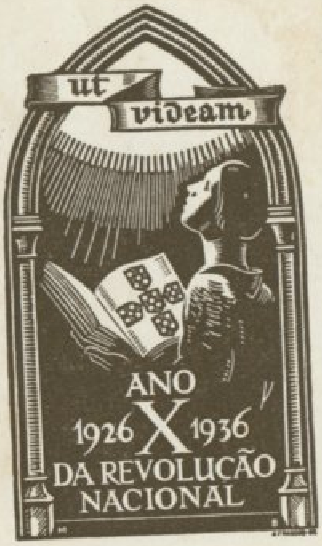
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

MANUEL M. ESPARTEIRO

SÔBRE O CONCEITO

DE

INTEGRAL DEFINIDO

E

SUAS GENERALIZAÇÕES

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1924

SÔBRE O CONCEITO

DE

INTEGRAL DEFINIDO

E

SUAS GENERALIZAÇÕES

MANUEL M. ESPARTEIRO

SÔBRE O CONCEITO

DE

INTEGRAL DEFINIDO

E

SUAS GENERALIZAÇÕES

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1924

Dissertação para o acto de doutoramento em Matemática na Faculdade de Sciências da Universidade de Coimbra.

A MEUS PAIS

Resumindo neste pequeno volume os trabalhos mais importantes de Cauchy, Dirichlet, Riemann, Darboux e Lebesgue sôbre as diferentes generalizações do conceito de integral definido, nunca poderiamos esquecer o notável estudo que o eminente professor Bruno de Cabedo consagrou a êste assunto.

Não se trata apenas, porém, de homenagear o Mestre que, pelo seu vasto talento, convertia em admiradores entusiástas os seus discípulos estudiosos: Nós estamos absolutamente convencido de que, neste capítulo da Análise, os trabalhos do nosso compatriota sobrelevam em larga escala a obra de alguns festejados autores estranjeiros. Ao dever moral, junta-se, pois, aqui a obrigação intelectual.

Há ainda, porém, uma outra finalidade que só por si justificaria o desenvolvimento que demos aos trabalhos de Bruno.

Vivendo numa época de estiolador pessimismo, julgamos conveniente proporcionar aos admiradores do nosso saudoso Mestre uma boa oportunidade para, completando a nossa tentativa de cotejo e praticando-a noutros domínios da Análise, darem aos estudantes portugueses o estímulo dum confronto extremamente lisongeiro para a nossa sciência.

*

Para o bom entendimento dos trabalhos expostos neste livro, deverá o leitor, passando os olhos pela Introdução, recordar sumàriamente os resultados mais elementares da teoria dos conjuntos.

Coimbra, maio de 1924.

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

Princípios gerais da teoria dos conjuntos

§ 1.º

Definição de conjunto

1. A ideia de *conjunto* intervém na Análise com a mesma significação que se lhe atribui na conversação quotidiana. Quando se afirma que um conjunto de circunstâncias impediu a realização dêste ou daquele acontecimento, emprega-se uma expressão simbólica, relativa, sem dúvida, a mais do que uma circunstância, mas sem nenhum carácter de individuação. Há, evidentemente, alusão a tôdas circunstâncias que influíram em determinado sentido, mas, ao mesmo tempo, por mais diversas que elas sejam, só uma propriedade comum interessa a pessoa que fala: tôdas se manifestaram no mesmo sentido. Eis porque objectos de natureza vária podem formar conjunto, para o que basta, como acabamos de ver, a consideração de uma propriedade que a todos êles pertença.

Em Análise matemática, os objectos, os componentes de um conjunto são, em regra, números, letras, pontos, linhas, superfícies, etc., ou combinações metódicas dêstes seres.

Uma letra, um ponto, etc., que faz parte de um conjunto é um elemento dêsse conjunto.

Assim, qualquer número inteiro é um elemento do conjunto dos números inteiros; um número par é um elemento do conjunto dos números pares.

§ 2.º

Conjuntos numeráveis

2. Nestes exemplos, não é difícil o reconhecimento das propriedades que caracterizam os elementos do conjunto, porque todos nós sabemos distinguir um número inteiro de qualquer outro ser de diversa natureza, e o mesmo se pode repetir a propósito dos números pares. Além disso, qualquer dos conjuntos considerados é susceptível de se apresentar sob uma forma notável, que deixa no nosso espírito uma impressão deveras característica.

(conjunto de n.º pares)

De facto, os elementos do segundo podem escrever-se numa linha horizontal, de maneira que entre três consecutivos a, b, c, exista uma relação da forma

$$a<b<c.$$

Dêste modo, se tormarmos para ponto arbitrário de referência um elemento a, nós verificamos que o vigésimo lugar à direita de a é ocupado pelo número $a+40$, e o lugar simétrico da esquerda pelo número $a-40$. Por outras palavras: conhecemos o elemento que ocupa um lugar qualquer, prèviamente indicado, pelo número de casas que o separam da origem ou ponto de referência.

Se, por convenção, as casas do lado direito forem representadas pelos seus números de ordem, e as correspondentes da esquerda indicadas pelos mesmos números precedidos do sinal —, poderemos escrever

$$(1) \qquad b_n = a + 2n$$

onde b_n é o elemento que ocupa a casa n. O elemento b_0 é o número a, e nenhum outro número par escapa a esta representação: *O conjunto dos números pares é inteiramente conhecido.*

Um conjunto cujos elementos se representam indistintamente por c é indicado pelo símbolo (c).

3. A fórmula (1) permite opor a cada elemento do conjunto (b_n), um número inteiro: o seu índice n, e vice-versa, o que nos mostra a possibilidade de se estabelecer uma correspondência unívoca e recíproca entre os elementos de (b_n) e os elementos n do conjunto (n) dos números inteiros.

Dados dois conjuntos quaisquer (a) e (b), sempre que entre os seus elementos seja possível estabelecer uma correspondência dessa natureza, dir-se há que (a) e (b) têm a *mesma potência* [1].

Esta expressão, cujo significado é meramente convencional, nada nos dirá pela análise dos seus termos: mas, integralmente apreendida, reconhece-se que ela envolve uma generalização da ideia de número.

Efectivamente, se é finito o número de elementos dos dois conjuntos, a correspondência definida só é possível quando, de um lado e do outro, os elementos sejam em igual número.

Como era de prever, relações há que não subsistem ao lado da igualdade de potências. É o que se verifica nos dois exemplos que estudamos: o conjunto dos números

---

[1] A noção de potência deve-se a Cantor.

pares, parte do conjunto dos números inteiros, possui a mesma potência que o todo.

Em compensação, subsistem muitas propriedades fundamentais. Assim, por exemplo, se (a) e (b) tiverem a mesma potência e o mesmo se der com (b) e (c), são ainda iguais as potências de (a) e (c).

4. Os conjuntos dotados da potência do conjunto dos números inteiros dizem-se *numeráveis*. Representam-se, em regra, pelos símbolos (a_n), (b_n), etc.

São, pois, numeráveis os conjuntos dos elementos de uma sucessão, das potências sucessivas de um número, etc.

Os números racionais formam também um conjunto numerável, como se verá daqui a pouco. Sendo evidente que o conjunto dos números pares tem a mesma potência que o conjunto dos números ímpares, vemos que é numerável um conjunto que se decompõe em dois outros numeráveis ou, portanto, em qualquer número de conjuntos nestas condições. Bastaria, com efeito, opor os elementos de um dos conjuntos aos números pares e os do outro aos números ímpares, para que ficasse estabelecida a correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto proposto e os números inteiros.

Opondo os números ímpares positivos aos números pares negativos, reconhece-se que é numerável o conjunto dos inteiros positivos.

5. Mostremos agora que é numerável um conjunto $(a_{m,n})$, cujos elementos dependem de dois índices representativos de números inteiros positivos ou nulos.

Escrevamos

$$a_{0,0} = b_1, \quad a_{1,0} = b_2, \quad a_{0,1} = b_3, \quad \ldots \quad a_{m,n} = b_\omega, \quad \ldots,$$

onde

$$\omega = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n + 1.$$

Desta maneira, os elementos $a_{m,n}$ podem considerar-se grupados, distinguindo-se os grupos pelo valor da soma $m+n$ que lhes diz respeito. Dentro do grupo correspondente ao inteiro $m+n$, o elemento $a_{m,n}$ ocupa o lugar de ordem $n+1$, se, em cada grupo, êsses elementos forem dispostos segundo a ordem crescente do segundo índice.

Vê-se assim que a diferença

$$\omega-(n+1)$$

deve ser igual ao número de elementos $a_{m,n}$ encorporados nos grupos anteriores, o que é fàcilmente verificável.

Logo, a cada elemento $a_{m,n}$ corresponde um elemento b_ω de certo conjunto numerável.

Recìprocamente, dado o elemento b_ω, subtraia-se de $\omega-1$ a maior soma da forma

$$0+1+2+3+\ldots+l$$

contida nesse número e tal que o resultado n dessa operação seja positivo ou nulo. Pondo $l-n=m$, o elemento $a_{m,n}$ pode considerar-se correspondente de b_ω, visto as operações precedentes serem unívocas [1].

Logo, em virtude de uma observação anterior, reconhece-se que o conjunto proposto é ainda numerável, no caso em que os índices possam tomar valores negativos.

(1) Adiante se verá que um número ilimitado de elementos, pertencentes a um conjunto numerável, forma um conjunto numerável, o que torna dispensável a segunda parte desta demonstração.

Do mesmo modo se via que é numerável o conjunto $(a_{m,n,\ldots s})$, cujos elementos se determinam atribuindo valores inteiros a k índices $m, n, \ldots s$.

6. Se os elementos de (a) fizerem parte de (b_n) e forem em número ilimitado (1), (a) é numerável.

Supondo, com efeito, representados sôbre uma linha horizontal os elementos b_n (2), designe-se por a_1 o primeiro elemento de (a) que se encontra a partir de b_1, por a_2 o seguinte, etc. É evidente, em virtude de ser ilimitado o número dos elementos de a, que a cada inteiro positivo ficará correspondendo um elemento de (a), e reciprocamente. Aplicando esta doutrina a $(a_{m,n})$, vê-se que êste conjunto é ainda numerável no caso em que m e n não possam assumir certos valores, contanto que seja ilimitado o número de inteiros que uma, pelo menos, destas letras possa representar.

Êste resultado é manifestamente extensível ao conjunto $(a_{m,n,\ldots s})$.

Como os números racionais podem representar-se por meio de um símbolo da forma $a_{m,n}$:

$$a_{m,n} = \frac{m}{n},$$

vê-se que, muito embora a n se não possa atribuir o valor zero e se excluam certas combinações de índices conducentes ao mesmo resultado, o *conjunto dos números racionais é numerável.*

---

(1) Quando assim não fôr, o conjunto diz-se finito.

(2) É inútil considerar, como já se disse, o caso em que n pode tomar valores negativos.

7. Se os elementos de um conjunto numerável (a_n) são êles mesmos conjuntos numeráveis [1] de elementos b_m, o conjunto formado por todos os elementos b_m que fazem parte dos diferentes a_n é também numerável.

Com efeito, um elemento dêste último conjunto figura em determinado a_n, ocupando a dentro dêste conjunto um certo lugar de ordem k, e é evidente que poderemos sempre inequìvocamente determiná-lo por meio de dois índices n e k escritos em ordem convencional, e reciprocamente. Logo, o conjunto proposto é numerável.

8. *O conjunto dos números algébricos é da forma* (a_n).

Recordemos que os números algébricos são as raízes das equações inteiras com coeficientes inteiros. Um número algébrico é de ordem n, se n é o menor dos graus das equações inteiras a que êle satisfaz.

Como uma equação de ordem n é determinada pelos coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$, de $x^n, x^{n-1}, \ldots x^0$, os números algébricos de ordem n ficam determinados por meio dos índices $a_0, a_1, \ldots a_n$ e de um outro que indique o lugar relativo das raízes (primeira, segunda, etc.) da mesma equação, e formam, por isso, um conjunto numerável (C_n).

Logo, a totalidade dos elementos de

$$(C_1),\ (C_2),\ \ldots,\ (C_n), \ldots$$

isto é a totalidade dos números algébricos, forma um conjunto numerável.

---

[1] Ou finitos.

§ 3.º

Conjuntos contínuos

9. Todos os conjuntos são numeráveis?

Eis uma pregunta a que é fácil responder. Há conjuntos que não são numeráveis, e é facil comprová-lo.

Tomemos o conjunto de todo os números compreendidos entre zero e um [1], e suponhamos que, por um processo qualquer, dispomos, sem omissões, êsses números na sucessão

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots \quad b_n, \quad \ldots$$

De um modo geral, teremos

$$b_i = 0, \quad \alpha_{i,1}, \quad \alpha_{i,2}, \quad \ldots \quad \alpha_{n,i}, \quad \ldots,$$

o que nos mostra ser igual a $\alpha_{i,i}$ algarismo de ordem i o que figura na mantissa de b_i.

Logo, pondo $\alpha'_n \neq \alpha_{n,n}$, o número

$$0, \quad \alpha'_1 \alpha'_2 \ldots \alpha'_n \ldots$$

não faz parte de (b_n) e pertence ao intervalo considerado, o que nos mostra a impossibilidade de efectuar a construção admitida. *Os números do intervalo* (0, 1) *não formam, pois, um conjunto numerável.*

Como os números algébricos dêsse intervalo formam um conjunto numerável, segue-se que *existem números não algébricos*. São os *números transcendentes*. *Caracteriza-os*

---

[1] Destas considerações podem excluir-se os números racionais V. G. Tannery. *Introduction à la Theorie des Fonctions.*

o facto de não serem raízes de nenhumas equações racionais inteiras, de coeficientes inteiros (ou racionais).

Êles formam um conjunto não numerável. Resulta do que acaba de dizer-se que do intervalo $(0, 1)$ podem tirar-se muitos conjuntos numeráveis, mas não se pode proceder inversamente. A potência do conjunto *zero-um* [conjunto (u)] não é igual à de (b_n): é maior.

A (u) *e aos conjuntos da mesma potência dá-se o nome de conjuntos contínuos. A sua potência é a potência do contínuo.*

10. Representando por

$$C(a, b, c, \ldots)$$

ou

$$(a)+(b)+(c)+\ldots$$

o conjunto formado pelos elementos de

$$(a), \quad (b), \quad \ldots,$$

Temos

$$C(a, b, c)=(a)+C(b, c),$$
$$C(a, b)=(a)+(b)$$

o que nos mostra serem iguais as potências de $C(a, b, c)$ e $C(a, b)$, quando (b) e (c) sejam numeráveis. Vê-se, assim, que a potência de um conjunto não é alterada pela supressão de um conjunto numerável, seguindo-se daqui *que o conjunto dos números transcendentes do intervalo zero — um é contínuo.*

11. É, de resto, fácil a generalização dêstes resultados. Por exemplo, a fórmula

$$x=a+u(b-a)$$

faz corresponder um elemento de (u) a cada número do intervalo (a, b), e vice-versa.

Além disso, *um conjunto numerável* (b_n) *cujos elementos são conjuntos contínuos de elementos* c *é ainda um conjunto contínuo.*

Dividamos, com efeito, o intervalo $(0, 1)$ em duas partes iguais, subdividamos depois o intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ do mesmo modo, e assim sucessivamente. Os intervalos em que o proposto se decompôs formam um conjunto numerável.

A cada elemento b_n podemos opor um intervalo, cujos números formam um conjunto contínuo. Fazendo corresponder aos elementos constituídos de b_n os números dêsse intervalo, temos demonstrado a proposição ennunciada.

Assim o conjunto de todos os números reais é um contínuo, como fàcilmente se reconhece, notando que êle é formado pelos dois intervalos

$$\ldots (-2, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 2), \ldots$$

12. Marcando sôbre uma recta um ponto de referência o, e fazendo corresponder a cada um dos seus pontos o número que exprime a distância que o separa da origem; trocando em seguida o sinal aos números relativos aos pontos de uma das semi-rectas de origem o, — vê-se que a doutrina expendida a propósito de conjuntos de números é também aplicável a conjuntos de pontos colineares.

Por exemplo, os pontos de um segmento rectilíneo formam um conjunto contínuo.

13. *Um conjunto contínuo cujos elementos são conjuntos contínuos de elementos é ainda um conjunto contínuo.*

Pelos pontos de abcissa irracional do segmento $0 - 1$

do eixo $o\,x$ tirem-se paralelas a $o\,y$, e limitem-se estas rectas nos pontos de ordenada um [1]. Estes segmentos formam um conjunto contínuo. Os pontos de ordenada irracional de cada um dêles formam também um conjunto análogo. Logo, os pontos do plano $x\,o\,y$, cujas coordenadas são simultâneamente irracionais e, além disso, inferiores à unidade, formam um conjunto contínuo de conjuntos contínuos (de pontos). Se x e y são as coordenadas de um ponto dêste conjunto x e y podem escrever-se sob a forma

$$x=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\dots}}, \quad y=\cfrac{1}{\beta_1+\cfrac{1}{\beta_2+\dots}}$$

e nós a êste par de números poderemos opor, por exemplo, o número

$$z=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\beta_2+\dots}}}}$$

representativo de um ponto de abcissa irracional do segmento $0-1$ do eixo dos $o\,x$. Reciprocamente da fracção contínua, ilimitada, que representa a abcissa de um ponto dêste segmento, poderemos deduzir dois números irracionais x e y, abcissa e ordenada de um ponto do conjunto considerado.

É pois verdadeira a proposição ennunciada, visto a cada ponto do conjunto proposto se ter feito corresponder um ponto no conjunto contínuo dos números irracionais do intervalo $0-1$.

Demonstrando êste teorema pela consideração de certo conjunto particular, a conclusão a que chegámos nada

---

(1) V. Borel. *Theorie des Fonctions.*

sofre na sua generalidade, porquanto a cada elemento de um conjunto nas condições do ennunciado corresponde um elemento do conjunto construído, e reciprocamente.

Podemos, portanto, dizer que o conjunto de pontos de uma superfície plana qualquer é contínuo, e é claro que o mesmo se dá com o conjunto dos pontos de qualquer espaço a três dimensões.

14. Em virtude do que deixamos dito, limitar-nos hemos, quanto possível, ao estudo de conjuntos de pontos de um segmento ou de números reais de um intervalo.

§ 4.º

Conjuntos derivados e conjuntos perfeitos

15. *Ponto limite de um conjunto é aquele em cuja vizinhança se encontram pontos dêsse conjunto.*

Diz-se que $+\infty$ (ou $-\infty$) é ponto limite de um conjunto, quando os pontos dêste se estendam indefinidamente ao longo da parte positiva (ou negativa) do eixo ox.

O ponto limite pode ou não pertencer ao conjunto. O conjunto dos números inteiros positivos admite $+\infty$ como ponto limite, sem que êste ponto faça parte daquele conjunto.

As extremidades A e B de um segmento são pontos limites do conjunto de pontos dêsse segmento. Se dêsse conjunto se excluem A e B, estes pontos continuarão sendo pontos limites do novo conjunto.

16. Da definição de ponto-limite resulta que, em qualquer intervalo que compreenda um ponto dessa natureza, existe sempre uma infinidade de pontos do conjunto. Efectivamente, se estes se encontrassem aí em número limitado, um dêles, aproximar-se ia do ponto limite mais do que qualquer outro, sem que estes dois pontos deixassem de ficar separados por certo intervalo α. Logo, no intervalo 2α de centro no ponto limite não haveria pontos do conjunto proposto, o que vai de encontro à definição de ponto limite.

17. Teorema de Weierstrass-Bolzano. *Todo o conjunto infinito possui, pelo menos, um ponto-limite.*

a) Suponhamos, em primeiro lugar, que os elementos do conjunto se podem encerrar num intervalo (a, b). Dividindo ao meio êste intervalo, um dos intervalos parciais contém necessariamente uma infinidade [1] de elementos. Designando-o por $(a_1 b_1,)$ é evidente que teremos

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{ou} \quad a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad b_1 = b.$$

Se procedermos sôbre (a_1, b_1) da mesma maneira e repetirmos indefinidamente esta operação, teremos obtido duas sucessões de números

$$a \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n, \quad \ldots,$$
$$b \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n, \quad \ldots$$

que formam duas classes contíguas, porque, sendo cada intervalo metade do precedente, teremos

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \quad \ldots$$
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad \ldots$$

por onde se vê que será $b_n - a_n < \delta$, assim como $a_i < b_i$.

---

[1] Se os dois satisfizerem a esta condição, tomaremos indiferentemente um dêles.

$b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$ e como $b > a$ será $\frac{b-a}{2^i} > 0$

e portanto

$b_i - a_i > 0$

$b_i > a_i$

Seja c o número de separação destas duas classes ou, por outras palavras, o limite comum destas sucessões; c pertence, manifestamente, ao intervalo (a, b), e é sabido, em virtude da definição de limite, que, por menor que seja o número positivo ε, entre $c-\varepsilon$ e $c+\varepsilon$ existem todos os elementos a_n e b_n de índice suficientemente grande.

Logo, como o intervalo (a_n, b_n) encerra sempre uma infinidade de elementos do conjunto considerado, é certo que o mesmo se há-de dar com $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, por menor que seja ε.

b) Se, por outro lado, não fôr possível encerrar os elementos do nosso conjunto num intervalo finito, é claro que um dos pontos $+\infty$ ou $-\infty$ (ou ambos) é ponto-limite do conjunto.

A proposição é, assim, verdadeira em todos os casos.

Por *conseguinte é necessàriamente finito o número de elementos de um conjunto que não admite pontos-limites.*

Chamando primeiro derivado de um conjunto (c) *ao conjunto* (c') *dos pontos limites de* (c), *vê-se que a condição necessária e suficiente para que um conjunto seja finito é que o seu primeiro derivado* (1) *seja nulo* (não contenha nenhum ponto ou número).

18. O primeiro derivado de (c') é o segundo derivado (c'') de (c), etc.

Se (c') *se reduz a um ponto* c', (c) *é numerável.*

Antes de mais nada registemos que é finito o número de elementos de (c) em qualquer intervalo onde se não encontre c'', visto c' ser, por hipótese, o único ponto limite de (c).

Consideremos, em primeiro lugar, o caso de (c) ser in-

(1) Ou simplesmente derivado.

terior a certo intervalo (a, b) e, portanto, interior também a um intervalo da forma $(c'-\alpha, c'+\alpha)$.

Nos dois intervalos $\left(c'-\alpha, c'-\frac{\alpha}{2}\right)$ e $\left(c'+\frac{\alpha}{2}, c'+\alpha\right)$ é finito o número de elementos de c.

Representemos o seu conjunto por (c_1). Da mesma maneira, é ainda finito o número dêsses pontos a dentro dos intervalos $\left(c'-\frac{\alpha}{2}, c'-\frac{\alpha}{3}\right)$ e $\left(c'+\frac{\alpha}{3}, c'+\frac{\alpha}{2}\right)$. Seja (c_2) o seu conjunto. De um modo geral, representemos por (c_i) o conjunto finito de elementos de (c) pertencentes aos intervalos $\left(c'-\frac{\alpha}{i}, c'-\frac{\alpha}{i+1}\right)$ e $\left(c'+\frac{\alpha}{i+1}, c'+\frac{\alpha}{i}\right)$.

Como o conjunto

$$(c_1)+(c_2)+\ldots+(c_n)+\ldots$$

contém todos os pontos de (c) (salvo c'), é claro que (c) é numerável.

O estudo do caso em que c' é um dos números a ou b (ou $\pm\infty$) não oferece dificuldades especiais, chegando-se naturalmente à mesma conclusão.

Estas considerações levam-nos a concluir que são numeráveis todos os conjuntos que admitem um primeiro derivado finito, visto êsses conjuntos serem decomponíveis num número finito (ou numa infinidade numerável de conjuntos numeráveis).

19. Anàlogamente, se (c'') se reduz a um só ponto (c''), nos intervalos $\left(c''-\frac{\alpha}{i}, c''-\frac{\alpha}{i+1}\right)$ e $\left(c''+\frac{\alpha}{i+1}, c''+\frac{\alpha}{i}\right)$ haverá apenas um número limitado de pontos de (c'), e, pelo teorema anterior, os elementos de (c) que aí se encontram formam um conjunto numerável.

Logo, por ser

$$(c) = (c_1) + (c_2) + \ldots + (c_i) + \ldots,$$

(c) é evidentemente numerável, e esta conclusão subsiste, pelas razões atrás apontadas, caso (c'') seja finito.

Como êste raciocínio se pode repetir indefinidamente, vê-se que é numerável todo o conjunto que admite um derivado de ordem k finito, ou, o que é o mesmo, *um derivado nulo de ordem* $k+1$.

Efectivamente, duvidar da veracidade desta afirmação corresponde a duvidar da possibilidade de construir o número k mediante a adição de parcelas iguais à unidade.

20. Um conjunto que compreende todos os elementos do seu derivado diz-se *fechado;* diz-se *aberto* o conjunto que não possui nenhum dos seus pontos limites.

Um conjunto fechado é *perfeito* quando não contém elementos extranhos ao derivado, isto é, quando coincide com êste.

O conjunto dos números racionais não é perfeito nem fechado, pois que só contém alguns dos seus pontos limites (os racionais).

O conjunto formado pelo número *dois* e pelos elementos de (u) é fechado, mas não é perfeito, porque aquele inteiro não faz parte do seu derivado.

O número *dois* neste último exemplo é um *ponto isolado* (não é ponto limite).

Do que acabamos de dizer depreende-se que (u) é perfeito (e, portanto, fechado). Vamos prová-lo.

Viu-se na Aritmética que entre dois números racionais existe sempre um terceiro número da mesma natureza, e é claro que daqui resulta a prova de que êsses números são pontos limites de conjuntos de outros números racionais. Aí se viu também que os números irracionais podiam calcular-se, por meio dos racionais, com uma aproximação tão grande quanto se desejasse, o que envolve a ideia de que os números irracionais são pontos limites de conjuntos de números racionais. Logo, todos os números do intervalo $0-1$ [*conjunto* (u)] são pontos limites, e (u') compreende (u). Mas, por outro lado, os pontos exteriores ao intervalo já citado não podem ser pontos limites de (u), e, então, por sua vez, (u) compreende (u'), visto possuir todos os seus pontos limites.

21. Um ponto limite de um conjunto (c) é um ponto de condensação dêste conjunto, quando nas suas visinhanças se encontra uma infinidade não numerável de elementos de (c).

Todo o conjunto que não contém pontos de condensação é numerável.

Suponhamos que os elementos de (c) se encontram todos no intervalo (a, b), e decomponhamos êste intervalo em n partes iguais $E_n^{(i)}$, em cada uma parte das quais se suprimirão os pontos c, caso êles formem aí um conjunto numerável (¹). Dêste modo, a cada valor de n faremos corresponder um número $m \leq n$ de conjuntos numeráveis, um conjunto numerável, portanto.

Suprimindo neste conjunto C_n os elementos que fazem parte de $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$, obter-se há ainda uma infinidade numerável D_n.

Logo,

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n + \ldots$$

é numerável.

(¹) Ou finito.

Ora, não havendo em (c) pontos de condensação, um ponto c dêsse conjunto é o centro de um intervalo I_c onde apenas se encontra (quando muito) uma infinidade numerável de elementos de (c); e, quando for $2E_n^{(i)} < I_c$ êsse ponto fará parte de uma das divisões $E_n^{(i)}$ que assentam totalmente em I_c, sendo então (se o não tiver sido antes) suprimido com os restantes pontos de $E_n^{(i)}$. O ponto considerado faz, assim, parte de D_n ou de D_m $(m < n)$, e teremos

$$(c) = D_1 + D_2 + \ldots + D_n + \ldots,$$

com o que se prova o teorema, visto todos os pontos de (c) pertencerem a um dos conjuntos D_i.

É pois evidente que todo o conjunto não numerável possui pontos de condensação, embora possa dar-se o caso de os não conter todos.

A totalidade dos pontos de condensação forma o núcleo N do conjunto.

22. Suprimindo em (c) os elementos que pertençam a N, o conjunto resultante é numerável, pois não contém nenhum ponto de condensação. Logo, *todo o conjunto se resolve numa infinidade numerável e numa parte ou na totalidade do seu núcleo.*

Os núcleos não são, manifestamente, númeráveis; e um ponto c' de condensação não pode encontrar-se isolado dos outros pontos congéneres.

Se, com efeito, c' fôsse o único ponto de condensação existente no intervalo

$$\left(c' - \frac{1}{n},\quad c' + \frac{1}{n}\right),$$

os elementos de (c) que aí figuram formariam um conjunto numerável [1].

Os núcleos são pois contidos nos seus derivados.

Se, em particular, (c) é fechado, como todo o ponto limite de pontos de condensação é ainda um ponto dessa natureza, o núcleo contém por sua vez o seu derivado, e é, por isso, um conjunto perfeito. *Os conjuntos fechados decompõem-se, portanto, num conjunto perfeito e numa infinidade numerável.*

23. Por meio de uma demonstração análoga à do n.º 21, poderíamos mostrar que todo o conjunto que não contém nenhum elemento do seu derivado é, necessàriamente, numerável.

Logo, *todo o coniunto se resolve no seu derivado (ou em parte, apenas) e num conjunto uumerável.*

§ 5.º

Conjuntos perfeitos e conjuntos contínuos

24. Se, por menor que seja o intervalo (α, β) contido em (a, b), entre α e β houver sempre pontos de um conjunto (c), êste conjunto dir-se há *denso no intervalo* (a, b). Consideremos um conjunto (c), perfeito mas não denso no intervalo (a, b), e seja a' um elemento extranho a (c), mas interior a (a, b).

Como a' é um ponto isolado, existe um intervalo $(a', a' + \varepsilon')$ que não contém elementos c, mas existe também um intervalo $(a', a' + \varepsilon'')$ onde se encontram alguns dêsses

(1) Pode ainda observar-se que se c' pertence a (c) há necessàriamente nesse intervalo outros pontos de condensação pertencentes do mesmo modo a (c).

elementos, aliás, não havendo pontos de (c) entre a' e b, consideraríamos, de preferência, o intervalo (a, a') e não (a, b).

Nestas condições, os números $a' + \varepsilon'$, por um lado, e os números $a' + \varepsilon''$, por outro, formam duas classes contíguas. Num intervalo de que o extrêmo superior seja um número da primeira, não há pontos de (c); tem lugar o contrário, se o extrêmo superior pertence à segunda.

Seja $a' + \varepsilon$ o número de separação destas classes, o qual é, evidentemente, um ponto limite de (c) e, portanto, um elemento dêste conjunto: No intervalo $(a', a' + \varepsilon)$ só o extrêmo superior pertence a (c). Estabelecendo-se da mesma maneira a existência de um intervalo $(a - \delta, a')$, onde $a - \delta$ é o único ponto de (c), poderemos afirmar que todos os pontos do intervalo (a, b) que não pertencem a (c) *são interiores a certos intervalos, cujos extrêmos, sòmente, fazem parte daquele conjunto.*

26. As hipóteses $a' = a$ ou $a' = b$ não modificam sensìvelmente esta conclusão: b, por exemplo, pode terminar superiormente um intervalo em que (c) se não encontra representado e contudo não pertencer a êste conjunto. São duas excepções destituídas de importância.

Estes intervalos não podem ter uma parte comum, porquanto ficariam existindo a dentro dêles pontos de (c). Também não podem ter um extrêmo comum, visto êsse ponto, elemento de (c), ficar dêsse modo isolado.

Logo, os elementos de (c) constituem intervalos completos interiores a (a, b), *intervalos contíguos de* (c) [1].

Como os extremos inferiores dêstes intervalos são pontos isolados, o seu conjunto é numerável, sendo, por isso, também numerável o conjunto dos intervalos contíguos.

(1) Baire. *Fonctions descontinues.*

Logo, *os conjuntos perfeitos, infinidades numeráveis de conjuntos contínuos, são conjuntos contínuos.*

Esta conclusão é absolutamente geral, porque se, (c) fôsse perfeito e denso em (a, b), (c) coincidiria com êste intervalo.

26. A doutrina do número anterior mostra como se podem obter, com tôda a generalidade, conjuntos perfeitos.

Basta suprimir de um dado intervalo (a, b) os pontos interiores a uma infinidade numerável de intervalos sem pontos comuns. Os pontos remanescentes formam um conjunto contínno.

×

27. Os conjuntos formados pelos pontos de uma infinidade de intervalos têm dado lugar a teoremas importantes, entre os quais avulta o chamado *Lema de Borel.*

Consideremos uma infinidade (numerável ou não) de intervalos I, e seja (x) o conjunto formado pelos pontos que lhes são interiores.

Se (x) compreende todos os pontos do intervalo (a, b), incluindo os extremos, é possível, recorrendo apenas aos pontos interiores de um número finito dêsses intervalos, formar um conjunto (x') com a propriedade de (x):

$$(x') \text{ compreende } (a, b).$$

Com efeito, se não fôsse possível, com um número limitado de intervalos, formar um segmento que compreendesse (a, b), não seria também possível, nas mesmas condições, encerrar uma das metades (a_1, b_1) de (a, b), nem uma das metades (a_2, b_2) de (a_1, b_1), etc. Isso equivaleria a afirmar a impossibilidade de encerrar num número finito de intervalos I um intervalo (a_n, b_n) tão pequeno quanto se queira e que converge para um ponto c, interior, por hipótese, a um dos intervalos I, o que é, manifestamente, absurdo.

Existem, pois, certos intervalos I,

$$I_1, \ I_2, \ \dots \ I_k,$$

em número limitado, que determinam um segmento a que a e b são interiores.

A extensão total

$$I_1 + I_2 + \dots + I_k$$

dêsses intervalos privilegiados excede, evidentemente, $b-a$, donde se segue que o mesmo acontece à soma das amplitudes de todos os intervalos I. Por outras palavras, *não é possível encerrar todos os pontos de* (a, b) *numa família de intervalos de amplitude total inferior ou igual a* b — a.

28. Suponhamos agora que o conjunto (x), que compreende (a, b), não é apenas formado pelos pontos interiores aos intervalos I, mas inclui também as extremidades dêsses intervalos (caso em que, portanto, um ponto de (a, b) não é necessàriamente *interior* a algum dêsses intervalos). ¿Que modificações sofre a conclusão relativa à amplitude total dos intervalos I?

Para abreviar, suponhamos que estes intervalos formam uma família numerável

$$I_1, \ I_2, \ \dots \ I_m, \ \dots$$

e aumentemos, nos dois sentidos, cada um dos intervalos I_m de um segmento igual a

$$\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Os novos intervalos $I'_1, I'_2, \ldots I'_n \ldots$ têm a amplitude total

$$\Sigma I_m + \Sigma \frac{\varepsilon}{2^m} = \Sigma I_m + 2\varepsilon$$

e o conjunto formado pelos pontos, que lhes são interiores, compreende (a, b).

Temos, portanto,

$$\Sigma I_m + 2\varepsilon > b - a,$$

o que exige

$$\Sigma I_m \gtreqless b - a,$$

Logo, *se todos os pontos de* (a, b) *pertencem a uma família de intervalos, a amplitude total da família não pode ser inferior a* b — a.

29. ¿Mas poderá acaso ter lugar a igualdade?

A resposta é afirmativa. Construindo, com efeito, a sucessão

$$a = \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots \quad \mu_n, \quad \ldots$$

que tende para o limite a', interior a (a, b), verifica-se fàcilmente que não há em (a, b) nenhum ponto que não pertença a um dos intervalos

$$(a', b), \quad (a, \mu_2), \quad (\mu_2 \mu_3), \quad \ldots,$$

cuja amplitude total é $b - a$.

É porém fácil estudar por completo esta questão, mostrando que, se a igualdade tiver lugar, há, pelo menos, um ponto[1] de (a, b) que, não sendo interior a nenhum

[1] Além de a e b, evidentemente.

dos intervalos I, não é tão pouco extrêmo comum de dois dêsses intervalos.

Tudo se reduz a retomar o raciocínio do n.º 28 notando que, visto a igualdade ter lugar, não é possível, com os pontos de um número finito dêsses intervalos, formar um conjunto que compreenda (a, b). O ponto c, com efeito, não pode ser interior a nenhum dos intervalos I nem tampouco o elemento comum a dois dêsses intervalos. Por outras palavras, há, pelo menos, um ponto (1) diferente de a e de b, que, não sendo interior a nenhum dos intervalos I, não é também extrêmo superior (ou inferior) de nenhum dêsses intervalos.

Pode-se interpretar êste resultado dizendo que é impossível decompor num número ilimitado de intervalos parciais um intervalo (a, b) absolutamente qualquer.

30. As considerações anteriores permitem demonstrar com bastante simplicidade um teorema importante devido a Mr. René Baire.

Seja $f(x)$ uma função definida em (a, b) e δ um número positivo absolutamente qualquer. Se em nenhum ponto do intervalo (a, b) a oscilação de $f(x)$ excede um número ρ, é possível decompor êsse intervalo em partes suficientemente pequenas para que em cada uma delas tenha lugar a desigualdade

(1) $$|f(x')-f(x'')|<\delta+\rho.$$

Sabe-se que a oscilação ρ_x de $f(x)$ no ponto x é o li-

(1) No exemplo anterior êsse ponto é a'. Êste número fecha inferiormente o intervalo (a', b), mas não fecha superiormente nenhuma das subdivisões.

mite para $h=0$ da diferença

$$L(x, h)-l(x, h),$$

entre os limites de $f(x)$ num intervalo de amplitude $2h$ e centro x. Ora, se ρ_x nunca excede ρ, é possível construir à volta de cada ponto um pequeno intervalo em que (1) tenha lugar; porque, se assim não fôsse, a oscilação de $f(x)$ em algum ponto havia de coincidir com $\rho+\delta$ ou exceder esta soma, o que vai de encontro à hipótese de que ela não excede ρ. O intervalo (a, b) encontra-se assim coberto por uma família de intervalos parciais, em cada um dos quais a desigualdade (1) é verificada.

Logo, em virtude do lema de Borel, é possível encerrar êsse intervalo no segmento determinado por um certo número de intervalos privilegiados, o que demonstra o teorema.

Pondo $\rho=0$, obtemos o conhecido teorema de Cantor.

31. Os teoremas de Baire e Cantor são, como é sabido, susceptíveis de uma outra forma.

Designando, com efeito, por ε um número inferior à semi-amplitude do menor dos intervalos I_x correspondentes aos pontos divisórios da decomposição precedentemente obtida, e inferior também à grandeza de qualquer dos intervalos parciais desta decomposição, é evidente que a desigualdade (1) terá lugar desde que seja

$$|x'-x''|<\varepsilon.$$

Porque, se x' e x'' se encontram separados por um ponto divisório, êsses pontos pertencem, por outro lado, ao intervalo I_x relativo a êsse elemento de separação; e não há evidentemente nenhum interêsse na consideração da hipótese contrária.

§ 5.º

Operações sôbre os conjuntos

32. As considerações feitas no n.º 10 envolvem uma definição de soma de conjuntos.

Dá-se, com efeito, o nome de soma dos conjuntos

$$(1) \qquad (c'), \ (c''), \ \ldots \ (c^{(n)}),$$

ao conjunto (c) formado pelos pontos que pertencem a qualquer dos conjuntos parcelares:

$$(C) = (c') + (c'') + \ldots = \Sigma\,(c^{(i)})$$

A soma é finita ou infinita, consoante seja ou não limitado o número dos conjuntos $(c^{(i)})$. Em virtude desta definição, a adição de conjuntos goza, evidentemente, das propriedades associativa e comutativa.

Os conjuntos perfeitos são exemplos de conjuntos somas de infinidades numeráveis de conjuntos.

33. A diferença entre um conjunto (c') e outro conjunto (c'') compreendido no primeiro é, por definição, o conjunto (c) que satisfaz à condição

$$(c) + (c'') = (c').$$

O conjunto diferença é, pois, formado pelos elementos de (c') não representados em (c''). Escreve-se, usualmente,

$$(c) = (c') - (c'');$$

e, para indicar que (c'') é contido em (c'), emprega-se a notação

$$(c'') \leq (c')$$

No caso particular de se tratar da diferença entre o conjunto formado pelos pontos do intervalo (a, b) e um outro conjunto (x) (compreendido nesse intervalo), o conjunto diferença toma o nome de complementar de (x) com relação a (a, b). Representa-se o complementar pela notação

$$C_{ab}(x),$$

ou mais simplesmente,

$$C(x),$$

supondo-se dêste modo, que todos os complementares são relativos a um intervalo invariável, que é inútil, portanto, especificar. Salvo expressa indicação em contrário, os conjuntos que houvermos de considerar serão formados por pontos do intervalo (a, b), e é com relação a êste intervalo que se tomarão os seus complementares.

34. O produto dos conjuntos (1) é o conjunto (c) formado pelos pontos comuns a todos os factores $(c^{(i)})$

$$(c) = (c') \times (c'') \times \ldots = \Pi\,(c^{(i)})$$

A multiplicação de conjunto goza, portanto, das propriedades associativa e destribuītiva.

A propósito da multiplicação de conjuntos, demonstraremos o importante teorema seguinte.

Se todos os conjuntos $(c^{(i)})$ *forem fechados e, além disso,* *foi sempre* $(c^{(i)}) > (c^{(i+1)})$, *o produto* (c) *não pode ser nulo.*

O teorema é evidente se i é finito. Suponhamos então que se trata de uma infinidade numerável de conjuntos.

Tomemos em (c') um ponto c_1, em (c'') um outro ponto c_2, etc. Pelo teorema de Weierstrass, o conjunto

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots$$

admite, pelo menos, um ponto limite c. Êste ponto pertence a todos os conjuntos $c^{(i)}$, visto que é limite da sucessão

$$c_i, \quad c_{i+1}, \quad \ldots$$

formada por elementos do conjunto $(c^{(i)})$.

35. A consideração dos complementares permite deduzir a multiplicação de conjuntos à adição.

Nós temos, com efeito, supondo

$$(x) = (x') \times (x'') \times \ldots,$$
$$c(x) = c(x') + c(x'') + \ldots$$

CAPÍTULO I

Ideas gerais dos fins do século XVIII

§ 1.º

Os integrais indefinidos

36. Nos fins do século XVIII, quando a idea de função se tornara já independente da possibilidade de uma representação analítica, integrar uma função $f(x)$ era ainda obter uma outra função $F(x)$, de que a primeira fôsse a *derivada*, *função prima* ou *primeiro coeficiente diferencial* (1):

$$F'(x) = f(x)$$

A função $F(x)$ tomava, indiferentemente, o nome de *função primitiva* ou *integral indefinido de* $f(x)$, dando-se também êste último nome ao símbolo

$$\int f(x)\, dx,$$

inventado por Leibnitz para a representar, indicando ao mesmo tempo a sua relação fundamental com $f(x)$.

Preponderando nessa época as ideas de Lagrange sôbre a inutilidade de se considerarem funções desprovidas de representação analítica, ninguem se ocupou do problema da existência das funções primitivas em geral, antes se

(1) Veja, por exemplo, Lacroix, Garnier, etc.

lançaram todos, como o haviam já feito os geómetras anteriores, na descoberta de artifícios que permitissem reverter as regras da derivação para tôda a classe de funções representadas analiticamente. Pode afoitamente dizer-se que, ao alvorecer do século XIX, se conheciam já as funções primitivas da maior parte das expressões que sabemos hoje integrar.

37. A função $F(x)$, que se obtinha revertendo as regras da derivação, não encerrava, em geral, nenhuma constante ligada pelo sinal $+$ à expressão analítica que envolvia a letra x; e, quando a tivesse, suprimindo essa constante, não se prejudicava a propriedade característica de função. Derivou daqui uma distinção — aliás pouco generalizada — entre integral indefinido e função primitiva: esta última não devia encerrar nenhuma constante aditiva, reduzindo-se por isso a um integral indefinido particular:

$$(1) \qquad \int f(x)\, d(x) = F(x) + c$$

Em vista da arbitrariedade da constante c, via-se que o problema da integração era de uma grande indeterminação; mas muito poucos geómetras se ocuparam da questão de saber se a fórmula (1) comportaria tôdas as suas soluções. Aqueles que disso curaram resolviam a dificuldade por meio da fórmula de Taylor, como ainda se vê na tradução portuguesa das obras de Francœur: «O teorema de Taylor dá:

$$f(x+h) = f(x) + h y' + \frac{h^2}{2'} y'' + \dots$$

$$F(x+h) = F(x) + h y' + \frac{h^2}{2'} y'' + \dots$$

das quais se tira

$$f(x+h)-F(x+h)=f(x)-F(x)=c;$$

sendo c uma quantidade que não varia, como se vê, pela mudança de x em $x+h$, isto é, uma quantidade constante.

Portanto, as funções primitivas que teem a mesma derivada, não diferem umas das outras senão por causa do valor do termo constante; de sorte que daremos a um integral a forma mais geral que pode ter, ajunctando-lhe uma constante arbitrária».

A grande maioria, porém, dos tratadistas não se ocupou desta questão, sem que se possa atribuir êsse facto à natureza elementar do assunto, porque, por exemplo, Lacroix [1], ao integrar um polinómio, diz que não junta uma constante a cada termo por isso ser o mesmo que juntar no fim uma só constante.

A demonstração de Francœur revela bem a convicção, muito generalizada até há pouco, de que tôda a função tinha derivada. Lá se utilizam, com efeito, as derivadas y'', y''' etc. da função y' que se integrou.

§ 2.º

As ideas de Leibnitz

38. Dissemos há pouco que Leibnitz inventara o símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

para representar qualquer função primitiva de $f(x)$.

---

[1] *Traité du Calcul Différentiel et du calcul Intégral*, pág. 4.

Demoremo-nos um momento com a história desta invenção.

Para Leibnitz, um integral indefinido é a soma de um número ilimitado de parcelas. Leibnitz considera, com efeito, as quantidades variáveis formadas por uma infinidade de acréscimos infinitamente pequenos — de diferenciais — acumulados a partir de uma época determinada (origem) até ao momento em que elas se oferecem à nossa consideração, momento em que a sua soma se designa pelo nome de *valor actual*.

Ora as funções primitivas são quantidades variáveis, que devem, portanto, ser formadas daquele modo.

39. Para determinar a natureza dos acréscimos infinitamente pequenos à custa dos quais se forma a função primitiva, Leibnitz recorre à propriedade característica desta função:

$$\lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

Esta igualdade mostra-lhe, com efeito, que a diferença entre dois valores da função primitiva, quando se torne infinitamente pequena, é igual ao produto de $f(x)$ pelo valor, infinitamente pequeno também, de h. Ora, é precisamente quando a diferença $F(x+h)-F(x)$ se torna infinitamente pequena que ela se considera diferencial de $F(x)$, assim como, decrescendo, h se tornará na diferencial de x. Logo, a diferencial de $F(x)$, — aquilo que é preciso agregar, somar para produzir $F(x)$ é, precisamente, $f(x)\, dx$.

Daqui, pois, o sinal $\int$, degenerescência da inicial da soma, visto que era mister somar; daqui, pois, a palavra integral, visto que $F(x)$ era, realmente, constituída por tôdas as diferenciais.

Eis aqui, parece-nos, embora envoltas ainda em considerações metafísicas, as ideas primordiais da teoria dos *integrais definidos.*

§ 3.º

Os integrais definidos

40. Na época de que nos ocupamos, o integral definido deduz-se da função primitiva ou integral indefinido. Para tornar unívoco o que é múltiplo, determinado o indeterminado, começa-se por *fixar a origem* do integral, o que se faz atribuindo à constante arbitrária c um valor numérico qualquer c'. Se a é o valor de x para o qual é

$$F(a) = -c',$$

vê-se que fixar a origem do integral não é mais do que escolher entre tôdas as funções primitivas de $f(x)$ aquela que se anula no ponto a.

A função, dêste modo determinada, não deixa por isso de ser um integral de $f(x)$, e o seu valor $F(x) - F(a)$ deve considerar-se, segundo as ideas de Leibnitz, formado pela soma de tôdas as diferenciais de $f(x)$, desde a origem a (em que êle é nulo) até ao momento actual x. É portanto o integral das diferenciais de a até x ou, mais simplesmente, o *integral de* a a x. Para precisar o seu valor actual, basta atribuir a x qualquer valor numérico, v. g., b: nada mais restará de variável, de indefinido, e o integral, que abrange agora as diferenciais desde a até b, denominar-se há *integral definido*, de a a b, de $f(x)\,dx$. Fourier representa-o pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

de modo que, por definição, vem

$$(1) \qquad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Os números a e b são, respectivamente, o limite inferior e o limite superior do integral.

41. Os teoremas elementares relativos à soma de integrais, à troca dos limites, à decomposição do intervalo de integração em partes, etc., decorrem imediatamente da fórmula (1), como é evidente, e havia muito eram conhecidos. Nós vamos apenas demonstrar como, do teorema da decomposição do campo de integração, se tiravam ainda nos fins do século XVIII argumentos a favor das ideas de Leibnitz.

Pondo na fórmula de Taylor

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h y' + \frac{1}{2} h^2 y'' + \dots$$

$x = \alpha$, $\alpha + h = \beta$, a igualdade resultante

$$\int_\alpha^\beta y'\, dx = h y'(\alpha) + \frac{1}{2} h^2 y''(\alpha) + \dots$$

permitia dar ao integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\, dx$$

a expressão

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx = {} & (x_1 - a) f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f'(a) + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) + \frac{(b - x_{n-1})^2}{2!} f(x_{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

Ora, como o segundo membro é igual a

$$f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})+S,$$

designando por S a soma dos termos de segunda ordem, terceira ordem, etc., vê-se que o integral proposto só difere de

$$(\alpha) \quad f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

por uma quantidade que tende para zero com as diferenças $x_i - x_{i-1}$, à medida, portanto, que os produtos

$$f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

se vão convertendo em verdadeiras diferenciais. Não se escrevia, certamente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(x_1-a)+$$
$$+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}),$$

mas isso só confirmava as vistas de Leibnitz: a igualdade só viria quando as parcelas fôssem diferenciais e, portanto, em número ilimitado.

42. Antes de terminar, transcreveremos da tradução portuguesa das obras de Francœur uma Nota que se nos afigura extremamente interessante, e vem confirmar o que dissemos sôbre a influência das ideas de Lagrange:

«Esta demonstração só prova que o integral é a soma dos valores da diferencial infinitamente próximos, quando entre os limites de que se trata, a função z não se torna infinita. No entretanto, quando aparecem valores de z, infinitos entre os correspondentes valores reais de x desde a até b, ainda é possível fazer passar x, desde a até b, por valores imaginários, para os quais não seja z infinito; e então ainda tem lugar o teorema, de que se trata. (Veja *A. de l'École Polit.* cahier 18 pág. 320)».

Efectivamente, se não fôra a expressão analítica de $z=f(x)$, ¿como se poderia estender o campo de existência desta função até ao domínio da variável imaginária?

43. Para fechar êste capítulo, duas palavras sôbre a questão das áreas.

Há ainda hoje quem pense ter sido o problema do cálculo das áreas que sugeriu aos geómetras do século XVII a noção de integral.

A nós quer-nos parecer que, com igual fundamento, se poderia atribuir a êsse problema a noção de derivada.

A opinião que, actualmente, maior aceitação encontra é a de que a questão das áreas não teve influência nenhuma na génese da noção de integral. É na idea de função derivada que se deve buscar a origem da noção de integral indefinido, indiscutivelmente anterior à de integral definido (1).

---

(1) L'application la plus simple de la notion d'intégrale est la quadrature des domaines plans. À cause de cette application, on a fait souvent remonter la notion d'intégrale à Archiméde et à la quadrature de la parabole. Il est vrai que beaucoup de quadratures ont été effectuées avant l'introduction du calcul intégrale, mais les géomètres n'attachaient aucune importance particulière aux domaines biens speciaux dont il faut calculer les aires pour avoir des intégrales definies. L'importance de ces domaines n'est apparue qu'après l'introduction de la notion de derivée. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, pag. 7.

CAPÍTULO II

Cauchy, Dirichlet, Riemann, Darboux e Bruno

§ 1.º

As definições de Cauchy

44. Foi sòmente com Cauchy (1789-1857) que o estudo teórico da noção de integral definido entrou num caminho progressivo.

Cauchy querendo, efectivamente, estender a definição de integral às funções que se tornam infinitas no campo de integração, estudou a questão sob um ponto de vista geral, não condicionando de modo algum os resultados das suas investigações à possibilidade de representar analiticamente a função.

45. Supondo, em primeiro lugar, que $f(x)$, por qualquer motivo, se torna descontínua em um só ponto c do intervalo (a, b) de integração, Cauchy conserva ainda o nome de integral definido de $f(x)$, desde a até b, ao limite para $\varepsilon = 0$ da função

$$\varphi(\varepsilon) = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Se não fôssem convergentes os integrais do segundo membro, mas a sua soma tendesse para um limite, Cauchy dava a êsse limite o nome de *valor principal* do integral

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

O eminente geómetra considera em seguida o caso de haver em $(a,\ b)$ um número limitado qualquer de pontos de descontinuïdade, reduzindo-o imediatamente ao anterior, por uma subdivisão criteriosa daquele intervalo.

46. Antes de prosseguir, reflitamos um pouco sôbre a primeira destas definições. Reconhecemos imediatamente que ela envolve a convicção de que as funções contínuas são integráveis, isto é, derivadas de outras funções.

Eis o primeiro facto geral que encontramos no nosso estudo. Não se trata evidentemente, de uma descoberta de Cauchy, pois havia muito se chegara a tal conclusão. Julgando-se, com efeito, que tôda a função contínua dava lugar a uma curva igualmente contínua, e sabendo-se, desde Newton, que a diferencial da área limitada pelas linhas $y=0$, $y=f(x)$, $x=a$, $x=x$, era precisamente a diferencial $f(x)\,dx$, é claro que a integrabilidade das funções contínuas parecia tão evidente como a existência da área, e ninguém a punha em dúvida.

47. A definição de Cauchy representa manifestamente um passo considerável na teoria geral dos integrais definidos. Ela não depende da natureza das singularidades, podendo pois a função tornar-se aqui ou ali infinita ou indeterminada. As inúmeras e importantes aplicações, a que essa definição deu lugar, constituiram de certo modo uma consagração das ideas de Cauchy. Deixou-se de recorrer à mudança de variável ou ao emprêgo das séries para efectuar o cálculo de integrais elementares, como por exemplo,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

diante do qual os geómetras se mostravam indecisos, limitando-se a avaliar o seu valor aproximado (¹).

$$\int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

48. Dirichlet (1805-1859) generalizou a definição de Cauchy, considerando, em primeiro lugar, o caso de o conjunto das descontinuïdades de $f(x)$ admitir um só ponto limite c'. Por definição de ponto limite, nos intervalos $(a,\ c'-\varepsilon)$, $(c'+\varepsilon,\ b)$ há apenas um número limitado de pontos de descontinuïdade e, em virtude da definição de Cauchy, poderão existir os integrais

$$\int_a^{c'-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{c'+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Designando par $\psi(\varepsilon)$ a soma destas funções de ε, Dirichlet escreve, por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon).$$

A esta generalização, seguem-se imediatamente outras igualmente aceitáveis, terminando Dirichlet por concluir que as funções cujos pontos de descontinuïdade formam um conjunto redutível podem, em certos casos (quando existirem determinados limites) ser integráveis.

(¹) Veja-se, por exemplo, Lacroix.

49. A-pesar-de se ter progredido bastante, muito havia ainda que fazer.

As definições de Cauchy, sobretudo a consideração de valor principal de certos integrais definidos, trazendo a conseqüência imprevista, e, até certo ponto, revolucionária, de uma função ser integrável num intervalo, não o sendo numa das suas divisões, deixavam em muitos espíritos a convicção de que a escola de Cauchy ditava arbitràriamente leis no domínio do pensamento, mercê da fraca consistência teoria do novo ramo do Cálculo.

Não se tendo ainda criado um critério geral de integrabilidade, ¿quem sabe até onde iriam as fantasias dos geómetras que, pelo seu indiscutível valor individual, viam, sem nenhuma crítica severa, as suas opiniões pessoais favoràvelmente acolhidas?

§ 2.º

Riemann (1826-1866

50. É neste momento que surge Riemann.

Pensador dos mais profundos, inteligência eminentemente crítica, Riemann aliou a estas qualidades uma outra que raras vezes lhes anda associada: foi um criador, mas um criador fecundo pela extensão e natureza das suas geniais concepções.

Antes de apresentar o seu critério de integrabilidade, Riemann vai dar-nos uma definição precisa, rigorosa de integral definido.

Pondo inteiramente de parte quaisquer hipóteses sôbre a existência da função primitiva daquela que procura integrar, e preocupando-se exclusivamente com os elementos de que dispõe — a função $f(x)$ e o intervalo (a, b) — Riemann retoma, vivificando-as, alargando-as, despindo-as das suas roupagens metafísicas, as velhas ideas do seu compatriota Leibnitz.

O integral definido não será certamente composto por uma infinidade de elementos diferenciais: mas deve ser possível efectuar o cálculo do seu valor aproximado, mediante o emprêgo de somas formadas por parcelas daquela natureza, desde que essas parcelas sejam em número suficientemente grande.

Designando por $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ as amplitudes dos intervalos parciais $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, b)$ em que se decompõe (a, b); e por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ números positivos inferiores à unidade, Riemann forma então as somas S:

$$(S) \quad S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

e dá o nome de integral definido de $f(x)$, desde a até b, ao limite, quando existe, para que essas somas tendem com o decrescer indefinido dos números δ_i.

Nenhuma hipótese, como se vê, sôbre a natureza da função $f(x)$, que êle apenas supõe definida em todos os pontos do intervalo (a, b) de integração; nenhum recurso, nenhuma alusão à existência da função primitiva de $f(x)$. Até êste momento, só se consideravam integráveis as funções que, salvo em pontos excepcionais, fôssem derivadas de funções conhecidas: Daqui em diante, considerar-se hão integráveis tôdas as funções que satisfizerem à definição riemanneana.

51. Aceitando, modificada, a primeira definição de Cauchy para o caso de $f(x)$ se tornar infinita num ponto c do campo de integração, — hipótese em que, manifestamente, as suas somas não poderiam convergir — Riemann regeita tudo o mais (valor principal, generalizações de Cauchy, Dirichlet) e vai conduzir-nos à descoberta de um critério de integrabilidade.

52. Suponhamos que $f(x)$ é integrável, isto é, que as somas S convergem para um limite, quando os números δ_i tendem, de qualquer modo, para zero, e designemos por D_i a oscilação de $f(x)$ em (x_{i-1}, x_i).

Em virtude da arbitrariedade dos números ε, a expressão

$$(\delta) \qquad \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

é o limite superior da diferença entre duas somas quaisquer do tipo S relativas à decomposição que considerámos; designemos agora por Δ o limite superior do conjunto das somas (δ) relativas à decomposição de (a, b) em partes inferiores a d: Δ será uma função de d, com a propriedade

$$\lim_{d=0} \Delta = 0$$

Ora, se s é a soma das amplitudes dos intervalos em que a oscilação de $f(x)$ é superior a um número positivo qualquer σ, virá

$$s\,\sigma \leq \delta_1 \Delta_1 + \delta_2 \Delta_2 + \ldots + \delta_n \Delta_n = \Delta$$

e, portanto,

$$s \leq \frac{\Delta}{\sigma}$$

Logo, devendo Δ tornar-se tão pequeno quanto se queira, segue-se que s deve também convergir, com d, para zero, e, portanto:

Para que a soma S *convirja, quando os números* δ *se tornam infinitamente pequenos, é preciso não sòmente que* f(x) *se conserve finita, mas ainda que a soma total dos intervalos* *em que as oscilações excedem σ, qualquer que seja σ, possa tornar-se infinitamente pequena com* d[1].

53. Vem logo a seguir a preposição recíproca: «*Se a função* f(x) *é sempre finita, e se, com o decrescer indefinido das quantidades δ, a grandeza total dos intervalos, nos quais as oscilações da função excedem uma quantidade qualquer dada σ, pode tornar-se infinitamente pequena, a soma S converge quando todos os números δ tendem para zero*». A demonstração dêste teorema pode considerar-se dividida em duas partes, pois só se torna completa com a publicação de uma Nota, a que adiante faremos referência.

Na primeira, pretende-se mostrar que, para uma mesma decomposição, a diferença entre duas somas S, absolutamente quaisquer, pode tornar-se tão pequena quanto se queira: Se a soma s dos intervalos em que a oscilação ultrapassa σ pode tornar-se, com d, infinitamente pequena, é evidente que a contribuïção dêstes intervalos para a soma (δ), não podendo exceder o produto de s pela maior oscilação de $f(x)$ em todo o intervalo (a qual, por hipótese, é finita), poderá tornar-se menor que tôda a quantidade dada; e, por outro lado, as parcelas provenientes dos outros intervalos dão uma soma inferior a $\sigma(b-a)$. Logo, a soma (δ) pode tornar-se, com d, infinitamente pequena.

54. Vejamos agora a Nota a que atraz aludimos, a qual vem, até certo ponto, completar o raciocínio anterior, mostrando que a diferença entre duas somas S' e S'', não relativas à mesma decomposição, tende ainda para zero, com a amplitude do maior dos intervalos empregados.

---

(1) *Oeuvres mathématiques de Riemann*, pág 242.

Consideremos uma terceira decomposição resultante da sobreposição das anteriores (na qual, figuram, portanto, os pontos divisórios de S' e S''), e seja S a soma correspondente.

A cada elemento [1] δ' de S' correspondem agora vários elementos δ de S, de modo que, qualquer que seja o valor desta soma, a contribuïção que lhe advem dos intervalos contidos em δ' está compreendida entre os limites superior e inferior do termo de S' correspondente ao mesmo intervalo; segue-se daqui que S está também compreendida entre os limites que encerram S'. Como esta conclusão é aplicável a S e S'' (e como a diferença entre os limites de S' pode tornar-se tão pequena quanto se queira, acontecendo o mesmo aos de S''), concluímos que S' e S'' tendem para um limite único, comum.

55. Antes de irmos mais longe na exposição das ideas de Riemann, tentemos apresentar a razão que presidiu à escolha das somas S notàvelmente diferentes das expressões

$$(\sigma) \qquad f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

Parece-nos importante esclarecer êste ponto, porque, querendo Riemann acabar com as arbitrariedades das definições de Cauchy, a escolha das somas (S) deve, de certo modo, ter-lhe sido imposta pela adoção pura e simples das ideas de Leibnitz.

A noção de integral definido, que a todos parecia clara e precisa em virtude da fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

[1] Os δ representam aqui também os intervalos parciais.

tornava-se singularmente vaga, obscura, quando se pretendia adquiri-la sem recorrer às funções primitivas. As ideas de Leibnitz, para quem os integrais eram somas de uma infinidade de parcelas, eram demasiado metafísicas para se prestarem a uma rigorosa tradução analítica: só as séries poderiam considerar-se somas de um número infinito de parcelas, e todos sabiam que as diferenciais não constituíam séries.

56. ¿Onde encontrar, pois, a base da nova teoria? No facto (já o dissemos), por todos aceito, de que os integrais são calculáveis, com qualquer aproximação, por meio das somas (σ). Eis aqui uma afirmação concreta, precisa, de uma clareza insofismável. Riemann aproveitou-a, e se as suas somas (S) são mais gerais do que as expressões (σ), nas quais a função aparece sempre calculada na extremidade inicial das subdivisões, é porque reconheceu a sua perfeita equivalência.

Com efeito, a consideração do integral

$$\int_b^a f(x)\,dx$$

mostra que o integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pode indiferentemente calcular-se por meio das somas

$$f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

ou

$$f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)f(x_2-x_1)+\ldots+f(b)(b-x_{n-1});$$

em virtude destas circunstâncias, Riemann foi, sem dúvida, levado ao estudo das expressões

$$[f(x_1)-f(a)](x_1-a)+[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)+\ldots+$$
$$+[f(b)-f(x_{n-1})](b-x_{n-1}),$$

estudo que, naturalmente, o conduziu à consideração das somas

$$(\delta) \qquad D_1\delta_1+D_2\delta_2+\ldots+D_n\delta_n;$$

tendo aí verificado que a condição

$$\Delta<\delta$$

assegurava simultâneamente a convergência das somas (S) e (σ) para um mesmo limite, Riemann não podia deixar de proceder como procedeu: dar à definição do integral tôda a sua amplitude.

57. ¿Porque se não ocupou Riemann da integrabilidade das funções contínuas?

Para responder a esta interrogação, reproduzamos uma parte do enunciado da sua condição suficiente.

Se a função $f(x)$ é sempre finita, e se, com o descrever indefinido das quantidades δ, a grandeza total dos intervalos, nos quais as oscilações da função excedem uma quantidade qualquer dada σ, pode tornar-se infinitamente pequena, etc... ¿Teria Riemann elementos para atribuir todas estas propriedades às funções contínuas? Indubitàvelmente. Havia muito que Cauchy enunciara a sua definição de continuïdade, traduzida pela fórmula

$$|f(x+h)-f(x)|<\delta,$$
$$|h|<\varepsilon$$

e, à falta de mais profundo conhecimento das propriedades dessas funções, esta desigualdade mostrava-lhe, em primeiro lugar, que $f(x)$ não se poderia tornar infinita num intervalo em que fôsse contínua. Por outro lado, visto que a diferença entre dois valores da função decresce com a amplitude do intervalo que êsses valores determinam, ¿quem poderia duvidar da possibilidade de decompôr o intervalo (a, b) de integração em partes suficientemente pequenas, para que, em cada uma delas, a oscilação de $f(x)$ fôsse menor do que qualquer quantidade?

Nós não podemos, evidentemente, estabelecer desta maneira, em bases rigorosas, a integrabilidade das funções contínuas: Queremos simplesmente mostrar que, há cincoenta anos, se poderia rigorosamente raciocinar assim. O rigor, como a evidência, depende da eterna variável tempo. Nós inclinamo-nos aliás para outra solução. Em nosso juízo, Riemann conhecia o moderno teorema de Cantor, e até alguma coisa mais. Seja, porém, como fôr, nenhuma dúvida resta de que, de uma maneira ou de outra, Riemann estabeleceu a integrabilidade dessas funções.

58. Na sua célebre memória sôbre os desenvolvimentos em série de funções trigonométricas (¹), depois de se ocupar das questões a que nos referimos, Riemann enfrenta, sem transição, a integrabilidade das funções que se tornam infinitas.

Nesta questão, Riemann adopta a extensão de Cauchy, porque o seu critério é manifestamente impotente, mas nem por isso se socorre da função primitiva.

Com efeito, se $f(x)$ é integrável no intervalo $(a, b-\delta)$,

(¹) Veja *Oeuvres*, etc.

por mais pequeno que seja o positivo δ, e se o integral

$$F(\delta)=\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

tem um limite determinado para $\delta=0$, êsse limite será ainda representado pelo símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Nenhuma referência, como se vê, à função primitiva de $f(x)$, porque isso seria particularizar, supor contínua em $(a, b-\delta)$ a função $f(x)$, e não há vantagem nenhuma em proceder dêsse modo.

Riemann, aceitando a definição de Cauchy, concede a estes integrais especiais a propriedade geral dos integrais ordinários: a continuïdade em relação aos limites.

O caso de b representar apenas uma descontinuïdade não lhe oferece nenhum interêsse particular. A função é integrável, porque a condição de integrabilidade é satisfeita, não justificando pois a consideração dêstes pontos nenhuma nova extensão da idea de integral [1].

59. Diante das hipóteses estudadas por Dirichlet, é evidente que Riemann deverá manter o desinterêsse que mostrou já pelas descontinuïdades de Cauchy. O seu critério permite estabelecer imediatamente a integrabilidade de $f(x)$.

Tomemos, por exemplo, o caso de se reduzir a um ponto m o conjunto (x') das descontinuïdades da função.

---

[1] Riemann supunha que $f(x)$ era limitada, visto já ter estudado a hipótese contrária.

Nos intervalos $(a, m-\varepsilon)$, $(m+\varepsilon, b)$, $f(x)$ é integrável. Logo, é possível, decompondo estes intervalos em partes suficientemente pequenas, tornar menor que qualquer quantidade dada a grandeza total s das subdivisões em que a oscilação de $f(x)$ é inferior a δ. E, por conseguinte, em qualquer decomposição do intervalo (a, b) em partes, há-de necessàriamente ter lugar o mesmo resultado, visto ser sempre lícito supor reduzido, pelo menos, a dois o número dos novos intervalos parciais que é mister considerar (aqueles a que m pertence).

Passando pelo caso de (x') ser finito, fàcilmente se prova a integrabilidade de $f(x)$ em todos os casos estudados por Dirichlet.

60. ¿Que acontecerá, porém, quando não seja possível isolar os pontos limites de qualquer derivado (x^k) de (x')?

Êste caso merece a Riemann uma atenção muito particular. O eminente geómetra começa por dar um exemplo destas funções «ainda não consideradas», citando a notável série

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2},$$

onde (nx) representa a diferença entre nx e o inteiro mais próximo, ou zero, caso nx seja igual a um inteiro mais $\frac{1}{2}$.

Estudemos, com Riemann, as singularidades desta função.

Em primeiro lugar, a série é uniformemente convergente, porque, qualquer que seja x, os seus termos são em valor absoluto inferiores aos termos correspondentes da série

$$\sum\frac{1}{n^2}.$$

Por outro lado, como a função (nx) só se torna descontínua quando seja

$$nx = p + \frac{1}{2}$$

ou

$$x = \frac{1}{n}\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{2p+1}{2n},$$

nós podemos, supondo q primo com n, determinar com facilidade os termos da série para os quais

$$x = \frac{q}{2n}$$

é um ponto de descontinuïdade. Vê se, com efeito, imediatamente, que o número

$$m . \frac{q}{2n}$$

só será igual a um inteiro mais um meio quando m seja um múltiplo ímpar de n, pelo que os termos procurados são os que constituem a série

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\left((2k+1)nx\right)}{[(2k+1)n]^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\left((2k+1)nx\right)}{(2k+1)^2}$$

A função $f_1(x)$, se x, crescendo, tende para $\frac{q}{2n}$, tende para

$$f\left(\frac{q}{2n} - 0\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(2k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2n^2}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16n^2},$$

emquanto nesse ponto o seu valor é

$$f_1\left(\frac{q}{2n}\right)=0;$$

se x decresce, vem, anàlogamente

$$f_1\left(\frac{q}{2n}+0\right)=-\frac{\pi^2}{16\,n^2};$$

como

$$f_2(x)=f(x)-f_1(x)$$

seja, nesse ponto, uma função contínua, teremos evidentemente

$$f\left(\frac{q}{2n}-0\right)=f\left(\frac{q}{2n}\right)+\frac{\pi^2}{16\,n^2},$$

$$f\left(\frac{q}{2n}+0\right)=f\left(\frac{q}{2n}\right)-\frac{\pi^2}{16\,n^2}.$$

Em resumo: a função é descontínua para os valores de x que, reduzidos à sua expressão mais simples, têm um denominador par, e nesses pontos a sua oscilação (¹) é igual a $\frac{\pi^2}{8\,n^2}$; nos restantes, em virtude da convergência uniforme da série e da continuïdade dos termos, $f(x)$ é uma função contínua.

61. A-pesar-da disposição dos seus pontos de descontinuïdade (os quais formam ao longo de todo o eixo real um conjunto denso, visto em qualquer intervalo haver sempre números da forma $\frac{q}{2\,n}$), a função $f(x)$ é integrável.

(¹) Riemann dizia variação brusca.

Para estabelecer êste resultado, reproduzamos a demonstração de Riemann:

A função $f(x)$ é finita; além disso, existem, qualquer que seja x, os dois números $f(x-0)$, $f(x+0)$, e o número de variações bruscas que são maiores que uma quantidade dada é sempre finito. Poderemos, por conseguinte, escolher d suficientemente pequeno para que em cada um dos intervalos que não contenham essas variações as oscilações sejam mais pequenas do que σ, e que a grandeza dos intervalos que as contenham seja também tão pequena quanto se queira.

62. Antes de apresentar as considerações que esta demonstração nos sugere, queremos limitar rigorosamente o alcance das afirmações de Riemann.

Lendo o que acima transcrevemos, vê-se que Riemann afirma que, não havendo num intervalo nenhum ponto em que a variação brusca de uma função exceda um número ρ, *é possível decompor êsse intervalo em partes suficientemente pequenas, para que em qualquer delas a sua oscilação seja inferior a todo o número, prèviamente dado, superior a* ρ. O seu raciocínio, com efeito, decorre do modo seguinte:

Tomemos um número M superior a

$$|f(x)|$$

e seja ε um positivo arbitrário. Os pontos em que a variação brusca, excede, por exemplo,

$$\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

são em número limitado e é possível encerrá-los em intervalos parciais de amplitude total inferior a

$$\frac{\varepsilon}{4M};$$

a contribuïção dêstes intervalos para a soma

$$(\Sigma) \qquad D_1 \delta_1 + D_2 \delta_2 + \ldots + D_n \delta_n$$

é, assim, inferior a

$$\frac{\varepsilon}{2};$$

como, nos restantes segmentos de (a, b), as variações bruscas não excedem

$$\frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

é possível decompor êsses segmentos em partes suficientemente pequenas para que em nenhuma delas a oscilação exceda (1)

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Logo, a contribuïção dêstes intervalos para a soma (Σ) será inferior a

$$(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

e essa soma não pode, portanto, exceder ε.

---

(1) É claro que, se a oscilação de $f(x)$ num intervalo é inferior a σ, é porque êsse intervalo não contém nenhum ponto em que a variação brusca exceda σ.

63. Reconstituindo, pois, dêste modo (e parece-nos não haver outro) o pensamento de Riemann, nós somos lògicamente levados à conclusão de que Riemann conhecia o teorema hoje denominado de *Baire*, e, por conseqüência, o seu caso particular, descoberto por Cantor, para as funções contínuas. Adoptando esta conclusão, tem-se a explicação fácil da aparente falta de interêsse de Riemann pelo que respeita à integrabilidade das funções contínuas. Para quem conhece o teorema de Cantor sôbre a continuïdade uniforme, a integrabilidade dessas funções é, com efeito, evidente.

64. Registemos, de caminho, que se acaba de provar a integrabilidade das funções limitadas que admitem apenas um número finito de variações bruscas superiores, em valor absoluto, a qualquer número positivo pràviamente dado.

65. Antes de terminar êste rápido esbôço dos trabalhos de Riemann, mostremos como o ilustre matemático estabeleceu a integrabilidade das funções monótonas, desde que sejam limitadas (1).

Seja $f(x)$ uma função finita (2) que não cresce entre os limites a e b. Fazendo

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b\,,$$

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i\,,$$

$$D_i = f(x_i) - f(x_{i+1})\,,$$

vem

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n = f(a) - f(b)\,.$$

---

(1) *Oeuvres*, pág. 273.

(2) Riemann, como já observámos, emprega termo finito por limitado.

Ora, como, por hipótese, a função $f(x)$ não cresce, (D_i) será precisamente a sua oscilação no intervalo $(x_i,\ x_{i+1})$; por conseqüência, se m é o número dos intervalos em que essa oscilação ultrapassa σ, teremos

$$m\sigma < f(a) - f(b)$$

ou

$$m < \frac{f(a)-f(b)}{\sigma}$$

Logo, se, designando por s a grandeza total dêsses intervalos, supusermos todos os números δ_i inferiores a d, virá

$$s < \frac{f(a)-f(b)}{\sigma}\, d,$$

com o que se prova a integrabilidade de $f(x)$, visto o segundo membro desta desigualdade poder tornar-se menor que todo o número positivo dado ([1]).

Estabelecido êste resultado, Riemann observa que são igualmente integráveis as funções que não passam um número infinito de vezes de uma marcha crescente para uma marcha decrescente ou vice-versa.

§ 3.º

Darboux

66. Embora os trabalhos dêste ilustre geómetra não tenham consideràvelmente concorrido para o desenvolvimento

([1]) Se quisessemos apoiar-nos nos resultados obtidos no estudo da função $\Sigma \frac{(nx)}{n^2}$, bastaria observar que é limitado o número de pontos em que a variação brusca de $f(x)$ excede σ.

da idea de integral definido, são de tal modo interessantes algumas das memórias que a êste respeito escreveu, que nos pareceu conveniente fazer-lhes aqui uma justa, embora breve, referência. Além disso, tem-se ultimamente notado que certos elementos introduzidos por Darboux nos seus trabalhos parecem destinados a um importante papel na teoria das funções de variável real.

Darboux não modifica a definição de Riemann: procura apenas dar uma outra forma à condição necessária e suficiente de integrabilidade.

Resumamos as suas ideas. Considerando uma função $f(x)$, limitada no intervalo (a, b), Darboux dá, respectivamente, os nomes de *somas superiores* e *somas inferiores, relativas à decomposição*

$$a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_{n-1}, \quad b,$$

às expressões

$$S' = L_1(x_1 - a) + L_2(x_2 - x_1) + \dots + L_n(b - x_{n-1})$$

e

$$S'' = l_1(x_1 - a) + l_2(x_2 - x_1) + \dots + l_n(b - x_{n-1}),$$

onde l_{i+1} e L_{i+1} designam, respectivamente, o limite inferior e o limite superior de $f(x)$ no intervalo

$$\delta_i = (x_i, x_{i+1});$$

e, sôbre essas somas, estabelece o teorema seguinte: *As somas superiores* S' *admitem um limite inferior* I', *que, ao mesmo tempo, é o limite de qualquer sucessão*

$$(S') \qquad S'_1, \quad S'_2, \quad \dots \quad S'_n, \quad \dots$$

de somas superiores relativas a intervalos

$$\delta_i^{(1)}, \quad \delta_i^{(2)}, \quad \dots \quad \delta_i^{(n)}, \quad \dots$$

convergentes para zero; anàlogamente, *as somas inferiores admitem um limite superior* I'', *que goza da propriedade*

$$I'' = \lim_{n=\infty} S''_n;$$

além disso, é sempre $I' \geq I''$.

66. Para simplificar a demonstração dêste teorema, suponhamos que a função $f(x)$ é sempre positiva. Esta hipótese é lícita, porque, como $f(x)$ é limitada, é sempre possível determinar uma constante tal que se tenha

$$f(x) + C > 0$$

e tudo se reduz a considerar, em vez da proposta, a função

$$\varphi(x) = f(x) + C$$

Pôsto isto, observemos que a existência do número I' é uma conseqüência do teorema de Weierstrass, visto tôdas as somas superiores serem positivas; do mesmo modo, não podendo nenhuma soma inferior exceder o produto

$$L(b-a)$$

do limite superior de $f(x)$ em (a, b) pela amplitude do intervalo, o conjunto dessas somas admite um limite superior I''.

Sejam agora S' e Σ' duas somas superiores, a segunda das quais relativa à nova decomposição que se obtem subdividindo os intervalos parciais da primeira.

Grupando os intervalos

$$(x_i, x_i'), \quad (x_i', x_i''), \quad \ldots \quad (x_i^{(r)}, x_{i+1}) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n-1)$$

que figuram em ε de modo a reconstituir os intervalos (x_i, x_{i+1}) da primeira, vê-se que a cada termo

$$(1) \qquad L_i(x_{i+1} - x_i)$$

de S' podemos opor a soma

$$(2) \qquad L_i'(x_i' - x_i) + L_i''(x_i'' - x_i') + \ldots + L_i^{(n)}(x_{i+1} - x_i^{(r)})$$

proveniente de Σ'; como esta soma não pode exceder o produto (1), concluímos

$$\Sigma' \leq S'.$$

Da mesma maneira, designando por Σ'' e S'' as somas inferiores correspondentes a Σ' e S', teremos

$$\Sigma'' \geq S'',$$

e, portanto,

$$S' \geq \Sigma' \geq \Sigma'' \geq S''.$$

Estas relações mostram que entre duas somas, uma superior S_α' e outra inferior S_β'', relativas ou não à mesma decomposição, existe sempre a relação

$$S_\alpha' \geq S_\beta''.$$

Designemos, com efeito, por Σ' e Σ'' as duas somas relativas à decomposição que se obtem empregando simultâneamente os pontos divisórios de S_α' e S_β''. Teremos

$$S_\alpha' \geq \Sigma', \quad \Sigma' \geq \Sigma'', \quad \Sigma'' \geq S_\beta''$$

ou

$$S_\alpha' \geq S_\beta''.$$

Resulta daqui, evidentemente,

$$I' \geq I''.$$

Notemos ainda que a diferença entre o produto (1) e a soma (2) não pode exceder

$$(L-l)(x_{i+1}-x_i)=(L-l)\delta_i$$

e que, por conseqüência, se os intervalos de S' forem todos inferiores a δ e representarmos por s o número de intervalos que foram subdivididos na passagem de S' para Σ', a diferença entre estas somas não poderá exceder

$$s\delta(L-l).$$

67. Para estabelecer agora a igualdade

$$\lim_{n=\infty} S'_n = I',$$

mostremos que, dada arbitràriamente uma sucessão (S') e um número positivo ε, a desigualdade

$$S'_n - I < \varepsilon$$

tem sempre lugar, desde que seja $n > n_1$. Com efeito, entre

$$(I) \qquad I \text{ e } I+\frac{\varepsilon}{2}$$

há somas superiores; tomemos arbitràriamente uma delas Σ', e seja $m+1$ o número dos seus intervalos.

Empregando simultâneamente os pontos de Σ' e os de

S'_n, obteremos uma nova soma T'_n, menor que a precedente, situada, por isso, no intervalo dos números (I), e que pode considerar-se obtida pela fragmentação dos intervalos de S'_n por meio dos m pontos de Σ'.

Por conseqüência, a diferença

$$S'_n - T'_n$$

não poderá exceder o produto

$$m\, d_n (L - l),$$

onde d_n designa o maior dos intervalos $\delta_i^{(n)}$ de S'_n, e daqui resulta, em virtude da hipótese

$$\lim_{n=\infty} d_n = 0,$$

que, a partir de certa ordem, S'_n existirá no intervalo dos números

$$T'_n - \frac{\varepsilon}{2}, \quad T'_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

sendo portanto

$$S'_n - I < \varepsilon.$$

Da mesma maneira se trata a questão das somas inferiores, que pode ainda reduzir-se ao problema anterior pela consideração da função

$$K - f(x),$$

onde K é um número positivo convenientemente escolhido.

68. Aos números I' e I'' chamou Darboux integrais *por excesso e por defeito*, respectivamente. É claro que, se a função $f(x)$ fôr integrável, teremos

$$(D) \qquad I' = I'' ;$$

e, reciprocamente, se esta igualdade tiver lugar, as somas (S) de Riemann, compreendidas entre as somas superiores e inferiores correspondentes, não podem deixar de convergir para um limite único, o integral definido de $f(x)$.

Daqui o novo enunciado do critério de integrabilidade:

A condição necessária e suficiente para que f(x) *seja integrável é que sejam iguais os números* I′ *e* I″:

$$I' = I''.$$

Estes números representam-se muitas vezes pelos símbolos

$$I' = \overline{\int_a^b f(x)\,dx}, \quad I'' = \underline{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

69. Reconhece-se, pois, que Darboux apenas consegue dar uma nova forma àquilo que Riemann dissera; mas, como teremos ocasião de ver, a introdução na Análise Matemática dos integrais por excesso e por defeito justifica plenamente esta breve referência ao eminente professor.

Por agora, registemos apenas a aplicação dêsses integrais, feita por Cantor e Jordan, à teoria da medida dos conjuntos.

Seja (x) um conjunto limitado. A função $\varphi(x)$, que é igual à unidade nos pontos de (x) e a zero para todos os outros valores do arguménto, é manifestamente limitada em qualquer intervalo (x_0, X) que contenha o conjunto, e, por conseqüência, existem os dois números

$$\overline{\int_a^b \varphi(x)\,dx}, \quad \underline{\int_a^b \varphi(x)\,dx}$$

Êles são, respectivamente, *a extensão exterior e a extensão interior* do conjunto proposto.

A extensão exterior não é, pois, mais do que o limite inferior do conjunto formado pelas somas das amplitudes dos intervalos δ_i *em que existe pelo menos um ponto de* (x); *e a extensão interior é o limite superior das somas amplitudes dos intervalos formados exclusivamente por pontos de* (x).

Se a função $\varphi(x)$, denominada *característica* de (x), fôr integrável, (x) diz-se *mensurável* e ao valor comum dêsses dois números dá-se o nome de *medida do conjunto.*

São manifestamente mensuráveis e têm por medida zero todos os conjuntos de extensão exterior nula.

70. Uma classe importante de conjuntos de medida nula é a dos chamados *grupos integráveis* (Bois-Reymond).

Um conjunto de pontos forma um grupo integrável se é possível encerrar todos os seus elementos num número finito de intervalos cuja amplitude total se possa tornar tão pequena quanto se queira. É claro que um número finito de pontos forma um grupo integrável, mas, por exemplo, os pontos

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots\ \frac{1}{n},\ \dots$$

formam também um grupo integrável, embora o seu número seja ilimitado.

A idea de grupo integrável levou du Bois-Reymond a dar uma nova forma à condição de integrabilidade riemanneana: *A condição necessária e suficiente para que* f(x) *seja integrável é que, por menor que seja o positivo* ε, *os pontos em que a sua oscilação exceda* ε *formem um grupo integrável.*

A condição é necessária, porque, se $f(x)$ é integrável, a amplitude total dos intervalos em que a sua oscilação excede ε deve poder tornar se tão pequena quanto se queira, e só nesses intervalos poderão encontrar-se os pontos em que a variação brusca da função ultrapassa ε.

E é suficiente. Na verdade, como os pontos em que a oscilação de $f(x)$ excede σ formam um conjunto de extensão exterior nula, a característica dêste conjunto é integrável em (a, b). Daqui resulta que ao número σ corresponde de tal modo um número ε, que, em tôda a decomposição de (a, b) em partes inferiores a ε, a amplitude total das subdivisões que encerram êsses pontos é menor que σ. A função é pois integrável.

71. É ainda a du Bois-Reymond que se deve o importante teorema seguinte:

Tôda a função contínua de funções integráveis é uma função integrável.

Por função contínua de funções integráveis entende-se uma função que, mediante a substituïção dos seus argumentos (as funções integráveis) por variáveis contínuas, se transforma numa função contínua dêsse grupo de variáveis.

Sejam

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots \ \mu_k$$

k funções integráveis no intervalo (a, b) e

$$f(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$$

a função contínua daqueles argumentos. Se f não é contínua num ponto x' do intervalo proposto, alguma das funções μ_i também o não será. Por conseqüência, os pontos em que a oscilação de f é superior a σ são também pontos em que a oscilação de alguma das funções μ_i excede σ'; ora, sendo manifestamente integrável o grupo dêstes últimos pontos, segue-se que f é ainda integrável, Para se reconhecer a importância excepcional desta proposição, basta reflectir sôbre a extensão das suas aplicações: soma, produto, cociente (sob a conhecida reserva), potência, raiz, exponencial, etc.

Nesta proposição *subentende-se expressamente que, emquanto a variável independente se conserva no intervalo de integração, nenhum dos argumentos* μ_i *deve sair do campo de continuïdade da função* f.

§ 4.º

Bruno

72. Acabamos de ver que os trabalhos de Darboux não trouxeram nenhum subsídio novo à teoria dos integrais definidos, e que sòmente algumas investigações modernas têm aproveitado das noções de integral por excesso e por defeito. A forma que êsse geómetra deu à sua condição necessária suficiente de integrabilidade não é de molde a torná-la fàcilmente utilizável, e só razões de ordem não intelectual podem explicar a sua adopção por parte dos autores franceses. A condição de Riemann, pelo contrário, alia à mais genial simplicidade a mais completa eficiência.

Na Universidade de Coimbra, não se adoptou a condição de Darboux: conservou-se a definição de Riemann, e deu-se à condição necessária e suficiente de integrabilidade a sua forma mais natural. Êsse trabalho deve-se exclusivamente ao grande e saüdoso mestre que foi o Doutor José Bruno de Cabedo.

73. Em virtude da definição de Riemann, o integral

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

deve ser um número caracterizado pela propriedade condicionada

$$(\alpha) \qquad \lim_{\delta_i < \varepsilon} \left| \sum_a^b f(x_i + \varepsilon_i \delta_i) \delta_i - I \right| < \delta.$$

Suponhamos então que I exista, e sejam [1]

$$\Sigma f(\alpha_i) h_i, \quad \Sigma f(\alpha_i') h_i'$$

duas somas riemanneanas. Estas somas, quando seja

$$h_i, \; h_i' < \varepsilon$$

satisfazem à desigualdade (α), de modo que teremos

$$(\beta) \qquad |\Sigma f(\alpha_i) h_i - \Sigma f(\alpha_i') h_i'| < 2\delta.$$

Eis o resultado imediato da hipótese da existência do integral I; eis a sua primeira conseqüência necessária. Ainda se não apresentou ao nosso espírito a questão de saber se $f(x)$ é ou não limitada, e não se obtém a condição de Riemann sem o prévio estudo dessa questão; o que nos ocorre, em primeiro lugar, é que, devendo a diferença entre I e as somas de Riemann tender para zero com o decrescer dos intervalos h_i, o mesmo acontecerá certamente, em idênticas condições, à diferença entre duas quaisquer dessas somas.

Uma vez de posse de uma condição necessária, vejamos, como é natural, se ela será também suficiente.

---

(1) Para abreviar, representaremos por um mesmo símbolo h_i os in-intervalos e as suas amplitudes.

Para isso, consideremos uma sucessão de somas riemanneanas

$$(S) \qquad S_1, \; S_2, \; \ldots \; S_n, \; \ldots$$

ao longo das quais os intervalos parciais tendam para zero:

$$h_i^{(n)} < \varepsilon_n,$$

com

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

Como a diferença entre duas somas quaisquer tende, por hipótese, para zero, desde que o mesmo aconteça aos seus intervalos parciais, a sucessão (S) é convergente para um limite S. Dêste limite aproximam-se tanto quanto se queira tôdas as somas de Riemann que satisfaçam à condição relativa aos seus intervalos, porque, em virtude da nossa hipótese, a diferença entre qualquer delas e o termo geral S_n da sucessão precedente tende para zero, e S_n aproxima-se indefinidamente de S. Como êste número S goza das propriedades características do integral, temos

$$S = I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

e, como desejavamos provar, $f(x)$ é integrável.

74. A tradução analítica dêste raciocínio é extremamente símples. Por hipótese, a todo o número positivo $\frac{\delta}{2}$ podémos fazer corresponder de tal modo um número positivo ε', que, sempre que seja

$$h_i, \; h'_i < \varepsilon',$$

tenha lugar a desigualdade

$$\left|\Sigma f(\alpha_i)h_i - \Sigma f(\alpha'_i)h'_i\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Logo, se n fôr igual ou maior que n_1, será, qualquer que seja $p > 0$,

$$h_i^{(n)},\quad h_i^{(n+p)} < \varepsilon'$$

e teremos

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \frac{\delta}{2},$$

donde resulta

$$\left|S - S_n\right| \overline{\gtrless} \frac{\delta}{2}.$$

Por conseqüência, se fôr

$$h_i < \varepsilon'$$

virá

$$|\Sigma f(\alpha_i)h_i - S| \leq |\Sigma f(\alpha_i)h_i - S_{n_1}| + |S_{n_1} - S| \overline{\gtrless} \delta,$$

por onde se vê que S é realmente o número para o qual, com o decrescer dos seus intervalos, tendem as somas de Riemann.

A condição (β) de Bruno é, pois, necessária e suficiente, e julgamos ter de sobejo mostrado que ela se apresenta mais natural e simplesmente do que a de Riemann.

75. Vejamos agora se elas são igualmente uteis. Trataremos, por exemplo, da integrabilidade das funções contínuas.

Esta questão só nos parece símples à luz dos trabalhos de Riemann, porque supozemos conhecido o teorema de Baire, ou pelo menos, o seu caso particular da continuídade uniforme. Adoptando-se o critério de Bruno, a sua solução, que é ainda uma conseqüência do teorema de Cantor, pode obter-se do modo seguinte.

Sejam S e S' duas somas riemanneanas relativas à decomposição de (a, b) em partes h_i e h'_i de grandeza inferior a metade do número ε que figura na desigualdade condicionada de Cantor

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{\delta}{b-a} \cdot \atop |x' - x''| < \varepsilon$$

Decomponhamos novamente (a, b) em partes, empregando conjuntamente os pontos divisórios de S e S' e sejam

$$k_1, \ k_2, \ \ldots$$

os novos intervalos parciais.

Substituindo em S e S', h_i e h'_i pelos seus valores expressos em k_j, a diferença

$$S - S'$$

poderá escrever-se debaixo da forma

$$(\gamma) \qquad \Sigma \left[f(\alpha_n) - f(\alpha'_r) \right] k_j ,$$

visto que em ambas as somas S e S' há uma parcela com o factor k_j. Ora, como $f(\alpha_n)$ multiplica k_j, k_j é uma parte do intervalo h_n; do mesmo modo, k_j é uma parte de h'_r. Logo, como a amplitude dêstes últimos intervalos é inferior a $\frac{\varepsilon}{2}$ e êles têm ainda uma parte comum, a distância

$$\left| \alpha_m - \alpha'_r \right|$$

dos pontos α_m e α'_r é inferior a ε, e teremos

$$\left|S-S'\right| < \Sigma \frac{\delta}{b-a} k_j = \frac{\delta}{b-a}(b-a) = \delta .$$

76. Designando por (x_σ) o conjunto dos pontos em que a oscilação de $f(x)$ excede ou iguala σ, mostremos ainda que só são integráveis as funções para as quais (x_σ) seja um grupo integrável.

Com efeito, se os pontos (x_σ) não podem ser encerrados num número finito de intervalos de amplitude total tão pequena quanto se queira, a desigualdade

$$\Sigma (L_i - l_i) h_i < \delta$$

não poderá manifestamente ter lugar, e o mesmo acontecerá portanto à desigualdade (β) que, supondo

$$h'_i = h_i ,$$

pode aproximar-se indefinidamente desta última.

Se, porém, (x_σ) fôr um grupo integrável, a função $f(x)$ será integrável.

Para estabelecer êste resultado, recordemos, em primeiro lugar, que os grupos integráveis são conjuntos de medida nula, e que, visto a medida dum conjunto ser o valor de certo integral, desde que as subdivisões do intervalo (a, b) sejam suficientemente pequenas, a soma dos intervalos onde haja pontos (x_σ) será menor que todo o número prèviamente dado. Seja então ε a grandeza máxima dos intervalos que se devem empregar para obter a medida de (x_σ),

$$\sigma = \frac{\delta}{3(b-a)},$$

com um êrro inferior a

$$(1) \qquad \frac{\delta}{12(L-l)}.$$

Decompondo de uma maneira determinada (a, b) em partes iguais a $\varepsilon' < \varepsilon$, só num certo número n_1, dessas partes haverá pontos x_σ, e, designando por D o domínio por elas formada, a amplitude total de D será inferior a (1).

Fora de D, não há em (a, b) pontos de x_σ, de modo que, pelo teorema de Baire, decompondo essa região em partes inferiores a ε'', a oscilação de $f(x)$ em cada uma delas será inferior a

$$\sigma + \frac{\delta}{4(b-a)} = \frac{7\delta}{12(b-a)}.$$

Pôsto isto, demos a forma (γ) à diferença

$$S - S'$$

de duas somas quaisquer de Riemann, relativas à decomposição de (a, b) em partes h_i, h_i' inferiores aos números

$$\frac{\varepsilon'}{2}, \quad \frac{\varepsilon''}{2}$$

e consideremos separadamente as parcelas

$$\left[f(\alpha_n) - f(\alpha_i')\right] k_j$$

relativas:

1.º aos intervalos k_j que sejam a parte comum de dois intervalos h_m, h_r' inteiramente compreendidos no domínio D;

2.°, aos intervalos k_j provenientes de subdivisões h_m, h'_r completamente exteriores ao domínio D;

3.°, aos restantes k_j.

As primeiras têm uma soma de valor absoluto inferior a

$$(L-l)\times\frac{\delta}{12(L-l)}=\frac{\delta}{12};$$

a soma das segundas é também, em valor absoluto inferior

$$(b-a)\times\frac{7\delta}{12(b-a)}=\frac{7\delta}{12};$$

quanto às últimas, notemos que o número dos intervalos h_m que têm com D apenas uma parte comum não pode ser maior que $2n_1$, dando-se o mesmo com o número dos intervalos h'_r; de modo que o número de partes k_j que devemos considerar é inferior a $4n_1$, não podendo pois a sua extensão total exceder quatro vezes a amplitude de D:

$$4\times\frac{\delta}{12(L-l)},$$

nem tampouco o valor absoluto das parcelas correspondentes ultrapassar

$$(L-l)\times\frac{\delta}{3(L-l)}=\frac{\delta}{3}.$$

Logo, temos

$$\left|S-S'\right|<\frac{\delta}{12}+\frac{7\delta}{12}+\frac{4\delta}{12}=\delta,$$

sob a única condição

$$h_i,\quad h'_i<\frac{\varepsilon'}{2},\quad \frac{\varepsilon''}{2},$$

o que demonstra a integrabilidade de $f(x)$.

77. Esta demonstração tão simples, que prova, ao mesmo tempo, a integrabilidade das funções contínuas, mostra que a condição (β) de Bruno possui tôda a maleabilidade do critério de Riemann.

Se, acaso, uma ou outra demonstração parece tornar-se mais longa pelo método de Bruno, isso deve-se, em parte, ao facto de não serem dêste eminente professor as demonstrações apresentadas no texto, as quais, certamente, são susceptíveis de maior simplicidade.

Aparte êste factor de apresentação, tudo o mais é favorável ao critério de Bruno: a elegante simplicidade e o inexcedível rigor da demonstração da existência do integral; a maneira decisiva como êle permite tratar o problema da integração, não sendo necessário, como nos trabalhos de Riemann, juntar a cada momento um novo complemento às demonstrações anteriores; tudo concorre, em suma, para dar a esta condição de integrabilidade a importância excepcional que lhe reconhecem todos os professores de Análise da Universidade de Coimbra.

78. Mas onde o critério de Bruno se mostra verdadeiramente insubstituível é na teoria das funções de variável imaginária. Êle é aí único. Separa as funções integráveis das que o não são, prova a integrabilidade das funções contínuas, das séries uniformemente convergentes, e permite, como se faz na Universidade de Coimbra, sem recorrer aos integrais curvilíneos, expor a teoria daquelas funções, sem a converter, como Weierstrass e Mèray fizeram, num estudo exclusivo de séries.

Êste critério admirável que funde numa síntese de excepcional beleza os dois capítulos do Cálculo Integral, torna o nome do Doutor José Bruno de Cabedo digno do respeito e da mais alta consideração intelectual de todos os seus discípulos.

CAPÍTULO III

A generalização Lebesgueana

§ 1.º

Pontos de contacto com a definição de Riemann

79. A origem de qualquer generalização de noções adquiridas encontra-se em regra na necessidade de sistematizar cada vez mais os conhecimentos humanos, fazendo entrar nos limites da aplicabilidade de certas regras alguns casos discordantes.

É geralmente interessante e instrutivo seguir passo a passo a marcha do raciocínio criador, não só porque essa observação mostra amiúde quais as propriedades que serão conservadas após a generalização, mas sobretudo porque, surpreendendo todos os promenores do seu desenvolvimento, adquirimos uma mais perfeita compreensão do seu alcance e entramos na posse de inestimáveis conhecimentos exegéticos.

Infelizmente raro se apresentam as ocasiões dessa natureza. O autor moderno, compendiando apenas os seus trabalhos definitivos, priva em regra o leitor do meio mais simples e natural de compreender a sua obra, pois vai colocá-lo em presença de uma construção inteiriça, as mais das vezes rodeada de considerações artificiais, que só desvantajosamente podem substituir a traça dos primeiros passos no caminho da descoberta.

Os trabalhos de M. Henri Lebesgue sôbre os integrais definidos, tal como se encontram compendiados na sua importante obra intitulada «Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives» enfermam dêste defeito; e, querendo evitar uma girândola de definições preliminares ([1]), quem pretenda expôr essa notável generalização da noção clássica de integral só tem um caminho a seguir: procurar um ponto em que as novas ideas não difiram essencialmente daquelas que vão ser postas de parte, e mostrar, mediante considerações simples, como a observação pormenorizada de certos factos conhecidos poderia conduzir-nos ao limiar de novas conclusões.

É o que faremos.

80. Seja $f(x)$ uma função integrável no intervalo (a, b) e

$$s = \Sigma\, l_i \delta_i, \quad S = \Sigma\, L_i \delta_i$$

as somas de Darboux relativas a $f(x)$ e a uma decomposição absolutamente qualquer dêsse intervalo em partes.

Suponhamos que $f(x)$ seja uma função crescente. Neste caso, os números L_i e l_{i+1} são iguais e, se exceptuarmos o extremo superior, em todos os restantes pontos do intervalo δ_i tem necessàriamente lugar uma das relações

$$(1) \qquad l_i < f(x) < l_{i+1}, \quad f(x) = l_i.$$

De resto, nenhuma destas condições é verificada fora daquele intervalo, de modo que δ_i é precisamente a medida do conjunto

$$(C_i) \qquad C_i[l_i \leq f < l_{i+1}]$$

([1]) Veja Mr. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, classes de Baire.*

formado pelos pontos de (a, b) nos quais $f(x)$ satisfaz a qualquer das relações (1).

Designando essa medida por m_i, nós podemos então dizer que o integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

é o limite comum das somas

$$(\sigma) \qquad s = \Sigma\, l_i m_i, \quad S = \Sigma\, l_{i+1}\, m_i.$$

Como os números

$$l = f(a) = l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_n = f(b) = L$$

decompõem em partes o intervalo

$$(l, L)$$

dos limites de $f(x)$ em (a, b), reconhece-se, em virtude das considerações precedentes, que o integral da função considerada poderia definir-se como *o limite das somas que se obtêm decompondo arbitràriamente o intervalo* (l, L) *em partes* (l_i, l_{i+1}), *e multiplicando o extremo inferior (ou superior) de cada um deles pela medida do conjunto* C_i *correspondente.*

É evidente que esta definição, que denominaremos definição L (de Lebesgue), é ainda aplicável se $f(x)$ é sempre decrescente ou constante, embora neste último caso não haja pròpriamente um intervalo (l, L).

Nós vamos completar êste ponto, mostrando que, no caso de uma função que não muda de marcha senão um número limitado de vezes, a definição L conduz ao mesmo limite que a definição R (de Riemann).

Imaginemos o intervalo (a, b) decomposto em partes (a_j, a_{j+1}) ao longo dos quais $f(x)$ seja constante ou varie sempre no mesmo sentido, e subdividamos ainda em duas partes (a_j, x'_i), (x'_i, a_{j+1}) todos aqueles intervalos parciais no interior dos quais se encontre pelo menos um ponto x'_i do conjunto C_i.

Os intervalos obtidos podem repartir-se do modo seguinte em três classes:

A primeira é constituída pelos intervalos (a_j, a_{j+1}) não subdivididos; pertencem à segunda aqueles intervalos (a_j, x'_i) ou (x'_i, a_{j+1}) que possuem um número limitado de pontos C_i; e a terceira é formada pelos restantes, havendo por conseguinte em cada um dos seus intervalos um número ilimitado de pontos daquele conjunto.

A medida do conjunto formado pelos pontos de C_i que figuram nos intervalos das duas primeiras classes é, manifestamente, zero. Seja (α, β) um intervalo da terceira, e, para fixar ideas, suponhamos que α é o extremo que faz parte de C_i. Se $f(x)$ é constante em (α, β), todo o intervalo figura em C_i; se $f(x)$ é crescente, existe um número $\alpha_1 > \alpha$, tal que todos os pontos do intervalo (α, α_1) pertencem a C_i, não havendo em (α, β) nenhuns outros pontos com esta propriedade, ainda que seja $\alpha_1 < \beta$; finalmente, se a função decresce, há em (α, β) um ponto α_1 que, com α, delimita o intervalo em que se encontram todos os pontos de (α, β) para os quais é $f \geqq l_i$. Logo, os pontos que pertencem conjuntamente a C_i e aos intervalos da terceira classe formam um número finito de verdadeiros intervalos, aos quais só uma das extremidades poderá faltar. Resulta daqui, pois, que o número m_i não é mais do que a soma das amplitudes de certos intervalos, onde um, pelo menos, dos números l_i ou l_{i+1} limita os valores de $f(x)$.

Sendo manifestamente aplicável aos números $m_1, m_2, \ldots$

tudo o que se acaba de dizer a propósito de m_i, é claro que o somatório

$$s = \Sigma\, l_i\, m_i$$

coïncide com uma soma de Riemann convenientemente escolhida, ficando dêste modo demonstrada a proposição que enunciámos.

Tendo verificado a coïncidência das duas definições num campo relativamente vasto, é natural indagar até que ponto elas poderão considerar-se equivalentes, procurando ao mesmo tempo reconhecer se há ou não vantagem em substituir a definição primitiva pela definição *L.*

81. Se, para estudar um caso particular, se supõe que $f(x)$ seja a característica $\varphi(x)$ [n.º 69] do conjunto (x) compreendido em (a, b), o integral rimanneano

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

é, como se sabe, a medida de (x).

Ora, tratando-se de uma generalização, $\varphi(x)$ deve ser integrável pelo segundo critério, dando ainda o integral correspondente a medida daquele conjunto. Logo, a não ser que essa generalização não interêsse ás funções que só tomam os valores zero e um (características), não é possível generalizar a definição de integral sem tornar mais ampla a definição de medida.

Nós vamos já ver que é impossível alargar a definição de integral evitando ao mesmo tempo tôda a repercussão sôbre as funções características: portanto, *se, como a definição* L, *se pretende obter uma generalização, é mister, antes de mais nada, alargar a definição de medida,* sem a qual não se podem construir as somas (σ).

Seja $f(x)$ uma função limitada e φ_i a característica do conjunto C_i, definido no n.º 80. Fazendo

$$(1) \qquad F(x) = \sum_1^n l_i \varphi_i(x),$$

a diferença entre as funções $f(x)$ e $F(x)$ não excede nunca o maior dos números

$$l_2 - l_1, \quad l_3 - l_2, \quad \ldots \quad l_n - l_{n-1},$$

e poderá, por isso, tornar-se menor que qualquer quantidade dada.

É, pois, possível construir, com funções análogas a F, uma série uniformemente convergente

$$F_1 + (F_2 - F_1) + \ldots + (F_n - F_{n-1}) + \ldots$$

precisamente igual a $f(x)$.

Convencionemos agora, para abreviar a exposição, dizer que a função $f(x)$ é integrável R, ou L, conforme seja integrável pelo critério de Riemann, ou segundo a definição (L).

Se $f(x)$ é integrável L, as funções φ_i também o são, pois devem existir os números m_i; ora, como os dois critérios não afectam diferentemente as funções características, essas funções, e, portanto, F são integráveis R. Logo, visto que tôda a série uniformemente convergente de funções integráveis R é uma função integrável R, $f(x)$ é integrável L e R, e não há pois nenhuma generalização.

§ 2.º

A mensurabilidade dos conjuntos

82. Demonstrada, como acabamos de ver, a necessidade de tornar mais ampla a definição de medida, devemos antes de mais nada assentar na escolha do princípio que deve nortear essa generalização, atendendo sobretudo à conveniência de se conservarem as propriedades fundamentais da medida de Jordan:

1) A medida é um número sempre positivo ou nulo;

2) A medida da soma de dois conjuntos é a soma das medidas dêsses conjuntos, se não há pontos comuns;

3) A medida do conjunto formado por todos os pontos de um intervalo (a, b) é a amplitude, positiva ou nula, $b-a$ dêsse intervalo.

4) A medida do conjunto complementar de (x) em (a, b) é o complemento para $b-a$ da medida de (x).

Tôdas estas propriedades são com efeito conseqüência da definição de medida dada no n.º 36.

A primeira resulta do facto de não ser nunca negativa a característica φ de um conjunto e de se supor sempre $b \geq a$.

Nestas condições o integral de Riemann

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

não é nunca negativo.

A segunda é uma conseqüência da aditividade dos integrais riemanneanos e de a característica do conjunto soma, quando não haja pontos comuns, coïncidir com a soma das características dos conjuntos parcelares.

A terceira decorre imediatamente da igualdade

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b (1-\varphi)\,dx = b - a\,.$$

Atendendo à conveniência de se conservarem estas quatro propriedades fundamentais e à circunstância de ser a segunda a única que comporta uma generalização útil, nós devemos, por agora, se adoptarmos como princípio o critério da utilidade, limitar-nos a substituir a propriedade (2) por outra mais geral.

Seguindo M. Émile Borel, estabeleceremos que a medida deverá gozar da propriedade aditiva generalizada expressa pelo enunciado 2′), que substituirá 2):

2′) A medida de um número finito ou de uma infinidade numerável de conjuntos que não têm dois a dois nenhum ponto comum é a soma da série das medidas dos conjuntos parcelares.

A nova definição deverá pois atribuir à medida as propriedades 1), 2′), 3), 4), e porventura outras ainda, se estas não forem julgadas suficientemente características.

83. Encerremos de qualquer modo num número finito ou numa infinidade de intervalos todos os pontos de um conjunto (x) compreendido em (a, b).

A soma ou série das amplitudes dêsses intervalos é um número σ essencialmente positivo, e o conjunto (σ) admite necessàriamente um limite inferior positivo ou nulo. Êste limite não é nunca maior do que a extensão exterior $e_e(x)$ do conjunto dado, visto em (σ) existirem todos os elementos que figuram no conjunto de que $e_e(x)$ é limite inferior. Seguindo Mr. Lebesgue, dar-lhe-hemos o nome de *medida exterior* de (x), e a representação simbólica

$$m_e(x)\,.$$

À diferença positiva ou nula,

$$m_i(x) = b - a - m_e[c(x)]$$

daremos também o nome de *medida interior* de (x).

Qualquer número que faça parte do conjunto limitado superiormente por $e_i(x)$ representa a diferença entre $b - a$ e a soma de intervalos que encerram completamente $C(x)$. Logo, como esta última soma não é nunca inferior a $m_e\, C(x)$, temos

$$e_i(x) \overline{<} m_i(x).$$

Imaginemos agora (¹) que todos os pontos de (x) se encontram encerrados numa família de intervalos α e os de $C(x)$ em intervalos (β).

Em virtude do teorema de Borel, virá

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta \overline{>} b - a,$$

e, sucessivamente,

$$m_e(x) + m_e[C(x)] \overline{>} b - a,$$

$$m_e(x) \overline{>} b - a - m_e[C(x)] = m_i(x).$$

Teremos, assim, em resumo

$$e_i(x) \overline{<} m_i(x) \overline{<} m_e(x) \overline{<} e_e(x).$$

Mostremos agora que, qualquer que seja a sua definição, tôda a medida que goze das propriedades fundamentais 1), 2'), 3), 4), está necessàriamente compreendida entre m_i e m_e.

(¹) Veja *Leçons sur l'intégration*, pág. 106.

Resulta, em primeiro lugar, de 1), 3), 4), que a medida de um conjunto não pode exceder a amplitude de qualquer intervalo que contenha todos os seus pontos; por conseguinte, em virtude de 2'), essa medida não poderá exceder a soma das amplitudes de quaisquer intervalos (em número finito ou infinito) que encerrem todos êsses pontos.

Em suma,

$$m(x) \overline{\gtrless} m_e(x).$$

Mas, por outro lado, de

$$m(x) = b - a - m[C(x)],$$

deduz-se

$$m(x) \underline{\gtrless} b - a - m_e[C(x)] = m_i(x).$$

Logo, teremos

$$(a') \qquad e_i \overline{\gtrless} m_i \overline{\gtrless} m \overline{\gtrless} m_e \overline{\gtrless} e_e.$$

Decorre destas relações uma conseqüência de extrema importância: quando os números $m_i(x)$ e $m_e(x)$ sejam iguais, só de uma maneira é possível, sem prejuízo das propriedades fundamentais, definir a medida do conjunto (x). Teremos, necessàriamente, com efeito, que fazer

$$m(x) = m_i(x) = m_e(x).$$

Em particular, a medida dos conjuntos mensuráveis J será a medida de Jordan, visto ser

$$e_i(x) = e_e(x).$$

Em virtude destas circunstâncias, a definição de medida não comportará nenhuma indeterminação, se nos limitarmos à consideração dos conjuntos para os quais os números m_i e m_e sejam idênticos. Daremos, pois, o nome de *conjuntos mensuráveis aos conjuntos que satisfizerem a essa condição, e a medida dum conjunto mensurável será o valor comum dos números* m_i *e* m_e.

84. Vamos agora verificar se efectivamente a medida definida dêste modo goza das propriedades fundamentais.

Em primeiro lugar, a medida não pode ser negativa, porque ela não é inferior a $e_i(x)$; e a medida de um intervalo (com ou sem as extremidades) é ainda a sua amplitude, visto tratar-se de um conjunto mensurável J.

O complementar de um conjunto mensurável é também mensurável, porque as igualdades

$$m_e[C(x)] = b - a - m_i(x),$$
$$m_i[C(x)] = b - a - m_e(x)$$

dão, com efeito,

$$m_e[C(x)] = m_i[C(x)] = b - a - m(x).$$

Demonstremos, finalmente, que a medida goza da propriedade 2').

Seja (1) (x) a soma dos conjuntos mensuráveis

$$(x_1),\quad (x_2),\quad \ldots\quad (x_n),\quad \ldots,$$

que supomos compreendidos em (a, b) e sem pontos comuns dois a dois.

Encerremos os pontos de (x_i), $(i = 1, 2, \ldots)$ e os do seu complementar (y_i) em duas famílias de intervalos α_i^n e β_i^n,

(1) *Leçons sur l'intégration*, pág. 107.

respectivamente, operando porém de tal modo que a diferença

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\alpha_i^n+\beta_i^n\right]-(b-a),$$

representativa da amplitude total dos segmentos comuns[1] aos α_i^n e β_i^n, seja inferior a ε_i, e a série

$$\Sigma\,\varepsilon_i$$

convergente e de soma ε.

Teremos, em particular,

$$(\gamma_1) \qquad \Sigma\,\alpha_1^n+\Sigma\,\beta_1^n<b-a+\varepsilon_1\,.$$

Além disso, será sempre

$$(\delta) \qquad m(x_i)\leqq\Sigma\,\alpha_i^n\leqq m(x_i)+\varepsilon_i\,,$$

porquanto

$$b-a-\Sigma\,\beta_i^n\leqq m(x_i)\,.$$

O conjunto (y_1) contém (x_2). Logo, os intervalos α_2^n coïncidirão, total ou parcialmente, com alguns intervalos β_1^n, e o conjunto (x_2) encontrar-se há encerrado nos segmentos[2] $\alpha_2'^s$ comuns àqueles intervalos. Havendo também pontos comuns (y_1) e (y_2), haverá igualmente segmentos $\beta_2'^k$ comuns aos intervalos β_1^n e β_2^n.

Se $\alpha_2'^s$ e $\beta_2'^k$ têm segmentos comuns, o mesmo se dá com α_2^n e β_2^n, e a grandeza das partes coïncidentes não poderá

---

(1) Ou exteriores a (a, b).

(2) Considera-se o ponto como caso particular do segmento ou do intervalo.

exceder ε_2, Teremos, assim,

$$(\gamma_2) \qquad \Sigma \alpha_2'^s + \Sigma \beta_2'^k < \Sigma \beta_1^n + \varepsilon_2 .$$

O conjunto (x_3) está compreendido nos intervalos $\beta_2'^k$, porque um ponto dêsse conjunto pertence às duas famílias β_1^n e β_2^n. Logo, há segmentos $\alpha_3'^s$, comuns a α_3^n e $\beta_2'^k$, que encerram por completo (x_3).

Anàlogamente, como há pontos comuns às três famílias β_1^n, β_2^n, β_3^n, haverá também pontos que fazem parte dos intervalos $\beta_2'^k$ e β_3^n e, portanto, segmentos $\beta_3'^k$ comuns a estas duas últimas famílias de intervalos.

Como anteriormente, a amplitude das partes coïncidentes em $\alpha_3'^s$ e $\beta_3'^k$ não excede ε_3, e teremos

$$(\gamma_3) \qquad \Sigma \alpha_3'^s + \Sigma \beta_3'^k < \Sigma \beta_2'^k + \varepsilon_3 .$$

Os intervalos $\beta_3'^k$ contêm (x_4).

De um modo geral, há segmentos $\alpha_i'^s$ que encerram (x_i) e são comuns às famílias α_i^n, $\beta_{i-1}'^k$ e segmentos $\beta_i'^k$ comuns às famílias $\beta_i^{(n)}$ e $\beta_{i-1}'^k$. *Os intervalos ou segmentos* $\beta_i'^k$ *contêm* (x_{i+1}) *e a família* $\beta_{i+1}'^k$.

Logo encerram também os intervalos $(\alpha_{i+p}'^s)$, $(p=1, 2, \ldots)$.

Teremos, ainda,

$$(\gamma_i) \qquad \Sigma \alpha_i'^s + \Sigma \beta_i'^k < \Sigma \beta_{i-1}'^k + \varepsilon_i ,$$

visto a amplitude das partes coïncidentes de $\alpha_i'^s$ e $\beta_i'^k$ não poder exceder ε_i.

Os diferentes intervalos.

$$\alpha_1'^s = \alpha_1^s, \quad \alpha_2'^s, \quad \ldots \quad \alpha_n'^s, \quad \ldots \quad (s=1, \ldots n, \ldots)$$

formam uma infinidade numerável e encerram por completo (x). Logo, a sua amplitude total σ, se existir, limitará superiormente a medida exterior de (x):

$$(1) \qquad m_e(x) \leqq \sigma .$$

O número σ existe, com efeito. Somando ordenadamente as desigualdades $\gamma_1)$, $\gamma_2)$, ..., vem

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_i'^s\right] = \sigma \leqq b - a + \varepsilon .$$

Por outro lado, em virtude de (δ), será

$$(2) \qquad m(x_i) \leqq \Sigma\, \alpha_i'^s \leqq m(x_i) + \varepsilon_i ,$$

e daqui tiramos

$$m_e(x) \leqq \Sigma\, m(x_i) + \varepsilon$$

ou

$$(3) \qquad m_e(x) \leqq \Sigma\, m(x_i) .$$

Determinemos agora uma desigualdade de sentido contrário. Para isso, observemos, antes de mais nada, que todo o ponto que pertença a $C(x)$ pertence igualmente a um dos intervalos $\beta_i'^k$.

Havendo, com efeito, em cada uma das famílias $\beta_1'', \ldots \beta_i''$ um intervalo que contem êsse ponto, êle há-de necessàriamente encontrar-se num dos segmentos comuns àquelas famílias, isto é, num dos intervalos $\beta_i'^k$. A amplitude total $\Sigma\, \beta_i'^k$ dêstes intervalos dá-nos assim um limite superior de $m_e[C(x)]$, e, portanto, um limite inferior de $m_i(x)$.

Calculemos pois essa amplitude total.

Consideremos, em primeiro lugar, os intervalos $\beta_i'^k$ (ou fragmentos) exteriores a todos os intervalos das diferentes famílias

(I) $\qquad (\alpha_1'^{n}),\ (\alpha_2'^{n}),\ \ldots\ (\alpha_i'^{n}),\ \ldots$

Êles representam as lacunas deixadas em (a, b), quando daqui se retiram todos os intervalos (I). A sua amplitude total não poderá por isso exceder a diferença

$$(b-a)-\sigma.$$

Passando a considerar os restantes, observemos que todo o segmento comum à família

(I_h) $\qquad (\alpha_h'^{n}) \quad (h < i,\ n = 1, 2, \ldots)$

e aos intervalos $\beta_i'^{k}$, sendo também comum a (I_h) e aos intervalos $\beta_h'^{k}$, não pode exceder ε_h. A soma dos intervalos $\beta_i'^{k}$ que tem partes comuns com as primeiras i famílias (I) é, pois, inferior a

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i < \varepsilon;$$

como $\beta_i'^{k}$ contem os restantes segmentos

(I') $\qquad (\alpha_{i+1}'^{n}),\ \ldots,$

e nada mais possui, a amplitude total dêsses intervalos, $\sum_{k=1}^{k=\infty} \beta_i'^{k}$ não pode exceder

$$(b-a)-\sigma+\varepsilon+\varepsilon,$$

porque os elementos (I') formam o resto de uma série convergente.

Por maior razão teremos, pois,

$$(4) \qquad m_e[C(x)] \overline{<} b - a - \sigma$$

ou, (1),

$$m_e[C(x)] \overline{<} b - a - m^e(x) .$$

Logo,

$$m_e(x) \overline{<} (b-a) - m_e[C(x)] = m_i(x) ,$$

isto é,

$$m_e(x) = m_i(x) ,$$

e o conjunto soma é mensurável.

Tirando-se de (1) e (2)

$$m_e(x) \overline{<} \sigma \overline{<} \Sigma\, m(x_i) + \varepsilon$$

e de (4) e (2)

$$m_i(x) = (b-a) - m_e[C(x)] \overline{>} \sigma \overline{>} \Sigma\, m(x_i) ,$$

teremos

$$m(x) = m_i(x) = m_e(x) = \Sigma\, m(x_i) .$$

85. Antes de regressar ao estudo da integrabilidade, registemos algumas propriedades importantes da medida, de que nos serviremos adiante.

Mostremos, em primeiro lugar, que, embora haja pontos comuns, a soma de uma infinidade numerável de conjuntos mensuráveis é ainda um conjunto mensurável.

Retomemos os conjuntos e as construções do número anterior e designemos por (x'_2) o conjunto formado pelos pontos de (x_2) que não pertencem a (x_1); por (x'_3) o conjunto deduzido de (x_3) pela supressão dos pontos comuns à soma $(x_1) + (x'_2)$, etc.

O conjunto (x'_2) é mensurável. Com efeito, os seus pontos encontram-se todos nos intervalos $\alpha_2'^{s}$, comuns às famílias α^{n}_{2} e β^{n}_{1}, porque pertencem a (x_2) e a (y_1); os pontos do seu complementar, êsses, se figuram em (x_1), encontram-se nos intervalos α^{n}_{1}; se figuram em (y_1), pertencem a β'^{k}_{2}. Logo, teremos

$$m_e\left(x'_2\right) \overline{<} \Sigma\, \alpha'^{s}_{2}\,,$$

$$m_i\left(x'_2\right) = b - a - m_e\, C\left(x'_2\right) \overline{>} b - a - \Sigma\, \alpha^{n}_{1} - \beta'^{k}_{2}\,,$$

donde

$$m_e\left(x'_2\right) - m_i\left(x'_2\right) \overline{<} \Sigma\, \alpha'^{s}_{2} + \Sigma\, \alpha^{n}_{1} + \beta'^{k}_{2} - (b - a).$$

Os segmentos comuns a α'^{s}_{2} e α^{n}_{1}, ou a estes últimos intervalos e a β'^{k}_{1}, são também comuns a β^{n}_{1} e α^{n}_{1}; os que pertencem simultâneamente a α'^{s}_{2} e β'^{k}_{2} pertencem também a β^{n}_{1} e α^{n}_{2}. Logo, como a amplitude total destas partes comuns pode supor-se menor do que qualquer positivo dado, vem

$$m_e(x') = m_i(x')\,.$$

Atendendo à igualdade

$$(x_1) + (x_2) = (x_1) + \left(x'_2\right),$$

e ao facto de a soma do segundo membro ser mensurável, por não haver pontos comuns nos conjuntos parcelares, temos

$$m\left[(x_1) + (x_2)\right] = m\left[(x_1) + \left(x'_2\right)\right] = m\,(x_1) + m\left(x'_2\right)\cdot$$

O conjunto $\left(x'_3\right)$ é mensurável, visto encontrar-se com relação a (x_3) e $(x_1) + (x_2)$ na mesma situação em que estava $\left(x'_2\right)$ com respeito a (x_2) e (x_1). Todos os conjuntos

(x'_1), (x'_2), ... são portanto mensuráveis e não possuem dois a dois nenhum ponto comum.

Logo, em virtude da igualdade

$$(x) = (x_1) + (x_2) + \ldots + (x_n) + \ldots = (x_1) + (x'_2) + \ldots + (x'_n) + \ldots,$$

(x) é mensurável e a sua medida é, precisamente,

$$\Sigma\, m(x'_i), \quad \left[(x_1) = (x'_1)\right].$$

Atendendo a que a multiplicação, infinita ou finita, se reduz à adição por meio dos complementares, concluímos que a parte comum a um número finito ou a uma infinidade numerável de conjuntos mensuráveis é ainda um conjunto mensurável.

Achemos, para terminar, a medida do produto, no caso de cada factor encerrar o seguinte (de índice imediatamente superior).

Da igualdade conhecida

$$C(x) = C[(x_1)(x_2)\ldots(x_n)\ldots] = C(x_1) + \ldots + C(x_n) + \ldots,$$

tiremos

$$m\,C(x) = m[C(x_1) + \ldots + C(x_n) + \ldots] = \lim_{n=\infty} m[C(x_1) + \ldots + C(x_n)].$$

Ora, se é sempre $(x_i) > (x_{i+1})$, todos os conjuntos.

$$C(x_1), \quad \ldots \quad C(x_n),$$

se encontram em $C(x_n)$, e nós temos

$$(5) \qquad m\,C(x) = \lim_{n=\infty} m\,C[x_n],$$

e, portanto,

$$(b-a)-m\,C(x)=\lim_{n=\infty}[(b-a)-m\,C(x_n)]$$

ou seja

$$m(x)=\lim_{n=\infty} m(x_n)\,. \tag{6}$$

Logo, atendendo também a (5), a medida do produto dos conjuntos de uma sucessão monótona ([1]) é o limite para $n=\infty$ da medida do conjunto de índice n.

§ 3.º

As funções mensuráveis

86. Generalizada, emfim, a noção de medida e demonstradas as propriedades fundamentais do número que lhe corresponde, retomemos o estudo da integrabilidade.

Devendo o integral de $f(x)$ ser dado pelo limite comum das somas

$$s=\Sigma\, l_i m_i, \quad S=\Sigma\, l_{i+1} m_i\,,$$

onde m_i representa a medida do conjunto

$$(C_i)=C_i[l_i \overline{\leqq} f(x)<l_{i+1}]$$

formado pelos valores de x para os quais a função satisfaz a uma das condições

$$l_i<f(x)<l_{i+1}, \quad f(x)=l_i\,,$$

([1]) Uma sucessão de conjuntos (x_n) é monótona, se é sempre $(x_n) \overline{\geqq} (x_{n+1})$ ou $(x_n) \overline{\leqq} (x_{n+1})$.

é claro que a definição L só poderá aplicar-se às funções para as quais todos os conjuntos C_i sejam mensuráveis, quaisquer que sejam os números l_i. As funções que gozarem destas propriedades serão denominadas *funções mensuráveis*.

Elas são tôdas integráveis L, quando limitadas.

Com efeito, para essas funções, a diferença

$$S-s$$

das somas σ tende para zero com a maior das diferenças $l_{i+1}-l_i=\delta_i$, porque os conjuntos C_i não têm dois a dois nenhuma parte comum e a sua soma é o intervalo (a, b):

$$S-s=\Sigma(l_{i+1}-l_i)\,m_i<\delta\,\Sigma m_i=\delta\,(b-a).$$

E, por outro lado, a sucessão absolutamente qualquer

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots \quad s_n, \quad \ldots,$$

onde, de um modo geral, s_n designa uma soma do tipo s relativa a intervalos (l_i, l_{i+1}) inferiores a ε_n, tende para um limite determinado quando n aumenta indefinidamente. Supõe-se, é claro, $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon_n=0$.

Decomponhamos o intervalo (l, L) por meio do emprêgo simultâneo dos números $l_i^{(n)}$ de s_n e $l_i^{(n+p)}$ de s_{n+p}, os quais na sua ordem natural designaremos por

$$l=l'_1, \quad l'_2, \quad \ldots$$

Estes números dão lugar a conjuntos C'_r, análogos a C_i, e é evidente, visto não haver pontos comuns em quaisquer deles tomados dois a dois, que poderemos substituir as medidas dos conjuntos

$$C_i^{(n)}\left[l_i^{(n)} \leqq f(x) < l_{i+1}^{(n)}\right], \quad C_k^{(n+p)}\left[l_k^{n+p} \leq f(x) < l_{k+1}^{n+p}\right]$$

pela soma das medidas de um certo número de conjuntos C_r'. Por conseqüência, designando por m_r' a medida de

$$C_r'\left[l_r' \leqq f(x) < l_{r+1}'\right],$$

podemos também dar a forma

$$\sum\left[l_i^{(n)} - l_k^{(n+p)}\right] m_r'$$

à diferença $s_n - s_{n+p}$, o que nos permite concluir

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon_n (b-a),$$

porquanto $C_i^{(n)}$ e $C_k^{(n+p)}$, tendo em comum os pontos de C_r', não podem, em conjunto, possuir pontos que dêem para $f(x)$ uma oscilação superior a $\varepsilon + \varepsilon_{n+p}$.

E, em suma, a demonstração do n.º 75 que mostra que *tôdas as funções mensuráveis limitadas são integráveis* L.

O limite da sucessão (1) é manifestamente o limite de qualquer outra nas mesmas condições, visto termos, de facto, acabado de provar que a diferença entre duas somas absolutamente quaisquer s e s' tende para zero, com o maior dos intervalos (l_i, l_{i+1}), (l_i', l_{i+1}').

87. Estes resultados são porém absolutamente estéreis, se não forem completados por um critério simples que decida da mensurabilidade da função $f(x)$, ou pela enumeração de largas classes de funções que gozem dessa propriedade.

É desta questão que nos vamos ocupar agora, provando em primeiro lugar o teorema seguinte:

A condição necessária e suficiente para que f(x) *seja mensurável é que, quando exista, seja também mensurável o conjunto formado pelos pontos de* (a, b) *onde tenha lugar a desigualdade*

$$f(x)>A,$$

qualquer que seja A.

A condição é necessária, porque:

1.°, se fôr $A \geqq L$ ou $A<l$ o conjunto não existe, ou se reduz a (a, b).

2.°, se fôr $l<A<L$, o conjunto proposto é mensurável, por ser complementar de

$$[f \leqq A],$$

que é também mensurável, como produto dos elementos da família monótona

$$\left[l \leqq f < A+\frac{1}{n}\right];$$

3.°, se, finalmente, fôr $A=l$, o conjunto considerado é a parte comum da família monótona

$$\left[l<f \leqq l+\frac{1}{n}\right].$$

A condição enunciada é também suficiente.

Em primeiro lugar, como complementar de

$$[f>A'],$$

o conjunto

$$[f \gtrless A']$$

é mensurável.

Daqui resulta que é também mensurável o conjunto

$$\left[A' - \frac{1}{n} < f \leq A'\right]$$

cujo limite [parte comum da família] é

$$[f = A']$$

e, portanto, todos os conjuntos

$$[f = A'] + [f > A'] = [f \geqq A'],$$

$$[f < A'] = C[f \geqq A'],$$

$$(A) \qquad [A_1 \gtrless f < A_2]$$

são mensuráveis. Como (A) inclui manifestamente todos os conjuntos (l_i), fica demonstrada a nossa preposição.

Em virtude destas considerações, não há inconveniente em adoptar como propriedade característica das funções mensuráveis a mensurabilidade do conjunto

$$[f > A].$$

Desta maneira poder-se-ia estender a mensurabilidade às funções não limitadas [1]. Nós porém, salvo referência em contrário, cingir-nos hemos às funções limitadas.

---

[1] *Leçons sur l'intégration* pág. 111 *Intégrales de Lebesgue*, pág. 28,

88. Propriedades das funções mensuráveis (1).

1.° *A soma* $a + f(x)$ *e o produto* $a \times f(x)$, *onde* a *é constante, são mensuráveis quando o seja* f, *e recìprocamente.*

2.° *A soma de duas funções mensuráveis é uma função mensurável.*

Com efeito, os pontos em que $f_1 + f_2$ excede A, são aqueles em que f_1 excede a função mensurável $f_3 = A - f_2$. Seja x' um dêstes pontos e a_n um número racional compreendido entre $f_1(x')$ e $f_3(x')$. O ponto x' pertence assim ao conjunto mensurável

$$(1) \qquad [f_1(x) > a_n] \times [f_3(x) < a_n].$$

Quando x' varia, a_n toma uma infinidade numerável de valores e os conjuntos (1) admitem uma soma mensurável. Nesse conjunto soma não há pontos x em que $f_1 + f_2$ não seja maior do que A, como é evidente. Logo, está demonstrada a propriedade relativa à soma.

3.° *A função* $\frac{1}{f}$ *é mensurável* (2), *se* f *não se anula.*

Com efeito, os pontos em que $\frac{1}{f} > A$ são aqueles em que $f < \frac{1}{A}$, os quais formam um conjunto mensurável.

4.° *O produto* $f_1 \times f_2$ *é mensurável.*

Determinemos, com efeito, duas constantes k_1, k_2 tais que se tenha sempre

$$(f_1 + k_1)(f_2 + k_2) > 0.$$

Êste produto é mensurável, porque os pontos em que

(1) *Intégrales de Lebesgue*, pág. 29.
(2) Mas pode não ser limitada.

êle excede A, são os mesmos em que a função f_1+k_1 excede a função mensurável

$$\frac{A}{f_2+k_2}.$$

Adicionando-lhe as funções mensuráveis

$$-k_2 f_1 - k_1 f_2 - k_1 k_2$$

obtem-se

$$f_1 \times f_2.$$

5.° *O limite de uma sucessão convergente de funções mensuráveis* $f_1(x), \ldots f_n(x), \ldots$ *é uma função mensurável* (1).

Com efeito, nos pontos em que $f(x)$ seja maior do que A, tôdas as funções $f_n(x)$ o são também, desde que n seja suficientemente grande, e vice-versa. Logo, êsses pontos são a parte comum dos conjuntos mensuráveis.

$$C_n[f_n(x)>A], \quad C_{n+1}[f_{n+1}(x)>A],$$

e formam, portanto, um conjunto mensurável.

89. Para terminar, transcreveremos as palavras com que o creador da teoria das funções mensuráveis dá conta da extensão desta classe de funções.

«As funções $f(x)=\text{const}$, $f(x)=x$ são evidentemente mensuráveis; logo, todo o polinómio é mensurável. Tôda a função limite de polinómios é também mensurável: logo, em virtude de um teorema de Wereistrass, tôda a função contínua é mensurável. As funções descontínuas limites de funções contínuas, a que Mr. Baire chama funções da primeira classe, são mensuráveis. As funções que

(1) *Leçons sur l'Intégration*, etc. pág. 111.

não são da primeira classe e que são limites de funções da primeira classe (chamadas por Mr. Baire funções da segunda classe) são funções mensuráveis ».

§ 4.°

Propriedades fundamentais dos integrais L

90. Os integrais L gozam, entre outras, das seguintes propriedades:

1) $$\int_a^b 1\,dx = b - a;$$

2) $$\int_a^b f(x)\,dx > 0, \quad \text{se } f > 0;$$

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[l + \theta(L - l)\right](b - a); \quad 0 < \theta < 1$$

4) $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad a < c < b;$$

5) $$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

6) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n=\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;$$

7) *Tôda a função integrável* R *é integrável* L.

91. Da primeira já nos ocupamos no n.° 58. As propriedades 2), 3) resultam imediatamente da expressão das somas que entram na definição de integral.

Para estabelecer a quarta propriedade, dividamos em partes os intervalos (l', L'), (l'', L'') dos limites da função em (a, c) e (c, b) respectivamente, operando porém de tal modo que, se entre êles houver uma parte comum, comuns sejam também os números que a subdividem.

Sejam

$$s = \Sigma\, l_i\, m_i, \quad s' = \Sigma\, l_k\, m_k', \quad s'' = \Sigma\, l_k\, m_k''$$

as somas relativas aos integrais

$$\int_a^b, \int_a^c, \int_c^b,$$

respectivamente, e às decomposições obtidas.

Para simplificar a demonstração, diremos que um termo $l_h\, m_h'$ ou $l_h\, m_h''$ de s_1 ou s_2 corresponde a um termo $l_i\, m_i$ de s_1, quando seja $h = i$, e o conjunto de medida m_h' ou m_h'' seja formado pelos pontos que representam (a, c) ou (c, b) no conjunto de medida m_i.

Posto isto, observemos que o teorema é manifestamente verdadeiro, se o menor dos números L', L'' coïncide com o maior dos limites l', l'', caso em que se teria

$$s = s_1 + s_2 .$$

Suponhamos, porém, que essa coincidência não tem lugar e que, portanto, o menor daqueles números, L', para fixar ideas, excede o maior dos números l', l'', neste caso l''.

O último termo de s_1 é formado pelo produto de l_k (supondo $l_{k+1} = L'$) pela medida m_k' do conjunto de pontos de (a, c) para os quais é

(1) $$l_k \leq f < L' ;$$

Ora, os pontos de (a, c) que satisfazem a (1) satisfazem também às desigualdades

(2) $$l_k \overline{\gtrless} f < l_{k+}$$

e vice-versa; logo êsse último termo pode escrever-se

$$l_k\, m'_{(k,\, k+2)}\,.$$

Designando por $m'_{(k,\, k+2)}$ a medida do conjunto formado pelos pontos de $(a,\ c)$ que satisfazem a (2). A soma s_1 toma então a forma

$$s_1 = \ldots l_{k-1}\, m'_{k-1} + l_k\, m'_{(k,\, k+2)}\,.$$

Suprimamos L' como ponto divisório dos intervalos $(l'',\ L'')$ e $(l,\ L)$.

As somas s_2 e s correspondentes a esta nova decomposição tomam a forma

$$s_2 = \ldots + l_{k-1}\, m''_{k-1} + l_k\, m''_{(k,\, k+2)} + l_{k+2}\, m'_{k+3} + \ldots,$$

$$s = \ldots + l_{k-1}\, m_{k-1} + l_k\, m_{(k,\, k+2)} + l_{k+2}\, m_{k+3} + \ldots,$$

e, dêste modo, um termo qualquer de s_1 ou de s_2 possui em s um termo correspondente, não deixando, por outro lado, nenhum termo desta última soma de encontrar em s_1 ou s_2, ou nas duas somas conjuntamente, um termo que lhe corresponda.

Efectivamente, tendo suposto que L' era o menor dos números L' e L'', entre os termos de s_2 e os de s há uma perfeita correspondência, porque $L''=L$; e é manifesto, por outro lado, que, em s_1, só o último termo prejudicava a integrabilidade da correspondência entre essa soma e o somatório s.

Teremos, por conseguinte,

$$s = s' + s''_1$$

o que demonstra a propriedade 4).

92. A propriedade 5) é evidente, se uma das funções parcelares se reduz a uma constante. Pôsto êste caso de parte, suponhamos, em primeiro lugar, que se trata de duas funções que só tomam um certo número de valores distintos:

$$f_1(x) \ldots A_1 < A_2 < \ldots A_m,$$

$$f_2(x) \ldots B_1 < B_2 < \ldots < B_n,$$

e admitamos além disso que é $B_1 > A_m$.

Decompondo, por meio dos números $A_i + B_j$ o intervalo

$$(A_1 + B_1, \quad A_m + B_n)$$

em partes, fàcilmente se reconhece que as parcelas da soma s relativa ao integral de $f_1(x) + f_2(x)$ são da forma

$$m_{p,q} \times [A_p + B_q],$$

representando por $m_{p,q}$ a medida do conjunto

$$[f_1(x) + f_2(x) = A_p + B_q].$$

Temos, portanto,

$$s = \Sigma m_{p,q}[A_p + B_q] = \Sigma m_{p,q} A_p + \Sigma m_{p,q} B_q =$$

$$= \sum_p A_p[m_{p,1} + m_{p,2} + \ldots + m_{p,n}] + \sum_q B_q[m_{1,q} + m_{2,q} + \ldots + m_{m,q}]$$

$$= \sum_p A_p m_p + \sum_q B_q m_q,$$

o que prova, neste caso particular, a propriedade de que nos ocupamos.

A significação dos números m_p e m_q é evidente. O primeiro, por exemplo, é a medida do conjunto

$$[f_1 = A_p].$$

Se não fôsse $B_1 > A_m$, a adição de uma constante a $f_2(x)$ conduzir-nos-ia ao caso considerado, sem prejuízo da conclusão obtida.

Suponhamos agora que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas funções quaisquer, e designemos por $F_1(x)$ e $F_2(x)$ duas funções, análogas à função $F(x)$ do n.º 81, que difiram de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, respectivamente, em menos de ε.

Teremos

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b F_1(x)\,dx + \theta\varepsilon,$$

$$\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b F_2(x)\,dx + \theta'\varepsilon,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f_1 + f_2)\,dx = \int_a^b (F_1 + F_2)\,dx + 2\theta''\varepsilon =$$
$$= \int_a^b F\,dx + 2\theta''\varepsilon,$$

representando por θ θ', θ'' números de módolo inferior a 1. Ora, como F_1, F_2 estão no caso anteriormente estudado, virá

$$\int_a^b F\,dx = \int_a^b F_1\,dx + \int_a^b F_2\,dx$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx - 2\theta''\varepsilon = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \theta\varepsilon - \theta'\varepsilon$$

ou seja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

93. A propriedade 6) demonstra-se também com facilidade, pois tudo se reduz, em virtude de 5), a provar que o integral

$$\int_a^b \left[f(x) - f_n(x)\right] dx$$

tende para zero com $\frac{1}{n}$.

Designemos por C_n o conjunto formado pelos pontos em que

$$f - f_n < \varepsilon$$

e seja L o limite superior de $f(x)$.

A função $f - f_n$ é inferior a ε em C_n e menor que L em $C[C_n]$. Logo, será

$$\int_a^b \left[f(x) - f_n(x)\right] dx < \varepsilon\, m\,[C_n] + L_m\left[C(C_n)\right].$$

Ora, sendo $C(C_n)$ constituído pelos pontos que se tem

$$f - f_n \overline{>} \varepsilon\,,$$

é claro que êsse conjunto dá lugar a uma família monótona, e teremos

$$\lim_{n=\infty} m\left[C(C_n)\right] = m\left[\lim_{n=\infty} C(C_n)\right];$$

mas,

$$\lim_{n=\infty} C(C_n) = 0\,,$$

pois não há, manifestamente, nenhum ponto comum a todos os conjuntos

$$C[C_n].$$

Logo,

$$\int_a^b \left[f(x)-f_n(x)\right]dx < \underset{n>n_1}{\varepsilon(b-a)}+\varepsilon=\varepsilon'.$$

94. Para terminar, mostremos que tôda a função integrável *R* é igualmente integrável *L*, e que os dois integrais

$$(R) \qquad \int_a^b f(x)\,dx\,, \quad (L)\int_a^b f(x)\,dx$$

coïncidem.

Com efeito, decompondo $(a,\ b)$ em partes

$$(a_1 x_1),\quad (x_1,\ x_2),\quad \ldots,$$

temos

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\ldots$$

Suponhamos que todos estes integrais são do tipo *L*, e apliquemos às parcelas do segundo membro o teorema da média:

$$(L) \qquad \int_a^b f(x)\,dx=m'_1(x_1-a)+m'_2(x_2-x_1)+\ldots,$$

designando, duma maneira geral, por m'_i um número compreendido entre os limites de $f(x)$ em $(x_{i-1},\ x_i)$.

Os integrais de Lebesgue são pois números compreendidos entre os integrais por defeito e por excesso de Darboux; e, como estes últimos coïncidem quando $f(x)$ seja integrável *R*, teremos necessàriamente

$$(R) \qquad \int_a^b f(x)\,dx=(L)\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

95. Tendo sempre suposto até aqui $b>a$, para completar a definição L de integral definido, faremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

caso seja $b<a$.

96. Como os integrais de Riemann, os integrais de Lebesgue dão origem a funções que admitem geralmente por derivada a função integranda. O estudo, porém, desta propriedade excede os limites dêste trabalho, motivo por que nos abstemos de mais larga referência.

Mr. Henri Lebesgue generalizou para as funções não limitadas os resultados de que nos temos ocupado, e mais recentemente Mr. Arnaud Denjoy inventou três outras definições de integral [1].

É ainda demasiado cedo para fazer uma exposição dos trabalhos dêste último geómetra, em virtude da escassez dos resultados obtidos até agora; e a nova generalização de Mr. Lebesgue não oferece nenhum interêsse especial teórico, sob o nosso ponto de vista, porque assenta na definição construtiva L, que nós só aplicamos às funções limitadas.

---

(1) *Comptes Rendus*, 1919.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

Princípios gerais da teoria dos conjuntos

CAPÍTULO I

Ideas gerais dos fins do século VXIII

CAPÍTULO II

Cauchy, Dirichlet, Riemann, Darboux e Bruno

CAPÍTULO III

A generalização Lebesgueana

M. ESPARTEIRO

SÔBRE O CONCEITO DE INTEGRAL DEFINIDO

DISSERTAÇÃO