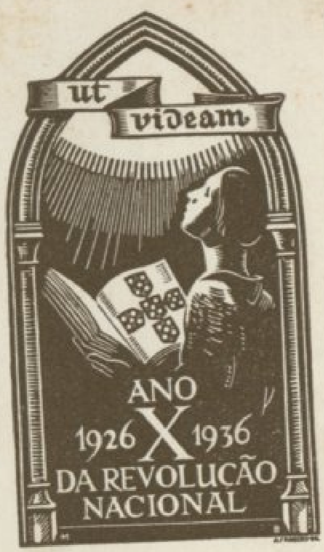
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

O PROBLEMA

DA

GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

POR

MANUEL DOS REIS

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1933

O PROBLEMA

DA

GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

O PROBLEMA

DA

GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

POR

MANUEL DOS REIS

COIMBRA

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

1933

Dissertação de concurso para professor catedrático do 2.º grupo da 1.ª secção da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra.

Prefácio

Com o presente trabalho tentamos um estudo crítico das principais teorias da gravitação propostas desde Newton. Cumpre-nos dizer aqui algumas palavras sôbre a forma do livro.

Naturalmente, as diversas teorias da gravitação não se sucedem ao acaso, mas relacionadas entre si e com os progressos da teoria e da observação gerais da natureza. A própria descoberta da gravitação universal é o resultado duma evolução. Uma e outras, como tôdas as coisas, só consideradas nesta evolução se tornam completamente inteligíveis. Daí o não termos hesitado em acentuar o inevitável carácter histórico da obra, remontando aos gregos na nossa exposição.

A teoria da relatividade especial impõe-se tão fortemente, que entendemos dever ser breve sôbre as teorias da gravitação prè-relativistas; em rigor são tôdas falsas se aquela teoria é verdadeira. Assim, os resultados são referidos sem demonstração. Quanto à crítica, limitámo-nos ao que nos pareceu suficiente para estabelecer a inaceitabilidade de tais teorias, independentemente da teoria da relatividade; esta norma foi seguida também para as teorias da gravitação relativistas, incluindo, mutatis mutandis, *a de Einstein.*

As teorias relativistas são o principal objecto da presente dissertação. Por tal motivo pensámos que seria útil inserir uma exposição da teoria da relatividade especial, desde os fundamentos até aos resultados importantes que teríamos de *utilizar constantemente no estudo daquelas teorias. Assim fizémos, não obstante reconhecermos que isso tornou o livro muito longo; que no-lo releve o leitor familiarizado com a matéria.*

O problema da gravitação é um problema matemático porque é um problema físico, não recìprocamente. Daí o termos ligado grande importância ao lado físico da questão, em vez de considerá-la como coisa interessante pelos desenvolvimentos matemáticos que sugere, mas em si indiferente. O nosso ponto de vista não podia ser o do matemático puro, mas o de quem procura estudar matemàticamente os fenómenos da natureza.

No capítulo I referimos as ideas teóricas que, desde a antiguidade, contribuíram para os progressos da astronomia e da física, e prepararam lentamente o aparecimento da teoria da gravitação de Newton. No capítulo II tratamos brevemente das teorias da gravitação propostas desde Newton até à teoria da relatividade especial. No capítulo III ocupamo-nos das dificuldades da física teórica que provocaram a elaboração desta teoria. O capítulo IV é consagrado à exposição das bases da teoria da relatividade especial e daqueles dos seus resultados que nos serão indispensáveis adiante. No capítulo V damos uma sistematização dos princípios da dinâmica analítica relativista dos sistemas de pontos materiais, de que adiante faremos também aplicação. No capítulo VI ocupamo-nos das teorias da gravitação que apareceram sob a influência da teoria da relatividade especial, ou das que, como as de Lorentz e Poincaré, se adaptam a esta teoria sem modificações essenciais. Finalmente, o capítulo VII é dedicado à teoria da gravitação de Einstein.

Sem dúvida, esta teoria ainda não satisfaz completamente sob o ponto de vista filosófico, sobretudo porque o campo de gravitação e o campo electromagnético se mantêm nela essencialmente diferentes. É desejável que a métrica do universo *quadridimensional, que evidentemente deve ser uma generalização da métrica pseudo-riemanniana, possa explicar os dois campos; e se uma tal teoria unitária do campo físico puder incluir orgânicamente as equações fundamentais da mecânica ondulatória, ter-se-á conseguido a unificação da física. A avaliar pelos ensaios notáveis de Weyl, Eddington, Kaluza, Einstein e outros, êste ideal parece de próxima realização. Mas é claro que aqui não podíamos ocupar-nos desta extensão da teoria da relatividade geral.*

Em notas citámos a bibliografia consultada. Acrescentemos que, na redacção da parte do capítulo I que se refere à Renascença, seguimos de perto a clássica História da filosofia moderna *de Harald Höffding.*

Coimbra, Fevereiro de 1933.

I

1. O pensamento central da teoria da gravitação cósmica é que a causa física, que determina os movimentos dos astros, tem a mesma natureza que aquela que faz mover os projécteis terrestres. Mais precisamente, cada astro manifesta ser a sede duma acção atractiva análoga à que a terra exerce sôbre os corpos da sua superfície, produzindo a gravidade; a acção dum astro qualquer incide sôbre todos os outros, variando directamente com a massa e inversamente com a distância, e do concurso de tais acções e da inércia da matéria resultam os movimentos relativos dos corpos inumeráveis que vemos disseminados no espaço.

Para formular nitidamente êste pensamento e dar-lhe uma expressão matemática concordante com as observações, foi preciso percorrer uma longa evolução scientífica e filosófica. Em especial, o homem teve de construir lentamente a descrição dos movimentos celestes, de libertar-se nessa descrição do ponto de vista terrestre a que está naturalmente fixado, de fazer triunfar o princípio da uniformidade das leis da natureza, e de desenvolver o método experimental a-fim-de elaborar as bases da verdadeira Física.

Foi na Hélade que apareceram os primeiros esforços para penetrar no segrêdo cosmológico. Já os astrólogos caldeus tinham acumulado numerosas observações celestes e notado que muitos fenómenos astronómicos se reproduzem em ciclos determinados. O conhecimento dêstes ciclos sugeriu aos gregos a idea da regularidade dos movimentos dos astros, e a feição filosófica do seu espírito levou-os a procurar para essa regularidade uma explicação racional. Logo esta questão foi generalizada. A admirável ordem do mundo era preciso descrevê-la correctamente e desvendar-lhe a origem, o termo e o processo de evolução. Tal foi o problema imenso com que despontou a Filosofia.

2. De Tales a Demócrito a Cosmografia faz notáveis progressos. O fundador da escola de Mileto sabe que a Lua está mais próxima da Terra que o Sol; Anaximandro afirma que a Terra ocupa o centro do mundo e se sustenta no espaço sem apoio algum; Anaxímenes distingue os planetas das estrêlas fixas; Empédocles ensina que a Lua reflecte a luz solar; em Demócrito encontram-se os astros dispostos na ordem que definitivamente lhes atribuiu a Antigüidade, com a idea de que os seus movimentos diurnos são desiguais e decrescem desde a abóbada das estrêlas fixas até à Lua. Esta cosmografia é geocêntrica, mas deve abrir-se uma excepção a favor do pitagórico Filolau, para quem a Terra, o Sol e os outros astros giravam em volta do fogo central, fonte de tôda a luz, invisível por se encontrar sempre no hemisfério oposto ao nosso; o que implicava o movimento de rotação da Terra com o mesmo período que o seu movimento de translação. Afirmando o duplo movimento da Terra, Filolau é o precursor de Aristarco de Samos e de Copérnico; e a idea pitagórica da harmonia das esferas, que exigia relações numéricas invariáveis entre as distâncias e as revoluções dos diversos planetas, influiu em Kepler.

Na física dêstes velhos filósofos houve intuïções de génio. Sustentando que todos os corpos do universo provêm duma substância única, água, infinito ou ar dos três

Milésios, unidades de Pitágoras, fogo de Heraclito, átomos de Leucipo e Demócrito, ou consistem na mistura de várias substâncias irredutíveis em proporções diversas, como os quatro elementos de Empédocles ou as homeomerias de Anaxágoras; e frizando a universalidade do processo de formação dos corpos a partir da matéria primordial, os pensadores prosocráticos esboçavam o princípio da uniformidade da natureza, base da idea da gravitação. Alguns chegaram a emitir sôbre os movimentos celestes e sôbre a gravidade uma opinião que oferece pontos de contacto com as teorias modernas. Para Anaximandro, Empédocles, Anaxágoras e Demócrito, o mundo que observamos é um turbilhão, visível no movimento do céu, ao qual se deve a formação das matérias da nossa experiência, e também a manifestação da maior ou menor gravidade latente que possuem. Todos os corpos pesam para a Terra, centro do movimento turbilhonar; se certos se elevam à superfície dela, é porque são expulsos por corpos mais pesados; se os astros não caem, é porque a acção centrífuga do turbilhão compensa a gravidade. A analogia com a doutrina newtoniana é claríssima. Há outra analogia, mais surpreendente: a manifestação da gravidade latente subordinada à impulsão turbilhonar lembra a identificação da gravidade com a inércia, efectuada por Einstein. Demócrito disse expressamente que a maior gravidade dos corpos mais densos resulta da sua menor capacidade de movimento, em virtude da qual tendem para a região central, onde é mais lento o turbilhão.

O geocentrismo de Demócrito não era universal e parece que o mesmo se tinha dado com o de Anaximandro. A Terra é o centro do nosso mundo, mas fora dêste há mundos inumeráveis, que são outros tantos turbilhões em diversos estados de evolução. Os corpos pesam para o centro do mundo a que pertencem, mas os mundos não pesam uns para os outros, porque se movem independentemente. Destas ideas se inspiraram Giordano Bruno e Descartes decorridos dois mil anos.

3. Contra Demócrito vão erguer uma física infeliz dois homens não menos eminentes, afirmando enèrgicamente o geocentrismo universal e a diferença radical de estrutura entre as regiões terrestre e celeste do mundo. Para Platão como para Aristóteles, o céu, compreendido entre as estrêlas fixas e a Lua, é a região perfeita. A sua substância é o éter incorruptível, e nêle só existe o género excelente de movimento, que não consiste pròpriamente numa mudança de lugar: a rotação uniforme dum anel circular ou duma esfera em volta do eixo respectivo, perpètuamente mantida por uma actividade divina. A região sublunar, constituída pelos quatro elementos empedoclianos, mas susceptíveis de transmutação recíproca, está sujeita à geração e à corrupção e é a sede de movimentos imperfeitos, ordinàriamente translações de um lugar inicial para um lugar final. Esta região não tem movimento de conjunto e ocupa o centro do mundo. O mundo é limitado pela esfera das estrêlas fixas, para além da qual não há espaço. Platão ainda perfilha a opinião de Demócrito sôbre a gravidade; outro tanto não faz Aristóteles, que distingue gravidade e levitação absolutas e relativas no mundo sublunar, e recusa ao mundo celeste qualquer destas qualidades. Cada elemento do mundo sublunar tem um lugar natural, para onde se dirige rectilìneamente quando abandonado sem violência: a terra, absolutamente grave, desce na direcção do centro do mundo; o fogo, absolutamente leve, sobe para a atmosfera ígnea adjacente à esfera da Lua (a Via Láctea, os cometas, as estrêlas cadentes e outros «meteoros» formam-se nesta atmosfera); a água e o ar, dotados de gravidade e levitação relativas, sobem ou

descem entre o oceano e a atmosfera inferior. É pois a «forma» de cada elemento que constantemente actua sôbre êle e produz o seu movimento natural. Porque, para Aristóteles, tudo o que se move é a cada instante movido por outra coisa. As esferas celestes são movidas pela acção ininterrupta da divindade suprema, extramundana, ou dos astros, que são os deuses secundários (anàlogamente ao que pensava Platão). O movimento dum projéctil é devido a que, no início, o ar sofre um abalo na visinhança do móvel, e êste abalo, propagando-se a outros pontos do ar, impele o projéctil contìnuamente; à medida que o abalo amortece, o móvel cede cada vez mais à gravidade, acabando por se precipitar no seu lugar natural. Dificilmente se concebera maior antítese em relação à sciência moderna que a desta filosofia da natureza.

Platão é o fundador da astronomia matemática da Antigüidade. No seu sistema atribuem-se pela primeira vez dois movimentos a cada planeta: o movimento comunicado pela rotação da esfera das estrêlas fixas em volta do eixo do equador e o movimento produzido pela rotação do «círculo», a que está ligado o planeta, em volta do próprio eixo, que coincide com o eixo da eclíptica; o sentido do segundo movimento é contrário ao do primeiro e a sua duração varia com o astro. A idea da explicação do movimento aparente dos planetas por composição de movimentos circulares uniformes imperou até Kepler.

4. A Astronomia teórica desenvolveu-se na senda traçada por Platão, à medida que progrediam as observações. Eudóxio contruiu o sistema das esferas homocêntricas, que foi aceite, com modificações, por Aristóteles. Mais tarde, Apolónio simplificou muito êste sistema pela invenção dos epiciclos, e Hiparco aperfeiçoou a obra de Apolónio introduzindo os excêntricos. Por fim Ptolemeu, continuando

Hiparco, fêz a sistematização astronómica que veio a transmitir-se à Idade média.

A conformidade às aparências imediatas, a fôrça de prejuizos seculares e a autoridade das grandes filosofias metasocráticas explicam o triunfo do geocentrismo na astronomia grega. Epicuro restaurara a física de Demócrito, com algumas alterações, das quais a mais interessante para nós é a atribuïção aos átomos de gravidade essencial nunca latente; mas o epicurismo era pouco apropriado para fazer mudar de rumo astrónomos e físicos. Primeiro, Epicuro depressa deixava os outros mundos para se ocupar do nosso, e a êste continuava a dar por centro a Terra, como os seus predecessores; depois, o estudo da Física não o interessava directamente, sendo puro instrumento moral; emfim, pois que o nosso mundo era um dos inumeráveis mundos de todos os tipos possíveis formados casualmente na infinidade do tempo decorrido, cada fenómeno podia receber uma pluralidade de explicações que era útil procurar, mas entre as quais não havia meio de decidir.

A-pesar-de tudo, a Grécia viu nascer o heliocentrismo. Já o platónico Heraclides do Ponto tinha construído um heliocentrismo parcial, fazendo mover Mercúrio e Vénus em volta do Sol para explicar mais simplesmente o facto de os dois primeiros astros sempre acompanharem o terceiro. Aristarco de Samos, inspirando-se de Filolau, foi muito mais longe que Heraclides: para êle, a Terra possui um duplo movimento em volta do seu eixo e em volta do Sol; em tôrno dêste astro, que é o centro imóvel do mundo, movem-se também os outros planetas; e o céu imóvel das estrêlas fixas deve estar enormemente afastado do Sol, porque não se observam paralaxes estelares. Para conceber êste sistema, Aristarco teve de romper com a física dominante; estava preparado para isso pelo seu mestre

Estratão, escolarca peripatético que abandonou a filosofia natural aristotélica sob a influência do atomismo. Estratão ensinava que a gravidade é a única fôrça activa do mundo e se estende a todos os corpos, frizando que não há lugares naturais, nem éter, e que os astros são corpos ígneos.

A astronomia heliocêntrica foi duramente combatida pelos filósofos, sobretudo pelos estóicos, que chegaram a atacar o princípio da composição dos movimentos aparentes dos planetas a partir de movimentos menos complexos, e pelos astrónomos, entre os quais só Seleuco fêz excepção. A sciência grega repudiava a mais simples e mais fecunda das cosmografias para se embrenhar definitivamente num sistema abstruso, onde, a partir de Hiparco, os fenómenos só puderam ser encaixados à fôrça de complicações sucessivas.

5. Circunstâncias históricas bem conhecidas fazem que Aristóteles e Ptolemeu dominem completamente a física e a astronomia medievais. Só no século XIV os nominalistas parisienses esboçam discordâncias. Buridan encontra num comentador grego de Aristóteles a noção de «ímpeto», e serve-se dela para explicar a possibilidade do movimento dum corpo sem a acção ininterrupta duma impulsão exterior. O ímpeto conserva-se se nada o contraria nem o favorece (movimentos celestes), decresce se sofre resistências (subida dos graves, choques) e cresce se é coadjuvado (queda acelerada dos graves). Começa a ressurgir o pressentimento democritiano da lei de inércia e da identidade das mecânicas celeste e terrestre. Alberto da Saxónia e Oresme procuram a lei da queda dos corpos, e o último sustenta que não é impossível a rotação da Terra e a imobilidade da esfera das estrêlas fixas.

Foi a Renascença que derrubou a concepção escolástica do mundo. Nicolau de Cusa ensina que o universo não pode ter circunferência, de contrário haveria um espaço exterior ao universo, o que é absurdo. Não tendo circunferência, não pode ter centro absoluto: parece-nos centro a Terra porque nos encontramos nela; dar-se hia o mesmo com um astro qualquer se nos transportássemos para lá. Não sendo centro absoluto, a Terra não pode dizer-se absolutamente imóvel. Desta relatividade do movimento se inspirou Copérnico na sua reforma astronómica. Ao grande polaco o artifício e a confusão do sistema ptolemaico pareceram contrários à simplicidade que a natureza manifesta noutros domínios; deve haver um ponto de vista que permita descrever os movimentos dos astros dum modo mais simples. Êste ponto de vista será o verdadeiro centro imóvel do mundo, embora pareça que êle e os outros astros se movem em volta de nós; porque o facto de um corpo aparentar certo movimento não exige que êle se mova efectivamente como parece e que o observador seja imóvel: pode isso resultar só do movimento do observador, ou do movimento de ambos. Firmado nestes princípios, Copérnico, depois de refutar as razões de ordem estritamente física alegadas desde a Antigüidade contra o movimento da Terra, restaura o heliocentrismo antigo e demonstra, muito mais copiosamente do que Aristarco poderia fazer, que tal concepção fornece uma astronomia mais simples que a geocêntrica e tão completa como ela. Copérnico admite ainda que os movimentos celestes, como naturais, são circulares e uniformes. O movimento rectilíneo só existe quando uma parte se separa do seu todo; é o caso dos corpos à superfície da Terra, que são atraídos por ela, não porque ela é o centro, mas porque é um todo que tende a permanecer como tal. Estamos ainda longe da universal gravitação, mas foi a nobre audácia dêste homem que abriu o caminho para ela.

No século XVI poucas pessoas aderiram à concepção copernicana. Tycho-Brahe, a quem repugnava o movimento da Terra, imaginou um sistema cinemàticamente equivalente ao de Copérnico, mas fìsicamente muito diverso. À maneira de Heraclides, Tycho admitia a Terra imóvel no centro do mundo, a Lua e o Sol móveis em volta da Terra, os outros planetas móveis em volta do Sol, e o movimento diurno da esfera das estrêlas fixas transmitindo-se aos astros interiores. Com Aristarco, Copérnico afirmara que a esfera das estrêlas devia ter um raio muito grande relativamente às dimensões da órbita da Terra, por não se observarem paralaxes nas estrêlas; Tycho-Brahe tirava daqui um argumento contra o heliocentrismo, perguntando para que serve o espaço enorme compreendido entre as estrêlas fixas e Saturno. Felizmente, o argumento era demasiado pobre para impedir que Giordano Bruno, Kepler e Galileu aderissem a Copérnico e o continuassem brilhantemente.

6. Deve-se ao maior filósofo da Renascença o ter fundado nas suas linhas gerais o sistema do mundo tal como actualmente o concebemos. Bruno aceita a idea fundamental de Copérnico, mas vai muito mais longe que êle. A relatividade do lugar e a relatividade do movimento provam que nem a Terra nem nenhum corpo celeste se pode dizer centro absoluto ou absolutamente imóvel. É perfeitamente possível que o universo, visto de qualquer astro, apresente uma perspectiva análoga à nossa, semelhantemente ao que sucede com o horizonte visual terrestre, que se reforma sempre em volta de nós; o universo será então infinito, e as estrêlas inumeráveis, em vez de estarem fixadas a uma esfera-limite, estarão espalhadas pelo espaço etéreo a grandes distâncias mútuas. Isto concorda com a faculdade que possui o nosso espírito de prolongar indefinidamente as grandezas e as formas; é impossível que o espírito humano supere a natureza, e a infinidade do universo tem de ser real.

Conseqüentemente, Bruno emite uma idea notável, que devia esperar Einstein para ser renovada e desenvolvida: a idea da relatividade do tempo. O tempo mede-se pelos movimentos celestes, e é impossível provar que entre estes movimentos existe algum absolutamente regular; como êles variam com o astro donde são observados, para os diversos astros haverá tempos diferentes.

A gravidade dos corpos terrestres não pode significar que a Terra seja um lugar privilegiado, porque também nos outros astros há gravidade. As partes da Terra juntam-se à Terra, como as do Sol se juntam ao Sol. Afirmando mais que partes do Sol aproximadas da Terra caïriam para a Terra e *vice versa,* Bruno está muito mais perto que Copérnico da idea da gravitação universal.

Bruno põe ainda o princípio de que a natureza é indiferente ao lugar, donde conclui que os astros longínquos devem ser análogos ao Sol e aos planetas, e ter movimentos semelhantes; as estrêlas serão sóis, centros de sistemas planetários como o nosso. Além disso, todos os sóis devem mover-se relativamente, e o facto de que ainda não pudemos apreciar estes movimentos explica-se pelas distâncias enormes que separam os sóis entre si e também porque a antiga cosmografia impedia os astrónomos de orientar neste sentido as suas observações. Halley devia provar mais tarde que Bruno tinha razão.

Com a esfera das estrêlas fixas, esta concepção derrubava a velha doutrina das esferas homocêntricas. As observações de Tycho-Brahe sôbre os cometas, mostrando que estes corpos se aproximam e depois se afastam consideràvelmente do Sol, foram apontadas por Bruno como confirmação do seu modo de ver sôbre êste ponto. De resto as esferas são inteiramente inúteis; a divindade imanente mantém os movimentos dos astros sem intermediários quaisquer. A cosmologia de Bruno radicava-se no fundamento metafísico a que acabamos de aludir; o universo é a forma desenvolvida da divindade infinita e como tal necessàriamente infinito, animado e por tôda a parte análogo.

Kepler perfilha o heliocentrismo rejeitando a opinião de Bruno sôbre a infinidade do universo. Mas ajunta a idea pitagórica de que o espírito divino que preside ao mundo deve revelar-se em relações harmoniosas entre as dimensões e os movimentos dos orbes planetários. A aspiração ardente de descobrir estas relações, reforçada pelas ideas da simplicidade da natureza e da maior facilidade de encontrar as relações quantitativas do mundo que quaisquer outras, conduziu-o a estudar profundamente as observações de Tycho-Brahe; os frutos desta actividade foram as três leis célebres das áreas, das elipses e harmónica, que derruíram o velho princípio do movimento circular uniforme e permitiram a Newton edificar a teoria matemática da gravitação. Kepler é de resto um dos precursores directos de Newton.

O sistema heliocêntrico impôs-se definitivamente com Galileu. Adoptando-o primeiro pela razão de simplicidade, Galileu viu depois que a favor dele podiam militar argumentos duma ordem muito diferente. A invenção da luneta permitiu-lhe, com efeito, observar fenómenos até então ignorados ou hipotéticos, como os satélites de Júpiter, as fases de Vénus e as manchas do Sol, cujo estudo decidia irrevogàvelmente entre Copérnico e os geocentristas. Ao contrário de Kepler, Galileu admite a infinidade bruniana do universo. A importância de Galileu perante a doutrina da gravitação reside ainda em que, graças ao seu método experimental, foi um dos fundadores da mecânica moderna, formulando o princípio da inércia, precisando o conceito de fôrça e descobrindo as leis da queda dos corpos terrestres.

7. Germina já o newtonismo, e eis que surge uma vasta síntese cosmológica que há-de criar embaraços à sua difusão.

O ponto de partida da filosofia natural de Descartes é que a única substância do mundo físico é a extensão; tôda a diversidade de aspectos da matéria resulta da divisibilidade indefinida da extensão combinada com o movimento das suas partes. O movimento é, portanto, o fenómeno por excelência, e as leis do movimento serão as leis gerais da Física. Descartes estabelece estas leis *a priori*, deduzindo-as da imutabilidade divina: são a lei da conservação da quantidade de movimento, a lei de inércia e a lei da transmissão do movimento no choque (a primeira e a última inexactamente formuladas). Pela aplicação de tais leis, todos os fenómenos podem explicar-se mecânicamente a partir do estado inicial produzido pelo impulso criador.

Na origem, a matéria ou extensão infinita foi dividida numa infinidade de pequenas partes e a estas foi impresso movimento turbilhonar em volta de centros inumeráveis. Nestes turbilhões, as partes da matéria fragmentaram-se diversamente e certas aglomeraram-se junto dos centros; assim se formaram os astros. Alguns astros vieram a cobrir-se duma crosta sólida; tais crostas diminuíram a velocidade dos turbilhões respectivos, que por fim perderam a independência deixando-se arrastar por outros turbilhões; foi o que sucedeu à Terra, e, antes dela, à Lua. Dêste modo se constituíram os diversos sistemas planetários, que têm por centros o Sol e as estrêlas. A permanência dos turbilhões originais em cada sistema explica os movimentos de rotação e translação dos corpos que lhe pertencem.

Cada astro tem a forma esférica por virtude das pressões em todos os sentidos que nêle exerce a matéria subtil do respectivo turbilhão. Estas pressões explicam a gravidade: um corpo cai para a Terra, por exemplo, porque o turbilhão desta o cola à sua superfície.

Descartes desenvolve estes e outros pontos da sua física até aos últimos pormenores. A-pesar-da sua imponência, o sistema cartesiano não era isento de defeitos, e tinha principalmente uma insuficiência manifesta: era impreciso do ponto de vista quantitativo, a-pesar-de serem quantitativas as suas leis fundamentais. Descartes faz ver que as órbitas dos planetas podem não ser perfeitamente circulares; mas limita-se a isto, e as leis de Kepler não aparecem na sua obra. O mesmo sucede com as leis de Galileu sôbre a queda dos graves. A evolução posterior da Sciência devia tornar cada vez mais evidente a impossibilidade de conceber a realidade física em tôda a sua plenitude como um mecanismo puro.

Não obstante, fora da Inglaterra preferir-se há por muito tempo a física de Descartes à física dinamista de Newton. Foram necessários esforços consideráveis de homens como Voltaire e Maupertuis para fazer aceitar o sistema newtoniano nos países continentais.

8. Como sempre acontece, Newton teve precursores directos, mesmo no campo exclusivo da teoria da gravitação. Kepler foi talvez o primeiro a emitir a idea de que a gravidade solicita reciprocamente todos os corpos do universo em função das distâncias e das massas. O Sol atrai os planetas, a Terra atrai a Lua, a Lua atrai a Terra; a atracção da Lua sôbre as águas do oceano é a causa das marés. Se uma fôrça não retivesse os astros distanciados, estes precipitar-se hiam uns para os outros em proporção das suas massas. Quanto à variação com a distância,

Kepler hesitou entre a razão inversa do quadrado e a razão inversa da distância simples. A isto retorquiu Bouilleau que, se num corpo qualquer reside realmente a fôrça atractiva concebida por Kepler, a cada distância ela se reparte uniformemente sôbre uma superfície esférica; ora a área desta superfície varia proporcionalmente ao quadrado do raio, logo a fôrça variará necessàriamente na razão inversa do quadrado da distância. Êste raciocínio, que Kant repetirá a-pesar-de não concludente, deve ter sido um indicador para os contemporâneos. Borelli tenta explicar os movimentos dos satélites de Júpiter a partir duma atracção exercida pelo planeta na razão inversa do quadrado da distância, contrabalançada pela fôrça centrífuga. Hooke, o precursor mais nítido de Newton, formula a intenção de construir uma teoria geral dos movimentos planetários fundada nestas três proposições: *a*) cada astro é a sede duma fôrça atractiva, que não só se exerce sôbre as suas partes mas também sôbre os outros astros; *b*) é esta fôrça que deforma o movimento rectilíneo que a inércia confere aos corpos celestes; c) a atracção dum astro por outro é tanto maior quanto menor é a distância que os separa. Servindo-se dum pêndulo, Hooke demonstra experimentalmente que a acção duma fôrça atractiva pode tornar elíptico um movimento não acelerado; mas não obtém resultado algum nas experiências que executa para descobrir a lei de variação da fôrça gravitacional com a distância. Contudo, suspeita que esta lei seja a da razão inversa do quadrado, e tenta resolver o problema da determinação matemática do movimento dum ponto material atraído por uma fôrça central desta natureza; esbarrou, como Borelli, nas dificuldades de ordem técnica que o problema apresentava então.

O génio de Newton soube realizar o programa de Hooke. O seu ponto de partida foi a reflexão de que, não decrescendo a gravidade sensìvelmente do nível do mar para os cumes das montanhas, era possível que esta fôrça se fizesse sentir na Lua e fôsse justamente a causa de êste astro se não mover conforme à lei de inércia, rectilínea e uniformemente. Mas a verificação desta conjectura exigia o conhecimento da lei de variação da gravidade com a distância. Newton foi procurar esta lei aos movimentos dos planetas em volta do Sol. Se a Terra é sede duma fôrça atractiva, que se exerce sôbre as suas partes e se estende até à Lua, o Sol deve sê-lo também e a atracção solar deve exercer-se sôbre os planetas, causando os movimentos curvilíneos dêstes astros como a Terra causa o do seu satélite. Supondo as órbitas circulares, homocêntricas ao Sol e percorridas uniformemente, a aplicação dos princípios da Dinâmica, definitivamente estabelecidos pelo próprio Newton, e o conhecimento das distâncias e revoluções planetárias mostraram-lhe fàcilmente que a fôrça atractiva do Sol decresce na razão inversa do quadrado da distância. Anos depois duma tentativa que se frustou devido à utilização duma medida inexacta do raio da Terra, Newton pôde verificar que a gravidade terrestre inversamente proporcional ao quadrado da distância basta para explicar quantitativamente a queda da Lua para a Terra num intervalo de tempo muito pequeno. Mas Kepler tinha provado que as órbitas dos planetas não são circulares; era preciso saber, pois, se a lei encontrada para a fôrça de gravitação podia determinar órbitas elípticas. Mais feliz do que Hooke, Newton achou que a órbita é em geral uma secção cónica focada no Sol, e em particular uma elipse se a velocidade inicial não ultrapassa certo limite. Com esta restrição, chegou a estabelecer a equivalência matemática entre a sua lei de atracção e as leis de Kepler (abstraindo das acções mútuas dos diversos planetas, pequeníssimas em comparação com a do Sol). Notando finalmente que estas leis regem ainda os movimentos dos satélites em volta dos planetas respectivos, pôde concluir que dois astros quaisquer se atraem na razão inversa do quadrado da distância e proporcionalmente às massas, e dum modo mais geral, visto que à superfície da Terra o pêso dum corpo sempre se divide pelos seus fragmentos, que se atraem segundo a mesma lei dois pontos materiais arbitrários. De posse desta lei universal, Newton funda a dinâmica celeste que Hooke tinha entrevisto, explicando as perturbações do movimento kepleriano dos planetas e da Lua, o movimento dos cometas e o fenómeno das marés. A Astronomia teórica atravessava o momento mais fecundo da sua história.

O cartesianismo e Leibniz, e no mundo estritamente scientífico Huygens, opuseram-se à teoria da gravitação; mas por fim dirigiram-se para ela atenções mais benévolas. A concepção newtoniana, para mais sòlidamente apoiada em factos, oferecia uma visão do mundo verdadeiramente grandiosa: a gravidade, longe de se localizar na Terra, é uma fôrça universal; é por ela que se mantém a união dos astros em sistemas com movimentos admiráveis, como o sistema solar a que pertence o planeta que habitamos; e esta fôrça obedece a uma lei quantitativa simples, que torna possível em princípio o cálculo rigoroso dos movimentos celestes. A efectivação dêste cálculo apresenta dificuldades técnicas que ainda hoje parecem insolúveis. Mas é claro que basta fazê-lo com a aproximação que podem atingir as observações, ou pouco mais. À criação de métodos para obter tal aproximação, iniciada pelo próprio Newton, aplicaram-se os maiores geómetras do século XVIII, de Euler a Laplace; o resultado foi explicarem-se tanto melhor os movimentos planetários quanto mais êsses métodos se aperfeiçoavam. Isto assegurou o triunfo da teoria da gravitação universal.

II

9. A realidade da gravitação parece incontestável e pode dizer-se ainda hoje que a lei de Newton exprime quantitativamente êste fenómeno com uma exactidão quási absoluta. Dessa lei não só se deduzem os movimentos keplerianos que os planetas e cometas executam em primeira aproximação, mas também as perturbações sofridas por êstes movimentos, com uma precisão atestada eloqüentemente pelo descobrimento de Neptuno. As determinações experimentais da constante da gravitação, feitas nas mais variadas condições, concordam satisfatòriamente. A proporcionalidade da atracção às massas é suficientemente garantida pelo confronto da teoria com certas observações astronómicas, pelas referidas determinações da constante da gravitação e por outras experiências, tais como: comparação das oscilações de pêndulos da mesma substância ou de substâncias diferentes, pesagem de reagentes e de produtos da reacção, pesagem de corpos antes e depois de cristalizados. A proporcionalidade inversa ao quadrado da distância provam-na directamente os movimentos dos periélios, como Newton já fizera notar, e também experiências de laboratório. As experiências demonstram ainda que a constante da gravitação é de facto uma constante universal e não, como o coeficiente da lei de Coulomb, uma constante de meio; e já Laplace tinha mostrado que os movimentos da Terra e da Lua são incompatíveis

2

com uma absorpção sensível da gravitação por parte dos corpos. Finalmente, não se registou qualquer influência da temperatura.

A-pesar disso, a teoria da gravitação dada por Newton não deve considerar-se intangível. Assim, entre a lei de Newton e os factos nem tudo são concordâncias. No domínio astronómico, principalmente, há desacordos que inquietaram, ainda que pouco numerosos e muito pequenos. Segundo Newcomb, o continuador de Leverrier na grande obra da comparação da teoria dos movimentos planetários com as observações, as diferenças seguintes entre os movimentos observados e os movimentos calculados resistiram a todos os esforços de eliminação: 41″ no movimento secular do periélio de Mercúrio, cinco vezes o êrro provável no movimento do nodo de Vénus e três vezes o êrro provável no movimento do periélio de Marte; menos importantes, a primeira pelo seu carácter de incerteza e as outras por desenvolvimento insuficiente da teoria, são a diferença de duas vezes o êrro provável na variação secular da excentricidade de Mercúrio, as irregularidades notáveis no movimento do cometa de Encke e as pequenas irregularidades do movimento da Lua. As observações astronómicas (como as medições físicas) não são pois incompatíveis com uma lei da gravitação diferente da de Newton, desde que essa lei admita esta como aproximação muito forte. Por outro lado, embora Newton tivesse declarado expressamente que considerava a acção a distância filosòficamente impossível e que se limitara a estabelecer a existência da gravitação sem nada pretender quanto à sua natureza, é inegável que a teoria exposta nos *Principia* admite que a atracção dum corpo por outro se modifica instantâneamente quando o segundo corpo se desloca, de modo a manter-se a cada momento a validade da lei newtoniana. Êste inconveniente impele a reduzir a misteriosa fôrça a algum fenómeno menos ininteligível, ou pelo menos a enquadrá-la numa teoria que lhe atribua uma velocidade finita de propagação.

Tais possibilidades de transformação da teoria de Newton realizaram-se tôdas, e de múltiplos modos, com mais ou menos êxito. Ao intuir a gravitação universal, Newton punha perante si um problema que afinal não resolveu definitivamente: edificar uma teoria matemática do fenómeno novo, sujeita o menos possível a objecções filosóficas e em tudo conforme à experiência.

10. Das discordâncias existentes entre a teoria newtoniana e as observações, aquela que mais preocupou os astrónomos e os físicos foi a do periélio de Mercúrio. Não só é ela muito maior que as outras, mas ainda aumentou de 3″ entre Leverrier e Newcomb, a-pesar-de êste astrónomo ter trabalhado sôbre dados muito mais numerosos e de maior precisão que os daquele. Presentemente, esta discordância é mesmo elevada a 43″. Isto prova que ela não é ilusória, mas real. Portanto, ou existe massa perturbadora capaz de produzi-la, ou a lei de Newton não é a verdadeira lei da gravitação.

A hipótese da massa perturbadora foi já examinada por Leverrier. Êste astrónomo encontrou que um planeta intramercurial único seria tal que poderia ver-se sem luneta nas suas grandes digressões, e estaria pois descoberto há muito tempo; é mais admissível a suposição dum grupo de asteróides intramercuriais, mas as observações da superfície do Sol empreendidas posteriormente nunca puderam confirmá-la. Newcomb procurou saber se a massa perturbadora seria a protuberância equatorial do Sol devida ao achatamento ignorado dêste astro; mostrou-lhe o cálculo que entre os diâmetros equatorial e polar do Sol existiria então a diferença de 1″, quantidade incompatível com as observações. A suposição dum anel de asteróides e a de matéria intramercurial difusa são também afastadas por Newcomb. Parece impor-se a conclusão de que a massa perturbadora não existe.

A lei ordinária da gravitação deve pois ser substituída. Newton demonstrara que a menor alteração do expoente da sua lei introduz modificações nos movimentos dos periélios. Êste resultado sugeriu a Hall a proposta da expressão

$$f\frac{m\,m'}{r^{2+\lambda}},$$

onde f é a constante de Newton e $\lambda = 0,00000016$, como lei de atracção entre duas massas m e m' distantes de r. A lei de Hall explica o movimento anómalo do periélio de Mercúrio, sem deixar de explicar, graças à pequenez de λ, tôdas as observações conformes à lei de Newton. Mas é uma lei forjada *ad hoc* (o valor de λ foi calculado a partir da anomalia referida) e nem elimina a acção a distância.

11. Procurou-se a solução da dificuldade numa generalização da lei de Newton para corpos em movimento. Gauss, Riemann e Weber tinham proposto, para exprimir a acção mútua de duas cargas eléctricas pontuais, fórmulas que se reduziam à lei de Coulomb, portanto formalmente à lei de Newton, no caso de duas cargas em repouso. Naturalmente, ocorreu transportar para a gravitação estas leis electrodinâmicas. Fê-lo primeiro Zöllner com a lei de Weber: a atracção, que a massa m exerce sôbre a massa m' à distância r, deriva do potencial generalizado

$$V = f\frac{m\,m'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right),$$

onde f é a constante newtoniana e c é outra constante.

Êste potencial reduz-se ao potencial newtoniano se m' repousa relativamente a m e difere dêle muito pouco se m' se move; c é com efeito a velocidade com que o potencial se propaga a partir de m e vale, segundo Weber, 439450 km. por segundo. A lei proposta por Zöllner dá para o periélio de Mercúrio o movimento anómalo de $7''$ e não afecta os outros movimentos. Se se faz $c=300000$ km./sec., obtém-se $14''$ em vez de $7''$. A anomalia explica-se inteiramente supondo c sensivelmente igual a metade da velocidade da luz.

Tisserand propôs a adopção da lei de Gauss. A atracção de m sôbre m' seria em grandeza

$$F=f\frac{m\,m'}{r^2}\left(1+\frac{2v^2}{c^2}-\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right),$$

onde v designa a velocidade de m' relativamente a m. Para o mesmo valor de c, esta lei dá um movimento perielíaco duplo do que dá a lei de Weber. Objectou-se a Tisserand que a lei de Gauss não admite potencial.

A lei de Riemann foi examinada por Lévy. O potencial é agora

$$V=f\frac{m\,m'}{r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right),$$

e obtém-se com êle o mesmo movimento do periélio que com a lei de Gauss, se o valor de c é o mesmo nas duas leis. Considerando provável que a gravitação se propague com a velocidade da luz, Lévy propõe a lei

$$V=V_{\text{Weber}}+\alpha(V_{\text{Riemann}}-V_{\text{Weber}})$$

que, com $c=300000$ km./sec., explica o movimento do periélio de Mercúrio para $\alpha=2$, e pode ser aceite em Electrodinâmica, tanto como a lei de Weber.

Estas soluções representam um progresso evidente sôbre a solução de Hall, mas pecam ainda por um certo grau de artificialidade.

As ideas de Lorentz sôbre a natureza da gravitação conduziram-no a extrair a lei dêste fenómeno das equações fundamentais da sua teoria electrónica. A lei de Lorentz difere da de Newton em dois termos adicionais, que contêm respectivamente os factores $\frac{p^2}{c^2}$ e $\frac{pv}{c^2}$, onde p é a velocidade (constante) do corpo atraente, v a velocidade do corpo atraído e c a velocidade da luz. Como na lei de Gauss, os dois termos adicionais são muito pequenos e não produzem alteração sensível nos movimentos explicados pela lei newtoniana. Mas esta ausência de alteração subsiste quási inteiramente no movimento do periélio de Mercúrio, de modo que a teoria de Lorentz, a-pesar-das suas qualidades, tem de declarar-se insuficiente.

Laplace já indicara uma generalização da lei de Newton para corpos em movimento. Em seu parecer, do corpo atraente, suposto imóvel, saem ondas de gravitação newtoniana que se propagam no espaço com velocidade finita c; no instante em que uma destas ondas chega ao corpo atraído, animado da velocidade v, tudo se passa como se êste corpo estivesse em repouso e a onda possuísse uma velocidade igual e directamente oposta (além da sua velocidade de propagação). Laplace conclui daqui, violentando um pouco as coisas, que o segundo corpo é atraído por duas fôrças: uma dirigida para o corpo atraente e sensivelmente igual à fôrça newtoniana, outra oposta à sua velocidade e de grandeza $f\frac{mm'}{r^2}\cdot\frac{v}{c}$. É o resultado que se encontraria se se juntasse simplesmente à atracção de

Newton uma resistência de meio, proporcional à velocidade e inversamente proporcional ao quadrado da distância. A lei de Laplace não dá deslocamento secular do periélio, e introduz na longitude média uma alteração secular tão forte que, no caso da Lua, é preciso supor a velocidade de propagação das ondas igual a trinta milhões de vezes a da luz para não haver contradição com as observações.

Posteriormente, Lehmann-Filhès propôs uma hipótese análoga. A atracção que, num dado instante, o corpo B recebe da parte do corpo A é uma atracção newtoniana emitida num instante anterior, quando A ocupava outra posição no espaço absoluto; em geral, essa atracção não será dirigida para a posição actual de A, nem dependerá newtoniamente da distância actual de A e B. Como na hipótese de Laplace, há uma velocidade finita de propagação; mas a causa do desvio em relação à lei de Newton é aqui o movimento absoluto do corpo atraente e não o movimento relativo do corpo atraído. A influência dêste desvio é também uma grande alteração secular das longitudes médias; para a Lua, esta alteração só será aceitável se a velocidade com que se propaga a gravitação fôr um milhão de vezes maior que a da luz.

Outra teoria que conserva a lei de Newton só para corpos em repouso é a de Gerber. O corpo atraente A emite para o corpo atraído B um potencial, que se exprime newtonianamente em função da distância dos dois corpos no momento da emissão; mas, além de que êste potencial se propaga relativamente a A com grande velocidade c, há uma demora na comunicação efectiva ao corpo B do potencial que o atinge, demora que dilata a duração do transporte do potencial de A para B na razão da velocidade c para a velocidade do potencial relativamente a B. Tais hipóteses conduzem à seguinte expressão do potencial unitário efectivamente recebido por B à distância r de A:

$$V = \frac{fm}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

onde m é a massa de A. A aplicação desta fórmula ao movimento de Mercúrio dá a anomalia secular do periélio para $c = 305500$ km. por segundo. A teoria de Gerber é pois compatível com as observações quando se atribui à gravitação velocidade de propagação igual à da luz; mas algumas das hipóteses que lhe servem de base são dificilmente aceitáveis.

12. As tentativas no sentido de reduzir a gravitação a outro fenómeno físico surgiram muito cedo. O próprio Newton emitiu a hipótese, mais tarde renovada por Euler, de que a gravitação é um puro efeito de diferenças na pressão exercida pelo éter sôbre os corpos. O éter é para Newton um meio muito subtil e muito elástico, que existe por tôda a parte, dentro dos corpos e fora dêles. A presença dum corpo único produziria neste meio uma heterogeneidade tal, que a sua densidade seria mínima no interior do corpo e crescente com a distância no exterior. Se em vez dum corpo se supõem dois, as duas heterogeneidades que êles produziriam isoladamente combinam-se numa heterogeneidade mais complexa, mas é claro que o éter que rodeia um qualquer dêstes corpos é menos denso do lado do outro corpo que do lado oposto; como o meio deformado é sede de fôrças elásticas, que causam à superfície dum corpo uma pressão tanto maior quanto mais denso é o éter que está em contacto com ela, resulta que os dois corpos considerados devem atrair-se mùtuamente.

A heterogeneidade do éter concebida por Newton foi admitida por João Bernoulli, e depois por Riemann. Mas, para estes autores, o éter é um fluído, no qual a heterogeneidade determina correntes dirigidas para o interior dos corpos; são estas correntes que explicam a gravitação. Segundo Bernoulli, o éter acumula-se dentro dos corpos; na opinião de Riemann, o éter extingue-se ao penetrá-los, « passando ao mundo do espírito »: soluções pouco satisfatórias duma dificuldade.

Maxwell fêz a objecção decisiva a estas teorias. A energia de gravitação, idêntica para elas à energia de deformação do éter, será mais elevada onde a deformação fôr mais intensa; no caso dum corpo atraente único, portanto, será tanto maior quanto menor fôr a distância. Ora a verdade é justamente o contrário: a energia diminui com a distância, porque a fôrça de gravitação é atractiva.

Alguns físicos atribuíram a gravitação a vibrações do éter propagadas sob a forma de ondas longitudinais. Para Hooke, os átomos de qualquer corpo vibram perpètuamente; as vibrações comunicam-se ao éter, propagam-se através dêste e, ao atingirem outro corpo, aproximam-no do primeiro. A experiência mostra efectivamente que, em certas condições, um corpo vibrante atrai pequenos objectos vizinhos; mas noutras condições observa-se uma repulsão, e assim a hipótese de Hooke é insuficiente, necessitando ser completada com hipóteses adicionais que garantam sempre uma atracção. Bjerknes encontrou estas hipóteses estudando a questão matemàticamente. Partindo da suposição dum éter incompressível, ao qual se comunicam e através do qual se propagam longitudinalmente pulsações perpétuas dos átomos supostos esféricos e geomètricamente iguais, Bjerknes pôde demonstrar que dois átomos, situados a distância grande relativamente ao raio comum, devem atrair-se proporcionalmente às intensidades das suas pulsações e na razão inversa do quadrado da distância, desde que estas pulsações tenham a mesma freqüência e estejam em fase. Se se admite pois a igualdade de freqüência e de fase para as pulsações de todos os átomos, supondo além disso as intensidades das pulsações proporcionais às massas, explica-se a lei de Newton qualitativa e quantitativamente. Objectou-se a Bjerknes que o sincronismo das pulsações atómicas é suficientemente extraordinário para exigir por seu turno uma explicação.

Outras teorias com o mesmo objectivo basearam-se na hipótese de que o éter é constituído por partículas iguais extremamente pequenas, que se movem em tôdas as direcções com enorme velocidade e produzem a gravitação pelos seus choques com os corpos. Segundo Lesage, o primeiro autor que desenvolveu semelhante idea, um átomo ponderável único no seio do éter não teria movimento; as impulsões que lhe comunicariam as partículas étereas compensar-se-hiam exactamente, pela razão de simetria. Mas se existem dois átomos a distância, o equilíbrio é impossível: cada um intercepta parte dos choques que o outro receberia se fôsse único, donde resulta o equivalente duma atracção mútua. Admitindo que os átomos são muito grandes relativamente às partículas etéreas, pode provar-se que esta atracção é inversamente proporcional ao quadrado da distância, e directamente proporcional às massas se a substância dos átomos é a mesma. Para evitar que a atracção se anule por virtude da reflexão das partículas à superfície dos átomos, Lesage supõe-as desprovidas de elasticidade; assim, serão reflctidas com uma velocidade muito menor e a atracção é possível. Lesage admite também que os átomos possuem uma grande porosidade para as partículas etéreas, afim de conformar a sua teoria ao facto de não haver obstáculos à gravitação.

Mais tarde, Isenkrahe aperfeiçoou esta teoria em certos pontos. A concepção do éter como um gaz permite-lhe utilizar os resultados da teoria cinética dos gazes na expressão matemática da idea fundamental de Lesage; a porosidade dos átomos para as partículas etéreas é substituída pela porosidade dos corpos, que são constituídos por átomos muito distantes entre si; e a proporcionalidade da atracção às massas resulta de serem estes átomos absolutamente iguais (talvez idênticos às próprias partículas de éter). A obra de Isenkrahe foi melhorada por Rysanek com a introdução da lei de distribuïção das velocidades devida a Maxwell.

A hipótese dos choques etéreos teve grande voga, e Poincaré discutia-a ainda no comêço dêste século. Entre nós, o Sr. Dr. Costa Lobo insistiu recentemente nela. Mas as dificuldades a que está sujeita aconselham antes a abandoná-la. A gravitação só pode existir se as partículas de éter perdem velocidade nos choques com os átomos, e a maneira mais simples de obter isto consiste em supôr os choques não elásticos; mas surge a questão de saber em que se transforma a energia cinética perdida nos choques. Se esta energia ficasse nos átomos sob a forma de calor, a temperatura da Terra, segundo Poincaré, elevar-se-hia de 10^{26} graus por segundo. Encontrou-se que a posição dum corpo entre dois outros modifica essencialmente a atracção dêstes, e numa proporção demasiado forte para ser compatível com os factos. Calculou-se que a resistência oferecida aos movimentos planetários pelo éter corpuscular não pode harmonizar-se com as observações se as partículas etéreas não possuem velocidades enormes, da ordem de grandeza do quadrado da velocidade da luz (em km./sec.). A hipótese particular de serem os átomos ponderáveis idênticos às partículas de éter contradiz a variação da atracção com a distância, porque então um átomo dum corpo só pode defender um átomo doutro corpo dos choques das partículas que se movem na linha dos centros dos dois átomos, pelo menos (e é o caso dos astros) quando a distância dos dois corpos fôr tal que perante ela se possam considerar nulas as dimensões atómicas. Mencionemos ainda a objecção de du Bois-Reymond: suponha-se um corpo com a forma de tronco de cone circular recto e um átomo exterior situado no vértice da superfície cónica do corpo; a atracção que o corpo exerce sôbre o átomo será medida pela diferença entre duas impulsões sofridas por êste: a impulsão das partículas etéreas que provêm da região interior à segunda fôlha do cone, e a impulsão das partículas menos numerosas que, atravessando o corpo, provêm da região interior à primeira fôlha; o segundo têrmo da diferença diminui quando a massa do corpo aumenta; mas o primeiro têrmo mantém-se constante, donde resulta que a diferença não pode tornar-se arbitràriamente grande, como deveria ser. É evidente que se caïria numa dificuldade não menor declarando infinito êste primeiro têrmo.

13. Convencidos da impossibilidade duma explicação mecânica da gravitação, como era a que se propunham dar as teorias precedentes, — tanto mais que tôdas tendiam a justificar a lei de Newton, já considerada pura aproximação da lei exacta desconhecida, — certos físicos tentaram para o fenómeno refractário uma explicação electromagnética. Lorentz começou por ensaiar uma forma nova da hipótese de Hooke: a gravitação seria devida a vibrações electromagnéticas especiais produzidas pelos iões constitutivos dos corpos e propagadas por meio de ondas etéreas de comprimento muito pequeno. O resultado obtido foi a possibilidade duma atracção, contanto que afluísse continuamente energia electromagnética à matéria ponderável: qualquer artifício, tendente a evitar esta concentração da energia nos corpos, tinha por conseqüência o desaparecimento da fôrça atractiva. Em face disto, Lorentz decidiu-se a trilhar outro caminho. Aproveitando uma idea de Mossoti, Zöllner tinha opinado que cada átomo ponderável é constituído por duas partículas dotadas de cargas eléctricas iguais e contrárias, e que a gravitação mútua de dois átomos resulta de ser a repulsão eléctrica de duas cargas do mesmo sinal inferior à atracção eléctrica de duas cargas de sinais contrários respectivamente iguais em grandeza. Foi esta hipótese, primeiro tratada por Weber a partir da sua lei electrodinâmica, que Lorentz adaptou à teoria electrónica e desenvolveu completamente pela aplicação das equações fundamentais desta teoria. A gravitação reduzida a acções electromagnéticas, portanto propagada com a velocidade da luz, obedecendo a uma lei tão aproximada à de Newton para as velocidades astronómicas que ambas explicam quási todos os factos, são motivos de sedução na teoria de Lorentz. Mas o movimento residual do periélio de Mercúrio, já atrás o dissémos, ergue-se como um testemunho vivo da sua insuficiência.

Acrescentemos que a redução da gravitação ao electromagnetismo, proposta por Lorentz, pode dizer-se puramente verbal. Basta fazer na sua teoria uma mudança de notações para obter a sobreposição das duas ordens de fenómenos. Desde o comêço, isto era inevitável. A idea de que a gravitação resulta de ser a atracção eléctrica de duas cargas elementares de sinais contrários superior à repulsão eléctrica de duas cargas elementares do mesmo sinal, e a idea de que tal superioridade é que resulta, pelo contrário, de se sobrepor àquelas acções eléctricas, rigorosamente iguais, a gravitação mútua das cargas, são duas ideas equivalentes desde que à segunda se junte a hipótese de que a gravitação é regida de certo modo pelas leis da Electrodinâmica. Assim a teoria de Lorentz, essencialmente, não é mais que uma tentativa de transporte das equações da Electrodinâmica para a gravitação, e como tal a mencionámos noutro lugar (1).

14. Dois séculos de esforços não tinham conseguido uma solução satisfatória do problema da gravitação universal. Malogradas sucessivamente as tentativas de redução a fenómenos mecânicos ou electromagnéticos, malogradas também as teorias que atribuíam à gravitação o carácter de fenómeno irredutível, de propriedade *sui generis* da matéria, a Física transpunha o limiar do século XX numa atitude de verdadeira impotência perante o enigma formidável. Atingia-se um dêsses momentos históricos em que um problema rebelde exige imperiosamente uma revolução nas ideas. O sentido da revolução, porém, não podia tal problema indicá-lo neste caso; estava reservado êsse papel a certas questões de Electrodinâmica, igualmente críticas para a sciência da época. Num rasgo de génio, Einstein elimina estas questões fundando a física da Relatividade; abrem-se logo rumos novos ao problema da gravitação, e um dêles, o do próprio Einstein, ia conduzir à solução que finalmente se impõe, entre tôdas a mais original, a mais bela e a única conforme à experiência.

(1) Cf. Zenneck, *Gravitation*, in-*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band V, Heft 1, Leipzig und Berlin, donde extraímos a maior parte da informação dêste capítulo.

III

15. A concepção de Descartes, segundo a qual a luz consistiria numa emissão de partículas tenuíssimas, que se faria sentir instantâneamente a tôdas as distâncias por virtude da inexistência do vácuo, em breve foi arruïnada por Römer com a descoberta da velocidade finita da luz. Teve melhor fortuna a teoria newtoniana da emissão corpuscular através do espaço vasio, intermolecuar ou sideral. No começo do século XIX, porém, os físicos foram forçados, pelo desenvolvimento da experiência óptica, a substituí-la pela teoria ondulatória que Fresnel, guiado por Huygens, acabava de propor. O conceito de éter, que neste momento se implantou na Física, foi fecundo em resultados positivos; aos problemas que levantou, todavia, mais que a estes resultados, deve êsse conceito a sua grande importância histórica.

Maxwell deu à teoria ondulatória uma forma nova, que suplantou a anterior depois das célebres experiências de Hertz. Para Fresnel, o éter é um meio imponderável susceptível de vibrações transversais como um sólido elástico, e nestas vibrações mecânicas consiste justamente a luz. Segundo Maxwell, o éter é o dieléctrico imponderável existente no espaço vulgarmente chamado vasio, e serve de suporte, como os outros dieléctricos, a campos electromagnéticos que se propagam ondulatòriamente; estes campos são a luz, se a freqüência está compreendida em certos limites. A teoria electrónica de Lorentz, baseada nas equações de Maxwell, conservou o essencial desta concepção; a diferença é que o éter é agora o único suporte real dos campos: tôdas as propriedades eléctricas ou magnéticas, que manifestam macroscòpicamente os corpos ponderáveis, são mero resultado estatístico das posições e dos movimentos dos electrões existentes nêsses corpos.

As equações electrodinâmicas fundamentais foram estabelecidas por Maxwell para um sistema de referência imóvel no éter e para corpos em repouso neste sistema. Foi Hertz quem deu a primeira solução do problema da electrodinâmica dos corpos em movimento. As equações de Hertz possuem uma propriedade interessante: quando referidas a um sistema invariàvelmente ligado ao corpo em que os fenómenos electrodinâmicos se produzem, tornam-se idênticas às equações de Maxwell. O que, portanto, Hertz ajunta à teoria de Maxwell é essencialmente, do ponto de vista atomista, a hipótese da convecção total do éter contido nos corpos. Mas esta hipótese é incompatível com a experiência de Fizeau, que prova que a convecção do éter, a existir, é parcial. Experiências eléctricas posteriores contradizem-na também; e duma experiência óptica feita por Michelson em 1925 conclui-se claramente que o éter não sofre convecção por virtude da rotação da Terra. Pode acrescentar-se que é difícil admitir que o éter seja transportado totalmente por um gaz, qualquer que seja o estado de rarefacção dêste.

A teoria electrónica deu outra solução do problema. Sem admitir convecção alguma do éter, Lorentz conseguiu explicar numerosos fenómenos electrodinâmicos, incluindo o próprio coeficiente fresneliano de «convecção» que Fizeau atestara experimentalmente. Tão grande êxito justifica o esfôrço que fêz Lorentz para enquadrar nesta teoria os resultados de experiências discordantes de que em breve falaremos.

O éter imóvel de Lorentz é o equivalente electrodinâmico do espaço absoluto de Newton. É para um sistema de coordenadas absolutamente fixo que as equações da mecânica newtoniana são originàriamente válidas; para um sistema em movimento, estas equações adquirem em geral uma forma mais complexa, e os fenómenos mecânicos apresentam um aspecto diferente. Anàlogamente, as equações fundamentais da electrodinâmica de Lorentz valem para um sistema fixo no éter; perdem a sua forma simples, e o mesmo sucede aos fenómenos regidos por elas, se se passa a um sistema que não satisfaz a essa condição. Guiado por êste paralelismo, Lorentz chegou a identificar o éter com o espaço absoluto; a propriedade de desenvolver fôrças de inércia nos sistemas acelerados podia atribuir-se melhor ao éter concreto que a um espaço absoluto não substancial.

Há porém uma diferença importante a registar. Na Mecânica, para os sistemas em translação uniforme valem as mesmas equações que para um sistema fixo; donde resulta que o espaço absoluto é inacessível ao físico que faz experiências mecânicas num sistema não acelerado (princípio de relatividade da mecânica newtoniana). Na Electrodinâmica, a translação uniforme do sistema é bastante para dar às equações uma forma nova, que contém essencialmente a velocidade da translação; deve pois ser possível, por meio de experiências electrodinâmicas executadas num sistema não acelerado, determinar a velocidade absoluta do sistema. Estas conclusões valem em especial para a Terra, cuja aceleração é suficientemente pequena para não se manifestar na curta duração duma experiência.

Se a previsão se confirma, o homem terá feito um grande descobrimento no domínio da natureza; o mais inacessível dos elementos cósmicos terá cedido à sua inteligência. ¿Que não poderemos esperar no futuro da contínua aplicação do esfôrço humano ao mistério que nos envolve?

As experiências vão produzir uma decepção e uma surpreza; o homem não encontrará o éter que procurava, mas descobrirá que o espaço e o tempo, estas formas gerais do mundo, não são feitos como sempre pareceu, sim doutro modo; e esta descoberta será a fonte donde brotarão muitas outras, e dará uma física nova.

16. A questão já tinha sido formulada a propósito do éter de Fresnel. Segundo a teoria, os três caracteres dum raio luminoso, freqüência, velocidade e direcção, devem alterar-se quando o observador passa do estado de repouso no éter, digamos como atrás repouso absoluto, ao estado de movimento; e estas alterações dependerão da velocidade absoluta do observador. Um físico terrestre poderia portanto, mediante a observação cuidada de tais fenómenos, calcular a velocidade absoluta da terra. As alterações de freqüência e de direcção (efeito Doppler e aberração de Bradley) foram medidas o melhor possível, mas não permitiram atingir o *desideratum;* quanto à alteração de velocidade, não foi confirmada pela experiência. A explicação do insucesso deu-a a própria teoria de Fresnel. As medidas dos experimentadores não podiam ultrapassar a primeira ordem, isto é a ordem de grandeza da razão da velocidade da matéria ponderável para a velocidade da luz; ora, se nas fórmulas se desprezam as quantidades de segunda ordem, a alteração da velocidade da luz anula-se, a aberração e o efeito Doppler deixam de depender da velocidade absoluta para depender essencialmente só da velocidade relativa. Para o efeito Doppler, por exemplo, no caso particular em que a fonte luminosa e o observador se movem numa mesma recta com velocidades absolutas v_0 e v_1 contadas positivamente no sentido fonte-observador, tem-se rigorosamente

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v_1}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}},$$

onde ν é a freqüência própria, ν' a freqüência observada e c a velocidade da luz; encontra-se imediatamente, desenvolvendo e introduzindo a velocidade v do observador relativa à fonte,

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c} - \frac{v\,v_0}{c^2} - \ldots\right),$$

$$v = v_1 - v_0.$$

Bastaria que a segunda ordem fôsse acessível à medida para que o conhecimento de v desse um valor muito aproximado de v_0 e, portanto, de v_1; tendo de desprezar a segunda ordem, é simplesmente

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

onde já não figuram essencialmente velocidades absolutas.

A teoria de Lorentz confirmou estas conclusões e estendeu-as aos outros fenómenos electrodinâmicos. Limitando as fórmulas aos termos de primeira ordem, os efeitos electrodinâmicos, produzidos nos corpos em movimento, ou se anulam ou dependem só das velocidades relativas; não assim se se conservam os termos de segunda ordem, os quais dependem das velocidades absolutas de maneira essencial. Emquanto se furtarem à medida as quantidades de segunda ordem será pois impossível evidenciar o movimento absoluto da Terra; mas se se chega a vencer esta dificuldade técnica em qualquer experiência electrodinâmica, o movimento absoluto da Terra ficará conhecido.

Tôdas as experiências se mostraram conformes à primeira parte da proposição. Não sucedeu o mesmo com a segunda parte. Em 1881, Michelson concebeu uma experiência óptica que permitia, pelo emprêgo dum interferómetro de alta precisão, medir um efeito de segunda ordem. Dois fascículos luminosos, saídos da mesma fonte monocromática, interferem depois de fazer trajecto de ida e volta ao longo de dois braços iguais e perpendiculares; se se permutam os braços dando ao instrumento uma rotação de 90°, deve observar-se nas franjas de interferência um deslocamento de segunda ordem. Com efeito, sejam: a o comprimento de cada braço, φ o ângulo que faz um deles com o sentido do movimento absoluto da Terra numa época arbitrária, x o trajecto absoluto dum raio luminoso que percorre êste braço no sentido positivo, y o trajecto do mesmo raio quando percorre o braço em sentido contrário, x' e y' os trajectos absolutos da Terra correspondentes a x e y, β a razão da velocidade absoluta da Terra para a velocidade c da luz. Tem-se imediatamente

$$x^2 = a^2 + x'^2 + 2\,a\,x' \cos\varphi,$$
$$y^2 = a^2 + y'^2 - 2\,a\,y' \cos\varphi,$$
$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \beta;$$

atendendo a que x e y são quantidades positivas, estas equações dão para a duração do duplo trajecto do raio luminoso

$$(1) \qquad \frac{x+y}{c} = \frac{2a}{c} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2\varphi}}{1-\beta^2}.$$

Se ψ é o ângulo análogo a φ para o outro braço, a diferença das durações dos dois duplos trajectos é

$$\frac{2a}{c}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left(\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}-\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)$$

ou, desprezando a quarta ordem,

$$\varepsilon'=\frac{a}{c}\beta^2(\sin^2\psi-\sin^2\varphi).$$

Dando ao instrumento uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, de modo que o primeiro braço venha a ocupar a posição anterior do segundo, ψ substitui-se a φ e $\varphi+\pi$ a ψ; a diferença das durações dos dois duplos trajectos na nova posição é pois

$$\varepsilon''=-\varepsilon',$$

donde

$$\varepsilon'-\varepsilon''=\frac{2a}{c}\beta^2(\sin^2\psi-\sin^2\varphi).$$

O produto $c(\varepsilon'-\varepsilon'')$ é a diferença entre as diferenças de marcha dos dois raios na primeira e na segunda posições do instrumento; o sistema das franjas de interferência deve pois, quando se passa duma posição à outra, deslocar-se de tantas franjas quantos os comprimentos de onda λ contidos em $c(\varepsilon'-\varepsilon'')$, ou seja da quantidade de segunda ordem

$$\frac{2a}{\lambda}\beta^2(\sin^2\psi-\sin^2\varphi).$$

Esta quantidade atinge o máximo valor absoluto

$$\varepsilon=\frac{2a}{\lambda}\beta^2$$

se, na posição inicial, um dos braços do instrumento tem a direcção do movimento absoluto da Terra $\left(\text{p. ex. } \varphi=0, \psi=\frac{\pi}{2}\right)$.

Se se faz a experiência, utilizando várias posições iniciais do instrumento, sem observar deslocamento das franjas, poderá explicar-se o facto admitindo que a Terra, nessa época, se encontrava pràticamente em repouso absoluto. Mas sendo assim, seis meses depois a Terra terá velocidade absoluta vizinha de 60 km./sec. e a repetição da experiência deve dar resultado positivo; β^2 é agora da ordem de 10^{-8} e λ é da ordem de 10^{-5} cm., portanto não é necessário exagerar o valor de a para que ε se torne apreciável.

Ora, em nenhuma posição do instrumento e em nenhuma época do ano Michelson verificou deslocamento das franjas superior aos êrros de observação. O mesmo sucedeu em 1887, quando, de colaboração com Morley, aquele físico repetiu a experiência em condições de precisão maior ainda. Por meio dum artifício simples, o comprimento de cada braço do interferómetro era elevado a 11 metros; a luz era a da risca do sódio com $\lambda=0{,}59\,\mu$; tomando $\beta^2=10^{-8}$, que é a média mais desfavorável (correspondente à hipótese de ser a velocidade absoluta do Sol inferior ou igual à velocidade da Terra na sua órbita relativa), tem-se $\varepsilon=0{,}37$. O máximo deslocamento encontrado não excedia a vigésima parte dêste valor e caía dentro dos limites dos êrros de observação.

17. Não havia dúvida: o efeito anunciado não existe. Michelson viu nisto uma prova da convecção total do éter pela Terra; já dissemos porque tal opinião é insustentável. É também inadmissível a hipótese explicativa formulada mais tarde por Ritz, de que a velocidade da luz depende do movimento absoluto da fonte luminosa; De Sitter estabeleceu firmemente o contrário pelo estudo das observações das estrêlas duplas. Para salvar a sua electrodinâmica, Lorentz emitiu uma hipótese audaciosa que as experiências, contudo, não puderam contradizer. É claro que o efeito de Michelson desapareceria rigorosamente da teoria se o segundo membro de (1) não dependesse de φ; ora isto consegue-se formalmente multiplicando a por

$$\frac{f(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2\varphi}}, \tag{2}$$

onde $f(\beta)$ é uma função positiva arbitrária independente de φ; basta pois admitir que o movimento através do éter produz nos corpos a deformação caracterizada pelo coeficiente (2), para que a experiência de Michelson fique inteiramente explicada. Será inacessível à medição directa tal deformação, visto que também participam dela as réguas de medida.

A deformação suposta pode ser definida pelas suas componentes longitudinal e transversal, respectivamente

$$f(\beta) \quad \text{e} \quad \frac{f(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

obtêm-se pois as suas formas mais simples fazendo

$$f(\beta)=1,$$

o que dá simplesmente uma dilatação transversal, ou

$$f(\beta)=\sqrt{1-\beta^2}, \tag{3}$$

o que dá simplesmente uma contracção longitudinal e é a hipótese de Lorentz (1).

O célebre físico holandês mostrou que a própria teoria electrónica tende a confirmar a hipótese da contracção longitudinal desde que se admita que as fôrças moleculares se transmitem pelo éter e se alteram por efeito do movimento como as fôrças electromagnéticas. Visto que a forma e as dimensões dum corpo fixo são determinadas pelas acções moleculares, a translação deve alterar forma e dimensões, e imprimir exactamente a contracção longitudinal definida por (3) se se supõem em repouso relativo as moléculas do corpo. Mas, na realidade, as moléculas dum corpo nunca estão em repouso relativo.

Em todo caso, segundo Lorentz, nenhuma consideração teórica se opõe terminantemente à hipótese da contracção. Se nos dirigimos à experiência encontramos uma conclusão análoga, mas também nos convencemos da impossibilidade de comprovar a hipótese positivamente. A contracção dos corpos terrestres não pode ser medida de maneira directa, porque atinge também as réguas métricas; acresce que ela deve ser extremamente pequena: se a velocidade absoluta do Sol é da mesma ordem de grandeza que as velocidades astronómicas relativas, a contracção longitudinal da Terra é quando muito da ordem de grandeza do metro; só uma experiência interferencial, portanto, permitiria medi-la para um objecto de laboratório; ora, é claro que tal experiência não é senão a de Michelson, e esta, em virtude da ausência de deslocamento das franjas, não pode dar o resultado desejado.

(1) H. A. Lorentz, *Der Interferenzversuch Michelsons*, 1895, in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *Das Relativitätsprinzip*, 5 Aufl., Leipzig nnd Berlin, 1923. Independentemente de Lorentz, também Fitzgerald propôs a hipótese da contracção.

A experiência de Michelson foi repetida de novo, em 1905, por Morley e Miller, com braços doutra matéria no interferómetro. Se, na verdade, todos os corpos são contraídos longitudinalmente na razão $\sqrt{1-\beta^2}:1$, ainda a nova experiência deve dar resultado negativo. O dispositivo adoptado equivalia ao de 1881 com $a=32$ metros, o que dava $\varepsilon=1{,}08$; e a precisão tinha sido aumentada de modo a poder medir-se a centésima parte desta quantidade. Mas nem desta centésima parte as franjas foram deslocadas. Confirmavam-se as duas experiências anteriores e ficava de pé a hipótese de Lorentz.

Depois de Michelson, vários físicos conseguiram habilitar-se a medir efeitos de segunda ordem em experiências eléctricas. Executadas estas experiências, o resultado foi sempre negativo: nenhum dêsses efeitos foi observado, e a esperança de determinar a translação absoluta da Terra esvaiu-se geralmente. Entre as mais célebres experiências eléctricas de segunda ordem figura a de Trouton e Noble (1903). Segundo a electrodinâmica de Lorentz, um condensador carregado em repouso relativo é uma corrente de convecção, por virtude do movimento da Terra; e o campo magnético gerado por esta corrente deve imprimir ao condensador uma rotação de segunda ordem. O condensador foi suspenso por Trouton e Noble duma balança de torsão suficientemente sensível para evidenciar o efeito, mas êste não se produziu.

Importa citar também a experiência óptica de Rayleigh (1902) e Brace (1904). A anisotropia causada nas matérias amorfas pela contracção de Lorentz deve dar lugar a um efeito de dupla refracção, que é de segunda ordem; nenhum dos dois experimentadores, porém, encontrou vestígios de tal fenómeno. A manter-se a hipótese de Lorentz, a explicação da experiência de Rayleigh exige evidentemente uma hipótese suplementar.

Seja como fôr, tôdas as experiências concordam em justificar esta proposição importante: num corpo em translação uniforme, os fenómenos electrodinâmicos produzem-se segundo as mesmas leis que num corpo em repouso, até à segunda ordem *inclusive*, ou seja nos limites da mais alta precisão atingida pelos experimentadores.

18. De novo se encontrava em cheque a electrodinâmica de Lorentz. A hipótese da contracção longitudinal era incapaz de explicar totalmente as novas experiências. Que fazer? ¿Introduzir novas hipóteses adicionais? Poincaré já em 1900 indicara a possibilidade desta situação pouco cómoda. Muito mais satisfatório, com efeito, seria que a explicação daquelas experiências derivasse exclusivamente das hipóteses fundamentais da teoria. Foi ainda Lorentz quem tentou refazer neste sentido a electrodinâmica dos corpos em movimento [1]. Na teoria nova, em conseqüência das hipóteses fundamentais muitos fenómenos electrodinâmicos ficam independentes do movimento uniforme do sistema de referência (de velocidade inferior à da luz), e rigorosamente, sem desprêzo de termos de ordem superior. Já a hipótese da contracção longitudinal eliminava rigorosamente o pretenso efeito de Michelson. Agora, o acôrdo unânime de várias experiências da máxima precisão dava maior direito a considerar como lei da natureza a impossibilidade de evidenciar a translação uniforme. Contudo, Lorentz não conseguiu impor esta lei a todos os fenómenos.

O físico de Leyde parte das equações fundamentais da sua electrodinâmica dos sistemas em repouso. Referin-

---

[1] H. A. Lorentz, *Elektromagnetische Erscheinungen in einem System, das sich mit beliebiger, die des Lichtes nicht erreichender Geschwindigkeit bewegt*, 1904, trad. alemã in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*

do-as, pelas fórmulas da cinemática ordinária, a um sistema $Oxyz$ em translação uniforme no sentido Ox, de velocidade v inferior à da luz c, essas equações mudam de forma. Fazendo porém nas novas coordenadas a transformação

$$x' = kx, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$(4) \qquad t' = \frac{1}{k}t - k\frac{v}{c^2}x,$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

e juntando-lhe uma transformação conveniente das outras grandezas que figuram nas novas equações, estas (salvo um termo de segunda ordem na equação da divergência do campo eléctrico, termo nulo no caso electrostático) readquirem a forma primitiva.

Lorentz interpreta êste resultado dizendo que as equações em x', y', z', t' dum dado campo electrostático, ou dum campo que difira dêste infinitamente pouco, são as equações dum campo também electrostático num sistema fictício Σ' obtido a partir do sistema real em movimento Σ multiplicando por k os comprimentos paralelos a Ox; t' é o tempo de Σ': são pois multiplicados por $\frac{1}{k}$ os intervalos de tempo decorridos em cada ponto e são atribuídas diferentes origens aos tempos das diferentes abscissas (concepção do «tempo local»). No caso particular de Σ em repouso, é evidentemente Σ' idêntico a Σ.

Prosseguindo, Lorentz introduz a hipótese de que o electrão, suposto esférico quando em repouso, toma a forma dum elipsóide de revolução achatado se adquire a translação v, dividindo por k a sua dimensão longitudinal.

Um electrão imóvel em Σ será portanto esférico e imóvel em Σ'. Isto permite a Lorentz postular a realidade do sistema Σ'; êste sistema será justamente Σ imobilizado. A translação v produz pois em Σ contracção longitudinal das figuras e dilatação dos intervalos de tempo com rutura da simultaneidade.

Estabelecidas estas premissas, Lorentz mostra que muitos fenómenos, que na antiga teoria se apresentariam diferentemente num sistema em repouso e num sistema em movimento, devem apresentar-se com a mesma forma, rigorosamente, nos dois sistemas. Para a experiência de Michelson, por exemplo, isto é conseqüência imediata da contracção longitudinal do sistema em movimento. Rigorosa como é, esta identidade de forma existe para qualquer velocidade de translação que não atinja o valor da velocidade da luz, e não apenas para velocidades que permitam desprezar termos de ordem superior à primeira ou à segunda.

Com esta teoria, Lorentz preludiou muito mais nítidamente à teoria da Relatividade que com a simples hipótese da contracção a que o conduzira o resultado negativo da experiência de Michelson. A fórmula relativista, que dá a massa, electromagnética ou não, como função da velocidade, chega a aparecer na teoria de Lorentz. Mas tal teoria está ainda longe da de Einstein. Há nela um manifesto defeito de método, primeiro. Depois, a relatividade de Lorentz é parcial: existe só para certos fenómenos electrodinâmicos. Sôbretudo, é aparente: o sistema em repouso no éter tem ainda uma situação privilegiada, pois que as equações electrodinâmicas em Σ não têm a mesma forma que em Σ', e as deformações, que o espaço e o tempo sofrem pela translação, são absolutas. Emfim, estas deformações destroem a relatividade mecânica newtoniana, que Lorentz não pensa em reconstituir. Dificilmente poderia ser doutro modo, desde que Lorentz se não tinha elevado ao objectivo eminentemente filosófico que veio a desenhar-se no espírito de Einstein.

Há na Memória de Lorentz um resultado formal muito importante. Se ξ, η, ζ são as coordenadas, no sistema fixo inicial, do ponto x, y, z de Σ, tem-se com a disposição de eixos que adopta Lorentz

$$x=\xi-vt, \quad y=\eta, \quad z=\zeta,$$

donde, por (4), resulta fàcilmente

$$(5) \qquad \begin{gathered} x'=k(\xi-vt), \quad y'=\eta, \quad z'=\zeta, \\ t'=k\left(t-\frac{v\xi}{c^2}\right). \end{gathered}$$

Dissémos que as equações electrodinâmicas em x', y', z', t', salvo uma restrição que mencionámos, têm a mesma forma que as equações em ξ, η, ζ, t. A transformação (5) produz pois a invariância quási completa das equações fundamentais da electrodinâmica, se as outras grandezas que figuram nestas equações se transformam como foi indicado por Lorentz.

Poincaré [1] procurou estender a relatividade precedente a todos os fenómenos electrodinâmicos. Não podendo libertar-se do ponto de vista de Lorentz, de cuja teoria conserva as ideas essenciais, encontrou todavia, independentemente de Einstein, que as fórmulas (5) representam um grupo contínuo de transformações, o qual deixa completamente invariantes as equações da electro-

[1] *Sur la dynamique de l'électron*, Nota, 1905; Memória, 1906; in-H. Poincaré, *La Mécanique nouvelle*, Paris, 1924.

dinâmica desde que as transformações propostas por Lorentz para a densidade eléctrica e para a velocidade sejam substituídas por outras. Sem a validade desta proposição, a relatividade einsteiniana não poderia subsistir.

19. Com que fôrça se impõe a convicção de que é impossível revelar o movimento rectilíneo uniforme dum sistema de referência por meio de experiências electrodinâmicas efectuadas neste sistema, mostram-no bem os ensaios de Lorentz e Poincaré, e não fêz mais que confirmá-lo a experiência posterior. Assim, o éter imóvel de Lorentz é tão inacessível ao físico como o espaço absoluto abstracto de Newton, e deve ser declarado inexistente se nada mais o justifica. É êste o caso; à Física, pois, deve ser estranha a noção de espaço absoluto sob qualquer das suas formas.

Dir-se-há que a natureza ondulatória da luz exige alguma coisa que ondule, portanto um éter. Mas pretender que é o próprio éter que ondula, seria regressar à teoria elástica de Fresnel. O que ondula na luz, desde Maxwell, principalmente desde Lorentz, é o campo electromagnético, idêntico à própria luz (ou parte integrante dela, na teoria dos fotões de Einstein). Os continuadores de Faraday pensavam que um campo de fôrça exige um suporte material. Estavam convencidos de que a energia é distinta da matéria e só pode existir ligada a esta. Segundo a teoria da Relatividade, a matéria e a energia não se distinguem essencialmente; onde há matéria isolada no espaço, há energia isolada, e recìprocamente.

Pareceu a Newton que as fôrças centrífugas, que se manifestam num sistema acelerado, revelam o carácter absoluto da aceleração. Mas, como notou Mach, o que elas revelam positivamente é a aceleração relativa à Galaxia. Por ora não nos ocupamos de sistemas acelerados.

Adiante veremos que Einstein elucidou completamente a questão com a sua teoria da Relatividade geral.

Em todos os sistemas considerados como animados de translação absoluta rectilínea e uniforme, isto é em todos os sistemas que se movem rectilínea e uniformemente em relação à Galaxia (sistemas de inércia, a cuja família pertence a Terra em cada pequeno intervalo de tempo), os fenómenos electrodinâmicos obedecem às mesmas leis, tal como sucede aos fenómenos mecânicos. Eis o que resulta enérgica e unânimente dos factos, em vez do almejado éter. Subordine-se a Física a esta proposição (princípio da relatividade especial de Einstein) e o tormentoso problema do movimento absoluto da Terra ficará *ipso facto* suprimido (1). ¿Quem sabe se tal princípio não virá dar à Física a capacidade que lhe faltava para resolver outros problemas assoberbantes?

Decidido a executar êste programa, Einstein deparou logo com uma dificuldade considerável. O seu princípio de relatividade exige que as equações da Física não mudem de forma pela passagem dum sistema de inércia arbitrário a outro da mesma espécie. Porém a transformação cinemática de Galileu (2)

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$t \text{ absoluto},$$

que permite efectuar esta passagem, deixa invariantes as

(1) A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, 1905, in Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*; *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1920; *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1922.

(2) Eixos cartesianos ortogonais, na mais simples disposição; v é a velocidade (algébrica) de $O'x'y'z'$ relativamente a $Oxyz$, e a origem do tempo é o instante em que O e O' coïncidem.

equações fundamentais da Mecânica, mas não as da Electrodinâmica. Está vedado duvidar da exactidão das equações da Electrodinâmica, verificadas por inúmeras experiências de precisão extrema. Logo, a transformação de Galileu não pode ser verdadeira. Mas não resulta esta transformação, com tôda a evidência, das próprias noções fundamentais de espaço e tempo, tais quais existiram sempre em todos os espíritos? Pois bem: estas noções, sem dúvida aproximadas, não podem ser exactas. Haja ou não algum *a priori* sob as nossas noções de espaço e tempo, é certo que estas só perdem o que originalmente contêm de indefinido, de amorfo, por via da experiência física e pela introdução do número. Assim como as medidas de objectos em repouso relativo conduziram à forma euclidiana da noção de espaço, assim também a forma galileana das relações mútuas do espaço e do tempo é o resultado das medidas cinemáticas. Desde a descoberta das geometrias abstractas não euclidianas, sabe-se o que significa a afirmação da euclidianidade do espaço: é euclidiana a região do espaço acessível à nossa exploração actual (1). Naturalmente, estendemos esta euclidianidade ao espaço inteiro; mas nada garante tal extensão, que fica à mercê dos progressos da experiência. Ora a experiência cinemática, que justifica a transformação de Galileu, é totalmente feita sôbre velocidades incomparàvelmente menores que a maior velocidade conhecida: a da luz (2) no vácuo. Portanto a forma galileana das relações mútuas do espaço e do tempo carece absolutamente de funda-

(1) Como veremos, a teoria da Relatividade geral previu, e a experiência confirmou, que na vizinhança dos grandes astros o espaço é sensivelmente não euclidiano.

(2) Por luz entenderemos sempre uma radiação electromagnética qualquer.

mento para velocidades elevadas. ¿Como pode hesitar-se em corrigi-la sob as indicações seguras duma experiência menos restrita?

Nas bases lógicas da cinemática galileana deve haver o quer que seja de arbitrário, que é preciso, antes de tudo, descobrir. Abalado êsse edifício até aos alicerces, nada impedirá que se desmorone para dar lugar ao edifício da cinemática nova.

IV

20. A concepção ordinária do espaço e do tempo, em que se apoia a cinemática clássica, foi precisada por Newton nos termos seguintes (*Principia*, Def., Sch.):

«Tempus absolutum, verum et mathematicum, in se et natura sua sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur duratio; relativum, apparens et vulgare est sensibilis et externa quævis durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur... Spatium absolutum, natura sua sine relatione ad externum quodvis, semper manet similare et immobile; relativum est spatii huius mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur et a vulgo pro spatio immobile usurpatur...».

Para o espaço e o tempo absolutos postulou Newton as leis fundamentais da Mecânica. «In rebus philosophicis abstrahendum est a sensibus». Nada é mais inadmissível que êste procedimento de Newton. Um tempo e um espaço em si, sem relação com um objecto exterior, não podem caber na Física, quanto mais servir-lhe de base. O espaço do físico é necessáriamente o espaço relativo a um corpo rígido (espaço de referência), isto é o espaço que resulta de prolongar o corpo justapondo-lhe idealmente outros corpos rígidos até se atingir um corpo arbitrário. Também o tempo do físico é necessáriamente dado por um movimento num espaço de referência. As ideas de espaço em si e de tempo em si provieram da tendência vulgar de atribuir carácter absoluto àquilo que na vida ordinária tem elevada preponderância: tais o espaço relativo à Terra e o tempo astronómico nas apreciações de posição e de duração.

Só tem realidade física, portanto, o espaço e o tempo que Newton considerava aparentes. Se a sua mecânica tem algum valor é porque as leis fundamentais, embora enunciadas em termos de espaço absoluto e de tempo absoluto, são extraídas das experiências que Galileu referia a espaço e tempo relativos, e são aplicadas a espaço e tempo relativos também.

Em face disto, pode parecer que os conceitos de espaço absoluto e tempo absoluto não são indispensáveis à física newtoniana. Mas não é assim. O espaço e o tempo absolutos são o fundamento necessário do espaço e do tempo relativos de Newton; é porque existem aqueles que há entre estes certas relações de importância capital. Os tempos relativos são medidas externas da duração absoluta, exactas ou inexactas; as exactas, únicas que convêm à Física teórica, são evidentemente iguais. Há pois um só tempo físico exacto e, neste sentido, a física newtoniana admite um tempo absoluto. Os espaços relativos são medidas móveis do espaço em si; supondo-as exactamente executadas, como faz a Física teórica, estas medidas são iguais. A métrica de qualquer espaço de referência, portanto, é também absoluta na física newtoniana.

O carácter absoluto das medidas de tempo e o carácter absoluto das medidas de espaço são essenciais para a cinemática clássica. Reconhece-se imediatamente que a demonstração da transformação de Galileu é impossível se não se admite que o intervalo de tempo decorrido entre dois acontecimentos, por um lado, e a distância de dois pontos dum corpo rígido, por outro lado, são independentes do espaço de referência. Ora estas hipóteses não se impõem como à primeira vista parece. As medidas de intervalos de tempo e de distâncias exigem idealmente: *a*) que em cada pequena região de cada espaço de referência exista um físico provido dum relógio e duma régua rígida; *b*) que todos os relógios e réguas sejam da mesma construção. Se fôssem possíveis sinais instantâneos a distância, e se houvesse a certeza de que o movimento não altera a marcha dos relógios, a hipótese do tempo absoluto teria fundamento físico; mediante a emissão dum tal sinal, todos os relógios adquiririam um sincronismo perpétuo. O mesmo se diria da hipótese da métrica espacial absoluta, se fôsse certo que as réguas em movimento obedecem ao postulado euclidiano da invariabilidade. Mas nem há sinais instantâneos a distância, nem é evidente *a priori* que o movimento não influi na marcha dum relógio ou no comprimento duma régua. As duas hipóteses consideradas só não são arbitrárias na medida em que uma experiência relativamente grosseira as justifica (1).

É lícito tirar uma conclusão mais redical ainda. O tempo absoluto não pode existir sem acção instantânea a distância. Visto que é impossível defender sèriamente uma acção dêste género, o tempo absoluto tem que desaparecer da Física. Mais que arbitrária em alto gráu, os próprios fundamentos da velha cinemática a declaram inadmissível, como já o fizeram o princípio de relatividade e as equações da Electrodinâmica.

21. ¿Mas o abandono da transformação de Galileu não implica a queda do princípio de relatividade no do-

(1) A evidência aparente destas hipóteses baseia-se em que a luz parece informar-nos instantâneamente dos acontecimentos que se produzem a distância.

mínio da Mecânica? Esta observação, último argumento a favor da cinemática clássica, não pode deter-nos; pois é claro que tal se não dará, desde que à Mecânica se atribuam equações relativistas que se reduzam pràticamente às equações newtonianas para as pequenas velocidades. É de prever que isto seja possível porquanto, para estas velocidades, a nova transformação cinemática tem de reduzir-se à transformação de Galileu sob pena de ser inadmissível. Que a previsão não é enganosa vê-lo hemos adiante.

Segundo o princípio de relatividade, nada de absoluto distingue os espaços de inércia; em todos a natureza manifesta as mesmas leis e, com igual direito, qualquer deles pode ser considerado imóvel pelos observadores respectivos. Imaginemos distribuídos localmente, em todos os espaços de inércia, relógios e réguas métricas da mesma construção, e consideremos um dêstes espaços. Qualquer que êle seja, as medidas de espaço e de tempo nêle efectuadas são medidas reais (1). As réguas permitirão medir comprimentos quaisquer e revelarão que o espaço de inércia considerado é euclidiano. Mas os relógios não permitirão medir o intervalo de tempo decorrido entre dois acontecimentos distantes se não estiverem sincronizados. Como obter êste sincronismo?

É sabido que, no vácuo dum espaço de referência em que as equações da Electrodinâmica são válidas, a luz se propaga em todos os sentidos com a mesma velocidade *c*, igual à razão entre as unidades electromagnética e electrostática de carga eléctrica. Já dissémos que a experiência não permite duvidar destas equações para o espaço de

(1) Ao contrário do que pensou Lorentz, para quem eram ilusórias as medidas de espaço e de tempo que não fôssem feitas por observadores imóveis no éter.

referência da Terra, qualquer que seja a posição desta na sua órbita; em virtude do princípio de relatividade, portanto, as equações da Electrodinâmica têm validade para todos os espaços de inércia. Segue-se que em todos estes espaços a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c. O significado desta proposição, em última análise, é que o caminho percorrido por uma onda luminosa num espaço de inércia qualquer varia proporcionalmente ao ângulo horário duma estrêla apreciado da Terra; é o movimento diurno da esfera celeste, com efeito, que define realmente o tempo na física clássica. Mas tal definição geocentrista do tempo só pode convir à Terra; se a física clássica podia contentar-se com ela, é porque admitia o tempo absoluto. Em verdade, necessitamos duma definição do tempo que seja aplicável directamente a todos os espaços de inércia. Ora a proposição que estamos considerando dá justamente esta definição, se a elevamos à ordem dum princípio (princípio da constância da velocidade da luz, de Einstein); a uniformidade do movimento diurno torna-se então um puro facto da experiência terrestre, que a Mecânica terá de explicar.

Em princípio, pois, a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal para os espaços de inércia. Isto permite, em primeiro lugar, atribuir aos relógios uma construção perfeita, isto é admitir que todos estão regulados pelo movimento da luz. Em segundo lugar, permite obter o sincronismo dos relógios no espaço de inércia arbitrário em que nos tínhamos fixado. Sejam com efeito, neste espaço, dois relógios distantes A e B. No instante t marcado por A envie-se de A um sinal luminoso que voltará a A depois de ser reflectido em B; seja τ o instante da reflexão em B marcado por B e t' o instante da recepção em A marcado por A; o relógio A é perfeito se fôr sempre

$$t' = t + \text{const.};$$

os dois relógios perfeitos serão síncronos uma vez que seja

$$\tau = \frac{t+t'}{2}.$$

Dêste modo fica bem definido um tempo em cada espaço de inércia. Prevê-se já que êstes tempos não são idênticos, isto é que os sincronismos obtidos nos diversos espaços não se confundem num sincronismo universal, dado que a nossa definição se baseia numa acção progressiva e não na fantástica acção a distância.

Os observadores pertencentes a um espaço de inércia qualquer estão agora habilitados a situar os acontecimentos não só no espaço, referindo-os a um sistema de eixos rectangulares, mas também no tempo, referindo-os a um instante arbitrário. Resta saber que relações existem entre as coordenadas de espaço e tempo dum mesmo acontecimento em dois sistemas de inércia diferentes S e S'. A solução dêste problema será a transformação cinemática que vem substituir a transformação de Galileu.

22. Suponhamos que, no sistema S, um raio luminoso emitido em $P_1(x_1, x_2, x_3)$ no instante t é recebido em $P_2(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)$ no instante $t+\Delta t$; tem-se

$$\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2-c^2\Delta t^2=0.$$

No sistema S', o mesmo raio terá sido emitido em $P_1'(x_1', x_2', x_3')$ no instante t' e recebido em $P'_2(x_1'+\Delta x_1', x_2'+\Delta x_2', x_3'+\Delta x_3')$ no instante $t'+\Delta t'$, e tem-se anàlogamente

$$\Delta x_1'^2+\Delta x_2'^2+\Delta x_3'^2-c^2\Delta t'^2=0.$$

A primeira equação deve ser conseqüência da segunda em virtude da transformação procurada. Será pois, para dois acontecimentos quaisquer,

$$\Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 - c^2 \Delta t'^2 =$$
$$= \lambda(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - c^2 \Delta t^2),$$

onde λ, por motivo da homogeneidade do espaço e do tempo, é independente dos dois acontecimentos, só podendo, porisso, depender da velocidade de S' relativa a S. Façamos

$$i c t = x_4,\ i c t' = x_4',\ i = \sqrt{-1};$$

ter-se-há

$$\Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 + \Delta x_4'^2 = \lambda(\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2).$$

É evidente que se obtêm as transformações, que convertem a primeira expressão na segunda, multiplicando por $\sqrt{\lambda}$ os segundos membros das transformações que deixam a primeira expressão invariante; não sendo estas outra coisa que as transformações cartesianas ortogonais do espaço euclidiano de quatro dimensões, aquelas escrevem-se, nas notações correntes do cálculo tensorial,

(1) $$x'_\mu = \sqrt{\lambda}\,(a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha),$$

com

(2) $$b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = b_{\alpha\mu} b_{\alpha\nu} = \begin{cases} 1\ (\mu = \nu), \\ 0\ (\mu \neq \nu). \end{cases}$$

Admitamos que os acontecimentos-origens coïncidem, isto é que S e S' são tais que as suas origens coïncidem quando os relógios respectivos marcam ambos zero; temos então

$$a_\mu = 0,$$

e a transformação (1), abstraindo do factor $\sqrt{\lambda}$, é uma rotação do sistema de eixos do espaço quadridimensional em volta da origem Ω. O caso mais simples é aquele em que só dois eixos efectuam a rotação; esta dá-se então no plano dos dois eixos e só as coordenadas correspondentes se transformam. Por outro lado, se os dois sistemas S e S' pertencem a espaços de inércia diferentes, a orientação mais simples que pode atribuir-se-lhes é a que consiste em serem Ox_1 e $O'x_1'$ paralelos à direcção do movimento relativo (portanto permanentemente coïncidentes), com Ox_2 e $O'x_2'$, bem como Ox_3 e $O'x_3'$, paralelos entre si, e coïncidindo os sentidos positivos em cada par de eixos paralelos (¹). Nestas condições, no espaço euclidiano quadridimensional a coordenada x_1' transforma-se; havendo pelo menos uma coordenada de espaço que se não transforma, a razão de simetria faz concluir que se não transformam x_2' e x_3'; logo, tem que se transformar x_4', e (1) converte-se, de harmonia com (2), em

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
x_1' &= \sqrt{\lambda}\,(x_1 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi), \\
x_2' &= \sqrt{\lambda}\,x_2, \\
x_3' &= \sqrt{\lambda}\,x_3, \\
x_4' &= \sqrt{\lambda}\,(x_1 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi),
\end{aligned}
$$

onde φ é o ângulo da rotação dos eixos $\Omega x_1'$ e $\Omega x_4'$.

A segunda e a terceira equações mostram que λ é positivo. Além disso, o radical que nelas figura deve tomar-se positivo, dada a disposição dos eixos em S e S'. Será por conseguinte, designando por v a velocidade al-

(¹) A possibilidade desta orientação dos dois sistemas S e S' é garantida por simples razões de simetria.

gébrica de S' relativa a S,

$$x_2' = \rho(v)\, x_2,$$

onde $\rho(v)$ é uma função positiva. Ao observador de S' a ordenada x_2 apareceria alterada. Mas esta ordenada é normal à direcção do movimento e por isso tal alteração só dependerá da grandeza e não do sinal da velocidade v; $\rho(v)$ é pois uma função par. Por outro lado, o princípio de relatividade exige que seja

$$x_2 = \rho(-v)\, x_2',$$

visto que a velocidade de S relativa a S' é $-v$. Tem-se assim

$$\rho(v) = \rho(-v),$$

$$\rho(v) \cdot \rho(-v) = 1,$$

donde

$$\rho(v) = 1,$$

o que prova ser

$$\lambda = 1$$

e

$$x_2' = x_2,$$

$$x_3' = x_3.$$

Introduzindo de novo os tempos t e t', a primeira e a quarta fórmulas (3) dão

$$x_1' = \sqrt{\lambda}\,(x_1 \cos\varphi - i\,c\,t \sin\varphi),$$

$$t' = \sqrt{\lambda}\left(-i\,\frac{x_1}{c} \sin\varphi + t\cos\varphi\right);$$

em cada uma destas equações, $\sqrt{\lambda}$ tem um dos valores ± 1.

Ora, de ser $x_1 = vt$ para $x_1' = 0$, resulta

$$v t \cos\varphi - i c t \sin\varphi = 0$$

ou

$$i \operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{c}, \tag{4}$$

o que dá

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad i\sin\varphi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

com o mesmo sinal para os dois radicais. É pois, finalmente,

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

com os radicais ambos positivos; com efeito, para cada valor de t, x_1' cresce com x_1 e, para cada valor de x_1, t' cresce com t.

É claro que x_1, x_2, x_3, t se exprimem em função de x_1', x_2', x_3', t' por equações da mesma forma, salvo a mudança de v em $-v$; a fórmula (4) mostra efectivamente que φ e v mudam de sinal um com o outro.

Chegámos à transformação cinemática einsteiniana, a qual coïncide com a transformação (5) do n.º 18 e por isso se denomina transformação de Lorentz. Vê-se que ela se reduz à transformação de Galileu, pràticamente, quando v é muito pequeno em relação a c, e rigorosamente, qualquer que seja v, se se substitui c por ∞. Assim se confirma o que dissémos precedentemente: a cinemática galileana vale para as velocidades que entram nas aplicações da mecânica clássica, mesmo astronómicas, mas só dum modo aproximado; é impossível considerá-la como rigorosa sem postular implìcitamente uma transmissão instantânea a distância.

Sejam dados dois sistemas de inércia S_0 e S_1, orientados dum modo qualquer. Introduzindo dois sistemas auxiliares orientados como precedentemente, S imóvel em S_0 e S' imóvel em S_1, torna-se manifesto que se obtém a transformação cinemática entre S_0 e S_1 compondo uma transformação cartesiana, uma transformação de Lorentz e outra transformação cartesiana, prolongadas a primeira e a terceira pela transformação idêntica do tempo.

23. O intervalo de tempo, a simultaneidade e o comprimento não são absolutos na cinemática de Einstein.

Sejam x_1', $x_1'+\Delta x_1'$ ($\Delta x_1'>0$) as abscissas de dois pontos dum corpo rígido, imóvel em S', situados numa paralela à direcção do movimento relativo. A distância dêstes dois pontos, em S', é $\Delta x_1'$; em S é a de dois pontos, de abscissas x_1, $x_1+\Delta x_1$, que coïncidem com êles num instante arbitrário t. A segunda e a terceira equações (5) mostram que os dois pontos de S estão situados também numa paralela à direcção do movimento relativo; mas a primeira equação dá

$$\Delta x_1 = \Delta x_1' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

isto é, as distâncias longitudinais de S' apresentam-se contraídas ao observador de S. Esta contracção é quantitativamente idêntica à contracção de Lorentz. As distâncias normais à direcção do movimento não apresentam alteração. Resulta que os volumes se apresentam contraídos na mesma proporção que as distâncias longitudinais.

Pela equação

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

inversa da quarta (5), acontecimentos simultâneos em S' são sucessivos em S se têm em S' abscissas diferentes (rutura da simultaneidade). Assim como, através do tempo, um ponto arbitrário de S' se sobrepõe a todos os pontos duma recta de S, assim também, através do espaço (através de qualquer recta paralela à direcção do movimento), um instante arbitrário de S' se sobrepõe a todos os instantes de S. O puro ponto, ou o puro instante de S', só para S' são tais. Pelo contrário, a cada acontecimento (ponto + instante) em S' corresponde sempre um só acontecimento em S; o acontecimento tem carácter absoluto, e de facto é êle o verdadeiro elemento da descrição física.

A mesma equação conduz a outro resultado importante. Sejam t' e $t' + \Delta t'$ ($\Delta t' > 0$) dois instantes marcados por um relógio imóvel em S', de abscissa x'_1. Entre êstes dois instantes decorre em S' o intervalo de tempo $\Delta t'$; em S, entre os instantes t, $t + \Delta t$ correspondentes, decorre o intervalo de tempo Δt e tem-se

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

isto é, o intervalo de tempo decorrido no relógio de S' apresenta-se dilatado ao observador de S. Para êste observador, os relógios de S' marcham mais lentamente que os seus. Por conseqüência a luz duma fonte monocromática, imóvel em S', tem em S menor freqüência, segundo a relação

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

êste efeito sôbrepõe-se naturalmente ao efeito Doppler, mas é de segunda ordem e independente da direcção da velocidade.

A velocidade relativa de dois sistemas de inércia reais não pode ultrapassar, nem sequer atingir a velocidade da luz. Para $v = c$, os volumes e os intervalos de tempo de S' seriam respectivamente nulos e infinitos em S; para $v > c$ seriam imaginários. Num ou noutro caso, S' seria inexistente para o físico de S.

Nenhum processo físico pode ter velocidade superior à da luz. Imaginemos com efeito, em S, uma propagação que parte do ponto $(x_1, 0, 0)$ no instante t e chega ao ponto $(x_1 + \Delta x_1, 0, 0)$ no instante $t + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$, sendo

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = k > c.$$

Ter-se hia em S', pela transformação de Lorentz,

$$\Delta t' = \Delta t \frac{1 - \frac{vk}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

para $v > \frac{c^2}{k}$ seria $\Delta t' < 0$, isto é, a propagação teria partido do segundo ponto para o primeiro. Assim, em certos sistemas de inércia a causa seria posterior ao efeito, o que é absurdo. Segue-se que dois acontecimentos, que se produzem com um intervalo de tempo inferior ao que a luz gastaria em percorrer a sua distância no espaço, são necessáriamente independentes e têm uma ordem de sucessão puramente relativa; em particular, existe um sistema de referência para o qual os dois acontecimentos são simultâneos $\left(\Delta t' = 0 \text{ se } v = \frac{c^2}{k}\right)$.

As transformações de Lorentz, sendo, como vimos, rotações planas dum espaço euclidiano quadridimensional (imaginário), formam evidentemente um grupo monoparamétrico. Sejam S, S', S'' três sistemas de inércia em translação relativa numa só direcção e com eixos dispostos do modo simples precedentemente adoptado. Designemos por v a velocidade de S' relativa a S, por v' a de S'' relativa a S' e por u a de S'' relativa a S. Compondo a transformação de S' em S e a de S'' em S', há-de obter-se a transformação de S'' em S; importa saber como se exprime u em função de v e de v'.

A questão resolve-se imediatamente pela aplicação da igualdade (4). Pondo

$$i \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}, \quad i \operatorname{tg} \varphi' = \frac{v'}{c},$$

será

$$i \operatorname{tg} (\varphi + \varphi') = \frac{u}{c}$$

e portanto

$$u = \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{c^2}};$$

esta equação é a forma mais simples do teorema da adição das velocidades de Einstein. Verifica-se que as desigualdades simultâneas $v<c$, $v'<c$ exigem $u<c$, como devia ser.

Substituamos o sistema S'' por um ponto M animado dum movimento qualquer. A transformação inversa de (5), pondo

$$\frac{d x_i}{d t}=u_i, \quad \frac{d x_i'}{d t'}=u_i', \quad i=1,\ 2,\ 3,$$

dá as equações

$$(6) \quad u_1=\frac{v+u_1'}{1+\frac{v u_1'}{c^2}}, \quad u_2=\frac{u_2'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v u_1'}{c^2}}, \quad u_3=\frac{u_3'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v u_1'}{c^2}},$$

que generalizam a equação precedente. Se o ponto M pertence a uma onda luminosa plana, que se propaga paralelamente à direcção do movimento relativo de S e S', deve ser $u_1'=\pm c$, $u_2'=u_3'=0$ e $u_1=\pm c$, $u_2=u_3=0$; êstes valores satisfazem efectivamente às equações (6).

A célebre experiência de Fizeau sôbre a propagação da luz num meio em movimento, que as teorias de Fresnel e de Lorentz explicavam com dificuldade, explica-se imediatamente pelo teorema de Einstein. Basta fazer em (6)

$$u_1'=\frac{c}{n}, \quad u_2'=0, \quad u_3'=0,$$

sendo n o índice de refracção do meio em movimento S', para se obter

$$u_1=\frac{v+\frac{c}{n}}{1+\frac{v}{c n}}, \quad u_2=0, \quad u_3=0;$$

a primeira fórmula pode escrever-se, desprezando a segunda ordem,

$$\frac{u_1}{c} = \frac{1}{n} + \frac{v}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

ou

$$u_1 = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

que é exactamente a fórmula de Fresnel verificada por Fizeau (e posteriormente por Michelson e Morley, e por Zeemann).

24. O princípio da relatividade especial exige pois que as equações da Física sejam invariantes de forma perante a transformação de Lorentz. As equações clássicas da Electrodinâmica estão de tal modo comprovadas pela experiência que devem satisfazer ao princípio de relatividade sem modificação. Pode verificar-se directamente que assim é. Sejam, no sistema S, ρ a densidade de carga, u a velocidade respectiva, E o campo eléctrico, H o campo magnético; as equações electrodinâmicas escrevem-se, em unidades mixtas da Lorentz,

$$(7) \qquad \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \rho u\right) = \operatorname{rot} H, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot} E,$$
$$\operatorname{div} E = \rho, \qquad \operatorname{div} H = 0,$$

onde c designa, como sempre, a velocidade da luz. Projectando sôbre os eixos e efectuando a passagem ao sistema S' por meio da transformação de Lorentz, obtêm-se, supondo primeiro $\rho=0$, equações da mesma forma com

$$E'_x=E_x, \qquad H'_x=H_x;$$

$$(8) \qquad E'_y=\frac{E_y-\frac{v}{c}H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad H'_y=\frac{H_y+\frac{v}{c}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E'_z=\frac{E_z+\frac{v}{c}H_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad H'_z=\frac{H_z-\frac{v}{c}E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Atendendo a estas equações e ao teorema de adição das velocidades, a transformação das equações gerais (7) dá equações da mesma forma com

$$(9) \qquad \rho'=\rho\frac{1-\frac{v\,u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

As fórmulas de transformação (8) e (9), cuja inversão dá fórmulas análogas, como devia ser, contêm dois resultados importantes. O primeiro, evidente, é que a separação do campo electromagnético em campo eléctrico e campo magnético é puramente relativa. O segundo é que a carga eléctrica é um invariante: tem o mesmo valor em todos os sistemas de referência. Com efeito, seja $d\,e'$ uma carga em repouso em S', ocupando o volume $d\,\omega'$; por ser então $u_x=v$, resulta de (9)

$$(10) \qquad \rho=\frac{\rho'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

isto é, a densidade da carga aumenta por efeito do movimento. Ora, se fôrem $d\omega$ e de o volume e o valor da mesma carga para S, teremos

$$de = \rho\, d\omega, \quad de' = \rho'\, d\omega'$$

e portanto, atendendo à contracção dos volumes

$$d\omega = d\omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

e à fórmula (10),

$$de = de'$$

como tínhamos afirmado. Chama-se a ρ' densidade própria da carga considerada; $d\omega'$ é o seu volume próprio. Anàlogamente, um intervalo de tempo medido por um relógio de S' é um intervalo de tempo próprio dêste relógio, ou dêste sistema.

Se se efectua a transformação de Lorentz nas equações da mecânica newtoniana, reconhece-se que estas equações não conservam a forma primitiva. Ao contrário da Electrodinâmica, a Mecânica tem de ser refundida de harmonia com o princípio de relatividade einsteiniano. Como já observámos, não há a recear conflito com a experiência desde que as novas equações coïncidam pràticamente com as antigas para velocidades muito pequenas em relação à da luz.

25. Consideremos uma fonte luminosa monocromática imóvel no sistema S e imensamente distante da origem das coordenadas. Numa certa região vasia que envolve esta origem, as ondas emitidas são planas e representam-se pelas equações

$$E = E^0 \sin\Phi, \quad H = H^0 \sin\Phi,$$

$$\Phi = 2\pi\nu\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right),$$

onde E e H têm a significação do n.º precedente, α, β e γ são os cosenos directores dos raios e ν é a freqüência da luz.

A aplicação da transformação de Lorentz e das fórmulas (8) dá, para a região correspondente do sistema S', as equações

$$E' = E'^0 \sin \Phi', \qquad H' = H'^0 \sin \Phi',$$

$$\Phi' = 2\pi\nu'\left(t' - \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'}{c}\right) = \Phi,$$

que representam ondas planas também, e onde é, pondo $\alpha = \cos\varphi$, $\alpha' = \cos\varphi'$,

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11}$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}. \tag{12}$$

Pode escrever-se ainda, como é evidente,

$$\nu' = \frac{\nu\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'}. \tag{13}$$

As fórmulas (11) ou (13) exprimem o efeito Doppler como na física clássica, se se despreza a segunda ordem. Quando a fonte luminosa se move transversalmente em S' ($\cos\varphi' = 0$), tem-se rigorosamente

$$\nu' = \nu\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

êste efeito einsteiniano, extremamente pequeno, que não é outra coisa que a dilatação do tempo (cf. n.º 23), ainda não pôde ser directamente observado.

A fórmula (12) exprime a aberração. Dela resulta

$$\sin\varphi' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sin\varphi}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}$$

e portanto

$$\sin(\varphi'-\varphi) = \frac{\frac{v}{c}-\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\cos\varphi}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}\sin\varphi,$$

o que dá o valor da teoria elementar

$$\frac{v}{c}\sin\varphi$$

pelo desprêzo da segunda ordem. Difícil de explicar na teoria ondulatória clássica, como a experiência de Fizeau, a aberração é outra prova experimental da teoria da relatividade.

A intensidade da luz é definida pelo quadrado da amplitude do campo eléctrico (ou magnético). Tem-se no sistema S'

$$A'^2 = (E'^0_x)^2 + (E'^0_y)^2 + (E'^0_z)^2$$

ou, por (8),

$$A'^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = A^2\left(1-2\frac{v}{c}\cos\varphi\right)+\frac{v^2}{c^2}\Delta, \tag{14}$$

pondo

$$\Delta = (H^0_y)^2 + (H^0_z)^2 - (E^0_x)^2$$

e notando que o produto vectorial

$$E^0 \times H^0$$

tem o módulo A^2 e o sentido da propagação; por outro lado, de

$$A'^2 \cos\varphi' = E'^0_y H'^0_z - E'^0_z H'^0_y$$

resulta

$$A'^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos\varphi' = A^2\left(\cos\varphi - \frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2}\cos\varphi\right) - \frac{v}{c}\Delta;$$

eliminando Δ entre esta equação e (14), e atendendo a (12), obtém-se finalmente

$$(15)\qquad A'^2 = A^2\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\varphi\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta fórmula conduz a um resultado notável que utilizaremos adiante. Nas unidades que adoptámos, A^2 representa em S, e A'^2 em S', a densidade de energia das ondas planas consideradas. A esfera

$$(x-\alpha c t)^2 + (y-\beta c t)^2 + (z-\gamma c t)^2 = r^2,$$

que se move com a velocidade da luz no sentido da propagação e portanto contém uma quantidade invariável W de energia, é para S', no instante $t'=0$, o elipsóide

$$\frac{\left(1-\alpha\frac{v}{c}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}x'^2 + \left(y' - \frac{\beta\frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + \left(z' - \frac{\gamma\frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = r^2$$

com a energia W'. Representando por V o volume da esfera e por V' o do elipsóide, tem-se por um lado

$$W = A^2 V, \qquad W' = A'^2 V'$$

e por outro lado, como fàcilmente se reconhece,

$$\frac{V'}{V} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi};$$

atendendo a (15) é pois

$$W' = W \frac{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{16}$$

O confronto com (11) mostra que a energia e a freqüência da luz se transformam do mesmo modo. Assim, a equação quântica de Planck

$$\varepsilon = h\nu$$

satisfaz ao princípio de relatividade, e o coeficiente h, como a velocidade da luz, é uma constante universal.

26. Estabelecemos precedentemente (n.º 22) que a transformação cinemática entre dois sistemas de inércia, orientados dum modo qualquer, altera em geral as diferenças Δx, Δy, Δz, Δt referentes a dois acontecimentos pontuais e instantâneos, mas deixa invariante, no valor e na forma, a expressão

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \tag{17}$$

anàlogamente ao que sucede em geometria euclidiana à expressão do quadrado da distância de dois pontos

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

perante uma transformação cartesiana ortogonal. Esta observação conduziu Minkowski [1] a conceber o espaço e o tempo como secções dum contínuo quadridimensional real (universo) cuja métrica é determinada pela forma quadrática

$$(18) \qquad ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

em coordenadas galileanas (coordenadas cartesianas ortogonais e tempo num espaço de inércia). A idea de Minkowski tem uma importância considerável; sem ela não seria possível a teoria da Relatividade geral.

O universo é a forma absoluta dentro da qual decorrem os fenómenos, constituída por elementos absolutos chamados acontecimentos. O espaço e o tempo, construídos com elementos que não possuem existência independente, são formas relativas ao observador ligado a um corpo rígido. Entre dois pontos há uma relação de espaço (distância) e entre dois instantes uma relação de tempo (duração) que são igualmente relativas ao observador. Só é absoluta a relação de espaço-tempo (17) existente entre dois acontecimentos (intervalo universal).

É exprimindo-as no universo quadridimensional que se torna evidente a significação absoluta das leis da natureza. A sua expressão em termos de espaço e de tempo, idêntica nos sistemas de inércia em virtude do princípio de relatividade, indicava êste carácter absoluto mas deixava-o

---

[1] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, 1908, in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*

incompreensível. O problema matemático, que se apresenta aqui, é resolvido pela teoria dos tensores.

A concepção do universo quadridimensional, no fundo, existia na física pre-relativista, a qual afirmava mesmo certa relatividade do espaço. Mas esta relatividade só fazia depender do sistema de referência as coordenadas dos pontos, não as distâncias mútuas. Isto e o carácter absoluto do tempo impossibilitavam de atribuir ao universo estrutura métrica no sentido riemaniano; do ponto de vista métrico, o espaço e o tempo eram realidades separadas.

O filósofo Bergson recusou-se a ver na noção de universo outra coisa que um puro esquema matemático indispensável ao teórico da Física (1); pareceu-lhe que tal noção implica a identificação do tempo com uma coordenada de espaço. Como é possível conciliar esta recusa com a aceitação, feita também por Bergson, dos dois princípios de Einstein, dos quais a realidade física do universo quadridimensional decorre necessàriamente, é o que não logramos compreender. Não há tal identificação do tempo com uma coordenada de espaço; o tempo e o espaço são definidos fisicamente de modo diverso, e a diferença de sinais na expressão (18) de ds^2 caracteriza matemàticamente esta diversidade.

A idea duma forma absoluta quadridimensional, que em si não é espaço nem tempo, mas na consciência se projecta scindida nestas duas formas relativas, não tem nada de anti-filosófico. Viu-se há poucos anos o filósofo Alexander construir um sistema sôbre ela (2), como Spinoza construiu o seu sôbre a idea de substância. Para

(1) H. Bergson, *Durée et simultanéité, à propos de la théorie d'Einstein*, 3.e éd., Paris, 1926.

(2) S. Alexander, *Space, time and deity*, 2.th ed., London, 1927.

Alexander, o espaço e o tempo não são formas *a priori* da sensibilidade, como na teoria transcendental de Kant, nem ordens de coexistência ou sucessão, como na teoria relacional de Leibniz, mas sim entidades objectivas que constituem como que o estôfo do qual são feitos os fenómenos; à maneira cartesiana, quási pode dizer-se que os fenómenos são modos das substâncias extensão e duração. Seja como fôr, considerar o espaço e o tempo em si mesmos não é praticar uma abstracção ilegítima, mas apreciar os fenómenos no seu carácter mais elementar. Ora o espaço e o tempo, pelos seus caracteres empíricos, longe de serem coisas separadas, são de tal modo interpendentes que não há um sem o outro: o espaço é temporal e o tempo é espacial. Num tempo sem espaço os instantes não poderiam distinguir-se; haveria um puro «agora» e o tempo deixaria de ser um contínuo sucessivo. Num espaço sem tempo os pontos seriam também indiscerníveis; o espaço não seria um contínuo extenso. Realmente há tempo e espaço, e são os pontos que distinguem os instantes como os instantes distinguem os pontos; puro ponto ou puro instante são abstracções, só o ponto-instante é real; o espaço e o tempo, entrelaçados intimamente, formam na realidade um espaço-tempo.

Pelo seu carácter de sucessividade, o tempo é unidimensional; o espaço, extenso, é unidimensional pelo menos. Sob pena de cada um ser afectado do carácter do outro, o tempo tem de se repetir no espaço como o espaço tem de se repetir no tempo: um instante ocupa vários pontos e um ponto vários instantes. Mas o tempo possui ainda o carácter de irreversibilidade e o de transitividade da anterioridade; cada um dêles, segundo Alexander, exige mais uma dimensão de espaço e reciprocamente. Não pode dizer-se ontològicamente que pelo tempo se prova o espaço ou *vice versa*, mas sim que o espaço e o tempo da experiência estão numa relação mútua tão fechada e tão ramificada que têm de considerar-se como uma só entidade verdadeira descrita em termos diferentes e complementares. Naturalmente, esta descrição é relativa à consciência que a faz.

As relações do universo quadridimensional são por natureza difíceis para a representação concreta. Mas convém não esquecer que as do espaço euclidiano também se representam concretamente com certa dificuldade; o espaço euclidiano, altamente abstracto, está bem longe do espaço sensível.

27. A métrica do universo, caracterizada pela forma quadrática indefinida (18), é pseudo-euclidiana. A anulação de Δs^2 não significa em geral a coïncidência de dois acontecimentos, mas sim que êles podem constituir a origem e o termo dum raio luminoso. Dado o acontecimento (x, y, z, t), a variedade tridimensional

$$(19) \qquad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0,$$

que o contém, é constituída pelos acontecimentos que podem ser ligados a êste pela propagação da luz no vácuo. Esta variedade divide o universo em duas regiões diferentes. Numa, onde é

$$\Delta s^2 > 0$$

ou seja

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 < c^2,$$

qualquer acontecimento pode ser ligado ao acontecimento dado pelo movimento rectilíneo uniforme duma partícula; no espaço de inércia da partícula os dois acontecimentos ocorrem no mesmo lugar, o que significa que uma transformação apropriada de coordenadas galileanas dará ao eixo dos tempos a direcção do vector determinado pelos dois acontecimentos (vector temporal). Esta região, com (19), é a dos acontecimentos que podem ter com o acontecimento dado relações de causalidade no passado ou no futuro (necessàriamente absolutos). A outra região, onde é

$$\Delta s^2 < 0,$$

é formada pelos acontecimentos que não podem estar ligados com o acontecimento dado por movimento algum real, visto que é impossível velocidade superior à da luz; assim, não pode haver relação de causalidade entre o acontecimento dado e qualquer dêstes acontecimentos, nem ordem de sucessão absoluta no tempo. Em particular, para um certo espaço de inércia os dois acontecimentos são simultâneos; uma transformação apropriada de coordenadas galileanas dará a um eixo de espaço a direcção do vector que os dois acontecimentos determinam (vector espacial).

Se se substituísse c por ∞, a equação da variedade (19) degeneraria em

$$\Delta t^2 = 0$$

e representaria o espaço de referência. Êste apareceria como lugar dos acontecimentos de possível ligação com o acontecimento dado por acção instantânea; e das duas regiões quadridimensionais consideradas, a segunda anular-se-ia porque Δt^2 é necessàriamente positivo. Qualquer acontecimento do universo poderia pois ter relação de causalidade com o acontecimento dado, e seria absolutamente anterior, ou posterior, ou simultâneo a êste acontecimento. É a concepção pre-relativista do universo;

mais uma vez o tempo absoluto aparece ligado à possibilidade de tôdas as velocidades, incluindo a infinita.

Tudo isto se torna por assim dizer visível se construímos a imagem do universo pseudo-euclidiano no espaço euclidiano abstracto de quatro dimensões, o que não altera as relações topológicas. A variedade (19) tem por imagem um hipercone de revolução cujo vértice é a imagem do acontecimento dado; dentro dêste hipercone fica a imagem da região $\Delta s^2 > 0$, fora fica a imagem da região $\Delta s^2 < 0$. Vê-se que a variedade (19) e a primeira região se subdividem. Uma das fôlhas do hipercone, com o espaço que compreende, representa a totalidade dos acontecimentos que podem ser causados pelo acontecimento central; a outra fôlha, com os pontos interiores, representa a totalidade dos acontecimentos que podem ter causado o acontecimento central. Não se subdivide a região exterior ao hipercone, imagem da totalidade dos acontecimentos que não podem ter relação de causalidade nem ordem de sucessão absoluta com o acontecimento dado. Nas mudanças de coordenadas galileanas o eixo dos tempos desloca-se dentro do hipercone, e o hiperplano que contém os eixos de espaço desloca-se na região exterior; o segundo deslocamento mostra bem a relatividade da simultaneidade, que destrói o tempo absoluto e tem como conseqüência a relatividade do comprimento e da duração [1]. Agora façamos tender c para ∞. A abertura do hipercone tenderá para o ângulo raso. No limite, esta variedade degenera no hiperplano que contém os eixos de espaço, a região exterior evola-se, a simultaneidade torna-se abso-

[1] Pode demonstrar-se directamente que o princípio da relatividade conduz necessàriamente ao grupo de Lorentz se se admite que a simultaneidade não é absoluta, como conduz necessàriamente ao de Galileu se se admite o contrário.

luta, como a anterioridade e a posterioridade; tem-se o universo degenerado da física clássica. A passagem dum a outro sistema de inércia traduz-se apenas por uma rotação do eixo dos tempos (abstraindo da eventual rotação dos eixos de espaço no respectivo hiperplano tornado absoluto) e só a relatividade newtoniana do espaço se conserva.

28. A cada partícula de matéria corresponde no universo uma linha, de que cada elemento é necessàriamente um vector temporal ($ds^2 > 0$); é a linha universal da partícula. O caso limite é o duma partícula de luz, cuja linha universal satisfaz à equação

$$ds = 0.$$

Designando por v a velocidade da partícula no sistema de inércia S, tem-se, segundo (18),

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ou, pondo $ds = c\,d\tau$,

(20) $$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Num sistema de inércia ligado momentâneamente à partícula no instante t, esta está momentâneamente em repouso. Portanto $d\tau$ é o intervalo de tempo marcado por um relógio ligado à partícula e correspondente ao intervalo dt decorrido em S; é o elemento de tempo próprio da partícula. A fórmula (20) exprime simplesmente a dilatação do tempo.

Integrando (20) sôbre a trajectória da partícula entre dois instantes quaisquer, obtém-se o intervalo finito de tempo próprio, que será sempre menor que o intervalo de tempo correspondente de S.

É natural procurar saber qual a significação das linhas universais geodésicas, para as quais é estacionário o comprimento dum arco qualquer de que se não fazem variar as extremidades, o que se exprime escrevendo

$$\delta \int ds = 0.$$

É sabido que esta equação, no caso geral em que é

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

equivale às seguintes, que não são mais que uma transformação das equações de Euler,

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0,$$

onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie e p é o parâmetro em função do qual se exprimem as coordenadas dos pontos da geodésica, parâmetro necessàriamente linear no tempo próprio se $ds^2 > 0$. Nesta hipótese e em coordenadas galileanas, para as quais os símbolos de Christoffel se anulam idênticamente, têm-se as equações

$$(21) \qquad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0,$$

que mostram que as coordenadas correntes duma geodésica universal de comprimento positivo são funções lineares do tempo próprio. Eliminando τ, resulta que x, y, z são funções lineares de t e portanto que a geodésica universal duma partícula material é no espaço de inércia S um movimento rectilíneo uniforme. A recíproca também se prova imediatamente atendendo a (20). Assim, pode enunciar-se a lei da inércia de Galileu dizendo que uma partícula material, sôbre a qual não actua fôrça, tem por linha universal uma geodésica de comprimento positivo.

Há a notar que o comprimento duma tal geodésica universal não só é estacionário, mas máximo. Suponhamos com efeito, por um momento, que S é um sistema de inércia ligado à partícula livre de fôrça; dt é o elemento de tempo próprio desta partícula, e o comprimento da geodésica correspondente entre os instantes t_0 e t_1 é

$$\Delta s = c\,(t_1 - t_0).$$

Um arco de linha universal não geodésica com as mesmas extremidades tem, por (20), o comprimento

$$\Delta s' = c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt < \Delta s,$$

visto que a velocidade v da partícula correspondente é uma função contínua não idênticamente nula.

Se $ds = 0$, o parâmetro p pode ser o tempo t e as equações das geodésicas tomam a forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad t = t$$

em coordenadas galileanas. Para uma partícula de luz também a geodésica universal é no espaço de inércia S

um movimento rectilíneo uniforme, e reciprocamente. Donde o enunciado seguinte da lei da propagação da luz fora da matéria: no vácuo, uma partícula de luz tem por linha universal uma geodésica de comprimento nulo.

29. As equações (21) são uma forma particular das equações da mecânica einsteiniana.

Pois que o elemento ds de linha universal é um vector de componentes contravariantes dx, dy, dz, dt, e que $d\tau$ é um invariante, as quantidades

$$\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau}, \quad \frac{dt}{d\tau}$$

e

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2}$$

são componentes contravariantes de dois vectores, respectivamente denominados velocidade e aceleração universais; as três componentes de espaço dêstes dois vectores, em virtude de (20), reduzem-se pràticamente às componentes da velocidade e da aceleração ordinárias se a velocidade da partícula é muito pequena relativamente à da luz. A velocidade universal é tangente à linha universal e o seu módulo é igual à velocidade da luz; e a derivação de

$$-\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

em ordem a τ mostra que os dois vectores aceleração e velocidade universais são perpendiculares entre si.

A lei da inércia (21) significa portanto que é nula a aceleração universal J^μ duma partícula livre de fôrça e exprime-se pela equação tensorial

$$J^{\mu} = 0. \tag{22}$$

Visto que a forma tensorial é independente das coordenadas galileanas empregadas, é sob esta forma que devem exprimir-se as leis naturais na física da relatividade.

Nas equações gerais da Mecânica tem de figurar um vector universal, que represente a fôrça ordinária por intermédio das suas componentes de espaço; êste vector será a fôrça universal F^{μ}. Pôsto isto, a lei fundamental da mecânica einsteiniana, generalização natural da lei da inércia, consiste em que a fôrça e a aceleração universais são proporcionais:

$$m_0 J^{\mu} = F^{\mu}.$$

Supõe-se aqui que a partícula material conserva um estado invariável para o espaço de referência que lhe é próprio; m_0 é uma constante característica de tal estado (massa própria), definida neste espaço pelo quociente duma fôrça instantânea, suposta aplicada à partícula, pela aceleração que essa fôrça produziria.

Designando por V^{μ} a velocidade universal, a equação precedente pode escrever-se

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 V^{\mu}) = F^{\mu}. \tag{23}$$

O vector entre parênteses é a impulsão universal. Nas suas componentes de espaço, êste vector reduz-se pràticamente à impulsão newtoniana para as velocidades ordinárias da matéria; a sua componente de tempo é pràticamente igual a m_0 nas mesmas condições.

A expressão da lei da inércia por meio de (22) ou, o que é o mesmo, por meio da conservação da velocidade universal, é uma expressão cinemática; nada figura nela que caracterize a substância da partícula, e esta bem poderia conceber-se como um ponto geométrico. A expressão dinâmica dessa lei deve conter a massa própria, e resulta de (23) pela anulação do segundo membro: para uma partícula livre de fôrça, há conservação da impulsão universal.

Segundo (23), a impulsão universal não se conserva quando há fôrça, mas a sua derivada em ordem ao tempo próprio é igual à fôrça universal (lei da impulsão). É esta forma da lei fundamental da Mecânica que reteremos definitivamente.

30. Do ponto de vista do sistema de inércia S, a equação absoluta (23) scinde-se em quatro equações, três respectivas às componentes espaciais e uma às componentes temporais de V^μ e F^μ; as três primeiras são, por (20),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx}{dt}\right)=X, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dy}{dt}\right)=Y, \tag{24}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dz}{dt}\right)=Z,$$

onde X, Y, Z são as componentes dum vector do sistema S, obtidas multiplicando por $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ as componentes espaciais de F^μ. Estas equações exprimem a lei da impulsão da mecânica clássica, porém com uma diferença: a massa da partícula não é constante, mas depende da velocidade segundo a relação

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{25}$$

Vê-se que a massa duma partícula em repouso coïncide com a massa própria m_0, e vê-se como as componentes espaciais da fôrça universal estão ligadas às componentes da fôrça ordinária. As equações einsteinianas (24) reduzem-se pràticamente às de Newton se v é muito pequena comparada a c, como devia ser.

Visto que a fôrça e a velocidade universais são perpendiculares entre si, tem-se

$$-F^x V^x - F^y V^y - F^z V^z + c^2 F^t V^t = 0,$$

donde resulta

$$-X\frac{dx}{dt} - Y\frac{dy}{dt} - Z\frac{dz}{dt} + c^2 F^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0.$$

Pela quarta das equações em que se scinde (23),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

a relação precedente dá a equação

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}, \tag{26}$$

que exprime a lei da energia. Esta equação não é contraditória com (24), porque a quarta (23) é conseqüência das três primeiras. Se a partícula se move passando do repouso à velocidade v, a integração dá imediatamente a energia adquirida (energia cinética), igual ao trabalho total da fôrça,

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2; \tag{27}$$

com desprêzo da segunda ordem, a expressão obtida reduz-se à expressão newtoniana $\frac{1}{2} m_0 v^2$. A variação da energia é pois igual ao produto da variação da massa pelo quadrado da velocidade da luz. Êste resultado exprime, num caso particular, a lei da inércia da energia (¹) de Einstein, segundo a qual tôda a energia possui massa e reciprocamente, segundo a relação

$$W = m c^2.$$

Escolhendo a unidade de tempo de modo que a velocidade da luz seja igual a 1, a massa e a energia serão medidas pelo mesmo número. Energia e massa são pois dois aspectos diferentes duma só essência física.

Consideremos o caso da energia radiante. Seja uma partícula imóvel no sistema de inércia S, onde possui a energia E_1. Para o sistema de inércia S', animado da velocidade v relativamente a S, a energia da partícula será E'_1 e a diferença $E'_1 - E_1$ representará a energia cinética da partícula, salvo uma constante aditiva que depende das constantes aditivas arbitrárias de E_1 e E'_1. Suponhamos que a partícula vem a emitir a mesma quantidade $\frac{E}{2}$ (apreciada em S) de energia luminosa, sob a forma de ondas planas, em dois sentidos opostos que fazem com

(¹) A. Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?* 1905, in Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*

Ox ângulos de cosenos $\cos\varphi$, $-\cos\varphi$, deixando logo de radiar. Em S, a energia da partícula é agora

$$E_2 = E_1 - E;$$

em S', se o eixo $O'x'$ se move sôbre Ox, reconhece-se pela aplicação da fórmula (16) que a partícula ficou com a energia

$$E'_2 = E'_1 - \frac{E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

A diferença $E'_2 - E_2$ é a nova energia cinética da partícula em S', salvo a mesma constante aditiva de que falámos há pouco. A partícula perdeu portanto para S', por efeito da radiação, a energia cinética

$$E'_1 - E_1 - (E'_2 - E_2) = \frac{E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E.$$

Pois que não variou a velocidade, diminuiu necessàriamente a massa própria da partícula e, segundo a primeira fórmula (27), justamente da quantidade

$$\mu = \frac{E}{c^2}.$$

No sistema S, a perda de energia radiante foi acompanhada de perda de massa segundo a lei de Einstein. A luz, por conseguinte, transporta inércia.

Resulta de (25) ou de (27) que uma partícula de massa própria diferente de zero exige uma quantidade infinita de energia para atingir a velocidade da luz. A massa própria duma partícula de luz é portanto nula, e nula é também a sua massa para qualquer velocidade menor que c. Isto significa que uma partícula de luz só existe como tal para a velocidade c; quando absorvida por um corpo, a sua energia ou massa toma outra forma. Por partícula de luz temos entendido uma porção de energia luminosa que ocupa instantâneamente um volume muito pequeno. Desde a teoria dos fotões de Einstein sabe-se porém que a luz tem estrutura atómica como a matéria ordinária.

A variação da massa com a velocidade segundo (25) foi confirmada pela observação do desvio magnético dos raios β, que são constituídos por electrões animados de velocidade próxima da da luz. Outro êxito brilhante da mecânica de Einstein foi a explicação quási completa da estrutura fina das riscas espectrais, devida a Sommerfeld. A explicação completa dá-a agora a Micromecânica; mas é digno de notar-se que a mecânica de Einstein, a-pesar-de macroscópica, dá no domínio intra-atómico resultados incomparàvelmente mais exactos que os que dá no mesmo domínio a mecânica newtoniana.

A lei da inércia da energia recebeu aplicações importantes. Por ela se explica dum modo geral que os pesos atómicos não sejam múltiplos exactos do pêso atómico mínimo [1]. A energia necessária para destruir o núcleo de hélio, por exemplo, é o que se encontra sob a forma de excesso de massa em quatro átomos de hidrogénio. Por virtude do factor c^2 esta energia é relativamente muito grande, o que explica que o núcleo de hélio tenha enorme estabilidade. Parece que a persistência da radiação estelar através de biliões de anos, a-pesar-da elevadíssima perda de energia que acarreta, se deve explicar pela transformação de protões e electrões em radiação. Sendo

(1) A existência de isótopos, para muitos elementos, é outra causa dêstes desvios.

inegável que no interior das estrêlas se realizam condições que não têm paralelo com as da nossa experiência, a hipótese nada tem de inverosímil. O que é certo é que as outras explicações propostas, como a queda de meteoritos, a elevação de temperatura por contracção, mesmo a radioactividade, são insuficientes. Segundo Eddington, a massa das estrêlas diminui sempre; isto só pode explicar-se pela inércia da energia radiada, seja qual fôr a sua origem.

A conservação da impulsão universal numa partícula livre de fôrça, impulsão cujas componentes podem escrever-se, por (25),

$$m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}, \quad m,$$

compreende a conservação da impulsão ordinária e a conservação da massa (ou da energia). Três leis de conservação, que na física pre-relativista eram independentes, aparecem unificadas na física da relatividade.

31. Para maior simetria convém tomar como unidade de tempo a fracção $\frac{1}{c}$ de segundo, conservando as outras unidades fundamentais. A velocidade da luz será então igual à unidade, o elemento de tempo próprio será ds, a energia será igual à massa. A forma métrica fundamental do universo será

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

com

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} -1\,(\mu=\nu=1,\ 2,\ 3), \\ +1\,(\mu=\nu=4), \\ \ \ 0\,(\mu \neq \nu); \end{cases}$$

x^4 será pois o tempo expresso na nova unidade.

Consideremos uma porção de matéria macroscòpicamente contínua, sem tensões internas próprias (matéria desagregada). Designemos por ρ_0 a densidade própria, por u^μ as componenentes contravariantes da velocidade universal, por f^μ as da fôrça universal referida à unidade de volume próprio (densidade de fôrça universal). A equação tensorial do movimento (23)

$$\rho_0 \frac{d u^\mu}{d s} = f^\mu$$

ou

$$\rho_0 u^\alpha \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} = f^\mu,$$

pondo

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

escreve-se

$$\frac{\partial M^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = f^\mu \tag{28}$$

em virtude da equação de continuidade

$$\frac{\partial (\rho_0 u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Se não há fôrça, tem-se

$$\frac{\partial M^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0; \tag{29}$$

a conservação da impulsão ordinária e a conservação da energia exprimem-se pela anulação da divergência do tensor simétrico de segunda ordem $M^{\mu\nu}$ (tensor energético mecânico).

Convém notar que f^{μ} tem por componentes espaciais as da densidade de fôrça ordinária e por componente temporal o trabalho da densidade de fôrça na unidade de tempo (densidade de potência). Com efeito, a fôrça universal no volume próprio dV_0 é

$$dF^{\mu}=f^{\mu}\,dV_0,$$

donde resulta

$$dF^{\mu}\sqrt{1-v^2}=f^{\mu}\,dV$$

introduzindo o valor dV do mesmo volume no sistema de referência escolhido; ora (n.º 30) as quatro grandezas representadas no primeiro membro são justamente as componentes da fôrça e a potência para êste sistema.

As fórmulas de transformação da massa e do volume mostram que a densidade se transforma pela equação

$$\rho=\frac{\rho_0}{1-v^2}.$$

Atendendo a isto e introduzindo as componentes da velocidade ordinária, reconhece-se que as componentes puramente espaciais, as componentes espacio-temporais e a componenente puramente temporal de $M^{\mu\nu}$ são respectivamente

$$\rho v^i v^j, \quad \rho v^i, \quad \rho \quad (i, j=1, 2, 3);$$

as primeiras representam um tensor simétrico, as segundas um vector repetido e a última um escalar no espaço inercial de referência.

Segundo (28), a lei da impulsão e a lei da energia escrevem-se agora

$$\frac{\partial(\rho v^i v^j)}{\partial x^j}+\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^4}=f^i,$$

$$\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial x^j}+\frac{\partial \rho}{\partial x^4}=f^4.$$

Vê-se que o vector ρv^i deve ser interpretado como densidade de impulsão g^i na equação vectorial e como densidade de corrente de energia σ^j na equação escalar; $\rho v^i v^j$ será o tensor l^{ij} das tensões (densidade de corrente de impulsão). O tensor energético $M^{\mu\nu}$, do ponto de vista do sistema de referência considerado, scinde-se pois em quatro grandezas segundo o esquema

$$\begin{array}{c|c} l^{ij} & g^i \\ \hline \sigma^j & \rho \end{array}:$$

tensor densidade de corrente de impulsão, vectores densidade de impulsão e densidade de corrente de energia, escalar densidade de energia. Esta scisão, como a da impulsão universal do n.º precedente no vector impulsão e no escalar massa (energia), deriva da scisão do universo em espaço e tempo, inerente à percepção.

Pelas últimas equações obtidas, a conservação da impulsão e a conservação da energia, expressas por (29) sob forma absoluta, escrevem-se num sistema de inércia

$$\operatorname{div}^i l+\frac{\partial g^i}{\partial x^4}=0,$$

$$\operatorname{div}\sigma+\frac{\partial \rho}{\partial x^4}=0;$$

por unidade de tempo e de volume, o acréscimo de impulsão (ou de energia) é igual ao fluxo de impulsão (ou de energia) recebido.

32. Para levantar a restrição da falta de tensões próprias, basta adicionar ao tensor universal precedente um tensor universal também simétrico, representativo dessas tensões. Teremos assim, no caso mais geral,

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + p^{\mu\nu}.$$

Num sistema de inércia, êste tensor scinde-se segundo o esquema do n.º anterior; mas as densidades de corrente de impulsão, de impulsão, de corrente de energia e de energia são agora respectivamente

$$\rho v^i v^j + p^{ij}, \quad \rho v^i + p^{i4}, \quad \rho v^j + p^{4j}, \quad \rho + p^{44}.$$

É útil observar que estas componentes são insensíveis perante a última, que por sua vez não difere pràticamente de ρ_0. Nas nossas unidades, ρ é enorme relativamente aos $p^{\mu\nu}$ e os v^i são muito pequenos. Assim, em cálculos de aproximação, o tensor energético mecânico pode ser substituído pela densidade própria entendida ao modo ordinário.

A lei da impulsão-energia (28) dá presentemente

$$\rho_0 \frac{d u^\mu}{d s} + u^\mu \frac{\partial (\rho_0 u^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial p^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = f^\mu .$$

Multiplicando escalarmente por u_μ e atendendo à ortogonalidade da velocidade e da aceleração (ou da fôrça) universais, obtém-se

$$\frac{\partial (\rho_0 u^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} u_\beta = 0,$$

visto ser igual a 1 o módulo da velocidade universal. A última equação é a nova equação de continuidade; o segundo têrmo, que não aparece na mecânica clássica, é extremamente pequeno. Combinando esta equação com a penúltima, têm-se as equações relativistas gerais da mecânica da matéria contínua

$$\rho_0 \frac{d u^\mu}{d s} + \frac{\partial p^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} - u^\mu u_\beta \frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = f^\mu.$$

As três primeiras exprimem a lei da impulsão e correspondem às equações de Euler; a quarta traduz a lei da energia.

No caso simples dum fluído perfeito, as tensões próprias são determinadas pela pressão p segundo a equação

$$p^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} p,$$

em cujo segundo membro figura o tensor métrico fundamental expresso contravariantemente.

O que nos importa reter é que a matéria ***strictu sensu*** é caracterizada fisicamente por um tensor universal simétrico de segunda ordem, cuja divergência é igual à fôrça universal exterior (lei da impulsão-energia). No caso da matéria isolada, a divergência do tensor energético é nula: a impulsão e a energia conservam-se.

Tanto as componentes mixtas

$$M_\mu^\nu = \rho_0 u_\mu u^\nu + p_\mu^\nu$$

como as covariantes

$$M_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu + p_{\mu\nu}$$

do tensor energético não diferem em valor absoluto das contravariantes com os mesmos índices. A contracção de

M_μ^ν dá o escalar universal

$$M_\alpha^\alpha = \rho_0 + p_\alpha^\alpha,$$

que difere extremamente pouco de ρ_0.

33. As equações fundamentais da Electrodinâmica (7), pondo $c=1$ e designando por v o vector velocidade da electricidade, são agora

$$(30) \qquad \frac{\partial E}{\partial x^4} + \rho v = \operatorname{rot} H, \qquad \frac{\partial H}{\partial x^4} = -\operatorname{rot} E,$$
$$\operatorname{div} E = \rho, \qquad \operatorname{div} H = 0.$$

Representemos por ρ_0 a densidade eléctrica própria e por u^μ, como no n.º precedente, a velocidade universal da electricidade, expressa contravariantemente. O produto

$$\rho_0 u^\mu = I^\mu$$

é a expressão contravariante da densidade de corrente universal. Visto que se tem (10)

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2}},$$

as componentes espaciais e temporal da corrente universal são

$$\rho v^i, \quad \rho \quad (i=1,\, 2,\, 3),$$

isto é respectivamente as componentes da corrente ordinária e a densidade. A anulação da divergência da corrente universal

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

exprime o princípio da conservação da electricidade.

É sabido que H e E derivam dum potencial-vector A e dum potencial escalar φ pelas fórmulas

$$(31) \qquad H = \operatorname{rot} A, \qquad E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial x^4};$$

A e φ satisfazem a

$$(32) \qquad \operatorname{div} A + \frac{\partial \varphi}{\partial x^4} = 0$$

e são determinados pelas equações

$$(33) \qquad \begin{aligned} \Delta A - \frac{\partial^2 A}{\partial x^4 \partial x^4} &= -\rho v, \\ \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^4 \partial x^4} &= -\rho, \end{aligned}$$

onde Δ é o operador de Laplace. Façamos

$$A^i, \quad \varphi = \varphi^\mu;$$

as equações (33) escrevem-se então, como imediatamente se verifica,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\beta}\right) = I^\mu,$$

onde $g_{\mu\nu}$ é sempre o tensor métrico fundamental do universo. Esta equação prova que φ^μ é um vector universal (potencial electromagnético universal); o potencial-vector ordinário e o potencial escalar não são outra coisa que o resultado da scisão do universo em espaço e tempo relativa ao sistema de referência. A equação (32) dá

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0,$$

o que significa que a divergência de φ^μ é nula.

Pondo

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu},$$

obtém-se um tensor antissimétrico de segunda ordem; por ser

$$\varphi_i = -\varphi^i, \quad \varphi_4 = \varphi^4,$$

tem-se por (31)

$$\begin{array}{ll} F_{\mu\nu} = & 0 \quad\; H^3 \quad -H^2 \quad E^1 \\ \mu\nu\rightarrow & -H^3 \quad 0 \quad\; H^1 \quad E^2 \\ \downarrow & H^2 \quad -H^1 \quad 0 \quad\; E^3 \\ & -E^1 \quad -E^2 \quad -E^3 \quad 0 \end{array}$$

e portanto

$$\begin{array}{ll} F^{\mu\nu} = & 0 \quad\; H^3 \quad -H^2 \quad -E^1 \\ \mu\nu\rightarrow & -H^3 \quad 0 \quad\; H^1 \quad -E^2 \\ \downarrow & H^2 \quad -H^1 \quad 0 \quad -E^3 \\ & E^1 \quad E^2 \quad E^3 \quad 0. \end{array}$$

A relatividade do campo eléctrico e do campo magnético, que encontrámos no n.º 24, compreende-se agora melhor. Só o campo electromagnético, que é caracterizado por um tensor universal antissimétrico de segunda ordem, tem carácter absoluto; a separação dos campos E e H é relativa ao sistema de referência e determinada pela scisão do universo em tempo e espaço. Salta à vista a razão formal da diferença de propriedades dos dois campos; razão velada na electrodinâmica clássica, que descrevia ambos como vectoriais. É vectorial, sim, o campo eléctrico; mas o campo magnético é realmente um tensor antissimétrico de segunda ordem, e só aparentemente um vector graças ao número três das dimensões do espaço. No espaço de três dimensões, mas só nêle, um tensor antissimétrico de segunda ordem apresenta outras tantas componentes essenciais.

Fàcilmente se reconhece que a primeira e a terceira equações (30), por um lado, bem como a segunda e a quarta, por outro lado, se escrevem respectivamente

$$
(34) \qquad
\begin{gathered}
\frac{\partial F^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = I^{\mu}, \\
\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0.
\end{gathered}
$$

O tensor antissimétrico de terceira ordem, que constitui o primeiro membro da segunda equação, tem apenas quatro componentes essenciais, correspondentes às combinações sem repetição dos quatro primeiros números três a três. Têm-se assim as equações fundamentais da Electrodinâmica sob forma absoluta.

34. A densidade da fôrça ponderomotriz do campo electromagnético é, como se sabe,

$$
(35) \qquad f = \rho E + \rho [v H],
$$

onde o símbolo [ ] designa a multiplicação vectorial. Verifica-se imediatamente que as três equações espaciais em que se scinde a equação

$$
f^{\mu} = - F^{\mu\alpha} I_{\alpha}
$$

coincidem com as três em que se divide a equação vectorial (35). Tem-se além disso

$$
f^{4} = \rho (E^{1} v^{1} + E^{2} v^{2} + E^{3} v^{3}) = \rho (E v),
$$

onde ( ) significa multiplicação escalar; ou, atendendo a que o produto vectorial que figura em (35) é perpendicular a v,

$$f^4 = (fv).$$

f^4 é pois o trabalho da densidade de fôrça na unidade de tempo, ou seja a densidade de potência. O vector universal f^μ é a densidade de fôrça universal do campo electromagnético.

Vejamos se existe um tensor energético electrodinâmico análogo ao tensor mecânico, isto é, que satisfaça a uma equação da forma (28). De

$$f_\mu = -F_{\mu\beta}\, I^\beta$$

resulta, atendendo à primeira (34),

$$f_\mu = -F_{\mu\beta}\frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\gamma} = -\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(F_{\mu\beta}F^{\beta\gamma}) + F^{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma}.$$

O segundo têrmo do terceiro membro é idêntico a

$$\frac{1}{2}F^{\beta\gamma}\left(\frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta}\right)$$

em virtude da antissimetria de $F^{\mu\nu}$, e portanto, pela segunda (34), a

$$-\frac{1}{2}F^{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F^{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} + F_{\beta\gamma}\frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\mu}\right) = -\frac{1}{4}g^\alpha_\mu\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}).$$

É pois

$$f_\mu = -\frac{\partial E^\alpha_\mu}{\partial x^\alpha}$$

com

$$E_{\mu}^{\nu} = - F_{\mu\beta} F^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu}^{\nu} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma};$$

o tensor procurado existe efectivamente.

As componentes contravariantes são

$$E^{\mu\nu} = - g_{\beta\gamma} F^{\mu\beta} F^{\nu\gamma} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma},$$

logo o tensor é simétrico. O cálculo destas componentes dá

$$E^{11} = \frac{1}{2}(|E|^2 + |H|^2) - E^1 E^1 - H^1 H^1,$$

$$E^{12} = -(E^1 E^2 + H^1 H^2),$$

. . . .

$$E^{14} = E^2 H^3 - E^3 H^2,$$

. . . .

$$E^{44} = \frac{1}{2}(|E|^2 + |H|^2);$$

vê-se que as componentes espaciais coincidem com as tensões de Maxwell, as componentes espacio-temporais com as do vector radiante de Poynting e a componente temporal com a densidade de energia. Como o tensor energético mecânico, o tensor energético electrodinâmico scinde-se em quatro grandezas para um espaço de inércia: o tensor simétrico das tensões ou densidade de corrente de impulsão, o vector densidade de impulsão, o vector densidade de corrente de energia e o escalar densidade de energia. Pois que a equação

$$(36) \qquad f^{\mu} = - \frac{\partial E^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

traduz a lei da impulsão para $\mu = 1, 2, 3$ e a lei da energia para $\mu = 4$, o vector de Poynting, com efeito, deve interpretar-se como densidade de corrente de energia só na última equação; nas primeiras representa a densidade de impulsão electromagnética, grandeza já conhecida da electrodinâmica pre-relativista. A igualdade dos dois vectores é um aspecto da lei da inércia da energia.

Se se abstrai da gravitação, pode actuar como fôrça exterior sôbre a matéria só a fôrça ponderomotriz do campo electromagnético (por intermédio da carga). As equações (28) e (36) dão pois

$$\frac{\partial M^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial E^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha},$$

ou

$$\frac{\partial T^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{37}$$

pondo

$$T^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}.$$

A equação (37) mostra que, abstraindo da gravitação, a impulsão-energia total mecânica e electrodinâmica é conservada. O tensor $T^{\mu\nu}$, de divergência sempre nula, é o tensor energético material.

A exclusão da gravitação constitui uma lacuna da teoria da relatividade especial, mas lacuna forçosa. Veremos que esta teoria só é rigorosamente válida no caso limite em que o campo de gravitação não existe.

Contraindo o tensor energético electrodinâmico obtém-se

$$E^\alpha_\alpha = 0,$$

ao contrário do que sucede com o tensor mecânico. Isto prova que o segundo tensor não pode derivar-se estatisticamente do primeiro. Nem sequer o seu têrmo $p^{\mu\nu}$, correspondente à existência de tensões próprias, porquanto, no caso dum fluido perfeito, é

$$p_\alpha^\alpha = 4p$$

sendo p a pressão. As tensões da matéria, por conseguinte, não podem ser tôdas de origem electromagnética. Muito menos podem explicar-se pela gravitação intercorpuscular, porque esta é infinitésima nos corpos de pequenas dimensões. É êste um problema que não há meio de resolver emquanto forem desconhecidas as fôrças que mantêm a electricidade aglomerada no electrão e no protão. No estado actual da Física somos forçados a servir-nos da descrição fenomenológica da matéria *stricto sensu* para determinar a estrutura do tensor energético respectivo.

Note-se emfim que tôdas as componentes de $E^{\mu\nu}$ são muito pequenas perante a densidade da matéria ρ_0 que figura em $M^{\mu\nu}$. A esta densidade se reduz pois, em primeira aproximação, o tensor material completo.

V

35. Do ponto de vista dum sistema de inércia S consideremos um sistema de pontos materiais, regressando à unidade ordinária de tempo. As equações do movimento sob a forma (24) do Cap. IV, combinadas com o princípio de d'Alembert e com o princípio dos deslocamentos virtuais, dão a equação geral da dinâmica relativista

$$(1) \qquad \sum \left\{ \left[X_k - \frac{d}{dt}(m_k \dot{x}_k) \right] \delta x_k + \ldots + \ldots \right\} = 0.$$

m_k é a massa do ponto material M_k, x_k, y_k, z_k são as suas coordenadas, δ simboliza um deslocamento virtual arbitrário compatível com as ligações do sistema no instante t, e o ponto colocado sôbre uma letra representa derivação em ordem ao tempo. X_k, Y_k, Z_k são as componentes da fôrça dada que actua em M_k; supõe-se, é claro, que as ligações são bilaterais e sem atrito.

Geomètricamente, a posição do sistema é determinada por um certo número (mínimo) de coordenadas independentes. Em função destas coordenadas e do tempo se exprimem as coordenadas cartesianas dos pontos do sistema por equações da forma

$$(2) \qquad x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, t).$$

Um cálculo clássico permite dar a (1) a forma

$$
(3)\qquad \sum_i \left[Q_i - \frac{d}{dt} \sum_k \left(m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} + \ldots + \ldots \right) + \right.
$$
$$
\left. + \sum_k \left(m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} + \ldots + \ldots \right) \right] \delta q_i = 0,
$$

onde

$$
Q_i = \sum_k \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \ldots + \ldots \right)
$$

são as componentes lagrangianas da fôrça. Façamos

$$
(4)\qquad T^* = \sum m^0{}_k c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2{}_k}{c^2}} \right),
$$

onde $m^0{}_k$ é a massa própria do ponto M_k e v_k a sua velocidade; atendendo à relação

$$
v_k{}^2 = \dot{x}_k{}^2 + \dot{y}_k{}^2 + \dot{z}_k{}^2,
$$

verifica-se fàcilmente que (3) pode escrever-se

$$
(5)\qquad \sum \left[Q_i + \frac{\partial T^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0.
$$

Uma transformação simples desta equação dá

$$
\delta T^* + \sum Q_i \delta q_i = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i ;
$$

integrando entre os instantes t_0 e t_1, e supondo nulos os δq_i nos limites de integração, resulta imediatamente

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T^* + \sum Q_i \delta q_i\right) dt = 0,$$

que exprime em Relatividade o princípio de Hamilton sob a forma mais geral. Variando virtualmente o movimento efectivo dum sistema entre dois instantes (mas não nêles), infinitamente pouco e compativelmente com as ligações, sem fazer variar o tempo, o integral precedente anula-se.

Se o sistema é holónomo, o que admitiremos no que segue, não há equações de ligação além das equações (2); os δq_i são todos arbitrários, e o princípio de Hamilton, ou a equação equivalente (5), dá imediatamente as equações de Lagrange.

O princípio de Hamilton, que acabamos de deduzir, permite construir a dinâmica analítica relativista. A diferença em relação ao princípio clássico consiste em que a função T^* não é a energia cinética total, mas sim a soma dos produtos das energias cinéticas dos pontos do sistema pelos respectivos factores de contracção

$$\sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}}$$

(cf. fórmula (27) do Cap. IV). Para os sistemas materiais ordinários esta diferença é geralmente insignificante do ponto de vista prático.

Se as fôrças admitem uma energia potencial V dependente só da posição do sistema (campo conservativo), tem-se

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

e o princípio de Hamilton dá

(6) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

com

(7) $$L = T^* - V.$$

A função L é a função de Lagrange, ou potencial cinético do sistema; o integral de L é a acção hamiltoniana. O princípio de Hamilton exprime pois, neste caso, que a acção hamiltoniana é estacionária no movimento real. As equações de Lagrange escrevem-se agora, pois que V não depende dos $\dot{q}_i$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

e não são mais que as equações eulerianas do problema de variações (6). Assim, o movimento dum sistema holónomo num campo conservativo é inteiramente determinado pelo potencial cinético (e pelas condições iniciais). Estes resultados ficam válidos quando a energia potencial varia com o tempo em cada ponto do espaço.

No caso em que as fôrças admitem uma energia potencial generalizada, isto é, dependente da posição e das velocidades, tem-se

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

e verifica-se imediatamente que o princípio de Hamilton e as equações de Lagrange conservam a forma precedente, com o potencial cinético dado ainda por (7). Também aqui a energia potencial pode variar com o tempo em cada ponto do espaço.

Quando L não depende explìcitamente de t, tem-se

$$\frac{dL}{dt}=\sum\frac{dL}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i+\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i;$$

atendendo às equações de Lagrange, o segundo membro pode escrever-se

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i,$$

donde resulta, representando por h uma constante arbitrária,

$$\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h, \tag{8}$$

que é um primeiro integral daquelas equações (integral da energia). Em particular, se o campo é conservativo e as ligações são independentes do tempo, a soma que figura em (8) é igual a

$$\sum\frac{\partial T^*}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i$$

ou

$$\sum\frac{m^0{}_k\, v^2{}_k}{\sqrt{1-\frac{v^2{}_k}{c^2}}},$$

por (4) e porque os $v^2{}_k$ são formas quadráticas nos $\dot{q}_i$; ora esta expressão, como imediatamente se verifica, é idêntica à soma

$$T^*+T,$$

onde o segundo têrmo é a energia cinética do sistema, e portanto (8) escreve-se, atendendo a (7),

$$T^*+T-(T^*-V)=h$$

ou

(9) $$T+V=h,$$

que é a lei da conservação da energia. Note se que a energia total é igual à soma de h com a energia própria

$$\sum_k m^0{}_k c^2.$$

Consideremos um movimento do sistema entre os instantes t_0 e t_1, para o qual a constante de energia h tem um valor determinado. Se variamos êste movimento nas condições fixadas para o princípio de Hamilton, conservando o valor de h, resulta por (8)

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}(L+h)\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt,$$

donde, por (6),

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)dt=0.$$

Esta igualdade exprime que a acção maupertuisiana é estacionária para o movimento real nas condições admitidas. Para ligações independentes do tempo num campo conservativo, tem-se

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T^*+T)\,dt=0.$$

Êste teorema não deixa de ter lugar quando se suprime a condição de não fazer variar o tempo, conservando as outras condições (princípio da menor acção). Encontra-se sem dificuldade, com efeito, que é então

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \left(L - \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta t \Bigg|_{t_0}^{t_1},$$

donde resulta, por (8), o princípio referido.

36. Voltemos ao caso dum sistema holónomo num campo de fôrça que admite energia potencial, mesmo generalizado. Pondo

(10) $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

as equações de Lagrange dão

(11) $$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Com (10) e (11) as equações do movimento desdobram-se num sistema de primeira ordem, de incógnitas q_i e p_i. Dando a estas incógnitas variações infinitesimais, resultam variações infinitesimais para os $\dot{q}_i$ e $\dot{p}_i$, e tem-se evidentemente

$$\delta L = \Sigma(\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \delta \Sigma p_i \dot{q}_i + \Sigma(\dot{p}_i \delta q_i - \dot{q}_i \delta p_i),$$

isto é

(12) $$\delta H = \Sigma(\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i)$$

com

(13) $$H = \Sigma p_i \dot{q}_i - L.$$

Se consideramos H expressa nos q_i, p_i, t por meio de (10), a equação (12) dá imediatamente

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

que é a forma canónica hamiltoniana das equações do movimento.

Quando L não contém t, o mesmo sucede à função de Hamilton H. Neste caso é

$$\frac{dH}{dt}=\Sigma\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=0$$

em virtude das equações canónicas e

$$H=h$$

é um integral destas equações. Êste integral é idêntico ao integral da energia (8). Se o campo é conservativo e as ligações são independentes do tempo é pois, segundo (9),

$$H=T+V,$$

como na mecânica newtoniana.

Obtêm-se imediatamente as equações canónicas anulando a variação que sofre o integral

$$\int_{t_0}^{t_1}(\Sigma p_i\dot{q}_i-H)\,dt$$

por virtude de variações dos q_i, p_i (considerados como independentes) nulas nos limites. Esta observação permite resolver fàcilmente o importante problema da determinação das transformações dos q_i, p_i que deixam a forma canónica inalterada (transformações canónicas).

Se designarmos por q'_i, p'_i as novas variáveis numa transformação, é claro que é necessário e suficiente, para que esta seja canónica, que exista uma função H' tal que

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\Sigma p'_i \dot{q}'_i - H')dt = 0$$

para variações dos q'_i, p'_i nulas nos limites; H' será a nova função de Hamilton. Pondo

$$\Sigma p_i \dot{q}_i - H = \Sigma p'_i \dot{q}'_i - H' + K,$$

é pois necessário e suficiente que a variação do integral de K se anule idênticamente, isto é, que se tenha

$$K = \frac{dW}{dt},$$

sendo W uma função dos q'_i, p'_i, t ou, o que é o mesmo, dos q_i, q'_i, t. Assim, as transformações canónicas são as que satisfazem à equação

$$(14) \qquad \Sigma p_i\, d\, q_i - \Sigma p'_i\, d\, q'_i - (H - H')\, d\, t = d\, W,$$

onde W é arbitrária.

A equação (14) determina imediatamente, desenvolvolvendo $d\,W$ e igualando os coeficientes das mesmas diferenciais dum e doutro membro, aquelas transformações canónicas para as quais é impossível alguma relação entre os q_i, q'_i, t. Em geral, sejam

$$(15) \qquad \Omega_l(q, q', t) = 0$$

as relações distintas dêste género. A aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange dá

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_i}, \\
p'_i &= -\frac{\partial W}{\partial q'_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q'_i}, \\
H' &= H + \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial t};
\end{aligned}
$$

estas equações, juntas às (15), fornecem, por eliminação dos λ_k, tôdas as transformações canónicas que com (15) são compatíveis.

O número mínimo de equações (15) é zero, e o máximo é o número de graus de liberdade do sistema. No primeiro caso desaparecem de (16) os termos em que figuram os λ_k. No segundo caso, as equações (15) definem uma transformação pontual no espaço abstracto dos q_i; a transformação canónica é pois uma transformação pontual prolongada.

É evidente que se obtêm as transformações canónicas combinando as equações (15) com a equação

$$
(17) \qquad \Sigma p_i \delta q_i - \Sigma p'_i \delta q'_i = \delta W,
$$

onde δ indica que se fazem variar as coordenadas q_i, q'_i sem fazer variar o tempo. A equação (17) mostra imediatamente que o produto de duas transformações canónicas é ainda uma transformação canónica, e que a inversa duma transformação canónica é canónica também: as transformações canónicas formam grupo.

É fácil de ver que êste grupo é um sub-grupo das transformações de contacto, as quais satisfazem à equação

$$
(18) \qquad \delta z' - \Sigma p'_i \delta q'_i = \rho (\delta z - \Sigma p_i \delta q_i),
$$

com ρ função dos z, q_i, p_i e dum parâmetro t que não se faz variar. Com efeito, no caso particular em que tais transformações são determinadas por equações directrizes da forma (15) mais uma da forma

$$z' = z - W(q, q', t)$$

tem-se

$$\delta z' = \delta z - \delta W,$$

por onde (18) dá $\rho = 1$ e se converte em (17).

37. Efectuemos nas equações hamiltonianas

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

a transformação canónica

$$(19) \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial W}{\partial q'_i};$$

resultará o sistema de equações

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i},$$

onde é, por (16),

$$H' = H(q, p, t) + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Se W, como função dos q_i, t, satisfaz à equação diferencial parcial

$$(20) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0,$$

H' anula-se idênticamente em virtude das primeiras (19). Os q'_i, p'_i são então constantes arbitrárias, e as equações (19) dão a solução geral das equações canónicas dadas, porque transformam estas em identidades. O problema da integração das equações canónicas reduz-se pois ao da determinação dum integral completo da equação de Hamilton (20) (teorema de Jacobi).

A resolução do segundo problema simplifica-se quando alguma das coordenadas q_i não entra em H (coordenada cíclica). Se q_1 fôr cíclica, com efeito, as equações canó-dão imediatamente o integral

$$p_1 = \alpha_1$$

e ter-se há, segundo (19),

$$W = \alpha_1 q_1 + W_1,$$

onde W_1 não depende de q_1; fazendo esta substituïção em (20), baixa de uma unidade o número de variáveis independentes. No caso de serem cíclicas tôdas as coordenadas q_i, a equação de Hamilton reduz-se dêste modo a uma equação diferencial ordinária, que se integra imediatamente por quadratura.

Anàlogamente, quando H não depende explìcitamente de t tem-se o integral da energia

$$H = h$$

e é pois

$$W = -h\,t + V,$$

onde V não depende de t explìcitamente. Substituindo em (20) desaparece a variável t. Se $V(q, h, \alpha)$ for um integral completo da equação resultante, a solução geral das equações canónicas será

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \gamma = t - \frac{\partial V}{\partial h}, \quad \beta_j = -\frac{\partial V}{\partial a_j};$$

o último grupo, que tem menos uma equação que o primeiro, defina a trajectória do sistema no espaço das variáveis q_i.

Basta que H contenha duas das variáveis q_i, t para que a redução precedente deixe ainda uma equação diferencial parcial. Em muitas aplicações, porém, o primeiro membro desta equação é uma soma de termos, que dependem individualmente duma só variável e da derivada parcial respectiva. Igualando êstes termos a constantes arbitrárias (uma das quais evidentemente não é essencial) e atribuindo à função desconhecida a forma duma soma em que cada termo depende duma só variável, scinde-se a equação diferencial parcial em equações diferenciais ordinárias que se integram por quadratura (método da separação das variáveis).

Suponhamos que a função de Hamilton tem a forma

$$H_0 + H_1$$

e que foi possível, abstraindo de H_1, integrar o sistema canónico pela aplicação do teorema de Jacobi. Encontrou-se pois um integral completo $W +$ const. da equação de Hamilton

$$(21) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0$$

e formou-se a solução geral

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}.$$

Consideremos agora os α_i, β_i como novas variáveis e façamos no sistema hamiltoniano dado a transformação canónica definida por estas equações. A nova função de Hamilton é

$$H_0 + H_1 + \frac{\partial W}{\partial t},$$

ou simplesmente H_1 em virtude de (21); portanto o novo sistema canónico tem a forma notável

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}.$$

Se H_1 é muito pequeno perante H_0, os α_i, β_i variam muito pouco perante os q_i, p_i e esta circunstância facilita o seu cálculo aproximado quando a natureza da função H_1 torna impraticável a integração rigorosa. Nisto se funda a teoria das perturbações, em mecânica celeste e em mecânica atómica, segundo o método da variação das constantes arbitrárias.

VI

38. Vimos que tôdas as tentativas, feitas nos séculos passados com o fim de melhorar a teoria da gravitação, resultaram infrutíferas. Afinal a teoria de Newton, não obstante os seus defeitos, era preferível pela sua extrema simplicidade.

A teoria da relatividade especial veio renovar o problema da gravitação porque, se ela é universalmente válida, a lei da gravitação tem de ser covariante para a transformação de Lorentz. Ora a isto não satisfaz a lei de Newton, a qual atribui à gravitação uma propagação instantânea que, segundo a teoria da relatividade, não pode existir. Urgia pois substituir a lei newtoniana por uma lei relativista, que se afaste dela tão pouco quanto possível no caso das velocidades astronómicas, e por um duplo motivo: era preciso verificar se o princípio da relatividade, provado experimentalmente em mecânica e em electrodinâmica, se estende ou não à gravitação; e se sim, isto é se a lei relativista não cedesse vantagem à de Newton nos factos que esta pode explicar, era necessário saber se aquela permite uma explicação mais satisfatória para os factos em que a lei de Newton se mostrou insuficiente.

Foi o que procuraram fazer, cada um a seu modo, Poincaré, Minkowski e Lorentz. Naturalmente, animava-os a esperança de que o princípio da relatividade não seria desmentido pela mecânica celeste e de que o problema da gravitação ia encontrar, pelo menos quanto à forma da lei da acção mútua de dois pontos materiais, a solução definitiva. Com efeito a transformação de Lorentz difere muito pouco da transformação de Galileu para as velocidades do nosso sistema planetário; e o facto de a teoria da relatividade exigir que a gravitação se propague com velocidade finita vem ao encontro duma aspiração geral, que há muito ardia por satisfazer-se.

39. A-pesar de fazer uso de métodos de cálculo essencialmente idênticos ao método quadridimensional de Minkowski, Poincaré [1] trata a questão dentro da teoria lorentziana de 1904, anterior à teoria de Einstein. Por isso, atribuindo à gravitação velocidade de propagação finita não se vê obrigado a identificá-la com a velocidade da luz. Por fim fixa-se nesta velocidade, é certo; mas fá-lo por puro motivo de simplicidade. Nós colocar-nos-hemos desde logo dentro da teoria einsteiniana; os resultados em que Poincaré se detém não sofrem com isto modificação.

Se um ponto material está em repouso num sistema de inércia S', a fôrça de gravitação que êle emite deve propagar-se com a mesma velocidade em tôdas as direcções, por motivo de simetria. Segundo a teoria da relatividade, esta velocidade não pode ser superior à da luz. Admitamos por um momento que ela lhe é inferior; então, para o observador doutro sistema de inércia S, relativamente ao qual o ponto considerado está em movimento rectilíneo uniforme, a velocidade da gravitação dependeria da velocidade do ponto e variaria com a direcção, em virtude do teorema da composição das velocidades. Ora isto, que equivaleria a aceitar que a gravitação consiste numa

---

(1) H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*, 1906, *op. cit.*

emissão de partículas de massa própria positiva, é altamente improvável. Deve antes admitir-se que a velocidade de propagação da gravitação é independente do estado de movimento da fonte respectiva, e portanto igual à velocidade da luz ([1]). Vale a mesma conclusão para a velocidade de qualquer acção física que repugne reduzir a uma emissão corpuscular como aquela a que a luz era reduzida por Newton.

Pôsto isto, procuremos a lei relativista da fôrça de gravitação que um ponto material de massa própria m' (corpo atraente) exerce sôbre um ponto material de massa própria m (corpo atraído). Sejam, num sistema de inércia arbitrário, $x, y, z, \mathfrak{v}$ as coordenadas e a velocidade de m no instante t, e $\mathfrak{K}$ a fôrça que actua em m no mesmo instante. Esta fôrça partiu de m' num instante anterior t', no qual m' ocupava a posição x', y', z' e possuía a velocidade $\mathfrak{v}'$. Representando por $\mathfrak{r}$ o vector de componentes

$$x-x', \quad y-y', \quad z-z',$$

tem-se evidentemente

$$(1) \qquad t = t' + \frac{r}{c},$$

onde r é o módulo de $\mathfrak{r}$.

Admitiremos que a fôrça $\mathfrak{K}$ depende da posição actual do corpo atraído relativa à posição retardada do corpo atraente, e das respectivas velocidades, isto é de $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}'$, mas não das acelerações. Para obter uma lei que satisfaça

---

([1]) Pode acrescentar-se que, na hipótese de a velocidade da gravitação ser menor que a da luz, se um corpo se afastasse doutro com velocidade superior à daquela fôrça não haveria entre êles gravitação mútua; a gravitação deixaria de ser universal.

ao princípio da relatividade, o meio mais simples consiste em introduzir os vectores do universo quadridimensional correspondentes aos vectores considerados; uma equação linear homogénea entre aquêles será covariante para a transformação cinemática relativista se os seus coeficientes forem invariantes para a mesma transformação. Introduzamos pois os vectores: fôrça universal

$$(2) \qquad K^i = \left\{ \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \frac{1}{c^2}\cdot\frac{(\mathfrak{K}\mathfrak{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right\},$$

raio-vector universal

$$(2) \qquad R^i = \left\{ \mathfrak{r}, t-t' \right\} = \left\{ \mathfrak{r}, \frac{r}{c} \right\},$$

velocidades universais

$$(2) \qquad V^i = \left\{ \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right\},$$

$$(2) \qquad V'^i = \left\{ \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}},\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \right\},$$

onde v e v' são respectivamente os módulos de $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v}'$, $(\mathfrak{K}\mathfrak{v})$ é um produto escalar ordinário e a determinação métrica do universo é a da fórmula (18), IV, 26. A lei que buscamos estará contida na expressão geral

$$(3) \qquad K^i = \alpha R^i + \beta V^i + \gamma V'^i,$$

com α, β, γ invariantes, dependentes de $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}'$.

Êstes invariantes possuem uma forma geral que é fácil de descobrir. Com efeito, os invariantes distintos que dependem de R^i, V^i, V'^i hão-de procurar-se evidentemente entre os três módulos dêstes vectores

$$0, \; c, \; c$$

e os seus três produtos escalares

$$(4) \qquad \begin{gathered} R^i V_i = \frac{c\,r - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad R^i V'_i = \frac{c\,r - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r})}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \\ V^i V'_i = \frac{c^2 - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}')}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}; \end{gathered}$$

são portanto os três últimos. Os invariantes α, β, γ são funções dêles e devem satisfazer à relação

$$(5) \qquad \alpha R^i V_i + \beta c^2 + \gamma V_i V'^i = 0,$$

que se obtém multiplicando (3) escalarmente por V_i.

Até aqui, duas das funções α, β, γ são completamente indeterminadas, o que significa que há uma infinidade de leis relativistas da gravitação possíveis *a priori*, como era de si evidente. Para ir mais longe deve atender-se a que a lei de Newton representa os movimentos celestes com uma aproximação muito grande. Assim, a lei relativista da gravitação tem de diferir muito pouco da de Newton para pequenas velocidades, a ponto de se reduzir rigorosamente a esta no caso de dois corpos em repouso. As investigações de Laplace e Lehmann-Filhès, como vimos, mostraram que a adição de termos de primeira ordem torna a lei de Newton incompatível com certas observações se se atribui à gravitação a velocidade da luz. Por isso Poincaré procura determinar os invariantes α, β, γ pela condição de que a lei relativista difira da de Newton só em termos de segunda ordem ou de ordem superior. Sendo as quantidades de segunda ordem, no nosso sistema planetário, cêrca de 10.000 vezes menores que as de primeira, é provável que a lei assim obtida não seja contradita pela experiência.

Segundo (2), as três equações espaciais de (3) escrevem-se vectorialmente

$$(6) \quad \mathfrak{K} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\alpha\mathfrak{r} + \beta\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \gamma\frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right),$$

e a nova hipótese exige que esta lei se reduza à de Newton pelo desprêzo dos termos de segunda ordem. Para confrontar com a lei de Newton, porém, é preciso referir ao mesmo instante t tôdas as grandezas que figuram na equação (6). Sejam x'', y'', z'' as coordenadas de m' no instante t; visto que o intervalo de tempo $t-t'$ é pequeno e que são muito fracas as acelerações no sistema solar, podemos ter por rectilíneo e uniforme o movimento de m' durante o tempo $t-t'$ e escrever, atendendo a (1),

$$(7) \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \frac{r}{c}\mathfrak{v}',$$

onde $\mathfrak{r}'$ representa o vector de componentes

$$x-x'', \quad y-y'', \quad z-z'',$$

isto é a distância orientada dos dois corpos no instante t.

Desta fórmula resulta, por um lado,

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}') + \frac{r}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}'), \tag{8}$$

$$(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}') + \frac{r}{c}\,v'^2, \tag{8}$$

e por outro lado, quadrando-a escalarmente e resolvendo,

$$r\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) = \frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')}{c} + r'\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')^2}{c^2\,r'^2}}. \tag{8}$$

Desprezando a segunda ordem tem-se

$$\begin{gathered}(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}'), \quad (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}'), \\ r = r' + \frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')}{c},\end{gathered} \tag{9}$$

e os invariantes fundamentais (4) reduzem-se a

$$\begin{gathered}R^i\,V_i = c\,r' + (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}') - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}'), \\ R^i\,V'^i = c\,r', \quad V^i\,V'_i = c^2.\end{gathered} \tag{10}$$

Ora, dentro da aproximação adoptada, a equação (6) escreve-se, atendendo a (7) e (9),

$$\mathfrak{K} = \alpha\,\mathfrak{r}' + \beta\,\mathfrak{v} + \left(\gamma + \alpha\frac{r'}{c}\right)\mathfrak{v}', \tag{11}$$

onde em vez de α, β, γ se devem pôr funções das quantidades (10) limitadas à primeira ordem. Mas esta equação deve coïncidir com a lei de Newton; portanto o invariante α há-de reduzir-se a

$$-\frac{f m' m}{r'^3}$$

(onde f é a constante da gravitação) e o invariante β a zero ou a uma quantidade de primeira ordem. Poincaré toma, e isto tem ainda um alto grau de arbitrariedade,

$$\alpha = -\frac{f m' m c^3}{(R^i V'_i)^3}, \quad \beta = 0;$$

de (5) resulta então

$$\gamma = -\alpha \frac{R^i V_i}{V^k V'_k},$$

e (3) dá a lei procurada

$$\text{(I)} \qquad K^i = -\frac{f m' m c^3}{(R^h V'_h)^3}\left(R^i - \frac{R^k V_k}{V^l V'_l} V'^i\right).$$

Verifica-se fàcilmente que o coeficiente de $\mathfrak{v}'$ em (11) é de primeira ordem, como devia ser.

Guiado por analogia com a expressão da fôrça ponderomotriz do campo electromagnético, que é linear na velocidade da carga atraída, Poincaré propõe também a lei

$$\text{(II)} \qquad K^i = -\frac{f m' m c}{(R^h V'_h)^3}(V^k V'_k \,.\, R^i - R^k V_k \,.\, V'^i),$$

a qual se obtém conservando $\beta = 0$ e tomando para α o valor precedente multiplicado por

$$\frac{V^k V'_k}{c^2};$$

é outra lei possível, com efeito, porque esta quantidade se reduz à unidade mediante desprêzo da segunda ordem.

As duas leis precedentes são das mais simples entre a infinidade de leis possíveis. Tôdas se afastam da lei de Newton em quantidades de segunda ordem e portanto tôdas são capazes de explicar suficientemente, como a lei newtoniana, a maior parte dos movimentos planetários. No que respeita aos movimentos residuais que escapavam à lei de Newton, é claro que só uma discussão adeqüada poderá mostrar se elas são ou não aceitáveis.

40. Sem dizer como a descobriu, Minkowski (1) propôs para a gravitação a lei seguinte.

Consideremos as linhas universais dos pontos materiais m' e m, e um ponto B da segunda. Construamos a fôlha anterior do cone das geodésicas nulas relativo a B e seja B' o ponto em que êle corta a linha universal de m' (êste ponto existe sempre e é único, porque a direcção das linhas universais da matéria é sempre temporal). Tiremos por B' a tangente à linha universal de m', por B a perpendicular a esta tangente e designemos por D' o ponto de intersecção destas duas rectas. A fôrça universal que se exerce no ponto material m colocado em B será o vector normal à velocidade universal de m e soma geométrica do vector

$$\frac{f m' m}{\left|\overrightarrow{B' D'}\right|^3} \cdot \overrightarrow{B D'}$$

e dum vector apropriado na direcção $B' D'$.

(1) H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, 1907, *Anhang;* in-*Fortschritte der math. Wissensch.*, Heft 1, Leipzig und Berlin, 1910.

É fácil de reconhecer que esta lei é idêntica à lei (I) de Poincaré. Com efeito, tem-se aqui

$$\vec{K} = \frac{f m' m}{\left|\overrightarrow{B' D'}\right|^3} \left(\overrightarrow{B D'} + \lambda \vec{V'}\right);$$

ora a relação

$$K^i V_i = 0$$

dá para o coeficiente λ o valor

$$\lambda = -\frac{\left(\overrightarrow{B D'} \cdot \vec{V}\right)}{V^i V'_i};$$

por outro lado, é

$$\overrightarrow{B D'} = -\vec{R} + \overrightarrow{B' D'} = -\vec{R} + \frac{R^i V'_i}{c} \cdot \frac{\vec{V'}}{c},$$

$$\left|\overrightarrow{B' D'}\right| = \frac{R^i V'_i}{c};$$

resulta pois

$$\vec{K} = -\frac{f m' m c^3}{(R^k V'_k)^3} \left(\vec{R} - \frac{R^k V_k}{V^l V'_l} \vec{V'}\right),$$

como tínhamos afirmado.

De outra lei proposta por Minkowski falaremos adiante.

41. Poincaré procurou a lei relativista da gravitação sob as hipóteses seguintes: *a*) a fôrça que se exerce no corpo atraído dependerá da posição actual dêste corpo relativamente à posição retardada do corpo atraente e também das velocidades dos dois corpos nessas posições; *b*) desprezando a segunda ordem deve recaír-se na lei de Newton. Estas hipóteses deixaram o problema altamente indeterminado. Á primeira vista parecerá que temos de conformar-nos com esta indeterminação, e de ensaiar uma a uma as diversas leis possíveis enquanto se não encontrar lei que satisfaça plenamente; porque, em primeiro lugar, desde que é necessário admitir que a gravitação se propaga com a velocidade da luz, a hipótese *a*), pelo menos (a expressão da fôrça poderia conter também as acelerações), é inevitável; depois, se não queremos entrar em conflito com as observações astronómicas, a condição *b*) tem de ser respeitada. Em rigor assim é. Mas a física teórica mal daria um passo se se apegasse à generalidade máxima quando pretende formular leis. É forçoso restringir criteriosamente. ¿Não é mais metódico admitir, pelo menos numa primeira investigação, que a fôrça da gravitação é independente da velocidade do corpo atraído, e portanto exactamente dada pela lei de Newton, no caso do repouso do corpo atraente? Ora sucede que, nesta hipótese, o princípio da relatividade determina unìvocamente a lei da gravitação, e a lei assim determinada é idêntica à lei (II) de Poincaré.

Em termos mais precisos, admitiremos que num sistema de inércia, no qual o corpo atraente está momentâneamente em repouso, vale exactamente a lei de Newton qualquer que seja o movimento do corpo atraído. Reconhece-se aqui um método normal na teoria especial da relatividade. É claro que dêste modo abstraímos da aceleração do corpo atraente, mas o mesmo fez Poincaré com a sua hipótese *a*); demais isto é legítimo, porque as acelerações astronómicas são muito pequenas. Seja S_0 o sistema de inércia no qual o corpo atraente m' estava momentâneamente em repouso no instante t'_0, em que emitiu a fôrça de gravitação que chega ao corpo atraído no instante t_0. Designando por $\mathfrak{r}_0$ o vector que liga estas posições dos dois corpos, dirigido de m' para m, ter-se-há

$$(12) \qquad t_0 = t'_0 + \frac{r_0}{c}$$

e, para valor daquela fôrça em S_0,

$$\mathfrak{K}_0 = -\frac{f m' m}{r^3_0} \mathfrak{r}_0.$$

A fôrça universal correspondente, se fôr $\mathfrak{v}_0$ a velocidade de m, será

$$K_0 = -\frac{f m' m}{r^3_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_0}{c^2}}} \left\{ \mathfrak{r}_0, \frac{1}{c^2}(\mathfrak{r}_0 \mathfrak{v}_0) \right\},$$

onde deve entender-se que o factor exterior ao colchete multiplica as duas grandezas interiores. Introduzamos as velocidades universais e o raio-vector universal e formemos os seus três produtos escalares. Atendendo a que é nula a velocidade $\mathfrak{v}'_0$ de m', teremos por (4)

$$(V_0 V'_0) = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad (R_0 V'_0) = c\, r_0,$$

$$(R_0 V_0) = \left[\frac{r_0}{c} - \frac{(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{r}_0)}{c^2}\right] \cdot (V_0 V'_0).$$

Daqui resulta para K_0 a expressão

$$K_0 = -\frac{f m' m c}{(R_0 V'_0)^3} (V_0 V'_0) \left\{ \mathfrak{r}_0, \quad \frac{r_0}{c} - \frac{(R_0 V_0)}{(V_0 V'_0)} \right\}.$$

Reconhece-se agora que as grandezas que figuram no colchete são exactamente o vector de espaço e a componente de tempo relativos ao vector universal

$$R_0 - \frac{(R_0 V_0)}{(V_0 V'_0)} V'_0;$$

a nossa lei é pois idêntica em S_0 à lei (II) de Poincaré; àlém disso, (12) pode escrever-se

$$(R_0 R_0) = 0\,;$$

porque esta equação e a precedente são covariantes, a lei tem a mesma forma em todos os sistemas de inércia [1].

42. Pela aplicação de (2) e (4) encontra-se fàcilmente que a fôrça, que se exerce em m, é então, num sistema de inércia qualquer,

$$(13)\quad \mathfrak{K} = -\frac{f\,m'\,m\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{r^3\left(1-\frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r})}{c\,r}\right)^3}\left[\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}')}{c^2}\right)\mathfrak{r} - r\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r})}{c\,r}\right)\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right].$$

Aplicando (8) obtém-se

$$(14)\quad \mathfrak{K} = -\frac{f\,m'\,m\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{r'^3\left(1-\frac{v'^2}{c^2}+\frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')^2}{c^2\,r'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}')}{c^2}\right)\mathfrak{r}' + \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}')\,\mathfrak{v}'}{c^2}\right];$$

onde tôdas as grandezas se referem ao mesmo instante t. Vê-se que o desvio em relação à lei de Newton é de segunda ordem, como Poincaré mostrara doutro modo.

A lei de Lorentz [2], a que nos referimos no n.º 38, deduz-se de (14) desprezando a terceira ordem.

---

[1] Cf. F. Kottler, *Gravitation und Relativitätstheorie*, in-*Encykl. d. math. Wissensch.*, VI, 2 B, 1.

[2] H. A. Lorentz, *Das Relativitätsprinzip, drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Nachdruck*, Leipzig und Berlin, 1920.

43. A primeira prova, e a mais simples, a que deve submeter-se a lei (13) é a de verificar se ela é efectivamente aceitável para o problema dos dois corpos, tal como êle é pôsto em Astronomia para o nosso sistema planetário. Consideremos um planeta de massa própria m e designemos por M a massa própria do Sol. A equação vectorial do movimento de m é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\Sigma\,\mathfrak{K},$$

onde o segundo membro é uma soma de termos da forma (13), representativos das acções que o Sol e os outros planetas exercem em m. Suprimindo o factor m, comum aos dois membros, fica o segundo membro linear e homogéneo em M e nas massas próprias dos outros planetas. A equação do movimento do Sol é análoga à precedente; o seu segundo membro fica linear e homogéneo nas massas próprias de todos os planetas depois da supressão do factor comum M. Em primeira aproximação podemos desprezar as massas dos planetas perante a massa do Sol. Então o segundo membro da equaçãc do movimento do Sol reduz-se a zero, o que dá para o Sol um movimento rectilíneo e uniforme; e o segundo membro da equação do movimento de m reduz-se ao termo representativo da acção do Sol. Cai-se assim num caso particular do problema dos dois corpos: aquêle em que um dêstes tem massa infinitamente pequena perante a do outro.

Visto que, na ordem de aproximação admitida, o movimento do Sol não é acelerado, podemos utilizar como sistema de referência um sistema não rotante ligado ao Sol, em vez dum sistema de inércia qualquer. Para obter maior simplificação suporemos além disso que o Sol ocupa a origem do novo sistema. Nestas condições a equação do movimento de m reduz-se a

$$(15) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{fM}{r^3}\mathfrak{r},$$

onde $\mathfrak{r}$ tem as componentes x, y, z.

A equacão (15) é a equação do movimento dum ponto material livre, de massa própria 1, num campo conservativo de energia potencial $-\frac{fM}{r}$. Há pois, nêste caso, potencial cinético

$$L = T^* - V = c^2\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) + \frac{fM}{r},$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

e por conseguinte função hamiltoniana

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L,$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \; p_y = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \; p_z = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Como L não depende explìcitamente de t e o campo é conservativo, tem-se simplesmente

$$H = T + V = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) - \frac{fM}{r};$$

por outro lado, é

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = c^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1\right);$$

as equações cartesianas do movimento assumem pois a forma canónica

$$(16)\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \ldots$$

com

$$(17)\quad H=c^2\left(-1+\sqrt{1+\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{c^2}}\right)-\frac{fM}{r}.$$

Desenvolvendo o radical, obtém-se

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\frac{fM}{r}+H_1,$$

onde é

$$H_1=-\frac{1}{8c^2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^2+\ldots$$

Anulando H_1, têm-se equações formalmente idênticas às do movimento kepleriano. Poderia pois tratar-se o movimento relativista do planeta como um movimento formalmente idêntico ao kepleriano, perturbado pela função muito pequena H_1; limitando esta função ao seu primeiro termo, ter-se-hia uma aproximação suficiente. Mas o problema pode resolver-se dum modo rigoroso e com muito maior simplicidade.

As equações canónicas (16) admitem o integral da energia

$$H=h,$$

e é fácil formar três outros integrais. Verifica-se com efeito que

$$y\dot{p}_z-z\dot{p}_y=0,$$

donde resulta por integração

$$y p_z - z p_y = A,$$

sendo A uma constante arbitrária; obtém-se anàlogamente

$$z p_x - x p_z = B,$$

$$x p_y - y p_x = C.$$

Dêstes três integrais, que correspondem aos integrais das áreas do movimento kepleriano, resulta imediatamente

$$A x + B y + C z = 0;$$

logo a órbita do planeta está situada num plano que passa pelo Sol, como aliás era evidente.

Tomemos êste plano para plano dos xy. Então será constantemente

$$z = p_z = 0.$$

Do integral das áreas subsistente e do integral da energia poderia deduzir-se o movimento; mas é mais elegante operar canònicamente.

Nenhuma das coordenadas x, y é cíclica, nem a equação diferencial parcial de Hamilton admite separação das variáveis. O facto de que x e y só entram em H por intermédio de r indica o emprêgo das coordenadas polares. Façamos pois a transformação canónica pontual prolongada, definida por

$$\Omega_1 = x - r \cos \varphi = 0,$$

$$\Omega_2 = y - r \sin \varphi = 0,$$

com W constante arbitrária (fórmulas (16), V, 36). Teremos

$$p_x = -\lambda_1, \quad p_y = -\lambda_2,$$
$$p_r = -\lambda_1 \cos\varphi - \lambda_2 \sin\varphi,$$
$$p_\varphi = \lambda_1 r \sin\varphi - \lambda_2 r \cos\varphi,$$

com H invariante; resulta destas equações

$$p_x^2 + p_y^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2,$$

e portanto a nova função hamiltoniana é

$$(18) \quad H = c^2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2\right)}\right) - \frac{fM}{r}.$$

A resolução do problema consiste agora, segundo o teorema de Jacobi, na determinação dum integral completo da equação de Hamilton

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c^2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]}\right) - \frac{fM}{r} = 0.$$

Visto que a coordenada φ é cíclica e que t também não figura explìcitamente em H, tem-se por V, 37

$$W = -ht + \alpha\varphi + U(r),$$

onde h é a constante da energia e $\alpha = C$ é a constante das áreas; a função U satisfaz à equação diferencial

$$(19) \quad \left(\frac{dU}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2\left(h + \frac{fM}{r}\right) + \frac{1}{c^2}\left(h + \frac{fM}{r}\right)^2,$$

que se integra imediatamente por quadratura. Obteve-se o integral completo desejado, e as equações

$$\beta = \varphi + \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \quad k = t - \frac{\partial U}{\partial h},$$

$$(20) \qquad p_\varphi = \alpha, \quad p_r = \frac{dU}{dr},$$

onde β e k designam novas constantes arbitrárias, dão a solução geral do problema; a primeira é a equação da órbita, a segunda exprime o raio-vector em função do tempo; as outras duas são consequências delas e não são outra coisa que os integrais das áreas e da energia.

A correcção de relatividade em (19) é de segunda ordem (termo em c^{-2}) e por isso o movimento dado pelas duas primeiras (20) difere muito pouco do movimento kepleriano. O que mais importa saber, por causa da questão da anomalia secular do periélio de Mercúrio, é como se manifesta esta diferença na forma da órbita. Ora a primeira (20) pode escrever-se

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{dU}{dr}\right),$$

donde resulta fàcilmente, por (19),

$$\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = N + \frac{2P}{r} + \frac{Q}{r^2}$$

com

$$N = 2h + \frac{h^2}{c^2}, \quad P = fM\left(1 + \frac{h}{c^2}\right), \quad Q = \frac{f^2 M^2}{c^2} - \alpha^2;$$

a mudança de variável

$$s = \frac{1}{r}$$

dá

$$\alpha^2\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=N+2Ps+Qs^2$$

e, portanto,

(21) $$\alpha^2\frac{d^2s}{d\varphi^2}=P+Qs,$$

ou

(22) $$\frac{d^2s}{d\varphi^2}+\gamma^2\left(s-\frac{1}{p}\right)=0$$

onde é

(23) $$\gamma=\sqrt{1-\frac{f^2M^2}{\alpha^2c^2}},\quad \frac{1}{p}\gamma^2=\frac{fM}{\alpha^2}\left(1+\frac{h}{c^2}\right).$$

O integral geral de (22), se γ não é nulo, é

$$s-\frac{1}{p}=\frac{e}{p}\cos\gamma(\varphi-\omega),$$

com e e ω constantes arbitrárias, ou

(24) $$r=\frac{p}{1+e\cos\gamma(\varphi-\omega)}.$$

Sendo esta equação equivalente à primeira (20), a constante ω é idêntica a β e a constante e é função de α e de h. Vê-se que a órbita difere duma secção cónica pelo factor γ que figura dentro do coseno.

No caso dum planeta ou dum cometa sob a acção do Sol, α é tal que γ não só é real, mas é mesmo muito próximo de 1 por causa do grande valor de c^2; a órbita difere então muito pouco duma cónica (num sentido que a discussão seguinte evidenciará). Mas, em geral, γ pode ter qualquer valor real compreendido entre 0 e 1 e até, para $|\alpha|$ suficientemente pequeno, ser nulo ou imaginário puro; na primeira hipótese a órbita afasta-se duma cónica tanto mais quanto menor for γ; nas outras duas difere duma cónica essencialmente.

O resumo da discussão é o que segue. Para $|\alpha| < \frac{fM}{c}$ é γ imaginário puro. Em (24) figura então um coseno hiperbólico e a órbita comporta-se na vizinhança da origem à maneira duma espiral logarítmica. Para $|\alpha| = \frac{fM}{c}$ é $\gamma = 0$. Tem-se então $Q = 0$ e (21) dá para r o inverso dum polinómio do segundo grau em φ; comportamento na vizinhança da origem análogo ao precedente. Para $|\alpha| > \frac{fM}{c}$ é $0 < \gamma < 1$. Então r é mínimo para $\varphi - \omega = 0$ (periélio). Se for $e \geq 1$, êste mínimo é atingido uma só vez: quando $|\varphi - \omega|$ cresce a partir de zero e se aproxima do limite

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{Arc\,cos}\left(-\frac{1}{e}\right),$$

r cresce e tende para infinito. No caso $e = 1$ a órbita é do género parabólico e envolve a origem $\frac{1}{\gamma}$ vezes; no caso $e > 1$ tem-se coisa análoga, mas a órbita é do género hiperbólico. Se fôr porém $e < 1$, todos os pontos da órbita estão a distância finita; r é mínimo e vale $\frac{p}{1+e}$ para

$$\varphi - \omega = \frac{2n\pi}{\gamma} \quad (n \text{ inteiro});$$

é máximo e vale $\frac{p}{1-e}$ para

$$\varphi - \omega = \frac{(2n+1)\pi}{\gamma}.$$

A órbita é então uma espécie de rosácea, como a que descreveria um ponto obrigado a mover-se segundo as leis de Kepler numa elipse animada de rotação uniforme, no seu plano e no mesmo sentido, em volta do foco.

É êste o caso do nosso planeta. A distância periélia é atingida duas vezes consecutivas com uma diferença de ângulo polar igual a

$$\frac{2\pi}{\gamma};$$

a cada revolução há pois um movimento perielíaco de

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma} - 2\pi = 2\pi\left[\left(1 - \frac{f^2 M^2}{a^2 c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right],$$

ou seja, desprezando as ordens superiores,

$$\Delta\varphi = \frac{f^2 M^2}{a^2 c^2}\pi. \tag{25}$$

Para o cálculo numérico notemos que é

$$a = x p_y - y p_x = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{dS}{dt} = 2\frac{dS}{d\tau},$$

onde S representa a área varrida pelo raio-vector e τ o tempo próprio do planeta; a é pois o dôbro da área varrida pelo raio-vector na unidade de tempo próprio (forma relativista da primeira lei de Kepler). Pondo em (24)

$$p = a(1 - e^2),$$

é claro que a área varrida pelo raio-vector durante uma revolução é em valor absoluto

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2};$$

tem-se portanto

$$|\alpha| = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\mathrm{T}}, \tag{26}$$

onde T representa a duração da revolução expressa em tempo próprio do planeta. A fórmula (25) dá então

$$\Delta\varphi = \frac{f^2 M^2 \mathrm{T}^2}{4\pi a^4 (1-e^2) c^2}. \tag{27}$$

O produto fM pode eliminar-se. De (23) resulta, com efeito,

$$\frac{\alpha^2 - \frac{f^2 M^2}{c^2}}{a(1-e^2)} = fM\left(1 + \frac{h}{c^2}\right),$$

isto é, por (26),

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2} = fM\left(1+\frac{h}{c^2}\right) + \frac{f^2 M^2}{a(1-e^2)c^2};$$

é a forma relativista da terceira lei de Kepler, que dá

$$fM = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2} + \cdots,$$

onde a parte omitida contém c^2 em divisor. Na ordem de aproximação admitida em (25) deve tomar-se para valor de fM em (27) a parte principal escrita, e tem-se em definitivo

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2}$$

(pela mesma razão substituiu-se T pela duração T da revolução expressa em tempo do sistema de referência).

Com os valores de a, e, T relativos a Mercúrio encontra-se $\Delta\varphi = 7'',2$ por século, o que é só a sexta parte do efeito observado: a lei que vimos estudando é pois insuficiente.

44. ¿Que resultado se obteria com a lei (I) de Poincaré-Minkowski nesta questão do periélio de Mercúrio? Vimos oportunamente (n.º 39) que a lei (I) dá para a fôrça $\mathfrak{K}$ um valor igual ao produto do valor (13) pelo factor

$$\frac{c^2}{V^k V'_k} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}}{1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}}.$$

No caso do repouso do corpo atraente êste factor reduz-se a

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

e a equação (15) escreve-se então

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{d\tau^2} = -\frac{fM}{r^3}\mathfrak{r}, \tag{28}$$

onde τ, como no n.º anterior, é o tempo próprio do corpo atraído.

Ora (28) coincide com a equação vectorial newtoniana do problema, salvo a substituïção do tempo do sistema de referência pelo tempo próprio do móvel. Portanto tôdas as leis clássicas do movimento dum planeta não perturbado se transportam para o caso presente mediante aquela simples substituïção. Como a equação da órbita não contém o tempo, segue-se que a lei (I), para um planeta não perturbado, dá órbita rigorosamente elíptica: não há movimento do periélio, e a lei (I) resulta pior que a lei (II).

45. Em face disto não é tentador o estudo de outras leis que o processo de Poincaré permite construir. Estamos afinal numa posição análoga àquela em que nos encontrávamos na física newtoniana: as leis relativistas compatíveis com a generalidade das observações são em número ilimitado e tôdas arbitrárias *a priori;* as mais simples não explicam a anomalia secular do periélio de Mercúrio. Se por acaso se encontrasse uma que desse esta explicação, com que outras razões a justificaríamos? Ainda mais importante é que essas leis, sendo puras leis de acção pontual, mal ultrapassam o ponto de vista da acção a distância. O ponto de vista moderno é o de que as acções de gravitação devem ser acções dum campo originado pela presença das massas e modificando-se com a velocidade da luz se a distribuïção das massas se modifica; a lei elementar da acção dum ponto material sôbre outro será então uma conseqüência particular das equações diferenciais do campo. Como no campo electromagnético, também no campo gravitacional há de haver distribuïção e transporte de impulsão e de energia; a descrição completa dêstes fenómenos só as equações gerais do campo podem fornecê-la.

Certas teorias, que mencionámos no Cap. II, tendiam a satisfazer uma aspiração fundamentalmente idêntica a esta, concebendo a gravitação como fenómeno elástico, hidrodinâmico ou corpuscular cinético. Mas só depois do aparecimento da teoria maxwelliana do campo electromagnético é que a aspiração se precisou e adquiriu a forma moderna referida. Deve-se isto principalmente a Lorentz (1900) (1). Por duas vezes falámos da sua teoria no Cap. II; vamos fazê-lo terceira vez, mais pormenorizadamente, não só porque ela é a primeira teoria do campo gravitacional na ordem cronológica, mas também porque, dado o seu carácter electromagnético, satisfaz ao princípio da relatividade, e conduz a uma lei elementar gravitacional relativista que mais tarde foi proposta por Minkowski e generaliza a lei (II) de Poincaré.

Como então dissemos, a teoria de Lorentz parte da hipótese de que a atracção de duas electricidades de nomes contrários é um pouco maior que a repulsão de duas electricidades do mesmo nome; neste excesso de atracção eléctrica reside a essência da gravitação. Atracção e repulsão obedecem à lei de Coulomb no caso do repouso, mas com coeficientes diferentes. Daqui resulta imediatamente a lei de Newton para duas partículas neutras em repouso, porque o átomo neutro é constituído por electrões e protões em número igual. Sôbre a unidade de massa da matéria em repouso actua uma fôrça de gravitação $\mathfrak{E}^g$, resultante de duas fôrças eléctricas opostas e quási iguais. Mas se a matéria se move, a estas duas fôrças eléctricas juntam-se duas fôrças magnéticas também opostas e quási iguais, ligadas às primeiras pelas equações do campo electromagnético, cuja resultante $\mathfrak{H}^g$ determina outra fôrça de gravitação que actua na matéria

(1) Cf. M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, in *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Bd. XI, 1914.

juntamente com $\mathfrak{E}^g$. Os dois vectores $\mathfrak{E}^g$, $\mathfrak{H}^g$ caracterizam o campo da gravitação, e estão ligados entre si por equações da mesma forma que as do campo electromagnético $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, salvo a diferença de sinal na densidade de massa da matéria. Mediante esta simples troca de sinal todos os resultados da electrodinâmica se transportam para a teoria da gravitação de Lorentz.

Assim (cf. IV, 33 e 34), o campo da gravitação $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ (para simplificar a escrita suprimimos o índice $_g$) é um tensor universal antissimétrico de segunda ordem F_{ik},

$$(F^{23}, F^{31}, F^{12}) = \mathfrak{H}, \quad (F^{41}, F^{42}, F^{43}) = \frac{1}{c}\mathfrak{E},$$

que deriva dum potencial vectorial universal

$$\varphi^i = \left\{ \mathfrak{A}, \frac{1}{c}\varphi \right\},$$

onde $\mathfrak{A}$ e φ são respectivamente o potencial-vector tridimensional e o potencial escalar; tem-se

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0, \quad \Box \varphi^i = -g^{kl} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{1}{c} s^i, \tag{30}$$

sendo s^i a corrente universal de massa,

$$s^i = \{ \rho \mathfrak{v}, \rho \}$$

(a densidade ρ é aqui a massa própria por unidade de volume medido no sistema de referência). As equações do campo escrevem-se

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} s^i, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{31}$$

e equivalem a (30) e (29) respectivamente. Conseqüência imediata da primeira (31) é a equação de continuïdade

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i}=0.$$

A densidade da fôrça ponderomotriz universal

$$f^i=\left\{\mathfrak{f},\ \frac{1}{c^2}\rho(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\right\}=\left\{\mathfrak{f},\ \frac{1}{c^2}(\mathfrak{f}\mathfrak{v})\right\},$$

onde $\mathfrak{f}$ é a densidade da fôrça ponderomotriz tridimensional, é dada pela equação

$$f_i=-\frac{1}{c}F_{ik}s^k. \tag{32}$$

Consideremos a massa própria m de volume próprio muito pequeno V_0, e seja V o seu volume no sistema de referência. A fôrça ponderomotriz que actua nela é

$$\mathfrak{K}=V\mathfrak{f},$$

donde

$$V_0\mathfrak{f}=\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

tem-se pois

$$V_0f^i=K^i,$$

sendo K^i a fôrça ponderomotriz universal aplicada a m. Resulta então de (32)

$$K_i=-\frac{m}{c}F_{ik}u^k, \tag{33}$$

onde u^k é a velocidade universal da massa considerada. Finalmente, tem-se

$$(34) \qquad f_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x^k},$$

onde

$$S_i^k = -F_{ir} F^{kr} + \frac{1}{4} g_i^k F_{rs} F^{rs}$$

é o tensor de impulsão-energia do campo. Ao contrário dos n.[os] 33 e 34, usamos aqui a unidade de tempo ordinária, como temos feito no resto dêste livro.

A lei elementar da gravitação terá portanto a mesma forma que a lei elementar electrodinâmica. A integração de (30) dá, como é sabido ([1]),

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho\, dV}{r}; \quad \mathfrak{A} = -\frac{1}{4\pi c}\int \frac{\rho \mathfrak{v}\, dV}{r},$$

onde r é a distância do elemento de volume dV ao ponto Q, para o qual são calculados os potenciais no instante t, e as grandezas ρ e $\mathfrak{v}$ são tomadas no instante $t - \frac{r}{c}$; os potenciais são «retardados», propagam-se com a velocidade da luz. Para a massa pontual m' deduzem-se destas fórmulas as seguintes ([2]):

$$(35) \qquad 4\pi\varphi = -\frac{m'}{r - \frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c}}, \quad 4\pi\mathfrak{A} = -\frac{m'\mathfrak{v}'}{r - \frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c}},$$

onde $\mathfrak{r}$ é o vector tirado da posição da massa no instante

([1]) Cf. H. A. Lorentz, *Theory of Electrons*, Note 4, 2.nd ed., Leipzig, 1916.

([2]) Cf. id., ibid., Note 19.

$t' = t - \frac{r}{c}$ para o ponto Q, e $\mathfrak{v}'$ é a sua velocidade no mesmo instante. As fórmulas (35) traduzem em electrodinâmica a lei elementar de Wiechert. Introduzindo os vectores universais R^i, V_i' do n.º 39, e atendendo às fórmulas (4), obtém-se imediatamente

$$(36) \qquad 4\pi\varphi_i = -\frac{m' V_i'}{R^k V_k'}.$$

Como precedentemente, designemos por x', y', z' as coordenadas de m' no instante t' e por x, y, z as de Q no instante t. Porque $(x', y', z', t') = x'^i$ são funções do tempo próprio τ' de m', a relação

$$R^i R_i = 0$$

determina τ' como função de $(x, y, z, t) = x^i$. Derivando essa relação, vem

$$R_i \frac{\partial R^i}{\partial x^k} = 0,$$

ou, por ser $R^i = x^i - x'^i$,

$$R_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k} - \frac{d x'^i}{d\tau'} \cdot \frac{\partial \tau'}{\partial x^k} \right) = 0,$$

donde

$$(37) \qquad \frac{\partial \tau'}{\partial x^k} = \frac{R_k}{R^i V_i'}.$$

A equação (29) dá então sem dificuldade, por (36) e (37),

$$(38) \qquad 4\pi F_{ik} = \frac{m'}{(R^h V_h')^3} (c^2 - R^l J_l')(R_i V_k' - R_k V_i') +$$

$$+ \frac{m'}{(R^h V_h')^2} (R_i J_k' - R_k J_i'),$$

onde J_i' é a aceleração universal de m'.

Suponhamos agora situada no ponto Q a massa pontual m, de velocidade universal V^i. A equação (33) dará então, por (38), a fôrça universal que m' exerce em m

$$(39) \quad K_i = -\frac{f\,m'\,m}{c\,(R^k V_k')^3} \Big\{ [(c^2 - R^l J_l') V^k V_k' + R^l V_l' \,.\, V^k J_k'] R_i - \\ - (c^2 - R^l J_l') R^k V_k \,.\, V_i' - R^l V_l' \,.\, R^k V_k \,.\, J_i' \Big\},$$

na unidade ordinária de massa, visto que a unidade lorentziana adoptada nas equações do campo (31) é $\sqrt{4\pi f}$ vezes menor que aquela, sendo f a constante newtoniana da gravitação. Vê-se que, na teoria de Lorentz, a fôrça elementar da gravitação depende também da aceleração do corpo atraente. A lei (39) foi aínda proposta por Minkowski, que a transportou imediatamente da electrodinâmica ([1]).

Por ser, segundo (29), (33) e (36), na unidade ordinária de massa,

$$K_i = \frac{f\,m'\,m}{c} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} \right) V^k,$$

onde

$$\phi_i = \frac{V_i'}{R^k V_k'},$$

tem evidentemente

$$(40) \qquad K_i = -\frac{\partial P}{\partial x^i} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial P}{\partial V^i} \right),$$

sendo τ o tempo próprio de m e

$$(41) \qquad P = \frac{f\,m'\,m}{c} \cdot \frac{V^i V_i'}{R^k V_k'}.$$

([1]) H. Minkowski, *Raum und Zeit*, 1908, op. cit.

Verifica-se fàcilmente que (40) e (41) dão para as componentes da fôrça ordinária $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_x}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

onde

$$L = -P\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{f m' m}{r} \cdot \frac{1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}}{1-\frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c r}}.$$

A fôrça da gravitação admite pois potencial generalizado. Estas fórmulas correspondem exactamente à lei elementar electrodinâmica de Schwarzschild [1].

46. A teoria de Lorentz não traz contribuïção nova para o problema dos dois corpos do nosso sistema planetário. Com efeito, se se faz igual a zero em (39) a aceleração do corpo atraente m' ($J'_i = 0$), recai-se na lei (II) de Poincaré (e portanto, desprezando a terceira ordem, na lei de Lorentz mencionada no n.º 42). Incapaz de explicar o movimento do periélio de Mercúrio, esta teoria apresenta ainda outras dificuldades. Já no Cap. II observámos que, em substância, a teoria de Lorentz não é mais que um transporte arbitrário das equações do campo electromagnético para a gravitação, que só tem a justificá-lo a semelhança formal das leis de Newton e de Coulomb. Podemos agora acrescentar o seguinte. Visto que são as mesmas que as da electrodinâmica as equações da teoria da gravi-

---

[1] Cf. H. A. Lorentz, *Weiterbildung der Maxwellschen Theorie: Elektronentheorie*, 1903, in-*Encykl. d. math. Wissensch.*, Bd. V, 2, Heft 1.

tação de Lorentz, salvo a diferença de sinal na densidade de massa, deve haver em gravitação, se esta teoria é verdadeira, um fenómeno correspondente ao da indução electrodinâmica. A aceleração duma carga eléctrica provoca fôrças que actuam sôbre cargas visinhas em sentido oposto ao dela; também a aceleração dum corpo deverá provocar fôrças de gravitação induzidas que actuarão sôbre corpos visinhos, acelerando-os no mesmo sentido por motivo da diferença de sinal. Ora a conseqüência disto é que um sistema de corpos gravitantes não teria estabilidade dinâmica, o que parece contrário aos factos. Além disso, a quarta das equações (34) escreve-se, como é fácil de ver,

$$(42) \qquad (\mathfrak{f}\mathfrak{v}) + \operatorname{div} \mathfrak{S} = -\frac{\partial W}{\partial t},$$

com

$$(43) \qquad \mathfrak{S} = -c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}], \quad W = -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2);$$

$\mathfrak{S}$ é pois a densidade da corrente de energia e W a densidade da energia do campo de gravitação. Esta densidade é negativa, ao contrário do que tem lugar no campo electromagnético; a razão disto reside ainda na referida diferença de sinal (cf. (34) e equação (36) do n.º 34): mudando o sinal do primeiro termo de (42) (a expressão de $\mathfrak{f}$ contém o factor ρ) tem-se a correspondente equação electromagnética, a qual toma a forma (42) com $\mathfrak{S}$ e W mudados de sinal. Ora, a ser negativa a densidade de energia do campo da gravitação, uma região do espaço onde existe campo conterá menor energia que se estivesse desprovida dêle; se pois se supõe um campo de gravitação penetrando numa região anteriormente livre, a corrente de energia terá um sentido oposto ao da propagação do campo. Esta conseqüência parece inaceitável.

47. Tais dificuldades conduziram Abraham (1) a uma teoria do campo da gravitação essencialmente diferente. Enquanto na teoria de Lorentz o campo é tensorial e deriva dum potencial vectorial segundo (29), na teoria de Abraham o campo é vectorial e deriva dum potencial escalar pela equação

$$(44) \qquad h_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad \text{ou} \quad h^i = \left\{ -\operatorname{grad} \varphi, \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

A densidade da fôrça ponderomotriz do campo é

$$(45) \qquad f_i = \rho_0 h_i,$$

onde ρ_0 é a densidade própria da matéria; h_i e f^i são a fôrça universal por unidade de massa própria e de volume próprio respectivamente. A equação do potencial

$$(46) \qquad \square \varphi = -g^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = \rho_0$$

acaba de fundar a teoria; no vácuo, o potencial propaga-se com a velocidade da luz. Estas três equações fundamentais correspondem respectivamente a (29), (32), (30) da teoria de Lorentz.

De (44) e (46) resulta a equação do campo

$$\frac{\partial h^i}{\partial x^i} = -\rho_0,$$

correspondente a (31). Depois (45) dá

$$f_i = -h_i \frac{\partial h^k}{\partial x^k},$$

(1) M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, op. cit.

por onde se verifica que é, correspondentemente a (34),

(47) $$f_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$$

com

(48) $$S_i^k = h_i h^k - \frac{1}{2} g_i^k h_r h^r;$$

S_i^k é o tensor de impulsão-energia do campo: tensor simétrico, como se vê elevando o índice i.

A equação (47) desdobra-se na equação vectorial

$$\mathfrak{f} + \operatorname{div} T = -\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}$$

e na equação escalar

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{v}) + \operatorname{div} \mathfrak{S} = -\frac{\partial W}{\partial t},$$

que exprimem respectivamente as leis da impulsão e da energia, e onde é

(49) $$T_{ik} = \mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left[\mathfrak{h}^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

$$(i, k = 1, 2, 3;\ \delta_{ik} = 1 \text{ se } i = k,\ = 0 \text{ se } i \neq k),$$

(49) $$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S},\quad \mathfrak{S} = \mathfrak{h} \frac{\partial \varphi}{\partial t},\quad W = \frac{1}{2} \left[\mathfrak{h}^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

com

$$\mathfrak{h} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

A densidade da energia é pois positiva, o que remove a respectiva dificuldade da teoria de Lorentz. Quanto às outras dificuldades, elimina-as o simples facto de a teoria de Abraham não provir da electrodinâmica. Só no campo de gravitação estático $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0\right)$ as grandezas (49) têm expressões formalmente idênticas às das grandezas correspondentes do campo electrostático.

Vejamos a que lei elementar da gravitação conduz a presente teoria. No caso estático, a equação (46) reduz-se à equação de Poisson e φ é o potencial newtoniano. No caso geral, a integração de (46) dá

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_0\,d\,V}{r},$$

onde r é a distância do elemento $d\,V$ ao ponto Q a que se refere φ no instante t, e ρ_0 é tomado no instante $t-\frac{r}{c}$. Para a massa quási pontual m' de volume próprio V_0 é simplesmente

$$4\pi\varphi=-\frac{\rho_0\,V}{r-\frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c}},$$

onde $\mathfrak{r}$ é o vector tirado da posição de m' no instante $t-\frac{r}{c}$ para o ponto Q, $\mathfrak{v}'$ a velocidade de m' no mesmo instante, V o volume de m' no sistema de referência e também no mesmo instante. A relação entre V e V_0 permite escrever

$$4\pi\varphi=-\frac{m'c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{c\,r-(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})},$$

isto é, segundo (4),

$$4\pi\varphi=-\frac{m'c}{R'\,V_1'}. \tag{50}$$

Para o campo (44) obtém-se então, atendendo a (37),

$$(51) \quad 4\pi h_i = \frac{m' c}{(R^k V_k')^3}[R^k V_k' . V_i' - (c^2 - R^k J_k') R_i].$$

Se no ponto Q está colocada a massa pontual m no instante t, a fôrça universal que actua sôbre ela é por (45)

$$K_i = m h_i;$$

desta relação e de (51) resulta emfim, passando à unidade ordinária de massa como no n.º precedente,

$$(52) \quad K_i = -\frac{f m' m c}{(R^k V_k')^3}[(c^2 - R^k J_k') R_i - R^k V_k' . V_i'].$$

Anulando a aceleração universal do corpo atraente obtém-se uma lei que não pertence à classe das leis de Poincaré. O motivo disto reside em que não é idênticamente nulo o produto $K_i V^i$, ao contrário do que exige a mecânica da relatividade se a massa própria é invariável, como supusémos. Tem-se com efeito

$$(53) \quad K_i V^i = m h_i V^i = m \frac{d\varphi}{d\tau},$$

sendo τ o tempo próprio do corpo atraído. Se se impõe à teoria de Abraham esta exigência necessária, terá de ser, como fàcilmente se verifica,

$$(\mathfrak{h}\mathfrak{v}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

onde $\mathfrak{v}$ é a velocidade do corpo atraído; então torna-se lícito o termos tomado atrás $f_4 = (\mathfrak{f}\mathfrak{v})$; mas num campo estático a velocidade do corpo atraído seria sempre perpendicular ao campo, o que é inadmissível.

48. A teoria precedente só poderá subsistir se se admite que não é invariável a massa própria dum corpo num campo de gravitação. O próprio Abraham apresentou uma modificação da teoria, na qual a variabilidade da massa própria é afirmada expressamente. Esta massa é suposta inversamente proporcional ao potencial da gravitação, que por seu turno é identificado com a raiz quadrada da velocidade da luz; resulta daí, mediante alteração de algumas das equações precedentes (por exemplo, da equação do potencial (46)), que a fôrça de gravitação que se exerce num corpo é proporcional à energia (portanto à massa inerte) do corpo. A variabilidade da velocidade da luz no campo gravitacional e a proporcionalidade das massas inerte e gravitante foram bebidas por Abraham nos primeiros trabalhos de Einstein sôbre a generalização do princípio da relatividade. Mas Abraham repele a ideia-mãe dêstes trabalhos; a sua nova teoria colide com o princípio da relatividade, além de ser fundada em hipóteses demasiado artificiais e de não ter conduzido a nenhum resultado importante.

Nordström [1] corrigiu a primeira teoria de Abraham dentro do princípio da relatividade especial. A equação fundamental da dinâmica relativista

$$\frac{d}{d\tau}(m\,V^i) = K^i, \tag{54}$$

que traduz as leis da impulsão e da energia, dá, se a

---

[1] M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, op. cit.

massa própria m é variável, efectuando a derivação e multiplicando escalarmente por V_i,

$$c^2 \frac{dm}{d\tau} = K^i V_i \tag{55}$$

ou, por (53),

$$c^2 \frac{dm}{m} = d\varphi,$$

donde resulta

$$m = M e^{\frac{\varphi}{c^2}}, \tag{56}$$

sendo M constante. A massa própria deve pois depender exponencialmente do potencial da gravitação. M é a massa própria correspondente ao potencial zero, isto é, se se escolhe convenientemente a constante arbitrária inseparável de φ, a massa própria na ausência de campo.

Por ser $K^i = m h^i$, a equação vectorial do movimento de m no campo gravitacional, segundo as três primeiras (54) (lei da impulsão), é pois

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{\frac{\varphi}{c^2}}\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -e^{\frac{\varphi}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{grad}\,\varphi; \tag{57}$$

a esta junta-se a equação não distinta $\big($cf. (55)$\big)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{\frac{\varphi}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{\varphi}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{58}$$

proveniente da quarta (54) (lei da energia). No caso do campo estático, (58) dá imediatamente o integral da energia

$$(59) \qquad \frac{e^{\frac{\varphi}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.},$$

por onde (57) se converte em

$$(60) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \operatorname{grad} \varphi.$$

Se emfim o campo estático é produzido por um só ponto material m', tem-se segundo (50)

$$4\pi\varphi = -\frac{m'}{r}$$

e (60) dá então, na unidade ordinária de massa,

$$(61) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \frac{fm'}{r^3}\mathfrak{r};$$

obter-se hia naturalmente o mesmo resultado a partir da lei elementar (52).

A diferença entre o movimento definido por (61) e o movimento kepleriano é de segunda ordem, como nas leis e teoria precedentes. Resta saber se a teoria de Nordström explica o movimento do periélio de Mercúrio.

As equações (61) admitem exactamente os integrais das áreas do movimento kepleriano; a órbita está pois situada num plano que passa pelo Sol m'. Tomemos êste plano para plano dos xy. Designando por k a constante arbitrária que figura em (59), esta equação permite escrever (60) sob a forma

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\frac{c^2}{2k^2}e^{\frac{2\varphi}{c^2}}\right);$$

portanto, se pomos

$$H = \frac{c^2}{2k^2}e^{-\frac{2fm'}{c^2r}} + \frac{1}{2}v^2,$$

$$(r^2 = x^2 + y^2, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2),$$

as duas equações cartesianas do movimento tomam a forma canónica com a função hamiltoniana H e com as variáveis v_x, v_y conjugadas respectivamente de x, y.

Passemos para coordenadas polares r, θ, efectuando a transformação canónica utilizada no n.º 43. A nova função hamiltoniana será

$$H = \frac{c^2}{2k^2}e^{-\frac{2fm'}{c^2r}} + \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right).$$

A coordenada θ é cíclica e o tempo não entra explicitamente; portanto a respectiva equação diferencial parcial de Hamilton admite o integral completo

$$W = -lt + \alpha\theta + U(r),$$

onde l e α são constantes e a função U é determinada pela equação diferencial

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2l - \frac{c^2}{k^2}e^{-\frac{2fm'}{c^2r}},$$

integrável por quadratura. A solução geral do nosso problema é pois, segundo o teorema de Jacobi,

$$(61\,^*)\quad \theta+\frac{\partial U}{\partial \alpha}=\beta,\quad -t+\frac{\partial U}{\partial l}=\eta,\quad p_r=\frac{dU}{dr},\quad p_\theta=\alpha,$$

onde β e η são novas constantes; as duas últimas equações reproduzem os integrais da energia e das áreas; as outras duas dão o movimento sob forma finita, sendo a primeira, em especial, a equação da trajectória. Há a notar que, depois de feitos todos os cálculos, se deve pôr $l=\frac{c^2}{2}$, valor constante de H segundo (59).

Efectuando sôbre a equação da trajectória um cálculo análogo ao do n.º 43, dá-se-lhe a forma diferencial correspondente a (21)

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2}=\frac{f m'}{k^2 \alpha^2}e^{-\frac{2fm'}{c^2}s}-s,$$

onde é $s=\frac{1}{r}$. Desenvolvendo a exponencial e desprezando as ordens superiores à segunda, obtém-se uma equação da forma (22) com

$$\gamma=\sqrt{1+\frac{2f^2 m'^2}{k^2\alpha^2 c^2}},\quad \frac{1}{p}\gamma^2=\frac{fm'}{k^2\alpha^2},$$

donde resulta que o periélio do planeta m, a cada revolução, se desloca de

$$\Delta\theta=2\pi\left(\frac{1}{\gamma}-1\right),$$

quantidade negativa por ser agora γ essencialmente maior que 1. A presente teoria dá pois para os periélios planetários movimento retrógrado, o que é contrário aos factos.

49. Nordström propôs uma segunda teoria da gravitação ([1]), que foi geralmente bem recebida enquanto se não desenvolveu suficientemente a teoria da gravitação de Einstein. Nas teorias precedentes (salvo na teoria não relativista de Abraham mencionada no comêço do n.º 48) confundiam-se inconscientemente massa inerte e massa gravitante. A experiência ensina que as duas massas são proporcionais em cada lugar dum campo de gravitação estático, mas nada diz directamente sôbre a variação do factor de proporcionalidade com o lugar. Se se admite que tal variação é nula, êste factor é uma constante universal e tomará o valor 1 mediante escolha adequada da unidade de massa gravitante; esta massa e a massa inerte serão então idênticas. Se se admite, pelo contrário, que a massa gravitante M é igual ao produto da massa inerte m por uma certa função (não constante) do potencial da gravitação,

$$M = m\,G(\varphi), \tag{62}$$

as duas massas serão essencialmente diferentes. É introduzindo a segunda hipótese na primeira teoria de Abraham, e salvaguardando ainda o princípio de relatividade, que se obtém a segunda teoria de Nordström.

As equações (44) a (49) são assim conservadas nesta teoria, mas ρ_0 é agora a densidade própria da massa gravitante. Valem, portanto, as equações (50) a (53) mediante a substituição das massas inertes m', m pelas massas gravitantes M', M. A função $G(\varphi)$ determina-se pela equação

---

([1]) M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, op. cit ; M. von Laue, *Die Nordströmsche Gravitationstheorie*, in-*Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Bd. XIV, 1917.

(55), que dá presentemente

$$c^2 \frac{dm}{d\tau} = M \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Admitindo que a massa gravitante é independente do potencial, resulta desta equação, por (62),

$$c^2 . d\left(\frac{1}{G(\varphi)}\right) = d\varphi,$$

isto é

$$G(\varphi) = \frac{c^2}{\varphi}$$

englobando em φ uma constante. Na segunda teoria de Nordström a massa inerte depende pois do potencial pela relação

(63) $$m = M \frac{\varphi}{c^2},$$

que substitui (56).

Conclui-se de (63) que a densidade própria da massa gravitante está ligada à densidade própria da energia pela fórmula

(64) $$\rho_0 = \frac{W_0}{\varphi}.$$

Mas esta fórmula, estabelecida para o ponto material, não pode aplicar-se a todos os casos; de outro modo, segundo (45) e (46), a energia electromagnética produziria gravitação e obedeceria à gravitação, e portanto a luz não teria propagação rectilínea, o que é contrário a uma das hipóteses fundamentais da teoria. Não é pois a energia só que produz gravitação, e aqui acode ao espírito que, com efeito, tanto a matéria como o campo electromagnético possuem impulsão além de energia e só são descritos completamente, sob êste aspecto, pelos tensores respectivos M_i^k e E_i^k. Em vez de W_0 deve figurar em (64) um escalar construído simètricamente com estes tensores, e tal que a contribuïção efectiva de E_i^k seja nula. Porque E_i^i é idênticamente nulo (n.º 34), satisfaz a estas condições o escalar

$$M_i^i + E_i^i,$$

e assim a forma geral de (64) será

$$\rho_0 = \frac{1}{\varphi} M_i^i. \tag{65}$$

O invariante M_i^i é igual à densidade de energia da matéria, diminuída da soma das respectivas tensões principais. Visto que as tensões são muito pequenas relativamente àquela densidade, a ela se reduz pràticamente M_i^i. Como, por outro lado, a densidade de energia da matéria coincide pràticamente com a densidade de energia dum sistema material e electromagnético, a fórmula (64) fica justificada em geral como fórmula aproximada.

Se o sistema é de pequenas dimensões, a integração de (64) reproduz (63). A fórmula (63) é mesmo rigorosa se o sistema é infinitamente pequeno e perfeitamente estático.

Segundo (65), a equação (46) escreve-se

$$\varphi \cdot \Box \varphi = M_i^i. \tag{66}$$

Tem-se por outro lado, segundo (48),

$$S_i^i = -h_i h^i = \operatorname{grad}^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$$

e portanto é

$$\square(\varphi^2) = 2(\varphi \,.\, \square \varphi + S_i^i).$$

Resulta que a equação (66), como observou Einstein, pode assumir a forma

$$\frac{1}{2}\square(\varphi^2) = M_i^i + E_i^i + S_i^i,$$

onde figuram simètricamente os três tensores de impulsão-energia da matéria e dos campos electromagnético e gravitacional. Uma região do espaço vazia de matéria produz pois gravitação desde que um campo de gravitação existe nela. Em última análise, porém, segundo (66), a gravitação é devida à presença da matéria.

A equação do movimento dum ponto material sob a acção do campo,

$$\frac{d}{d\tau}(m V^i) = M h^i,$$

cinde-se, por (44) e (63), na equação da impulsão

$$(67) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{c^2} \cdot \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

e na equação da energia

$$(68) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Se o campo é estático, resulta de (68) o integral da energia

$$(69)\qquad \frac{\varphi}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=k,$$

onde k é constante; (67) escreve-se então

$$(70)\qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\frac{1}{k}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\operatorname{grad}\varphi.$$

No caso de o campo estático ser devido à presença dum só ponto material M', tem-se por (50), na unidade ordinária de massa gravitante,

$$(71)\qquad \varphi=A-\frac{fM'}{r},$$

onde A é a constante que englobámos em φ ao deduzir (63); a equação (70) dá agora

$$(72)\qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\frac{1}{k}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{fM'}{r^3}\mathfrak{r},$$

correspondente a (61).

Ainda aqui a órbita do planeta M está situada num plano que passa pelo Sol M', porque as equações (72) admitem os integrais das áreas. Tomando êste plano para plano dos xy, notando que (70) pode escrever-se, por (69),

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\operatorname{grad}\frac{\varphi^2}{2k^2c^2}$$

e atendendo a (71), vê-se que as equações cartesianas do movimento de M assumem a forma canónica com a função hamiltoniana

$$H=\frac{1}{2k^2c^2}\left(A-\frac{fM'}{r}\right)^2+\frac{1}{2}v^2,$$

$$(r^2=x^2+y^2, \quad v^2=v_x^2+v_y^2),$$

sendo respectivamente v_x e v_y as variáveis conjugadas de x e y.

Passando para coordenadas polares como no n.º 48, obtém-se

$$H=\frac{1}{2k^2c^2}\left(A-\frac{fM'}{r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right),$$

donde resulta para a equação de Hamilton o integral completo

$$W=-lt+\alpha\theta+U(r),$$

com l e α constantes e $U(r)$ determinada pela equação

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)^2+\frac{\alpha^2}{r^2}=2l-\frac{1}{k^2c^2}\left(A-\frac{fM'}{r}\right).$$

O movimento finito é dado ainda por equações da forma (61*). Emfim, tratando a primeira destas equações como nos n.º 43 e n.º 48, obtém-se a equação diferencial da trajectória sob a forma (22) com

$$\gamma=\sqrt{1+\frac{f^2M'^2}{k^2\alpha^2c^2}}, \quad \frac{1}{p}\gamma^2=\frac{fM'A}{k^2\alpha^2c^2};$$

visto ser $\gamma>1$, a segunda teoria de Nordström, como a primeira, dá movimento perielíaco de sentido contrário ao do movimento observado.

VII

50. Muito antes de Abraham e Nordström, Einstein (1) começara a tratar o problema da gravitação dum modo totalmente diferente. Duas questões o impeliram a isso. Em primeiro lugar o resultado da teoria da relatividade especial, de que a energia possui massa inerte, abre a questão de saber se a energia possui também massa gravitante. Em segundo lugar a limitação, feita nessa teoria, do princípio da relatividade aos sistemas de referência não acelerados põe a questão de saber se êste princípio é extensivo aos sistemas de referência dotados de aceleração.

Einstein resolve as duas questões em sentido afirmativo, para campos de gravitação homogéneos e sistemas de referência uniformemente acelerados, por meio do *princípio da equivalência*. Sejam Σ_1 e Σ_2 dois sistemas de referência, o primeiro uniformemente acelerado na direcção Oz (aceleração γ) (2), o segundo em repouso num campo de gravitação homogéneo que comunica a todos os corpos

---

(1) A. Einstein, *Ueber das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogen Folgerungen*, in-*Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Band IV, 1907.

(2) Em rigor, deve entender-se por ponto uniformemente acelerado aquele cuja aceleração, relativamente a um sistema de inércia no qual êle está momentâneamente em repouso, é sempre a mesma. É o movimento dum ponto material sob a acção duma fôrça constante; relativamente a um dado sistema de inércia a sua aceleração decresce e tende para zero, a sua velocidade cresce e tende para a velocidade da luz. Contudo, no caso duma aceleração pequena durante um intervalo de tempo moderado, é inútil atender a esta correcção relativista.

a aceleração $-\gamma$ na direcção Oz. Sob o ponto de vista mecânico os sistemas Σ_1 e Σ_2 são equivalentes, isto é, as leis mecânicas são idênticas nos dois sistemas, porque todos os corpos são igualmente acelerados pelo campo de gravitação. Não havendo indicação positiva em contrário, é natural admitir que as outras leis físicas gozam da mesma propriedade. De facto, no estado actual dos nossos conhecimentos nada há que permita supor que os sistemas Σ_1 e Σ_2 se distinguem sob qualquer aspecto; admitiremos pois, e é o princípio da equivalência, que um campo de gravitação homogéneo e a correspondente aceleração do sistema de referência são completamente equivalentes, isto é, que tôdas as leis físicas são as mesmas nos dois casos.

Por meio do princípio da equivalência estende-se o princípio da relatividade aos sistemas de referência uniformemente acelerados: um tal sistema pode, com igual direito, supor-se em repouso num campo de gravitação homogéneo. A substituïção inversa dum campo de gravitação homogéneo por um sistema de referência uniformemente acelerado, o qual é directamente acessível à investigação teórica, permitirá estudar a influência da gravitação sôbre outros fenómenos físicos e portanto conhecer melhor a própria gravitação. Nisto reside o valor heurístico do princípio da equivalência.

Einstein começa, naturalmente, com o estudo do espaço e do tempo num sistema de referência uniformemente acelerado. Limitar-nos-emos a indicar os principais resultados obtidos, que adiante serão demonstrados mais fàcilmente e com maior generalidade. Seja Σ um sistema de referência uniformemente (e fracamente) acelerado na direcção Oz relativamente ao sistema de inércia S, movendo-se a origem de Σ no eixo Oz de S e sendo os eixos de Σ paralelos aos de S. Suponhamos que as réguas métricas e os relógios de Σ e de S são da mesma construção.

Existe a cada instante um sistema de inércia S' cujos eixos, no instante considerado (isto é, num tempo determinado t' de S'), coincidem com os de Σ e têm relativamente a S a mesma velocidade que os de Σ. Se se definem como simultâneos em Σ acontecimentos que se produzem no instante t' de S', encontra-se que a luz se propaga em Σ, durante um pequeno intervalo de tempo a partir de t', com a mesma velocidade c que em S'; pode pois empregar-se o princípio da constância da velocidade da luz para a definição da simultaneidade em Σ, sob a condição de só utilizar trajectos de luz muito pequenos.

Imaginemos agora os relógios de Σ regulados como fica indicado, mas para o tempo $t=0$ de S (em que Σ está momentâneamente em repouso relativamente a S). A totalidade das indicações dos relógios de Σ assim regulados denominar-se-á *tempo local* σ de Σ. O tempo local não pode chamar-se simplesmente *tempo* de Σ, porque, em geral, dois acontecimentos produzidos em pontos diferentes de Σ e em instantes locais iguais não são simultâneos no sentido da definição precedente. A significação física do tempo local é esta: utilizando-o para referir os fenómenos que se produzem nos diversos elementos espaciais de Σ, obteremos leis independentes do elemento espacial considerado, se em todos estes elementos nos servirmos não só dos mesmos relógios mas também dos mesmos instrumentos de medida em geral.

O tempo τ do sistema Σ podemos defini-lo como sendo a totalidade das indicações do relógio, situado na origem de Σ, simultâneas com os acontecimentos de Σ no sentido da definição precedente. Na definição de τ (ao contrário do que sucedia na definição de σ) não entra um instante arbitrário, mas um relógio situado num lugar arbitrário; utilizando o tempo τ, as leis naturais não dependerão do tempo, mas do lugar.

O uso dos tempos σ e τ não é indiferente, mas é imposto pelo carácter local ou não local do fenómeno a estudar. Suponhamos que em cada um de dois lugares diferentes (de cota diferente) de Σ há um sistema físico e que desejamos comparar as grandezas físicas dos dois sistemas; teremos de transportar-nos para o primeiro lugar com os nossos instrumentos, fazer lá as medições, depois transportar-nos para o segundo lugar com os mesmos instrumentos, fazer aqui também as medições. Se as medições dão os mesmos resultados nos dois lugares, diremos que os dois sistemas físicos são iguais. Entre os instrumentos mencionados figurará um relógio, com o qual mediremos tempos locais σ. Por conseguinte, para a definição de grandezas físicas num lugar de Σ utilizamos naturalmente o tempo σ. Suponhamos porém que se trata dum fenómeno em que devam considerar-se simultâneamente objectos situados em lugares de cotas diferentes; o tempo a utilizar será então o tempo τ, de contrário a simultaneidade não seria expressa pela igualdade dos valores do tempo.

O emprêgo da transformação de Lorentz permite a Einstein estabelecer a seguinte relação entre o tempo local σ e o tempo τ:

$$\sigma = \tau\left(1 + \frac{\gamma\zeta}{c^2}\right), \tag{1}$$

onde c é a velocidade da luz num sistema de inércia, γ a aceleração do sistema Σ e ζ a cota, suposta não muito grande, do relógio que marca σ. Para um campo de gravitação homogéneo tem-se pois

$$\sigma = \tau\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right), \tag{2}$$

onde Φ é o potencial da gravidade (nulo à cota zero): um relógio, situado num lugar onde o potencial da gravitação é Φ, marcha $1+\frac{\Phi}{c^2}$ vezes mais ràpidamente que um relógio da mesma construção situado ao potencial zero.

Esta influência da gravitação sôbre a marcha dos relógios é observável, pelo menos em princípio. Um observador situado num lugar qualquer de Σ poderia receber as indicações dos dois relógios p. ex. por meio de sinais luminosos; visto que o intervalo de tempo decorrido entre a indicação dum relógio e a sua recepção é independente do tempo τ, o observador verificaria existir entre os dois relógios a desigualdade de marcha anunciada. Mas há mais. Existem efectivamente «relógios» em lugares de diferente potencial de gravitação, cuja marcha pode ser medida muito exactamente: são os emissores das riscas espectrais. Admitindo por agora que a relação (2) vale também para um campo de gravitação não homogéneo, deve uma luz monocromática, que recebemos duma substância situada à superfície do Sol, ou duma estrêla, ter menor freqüência, portanto maior comprimento de onda, que a luz produzida nas mesmas condições à superfície da Terra; o efeito não é tão pequeno que escape à observação.

Transformando as equações de Maxwell para o sistema uniformemente acelerado Σ, Einstein encontra, utilizando primeiro o tempo local σ, que aquelas equações conservam a sua forma, salvo que as componentes do campo electromagnético e a densidade eléctrica aparecem multiplicadas pelo factor que figura no segundo membro de (1). Utilizando em seguida o tempo τ, o mesmo sucede à velocidade da luz que, portanto, num campo de gravitação homogéneo satisfará a relação

$$c' = c\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Resulta daqui que raios luminosos, que não tenham a direcção do campo de gravitação, são encurvados por êste. À superfície da Terra êste efeito é insensível.

As equações da Electrodinâmica mostram enfim que, num campo de gravitação homogéneo, a energia electromagnética E, medida localmente, figura na equação da energia multiplicada pelo factor $1+\frac{\Phi}{c^2}$. A energia E é portanto acrescida duma energia de posição igual á que corresponde à massa gravitante $\frac{E}{c^2}$; visto que êste é também o valor da massa inerte de E, a identidade das massas inerte e gravitante, provada experimentalmente para os corpos, é exigida como facto geral pelo princípio da equivalência. A verificação experimental da lei da inércia da energia é possível em princípio por meio da balança.

51. Num trabalho posterior (1) Einstein retomou o estudo do campo de gravitação homogéneo, porque entretanto tinha descoberto que uma das suas previsões anteriores, a da propagação curvilinea da luz sob a acção do campo, pode ser verificada pela observação. Nenhuma alteração essencial: o princípio da equivalência continua na base da investigação, mantêm-se os resultados precedentes; mas a dedução apresenta-se consideràvelmente simplificada.

Sejam: K um sistema de coordenadas em repouso num campo de gravitação homogéneo (aceleração da gravidade $=-\gamma$ na direcção Oz); K' um sistema de coordenadas existente numa região sem gravitação e animado de movi-

(1) A. Einstein, *Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, 1911, in-Lorentz, Einstein, Minkowski, *op. cit.*

mento uniformemente acelerado na direcção $O'z'$ (aceleração γ). Para evitar complicações inúteis podemos primeiro abstrair da teoria da relatividade especial e, portanto, considerar os dois sistemas, e os movimentos que nêles se realizam, segundo a cinemática e a mecânica newtonianas.

Um ponto material abandonado a si mesmo move-se, tanto em K como em K', segundo as equações

$$\frac{d^2 x}{d t^2}=0, \quad \frac{d^2 y}{d t^2}=0, \quad \frac{d^2 z}{d t^2}=-\gamma.$$

Assim sucede em K' pelo princípio da inércia. Em K pela lei experimental de que, num campo de gravitação homogéneo, todos os corpos caem com a mesma aceleração constante. Não obstante ser uma das mais gerais que se conhecem, não se dava a esta lei, antes de Einstein, lugar algum nos fundamentos da nossa concepção do mundo.

Ora esta lei interpreta-se satisfatòriamente supondo que os sistemas K, K' são fisicamente equivalentes: assim, K pode considerar-se existente numa região sem gravitação, mas dotado de movimento uniformemente acelerado. Compreende-se agora a queda igual de todos os corpos num campo de gravitação. Além disso, torna-se ilícito falar de aceleração absoluta dum sistema de referência. O problema da gravitação e o problema da relatividade geral estão em via de resolução simultânea.

É claro que um campo de gravitação qualquer nem sempre pode ser completamente substituído por um sistema de referência acelerado. Mas isto não significa que o princípio da equivalência perca importância neste caso geral. Localmente e momentâneamente qualquer campo gravitacional pode ser assim substituído, o que basta, graças ao método infinitesimal, para permitir a utilização daquele princípio na teoria geral do campo de gravitação.

A equivalência de K e K' é certa para os fenómenos mecânicos do domínio de validade da mecânica newtoniana. Mas, se ela se restringisse a êstes fenómenos, de nada nos serviria o seu conhecimento. Postulando-a para os outros fenómenos físicos, isto é, supondo que as leis da natureza em K são as mesmas que em K', poderemos, caso a suposição seja exacta, descobrir as leis dos fenómenos num campo de gravitação homogéneo por meio do estudo teórico dos fenómenos num sistema de referência uniformemente acelerado. Esta significação heurística, só por si, justificaria a introdução do princípio da equivalência. Mas pode mostrar-se que a teoria da relatividade especial dá à exactidão do princípio uma grande probabilidade.

Segundo esta teoria, a massa inerte dum corpo cresce com a energia absorvida. O aumento E de energia dá o aumento $\frac{E}{c^2}$ de massa inerte (c = velocidade da luz). ¿Corresponde-lhe também um aumento de massa gravitante? Se não, um corpo cai num campo de gravitação com diferentes acelerações, segundo a maior ou menor energia que contenha; e a fusão da lei da conservação da massa com a lei da conservação da energia seria verdadeira para a massa inerte, mas não para a massa gravitante. Isto é altamente improvável. Ora, da teoria da relatividade especial não pode deduzir-se que o pêso dum corpo dependa da sua energia; o princípio da equivalência, porém, exige-o necessàriamente.

Sejam, com efeito, S_1 e S_2 dois sistemas físicos situados numa vertical do campo de gravitação homogéneo K, à distância mútua h, de modo que o potencial da gravitação em S_2 exceda o de S_1 em γh. As dimensões de S_1 e S_2

supomo-las muito pequenas relativamente a h. De S_2 enviemos a energia radiante E_2 (medida em S_2) para S_1; ¿que valor terá esta energia em S_1, medida com instrumentos da mesma construção? [1]

Para responder à pregunta (o que é impossível *a priori*, porque desconhecemos a influência da gravitação sôbre a radiação e sôbre os instrumentos de medida), substituamos ao sistema K, segundo o princípio da equivalência, o sistema K' sem gravitação, mas animado de movimento uniformemente acelerado no sentido S_1 S_2. Seja K_0 o sistema de inércia no qual K' está momentâneamente em repouso quando S_2 emite a energia radiante E_2. A radiação chega a S_1 decorrido o tempo $\frac{h}{c}$ (em primeira aproximação); mas, nêste instante, S_1 tem a velocidade $v=\frac{\gamma h}{c}$ relativamente a K_0 e, portanto, segundo a teoria da relatividade especial (equação (16), IV, 25), a radiação tem em S_1, em primeira aproximação, a energia

$$E_1=E_2\left(1+\frac{v}{c}\right)=E_2\left(1+\frac{\gamma h}{c^2}\right).$$

No campo de gravitação K tem-se pois

$$E_1=E_2\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)=E_2+\frac{E_2}{c^2}\Phi,$$

sendo Φ a diferença de potencial entre S_2 e S_1. Esta

[1] Os instrumentos utilizados em S_1 terão a mesma construção que os utilizados em S_2 se, transportados para um mesmo lugar do campo e aí comparados, forem completamente iguais.

equação mostra que a massa inerte $\frac{E_2}{c^2}$ de E_2 é também massa gravitante de E_2; o têrmo $\frac{E_2}{c^2}\,\Phi$, com efeito, representa a energia potencial da massa gravitante $\frac{E_2}{c^2}$, ou seja a energia que deve atribuir-se a E_2 em virtude da sua posição antes de ser emitida de S_2, conforme ao princípio da conservação da energia.

A gravidade da energia (e a sua identidade com a inércia da energia) pode deduzir-se ainda mais fàcilmente. Com efeito, segundo o princípio da equivalência, a massa gravitante relativa a K coincide com a massa inerte relativa a K'; logo a energia deve ter massa gravitante, igual à sua massa inerte. Em K' um corpo de massa inerte M, portanto com o pêso aparente $M\gamma$, adquire o pêso aparente $\left(M+\frac{E}{c^2}\right)\gamma$ se absorve a energia E; pelo princípio da equivalência, êstes pêsos são pêsos reais em K.

Justificado assim o princípio da equivalência, apliquemo-lo ao estudo de outros fenómenos num campo de gravitação homogéneo. Consideremos de novo a emissão de radiação de S_2 para S_1, supondo que se trata duma radiação monocromática cuja freqüência em S_2, medida com um relógio situado em S_2, é ν_2; em S_1 a sua freqüência, medida com um relógio da mesma construção situado em S_1, será, para o sistema de referência K',

$$\nu_1 = \nu_2\left(1+\frac{\gamma h}{c^2}\right),$$

como o prova um raciocínio idêntico ao anterior apoiado na equação (11), IV, 25 do efeito Doppler (bastaria aliás notar que a energia e a freqüência duma radiação se transformam anàlogamente, como em IV observámos). No campo de gravitação K ter-se-á pois

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

Êste resultado importante permite a seguinte previsão. Seja ν_0 a freqüência dum emissor de luz, medida com um relógio situado junto dêle; é claro que esta freqüência é independente do lugar onde se encontrem juntos o emissor e o relógio. Suponhamo-los ambos situados à superfície do Sol; parte da luz aqui emitida chegará à Terra, onde medimos a sua freqüência ν com um relógio da mesma construção; será

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

supondo que a fórmula (3) é verdadeira (em primeira aproximação) também para um campo não homogéneo. Φ é agora a diferença (negativa) de potencial de gravitação entre as superfícies do Sol e da Terra. É pois $\nu < \nu_0$, isto é, as riscas do espectro solar devem apresentar-se deslocadas para o lado do vermelho em relação às riscas correspondentes dos espectros emitidos por fontes terrestres (primeiro efeito de Einstein). O valor relativo do deslocamento,

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{-\Phi}{c^2} = 2.10^{-6},$$

é acessível à medida; mas por ser muito pequeno e por haver outras causas que influem na posição das riscas espectrais, como p. ex. a pressão, é difícil verificar se há aqui realmente uma influência da gravitação.

Pode-se ser tentado a objectar o seguinte ao resultado precedente: visto que o campo de gravitação K é estático, se a radiação considerada é permanente o número de ondas existentes entre S_2 e S_1 é independente do tempo; a freqüência da radiação em S_1 não pode pois diferir da freqüência em S_2. Mas deve notar-se que a objecção supõe que se definiu um tempo para todo o sistema K, o que ainda se não fêz. As freqüências ν_1 e ν_2 são medidas localmente com relógios da mesma construção, mas nada prova que marchem igualmente relógios idênticos, quando situados em lugares onde o potencial da gravitação não é o mesmo. Pelo contrário, de que o tempo do sistema K deve ser definido de modo que a emissão de luz de S_2 para S_1 seja um fenómeno estacionário resulta precisamente, por (3), que o relógio de S_2 marcha $1+\frac{\Phi}{c^2}$ vezes mais ràpidamente que o relógio idêntico de S_1.

Se queremos que o tempo do sistema K seja indicado por relógios locais, êstes não podem ser da mesma construção; o relógio a colocar em S_2, quando comparado num mesmo lugar com o relógio a colocar em S_1, deve marchar $1+\frac{\Phi}{c^2}$ vezes mais lentamente que êste. Isto conduz a outro resultado importante. Medindo no sistema acelerado K' a velocidade da luz em diferentes lugares, com relógios da mesma construção, acha-se sempre o mesmo valor. Pelo princípio da equivalência, o mesmo sucede no campo de gravitação K. Utilizando portanto os relógios de desigual construção mencionados, a-fim-de introduzir o tempo geral de K, será a velocidade da luz, num lugar onde o potencial da gravitação é Φ, dada por

$$c = c_0\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{4}$$

Num campo de gravitação, a constância da velocidade da luz mantém-se só no sentido de que a velocidade da luz é independente do estado de movimento da fonte luminosa. No princípio da constância da velocidade da luz, que é uma das bases da teoria da relatividade especial, o essencial é justamente esta independência; a igualdade da velocidade da luz em todos os lugares de todos os sistemas de inércia resulta desta independência, da uniformidade da propagação num só sistema e do princípio da relatividade.

Sendo a velocidade da luz função do lugar, raios luminosos que não tenham a direcção do campo de gravitação devem ser encurvados por êste, como resulta imediatamente do princípio de Huygens. Se c_1, c_2 são os valores da velocidade da luz nos pontos vizinhos P_1, P_2, atingidos por uma onda luminosa no instante t, é evidente que o respectivo raio luminoso se encurva, entre os instantes $t, t+dt$, dum ângulo

$$\frac{(c_1 - c_2)\,dt}{P_1 P_2} = -\frac{\partial c}{\partial n}\,dt$$

contado positivamente se o raio se encurva para o lado dos n crescentes. Por unidade de caminho, o ângulo será

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n}$$

ou, segundo (4),

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial n};$$

para um caminho finito qualquer ter-se-á

$$\alpha = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,ds$$

para valor do ângulo das direcções inicial e final. Por conseguinte um raio luminoso que passa perto dum astro desvia-se, no sentido do campo, da quantidade

$$\alpha = \frac{1}{c^2} \int \frac{fM}{r^2} \cos \vartheta \, d s,$$

onde f é a constante da gravitação, M a massa do astro, r e ϑ as coordenadas polares correntes do raio luminoso $\left(\text{polo no centro do astro, } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < + \frac{\pi}{2}\right)$. Utilizando a relação

$$\frac{r\, d\vartheta}{d s} = \frac{\Delta}{r},$$

onde Δ é a distância do centro do astro ao raio luminoso, obtém-se imediatamente

$$\alpha = \frac{fM}{c^2 \Delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d \vartheta = \frac{2fM}{c^2 \Delta},$$

o que dá $\alpha = 4 . 10^{-6} = 0'',83$ para um raio luminoso que passe junto da superfície do Sol. Durante um eclipse total dêste astro deve observar-se um aumento na distância angular do seu centro às estrêlas vizinhas (segundo efeito de Einstein).

No que precede, mais uma vez transportámos para um campo não homogéneo resultados obtidos no caso dum campo homogéneo; e demos a Φ o seu valor newtoniano, como fizemos também para o efeito anterior. Até que ponto isto é legítimo vê-lo-emos adiante.

52. Obtidos os resultados precedentes, cumpria generalizá-los. Tornava-se claro que a construção da teoria da relatividade geral seria ao mesmo tempo a da teoria geral dos campos de gravitação. E como qualquer campo de gravitação é localmente e momentâneamente homogéneo, o princípio da equivalência e o método infinitesimal deviam ser suficientes para aquela construção. Os ensaios de Einstein neste sentido situam-se entre os anos de 1912 e 1916; neste último ano, numa memória célebre (1), Einstein apresentava a teoria como concluída nas suas linhas gerais.

Como atrás observámos, a equivalência dum sistema de referência em repouso num campo de gravitação homogéneo e dum sistema de referência uniformemente acelerado num espaço sem gravitação constitui uma primeira justificação do princípio da relatividade geral. Outra não menos importante é a seguinte. Tanto a mecânica newtoniana como a teoria da relatividade especial pretendem explicar o comportamento físico excepcional dos corpos em repouso num espaço de inércia (p. ex. a ausência de certas deformações) dizendo que as leis da mecânica, ou da física, valem sim para o espaço de inércia mas não para um espaço diferente. Ora esta explicação é apenas aparente, porque o espaço de inércia é uma causa fictícia, não uma coisa observável. Se dois corpos da mesma constituïção, um em repouso num espaço inercial, outro em repouso num espaço não inercial, têm formas diferentes, a causa disto deve ser qualquer coisa de material existente fora do sistema formado pelos dois corpos; o próprio sistema nada mais contém que os dois corpos animados de movimento relativo (acelerado). As leis gerais do movi-

---

(1) A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, 1916, in-Lorentz, Einstein, Minkowski, *op. cit.*

mento devem ser tais que a diversidade de comportamento mecânico dos dois corpos seja devida à presença de massas distantes de que tínhamos abstraído, não a uma vantagem do espaço inercial sôbre o outro espaço. Noutros termos, as leis da física devem ser tais que valham para todos os sistemas de referência.

Mas êste enunciado do princípio da relatividade geral deve por sua vez ser generalizado. Na teoria da relatividade especial as coordenadas de espaço e de tempo eram determinadas imediatamente por meio de réguas rígidas idênticas (segundo as regras da geometria euclidiana) e por meio de relógios idênticos. Uma régua rígida em repouso tinha um comprimento independente do lugar, da orientação e do tempo; um relógio em repouso tinha uma marcha independente do lugar e do tempo. Ora esta concepção simples do espaço e do tempo não pode manter-se na teoria da relatividade geral. Já sabemos que num campo de gravitação homogéneo (ou num sistema de referência uniformemente acelerado) relógios idênticos marcham em geral diferentemente. Consideremos agora um sistema de referência K' animado de rotação uniforme relativamente a um sistema de inércia K, e suponhamos que as origens e os eixos dos zz dos dois sistemas coïncidem permanentemente. Por motivo de simetria, um círculo do plano xy de K centrado na origem é também um círculo do plano $x'y'$ de K'. Imaginemos que a circunferência e o diâmetro do círculo são medidos com uma pequena régua unitária, em K e em K'; o quociente dos dois números achados será em K igual a π, em K' porém, por causa da contracção sofrida pela régua quando colocada sôbre a circunferência (mas não quando colocada sôbre o diâmetro), maior que π. A geometria de K' não é pois euclidiana. A consideração da marcha de relógios idênticos em K' levar-nos-ia a uma conclusão análoga à que citámos sôbre sistemas uniformemente acelerados. Assim, a determinação das coordenadas de espaço e de tempo dos sistemas de inércia, que supõe a validade da geometria euclidiana e a independência da marcha dum relógio relativamente ao lugar e ao tempo, é inaplicável aos sistemas acelerados; na teoria da relatividade geral as diferenças de coordenadas espacio-temporais não podem medir-se imediatamente com a régua unitária e com o relógio normal.

Desta maneira desaparece o meio de fixar no universo quadridimensional sistemas de coordenadas cujo emprêgo permita formular as leis da natureza dum modo particularmente simples. Só resta considerar todos os sistemas de coordenadas possíveis como equivalentes para a descrição da natureza. As coordenadas serão parâmetros quaisquer, cujos valores correspondem a todos os pontos do universo quadrimensional de maneira unívoca e contínua. Esta descrição do universo é suficiente: tôdas as medidas físicas resultam da verificação de coïncidências espacio-temporais, fora das quais nada há de observável; ora, se dois acontecimentos têm iguais coordenadas num sistema, o mesmo sucede noutro sistema, que resulta do primeiro por uma transformação pontual. O princípio da relatividade geral deve pois enunciar-se dêste modo: as leis gerais da natureza têm de exprimir-se por equações que subsistam para todos os sistemas de coordenadas do universo quadridimensional, isto é, que sejam covariantes perante quaisquer transformações de coordenadas. Êste enunciado generaliza evidentemente o anterior, porque em tôdas as transformações de coordenadas contêm-se também as que correspondem a todos os movimentos relativos dos sistemas de referência tridimensionais.

53. Já aludimos à forma que toma o princípio da equivalência no caso geral dum campo de gravitação qualquer, isto é, no caso em que o universo real está referido a um sistema de coordenadas arbitrário. Modificando um pouco os termos que empregámos, diremos agora: para cada região infinitesimal do universo quadridimensional (isto é, suficientemente pequena para que possa desprezar-se a variação local e temporal da gravidade) existe um sistema de coordenadas K_0 relativamente ao qual não existe gravitação (onde, portanto, vale a teoria da relatividade especial). Em suma, em cada região infinitesimal do universo pode eliminar-se a gravitação por uma escolha conveniente das coordenadas. Um pequeno corpo em queda livre durante um pequeno intervalo de tempo realiza um sistema K_0.

Se X_1, X_2, X_3, $X_4 = c\,t$ são coordenadas galileanas em K_0, o intervalo de dois acontecimentos da região infinitesimal considerada é dado por

$$(5) \qquad d\,s^2 = -d\,X_1^2 - d\,X_2^2 - d\,X_3^2 + d\,X_4^2,$$

onde as grandezas do segundo membro são medidas directamente em K_0 por meio de réguas unitárias e relógios normais. Considerando agora o sistema de coordenadas x^1, x^2, x^3, x^4 a que está referido todo o universo, é claro que as diferenciais $d\,X_i$ são funções lineares homogéneas das diferenciais $d\,x^i$ e tem-se

$$(6) \qquad d\,s^2 = g_{ik}\,d\,x^i\,d\,x^k,$$

onde o segundo membro representa uma forma quadrática de diferenciais com coeficientes funções das coordenadas. É evidente que, dado o sistema de coordenadas x^i, as medidas feitas em K_0 determinam os valores correspondentes dos g_{ik}.

Visto que $d\,s$ é invariante, os g_{ik} são componentes covariantes dum tensor de 2.ª ordem. A equação (6) significa que o universo quadridimensional tem estrutura métrica pseudo-riemaniana.

Se ós g_{ik}, numa certa região do universo, têm os valores que figuram em (5), vale nessa região, para o sistema de coordenadas dado, a teoria da relatividade especial. Passando para outro sistema de coordenadas, porém, os g_{ik} deixarão em geral de ser constantes nessa região, deixa de valer nela a teoria da relatividade especial; o movimento dum ponto material abandonado a si mesmo, que dantes era rectilíneo e uniforme, é agora curvilíneo e variado, independentemente da natureza do ponto material; na região considerada há agora um campo de gravitação. A presença dum tal campo está pois ligada à variabilidade dos g_{ik}.

Assim os g_{ik} caracterizam simultâneamente a métrica do universo (em particular a geometria do espaço tridimensional) e o campo de gravitação. O princípio da equivalência resolve pois satisfatòriamente dois problemas consideráveis: o problema da gravitação e o problema da geometria. O movimento dum ponto material num campo de gravitação é curvilíneo e variado, não porque o ponto material sofra a acção duma fôrça, mas porque o universo quadridimensional é não-euclidiano. A geometria do espaço não é dada *a priori*, mas é determinada pela matéria.

Podemos agora precisar o sentido da covariância das leis da natureza que exige o princípio da relatividade geral. As equações que as exprimem devem consistir na anulação dum tensor do universo quadridimensional dotado da métrica (6) (ou na igualdade de dois tensores da mesma ordem, o que é o mesmo). Tais equações mantêm a sua forma numa transformação de coordenadas, porque as componentes dum tensor se transformam linear e homogèneamente. A própria equação (6) é o primeiro exemplo de lei covariante.

Procuremos a lei do movimento do ponto material num campo de gravitação. No sistema K_0, em que a gravitação está eliminada, o movimento é rectilíneo e uniforme, ou seja uma geodésica universal; como a geodésica tem definição covariante, ela representa ainda o movimento em referência a qualquer sistema de coordenadas e tem-se

$$\frac{d^2 x^i}{d s^2} + \Gamma^i_{hk} \frac{d x^h}{d s} \frac{d x^k}{d s} = 0, \tag{7}$$

onde os Γ^i_{hk} são idênticos aos símbolos de 2.ª espécie de Christoffel. O raciocínio é concludente se K_0 é finito. Se K_0 é infinitesimal, é necessário admitir que a lei procurada não contém as segundas derivadas dos g_{ik}.

Se os Γ^i_{hk} se anulam, o movimento é rectilíneo e uniforme. Estas grandezas são pois as componentes do campo de gravitação; como elas são construídas linearmente com as primeiras derivadas dos g_{ik}, segue-se que os g_{ik} são as componentes do potencial da gravitação, que na teoria de Einstein, portanto, é um tensor simétrico de 2.ª ordem.

Anàlogamente se mostra que a linha universal dum raio luminoso é uma geodésica nula, definida por $d s = 0$ e por uma equação da forma (7), na qual, porém, a variável independente é um parâmetro arbitrário.

54. A equação (7) simplifica-se consideràvelmente se supomos que a velocidade do ponto material é pequena perante a da luz e que o campo de gravitação é fraco, isto é, que os g_{ik} diferem pouco dos valores galileanos que têm em (5). Desprezando a segunda ordem, a quarta

(7) desaparece e as três primeiras dão simplesmente

$$\frac{d^2 x^i}{d t^2} = -c^2 \Gamma^i_{44} \quad (i = 1, 2, 3;\ x^4 = c\,t).$$

Supondo além disso que o campo é estático ou quási estático, de modo que possam desprezar-se as derivadas dos g_{ik} relativamente ao tempo, Γ^i_{44} ou, o que é o mesmo segundo as suposições precedentes, $-\Gamma_{i,44}$ pode ser substituído por $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$ e têm-se as equações newtonianas

$$\frac{d^2 x^i}{d t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i},$$

com

$$g_{44} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}. \tag{8}$$

A constante aditiva ligada a Φ foi escolhida de modo que g_{44} tenha o valor galileano 1 para $\Phi = 0$.

No facto de só figurar nas equações do movimento, com a aproximação adoptada, a componente g_{44} do potencial tensorial einsteiniano é que reside a possibilidade da descrição newtoniana do campo de gravitação por meio dum potencial escalar.

A mesma circunstância permite também calcular a influência do campo de gravitação sôbre os relógios sem conhecer a lei da gravitação a que deve satisfazer o potencial einsteiniano. Visto que o elemento de linha universal dum relógio em repouso é dado por

$$d s^2 = g_{44} (d x^4)^2,$$

tem-se aproximadamente

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) d t;$$

o relógio marcha tanto mais lentamente quanto mais baixo é o potencial de gravitação do lugar onde está situado. Obtém-se assim um resultado que já conhecemos, mas agora generalizado para campos fracos e quási estáticos, homogéneos ou não. O deslocamento das riscas espectrais do Sol ou duma estrêla para o lado do vermelho está agora bem demonstrado teòricamente. No caso do Sol, como vimos, o valor numérico do deslocamento relativo é 2.10^{-6}, correspondente ao efeito Doppler duma velocidade radial de 0,6 km/sec.

Há muito tempo que se observavam no espectro solar pequenos deslocamentos das riscas para o lado do vermelho; êstes deslocamentos eram explicados como efeito da pressão. Mostrou-se mais tarde que êle não coincidia com o efeito da pressão observado em fontes luminosas terrestres: certas riscas que no laboratório eram muito pouco influenciadas pela pressão apareciam no espectro solar tão deslocadas como as outras. Lembrou naturalmente explicar êstes deslocamentos pelo efeito de Einstein. As primeiras medidas pareceram desfavoráveis à teoria; mas as medidas posteriores de Grebe e Bachem, efectuadas na banda do cianogénio (que não sofre efeito de pressão), mostraram que as riscas não perturbadas por sobreposição apresentam deslocamentos que coincidem com os seus valores teóricos; e outras medidas de Grebe provaram que a média dos deslocamentos de 100 riscas perturbadas e não perturbadas corresponde à teoria. Sem que se possa dizer que o efeito de Einstein está definitivamente comprovado, é legítimo, do ponto de vista heurístico, partir dêle e atribuir os desvios a causas perturbadoras, como p. ex. correntes de matéria solar acompanhadas de efeito Doppler.

Quanto à verificação do efeito nas estrêlas, é claro que ela só é possível para aquelas cujas velocidades radiais são bem conhecidas; mas ainda aqui surgem dificuldades. Weber e Eddington indicaram uma possibilidade de verificação excepcional na estrêla dupla Sírius; das duas estrêlas, a menos luminosa tem uma densidade extraordinàriamente grande, portanto um campo de gravitação muito intenso à superfície, donde se deve esperar um forte deslocamento relativista nas riscas do respectivo espectro. A velocidade radial é conhecida pelo efeito Doppler da estrêla mais luminosa, para a qual o efeito de Einstein é insignificante. Ora Adams observou efectivamente em Sírius B um deslocamento para o vermelho de 0,3 angströms, que coincide com o valor teórico calculado a partir dos dados astronómicos (1).

55. Antes de estabelecer a lei da gravitação da teoria de Einstein é necessário tratar da influência do campo de gravitação sôbre os fenómenos materiais (tomaremos aqui o têrmo matéria no sentido lato, para significar tanto a matéria pròpriamente dita como o campo electromagnético). Exprimir-se-á essa influência dando forma covariante geral às equações dêsses fenómenos, tais como as encontrámos na teoria da relatividade especial. Com efeito, seja K_0 um sistema de coordenadas no qual os g_{ik} têm os valores galileanos de (5) numa região universal finita. Neste sistema as leis naturais são as da teoria da relatividade especial. Passe-se agora de K_0 para um sistema de coordenadas qualquer e deduza-se pelo cálculo a forma das leis no segundo sistema; segundo o princípio da equivalência, tem-se assim a forma das leis dos fenómenos materiais num campo de gravitação. O resultado

(1) Cf. W. Pauli jun., *Relativitätstheorie*, Leipzig, 1921; F. Kottler, *Gravitation und Relativitätstheorie, op. cit.;* G. Beck, *Allgemeine Relativitätstheorie*, in-*Handbuch der Physik*, Band IV, Berlin, 1929.

obtido vale também para o caso em que sistemas como K_0 só existem para regiões infinitesimais, contanto que se admita que naquelas leis não figuram as segundas derivadas dos g_{ik}.

Temos um exemplo dêste processo na dedução da equação (7) do movimento do ponto material (cf. equações (21), IV, 28). A sua aplicação à equação do movimento da matéria contínua (equação (28), IV, 31) e à equação da impulsão-energia do campo electromagnético (equação (36), IV, 34), que nos interessam particularmente, dá evidentemente êste resultado: as divergências no sentido pseudo-euclidiano, que figuram nessas equações, são substituídas por divergências no sentido pseudo-riemanniano, conforme à equação (6). Dêste modo a equação (37), IV, 34, que exprime a lei da impulsão-energia da matéria (no sentido lato) na ausência de campo de gravitação, dará

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\, \mathfrak{T}^{kl} = 0, \tag{9}$$

onde $\mathfrak{T}^{ik}$ designa a densidade tensorial de T^{ik}. No segundo têrmo do primeiro membro é visível a influência da gravitação por intermédio das componentes do campo. Por causa dêste segundo termo, a integração de (9) não pode dar leis de conservação para a energia total e para a impulsão total da matéria; e na verdade pode haver passagem de impulsão e de energia da matéria para o campo de gravitação e recìprocamente.

Podemos agora estabelecer a lei da gravitação. Segundo o princípio da equivalência, a fôrça de gravitação, que é proporcional à massa gravitante, é também proporcional à massa inerte e portanto à energia. Porém a densidade de energia não é um escalar universal, mas só a última componente do tensor de impulsão-energia T_{ik}. Na lei da gravitação deve pois figurar êste tensor como representativo das grandezas de estado da matéria. Por analogia com a equação de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi f\rho, \tag{10}$$

admitiremos que o tensor T_{ik} é proporcional a um tensor formado com os g_{ik} e suas derivadas até à segunda ordem, linear nestas últimas; a lei que procuramos será pois da forma

$$c_1 R_{ik} + c_2 g_{ik} R + c_3 g_{ik} = k\, T_{ik}, \tag{11}$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes, R_{ik} é o tensor de Riemann contraído [1] e R o escalar de Riemann $g^{ik} R_{ik}$. Sabe-se com efeito que o 1.º membro de (11) é o único tensor que satisfaz às condições precedentes. Quanto à determinação das constantes, deve observar-se que, supondo dada qualquer solução das equações do campo (11), pode deduzir-se dela uma infinidade de outras soluções (fisicamente equivalentes) por meio de transformações de coordenadas; como a transformação arbitrária das coordenadas contém quatro funções arbitrárias, quatro funções arbitrárias conterá a solução geral de (11) (para condições iniciais dadas). Entre as dez equações do campo (11) para as dez incógnitas g_{ik} devem portanto existir quatro identidades. Ora o tensor T_{ik} satisfaz às quatro equações (9); isto faz ocorrer a suposição de que a lei da impulsão-energia da matéria resulta idênticamente das equações do campo da gravitação ou, o que é o mesmo, que a divergência do primeiro membro de (11) se anula idênticamente. Admitindo esta

---

[1] $R_{ik} = \dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k\beta} - \Gamma^{\alpha}_{ik}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}$.

suposição têm-se em (9) as quatro identidades referidas, e encontra-se a relação

$$c_2 = -\frac{1}{2} c_1 .$$

Finalmente, desprezando o têrmo $c_3 g_{ik}$ que, como mostrou Einstein, só é sensível no problema cosmológico, tem-se a lei da gravitação einsteiniana

$$(12) \qquad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik},$$

a qual pode também escrever-se

$$(13) \qquad R_{ik} = -\varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right),$$

sendo T o escalar da impulsão-energia da matéria.

Notemos que Einstein demonstrou que (9), em virtude de (12), pode escrever-se sob a forma

$$\frac{\partial (\mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k)}{\partial x^k} = 0,$$

da qual se deduzem, por integração, leis de conservação da impulsão e da energia. As grandezas $\mathfrak{t}_i^k$ são as componentes da impulsão-energia do campo de gravitação; contudo $\mathfrak{t}_i^k$ não é uma densidade tensorial.

56. Viu-se no n.º 54 que a lei einsteiniana do movimento do ponto material se reduz à lei newtoniana num campo de gravitação fraco e quási estático. É fácil de ver que num tal campo também a lei da gravitação (13) se reduz à lei de Newton. Para valor de T^{ik} podemos tomar a sua parte principal $\rho_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}$; sendo a velocidade da matéria muito pequena em relação à da luz, tôdas as componentes dêste tensor podem ser desprezadas salvo $T^{44} = \rho_0$. Na aproximação adoptada tem-se também $T_{44} = T = \rho_0$ e portanto o segundo membro da última das dez equações (13) reduz-se a $-\frac{1}{2} \varkappa \rho_0$. O seu primeiro membro, R_{44}, como se vê sem dificuldade, reduz-se a $-\frac{1}{2} \Delta g_{44}$, onde Δ é o operador de Laplace. Tem-se pois, atendendo a (8),

$$\Delta \Phi = \frac{1}{2} \varkappa c^2 \rho_0,$$

que é idêntica à equação de Poisson (10) com

$$\varkappa = \frac{8 \pi f}{c^2}.$$

A teoria de Einstein contém pois a de Newton como primeira aproximação.

Resta saber se ela pode explicar correctamente fenómenos que escapam à teoria newtoniana, por exemplo o movimento do periélio de Mercúrio. É sabido que neste caso a maior parte do movimento observado se explica pela teoria das perturbações, e a esta explicação parcial nada tem a objectar a teoria de Einstein, porque os campos de gravitação produzidos pelos planetas são suficientemente fracos para que a teoria newtoniana lhes seja aplicável. A questão deve ser decidida pela resolução do problema dos dois corpos dentro da teoria einsteiniana; noutros termos, é preciso calcular a partir de (13) o campo de gravitação do Sol e depois, a partir de (7), o movimento de Mercúrio neste campo.

Ora o campo de gravitação do Sol é estático e de simetria esférica, e neste caso as equações (13) podem integrar-se rigorosamente, como pela primeira vez mostrou Schwarzschild. Um campo é estacionário quando os g_{ik} são independentes do tempo. Para que, além disso, êle seja estático, é preciso que não existam correntes de matéria. Estas são descritas pelas componentes T_{4k} ($k=1$, 2, 3) do tensor material; e vê-se imediatamente que, se elas são nulas, as componentes mixtas ou contravariantes correspondentes só podem anular-se se forem $g_{41}=g_{42}=$ $=g_{43}=0$. Num campo estático, portanto, a expressão (6) não contém termos lineares em dx^4. No caso particular da simetria esférica deve ser, em coordenadas polares,

$$(14)\quad ds^2=-h^2\,dr^2-r^2\,(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2+f^2\,(dx^4)^2,$$

onde h e f são funções de r, como se reconhece por considerações de simetria sôbre a métrica das superfícies coordenadas. O cálculo das componentes R_{ik} para os valores (14) dos g_{ik} mostra que são idênticamente nulas aquelas em que é $i \neq k$; igualando a zero as outras (pretende-se o campo de gravitação do Sol fora do astro), obtêm-se quatro equações diferenciais que são simultâneamente satisfeitas por

$$h^2=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}},\quad f^2=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\beta^2,$$

onde α e β são constantes arbitrárias. Substituindo em (14),

β funde-se com x^4 e tem-se finalmente

$$(15) \quad ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)(dx^4)^2;$$

para $r \rightarrow \infty$ tem-se o ds^2 da teoria da relatividade especial em coordenadas polares, como devia ser.

O confronto com (8) dá

$$\alpha = -\frac{2r\Phi}{c^2} = \frac{2fM}{c^2},$$

onde M é a massa do Sol, f a constante newtoniana da gravitação. A solução (15) é singular para $r = \alpha$, mas α é extraordinàriamente pequeno em relação ao raio do Sol; isto é, a solução torna-se singular dentro da massa M, onde já não é válida.

Segundo (15), a influência do campo sôbre a marcha dum relógio é idêntica à que já conhecemos. A influência do campo sôbre o comprimento duma régua depende da orientação desta: colocada numa direcção radial, é tanto mais curta quanto menos dista do Sol; colocada numa direcção transversal não sofre alteração de comprimento. No campo considerado, uma região do espaço é tanto menos euclidiana quanto mais próxima fica do corpo que gera o campo.

O movimento do planeta no campo (15) podia calcular-se por (7). Mas é mais simples partir da equação equivalente

$$\delta \int ds = 0.$$

Variando primeiro φ, obtém-se

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0,$$

donde

$$r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{ds} = \text{const.}$$

Se o valor inicial de $d\varphi/ds$ é zero, o que sempre se consegue orientando convenientemente o sistema de coordenadas, φ fica portanto constante durante o movimento. A órbita é «plana».

Variando depois ϑ e atendendo a $\varphi = \text{const.}$, obtém-se o teorema das áreas

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{ds}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad r^2 \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{C}{c},$$

sendo C constante; em vez do tempo t entra porém o tempo próprio nesta equação.

Variando finalmente x^4 encontra-se

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dx^4}{ds} = \text{const.};$$

eliminando dx^4/ds entre esta equação e (15) resulta

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left\{ r^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 + 1 \right\} = \text{const.};$$

eliminando nesta ds por meio do teorema das áreas vem emfim a equação da órbita

$$(16) \qquad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha c^2}{C^2 r} - \frac{\alpha}{r^3} = \text{const.}$$

Esta equação difere da correspondente equação newtoniana pelo último têrmo do 1.º membro, que é muito pequeno, mas não nulo; êste têrmo deve produzir movimento do periélio. Efectivamente a substituïção

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\gamma\vartheta},$$

onde γ é uma constante muito próxima de 1, dá aproximadamente

$$\gamma = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{a(1-e^2)},$$

donde resulta que o periélio, a cada revolução, se desloca de

$$2\pi\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = \frac{3\pi\alpha}{a(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2},$$

atendendo ao valor de α e à terceira lei de Kepler. Este deslocamento é exactamente o sêxtuplo do que foi obtido em VI, 43 (pág. 140); o movimento do periélio de Mercúrio é assim completamente explicado pela teoria de Einstein.

A aplicação da fórmula precedente aos outros planetas interiores (para os planetas exteriores o efeito é insensível) também está de acôrdo com as observações, como mostrou

De Sitter. De resto, o movimento perielíaco a explicar é nestes casos muito mais pequeno.

57. A equação dum raio luminoso que atravessa o campo de gravitação do Sol podia obter-se directamente dum modo semelhante ao anterior. Mas tem-se essa equação imediatamente se se efectua uma passagem ao limite no precedente resultado. No caso dum raio luminoso, com efeito, é $ds = 0$; o teorema das áreas dá então $C = \infty$, e (16) converte-se em

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r^3} = \text{const.} = \frac{1}{\Delta^2}.$$

É a equação procurada. Se não existisse o último têrmo do 1.º membro, a equação daria

$$r = \frac{\Delta}{\cos\vartheta},$$

isto é, o raio luminoso seria uma recta à distância Δ do centro do Sol; é a solução em primeira aproximação. Em segunda aproximação obtém-se

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\vartheta}{\Delta} + \frac{\alpha}{2\Delta^2}(1 + \sin^2\vartheta).$$

O que nos interessa é a direcção desta curva a grande distância. Pondo

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon$$

no 2.º membro, igualando êste a zero e desprezando a 2.ª ordem, resulta

$$\varepsilon = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{4fM}{c^2\Delta}$$

para valor do desvio total sofrido pelo raio luminoso que, como se vê, é côncavo do lado do Sol. Êste desvio é duplo do que encontrámos no fim do n.º 51 utilizando a lei de Newton. Para um raio que passe junto da superfície do Sol tem-se $\varepsilon = 1'',75$. Ora as observações dos eclipses totais do Sol confirmam êste número, pelo menos muito melhor que a sua metade.

A existência dêste efeito, que é produzido em partes iguais pela gravidade da energia e pela curvatura do espaço, constitui uma prova experimental de ambas. Também o movimento do periélio do Mercúrio, que em parte é devido à variação da massa com a velocidade (VI, 43) e noutra parte à curvatura do universo, prova experimentalmente esta curvatura.

As outras aplicações da teoria da relatividade geral à mecânica celeste dão resultados, ou inobserváveis por muito pequenos, ou inverificáveis no estado actual da ciência por incerteza sôbre os valores de certos elementos orbitais. Por isso nos limitamos a referi-las sumàriamente [1]. Tratando o movimento dum astro num campo de simetria esférica como um movimento newtoniano perturbado, De Sitter mostrou que se obtém uma só desigualdade secular além da que precedentemente encontrámos para a longitude do periélio: é a da longitude média da época, da mesma ordem de grandeza que aquela.

---

(1) Cf. F. Kottler, *Gravitation und Relativitätstheorie*, *op. cit.*; também J. Chazy, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, tome I, 1928, tome II, 1930, Paris.

Esta desigualdade, em certos casos, modificaria a duração da revolução sideral do astro duma quantidade superior ao êrro de observação; mas basta uma correcção quási insensível da distância média do astro ao corpo central (1 km. no caso de Mercúrio) para que o acôrdo com a observação fique restabelecido. Resta pois o movimento do periélio como desigualdade secular decisiva. Além dos planetas interiores, de que já falámos, êste efeito é sensível para diversos satélites, como os de Marte e os de Júpiter e de Saturno mais próximos do respectivo planeta. O seu valor pode atingir aqui alguns minutos, mas os elementos de todos êstes satélites estão ainda tão mal determinados que por ora é impossível utilizá-los para uma verificação.

Servindo-se duma solução aproximada das equações do campo para o caso de *n* corpos animados de velocidades muito pequenas relativamente à da luz, De Sitter encontrou, para o caso dos planetas, que as perturbações não têm a sofrer correcção relativista, devendo portanto ser sempre calculadas segundo a teoria newtoniana (como era de prever). Para o caso da Lua, o efeito da relatividade no movimento do satélite sob a acção da Terra resulta insignificante e o mesmo se dá com o efeito da interferência dos campos da Lua e do Sol (característico da teoria de Einstein, cuja lei de gravitação não é linear); resta a acção perturbadora do Sol, que dá desigualdades seculares de $1'',91$ para as longitudes do perigeu e do nodo ascendente, e do quádrupulo dêste valor para a longitude média da época. Êste efeito, contudo, está dentro dos êrros de observação e das incertezas teóricas. Reduzido de dois terços, o efeito aparece também nos satélites de Marte. É notável que na expressão do seu valor não figuram os elementos do satélite.

De Sitter, e depois Lense e Thirring, investigaram a influência da rotação do corpo central sôbre o campo respectivo. O resultado obtido foi uma desigualdade secular negativa na longitude média da época e na do periélio, e outra positiva, dupla daquela em valor absoluto, na longitude do nodo ascendente. Para os planetas o efeito é insensível. Não assim para os mais próximos satélites de Júpiter e de Saturno, onde atinge muitos segundos de arco; mas também aqui se deve atender à má determinação dos elementos dêstes satélites.

São pois três os efeitos relativistas nos movimentos do sistema solar. O terceiro, como se disse, tem por causa a rotação do corpo central e consiste no movimento do pericentro e dos nodos [1]. O segundo é um efeito de precessão no espaço não euclidiano (o eixo do planeta, deslocando-se paralelamente a si mesmo em volta do Sol, adquire outra direcção no fim de cada revolução) e consiste também no movimento do pericentro e dos nodos. O primeiro tem por causa a rapidez do movimento (ou, o que é o mesmo, a proximidade do corpo central e a grande massa dêste) e consiste no movimento do pericentro.

Em conclusão, a teoria da gravitação de Einstein não só é a mais satisfatória do ponto de vista filosófico, mas é mesmo a única que a observação da natureza parece confirmar suficientemente.

[1] Abstraindo da desigualdade da longitude média da época, pela razão indicada a propósito do primeiro efeito.

ÍNDICE

14

ERRATA

Pág.	*Linha*	*Onde se lê*	*Leia-se*
15	19	frustou	frustrou
26	28	reflctidas	reflectidas
39	1	movimento absoluto	movimento
52	6	tem	têm
53	20	redical	radical
66	18	da Lorentz	de Lorentz
74	9	riemaniano	riemanniano
94	14	*strictu*	*stricto*
109	5 e 6	generalizado	generalizada
119	28	êles gravitação	êles, plenamente, gravitação
119	29	a gravitação	neste sentido, a gravitação
142	27	ignais	iguais
144	14	*f*	f