massa. Segundo a lei da attracção universal, a parte de V relativa ao astro L terá por expressão, como já dissemos,

$$V = S\frac{Ldm}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

estendendo-se o integral á massa inteira da terra. Cada astro que considerarmos dará logar a um termo similhante. Na questão que nos occupa, attende-se unicamente á acção de dois astros: o sol, por causa de sua grande massa; e a lua, em virtude de sua proximidade da terra. No que vae dizer-se abstrahir-se-ha da figura dos astros perturbadores, cuja consideração introduziria em V termos insensiveis.

Segundo a propriedade do centro de gravidade, é

$$Sxdm = 0, \quad Sydm = 0, \quad Szdm = 0;$$

Attendendo a estas relações, bem como áquellas que exprimem a propriedade dos eixos principaes[1]; representando por δ e r as distancias do astro L e do elemento dm ao

[1] Parte 1.ª, cap. 1.º, II.

centro de gravidade da terra; e desenvolvendo a expressão de V segundo as potencias crescentes de x, y, z, teremos

$$V=\frac{L}{\delta}Sdm-\frac{L}{2\delta^3}Sr^2dm+$$
$$+\frac{3L}{2\delta^5}(x'^2Sx^2dm+y'^2Sy^2dm+z'^2Sz^2dm)+D,$$

designando por D a parte de V de ordem superior á segunda em relação a x, y, z.

As coordenadas x', y', z', dependem dos angulos φ, ψ θ, e por conseguinte das quantidades, n, f, etc.; mas a distancia δ é independente d'ellas. Por tanto, como precisamos unicamente das differenças parciaes de V relativas a estas quantidades, podemos supprimir os termos do seu valor que só contem δ. Assim, pondo $\delta^2-x'^2-y'^2$ em logar de z'^2, e attendendo ás expressões dos momentos de inercia [1], teremos

$$V=\frac{3L}{2\delta^5}[(C-A)x'^2+(C-B)y'^2]+D.$$

Supponhamos que L é a massa do sol, e designemos por m e ρ a sua velocidade angular e a sua distancia media: de sorte que, despresando a massa da terra, será

$$\frac{L}{\rho^3}=m^2.$$

[1] Parte 1.ª cap. 1.º II, form. (b).

Designemos, relativamente á lua, por L', ρ', δ', x'', y'' as quantidades analogas a L, ρ, δ, x', y'; seja ω o quociente da divisão de $\frac{L'}{\rho'^3}$ por $\frac{L}{\rho^3}$, isto é, seja

$$\frac{L'}{\rho'^3}=\frac{\omega L}{\rho^3}=\omega m^2.$$

Attendendo conjunctamente á acção do sol e da lua, o valor de V torna-se, em virtude d'estas expressões, em

$$V=\frac{3m^2}{2}\left[(C-A)\left(\frac{x'^2\rho^3}{\delta^5}+\frac{\omega x''^2\rho'^3}{\delta'^5}\right)+\right.$$

$$\left.+(C-B)\left(\frac{y'^2\rho^3}{\delta^5}+\frac{\omega y''^2\rho'^3}{\delta'^5}\right)\right]+D\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

A quantidade D compor-se-ha de duas series muito convergentes, uma relativa á acção do sol, e outra á acção da lua. Para simplificar o calculo de D, consideraremos a terra como um espheroide, coberto em grande parte de uma camada fluida — em equilibrio, quando se attende unicamente á gravidade e á força centrifuga — e usaremos da formula conhecida que diz respeito ás attracções d'estes corpos[1].

Supponhamos que o raio r, cuja origem é no centro

[1] Lapl. — *Méc. Cél.*, Prim. part., Liv. III.

de gravidade da terra, pertence a um ponto da sua superficie, cuja longitude é v e cuja latitude é u; designemos por r' o raio medio da terra; e façamos

$$r = r'(1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \text{etc.}),$$

sendo Y_i uma funcção racional, inteira e do gráo i das tres quantidades $\cos u$, $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $\operatorname{sen} u \cos v$, que satisfaz á equação ás differenças parciaes [1]

$$\frac{d.\operatorname{sen} u \frac{dY_i}{du}}{du} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\frac{d^2 Y_i}{dv^2} + i(i+1)Y_i = 0.$$

Supponhamos tambem o centro do sol situado no prolongamento de r, de forma que seja

$$x' = \delta \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ y' = \delta \operatorname{sen} u \cos v,\ z' = \delta \cos u.$$

Finalmente designemos por M a massa da terra e por χ a razão da força centrifuga para a gravidade no equador; segundo a formula citada, teremos

$$V = \frac{ML}{\delta} + \frac{MLr'^2}{\delta^3}\left[\frac{1}{2}\chi\left(\cos^2 u - \frac{1}{3}\right) + Y_2 + \frac{r'}{\delta}Y_3 + \frac{r'^2}{\delta^2}Y_4 + \text{etc.}\right],$$

para a parte de V relativa á acção do sol

[1] Lapl.—*Mécan. Cél.*, Prém. Part., liv. III.

Se no primeiro valor de V em serie pozermos, em logar de x', y', z', seus valores, e o compararmos depois com este ultimo, acharemos

$$\frac{1}{2}(3\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v - 1)Sx^2dm +$$

$$\frac{1}{2}(3\operatorname{sen}^2 u \cos^2 v - 1)Sy^2dm + \frac{1}{2}(3\cos^2 u - 1)Sz^2dm =$$

$$= Mr'^2\left[\frac{1}{2}\chi\left(\cos^2 u - \frac{1}{3}\right) + Y_2\right], \quad . \; . \; . \quad (12)$$

e

$$D = \frac{MLr'^3}{\delta^4}\left(Y_3 + \frac{r'}{\delta}Y_4 + \ldots + \frac{r'^{i-3}}{\delta^{i-3}}Y_i + \ldots\right).$$

A parte de D relativa á acção da lua deduz-se d'esta ultima formula mudando L e δ em L' e δ', e suppondo que os angulos u e v correspondem á direcção do raio vector d'aquelle astro.

Se a terra fosse elliptica, as quantidades Y_3, Y_4 e seguintes seriam nullas, e a expressão do raio variavel conteria unicamente a quantidade Y_2[1]; e como todas as medidas que se têm feito dos gráos e do pendulo[2] se afastam muito pouco d'esta hypothese, deve concluir-se que Y_3,

[1] Lapl.— *Mécan. Cél.* loco citato.

[2] Puissant.— *Trait. de Géod.* liv. VI,

Y_4, etc., ou são eguaes a zero, ou, pelo menos, muito pequenas quantidades em relação a Y_2. Demais entram em V multiplicadas mais uma vez, mais duas vezes, etc. do que Y_2, pela parallaxe do sol ou da lua. Por ambas estas razões se vê que a parte D da formula (11) será muito pequena em relação á outra parte que depende de $(C-A)$ e $(C-B)$, a qual constituirá muito approximadamente o valor total de V. Entretanto, para maior exactidão, conservaremos a parte D reduzida ao primeiro termo.

Considerando a terra como um solido de revolução, a quantidade Y_3, que este termo contem, terá por expressão

$$Y_3 = P\left(\frac{1}{5}\cos^3 u - \frac{1}{3}\cos u\right) = P\left(\frac{z'^3}{5\delta^3} - \frac{z'}{3\delta}\right),$$

sendo P uma constante dependente da differença de achatamento dos dois hemispherios, que devemos suppor muito pouco consideravel em relação ao achatamento medio. Faça-se alem d'isto

$$C = \frac{2Mr'^2}{5},$$

sendo σ uma quantidade que differe muito pouco da unidade, segundo as observações. Formando as partes de D relativas ás acções do sol e da lua; eliminando as massas

L e L', como precedentemente, e a massa M por meio d'esta ultima expressão, teremos

$$D=\frac{1}{2}Cm^2P\sigma\left(\frac{r'\rho^3z'^3}{\delta^7}-\frac{5r'\rho^3z'}{3\delta^5}+\frac{\omega r'\rho'^3z''^3}{\delta'^7}-\right.$$

$$\left.-\frac{5\omega r'\rho'^3z''}{3\delta'^5}\right)\ldots\ldots\ldots(13)$$

Este valor de D será sufficiente, em geral, para o fim que nos propomos; não contem senão potencias impares de z' e z'', e conteria potencias similhantes de x', x'', y', y'', se quizesse attender-se á não-symetria da terra em volta do seu eixo. Os termos, que d'esta consideração resultariam para D, não têm influencia sensivel no movimento da terra.

O valor mais geral de Y_2 é da forma

$$Y_2=\alpha\left(\frac{1}{3}-\cos^2u\right)+\alpha'\mathrm{sen}^2u\cos 2v+\alpha''\mathrm{sen}^2u\,\mathrm{sen}\,2v+$$

$$+\alpha'''\mathrm{sen}2u\cos v+\alpha^{\mathrm{IV}}\,\mathrm{sen}2u\,\mathrm{sen}v;$$

sendo α, α', α'', α''', α^{IV} cinco coefficientes constantes. Substituindo esta expressão na equação (12), acha-se primeiro

$$\alpha''=0,\ \alpha'''=0,\ \alpha^{\mathrm{IV}}=0\,;$$

o que provem de serem eixos principaes as rectas d'onde são contados os angulos u e v. Exprimindo depois os integraes que esta equação encerra por meio dos momentos d'inercia A, B, C, acharemos que ella pode escrever-se assim

$$\frac{3}{4}(2C-A-B)\left(\frac{1}{3}-\cos^2 u\right)+\frac{3}{4}(A-B)\operatorname{sen}^2 u\cos 2v=$$

$$=Mr'^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\chi\right)\left(\frac{1}{3}-\cos^2 u\right)+Mr'\alpha''\operatorname{sen}^2 u\cos 2v,$$

que se decomporá nas duas seguintes:

$$A-B=\frac{4}{3}Mr'^2\alpha',$$

$$2C-A-B=\frac{4}{3}Mr'^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\chi\right);$$

ou, em virtude da expressão precedente de C,

$$A-B=\frac{4}{3}Mr'^2\alpha',\quad \frac{2C-A-B}{C}=\frac{10\sigma}{3}\left(\alpha-\frac{1}{2}\chi\right).$$

O achatamento de um meridiano qualquer resultante do valor de Y_2 terá por expressão $\alpha+\alpha'\cos 2v$. Segundo as observações do pendulo, é sensivelmente o mesmo para todos os meridianos; e portanto α' deve ser muito pequeno em relação a α, e tambem relativamente a $\alpha-\frac{1}{2}\chi$. A differença $B-A$ é, por conseguinte, muito pequena em relação a $2C-A-B$, e relativamente a $C-A$ e a $C-B$.

Posto isto, designemos por $x_{\prime}'$, $y_{\prime}'$, $z_{\prime}'$ as tres coordenadas rectangulares do centro do sol, relativas a eixos tirados pelo centro da terra segundo direcções fixas; tomemos para eixo dos $x_{\prime}'$ a recta d'onde se contam os ψ, e para eixo dos $z_{\prime}'$ a recta perpendicular ao plano d'este angulo; teremos entre estas coordenadas e as primitivas as relações

$$x'=ax_{\prime}'+a'y_{\prime}'+a''z_{\prime}',\ y'=bx_{\prime}'+b'y_{\prime}'+b''z_{\prime}',$$

$$z'=cx_{\prime}'+c'y_{\prime}'+c''z_{\prime}',$$

sendo a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' dadas em funcção de φ, ψ e θ pelas formulas que já citamos[1].

Da mesma maneira achariamos x'', y'', z'', substituindo nas expressões precedentes $x_{\prime}'$, $y_{\prime}'$, $z_{\prime}'$ por as coordenadas analogas do centro da lua, que representaremos por $x_{\prime}''$ $y_{\prime}''$ $z_{\prime}''$.

Considerando os valores de φ, ψ, θ dados pelas formulas (5), é facil ver que as partes de x'^2, y'^2, z'^2, z', e das quantidades analogas relativas á lua, que dependem da primeira potencia de e, só conterão potencias impares de $nt+l$; succederá o mesmo a respeito da parte de V, linear em relação a f e f', resultante das formulas (11) e (13);

[1] Parte 1.ª cap. 1.º, II,

portanto os valores correspondentes de $\frac{dV}{df}$ e $\frac{dV}{df'}$ só conterão termos de curto periodo. Assim, não attendendo aos termos que tem f ou f' por factor, as equações (9) reduzem-se nesta primeira approximação a

$$df=0,\ df'=0;$$

e portanto as quantidades f e f' são constantes, abstrahindo dos termos insensiveis, cujo periodo é de um dia ou de um submultiplo do dia.

Dissemos acima que os termos que resultariam para D da consideração da não-symetria da terra em volta do seu eixo são insensiveis. Vejamos como assim é.

Se tivessemos attendido áquella circumstancia, entrariam em D potencias impares de $x'\ x''\ y'\ y''$, que dariam logar a termos independentes de $nt+l$, entre os de primeira ordem em relação a e. Seja $K \operatorname{sen} u \cos v$ um dos termos de Y_3 devidos a esta causa, sendo K um coefficiente constante, muito pequeno em relação ao achatamento da terra. A parte correspondente de V será

$$Cm^2K\left(\frac{s\rho^4 x'}{\delta^5}+\frac{s'\rho'^4 x''}{\delta'^5}\right),$$

fazendo, por abreviar,

$$\frac{5}{2}\frac{r'}{\rho}=s,\quad \frac{5\omega\, r'}{2\rho'}=s';$$

segundo as quantidades que entram em s e s', podemos avalial-as com sufficiente approximação em

$$s=0,0001, \quad s'=0,1.$$

Pondo por x' e x'' os seus valores, depois de ter substituido nelles os de φ, ψ, θ, acharemos que a parte de V linear em f e f', e independente do angulo $nt+l$, se comporá de termos da forma

$$\frac{Cm^2K}{n}[s(Nf+N'f')\cos(abnt-\nu t-c_{,})+$$

$$+s'(Qf+Q'f')\cos(abnt-\nu' t-c')];$$

sendo os coefficientes constantes $N_{,}$ N', Q, Q', fracções pouco consideraveis, por causa dos factores a ou b que encerram; e designando tambem ν, ν', $c_{,}$ e c' constantes dadas, sendo $\nu' t$ proveniente do movimento do sol, e νt do da lua.

Fazendo fóra dos cosenos $A=B=C$, e $abn=m$, o que é sufficientemente exacto, a primeira das equações (9) dará

$$df=-[sN'\cos(abnt-\nu t-c_{,})+$$

$$+s'Q'\cos(abnt-\nu' t-c')]Kmndt,$$

e, integrando,

$$f=Kn\left[\frac{sm}{\nu-abn}N'\mathrm{sen}(abnt-\nu t-c_{,})+\right.$$

$$\left.+\frac{s'm}{\nu'-abn}Q'\mathrm{sen}(abnt-\nu' t-c')\right].$$

O valor de f', dado pela segunda das equações (9), deduzir-se-ha do de f mudando o signal, e pondo N e Q em logar de N' e Q'. Bastará pois examinar o valor de f.

O divisor $\nu - abn$ terá o minimo valor quando νt for o medio movimento do sol; será então proximamente egual a $\frac{m}{7}$, e teremos

$$\frac{sm}{\nu - abn} < 0{,}001.$$

Se $\nu' t$ é o medio movimento da lua, ou 13 vezes o do sol, teremos tambem

$$\frac{s'm}{\nu' - abn} < \frac{1}{120}$$

Esta ultima quantidade será proximamente 12 vezes maior quanto $\nu' t$ for o medio movimento do perigeo ou do nodo da lua; mas neste caso o coefficiente Q', pelo qual ella está multiplicada, terá por factor a excentricidade ou a inclinação da orbita lunar sobre a ecliptica. Tudo isto, junctamente com a circumstancia de ser K uma quantidade muito pequena, nos faz ver que a relação $\frac{f}{n}$, resultante da formula precedente, será sempre uma fracção insensivel. O mesmo diriamos de $\frac{f'}{n}$; e por tanto a não-symetria da terra em torno do seu eixo não fará variar sensivelmente as quantidades f e f'.

Querendo conhecer as desegualdades seculares que podem affectar os valores de f e f', deveremos conservar nos segundos membros das equações (9) os termos dependentes das primeiras potencias d'estas quantidades, e cujos coefficientes são independentes não só de $nt+l$, mas tambem do angulo $ab(nt+c)$, dos medios movimentos do sol e da lua, e dos do perigeo e do nodo da orbita lunar, podendo por tanto considerar-se como constantes. Visto que os termos que contêm n independentemente de nt nos valores de φ, ψ, θ tem por factor e, o mesmo succederá a respeito de $\frac{dV}{dn}$; e por conseguinte os segundos termos das formulas (9) serão da segunda ordem em relação a f e f', e como taes deverão ser despresados. Conservaremos pois sómente os primeiros, que dependem da parte de V, em que entra o quadrado de e.

Para a obter, tomemos o plano da ecliptica em uma epocha determinada para plano dos $x_i'y_i'$, sobre o qual se conta o angulo ψ; despresemos a excentricidade da orbita solar, e representemos por v' a longitude do sol contada da mesma origem que ψ, mas em sentido contrario a este angulo; teremos

$$\delta=\rho,\quad x_i'=\rho\cos v',\quad y_i'=\rho\operatorname{sen} v',\quad z_i'=0;$$

d'onde resultam as formulas

$$x'=\rho[\mathrm{sen}(v'+\psi)\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi+\cos(v'+\psi)\cos\varphi],$$

$$y'=\rho[\mathrm{sen}(v'+\psi)\cos\theta\cos\varphi-\cos(v'+\psi)\mathrm{sen}\varphi],$$

$$z'=\rho\,\mathrm{sen}(v'+\psi)\mathrm{sen}\theta;$$

nas quaes $v'+\psi$ será a longitude do sol contada do nodo descendente do equador. Despresando os termos dependentes d'este angulo, as potencias impares de z', que entram na formula (13), serão nullas.

Substituindo no valor de x'^2, resultante d'esta consideração, os valores de θ e φ; despresando as potencias de e superiores á segunda, assim como os termos dependentes do angulo ab $(nt+c)$; teremos

$$x'^2=\frac{1}{2}\rho^2[\cos^2\gamma\cos^2(nt+l)+\mathrm{sen}^2(nt+l)]-$$

$$-\frac{\rho^2e^2}{2n^2}\Big\{h\cos^2\gamma+\frac{1}{2}k^2\cos2\gamma+$$

$$+[h'(1+\cos^2\gamma)-2kk'\cos^2\gamma]\mathrm{sen}2(nt+l)+$$

$$+(k'^2\cos^2\gamma-h\cos^2\gamma-\frac{1}{2}k^2\cos2\gamma)\cos2(nt+l)\Big\};$$

e teremos, ao mesmo tempo,

$$h=\frac{1}{8C^2}[B(C-A)+A(C-B)-C(B-A)\cos 2(nt+l)],$$

$$h'=\frac{B-A}{8C}\operatorname{sen}2(nt+l),$$

$$k^2=\frac{1}{4C^2}[B(C-A)+A(C-B)+C(B-A)\cos 2(nt+l)],$$

$$k'^2=\frac{1}{4C^2}[B(C-A)+A(C-B)-C(B-A)\cos 2(nt+l)],$$

$$kk'=\frac{1}{4C^2}[B(C-A)+A(C-B)]\operatorname{sen}2(nt+l).$$

Por meio de todos estes valores acha-se finalmente

$$x'^2=\frac{A(C-B)\rho^2e^2\operatorname{sen}^2\gamma}{8C^2n^2},$$

supprimindo a parte independente de e, que desappareceria pelas differenciações relativas a f e f', e despresando os termos dependentes de $nt+l$. Do mesmo modo achariamos

$$y'^2=\frac{B(C-A)\rho^2e^2\operatorname{sen}^2\gamma}{8C^2n^2}.$$

Despresando a excentricidade e a inclinação da orbita lunar, os valores de x''^2 e y''^2 deduzir-se-hão dos precedentes mudando ρ em ρ'; a ordenada z'' será nulla, assim como z', e portanto tambem o será o valor de D dado pela formula (13). Em virtude da equação (11), teremos por tanto

$$V=\frac{3m^2(1+\omega)\text{sen}^2\gamma}{16n^2C^2}(A+B)(C-A)(C-B)(f^2+f'^2).$$

As equações (9) tornam-se, por conseguinte, em

$$df=-\Lambda mf'dt,\quad df'=\Lambda mfdt,$$

fazendo, por abreviar,

$$\Lambda=\frac{3m}{8n}\frac{(A+B)(C-A)(C-B)}{ABC}(1+\omega)\text{sen}^2\gamma;$$

e se designarmos por E e F duas constantes arbitrarias, teremos, integrando,

$$f=nE\cos(\Lambda mt+F),\quad f'=nE\,\text{sen}(\Lambda mt+F).$$

Segundo os dados que temos a respeito das quantidades que entram em Λ, o periodo d'estas desegualdades seculares de f e f' é superior a cem milhões de annos; se fossem sensiveis, seriam as mais vagarosas de todas aquellas que conhecemos.

Os valores correspondentes de p, q, r, dados pelas equações (4) e (6), serão

$$p=naE\cos(abnt-\Delta mt-F),$$

$$q=nbE\operatorname{sen}(abnt-\Delta mt-F),$$

$$r=n\left[1-\frac{(2C-A-B)E^2}{4C}+\right.$$

$$\left.+\frac{(B-A)E^2}{4C}\cos 2(abnt-\Delta mt-F)\right].$$

O periodo dos valores de p e q será pois inferior a um anno. Designando por Δ a distancia angular do eixo de rotação ao do maior momento de inercia, teremos

$$\operatorname{sen}\Delta=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{p^2+q^2+r^2}}=aE,$$

despresando o cubo de E, e observando que as quantidades a e b são pouco mais ou menos eguaes. O polo de rotação descreveria portanto cada anno á superficie da terra um circulo de raio egual a aE, sendo o da terra tomado para unidade; ora a observação ainda não fez reconhecer variação alguma sensivel na latitude de um mesmo logar, d'onde se pode concluir que o angulo aE é extremamente pequeno, e inferior a um segundo.

De quanto deixamos dito pode tirar-se a conclusão seguinte:

A acção do sol e da lua sobre o espheroide terrestre não produz deslocamento algum dos polos de rotação á superficie do globo, e o eixo instantaneo coincide sempre com o do menor momento de inercia; d'onde resulta que a longitude e latitude de cada logar são invariaveis.

Podia chegar-se ao mesmo resultado por um caminho mais simples, mas que não deixa conhecer tão bem o papel que os dois astros, o sol e a lua, representam no phenomeno que estudamos.

Já vimos que o seno do angulo, que o eixo instantaneo de rotação forma com o terceiro eixo principal, é dado pela expressão $\sqrt{\dfrac{p^2+q^2}{p^2+q^2+r^2}}$; e portanto as quantidades p e q são da ordem das forças perturbadoras.

A equação (10), como C é o maior dos tres momentos de inercia, mostra, como já dissemos, que será sempre

$$p<ae, \quad q<be.$$

Sem a acção das forças perturbadoras a constante e seria completamente insensivel; tracta-se agora de provar que a acção d'estas forças não introduz na sua expressão desegualdades seculares que possam tornar-se consideraveis ao fim de muito tempo, e que, portanto, as quantidades p e q serão sempre, como hoje, insensiveis.

Differenciando a expressão (10), e substituindo por dh e dk seus valores dados pelas formulas (3), teremos

$$ede = \frac{1}{ABab}\left(Cd'V - kdt\frac{dV}{dg}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (14)$$

Despresando as quantidades de segunda ordem em relação ás forças perturbadoras e considerando V como funcção dada das variaveis φ, ψ, θ, bastará na equação precedente substituir em V, que é já de primeira ordem, em logar de φ, ψ, θ seus valores independentes das forças perturbadoras. Fazendo isto, e attendendo ás relações, que facilmente se obteriam ainda por esta consideração,

$$\frac{dV}{dg} = \frac{dV}{d\varphi} = \frac{dV}{ndt}, \quad k = Cn,$$

a equação precedente torna-se em

$$ede = \frac{1}{ABab}\left(Cd'V - Cndt\frac{dV}{ndt}\right) = 0,$$

observando que $d'V$ representa a differencial de V, que se obtem quando se faz variar unicamente o tempo t, que é introduzido pela substituição do valor de φ, isto é, que está multiplicado por n, pois que nesta primeira approximação se podem considerar ψ e θ como constantes.