Asociación Española para el Progreso de las Ciencias

10° Congreso de Coimbra

Sur des formules de Jacobi, par R. H. Germay.

José Molina, impresor
General Alvarez de Castro, 40

SUR DES FORMULES DE JACOBI

PAR

R. H. GERMAY

ASSITANT Á L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

(Sesión del 15 de junio de 1925.)

1. Jacobi a démontré la proposition suivante (1).

Théorème. Soit X (q_1, q_2, ..., q_n ; a_1, a_2, ..., a_n) *une fonction de deux séries de* n *variables* q_1, ..., q_n, a_1, ... a_n, *admettant des dérivées partielles jusqu'au second ordre inclusivement. Posons*

$$[1] \qquad \frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

1° Si les q et les a sont les variables indépendantes, on a

$$[2] \qquad \frac{\partial p_k}{\partial a_j} = \frac{\partial b_j}{\partial q_k} \qquad (j, k = 1, ..., n).$$

2° Si les a et les p sont les variables indépendantes, on a

$$[3] \qquad \frac{\partial q_k}{\partial a_j} = -\frac{\partial b_j}{\partial p_k} \qquad (j, k = 1, ..., n).$$

3° Si les p et les b sont les variables indépendantes, on a

$$[4] \qquad \frac{\partial q_k}{\partial b_j} = \frac{\partial a_j}{\partial p_k} \qquad (j, k = 1, ..., n).$$

4° Si les b et les q sont les variables indépendantes, on a

$$[5] \qquad \frac{\partial p_k}{\partial b_j} = -\frac{\partial a_j}{\partial q_k} \qquad (j, k = 1, ..., n).$$

---

(1) Vorlesüngen über Dynamik, pp. 395 et suivantes.

Aux formules [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], on peut ajouter respectivement les suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} [\mathbf{2}'] & \dfrac{\partial p_k}{\partial q_j}=\dfrac{\partial p_j}{\partial q_k}, & \dfrac{\partial b_k}{\partial a_j}=\dfrac{\partial b_j}{\partial a_k} \\ [\mathbf{3}'] & \dfrac{\partial q_k}{\partial p_j}=\dfrac{\partial q_j}{\partial p_k}, & \dfrac{\partial b_j}{\partial a_k}=\dfrac{\partial b_k}{\partial a_j} \\ [\mathbf{4}'] & \dfrac{\partial q_k}{\partial p_j}=\dfrac{\partial q_j}{\partial p_k}, & \dfrac{\partial a_k}{\partial b_j}=\dfrac{\partial a_j}{\partial b_k} \\ [\mathbf{5}'] & \dfrac{\partial p_k}{\partial q_j}=\dfrac{\partial p_j}{\partial q_k}, & \dfrac{\partial a_k}{\partial b_j}=\dfrac{\partial a_j}{\partial b_k} \end{array}\right\} (j,\, k = 1, \dots, n);$$

Ces formules peuvent se démontrer par l'application du théorème des fonctions implicites. Le théorème s'étend à une fonction X dépendant de p séries de n variables. C'est ce que nous allons montrer en nous bornant pour la facilité de l'écriture au cas de $p = 3$.

2e *Théorème. Soit* X $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n)$ *une fonction dépendant des* 3 *séries de* n *variables* $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n$. *Supposons que* X *admette par rapport aux* a, b, c, *jusqu'au second ordre inclusivement, des dérivées partielles continues en un point* $a_1^0, \dots, a_n^0; b_1^0, \dots, b_n^0; c_1^0, \dots, c_n^0$, *et dans son domaine et que l'on ait*

$$[\mathbf{6}]\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{D\left(\dfrac{\partial X}{\partial a_1}, \dots, \dfrac{\partial X}{\partial a_n}; \dfrac{\partial X}{\partial b_1}, \dots, \dfrac{\partial X}{\partial b_n}; \dfrac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \dfrac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n)}\right]_0 \neq 0 \\ \left[\dfrac{D\left(\dfrac{\partial X}{\partial a_1}, \dots, \dfrac{\partial X}{\partial a_n}\right)}{D(a_1, \dots, a_n)}\right]_0 \neq 0, \quad \left[\dfrac{D\left(\dfrac{\partial X}{\partial a_1}, \dots, \dfrac{\partial X}{\partial a_n}; \dfrac{\partial X}{\partial b_1}, \dots, \dfrac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)}\right]_0 \neq 0 \end{array}\right.$$

etc., etc.

Ecrivons les équations

$$[\mathbf{7}] \quad \frac{\partial X}{\partial a_j} = \alpha_j, \quad \frac{\partial X}{\partial b_j} = \beta_j, \quad \frac{\partial X}{\partial c_j} = \gamma_j, \quad (j = 1, \dots, n).$$

1e Si les variables indépendantes son les a_j, b_j, c_j, on a

$$[\mathbf{8}]\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial b_j} = \dfrac{\partial \beta_j}{\partial a_k}, & \dfrac{\partial \beta_k}{\partial c_j} = \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial b_k}, & \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial a_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial c_k}; \\ \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial a_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial a_k}, & \dfrac{\partial \beta_k}{\partial b_j} = \dfrac{\partial \beta_j}{\partial b_k}, & \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial c_j} = \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial c_k}. \end{array}\right.$$

2ᵉ Si les variables indépendantes sont les α_j, β_j, γ_j, on a

$$[9] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial b_k}{\partial \alpha_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial \beta_k}, \quad \dfrac{\partial c_k}{\partial \beta_j} = \dfrac{\partial b_j}{\partial \gamma_k}, \quad \dfrac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = \dfrac{\partial c_j}{\partial \alpha_k}; \\ \dfrac{\partial b_k}{\partial \beta_j} = \dfrac{\partial b_j}{\partial \beta_k}, \quad \dfrac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = \dfrac{\partial c_j}{\partial \gamma_k}, \quad \dfrac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial \alpha_k}. \end{cases}$$

3ᵉ Si les variables indépendantes sont les a_j, b_j, γ_j, on a

$$[10] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_k}{\partial a_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial b_k}, \quad \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_j} = -\dfrac{\partial c_j}{\partial a_k}, \quad \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \gamma_j} = -\dfrac{\partial c_j}{\partial b_k}; \\ \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial a_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial a_k}, \quad \dfrac{\partial \beta_k}{\partial b_j} = \dfrac{\partial \beta_j}{\partial b_k}, \quad \dfrac{\partial c_j}{\partial \gamma_k} = \dfrac{\partial c_k}{\partial \gamma_j}. \end{cases}$$

4ᵉ Si les variables indépendantes sont les b_j, c_j, α_j, on a

$$[11] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial b_j} = \dfrac{\partial \beta_j}{\partial c_k}, \quad \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_j} = -\dfrac{\partial a_j}{\partial b_k}, \quad \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_j} = -\dfrac{\partial a_j}{\partial c_k}; \\ \dfrac{\partial \beta_k}{\partial b_j} = \dfrac{\partial \beta_j}{\partial b_k}, \quad \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial c_j} = \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial c_k}, \quad \dfrac{\partial a_j}{\partial \alpha_k} = \dfrac{\partial a_k}{\partial \alpha_j}. \end{cases}$$

5ᵉ Si les variables indépendantes sont les c_j, a_j, β_j, on a

$$[12] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial c_j} = \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial a_k}, \quad \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_j} = -\dfrac{\partial b_j}{\partial c_k}, \quad \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_j} = -\dfrac{\partial b_j}{\partial a_k}; \\ \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial c_j} = \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial c_k}, \quad \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial a_j} = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial a_k}, \quad \dfrac{\partial b_j}{\partial \beta_k} = \dfrac{\partial b_k}{\partial \beta_j}. \end{cases}$$

6ᵉ Si les variables indépendantes sont les α_j, β_j, c_j, on a

$$[13] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_k}{\partial \beta_j} = \dfrac{\partial b_j}{\partial \alpha_k}, \quad \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_j} = -\dfrac{\partial a_j}{\partial c_k}, \quad \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_j} = -\dfrac{\partial b_j}{\partial c_k}; \\ \dfrac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial \alpha_k}, \quad \dfrac{\partial b_k}{\partial \beta_j} = \dfrac{\partial b_j}{\partial \beta_k}, \quad \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial c_k} = \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial c_j}. \end{cases}$$

7ᵉ Si les variables indépendantes sont les β_j, γ_j, a_j, on a

$$[14] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial b_k}{\partial \gamma_j} = \dfrac{\partial c_j}{\partial \beta_k}, \quad \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_j} = -\dfrac{\partial b_j}{\partial a_k}, \quad \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_j} = -\dfrac{\partial c_j}{\partial a_k}; \\ \dfrac{\partial b_k}{\partial \beta_j} = \dfrac{\partial b_j}{\partial \beta_k}, \quad \dfrac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = \dfrac{\partial c_j}{\partial \gamma_k}, \quad \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial a_k} = \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial a_j}. \end{cases}$$

8[e] Si les variables indépendantes sont les γ_j, α_j, b_j, on a

$$[15]\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial c_k}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \gamma_k}, \quad \frac{\partial \beta_k}{\partial \gamma_j} = -\frac{\partial c_j}{\partial b_k}, \quad \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial a_j}{\partial b_k}; \\ &\frac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \alpha_k}, \quad \frac{\partial \beta_j}{\partial b_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial b_j}, \end{aligned}\right.$$

Démonstration:

1[e] Les formules **[8]** sont d'évidence immediate. On a en effet:

$$[16]\quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j}\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}\right) = \frac{\partial^2 X}{\partial a_k \,\partial b_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial b_j \,\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial X}{\partial b_j}\right) = \frac{\partial \beta_j}{\partial a_k}$$

On obtient de même les autres formules **[8]**

2[e] Prenons comme variables indépendantes les α_j, β_j, γ_j. Les dérivées, par rapport à β_j, des fonctions a_k, b_k, c_k sont données par les équations

$$[17]\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\lambda \,\partial a_\mu} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial \beta_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\lambda \,\partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \beta_j} + \\ &\qquad + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\lambda \,\partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial \beta_j} = 0 \\ &\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\lambda \,\partial a_\mu} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial \beta_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\lambda \,\partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \beta_j} + \\ &\qquad + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\lambda \,\partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial \beta_j} = \varepsilon_{\lambda j} \\ &\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \,\partial a_\mu} \cdot \frac{\partial a_\mu}{\partial \beta_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \,\partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \beta_j} + \\ &\qquad + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \,\partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial \beta_j} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon_{\lambda j} = 0 \text{ si } \lambda \neq j,\ \varepsilon_{\lambda j} = 1 \text{ si } \lambda = j).$$

Le déterminant de ces équations est le déterminant symétrique

$$[18]\quad \Delta = \frac{D\left(\dfrac{\partial X}{\partial a_1}, \ldots, \dfrac{\partial X}{\partial a_n};\ \dfrac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \dfrac{\partial X}{\partial b_n};\ \dfrac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \dfrac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n;\ c_1, \ldots, c_n)}.$$

Soit $\Delta_{k,n+j}$ le déterminant obtenu en supprimant dans Δ la k^e colonne et la $(n+j)^e$ ligne ($k \leq n$, $j \leq n$). Il vient inmédiatement

[19] $$\frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} = (-1)^{k+n+j} \frac{\Delta_{k,n+j}}{\Delta}.$$

On obtient de même

[20] $$\frac{\partial b_j}{\partial \alpha_k} = (-1)^{k+n+j} \frac{\Delta_{n+j,k}}{\Delta}.$$

Or Δ est symétrique. Donc

[21] $$\Delta_{k,n+j} = \Delta_{j,n+k}.$$

Par conséquent

[22] $$\frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} = \frac{\partial b_j}{\partial \alpha_k}.$$

Par permutation des indices j et k, on a la première formule [**9**]; on démontre de même les autres formules [**9**].

3^e Prenons comme variables indépendantes les a_j, b_j, γ_j.

Les équations

[23] $$\frac{\partial X}{\partial c_j} = \gamma_j, \quad (j = 1, ..., n),$$

définissent les c_k comme fonctions implicites des a_j, b_j, γ_j.

Les α_k, β_k s'expriment par les formules

[24] $$\alpha_k = \frac{\partial X}{\partial a_k}, \quad \beta_k = \frac{\partial X}{\partial b_k}, \quad (k = 1, ..., n),$$

où les c_k sont remplacés par leurs valeurs en fonction des a_j, b_j, γ_j.

Les dérivées des c_k par rapport à γ_j sont définies par les équations

[25] $$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial \gamma_j} = \varepsilon_{\lambda j}$$

$$(\lambda = 1, ..., n; \qquad \varepsilon_{\lambda j} = 0 \text{ si } \lambda \neq j, \qquad \varepsilon_{\lambda j} = 1 \text{ si } \lambda = j).$$

Le déterminant de ces équations est le déterminant symétrique

$$[\mathbf{26}] \qquad \Delta^* = \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(c_1, \ldots, c_n)}$$

Appelons $\Delta^*_{j,k}$ le déterminant obtenu en supprimant la j^e colonne et la k^e ligne de Δ^*. Nous avons immédiatement:

$$[\mathbf{27}] \qquad \frac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = (-1)^{j+k} \frac{\Delta^*_{k,j}}{\Delta^*}.$$

On obtient de même

$$[\mathbf{28}] \qquad \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_k} = (-1)^{j+k} \frac{\Delta^*_{j,k}}{\Delta^*}.$$

Mais Δ^* étant symètrique, on a

$$[\mathbf{29}] \qquad \Delta^*_{k,j} = \Delta^*_{j,k}.$$

Donc

$$[\mathbf{30}] \qquad \frac{\partial c_k}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_k}.$$

La dernière formule [**10**] est démontrée.

Nous avons

$$[\mathbf{31}] \qquad \frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_k\, \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c}{\partial \gamma_j}.$$

Par le formule [**27**]

$$[\mathbf{32}] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{\Delta^*} \Bigg\{ & \frac{\partial^2 X}{\partial a_k\, \partial c_1} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(c_1, .. \, c_{j-1}, c_{j+1}, .. \, c_n)} - \\ & - \frac{\partial^2 X}{\partial a_k\, \partial c_2} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \frac{\partial X}{\partial c_3}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, c_n)} \end{aligned} \right.$$

$$[32] \left\{ \begin{aligned} & + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial^2 X}{\partial a_k \, \partial c_n} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_{n-1}}\right)}{D(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)} \Bigg\} = \\ & = \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \frac{\partial X}{\partial c_2}, \dots \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_k, c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)} \\ & \qquad = \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \dots, c_{j-1}, a_k, c_{j+1}, \dots, c_n)}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, les dérivées des c par rapport à a_k son données par les équations

$$[33] \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial a_k} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial a_k} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

On en tire

$$[34] \qquad \frac{\partial c_j}{\partial a_k} = -\frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \dots, c_{j-1}, a_k, c_{j+1}, \dots, c_n)}$$

Par la comparaison des formules [**32**] et [**34**]

$$[35] \qquad \frac{\partial a_k}{\partial \gamma_j} = -\frac{\partial c_j}{\partial a_k}$$

on a ainsi la 2de formule [**10**].

Par le théorème de dérivation des fonctions composées

$$[36] \qquad \frac{\partial \alpha_j}{\partial a_k} = \frac{\partial^2 X}{\partial a_j \, \partial a_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_j \, \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c_\lambda}{\partial a_k}$$

La formule [**34**] s'écrit encore

$$[37] \qquad \begin{aligned} \frac{\partial c_j}{\partial a_k} & = (-1)^j \cdot \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_k, c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)} = \\ & = (-1)^j \cdot \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}, \dots \frac{\partial X}{\partial c_{j-1}}, \frac{\partial X}{\partial c_{i+1}}, \dots \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \dots, c_n)}. \end{aligned}$$

L'expression de $\frac{\partial \alpha_j}{\partial a_k}$ devient

$$
[38]\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_j}{\partial a_k} = \frac{1}{\Delta^*} \Bigg\{ & \frac{\partial^2 X}{\partial a_j\, \partial a_k} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \frac{\partial X}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, c_2, \ldots, c_n)} - \\
& - \frac{\partial^2 X}{\partial a_j\, \partial c_1} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}, \frac{\partial X}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, c_2, \ldots, c_n)} \\
& + \ldots + (-1)^n \frac{\partial^2 X}{\partial a_j\, \partial c_n} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}, \frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_{n-1}}\right)}{D(c_1, c_2, \ldots, c_n)} \Bigg\} \\
& = \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}, \frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_j, c_1, \ldots, c_n)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Permutons j et k, il vient

$$
[39]\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_j} &= \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_j}, \frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_k, c_1, \ldots, c_n)} = \\
&= \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_k}, \frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(a_j, c_1, \ldots, c_n)}
\end{aligned}
\right.
$$

Par suite

$$
[40]\quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial a_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial a_j}.
$$

On démontre de même la formule

$$
41]\quad \frac{\partial \beta_k}{\partial b_j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial b_k}.
$$

Il reste à démontrer la première et la troisième formules [**10**].

Nous avons aussi

$$[42] \qquad \frac{\partial \beta_k}{\partial \gamma_j} = \sum_{\lambda = 1}^{\lambda = n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_k \, \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c_\lambda}{\partial \gamma_j}.$$

Par les expressions des $\frac{\partial c_\lambda}{\partial \gamma_j}$, il vient

$$[43] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \beta_k}{\partial \gamma_j} &= \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta^*} \left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial b_k \, \partial c_1} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)} - \right. \\ & \qquad - \frac{\partial^2 X}{\partial b_k \, \partial c_2} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \frac{\partial X}{\partial c_3}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)} \\ & \qquad \left. + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\partial^2 X}{\partial b_k \, \partial c_n} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_{n-1}}\right)}{D(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)} \right\} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(b_k, c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)} \\ &= \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \ldots, c_{j-1}, b_k, c_{j+1}, \ldots, c_n)}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, les dérivées des c_λ par rapport aux b_k sont données par les équations

$$[44] \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial b_k} + \sum_{\mu = 1}^{\mu = n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_\lambda \, \partial c_\mu} \cdot \frac{\partial c_\mu}{\partial b_k} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous en tirons

$$[45] \qquad \frac{\partial c_j}{\partial b_k} = -\frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D(c_1, \ldots, c_{j-1}, b_k, c_{j+1}, \ldots, c_n)}$$

Par comparaison des formules [**43**] et [**45**]

[**46**] $$\frac{\partial \beta_k}{\partial \gamma_j} = - \frac{\partial c_j}{\partial b_k}.$$

La 3e formule [**10**] est démontrée.

La 1ère s'obtient d'une façon analogue.

Nous avons en effet

[**46**] $$\frac{\partial \alpha_j}{\partial b_k} = \frac{\partial^2 X}{\partial a_j \, \partial b_k} + \sum_{\lambda = 1}^{\lambda = n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_j \; \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k}.$$

Par les expressions [**45**] des $\dfrac{\partial c_j}{\partial b_k}$, il vient

[**47**] $$\frac{\partial \alpha_j}{\partial b_k} = \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\dfrac{\partial X}{\partial a_j}, \; \dfrac{\partial X}{\partial c_1}, \; \dots, \; \dfrac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(b_k, c_1, c_2, \; \dots, \; c_n)}.$$

De même

[**48**] $$\frac{\partial \beta_k}{\partial a_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial b_k \, \partial a_j} + \sum_{\lambda = 1}^{\lambda = n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_k \, \partial c_\lambda} \cdot \frac{\partial c_\lambda}{\partial a_j}.$$

Par les formules [**37**] où l'on remplace l'indice k par l'indice j, il vient

[**49**] $$\frac{\partial \beta_k}{\partial a_j} = \frac{1}{\Delta^*} \cdot \frac{D\left(\dfrac{\partial X}{\partial a_j} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial c_1}, \; \dots, \dfrac{\partial X}{\partial c_n}\right)}{D\,(b_k, \; c_1, \; \dots, \; c_n\,)}.$$

Par comparaison des formules [**47**] et [**49**]

[**50**] $$\frac{\partial \alpha_j}{\partial b_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial a_j}.$$

Les formules [**10**] sont complètement démontrées.

4ᵉ et 5ᵉ Les formules [**11**] et [**12**] se déduisent des formules [**10**] par permutation circulaire des lettres α, β, γ, a, b, c.

6ᵉ Prenons comme variables indépendantes les α_j, β_j, c_j; les fonctions sont les a_j, b_j, γ_j. Des équations

$$[\mathbf{51}] \qquad \frac{\partial X}{\partial a_j} = \alpha_j, \ \frac{\partial X}{\partial b_i} = \beta_j,$$

nous tirons les a et les b en fonction des α_j, β_j, c_j, puis nous remplaçons dans les $\frac{\partial X}{\partial c_j}$ de façon à avoir les γ_j en fonction des α_j, β_j, c_j.

Nous avons

$$[\mathbf{52}] \quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_j} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_k \, \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial \alpha_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_k \, \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \alpha_j}.$$

D'autre part, les $\frac{\partial a_\lambda}{\partial \alpha_j}$, $\frac{\partial b_\mu}{\partial \alpha_j}$ sont données par les équations linéaires

$$[\mathbf{53}] \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \, \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial \alpha_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \, \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \alpha_j} = \varepsilon_{\omega j} \\ &\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \, \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial \alpha_j} + \sum_{\lambda=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \, \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \alpha_j} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(\omega = 1, 2, \ldots, n; \ \varepsilon_{\omega j} = 0 \ \text{si} \ \omega \neq j, \ \varepsilon_{\omega j} = 1 \ \text{si} \ \omega = j).$$

Le déterminant de ces équations est le déterminant symétrique

$$[\mathbf{54}] \qquad \Delta^{**} = \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial a_n}, \frac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D\,(a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n)}$$

On déduit de ces équations

$$[55]\quad \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_j} = (-1)^{j-1} \cdot \frac{1}{\Delta^{**}} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_2}, \frac{\partial X}{\partial a_3}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial a_n}; \frac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)}, \text{ etc.}$$

En substituant dans l'expression de $\frac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_j}$, il vient

$$[56]\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_j} &= \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta^{**}} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial a_n}, \frac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D(c_k, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, b_n)} \\ &= \frac{1}{\Delta^{**}} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial a_n}, \frac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D(a_1, \ldots, a_{j-1}, c_k, a_{j+1}, \ldots, b_n)}. \end{aligned} \right.$$

Mais les dérivées des a_j, b_j par rapport aux c_k sont données par les équations

$$[57]\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \partial c_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial c_k} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial c_k} = 0, \\ &\frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \partial c_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial c_k} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial c_k} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(\omega = 1, 2, \ldots n).$$

Nous en tirons

$$[58]\quad \frac{\partial a_j}{\partial c_k} = -\frac{1}{\Delta^{**}} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial a_n}, \frac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D(a_1, \ldots, a_{j-1}, c_k, a_{j+1}, \ldots, b_n)}.$$

Par comparaison des formules [**56**] et [**58**]

$$[59]\quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial a_j}{\partial c_k}.$$

On a de même la formule

$$\text{[60]} \qquad \frac{\partial \gamma_k}{\partial \beta_j} = - \frac{\partial b_j}{\partial c_k}.$$

Les 2ᵉ et 3ᵉ formules [**13**] sont ainsi démontrées.

Démontrons la première formule [**13**].

Les dérivées des a_λ, b_μ par rapport à β_j sont données par les formules

$$\text{[61]} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \, \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial \beta_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial a_\omega \, \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \beta_j} = 0, \\ &\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \, \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial \beta_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial b_\omega \, \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial \beta_j} = \varepsilon_{\omega j}; \end{aligned} \right.$$

$$(\omega = 1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon_{\omega j} = 0 \text{ si } \omega \neq j,\ \varepsilon_{\omega j} = 1 \text{ si } \omega = j).$$

Soit $\Delta^{**}_{k,\, n+j}$ le mineur obtenu en supprimant dans Δ^{**} la k^e colonne et la $(n+j)^e$ ligne $(k \leq n, j \leq n$. Nous tirons des équations [**61**]

$$\text{[62]} \qquad \frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} = \frac{(-1)^{k+n+j}}{\Delta^{**}} \cdot \Delta^{**}_{k,\, n+j}.$$

De même, les équations [**53**] où l'on remplace j par k donnent

$$\text{[63]} \qquad \frac{\partial b_j}{\partial a_k} = \frac{(-1)^{k+n+j}}{\Delta^{**}} \cdot \Delta^{**}_{n+j,\, k}.$$

Mais Δ^{**} étant symétrique

$$\text{[64]} \qquad \Delta^{**}_{k,\, n+j} = \Delta^{**}_{n+j,\, k}.$$

La comparaison des formules **[62]** et **[63]** donne

$$\frac{\partial a_k}{\partial \beta_j} = \frac{\partial b_j}{\partial \alpha_k}, \tag{65}$$

et la 1ère formule **[13]** est démontrée.

Des formules **[53]** on tire des expressions telles que **[55]**, savoir

$$\frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} = \frac{(-1)^{k+j}}{\Delta^{**}} \cdot \Delta^{**}_{k,j}. \tag{66}$$

En permutant j et k il vient

$$\frac{\partial a_j}{\partial \alpha_k} = \frac{(-1)^{k+j}}{\Delta^{**}} \cdot \Delta^{**}_{j,k}. \tag{67}$$

Comme on a

$$\Delta^{**}_{k,j} = \Delta^{**}_{j,k}, \tag{68}$$

il vient

$$\frac{\partial a_k}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \alpha_k}. \tag{69}$$

On démontre de même que

$$\frac{\partial b_k}{\partial \beta_j} = \frac{\partial b_j}{\partial \beta_k} \tag{70}$$

et les 4e et 5e formules **[13]** sont ainsi démontrées.

Pour obtenir la dernière formule **[13]**, observons que

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial c_k} = \frac{\partial^2 X}{\partial c_j\, \partial c_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_j \partial a_\lambda} \cdot \frac{\partial a_\lambda}{\partial c_k} + \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial^2 X}{\partial c_j \partial b_\mu} \cdot \frac{\partial b_\mu}{\partial c_k}. \tag{71}$$

Par les formules telles que [**58**], il vient:

$$[72] \qquad \frac{\partial \gamma_j}{\partial c_k} = \frac{1}{\Delta^{**}} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial X}{\partial c_j}; \frac{\partial X}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial a_n}; \frac{\partial X}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial b_n}\right)}{D\left(c_k; a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n\right)}.$$

En permutant j et k, le second membre ne change pas de valeur; on a donc

$$[73] \qquad \frac{\partial \gamma_j}{\partial c_k} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial c_j},$$

et la dernière formule [**13**] est démontrée.

7ᵉ et 8ᵉ Les formules [**14**] et [**15**] se déduisent des formules [**13**] par permutation circulaire des lettres α, β, γ, a, b, c.

Liége, le 3 Novembre 1924.