# TRATADO
## DE
# MECHANICA.

# TRATADO
## DE
# MECHANICA
## POR
# M. MARIA

*DA CAZA, E SOCIEDADE DE Sorbonna, Censor Regio, e Professor de Mathematica no Collegio Mazarino.*

Traduzido do Francez.

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXV.

*Por Ordem de Sua Magestade, e com Privilegio.*

# PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo Eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abollir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quais os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita Abolliçaõ ficáraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta de Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para ra a ſobredita Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu o havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo, a eſte fim a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſó he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quais ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos da Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultra-marinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais Peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guar-

dar

dar ſem duvida, ou embargo algum, qualquer que elle ſeja, naõ obſtante a ſobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco, que Tenho revogado ao ſobredito fim na parte, que ſó reſpeita ás ſobreditas impreſſoens; ficando para tudo o mais em ſeu vigor, e inteira validade. E eſte valerá como ſe paſſaſſe pela Chancellaria, poſto que por ella naõ ha de paſſar; e o ſeu effeito haja de durar hum, e muitos annos; naõ obſtantes as Ordenaçoens em contrario as quais Hey por derogadas para eſte effeito ſómente. Dado no Palacio de Noſſa Senhora da Ajuda em deſeſeis de Dezembro de mil ſetecentos ſetenta e tres.

REY.

*Marquez de Pombal.*

*Alvará, porque Voſſa Mageſtade pelos motivos nelle expreſſos: He ſervido transferir para a Univerſidade de Coimbra o Privilegio excluſivo para as impreſſoens dos Livros Claſſicos dos Eſtudos Mathematicos; havendo ceſſado*

*cessado o fim, com que antes fora Concedido, e Doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma assima declarada.*

Para Vossa Magestade ver.

*João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá* o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

*Marquez Visitador.*

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

*João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.*

# TABOA

Das materias que ſe contém neſte Tratado.

## *INTRODUCÇAÕ.*



# STATICA.

## *SECÇAÕ I.*



*pos*

## SECÇAÕ II.



DYNA-

# DYNAMICA.



## *SECÇAÕ I.*

## SECÇAÕ II.



## SECÇAÕ III.

ERRA-

# ERRATAS.

| Pag. | Linh. | Errat. | Emend. |
|---|---|---|---|
| 19 | 8,12,13 | *C* | *A* |
| ibid. | 9,10,16 | *A* | *C* |
| ibid. | 14 | *C* | *B* |
| 23 | 12 | P:Q | Q:P |
| 54 | 12 | $\frac{AP}{AM}$ | $\frac{AP}{PM}$ |
| 62 | 2 | $\frac{11}{33}a$ | $\frac{14}{33}a$ |
| 94 | 2 | $\cos\varphi$ | $\cos\frac{1}{2}\varphi$ |
| 106 | 23 | $\pm l$ &c | $\pm a\,l$ &c |
| 111 | 20 | Se $m$ | Se $m+\frac{1}{m}$ |
| 117 | 3 | $\frac{NT}{PN}$ | $\frac{NT}{PT}M$ |
| 123 | 26 | *HL* | *H*K |
| 147 | 1 | *EF* | *E*B |
| 153 | 29 | *SM*:*SN* | *LM*:*LN* |
| 175 | 16 | $\frac{\sqrt{2b}}{g}$ | $\sqrt{\frac{2b}{g}}$ |
| 179 | 22 | $\frac{a-x}{x}$ | $\frac{a-x}{a}$ |
| 194 | 1 | $\frac{C^2\,ddy}{dx}$ | $\frac{C^2\,ddy}{dx^2}$ |
| 195 | 22 | *MA* | *M*P |
| 201 | 2 | da menor | da maior |
| 222 | 17 | $y'$ e $y$ | $Y'$ e $Y$ |
| ibid. | 18 | $x'$ e $x$ | $X'$ e $X$ |
| 224 | 2 | $d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$ | $-d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$ |
| 234 | 20 | $\frac{Ydy-Xdx}{ax}$ | $\frac{Ydy-Xdx}{ds}$ |
| 235 | 13 | oo | os |

| *Pag.* | *Linh.* | *Errat.* | *Emend.* |
|---|---|---|---|
| 238 | 2 | $\frac{b}{2}$ | $\frac{b}{2}$ |
| ibid. | 17 | $bb$ | $bb$ |
| 253 | 2 | $G$ | $k$ |
| 257 | 13 | $e^{\overline{k}}$ | $e^{\frac{x}{k}}$ |
| 270 | 4 | $\frac{a}{b}$ | $\frac{b}{a}$ |
| 274 | 8 | $GKH$ | $GAH$ |
| 279 | 8 | $\frac{k^2+mk}{k}$ | $\frac{k^2+mk}{a}$ |
| 309 | 23 | $\frac{M}{m}$ | $\frac{m}{M}$ |
| 331 | 18 | $AFX$ | $AEX$ |
| 338 | 6 | $2c.CM.Mm.CM$ | $2c.CM.Mm.CM^2$ |
| 340 | 5 | $\frac{2}{3}a^2$ | $\frac{2}{3}a^3$ |
| 342 | 8 | $\frac{abf.2a^3}{3}$ | $\frac{4bf.2a^3}{3}$ |
| ibid. | 16 | $)\ \frac{1}{12}$ | $)=\frac{1}{12}$ |
| 344 | 7 | $=\frac{d\Phi}{W}$ | $=-\frac{d\Phi}{W}$ |

Na pag. 302 o fegundo membro das ultimas duas equações deve multiplicar-se por *V*.

TRA-

# TRATADO
# DE
# MECHANICA.

## INTRODUCÇAÕ.

### *Divisões, e Definições.*

I.

A *MECHANICA* em geral he a Sciencia que tem por objecto o Movimento dos corpos, e o Equilibrio das Forças oppostas.

Quando a Mechanica trata em particular dos principios, leis, e effeitos do movimento, chama-se *Dynamica*, sendo nos corpos solidos; e sendo nos fluidos, *Hydrodynamica.*

Do mesmo modo, quando trata do equilibrio das forças oppostas, tambem se divide em *Statica*, e *Hydrostatica*, conforme se occupa em determinar as condições necessarias para o equilibrio dos solidos, ou dos fluidos.

Como a Statica e a Dynamica servem de fundamento aos outros ramos da Mechanica, por ellas he que deve principiar-se o estudo desta Sciencia, e ambas seraõ a materia deste Tratado.

2 Dizemos que hum corpo está em movimento, todas as vezes que elle muda de lugar. Para se effeituar esta mudança, he necessario que o movel deixe o lugar onde está, e tendo passado por todos os lugares intermedios chegue finalmente ao lugar que deve occupar.

Esta passagem successiva de hum lugar para outro humas vezes se faz mais depressa, outras mais devagar. Assim nos relogios, o ponteiro dos minutos faz o giro do mostrador na duodecima parte do tempo, que gasta o ponteiro das horas em dar o mesmo giro. Assim os relampagos, annunciadores dos rayos, atravessaõ mais rapidamente a atmosphera, do que o estampido dos trovões.

3 A idea do movimento inclue pois tres objectos principais, que saõ como elementos da Mechanica. I. *O espaço corrido pelo movel.* II. *O tempo, em que he corrido.* III. *A relaçaõ entre o espaço, e o tempo.* Esta relaçaõ he o que todo o mundo entende pelo nome de *Velocidade*; e della será conveniente, que formemos aqui huma idea bem distinta.

4 Seja qual for a natureza do espaço, sobre a qual tantas vezes se tem disputado a perder de vista, podemos concebello como huma extensaõ immensa, e penetravel, na qual todos os corpos do Universo estaõ mergulhados, occupando todos huma porçaõ maior, ou menor, conforme saõ de mais, ou menos volume. He pois o volume dos corpos a medida da porçaõ do espaço que elles enchem, e que se chama o *Lugar* dos mesmos corpos.

Isto posto, imaginemos nesta immensidade dous pontos, que estejaõ a huma distancia finita hum do outro, de huma braça por exemplo. Se hum corpo posto em movimento, por qualquer causa que for, correr o espaço desta distancia, naõ o poderá fazer senaõ em hum certo tempo. E seja tambem qual for a natureza do tempo, he provado pela experiencia, que o mesmo movel animado de mais forte movimento corre a mesma distancia em menos tempo; de sorte, que sendo o movimento duplo, por exemplo, naõ lhe será necessario mais doque ametade do tempo.

5 Mas como no espaço indefinido, que imaginamos confusamente, podemos tomar distancias determinadas, que chamaremos *pollegadas*, *pés*, *braças* &c, e que seraõ medidas fixas, ou *unidades de comprimento*, ás quais se reportaráõ todas as dimensões da mesma especie: assim tambem no profundo abysmo do tempo podemos determinar certas medidas fixas e conhecidas, que serviráõ como *unidades de tempo* para termo de comparaçaõ de quaisquer outras durações, com tanto que sejaõ finitas, e lhes daremos o nome de *horas*, *minutos*, *segundos* &c.

Deste modo pois, se acharmos que o movel, em virtude do primeiro movimento referido, gasta hum minuto em correr o espaço de huma braça; diremos, que em virtude do segundo o correrá em meio minuto, e que pela impressaõ de hum movimento sessenta vezes mais rapido o correria em hum segundo de tempo.

6 Ago-

6 Agora he facil de ver, que se huma parte, huma medida, huma unidade de espaço requer, para haver de ser corrida pelo movel, huma, ou duas, ou tres unidades de tempo, o numero $n$ de unidades de espaço naõ poderá ser corrido senaõ em hum numero $n$, ou $2n$, ou $3n$ de unidades de tempo, supposto que o movel conserva o mesmo movimento por toda a carreira do espaço, por onde caminha. Donde se vê, que há sempre huma certa relaçaõ entre o numero das unidades de espaço, e o das unidades de tempo; relaçaõ bem facil de determinar pela simples divisaõ destes dous numeros. O quociente exprime em todos os casos a velocidade do movel.

7 Daqui se entenderá aquelle principio taõ conhecido na Mechanica (aindaque muito mal enunciado), que *a velocidade he igual ao espaço dividido pelo tempo.*

Mas tomemos as cousas de mais alto, e tendo-nos posto no ponto de vista, em que os primeiros descobridores da Mechanica deveriaõ olhar para a materia que tratamos, procuremos seguir os seus passos, e analyzar os primeiros esforços das suas meditações.

8 A materia, e o movimento, se offerecéraõ por toda a parte ás suas attenções, como ainda se offerecem cada instante ás nossas. Sem duvida que familiarizados, assim como nós, desde a infancia com todas as maravilhas que resultaõ do movimento, mais se haveriaõ de afadigar em servir-se dos effeitos, doque em procurar as causas. Qual porem deveria ser o assombro daquelles, que primeiro se occupáraõ nestas indagações! E com effeito, que outra cousa se póde considerar mais pasmosa nas obras da natureza, doque a simples communicaçaõ do movimento, para quem lhe contempla as maravilhas?

Tenho hum braço em quietaçaõ; minha alma ordena que se mova, e logo se move! A' minha maõ está presente hum corpo, que pela sua quietaçaõ parece que deveria descançar em huma inacçaõ eterna; e de repente este mesmo corpo sendo arrastado, impellido, ou arremessado, se poem em movimento! Acha outros corpos na sua carreira? com elles reparte as suas forças, por humas leis as mais constantes, aindaque pareçaõ diversificar-se ao infinito.

Humas vezes pára repentinamente, e suas forças parecem aniquilar-se em hum instante; outras vezes torna para traz, ou, ſe continûa o primeiro caminho, he com huma velocidade ſenſivelmente enfraquecida, que naõ eſtá longe de extinguir-ſe. Ella ſe acaba, e eiſahi o corpo reſtituido ao eſtado de deſcanço, donde eu o tinha tirado. Qual he pois a móla ſecreta, que o pode obrigar ao movimento? qual a intelligencia, que preſide a huma diſtribuiçaõ taõ exacta das ſuas forças? que he feito do movimento delle, e dos corpos que tinha impellido, levado comſigo, ou ao menos aballado na ſua paſſagem? Eiſaqui já muitas queſtões, ás quais poderiaõ ajuntar-ſe muitas outras. E á viſta de tudo iſto, he por ventura de eſpantar, que os mais celebres Filoſofos da antiguidade, de concerto neſte ponto com os Modernos mais Sabios, tenhaõ conſiderado a exiſtencia e a communicaçaõ do movimento, como huma prova ſem replica da exiſtencia de Deos?

9 A eſtas primeiras obſervações ſe ajuntáraõ bem depreſſa as da *gravidade*, e da *fricçaõ*. Sempre os corpos ſe tem viſto ſujeitos a eſta lei imperioſa, que conſtantemente os ſollicita para a terra. Mas qual he o principio della? nada ſe ſabe. Os effeitos porém naõ ſaõ por iſſo menos palpaveis, nem menos univerſais em todos os corpos, que nos rodeiaõ.

O mais ordinario deſtes effeitos he de deſtruir pouco a pouco os movimentos oppoſtos á direcçaõ da gravidade. Lançai huma pedra ao ar; e vereis, que a gravidade enfraquecendo-lhe a velocidade chega em breve tempo a extinguilla, e depois a produzir huma velocidade toda contraria, com que a pedra cahe acceleradamente para a terra. Niſſo naõ há couſa, que naõ ſeja muito commua, antes ſe teria por hum prodigio, ſe aſſim naõ ſuccedeſſe. Mas, qual he a raſaõ porque ella cahe? porque naõ continûa a afaſtar-ſe da terra, ſeguindo a ſua primitiva direcçaõ, com toda a velocidade que lhe tendes imprimido? Porquê, direis vós? he porque huma *potencia* ſuperior repelle continuamente todos os corpos para a terra. Porém, que potencia he eſſa? ninguem a póde definir, aindaque todo o mundo experimenta os ſeus effeitos. Tem-ſe aſſentado em dar-lhe os nomes de *pezo*, *gravidade*, *gravitaçaõ* &c., termos todos ſynonimos, que exprimem eſta tendencia geral, que todos os corpos tem para o centro da terra.

10 Esta propriedade naõ he com tudo essencial á materia. Pelo pensamento se póde considerar despida della, sem alterar em nada a sua natureza. Neste estado naõ offerece mais doque hum composto de partes mais ou menos chegadas humas ás outras, conforme os intersticios que houver nos corpos, que resultaõ do ajuntamento e uniaõ das mesmas partes. Tambem se tem assentado em dar á quantidade destas partes o nome de *massa*. Assim, quando hum corpo tem duas vezes as partes materiais de outro, dizemos que tem huma massa dupla.

11 A naõ consultar, senaõ o que vemos, e as propriedades da materia que nos saõ conhecidas, he cousa assentada que hum corpo he absolutamente indifferente para toda a sorte de direcções no seu movimento. A bomba que se atira de hum morteiro, a bala que sahe de hum canhaõ, todos os corpos lançados por quaisquer direcções, naõ sahiriaõ jámais da linha do seu movimento primitivo, se causas externas lhes naõ oppuzessem obstaculos invenciveis; e conservariaõ eternamente a sua primeira velocidade, se a gravidade, se o ar, a agua, ou qualquer outro meio, por onde atravessaõ, e se as fricções multiplicadas que devem vencer, naõ concorressem a destruilla.

Como todos estes obstaculos estaõ sujeitos a variações infinitas, seria impossivel fixar cousa alguma na sciencia do movimento, se naõ se tivesse principiado por fazer huma abstracçaõ geral de todos elles. Fez-se com effeito; e depois de se haver procurado quais seriaõ as leis do movimento, se naõ houvesse cousa alguma na natureza, que lhes perturbasse a harmonia, transportáraõ-se ao estado natural das cousas, a fim de poder avaliar os effeitos produzidos pelos referidos obstaculos. Assim foraõ postos os fundamentos da Mechanica.

12 Seguindo o mesmo procedimento, supporemos pois: I, que os corpos naõ tem pezo, ou gravidade alguma; II, que no seu movimento naõ experimentaõ resistencia alguma do meio por onde caminhaõ, nem fricçaõ alguma dos planos sobre os quais se movem.

Feitas estas supposições, determinaremos as leis do movimento; e depois de havermos calculado os effeitos, passaremos a comparallos com os resultados da experiencia. Tal he em geral o plano, que seguiremos no curso desta Obra. Mas antes de começar, he necessario que ajuntemos aqui outras noções preliminares.

13 Cha-

13 Chama-se *movimento uniforme* o de hum corpo, que em tempos iguais corre espaços iguais. Se há na natureza exemplos deste movimento, devem ser bem raros, por causa de todos os obstaculos, que se oppoem á sua uniformidade. O melhor relogio naõ offerece mais doque grandes approximações desta igualdade rigorosa e absoluta, tanto no giro regular das rodas e ponteiros, como nas oscillações da pendula. Naõ deixa por isso de conceber-se a possibilidade do movimento uniforme; e a definiçaõ que temos dado naõ suppoem mais doque isso.

14 Se os espaços corridos pelo movel vaõ cadavez sendo maiores, chama-se este *movimento accelerado.* Naõ há cousa mais commua, que esta especie de movimento no estado presente das cousas. Vede, com que aceleraçaõ chega á terra hum corpo, que se deixa cahir de huma altura consideravel.

15 Ao contrario, se os espaços corridos em tempos iguais vaõ cadavez sendo menores, entaõ o movimento se chama *retardado.* Entre milhares de exemplos, que temos cada dia debaixo dos olhos, basta trazer á lembrança hum corpo atirado para o ar, e huma bóla correndo por hum plano. Primeiramente se vê, que o movimento começa sensivelmente a enfraquecer, e bem depressa o corpo torna a descer, e a bóla perde todo o movimento.

16 Tudo o que dá, tudo o que imprime o movimento em hum corpo, se chama em geral, *potencia*, *força*, *causa motriz*, *agente.* Mas se esta força obra sem interrupçaõ alguma sobre o movel, chama-se em particular *força aceleratrix.* A gravidade está neste caso a respeito de todos os corpos em movimento, considerados no estado natural.

17 Como o movimento he huma passagem successiva de hum lugar para o outro, o descanço, ou quietaçaõ he huma perseverança continua no mesmo lugar. Distingue-se de duas mameiras, quietaçaõ *absoluta*, e *relativa.*

A primeira he, quando o corpo naõ somente naõ tem movimento algum proprio, que o faça mudar de lugar, mas tambem naõ participa de movimento algum commum dos corpos, que o rodeiaõ. Existe por ventura no mundo huma quietaçaõ semelhante? isso he o que se ignora: e a questaõ he de bem pouca importancia. Desde o homem, que repousa no somno mais tranquillo, até ás massas enormes dos rochedos e montanhas, cuja quietaçaõ parece taõ fixa e segu-

segura, tudo gira incessantemente ao redor do eixo da terra, e tudo com a mesma terra he transportado com passmosa velocidade pelo immenso espaço da orbita, que ella descreve.

Quanto á quietaçaõ relativa, naõ póde negar-se a sua existencia. Esta he a que tem hum corpo, que se conserva no mesmo lugar relativo, isto he, que naõ muda de distancia a respeito dos corpos, que o rodeiaõ immediatamente. Assim o mareante deitado em hum navio está em quietaçaõ, por muita que seja a velocidade comque navega a embarcaçaõ.

Postas estas noções preliminares, eisaqui os fundamentos da Mechanica.

## *Principios gerais da Mechanica.*

### *Principio I.*

18 T*Odo o corpo que está em quietaçaõ, nella se conservaria eternamente, se por alguma causa externa naõ fosse posto em movimento.*

Este principio he fóra de toda a contestaçaõ. Porque de duas cousas huma: ou he necessaria huma causa externa que lhe imprima o movimento, ou elle mesmo póde tirar-se da quietaçaõ em que está, e dar-se a si mesmo o movimento que naõ tinha. Mas em que tempo há de começar a mover-se, e que direcçaõ ha de tomar, quando naõ há mais rasaõ para que se mova agora, naõ se tendo movido antes, nem para que se mova para esta parte, e naõ para aquella?

Sobre este principio fundou Descartes, e depois delle Newton, a theorica das forças Mechanicas. Sabemos, que o primeiro tendo supposto o espaço cheio de materia, naõ pedia mais doque movimento para explicar o Mechanismo do Universo. Tinha muito bem comprehendido, que a materia deixada a si mesma ficaria para sempre na inercia e quietaçaõ. Recorreu pois ao Ser Supremo, para dar somente o primeiro aballo áquelle montaõ informe; e encarregando-se, para o dizer assim, do resto da obra, elevou aquelle vasto edificio, cujas ruinas ainda causaõ espanto pela magnificencia e ousadia, que descobrem no seu plano.

Po-

Porém Newton advertido pela fragilidade daquelle fyftema, da neceffidade de tomar outro caminho, fez todos os feus esforços para achar o verdadeiro. Subio, como Defcartes, á origem das coufas; e lá naõ vendo, como elle, na materia mais doque hum fer puramente paffivo, fem acçaõ, fem força, e fem movimento, julgou que ella por fua natureza tinha fido condenada a eterno defcanço, fe o Creador a naõ tiraffe delle. Suppoz pois, que todos os corpos do fyftema folar tinhaõ fido lançados pela maõ omnipotente, cada hum por fua linha recta differente, mas todos com huma gravitaçaõ univerfal para hum centro determinado; e defta fuppofiçaõ fe elevou por calculos novos aos defcobrimentos immortais, cujas confequencias quanto mais fe tem defenvolvido, e comparado com as obfervações, tanto mais tem confirmado a hypothefe, em que fe fundaõ.

## *Principio II.*

19 *TOdo o corpo pofto huma vez em movimento, nelle continuaria para fempre uniformemente, e em linha recta, fe naõ foffe impedido pela acçaõ de caufas externas.*

Efte principio naõ he menos certo, que o precedente. Porque affim como hum corpo em quietaçaõ naõ póde darfe a fi mefmo o movimento, do mefmo modo naõ póde deftruir, nem ainda alterar o movimento que tiver recebido, pois que para ambas as coufas fe requer huma força, acçaõ, e energia, que a pura materia naõ tem. He pois neceffario: 1°, que o corpo conferve perpetuamente, quanto he da fua parte, o movimento recebido.

2°, Que o movimento feja uniforme. Porque fe em tempos iguais o movel naõ andaffe efpaços iguais, aumentaria, ou diminuiria elle mefmo o feu movimento, o que naõ he poffivel.

3°, Como na origem do movimento, a direcçaõ he determinada pela caufa motriz, naõ ha mais rafaõ para que o movel fe defvie della para huma parte doque para a outra. Deverá logo continuar naõ fómente com o mefmo grão de velocidade, mas tambem na mefma direcçaõ primitiva.

Tal feria, torno a dizer, o movimento de todos os corpos, fe a gravidade, a fricçaõ, e a refiftencia do meio, junta com a de tantas outras particulas de materia, ou agi-

agitadas, ou em quietaçaõ, que encontraõ na passagem successiva de huns lugares para outros, naõ aniquilassem em fim tanto as maiores, como as mais pequenas velocidades, e naõ mudassem quasi todas as direcções.

## *Principio III.*

20 *A Especie de resistencia, que todos os corpos oppoem á sua mudança de estado, tanto para a quietaçaõ, como para o movimento* (Newton lhe deu o nome de força de inercia) *he sempre proporcional á massa dos mesmos corpos.*

Esta resistencia com effeito he o resultado de todas as resistencias que oppoem as partes de materia, de que os corpos se compoem, pois cada huma resiste á mudança do seu estado. Logo quanto mais partes materiais houver em hum corpo, isto he, quanto a sua massa for maior, tanto maior será a força de inercia.

21 He necessario haver advertencia em naõ confundir esta força com a da gravidade: 1°, porque ella teria lugar, ainda na supposiçaõ de que os corpos naõ fossem graves. 2°, porque ella resiste igualmente a todas as direcções, e a gravidade naõ se oppoem senaõ aos movimentos que lhe saõ oppostos. 3°, porque a acçaõ instantanea da gravidade naõ he susceptivel de comparaçaõ alguma com as potencias finitas, e a força da inercia, ou a resistencia que oppoem os corpos á mudança de estado, he sempre proporcional á força motriz, que nelles obra essa mudança, e vence a dita resistencia.

## *Principio IV.*

22 *A Quantidade de movimento de qualquer corpo, que se move uniformemente, he igual ao producto da massa pela velocidade.*

A massa de hum corpo he a soma das partes materiais, de que elle se compoem; e o seu movimento total resulta de todos os movimentos particulares dessas mesmas partes. Porém todas ellas tem a mesma velocidade, que he a do movel, e cada huma se considera ter huma unidade de movimento. Logo multiplicando a soma das partes pela velocidade commua, o producto será o movimento total.

23 Se

23 Se o movel naõ tiveſſe, ſenaõ hum movimento de rotaçaõ, todo o mundo ſabe que entaõ as ſuas partes naõ teriaõ todas a meſma velocidade. Mas aqui naõ ſe trata, ſenaõ do movimento rectilineo, que qualquer potencia lhe póde imprimir.

24 Chamando pois $M$ a maſſa do movel, e $V$ a ſua velocidade, teremos geralmente $MV$ por expreſſaõ do ſeu movimento.

Eſte modo de avaliar as forças de hum movel, tem experimentado muitas contradicçoens, depois que Leibnitz introduzio na Mechanica a celebre diſtinçaõ de *forças vivas* e *mortas*, ſobre as quais ſe tem diſputado por tanto tempo. Seguido de muitos Geometras illuſtres pertendia Leibnitz, que para avaliar as forças de hum corpo em movimento era neceſſario multiplicar a maſſa pelo quadrado da velocidade; e a eſte producto deu o nome de *força viva*. Por *força morta* porém entendia ſómente o ſimples esforço, ou preſſaõ de hum corpo, ou de huma potencia contra hum obſtaculo inſuperavel; e eſta confeſſava, que devia medir-ſe multiplicando a maſſa pela velocidade, que neſſe caſo naõ era mais do que *virtual*.

Os outros Geometras pouco contentes deſta novidade, e naturalmente apercebidos contra as ſubtilezas Metaphyſicas daquelle grande homem, perſiſtiraõ na opiniaõ antiga. Muitos tambem a defenderaõ com ſucceſſo, e o incendio da diſputa ſe ateou vivamente. Mas depois de ſe ter bem altercado de parte a parte, cada hum ficou no ſeu parecer, como ſuccede quaſi ſempre, e as couſas naõ ficáraõ por iſſo de peor condiçaõ, nem para huns, nem para outros; prova certa de que os fundamentos da Mechanica naõ eraõ intereſſados na queſtaõ.

Baſta eſta conſideraçaõ para nos deſviar de tomarmos partido naquella eſpecie de ſciſma. O objecto naõ vale certamente o trabalho, depois que por exames reiterados de ambos os methodos tem conſtado, que daõ abſolutamente os meſmos reſultados na ſoluçaõ dos meſmos Problemas.

Nós pois diremos, que a quantidade de movimento he igual ao producto da maſſa pela velocidade. E porque o effeito de qualquer potencia conſiſte em imprimir no corpo huma quantidade certa de movimento; accreſcentaremos, que a medida mais natural e mais uniforme da acçaõ da meſma potencia ſobre qualquer maſſa, he o producto da dita maſ-ta maſſa pela velocidade que lhe he communicada, ſendo claro, que a acçaõ deve ſer tanto maior, quanto for maior a maſſa que ſe ha de mover, e a velocidade com que ſe ha de mover.

25 Muitas vezes nos ſuccederá chamarmos força, ou potencia aquillo que naõ he realmente mais do que o effeito; porque na Mechanica, as cauſas naõ intereſſaõ couſa alguma, ſenaõ pelos effeitos que produzem. Pela maior parte ignoramos a ſua natureza, ainda que os effeitos ſejaõ muito conhecidos. Aſſim as leis, e os effeitos da gravidade, ainda que de hum ſeculo a eſta parte ſe tenhaõ averiguado com toda a exactidaõ, de quaſi nada tem ſervido para nos dar luz alguma ſobre a cauſa phyſica deſte phenomeno.

Baſtará pois ter huma vez fixado o ſentido dos termos *força*, e *potencia*, tantas vezes repetidos nas obras de Mechanica, para naõ haver já mais embaraço no ſignificado, e uſo delles.

26 Obſervemos por fim deſte artigo, que huma meſma força applicada a differentes corpos deve imprimir velocidades diverſas, para que o effeito ſeja o meſmo. Porque ſendo $V$ a velocidade, que ella póde communicar a huma maſſa dada $M$, e $v$ a que deve communicar a outra maſſa $m$, para que as quantidades de movimento ſejaõ iguaes, teremos $mv = MV$; donde ſe tira $v = \frac{MV}{m}$ por expreſſaõ da velocidade do ſegundo movel $m$.

## *Formulas do Movimento Uniforme.*

27 POr quanto no movimento uniforme os eſpaços corridos em tempos iguaes ſaõ iguaes, he evidente que os eſpaços ſempre devem ſer proporcionaes aos tempos, que o movel gaſta em os correr; e reciprocamente, que ſendo os eſpaços proporcionaes aos tempos, o movimento he uniforme.

Chamando pois $V$ a velocidade de hum movel, ou, que vem a ſer o meſmo neſte caſo, chamando $V$ o eſpaço que elle anda em huma unidade de tempo, em hum ſegundo, por exemplo; e chamando $E$ o eſpaço proporcional que deve andar em hum numero $T$ de ſegundos, teremos $V : E :: 1 : T$; e por conſeguinte $E = VT$; formula geral do movi-

movimento uniforme, da qual ſe deduz $V = \frac{E}{T}$, e $T = \frac{E}{V}$; de ſorte, que ſendo dadas duas deſtas quantidades $E$, $V$, $T$, a terceira ſe determina immediatamente.

28 Como pois temos $V = \frac{E}{T}$, ſegue-ſe que tambem qualquer outra velocidade uniforme $v = \frac{e}{t}$. Logo ſerá $V : v :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; e por conſeguinte $Evt = eVT$. Deſta formula ſe deduzem os Theoremas ſeguintes.

I. *As velocidades de dous moveis animados de hum movimento uniforme ſaõ entre ſi na raſaõ directa dos eſpaços, e na inverſa dos tempos.* Porque a equaçaõ geral $Evt = eVT$ ſe reſolve neſta proporçaõ $V : v :: Et : eT$.

II. *Sendo iguais os tempos, as velocidades ſaõ na raſaõ dos eſpaços.* Porque na equaçaõ geral tirando $T = t$, fica $Ev = eV$, e conſeguintemente $V : v :: E : e$.

III. *Sendo os eſpaços iguais, as velocidades ſaõ reciprocamente como os tempos.* Porque tirando da meſma equaçaõ $E = e$, fica $vt = VT$, e por conſeguinte $V : v :: t : T$.

IV. *Se os eſpaços corridos por dous moveis forem proporcionais aos tempos, as velocidades ſeraõ iguais.* Porque entaõ ſendo $E : e :: T : t$, teremos $Et = eT$, e conſeguintemente $V = v$.

V. *Se os eſpaços forem na raſaõ inverſa dos tempos; as velocidades ſeraõ na raſaõ inverſa dos quadrados dos meſmos tempos.* Porque ſendo $E : e :: t : T$, e ſubſtituindo por $E$, $e$ os ſeus valores $VT$, $vt$, teremos $VT : vt :: t : T$, e $VT^2 = vt^2$, donde ſe tira $V : v :: t^2 : T^2$.

VI. *Na meſma ſuppoſiçaõ precedente, ſeraõ as velocidades na raſaõ duplicada dos eſpaços.* Porque ſendo $E : e :: t : T$, e ſubſtituindo em lugar de $t$, $T$ os ſeus valores $\frac{e}{v}$, $\frac{E}{V}$, teremos $E : e :: \frac{e}{v} : \frac{E}{V}$, donde ſe tira $Ve^2 = vE^2$, e conſeguintemente ſerá $V : v :: E^2 : e^2$.

29 Pela meſma equaçaõ $Evt = eVT$ ſe vê, que os eſpaços corridos uniformemente por dous moveis ſaõ na raſaõ composta dos tempos e das velocidades. Logo, ſe

as velocidades forem iguais, os eſpaços seraõ como os tempos; e ſe os tempos forem iguais, como as velocidades. Logo tambem, ſe as velocidades forem reciprocamente proporcionais aos tempos, os eſpaços seraõ iguais &c.

Com a meſma facilidade ſe vê, que os tempos ſaõ na raſaõ directa dos eſpaços e inverſa das velocidades &c. &c.

## *Reflexoens ſobre o Movimento Uniforme.*

30 A' Primeira viſta parecerá, que o eſpaço, tempo, e velocidade, ſendo como ſaõ quantidades realmente heterogeneas, naõ eraõ ſuſceptiveis de comparaçaõ alguma entre ſi. Mas reparando bem na fórma em que as temos conſiderado no artigo precedente, naõ ha couſa que ſe opponha á comparaçaõ de humas com as outras. Temos conſiderado a velocidade *V*, como repreſentada pelo eſpaço corrido pelo movel no tempo 1, iſto he, em huma parte fixa e determinada de tempo, que tomamos por unidade; logo *V* he comparavel a *E*. Quanto á quantidade T, neſta ſuppoſiçaõ naõ he mais doque hum numero abſtracto, que ſe póde comparar com outra qualquer quantidade.

31 Por muito grande que ſeja a eſcuridade das diſcuſſoens Metaphyſicas ſobre a natureza do tempo, he certo que nós todos o concebemos como correndo uniformemente. Deve pois buſcar-ſe a medida da ſua duraçaõ no movimento uniforme. Mas como por huma parte naõ podemos eſtar ſeguros da uniformidade do movimento, ſenaõ pela igualdade dos tempos que o movel gaſta em correr eſpaços iguais, e por outra parte naõ podemos julgar da igualdade dos tempos, ſem termos huma medida fixa regulada por algum movimento uniforme, he claro, que eſtamos metidos em hum circulo vicioſo, e que em rigor naõ temos meio exacto para medirmos o tempo. He neceſſario pois, que nos contentemos com huma ſimples approximaçaõ.

32 Deſte modo he, que o movimento de hum relogio de pendula, feito com todo o cuidado, ſe julga uniforme, cómo he realmente, ſem erro ſenſivel. Aſſim tambem o movimento de rotaçaõ, que o Globo Terreſtre faz todos os dias ao redor do ſeu eixo, e que nos faz parecer que todo o Ceo gira ao redor de nós em ſentido contrario, com muita raſaõ he tido por uniforme. Quan-

Quando porém ſe tranſporta eſte movimento ao Sol; como ſe pratica no uſo civil, para medir o tempo pelas revoluçoens diurnas deſte aſtro, achaõ-ſe nelle algumas pequenas irregularidades, que fazem os dias humas vezes mais curtos, e outras mais compridos. Mas para remediar o pequeno inconveniente deſtas deſigualdades, regulaõ-ſe as pendulas Aſtronomicas, naõ pelo *movimento verdadeiro* do Sol, qual o daõ as *meridianas*, o que ſeria quaſi impoſſivel; mas pelo *movimento medio*, ou pela revoluçaõ apparente das *fixas*. Com eſta precauçaõ, huma pendula bem regulada naõ ſe aparta fóra de certos limites, conhecidos e calculados para cada hum dos dias, da hora que moſtraõ os melhores relogios de Sol, e que ſe chama *tempo verdadeiro*. A hora da pendula he o *tempo medio*, e a differença de hum a outro em cada dia chama-ſe *Equaçaõ*. E, para o dizer de paſſagem, *pendulas de equaçaõ* ſaõ as que tem dous ponteiros de minutos, hum que moſtra o tempo medio, outro o verdadeiro.

33 Em quanto naõ podemos dar a theorica do movimento dos pendulos, baſtará obſervar que os ſingulares progreſſos dos Artiſtas modernos tem conduzido os movimentos da relogiaria a hum ponto taõ ſubido de exactidaõ, que naõ póde achar-ſe mais difficuldade alguma em quanto á medida do tempo. Obſervemos tambem, que he coſtume na Mechanica contallo por ſegundos; e deſta ſorte tomaremos ſempre daqui por diante hum ſegundo por unidade do tempo.

## *Problemas ſobre o Movimento Uniforme.*

34 PROBL. I. Movendo-ſe uniformemente dous corpos $A$ e $B$ pela recta $AB$ com as velocidades $V$ e $v$, e eſtando actualmente a huma diſtancia $AB = d$; achar em que tempo eſtaráõ em huma diſtancia $= c$. (Fig. 1.)

Seja $x$ o tempo, que buſcamos. Entaõ, ſe os dous moveis vaõ para a meſma parte, quando for paſſado o tempo $x$, achar-ſe-ha $B$ em $B'$, e $A$ em $A'$, de ſorte que a ſua diſtancia $A'B'$ ſerá igual a $c$.

Iſto poſto, temos $AA' = Vx$, e $BB' = vx$ (n.7.), logo $d + vx - Vx = \pm c$. Ponho $\pm c$, ainda que ſómente o final $+$ convem á figura, porque póde ſucceder que o ponto $A'$ eſteja seja para diante do ponto $B'$. Será pois $x = \frac{d \mp c}{V - v}$.

Assim he susceptivel este pequeno Problema de duas soluçoens, como he facil de ver, reflectindo que os dous moveis de huma e outra parte do ponto do encontro podem achar-se na mesma distancia $c$. Para determinar o tempo, em que deveráõ encontrar-se, faremos $c = 0$, e teremos $x = \frac{d}{V - v}$; valor, que he o meio arithmetico entre os dous que resultaõ do caso geral. Mas para que esta formula tenha lugar, he necessario suppor que os moveis saõ dous pontos, porque de outra sorte haverá collisaõ entre elles, quando $c$ for igual á soma dos seus raios, sendo elles esfericos.

Exemplo. Supponhamos, que $A$ corre 4 pés, e B $2\frac{3}{4}$ em hum segundo, e que distaõ actualmente 20 pés. Pergunta-se, quando deveráõ estar em distancia de 6 pés?

Teremos $x = \frac{20 \mp 6}{4 - \frac{11}{4}} = \frac{80 \mp 24}{5}$. Achar-se-haõ pois na distancia pedida tanto no fim de $11''\frac{1}{5}$, como de $20''\frac{4}{5}$, cujo meio arithmetico $16''$ dá o momento do encontro; bem entendido, que para ter lugar a segunda soluçaõ he necessario suppor, que os dous corpos, sendo como realmente saõ inpenetraveis, naõ se movem precisamente na mesma linha, nem no mesmo plano, mas em linhas parallelas distantes entre si quanto bastar, para que os corpos naõ padeçaõ collisaõ no encontro. Deste modo se encontra o ponteiro dos minutos com o das horas, e e a Lua com o Sol, quando o eclipsa a nosso respeito.

35 Probl. II. Dous moveis $A$ e $B$, animados de differentes velocidades uniformes, giraõ ao redor de huma mesma circumferencia, e ambos para a mesma parte: a sua distancia actual he $a$; quando será $c$? (Fig. 2.).

Seja $V$ a velocidade do corpo $A$, que supponho ser o que a tem maior, e $v$ a velocidade do corpo $B$; e seja $x$ o tempo procurado. Se os dous moveis andaõ na direcçaõ $AB$, acha-

acharemos como no primeiro Problema $x = \frac{d \mp c}{V - v}$; porém se a direcçaõ de ambos for de $B$ para $A$, entaõ será $x = \frac{\pm c - d}{V - v}$. Se elles andassem em direcçaõ contraria $A$ para $B$, e $B$ para $A$, far-se-hia a velocidade $v$ negativa, e o denominador seria $V + v$.

Exemplo. A velocidade do corpo $A$ he tal, que corre huma sexta parte da circumferencia em hum segundo, e a do corpo B tal que naõ corre senaõ huma oitava parte da circumferencia no mesmo tempo. Estaõ actualmente distantes huma quinta parte da mesma circumferencia, e ambos se movem para a parte $AB$. Pergunta-se, quando deveráõ estar na distancia de huma vigesima parte da circumferencia?

Temos pois neste caso $V = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{8}$, $V - v = \frac{1}{24}$, $d = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{20}$. Donde acharemos $x = 24\left(\frac{1}{5} \mp \frac{1}{20}\right)$, que dá os dous valores $3''\frac{3}{5}$, e $6''$, cujo meio arithmetico $4''\frac{4}{5}$ mostra o instante da conjunçaõ dos dous moveis.

Se com as mesmas velocidades girassem de $B$ para $A$, teriamos entaõ $x = 24\left(\pm\frac{1}{20} - \frac{1}{5}\right) = -3''\frac{3}{5}$, ou $= -6''$ valores negativos, que mostraõ ser já passado o instante que se procura.

Suppondo as velocidades na rasaõ de $1 : \frac{1}{12}$, e de $1 : \frac{1}{60}$, pelo primeiro caso se resolveráõ todas as questoens deste genero pelo que respeita ao movimento dos ponteiros das horas e dos minutos, e dos ponteiros dos minutos e dos segundos.

Quando naõ se trata de mais, que de saber o tempo do encontro de dous moveis quaisquer, que do modo sobredito andaõ á roda de hum circulo, de dous caminhantes, por exemplo, que caminhaõ pelo contorno de huma ilha, basta a Arithmetica ordinaria para resolver facilmentte esta especie de Problemas.

Huma ilha, por exemplo, tem 39 leguas de circuito. Dous

Dous caminhantes partem do mesmo ponto, e ao mesmo tempo, fazendo hum delles 14 leguas de jornada por dia, e o outro 11. Pergunta-se, quando se haõ de encontrar?

Por quanto o primeiro ganha 3 leguas por dia mais que o segundo, e tendo ganhado 39 deveráõ ambos encontrar-se em hum mesmo ponto do circuito, será isto no fim de 13 dias, porque temos $3^l : 39^l :: 1^d : x^d = 13^d$. Do mesmo modo se praticaria em todas as outras supposiçoens, que se podem fazer.

36 Todas as vezes que dous corpos se movem na mesma circumferencia, que póde conseguintemente tomar-se por unidade, he manifesto que se acharáõ realmente na mesma distancia $c$, quando o intervallo que os separar for $c$, $1+c$, $2+c$, $3+c$, ou geralmente $E+c$, entendendo por $E$ qualquer numero inteiro. Podemos pois generalizar as formulas precedentes; e teremos no primeiro caso $x = \frac{d \mp E \mp c}{V-v}$, e no segundo $x = \frac{\pm E \pm c - d}{V-v}$, donde se tira huma infinidade de soluçoens.

Deste modo, se na formula $x = \frac{\pm c - d}{V-v}$ fizessemos successivamente $c = 1 + \frac{1}{20}$, $c = 2 + \frac{1}{20}$ &c, teriamos achado os valores positivos $x = 20'' \frac{2}{5}$, $x = 24'' + 20'' \frac{2}{5}$; e assim por diante, aumentando sempre $24''$.

37 Probl. III. Tendo os mesmos corpos $A$ e $B$ entre si a distancia $d$ contada pela circumferencia $AB$: pergunta se, em que tempo se encontraráõ pela primeira vez, ou em geral pela vez $m$? (Fig. 2.).

A reposta naõ tem difficuldade. Porque he manifesto, que a sua distancia deve ser entaõ $m-1$; e por conseguinte, se $A$ que tem a maior velocidade for adiante de $B$ em ordem ao movimento, teremos $x = \frac{m-d}{V-v}$; e pelo contrario, se $A$ for no alcance de $B$, teremos $x = \frac{m-1+d}{V-v}$, por expressaõ do tempo do encontro.

Exemplo. Seja $V = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{8}$, $d = \frac{1}{5}$. O primeiro caso dará $x = 24m - \frac{24}{5}$, e o segundo $x = 24(m-1) + \frac{24}{5}$; e fazendo $m = 1$, acharemos que seraõ necessarios $19'' \frac{1}{5}$ para succeder o primeiro encontro no primeiro caso, e $4'' \frac{4}{5}$ no segundo.

38 Probl. IV. Tres corpos $A$, $B$, $C$ partem de hum mesmo ponto a descrever a circumferencia de hum mesmo circulo com as velocidades respectivas designadas por $v$, $v'$, $v''$. Pergunta-se, em que tempo se tornaráõ a ajuntar todos em hum mesmo ponto?

Seja $x$ o tempo procurado; $vx$, $v'x$, $v''x$ seraõ os espaços corridos no momento do encontro. Ora o maior destes espaços deve exceder a cada hum dos outros em hum numero inteiro de voltas; logo será $v'x - vx = E$, e $v''x - v'x = E'$. Onde notaremos, que o encontro geral dos tres corpos será quando os corpos $A$, $B$ se tiverem encontrado as vezes $E$, os corpos $B$ e $C$ as vezes $E'$, e os corpos $A$ e $C$ as vezes $E + E'$.

As duas equaçoens precedentes daraõ $x = \frac{E}{v' - v} = \frac{E'}{v'' - v'}$, e $\frac{v' - v}{v'' - v'} = \frac{E}{E'}$; logo se a fracçaõ $\frac{v' - v}{v'' - v'}$ depois de abbreviada aos termos mais simples se reduzir a $\frac{p}{q}$, teremos no primeiro encontro $E = p$, e $E' = q$, e no segundo $E = 2p$, $E' = 2q$ &c; logo $x = \frac{p}{v' - v}$ dará o instante do primeiro encontro geral dos tres corpos.

Exemplo. Supponhamos $v = \frac{1}{16}$, $v' = \frac{1}{4}$, $v'' = \frac{41}{80}$; Será $\frac{v' - v}{v'' - v'} = \frac{5}{7}$, $p = 5$, e $x = 26'' \frac{2}{3}$. Achar-se-haõ pois os tres corpos reunidos pela primeira vez no fim de de $26'' \frac{2}{3}$; mas eſte primeiro encontro geral ſerá o quinto particular de *A* com *B*, o ſeptimo de *B* com *C*, e o duodecimo de *A* com *C*.

Se algum dos corpos fizeſſe as ſuas voltas ao contrario dos outros, deveria fazer-ſe negativa a ſua velocidade nas equaçoens precedentes.

39 Eiſaqui como ſe póde diſcorrer, para dar pela Arithmetica ordinaria a ſoluçaõ deſta eſpecie de Problemas. *C* naõ corre ſenaõ a $\frac{1}{16}$ parte da circumferencia no tempo que *A* corre $\frac{41}{80}$; logo *A* ganha de avanço $\frac{9}{20}$ em cada ſegundo, e por conſeguinte eſtes dous corpos ſe encontraõ de $2'' \frac{2}{9}$ em $2'' \frac{2}{9}$. Do meſmo modo, naõ correndo *C* mais que $\frac{1}{16}$ em quanto *B* corre $\frac{1}{4}$, ganhará *B* ſobre *C* em cada ſegundo o adiantamento de $\frac{3}{16}$; logo os dous corpos *A* e *C* ſe encontraráõ de $5'' \frac{1}{3}$ em $5'' \frac{1}{3}$. Com o meſmo diſcurſo acharemos, que *A* e *B* concorreráõ no meſmo ponto de $3' \frac{17}{21}$ em $3'' \frac{17}{21}$. Ora para que eſtes tres periodos coincidaõ, iſto he, para que os tres corpos venhaõ a huma conjunçaõ geral, naõ temos mais que buſcar tres numeros inteiros que ſejaõ entre ſi como $2'' \frac{2}{9} : 3'' \frac{17}{21} : 5'' \frac{1}{3}$. Os mais pequenos ſaõ 5. 7. e 12. Logo o primeiro encontro geral ſerá o 5° encontro particular de *A* com *B*, ou o 7° de *B* com *C*, ou o 12° de *A* com *C*, como acima achámos. E o inſtante, em que ha de ſucceder, ſe determinará conſeguintemente multiplicando $5'' \frac{1}{3}$ por 5, ou $3'' \frac{17}{21}$ por 7,

 ou

ou $2'' \frac{2}{9}$ por 12, que se achará como acima ser no fim de $26'' \frac{2}{3}$.

40 Probl. V. Quatro moveis $A$, $B$, $C$, $D$ partem de hum mesmo ponto, e ao mesmo tempo, a descrever a circumferencia de hum circulo com as velocidades respectivas $v$, $v'$, $v''$, $v'''$, todas na mesma direcçaõ. Pergunta-se, quanto tempo haõ de gastar, para tornarem a encontrar-se todos em hum mesmo ponto?

Seja $x$ o tempo buscado; os espaços nelle corridos seraõ $vx$, $v'x$, $v''x$, $v'''x$. Donde teremos como no Problema antecedente as equaçoens $(v'-v)x = E$, $(v''-v')x = E'$, $(v'''-v'')x = E''$; e conseguintemente $x = \frac{E}{v'-v} = \frac{E'}{v''-v'} = \frac{E''}{v'''-v''}$; logo será $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{E}{E'}$, e $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{E}{E''}$.

Supponhamos agora, que tendo abbreviado a fracçaõ $\frac{v'-v}{v''-v'}$ aos termos mais simples se reduz a $\frac{p}{q}$, e que $\frac{v'-v}{v'''-v''}$ se reduz tambem a $\frac{p'}{q'}$. Entaõ será $E = ep$, e $E = e'p'$ (sendo tambem $e$, $e'$ numeros inteiros); logo $ep = e'p'$, e por conseguinte $\frac{e}{e'} = \frac{p'}{p}$. Logo, se reduzirmos a fracçaõ $\frac{p'}{p}$ á expressaõ mais simples $\frac{e}{e'}$, teremos primeiramente o valor de $e$, depois o de $E$, e finalmente o de $x = \frac{ep}{v'-v}$.

Exemplo. Seja $v = 1$, $v' = 1{,}11$, $v'' = 1{,}242$, $v''' = 1{,}2805$. Teremos $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{0{,}11}{0{,}132} = \frac{5}{6}$, e $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{0{,}11}{0{,}0385} = \frac{20}{7}$. Logo $p = 5$, $p' = 20$, $\frac{p'}{p} = 4$, $e = 4$, e em fim $x = \frac{4 \cdot 5}{0{,}11} = \frac{2000}{11} = 181'' \frac{9}{11}$. Seraõ pois necessa-

rios

ſios $3' 1'' \frac{9}{11}$, para que os quatro moveis venhaõ á primeira conjunçaõ geral.

O methodo ſerá o meſmo para hum numero maior de corpos, e para o caſo em que elles naõ partirem todos do meſmo ponto.

## *Theorica do Movimento Compoſto.*

41 IMaginemos que o corpo *A* (Fig. 3.) eſtá ſituado ſobre hum plano *ACa*, que ſe move uniformemente na direcçaõ *Aa*, e com huma velocidade tal, que a cada unidade de tempo caminha hum eſpaço igual á linha recta *Aa*. He evidente, que eſte corpo conſiderado relativamente ao plano *ACa* naõ tem movimento algum; mas ſendo viſto por hum obſervador immovel, poſto fóra do plano, achar-ſe-há que realmente ſe move com hum movimento igual, e parallelo ao movimento do dito plano.

Iſto poſto, conſideremos que qualquer potencia *P* obra ſobre o meſmo corpo, ſegundo a direcçaõ *PAC*, e que lhe imprime huma velocidade tal, que em cada unidade de tempo deva correr o eſpaço *AC*. Naõ póde duvidar-ſe, que em virtude deſta velocidade propria ha de achar-ſe o corpo ſobre o plano no ponto *C*, quando findar a primeira unidade do tempo. Mas como, em virtude do movimento do plano, a linha *AC* ſe adianta com hum movimento parallelo e uniforme para *ac*, e deve realmente coincidir com *ac* no fim da meſma unidade de tempo, eſtá claro que o ponto *C* cahirá ſobre o ponto *c*, e que participando o corpo *A* do movimento commum do plano deve achar-ſe em *c* no fim da primeira unidade de tempo.

Do meſmo modo ſe prova, que no fim de qualquer parte *T* da meſma unidade de tempo o corpo *A* animado da meſma velocidade *AC* ha de correr hum eſpaço proporcional $AB = T . AC$, em quanto o movimento commum tranſporta a linha *AB* parallelamente a ſi meſma por hum eſpaço $Aa' = Bb = T . Aa$; logo a linha *AB* coincidirá com *a'b*, e conſeguintemente ſerá *b* o lugar do corpo *A* no fim do tempo *T*. Mas he facil de ver, que todos os pontos *b* determinados deſta maneira ſe achaõ ſobre a meſma diagonal *Ac*, por quanto he $AB : Bb :: AC : Cc$; logo o corpo *A* deſcreverá realmente a diagonal *Ac*.

Mas

Mas ainda naõ temos dito tudo. O movimento do corpo $A$ pela diagonal $Ac$ deverá ser uniforme. Porque he $Ab : Ac :: AB : AC$; e substituindo em lugar de $AB$ o seu valor $T.AC$, será $Ab : Ac :: T.AC : AC :: T : 1$; logo será $Ab$ para $Ac$ como o tempo empregado em correr $Ab$ para o tempo empregado em correr $Ac$, e conseguintemente será uniforme o movimento do corpo A pela diagonal $Ac$ (n. 27.).

42 Por quanto hum corpo em descanço sobre hum plano movel tem toda a velocidade absoluta delle, he manifesto, que se hum corpo se mover uniformemente segundo a linha recta $QAa$ com a velocidade $Aa$, e receber no ponto $A$ da potencia $P$ huma velocidade $AC$ na direcçaõ $PAC$, ha de descrever uniformemente a diagonal $Ac$ de hum parallelogrammo formado sobre os lados $Aa$, $AC$, que representariaõ as velocidades do movel segundo as direcções $Aa$, $AC$, representando a diagonal $Ac$ a sua nova direcçaõ, e velocidade.

43 Mas, como a velocidade segundo a direcçaõ $Aa$, seja qual for a sua causa, póde considerar-se como effeito de huma potencia $Q$, que obra ao mesmo tempo que a potencia P, cujo effeito se dirige segundo $AC$; e como estas duas potencias, ou estas duas forças saõ proporcionais ás velocidades, que ambas haveriaõ de produzir separadamente no movel, se ellas naõ obrassem em commum: està claro, que as podemos substituir em lugar das sobreditas velocidades, representando-as da mesma maneira pelos lados de hum parallelogrammo, que daqui por diante chamaremos *o parallelogrammo das forças*.

Huma vez que forem bem comprehendidas todas estas cousas, naõ haverá difficuldade em admittir, e fixar na lembrança o principio seguinte, cujo uso he de summa frequencia e utilidade em toda a Mechanica.

## *Principio do Movimento Composto.*

44 *Todas as vezes que duas potencias obrarem ao mesmo tempo, e sobre o mesmo movel, por direcções differentes; o movel descreverá a diagonal de hum parallelogrammo formado sobre as direcções das potencias, com os lados proporcionais ás mesmas potencias.*

*Con-*

## *Consequencias que resultaõ deste Principio.*

45 DUas potencias P e Q, representadas por *AB* e *AC* ( Fig. 4. ), produzem pois o mesmo effeito que huma só potencia *R*, representada por *AD* diagonal do parallelogrammo *ABCD.* Podemos chamar P e Q *potencias componentes*, e R *potencia resultante.* Isto posto teremos sempre, em semelhante caso, esta serie de proporções muito conhecida na Mechanica:

$$P : Q : R : : AB : AC : AD.$$

46 Como no triangulo *CAD* temos por outra parte $AC : CD : AD : : sen\ ADC : sen\ DAC : sen\ ACD : : sen\ DAB : sen\ DAC : sen\ CAB$; será tambem $P : Q : R : : sen\ DAB : sen\ DAC : sen\ CAB$; consequencia muito util, da qual apprendemos, que *qualquer destas tres potencias he sempre como o seno do angulo comprehendido pelas direcções das outras duas.*

47 Donde se segue, que sendo os angulos *DAB*, *DAC* infinitamente pequenos, e confundindo-se entaõ os senos respectivos com os arcos que lhes servem de medida, teremos $sen\ ( DAB + DAC )$, ou $sen\ CAB = sen\ DAB + sen\ DAC$, e conseguintemente $R = P + Q$. Logo *quando duas potencias obraõ pela mesma linha, a resultante terá a mesma direcçaõ, e será igual á soma de ambas; e se obrarem por direcções contrarias, a resultante será igual á sua differença.*

## *Applicações do Principio precedente.*

48 PElo principio do movimento composto naõ sómente póde determinar-se a resultante de duas potencias, que obraõ juntamente sobre o mesmo ponto de hum corpo; mas tambem he facil de se determinar, sendo maior o numero das potencias. Para este effeito, escolher-se-haõ duas dellas, quaisquer que sejaõ, e se buscará a sua resultante pelo principio geral. Depois se passará a comparar esta primeira resultante com outra qualquer das potencias componentes, e se achará huma segunda resultante, a qual por si só terá o lugar das tres potencias já comparadas. Logo comparando-a com a quarta potencia, e continuando assim por diante, finalmente se chegará a determinar a resultante geral de todas as potencias propostas.

49 Por huma resoluçaõ opposta á composiçaõ precedente,

te, facilmente podemos tornar a achar as potencias simples; que tem concorrido, ou podiaõ concorrer a formar a ultima resultante que temos determinado. Muitas vezes nos ha de ser necessario considerar qualquer potencia, como resultante de outras duas representadas pelos lados de hum parallelogrammo, do qual ella representará a diagonal, e substituir em seu lugar estas forças lateraes, que lhe saõ equivalentes, porque produzem absolutamente o mesmo effeito. Esta composiçaõ, e resoluçaõ das forças saõ os dous recursos principaes de toda a Statica.

50 Se as potencias que obraõ sobre o mesmo corpo naõ forem todas applicadas a hum mesmo ponto, eisaqui o methodo de determinar a sua resultante.

Primeiramente devemos notar, que sendo o effeito de qualquer potencia *P* (Fig. 5.) dar a todas as partes de hum corpo *M* huma velocidade igual, que as faça mover por direcçoens parallelas á da mesma potencia, como suppomos aqui, pouco importa o ponto da recta *PK* em que ella exercita a sua acçaõ, ou seja por meio de huma alavanca, ou de huma corda, ou de qualquer outro instrumento. A unica condiçaõ necessaria, para que ella produza constantemente o mesmo effeito, consiste em supporlhe sempre a mesma força, e a mesma direcçaõ *PK*, seja qual for o ponto desta direcçaõ, em que ella exercita a sua acçaõ.

Isto supposto, consideremos as tres potencias *P*, *Q*, *S* (Fig. 6.) actuando juntamente sobre o corpo *M* pelas direcções *Pp*, *Qq*, *Ss* situadas todas em hum mesmo plano. Produzaõ-se *Pp* e *Qq* até concorrerem no ponto *H*; e porque as potencias *P* e *Q* se podem considerar applicadas no ponto *H*, será a resultante dellas *HK*, diagonal do parallelogrammo formado sobre os lados *HP*, *HQ*, que representaõ as velocidades, que cada huma das duas forças communicaria separadamente ao movel.

Agora produzindo a direcçaõ da resultante *HK* até encontrar no ponto *I* a direcçaõ da potencia *S*, pela mesma rasaõ consideraremos a resultante applicada em *I*, e representada pela recta *IL*, que seja igual a *HK*. E como no mesmo ponto *I* se julga tambem applicada a potencia *S* representada pela recta *IS'*, naõ falta mais do que completar o parallelogrammo *S'ILG*, para determinar o valor, e a direcçaõ da resultante *IG*. Em virtude pois das poten-

cias

cias $P$, $Q$, $S$ tomará o movel huma velocidade igual, e parallela a $IG$, como se experimentasse a acçaõ de huma só potencia representada por esta ultima resultante.

51 Por este meio poderemos sempre determinar a resultante de quantas forças quizermos, e resolver tambem qualquer força em muitas outras, que tenhaõ certas condições, sem as quais seria indeterminado este ultimo Problema.

Mas ainda que o methodo precedente naõ exige mais do que huma construcçaõ geometrica bem simples, naõ he com tudo proprio para ser posto em calculo. Por isso passaremos a outro, que encherá melhor o nosso objecto.

## *Dos Momentos, e dos seus Usos.*

52 CHama-se *Momento* de huma potencia o producto da mesma potencia pela distancia da sua direcçaõ a qualquer ponto fixo tomado arbitrariamente. Como esta especie de productos tem grandissimo uso em todas as partes da Mechanica; pareceu mais simples designallos pelo unico termo de *momentos*, do que repetir de cada vez a sua definiçaõ.

53 No plano do parallelogrammo $ABDC$ (Fig. 7.) tome-se hum ponto fixo $M$, do qual se conduzaõ para a diagonal $AD$, e para os lados $AB$, $AC$ produzidos, se for necessario, as perpendiculares respectivas $MP$, $MP'$, $MP''$. Seja o angulo $BAD = a$, o angulo $DAC = b$, $AP = x$, $MP = y$, $MP' = y'$, $MP'' = y''$.

Primeiramente teremos o angulo $MAP' = MAP - a$; logo $sen\, MAP'$, ou $\frac{y'}{AM} = sen\, MAP \cdot cos\, a - sen\, a \cdot cos\, MAP = \frac{y}{AM} cos\, a - \frac{x}{AM} sen\, a$; logo será $y' = y\, cos\, a - x\, sen\, a$.

Depois teremos o angulo $MAP'' = b + MAP$, donde concluiremos da mesma maneira $y'' = y\, cos\, b + x\, sen\, b$. Eliminando $x$ destas duas equações, teremos $y''\, sen\, a + y'\, sen\, b = y\, (\, sen\, a\, cos\, b + sen\, b\, cos\, a\,) = y\, sen\, (\, a + b\,)$: porem $sen\, a : sen\, b : sen\, (\, a + b\,) :: AC : AB : AD$; logo $AD \cdot MP = AB \cdot MP' + AC \cdot MP''$.

Se o ponto $M$ for comprehendido entre os lados do angulo

gulo $BAD$ (Fig. 8.), he claro, que a diftancia $MP'$ fe torna negativa. Aſſim póde o ultimo refultado applicar-fe aos dous cafos, efcrevendo-o defta maneira: $AD.MP = AC.MP'' \pm AB.MP'$.

54 Donde fe fegue, que podendo fempre duas potencias $P$, $Q$, com a fua refultante $R$, exprimir-fe pelos lados, e diagonal de hum parallelogrammo $ABCD$ (Fig. 9.), fe de qualquer ponto $M$ tomado no plano do mefmo parallelogrammo fe conduzirem perpendiculares fobre as direcções das tres forças; o producto da refultante pela perpendicular $MP$ (que mede a diftancia da fua direcçaõ ao ponto $M$) he igual á foma, ou á differença dos productos refpectivos das duas componentes pelas perpendiculares $MP'$, $MP''$ conduzidas do mefmo ponto $M$ fobre as fuas direcções refpectivas.

Toma-fe a foma dos ditos productos, quando o ponto $M$ eftá fóra do angulo $BAD$; e a differença, quando eftá dentro. Porém eftes dous productos faõ os momentos refpectivos das potencias componentes, e o outro producto he o momento da fua refultante. Logo podemos concluir geralmente, que *o momento de qualquer força refultante he igual á foma, ou á differença dos momentos das duas componentes, conforme fe tomar o ponto fixo fóra, ou dentro do angulo por ellas comprehendido.*

55 Eftes dous cafos fe diftinguem fempre com muita facilidade, imaginando o parallelogrammo das forças de tal forte unido e fujeito ao ponto $M$, que naõ poffa girar fenaõ ao redor delle. Porque entaõ, fe o ponto $M$ naõ for comprehendido dentro do angulo das potencias $BAD$, ellas tenderáõ a fazer girar para a mefma parte o plano com todo o fyftema das linhas nelle defcritas. Mas fe o ponto $M$ fe tomar dentro dos lados do angulo $BAD$, as duas potencias tenderáõ a fazer girar todo o fyftema para partes contrarias. Póde logo dizer-fe, que o momento da refultante he igual á foma, ou á differença dos momentos das duas componentes, conforme eftas tendem a fazer girar o fyftema para a mefma parte, ou para partes contrarias.

56 Em geral: *Qualquer que feja o numero, e a direcçaõ das potencias, o momento da refultante fempre ferá igual á foma dos momentos das componentes que tendem a fazer girar o fyftema para huma parte, menos a foma dos momentos daquellas que tendem a fazello girar para a parte contraria.*

Efta

Esta he huma das Proposições mais uteis da theorica dos momentos. Alem de que ella se segue immediatamente do que acabamos de mostrar, ainda se póde fazer mais sensivel por hum raciocinio bem simples, como he o seguinte.

Duas potencias quaisquer das componentes tem huma resultante, cujo momento he igual á soma, ou differença dos momentos de ambas ellas. Esta resultante sendo comparada com huma terceira componente dá huma segunda resultante, cujo momento he igual á soma ou differença dos momentos das tres componentes, e assim por diante. Logo o momento da resultante geral he igual á soma, ou differença dos momentos de todas as componentes; ou, que vem a ser o mesmo, o momento da resultante geral he igual á soma dos momentos que tendem a fazer girar o systema para huma parte, menos a soma dos momentos que tendem a fazello girar para a parte contraria.

57 Logo, *se o ponto fixo* M *se achar na resultante, a soma total dos momentos das componentes será nenhuma.* Quer dizer, que entaõ a soma dos momentos das forças que tendem a fazer girar para huma parte, he igual á soma dos momentos das que tendem a fazer girar para a parte contraria; conclusaõ, que he necessario naõ perder nunca de vista.

Vejamos agora, como a theorica dos momentos póde ter uso na composiçaõ das forças; e para começarmos pelas applicações mais simples, consideremos primeiro duas forças parallelas, que obraõ no mesmo plano.

58 Sejaõ pois P e Q as potencias propostas (Fig. 10.), e seja $M$ o ponto fixo, ao qual se reportaõ os seus momentos. Conduzindo a perpendicular $Mprq$, e supposndo que ambas as potencias obraõ para a mesma parte, teremos geralmente $R \cdot Mr = P \cdot Mp + Q \cdot Mq$. Se reportassemos os momentos a outro qualquer ponto fixo $m$, tomado sobre a mesma linha $Mq$, teriamos igualmente $R \cdot mr = P \cdot mp + Q \cdot mq$. Logo tirando esta ultima equaçaõ da primeira, e dividindo por $Mm$, acharemos $R = P + Q$.

59 Este resultado he muito util para a composiçaõ das forças parallelas, e póde enunciar-se desta maneira: *A resultante das forças parallelas, que obraõ para a mesma parte, he igual á sua soma.*

60 Do mesmo modo se prova, que *a resultante das for-*

*ças*

*ças parallelas, que obraõ para partes contrarias, he igual á sua differença*; e isto naõ somente estando o ponto fixo, ao qual se reportaõ os momentos, fóra do intervallo que separa as direcções das forças, mas tambem dentro dellas, como neste exemplo. Porque sem embargo de que achando-se o dito ponto, como v. gr. o ponto $O$, dentro das direcções, naõ podem entaõ as forças $P$ e $Q$ actuar para partes oppostas sem tender a fazer girar a linha $pOq$ para a mesma parte, a resultante naõ deixa por isso de ser igual á sua differença. E por conclusaõ, este ultimo caso nos adverte, que naõ devemos indifferentemente confundir as forças, que tendem a fazer girar para a mesma parte, com as forças que obraõ para a mesma parte.

61 Do que temos dito se segue, que se o ponto $M$ coincidir com o ponto $p$, teremos $R.pr$, ou $(P+Q)pr = Q.pq$; donde tiraremos $P.pr = Q.qr$, e $P:Q::qr:pr$. Logo *as forças saõ entre si na rasaõ inversa das suas distancias á resultante*. O mesmo se acharia, reportando os momentos ao ponto $r$ da mesma resultante.

62 Por quanto no caso proposto temos estas duas equações $P.pr = Q.qr$, e $R.pr = Q.pq$, dellas tiraremos $P:Q:R::qr:pr:pq$. Donde se deduzem as consequencias seguintes:

I. Que todos os pontos $r$ da resultante estaõ respectivamente em distancias iguais dos pontos que lhes correspondem nas direcções das suas componentes; e por conseguinte, que *a direcçaõ da resultante he parallela ás direcções das componentes*.

II. Que póde qualquer das tres potencias $P$, $Q$, $R$ representar-se pela linha comprehendida pelas direcções das outras duas. Por exemplo, sendo $P$ representada por $qr$, será $Q$ representada por $pr$, e $R$ por $pq$.

III. Que sendo dadas as potencias $P$, $Q$ com as suas direcções, sempre poderá facilmente achar-se o ponto $r$, pelo qual deve passar a sua resultante, por meio da equaçaõ $(P+Q)pr = Q.pq$, que dá a distancia procurada $pr = \frac{Q.pq}{P+Q}$.

63 Supponhamos agora qualquer numero de forças parallelas, as quais todas estejaõ situadas no mesmo plano. Claro está, que a sua resultante he igual á soma daquellas que

que obrarem para huma parte, menos a ſoma daquellas que obrarem para a parte contraria. E porque o momento da meſma reſultante he igual á ſoma dos momentos de todas as componentes, *a diſtancia da ſua direcçaõ a hum ponto dado ſe achará dividindo a ſoma dos momentos das forças componentes pela meſma reſultante, ou pela ſoma das forças, que vem a ſer o meſmo.* Porém he neceſſario ter bem na lembrança, que ſe entre eſtas forças houver algumas, que tendaõ a fazer girar o ſyſtema ao contrario das outras, devem tomar-ſe os ſeus momentos com ſignais negativos; e ſe houver alguma, que obre para parte contraria ás outras, deve tambem eſcrever-ſe com ſignal negativo na ſoma total das forças.

O que acabamos de dizer, he baſtante para determinar a reſultante de quantas forças parallelas quizermos, com tanto que todas eſtejaõ ſituadas no meſmo plano. Paſſemos pois ao methodo de a determinar, quando as forças ſaõ obliquas, ſempre porém no meſmo plano.

64 Supponhamos quatro forças $P$, $Q$, $S$, $T$ (Fig. 11.), que repreſentaremos pelas rectas obliquas $Pp$, $Qq$, $Ss$, $Tt$, as quais indicaõ juntamente a direcçaõ das ſuas acções reſpectivas. Tome-ſe no plano das meſmas forças qualquer ponto $C$, e por elle ſe conduzaõ as rectas $CP''$, $Cp''$ perpendiculares entre ſi. Depois diſto reſolvendo cada huma das forças (n. 49.), como $Pp$, em outras duas $PP'$, $Pp'$ reſpectivamente parallelas ás perpendiculares $CP''$, $Cp''$, teremos por tudo oito forças, quatro das quais ſeraõ parallelas a $CP''$, e outras quatro a $Cp''$.

A reſultante das quatro forças parallelas a $Cp''$ obra de alto para baixo, e o ſeu valor he $TT' + SS' + QQ' - PP'$, e a ſua direcçaõ póde determinar-ſe pela diſtancia que deve ter a reſpeito da linha $Cp''$, a qual diſtancia ſe exprime geralmente por - - - - - - - - - - -

$$\frac{SS' . Ss'' + QQ' . Qq'' - PP' . Pp'' - TT' . Tt''}{TT' + SS' + QQ' - PP'}.$$

E a reſultante das forças parallelas a $CP''$ obra da direita para a eſquerda, cujo valor he $Tt' + Ss' - Qq' - Pp'$; e a diſtancia da ſua direcçaõ á linha $CP$ he - - -

$$\frac{Tt' . TT'' + Ss' . SS'' - Qq' . QQ'' - Pp' . PP''}{Tt' + Ss' - Qq' - Pp'}.$$

Seja

Seja pois reprefentada por $CR''$ a diftancia da primeira refultante á linha $Cp''$, e por $Cr''$ a diftancia da fegunda á linha $CP''$. Se completarmos o rectangulo $R''Cr''R$, teremos $R''R$ por direcçaõ da primeira refultante, e $r''R$ por direcçaõ da fegunda. Eftas duas refultantes uniráõ pois os feus esforços no ponto de interfecçaõ $R$; e confeguintemente fe tomarmos de huma parte $RR' = TT' + SS' + QQ' - PP'$, e da outra $Rr' = Tt' + Ss' - Qq' - Pp'$, he evidente que completando o rectangnlo $r'RR'r$, a diagonal $Rr$ dará em fim o valor, e a direcçaõ, da refultante geral que bufcamos

Naõ he logo difficultofo o achar a refultante de quantas forças quizermos, ou fejaõ parallelas, ou obliquas, com tanto que todas fe fupponhaõ exiftentes no mefmo plano. Faltanos determinar a mefma refultante, quando as potencias de que fe compoem eftaõ em planos differentes.

65 A fim de procedermos fempre do mais fimples para o mais compofto, primeiramente fupporemos, que as potencias naõ faõ mais do que tres, que actúaõ todas para a mefma parte, e que as fuas direcçóes faõ todas parallelas, ainda que exiftentes em tres planos differentes.

Sejaõ pois $P$, $Q$, $S$ eftas tres potencias (Fig. 12.); e feja $TCP'$ hum plano perpendicular ás fuas direcçóes (He neceffario fuprir aqui hum pouco pela imaginaçaõ ao que pelas figuras naõ póde reprefentar-fe, fenaõ imperfeitamente. Póde, por exemplo, conceber-fe hum prifma triangular recto, cujas tres faces feraõ os planos das potencias, e huma das bafes será o plano perpendicular $TCP'$). Tendo tomado nefte plano qualquer ponto $C$, por elle fe conduzaõ as linhas $CT$, $CP'$ perpendiculares entre fi.

Ifto pofto, a refultante $M$ das duas potencias $Pp$, $Qq$ será igual á fua foma, exiftirá no feu mefmo plano, será parallela a cada huma dellas, e paffará a huma diftancia $PM = \frac{Q}{P+Q} PQ$.

Do mefmo modo, a refultante $R$ das potencias $Mm$, $Ss$; será igual á fua foma $P+Q+S$, eftará no plano de ambas, será parallela a cada huma dellas, e paffará a huma diftância $MR = \frac{S}{P+Q+S} MS$.

66 Donde fe fegue em geral, que *a refultante de qual-*

*quer*

*quer numero de forças parallelas, situadas em quaisquer planos, he igual á sua soma, quando ellas obraõ todas para a mesma parte.*

Para determinar a sua posiçaõ, dos pontos $P, M, Q, R, S$ se conduziráõ outras tantas perpendiculares a $CP'$, e fazendo $CS' = a$, $CQ' = b$, $CP' = c$, teremos $P'Q' = c - b$, $Q'S' = b - a$, $P'S' = c - a$. Isto posto, as parallelas $PP'$, $MM'$, $QQ'$, $RR'$, $SS'$ daraõ em primeiro lugar $P'M' : P'Q' :: PM : PQ :: Q : P + Q$; logo substituindo o valor de $P'Q'$, teremos $P'M' = \frac{Q(c-b)}{P+Q}$.

Em segundo lugar daraõ $S'R' : S'M' :: SR : SM :: P + Q : P + Q + S$; logo será $S'R' = \frac{S'M'(P+Q)}{P+Q+S}$ $= \frac{P(c-a)+Q(b-a)}{P+Q+S}$; logo $CR' = a + S'R' =$ $\frac{aS+bQ+cP}{P+Q+S} = \frac{P.CP'+Q.CQ'+S.CS'}{P+Q+S}$.

Supponhamos agora huma recta $CV$ parallela ás direcções das potencias, e teremos a distancia $RR''$ da resultante a hum plano $VCT$ (o qual se acha necessariamente parallelo ás mesmas direcções) dividindo a soma dos momentos relativos ao dito plano pela soma das forças.

Procedendo da mesma fórma conheceremos a distancia $RR'$ da mesma resultante a outro plano $VCP'$ parallelo ás direcções das potencias, e perpendicular ao primeiro. Será logo determinado o ponto $R$, por onde deve passar a resultante, cuja posiçaõ será conseguintemente determinada. Porém já temos calculado o seu valor; logo temos conhecido, e determinado a resultante de qualquer numero de forças, que actûaõ em planos differentes, sendo todas parallelas entre si.

67 Em fim, se as forças forem obliquas (Fig. 13.), imaginaremos conduzidas de qualquer ponto $A$ tres linhas $AB$, $AC$, $AD$ perpendiculares entre si (representem-se como os tres lados, ou as tres esquinas, que em hum cubo, por exemplo, terminaõ no vertice do mesmo angulo solido); e supponde que $Pp$ he huma das potencias obliquas, resolvella-hemos em outras duas, das quais huma $PP'$ seja parallela ao plano $ABD$, e a outra $Pp'$ parallela ao plano $DAC$.

Do

Do mesmo modo resolveremos esta segunda potencia $Pp'$, em outras duas $Pp''$, $Pp'''$, huma parallela a $AC$, e a outra a $AD$. Assim teremos em lugar da força $Pp$ tres forças, cujas direcções seraõ respectivamente parallelas a tres linhas dadas de posiçaõ.

Depois de ter assim resolvido cada huma das forças propostas em outras tres parallelas ás mesmas tres linhas, pelo que já temos dito buscaremos a resultante particular de todas as forças parallelas á recta $AB$, depois a das forças parallelas a $AD$, e em fim a das forças parallelas a $AC$. Teremos logo por ultima analyse para determinar a resultante geral das tres particulares, situadas sim em planos differentes, mas parallelas entre si; circunstancia, que finalmente reduz este caso aos termos do precedente.

68 Seguindo pois este methodo, podemos reduzir qualquer numero de forças propostas a tres forças respectivamente parallelas a tres linhas perpendiculares entre si. Poderiaõ tambem reduzir-se a duas, naõ fazendo de cada huma mais do que huma simples resoluçaõ. Mas naõ he possivel reduzillas geralmente a huma só, como se pratica nas forças que existem todas no mesmo plano.

## *Reflexões sobre as materias precedentes.*

69 I. NAõ ha cousa mais ordinaria na natureza, que os exemplos do movimento composto. O batel, que atravessando a corrente de hum rio descahe da linha, por onde o leva o impulso dos remos; a chama, e o fumo, que o menor assopro aparta da direcçaõ vertical; a chuva, a neve, e a saraiva, que cahem mais, ou menos obliquamente, conforme o vento he mais, ou menos impetuoso; os balanços, que se experimentaõ em duas carruagens, que se embaraçaõ; o risco a que se expoem o cavalleiro, que salta do cavallo no meio da carreira; o peixe, que batendo com a cauda para partes encontradas se adianta pela direcçaõ media: tudo nos offerece applicações sem numero do fecundissimo principio da composiçaõ das forças.

Pelo discurso desta obra se verá tambem de que utilidade he a sua resoluçaõ, cujos exemplos naõ saõ menos frequentes, a qual na medida das forças obliquas he sobre tudo muito necessaria.

70 II. Naõ he ſem raſaõ, que na Mechanica ſe diſtinguem duas eſpecies de movimento, *abſoluto*, e *relativo*. Saõ muito differentes hum do outro, como ſe póde julgar pelo exemplo ſeguinte.

O mareante, que dorme ſocegadamente na ſua embarcaçaõ, eſtá ſem duvida em deſcanço a reſpeito das differentes partes do navio; mas o ſangue, que lhe circula inceſſantemente pelas veias e arterias, realmente ſe move a reſpeito delle. Tambem ſe move a reſpeito dos objectos ſituados fóra da embarcaçaõ, de cujo movimento participa. Será logo o movimento do ſangue produzido por duas cauſas ſimultaneas, das quais huma he a acçaõ do coraçaõ, e do ſyſtema arterioſo, e a outra o impulſo que move o navio. Eſtas duas forças produziráõ primeiramente hum movimento compoſto no ſangue do mareante.

Mas ſe elle acorda, ſe corre pelo convéz, ſe ſobe, ou deſce pelas enxarcias, eiſaqui hum terceiro movimento, do qual participará igualmente o ſangue. Se o mar he tempeſtuoſo, eiſahi quarto movimento, procedido dos balanços do navio. Se a terra ſe move ſobre o ſeu eixo, eiſahi hum quinto; e ſe ella alem diſſo he tranſportada pela vaſta circumferencia da Ecliptica, ſe o ſeu eixo experimenta nutações, ſe a Ecliptica meſma tem movimento proprio relativamente ao eſpaço abſoluto, ſe as correntes particulares deſviaõ o navio da ſua derrota, e ſe a todas eſtas cauſas ſe ajuntarem outras que talvez ignoramos, he evidente que o movimento abſoluto do ſangue do mareante ſerá compoſto de todos eſtes movimentos particulares. E quem poderá dizernos, qual he a ſua intenſaõ, qual a direcçaõ, e por conſeguinte qual deve ſer a ſua influencia?

71 III. Por eſta ſimples expoſiçaõ he facil de ver, que naõ ha no mundo hum ſó movimento abſoluto, que conheçamos com alguma apparencia de exactidaõ; e iſto por falta de objectos abſolutamente immoveis, ſituados fóra naõ ſómente da terra, mas de tudo o que fórma o ſyſtema ſolar, aos quais, como a pontos fixos e invariaveis, pudeſſemos reportar todos os movimentos expoſtos aos noſſos ſentidos.

He verdade, que as eſtrellas fixas nos ſervem de pontos de comparaçaõ, porque ellas nos parecem conſervar entre ſi diſtancias inalteraveis. Mas póde ſer que o naõ julgemos aſſim, ſenaõ por huma conſequencia daquella illuſaõ taõ natural, que nos move a crer que a embarcaçaõ em que eſtamos

mos naõ tem movimento algum, porque naõ vemós bulir-se nada de quanto nos rodeia. Póde ser tambem que aquelles astros tenhaõ movimentos taõ compostos como os nossos, e que a prodigiosa distancia que nos separa faça as suas variações insensiveis aos nossos olhos. Sobre isso ha mais do que simples conjecturas, depois que os Astronomos modernos se tem aperfeiçoado tanto na arte de observar.

72 IV. Em conclusaõ, as leis do movimento naõ seriaõ menos invariaveis, no caso de suppormos em movimento o mesmo espaço, no qual ellas tem o seu effeito; porque todos os movimentos particulares se executariaõ da mesma maneira. Que huma embarcaçaõ navegue a todo o panno, que esteja ancorada, ou encalhada sobre hum banco de areia, o piloto com a mesma facilidade traçará as linhas, e figuras necessarias para a determinaçaõ da sua derrota, e os marinheiros igualmente faraõ as manobras convenientes. Que a terra seja transportada pelo movimento annuo, que róde sobre o seu eixo pelo movimento diurno, ou que esteja perfeitamente immovel, tudo he indifferente pelo que toca á percussaõ dos corpos, e ao equilibrio das potencias, de que havemos de calcular os effeitos. Os movimentos relativos saõ os unicos, que nos interessaõ. Passemos ao ultimo principio geral da Mechanica.

## *Theorica do Equilibrio.*

73 O Equilibrio, como sabe todo o mundo, resulta do esforço mutuo, que as potencias iguais, e oppostas fazem humas contra outras. Se hum corpo, por exemplo, he sollicitado ao movimento por duas forças absolutamente iguais, e diametralmente oppostas, he evidente que deve ficar immovel, porque naõ póde obedecer com preferencia a nenhuma das ditas impressões. Entaõ as forças, que o sollicitaõ ficaõ em equilibrio, e assim se conservariaõ para sempre, se outras forças naõ viessem a terminar esta especie de combate.

74 Do mesmo modo, se duas massas iguais animadas de igual velocidade por direcções oppostas vierem a encontrar-se huma com a outra, devem necessariamente ficar em descanço depois da collisaõ, porque nenhuma dellas poderá prevalecer sobre a outra. Fazemos aqui abstracçaõ de todas as qualidades puramente accessorias da materia, e por

isso

isso suppomos as massas destituidas de toda a elasticidade.

75 O mesmo seria no caso de que duas massas desiguais $M$, $m$ viessem a encontrar-se de partes oppostas com as velocidades $V$, $v$ reciprocamente proporcionais a $M$, $m$. Porque entaõ as quantidades de movimento seriaõ iguais (n. 22.), e deveriaõ conseguintemente contrabalançar-se igualmente, em perfeito equilibrio.

Por outra parte, podemos reduzir este segundo caso ao primeiro. Porque supponhamos a velocidade $V$ do corpo $M$ dupla da velocidade $v$ do corpo $m$; mas ao mesmo tempo a massa deste dupla da massa daquelle. Logo poderá considerar-se o corpo $m$ como partido em duas massas, huma anterior, outra posterior, cada huma dellas igual á do corpo $M$, e cada huma animada com a mesma velocidade commua $v$. Mas em lugar desta velocidade podemos substituir na parte anterior a velocidade $2v$ para diante, e a velocidade $v$ para traz; e por esta decomposiçaõ, que naõ he nem sem exemplo, nem sem utilidade, a parte anterior animada da velocidade $2v$ para diante fará equilibrio ao corpo $M$ (por quanto tem a mesma massa, e a mesma velocidade que elle), ao mesmo tempo que animada da velocidade $v$ para traz fará equilibrio com a parte posterior, pela mesma rasaõ; logo o todo ficará em equilibrio.

Mas para generalizar hum pouco este exemplo, supponhamos que as duas massas $M$, $m$ saõ entre si como dous numeros inteiros quaisquer $E$, $e$. Teremos pois $M = \frac{mE}{e}$, e $v = \frac{VE}{e}$, ou $\left(\text{fazendo } \frac{m}{e} = p, \text{ e } \frac{V}{e} = q\right) M = Ep$, e $v = Eq$. Porém em lugar da massa $M = Ep$ animada da velocidade $V = eq$, podemos substituir hum numero $E \,.\, e$ de massas $p$ animadas da velocidade $q$; e do mesmo modo em lugar da massa $m = ep$ animada da velocidade $v = Eq$ podemos substituir hum numero $E \,.\, e$ de massas $p$ animadas da velocidade $q$. Logo haverá geralmente equilibrio na hypothese presente entre dous corpos quaisquer, todas as vezes que as suas massas $M$, $m$ tiverem entre si huma rasaõ racional.

Este equilibrio naõ deixará de ter lugar no mesmo caso de suppormos incommensuravel a rasaõ das duas massas, por quanto será sempre possivel exprimir esta rasaõ em nume-

 ros

ros racionais de maneira, que o erro ſeja menor que qualquer aſſignavel quantidade. Logo, quando as maſſas ſaõ reciprocamente como as velocidades em dous moveis, que actûaõ hum contra o outro por direcções diametralmente oppoſtas, ſempre haverá equilibrio. Já temos moſtrado, que o deve haver tambem, quando as maſſas, e as velocidades oppoſtas ſaõ iguais. Logo deve ter-ſe por inconteſtavel a Propoſiçaõ ſeguinte.

## *Principio do Equilibrio.*

76 *Dous corpos fazem equilibrio entre ſi, todas as vezes que, ſendo as direcções diametralmente oppoſtas, as quantidades de movimento forem iguais.*

## *Conſequencias que reſultaõ deſte Principio.*

77 I. Se dous corpos $M$, $m$ (Fig. 14.) actuarem hum contra o outro por meio de huma alavanca inflexivel, ou, ſe unidos por hum fio incapaz de extenſaõ, tenderem a ſeparar-ſe hum do outro, com quantidades de movimento iguais, haverá neceſſariamente equilibrio entre elles: porque entaõ a ſua acçaõ reciproca ſerá independente da diſtancia $Mm$.

78 II. Se de tres corpos $M'$, $M$, $m$ (Fig. 15.), ligados ao meſmo fio, os dous ultimos tirarem para a parte contraria á do corpo $M'$, ſerá neceſſario para haver equilibrio, que a quantidade de movimento do corpo $M'$ ſeja igual á ſoma das quantidades de movimento dos outros dous.

79 III. Em geral, ſeja qual for o numero dos corpos, que atados pelo meſmo fio, ou ligados pela meſma vara, actuarem huns contra os outros, todo o ſyſtema ficará em equilibrio, ſe a ſoma das quantidades de movimento daquelles que tiraõ para huma parte for igual á ſoma das quantidades de movimento daquelles que tiraõ para a parte contraria.

80 IV. E porque as potencias ſe medem pelas quantidades de movimento, que ellas ſaõ capazes de produzir em maſſas dadas, ſegue-ſe que actuando quaiſquer potencias mutuamente humas contra as outras, devem guardar equilibrio em todos os caſos, em que a ſoma das que obrarem para huma parte for igual á ſoma das que fizerem o ſeu esforço para a parte oppoſta.

81 V.

81 V. Logo haverá sempre equilibrio entre qualquer numero de potencias, sejaõ quais forem as suas direcções, todas as vezes que a resultante geral de todas se reduzir a nada.

Os principios, que até agora temos explicado nesta Introducçaõ, podem ser considerados como leis gerais, que se derivaõ unicamente da simples existencia da materia, e do movimento, fazendo abstracçaõ de toda a hypothese physica. Estas leis teriaõ pois lugar na natureza, se naõ recebessem innumeraveis modificações de huma grande multidaõ de obstaculos.

Vejamos agora até que ponto podem estes obstaculos influir em tudo o que respeita ao equilibrio, e ao movimento. Para procedermos com ordem, naõ examinaremos as condições do equilibrio nas Maquinas, senaõ depois de havermos tratado com miudeza da Theorica dos centros de gravidade, que he de muita importancia. A' discussaõ destes dous objectos saõ destinadas as duas secções da Statica. A primeira contém os methodos, e as formulas necessarias para determinar em todos os casos o centro de gravidade. E a segunda tem por fim a descriçaõ, as propriedades, o calculo, e os usos das Maquinas principais.

Depois de termos assim discutido na Primeira parte desta Obra o que respeita ao equilibrio, trataremos na Segunda do que pertence ao movimento.

PRI-

# PRIMEIRA PARTE
DA
# MECHANICA
OU
# A STATICA

## SECCAÕ I.

### DOS CENTROS DE GRAVIDADE.

82 TOdos experimentamos, que hum corpo deixado a ſi meſmo cahe perpendicularmente ao horizonte, e que ainda quando he ſuſtentado tende ſempre a caminhar para a ſuperficie da terra por hum esforço determinado ſegundo a meſma direcçaõ.

Obſervaçoens ſem numero nos atteſtaõ, que ſuccede o meſmo em todos os paizes, e que eſte phenomeno naõ tem menos lugar ſobre os cumes das mais altas montanhas, do que nos campos raſos, e na profundidade dos valles. Por toda a parte, até aos mais profundos abyſmos, buſcaõ os corpos, para o dizermos aſſim, chegar-ſe mais para hum ponto fixo, que he viſivelmente o centro da terra, porque ella he ſenſivelmente redonda, e as direcçoens perpendiculares aos diverſos horizontes vaõ conſeguintemente unir-ſe no ſeu centro.

Mas eſta tendencia univerſal naõ he certamente eſſencial aos corpos. He hum esforço real, de que a materia por ſi meſma naõ he capaz. Na ſua natureza naõ ha couſa que aſſim o peça, nem que o poſſa produzir; e a ſua inercia he hum obſtaculo de mais á exiſtencia de ſemelhante

lhante impulſo. He logo neceſſario, que tenha por principio alguma força exterior dirigida para o centro da terra: e eſta força he a que ſe chama, como já diſſemos, *Gravidade*, *Gravitaçaõ*, ou *Attracçaõ*.

Ainda que naõ ha mais doque opinioens, quando muito veroſimeis, ſobre a cauſa da gravidade, he com tudo facil de provar a ſua exiſtencia, e de conhecer os ſeus effeitos. Averiguada huma vez a ſua exiſtencia, e conhecidos os ſeus effeitos, naõ he neceſſario mais para expſicar tudo o que reſpeita ao movimento, e ao equilibrio dos corpos graves. Eisaqui pois as obſervaçoens mais conſtantes ſobre a força da gravidade.

83 I. Ella obra igualmente ſobre todas as partes materiais dos corpos terreſtres, iſto he, a todas imprime a meſma velocidade no meſmo tempo. Tem-ſe averiguado iſto, deixando cahir no meſmo inſtante, e da meſma altura, maſſas muito deſiguais. O tempo do deſcenſo he abſolutamente igual, quando ſe faz a experiencia dentro do *recipiente* da maquina pneumatica. Todos os Phyſicos ſabem, que o ouro, por exemplo, aindaque o mais compacto dos metais, quando ſe deixa ao unico impulſo da gravidade, naõ deſce mais veloz do que a laã, e a pluma mais leve. Se o tempo do deſcenſo naõ he o meſmo fóra do recipiente, he porque o ar ſe oppoem deſigualmente ao ſeu movimento. Concluamos pois, que a gravidade he huma força, que tende a imprimir em todos os corpos a meſma velocidade no meſmo tempo.

84 II. Em hum meſmo lugar da terra, e em todas as eſtaçoens do anno, a gravidade faz correr aos corpos livres o meſmo eſpaço no meſmo tempo, ao menos ſem differença alguma ſenſivel. Logo he huma força conſtante, que obra ſempre igualmente.

85 III. E porque a acçaõ da gravidade ſe renova a cada inſtante ſobre todos os corpos, quer eſtejaõ em deſcanço, quer em movimento, devemos tambem concluir, que he huma força acceleratriz univerſal, e conſtante. Daqui vem, que em todos os paizes deſce hum corpo com velocidade tanto maior, quanto he maior o tempo que livremente eſteve ſujeito á impreſſaõ da gravidade.

86 IV. Além diſto, a velocidade que a gravidade imprime em qualquer corpo em hum inſtante he infinitamente pequena; porque de outra ſorte no fim de qualquer tempo

po

po finito ſeria infinita, o que he impoſſivel. Naõ he logo comparavel a acçaõ inſtantanea da gravidade com potencia nenhuma finita, por muito pequena que ſe ſupponha; porque eſta produz huma velocidade finita em hum inſtante. Sómente depois ſer paſſado hum tempo finito, he que o effeito accumulado da gravidade póde comparar-ſe com o das outras potencias motrizes.

87 V. As direcçoens da gravidade ſaõ parallelas em hum meſmo lugar. Dous fios a prumo, por exemplo, guardaõ entre ſi hum parallelíſmo ſenſivel em hum meſmo edificio, na meſma cidade, e geralmente em todos os lugares, que tem ſenſivelmente o meſmo horizonte. Iſto naõ impede, que as direcçoens concorraõ realmente no centro da terra, porque eſte centro póde reputar-ſe a huma diſtancia infinita a reſpeito do pequeno intervallo, que ſepara as meſmas direcçoens nas circumſtancias que temos propoſto.

88 VI. Por obſervaçoens exactas e frequentes ſe tem achado, que hum corpo na Latitude de Paris corre no primeiro ſegundo do ſeu deſcenſo livre, em virtude da gravidade, 15 pés huma pollegada huma linha $\frac{7}{9}$ do pé regio de Paris, ou $15^{p}$, 098, ou mais exactamente 2173, 631356 linhas. No ſegundo ſeguinte corre 45 pés 3 pollegadas 5 linhas $\frac{1}{3}$, e no terceiro 75 pés 5 pollegadas e 9 linhas.

Daqui ſe podiaõ deduzir facilmente as formulas neceſſarias para determinar no movimento dos corpos graves o tempo do deſcenſo, as alturas donde cahem, e as velocidades adquiridas a cada inſtante Mas reſervamos iſto para a Dynamica. Aqui naõ ſe trata, ſenaõ do equilibo; e ſe temos principiado por eſtas noçoens, foi para fazer mais intelligivel a theorica dos centros de gravidade, que agora entramos a expôr.

*De-*

## *Definiçaõ do centro de gravidade, com o methodo de o determinar, quando os corpos estaõ em huma mesma linha recta.*

89 POr quanto a gravidade exercita a sua acçaõ igualmente sobre todas as partes da materia, de que se compoem a massa de qualquer corpo, cada huma destas partes faz huma força igual para descer pela direcçaõ, que se encaminha ao centro da terra. De todas estas forças parciais unidas juntamente resulta o esforço geral, com que o corpo inteiro tende a caminhar para o mesmo centro, e este esforço total he o que chamamos *pezo* dos corpos.

90 He pois o pezo de qualquer corpo igual á quantidade de movimento, que a gravidade tende nelle imprimir continuamente em cada instante. Logo he proporcional á massa, porque a velocidade de todas as partes he igual.

Ora este pezo naõ póde ser sustentado, senaõ por huma potencia, cuja energia seja, quando menos, igual a elle. Logo póde o mesmo pezo considerar-se como huma potencia real, cuja acçaõ se exercita perpendicularmente ao horizonte; e conseguintemente dous, ou muitos pezos podem comparar-se entre si, e contrabalançar-se mutuamente, como todas as outras forças mechanicas.

Mas por causa do ligamento, com que as diversas partes de hum mesmo corpo se achaõ enlaçadas entre si, naõ póde huma obedecer ao impulso da gravidade, se todas as outras lhe naõ obedecerem ao mesmo tempo. Logo, sendo parallelas as direcçoens, pelas quais a gravidade sollicita todas as sobreditas partes, a resultante de todas deve passar por algum ponto intermedio, que he de alguma fórma o centro de reuniaõ de todas as forças particulares. Este ponto, unico em cada corpo, he o que chamamos *centro de gravidade.*

91 E como, sendo este ponto sustentado, o corpo fica necessariamente em equilibrio, porque a resultante se reduz entaõ a nada; tambem reciprocamente naõ póde o corpo ficar em equilibrio, se o dito ponto naõ for sustentado, porque entaõ terá effeito a resultante, e o corpo cahirá. Concluamos pois que *o centro de gravidade de hum corpo he hum ponto, no qual todo o pezo delle se concebe reunido e con-*

*e concentrado, de maneira que sustentando este unico ponto, o corpo inteiro se sustentará em equilibrio em todos os casos.*

92 Póde tambem dizer-se, que o centro de gravidade de qualquer systema de corpos he hum ponto, pelo qual passa sempre a resultante de todos os esforços particulares, que fazem as partes do systema em virtude da gravidade, seja qual for a situaçaõ do mesmo systema.

93 Para se determinar este ponto, basta pois considerar o systema em duas situaçoens differentes, e determinar para cada huma dellas a direcçaõ da resultante. Porque produzindo estas duas direcçoens, necessariamente haõ de concorrer, e o ponto do concurso será o centro de gravidade que buscamos.

Para nos convencermos disto, bastará demonstrar que em qualquer outra situaçaõ do systema a resultante passará sempre pelo ponto do concurso das duas primeiras. Para isso, sejaõ quantos corpos se quizerem $M$, $P$, $Q$ (Fig. 16.), situados sobre a mesma linha recta, a qual supporemos inflexivel, e sem massa: e a fim de simplificar mais, consideraremos estes corpos, como outros tantos pontos, nos quais as suas massas estejaõ concentradas. Seja $g$ a velocidade que a gravidade lhes imprime em hum tempo dado, em hum segundo por exemplo, pelas direcçoens $Mm$, $Pp$, $Qq$ perpendiculares ao horizonte; e seraõ $Mg$, $Pg$, $Qg$ as quantidades respectivas de movimento. Estas forças podendo ser consideradas, como outras tantas potencias, applicadas aos pontos $M$, $P$, $Q$, e parallelas entre si, tomaremos arbitrariamente hum ponto $C$ no prolongamento da linha $QM$, e por elle faremos passar a recta $Cq'$ perpendicular ás direcçoens das ditas potencias.

Isto posto, acharemos a distancia $Cr'$ á direcçaõ da resultante, fazendo $Cr' = \frac{Mg.Cm' + Pg.Cp' + Qg.Cq'}{Mg + Pg + Qg}$ (n. 63.) $= \frac{M.Cm' + P.Cp' + Q.Cq'}{M + P + Q}$; donde pela natureza das linhas proporcionais acharemos a distancia do centro de gravidade $R$ ao ponto $C$, ou $CR = \frac{M.CM + P.CP + Q.CQ}{M + P + Q}$. Este valor de $CR$ naõ depende em maneira alguma da obliquidade da linha $MQ$ a respeito da horizontal. Logo a resultanfultante defte fyftema de corpos, paffará fempre pelo centro de gravidade que acabamos de determinar, feja qual for a fituaçaõ do mefmo fyftema.

94 Difto fe fegue, que *em qualquer numero de corpos, confiderados como pontos, e fituados fobre a mefma linha, acharemos a diftancia do centro de gravidade a qualquer ponto tomado na dita linha, multiplicando cada huma das maffas pela fua diftancia ao mefmo ponto, e dividindo a foma dos productos pela foma das maffas.*

95 Chamando pois *momento* o producto de qualquer maffa pela fua diftancia a hum ponto, ou a huma linha, teremos fempre a diftancia do centro de gravidade ao mefmo ponto, ou á mefma linha, dividindo a foma dos momentos pela foma das maffas.

Obferve-fe porém, que no cafo de eftarem os corpos fituados para huma e outra parte do ponto fixo, naõ deve tomar-fe a foma total dos momentos, mas a differença das fomas que ficaõ de huma e outra parte, ou, que vem a fer o mefmo, na foma total dos momentos devem tomar-fe como negativos os que ficarem para a outra parte do ponto fixo, a refpeito dos que arbitrariamente fe tomarem como pofitivos.

96 Obferve-fe tambem, que no cafo de ferem os corpos, cujo centro commum de gravidade houvermos de procurar, todos homogeneos, e confeguintemente de igual denfidade, como fupporemos daqui por diante, podem fubftituir-fe os volumes em lugar das maffas, a fim de reduzir a indagaçaõ dos centros de gravidade a huma queftaõ de pura Geometria.

## *Indagaçaõ do centro de gravidade, quando os corpos naõ eftaõ na mefma linha, aindaque todos fituados no mefmo plano.*

97 SUpponhamos, que os tres corpos *M*, P, Q (Fig. 17.), confiderados como pontos, em que fe reunem os esforços particulares da gravidade das partes materiais de que a fua maffa fe compoem, eftaõ difpoftos em triangulo em hum mefmo plano. Entaõ por qualquer ponto *C* tomado no dito plano conduzindo huma recta horizontal *Cp*, e outra vertical *Cp'*, poderemos

mos tirar de cada hum dos pontos graves para estas duas rectas as perpendiculares $Pp$, $Pp'$; $Mm$, $Mm'$; $Qq$, $Qq'$. Por meio destas perpendiculares acharemos bem facilmente, que a resultante do systema triangular, considerado na sua posição actual, ha de passar a huma distancia

$$Rr' = \frac{M.Mm' + P.Pp' + Q.Qq'}{M + P + Q}.$$

E supposndo agora, que todo o systema faz hum quarto de revolução, de maneira que a horizontal $Cp$ venha a ser vertical, acharemos do mesmo modo que a resultante deve passar a huma distancia

$$Rr = \frac{M.Mm + P.Pp + Q.Qq}{M + P + Q}.$$

Será pois determinado o centro de gravidade $R$. Mas falta mostrar, que em qualquer outra situação do systema, deve passar a resultante por este ponto, que temos achado.

Já sabemos (n. 57.), que a soma dos momentos em ordem a qualquer ponto da resultante se reduz necessariamente a nada; de sorte, que podemos segurarnos de que hum ponto pertence á dita resultante, todas as vezes que a soma dos momentos em ordem ao dito ponto for nenhuma. Logo, se $AB$ (Fig. 18.) he a resultante de qualquer systema na primeira situação, e se em segunda posição perpendicular á primeira, a resultante he $CD$ perpendicular a $AB$, bastará provar que a resultante em qualquer outra posição está necessariamente sujeita a passar pelo ponto do concurso $G$, ou, que vem a ser o mesmo, bastará provar que a soma dos momentos em ordem a qualquer linha $EF$, que passa pelo ponto $G$, he nenhuma.

98 Seja pois $M$ hum dos pontos graves do systema, do qual se tirem as perpendiculares $MP$, $MQ$, $MR$ aos tres eixos, que representaõ as nossas tres resultantes. Será pois o angulo $PGM = PGQ - MGQ$, e conseguintemente $sen\,PGM = sen\,PGQ\,cos\,MGQ - sen\,MGQ\,cos\,PGQ$; donde tiraremos $\frac{MP}{GM} = sen\,PGQ.\frac{GQ}{GM} - cos\,PGQ\frac{MQ}{GM}$; e por conseguinte será $PM = sen\,PGQ.\,MR - cos\,PGQ.\,MQ$. Tomando pois o momento do ponto $M$ em ordem ao eixo $EF$, teremos $M.\,PM = sen\,PGQ.\,M.\,MR - cos\,PGQ.$

M.

$M. MQ$, e a ſoma dos momentos $\int M.\ PM = ſen\ PGQ.\ \int M.\ MR - coſ\ PGQ.\ \int M.\ MQ.$ Porém $AB$, $CD$ ſaõ duas reſultantes, e conſeguintemente a ſoma dos momentos reportados a cada huma dellas deve ſer nenhuma, iſto he, deve ſer $\int M.\ MR = 0$, e $\int M.\ MQ = 0$. Logo ſerá tambem $\int M.\ PM = 0$. Logo a ſoma dos momentos em ordem a $EF$ he nenhuma, e por conſeguinte qualquer reſultante paſſa ſempre pelo ponto determinado pela interſecçaõ das duas primeiras.

## *Indagaçaõ do centro de gravidade, quando os corpos eſtaõ em planos differentes.*

99 SEjaõ dous planos $ABC$, $BCd$ (Fig. 19.) perpendiculares entre ſi, e ao horizonte. Se de cada hum dos pontos graves $M$, $P$, $Q$ conduzirmos perpendiculares para cada hum deſtes dous planos, acharemos primeiramente a diſtancia $Rr$ da reſultante ao plano $ABC$ neſta primeira ſituaçaõ, tomando a ſoma dos momentos em ordem ao meſmo plano, e dividindo-a pela ſoma das maſſas (n. 66.), o que nos dará

$$Rr = \frac{M.Mm + P.Pp + Q.Qq}{M + P + Q}.$$

Depois por hum calculo ſemelhante acharemos a ſua diſtancia ao plano $BCd$, que he

$$Rr' = \frac{M.Mm' + P.Pp' + Q.Qq'}{M + P + Q}.$$

Mas com eſtas duas diſtancias naõ podemos ainda determinar, ſenaõ a reſultante, que ſabemos ſer perpendicular ao horizonte, como os planos $ABC$, $BCd$, e que deve paſſar pela interſecçaõ $R$ das duas diſtancias. He verdade, que o centro de gravidade que buſcamos deve ſer hum dos pontos deſta reſultante; mas qual he?

Para o determinarmos, imaginaremos o ſyſtema revirado em huma ſituaçaõ perpendicular, de tal maneira que o plano horizontal $aCd$ venha a ſer vertical; e neſta nova poſiçaõ a ſegunda reſultante paſſará a huma diſtancia deſte plano, a qual terá por valor a ſoma dos momentos a ella reportados dividida pela ſoma das maſſas.

100 Logo *para conhecer o centro de gravidade de qual-*

*quer*

*quer systema, cujas partes estaõ situadas em planos differentes, he necessario suppor tres planos perpendiculares entre si; e a soma dos momentos tomados em ordem a cada hum dos planos dividida pela soma das massas dará a distancia respectiva do centro de gravidade a cada hum dos mesmos planos.*

Huma vez conhecidas estas tres distancias, naõ he necessario mais para determinar o centro de gravidade. Faltaria porém alguma cousa a esta theorica, se naõ se mostrasse que a resultante em qualquer outra posiçaõ do systema deve necessariamente passar pelo centro de gravidade assim determinado. Para o demonstrar, basta fazer ver, que se a soma dos momentos tomados successivamente em ordem a tres planos, que passaõ pelo centro de gravidade, he nenhuma, a mesma soma tomada em ordem a qualquer outro plano que passar pelo mesmo ponto deve tambem ser nenhuma.

101 Sejaõ pois *AGC*, *AGB*, *CGB* (Fig. 20.) tres planos perpendiculares entre si, a cujo respeito a soma dos momentos he nenhuma. Seja outro plano qualquer *GVN*, que passe pelo centro de gravidade; seja M hum dos pontos graves do systema, do qual se conduza *MQ* perpendicular ao plano *CGB*, e do ponto de projecçaõ *Q* tire-se *QP* perpendicular á recta GB. Imagine-se depois disto hum plano *MQVN* perpendicular ao plano *GVN*, e neste plano conduza-se a recta *MN* perpendicular á sua intersecçaõ commua *NV*; a recta *QV* será perpendicular a *GV*, e o angulo *QVN* medirá a inclinaçaõ dos planos *CGB*, *GVN*.

Sendo tudo isto huma vez concebido, a demonstraçaõ naõ he difficultosa. Porém a fim de abbreviar, supponhamos $GP = x$, $PQ = y$, $MQ = z$, o angulo $VGB = a$, e o angulo $QVN = b$.

Teremos pois em primeiro lugar o angulo $QGV = QGP - a$, e conseguintemente $sen\ QGV = sen\ QGP\ cos\ a - sen\ a\ cos\ QGP$; donde se deduz $QV = y\ cos\ a - x\ sen\ a$.

Em segundo lugar teremos o angulo $MVN = b - QVM$, e $sen\ MVN = sen\ b\ cos\ QVM - sen\ QVM\ cos\ b$; donde se tirará $MN = sen\ b \,.\, QV - MQ \,.\, cos\ b = -x\ sen\ a\ sen\ b + y\ cos\ a\ sen\ b - z\ cos\ b$.

Sendo pois *MN* a perpendicular conduzida do ponto *M* para o plano *GVN*, teremos por soma dos momentos em ordem a este plano $\int M \,.\, MN = -sen\ a\ sen\ b \,.\int M \,.\, x + cos\ a\ sen\ b \,.\int M \,.\, y - cos\ b \,.\int M \,.\, z$.

E porque sendo $x$, $y$, $z$ as distancias respectivas do ponto $M$ aos tres planos perpendiculares entre si, as somas dos momentos $\int M \cdot x$, $\int M \cdot y$, $\int M \cdot z$ tomados em ordem aos mesmos planos saõ nenhumas, a soma dos momentos $\int M \cdot MN$ referidos ao quarto plano qualquer *GVN* será tambem nenhuma.

102 Depois de havermos assim desenvolvido o methodo de determinar os centros de gravidade de qualquer systema de corpos situados no mesmo plano, ou em planos diversos, e depois de havermos mostrado que em cada corpo, e em cada systema de corpos o centro de gravidade he hum ponto unico, e sempre o mesmo em todas as situaçoens possiveis: será conveniente, que appliquemos agora estes principios á determinaçaõ do centro de gravidade nos corpos, que a Geometria nos ensina a medir e a conhecer. Esta applicaçaõ, em quanto ao mais, naõ póde certamente ter-se por huma esteril curiosidade. Nella se reunem duas ventagens, de trazer á lembrança as formulas mais uteis da Analyse, e de servir de fundamento á Statica, cujo auxilio he de summa importancia nas Artes.

## I.

## *Determinar o centro de gravidade das linhas.*

103 SEja primeiramente huma linha recta *AB* (Fig. 21.), homogenea em todo o seu comprimento, e por consequencia uniformemente pezada. He facil de ver, que o seu pezo total resulta do pezo de cada hum dos seus elementos. Seja pois $Mm$ hum destes elementos infinitamente pequenos, e seja $A$ o ponto fixo, ao qual se reportem os momentos; $AM = x$, e $Mm = dx$.

Posto isto, acharemos a distancia do ponto $A$ ao centro de gravidade, dividindo a soma dos momentos de todos os pequenos pezos $Mm$ pela soma dos mesmos pezos. Logo será $AG = \frac{\int x\,dx}{\int dx}$: porém $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, e $\int dx = x$, sem constante, porque estes dois integrais se desvanecem fazendo $x = 0$; logo $\frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{x}{2}$. Fazendo pois $x = AB$, a fim de acharmos o centro de gravidade da linha inteira

$AB$, teremos $AG = \frac{AB}{2}$; ultimo resultado, que nos ensinaria, se por outra parte o naõ vissemos evidentemente, que *o centro de gravidade de qualquer linha recta, uniformemente pezada, se acha sempre no meio della.*

104 Se o pezo desta linha naõ fosse uniforme, o centro de gravidade naõ estaria no meio della. Para fixar entaõ o ponto, que elle deve occupar, representemos em geral por $X$ a densidade da linha em qualquer ponto $M$, sendo $X$ huma funçaõ de $x$: e teremos $AG = \frac{\int Xx\,dx}{\int X\,dx}$.

Supponhamos que a densidade de cada ponto $M$ he proporcional á distancia $AM$. Neste caso será $AG = \frac{\int xx\,dx}{\int x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AB$. Logo será o centro de gravidade aos dous terços da linha, contando desde o ponto fixo $A$.

## II.

### *Determinar o centro de gravidade do perimetro dos polygonos.*

105 Como o perimetro de qualquer polygono he formado pelo ajuntamento de muitas linhas rectas, facilmente se póde determinar o seu centro de gravidade. Supponhamos pois as quatro linhas $Mm$, $Nn$, $Pp$, $Qq$ (Fig. 22.), dispostas de qualquer maneira. Está claro, que os seus centros particulares de gravidade se achaõ no meio de cada huma, em $a, b, c, f$, e que estes quatro pontos podem considerar-se, como carregados, cadahum do pezo total da sua linha.

Isto supposto, acharemos o centro commum de gravidade dos sobreditos pontos (n. 97.), imaginando em hum mesmo plano duas rectas $Aa'$, $Aa''$ perpendiculares entre si, sobre as quais se conduziráõ perpendiculares tiradas de cada hum dos pontos graves; e assim teremos

$$GG' = \frac{Mm.aa' + Nn.bb' + Pp.cc' + Qq.ff'}{Mm + Nn + Pp + Qq}$$

$$GG'' = \frac{Mm.aa'' + Nn.bb'' + Pp.cc'' + Qq.ff''}{Mm + Nn + Pp + Qq}.$$

Com eſtas duas diſtancias conheceremos pois em todos os caſos ſemelhantes o centro dos centros de gravidade $G$, de qualquer numero de linhas uniformemente pezadas, de que ſe componha o perimetro de hum polygono.

As meſmas formulas applicadas aos polygonos regulares dariaõ o centro de gravidade do perimetro no meſmo centro da figura; couſa, que naõ póde ter difficuldade alguma.

## III.

## *Determinar o centro de gravidade de qualquer curva.*

106 SEja a curva $AMB$ (Fig. 23.), cujo centro de gravidade ſe pertende determinar. Supponhamos $CP = x$, $PM = y$, $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; e teremos $yds$ por expreſſaõ do momento de $Mm$, tomado em ordem ao eixo $CP$, e $xds$ em ordem ao outro eixo $CQ$. Logo ſerá determinado o centro de gravidade $G$ da curva $AMB$ pelas duas formulas $GG' = \frac{\int yds}{s}$, $GG'' = \frac{\int xds}{s}$, nas quais devem tomar-ſe os integrais de $A$ até $B$.

107 Se a curva tiver dois arcos iguais e ſemelhantes $AB$, $AB'$ (Fig. 24.), he evidente que o centro de gravidade deve achar-ſe no eixo $CP$. Por iſſo naõ he neceſſario entaõ mais doque calcular a diſtancia $CG = \frac{\int xds}{s}$

$$= \frac{\int x\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

108 Dando a formula $GG' = \frac{\int yds}{s}$ a diſtancia do centro de gravidade da curva $AMB$ á linha das abſciſſas $CP$ (Fig. 23.), he facil de deduzir hum methodo differente do que ſe enſina na Geometria, para determinar o valor das ſuperficies curvas dos ſolidos de revoluçaõ. Porque cha-

chamando $c$ a circumferencia do circulo, cujo diametro he 1, isto he, fazendo $c = 3, 14159265358979 32$ &c, sabemos que $2c\int y\,ds$ he a formula geral desta especie de superficies, a qual por conseguinte exprime a superficie curva gerada pela revolução de $AMB$ ao redor do eixo $CP$. Porém temos $2c \,.\, GG' = \frac{2c\int y\,ds}{s}$; logo $2c\int y\,ds = s \,.\, 2c \,.\, GG' =$ ao producto da linha generante $AMB$ pela circumferencia, que descreve o seu centro de gravidade.

109 Póde generalizar-se este resultado, e concluir-se que *girando quantas linhas quizermos, rectas ou curvas, ao redor de qualquer eixo, a superficie por ellas gerada será sempre igual ao producto da soma das linhas generantes pela circumferencia, que na mesma revolução descreve o seu centro commum de gravidade: com tanto que todas estas linhas estejaõ de huma mesma parte a respeito do eixo da revolução.* Havendo algumas porém, que estejaõ da outra parte, deverá diminuir-se a superficie, que ellas produzem, da superficie produzida pelas outras; e a differença dará a superficie do solido.

110 Daqui se infere hum methodo bem simples para achar o centro de gravidade de qualquer systema de linhas. Porque a distancia deste centro a huma recta tomada arbitrariamente se achará, fazendo revolver o systema ao redor da dita linha, e dividindo a soma das superficies produzidas, pela circumferencia cujo raio for igual á soma das linhas generantes.

E reciprocamente: Se por outra parte for conhecido o centro de gravidade de hum systema de linhas, será facil de conhecer a superficie do solido descrito pela sua revolução ao redor de qualquer recta, multiplicando a soma das linhas generantes pela circumferencia, que descreve o seu centro commum de gravidade.

111 Logo, se qualquer polygono symmetrico, ou regular $abfbk$, fizer huma revolução ao redor de qualquer linha recta $AB$ (Fig. 25.), a superficie do solido descrito será igual ao producto do perimetro do polygono pela circumferencia, cujo raio for igual á perpendicular $GG'$, conduzida do centro da figura para o eixo da revolução $AB$.

Logo tambem a revolução de hum circulo, ou de huma ellipse qualquer $ACE$ (Fig. 26.), ao redor da sua tangente no ponto $A$, defcreverá huma fuperficie igual ao producto do perimetro da figura pela circumferencia, que defcreve o raio $AC$. Se o folido de revoluçaõ for gerado por hum circulo, entaõ ferá a fuperficie igual á de hum quadrado, que por lado tiver huma linha recta igual á circumferencia do mefmo circulo.

Em geral (Fig. 27. 28.): Se qualquer figura $abdc$ compofta de duas, ou de quatro partes iguais, e femelhantes $ab$, $ac$, $cd$, $bd$, fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer eixo $AB$, a fuperficie do folido, que refultar, ferá igual ao producto do perimetro $abdc$ pela circumferencia, cujo raio he $GG'$, e cujo comprimento he $2c.GG'$.

Em fim, fe ao redor de qualquer ponto $C$ (Fig. 29.) eftiverem difpoftas de huma maneira fymmetrica quantas figuras fe quizerem $a, a'$; $b, b'$; $c, c'$, a fuperficie do folido gerado pela revoluçaõ do fyftema inteiro, ao redor de qualquer eixo $AB$, ferá igual ao producto da foma dos perimetros de todas as figuras pela circumferencia, cujo raio he $CC'$, e cujo comprimento he $2c.CC'$.

As differentes Propofições, que acabamos de enunciar, podiaõ fer demonftradas directamente pelos unicos principios da Geometria. Mas effe modo de as deduzir eftá muito longe de ter toda a elegancia do methodo fundado na theorica dos centros de gravidade.

## *Exemplos.*

112 I. *Achar o centro de gravidade G do perimetro de qualquer triangulo ABC* (Fig. 30.).

Bufque-fe primeiramente a diftancia defte centro ao lado $AC$, fazendo girar o triangulo ao redor delle, e dividindo a fuperficie, que defcrever, pela circumferencia, cujo raio he igual ao perimetro do mefmo triangulo. Achar-fe-há pois que $AB$ defcreve huma pyramide conica recta, a qual tem por fuperficie $AB.\frac{1}{2}\,circ\,BD$, e que $BC$ defcreve outra pyramide conica recta, cuja fuperficie he $BC.\frac{1}{2}\,circ\,BD$; logo

$$GG' = \frac{(AB+BC)\frac{1}{2}\,circ\,BD}{circ\,(AB+BC+AC)} = \frac{\frac{1}{2}(AB+BC)BD}{(AB+BC+AC)};$$

O

O principio dos momentos daria immediatamente o mesmo resultado, porque o momento do lado $AB$ he $\frac{1}{2} AB . BD$, e o do lado $BC$ he $\frac{1}{2} BC . BD$.

Busque-se depois por huma construcçaõ geometrica o ponto $G$: e para isso, seja $E$ o meio da perpendicular $BD$, e conduza-se a recta $GF$ parallela á base $AC$, e em distancia igual a $GG'$. Logo será $EF = \frac{1}{2} BD - GG' = \frac{\frac{1}{2} BD . AC}{AB + BC + AC}$. Dividindo pois a superficie do triangulo pelo seu perimetro, se achará a distancia $EF$, e será determinado o ponto $F$, pelo qual deve sempre passar a linha $FG$ parallela á base $AC$.

Busque-se em fim por hum processo semelhante a recta $KG$ parallela ao lado $BC$, e a sua intersecçaõ com $FG$ determinará o ponto $G$, centro de gravidade do perimetro triangular $ABC$.

113 He verdade, que este centro podia tambem determinar-se de hum modo mais facil, e igualmente geral. Porque seja $a$ o meio do lado $AC$, e $b$ o meio de $BC$; e do centro de gravidade $G$ (que se suppoem conhecido) tirem-se para os lados $AC$, $BC$ as perpendiculares $GG'$, $GG''$. Isto posto, será resolvido o Problema, se conhecermos as rectas $aG'$, $bG''$. Para isso faremos estas duas proporções,

$$4AC : AB + BC - AC :: AB - BC : aG'$$
$$4BC : AB + AC - BC :: AB - AC : bG''.$$

114 II. *Achar o centro de gravidade G de qualquer arco circular AM* (Fig. 31.).

A sua distancia $GG'$ ao raio $AC$ se achará dividindo a superficie do segmento esferico, que descreve o arco $AM$ na sua revoluçaõ ao redor de $AP$, pela circumferencia, cujo raio he igual ao comprimento do mesmo arco. Teremos pois em primeiro lugar $GG' = \frac{AP . circ\, AC}{circ\, AM} = \frac{AP . AC}{AM}$. Em segundo lugar, fazendo revoluçaõ o mesmo mo arco ao redor do eixo perpendicular $BC$, teremos $CG' = \frac{CQ . circ AC}{circ AM} = \frac{PM . AC}{AM}$. Logo para determinar o ponto $G$ faremos as duas proporções seguintes.

*O arco $AM$ he para o seu seno verso $AP$, como o raio para a distancia $GG'$ do centro de gravidade ao raio $AC$.*

*O arco $AM$ he para o seu seno recto $PM$, como o raio para a distancia $CG'$ do centro de gravidade ao eixo $BC$.*

Bastará porém calcular huma destas distancias; porque bem se vê, que o centro de gravidade deve achar-se no raio $CG$, que divide o arco $AM$ em duas partes iguais. Isto mesmo se demonstra pelas formulas precedentes, das quais se tira $\frac{GG'}{CG'} = \frac{AP}{AM}$; logo os triangulos $CGG'$, $APM$ saõ semelhantes, e o angulo $AMP = GCG' = \frac{1}{2} ACM$.

Quando houvermos pois de determinar o centro de gravidade $G'$ de hum arco circular $MAM$, tiraremos hum raio $CA$, que o divida em partes iguais no ponto $A$, e sobre elle tomaremos a parte $CG' = \frac{AC . MPM}{MAM}$, isto he, *huma quarta proporcional ao arco, á sua corda, e ao raio.*

Donde se segue reciprocamente, que se por outra parte pudessemos de hum modo exacto determinar o centro de gravidade de hum arco de circulo, teriamos juntamente a rectificaçaõ rigorosa delle.

115 III. *Achar o centro de gravidade $G$ de hum arco parabolico $MAM$ dividido em duas partes iguais no vertice $A$ (Fig. 32.).*

Seja o parametro $= 1$, e teremos pela equaçaõ da parabola $yy = x$. Logo $AG = \frac{\int yydy \sqrt{(1 + 4yy)}}{\int dy \sqrt{(1 + 4yy)}}$ - - - (n. 107.) $= \frac{\frac{1}{16} y (1 + 4yy)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16} \int dy \sqrt{(1 + 4yy)}}{\int dy \sqrt{(1 + 4yy)}} =$ $\frac{1}{16} . \frac{y(1 + 4yy)^{\frac{3}{2}}}{AM} - \frac{1}{16}$. Logo conduzindo a tangen-

te

te $MT$, e a normal $MN$, ferá $AG = \frac{1}{16} \cdot \frac{MT^3}{PM^2 . AM}$ $- \frac{1}{16} = \frac{NT . MT}{8AM} - \frac{1}{16}$. Tomaremos pois huma quarta proporcional a $8AM$, $NT$, $MT$, da qual tiraremos a decima-fexta parte do parametro, para termos a diftancia $AG$ do centro de gravidade $G$ ao vertice $A$.

116 IV. *Achar o centro de gravidade de hum arco cycloidal MAM, cujo circulo generante tem por diametro AB* (Fig. 33.).

Seja $AB = a$. Pela natureza defta curva teremos $AM^2 = s^2 = 4ax$. Logo ferá $AG = \frac{\int x ds}{s} = \frac{\int s^2 ds}{4as} = \frac{s^3}{12as} = \frac{s^2}{12a} = \frac{4ax}{12a} = \frac{1}{3}x$. Eftá pois fempre o centro de gravidade a hum terço da abfciffa $AP$, contando do vertice, e o da cycloide inteira a hum terço do diametro $AB$.

117 Se as linhas forem de natureza differente, ou naõ puderem exprimir-fe por huma mefma equaçaõ, he neceffario bufcar o centro de gravidade particular de cadahuma, e depois confiderallo como hum ponto, carregado de todo o pezo da fua linha. Eftes centros combinados entre fi daraõ o centro commum, que fe bufca. Eifaqui hum exemplo.

118 V. *Achar o centro de gravidade G' de hum arco de circulo MAM com a fua corda MM* (Fig. 34.).

Como o centro de gravidade $G$ do arco $MAM$ fe determina pela diftancia $CG = \frac{CA . MPM}{MAM}$, e como $P$ he o centro de gravidade da corda $MM$, confideraremos os pontos $G$, $P$ carregados dos pezos $MAM$, $MPM$, e acharemos a diftancia $CG' = \frac{CG . MAM + CP . MPM}{MAM + MPM}$ $= \frac{(CA + CP) MPM}{MAM + MPM}$. Donde fe tira efta proporçaõ $MAM + MPM : MPM :: CA + CP : CG'$. O methodo geral (n. 110.) daria o mefmo refultado. Paffemos ao centro de gravidade das fuperficies planas.

IV.

## IV.

## *Determinar o centro de gravidade de qualquer ſuperficie plana.*

119 SEja $BM$ huma curva qualquer, reportada ao eixo $AP$ (Fig. 35.), e ſeja $MPpm$ o elemento da ſuperficie do trapezio $BCPM$. O centro de gravidade $R$ deſte elemento he ao meſmo tempo o ſeu centro de figura, e póde conſiderar-ſe carregado de todo o ſeu pezo $ydx$. Pelo que os momentos deſte pequeno rectangulo em ordem aos eixos perpendiculares $AP$, $AQ$ ſeraõ $ydx \cdot RR'$, e $ydx \cdot RR''$: porém $RR' = \frac{1}{2}y$, e $RR'' = x$; logo $GG' = \frac{\frac{1}{2}\int yydx}{\int ydx}$, e $AG' = \frac{\int xydx}{\int ydx}$. Bem entendido, que eſtes integrais devem tomar-ſe de $B$ até $M$, ſendo a origem das abſciſſas em $A$.

120 Se imaginarmos, que a figura $BCPM$ faz huma revoluçaõ ao redor do eixo $AP$, o ſolido gerado terá por medida $c\int yydx$. E porque o valor de $GG'$, que temos achado, nos dá $2c \cdot GG' \cdot \int ydx = c\int yydx$, concluiremos, que o ſolido formado pela revoluçaõ do eſpaço $BCPM$ ao redor do eixo $AP$ he igual ao priſma recto, que tiver por baſe o meſmo eſpaço, e por altura a circumferencia deſcrita pelo ſeu centro de gravidade.

121 A meſma propriedade terá lugar, ſeja qual for a figura generante, e a ſua poſiçaõ a reſpeito do eixo. Supponhamos com effeito qualquer figura $BCD$ (Fig. 36.), referida a hum eixo $AP$, e conduzamos huma ordenada $PMM'$, que corte em $M$, e $M'$ as partes inferior e ſuperior do perimetro da figura. Fazendo $AP = x$, $PM = y$, $PM' = y'$, ſerá $(y'-y)dx$ o elemento do eſpaço $BM'M$, $\frac{y'+y}{2}$ a diſtancia do ſeu centro de gravidade ao eixo $AP$, e $\frac{(y'+y)(y'-y)}{2}dx = \frac{y'y'-yy}{2}dx$ o ſeu momento em ordem ao meſmo eixo. Donde concluiremos $GG' = \frac{\int(y'y'-yy)dx}{2BCD}$, ou $2c \cdot GG' \cdot BCD =$

$= c\int y'y'dx - c\int yydx$. Porém está claro que $c\int y'y'dx$ he a expressaõ do solido produzido pela revoluçaõ da parte superior da figura *BCD*, e que $c\int yydx$ exprime igualmente o solido gerado pela revoluçaõ da parte inferior *BMD*. Logo a differença destes dous solidos dará evidentemente o solido produzido pela revoluçaõ da figura *BCD* ao redor do eixo *AP*.

122 Em fim, seja qual for o numero das figuras generantes, este methodo terá sempre a mesma applicaçaõ. Porque de huma parte, cada figura multiplicada pela circumferencia, que descreve o seu centro de gravidade, dá o solido por ella produzido na sua revoluçaõ; e da outra parte, a soma dos productos de cada figura pela circumferencia, que descreve o seu particular centro de gravidade, he igual á soma das figuras multiplicada pela circumferencia, que descreve o centro commum de gravidade, porque as circumferencias saõ proporcionais aos raios, e a soma dos productos de cada figura pela distancia do seu centro de gravidade ao eixo, he igual á soma das figuras multiplicada pela distancia do centro commum de gravidade ao mesmo eixo. Logo o producto total da soma das figuras multiplicada pela circumferencia, que descreve o centro commum de gravidade, dará a soma dos solidos produzidos pela revoluçaõ de cada huma das figuras. Deve pois ter-se por geralmente demonstrado o Theorema seguinte.

123 *Todas as vezes que huma, ou muitas figuras quaisquer, situadas no mesmo plano, girarem ao redor de hum eixo, tomado como se quizer no mesmo plano, a soma dos solidos por ellas produzidos na sua revoluçaõ, he igual á soma de todas as figuras, multiplicada pela circumferencia, que descreve o centro de gravidade de todo o systema.* Bem entendido, que se todas as figuras generantes naõ estiverem da mesma parte a respeito do eixo, deve tirar-se a soma dos solidos produzidos pelas figuras, que estaõ de huma parte, da soma dos solidos produzidos pelas figuras, que estaõ da outra; e a differença será o resultado que se procura.

Este Theorema, e o que acima demonstrámos (n. 109.), tem grande uso na Mechanica. Ambos saõ conhecidos pela denominaçaõ de *Theoremas do P. Guldin*, que foi o primeiro que os publicou em huma obra intitulada *Centrobaryca.*

124 Pelo ultimo Theorema póde medir-ſe a ſolidez de todos os ſolidos gerados pela revoluçaõ de qualquer figura ſymmetrica, do meſmo modo que pelo primeiro temos medido as ſuperficies curvas dos meſmos ſolidos, como ſe vê nos caſos ſeguintes.

I. Se o polygono ſymmetrico da Fig. 25. fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer eixo $AB$, o ſolido que reſultar terá por medida o producto da ſuperficie do meſmo polygono multiplicada pela circumferencia do raio $GG'$.

II. Se o circulo $ACE$ (Fig. 26.) fizer huma revoluçaõ ao redor da ſua tangente $AB$, o ſolido por elle produzido terá por medida a ſuperficie do meſmo circulo multiplicada pela circumferencia. Sendo pois o raio $= a$, ſerá o dito ſolido $= 2a^3c^2$.

III. Se huma ellipſe (Fig. 27. 28.), ou qualquer outra figura compoſta de duas, ou de quatro partes iguais, ſemelhantes, e ſymmetricamente diſpoſtas a reſpeito de hum ponto $G$, fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer linha $AB$, o ſolido que reſultar ſerá igual a hum priſma recto, que tenha por baſe a figura generante e por altura huma recta igual á circumferencia deſcrita pela revoluçaõ do ponto $G$.

IV. Em geral: Se a reſpeito de hum ponto $C$ (Fig. 29.) eſtiverem quantas figuras ſe quizer, iguais, ſemelhantes, e diſtribuidas ſymmetricamente em roda delle, o ſolido produzido pela revoluçaõ de todo o ſyſtema ao redor de qualquer eixo $AB$, terá por medida a ſoma de todas as ſuperficies generantes multiplicadas pela circumferencia deſcrita pelo raio $C'C$.

125 Reciprocamente, quando ſe tratar de conhecer o centro de gravidade de qualquer figura plana, eſta ſe fará girar ao redor de qualquer eixo tomado arbitrariamente, e dividindo o ſolido que reſultar pela ſuperficie generante, e por $2c$, o quociente ſerá a diſtancia do centro de gravidade ao eixo de rotaçaõ. Achando pois outra diſtancia ſemelhante a hum ſegundo eixo tomado tambem arbitrariamente, o centro de gravidade ſerá determinado, e conhecido.

Ha com tudo hum pequeno inconveniente na applicaçaõ deſte methodo; e he, que para nos ſervirmos delle he neceſſario, que por outra parte conheçamos a medida dos ſolidos que pódem deſcrever as ſuperficies, cujo centro

de

de gravidade queremos determinar. Faltando isso, será necessario recorrer ás formulas gerais acima dadas (n. 119.). Eisaqui algumas applicações, que daraõ nova luz a esta materia.

## *Exemplos.*

126 I. *Achar o centro de gravidade de qualquer trapezio A B M P* (Fig. 37.), *o de hum triangulo, ou de qualquer figura rectilinea.*

Já sabemos pela Geometria, que a pyramide conica truncada, que resulta da revoluçaõ deste trapezio ao redor do eixo $AP$, tem por valor $\frac{c}{3} AP(AB^2 + AB.MP + MP^2)$, e que a superficie do trapezio se exprime por $\frac{1}{2} AP(AB + MP)$. Logo será a distancia - - - - - - - - -

$$GG' = AG'' = \frac{\frac{c}{3} AP(AB^2 + AB.MP + MP^2)}{2c\frac{1}{2}AP(AB + MP)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2 + AB.MP + MP^2}{AB + MP}$$

$$= \frac{1}{3} AB + \frac{1}{3} \cdot \frac{MP^2}{AB + MP}.$$

Donde se vê, que este valor he absolutamente independente da linha $AP$.

Do mesmo modo sabemos, que a pyramide conica recta descrita pela revoluçaõ do triangulo $BQM$ ao redor do eixo $AQ$, tem por valor $\frac{1}{3} BQ.c.QM^2 = \frac{1}{3} c.AP^2(MP - AB)$, e que o cylindro descrito pela revoluçaõ do rectangulo $APMQ$ ao redor do mesmo eixo tem por medida $c.AP.^2 MP$. Logo o solido produzido pela revoluçaõ do trapezio $ABMP$ terá por expressaõ $c.AP^2.\left(\frac{2}{3} MP + \frac{1}{3} AB\right)$; e conseguintemente tere-

teremos a diſtancia

$$GG'' = AG' = \frac{\frac{1}{3}c \, . \, AP^2 (AB + 2MP)}{2c \, . \, \frac{1}{2} AP (AB + MP)}$$

$$= \frac{1}{3} AP \, . \, \frac{AB + 2MP}{AB + MP}$$

$$= \frac{2}{3} AP - \frac{1}{3} \, . \, \frac{AP \, . \, AB}{AB + MP} \, .$$

He facil de ver, que eſtas formulas ſempre tem lugar; ſeja qual for o angulo formado ſobre as parallelas $AB$, $MP$ pela ſecante $AP$, com tanto que haja a advertencia de tomar ſempre $GG'$ e $GG''$ reſpectivamente parallelas a $AQ$ e $AP$. Logo por eſtas duas formulas determinaremos o centro de gravidade de qualquer trapezio.

127 Daqui ſe ſegue, que fazendo $AB = 0$, e convertendo-ſe o trapezio em hum triangulo $AMP$ (Fig. 38.), o centro de gravidade ſe determinará facilmente tomando $AG' = \frac{2}{3} AP$, e conduzindo $G'G = \frac{1}{3} MP$, e parallela a $MP$.

Porem, ſe pelo ponto G aſſim determinado, e pelo ponto $A$ imaginarmos huma recta $AGF$, teremos $AG' : AP$, ou $2 : 3 :: AG : AF :: GG' : FP$; logo $FG = \frac{1}{3} AF$, e $FP = \frac{1}{2} MP$. Iſto nos dará huma conſtrucçaõ muito ſimples, para determinar o centro de gravidade de qualquer triangulo $AMP$. Conduziremos a recta $AF$ do vertice $A$ para o meio $F$ do lado oppoſto, na qual tomaremos a porçaõ $FG$, que ſeja huma terça parte della; e ſerá $G$ o centro procurado.

128 Seria facil de achar a meſma conſtrucçaõ de hum modo ainda mais ſimples, que naõ ſuppoem o calculo precedente. Porque(Fig.39.), como a recta $AF$ conduzida do vertice $A$ para o meio do lado oppoſto $MP$ divide em partes iguais todas as parallelas a $MP$, paſſa por todos os centros de gravidade particulares dellas, e conſeguintemente pelo centro de gravidade do meſmo triangulo. Pela meſma raſaõ, conduzindo $MH$ do vertice $M$ para o meio do lado

lado opposto $AP$, esta segunda recta passará tambem pelo centro de gravidade; o qual por conseguinte se achará no ponto $G$ determinado pela intersecçaõ das linhas $AF$, $MH$. Mas para deduzir o valor de $FG$, tire-se a recta $HF$, que será parallela ao terceiro lado $AM$, e teremos $PH : PA$, ou $1 : 2 :: HF : AM :: GF : AG$; logo $FG = \frac{1}{3} AF$.

129 Agora, que cousa mais facil do que achar o centro de gravidade de qualquer figura rectilinea? Dividir-se-ha primeiramente em triangulos, e se buscaráõ os centros particulares de gravidade de todos elles: depois considerando estes centros, como pontos carregados do pezo dos seus triangulos, determinar-se-ha o centro commum de gravidade, que será o da figura proposta.

130 II. *Achar o centro de gravidade de hum semi-segmento circular $AMP$ (Fig. 40.), e o do segmento inteiro.*

Fazendo $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$; teremos $yy = 2ax - xx$, e $\int yydx = \int (2axdx - xxdx) = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$, e por conseguinte $GG' = \frac{(a - \frac{1}{3}x)\frac{1}{2}x^2}{AMP}$.

Do mesmo modo teremos $\int xydx = \int [(x - a)dx . \sqrt{(2ax - xx)} + adx\sqrt{2ax - xx})] = -\frac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a . AMP$; logo $AG' = \frac{a . AMP - \frac{1}{3}PM^3}{AMP}$, ou $CG' = \frac{1}{3} . \frac{PM^3}{AMP}$.

O mesmo resultado se acharia, sem ter necessidade destas integrações, se fizessemos revolver successivamente o semi-segmento $AMP$ ao redor dos eixos $CA$, $CB$, e medissemos as porções de esfera por elle produzidas.

131 Agora, para determinar o centro de gravidade de todo o segmento $MAMPM$, naõ he necessario mais do que a distancia $CG' = \frac{\frac{1}{3}PM^3}{AMP}$; cujo valor calculado pa-

ra o ſemicirculo $BAB$ dará $\frac{4}{3} \cdot \frac{a}{c}$, que ſe reduz proximamente a $\frac{11}{33} a$.

132 III. *Achar o centro de gravidade de qualquer ſector circular* $MAMC$ ( Fig. 40. ).

Neſte Problema podemos ſervirnos de qualquer dos tres modos ſeguintes. 1º. Podemos reſolver o ſector em duas partes, das quais ſeja huma o ſegmento $MAMPM$, e a outra o triangulo $MCM$. A primeira tem o ſeu centro de gravidade em $G'$, e a ſegunda em $G'''$; logo o ſector deve ter o ſeu em hum ponto $r$, de ſorte que ſeja

$$Cr(MAMPM+MCM)=CG'.MAMPM+CG'''.MCM=\frac{2}{3}PM^3+\frac{2}{3}CP.CP.PM=\frac{2}{3}PM(CP^2+PM^2)=\frac{2}{3}PM.CM^2;$$ logo $$Cr=\frac{\frac{2}{3}PM.CM^2}{AM.CM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{MM.CM}{MAM}.$$

Donde, para determinar o centro de gravidade de hum ſector circular em todos os caſos, teremos eſta proporçaõ: *O arco* $MAM$ *he para a ſua corda* $MM$, *como dous terços do raio para a diſtancia do centro do circulo ao centro de gravidade do ſector.*

2º. Podemos conſiderar o ſector, como formado por triangulos infinitamente pequenos $CNn$ ( Fig. 41. ), todos com o vertice no centro do circulo, cujos centros particulares de gravidade eſtaráõ ſeguidamente ſobre o arco $BED$ deſcrito com o raio $CB=\frac{2}{3}CM$. Aſſim naõ reſta mais do que determinar o centro de gravidade do arco $BED$ ( n. 114 ), que ſe achará tomando

$$CG=\frac{CB.BFD}{BED}=\frac{2}{3}\cdot\frac{CM.MM}{MAM}.$$

3º. Podemos tambem ſuppor, que o ſector $CMAM$ faz huma revoluçaõ ao redor do eixo $CK$, perpendicular a $CA$. O ſolido produzido ſerá huma eſpecie de ſector esferico, que terá por medida a ſuperficie deſcrita na meſma ma revoluçaõ $M M$ . *circ* $A C$ multiplicada pelo terço do raio. Logo teremos ( n. 125.)

$$C G = \frac{MM . 2c . AC . \frac{1}{3} AC}{2c . MAM . \frac{1}{2} CM} = \frac{2}{3} . \frac{CM . MM}{MAM} .$$

133 IV. *Achar o centro de gravidade de huma parabola* $AM$ *de qualquer ordem que seja* ( Fig. 42. ) .

Supponde o parametro $= 1$ , a equaçaõ desta curva $y^m = x$ nos dará $dx = m y^{m-1} dy$ , e conseguintemente $\int y dx = \int m y^m dy = \frac{m}{m+1} y^{m+1}$ ; logo

$$G G' = \frac{\frac{1}{2} \int y y dx}{\int y dx} = \frac{\frac{m}{m+2} y^{m+2}}{\frac{2m}{m+1} y^{m+1}} = \frac{m+1}{2m+4} . PM.$$

$$G G'' = \frac{\int x y dx}{\int y dx} = \frac{\frac{m}{2m+1} y^{2m+1}}{\frac{m}{m+1} y^{m+1}} = \frac{m+1}{2m+1} . AP.$$

Estas formulas na parabola ordinaria daõ $G G' = \frac{3}{8} MP$ , e $G G'' = \frac{3}{5} AP$ ; valores, que daraõ sempre a conhecer facilmente o seu centro de gravidade.

134 V. *Achar o centro de gravidade de hum segmento elliptico qualquer* $A M P M$ ( Fig. 43. ) .

Considerando os momentos em ordem ao segundo eixo , e fazendo $C P = x$ , $P M = y$ , $C A = a$ , $C B = b$ , acharemos $C G = \frac{\int -y x dx}{\int -y dx}$ . Porém $y y = b b - \frac{b b x x}{a a}$ ; logo $x dx = - \frac{a a}{b b} y dy$ , e $\int -y x dx = \frac{1}{3} . \frac{a^2}{b^2} y^3$ ;

logo $C G = \frac{\frac{2}{3} . \frac{a^2}{b^2} . PM^3}{MAMPM} = \frac{\frac{2}{3} . \frac{a^3}{b^3} PM^3}{\frac{a}{b} . MAMPM} = \frac{2}{3} . \frac{PN^3}{NANPN}$ .

Don-

Donde se mostra, que *o centro de gravidade do segmento elliptico A M P M he o mesmo que o do segmento circular N A N P N.*

O mesmo succede com o centro de gravidade do sector elliptico *C M A M C* a respeito do sector circular *C N A N C*, cujo arco he sempre determinado pelo prolongamento de *M M*.

## V.

## *Determinar o centro de gravidade das superficies curvas.*

135 NAõ póde haver difficuldade nesta indagaçaõ, quando se trata da superficie lateral de hum prisma. Porque bem se vê, que o centro de gravidade desta especie de superficies deve necessariamente achar-se no meio da linha, que descreve o centro de gravidade da base, na formaçaõ do prisma. Passemos pois aos solidos de revoluçaõ.

136 Seja huma superficie curva, produzida pela revoluçaõ do arco *M B* ao redor do eixo *A P* ( Fig. 44. ). He evidente, que o seu centro de gravidade *G* deve estar no mesmo eixo, e que para ser determinado, naõ he necessario mais do que conhecer a sua distancia á origem das abscissas, que supporemos em *A*.

Está claro tambem, que o elemento *M m* descreve a superficie de huma pyramide conica truncada, a qual tem por medida $2cyds$, e por centro de gravidade o ponto $r$ no meio de $Pp$. Este ponto póde considerar-se carregado de todo o pezo da superficie $2cyds$, e o seu momento em ordem ao ponto *A* origem das abscissas será $2cxyds$. Logo a formula $AG = \frac{\int xyds}{\int yds}$ fará sempre conhecer os centros de gravidade das superficies curvas dos solidos de revoluçaõ.

### *Exemplos.*

I. A*char o centro de gravidade da superficie curva de huma pyramide conica recta MAM* ( Fig.45.).

Fa-

Fazendo $AP = x$, $PM = y$, e o angulo $MAP = a$, teremos primeiramente $y = x\ tang\ a$, e $ds = \frac{dx}{cos\ a}$, e conseguintemente $AG = \frac{\int xx\,dx}{\int x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AP$. Donde se collige, que *o centro de gravidade da superficie conica he o mesmo que o do triangulo M A M.*

Com igual facilidade se podia chegar ao mesmo resultado, imaginando a superficie conica dividida em huma infinidade de pequenos triangulos iguais e semelhantes $MAm$, cujos centros particulares de gravidade se achaõ todos em huma circumferencia descrita do pólo $A$ com o raio $AD = \frac{2}{3}AM$, e o centro de gravidade desta circumferencia se achará conseguintemente em $G$ na distancia $AG = \frac{2}{3}AP$.

II. *Achar o centro de gravidade da superficie de hum segmento esferico, e em geral de qualquer zona* (Fig. 44.).

Sendo $a$ o raio da esfera, e $B$ a origem das abscissas, teremos $y\,ds = a\,dx$, e conseguintemente $BG = \frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{1}{2}x$. Donde se vê geralmente, que *o centro de gravidade da superficie de hum segmento esferico, ou de qualquer zona, está no meio da porçaõ do eixo comprehendida por elle, ou por ella.*

III. *Achar o centro de gravidade da superficie convexa de hum solido paraboloide* (Fig. 44.).

Seja $BM$ hum arco da parabola, que pela sua revoluçaõ descreve o solido paraboloide, e seja $B$ a origem das abscissas. Fazendo o parametro $= 1$, será a equaçaõ da parabola generante $yy = x$, e acharemos o centro de gravidade da superficie convexa do paraboloide, pela formula seguinte

$$BG = \frac{\int y^3 dy \sqrt{(1+4yy)}}{\int y dy \sqrt{(1+4yy)}} = \text{- - - - -}$$

$$\frac{\frac{1}{5}\left[(1+4yy)^{\frac{5}{2}}-1\right]-\frac{1}{3}\left[(1+4yy)^{\frac{3}{2}}-1\right]}{4\cdot\frac{1}{3}\left[(1+4yy)^{\frac{3}{2}}-1\right]}$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{yy(1+4yy)^{\frac{3}{2}}}{(1+4yy)^{\frac{3}{2}}-1}-\frac{1}{10}.$$

### VI.

### *Determinar o centro de gravidade de qualquer ſolido.*

137 IMaginemos o ſolido partido por ſecções infinitamente vezinhas, e parallelas á hum plano tomado arbitrariamente. Chamando $T$ qualquer deſtas ſecções, e $x$ a ſua diſtancia ao dito plano, ſerá $T\,dx$ a expreſſaõ do elemento do ſolido comprehendido entre duas ſecções contiguas, e $Tx\,dx$ a expreſſaõ do ſeu momento. Logo a diſtancia do centro de gravidade do ſolido ao plano referido ſerá geralmente repreſentada pela formula $\frac{\int Tx\,dx}{\int T\,dx}$, na qual $\int T\,dx$ he o meſmo que o volume do ſolido propoſto. Repetindo o meſmo calculo a reſpeito de outros dous planos perpendiculares entre ſi, e ao primeiro, teremos tres diſtancias ao centro de gravidade, que he o que baſta para o determinar.

### *Exemplos.*

138 I. *AChar o centro de gravidade dos priſmas, dos cylindros rectos e obliquos, das pyramides angulares e conicas; e geralmente de todos os polyedros.*

Sendo as ſecções dos priſmas, e cylindros, todas paralrallelas e iguais ás bases oppostas, está claro que o seu centro commum de gravidade deve achar-se no meio da linha recta, que passa pelos centros particulares de gravidade das mesmas bases. Donde naõ tem difficuldade alguma este primeiro caso.

O segundo naõ he menos facil. Porque todos os corpos, gerados á maneira das pyramides, podem ser partidos por secções parallelas, e semelhantes á base (Fig. 46.): e entaõ a recta $AD$, conduzida do vertice para o centro de gravidade da base $D$, deve evidentemente passar pelo centro de gravidade de cada huma das secções, e conseguintemente pelo do solido proposto. Logo para conhecer a distancia $AG$, imaginaremos o pezo de cada secçaõ reunido no seu centro particular de gravidade em hum ponto $D$ da recta $AD$, que chamaremos $x$; e advertindo, que todas estas secções saõ proporcionais aos quadrados das suas distancias respectivas ao ponto do vertice $A$, teremos

$$AG = \frac{\int x^3\,dx}{\int x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AD.$$

Logo *o centro de gravidade dos solidos pyramidais estará sempre aos tres quartos da distancia $AD$, contada do vertice para o centro de gravidade da base.* E com este conhecimento, ficará muito facil a indagaçaõ do centro de gravidade de toda a sorte de polyedros.

139 II. *Achar em particular o centro de gravidade de quaisquer solidos de revoluçaõ.*

Tomando qualquer segmento perpendicular ao eixo de revoluçaõ, he manifesto que o seu centro de gravidade deve achar-se no mesmo eixo. Porém a expressaõ do elemento comprehendido entre duas secções infinitamente vezinhas he $cyydx$; logo a distancia do centro de gravidade do solido á origem das abscissas será representada geralmente pela formula $\frac{\int yyxdx}{\int yydx}$.

Supponhamos, por exemplo, que nos pedem o centro de gravidade de qualquer segmento esferico (Fig. 44.). Nesse caso teremos $yy = 2ax - xx$; donde resulta - - -

$\int yyx\,dx = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$, e $\int yy\,dx = axx - \frac{1}{3}x^3$; logo a distancia do centro de gravidade de qualquer segmento esferico ao vertice será conhecida pela formula

$$BG = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}x.$$

Desta sorte, fazendo $x = 2a$, para termos o centro de gravidade da esfera inteira, que por outra parte sabemos que coincide com o centro da figura, acharemos $BG = a$; e fazendo $x = a$, teremos $BG = \frac{5}{8}a$, isto he, será o centro de gravidade de hum hemisferio aos sinco oitavos do raio, contando do vertice.

III. *Achar o centro de gravidade de qualquer sector esferico CMAB* (Fig. 47.).

Todo o sector esferico póde resolver-se em duas partes, huma das quaes he o segmento esferico $AMB$, e a outra huma pyramide conica recta $CBM$. O segmento tem o centro de gravidade $G$ na distancia $AG = \frac{8a-3x}{12a-4x}x$, e a pyramide conica o centro de gravidade $G'$ na distancia $AG' = \frac{3x+a}{4}$. A solidez do segmento tem por valor $\frac{c}{3}(3axx - x^3)$, a da pyramide conica $\frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx)$, e a do sector $\frac{2}{3}ca^2x$. Logo tomando os momentos em ordem ao ponto $A$, a fim de determinarmos o centro de gravidade $G''$ do sector inteiro, teremos $\frac{2}{3}ca^2x \cdot AG'' = \frac{c}{3}(3ax^2 - x^3)\left(\frac{8a-3x}{12a-4x}x\right) + \frac{c}{3}(a-x)(2ax - x^2)\left(\frac{3x+a}{4}\right)$; e fazendo as reduções necessarias;

$AG'' = \frac{2a+3x}{8}$; expressaõ, que igualmente nos dá o centro de gravidade do hemisferio aos finco oitavos do raio contados do vertice, como achámos no exemplo precedente.

O mesmo resultado se achará, concebendo o sector esferico, como formado de huma infinidade de pyramides, as quais tenhaõ por vertice commum o centro $C$. Porque os centros particulares de gravidade de todas ellas se acharáõ em huma superficie esferica descrita do mesmo centro $C$ com hum raio igual aos tres quartos de $CM$, e o centro de gravidade da dita superficie se achará na distancia $\frac{2a+3x}{8}$ a respeito do ponto $A$.

140 IV. *Achar o centro de gravidade dos solidos paraboloides, hyperboloides, e ellipsoides.*

Em quanto ao paraboloide, sendo a equaçaõ da parabola generante $yy = x$, teremos immediatamente $AG = \frac{\int xxdx}{\int xdx} = \frac{2}{3}AP$.

Na hyperbola he $yy = 2ax + xx$ (Fig 48.); e substituindo este valor na formula geral, teremos - - - - -

$$AG = \frac{\int (2ax + xx)xdx}{\int (2ax + xx)dx} = \frac{8a+3x}{12a+4x}x.$$

Donde se vê, que tomando huma abscissa $x$ infinita, he $AG = \frac{3}{4}x$; e ao contrario, tomando a abscissa infinitamente pequena, he $AG = \frac{2}{3}x$; de sorte, que $AG$ se acha sempre entre os dous terços, e tres quartos de $AP$.

Pelo que respeita ao centro de gravidade de qualquer segmento ellipsoidal, feito por huma secçaõ perpendicular ao eixo, he sempre o mesmo que o do segmento correspondente da esfera circunscrita, e se achará da mesma maneira.

Mas, se a secçaõ do ellipsoide, em lugar de ser perpendicular ao eixo, for obliqua de qualquer sorte, como $MPN$ (Fig. 49.), de que modo determinaremos entaõ

o

o centro de gravidade do ſegmento $MSNP$, que delle reſulta?

Supponhamos conduzido pelo centro $C$ hum plano elliptico perpendicular ao plano da ſecçaõ, o qual divide o ſegmento propoſto em duas partes iguais, e ſemelhantes, e pelo ponto $P$ meio de $MN$ tiremos o ſemidiametro $CPS$. Iſto poſto, demonſtra-ſe na Geometria que a ſecçaõ $MPN$ he huma ellipſe, que tem por eixo maior a recta $MN$, e que he ſemelhante ás outras ſecções, cujos eixos reſpectivos ſaõ as duplas ordenadas ao ſemidiametro $CS$. Donde ſe ſegue, que o centro de gravidade $G$ deve acharſe no ſemidiametro $CS$; e que, fazendo $SP = x$, $PM = y$, $CS = m$, ſerá a diſtancia deſte centro ao ponto $S$,

$$SG = \frac{\int PM^2\, x\, dx}{\int PM^2\, dx} = \frac{\int x\, dx\,(2mx - xx)}{\int dx\,(2mx - xx)} = \frac{8m - 3x}{12m - 4x}\, x;$$

valor perfeitamente ſemelhante ao que achámos para o ſegmento, que reſulta de huma ſecçaõ perpendicular ao eixo maior.

141 V. *Dado hum ſemicylindro recto elevado ſobre o ſemicirculo $DAB$, achar o centro de gravidade do ſolido, formado pela ſecçaõ de hum plano elliptico, $DBE$ ao qual ſe dá o nome de unha cylindrica* (Fig. 50.).

He manifeſto, que o centro procurado deve achar-ſe neceſſariamente em algum ponto do plano triangular $CEA$, que divide a unha em duas partes iguais, e ſemelhantes entre ſi. Sendo pois $GG'$ huma perpendicular conduzida do centro de gravidade $G$ para o raio $CA$, deveremos primeiramente determinar $CG'$.

Para iſſo ſupporemos o ſolido dividido por ſecções parallelas ao diametro $DB$, e perpendiculares á baſe. Cada ſecçaõ ſerá hum rectangulo $MPNnpm$, que terá por baſe $2y$, e por altura $Pp = \frac{bx}{a}$, fazendo $CA = a$, $AE = b$, e $CP = x$. Pelo que, fazendo ao ordinario $PM = y = \sqrt{(aa - xx)}$, teremos a ſuperficie de qualquer deſtas ſecções $= \frac{2b}{a}xy$, a ſolidez do elemento comprehendido entre duas ſecções contiguas $= \frac{2b}{a}xy\,dx$, e o ſeu momento em ordem a hum plano que paſſe por $BD$ perpendicudicularmente á baſe $= \frac{2b}{a} x x y\, dx$. Logo teremos

$$CG' = \frac{\int x x y\, dx}{\int x y\, dx} = \frac{\int x x\, dx \sqrt{(aa - xx)}}{\int x\, dx \sqrt{(aa - xx)}}.$$

Porém $\int x x\, dx \sqrt{(aa - xx)} = -\frac{1}{4} x (aa - xx)^{\frac{3}{2}}$ $+ \frac{a^2}{4} \int dx \sqrt{(aa - xx)} = -\frac{1}{4} x (aa - xx)^{\frac{3}{2}} +$ $\frac{1}{4} a^2 . CDMP$. Logo para o ſolido inteiro ſerá o integral $\frac{1}{4} a^2 . CDMAC$, ou $\frac{1}{8} a^3 . AMD$. Do meſmo modo $\int x\, dx \sqrt{(aa - xx)} = \frac{1}{3} \left[ a^3 - (aa - xx)^{\frac{3}{2}} \right]$, e o ſeu valor total $\frac{1}{3} a^3$; (donde concluiremos de paſſagem, que a ſolidez da unha he $\frac{2b}{a} . \frac{1}{3} a^3 = \frac{2}{3} a^2 b$). Logo finalmente $CG' = \frac{\frac{1}{8} a^3 . AMD}{\frac{1}{3} a^3} = \frac{3}{8} AMD$, ou proximamente $\frac{33}{56} AC$.

Falta agora determinar a outra diſtancia $GG'$. Para eſſe effeito, imaginemos o ſolido dividido por ſecções parallelas á ſua baſe, cada huma das quaes ſerá hum ſegmento $mpna$ igual á ſua projecção $MPNA$. Chamando pois $z$ a perpendicular $Aa$, teremos $GG' = \frac{\int MPNA . z\, dz}{\int MPNA . dz}$: porém $\int MPNA . dz$ he tambem a ſolidez da unha, que temos achado $= \frac{2}{3} a^2 b$; logo, advertindo que $z = \frac{bx}{a}$, teremos $\int MPNA . z\, dz = \frac{bb}{aa} \int MPNA . x\, dx = \frac{bb}{aa}$

(M

$\left(MPNA.\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\, d.MPNA\right)$ : mas por outra parte he $d.MPNA = -2y\,dx$; logo $\int MPNA.x\,dx = MPNA.\frac{x^2}{2} + \int x^2 dx \surd(aa-xx) = MPNA.\frac{xx}{2} - \frac{1}{4}x(aa-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}a^2 : CDMP$. O valor defte integral tomado para todo o folido dará $\frac{1}{8}a^3.AMD$; logo $GG' = \frac{\frac{3b}{aa}.\frac{1}{8}a^3}{\frac{2}{3}a^2b}AMD = \frac{3}{16}.\frac{b}{a}AMD = \frac{3}{16}$ da quarta parte da circumferencia, que defcreveria o raio $EA$.

Defte calculo fe tira $CG' : G'G :: \frac{3}{8} : \frac{3b}{16a} :: a : \frac{b}{2}$; logo o centro de gravidade $G$ eftá na recta $CGK$, conduzida do centro $C$ para o meio K da linha $AE$. E com effeito efta recta paffa por todos os centros particulares de gravidade das fecções rectangulares $MmNn$, que formaõ a unha; logo deve paffar pelo centro commum de gravidade de todas ellas, que he manifeftamente o centro de gravidade da mefma unha. Affim para o determinar, bafta tomar $CG'$ igual aos tres oitavos da quarta parte da circumferencia da bafe, e tirar pelo ponto $G'$ huma perpendicular á mefma bafe, a qual cortará a linha $CK$ no centro procurado $G$.

142 Por tudo o que até aqui temos expendido, eftá claro, que naõ há linha, nem fuperficie, nem folido algum, cujo centro de gravidade fe naõ poffa achar, todas as vezes que tivermos a fua equaçaõ. Naõ fuccede porém o mefmo, quando hum folido, por exemplo, he de tal forte irregular, que naõ póde calcular-fe o feu volume, fenaõ approximadamente; porque entaõ naõ poderemos tambem confeguir para o centro de gravidade, mais do que huma determinaçaõ mais, ou menos approximada, conforme a do volume.

Para iffo confideramos o folido dividido em partes tais, que poffaõ reduzir-fe fem erro fenfivel aos folidos prifmaticos,

maticos, ou a quaisquer outros corpos geometricos, cujo centro de gravidade nos he conhecido. Feita esta resolução, tomamos a soma dos momentos de todas as partes em ordem a hum plano determinado, e a dividimos pela soma das mesmas partes, isto he, pelo volume do solido, para conhecermos a distancia do centro de gravidade ao mesmo plano.

E se o corpo naõ for symmetrico, repetiremos o mesmo calculo a respeito de outros dous planos perpendiculares entre si, e ao primeiro, a fim de determinarmos ao menos proximamente o centro commum de gravidade. Para conpensarmos a falta de exactidaõ nestes resultados, será conveniente, que entaõ consideremos o centro de gravidade, naõ já como hum ponto mathematico, mas como huma pequena esfera descrita do ponto achado como centro, e com hum raio tanto mais pequeno, quanto for mais approximado o calculo, que segundo as differentes circumstancias houvermos praticado.

## *Extracto de outro methodo para determinar os centros de gravidade.*

143 NAs Memorias da Academia Real das Sciencias se acha hum methodo muito simples, pelo qual se descobrem geralmente todas as formulas, já calculadas para os centros de gravidade. Como he naõ sómente agradavel, mas tambem instructivo, o chegar aos mesmos resultados por caminhos differentes, indicaremos aqui o que M. Clairaut traçou em huma pequena Memoria, que se contêm no volume de 1731. Eisaqui o fundamento.

*O centro commum de gravidade de dous corpos se acha dividindo a linha, que ajunta os seus centros particulares de gravidade, na rasaõ inversa dos seus pezos.*

Supposto este principio, considera o Autor em qualquer superficie hum dos seus elementos infinitamente pequenos, e tomando o seu centro de gravidade, como he sempre muito facil, suppoem conduzida huma recta deste ponto para o centro de gravidade procurado. Depois divide esta linha na rasaõ inversa dos pezos da superficie inteira e do seu elemento; donde tira a formula dos centros de gravidade de todas as superficies. Ex-

*Exemplos.*

I. SEja qualquer curva $MAM$ ( Fig. 51. ), dividida igualmente em duas pelo eixo $AP$. He claro, que o ſeu centro de gravidade deve achar-ſe na linha $AP$: ſupponhamos, que em $G$. O ſeu elemento $MmmM$ tem o centro de gravidade no meio de $Pp$, e por ſer $Pp$ infinitamente pequena, póde ſuppor-ſe em P. Seja $g$ o centro de gravidade da ſuperficie $mAm$, e conſeguintemente $Gg$ a differencial, ou fluxaõ de $AG$: Fazendo $AG = u$, $AP = x$, $PM = y$, teremos $Gg$ ( $du$ ) : $gP$, ou $GP$ ($x - u$) : : $MmmM$ ($2ydx$) : $MAM$ ( $2\int ydx$ ); donde ſe deduz $du\int ydx = xydx - uydx$, ou $uydx + du\int ydx = xydx$, cujo integral $u\int ydx = \int xydx$ nos dará $u = AG = \frac{\int xydx}{\int ydx}$ (n. 119.).

II. Seja qualquer eſpaço $APM$ comprehendido entre a abſciſſa $AP$, a ordenada $PM$, e o arco $AM$ (Fig. 52.). Perguntaõ-ſe as formulas do ſeu centro de gravidade.

Supponhamos primeiramente, que eſte eſpaço varía de huma quantidade infinitamente pequena $MmpP$, cujo centro de gravidade $O$ eſtará no meio de $PM$. Depois ſupponhamos que o eſpaço propoſto $APM$ tem o ſeu centro de gravidade em qualquer ponto $G$, e conduzamos a recta $GO$. O centro procurado deve eſtar em hum dos pontos $g$ deſta linha.

Para determinarmos eſte ponto, dividiremos $GO$ de maneira, que ſeja $Gg : gO : : MmpP : APM$; e depois diſſo abaixando ſobre $AP$ as perpendiculares $GG'$, $gg'$, e conduzindo $GR$ parallela a $AP$, teremos $Gg : gO$, ou $Gg : GO : : G'g' : G'P' : : MmpP : APM$.

Suppondo pois $AG' = u$, $GG' = t$, $AP = x$, $PM = y$, ſerá $G'g' = du$, $gb = dt$, $Pp = dx$, $PO = \frac{1}{2}y$; e teremos na proporçaõ precedente $Gg : GO : : du : x - u : : ydx : \int ydx$; donde concluiremos igualmente $u = AG' = \frac{\int xydx}{\int ydx}$.

Iſto poſto, os triangulos ſemelhantes $Ggb$, $GOR$ daráõ $Gb : GR : : gb : OR$, ou algebricamente $du : x - u : : dt : \frac{1}{2}y - t : : ydx : \int ydx$; logo $dt\int ydx = \frac{1}{2}yydx -$

ty

$tydx$, ou $dt\int dx + tydx = \frac{1}{2}yydx$; e integrando, $t\int ydx = \frac{1}{2}\int yydx$. Donde finalmente concluiremos $t = GG' = \frac{\frac{1}{2}\int yydx}{\int ydx}$ (n. 119.).

III. Seja $AM$ hum arco de qualquer curva (Fig. 53.). Devemos achar as formulas necessarias para determinar geralmente o seu centro de gravidade.

Seja $G$ o centro procurado, e $M$ o do elemento $Mm$; divida-se $MG$ em hum ponto $g$ na rasaõ de $Mm$ a $AM$; conduzaõ-se as parallelas, como na figura precedente, e conservando as mesmas denominaçoens, teremos $Gb : GR :: gb : MR$, ou $du : x - u :: dt : y - t$, e $Gg : GM :: G'g' : G'P :: Mm : AM$; logo $du : x - u :: ds : s$, e $dt : y - t :: ds : s$; e conseguintemente $u = AG' = \frac{\int xds}{s}$, e $t = GG' = \frac{\int yds}{s}$, formulas perfeitamente semelhantes ás que já achámos (n. 106.).

Seguindo o mesmo methodo, naõ póde haver difficuldade em calcular as formulas, que determinaõ o centro de gravidade dos solidos.

## *Applicaçoens da Theorica dos centros de gravidade.*

A Theorica dos centros de gravidade naõ he de pura especulaçaõ, como muitas outras. Serve para explicar muitos phenomenos da natureza, principalmente os que dizem respeito á estabilidade dos corpos. Por isso será conveniente, que ajuntemos aqui algumas illustraçoens, que sirvaõ de base a estas applicaçoens.

144 Por quanto o centro de gravidade he aquelle ponto unico, onde todo o pezo de hum corpo se acha reunido para o sollicitar ao movimento, está claro que naõ póde o corpo pôr-se em quietaçaõ, se naõ for sustentado o seu centro de gravidade. Como porém naõ he possivel sustentallo immediatamente, naõ podemos esperar que hum

corpo se ponha em equilibrio, senaõ no caso de se achar o centro de gravidade na linha vertical, que passa pelo ponto que o sustenta.

Suppondo pois, que qualquer solido *BB* ( Fig. 54. ) está suspendido no ponto *C*, ou sustentado no ponto *A*, naõ poderá haver equilibrio, nem quietaçaõ por conseguinte, se *CG*, ou *AG* naõ estiverem na vertical, que passa pelo centro de gravidade *G*. Em todos os outros casos haverá o seu effeito a gravidade, sem que nada se opponha á sua acçaõ, de maneira que a destrua; e resultará huma especie de rotaçaõ. Mas quando o ponto de suspensaõ, ou de sustentaçaõ for verticalmente opposto á direcçaõ do centro de gravidade, todo o esforço com que elle he sollicitado ao movimento será aniquilado, e terá lugar o equilibrio.

145 Reciprocamente: Todas as vezes que qualquer corpo estiver em equilibrio, concluiremos que o seu centro de gravidade he sustentado por huma linha vertical. Assim, para determinarmos de hum modo simples o centro de gravidade de qualquer solido, pollo-hemos em equilibrio sobre a esquina de hum prisma triangular, e notaremos sobre a sua superficie a linha de intersecçaõ que ella faz com a esquina do prisma. Depois, tornaremos a pollo em outra situaçaõ sobre a mesma esquina, de sorte que igualmente fique em equilibrio, e notaremos outra linha como a precedente na mesma superficie. Estas duas linhas se cruzaráõ em hum ponto, do qual imaginaremos huma perpendicular conduzida para a profundidade do corpo, e essa passando pelo centro de gravidade mostrará a direcçaõ, pela qual he necessario suspender, ou sustentar o corpo, para haver equilibrio.

Em falta de prisma triangular, podemos servirnos da borda de huma meza, sobre a qual poremos o corpo, de maneira que esteja proximo a cahir, e notaremos com hum lapis a linha do contacto. Depois tornaremos a pollo em situaçaõ obliqua á primeira, mas igualmente proximo a cahir, e teremos outra linha que se cruzará com a primeira. O mais he facil de se entender.

Tambem póde suspender-se o corpo por qualquer dos seus pontos, e depois de estar em quietaçaõ suppoem-se huma vertical conduzida pelo ponto de suspensaõ a travez do corpo. Tornando a suspendello por outro ponto, imagina-se outra vertical, que vai cortar a primeira, e o centro

tro

tro de gravidade se achará sempre no ponto do concurso.

146 Examinemos agora a condiçaõ do equilibrio, quando hum corpo he sustentado por dous pontos. He necessario, em geral, que todo o esforço do seu pezo seja destruido pela resistencia dos dous pontos de sustentaçaõ. Porém isso naõ póde ter lugar, senaõ quando o centro de gravidade estiver no plano vertical, que passa pelos ditos dous pontos. Em qualquer outra situaçaõ, naõ seria o corpo embaraçado de girar ao redor do eixo, que repousa sobre os dous pontos de apoyo, antes ao redor delle faria oscillaçoens innumeraveis, se a fricçaõ, e a resistencia do ar, naõ o reduzissem finalmente á situaçaõ, que convem ao equilibrio.

147 Neste caso naõ he difficil de determinar a carga respectiva dos dous pontos, em que o corpo se sustenta. Seja $G$ o centro de gravidade de hum corpo, cujo pezo se considera todo concentrado nelle, e actuando pela direcçaõ perpendicular $Gg$ (Fig. 55.). Resolva-se esta potencia em outras duas parallelas $Aa$, $Bb$ que passem pelos pontos $A$, $B$; e conduzindo qualquer recta $agb$, cujas partes seraõ conhecidas, far-se-haõ estas duas proporçoens: $ab$ he para $bg$ como o pezo total do corpo para a parte que sustenta o ponto $A$, e $ab$ he para $ag$ como o pezo do mesmo corpo para a carga do ponto $B$.

148 Se hum corpo for sustentado por tres pontos $A$, $B$, $C$ (Fig. 56.), que naõ existirem em linha recta, será absolutamente immovel; e nesse caso poderemos calcular pelo methodo seguinte a carga de cada hum dos pontos, em que se sustenta.

Imaginemos hum plano $ABC$, que passe pelos tres pontos dados, e encontre em $G$ a vertical $Gg$ conduzida pelo centro de gravidade. E chamando $G$ o pezo do corpo, e $A$, $B$, $C$ as cargas respectivas dos tres pontos dados, resolvamos a potencia $G$ em outras duas, que passem por $C$, e por $D$; e teremos primeiramente

$$DC : G :: DG : C = \frac{DG}{DC} G :: GC : D = \frac{GC}{DC} G.$$

Depois resolvendo a potencia $D$ em outras duas, que passem por $A$, e por $B$, teremos

$$AB : \frac{GC}{DC} G :: AD : B = \frac{AD.GC}{AB.DC} G :: DB : A = \frac{DB.GC}{AB.DC} G.$$

O mesmo resultado se podia conseguir, imaginando dous planos verticais que deixassem para huma mesma parte os tres apoyos, e o centro de gravidade. Porque entaõ, chamando $a$, $b$, $c$, $g$ as distancias dos apoyos $A$, $B$, $C$ e do centro de gravidade $G$ a hum dos planos, e $a'$, $b'c'$, $g'$ as distancias respectivas ao outro, teriamos as tres equaçoens seguintes

$$\begin{aligned} Aa + Bb + Cc &= Gg \\ Aa' + Bb' + Cc' &= Gg' \\ A + B + C &= G, \end{aligned}$$

pelas quais facilmente se determinariaõ os valores de $A$, $B$, $C$.

149 Mas, se o corpo estiver posto sobre hum plano horizontal, quais devem ser as condiçoens do seu equilibrio?

I. Se elle naõ assentar sobre o plano, senaõ por huma das suas extremidades, será necessario que a vertical que passa pelo centro de gravidade $G$, passe tambem pelo ponto de contacto $C$ (Fig. 57.). Faltando esta condiçaõ, cahirá necessariamente o corpo para a parte da dita vertical; e ao contrario, sendo a vertical dirigida ao ponto $C$, deve o corpo ficar em descanço, porque a força que o sollicita ao movimento por essa direcçaõ he destruida pela opposiçaõ diametral do plano, e por outra parte naõ ha mais rasaõ para cahir para huma parte do que para a outra.

He verdade, que o menor aballo do plano, que o mais leve assopro póde desordenar este equilibrio, principalmente se o corpo tiver altura consideravel, e assentar sobre huma ponta muito aguda. Mas he, porque entaõ huma potencia estranha, por pequena que seja, vem ajuntarse com a da gravidade, e sollicita o corpo por huma nova resultante; circunstancia, de que prescindimos aqui. Concluamos pois, que para estabelecer o equilibrio de hum corpo sobre huma das suas pontas, he nessario que esta ponta, e o centro de gravidade estejaõ na mesma vertical.

II. Se o corpo assentar sobre qualquer plano por huma das suas faces, he necessario para o caso do equilibrio que a vertical $GC$ (Fig. 58.), que passa pelo centro de gravidade, passe tambem por algum dos pontos da base, e de outra sorte cahirá o corpo para a parte da mesma vertical.

Deste modo he, que as muralhas se sustentaõ perpendicularmente ao horizonte, ainda que as pedras naõ estejaõ ligadas entre si, com tanto que estejaõ bem a prumo. Naõ

po-

poderáõ cahir já mais, em quanto a vertical, que passa pelo seu centro de gravidade se apoyar sobre a base; e por essa rasaõ a estabilidade dos edificios depende muito da grossura dos alicerses.

Esta estabilidade será tambem tanto mais forte, quanto as paredes forem menos elevadas, sendo todas as mais cousas iguais. Porque se forem de altura consideravel, a mais leve inclinaçaõ fará cahir facilmente fóra da base a vertical, que passa pelo centro de gravidade. E por isso será inevitavel a ruina, se á força de argamassa, de gatos de ferro, e de outros meios semelhantes, naõ se oppuser huma resistencia proporcionada ao esforço da resultante.

Supponhamos com effeito, que he *GC* (Fig. 59.) a vertical, que passa pelo centro de gravidade; e resolvamos o seu esforço em outros dous, hum *GF* ao longo do muro, e o outro *GE* perpendicular ao mesmo muro. O primeiro será destruido pela resistencia dos alicerses, e o segundo naõ o póde ser, senaõ pelo ligamento dos materiais; porque entaõ faz a parede as vezes de huma alavanca, tanto mais favoravel ao esforço *GE*, quanto mais inclinada. Será logo necessaria em *A* huma resistencia tanto mais forte, quanto for o edificio menos a prumo; por onde se faz palpavel a utilidade dos alicerses profundos, e bem assentados.

150 III. Se o corpo assentar por muitas faces sobre hum plano horizontal, será necessario para haver de sustentar-se, que a vertical, que passa pelo centro de gravidade, passe tambem por qualquer das faces, ou por entre ellas, de sorte que lhe naõ fiquem todas para huma mesma parte. Faltando estas duas condiçoens, naõ póde a resultante resolver-se em tantas potencias parallelas, quantos saõ os pontos do contacto; logo naõ será destruida totalmente, e por conseguinte cahirá o corpo sobre o plano, que o sustenta.

Seja, por exemplo, o corpo *M* apoyado sobre hum plano horizontal em *A*, e *B* (Fig. 60.). Para que elle se conserve em equilibrio, he necessario que a vertical conduzida pelo seu centro de gravidade passe por hum dos pontos da linha *AB*. Se estivesse apoyado em *A*, *B*, *C*, seria necessario que a mesma vertical naõ cahisse fóra do triangulo *ABC* (Fig. 61.); e se *A*, *B*, *C*, fossem quaisquer

quer

quer ſuperficies que ſerviſſem de baſes ao corpo N, pela meſma raſaõ ſeria neceſſario que a vertical ſobredita naõ cahiſſe fóra da figura triangular formada pelas tangentes das tres baſes.

151 Imaginemos agora huma maſſa da fórma *AGB* (Fig. 62.), que ſegundo as condiçoens que acabámos de expôr, eſteja em equilibrio ſobre as duas baſes *A* e *B*, e ſuppoñhamos que tem o centro de gravidade em *G*. O ſeu pezo obrará pela vertical *GC*, e forcejando por ſeparar para a direita e para a eſquerda as partes, que ſe oppoem á deſcida do ponto *G*, empregará toda a ſua energia em precipitar-lhes a queda. Logo, ſe o corpo for flexivel até hum certo ponto, o esforço do centro de gravidade o fará dobrar, até que a reſiſtencia das partes lateraes ſe opponha a novos gráos de inflexaõ; e entaõ tudo ſe paſſará, como ſe o corpo ſe tiveſſe tornado perfeitamente duro.

Saõ muito frequentes os exemplos, que neſta parte vemos na natureza; porque todos os corpos tem hum certo gráo de flexibilidade, ou maior, ou menor. Nas cordas ſobre tudo obſervamos eſte phenomeno; e por iſſo naõ podem jámais eſtender-ſe exactamente em linha recta em qualquer ſituaçaõ, que naõ ſeja a vertical. Por mais força que ſe empregue, ſempre conſervaõ certa inflexaõ, que principalmente ſe manifeſta no meio dellas. As meſmas vigas, por pouco que ſejaõ compridas, e carregadas, ſe encurvaõ e abatem ſenſivelmente no meio, quando apoyaõ ſómente pelas extremidades; e por iſſo he muitas vezes neceſſario eſcorallas com pontaletes, para prevenir a ruptura.

A eſtabilidade, e firmeza de hum corpo, aſſentado ſobre hum plano horizontal, depende, como temos dito, da poſiçaõ da ſua reſultante a reſpeito do plano, que o ſuſtenta. Logo, quanto mais ſe chegar eſta reſultante para o centro de gravidade das ſuperficies, pelas quais aſſenta o corpo, tanto maior ſerá a firmeza; e pelo contrario, quanto mais ſe apartar do meſmo centro, tanto ſerá maior o perigo de cahir.

Iſto he o que todos os dias experimentamos de innumeraveis maneiras differentes. Quando eſtamos em pé, e bem direitos, a vertical conduzida pelo noſſo centro de gravidade paſſa exactamente por entre os noſſos pés; vertical, que em particular ſe chama *linha de direcçaõ*. Quando caminhamos, quaſi todos os noſſos movimentos ſe ordenaõ a con-

conſervar eſta linha na meſma poſiçaõ ; e quando nos ſuſtentamos ſobre a ponta de hum pé, he neceſſario que a reſultante venha a paſſar por eſte ponto de apoyo. Em geral naõ podemos jámais cahir, ſenaõ quando a linha de direcçaõ deixa todos os pontos, em que nos eſtribamos, para huma meſma parte.

Quando levamos em huma maõ algum pezo conſideravel, o noſſo centro de gravidade muda de lugar, e conſeguintemente a linha de direcçaõ o muda tambem, e nós ſentimo-nos arrebatar para a parte do pezo que levamos. Entaõ naõ nos he taõ livre o andar ; e ſe o pezo he grande, corremos riſco de cahir. Se pela maior parte prevenimos eſtas quedas, he porque uſando de hum mechaniſmo tanto mais admiravel, quanto mais natural, mais pronto, e menos penoſo, fazemos bem de preſſa tornar para a parte contraria o centro de gravidade, eſtendendo ſimpleſmente o outro braço. Quando queremos caminhar levando da direita e da eſquerda pezos iguais, he-nos mais facil, porque pezos iguais de huma e outra parte naõ alteraõ a linha de direcçaõ, e o centro de gravidade naõ fatiga deſigualmente as partes do noſſo corpo.

Para trepar ao cume de huma montanha eſcarpada, inclinamo-nos para diante, apoyando ſobre as pontas dos pés, a fim de contrabalançar o pezo do corpo que nos ſollicita para traz: e pela raſaõ contraria, apoyamos ſobre os calcanhares, quando deſcemos. Em geral, os noſſos movimentos particulares, e a fricçaõ ſobre tudo, contribuem grandemente para modificarmos os effeitos do noſſo pezo, e para conſervarmos huma eſtabilidade conſtante no meio de tudo o que tende a deſtruilla. Mas a experiencia, e a habituaçaõ enſinaõ mais neſta parte do que todos os livros de Mechanica juntos. Vede a deſtreza, com que os borlantins, e os grumetes, guardaõ pontualmente o equilibrio, em ſituaçoens difficultoſas, onde os mais habeis Mechanicos ſe achariaõ muito embaraçados.

## *Do movimento uniforme dos centros de gravidade.*

152 SEja hum ſyſtema qualquer de corpos perfeitamente livres, que naõ ſendo ligados de fórma alguma entre ſi poſſaõ obedecer ás impulſões, que ſepara-

paradamente ſe lhes derem: pergunta-ſe qual ſerá o movimento do centro de gravidade de todo o ſyſtema, ſe cada huma das partes ſe mover com huma velocidade particular.

Bem ſe vê neſte caſo, que o centro de gravidade deve mudar de ſituaçaõ, e mover-ſe á medida que o eſtado do ſyſtema varia. Aqui naõ he hum ponto fixo, e immudavel, que reuna de alguma ſorte todas as forças de hum meſmo corpo, ou de hum ſyſtema cujas partes eſtejaõ ligadas entre ſi. He hum ponto movel, cuja direcçaõ, e velocidade dependem das que tiver cada huma das partes do ſyſtema.

Já ſabemos, que ſendo as partes de hum ſyſtema todas animadas de movimentos iguais, e parallelos para a meſma parte, deve a reſultante geral paſſar pelo centro de gravidade (n. 93.), e obrigallo conſeguintemente a mover-ſe com huma velocidade igual, e parallela á do ſyſtema. Logo *quando muitas forças iguais, e parallelas actúaõ juntamente, e pela meſma direcçaõ, ſobre as partes de hum ſyſtema, o centro de gravidade deve mover-ſe em linha recta com toda a velocidade commua do ſyſtema, e pela meſma direcçaõ.*

Semelhantemente, *ſe o centro de gravidade de qualquer ſyſtema, cujas partes forem ſolidamente ligadas entre ſi, ſe mover pela acçaõ de qualquer potencia, o ſeu movimento ſe diſtribuirá igualmente por todo o ſyſtema; e cada parte ſe moverá com huma velocidade igual, e parallela á delle.*

153 Logo, em geral: *Se qualquer força actuar ſobre hum corpo, por huma direcçaõ que paſſe pelo centro de gravidade, todas as partes delle ſe moveráõ por direcções parallelas á do dito centro.* E para conhecermos a ſua velocidade, dividiremos pela maſſa do meſmo corpo a quantidade de movimento, que a potencia lhe houver imprimido.

Com tanto pois que as direcções de differentes potencias concorraõ todas no centro de gravidade, ou que ao menos paſſe por elle a reſultante geral das meſmas potencias, o movimento do corpo ſerá parallelo á direcçaõ da reſultante, e a velocidade de cada parte ſerá igual á reſultante dividida pela maſſa do movel; bem entendido, que entaõ ſuppoem-ſe as partes do ſyſtema ſolidamente unidas entre ſi.

154 Em

154 Em conformidade disto, busquemos as propriedades, que deve ter o movimento do centro de gravidade $G$ de qualquer numero de corpos $A$, $B$, $C$ &c (Fig. 63.), movidos uniformemente pelas direcções parallelas $aA$, $bB$, $cC$ com as velocidades respectivas $V$, $V'$, $V''$.

I. Deve este centro mover-se por huma recta $GG'$ parallela ás direções dos mesmos corpos. Porque sendo na origem do movimento a soma dos momentos nenhuma, se elles se tomarem em ordem a qualquer plano, que passar por $GG'$, he necessario que seja tambem nenhuma na continuação do movimento, porquanto a distancia dos corpos ao plano sobredito he constantemente a mesma na hypothese presente. Acha-se pois o centro de gravidade a cada instante sobre todos os planos, que passaõ por $GG'$; logo naõ se aparta da sua intersecçaõ commua, que he a mesma linha $GG'$.

II. O seu movimento deve ser uniforme. Porque supponde que $abgc$ seja o perfil de hum plano perpendicular ás direções dos moveis, teremos no principio do movimento

$$(A+B+C)\,Gg = A.Aa + B.Bb + C.Cc;$$

e depois de qualquer tempo $t$, havendo os corpos corrido os espaços $Vt$, $V't$, $V''t$, de sorte que se achem em $A'$, $B'$, $C'$, o seu centro de gravidade se achará em $G'$; logo tomando os momentos em ordem ao mesmo plano vertical $abgc$, teremos

$$(A+B+C)\,G'g = A.A'a + B.B'b + C.C'c.$$

Diminuindo desta equaçaõ a precedente, acharemos

$$(A+B+C)\,GG' = A.AA' + B.BB' + C.CC' = A.Vt + B.V't + C.V''t = (AV + BV' + CV'')\,t.$$

Logo o espaço $GG'$ corrido pelo centro de gravidade he proporcional ao tempo; e conseguintemente, he uniforme o seu movimento.

III. A quantidade de movimento do centro de gravidade he igual á soma das quantidades de movimento de todos os corpos. Porque sendo $v$ a velocidade do sobredito centro, teremos $(A+B+C)\,v = AV + BV' + CV''$: porém $A+B+C$ exprime a massa do centro de gravidade; logo o primeiro membro da equaçaõ exprime a sua quantidade de movimento. O segundo membro he evidentemente a soma das quantidades de movimento dos tres moveis. Logo ha igualdade perfeita entre a quantidade de movimento do centro de gravidade, e a soma das quantidades de movimento dos tres moveis.

He neceſſario porém ter a advertencia, quando algum dos corpos ſe mover por direcçaõ oppoſta á dos outros, de tirar a ſua quantidade de movimento da ſoma das quantidades de movimento dos outros, para obter a do centro commum de gravidade.

Diſto ſe ſegue, que ſe as differentes partes de hum ſyſtema tiverem velocidades iguais, parallelas, e para a meſma parte, a velocidade do centro de gravidade deve ſer igual á de cada huma das partes, como já diſſemos.

155 Segue-ſe tambem, que ſendo as partes de qualquer ſyſtema de corpos poſtas em movimento por forças parallelas, deve o centro de gravidade mover-ſe com a velocidade, que teria adquirido pela acçaõ ſimultanea das ditas forças, ſe todas lhe foſſem applicadas immediatamente. Porque entaõ ſerá a ſua quantidade de movimento igual á ſoma das quantidades de movimento de todas as partes do ſyſtema.

E dahi ſe ſegue em fim, que o centro de gravidade de hum ſyſtema deve ficar immovel, todas as vezes que a ſoma das quantidades de movimento dos corpos, que ſe movem para huma parte, for igual á ſoma das quantidades de movimento dos que ſe movem para a parte oppoſta.

156 Mas que ſuccederá, ſe todas as partes do ſyſtema forem poſtas em movimento por quaiſquer potencias, que as obriguem a mover-ſe por quaiſquer direcções?

Temos viſto, que toda a potencia póde reſolver-ſe em outras tres parallelas a tres linhas dadas de poſiçaõ. Chamemos eſtas linhas $X$, $Y$, $Z$. Logo podemos ſubſtituir ao movimento de cada parte de hum ſyſtema outros tres movimentos parallelos a eſtas linhas. E porque em virtude dos movimentos parallelos a $X$, deve mover-ſe o centro de gravidade, como ſe todas as potencias parallelas a $X$ lhe foſſem applicadas immediatamente, e o meſmo ſuccede a reſpeito das potencias parallelas a $Y$, e $Z$; eſtá claro, que o centro de gravidade ſe moverá realmente, como ſe todas eſtas forças parallelas a $X$, $Y$, $Z$ obraſſem immediatamente ſobre elle, iſto he, como ſe elle ſó foſſe ſollicitado a mover-ſe pela reſultante geral de todas as potencias applicadas ás differentes partes do ſyſtema.

Logo ſe a reſultante geral de todas as potencias applicadas ás differentes partes de hum ſyſtema for nenhuma, o centro commum de gravidade ficará immovel.

Sup-

Suppomos aqui, que as partes do syſtema naõ ſaõ ligadas entre ſi. Se o forem, naõ deixará de ter o centro de gravidade o meſmo movimento, que teria ſe todas as potencias actuaſſem immediatamente ſobre elle, como ſe verá na Dynamica.

## *Dos centros de gravidade, e dos eixos de equilibrio, ſendo a gravidade variavel, e concorrendo todas as ſuas direcções em hum meſmo ponto.*

157 SE a acçaõ da gravidade foſſe por toda a parte a meſma, e ſe as linhas de direcçaõ foſſem exactamente parallelas, naõ haveria nada que ajuntar aos principios, que temos eſtabelecido, para determinar os centros de gravidade. Mas as direcções da gravidade concorrem todas no centro da terra, e a ſua força diminue na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias ao meſmo centro, como ſe moſtra naõ ſomente pelas obſervações, mas tambem pelo calculo. E por eſſa raſaõ deveremos ajuntar alguma couſa á theorica precedente, para a fazermos completa. Os ſeus reſultados com tudo naõ produziráõ erro ſenſivel, em quanto a meſma theorica ſe applicar a uſos ſemelhantes aos que temos referido circunſtanciadamente. Bem ſe vê, que em hum meſmo corpo, ou ſyſtema de corpos, tais como nós os temos conſiderado, todas as partes gravîtaõ por linhas parallelas, e com huma energia, que póde ſuppor-ſe igual ſem erro ſenſivel. Por eſſa raſaõ podemos ſervirnos das formulas demonſtradas nos artigos precedentes, para determinarmos o centro de gravidade em caſos ſemelhantes.

Mas para reduzirmos eſta theorica á hypotheſe, que verdadeiramente tem lugar na natureza, moſtraremos agora o methodo de determinar os centros de gravidade, ou para dizer melhor os *eixos de equilibrio*, na ſuppoſiçaõ de concorrerem as direcções dos graves em hum ponto determinado.

158 Seja pois $C$ o ponto do concurſo (Fig. 64.), e ſejaõ $M$, $M'$, $M''$ quantos pontos materiais ſe quizerem, ſituados porém no meſmo plano que o centro $C$; e ſupponhamos,

nhamos, que a acçaõ da gravidade lhes imprime em hum instante quantidades de movimento dirigidas para o mesmo centro, e representadas por $Mm$, $M'm'$, $M''m''$. He manifesto, que a sua resultante será necessariamente dirigida para o mesmo ponto $C$, e que a direcçaõ della será conhecida, se acharmos o valor do angulo $ACR$, que ella fórma com qualquer recta $CA$ dada de posiçaõ.

He tambem evidente, que sendo sustentado qualquer ponto desta resultante, por huma força diametralmente opposta, todo o systema se sustentará igualmente, e que este equilibrio se conservará naõ somente na situaçaõ actual do systema, mas em todas as situações que póde ter, fazendo huma revoluçaõ ao redor da linha $CR$; e por isso damos a esta linha o nome de *eixo de equilibrio.*

Como nas differentes situações de hum corpo naõ passa sempre o eixo de equilibrio por hum mesmo ponto delle, póde dizer-se que entaõ naõ tem centro algum de gravidade. Neste caso somos reduzidos a indagar o eixo de equilibrio, e o pezo do corpo, os quais ambos variaõ á medida que varía a distancia ao centro.

159 Supponhamos pois, que a gravidade actúa na rasaõ directa da distancia, de maneira que sendo $g$ a velocidade que communica aos corpos na distancia $a$ do centro $C$ (Fig. 64.), seja $\frac{gx}{a}$ a velocidade communicada na distancia $x$. Entaõ a velocidade, que receberá o ponto $M$, será $\frac{g}{a}CM$, e a sua quantidade de movimento será $\frac{g}{a}CM.M$; logo teremos $Mm = \frac{g}{a}CM.M$, e pela mesma rasaõ

$$M'm' = \frac{g}{a}CM'.M', \text{ e } M''m'' = \frac{g}{a}CM''.M''.$$

Sejaõ agora duas rectas quaisquer $CA$, $CB$ perpendiculares entre si, e resolva-se cada força $Mm$ em outras duas $Mp$, $Mq$ parallelas respectivamente ás ditas rectas. A resultante de todas as forças parallelas a $CA$ será $= Mq + M'q' + M''q''$ (n. 63.), e a resultante das forças parallelas a $CB = Mp + M'p' + M''p''$. E porque já sabemos, que a resultante geral $RC$ deve passar pelo ponto $C$, naõ temos mais que tomar $CR' = Mq + M'q' + M''q''$,

e

e $CR'' = Mp + M'p' + M''p''$, a fim de podermos completar o rectangulo $R'R''$, que determinará o valor, e a direcçaõ da resultante procurada; e por conseguinte conheceremos o eixo de equilibrio, e o pezo do systema.

Isto posto, os triangulos semelhantes daraõ $CM : Mm$, ou $CM : \frac{g}{a} CM . M$, ou $a : gM :: MP : Mp = \text{- - -}$ $\frac{gM . MP}{a} :: CP : mp = \frac{gM . CP}{a}$. Logo teremos

$$CR' = \frac{g}{a} (M . CP + M' . CP' + M'' . CP''),$$

$$CR'' = \frac{g}{a} (M . MP + M' . M'P' + M'' . M''P'');$$

$$\frac{RR'}{CR'} = tang\, RCR' = \frac{M . MP + M . M'P' + M'' . M''P''}{M . CP + M' . CP' + M'' . CP''};$$

formula, que finalmente dará sempre a conhecer a posicaõ do eixo de equilibrio na supposiçaõ precedente.

Sendo $G$ o centro de gravidade no caso das direcções parallelas, teremos estas duas equações ( n. 97. ):

$(M + M' + M'') GG' = M . MP + M' . M'P' + M'' . M''P''$.

$(M + M' + M'') CG' = M . MQ + M' . M'Q' + M'' . M''Q''$.

Logo $\frac{GG'}{CG'} = \frac{RR'}{CR'}$, e conseguintemente o ponto $G$ se acha na recta $CR$, e o eixo de equilibrio $CR$ passa pelo centro ordinario de gravidade. O mesmo succederá em qualquer outra situaçaõ do systema.

Logo na hypothese presente, ainda que a gravidade seja dirigida para hum ponto fixo, e que a sua força cresça proporcionalmente ás distancias do mesmo ponto, naõ deixaráõ por isso os eixos de equilibrio de passar todos pelo centro de gravidade, como se a força da gravidade fosse constante, e as suas direcções parallelas. Somente o pezo do systema variará, segundo as differentes situações. E se naõ demonstramos esta notavel propriedade, senaõ no caso de se achar todo o systema em hum plano, que passe pelo centro das forças, he porque com os principios, que havemos exposto, póde facilmente extender-se a demonstraçaõ ao outro caso.

160 Exceptuando esta primeira hypothese da gravidade dire-

directamente proporcional ás distancias do centro das forças, em todas as mais naõ póde ser o centro de gravidade hum ponto fixo, mas será variavel segundo as posições diversas do systema; e por isso seremos entaõ obrigados a buscar o eixo de equilibrio, e o pezo do systema para cada huma das situações differentes, que tiver o mesmo systema. Mas para reduzirmos as nossas indagações á hypothese, que parece ser geralmente a da natureza, supporemos aqui que a gravidade obra sobre os corpos na rasaõ inversa do quadrado das distancias ao centro das forças.

161 Sendo pois $g$ a velocidade, que a força central póde imprimir em hum instante em qualquer parte do systema, situada na distancia $f$ do centro $C$ (Fig. 64.), será $\frac{gff}{xx}$ a velocidade, que a mesma força no mesmo instante deverá imprimir em qualquer outra parte, que estiver na distancia $x$; porque he $\frac{1}{ff} : \frac{1}{xx} :: g : \frac{gff}{xx}$.

Isto posto, teremos $Mm = \frac{gff.M}{MC^2}$, $M'm' = \frac{gff.M'}{M'C^2}$, $M''m'' = \frac{gff.M''}{M''C^2}$; e por conseguinte

$$CR' = gff\left(\frac{M.CP}{MC^3} + \frac{M'.CP'}{M'C^3} + \frac{M''.CP''}{M''C^3}\right),$$

$$RR' = gff\left(\frac{M.MP}{MC^3} + \frac{M'.M'P'}{M'C^3} + \frac{M''.M''P''}{M''C^3}\right).$$

Logo a tangente do angulo $ACR$, que faz o eixo de equilibrio $RC$ com a linha $CA$, se achará pela equaçaõ seguinte

$$\text{tang}\, ACR = \frac{\frac{M.MP}{MC^3} + \frac{M'.M'P'}{M'C^3} + \frac{M''.M''P''}{M''C^3}}{\frac{M.CP}{MC^3} + \frac{M'.CP'}{M'C^3} + \frac{M''.CP''}{M''C^3}}.$$

E o valor da resultante $RC$, ou da força necessaria a cada instante para sustentar o systema pelo seu eixo de equilibrio, se determinará, fazendo uso da expressaõ seguinte.

$RC$

$$RC = gff \sqrt{\left[\left(\frac{M.CP}{MC^3} + \frac{M'.CP'}{M'C^3} + \frac{M''.CP''}{M''C^3}\right)^2 + \left(\frac{M.MP}{MC^3} + \frac{M'.M'P'}{M'C^3} + \frac{M''.M''P''}{M''C^3}\right)^2\right]}.$$

Temos pois determinado naõ ſomente a poſiçaõ do eixo de equilibrio, mas tambem o valor da reſultante, iſto he, o pezo do ſyſtema. Porém ſuppomos ainda, que todos os pontos graves do ſyſtema eſtaõ no meſmo plano com o centro das forças.

162 Sendo, por exemplo, dada a linha recta $AB$, pergunta-ſe qual he o ſeu eixo de equilibrio (Fig. 65.).

Seja $C$ o centro das forças, e tendo por elle conduzido a recta $ED$ parallela a $AB$, de qualquer ponto $M$ tomado em $AB$ ſe tire huma perpendicular $MP$ ſobre $ED$. Tomando pois hum elemento infinitamente pequeno $Mm$, teremos, como acabamos de moſtrar,

$$CR' = gff.\int\frac{CP.Mm}{MC^3},\ \text{e}\ RR' = gff.\int\frac{MP.Mm}{MC^3}.$$

E fazendo $CP = x$, $PM = b$, $MC = z$, e o angulo $MCP = \Phi$, teremos

$$CR' = gff.\int\frac{-x\,dx}{z^3},\ RR' = gff.\int\frac{-b\,dx}{z^3}.$$

Porém $z = \frac{b}{\mathit{sen}\,\Phi}$, $x = b\cot\Phi$, e $dx = \frac{-b\,d\Phi}{\mathit{sen}\,\Phi^2}$; logo $\frac{-x\,dx}{z^3} = \frac{d\Phi\,\mathit{coſ}\,\Phi}{b}$. O integral deſta expreſſaõ he $\frac{1}{b}(\mathit{sen}\,\Phi + C)$; e ſendo tomado de $B$ até $A$, ſerá $\frac{1}{b}(\mathit{sen}\,ACD - \mathit{sen}\,BCD)$. Do meſmo modo $-\frac{b\,dx}{z^3} = \frac{1}{b}d\Phi\,\mathit{sen}\,\Phi$, cujo integral $\frac{1}{b}(C - \mathit{coſ}\,\Phi)$, ſendo tomado de $B$ até $A$, he $\frac{1}{b}(\mathit{coſ}\,BCD - \mathit{coſ}\,ACD)$. Logo

$$CR' = \frac{gff}{b}(\mathit{sen}\,ACD - \mathit{sen}\,BCD),$$

$$RR' = \frac{gff}{b}(\mathit{coſ}\,BCD - \mathit{coſ}\,ACD).$$

Mas

Mas por abbreviar, chamemos $A$, $B$, $C$, os angulos $CAB$, $ABC$, $ACB$, e teremos $CR' = \frac{gff}{b}(\,sen\,A - sen\,B)$, e $RR' = \frac{gff}{b}(\,cos\,A + cos\,B\,)$; donde concluiremos

$$tang\,RCR' = \frac{cos\,A + cos\,B}{sen\,A - sen\,B} = cot\,\frac{A-B}{2}.$$

Logo será o angulo $GCR' = 90^\circ - \frac{1}{2}(A - B) = \frac{180^\circ - A + B}{2}$; e tirando o angulo $BCD = B$, ficará o angulo $GCB = \frac{180^\circ - A - B}{2} = \frac{C}{2}$.

163 Donde se segue, que *o eixo de equilibrio CG de qualquer linha recta AB divide em partes iguais o angulo ACB formado pelos dous raios conduzidos do centro das forças para as extremidades da mesma linha*; propriedade notavel pela sua simplicidade.

He pois manifesto, que na hypothese presente o centro de gravidade $G$ de huma recta $AB$ naõ está nem no ponto do meio, nem em qualquer outro ponto fixo, mas que deve variar conforme as posições differentes da mesma linha, a respeito do centro das forças. O unico caso de excepçaõ he, quando a linha girar ao redor do seu eixo de equilibrio; porque em todas as situações, que póde ter nesta revoluçaõ, he evidente que o seu centro de gravidade se conserva constantemente no mesmo ponto..

O resultado, que conseguimos pelo calculo precedente, prova de hum modo sensivel, que todas as rectas $AB$, $ab$ ( Fig. 66. ), comprehendidas no angulo $ACB$, tem o mesmo eixo de equilibrio $CGg$; e que o de hum trapezio $ABba$, cujos dous lados concorrem no centro, he tambem a recta $CGg$, que divide o angulo $ACB$ em duas partes iguais.

Agora, para determinarmos o pezo da linha $AB$ ( Fig. 65. ), ou a resultante $CR$, recorreremos aos valores de $CR''$, $RR''$, que daraõ $CR = \frac{gff}{b}\sqrt{\,}\,[\,(\,cos\,A +$

cos

$cos B)^2 + (sen A - sen B)^2 \Big] = \frac{gff}{b} \sqrt{\Big[ 2 + 2 cos}$

$(A + B) \Big] = \frac{gff}{b} \sqrt{(2 - 2 cos C)} = \frac{gff}{b} \cdot 2 sen \frac{1}{2} C$; $b$ he a perpendicular $CF$ conduzida do centro $C$ para a recta $AB$.

Sendo $gff$ hum factor commum, que entra na expressaõ de todos os pezos, podemos separallo do calculo, suppondo-o igual á unidade: e o pezo de qualquer linha $AB$ será $\frac{2 sen \frac{1}{2} ACB}{CF}$.

164 Donde concluiremos, que todas as tangentes $AGB$, $agb$ de hum arco $DGE$ comprehendido entre os raios conduzidos do centro das forças ( Fig. 67. ), tem o mesmo eixo de equilibrio, e saõ igualmente pezadas, ainda que de comprimentos desiguais. Tambem podemos concluir, que o pezo de huma linha infinitamente longa naõ será infinito na hypothese presente, como he facil de conceber.

165 Em consequencia do que temos dito, naõ será difficultoso de se determinar o eixo de equilibrio do perimetro de qualquer polygono. Supponhamos, por exemplo, que se trata de hum quadrilatero $ABCD$, situado no plano do centro das forças $S$ ( Fig. 68. ). Conduzindo para todos os seus angulos os raios $AS$, $BS$, $CS$, $DS$, dividiremos em duas partes iguais os angulos $ASB$, $BSC$, $CSD$ por outros tantos eixos de equilibrio $Sa$, $Sb$, $Sc$.

Isto supposto, todo o pezo da linha $CD$, que tem por expressaõ $\frac{2 sen DSc}{SK}$, póde considerar-se reunido no ponto $c$, e actuando pela direcçaõ $cS$. E se o resolvermos em outros dous, hum pela direcçaõ $cc'$, ou perpendicular a huma linha recta dada de posiçaõ $Sc'$, e outro parallelo a esta mesma linha, terá este por valor $\frac{2 sen DSc . cos c S c'}{SK}$, e aquelle $\frac{2 sen DSc . sen c S c'}{SK}$. Fazendo pois a mesma resoluçaõ em todos os outros pezos, teremos geralmente

$SG'$

$$SG' = \frac{2\, sen\, DSc \,.\, cos\, cSc'}{SK} + \frac{2\, sen\, CSb \,.\, cos\, bSb'}{SK'} +$$

$$\frac{2\, sen\, DSd \,.\, cos\, dSd'}{SK'''} - \frac{2\, sen\, ASa \,.\, cos\, aSa'}{SK''},$$

$$GG' = \frac{2\, sen\, DSc \,.\, sen\, cSc'}{SK} + \frac{2\, sen\, CSb \,.\, sen\, bSb'}{SK'} +$$

$$\frac{2\, sen\, ASa \,.\, sen\, aSa'}{SK''} + \frac{2\, sen\, DSd \,.\, sen\, dSd'}{SK'''};$$

donde ſe deduzirá a expreſſaõ da tangente do angulo $GSG'$, que determina a poſiçaõ do eixo de equilibrio $SG$; e o valor de $SG$, que repreſenta o pezo de todo o ſyſtema.

Se todas as linhas naõ eſtiveſſem no meſmo plano com o centro das forças, achar-ſe-hia o ſeu eixo de equilibrio, ſeguindo os principios que acabamos de expor. Paſſemos a indagar o eixo de equilibrio de hum arco de qualquer curva.

166 Seja o arco $AMB$ ſituado em hum plano, que paſſe pelo centro $C$ (Fig. 69.). Conſiderando hum dos ſeus elementos $Mm$, eſtá claro, que a ſua maſſa $ds$ péza para o centro $C$ na direcçaõ $MC$ com huma força repreſentada por $\frac{ds}{CM^2}$. Sendo pois $CP = x$, e o angulo $MCP = \phi$, e reſolvendo a força $\frac{ds}{CM^2}$ em outras duas, huma parallela a $CP$, e a outra parallela a $MP$, ſerá eſta repreſentada por $\frac{ds}{CM^2}\, sen\, \phi = \frac{ds\, sen\, \phi\, cos\, \phi^2}{xx}$, e aquella por $- - -$ $\frac{ds}{CM^2}\, cos\, \phi = \frac{ds\, cos\, \phi^3}{xx}$. Logo ſendo $CR$ o eixo de equilibrio, e o pezo do arco dado $AMB$, teremos

$$CR' = \int \frac{ds\, cos\, \phi^3}{xx}, \text{ e } RR' = \int \frac{ds\, sen\, \phi\, cos\, \phi^2}{xx}.$$

167 Sendo, por exemplo, $AMB$ hum arco de circulo, deſcrito do centro $C$ com o raio $= a$; pergunta-ſe a poſiçaõ do eixo de equilibrio, e o ſeu pezo.

Neſte caſo temos $x = a\, cos\, \phi$, $ds = -\, a\, d\phi$; logo

$RR'$

$$RR' = \int \frac{-d\phi \, sen\, \phi}{a} = \frac{cos\,\phi + C}{a} = \frac{cos\, BCb - cos\, ACa}{a},$$

$$CR' = \int \frac{-d\phi \, cos\, \phi}{a} = \frac{C' - sen\,\phi}{a} = \frac{sen\, ACa - sen\, BCb}{a},$$

$$tang\, R\,C\,R' = \frac{cos BCb - cos\, ACa}{sen\, ACa - sen\, BCb} = tang\, \frac{BCb + ACa}{2}.$$

Donde he facil de concluir, que o eixo de equilibrio $CR$ divide o arco $AMB$ em duas partes iguais, como por outra parte se vê que deve ser.

Quanto ao pezo deste arco, a sua expressaõ será - -

$$\frac{1}{a}\sqrt{\left[(cos BCb - cos ACa)^2 + (sen ACa - sen BCb)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(2 - 2\, cos\, ACB)} = \frac{2\, sen\, \frac{1}{2} ACB}{a}.$$ Logo este pezo he o mesmo que o de qualquer tangente, igual á corda do arco dividida pelo raio.

168 Supponhamos agora, que se trata de achar o eixo de equilibrio de qualquer trapezio $AabB$ (Fig. 70.), formado pelo arco de huma curva $AMB$, duas ordenadas $Aa$, $Bb$, e huma abscissa $ab$, cuja direcçaõ passa pelo centro das forças $C$.

Primeiramente reflectiremos, que todas estas linhas formaõ hum systema, cujo plano passa pelo ponto $C$, e que o eixo de equilibrio do pequeno trapezio $MPpm$ será o mesmo que o da ordenada $MP$, isto he, huma recta $CG$ que divide o angulo $MCP$ em partes iguais. Sendo pois $CP = x$, e o angulo $MCP = \phi$, teremos $CM = \frac{x}{cos\,\phi}$, e $PM = x\, tang\, \phi$. E porque o pezo de $MP$ he representado por $\frac{2\, sen\, \frac{1}{2}\phi}{x}$, o pezo do elemento $MPpm$ terá por valor $\frac{2\, sen\, \frac{1}{2}\phi \,.\, dx}{x}$. Porém este pezo póde suppor-se actuando em $G$ pela direcçaõ $GC$; logo sendo resolvido em outros dous, hum pela direcçaõ $GP$, e o outro pela direcrecçaõ $CP$, o primeiro delles ferá $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,\Phi^2\,.\,dx}{x}$, e o

fegundo $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,\Phi\,.\,cos\,\Phi\,dx}{x} = \frac{sen\,\Phi\,.\,dx}{x}$; donde teremos as formulas feguintes

$$CR' = \int \frac{sen\,\Phi\,dx}{x}$$

$$RR' = \int \frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,\Phi^2\,.\,dx}{x} = \int \frac{dx}{x}\,(1 - cos\,\Phi)$$

$$tang\,RCR' = \frac{\int \frac{dx}{x}\,(1 - cos\,\Phi)}{\int \frac{dx}{x}\,sen\,\Phi}.$$

169 Supponhamos em fim, que fe trata de achar o eixo de equilibrio de huma fuperficie, cujo plano naõ paffa pelo centro das forças (Fig. 71.).

Conduzindo do centro $C$ huma perpendicular $CA$ para o plano da fuperficie propofta, faremos paffar pelo ponto $A$ a linha das abfciffas $AP$. E fendo $PM$ huma ordenada da linha que termina a mefma fuperficie, o feu eixo de equilibrio ferá huma recta $CG$ que divide o angulo $MCP$ em partes iguais, e o feu pezo ferá reprefentado por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP}{CP}$, e confeguintemente o do elemento $MmpP$ por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}$.

Confiderando pois efte pezo reunido em $G$, e actuando pela direcçaõ $GC$, podemos refolvello em outros dous, hum parallelo a $AC$, que terá por valor $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}\,.\,\frac{CA}{CG}$, e o outro pela direcçaõ $GA$ que ferá reprefentado por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}\,.\,\frac{GA}{CG}$. Efte póde tambem refolſolver-ſe em outros dous, hum parallelo a $PA$, que terá por valor $\frac{2 sen \frac{1}{2} MCP . Pp}{CP} . \frac{AP}{CG}$; e o outro parallelo a $GP$, que ſerá repreſentado por $\frac{2 sen \frac{1}{2} MCP . Pp}{CP} . \frac{PG}{CG}$.

Agora fazendo $CA = b$, $AP = x$, $PM = y$, teremos $CP = \sqrt{(bb + xx)}$, $CM = \sqrt{(bb + xx + yy)}$, $CG = \frac{CP}{cos \frac{1}{2} MCP}$, e conſeguintemente $\frac{2 sen \frac{1}{2} MCP}{CG . CP} =$

$$\frac{2 sen \frac{1}{2} MCP \, cos \frac{1}{2} MCP}{CP^2} = \frac{sen \, MCP}{CP^2} = \frac{y}{(bb + xx) CM}.$$

Em fim $CM : CP :: MG : GP$, ou $CM + CP : CP ::$ $PM : GP = \frac{PM . CP}{CM + CP} = \frac{CP}{PM} (CM - CP)$.

Logo, ſendo $CR$ o eixo de equilibrio, e o pezo do trapezio $MPQN$, e tirando do ponto $R$ a recta $RR'$ perpendicular ao plano $PAC$, e a recta $R'R''$ perpendicular a $CA$, teremos as formulas ſeguintes

$$CR'' = \int \frac{b y dx}{(bb + xx) \sqrt{(bb + xx + yy)}}$$

$$R'R'' = \int \frac{x y dx}{(bb + xx) \sqrt{(bb + xx + yy)}}$$

$$RR' = \int \left( \frac{dx}{\sqrt{(bb + xx)}} - \frac{dx}{\sqrt{(bb + xx + yy)}} \right);$$

as quais determinaráõ o eixo de equilibrio, e o pezo do trapezio $MPQN$.

He de notar, que cortando $CR$ o trapezio no ponto $T$, póde eſte ponto tomar-ſe de alguma ſorte como centro de gravidade; e aſſim, reſolvendo em trapezios todas as figuras planas que nos forem propoſtas, acharemos por meio deſtas formulas os ſeus centros de gravidade.

Para acabarmos com hum exemplo, em que ſe veja a applicaçaõ deſtas formulas, ſeja $ABD$ hum quarto de circulo, que tenha o centro em $A$, e o raio $= a$. Neſte caſo

caſo ſerá $yy = aa - xx$, e conſeguintemente ſe reduziráõ as formulas precedentes como aqui ſe moſtra

$$CR'' = \int \frac{b\,dx\,\sqrt{(aa-xx)}}{(bb+xx)\sqrt{(aa+bb)}}.$$

$$R'R'' = \int \frac{x\,dx\,\sqrt{(aa-xx)}.}{(bb+xx)\sqrt{(aa+bb)}}$$

$$RR' = \int \left( \frac{dx}{\sqrt{(bb+xx}} - \frac{dx}{\sqrt{(aa+bb)}} \right):$$

Para integrarmos a primeira, faremos $\frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}} = u$; e teremos a transformada $CR'' = \int \left( \frac{-b}{\sqrt{(aa+bb)}} \cdot \frac{du}{1+uu} + \frac{b\,du\sqrt{(aa+bb)}}{bb+(aa+bb)uu} \right) = -\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ Arc tang $u$ + Arc tang $\frac{u\sqrt{(aa+bb)}}{b} = -\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Arc tang $\frac{x}{\sqrt{(aa-xx)}}$ + Arc tang $\frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{b\sqrt{(aa-xx)}}$. Aqui não he neceſſario ajuntar conſtante porque $x = 0$ dá o valor de todo o integral $= 0$. Aſſim para termos o ſeu valor correſpondente a todo o quarto de circulo, faremos $x = a$, e ſendo $c = 3,1415$ &c teremos

$$CR'' = \frac{\sqrt{(aa+bb)} - b}{\sqrt{(aa+bb)}} \cdot \frac{1}{2}c.$$

Para integrarmos a ſegunda, faremos $\sqrt{(aa-xx)} = z\sqrt{(aa+bb)}$, e teremos a transformada

$$R'R'' = \int \frac{-zz\,dz}{1-zz} = z + \frac{1}{2} l \frac{1-z}{1+z} + C =$$

$$\frac{\sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa+bb)}} + \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(aa+bb)} - \sqrt{(aa-xx)}}{\sqrt{(aa+bb)} + \sqrt{(aa-xx)}} + C.$$

Fazendo pois $x = a$, depois $x = 0$, e tirando o ultimo reſultado do primeiro, teremos

$$R'R'' = \frac{-a}{\sqrt{(aa+bb}} + l \frac{a + \sqrt{(aa+bb)}}{b}.$$

Em fim o integral da terceira formula he $RR' =$

$l\,\frac{x+\sqrt{(bb+xx)}}{b} - \frac{x}{\sqrt{(aa+bb)}}$, que fazendo $x = a$, dá

$$RR' = l\,\frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b} - \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}.$$

E porque temos achado $RR' = R'R''$, concluiremos que o centro de gravidade $T$ está sobre o raio $AT$, que divide o quarto de circulo em duas partes iguais.

Pelo que pertence á distancia $AT$, que he igual a $\frac{AC\,.\,RR''}{CR''}$, será determinada pela formula

$$AT = \frac{2b\sqrt{2}}{c}\left[\frac{\sqrt{(aa+bb)}\;l\,\frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b} - a}{\sqrt{(aa+bb)}-b}\right].$$

De forte, que fazendo $a = b$, teremos $AT = a\,.\,\frac{2(1+\sqrt{2})}{c}$. $[2\,l\,(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}] = 0{,}535677\,a$. Como já sabemos (n. 132.), que o centro de gravidade ordinario de hum quarto de circulo se acha na distancia do ponto $A$ representada por $\frac{4}{3}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{c}\,a = 0{,}600210\,a$, estes dous resultados naõ differem mais que $\frac{2}{31}$ do raio proximamente; e a differença procede de que na supposiçaõ presente as partes mais vezinhas do centro pezaõ mais.

Se puzermos $b = \frac{40}{9}\,a$, será $AT = a\,.\,\frac{2\sqrt{2}\,.\,40}{c}$ $\left(\frac{41}{9}\,l\,\frac{5}{4} - 1\right) = 0{,}595761\,a$. Neste caso sahe a differença muito menor, porque o centro das forças está mais distante. Logo se $b$ for igual ao semidiametro terrestre, sendo $a$ hum pequeno numero de palmos ou pollegadas, he evidente que a differença será insensivel. Em geral, se na formula, que temos achado por valor de $AT$, suppuzermos $b = \infty$, acharemos exactamente, como para o centro de gravidade ordinario, que $AT = \frac{4}{3}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{c}\,a$.

# SECÇAÕ II.

## DO EQUILIBRIO NAS MAQUINAS.

AS forças, que obraõ immediatamente humas contra outras, naõ podem estar em equilibrio, se entre ellas naõ houver perfeita igualdade. Quando porém exercitaõ a sua acçaõ por meio de Maquinas, que favoreçaõ o seu esforço, succede muitas vezes que bem fracas potencias sustentaõ massas enormes. Por estas invençoens Mechanicas, que igualmente se devem á necessidade, e á industria dos homens, chegamos a aumentar, para o dizer assim, ao nosso arbitrio a energia das menores forças.

170 Entre as Maquinas humas saõ simples, outras compostas. Estas facilmente se entendem por aquellas; e por isso bastará conhecer bem as primeiras. As Maquinas simples podem reduzir-se a sete, a saber: *Cordas*, *Alavanca*, *Roldana*, *Sarilho*, *Plano inclinado*, *Parafuzo*, e *Cunha*; e ainda poderiaõ reduzir-se a menor numero, se algumas circunstancias particulares nos naõ persuadissem a consideral-las separadamente.

Todas ellas tem o mesmo fim, que he o de favorecer o esforço da potencia contra os obstaculos, que por si só naõ poderia vencer; mas naõ saõ todas igualmente proprias para produzir este effeito. Para avaliar a efficacia de humas e outras, tem-se reduzido todas ao mesmo ponto de vista, que he o do equilibrio, e tem-se procurado as condiçoens necessarias em cada huma dellas, para que a potencia e resistencia se contrapezem mutuamente. Isto he o que agora entramos a mostrar.

## DAS CORDAS.

DEpois que *M.* Varignon (*Nouv. Méch. Sect. II.* pag. 93. . . . . 210) tratou com muita miudeza a theorica das cordas, entráraõ estas a ser contadas entre as Maquinas simples, com o nome de *Maquinas Funiculares*. As cordas saõ com effeito hum meio de communicaçaõ entre differentes potencias, e dellas nos servimos quasi sempre nas outras maquinas; rasaõ porque será muito con-

conveniente que principiemos esta materia, dando a conhecer os seus usos principais. Mas a fim de estabelecermos alguma cousa fixa, seremos em primeiro lugar obrigados a suppollas perfeitamente flexiveis, e naõ pezadas, reservando para depois o consideralIas no seu estado natural.

Sejaõ duas potencias *A*, e *B* applicadas á corda *AB* (Fig. 72.), e actuando para partes oppostas. He manifesto, que mutuamente se destruiráõ os seus esforços, e ficaráõ conseguintemente em equilibrio, se ellas forem iguais entre si. Naõ ha cousa mais clara.

171 Sejaõ agora tres potencias *A*, *B*, *C* (Fig. 73.), applicadas aos tres cordoens *AD*, *BD*, *CD*, unidos no ponto *D*; perguntaõ-se as condiçoens necessarias, para que todo o systema se ponha em equilibrio.

Representemos por *Da* a potencia *A*, e por *Dc* a potencia *C*. Entaõ, completando o parallelogrammo *aDc*K, pelos principios já demonstrados acharemos

I. Que a acçaõ destas duas forças *A*, e *C* sobre o nó *D* deve ser igual á sua resultante *DK*.

II. Que o systema naõ póde estar em equilibrio, se a potencia *B* representada por *Db* naõ destruir o esforço da resultante *DK*; logo he necessario que lhe seja igual, e opposta, e conseguintemente deve achar-se sobre a mesma linha K*b*. Donde se segue que *para haver equilibrio devem os tres cordoens estar no mesmo plano.*

III. Que as tres potencias *A*, *C*, *B* saõ entre si com o *Da*, *Dc*, DK. Porém *Da* : *Dc* : DK : : *sen* K*DC* : *sen a D*K : *sen aDc* : : *sen BDC* : *sen ADB* : *sen ADC*. Logo

$$A : B : C : : sen\ BDC : sen\ ADC : sen\ ADB;$$

Donde se segue, que *cada huma das potencias deve ser como o seno do angulo comprehendido pelas direcçoens das outras duas.*

172 Se a corda *ADC* em lugar de ser atada em o nó *D*, passasse livremente por hum anel situado na extremidade *D* da corda *BD*; entaõ, para haver equilibrio, seria necessario que o anel naõ pudesse correr pela corda *ADC* para huma, nem para outra parte; condiçaõ, que terá lugar todas as vezes que a linha dividir o angulo *ADC* em duas partes iguais. Neste caso as duas potencias *A*, *C* saõ iguais, e teremos as proporçoens seguintes.

$A : B :: sen\ BDC : sen\ ADC :: sen\ \frac{1}{2}\ ADC : sen\ ADC ::$

$1 : 2\ cos\ \frac{1}{2}\ ADC.$

173 Logo todas as vezes que duas potencias *A*, *C* obraõ huma contra a outra por meio de huma corda *ADC*, que passa por hum ponto fixo *D*, he necessario que para naõ correr a corda pelo dito ponto, isto he, para haver equilibrio, sejaõ as duas potencias iguais entre si. Donde concluiremos, que duas forças applicadas ás extremidades de huma corda, que passa pelo perimetro de hum polygono, ou de qualquer curva, naõ podem ser postas em equilibrio, se naõ forem iguais (Fig. 74.).

174 Quando houver mais de tres forças applicadas a outros tantos cordoens, ligados todos a hum mesmo nó, buscar-se-ha primeiramente a resultante de duas quaisquer dellas, e seraõ reduzidas a huma de menos. Depois continuar-se-ha a mesma reducçaõ até naõ haver mais que duas potencias iguais, e oppostas; e entaõ todo o systema se achará em equilibrio. O mesmo seria no caso de estarem alguns dos cordoens atados a pontos fixos, e immoveis; porque o esforço sustentado por cada hum desses pontos teria lugar de potencia.

175 Supponhamos agora (Fig. 75.), que huma corda *ABCDH* he tirada pelas forças *A*, *E*, *F*, *G*, *H* applicadas aos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *H*, algumas das quais podem naõ ser mais do que pontos de apoyo. Para determinarmos as condiçoens do equilibrio, e as *tensoens* respectivas dos cordoens *AB*, *BC*, *CD*, *DH*, observaremos, que estando todo o systema em equilibrio, todas as suas partes o devem estar tambem. Logo poderemos considerar os pontos *A* e *C* como fixos, e a potencia *E* luctando contra a resistencia delles. Para haver pois equilibrio, será necessario em primeiro lugar, que a potencia *E* seja para o seno do angulo *ABC*, como a potencia *A*, ou o esforço sustentado pelo ponto fixo *A*, isto he, como a tensaõ do cordaõ *AB*, que representaremos por *T,AB*, he para o seno do angulo *EBC*; e em segundo lugar, que a mesma potencia *E* seja para o seno do mesmo angulo *ABC*, como a tensaõ do cordaõ *BC* para o seno do angulo *ABE*. Teremos pois

$E : sen\ ABC :: T,AB : sen\ EBC :: T,BC : sen\ ABE.$

Do mesmo modo, para que a parte *BCDF* esteja em equilibrio,

librio, he necessario que se verifiquem as duas proporçoens seguintes

$F : sen\ BCD : T,BC : sen\ FCD : : T,CD : sen\ BCF$.

Em fim, o equilibrio particular do systema *CDHG* exige pela mesma rasaõ, que tenhaõ lugar estas outras proporçoens

$G : sen\ CDH : : T,CD : sen\ HDG : : T,DH : sen\ CDG$.

De todas estas proporçoens se tiraráõ seis equaçoens, e outras tantas condiçoens do equilibrio de todo o systema, com as quais se determinará a relaçaõ das tensoens de dous cordoens independentemente das forças *E*, *F*, *G*, e a relaçaõ de duas destas forças independentemente das tensoens dos cordoens &c.

176 A mesma cousa teria lugar, ainda que os cordoens *EB*, *FC*, *DG*, pela direcçaõ dos quais actúaõ as forças *E*, *F*, *G*, estivessem em planos differentes. E porque póde acontecer, que muitas potencias estejaõ applicadas juntamente ao mesmo ponto da corda *B*, nesse caso deveremos calcular primeiro a sua resultante; e suppondo-a em lugar dellas applicada ao dito ponto, acharemos as condiçoens do equilibrio da mesma maneira.

177 Mas demoremo-nos ainda hum pouco na consideraçaõ do systema funicular *ABCDH* (Fig. 75.). A potencia *F* representada por *CF'* se resolve em outras duas *Cb*, *Cd* na direcçaõ dos cordoens *BC*, *DC*, dos quais ellas exprimem as tensoens. A força *Cb* communica-se em *B*, e obra conjuntamente com a potencia *E*, de maneira que a sua resultante dirigida por BK se emprega em estender o cordaõ *BA*, ou em carregar o ponto de apoyo *A*, ou, de outra sorte, em fazer equilibrio á potencia *A*. Conseguintemente póde a tensaõ do cordaõ *BA* exprimir a resultante das duas potencias *E*, e *Cb*.

Do mesmo modo pela tensaõ do cordaõ *DH* se póde exprimir a resultante das forças *G*, e *Cd*; logo a resultante das quatro forças *E*, *Cb*, *Cd*, *G*, isto he, das tres *E*, *F*, *G* he absolutamente a mesma que a das tensoens dos dous cordoens extremos *AB*, *DH*; e por conseguinte deve passar pelo ponto de concurso K dos mesmos cordoens. E em geral,

178 *Seja qual for o numero, e a direcçaõ das potencias applicadas a huma mesma corda, a sua resultante passará sempre pelo ponto de concurso dos cordoens extremos.*

Quan-

Quando estas potencias actuarem todas para a mesma parte, e forem entre si parallelas, a resultante geral de todas será igual á sua soma, e terá huma direcçaõ parallela á das mesmas potencias. Seja pois huma corda pezada *AEB* (Fig. 76.), preza pelas extremidades nos pontos fixos *A*, *B*, a qual no estado de equibrio tome a curvatura *AEB*; e sejaõ *AC*, BC as duas tangentes em *A*, e *B*. A resultante das cargas dos pontos de suspensaõ *A*, *B* passará pelo ponto de concurso *C* das duas tangentes, a sua direcçaõ será representada por huma linha vertical *CE*, e o seu valor será o pezo da mesma corda, que he a soma das potencias que sollicitaõ a cada hum dos seus pontos. Chamando pois *A* e *B* as cargas dos dous pontos respectivos de suspensaõ, e *P* o pezo da corda, teremos

$$P : \textit{sen}\, ACB :: A : \textit{sen}\, ECB :: B : \textit{sen}\, ACE.$$

179 Em lugar do ponto de suspensaõ *B* podemos conceber huma potencia, que communique a sua acçaõ ao ponto *A* por meio da corda *BEA*; e neste caso, a acçaõ da potencia *B*, se ella obrasse immediatamente sobre o ponto *A*, deve ser para a acçaõ que effectivamente lhe communica por meio da corda pezada AEB, como o seno do angulo *ACE* para o seno do angulo *ECB*. He logo facil de haver respeito ao pezo das cordas na communicaçaõ das acçoens de quaisquer potencias.

180 Donde se vê, que estando os pontos *A* e *B* na mesma linha horizontal, a potencia *B* transmete toda a sua acçaõ ao ponto A. Mas quando o ponto *B* estiver mais elevado, a potencia nelle applicada perderá parte da sua força na acçaõ communicada por meio da corda ao ponto *A*; e pelo contrario, estando *B* abaixo da horizontal que passa pelo ponto *A*, a potencia *B* terá huma acçaõ mais vantajosa sobre o ponto *A*, do que teria se lhe fosse immediatamente applicada. Donde se vê de hum modo sensivel, como por meio de cordas pezadas se podem multiplicar as forças em muitos casos.

181 Já dissemos, que naõ era possivel em rigor estender horizontalmente huma corda, de maneira que naõ tivesse inflexaõ alguma. A prova he muito facil, em consequencia do que acabamos de mostrar. Seja T a força que estende as duas extremidades oppostas da corda *AEB* (Fig. 77.), e seja P o pezo della. Teremos $T : P :: \textit{sen}\, ACD : \textit{sen}\, ACB$. Logo, se o angulo *ACB* for infinitamente obtu-

so,

ſo, iſto he, ſe a corda eſtiver perfeitamente eſtendida em linha recta, o ſeno do angulo $ACD$ ſerá igual á unidade, e o do angulo $ACB$ a nada. Seria pois neceſſaria huma tenſaõ infinita, para que a corda naõ tiveſſe a menor inflexaõ. Em quanto a força que ſe emprega em eſtendella for finita, o angulo $CAB$ o ſerá tambem.

Sendo o angulo $ACB$ o dobro do angulo $ACD$, temos $sen\,ACB = 2\,sen\,ACD.cos\,ACD = 2\,sen\,ACD.sen\,CAD$; logo $T.2\,sen\,CAD = P$. Supponhamos, que he $T$ muito grande a reſpeito do pezo da corda $P$; $AC$ naõ terá differença attendivel a reſpeito de $AE$, nem $DE$ a reſpeito de $EC$. Chamando pois $L$ o comprimento da corda, teremos $sen\,CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{2DE}{\frac{1}{2}L}$; e ſubſtituindo eſte valor concluiremos $2T.\frac{2DE}{\frac{1}{2}L} = P$, e $DE = \frac{P.L}{8T}$.

Conhecendo pois o comprimento $L$ da corda, o ſeu pezo $P$, e a força $T$ empregada em a eſtender horizontalmente, poderemos ſempre determinar a quantidade do abatimento no ponto do meio, a reſpeito da horizontal que paſſa pelas extremidades.

Exemplo. Dado hum pezo de 5 libras para eſtender huma corda que tem 24 pés de comprido, e 161 $\frac{5}{6}$ graõs de pezo, achar qual deve ſer a ſua inflexaõ.

Depois de haver reſolvido 5 libras em 5. 16. 8. 72 graõs; teremos $DE = \frac{161\frac{5}{6}.24}{5.16.64.72} = \frac{485,5}{5.16.8.72} = \frac{48,55}{64.72}$ pés $= \frac{48,55}{64.6}$ polleg. $= \frac{48,55}{32}$ linh. $= 1$ linh. $\frac{1}{2}$.

A experiencia deu juſtamente o meſmo reſultado, fazendo-ſe com huma corda, da qual trinta e tres diametros faziaõ duas pollegadas.

Da

## *Da curvatura das cordas, ſollicitadas pela acçaõ de quaiſquer potencias, e poſtas em equilibrio.*

182 QUando huma corda (Fig. 78.), ou huma cadeia ſummamente flexivel $ABD$, eſtá pendente pelas extremidades $A$, e $D$, e he ſollicitada em cada hum dos ſeus pontos por quaiſquer forças ſituadas no meſmo plano que os pontos de ſuſpenſaõ, he ſem duvida que deve tomar certa curvatura propria do equilibrio. Mas qual he a curvatura propria do equilibrio? iſſo he o que agora examinaremos.

Primeiramente eſtabeleçamos qualquer eixo $AC$, ao qual ſe refiraõ os differentes pontos da curva, que procuramos determinar. Depois tomando quaiſquer tres elementos conſecutivos $Mm$, $mm'$, $m'm''$, reflectiremos que ſendo a corda ſuppoſta em equilibrio, podemos conſiderar como fixos os dous pontos $M$ e $m'$, ſendo o ponto intermedio $m$ ſollicitado por quaiſquer forças, cuja reſultante repreſentaremos por $R$, ou $mt$.

Iſto poſto, para que eſta potencia faça equilibrio com as tenſoens dos dous pequenos cordoens $Mm$, $mm'$, he neceſſario que ſeja $R : T,mm' :: \mathit{sen}\ Mmm' : \mathit{sen}\ Mmt$, (n. 175.). E pela meſma raſaõ, conſiderando os pontos $m$, $m''$ como fixos, e ſendo o ponto intermedio $m'$ ſollicitado pela ſua força $m't'$, que he $R + dR$, ou por abbreviar $R'$, ſerá neceſſario que tenhamos $T,mm' : R' :: \mathit{sen}\ t'm'm'' : \mathit{sen}\ mm'm''$. Logo multiplicando eſtas duas proporçoens, termo por termo, teremos

$$R : R' :: \mathit{sen}\ Mmm' . \mathit{sen}\ t'm'm'' : \mathit{sen}\ Mmt . \mathit{sen}\ mm'm''.$$

Supponhamos agora o angulo $Mmm' = \varphi$, e $Mmt = \mu$; e teremos no elemento ſeguinte $mm'm'' = \varphi + d\varphi = \varphi'$ por abbreviar, e $mm't' = \mu'$. Logo $\mathit{sen}\ t'm'm'' = -\mathit{sen}\ (\mu' + \varphi') = -\mathit{sen}\ \mu' \cos\varphi' - \mathit{sen}\ \varphi' \cos\mu'$. E porque $\varphi'$ differe infinitamente pouco de 180°, e conſeguintemente he $\cos\varphi' = -1$; teremos $R : R' :: \mathit{sen}\ \varphi . \mathit{sen}\ \mu' - \mathit{sen}\ \varphi\ \mathit{sen}\ \varphi' \cos\mu' : \mathit{sen}\ \mu\ \mathit{sen}\ \varphi' :: \frac{\mathit{sen}\ \mu'}{\mathit{sen}\ \varphi'} - \cos\mu' : \frac{\mathit{sen}\ \mu}{\mathit{sen}\ \varphi}$; donde teremos a equaçaõ ſeguinte

R'

$$\frac{R' sen\, \mu'}{sen\, \varphi'} - \frac{R\, sen\, \mu}{sen\, \varphi} - R' cos\, \mu' = 0,$$

a qual se póde reduzir a esta fórma, $d\left(\frac{R\, sen\, \mu}{sen\, \varphi}\right) -$ $R' cos\, \mu' = 0$, ou tambem a esta $d\left(\frac{R\, sen\, \mu}{sen\, \varphi}\right) -$ $R\, cos\, \mu = 0$; reflectindo, que $R' cos\, \mu' = R\, cos\, \mu + d(R\, cos\, \mu)$, e que o ultimo termo desta expressaõ se desvanece em comparaçaõ do precedente.

Como as diversas potencias applicadas aos pontos da corda, podem reduzir-se a duas, huma $mq$ pela direcçaõ da ordenada $mp$, e a outra $ms$ parallela á abscissa $Ap$, chamemos $Y$ a primeira, e $X$ a segunda: e fazendo ao ordinario $AP = x$, $PM = y$, $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = ds$, teremos $sen\, \mu = sen\,(Mmr + tmq) = sen\, Mmr \,.\, cos\, tmq + cos\, Mmr \,.\, sen\, tmq = \frac{dx}{ds} \,.\, \frac{Y}{tm} + \frac{dy}{ds} \,.\, \frac{X}{tm}$, e $cos\, \mu = cos\, Mmr \,.\, cos\, tmq - sen\, Mmr \,.\, sen\, tmq = \frac{dy}{ds} \,.\, \frac{Y}{tm} - \frac{dx}{ds} \,.\, \frac{X}{tm}$. Logo será $R\, sen\, \mu = \frac{Ydx + Xdy}{ds}$, e $R\, cos\, \mu = \frac{Ydy - Xdx}{ds}$. Sendo pois $r$ o raio osculador; será o angulo de contingencia, ou o seu seno $\frac{ds}{r} = sen\, \varphi$, e teremos por equaçaõ da curva procurada

$$d\left(\frac{(Ydx + Xdy)\, r}{ds^2}\right) + \frac{Ydy - Xdx}{ds} = 0.$$

E porque esta equaçaõ he differencial da terceira ordem, será necessario integralla tres vezes consecutivamente, donde resultaráõ na equaçaõ finita tres constantes, que se determinaráõ de maneira que a curva passe por dous pontos dados, e tenha hum comprimento dado.

183 Exemplo I. Supponhamos, que sómente a força da gravidade actúa sobre todos os pontos $ABD$ por direcçoens parallelas ás ordenadas $PM$. Pergunta-se, qual será a curva neste caso?

A acçaõ da gravidade tende a communicar ao elemento $Mm$ a velocidade $g$, e a quantidade de movimento

mento $gds$. Assim teremos $Y = gds$, e $X = 0$; pelo que a equaçaõ geral se reduzirá a $d\left(\frac{rdx}{ds}\right) + dy = 0$, cujo integral he $\frac{rdx}{ds} = C - y$. Porém supponde $ds$ constante temos $r = \frac{dyds}{ddx}$; logo $\frac{ddx}{dx} - \frac{dy}{C-y} = 0$. O integral desta expressaõ he $ldx + l(C - y) = lC'ds$, ou $dx(C - y) = C'ds$. Elevando ao quadrado, teremos $dx^2(C - y)^2 = C'^2 ds^2 = C'^2 dx^2 + C'^2 dy^2$; e separando, teremos finalmente

$$dx = \frac{\pm C'dy}{\sqrt{[(C-y)^2 - C'^2]}}$$

por equaçaõ differencial da curva formada naturalmente por huma corda, ou cadeia summamente flexivel, pendente pelas duas extremidades. Esta curva he geralmente conhecida pelo nome de *Catenaria*.

Fazendo-se $dy = 0$ (Fig. 79.), immediatamente se determinará o ponto mais baixo da curva $B$, porque será entaõ $C - y = C'$, ou $y = BE = C - C'$. E se quizermos referir a catenaria ao eixo vertical $BE$, conduziremos huma ordenada qualquer a este eixo, como $MQ$, e poremos $BQ = x$, e $QM = y$. Depois substituindo na equaçaõ precedente $C - C' - x$ em lugar de $y$, e $AE - y$ em lugar de $x$, teremos $dy = \frac{\pm C'dx}{V(xx + 2C'x)}$. Metendo pois $a$ em lugar de $C'$, e integrando, será finalmente $y = \pm l\,\frac{a + x + V(xx + 2ax)}{a}$; donde se segue que a cada abscissa $x$ correspondem duas ordenadas iguais, de huma e outra parte do eixo $BE$, o qual he conseguintemente hum diametro da curva.

Tomando os $x$ positivos, vemos que os $y$ crescem até o infinito; mas tomando as abscissas negativas as ordenadas sahem imaginarias. Assim naõ passa a catenaria além do vertice $B$, e póde assemelhar-se a sua figura á de huma parabola. Por outra parte ella se confunde no ponto $B$ com huma curva parabolica descrita com o parametro $2a$; e assim fica justificada a supposiçaõ que acima fizemos

mos (n. 181.), tomando $DE = EC$ (Fig. 77.)

A equaçaõ differencial $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(xx + 2ax)}}$ dá $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{(x+a)\,dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, cujo integral he $BM = \sqrt{(2ax + xx)}$. Donde se vê que a catenaria he huma das curvas susceptiveis de rectificaçaõ.

Quando se daõ os dous pontos de suspensaõ $A$, $D$ com o comprimento da corda, he necessario, para descrever a catenaria, determinar primeiramente a posiçaõ do vertice $B$, e a constante $a$. Para isso teremos tantas equaçoens quantas saõ as incognitas; mas naõ poderáõ resolver-se senaõ por approximaçaõ, por causa das quantidades logarithmicas que entraõ na equaçaõ da curva.

Quando huma corda pendente de dous pontos naõ tiver a figura, que acabámos de ver, naõ poderá estar em equilibrio. Fará necessariamente oscillaçōes continuas, até que a fricçaõ, e a resistencia do ar a forcem a tomar a figura propria do equilibrio.

Galileu foi o primeiro, que pensou em indagar a curva, que huma cadeia pendente pelas extremidades fórma no estado do equilibrio. Mas todas as suas indagaçōes pararaõ em conjecturar, que seria huma parabola; porque a Geometria do seu tempo naõ bastava para resolver este problema. Os irmaõs Bernoulis o emprenderaõ de novo, no tempo que nascia o calculo differencial, e nas suas Obras se póde ver o successo, com que o resolveraõ.

184 Entre muitas propriedades bellas da catenaria, que estes grandes Geometras deduziraõ dos seus calculos, ha huma mais analoga do que as outras ao assunto que tratamos. Consiste esta em que o centro de gravidade da catenaria desce ao ponto mais baixo que he possivel. Eisaqui como ella se póde demonstrar.

Seja $G$ o centro de gravidade do arco $AMBD$ (Fig. 79.), e $GG'$ a sua distancia á horizontal $AE$. He necessario provar, que esta distancia he hum *maximo*. E como $GG' = \frac{\int y\,ds}{ABD}$, e o arco $ABD$ he de huma grandeza constante, toda a difficuldade se reduz a mostrar que na catenaria a expressaõ $\int y\,ds$ he hum maximo.

A

A natureza de qualquer maximo he tal, que o ſeu valor naõ deve mudar, em quanto ſuppuzermos huma variaçaõ infinitamente pequena nas quantidades que o produzem. Se fizermos pois variar infinitamente pouco hum ponto $M'$ da curva propoſta, o valor do maximo naõ terá mudança alguma, ainda que os elementos contiguos $MM'$, $M'M''$ ſejaõ tocados da dita variaçaõ. Huma vez que ſeja exprimida eſta condiçaõ, deverá attender-ſe tambem que o arco da curva fique conſtante; mas para exprimir de hum modo mais particular tanto eſta invariabilidade como a do maximo, ſerá neceſſario que façamos variar outro ponto $M''$.

Porém, para que a fluxaõ de cada ponto naõ traga comſigo mais do que huma indeterminada, he neceſſario ſuppor, que eſta fluxaõ ſe faz ſobre huma linha dada. Sendo eſta linha abſolutamente arbitraria, ſupporemos que a fluxaõ dos pontos $M'$, $M''$ ſe faz ſobre as parallelas ao eixo $M'R'$, $M''R''$, a fim de ſer mais ſimples o calculo. Iſto poſto, as ordenadas naõ mudaráõ de valor, nem tambem as ſuas differenças $RM'$, $R'M''$.

E como, tomando muitos elementos conſecutivos de huma meſma curva, a funçaõ $F$ que convem ao primeiro ſe muda em $F + dF$ para o ſegundo, e pela meſma raſaõ $F + dF$ ſe muda em $F + dF + d\,(F + dF)$ para o terceiro, e aſſim por diante; repreſentando por $F$, $F'$, $F''$ &c eſtes valores conſecutivos de $F$, a fim de abbreviar, teremos $F' = F + dF$, $F'' = F' + dF'$ &c. e conſeguintemente $F' - F = dF$, $F'' - F' = dF'$ &c. Em conſequencia diſto teremos pois $MP = y$, $M'P' = y'$, $M''P'' = y''$ &c, $AP = x$, $AP' = x'$, $AP'' = x''$ &c, donde concluiremos $PP' = dx$, $P'P'' = dx'$, $P''P''' = dx''$ &c, $M'R = dy$, $M''R' = dy'$ &c, $MM' = ds$, $M'M'' = ds'$ &c.

Em fim, pela condiçaõ do problema $\int y\,ds$ deve ſer hum maximo, e eſte naõ deve ſofrer mudança alguma da fluxaõ dos pontos $M'$, $M''$. Porém $\int y\,ds$ exprime a ſoma dos elementos $y\,ds$ por toda a extenſaõ da curva de $A$ até $D$, e eſta ſoma naõ varia de $A$ até $M$, nem de $M'''$ até $D$. Logo, ſe ella houveſſe de variar, naõ poderia ſer ſenaõ entre $M$ e $M'''$, onde o ſeu valor he $y\,ds + y'\,ds' + y''\,ds''$. Logo a differencial deſta quantidade deve ſer igual a nada.

Mas

Mas como aqui ſe trata de differenciais dependentes da fluxaõ dos pontos $M'$, $M''$, as quais naõ tem relaçaõ alguma com as differenças naturais, *iſto he*, com as differenciais das coordenadas, e do arco; diſtinguillas-hemos com a characteriſtica $\delta$. Aſſim teremos $y\,\delta ds + y'\,\delta ds' + y''\,\delta ds'' = 0$, por quanto $y$, $y'$, $y''$ naõ ſaõ variaveis. E porque o arco da curva $ds + ds' + ds''$ he conſtante, teremos igualmente $\delta ds + \delta ds' + \delta ds'' = 0$. Do meſmo modo, ſendo o intervallo $PP''' = dx + dx' + dx''$ tambem conſtante, teremos finalmente $\delta dx + \delta dx' + \delta dx'' = 0$.

Porém temos $dx^2 + dy^2 = ds^2$; logo $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = ds\,\delta ds$: e porque $\delta dy = 0$, ſerá $\delta dx = \frac{ds}{dx}\,\delta ds$. Donde teremos as tres equações ſeguintes

$$y\,\delta ds + y'\,\delta ds' + y''\,\delta ds'' = 0$$
$$\delta ds + \delta ds' + \quad ds'' = 0$$
$$\frac{ds}{dx}\,\delta ds + \frac{ds'}{dx'}\,\delta ds' + \frac{ds''}{dx''}\,\delta ds'' = 0.$$

A primeira he o meſmo que $(y - y')\,\delta ds + (y' - y'')(\delta ds + \delta ds') + y''(\delta ds + \delta ds' + \delta ds'') = 0$, a qual por meio da ſegunda ſe reduz a $dy\,\delta ds + dy'(\delta ds + \delta ds') = 0$. Do meſmo modo a ſegunda e a terceira daráõ $d\left(\frac{ds}{dx}\right)\delta ds + d\left(\frac{ds'}{dx'}\right)(\delta ds + \delta ds') = 0$; e deſtas duas ultimas equações concluiremos em fim

$$\frac{d\left(\frac{ds'}{dx'}\right)}{dy'} - \frac{d\left(\frac{ds}{dx}\right)}{dy} = 0, \text{ ou } d\left[\frac{d\left(\frac{ds}{dx}\right)}{dy}\right] = 0.$$

Integrando pois, teremos primeiramente $C\,d\left(\frac{ds}{dx}\right) + dy = 0$; e tornando a integrar, teremos $\frac{C\,ds}{dx} + y = C'$, que he juſtamente a equaçaõ da catenaria, que acima achamos (n. 182.). Logo o centro de gravidade occupa na catenaria o lugar mais baixo que he poſſivel.

Note-ſe, que ſendo aqui $\int y\,ds$ hum maximo deve concluir-ſe, que entre todas as curvas iſoperimetras, terminadas nos dous pontos $A$ e $B$, a catenaria he a que pela

ſua

ſua revoluçaõ ao redor do eixo horizontal $AC$ produz a maior ſuperficie curva que he poſſivel.

185 Exemplo II. Supppondo que as direcções da gravidade concorrem em hum centro commum, pede-ſe a curva que deve formar huma corda $AD$ em virtude do proprio pezo (Fig. 80.).

Sendo conduzida pelo ponto de ſuſpenſaõ $A$ para o centro das forças a recta $AC$, de qualquer ponto da curva $M$ tire-ſe para ella a perpendicular $MQ$. Completando o rectangulo $APMQ$, e fazendo $CQ = x$, $QM = y$, $CM = z$, o que era $x$ e $y$ na equaçaõ geral ſerá agora $y$, e $AC - x$; e aſſim ſe converterá em

$$d\left(\frac{(Ydy - Xdx)r}{ds^2}\right) = \frac{Ydx + Xdy}{ds}.$$

Seja $F$ a velocidade communicada pela força central, a qual he huma funçaõ de $z$; a quantidade de movimento do elemento $ds$ ſerá $Fds = MO$, que ſendo reſolvida em outras duas $MS$, $MT$, ſegundo as direcções $MQ$, $PM$, dará $z : Fds :: x : MT = \frac{Fxds}{z} = Y$, e $z : Fds :: y : MS = \frac{Fyds}{z} = X$.

Subſtituindo pois eſtes valores na equaçaõ geral, teremos $d\left[\frac{Fr}{zds}(xdy - ydx)\right] = \frac{F}{z}(xdx + ydy) = Fdz$, cujo integral he $\frac{Fr}{zds}(xdy - ydx) = \int Fdz$. Porém ſuppondo conſtante $mr = zd\Phi = du$, teremos o raio oſculador $r = \frac{zds^3}{(-ds^2 + zddz)du}$; e ſendo o angulo $ACM = \Phi$, teremos $xdy - ydx = zzd\Phi$; logo ſubſtituindo eſtes valores, teremos $\frac{Fzds^2}{-ds^2 + zddz} = \int Fdz$, ou $\frac{F}{\int Fdz} + \frac{1}{z} = \frac{ddz}{du^2 + dz^2}$. Multiplicando pois por $dz$, teremos $\frac{Fdz}{\int Fdz} + \frac{dz}{z} = \frac{dzddz}{du^2 + dz^2}$, cujo

jo integral he $l\int F\,dz + lz = \frac{1}{2}\,l\,(du^2 + dz^2) - l\frac{du}{C}$, ou $z\int F\,dz = \frac{C\,ds}{du} = C\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{z^2\,d\varphi^2}\right)}$.
Separando pois teremos finalmente

$$d\varphi = \frac{\pm C\,dz}{z\sqrt{[z^2(\int F\,dz)^2 - C^2]}}$$

por equaçaõ differencial da catenaria no caſo de ſerem as direcções da gravidade convergentes para o centro das forças.

Mas para moſtrarmos huma applicaçaõ deſte reſultado geral, ſupponhamos $F = \frac{bC}{azz}$, iſto he, ſupponhamos que a gravidade obra na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias, e teremos $\int F\,dz = \frac{-bC}{az} + \frac{C}{a}$; logo $d\varphi = \frac{\pm a\,dz}{z\sqrt{[(z-b)^2 - a^2]}}$. Eſta equaçaõ ſe integrará fazendo-a primeiro racional; e como $b$ póde ſer maior, ou menor do que $a$, haverá dous caſos para examinar. Seja pois $B$ o ponto mais baixo da curva, $CB = c$, e o angulo $BCM = \varphi$. Teremos no primeiro caſo

$$\varphi = \pm\frac{m^2-1}{m}\,l\,\frac{\sqrt{\left(m^2 - \frac{c}{z}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{c}{z}\right)}}{\sqrt{(m^2-1)}},$$

e no ſeguudo

$$\frac{c}{z} = \frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2}\,cos\,\frac{2m}{1+m^2}\,\varphi.$$

Se $m$ for numero inteiro, a catenaria ſerá algebrica no ultimo caſo.

## *DA ALAVANCA.*

186 A *Alavanca* he huma vara inflexivel $PCQ$ apoyada ſobre hum ponto $C$ (Fig. 81.), ao redor do qual póde mover-ſe livremente. Para maior ſimplicidade ſupporemos primeiramente, que ella naõ tem pezo algum.

Sejaõ duas potencias $A$ e $B$ applicadas ás duas extremidades $P$ e $Q$ de huma alavanca $PCQ$ de qualquer figu-

ra

ra que seja; devem achar-se as condições necessarias para que se ponhaõ em equilibrio por meio desta maquina.

Produzaõ-se as direcções $AP$, $BQ$ das potencias até concorrerem no ponto $E$. E como podem considerar-se ambas actuando conjunctamente no ponto $E$, represente-se por $EF$ a acçaõ da força $A$, e por $EG$ a da força $B$; e a diagonal $EH$ será a resultante. Bem se vê, que esta naõ póde ser destruida senaõ quando se dirigir ao ponto de apoyo $C$. Seja pois $C$ a carga deste ponto representada pela resultante $EH$, e no caso do equilibrio teremos
$C : A : B :: EH : EF : EG :: sen\ PEQ : sen\ CEQ : sen\ CEP.$

187 Porquanto a resultante das potencias $A$ e $B$ passa pelo ponto de apoyo $C$, a soma dos momentos em ordem a este ponto deve reduzir-se a nada (n. 57.). Conduzindo pois do ponto $C$ para as direcões das potencias $AP$, $BQ$ as perpendiculares $CM$, $CN$, teremos $A . CM = B . CN$; resultado, que igualmente póde deduzir-se da proporçaõ $A : B :: sen\ CEQ : sen\ CEP$. Donde concluiremos geralmente a condiçaõ fundamental do equilibrio na alavanca,

Que *para haver equilibrio entre duas potencias applicadas ás extremidades de qualquer alavanca, he necessario que os seus momentos sejaõ iguais*, ou (que vem a ser o mesmo), *que cada huma das potencias seja reciprocamente como a distancia do ponto de apoyo á sua direcçaõ.*

188 Em geral: Seja qual for o numero das potencias applicadas de qualquer maneira aos braços de huma alavanca, naõ poderá haver equilibrio senaõ quando a resultante geral passar pelo ponto de apoyo. E por conseguinte a soma dos momentos das potencias, que tendem a fazer girar a alavanca para huma parte, deve ser igual á soma dos momentos das que tendem a fazella girar para a parte opposta, tomando-se os ditos momentos em ordem ao ponto de apoyo.

189 Se as duas potencias, ou os dous pezos $A$ e $B$ (Fig. 82.), tiverem as direcções parallelas, as perpendiculares $CM$, $CN$ se acharáõ em huma mesma linha $MN$; e se alem disso a alavanca for recta, os dous braços $CP$, $CQ$ seraõ proporcionais ás linhas $CM$, $CN$. Logo para haver equilibrio, deverá ser $A . CP = B . CQ$; isto he, *para que dous pezos applicados a huma alavanca recta se ponhaõ em equilibrio, será necessario que sejaõ entre si reciprocamen-*

te

*te como os braços, aos quais estaõ applicados.*

Logo, se o braço *C P* for o dobro de *C Q* hum pezo *A* de huma libra fará equilibrio ao pezo *B* de duas libras. Se a hum, e outro ajuntarmos o mesmo pezo, bem se vê que naõ póde subsistir o equilibrio. Mas o unico meio de o conservar nesse caso, he o ajuntar a *B* o dobro do que se ajuntar a *A*. Do mesmo modo se vê, que sendo *C P* triplo de *C Q*, o pezo *A* de huma libra fará equilibrio ao pezo *B* de tres libras, e assim por diante; donde se segue, que por meio de huma alavanca de proporcionado comprimento podemos reduzir ao equilibrio os pezos mais desiguais.

160 Se em lugar do pezo *A* imaginarmos huma potencia, que faça equilibrio ao pezo *B*, poderemos considerar na alavanca tres cousas differentes, ao menos em quanto ao nome, a saber, a *potencia*, o *pezo* ou resistencia, e o *ponto de apoyo*. Estas tres cousas naõ saõ realmente, senaõ tres potencias differentes, das quais as duas primeiras reunem a sua acçaõ contra o ponto de apoyo, o qual faz as vezes de terceira potencia, e destroe a resultante das outras duas.

Sem embargo, tem prevalecido o costume de distinguir tres especies de alavanca, conforme a posiçaõ da potencia, resistencia, e ponto de apoyo. Chama-se alavanca *da primeira especie*, quando o ponto de apoyo se acha entre a potencia, e a resistencia; *da segunda especie*, quando a resistencia se acha entre a potencia, e o ponto de apoyo; e *da terceira especie*, quando a potencia está entre a resistencia e o ponto de apoyo.

No primeiro caso, póde a potencia ter, ou naõ ter ventagem sobre o pezo, conforme o braço a que se applicar; no segundo, sempre tem ventagem sobre o pezo; e no terceiro, sempre fica de inferior partido.

191 Quando se quer sustentar huma massa *M* (Fig.86.), huma grande pedra por exemplo, toma-se ordinariamente huma alavanca, da qual se faz passar huma pequena parte *CP* debaixo da mesma pedra; e entaõ, sendo o ponto *C* apoyado sobre o chaõ, a potencia *Q* obra com tanto maior superioridade, quanto o braço *C Q* ao qual se applica he mais comprido que a parte *C P*. Os que distinguem tres especies de alavancas, consideraõ esta como pertencente á segunda especie.

192 Mas quando hum homem ſuſtenta hum pezo na extremidade de hum braço, eſtendido horizontalmente, a alavanca que niſſo emprega he da terceira eſpecie, porque os muſculos que entaõ fazem as vezes de potencia ſe achaõ entre o pezo, e o ponto de apoyo. Porém em hum homem de mediana eſtatura, o comprimento do braço he para a diſtancia do muſculo *deltoide* ao ponto de apoyo, como 100 para 3; logo hum pezo de 30 libras naõ póde ſuſtentar-ſe neſta poſiçaõ, ſenaõ por hum esforço de 1000 libras. Por iſſo naõ devemos eſpantarnos da difficuldade, que ſe experimenta em ſuſtentar do modo referido qualquer pezo conſideravel.

A' primeira viſta parecerá, que huma diſpoſiçaõ diverſa ſeria mais favoravel á acçaõ dos noſſos muſculos. Mas reflectindo mais profundamente na couſa, he facil de ver que a alavanca da terceira eſpecie era a mais propria para produzir grandes movimentos nos pezos, que ſe levantaõ; e ſe para iſſo ſaõ neceſſarias maiores forças, com que intelligencia, mas ao meſmo tempo com que economia providenciou a tudo o Autor da Natureza! *Veja-ſe* Borelli *De motu animalium*, e Nieuwentyt *Exiſtence de Dieu démontrée par les merveilles de la Nature.*

193 Mas, para o tornar a dizer, eſtas tres eſpecies de alavancas ſe reduzem a huma ſó; porque he manifeſto, que podemos conſiderar indifferentemente o pezo, a potencia, e a carga do apoyo, como tres potencias differentes, das quais duas luctaõ com a terceira. E huma vez que ſe tenhaõ eſtabelecido em equilibrio, que embaraço póde haver em conſiderar qualquer dos tres pontos $P$, $C$, $Q$ (Fig. 82.), como apoyo da alavanca, ſendo todos elles fixos?

Sabemos, por exemplo, que a carga do apoyo $C$ he $A+B$; logo podemos conſideralla como huma potencia que obra de baixo para cima, e que faz equilibrio á potencia $Q$ por meio da alavanca $PCQ$ apoyada no ponto $P$. E entaõ teremos, por condiçaõ do equilibrio $(A+B)PC = B.PQ$, donde ſe tira igualmente $A.CP = B.CQ$, como já moſtrámos.

194 Se huma alavanca $BA$ (Fig. 83.), apoyada pelas duas extremidades $A$, $B$ for carregada em $C$ por qualquer pezo $M$, bem ſe vê que para achar a carga de cada hum dos apoyos, he neceſſario reſolver a potencia $M$ em outras duas que ſejaõ parallelas, e paſſem por elles. A quedeve

deve passar pelo ponto $A$ será $\frac{BC}{AB}M$, e a que deve passar pelo ponto $B$ será $\frac{AC}{AB}M$.

195 Agora, se quizermos attender ao pezo da alavanca, consideralIo-hemos como huma nova potencia, cuja acçaõ reunida no centro de gravidade se exercita perpendicularmente ao horizonte. Donde se segue, que naõ será necessario attender ao pezo das alavancas, todas as vezes que o centro de gravidade corresponder ao ponto de apoyo.

Mas supponhamos, que as duas potencias $A$, $B$ saõ parallelas, e verticais (Fig. 84.), e que $G$ he o centro de gravidade da alavanca $PCQ$, de maneira que todo o seu pezo $L$ actûe verticalmente pela direcçaõ $GL$. Entaõ conduzindo qualquer recta $MN$ teremos por condiçaõ do equilibrio $B.CN + L.CI = A.CM$.

196 Sendo pois dada huma alavanca $PCQ$, o seu pezo $L$, e as potencias $A$, $B$ applicadas ás extremidades della, acharemos o ponto de apoyo $C$, sobre o qual deve formar-se o equilibrio, conduzindo qualquer recta $mn$ que corte em $m$, $i$, $n$ as perpendiculares $PA$, $IL$, $QB$ dadas de posiçaõ. Porque entaõ teremos $B.cn + L.ci = A.cm$; e substituindo $ci + in$ em lugar de $cn$, e $im - ic$ em lugar de $cm$, acharemos $B.ci + B.in + L.ci = A.im - A.ic$; logo $ic = \frac{A.im - B.in}{A + B + L}$. Tendo assim determinado o ponto $c$, por elle conduziremos a vertical $cC$, aqual cortará a alavanca no ponto $C$, e este será o ponto de apoyo que buscamos.

197 Consideremos agora huma alavanca da segunda especie $CPQ$ (Fig. 85.), a qual supporemos recta, e uniformemente pezada. Seja o comprimento della $CQ = a$, a parte $CP = b$, e a sua gravidade especifica $= g$. Logo teremos $ga$ por expressaõ do pezo total da alavanca $L$, o qual se considera actuar em $I$ meio de $CQ$. Por conseguinte, a condiçaõ do equilibrio nos dará $Ba = bA + \frac{1}{2}gaa$, ou $B = \frac{bA}{a} + \frac{1}{2}ga$. Se $a$ for muito pequeno, deverá pois a potencia $B$ ser muito grande, e pelo contrario se $a$ for muito grande tornará a ser $B$ muito gran-

de; logo entre estes dous extremos haverá hum certo valor de $B$, de maneira que naõ possa dar-se outro menor, que faça equilibrio á potencia $A$, e ao pezo da alavanca.

Para o determinar, differenciaremos o valor geral de $B$ fazendo $a$ variavel, e teremos $\frac{1}{2} g\, da - \frac{bA\,da}{aa}$. Dividindo por $da$, e igualando a nada, será $\frac{1}{2} g = \frac{bA}{aa}$; donde se tira $a = \sqrt{\frac{2bA}{g}}$, $ga = \sqrt{2bAg}$, e $\frac{bA}{a} = \frac{1}{2} ga$; logo $B = \sqrt{2bAg}$. Conhecendo pois o pezo $A$, a distancia $CP$ na qual se acha applicado, e a gravidade especifica $g$ da alavanca, acharemos immediatamente a mais pequena potencia que póde fazer-lhe equilibrio, calculando a formula $B = \sqrt{2bAg}$; e o comprimento da alavanca, calculando a formula $a = \sqrt{\frac{2bA}{g}}$.

Exemplo. Supponhamos $CP = 3$ pollegadas, $A = 200$ libras, e que a gravidade especifica da alavanca, ou geralmente o que péza huma das suas pollegadas, he $\frac{1}{2}$ libra. Entaõ, $CQ = a = \sqrt{2400} = 49$ pollegadas $= 4$ pés, e 1 pollegada, e $B = \sqrt{600} = \frac{49}{2}$ libras $= 24$ libras, e 8 onças. He pois necessario, que neste caso tenha a alavanca 4 pés, e huma pollegada de comprimento, e que se lhe applique huma potencia equivalente ao pezo de 24 libras, e 8 onças.

198 Quando se pertende mover huma pedra $M$ sobre a sua esquina viva $KL$ (Fig. 86.), por meio de huma alavanca da segunda especie $CPQ$, naõ deve tomar-se por $B$ o pezo total da pedra, porque huma parte delle he sustentada pela esquina $KL$; mas para determinar o que tem realmente o lugar de $B$, podemos conduzirnos da maneira seguinte.

Seja $G$ o centro de gravidade, e $N$ o ponto onde a vertical que passa por $G$ encontra a base $KLFG$; e produza-se $PN$ até a linha $KL$. Isto posto, o pezo $M$ actuando tando pela direcçaõ $GN$ ſe reſolverá em duas potencias, que paſſaráõ huma por $P$, e a outra por $T$. A primeira terá por valor $\frac{NT}{PN}$; mas, como ella naõ he perpendicular á alavanca ſerá neceſſario reſolvella tambem em outras duas, huma parallela, e a outra perpendicular á alavanca. Em virtude da primeira, ver-ſe-hia correr a pedra pela alavanca, ſe a fricçaõ naõ foſſe ſuperior ao ſeu effeito; mas a ſegunda ſerá realmente tudo o que deve tomar-ſe por $B$.

## *Applicaçaõ dos principios precedentes á Theorica das balanças.*

199 DOs principios, que acabamos de expôr, depende a conſtrucçaõ das *balanças*. Ainda que ellas ſejaõ de varias maneiras, todas ſe explicaõ facilmente, reduzindo-ſe ao que temos moſtrado na alavanca. Todo o mundo conhece as balanças ordinarias, que naõ ſaõ outra couſa ſenaõ huma alavanca poſta em equilibrio ſobre o ponto que a divide em partes iguais, a qual ſuſtenta nas extremidades dos *braços* dous *copos*, ou *pratos*, que ſervem para nelles ſe porem os pezos, e as materias que ſe haõ de pezar.

A alavanca $AB$ (Fig. 87.), que particularmente ſe chama o *traveſſaõ* das balanças, he a peça principal deſta maquina. Os dous *braços* delle $AX$, $BX$ devem ſer perfeitamente iguais em comprimento. Tambem he conveniente procurar, que ſejaõ igualmente pezados; mas eſta condiçaõ naõ he taõ importante como a primeira, para a bondade das balanças, porque he facil de compenſar a deſigualdade do pezo dos braços com o dos copos, mas naõ ha couſa alguma que poſſa emendar o erro, que provem da deſigualdade do comprimento.

O traveſſaõ he paſſado pelo meio por hum eixo boleado pela parte ſuperior, e agudo pela inferior, a fim de ſe dar ao traveſſaõ toda a mobilidade poſſivel. Eſte eixo paſſa por dous buracos $S$, $X$ da *aza* $STX$. O *fiel* $E$ faz parte do traveſſaõ, he perpendicular ao comprimento delle, e diſpoem-ſe de maneira que ſe ache exactamente no plano da aza todas as vezes que o traveſſaõ eſtiver bem hori-

horizontal. Em cada extremidade do travessaõ está dependurado por tres cordões, ou cadeias, hum prato maior, ou menor, conforme o uso para que a balança se destina. Quando ambos os pratos estaõ vazios, he necessario, se a balança he boa, que ella se ponha em equilibrio, e que o fiel naõ incline para huma nem para outra parte do plano da aza.

Seria inutil insistir sobre os usos de huma maquina taõ familiar. Ninguem ignora, em geral, que para pezar qualquer massa se poem esta em hum dos pratos, naõ importa qual, e no outro se vaõ metendo pezos conhecidos até estabelecer o equilibrio, que logo se conhece pela posiçaõ vertical do fiel; e que finalmente se conclue, que o pezo da massa he igual á soma dos pezos, que no outro prato lhe fazem equilibrio.

200 Huma cousa porém, como já dissemos, póde fazer muito defeituosa esta primeira especie de balanças, que he a desigualdade dos braços. Porque he facil de compensar o encurtamento de hum com o excesso do pezo do copo nelle pendurado; e entaõ sendo os pezos dos corpos na rasaõ inversa dos comprimentos dos braços, o equilibrio terá lugar, sem que todavia possamos fiarnos da exactidaõ da balança. Porque metendo a mercadoria no prato do braço mais comprido, está claro que ella fará equilibrio a hum pezo realmente maior que o seu.

201 Mas sabemos, que para verificar esta especie de balanças, basta fazer passar respectivamente de hum prato para o outro tanto o pezo como a cousa que se quer pezar. Logo se vê, que o pezo já maior do que devia ser, adquire novas forças pela applicaçaõ ao braço mais comprido, e que por huma subita preponderaçaõ faz desapparecer todo o equilibrio. Em fim, por muito dolosa que seja huma balança semelhante, com ella podemos determinar o verdadeiro pezo das mercadorias, se tomarmos o meio proporcional geometrico entre o pezo, que lhe faz equilibrio de huma parte, e o que lho faz da outra.

Para o demonstrar, seja $y$ o pezo da mercadoria, e $a$ o que mostra na balança, quando está applicada ao braço mais curto, que supponho ser $AS$; e teremos $y \,.\, AS = a \,.\, SX$. Seja $b$ o pezo, que mostra a mesma mercadoria, estando applicada ao braço mais comprido; e teremos tambem $y \,.\, SX = b \,.\, AS$; logo $yy \,.\, AS \,.\, SX = ab \,.\, AS \,.\, SX$, e $y = \sqrt{ab}$.

Por

Por exemplo: Se depois de havermos pezado a mercadoria em hum dos pratos, acharmos que faz equilibrio com o pezo de 25 libras, e paſſando-a para o outro prato acharmos que o faz com o pezo de 26 libras, diremos que o verdadeiro pezo della he 25 libras, 7 onças, 7 oitavas, e 26 graõs.

202 A balança, que havemos deſcrito, he ſem duvida muito accomodada para os uſos ordinarios; mas naõ deixa de padecer alguns inconvenientes. Hum dos maiores he, que para pezar differentes mercadorias ſaõ neceſſarios differentes pezos; quando na *Balança Romana*, ou *balança de hum prato*, hum ſó pezo baſta para pezar differentes mercadorias. Outro inconveniente da balança ordinaria he, que para a fazer mais perfeita, deve dar-ſe certo comprimento aos braços; e entaõ ſaõ ſujeitos a dobrar-ſe, e ſe fazem inuteis. He neceſſario tambem, que o traveſſaõ poſſa mover-ſe com muita facilidade, e para iſſo deve a parte inferior do eixo ſer bem aguda; porém quanto mais aguda, de qualquer materia que ſeja, tanto he mais ſujeita a embotar-ſe, e huma vez que perca o fio, naõ póde a balança ter a primeira mobilidade, porque a fricçaõ do eixo he maior. Tambem ſe aumenta a fricçaõ por outra cauſa, que he a grandeza dos pezos; e dahi vem, que huma balança baſtantemente ſenſivel para pezar em pequena quantidade materias precioſas, como ouro, e diamantes, naõ poderia ſervir por muito tempo neſte uſo, ſe ſe empregaſſe a pezar tambem outras materias de pezo conſideravel.

Em quanto o traveſſaõ eſtá horizontal, o pezo do fiel carrega ſobre o eixo da balança: mas quando o traveſſaõ pende para huma das partes, bem ſe vê que o pezo do fiel ajuda a potencia que tem prevalecido ſobre a outra. Por iſſo ſe tem o cuidado de naõ uſar ſenaõ de fieis muito delgados, e ainda de lhes applicar por baixo hum pequeno contrapezo, que inclinando para a parte oppoſta lhes faça de alguma fórma equilibrio.

Na conſtrucçaõ das balanças grandes devem preferir-ſe cadeias de metal ás cordas, naõ ſómente porque reſiſtem mais, mas tambem porque ſaõ menos expoſtas ás influencias da humidade e da ſecura. Tambem ſe devem preferir as materias mais duras e mais polidas para o traveſſaõ, ou ao menos para o eixo de huma balança ſolida, e facil de mover-ſe. Sobre eſte objecto podem alem diſto conſultar-ſe as Obras de muitos Geometras, *Jac. Bernoullii Oper. Vol. I .... Euleri diſquiſitio de bilancibus in Comm. Acad. Petrop. An.* 1738. *tom. X .... Lambert, Acta Helvetica Vol. III. &c.*

203 A *Balança Romana*, ou *Balança de hum copo* (Fig. 88.) he compoſta de huma alavanca, ou traveſſaõ *A B*, que ſe deve fazer movel o mais que for poſſivel ſobre hum eixo *C*, por huma ſuſpenſaõ ſemelhante á das balanças ordinarias. Hum dos braços *C B* deve ſer mais comprido que o outro *C A*, e quanto mais o for, tanto mais extenſo ſerá o uſo deſta balança. Na extremidade do braço menor ſe ſuſpende hum prato accomodado para receber as materias que ſe haõ de pezar, ou ſe applica hum gancho para as ſuſtentar; e ao longo do outro braço póde correr livremente hum pezo *F*, pendente por huma eſpecie de anel. Iſto poſto, eſtando o prato vazio, chega-ſe o pezo para o centro *C*, até haver equilibrio perfeito entre as partes da balança. Suppondo, que entaõ o anel *H* ſe acha ſituado no ponto *o* do braço *C B*, eſtá claro que ſe puzermos qualquer corpo *Q* no prato deſta balança, o equilibrio ſe romperá, até que apartando o pezo *F* do eixo *C*, quanto for conveniente, ſe torne a reſtituir; e entaõ veremos, que o momento $CA.Q$ deve ſer igual ao momento $F.CH$ menos o momento $F.Co$ do meſmo pezo *F*, por quanto elle ſe tirou do lugar em que eſtava na primeira diviſaõ *o*. Logo ſerá $CA.Q = F.Ho$.

Deſta conſtrucçaõ ſe ſegue, que dividindo o eſpaço *o B* em partes *o1*, 12, 23, 34, &c, cada huma dellas igual ao braço menor *C A*, o numero correſpondente ao ponto em que ſe achar o anel *H* denotará as vezes que o corpo *Q* contém o pezo *F*. Por exemplo, ſe eſte pezo comprehendendo tambem o do anel for de huma libra, e eſtiver na terceira diviſaõ, concluiremos que o pezo *Q* he de tres libras; e aſſim dos mais. Multiplicando as diviſoens do braço *C B*, pezar-ſe-haõ com facilidade até as menores partes da libra: mas para os uſos ordinarios, baſta dividir em 16 partes iguais cada hum dos intervallos já marcados, a fim de ſe pezarem as onças com exactidaõ.

204 A balança da China he como a Romana, mas de huma forma muito ſimples, e applicada a maior numero de uſos.

usos. Della se servem muito os Chins para pezar até as mais pequenas faiscas de ouro. Consiste em huma pequena vara, ou travessaõ de marfim *A B* ( Fig.89. ), de cuja extremidade *A* está pendente hum prato proprio para receber o que se quer pezar. Este travessaõ he furado em *C* de maneira, que passando hum cordaõ *C D* pelo buraco, nelle fica seguro por meio de hum nó, que tem na parte inferior. Por este cordaõ he que se sustenta a balança, a qual tem o outro braço dividido em partes bem iguais, e nelle hum contrapezo, que se vai afastando do ponto *C* até haver equilibrio. Mas a fim de fazer mais commodas as suas balanças, costumaõ os Chins dar no travessaõ outros dous furos *E*, *F*, para poderem suspendellas por tres pontos differentes, conforme a necessidade. Para cada eixo de suspensaõ tem o travessaõ huma divisaõ particular; e ficando sempre o prato na mesma extremidade, o contrapezo se aparta mais ou menos, conforme o eixo de suspensaõ.

Em lugar de fazer movel o contrapezo ( Fig. 90. ), podia fazer-se o prato; e esta balança serviria igualmente para os mesmos usos : mas em geral, he mais facil de mover o contrapezo, e dessa maneira se usa menos o prato da balança.

205 Os Maquinistas tem-se exercitado muito em descobrir novos meios de pezar toda a sorte de corpos. Huma das maquinas mais ingenhosas, que se tem imaginado para este effeito, consiste em hum quarto de circulo fixo sobre o pé *P*. No centro *C* se acha hum eixo perpendicular ao plano do quarto do circulo, e ao redor do eixo estaõ dipostas tres roldanas moveis e concentricas 1, 2, 3, por cada huma das quais passa hum cordaõ, em que se póde successivamente dependurar o prato. Os diametros das roldanas saõ arbitrarios : porém ellas saõ todas fixamente unidas a hum mesmo raio *C M* feito de materia algum tanto pezada, de maneira que naõ possaõ girar, sem que esta especie de *index* ou *alidada* se mova tambem. O cordaõ que passa pela roldana maior serve para os pezos mais pequenos, e os outros dous servem por gradaçaõ para pezar massas mais consideraveis.

O centro de gravidade *G* do index *C M* he o que faz as vezes de potencia. Supponhamos, que estando o prato vazio, *C M* corresponde ao ponto *o*; está claro, que carregando o prato se romperá o equilibrio a favor da materia

ria que ſe peza, e que o prato deſcerá conſeguintemente até que o index *C M* tenha ſubido para *D* a huma altura ſufficiente, para que o ſeu centro de gravidade obrando por hum braço de alavanca mais comprido poſſa fazer-lhe equilibrio. Mas a fim de que as maſſas mais pezadas naõ obriguem o index a ſubir rapidamente acima do ponto *D*, ajunta-ſe algum pezo na ſua extremidade *M*, para o fazer mais pezado, quando ſe trata de pezar maſſas conſideraveis. Tambem he bom pôr em *D* hum obſtaculo, que retenha o index no quarto de circulo, no caſo de que o ſeu pezo naõ ſeja baſtante.

He facil de ver, que neſta maquina o jogo do index ao redor do ponto *C* naõ póde ſer taõ livre, como o do travessaõ nas balanças ordinarias. A fricçaõ he neceſſariamente maior; e por iſſo naõ deve ſervir, ſenaõ para pezar maſſas mediocres, e que naõ ſejaõ de grande preço. Em concluſaõ: naõ ha meio, nem mais ſimples, nem mais proprio, para examinar os mais pequenos pezos, doque as balanças de que uſaõ os joyalheiros para pezar os diamantes, e os enſayadores da moeda para pezar o ouro. Saõ balanças ordinarias, mas taõ juſtas e ſenſiveis, que baſta muitas vezes a milleſſima parte de hum graõ para lhes alterar o equilibrio. He neceſſario pollas ao abrigo do vento, cobrindo-as com hum pequeno recipiente de vidro.

206 A facilidade de pezar as materias menos precioſas faz uſar de huma maquina de aço, cuja forma ſe reconhece facilmente pela inſpecçaõ da Figura 92. Tambem ſe uſa de outra maquina quaſi ſemelhante (Fig. 93), á qual ſe applica hum moſtrador dividido em mais ou menos partes, conforme ſe deſtina a pezar maſſas de maior, ou de menor pezo. Mas naõ deve eſperar-ſe grande exactidaõ do uſo deſtas ultimas maquinas, porque a fricçaõ, a alteraçaõ da elaſticidade, a ferrugem, e todas as influencias do ar as fazem neceſſariamente imperfeitas.

A eſtas primeiras applicações da alavanca ſe podiaõ ajuntar outras innumeraveis: mas todo o mundo ſabe, quanto ellas ſe multiplicaõ nos diverſos uſos da vida. Os remos dos barqueiros, as pontes levadiças com os ſeus contrapezos, as tizouras, tenazes, manivellas: tudo em fim nos offerece na arte, e na natureza applicações innumeraveis deſta maquina, que paſſa com raſaõ pela mais ſimples, e mais util de todas.

DA

## *DA ROLDANA.*

207 A *Roldana*, *polé*, ou *moutaõ* (Fig. 93.) he huma especie de roda, de grandeza arbitraria, cuja circumferencia $CFD$ he cavada por huma especie de góla, a fim de nella se ajustar a corda $ACB$, cujas extremidades saõ occupadas huma pelo pezo, e a outra pela potencia. A roda inteira he movel sobre o eixo $E$, que atravessa a *alça* $EG$.

Quando a alça está suspensa de hum ponto fixo $G$, a roldana he *fixa*; e entaõ he necessario para haver equilibrio, que a potencia $B$ seja perfeitamente igual ao pezo $A$. Donde se segue, que por meio desta maquina naõ pode ter a potencia ventagem alguma sobre o pezo, senaõ a de mudar a direcçaõ a seu arbitrio; circunstancia, que favorece muitas vezes o emprego da sua acçaõ, como se vê nas polés dos poços, mastros &c.

Porém, quando a corda que passa pela roldana está por huma das extremidades atada a hum ponto fixo $A$ (Fig. 94.), e a alça levanta o pezo $M$, a roldana he *movel*; e entaõ, para haver equilibrio he necessario que a tensaõ do cordaõ $AC$, ou a carga do apoyo $A$ seja igual á potencia $B$; porque a naõ ser assim, correria a roldana pela corda, até haver igualdade de huma e de outra parte.

Seja pois representada por $JK$ a carga do apoyo fixo, e por $KL$ a potencia $B$; a diagonal $HK$ representará o pezo $M$. E porque temos $B : M :: KL : HL$, os triangulos semelhantes $HKL$, $CED$ daráõ $B : M :: DE : CD$. Logo *para haver equilibrio na roldana movel, he necessario que seja a potencia B para o pezo M, como o raio da roldana para a subtensa do arco comprehendido pela corda.*

Donde se segue, que em quanto o dito arco for maior que 60° a potencia terá ventagem sobre o pezo; e que terá a maior que he possivel, quando o arco for de 180°, o que succederá todas as vezes que os cordoens $AC$, $BD$ forem parallelos. Logo naõ póde esperar-se condiçaõ mais favoravel para a potencia applicada a huma roldana movel, do que polla em equilibrio com hum pezo duplo. Se o arco subtendido por $CD$ tiver menos de 60°, bem se vê porque rasaõ a potencia fica de peior partido. He necessario advertir, que deve ter-se conta com o pezo da rolda-

roldana, quando se pertende grande exactidaõ no resultado do calculo, e entaõ basta ajuntar o pezo della ao da massa *M*.

A propriedade da roldana movel deu lugar á invençaõ de huma maquina, que se mostra representada na Fig. 95. Nella se vê hum pezo, ou huma potencia *Q*, cuja acçaõ communicando-se por meio de huma polé fixa *T* a sinco roldanas moveis, faz equilibrio ao pezo *P* suspenso no *gato* da quinta. Todas estas roldanas saõ iguais entre si, e os cordoens que as sustentaõ saõ parallelos. Cada hum delles está por huma das suas extremidades atado a hum ponto fixo *A* em huma peça de madeira, ou em qualquer muro.

Isto posto, he evidente que a primeira roldana movel O deve estar em equilibrio com huma potencia *Q* duas vezes menor que a carga, que ella sustenta. A carga da roldana seguinte deve pela mesma rasaõ ser quatro vezes maior que a mesma potencia, e assim por diante, até chegar á carga da roldana $O^{IV}$, que naõ he outra cousa mais do que o pezo *M*, e que se achará conseguintemente em equilibrio com outro pezo *Q* trinta e duas vezes menor. Multiplicando pois as roldanas moveis, podem aumentar-se consideravelmente as forças de huma potencia, que obra por meio desta maquina. A expressaõ geral deste aumento he $P = 2^m Q$.

208 Chama-se *Cadernal* huma maquina composta de muitas roldanas *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 96.), dispostas de qualquer maneira dentro de huma mesma *alça* *A D*, e chama-se em particular cadernal de dous, tres, ou quatro *gornes*, conforme o numero das roldanas. Huma força mediocre basta para fazer em hum cadernal equilibrio a huma grande resistencia: mas o effeito desta maquina será mais notavel, quando a hum cadernal fixo se ajuntar outro movel. Supponhamos, que o cadernal *A D* está pregado fortemente pelas orelhas *M* e *N* em quaisquer pontos fixos, e que outro cadernal *G E* carregado de hum grande pezo *P* está suspenso horizontalmente ao primeiro por huma unica corda *H* 7 6 5 4 3 2 1 *Q*, que joga por todos os gornes, e na extremidade *Q* he tirada pela potencia. Isto posto, busquemos a condiçaõ do equilibrio entre o pezo *P*, e a potencia *Q*: mas antes disso, naõ nos esqueçamos de advertir, que o pezo do cadernal movel, e de tudo o que lhe pertence deve ajuntar-se ao pezo *P*.

Pri-

Primeiramente eftá claro, pelo que temos dito da roldana fixa, que a tenfaõ do cordaõ 1 he igual á potencia $Q$, e que a do cordaõ 2 he igual á do cordaõ 1. Por confeguinte todos os cordoens do apparelho devem ter a mefma tenfaõ, e a força della ferá medida pela potencia $Q$. Porém a tenfaõ de huma corda em equilibrio vem de duas potencias iguais, que a eftendem para partes contrarias; logo podemos confiderar cada cordaõ, como tirado de baixo para cima pela potencia $Q$, e de cima para baixo por outra potencia igual a $Q$. Mas efta, que naõ tende evidentemente fenaõ a carregar o cadernal fixo, ferá abforbida pela refiftencia que elle oppoem. A primeira pelo contrario tende a elevar o cadernal inferior; e affim confideraremos cada cordaõ como a direcçaõ de huma potencia $Q$ que tende a elevar o cadernal $EFG$.

Se refolvermos pois cada huma deftas direcções em outras duas, huma horizontal, e outra vertical, veremos facilmente que as primeiras devem deftruir-fe mutuamente, para que o cadernal naõ tenha movimento algum horizontal; e que as fegundas faõ as que fe empregaõ realmente em fuftentar o pezo P. Seja pois $A$ o angulo, que faz qualquer dos cordoens com o horizonte. He facil de ver, que $Q\ sen\ A$ he o esforço vertical que refulta da potencia $Q$ applicada fegundo a direcçaõ do mefmo cordaõ. Logo teremos a foma de todas eftas forças, ou $som.\ Q\ sen\ A$, ou $Q.\ som\ sen\ A = P$. He neceffario pois, para eftabelecer o equilibrio nefte apparelho, que a potencia feja para o pezo como o feno total para a foma dos fenos dos angulos, que formaõ com o horizonte os cordoens, que fobem do cadernal inferior para o fuperior.

Donde fe fegue, que fendo os cordoens parallelos, a potencia deve fer para o pezo, como a unidade para o numero dos ditos cordoens; e por iffo efta difpofiçaõ he a mais favoravel á acçaõ da potencia.

A condiçaõ, que acabamos de expôr, tem igualmente lugar, quando os dous cadernais eftaõ difpoftos verticalmente (Fig. 97.): mas entaõ he neceffario, que as roldanas fejaõ defiguais; e querendo que os cordoens fejaõ parallelos, he neceffario, que os diametros das roldanas que a corda abraça fucceffivamente figaõ huma progreffaõ arithmetica, que tenha por differença o diametro da mais pequena.

Suppondo pois que as roldanas $D, E, C, F, B, G, A$ faõ refpectivamente, em quanto aos diametros, como 1, 2,

3

3, 4, 5, 6, 7, teremos no caſo do equilibrio a condiçaõ ſeguinte: *O pezo deve equivaler a tantas vezes a potencia, quantos ſaõ os cordoens que ſobem do cadernal inferior para o ſuperior.* Aſſim no caſo preſente, huma potencia Q ſete vezes menor que o pezo P o ſuſtentaria em equilibrio. Podem tambem ſer iguais o diametros das roldanas, eſtando ao lado humas das outras, cada huma em ſua caſa, como ſe pratica em muitos apparelhos.

O uſo dos cadernais he muito commum nas manobras dos navios, e geralmente em todo o lugar, quando ſe trata de levantar grandes pezos. Eſta eſpecie de apparelhos he mais commoda, que muitas outras, porque para ſe fazer jogar naõ carece, nem de muito eſpaço, nem de grandes esforços. Porém em quanto ás ventagens que póde ter a potencia, he certo que naõ podem paſſar de certos limites; porque augmentando muito o numero das roldanas, e dos cordoens, a fricçaõ ſe faz taõ conſideravel, que a potencia naõ terá mais que ganhar.

Ha muitos outros modos de diſpôr as roldanas, os quais ſe encaminhaõ mais ou menos a multiplicar as forças: mas nós naõ entraremos a referillos por meudo, ſendo baſtantes os principios precedentes, para calcular o effeito delles.

## *DO SARILHO, E DE OUTRAS MAQUINAS QUE A ELLE SE REDUZEM.*

209 SObre dous apoyos *A*, *A* (Fig. 98.) deſcança horizontalmente hum cylindro *B B*, cujas extremidades podem girar com facilidade nos buracos, ou fendas dos apoyos. Perpendicularmente a eſte cylindro eſtá fixa huma roda *R*, que a potencia ſe esforça a mover. A roda leva comſigo na ſua revoluçaõ o cylindro, ao qual eſtá preza huma corda que ſuſtenta o pezo, e que o levanta pouco a pouco á medida que vai girando o cylindro. Eſte todo forma o que chamamos *Sarilho*, cujo uſo he taõ commum nas vezinhanças de Paris, e em outras partes, para tirar as pedras do fundo das pedreiras.

Muitas vezes em lugar da roda ſe uſa ſimpleſmente no Sarilho de huma manivella, ou de duas alavancas, ou barras, que cruzaõ perpendicularmente o cylindro: mas conſiderando eſtas alavancas, como outros tantos raios de huma meſma roda,

roda, bem ſe vê que naõ deixa de ſer tudo huma meſma maquina. Somente parece, que a revoluçaõ do cylindro produzida pela força das alavancas he menos uniforme, doque a que ſe obra por meio da roda. Eſta eſpecie de maquinas ſe vê ordinariamente nas carroças, que ſervem de tranſportar as pipas de vinho.

210 Separemos agora da Fig. 98. todo o apparelho exterior e acceſſorio, para conſiderarmos as partes eſſencialmente relativas ao equilibrio. Seja pois $AB$ (Fig 99.) o eixo do cylindro apoyado ſobre as duas extremidades $A$, $B$, e ſeja $DFE$ a ſemicircumferencia da roda, á qual eſtá applicada a potencia $P$ pela direcçaõ da tangente $FMP$: ſeja $H$ o ponto, onde a corda $HQ$ toca a ſuperficie do cylindro, do qual $GH$ repreſenta o raio, ou a perpendicular conduzida do ponto $H$ ſobre o eixo $AB$. Imaginemos em fim, que a interſecçaõ do plano vertical $DFE$ da roda com o plano horizontal $ABH$ ſe repreſenta pela recta $CMO$.

Iſto poſto, ſe concebermos a potencia $P$ applicada em $M$, e repreſentada por $MN$, poderemos reſolvella em duas forças, huma horizontal repreſentada por $MO$, e outra vertical repreſentada por $MR$. Porém a primeira eſtá na direcçaõ do ponto $C$; logo ſerá deſtruida pela reſiſtencia do eixo, empregando horizontalmente o ſeu esforço contra os pontos de apoyo fixos $A$, e $B$. Logo ſomente a ſegunda he a que deve fazer equilibrio ao pezo $Q$, dirigido por $HQ$. Imaginando pois a alavanca $MKH$, que tem o ponto de apoyo em K, teremos por condiçaõ do equilibrio $MR : Q :: HK : MK$. Porem os triangulos $KMC$, $KGH$ ſaõ ſemelhantes, como tambem o ſaõ os triangulos $MNR$, $MFC$; logo teremos em primeiro lugar $HK : MK$, ou $MR : Q :: GH : CM$; e em ſegundo lugar, $MR : MN :: CF : CM$. Donde concluiremos

$$Q \cdot GH = CF \cdot MN = CF \cdot P;$$

iſto he: *Para haver equilibrio no ſarilho, he neceſſario que a potencia ſeja para o pezo, como o raio do cylindro para o da roda*; ou (que vem a ſer o meſmo) *he neceſſario que os momentos do pezo, e da potencia em ordem ao eixo ſejaõ iguais.*

211 Para determinar a carga dos pontos de apoyo $A$, $B$ he neceſſario reſolver a força horizontal $MO$, ou $\frac{MF}{CM}P$

em

outras duas, huma dirigida para $A$, que ferá $Aa' = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{CB}{AB} P$; e a outra dirigida para $B$, que ferá $Bb' = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{AC}{AB} P$. Do mefmo modo as duas forças verticais $MR$ e $Q$ fe reduzem a huma $Q + MR$, ou $Q + \frac{CF}{CM} P$, que paffa por $K$; e efta fe refolverá em outras duas verticais, que paffem por $A$, e $B$. A primeira dellas ferá $Aa = \frac{KB}{AB} \left( Q + \frac{CF}{CM} P \right)$, e a fegunda ferá $Bb = \frac{AK}{AB} \left( Q + \frac{CF}{CM} P \right)$. Acabando pois os rectangulos $Aa'a''a$, $Bb'b''b$, as diagonais $Aa''$, $Bb''$ reprefentaráõ as cargas, que fuftentaõ os pontos $A$, $B$.

212 A condiçaõ do equilibrio no farilho moftra, que a potencia terá tanto maior ventagem fobre o pezo, quanto for maior a roda, a que fe applicar. Efta roda, em conclufaõ, póde collocar-fe em qualquer ponto que fe quizer do comprimento do cylindro, fem que o equilibrio fe desfordene. Por exemplo (Fig. 100.), podiamos fuppor a fecçaõ $GH$ no mefmo plano da roda, e o equilibrio naõ deixaria por iffo de exprimir-fe pela equaçaõ $P \cdot GF = Q \cdot GH$; porque entaõ, obrando as duas forças $P$, $Q$ huma contra a outra por meio da alavanca angular $FCH$, os feus esforços feraõ iguais, affim que tivermos $P \cdot GF = Q \cdot GH$.

213 Sendo a corda, de que fe faz ufo no farilho, quafi fempre de hum diametro notavel, e communicandofe a acçaõ da potencia ao pezo pelo eixo da mefma corda, he neceffario ajuntar o femidiametro della ao raio do cylindro.

Daqui vem, que he neceffario aumentar a potencia, todas as vezes que a corda, tendo cuberto todo o comprimento do cylindro, fobrepoem as voltas humas a outras.

214 Se o eixo do farilho (Fig. 101.), em lugar de fer horizontal, for perpendicular, entaõ tem o nome particular de *Cabreftante*. Delle fe ufa frequentemente para conduzir pouco a pouco maffas confideraveis, como pedras grandes, obelifcos, eftatuas equeftres &c. Primeiramen-

te ſe levantaõ com alavancas, para ſe lhes introduzirem rolos por baixo, que facilitem o movimento; e algumas vezes ſe eſtabelecem ſobre hum tecido de madeiramento ſuſtentado em rodas groſſas, e maciças. Depois a huma diſtancia competente ſe prega fortemente no chaõ huma groſſa eſtaca, á qual ſe prende o cabreſtante. Quatro homens, ou mais ſe he neceſſario, applicados cada hum á ſua barra fazem voltar o cylindro; á medida da revoluçaõ ſe vai enroſcando a corda pela ſua circumferencia, e o pezo ſe adianta outro tanto. Quando eſtá perto da eſtaca, prega-ſe eſta mais adiante; faz-ſe a meſma manobra; e á força de a continuar, chega hum pequeno numero de obreiros a conduzir ao lugar do ſeu deſtino pezos deſmarcados.

Deſte modo he, que a pezar da grande fricçaõ que he neceſſario vencer, vemos muitas vezes mover ſem grandes esforços maſſas muito pezadas. Quando ſe trata de as conduzir a pequenas diſtancias, fixa-ſe por huma vez a ſituaçaõ do cabreſtante; e quando ſe trabalha com elle, hum homem ſentado ao pé do cylindro deſenrola as primeiras voltas da corda, ao paſſo que ſe vaõ formando outras. Em Paris todo o mundo conhece eſta manobra, que ſerve continuamente para deſcarregar os barcos de pedra &c.

215 Os ſarilhos, de que ſe uſa na conſtrucçaõ dos pequenos edificios, ordinariamente ſaõ ſuſtentados por duas peças de madeira, que formaõ hum angulo, no vertice do qual ſe acha huma roldana pela qual paſſa a corda, que deve levantar os materiais.

Chamaõ-ſe *Guindaſtes* os que ſe uſaõ na conſtrucçaõ dos maiores edificios, e nos eſtaleiros. No guindaſte, o ajuntamento de todas as partes do cylindro, e das rodas faz equilibrio a huma grande peça de madeira, cuja direcçaõ he obliqua ao horizonte, na qual eſtaõ as polés fixas por onde paſſa a corda. O todo he movel ſobre hum piaõ, de maneira que tendo elevado o pezo a huma certa altura, póde fazer-ſe andar horizontalmente em roda do guindaſte, por meio de huma roldana que chamaõ grua, e joga por cima do baileo, que he a modo de hum andaime, ou cadafalço armado ao redor do piaõ.

Para ſe darem mais forças a eſta maquina, poem-ſe ordinariamente em cada extremidade do cylindro huma roda de ſeis pés de raio, ſobre a qual ſe ſobe continuamente por pequenos degraos, a fim de actuar por meio do proprio pezo; ou, ſe cada huma tem o ſeu tambor, os obreiros as fazem girar caminhando pelo interior dellas.

216 Repreſentemos por $CAB$ (Fig. 102.) o quarto da roda, ſobre a qual os homens caminhaõ, e por $M$, $M'$, $M''$, $M'''$, $B$, os pontos onde actûa o pezo delles, pelas direcções perpendiculares $PM$, $P'M'$, $P''M''$ &c. Logo ſendo $M$, $M'$ &c os pezos reſpectivos delles, teremos por expreſſaõ dos ſeus momentos, em ordem ao centro $C$, os productos $M.CP$, $M'.CP'$ &c, cuja ſoma deve ſer igual ao momento da maſſa, que elles ſuſtentaõ.

Seja pois $CE$ o raio do cylindro, e $P$ o pezo que deve ſuſtentar-ſe. Teremos $P.CE = M.CP + M'.CP' + M''.CP'' + M'''.CP''' + B.CB$ (ſuppondo que naõ ha mais do que huma roda; porque ſendo duas, e ambas iguais tanto nas dimenſões, como nas potencias que lhes ſaõ applicadas, a ſoma dos momentos ſerá o dobro da expreſſaõ precedente).

217 Tomemos por exemplo hum guindaſte, que tenha duas rodas, em cada huma das quais trabalhem $n$ homens todos de igual pezo, e applicados a diſtancias iguais $AM$, $MM'$ &c. Seja $M$ o pezo de cada hum delles, $r$ o raio $CE$ do cylindro aumentado do ſemidiametro da corda, $R$ o raio $CA$ da roda, e o arco $AM = \frac{90°}{n} = x$. Teremos $P.r = 2M.R$ ( $sen\,x + sen\,2x + sen\,3x \ldots\ldots +$ $sen\,nx$, ou $1$ ). Porém a ſoma deſta ſerie he $\frac{1 + cot\frac{1}{2}x}{2}$ (Euler. Intr. in Analyſ. Infin. tom. 1.). Logo a equaçaõ precedente ſe reduzirá a eſta $P.r = M.R\left(1 + cot\frac{1}{2}x\right)$.

Seja v. gr. o raio de cada huma das rodas de 8 pés, e o do cylindro juntamente com o ſemidiametro da corda de 6 polegadas. Pergunta-ſe o pezo $P$, que 6 homens applicados a huma roda podem ſuſtentar em equilibrio.

O pezo de hum homem mediano coſtuma avaliar-ſe em 150 libras. Aſſim ſubſtituindo na formula precedente todos os valores das quantidades, de que ſe compoem, acharemos temos que he $P = 16 . 150 \, (1 + cot. \, 7^o \, 30') = 16 . 150 . 8,5957541 = 20629,81$. Este pezo será pois de 20630 libras; e aumentando-se as forças o que for necessario para vencer a fricçaõ, levantarse-há facilmente até onde se quizer.

A mesma formula daria igualmente a conhecer o numero de homens, que seria necessario applicar a cada roda, para fazerem equilibrio a hum pezo dado.

218 He de advertir, que nos calculos relativos ao uso dos guindastes deve attender-se ao pezo, e á dureza das cordas. Quanto ellas saõ mais grossas, tanto mais resistem a dobrar-se á feiçaõ da circumferencia do cylindro; e quando saõ novas, ainda resistem mais. Tambem se experimenta maior difficuldade a este respeito, á medida que ellas sustentaõ maiores pezos, que o movimento das rodas he mais rapido, e que as roldanas por onde passaõ saõ mais pequenas. Quanto ao pezo, deve tambem ter-se conta delle, muito principalmente quando a segurança da manobra nos obriga a usar de grossos calabres.

219 As maquinas, que se compoem de differentes rodas, naõ saõ outra cousa mais que hum encadeamento de sarilhos, nos quais a potencia obra na circumferencia da roda maior, por meio dos seus dentes. O que tem entaõ lugar de cylindro (Fig. 103.), he outra roda dentada muito mais pequena, que se ajusta concentricamente ao eixo da grande, de maneira que naõ possa mover-se huma sem a outra. Para distinçaõ, chama-se a pequena *carrete*.

Os dentes das rodas saõ ordinariamente abertos no seu mesmo plano, isto he, na direcçaõ da circumferencia para o centro. Algumas vezes porém pedem as circunstancias, que se abraõ perpendicularmente ao plano (Fig. 104.), e entaõ se chama roda *de coroa*, ou roda de *chaõ*. Tambem os carretes se fazem de hum cylindro oco, ou *lanterna*, cuja superficie convexa he substituida por huns páos delgados, e roliços, chamados *fuzelos*, parallelos entre si, e dispostos a distancias iguais (Fig. 105.). Estes fuzelos produzem o mesmo effeito, que os dentes ordinarios, e se usaõ nas atafonas, e em muitos outros engenhos.

220 Supponhamos agora huma roda $A$ dentada, ou naõ dentada (Fig. 106.), sobre a qual obra huma potencia $Q$ pela direcçaõ da tangente $MQ$. Esta roda tem fixamente no seu eixo hum carrete $a$, que endenta com ou-

tra roda $B$ : o eixo defta leva outro carrete $b$, que move outra roda $C$; e para naõ multiplicarmos mais as peças, fupponhamos que a roda $C$ tem finalmente no feu eixo hum carrete, ou cylindro $c$, no qual fe enrolla a corda $NP$, que fufpende o pezo P, á medida que as rodas fe movem. Ifto pofto, bufquemos a relaçaõ, que deve ter a potencia $Q$ com o pezo P, no cafo do equilibrio.

Sejaõ $R$, $R'$, $R''$ os raios das rodas $A$, $B$, $C$; fejaõ $r$, $r'$, $r''$, os raios dos feus carretes refpectivos; e fejaõ em fim $a$, $b$, P as forças, com as quais tendem a moverfe os pontos tangentes delles. Pela propriedade do farilho teremos

$$Q : a :: r : R, \; a : b :: r' : R', \; b : P :: r'' : R'';$$

e multiplicando eftas tres proporções, termo por termo, acharemos finalmente

$$Q : P :: r r' r'' : R R' R''.$$

Logo, *para eftabelecer o equilibrio por meio das rodas dentadas, he neceffario, que a potencia feja para o pezo, como o producto dos raios de todos os carretes para o producto dos raios de todas as rodas.*

Affim, fendo o raio de cada carrete huma decima parte do raio da roda, e havendo tres rodas, e tres carretes, huma potencia mil vezes menor que o pezo, huma fó libra por exemplo, fuftentaria mil; e fe ajuntaffemos fómente duas rodas com dous carretes, a mefma libra faria equilibrio a cem mil. Poucas maquinas faõ logo taõ proprias para multiplicar as forças, como as rodas dentadas.

221 Entre todas as maquinas, que fe reduzem immediatamente ao farilho, tem o *Macaco*, com muita rafaõ, hum dos primeiros lugares. Efte he hum dos inftrumentos mais fimples da Mechanica, e naõ fe conhece outro mais efficaz.

No macaco obra a potencia por meio de huma manivella $AMNP$ (Fig. 113.), cujo eixo $NP$ tem hum carrete P, que move a barra dentada $CD$, e a obriga a fobir. Eftá claro, que para haver equilibrio nefta maquina, deve fer a potencia applicada á manivella para a força, que tende a levantar a barra $CD$, como o raio do carrete para o raio $MN$ da manivella. E como o primeiro raio he muito mais pequeno que o fegundo, podem levantar-fe facilmente com o macaco pezos muito confideraveis.

Mas a força ferá muito maior, fe ajuntarmos huma roda ta com hum carrete de mais (Fig. 114.). Porque entaõ a potencia applicada á manivella ferá para a força que tende a elevar a barra $CD$, como o producto dos raios dos carretes $P$, $R$ para o producto dos raios da roda $N$, e da manivella $MN$.

## *Do movimento das rodas em geral, e do mechanismo dos relogios em particular.*

222 MAs para confiderarmos de caminho o movimento das rodas, fupponhamos que o primeiro carrete $a$ faz mover todo o fyftema de rodas, e carretes (Fig. 107.). Sejaõ reprefentados por $n$, $n'$ os numeros dos dentes dos carretes $a$, $b$; e por $N$, $N'$ os numeros dos dentes das rodas $B$, $C$. He evidente, que o primeiro carrete $a$ naõ póde dar huma volta inteira fem que a roda $B$ faça huma parte da fua revoluçaõ. Efta parte deve correfponder a $n$ dos feus dentes, e a fua expreffaõ geral he a parte $\frac{n}{N}$ de huma das fuas revoluções totais.

A roda $C$ deve, pela mefma rafaõ, fazer huma parte da fua revoluçaõ, a qual he vifivelmente huma fracçaõ $\frac{n'}{N'}$ da quantidade $\frac{n}{N}$ que a roda $B$ tem andado. Affim, em quanto o carrete $a$ dá huma volta inteira, a roda $C$ fará a parte $\frac{n\,n'}{N\,N'}$ da fua revoluçaõ total.

223 Donde fe fegue em geral, *que o numero de voltas dadas pelo carrete, que move todo o fyftema, he para o numero das voltas da ultima roda, como o producto dos numeros de dentes de todas as rodas para o producto dos numeros de dentes de todos os carretes.*

224 Logo, fe a rodagem foffe movida toda pela roda $C$, a velocidade defta roda feria para a do ultimo carrete $a$, como o producto dos numeros de dentes de todos os carretes para o producto dos numeros de dentes de todas as rodas. E daqui fe póde determinar em todos os cafos o numero de dentes, que fe deve dar a cada huma das peças, para que dando a primeira roda huma volta em certo tempo, a ultima dê tambem huma volta em hum tempo

po

po dado. Naõ ha cousa mais ingenhosa na Relogiaria, do que as applicações, que se tem feito deste principio aos diversos movimentos, que mostraõ os segundos, os minutos, as horas, os dias, os mezes, e o curso dos astros. Examinemos hum pouco este mechanismo, considerando-o nos relogios ordinarios.

225 O que dá o movimento a toda a maquina, he huma móla spiral, que ordinariamente se chama *móla real*, escondida dentro do *tambor A* (Fig. 108.), o qual he movel sobre o seu eixo. Esta móla se comprime, quando se dá corda ao relogio; e como ella está fixa por huma das extremidades no eixo do tambor, e pela outra na superficie concava delle, he necessario que para se restituir ao seu estado natural faça girar o mesmo tambor. Porém o tambor tem sobre a sua superficie convexa huma pequena cadeia de aço, que nella prende por huma ponta, e pela outra no *fuzo B*, o qual he huma especie de conoide, que ordinariamente póde receber sete voltas, e meia da mesma cadeia. Isto posto, quando se anda com o fuzo, por meio da chave applicada ao seu eixo *P*, faz-se andar ao mesmo tempo o tambor; e assim se comprime a móla interior, á medida que a cadeia vai passando delle para o fuzo.

Mas logo que se acaba de andar com o fuzo, a móla começa a soltar-se, faz girar o tambor, a cadeia torna para a superficie delle, o fuzo a vai largando pouco a pouco, e communica o movimento a toda a maquina. He verdade, que as forças da móla diminuem á medida que ella se vai soltando: e por isso naõ poderia fazer girar uniformemente o fuzo, como he essencialmente necessario, se naõ se tivessem achado meios de compensar aquella diminuiçaõ. Eisaqui primeiramente o mais efficaz. Em lugar de se dar ao fuzo huma forma cylindrica, imaginou-se darlhe a de hum conoide truncado, a fim de que os momentos das forças da móla fossem constantemente iguais entre si. Esta precauçaõ bastaria só para conservar a uniformidade do movimento, se pudessemos segurarnos na pratica de que a móla se solta sempre por huma mesma lei conhecida, e de que ao fuzo se tinha dado exactamente a figura que lhe he necessaria. Mas como naõ he possivel haver sobre estes dous pontos inteira certeza, procurou-se remediar o resto de irregularidade por outros meios.

226 An-

226 Antes de os darmos a conhecer, sigamos passo por passo os effeitos da móla. Esta se dispoem de maneira, que naõ possa restituir-se ao estado natural, senaõ no espaço de trinta horas; e assim o fuzo, que ha de dar sete voltas e meia, fará regularmente huma revoluçaõ em quatro horas. O mesmo fuzo está guarnecido na sua base de huma roda de 48 dentes bem iguais, os quais enlaçaõ com os de hum carrete, que tem 12 tambem muito iguais. Este carrete deve pois fazer huma revoluçaõ em huma hora; e por conseguinte, se na extremidade do seu eixo, produzido até o mostrador, se fixar hum ponteiro, este mostrará os minutos.

227 Falta dar movimento ao ponteiro das horas; e para isso se imaginou hum jogo de rodas situado entre o mostrador, e a chapa dianteira. O carrete *M* (Fig. 109.) está no eixo da roda dos minutos, e dá conseguintemente huma volta por hora: além disto endenta com a roda *N*, cujo carrete *P* elevado acima do seu plano faz mover a roda *Q*. Esta roda faz huma peça juntamente com o *cano*, ou pequeno cylindro vazado, em cuja extremidade está o ponteiro das horas, e por dentro do qual gira livremente a haste, que conduz o ponteiro dos minutos. Vê-se representada separadamente esta roda na Fig. 110: e naõ ha mais do que imaginalla suspensa ao mostrador por meio do cano, de sorte que possa girar livremente, como o faria ao redor da haste, ou eixo dos minutos.

Mas ainda póde fazer-se huma idéa mais clara deste jogo, lançando os olhos sobre a Fig. 111, que representa huma secçaõ perpendicular, feita pela haste da roda dos minutos. Esta haste K*O* tem o carrete *M M*, que endenta com a roda *N N*: e a roda *N N* tem na sua haste o carrete *P P*, que endenta com a roda *Q Q*, cujo cylindro vazado *C C E* E tem na sua extremidade superior *C C* o ponteiro das horas *C D*.

228 Agora para determinarmos o numero dos dentes das rodas *N*, *Q*, e dos carretes *P*, *M*, designemos estes quatro numeros pelas mesmas letras respectivas *N*, *Q*, *P*, *M*. E por quanto a roda *Q* deve dar huma volta em quanto o carrete P dá 12, teremos $12\ P . M = N . Q$ (n. 223.); donde se vê, que este Problema, como todos os outros da mesma natureza, he em geral muito indeterminado. Advertindo porém 1°, que as indeterminadas *P*, *M*, *N*, *Q* devem

vem ſer numeros inteiros; 2°, que os dentes de hum carrete naõ devem paſſar de 12, quanto for poſſivel; 3°, que os dentes de huma roda naõ devem paſſar de 100, quando ſe naõ quizer fazer o relogio muito voluminoſo; he facil de comprehender, que o numero das ſoluções poſſiveis deve ſer muito limitado. No caſo preſente, huma das mais ſimples he dar aos carretes *P*, *M* 10 e 12 dentes, e ás rodas *N*, *Q* 40 e 36. Igualmente ſe podem tomar as ametades deſtes quatro numeros.

229 Advirtamos porém, que ſendo determinado o numero dos dentes de cada peça, a grandeza das rodas e carretes naõ he mais arbitraria. Com effeito, para que huma roda poſſa endentar exactamente com hum carrete, he neceſſario que o intervallo entre os pontos tangentes de dous dentes conſecutivos da roda ſeja igual ao intervallo entre os pontos tangentes de dous dentes conſecutivos do carrete. Logo, ſendo *N* o numero dos dentes da roda, e *n* o numero dos dentes do carrete, deve ſer o raio da roda para o do carrete como o ſeno de $\frac{180°}{n}$ para o ſeno de $\frac{180°}{N}$; entendendo-ſe aqui pelo nome de raio, como ordinariamente ſe entende, a diſtancia do centro ao ponto do contacto. Aſſim teremos no jogo de rodas do caſo preſente (Fig. 111.), $NN = \frac{MM \,.\, \textit{ſen}\ 15°}{\textit{ſen}\ 5°}$, e $QQ = \frac{PP\ \textit{ſen}\ 18°}{\textit{ſen}\ 4°\ 30'}$.

Mas ainda falta huma condiçaõ, a que eſſencialmente ſe deve ſatisfazer; e he, que deve ſer $NN + MM = PP + QQ$, ou que $MM \,.\, \frac{\textit{ſen}\ 15° + \textit{ſen}\ 5°}{\textit{ſen}\ 5°} = PP \,.\, \frac{\textit{ſen}\ 18° + \textit{ſen}\ 4°\ 30'}{\textit{ſen}\ 4°\ 30'}$.

Donde concluiremos

$$NN = MM \,.\, \frac{\textit{ſen}\ 15°}{\textit{ſen}\ 5°}$$

$$PP = MM \,.\, \frac{\textit{ſen}\ 10° .\ \textit{coſ}\ 5° .\ \textit{ſen}\ 4°\ 30'}{\textit{ſen}\ 5° .\ \textit{ſen}\ 11°\ 15' .\ \textit{coſ}\ 6°\ 45'}$$

$$QQ = MM \,.\, \frac{\textit{ſen}\ 10° .\ \textit{coſ}\ 5° .\ \textit{ſen}\ 18°}{\textit{ſen}\ 5° .\ \textit{ſen}\ 11°\ 15' .\ \textit{coſ}\ 6°\ 45'}$$

Calculando eſtes valores por Logarithmos, acharemos

$NN = 2,9696MM \quad 2\frac{32}{33} MM$, $PP = - - -$ $0,8038 MM = \frac{41}{51} MM$, e $QQ = 3,1658 MM = 3\frac{1}{6} MM$. E aſſim ſerá determinada a relaçaõ, que devem guardar entre ſi as peças deſte movimento.

230 Com eſtas rodas pois, que ficaõ entre o moſtrador e a primeira chapa do *tear*, he que ſe faz mover o ponteiro das horas concentricamente com o dos minutos; e naõ faltaria mais nada para a conſtrucçaõ dos relogios, ſe a móla pudeſſe por ſi ſó fazer andar o fuzo com perfeita uniformidade. Mas o frio, e o calor, a humidade, e a ſecura, as diverſas poſições do relogio, tudo conſpira a fazer que a móla ſe reſtitua com deſigualdade. Por outra parte, ſe naõ ſe lhe oppuzeſſe alguma reſiſtencia, que lhe moderaſſe o impulſo, em lugar de ſe deſenvolver a corda do fuzo em 30 horas, paſſaria toda ao tambor em hum inſtante. Eſta reſiſtencia he produzida pelo *volante*; e eisaqui de que modo.

Hum jogo de rodas, conduzido por huma roda que eſtá na haſte dos minutos, faz mover a ultima roda, que chamaõ roda *Catharina*, ou roda *de encontro*, a qual topa com os dentes nas *palhetas* do volante. Dá-ſe a eſta roda hum numero impar de dentes, a fim de que cada hum delles correſponda diametralmente a hum eſpaço vazio, e que naõ poſſaõ ao meſmo tempo encontrar-ſe dous dentes com as palhetas do volante. Eſta conſtrucçaõ faz, que as palhetas ſaõ alternativamente impellidas pelos dentes ſuperiores e inferiores da roda de encontro, e que á medida que paſſa cada dente faz o volante duas vibrações. Nos relogios ordinarios faz 17280 por hora.

A roda do volante faz as ſuas vibrações debaixo do *guarda-volante*, que alguns tambem chamaõ *gallo*; e eſtá ſujeita a huma pequena móla ſpiral, que vulgarmente chamaõ *pendula*, e melhor ſeria chamar-lhe *regulador*. Eſta móla reſiſte ao movimento do volante, ou tambem o accelera, quando he neceſſario; reſiſtencia, e aceleraçaõ, que ſe communica ao movimento de toda a maquina, e que aſſim ſe torna muito menos irregular. Bem ſe ſabe, que andando com o regiſto, que vulgarmente chamaõ a *roda do tempo*, e que eſtá junto do do guarda-volante, ſe retarda ou adianta o relogio, porque ſe alonga ou encurta aquella parte do regulador, que modera as vibrações, e que reſiſte mais ou menos ao movimento do volante, conforme lhe deixa o jogo mais ou menos livre.

231 Determinêmos agora o ſyſtema, que ſendo conduzido por huma roda ſituada na haſte dos minutos, deve produzir 17280 vibrações do volante por hora.

A primeira roda he pois a que dá huma volta por hora, e que aqui repreſentamos por $R$ (Fig. 108. 112.). Eſta endenta no carrete $r$, que na ſua haſte tem a roda $R'$, a qual endenta no carrete $r'$; e eſte conduz na ſua haſte a roda de coroa $R''$, que endenta no carrete $r''$, o qual finalmente conduz na ſua haſte a roda de encontro $R'''$. Tal he de ordinario a diſpoſiçaõ deſtas peças: mas ainda que naõ ſaõ todos os relogios fabricados da meſma maneira, os principios do calculo ſeguinte naõ deixaõ por iſſo de ſerem gerais, e applicaveis a todas as combinações poſſiveis.

Sejaõ $R$, $R'$, $R''$, $R'''$ os numeros reſpectivos dos dentes, que ſe devem dar ás rodas deſignadas por eſtas meſmas letras; e ſejaõ $r$, $r'$, $r''$ os numeros dos dentes dos carretes reſpectivos. No tempo, em que a primeira roda $R$ dá huma volta, o carrete $r''$, ou a roda $R'''$ dará hum numero de voltas, que geralmente ſe exprime por $\frac{R \cdot R' \cdot R''}{r \cdot r' \cdot r''}$. Eſta roda fará logo paſſar cada hora hum numero de dentes repreſentado por $\frac{R \cdot R' \cdot R'' \cdot R'''}{r \cdot r' \cdot r''}$: porém, para paſſar hum dente, he neceſſario que o volante faça duas vibrações; logo $\frac{2R \cdot R' \cdot R'' \cdot R'''}{r \cdot r' \cdot r''}$ deve dar 17280 vibrações. Logo teremos $R \cdot R' \cdot R'' \cdot R''' = 8640 \cdot r \cdot r' \cdot r'''$; e ſuppondo todos os carretes de ſeis dentes cada hum, $R \cdot R' \cdot R'' \cdot R''' = 1728 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$.

Mas como a roda de encontro deve ter hum numero impar de dentes, e como naõ póde ter menos de 13, nem mais de 17, reſta ſómente o ſuppor-lhe 15. Entaõ ſerá $R \cdot R' \cdot R'' = 1728 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 54 \cdot 48 \cdot 48$. Poder-ſe-ha pois dar 54 dentes á roda $R$, 48 a $R'$, e outros 48 a $R''$., ficando a roda de encontro de 15, e cada hum dos carretes de 6. Os dous Problemas ſeguintes ſe reſolvem da meſma maneira.

232 Pro-

232. Problema I. *Achar os numeros de dentes, que se devem dar a cada huma das peças de hum jogo de rodas, o qual sendo movido por hum carrete no eixo da roda das horas, faça dar á ultima roda huma só volta no espaço de hum anno commum, isto he, em $365^d\ 5^h\ 49'$.*

O carrete posto no eixo da roda das horas dá huma volta em 12 horas, e a ultima roda deve dar huma em $365^d\ 5^h\ 49'$, ou em $8765^h\ \frac{49}{60}$, que dividindo por 12 dá $730\ \frac{349}{720}$. Sejaõ pois $r, r', r''$ os numeros dos dentes dos tres carretes, e $R, R', R''$ os numeros dos dentes das tres rodas, e teremos

$$R \cdot R' \cdot R'' = 730\frac{349}{720} r \cdot r' \cdot r''.$$

Isto posto, para que $R \cdot R' \cdot R''$ seja hum numero inteiro, a primeira cousa que occorre, he fazer $r \cdot r' \cdot r'' = 720$. Este numero se resolve nos factores 8, 9, 10, que saõ proprios para se darem aos dentes dos tres carretes; mas esta supposiçaõ dá $R \cdot R' \cdot R'' = 525949$, numero que naõ póde resolver-se em factores, que sirvaõ para os dentes das tres rodas $R, R', R''$: mas isto se remedeia, buscando por via de approximaçaõ o que se naõ póde haver exactamente. Eisaqui o modo.

Por quanto a questaõ se reduz a fazer que $\frac{349}{720} r \cdot r' \cdot r''$ seja hum numero inteiro, vejamos se diminuindo-o da mais pequena quantidade possivel $\frac{\delta}{720}$ podemos fazello inteiro. Supponhamos pois $\frac{349 \cdot r \cdot r' \cdot r'' - \delta}{720} = E$, ou $r \cdot r' \cdot r'' = \frac{720\, E + \delta}{349}$. O resto desta divisaõ he $\frac{\delta + 22\, E}{349}$; e se o multiplicarmos por 16, o resto será $\frac{16\, \delta + 3\, E}{349}$; tornando a multiplicar por 116, e tomando o resto da reducçaõ teremos $\frac{111\, \delta - E}{349}$, que deverá ser hum numero inteiro $E'$. Logo $E = 349\, E' + 111\, \delta$; e substituindo este valor, teremos $r \cdot r' \cdot r'' = 720\, E' + 229\, \delta$, e

R.

$R.R'.R'' = 525949\,E' + 167281\,\delta$, desprezando nesta ultima equaçaõ a quantidade $\frac{\delta}{720}$, que naõ he de consequencia alguma, como logo veremos.

Agora podemos dar a $E'$ e $\delta$ os valores que quizermos, até que os productos $r.r'.r''$ e $R.R'.R''$ possaõ resolver-se em factores convenientes. Fazendo differentes tentativas, se achará que os valores que produzem bom effeito saõ $E' = -1$, e $\delta = 4$; donde se deduz $r.r'.r'' = 196$, e $R.R'.R'' = 143175$. Os factores de 196 saõ 4, 7, 7; e os de 143175 saõ 25, 69, 83; e póde tomar-se o dobro de hum dos primeiros, com tanto que tambem se tome o dobro de hum dos segundos. Assim teremos resolvido o problema, fazendo os tres carretes de 7, 7, e 8 dentes, e as tres rodas de 50, 69, e 83, disposto tudo de qualquer maneira; porque he cousa indifferente dar a esta, ou áquella roda hum dos tres ultimos numeros de dentes, e do mesmo modo nos carretes.

Supposto que temos desprezado huma pequena fracçaõ no calculo precedente, naõ póde recear-se que dahi resulte erro sensivel. Apenas será necessaria correcçaõ depois de ter deixado accumular todos estes erros por hum grande numero de periodos. Para nos convencermos, basta examinar o que se passa no movimento das rodas, que temos determinado. Está claro, que dando a ultima roda huma volta, dará o primeiro carrete $\frac{143175}{196}$; e porque este dá huma volta em 12 horas, aquella dará huma em $\frac{143175 \,.\, 12^h}{196}$ $= \frac{143175 \,.\, 3^h}{49} = 365^d\ 5^h\ 48'\ \frac{48}{49}$. Assim temos a soluçaõ com a differença sómente de $\frac{1}{49}$ de minuto, que he huma approximaçaõ maior do que era bastante.

Problema II. *Achar os numeros dos dentes, que se devem dar a hum jogo de rodas, o qual sendo movido por hum carrete situado no eixo dos minutos, faça dar á ultima roda huma volta em $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''$, que he a revoluçaõ synodica da Lua.*

Reduzindo a horas este intervallo de tempo, acharemos

708^h

$708^h \frac{881}{1200}$; e chamando $x$ o producto dos numeros dos dentes de todos os carretes, e $y$ o producto dos numeros dos dentes das rodas, teremos $y = 708 \frac{881}{1200} x$; equaçaõ, que naõ póde ser resolvida, senaõ por approximaçaõ, supponda que $\frac{881\,x - \delta}{1200}$ he hum numero inteiro. Acabando o calculo, como no problema precedente, acharemos $x = 1200\,E - 79\delta$, e $y = 850481\,E - 55990\delta$; e pondo $E = 1$, e $\delta = 4$, sahirá $x = 884$, e $y = 626521$.

O primeiro destes numeros póde resolver-se em tres factores 4, 13, 17; e o segundo em quatro 7, 37, 41, 59. Mas querendo-o reduzir a tres deveriaõ multiplicar-se os dous mais pequenos 7, e 37, que dariaõ 259, numero muito grande para os dentes de huma roda. Resta pois, em semelhante caso, suppor quatro rodas e quatro carretes. Mas para introduzir de novo hum carrete de 6 dentes, he necessario dar 6 vezes mais dentes a alguma das rodas; e a escolha he bem facil, porque ha huma de 7. Temos pois resolvido o problema, empregando quatro carretes de 4, 6, 13, e 17 dentes, e quatro rodas de 37, 41, 42, e 59.

Estes principios bastaõ para explicar todo o mechanismo desta especie de movimentos. Da soluçaõ do primeiro problema nos podemos servir, para fazer que no mostrador se indiquem os dias, os mezes, os equinocios, os solsticios, e geralmente tudo o que respeita ao anno solar. E imitando o procedimento, que praticamos na soluçaõ do segundo problema, poderá mostrar-se de huma maneira muito exacta a idade da Lua, e todas as suas phases.

## *DO PLANO INCLINADO.*

233 JA temos visto (n. 149. e seg.), quais saõ as condições necessarias, para que hum corpo posto sobre hum plano horizontal se mantenha em equilibrio. He necessario, em geral, que a vertical conduzida pelo centro de gravidade naõ deixe todos os pontos de apoyo para huma mesma parte. Examinemos agora o que deve observar-se no equilibrio de hum corpo, quando se poem sobre hum plano inclinado ao horizonte.

Primeira-

Primeiramente he facil de ver, que as forças que follicitaõ o corpo, devem todas reduzir-fe a huma fó, perpendicular ao mefmo plano inclinado; e que fem iffo naõ póde haver equilibrio. Huma vez que tenha lugar a dita reducçaõ, he evidente que a refultante ferá deftruida pela refiftencia do plano, e que o corpo por confeguinte ficará em defcanço, fem poder jámais mover-fe, em quanto os pontos de apoyo naõ ficarem todos para huma mefma parte a refpeito da refultante.

234 Seja pois a potencia *P* (Fig. 115.) a que retem o corpo em equilibrio, *G* o centro de gravidade do corpo, *GQ* a vertical que paffa por elle, a qual encontre a direcçaõ da potencia em *M*. Supponhamos tambem, que a força *P* fe reprefenta por *MR*, e o pezo *G* por *MQ*. Completando o parallelogrammo *MQNR*, a diagonal *MN* reprefentará a refultante, a qual, como differmos, deve fer perpendicular ao plano, para fer por elle deftruida.

A primeira condiçaõ neceffaria, para haver equilibrio fobre o plano inclinado, exige pois que o centro de gravidade do corpo e a direcçaõ da potencia fe achem em hum mefmo plano perpendicular ao plano inclinado.

Seja *AB* a fecçaõ do plano *QMP* com o plano, fobre o qual fe trata de eftabelecer o equilibrio; feja *BC* a linha horizontal conduzida por *B*, a qual fe chama a *bafe* do plano inclinado; e *AC* a vertical que paffa por *A*, a qual fe chama *altura* do mefmo plano. A recta *BC* he o *comprimento* delle, e o angulo *ABC* a fua *inclinaçaõ*.

Ifto fuppofto: A fegunda condiçaõ neceffaria para haver equilibrio, he que a refultante *MN* feja perpendicular a *AB*. Por outra parte já fabemos, que a potencia *P* he para o pezo *G*, como $MR : MQ :: sen\,QMN : sen\,NMR$; e que a mefma potencia he para a preffaõ fobre o plano, como $MR : MN :: sen\,QMN : sen\,QMR$.

Da primeira deftas proporções concluiremos, que a potencia ferá a menor que he poffivel, quando for recto o angulo *NMP*, ou, que vem a fer o mefmo, quando a direcçaõ *MP* for parallela ao plano. Porque entaõ a potencia he para o pezo como o feno de *QMN* para o feno total. E como, nefte cafo, faõ femelhantes os triangulos *QMN*, *ABC* teremos efta proporçaõ: *A potencia he para o pezo como o feno da inclinaçaõ do plano ao horizonte para o raio, ou como a altura do plano para o feu comprimento.*

235 Em

235 Em consequencia destes principios he facil de explicar a força da maquina, de que ordinariamente se usa para meter os toneis nas cavas, ou adegas subterraneas (Fig. 116.). Esta maquina participa ao mesmo tempo de todas as ventagens do sarilho, da roldana movel, e do plano inclinado. As duas peças de madeira, em que joga o sarilho, estaõ encostadas como huma escada á parede, onde se acha a entrada da cava. Huma das pontas da corda, que abraça o tonel está preza a huma tranca, que se atravessa nos pés da escada; e a outra está preza ao cylindro do sarilho, e se desenrola pouco a pouco. Deste modo faz o tonel as vezes de huma roldana movel.

Sendo pois $M$ o momento da força applicada ás barras do sarilho, e $r$ o raio do cylindro, será $\frac{M}{r}$ a força que estende cada huma das pontas da corda; e suppondo as duas pontas parallelas, será $\frac{2M}{r}$ a força que retem o tonel $P$ parallelamente ao plano inclinado. Chamando pois $A$ a inclinaçaõ do plano ao horizonte, teremos $\frac{2M}{r} : P :: sen\,A : 1$; donde se tira $2M = P\,r\,sen\,A$.

Supponhamos agora, que estaõ dous homens applicados ao sarilho, e que conjuntamente empregaõ huma força de 200 libras. Supponhamos tambem, que as barras do sarilho saõ 10 vezes maiores que o raio do cylindro, e que a inclinaçaõ do plano ao horizonte he de 30°. Teremos $P = 200 \,.\, 10 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8000$ libras; e por conseguinte sustentaráõ estes dous homens o pezo de 80 quintais. Ajunte-se a isto o effeito da fricçaõ, que nestas circunstancias favorece tanto ao equilibrio, quanto se oppoem ao movimento.

236 Quando hum corpo se suppoem posto em equilibrio entre dous planos inclinados $AB$, $AC$ (Fig. 117), he necessario que haja na vertical, que passa pelo seu centro de gravidade, ao menos hum ponto $G$, do qual conduzindo para os planos as perpendiculares $Gq$, $Gn$, estejaõ estas ambas em hum mesmo plano vertical, de maneira que naõ deixem para huma mesma parte os pontos, por onde o corpo assenta sobre os planos. Logo he necessario, que a intersecçaõ commua dos dous planos seja huma linha recta horizontal $EF$. O

O pezo do corpo, que podemos reprefentar por $GM$; refolve-fe em duas forças $GQ$, $GN$ que exprimem as preffoens refpectivas fobre os dous planos inclinados. Chamando-as pois $Q$, $N$, e o pezo do corpo $G$, teremos $G : Q : N :: GM : GQ : GN ::$ *fen* $QGN$ : *fen* $MGN$ : *fen* $MGQ ::$ *fen* $BAC$ : *fen* $CAE$ : *fen* $BAF$.

237 Por quanto cada *peça de volta* de huma abobada he hum corpo fuftentado em equilibrio entre os dous planos inclinados das duas peças vezinhas, para haver equilibrio, he neceffario que a vertical conduzida pelo centro de gravidade tenha ao menos hum dos feus pontos tal, que delle fe poffa tirar huma perpendicular para cada huma das faces das peças contiguas, com as condições acima declaradas (Fig. 118.). Como porém cada peça faz huma preffaõ lateral contra todas as que a fuftentaõ, he neceffario, alem do referido, que a preffaõ da peça *A* fobre a peça *B* feja igual e directàmente oppofta á preffaõ reciproca, que a peça *B* exercita contra a peça *A*. As unicas peças, que naõ tem reacçaõ contra as fuperiores, faõ os dous *faimeis* *F*, *G*, cujo pezo carréga todo fobre as *impoftas*. O refto actûa de peça em peça contra as partes inferiores, que recebendo huma preffaõ lateral, a communicaõ fucceffivamente até os mefmos faimeis.

Efta preffaõ geral communicada ás impoftas fe refolve em duas, huma perpendicular, e a outra parallela ao horizonte. A primeira carrega fobre os alicerces, e he deftruida pela refiftencia delles. A fegunda fórma a força do encontro da abobada, que tende a defviar as paredes para as ilhargas, e arruinar o edificio. Naõ ha coufa mais importante na conftrucçaõ das abobadas, do que a arte de diminuir a força do encontro, que ellas fazem contra os *pés direitos*.

Se as paredes, que fuftentaõ huma abobada, faõ de muita folidez, e de pouca altura, facilmente podem refiftir á preffaõ horizontal della. Mas quando a abobada he muito alta, e oufada, como faõ pela maior parte as dos grandes templos, entaõ actuando a preffaõ por hum braço de alavanca muito comprido fatigaria confideravelmente os pés direitos, e bem de preffa os derribaria, fe os Arquitectos naõ tiveffem o cuidado de niffo darem algum remedio.

O meio, que elles empregaõ de ordinario confifte em fortificar exteriormente os pés direitos com *botaréos* algumas vezes maciços, e pela maior parte formados de pequenas abobadas obliquas, que propagaõ até outros pégoens menos

eleva-

elevados o encontro da abobada principal, onde actuando por hum braço de alavanca mais curto he mais facil de se destruir.

Em fim, quando ha muitas abobadas continuadas, a pressaõ lateral, que obra nas extremidades, naõ he maior do que seria a de huma só abobada, igual na extensaõ a todas ellas. Que huma ponte seja de dés arcos, ou de quatro, o esforço geral que faz por desviar os membros das extremidades, he o mesmo; e por isso he necessario, que sejaõ igualmente fortes, para a poderem sustentar.

238 Supponhamos dous corpos $A, B$ ( Fig. 119.) atados ao fio $ACB$, que passa pela roldana $C$, e postos em equilibrio sobre os planos inclinados $ED, DF$. Seja $MN$ a vertical, que passa pelo centro de gravidade do corpo $A$, e representemos por $MN$ o pezo delle. Este se resolverá em duas forças, huma $MO$ perpendicular ao plano $DE$, e a outra $MP$ na direcçaõ do fio $CM$. Fazendo huma resoluçaõ semelhante do pezo do outro corpo, será $QT$ a força com que elle estende o fio $BCM$. Logo, havendo equilibrio, será $MP = QT$, ou $\frac{A \, sen \, NMO}{sen \, CMO} = \frac{B \, sen \, RQS}{sen \, CQS}$.

Se os fios $CA, CB$ forem parallelos aos planos $DE, DF$, a ultima equaçaõ se reduzirá a $A \, sen \, DEG = B \, sen \, DFG$, que se póde pôr nesta fórma $A . \frac{DG}{DE} = B . \frac{DG}{DF}$. Logo será necessario, neste caso, *que os pezos dos corpos* A, B *sejaõ como os comprimentos dos planos* DE, DF *sobre os quais se sustentaõ.*

239 Mas se dous corpos estiverem sobre duas laminas curvas $AF, BF$ (Fig. 120), atados ás extremidades de hum fio, que passe pela pequena roldana $C$, de que modo determinaremos a condiçaõ do equilibrio?

Igualmente resolveremos cada hum dos pezos $A, B$ em duas forças. E como representamos aqui estes dous pezos pelas verticais $Aa$, $Bb$, huma das forças será $Aa'$, ou $Bb'$, pela direcçaõ $AN$, ou $BM$ perpendicular ao plano inclinado; e a outra será representada por $Aa''$, ou $Bb''$, cuja direcçaõ coincide com a do mesmo fio. Logo, no caso do equilibrio, teremos $Aa'' = Bb''$; e conduzindo a vertical $CNM$, os triangulos semelhantes daraõ $Aa$ ou $A : Aa'' :: CN : CA$, e $Bb$ ou $B : Bb'' :: CM :$

K CB;

$CB$; logo $A \cdot \frac{CA}{CN} = B \cdot \frac{CB}{CM}$.

Isto posto, tiremos duas linhas horizontais $AP, BQ$, e fazendo $CP = x$, $CQ = x'$, $CA = z$, $CB = z'$, $AP = y$, $BQ = y'$, será a subnormal $PN = \frac{y\,dy}{dx}$, $CN$ $= x + \frac{y\,dy}{dx} = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx} = \frac{z\,dz}{dx}$, $CM = \frac{z'dz'}{dx'}$. Logo, para haver equilibrio, teremos $\frac{A\,dx}{dz} = \frac{B\,dx'}{dz'}$: porém $z + z'$ he huma quantidade constante, e conseguintemente $dz = -dz'$; logo a condiçaõ do equilibrio será representada por esta equaçaõ $A\,dx + B\,dx' = 0$, da qual se mostrará huma applicaçaõ no Problema seguinte.

240 *Dada a curva* AF, *com os pezos* A, B, *e o comprimento do fio* ACB, *achar outra curva* EB *tal, que postos os dous corpos em qualquer parte dellas estejaõ sempre em equilibrio.*

Como a equaçaõ geral $A\,dx + B\,dx' = 0$ tem lugar em todos os casos, o seu integral $Ax + Bx' = C$ nos ensina que o centro commum de gravidade dos dous corpos $A$ e $B$ deve achar-se constantemente sobre huma mesma linha horizontal, seja qual for a situaçaõ delles; por quanto já sabemos por outra parte que a distancia do ponto $C$ á horizontal, que passa pelo centro de gravidade dos corpos $A$, $B$, tem por expressaõ $\frac{Ax + Bx'}{A + B}$.

Agora dando o nome de $a$ ao comprimento do fio $ACB$, teremos $z + z' = a$, ou $z' = a - z$; e esta equaçaõ, juntamente com a primeira que temos achado, dará de hum modo muito simples os valores de $x'$ e de $z'$ pelos de $x$ e de $z$. E assim, sendo dado qualquer ponto $A$ da curva $AF$, immediatamente se conhecerá o ponto correspondente $B$ da curva $BE$.

241 Supponhamos, por exemplo, que a curva $AF$ he hum circulo que tem o centro em $N$, e chamemos $r$ o seu raio, e $c$ a linha $CN$. Teremos $zz = xx + rr - (c - x)^2$ $= rr - cc + 2cx$; e substituindo $a - z'$ em lugar de $z$, e $\frac{C - Bx'}{A}$ em lugar de $x$, teremos por equaçaõ da curva

pro-

procurada $EF$, $2az' - z'z' = aa - rr + cc - \frac{2cC}{A} + \frac{2cB}{A}x'$. Porém, como a constante $C$ he arbitraria, podemos suppolla tal, que $aa - rr + cc = \frac{2cC}{A}$; e a equaçaõ precedente se mudará em $2az' - z'z' = \frac{2cB}{A}x'$, a qual pertence a huma epicycloide, cujos circulos generantes saõ iguais.

Seja com effeito $ANE$ o circulo immovel (Fig. 121.), $BNF$ o circulo movel, $r$ o raio de cada hum delles, $M$ o ponto descrevente, situado na linha $BMD$, e em qualquer parte della. Sendo iguais os arcos revolvidos $NE$, $NF$, será isosceles o triangulo $ADB$; e conduzindo $MC$ parallela a $AB$, será $AC$ constantemente igual a $MB$, e conseguintemente naõ receberá variaçaõ alguma. Isto posto, reportemos a curva ao ponto fixo $C$, e façamos $CM = z$, $CP = x$, $BM = AC = m$; e teremos 1°, $AB - CM : CM :: AC : CD = \frac{mz}{2r - z} = DM$; 2°, pela propriedade do triangulo isosceles, $CM^2 = 2CD \cdot CP$, ou $zz = \frac{2mzx}{2r - z}$, ou finalmente $2rz - zz = 2mx$, equaçaõ perfeitamente semelhante á da curva que procuravamos.

242 Esta epicycloide he susceptivel de tres fórmas differentes, conforme se tomar o ponto descrevente, ou na circumferencia do circulo movel, ou fóra, ou dentro della. No primeiro caso, o ponto $C$ onde deve estar a roldana he hum ponto de *reversaõ* (Fig. 122.): no segundo he hum *ponto multiplo*, e a curva fórma huma pequena *folha* (Fig. 123.): e no terceiro he hum *ponto conjugado* (Fig. 121.), porque pertence realmente á curva, sendo evidente que os valores de $x = 0$, $z = 0$ satisfazem a sua equaçaõ; he porém ao mesmo tempo hum ponto *solitario*, que naõ communica com a curva, senaõ por meio de ramos imaginarios.

Para descrever pois a epicycloide, que satisfaz á questaõ

taõ proposta, será necessario tomar $CA = m = \frac{Bc}{A} = \frac{B}{A} CN$, e o raio dos dous circulos $= a =$ ao comprimento do fio. Entaõ o ponto $M'$, na distancia $\frac{B}{A} CN$ do centro, descreverá a epicycloide procurada.

A constante foi determinada de maneira, que a curva se sujeitasse a passar pela roldana $C$. Se a quizessemos determinar por qualquer outra condiçaõ, a curva, ainda que differente, poderia sempre construir-se por meio da epicycloide precedente. As curvas, que satisfazem a esta questaõ, saõ conhecidas pelo nome de *curvas de equilibraçaõ*. Nas Actas de Leipsick poderá ver-se a soluçaõ deste mesmo Problema pelo Marquez do Hospital, com as addiçoens que Leibnitz e Bernoulli lhe fizeraõ.

143 Os planos inclinados saõ de grande uso, quando he necessario aballar massas enormes, como por exemplo, quando se trata de lançar as náos ao mar, ou de as arrastar outra vez ao estaleiro para serem concertadas. Os rodeios, que se tomaõ nas montanhas escarpadas, para fazer o caminho mais facil, saõ tambem huma prova sensivel das ventagens, que nos resultaõ dos planos inclinados. Quanto he mais doce o lançamento de huma escada, tanto menor fadiga sentimos em sobir; porque a acçaõ do pezo he tanto menor, quanto he maior o comprimento do plano, sendo as alturas iguais.

## *DO PARAFUZO.*

244 O *Parafuzo* he hum cylindro recto $AQ$ (Fig. 124.), revestido de hum cordaõ ou filete espiral de grossura uniforme, cuja inclinaçaõ ao eixo do cylindro he constantemente a mesma em todo o seu comprimento. Dá-se o nome de *spira* a huma volta inteira do filete, ou rosca do parafuzo, e o intervallo que separa duas spiras consecutivas chama-se *passo do parafuzo*.

Fazendo abstracçaõ do relevo desta maquina, póde considerar-se produzida por triangulos rectangulos $ABC$, $BDE$ &c, que se enrolaõ no cylindro (Fig. 125.). Cada hum destes triangulos tem por altura o passo do parafuzo, e por base

base a circumferencia do cylindro, formando as hypothenusas o filete da rosca.

245 A *porca* he hum solido vazado, e interiormente aberto em fórma de hum rego spiral, de maneira; que por elle se possa insinuar a rosca do parafuzo. Póde considerar-se, como o molde da parte do parafuzo que nella se acha metida.

246 Humas vezes está fixo o parafuzo, e se anda em roda com a porca, como se pratica nas prensas dos Livreiros, e em todas as maquinas destinadas a apertar fortemente quaisquer corpos. Outras vezes pelo contrario he movel o parafuzo, quando se trata de quebrar, ou impurrar algum corpo. Andando em roda com o cylindro, a rosca se introduz pouco a pouco pelos regos da porca, e com a extremidade do mesmo cylindro se produz huma pressaõ incrivel.

Em geral, seja qual for dos casos precedentes o que tenha lugar, poderemos sempre considerar hum ponto da rosca movel, como posto sobre huma porçaõ infinitamente pequena $MN$ de hum plano inclinado $AC$, que tem por altura o passo do parafuzo, e por base a circumferencia do cylindro (Fig. 125.). Logo, se quaisquer forças sollicitarem este ponto ao movimento, será necessario para haver equilibrio, que a resultante dellas seja perpendicular ao referido plano inclinado.

247 Supponhamos, por exemplo, que a porca está fixa, e que huma potencia $P$ se applica á alavanca $AP$ para fazer girar o parafuzo (Fig. 124.). Está claro, que no caso de movimento o parafuzo deve ir avante na direcçaõ do seu eixo. Imaginemos pois, que huma potencia $Q$ applicada á extremidade do eixo contrabalança o esforço da primeira, e impede o adiantamento do parafuzo. Deve determinar-se a condiçaõ necessaria, para estabelecer este equilibrio.

A potencia $Q$ applicada segundo a direcçaõ do eixo póde resolver-se em tantas potencias parallelas, quantos saõ os pontos da rosca movel (Fig. 126.). Seja pois representada por $MG = q$ a que sollicita o ponto $M$ parallelamente ao eixo; e seja $MK$ a força de rotaçaõ do ponto $M$, em virtude da potencia $P$. Para haver equilibrio, he necessario que a resultante $MH$ seja perpendicular ao plano inclinado $MN$. Desta condiçaõ se segue, que o angulo

gulo $HMG$ deve ser igual a $KMN$, e conseguintemente teremos $MK : q :: tang\ KMN : 1$, ou $MK$ para $q$, como o passo do parafuzo $AB$ ( Fig. 125. ) para a circumferencia, que tem o raio igual á distancia do ponto $M$ ao eixo do cylindro. Designando pois esta distancia por $r$, a altura $AB$ por $h$, e a rasaõ do diametro para a circumferencia por $c$, teremos geralmente $q : MK :: 2cr : h$.

Seja $p$ huma potencia infinitamente pequena, que a huma distancia $R$ do eixo seja capaz de imprimir, por meio de huma alavanca, no ponto $M$ da rosca a força de rotaçaõ $MK$; teremos $MK : p :: R : r$. E multiplicando esta proporçaõ pela precedente, resultará $q : p :: 2cR : h$.

248 Concluamos pois, que a força $p$ applicada á alavanca $R$ para fazer andar em roda a particula $M$ da rosca he para a força $q$ parallela ao eixo, que contrabalança o seu esforço, como o passo do parafuzo para a circumferencia descrita pelo braço da alavanca $R$. Como esta rasaõ he constante, e como tem igualmente lugar em todos os pontos da rosca, que assentaõ sobre o plano inclinado da porca; concluiremos em geral ( Fig. 124. ), que a soma das potencias $p$, isto he, que a resultante P applicada ao braço da alavanca $R$, he para a soma das potencias $q$, isto he, para a sua resultante Q dirigida pelo eixo do parafuzo, como a altura de hum passo para a circumferencia, que seria descrita pelo raio $R$.

249 Seja pois qual for a figura, e grossura das spiras de hum parafuzo, e a quantidade dellas que na porca estejaõ introduzidas, teremos sempre por condiçaõ do equilibrio nesta maquina a proporçaõ seguinte.

*A potencia* P, *que tende a fazer girar o parafuzo pelo braço da alavanca* R, *he para a força com que o parafuzo tende a adiantar-se pela direcçaõ do eixo*, *ou*, (que vem a ser o mesmo) *para a pressaõ que elle póde exercitar sobre hum corpo posto na sua extremidade*, *ou em fim para a potencia* Q *que lhe faz equilibrio*, *como hum passo do parafuzo para a circumferencia*, *que descreveria a potencia* P *andando á roda do cylindro.*

Logo a potencia terá tanto maior energia para comprimir os corpos por meio do parafuzo, quanto forem as spiras mais chegadas humas ás outras, e quanto for mais comprido o braço da alavanca.

250 Além disto, a fricçaõ que he muito grande nes-

ta maquina favorece muito o equilibrio, mas embaraça á proporçaõ o movimento. Sendo, por exemplo, hum parafuzo immovel posto em situaçaõ vertical, a porca deveria naturalmente descer pelo seu proprio pezo, andando em roda pelas roscas do parafuzo, até chegar á base delle. Com tudo, ainda que seja muito pezada, em qualquer parte que a ponhaõ, fica em descanço, até que alguma força externa a obrigue a girar, e a descer: donde se vê, quanto he consideravel a fricçaõ nesta maquina, principalmente quando se naõ tem a attençaõ de facilitar-lhe o jogo com materias oleosas. Este obstaculo ao movimento cresce tambem pelos gráos de calor, que contrahem as roscas á medida que os esforços da potencia saõ maiores; e por isso succede muitas vezes arrebentarem os parafuzos, quando se trabalhaõ com excesso, principalmente no tempo dos grandes frios.

Sem embargo, a força do parafuzo para comprimir os corpos póde ser conduzida a hum ponto, que naõ he facil de conceber. He necessario ter visto em grande os effeitos desta maquina, para fazer conceito, ao menos proximamente, do partido que della se póde tirar, segundo as differentes circunstancias. Naõ conhecemos em Paris cousa mais curiosa neste genero, do que a salla das Imprensas da Manufactura do Tabaco.

251 O *parafuzo de Archimedes*, ou *parafuzo sem fim*, naõ differe do parafuzo simples, senaõ por huma roda dentada, que se lhe ajunta (Fig. 127.). A potencia $Q$ applicada á manivella $BCQ$ anda em roda com o cylindro $AB$, guarnecido de duas spiras $E$ e $F$, as quais enlaçaõ com os dentes da roda $GHI$; e esta tem no eixo hum cylindro K, na superficie do qual se enrola a corda, que suspende o pezo P.

Nesta maquina, o ponto tangente $G$ de qualquer dente da roda póde considerar-se como huma porçaõ infinitamente pequena de huma porca movel sobre o parafuzo $AB$. Logo o passo do parafuzo he para a circumferencia do raio $BC$, como a potencia $Q$ applicada á manivella para a força com que o ponto $G$ da rosca tende a mover o dente da roda. Logo será esta força $= \frac{Q \, . \, circ \, BC}{EF}$.

Chamando pois $r$ o raio do cylindro, e $R$ o da roda, tere-

teremos $\frac{Q \,.\, circ\, BC}{EF}$, $R$ por expressaõ do momento da força applicada em $G$, o qual deve ser igual a $Pr$, que he o momento do pezo. Assim he necessario, para haver equilibrio no parafuzo sem fim, *que a potencia seja para o pezo, como o producto do raio do cylindro pelo passo do parafuzo, para o producto do raio da roda pela circumferencia, que descreveria a manivella.*

Se fizermos, por exemplo, o raio da manivella dés vezes maior que o passo do parafuzo, e o raio da roda dés vezes maior que o do cylindro, acharemos que entaõ fará equilibrio a potencia $Q$ a hum pezo 314 vezes maior. A sua energia será muito mais consideravel, se ella se applicasse a hum systema de maquinas semelhantes, unidas entre si da maneira seguinte.

252 Considere-se a potencia $Q$ applicada á manivella de hum parafuzo, o qual endenta na sua roda. Tenha esta hum carrete, que faça andar outro parafuzo, cuja roda por meio de outro carrete mova o terceiro parafuzo. E na roda deste supponha-se o cylindro, em que se enrola a corda que suspende o pezo. Mostra-se pelo calculo, que sendo a potencia $Q$ equivalente ao pezo de huma só libra deve contrabalançar o pezo $P$ de 279253 libras, suppondo que as differentes partes da maquina tem as dimensões seguintes.

O raio da manivella tem 168 linhas, e conseguintemente a sua circumferencia 1056; o raio da primeira roda 96; o da segunda 90; o da terceira 85; o do primeiro carrete 20; o do segundo 18; e o do cylindro 16. Além disto suppomos, que o segundo parafuzo tem 14 linhas de raio no lugar onde toca o primeiro carrete, e 9 no lugar onde endenta com a sua roda; que o terceiro parafuzo tem 8 linhas de raio no ponto de contacto com o segundo carrete, e 6 no ponto de contacto com a terceira roda; e que o passo do primeiro parafuzo he de huma linha. Isto supposto, facilmente se acha, que haverá equilibrio todas as vezes que for a potencia para o pezo, como o producto do passo do primeiro parafuzo, do raio do cylindro, dos raios dos dous carretes, e dos raios dos dous ultimos parafuzos nos lugares onde actúaõ sobre as suas rodas respectivas, para o producto da circumferencia da manivella, dos raios das tres rodas, e dos raios dos dous ultimos parafuzos nos lugares

gares onde actuaõ ſobre os carretes das duas primeiras rodas. Aſſim teremos no caſo preſente,

$Q : P :: 1.20.9.18.6.16 : 1056.96.14.90.8.85 :: 1 : 279253.$

## *DA CUNHA.*

253 A *Cunha* he huma eſpecie de priſma triangular, feito ordinariamente de materia muito dura, como de ferro por exemplo (Fig.128.). Todos ſabem, que os uſos principais deſte inſtrumento ſaõ de rachar, ou fender differentes corpos. Os triangulos $ABC$, $FDE$ ſaõ as duas *baſes* da cunha, $CE$ he o *corte*, $BDCE$, $ACEF$ ſaõ as duas *faces*, e $AFBD$ he a *cabeça*: ſobre eſta ſe applica verticalmente a força da potencia.

254 Supponhamos, que a cunha $ABC$ eſtá introduzida na fenda já começada $VXY$ (Fig. 129.), e que a potencia $P$ lhe dá hum golpe de martello na cabeça. A força, que reſulta deſte golpe pela direcçaõ $QMN$, deve reſolver-ſe em outras duas reſpectivamente perpendiculares ás duas faces da cunha $AC$, $BC$, ou ás partes tangentes $VX$, $XY$; condiçaõ neceſſaria, para que a reſiſtencia deſtes planos lhe poſſa fazer equilibrio. Conſeguintemente deve haver na direcçaõ $QMN$ hum ponto $M$, do qual ſe poſſa conduzir huma perpendicular para cada huma das partes interiores do corpo já fendido. Repreſentemos pois a força $P$ por $MN$, e reſolvamola em outras duas $MK$, $ML$ pelas direcções $MV$, $MY$ perpendiculares ás faces da cunha. Iſto poſto, como os triangulos $KMN$, $ABC$ tem todos os ſeus lados reſpectivamente perpendiculares, teremos

$$MN : SM : SN :: AB : BC : CA;$$

e conſeguintemente a força $MK$ ſerá $= \frac{P.BC}{AB}$, e a força $ML = \frac{P.AC}{AB}$.

225 Supponhamos agora, que eſtando fixa a baſe da cunha, a força applicada na cabeça he a que baſta, para que a ruptura eſteja a ponto de ſe fazer até o ponto $O$. Neſta hypotheſe, a reſiſtencia $R$ que a parte $VXO$ oppoem ao esforço da potencia, que a quer ſeparar da outra parte $OXY$, deve

deve confiderar-fe, como fazendo equilibrio á força $MK$ por meio da alavanca $VXRO$.

Conduzindo pois as perpendiculares $OR$, $OS$ fobre as direcções da refiftencia, e da força, teremos no cafo do equilibrio, $R.OR = \frac{P.AC.OS}{AB}$; donde fe tira efta proporçaõ $P:R::OR.AB:AC.OS$; e tal he a relaçaõ que entre fi devem ter a potencia applicada fobre a cabeça da cunha, e a refiftencia que ella experimenta da parte do corpo, que fe pertende fender. Outra proporçaõ femelhante fe achará pelo que refpeita á outra parte do mefmo corpo: e geralmente concluiremos, que a cunha tem tanto maior força, quanto he mais aguda.

256 Mas como a refiftencia $R$ da parte $VXO$, e a perpendicular $OR$ conduzida fobre a fua direcçaõ, faõ quantidades fummamente variaveis, tanto pela natureza differente dos corpos que fe pertendem fender, como pela difpofiçaõ particular das fuas fibras, as quais naõ tem o mefmo grão de flexibilidade, naõ fe póde efperar que jámais fe eftabeleça coufa alguma certa, fobre a fua verdadeira medida. E por iffo, fem embargo de fer a cunha huma maquina taõ fimples, a fua theoria phyfica, quando fe confidéra como inftrumento proprio para feparar as partes dos corpos, he cheia de incerteza, e efcuridade.

Toda a ferramenta, que fe emprega em cortar, fe refere mais ou menos directamente á cunha. As navalhas, os machados, os rebotes, os pregos, os noffos dentes, principalmente os incifivos, o bico dos paffaros, as pontas, e garras dos animais, outra coufa naõ faõ mais do que differentes formas de cunhas, com as quais fe obraõ nos corpos divifões innumeraveis.

## *Reflexões gerais fobre as Maquinas.*

257 QUando duas potencias fe tem pofto em equilibrio, he facil de fazer, que huma dellas prevaleça fobre a outra, ajudando ainda levemente o feu esforço. O ponto effencial na theorica das Maquinas fe reduz pois a determinar as condições, que a cada huma dellas convém, para o effeito de eftabelecer o equi-

equilibrio entre duas forças oppostas. E isto he o que procurámos fazer nesta ultima parte da Statica.

Dos principios, que havemos exposto, he manifesto que sempre nos será facil pôr huma potencia mediocre em estado de vencer huma muito grande. Para isso basta empregar huma, ou muitas maquinas simples, dispostas de maneira, que produzaõ o effeito proposto. Mas he de advertir, que augmentando a força, cahimos em hum inconveniente inevitavel, que he a diminuiçaõ da velocidade no movimento do pezo; donde resulta conseguintemente a perda do tempo. Naõ ha cousa mais facil, sem duvida, que fazer vencer pela força de hum só homem huma resistencia equivalente á força unida de trinta homens; mas esse homem gastará necessariamente trinta dias em fazer a obra, que seria feita em hum dia pelos trinta homens.

258 A experiencia conforme neste ponto com a theorica estabelece pois como hum facto constante, que *em todas as maquinas se perde tanto na velocidade, quanto se ganha na força*, ou, que vem a ser o mesmo, que se perde tanto no tempo, quanto se ganha na força. Reciprocamente, quando se emprega huma força consideravel, póde ganhar-se na velocidade, e conseguintemente no tempo.

No sarilho, por exemplo, dá a potencia huma volta na roda, em quanto o pezo anda sómente o espaço, que corresponde a huma volta do cylindro. Pelo que he a velocidade da potencia para a do pezo, como a circumferencia da roda para a do cylindro, ou como o raio da roda para o do cylindro. Porém, no caso do equilibro, esta ultima rasaõ he a que tem o pezo para a potencia. Logo no sarilho perde-se tanto no movimento, quanto se tinha ganhado no equilibrio.

Applicando este discurso ao parafuzo, veremos que elle se naõ adianta mais do que hum passo, em quanto a potencia dá huma volta da manivella. Logo a velocidade da potencia he para a velocidade do parafuzo na direcçaõ do eixo, ou para a velocidade do corpo comprimido, como a circumferencia descrita pela força motriz para o passo do parafuzo. Naõ differe pois esta rasaõ da que tem a resistencia, que impede o movimento do parafuzo na direcçaõ do eixo, com a potencia applicada á manivella no caso do equilibrio.

259 Em geral: Seja qual for a maquina por meio da qual

qual duas potencias P, Q estaõ em equilibrio, póde imaginar-se que ellas correm no mesmo instante os espaços infinitamente pequenos $dp$ e $dq$, os quais devem ser proporcionais ás velocidades, por serem os tempos iguais. Porém, para que as massas P, Q animadas das velocidades $dp$, $dq$ possaõ manter-se em equilibrio, he necessario que as quantidades de movimento sejaõ iguais. Logo será $Pdp = Qdq$; e conseguintemente $Pp = Qq$.

Por esta ultima equaçaõ se mostra, que em todas as maquinas *naõ póde haver equilibrio entre duas potencias, senaõ quando ellas saõ tais, que se fossem postas em movimento andassem no mesmo tempo espaços reciprocamente proporcionais.* Este principio demonstra de hum modo geral o que acabamos de estabelecer, que a potencia perde tanto no movimento, quanto ganha no equilibrio; e podia tambem servir, para demonstrar as condições do mesmo equilibrio nas differentes maquinas, de que até agora tratámos.

He verdade, que para nos servirmos delle neste ultimo uso, seriamos obrigados a suppor as maquinas em movimento; o que repugna ao estado do equilibrio. Porém como esta supposiçaõ naõ he mais do que condicional, naõ se oppoem á solidez das consequencias, que podiamos tirar do referido principio. Tomemos por exemplo dous corpos pendentes das extremidades de huma alavanca. Sabemos, que devem conservar-se em equilibrio, todas as vezes que os seus pezos forem na rasaõ inversa dos braços da alavanca, aos quais estaõ applicados. Porém neste caso, he evidente que se por impossivel houvesse de mover-se a alavanca, os espaços corridos pelos dous pezos seriaõ na rasaõ inversa dos mesmos pezos: porque estes espaços seriaõ arcos semelhantes descritos pelos braços da alavanca, os quais saõ entre si como os raios.

Podiamos pois, á imitaçaõ de Descartes, Gravesande, e muitos outros, assentar os fundamentos da Statica sobre o principio, que acabamos de expór. As condições particulares do equilibrio em cada huma das maquinas simples se deduzem delle com muita facilidade; e como a sua applicaçaõ he muito geral, naõ he de admirar, que muitos Authores lhe tenhaõ dado preferencia sobre o methodo, que temos seguido. Mas sem embargo parece, que o principio mencionado naõ he muito directo, para servir de base a huma theorica, que por outra parte he susceptivel de huma demonstraçaõ rigorosa.

260 Aqui seria o lugar de entrarmos na descripçaõ circunstanciada das maquinas compostas: mas além de que ella seria immensa, cada hum póde facilmente supprilla, tomando por modelo o que acima dissemos dos apparelhos de cadernais, das rodas, e do parafuzo sem fim. Toda a difficuldade consiste em achar, para o caso do equilibrio, a rasaõ da potencia ao pezo: e esta resulta sempre do producto de todas as rasões particulares, que o equilibrio exige em cada huma das maquinas simples, que entraõ na composiçaõ daquella, cujo effeito se pertende calcular. E póde tambem dizer-se, que esta rasaõ he sempre a inversa dos espaços, que deveriaõ andar no mesmo tempo as duas potencias, se por impossivel naõ estivessem em equilibrio.

## *Reflexões particulares sobre a fricçaõ.*

COmo a fricçaõ modifica muito os effeitos das maquinas, principalmente sendo compostas, ninguem póde julgar-se dispensado de a meter em linha de conta, quando pertende calcular a força util de huma maquina com algum genero de exactidaõ. Por falta de avaliar, ao menos em parte, o que as forças moventes gastaõ da sua energia em vencer a resistencia procedida da fricçaõ, se tem cahido muitas vezes em erros naõ menos grosseiros, que dispendiosos. Digo, em parte; porque ninguem se póde lizongear de medir exactamente esta perda: Taõ variaveis, e incertos saõ os elementos, de que ella depende.

261 A fricçaõ provém da resistencia, que he necessario vencer, para fazer que hum corpo se mova sobre outro. Esta resistencia he infinitamente variavel; por quanto resulta da adhesaõ mutua, e enlaçamento das partes salientes de hum corpo com as intrantes do outro. As superficies mais polidas naõ saõ izentas destas pequenas desigualdades, as quais se descobrem sem numero usando do microscopio. Esta adhesaõ exige pois huma quantidade de força, para ser vencida. He absolutamente necessario romper os laços, que a formaõ, quando o corpo se naõ póde desembaraçar de outra maneira; e sem isso naõ haveria movimento.

262 A experiencia mostra muito bem, que a fricçaõ segue

gue proximamente a rasaõ das pressões, isto he, que hum corpo que assenta por huma das suas faces sobre qualquer plano, e que requer huma certa força para chegar ao ponto de mover-se, naõ exigiria para isso mais do que a ametade della, se o seu pezo, ou em geral, se a potencia que o comprime sobre o plano, se houvesse diminuido de huma ametade.

263 Tambem mostra a experiencia, que fazendo mover hum parallelepipedo sobre huma das suas faces menores, se acha sensivelmente a mesma resistencia da parte da fricçaõ, que se observa quando se pertende mover sobre qualquer das faces maiores. E dahi tem concluido alguns Physicos, seguindo a M. d'Amontons (*Mém. de l'Ac. Roy. des Sc. A.* 1699. 1703. 1704), que as superficies naõ tem parte na medida desta resistencia. Podia com tudo parecer, que quanto maior he a superficie, tanto mais se multiplicaõ os pontos do contacto, e tanto mais força he necessaria para dobrar, ou quebrar as pequenas pontas, que embaraçaõ o movimento. Mas se por huma parte saõ mais numerosos os pontos desiguais, por outra he menor o pezo que comprime a cada hum delles, e as partes prominentes de huma superficie se encaixaõ menos profundamente nas cavidades da outra, donde se requer menor força para as despegar. Porém esta compensaçaõ naõ he taõ exacta, principalmente quando o polido das partes he differente, que naõ deva contar-se a grandeza das superficies entre as causas da fricçaõ.

O tempo influe tambem nesta adhesaõ reciproca dos corpos. Porque as suas eminencias, e cavidades se ajustaõ, e encaixaõ tanto mais, quanto he maior o tempo que tem sido sujeitas aos effeitos da pressaõ. He hum facto provado pela experiencia, e confessado por todos os Physicos. E dahi vem, que huma vez que o corpo he posto em movimento naõ experimenta tanta resistencia, quanta experimentava no momento em que começou a mover-se.

264 Naõ sómente a duraçaõ da superposiçaõ, e contacto dos corpos aumenta a difficuldade de os mover, mas tambem os diversos gráos de temperatura, e de humidade na atmosphera contribuem muito a fazer summamente variaveis os effeitos da fricçaõ. Todos sabem, que huma porta, huma janella &c, naõ se abre com a mesma facilidade, quando o tempo está muito humido. Ajunte-se

te-ſe a iſto, que as fibras do plano reſiſtem mais, ou menos, conforme a direcçaõ do movimento, e conforme o gráo da flexibilidade particular de cada huma. Ajuntem-ſe em fim todas as variações, que trazem comſigo as qualidades particulares de certos corpos, que parecem ter entre ſi huma tal *Affinidade*, para fallarmos a linguagem da Chymica, que a ſua adheſaõ reciproca he muito mais forte: e certamente concluiremos, que naõ ha couſa mais embaraçada na conſideraçaõ das forças moventes, do que a theorica das fricçoens. A experiencia he neſta parte a guia mais ſegura; e eiſaqui hum modo de tirar della reſultados, ſobre os quais ſe poſſa contar.

265 Seja *M* hum corpo poſto ſobre o plano horizontal *AB* (Fig. 130.), e tirado pela direcçaõ *QC* pelo pezo *P*, por meio do fio *QCP*, que ſuppomos paſſar por huma pequena roldana *C*. Eſtá claro, que a fricçaõ he neſte caſo o unico obſtaculo que ſe oppoem ao movimento do corpo *M*, porque toda a força do ſeu pezo he deſtruida pelo plano, ſobre o qual aſſenta. A naõ haver aquelle obſtaculo, baſtaria pois a menor potencia *P*, para o fazer mover horizontalmente. Tomem-ſe por *P* differentes pezos conſecutivamente, até ſe achar hum que eſteja a ponto de pôr o corpo em movimento: e entaõ teremos hum meio bem ſimples de conhecer a fricçaõ, como he o ſeguinte.

Produza-ſe a direcçaõ *CQ* até encontrar em *M* a vertical *MN*, que paſſa pelo centro de gravidade. Entaõ, repreſentando por *MN* o pezo do corpo, e por *MV* a força *P*, a diagonal *MT* ſerá a reſultante deſtas duas forças, a qual terá huma certa quantidade de inclinaçaõ ſobre a horizontal *AB*; e o angulo deſta inclinaçaõ *MTN* he o que ſe chama *angulo da fricçaõ*. Ora a tangente deſte angulo he para o raio, como a força da preſſaõ he para a da fricçaõ; logo conhecendo eſta ultima raſaõ ſerá facil de determinar o angulo da fricçaõ. E ſe a fricçaõ he hum quarto da preſſaõ, como ſe tem obſervado muitas vezes em certos corpos, concluiremos que o angulo da fricçaõ tem a tangente quadrupla do raio; e conſeguintemente ſerá de $75^{\circ}\ 58'$, como ſe acha nas Taboas.

266 Em geral: Para que hum corpo eſteja a ponto de mover-ſe, he neceſſario que a reſultante das forças que lhe ſaõ applicadas, faça com as ſuperficies que ſe tocaõ hum angulo igual ao angulo da fricçaõ. Alem diſſo he neceſ-

necessario, que o ponto $T$ da base $AB$, pelo qual passa a resultante, naõ venha a cahir fóra da mesma base; porque sendo assim, o corpo em lugar de se mover pelo plano adiante, tombaria sobre elle.

187 Tambem póde determinar-se a resistencia que resulta da fricçaõ, pondo qualquer corpo de pezo conhecido sobre hum plano $AB$ movel sobre o eixo horizontal $A$, e inclinando-o até que o corpo esteja a ponto de escorregar (Fig. 131.). Entaõ o seu pezo representado por $MT$ se resolverá em duas forças, huma $MN$ perpendicular ao plano, e outra $MV$ que lhe será parallella. A primeira he totalmente destruida pela resistencia do plano, e a segunda pela fricçaõ, á qual he conseguintemente igual. Logo a força da fricçaõ he para o pezo do corpo, como o seno da inclinaçaõ do plano para o seno total; e por conseguinte o angulo da fricçaõ $MTN$ he igual ao angulo $CAB$ do plano com a vertical.

268 Huma vez conhecido este angulo, póde ter-se conta com os effeitos da fricçaõ no uso das maquinas. Tomemos o sarilho por exemplo (Fig. 132.), e supponhamos a roda $IKO$ com o cylindro $LGF$ no mesmo plano, e o todo movel sobre o eixo $CNT$. Produzaõ-se as direcçoens $PO$, $QF$ da potencia e do pezo, até concorrerem em $M$, e seja $MT$ a direcçaõ da resultante.

Isto posto, se naõ houvesse fricçaõ que vencer, a resultante seria dirigida por $MNC$ para o centro $C$, ou perpendicularmente á superficie do eixo: mas no caso da fricçaõ, será necessario que ella faça com o mesmo eixo hum angulo $MTN$ igual ao angulo da fricçaõ. Seja qual for o valor deste angulo, que nós chamaremos $f$, no triangulo $CMT$ conheceremos os dous lados $CT$, $CM$, e o angulo

$CTM = 90° + f$; logo $\dfrac{CT \cdot \cos f}{CM}$ será o seno do angulo

$CMT$, que chamaremos $\varphi$. Seja o angulo $CMP = A$, e $CMF = B$, e conseguintemente $PMT = A - \varphi$, e $TMF = B + \varphi$. Sendo pois $MT$ a direcçaõ da resultante das duas forças $P$, e $Q$, teremos $P : Q :: \mathit{sen}\ TMF : \mathit{sen}\ TMP :: \mathit{sen}(B + \varphi) : \mathit{sen}(A - \varphi)$; e esta he a rasaõ, que devem ter entre si as duas potencias, para fazerem equilibrio no sarilho.

Suppondo parallelas as direcçoens das potencias $P$, $Q$, pode-

poderemos confiderar como infinitamente pequenos os angulos $A$, $B$, $\Phi$; e entaõ ferá P : Q : : $fen\, B + fen\, \Phi : fen\, A - fen\, \Phi$: porém $fen\, A = \frac{CO}{CM}$, $fen\, B = \frac{CF}{CM}$, e $fen\, \Phi = \frac{CT.\, cof\, f}{CM}$; logo P : Q : : $CF + CT.\, cof\, f : CO - CT.\, cof\, f$.

269 I. He de advertir em primeiro lugar, que na hypothefe da fricçaõ ha fempre dous valores entre outros, que fe podem dar á potencia para fuftentar o pezo, hum maior, e o outro menor do que devia fer no cafo de naõ ter lugar a fricçaõ. Porque tomando $NT' = NT$, póde a refultante dirigir-fe por $MT'$, fem alteraçaõ do equilibrio, vifto fazer ainda com a fuperficie do eixo hum angulo igual ao angulo da fricçaõ.

No primeiro cafo, que he o que acima examinámos, fendo $MT$ a refultante das duas forças equilibradas, temos P : Q : : $fen\, TMF : fen\, TMO$; e eftá claro, que a potencia ferá entaõ maior do que havia de fer naõ havendo fricçaõ. Mas no fegundo cafo temos P : Q : : $fen\, T'MF : fen\, T'MO$; e eftá claro tambem, que entaõ ferá a potencia menor do que havia de fer, fe naõ houveffe fricçaõ. Suppondo as direcçoens das potencias parallelas, acharemos que os dous valores extremos de P faõ $\frac{Q(CF + CT.\, cof\, f)}{CO - CT.\, cof\, f}$, e $\frac{Q(CF - CT\, cof\, f)}{CO + CT.\, cof\, f}$.

Seja, por exemplo, o raio da roda $CO$ finco vezes maior que o do cylindro $CF$, e o do cylindro quatro vezes maior que o do eixo $CT$, e feja a força da fricçaõ huma quarta parte da preffaõ. Nefte cafo teremos $tang\, f = 4$, ou $cof\, f = \frac{1}{\sqrt{17}}$: e fuppondo as direcçoens parallelas, os dous valores de P que baftaráõ para pôr o corpo Q a ponto de fobir, ou defcer, feraõ reprefentados por $\frac{Q(4\sqrt{17} + 1)}{20\sqrt{17} - 1}$, e $\frac{Q(4\sqrt{17} - 1)}{20\sqrt{17} + 1}$, que fe reduzem a 0,2147 Q, e 0,1852 Q. O primeiro he com effeito maior,

 e o

e o fegundo menor que $\frac{1}{5}$ Q, valor unico que teria lugar, fe naõ houveffe fricçaõ.

Efta foluçaõ póde applicar-fe a huma alavanca, que girar fobre hum eixo, confiderando *CO* e *CF*, como perpendiculares tiradas do centro do eixo para as direcçoens das potencias. Tambem fe applicará á roldana fixa, fazendo $CO = CF$.

270 II. Tambem fe deve reflectir, que no cafo de que em fim fe chegaffe a eftabelecer huma theorica clara e folida da refiftencia occafionada pela fricçaõ, ainda ficaria huma difficuldade quafi infuperavel nos meios de a reduzir á practica. Porque effa theorica, qualquer que foffe por outra parte a fua generalidade, naõ deixaria por iffo de exigir, que, para haver de applicar-fe com fucceffo, conftaffe primeiro com alguma exactidaõ o grão da mefma refiftencia, por experiencias reiteradas, uniformes, e extremamente variadas em cada hum dos cafos, tanto do equilibrio, como do movimento. Porém naõ parece verofimil, que jámais fe poffaõ reduzir a regras conftantes os factos, que relativamente á fricçaõ já faõ conhecidos, e muito menos a multidaõ immenfa dos que ainda fe naõ fabem.

O polido das fuperficies he fufceptivel de taõ grande variedade, fem haver efcala alguma de comparaçaõ, pela qual fe poffaõ diftinguir os differentes gráos delle, que naõ era neceffario mais para tirar a efperança de huma theorica geralmente applicavel aos effeitos da fricçaõ. Mas naõ he efte o unico obftaculo, que fe oppoem á exiftencia de femelhante defcobrimento. A preffaõ, a grandeza, a natureza, e a velocidade das fuperficies, as variaçoens da atmofphera &c, faõ elementos igualmente neceffarios nefta materia; e bem fe fabe, quanta incerteza provêm de caufas taõ differentes nos refultados das mefmas experiencias. Naõ deve pois efperar-fe dos calculos relativos á fricçaõ, fenaõ huma approximaçaõ mais ou menos exacta, e muitas vezes achada por mero orfamento, principalmente pelo que refpeita ás maquinas executadas em grande.

271 III. Naõ faltaõ meios para diminuir a fricçaõ, já polindo bem as fuperficies, já feparando-as por meio de rolos, já untando-as com materias oleofas; e fobre tudo evitando o movimento de corpos homogeneos, huns fobre outros. Porque a experiencia moftra, que metais differentes

tes se movem com mais facilidade, quer seja roçando, quer revolvendo, e conseguintemente se gastaõ menos, do que fazendo as peças do mesmo metal. O aço, por exemplo, mais facilmente se move sobre o cobre, do que sobre outro aço. Tambem deve haver escolha entre os corpos heterogeneos, para facilitar mais e mais o movimento. Assim o aço gira melhor sobre o lataõ, do que sobre o cobre, chumbo, ou estanho. Saõ factos estabelecidos pela experiencia, á qual se deve recorrer principalmente em semelhante materia.

272 Porèm, se com todas estas precauçoens podemos diminuir os effeitos da fricçaõ, naõ devemos por isso crer que jámais se possaõ destruir de todo. Huma maquina sem fricçaõ he huma quimera: e outra tal he o *Movimento Perpetuo* taõ decantado, taõ procurado por alguns maquinistas, e quasi sempre objecto ridiculo das suas loucas despezas. Para que pudessem lizongear-se de produzir em fim esta *Grande Obra* da Mechanica, era necessario imaginar primeiro algum meio de restituir ás forças motrizes o que as fricçoens inevitaveis lhes fazem necessariamente perder. Esta reproducçaõ he impossivel, se de tempo em tempo naõ vier em soccorro huma potencia estranha que as reanime, ou comprimindo mólas, ou levantando pezos, ou dando de qualquer outro modo impulsaõ, movimento, e vida a estes automatos.

273 IV. Os meios de aumentar a fricçaõ saõ mais numerosos, e mais faceis do que os de a diminuir. Mas a maior parte delles he taõ conhecida, que seria cousa inutil lembrallos aqui. Ninguem ignora tambem a sua utilidade nas Artes mechanicas, e em quasi todos os usos da vida. Pela fricçaõ he que as limas, os raspadores, as serras, e em geral toda a ferramenta deste genero, obraõ sobre os corpos mais duros. Pela fricçaõ se chegaõ a polir os metais, os espelhos, e os mesmos diamantes. Se antes de descer as montanhas algum tanto escarpadas se eneravaõ os eixos das carruagens, he para retardar o movimento, aumentando a fricçaõ; e se para lançar, ou levar a ancora, se daõ algumas voltas da amarra no cylindro do cabrestante, he tambem para aumentar a resistencia por meio da fricçaõ. Huma só chaveta, que se aperta contra o rodizio de hum moinho, basta para resistir a todo o impulso do vento, ou da agua &c &c.

V. Geralmente se crê, que huma potencia tem a maior energia possivel para sustentar em equilibrio qualquer peze sobre hum plano horizontal, ou inclinado, quando obra por huma direcçaõ parallela ao mesmo plano; mas esta asserçaõ naõ he verdadeira, senaõ quando se prescinde dos effeitos da fricçaõ. Pelo calculo se acha, que para fazer mover qualquer corpo sobre hum plano horizontal, supponndo a fricçaõ igual a hum terço da pressaõ, a direcçaõ mais favoravel que se póde dar á potencia, he a que faz com o plano hum angulo de 18° 27′ proximamente.

SE-

# SEGUNDA PARTE DA MECHANICA OU A DYNAMICA.

## *NOÇOENS PRELIMINARES SOBRE O MOVIMENTO DE HUM CORPO SOLLICITADO POR MUITAS POTENCIAS.*

274 QUANDO as potencias, que sollicitaõ hum corpo ao movimento, naõ estaõ em equilibrio, he manifesto que elle deve mover-se necessariamente; e se as potencias depois do primeiro impulso cessarem de obrar sobre o movel, e o deixarem a si mesmo, bem se vê que o seu movimento ha de ser uniforme, e rectilineo. Mas se tendo chegado em certo tempo ao ponto *B* da sua direcçaõ *ABC* (Fig. 133.), for sollicitado por outra qualquer potencia, segundo a direcçaõ *BE*, entaõ representando por *BC* a velocidade que elle tinha pela direcçaõ *AB*, e por *BE* a velocidade novamente recebida, a diagonal *BD* do parallelogrammo *BEDC* mostrará a sua direcçaõ, e velocidade effectivas.

Do mesmo modo, se em qualquer ponto *D* da nova direcçaõ *BD*, vier outra potencia a obrar sobre o movel, e lhe imprimir a velocidade *DH*, tomaremos no prolongamento de *BD* huma recta *DG*, que represente a velocidade que elle tinha pela direcçaõ *BD*; e completando o parallelogrammo *DHFG*, acharemos que a diagonal *DF* exprime a nova direcçaõ, que o corpo deve tomar, e a velocidade com que se deve mover.

Continuando o mesmo procedimento, he facil de conceber que todo o corpo sollicitado deste modo por impul-

soens

ſoens ſucceſſivas, deve correr os lados de hum polygono: e ſe os naõ deſcrever a todos com a meſma velocidade, ao menos deſcreverá uniformemente a cada hum delles em particular. Chamando pois $s$ hum lado do polygono, $t$ o tempo que gaſta o movel em o correr, e $u$ a velocidade com que o corre, teremos $u = \frac{s}{t}$; mas eſtas tres quantidades podem ſer differentes em cada hum dos lados do polygono.

275 Supponhamos agora, que huma força acceleratriz obra ſobre o movel a cada inſtante infinitamente pequeno, iſto he, ſem interrupçaõ alguma. Eſtá claro, que a linha deſcrita ſerá compoſta de huma infinidade de pequenas diagonais, cuja ſerie continua formará hum arco de curva, em quanto a direcçaõ da força acceleratriz naõ conſpirar com a do movel. Cada huma deſtas diagonais ſerá pois hum dos elementos infinitamente pequenos $ds$ da curva deſcrita, e $dt$ ſerá o elemento do tempo $t$ empregado em correr o arco inteiro $s$. E aſſim teremos, por formula geral da velocidade do movel, $u = \frac{ds}{dt}$.

276 Se o corpo ſe mover em linha recta, e ſe a força acceleratriz actuar pela ſua meſma direcçaõ, aumentará a cada inſtante a velocidade do movel de huma quantidade infinitamente pequena $du$. Mas eſta quantidade naõ ſerá a meſma em todos os inſtantes, ſenaõ no caſo de ſer conſtante a força acceleratriz. Como pois eſta força no inſtante $dt$ imprime a velocidade $du$, he manifeſto que obrando igualmente no inſtante ſeguinte imprimiria outra velocidade igual $du$; de maneira, que ſe o movel naõ experimentaſſe outra acçaõ, ſenaõ a de huma tal força, no fim do ſegundo inſtante teria a velocidade $2du$. Eſta acçaõ, repetida por hum numero $n$ de inſtantes, produziria pois a velocidade $n\,du$ no fim do tempo $n\,dt$.

Seja $n\,dt = 1$, ou $n = \frac{1}{dt}$, e teremos por expreſſaõ da velocidade adquirida em huma unidade de tempo $\frac{du}{dt}$. Chamemos $p$ eſta quantidade, que naõ póde deixar de ſer conhecida, por quanto ella he a que ſerve de medida á

intenſaõ

intensaõ da força acceleratriz. Logo teremos $du = pdt$; expressaõ igualmente propria para representar o aumento, ou a diminuiçaõ da velocidade, que a força acceleratriz produz no movel, conforme a sua direcçaõ conspira com a delle, ou lhe he directamente contraria.

277 A quantidade $p$ he variavel, todas as vezes que a força acceleratriz naõ he constante; porque aqui entendemos por $p$ a velocidade, que a intensaõ actual da força acceleratriz, repetida igual e continuamente por huma unidade de tempo, produziria em hum movel unicamente sujeito á sua acçaõ. He com tudo assaz ordinario entender-se por $p$ a mesma força acceleratriz: mas se queremos ter idéas claras dos primeiros principios da Dynamica, he necessario que naõ percamos jámais de vista o unico modo exacto de considerar as potencias. Já dissemos (n. 25.), que ellas naõ devem, nem podem entrar em consideraçaõ, senaõ em rasaõ dos effeitos que produzem.

Se toda a sua acçaõ se exercita em hum instante, resulta no movel huma determinada quantidade de movimento, cuja medida dá sempre a conhecer a energia da potencia. Mas quando se trata de huma força acceleratriz, que obra desigualmente em cada ponto do espaço descrito pelo movel, he necessario, a fim de medir os seus effeitos, suppór por hum momento que a força persevera na sua intensaõ actual, e ver o que a sua acçaõ repetida igual, e continuamente produziria de velocidade, em hum corpo unicamente sujeito ao seu impulso, por huma unidade de tempo.

278 Esta velocidade, que nós chamamos $p$, he muito propria pára nos mostrar a intensaõ da força acceleratriz em hum ponto determinado, seja elle qual for; porque supponho que o valor de $p$ se faz duplo, dupla tambem deve ser a aceleraçaõ, por quanto he $p$ geralmente proporcional a $du$, sendo $dt$ constante. Por outra parte sendo $p$ variavel em cada ponto do espaço corrido pelo movel, mostrará os differentes gráos de acceleraçaõ, que a força deve produzir em cada hum dos mesmos pontos. Donde se vê, que a quantidade $p$ naõ deve entrar no calculo, senaõ como huma simples medida dos effeitos produzidos pela força acceleratriz, e que o modo mais adequado de avaliar a energia da mesma força consiste em conhecer o valor de $p$.

279 De-

279 Depois desta breve exposiçaõ do verdadeiro sentido, que se deve dar á formula $du = pdt$, naõ teremos duvida em dizer com todos os Geometras modernos, que *o elemento da velocidade he igual ao producto da força acceleratriz multiplicada pelo elemento do tempo.* Este enunciado porém, commodo pela sua brevidade, peccaria absolutamente da parte da exactidaõ, naõ se lhe unindo huma idêa distinta do que he necessario entender-se por $p$. Succede aqui o mesmo, que em muitas outras expressoens consagradas pelo uso. Todas saõ indifferentes, para quem huma vez tem alcançado o seu verdadeiro sentido.

280 Em conclusaõ: Ainda que a formula $du = pdt$ naõ tenha lugar, senaõ nos movimentos rectilineos perturbados por qualquer força acceleratriz, póde com tudo applicar-se facilmente aos curvilineos. Para isso, seja $Mm$ (Fig. 134.) o elemento infinitamente pequeno, que o corpo descreve no instante $dt$. Se depois de o haver descrito, naõ fosse sollicitado por outra nenhuma potencia, continuaria a mover-se uniformemente em linha recta na sua primeira direcçaõ $Mmm'$; e no instante seguinte $dt'$, ou $dt + ddt$, correria o espaço $mm' = \frac{ds\,dt'}{dt}$.

Supponhamos pois, que no ponto $m$ he sollicitado o dito corpo por quaisquer potencias. Todas estas poderáõ reduzir-se a duas, huma $T$ pela direcçaõ $Mmm'$, e a outra $N$ perpendicular a $Mmm'$. A primeira he geralmente conhecida pelo nome de *força tangencial*, e a segunda pelo de *força normal*. A força tangencial accelera a velocidade do movel na direcçaõ $mm'$, e o fará chegar a hum ponto $m''$ no fim do tempo $dt'$: e conseguintemente será o aumento da velocidade $du = T\,dt'$. A força normal, pelo contrario, naõ altéra o movimento do corpo, mas sómente lhe muda a direcçaõ, fazendo-lhe correr o pequeno espaço $m''\mu$ perpendicular a $mm''$. Porém a velocidade necessaria para correr o dito espaço no instante $dt'$ he $\frac{m''\mu}{dt'}$, e esta velocidade he impressa pela força acceleratriz $N$; logo teremos $\frac{m''\mu}{dt'} = N\,dt'$, ou $m''\mu = N\,dt'^2$.

Em virtude destas duas forças, e da velocidade que já tinha

tinha o corpo no ponto $m$ da sua *Trajectoria*, achar-se-ha no ponto $\mu$ depois do instante $dt'$, e haverá descrito o segundo elemento $m''\mu$, ou $ds + dds$ da linha do seu movimenlo. Seja $R$ o raio osculador da curva, que elle deve descrever. Teremos $m''\mu = \frac{ds^2}{R}$; e as tres equações relativas ao movimento do corpo seraõ $u = \frac{ds}{dt}$, $du = Tdt'$, e $ds^2 = R \,.\, N dt'^2$. E porque $dt' = dt + ddt$, e estas equações devem ser homogeneas, podemos substituir $dt$ em lugar de $dt'$, e as equações se reduziráõ aos termos seguintes:

$$u = \frac{ds}{dt}$$
$$du = T dt$$
$$ds^2 = R \,.\, N dt^2, \text{ ou } uu = R \,.\, N.$$

E por estas equações he que póde determinar-se em qualquer ponto da trajectoria a velocidade de hum corpo sollicitado por quaisquer forças, em todos os casos, ao menos quando a dita linha se achar em hum mesmo plano.

281 Estabelecidas estas primeiras noções, passaremos a tratar da nossa materia, discutindo por ordem as questões principais da Dynamica, as quais em geral podem reduzir-se a tres. Na primeira consideraremos o movel, como hum ponto livre, que póde igualmente obedecer a todas as sollicitações das forças acceleratrizes. Na segunda consideraremos ainda o movel, como hum ponto, mas necessitado a mover-se sobre huma linha, ou superficie dada: de maneira que as forças, pelas quais he sollicitado ao movimento, naõ possaõ produzir outro effeito, senaõ o de accelerar, ou retardar a sua velocidade na trajectoria, que elle deve correr. Na terceira em fim examinaremos o movimento dos pontos, que actuando huns contra os outros, perturbaõ reciprocamente os seus movimentos respectivos: e dahi deduziremos o movimento dos corpos, considerados no estado actual, isto he, com volume finito. Tais saõ os objectos principais das tres Secções da Dynamica.

282 Mas antes de entrarmos no exame particular de cada hum delles, repetiremos a verdadeira significaçaõ das

quanti-

quantidades $u$ e $p$ nas equações fundamentais $u = \frac{ds}{dt}$, e $du = p\,dt$; porque he muito importante, que dellas se tenhaõ ideas claras, e exactas.

He necessario pois que por $u$ entendamos aqui huma quantidade variavel, que exprime a cada instante o espaço, que o movel correria em huma unidade de tempo, se o seu movimento viesse de repente a fazer-se uniforme, e rectilineo. Por conseguinte, he $u$ a velocidade, de que o movel seria animado, se as forças acceleratrizes cessassem de obrar, ou se aniquilassem em qualquer instante do movimento.

Por $p$ entendemos outra quantidade variavel, que exprime a cada instante a velocidade, que a força acceleratriz, permanecendo constante, seria capaz de imprimir no movel, por huma acçaõ igual, e continuamente repetida por huma unidade de tempo.

283 Em fim, das duas formulas $u = \frac{ds}{dt}$, e $du = p\,dt$, se deduzem outras duas $u\,du = p\,ds$, e $p\,dt = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, as quais se applicaõ igualmente a quasi todos os objectos, que passamos a discutir. E com effeito se verá, que a maior parte destas discussões consistem na applicaçaõ destas quatro formulas a differentes valores de $p$.

# SECÇAÕ I.

## DO MOVIMENTO DE HUM PONTO LIVRE SOLLICITADO POR QUAISQUER POTENCIAS.

O Movimento de hum ponto livre póde considerar-se em dous estados differentes. O primeiro he quando se move por hum espaço *vazio*, ou de nenhuma resistencia; e o segundo, quando se move por hum *meio resistente.*

ARTI-

# ARTIGO I.

## *Do movimento de hum ponto livre, por hum meio naõ resistente.*

284 O Primeiro objecto, que naturalmente se offerece nesta theorica, he o exame geral de todos os movimentos rectilineos; mas como o dos corpos graves he o mais util, especialmente nos empenharemos em dar bem a conhecer todas as suas circunstancias.

A gravidade, como já dissemos em outra parte, he huma força acceleratriz constante, que exercita sobre todos os corpos huma acçaõ continua por direcções perpendiculares ao horizonte. Supponhamos pois, que qualquer corpo se deixa cahir livremente por huma linha vertical: a gravidade obrará sobre elle, e o sollicitará ao movimento sem interrupçaõ alguma. Será logo animado de huma força acceleratriz constante, que podemos chamar $g$; e assim teremos por equaçaõ do seu movimento $du = g\,dt$, cujo integral he $u = gt$.

285 Esta formula nos ensina já, que *na queda dos corpos graves, saõ as velocidades na rasaõ dos tempos, contados desde o principio do movimento.*

Integrando tambem a equaçaõ $u\,du = g\,ds$, teremos $uu = 2gs$; e substituindo $g^2 t^2$ em lugar de $uu$, teremos $s = \frac{1}{2} g t^2$. Este novo resultado geral nos mostra, que *os espaços corridos desde a origem do movimento saõ na rasaõ duplicada dos tempos.*

Como as velocidades adquiridas saõ proporcionais aos tempos, igualmente diremos, que *os espaços corridos saõ na rasaõ duplicada das velocidades adquiridas*: o que immediatamente se concluiria tambem da equaçaõ $uu = 2gs$.

Estas duas equações $u = gt$, e $s = \frac{1}{2} g t^2$, que comprehendem a terceira $uu = 2gs$, bastaõ para determinar em todos os casos as circunstancias relativas ao movimento dos graves, huma vez que seja bem conhecida a quantidade constante $g$, para cuja determinaçaõ exacta naõ se tem desprezado cousa alguma.

Por

Por experiencias repetidas, feitas com todo o cuidado que podia esperar-se dos Physicos mais habeis, e confirmadas sobre tudo pelos resultados mais uniformes da theorica dos pendulos, se tem averiguado com a maior segurança, que era possivel, as leis da acceleraçaõ produzida no movimento dos corpos em virtude da gravidade. Sabemos de facto, que na latitude de Paris hum corpo deixado a si mesmo corre no primeiro segundo da sua queda 15 pés e $\frac{1}{10}$, ou mais exactamente $15^{p}, 098$.

Suppondo pois que se conta o tempo por segundos, e o espaço por pés, quando for $t = 1$, será $s = 15{,}098$. Substituindo estes valores na equaçaõ $s = \frac{1}{2} g t^2$, concluiremos $g = 30{,}196$; valor, que representa com muita exactidaõ a força da gravidade, e que no movimento dos córpos graves faz as vezes da força acceleratriz $p$, que entra na formula geral $du = p\,dt$.

287 Sendo assim determinado o valor de $g$, bastará conhecer huma das tres quantidades $u$, $s$, $t$, para determinar immediatamente as outras duas, por meio das equações $u = gt$, $s = \frac{1}{2} g t^2$, e $uu = 2gs$.

I. Por exemplo: Pergunta-se, que tempo he necessario, para que hum corpo deixado livremente a si mesmo caia da altura de 400 pés?

A equaçaõ $s = \frac{1}{2} g t^2$ nos dará $t^2 = \frac{400}{15{,}098} = 26{,}4935$; logo $t = \sqrt{26{,}4935} = 5\frac{1}{7}$. Seraõ logo necessarios $5''\frac{1}{7}$ para cahir o corpo da altura proposta.

II. Pergunta-se, qual deve ser a velocidade do mesmo corpo no fim da queda?

Substituindo os valores conhecidos na equaçaõ $uu = 2gs$, teremos $uu = 2 \cdot 30{,}196 \cdot 400 = 24156{,}8$; logo $u = \sqrt{24156{,}8} = 155\frac{3}{7}$. Será pois a velocidade adquirida pelo corpo de $155\frac{3}{7}$ pés, isto he, correria uniformemen-

te

te 155 $\frac{3}{7}$ pés por ſegundo, ſe depois de haver cahido da altura de 400 pés, deixaſſe inteiramente de obrar ſobre elle a força da gravidade.

III. Achar a profundidade de hum poço, ao fundo do qual ſe obſerva que naõ chega hum corpo, que livremente ſe deixa cahir, ſenaõ em $7''$?

Tomando a equaçaõ $s = \frac{1}{2} g t^2$, e ſubſtituindo nella os valores de $g$, e de $t$, acharemos $s = 15{,}098 \cdot 49 = 739 \frac{4}{5}$ pés.

IV. Sendo a profundidade de hum poço de $739 \frac{4}{5}$ pés, e o tempo da quéda de $7''$, quantos pés deve o grave correr no primeiro ſegundo?

Como os eſpaços corridos ſaõ proporcionais aos quadrados dos tempos, teremos $49 : 1 :: 739 \frac{4}{5} : x = 15{,}098$, como tambem da equaçaõ $\frac{1}{2} g = \frac{s}{t^2}$ ſe podia deduzir immediatamente.

V. De que altura deve cahir hum corpo, para adquirir huma velocidade de 400 pés por ſegundo?

A equaçaõ $uu = 2gs$ nos dará $s = \frac{160000}{60{,}392} = 2649 \frac{1}{3}$. Será pois a altura procurada de $2649 \frac{1}{3}$ pés; de ſorte que ſe depois de havella corrido, ceſſaſſe totalmente a acçaõ da gravidade, o corpo continuaria a mover-ſe com huma velocidade uniforme, que lhe faria andar 400 pés cada ſegundo.

Por eſtas formulas ſe calculou a Taboa ſeguinte

TA-

# TABOA

## *Do Descenso dos Graves.*

| Tempo | Espaço corrido | Velocidade adquirida. | Tempo | Espaço corrido | Velocidade adquirida |
|---|---|---|---|---|---|
| Segundos | Pés | Pés | Segundos | Pés | Pés |
| 1 | 15,098 | 30,196 | 31 | 14509 | 936,08 |
| 2 | 60,392 | 60,392 | 32 | 15460 | 966,27 |
| 3 | 135,88 | 90,588 | 33 | 16442 | 996,47 |
| 4 | 241,57 | 120,78 | 34 | 17453 | 1026,7 |
| 5 | 377,45 | 150,98 | 35 | 18495 | 1056,9 |
| 6 | 543,53 | 181,18 | 36 | 19567 | 1087,1 |
| 7 | 739,80 | 211,37 | 37 | 20669 | 1117,2 |
| 8 | 966,27 | 241,57 | 38 | 21802 | 1147,4 |
| 9 | 1222,9 | 271,76 | 39 | 22964 | 1177,6 |
| 10 | 1509,8 | 301,96 | 40 | 24157 | 1207,8 |
| 11 | 1826,9 | 332,16 | 41 | 25380 | 1238,0 |
| 12 | 2174,1 | 362,36 | 42 | 26633 | 1268,2 |
| 13 | 2551,6 | 392,55 | 43 | 27916 | 1298,4 |
| 14 | 2959,2 | 422,74 | 44 | 29230 | 1328,6 |
| 15 | 3397,0 | 452,94 | 45 | 30573 | 1358,8 |
| 16 | 3865,1 | 483,14 | 46 | 31947 | 1389,0 |
| 17 | 4363,3 | 513,33 | 47 | 33351 | 1419,2 |
| 18 | 4891,7 | 543,53 | 48 | 34786 | 1449,4 |
| 19 | 5450,4 | 573,72 | 49 | 36250 | 1479,6 |
| 20 | 6039,2 | 603,92 | 50 | 37745 | 1509,8 |
| 21 | 6658,2 | 634,11 | 51 | 39270 | 1540,0 |
| 22 | 7307,4 | 664,31 | 52 | 40826 | 1570,2 |
| 23 | 7986,8 | 694,51 | 53 | 42410 | 1600,4 |
| 24 | 8696,4 | 724,71 | 54 | 44025 | 1630,6 |
| 25 | 9436,3 | 754,90 | 55 | 45671 | 1660,8 |
| 26 | 10206 | 785,10 | 56 | 47348 | 1691,0 |
| 27 | 11006 | 815,30 | 57 | 49053 | 1721,2 |
| 28 | 11837 | 845,50 | 58 | 50790 | 1751,4 |
| 29 | 12697 | 875,68 | 59 | 52556 | 1781,5 |
| 30 | 13588 | 905,88 | 60 | 54353 | 1811,8 |

288 Chama-se *altura devida a huma velocidade* aquella, donde hum grave deveria cahir para adquirir a dita velocidade. Seja $h$ a altura conveniente, e $u$ a velocidade, que della resulta. Teremos $uu = 2gh$; e concluiremos, que *as velocidades saõ na rasaõ subduplicada das alturas, que lhe saõ devidas*. O uso destas alturas he muito commum nas obras de Dynamica, depois que os Geometras Modernos as introduziraõ nos seus calculos em lugar das velocidades, ás quais servem de medida.

289 Se hum corpo, ao tempo de cahir, tivesse recebido certa velocidade vertical da acçaõ de qualquer força motriz, poderiamos chamar $h$ a altura devida a essa velocidade; e o movel, tendo corrido o espaço $s$, estaria no mesmo caso como se tivesse cahido da altura $h + s$. Assim teriamos por equações do seu movimento $u = gt + \sqrt{2gh}$, $s + h = \frac{1}{2} g \left(t + \frac{\sqrt{2h}}{g}\right)^2$, ou $s = \frac{1}{2} gt^2 + t\sqrt{2gh}$.

290 Supponhamos agora, que se lança hum corpo de baixo para cima com a velocidade $U$, e que se trata de determinar o seu movimento. Para isso recorreremos á equaçaõ $du = p\,dt$; e observando, que a velocidade do movel he continuamente retardada pela acçaõ $g$ da gravidade, escrevella-hemos desta maneira $-du = g\,dt$. Se integrarmos esta equaçaõ de fórma que seja $u = U$, quando $t = 0$, teremos $u = U - gt$. Substituindo este valor de $u$ na equaçaõ $ds = u\,dt$, dará $ds = U\,dt - gt\,dt$; e integrando, $s = Ut - \frac{1}{2} gt^2$.

As duas equações, que temos achado, saõ evidentes por si mesmas. Porque o movel conservaria sempre a mesma velocidade $U$, se naõ fosse retardado pela acçaõ da gravidade: porém a gravidade no tempo $t$ lhe imprime a velocidade $gt$ em sentido contrario; logo a velocidade do corpo deve ser $U - gt$. Igualmente se manifesta, que o espaço corrido pelo movel deve ser $s = Ut - \frac{1}{2} gt^2$. Porque, se a gravidade naõ interviesse, andaria o corpo no tempo $t$ o espaço $Ut$: mas a gravidade retarda o movimento, e lhe faz descer a quantidade $\frac{1}{2} gt^2$; logo o espaço

paço corrido effectivamente pelo movel ferá $U t - \frac{1}{2} g t^2$;

291 A primeira equaçaõ $u = U - g t$ prova que o movel continuará a fobir até que feja $U = g t$, ifto he, até que a gravidade lhe tenha imprimido em fentido contrario huma velocidade igual á da projecçaõ. Entaõ fe achará elevado á altura devida á velocidade $U$: mas apenas tiver chegado a ella, fendo efgotada toda a força de projecçaõ, a gravidade continuará a produzir o feu effeito, e o corpo tornará pelo mefmo caminho, conforme as leis que temos moftrado, gaftando tanto tempo em defcer, quanto tinha gaftado em fobir.

292 Daqui fe póde facilmente conhecer a que altura fobio hum corpo lançado verticalmente ao ar, todas as vezes que fe fouber o tempo que correu defde o principio do movimento até o inftante da queda. Supponhamos, por exemplo, que huma bomba lançada de hum morteiro, por huma direcçaõ vertical, torna a cahir fendo paffados 18 fegundos. Nefte cafo devia fobir pelo tempo de 9″ a huma altura igual a 15,098 pés multiplicados por 81 (por ferem os efpaços como os quadrados dos tempos): e affim diremos, que chegou á altura de 1223 pés.

293 A formula $u u = 2 g h$ moftra tambem, que fe dous corpos forem fujeitos á acçaõ de duas gravidades differentes, naõ podem adquirir a mefma velocidade, fenaõ cahindo de alturas reciprocamente proporcionais ás forças das ditas gravidades. Podia pois experimentar-fe por efte meio, fe a força da gravidade terreftre he a mefma em differentes lugares: mas adiante veremos, que as ofcillações dos pendulos faõ mais proprias para verificar efte facto com mais exactidaõ.

294 A gravidade obra geralmente fobre todos os corpos, de maneira que todos pezaõ huns para os outros, e para hum centro determinado; e a fua acçaõ naõ fe limita aos corpos fublunares, mas penetra o univerfo inteiro. Tal he com effeito a bafe do fyftema de Newton. Efte Geometra incomparavel moftra primeiramente a neceffidade de reconhecer no Sol, e em todos os Planetas efta força univerfal chamada *Attracçaõ*, ou *Gravitaçaõ*, pela qual todas as partes de que elles fe compoem, e todos os corpos que os rodeiaõ, gravitaõ para os feus refpectivos centros. Calculando depois os effeitos defta gravitaçaõ a ref-

peito

peito dos corpos ſituados nas ſuperficies do Sol, de Jupiter, de Saturno, e da Terra, achou que ſaõ entre ſi na raſaõ deſtes quatro numeros 10000, 943, 529, 435. Applicando pois a eſtes reſultados a formula $uu = 2gh$, eſtá claro, que as alturas de que hum corpo deveria cahir junto á ſuperficie deſtes aſtros, a fim de adquirir huma meſma velocidade, ſeraõ reſpectivamente como $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{943}$, $\frac{1}{529}$, $\frac{1}{435}$.

295 Em geral, poderemos determinar o movimento dos corpos graves junto á ſuperficie do Sol, e dos outros dous Planetas, ſubſtituindo em lugar de $g$ nas equaçoens $u = gt$, e $s = \frac{1}{2}gt^2$, a quantidade $\frac{10000}{435} \cdot 30{,}196$ no Sol, $\frac{943}{435} \cdot 30{,}196$ em Jupiter, e $\frac{529}{435} \cdot 30{,}196$ em Saturno. Pelo que ſerá junto á ſuperficie do Sol $g = 694{,}16$, em Jupiter $g = 65{,}459$, e em Saturno $g = 36{,}721$. Donde ſe vê, que qualquer grave junto á ſuperficie do Sol correria no primeiro ſegundo do ſeu deſcenſo livre $347\frac{2}{25}$ pés, em Jupiter $32\frac{3}{4}$, em Saturno $18\frac{2}{5}$, e na Terra $15\frac{1}{10}$.

## *Das Forças Centrais.*

296 CHamaõ-ſe *forças centrais*, ou *centripetas*, as que ſollicitaõ continuamente hum corpo para qualquer ponto determinado.

Seja hum corpo $A$ (Fig. 135.), que ſollicitado por qualquer força dirigida para o ponto $C$, começa deſde o deſcanço a caminhar livremente de $A$ para $C$: pergunta-ſe, quais devem ſer as circunſtancias principais do ſeu movimento?

Chamemos $x$ o eſpaço $AM$ corrido no tempo $t$, $u$ a velocidade

locidade no ponto $M$, e $a$ a diſtancia $AC$; e ſeja $f$ huma diſtancia ao ponto $C$, na qual a força central ſe acha igual á da gravidade $g$. Iſto poſto, ſe a força central obrar em qualquer raſaõ compoſta das diſtancias, de maneira que ſeja $n$ o expoente deſſa raſaõ, acharemos a expreſſaõ da força acceleratriz no ponto $M$ pela proporçaõ ſeguinte

$$f^n : g :: (a-x)^n : \frac{g(a-x)^n}{f^n}.$$

Donde concluiremos $u\,du = \frac{g\,dx\,(a-x)^n}{f^n}$ (n. 283.).

Seja $h$ a altura devida á velocidade $u$; teremos $uu = 2gh$, e conſeguintemente $udu = gdh$. Logo $dh = \frac{dx\,(a-x)^n}{f^n}$, cujo integral ſerá $h = \frac{C-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. A conſtante $C$ ſe determina, reflectindo que no principio do movimento, no ponto $A$, deve ſer ao meſmo tempo $x = 0$, e $h = 0$; condiçaõ, que dá $C = a^{n+1}$. Logo $h = \frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Huma vez que for conhecida a altura $h$ devida á velocidade $u$, eſta ſe determinará immediatamente pela equaçaõ $u = \sqrt{2gh}$.

O unico caſo, que eſcapa á formula precedente, he o de $n = -1$. Entaõ obra a força central na raſaõ inverſa das diſtancias, e para determinar o valor de $h$ he neceſſario integrar por logarithmos. A integraçaõ neſte caſo particular dará $h = f \,.\, l\frac{a}{a-x}$.

297 Se o expoente $n+1$ for poſitivo, acharemos que a altura devida á velocidade do movel, quando chegar ao centro $C$, ſerá $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, porque entaõ he $x = a$. Porém ſe $n+1$ for hum numero negativo $-m$, teremos $h = \frac{f^{m+1}}{m\,a^m}.\frac{a^m-(a-x)^m}{(a-x)^m}$; expreſſaõ, que dá

dá $b = \infty$, quando $x = a$. Donde concluiremos, que a velocidade do corpo, chegando ao centro, seria infinita, como he facil de conceber, advertindo que a força central obra nesse caso com tanto maior efficacia, quanto o movel se chega mais para o mesmo centro.

Neste mesmo caso porém, se o corpo cahisse de huma altura infinita, ou se o ponto $A$ estivesse infinitamente distante do centro $C$, quando chegasse ao ponto $M$ naõ teria adquirido, senaõ huma velocidade finita. Porque supposindo $a$ e $x$ infinitas no valor geral de $b$, teremos $b = \frac{f^{m+1}}{m.(CM)^m} = \frac{f^{-n}}{m(CM)^{-n-1}}$. Se a força central, por exemplo, for na rasaõ inversa dos quadrados das distancias, será $b = \frac{f^2}{CM}$; logo a velocidade de hum corpo, que tivesse descido de huma altura infinita, seria reciprocamente como a raiz quadrada do espaço que lhe faltaria correr para chegar ao centro.

298 Se $n = 1$, ou se a força centripeta for proporcional ás distancias do centro, será $b = \frac{2ax - xx}{2f}$. E porque $dt = \frac{dx}{u} = \frac{dx}{\sqrt{2gb}}$, será necessario para virmos no conhecimento de $t$, que integremos a expressaõ $\sqrt{\frac{f}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. O integral he $\sqrt{\frac{f}{g}} \cdot Arc\ cos \frac{a - x}{x}$; logo tomando $c$ pela semicircumferencia, teremos por expressaõ do tempo da descida até o centro $C$ a quantidade constante $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{f}{g}}$.

299 Se $n = -2$, ou se a força centripeta for na rasaõ inversa dos quadrados das distancias, como pelas mais constantes observações parece estar já estabelecido, teremos $b = \frac{ff}{a} \cdot \frac{x}{a - x}$; e $dt = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}} \cdot dx \sqrt{\left(\frac{a - x}{x}\right)}$ $= \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Porém $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$

 póde

póde resolver-se em $\frac{\left(\frac{1}{2}a-x\right)dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, e $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. A primeira parte he a differencial de $\sqrt{(ax-xx)}$, e a segunda he a de hum arco de circulo, cujo seno verso he $x$, sendo o diametro $a$. Logo $t = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}\Big[\sqrt{(ax-xx)}$

$+ \frac{1}{2}a . \ Arc\ cos\left(\frac{\frac{1}{2}a-x}{\frac{1}{2}a}\right)\Big]$; integral completo, porque dá $t=0$, quando $x=0$.

Logo fazendo $x=a$, conheceremos o tempo que o corpo deve gastar em chegar ao centro das forças, pela expressaõ $\frac{\frac{1}{2}ca\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}$. Como esta quantidade he proporcional a $a\sqrt{a}$, concluiremos geralmente: *Que os tempos do descenso dos corpos, desde a origem do movimento até o centro, saõ como as raizes quadradas dos cubos das alturas, donde tem descido, ou na rasaõ sesquiplicada das alturas*, que quer dizer o mesmo.

300 Se suppuzessemos constante a força central, e sempre a mesma que no ponto $A$, onde tem por valor a expressaõ $\frac{gff}{aa}$, entaõ correria o movel o espaço $a$ com hum movimento uniformemente accelerado, e o tempo se determinaria pela formula $a = \frac{1}{2} . \frac{gff}{aa} t^2$, que dá $t = \frac{2a\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}$. Donde se segue, que *o tempo que gasta o movel em chegar ao centro, quando a força central he sempre a mesma que na origem do movimento, he para o tempo que gastaria crescendo a dita força na rasaõ duplicada inversa das distancias, como o raio para a oitava parte da circumferencia*; ou como 14 para 11, que he proximamente a rasaõ que tem 2 para $\frac{1}{2}c$.

O que temos dito dos movimentos rectilineos he o que basta

baſta para os determinar, quaiſquer que ſejaõ as forças acceleratrizes. Naõ ha mais do que ſubſtituir o valor competente de $p$ na equaçaõ $u\,du = p\,ds$, ou $g\,dh = p\,ds$, e depois diſſo integrar. Paſſemos aos movimentos curvilineos.

301 Sendo hum corpo ſollicitado por quaiſquer forças acceleratrizes, e tendo recebido na origem do movimento huma certa velocidade de projecçaõ, por qualquer direcçaõ, de maneira que ſeja obrigado a moverſe por huma *Orbita*, ou *Trajectoria* curvilinea: pergunta-ſe, como póde determinar-ſe a natureza deſta orbita, a velocidade que deve ter o corpo em qualquer ponto della, e o tempo que gaſtará em chegar a hum ponto dado.

Seja $AMm\mu$ (Fig. 136.) a curva, que o movel ha de deſcrever, ſeja $AP$ o eixo della, $mN$ a normal, e $mT$ a tangente no ponto $m$. Chamemos, ao ordinario, $AP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$, a velocidade no ponto $M = u$, a altura devida a eſta velocidade $= h = \frac{uu}{2g}$, o tempo empregado em correr o arco $AM = t$, e o raio oſculador $R = \frac{-ds^3}{dx^2\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Iſto poſto, reduziremos todas as forças que ſollicitaõ o movel a duas, huma $N$ pela direcçaõ da normal $mN$, e a outra $T$ pela direcçaõ da tangente $mT$. E porque já temos (n. 280.) as equações $ds = u\,dt$, $du = T\,dt$, e $N.R = uu = 2gh$, deſta ultima poderemos logo concluir em geral: *Que a força normal he para a da gravidade, como a altura devida á velocidade do movel para a ametade do raio oſculador.* Depois, das duas equações $ds = u\,dt$, e $du = T\,dt$, tiraremos $u\,du = T\,ds$, cujo integral he $uu = 2\int T\,ds$: porém $uu = N.R$; logo $N.R = 2\int T\,ds$.

Eſta equaçaõ naõ inclue $u$, nem $t$, porque as forças $N$ e $T$ ſaõ funções de $x$, e de $y$. Mas ſeraõ neceſſarias tres integrações conſecutivas para chegar á equaçaõ finita da curva procurada; e ſendo eſta huma vez conhecida, determinar-ſe-ha a velocidade pela formula $uu =$

2.

$2\int T\,ds$, e o tempo pela formula $t = \int \frac{ds}{u}$. Tal he, em geral, o methodo que póde feguir-fe na foluçaõ defte Problema. Mas efte caminho, ainda que muito natural, naõ he com tudo o mais fimples em muitos cafos. Eisaqui outro, que nos parece merecer preferencia.

302 Todo o corpo, que fe move por huma linha curva, póde confiderar-fe como dotado de dous movimentos, hum parallelo á abfciffa $x$, e o outro parallelo á ordenada $y$. Porque, fe em virtude do primeiro póde correr o efpaço $Mr$ ou $dx$ no inftante $dt$, e fe em virtude do fegundo póde correr no mefmo inftante o efpaço $rm$ ou $dy$, eftá claro, que em virtude de ambos correrá realmente a pequena diagonal $Mm$, ou $ds$. A fua velocidade parallela a $AP$, que chamaremos *horizontal*, ferá pois reprefentada por $\frac{dx}{dt}$; a velocidade parallela a $PM$, que chamaremos vertical, por $\frac{dy}{dt}$; e a velocidade effectiva, por $\frac{ds}{dt}$.

Ora, quaifquer que fejaõ as forças que follicitaõ o corpo, fempre pódem reduzir-fe a duas, huma $X$ pela direcçaõ de $MR$ parallela a $x$, e a outra $Y$ pela direcçaõ de $MP$ parallela a $y$: a primeira das quais accelera o movimento horizonal, e a fegunda o vertical. E porque o elemento da velocidade he fempre igual ao producto da força acceleratriz pelo elemento do tempo (n. 279.), teremos as duas equações

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt, \text{ e } d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt,$$

as quais com a equaçaõ ordinaria $ds = u\,dt$ determinaráõ o movimento do corpo.

303 Eftas equações, quanto ao fundo, naõ differem das que deduzimos pelo methodo precedente. Para nos fegurarmos diffo, multipliquemos a primeira por $\frac{dx}{dt}$, e a fegunda por $\frac{dy}{dt}$; e ajuntando os productos teremos

$dx$

$\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = X\,dx + Y\,dy$: porém $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = uu$; logo $\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ $+ \frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = u\,du = X\,dx + Y\,dy$.

Agora, effeituando as differenciações indicadas nas mesmas duas equações, teremos $dt\,ddx - dx\,ddt = X\,dt^3$, e $dt\,ddy - dy\,ddt = Y\,dt^3$, donde eliminando $ddt$, virá $dx^2\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dt^2\,(Y\,dx - X\,dy)$. E porque o raio osculador $R = \frac{ds^3}{-dx^2\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, substituindo teremos $\frac{ds^3}{R} = dt^2\,(X\,dy - Y\,dx)$, isto he, $\frac{uu}{R} = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$. Esta ultima equaçaõ, com a outra $u\,du = X\,dx + Y\,dy$, saõ pois equivalentes ás duas $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt$.

Em fim, resolvendo a força $X$ por $MR$ em outras duas, huma tangencial por $Mm$, que será $\frac{dx}{ds}X$, e a outra normal por $MN$, que será $\frac{dy}{ds}X$; e resolvendo tambem a força $Y$ por $MQ$ em outras duas, huma tangencial que será $\frac{dy}{ds}Y$, e a outra normal que será $-\frac{dx}{ds}Y$: acharemos a força tangencial total $T$ $= \frac{X\,dx + Y\,dy}{ds}$, e a normal $N = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$. Logo as duas equações $u\,du = T\,ds$, e $uu = N.R$ saõ

saõ equivalentes ás que temos achado $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt$: e deste modo, a conformidade dos resultados he huma prova da bondade de ambos os methodos.

### *Applicaçaõ ao movimento dos graves lançados por qualquer direcçaõ, e em particular ao tiro das bombas.*

304 PAra darmos toda a clareza a esta theorica; applicalla-hemos a hum caso particular. Supponhamos, por exemplo, que sómente a força da gravidade perturba o movimento do corpo lançado pela direcçaõ $AV$, com huma velocidade dada $V$, e por hum angulo $VAP = a$ (Fig. 137.).

Neste caso temos $Y = -g$, e $X = 0$, donde se reduziráõ as nossas duas equações geraes a $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g\,dt$. Integrando pois teremos $\frac{dx}{dt} = C$, e $\frac{dy}{dt} = C' - gt$. A primeira mostra, que a velocidade horizontal he constante, como está claro que deve ser, porquanto naõ he alterado este movimento. Ora $V \operatorname{cos} a$ exprime a velocidade horizontal, e $V \operatorname{sen} a$ a vertical no principio do movimento; logo $C = V \operatorname{cos} a$, e $C' = V \operatorname{sen} a$. Substituindo estes valores nas equações integradas, teremos $dx = V\,dt \operatorname{cos} a$, e $dy = V\,dt \operatorname{sen} a - g\,t\,dt$. Tornando a integrar, será $x = Vt \operatorname{cos} a$, e $y = Vt \operatorname{sen} a - \frac{1}{2} g t^2$; e eliminando $t$, será $y = x \operatorname{tang} a - \frac{1}{2} g \cdot \frac{xx}{VV \operatorname{cos} a^2}$.

Logo designando pela constante $b$ a altura devida á velocidade

dade da projecçaõ $V$, teremos $y = x \; tang \; a - \frac{xx}{4 \, b \, cos \, a^2}$ por equaçaõ ás coordenadas da curva. E porque huma dellas $y$ he de huma só dimensaõ, concluiremos que a trajectoria he huma parabola.

305 Segue-se pois desta determinaçaõ, que todo o grave lançado em hum espaço vazio por qualquer direcçaõ, que naõ fosse a vertical, descreveria huma curva parabolica. Mas no estado actual das cousas, em que a resistencia do ar influe tanto sobre o movimento dos corpos, estas trajectoriàs differem sensivelmente da parabola, que teria lugar nos meios naõ resistentes. Adiante veremos, quanto he cheia de embaraço a sua exacta determinaçaõ.

306 O methodo, que tivemos em deduzir a equaçaõ $y = x \; tang \; a - \frac{xx}{4 \, b \, cos \, a^2}$, naõ he o unico que conduz ao mesmo resultado. Póde demonstrar-se de muitos outros modos, que o caminho de hum projectil no vacuo he huma parabola. Póde, por exemplo, considerar-se a velocidade inicial do movel, como composta de huma velocidade $V \, sen \, a$ pela direcçaõ vertical $AK$, e de outra $V \, cos \, a$ pela horizontal $AP$. Isto posto, se o corpo naõ tivesse senaõ a primeira velocidade, chegaria no tempo $t$ a huma altura $AQ = V t \, sen \, a - \frac{1}{2} g \, t^2$ (n. 290.): mas no mesmo tempo, a segunda velocidade deve transportallo horizontalmente por hum espaço $QM = V t \, cos \, a$; logo deve o corpo achar-se realmente no ponto $M$, quando for passado o tempo $t$; donde teremos, como acima, $y = V t \, sen \, a - \frac{1}{2} g \, t^2$, e $x = V t \, cos \, a$.

A formula, que serve para determinar o tempo, será $t = \frac{x}{V \, cos \, a}$. E pelo que respeita á velocidade do movel, em qualquer ponto da trajectoria, acharemos que he sempre a que elle teria adquirido cahindo de huma altura igual a $b - y$. Porque recorrendo á equaçaõ geral $u \, du = X \, dx + Y \, dy$ (n. 303.), e fazendo $X = 0$, e $Y = -g$; teremos $u \, du = -g \, dy$, e a altura devida á velocida-

velocidade do movel, ou $\frac{uu}{2g} = b - y$.

Para se determinarem os pontos, onde a curva encontra a horizontal $AP$, he necessario suppor $y = 0$ na equaçaõ $y = x \tang a - \frac{xx}{4 b \cos a^2}$. Entaõ se acharáõ para $x$ os dous valores seguintes, $x = 0$, e $x = 4 b \tang a. \cos a^2 = 4 b \sen a \cos a = 2 b \sen 2 a$. O primeiro convem ao ponto $A$, e o segundo ao ponto $C$.

307 Esta determinaçaõ dá por *amplitude do tiro* a distancia $AC = 2 b \sen 2 a$. Logo a maior amplitude $b$ que he possivel, será quando tivermos $\sen 2 a = 1$; e por isso he, que dando a hum morteiro a inclinaçaõ de 45° se lançará huma bomba á maior distancia que he possivel, sendo todas as mais cousas iguais. Nesse caso será a amplitude da sua trajectoria o dobro da altura devida á velocidade da projecçaõ.

308 Deve notar-se aqui, que a huma abscissa $AP$ naõ corresponde mais do que huma só ordenada $PM$; porque na equaçaõ $y = x \tang a - \frac{xx}{4 b \cos a^2}$, a ordenada $y$ naõ tem mais do que hum só valor. Mas a huma ordenada $AQ$, ou $PM = P'M'$, correspondem sempre duas abscissas $QM$, $QM'$, ou $AP$, $AP'$; porque a equaçaõ $xx - 2 b x \sen 2 a + 4 b y \cos a^2 = 0$ dá evidentemente dous valores para $x$.

Pela natureza das equaçoens do segundo gráo, será a soma das raizes $AP + AP'$ igual ao coefficiente do segundo termo $2 b \sen a$, que exprime como temos visto o valor de $AC$. Logo $AP + AP' = AC$, e conseguintemente $AP = CP'$: donde se mostra, que as porçoens $AM$, $CM'$ da trajectoria saõ iguais, e semelhantes. Logo a ordenada $DB$, que passa pelo meio $D$ da amplitude $AC$, divide a trajectoria em duas partes $BMA$, $BM'C$ iguais, e semelhantes entre si; e conseguintemente he $BD$ o eixo da parabola, $B$ o seu vertice, e $DB$ a maior altura a que sóbe o projectil. Para determinar pois este *maximo*, naõ he necessario mais do que tomar $x = b \sen 2 a$, e immediatamente se achará $DB = y = b \sen a^2$; e por conseguinte

guinte ſerá o parametro da parabola deſcrita $= \frac{AD^2}{DB} = 4b\,cos\,a^2$.

309 Na pratica do *tiro das bombas*, ordinariamente ſe determina a força da polvora, fazendo hum tiro de prova pelo angulo de 45°; porque medindo a amplitude, ou alcance horizontal deſte tiro, e tomando a ſua ametade, ſe conhece immediatamente a altura devida á velocidade de projecçaõ. Huma vez conhecida a força da polvora, podemos com a meſma carga fazer cahir huma bomba em qualquer ponto $D$ do plano horizontal (Fig. 138.), menos diſtante da bateria do que o ponto $C$, no qual ſe termina a amplitude maxima $AC$, que produz o tiro pelo angulo de 45°.

Para iſſo, baſta conhecer o angulo da projecçaõ $DAV = a$. Seja pois $AD = b$; e teremos $2b\,ſen\,2a = b$, e por conſeguinte $ſen\,2a = \frac{b}{2b}$.

Supponhamos, por exemplo, que a amplitude $AC$ pelo angulo de 45° ſe achou de 500 braças, e que a diſtancia $AD$ he de 388,7 braças. Logo teremos $ſen\,2a = \frac{388,7}{500} = 0,7774$; ſeno, que nas Taboas correſponde proximamente a 51° 2′. Logo o angulo de projecçaõ deverá ſer de 25° 31′.

310 He verdade, que em lugar do angulo 51° 2′ podiamos tomar o ſeu ſupplemento 128° 58′, cuja ametade 64° 29′ daria hum ſegundo angulo de projecçaõ, complemento do primeiro. Donde ſe ſegue, que ſempre ha duas inclinaçoens diverſas, que ſe podem dar ao morteiro, para fazer cahir huma bomba em hum ponto determinado. Prefere-ſe o angulo maior, quando ſe pertende arruinar edificios, romper abobadas &c; e o menor, quando ſe quer, que a bomba depois de cahir continue a ſaltar para diante, e que arrebentando cauſe maior eſtrago em tudo o que achar ao redor de ſi.

A raſaõ deſta preferencia he manifeſta. Porque ſe a bomba cahir quaſi perpendicularmente, empregará a maior parte da ſua força em ferir o lugar onde der; e por iſſo, quando ſe intenta demolir os edificios, ſe apontaõ os morteiros ſempre pelo angulo maior que 45°. Mas querenrendo, que as bombas depois de cahirem continuem a fazer chapeletas, destruindo tudo o que encontraõ, escolhese o angulo menor, para que cahindo obliquamente, e resolvendo-se a sua força em duas, huma vertical, e outra horizontal, seja esta ultima sufficiente para as transportar com impulso, e estrago, até finalmente arrebentarem.

311 Se o ponto *M* (Fig. 139.), que se quer bombear, naõ estiver na linha horizontal *AP*, será primeiramente necessario medir, pelos methodos da Trigonometria, a distancia *AM*, que chamaremos $m$, e o angulo *MAP* que o raio visual *AM* faz com a horizontal *AP*, ao qual chamaremos $\delta$. Depois disso far-se-ha hum tiro de prova pelo angulo de 45°, com a carga que se tem determinado usar, a fim de conhecer a força da polvora, que deve ser tal que produza huma amplitude maior que *AP*.

Isto supposto, como $AP = m \cos\delta$, e $PM = m \operatorname{sen}\delta$, poderemos substituir estes dous valóres em lugar de $x$ e de $y$ na equaçaõ $\frac{xx}{4b} = x \operatorname{sen} a \cos a - y \cos a^2$, e acharemos $\frac{mm \cos\delta^2}{4b} = m \operatorname{sen} a \cos a \cos\delta - m \cos a^2 \operatorname{sen}\delta$, ou $\frac{m \cos\delta^2}{4b} = \cos a \operatorname{sen}(a - \delta) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2a - \delta) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\delta$. Logo $\operatorname{sen}(2a - \delta) = \operatorname{sen}\delta + \frac{m \cos\delta^2}{2b}$.

312 Para construir esta equaçaõ, buscar-se-ha nas Taboas hum angulo $\varphi$, cuja tangente seja igual a $\frac{m \cos\delta}{2b}$, e assim teremos $\operatorname{sen}(2a - \delta) = \operatorname{sen}\delta + \cos\delta \tang\varphi = \frac{\operatorname{sen}(\delta + \varphi)}{\cos.\varphi}$. Conhecendo o angulo $2a - \delta$, e o seu supplemento, a hum e outro se ajuntará $\delta$, e se tomará a ametade de cada huma das somas, que daráõ os dous gráos de inclinaçaõ do morteiro, igualmente proprios para se lançar a bomba ao lugar proposto.

Por exemplo: Tendo-se achado o angulo *MAP* de 6° 12′, a distancia *AM* de 564 toesas, e a amplitude de 45°, ou a quantidade $2b$ de 740 toesas, queremos saber

ber a inclinaçaõ que deve dar-se ao morteiro, para que a bomba venha a cahir no ponto *M*.

Primeiramente calcularemos o angulo $\varphi$ pela formula $tang\,\varphi = \frac{m\,cos\,\delta}{2\,b}$, conforme ao que acima dissemos: eis-aqui a operaçaõ

$$\begin{array}{lr} 2\,b = 740 \text{ - - - - - - - - } C\,L. & 7,1307683 \\ m \;= 564 \text{ - - - - - - - - - - } L. & 2,7512791 \\ \delta = 6^\circ\,12' \text{ - - - - - - - - } L.cos. & 9,9974523 \\ \hline \text{Log. } tang\,\varphi \text{ - - - - - - - - - } & 9,8794997 \end{array}$$

Assim acharemos nas Taboas que o angulo $\varphi$ he de $37^\circ\,9'$; e por conseguinte $\delta + \varphi = 43^\circ\,21'$. Conhecidos estes, calcularemos o angulo $2\,a - \delta$ pela formula $sen\,(2\,a - \delta) = \frac{sen\,(\delta + \varphi)}{cos\,\varphi}$, como aqui se mostra

$$\begin{array}{lr} \varphi = 37^\circ\,9' \text{ - - - - - - } CL.\,cos. & 0,0985105 \\ \delta + \varphi = 43\;\;21 \text{ - - - - - - - } L.\,sen. & 9,8366109 \\ \hline \text{Log. } sen\,(2\,a - \delta) \text{ - - - - - } & 9,9351214 \end{array}$$

A este logarithmo corresponde nas Taboas o angulo $59^\circ\,28'$, cujo supplemento he $120^\circ\,32'$. Ajuntando a hum e outro $6^\circ\,12'$, teremos $65^\circ\,40'$ e $126^\circ\,44'$, cujas ametades saõ $32^\circ\,50'$ e $63^\circ\,22'$. Dando pois ao morteiro a inclinaçaõ de qualquer destes dous ultimos angulos, cahirá a bomba no ponto *M*.

Como importa muito no tiro das bombas regular-lhes as *espoletas*, de maneira que naõ arrebentem muito cedo, nem muito tarde, he preciso saber o tempo, que ellas devem gastar em chegar ao alvo. Para isso temos a formula $t = \frac{x}{V\,cos\,a} = \frac{m\,cos\,\delta}{cos\,a\,V\,2gb}$. Tomando pois, no caso precedente, hum dos valores calculados de $a$, determinaremos $t$ da maneira seguinte

$t =$

$$\begin{array}{lr}
a = 32^\circ\ 50' \text{ - - - - - - - - } CL.\,cos. & 0,0755908 \\
2b = 740 \text{ - - - - - - - - - - - } \frac{1}{2}CL. & 8,5653842 \\
g = 30,196 \text{ - - - - - - - - - } \frac{1}{2}CL. & 9,2600253 \\
m = 564 \text{ - - - - - - - - - - - - - } L. & 2,7512791 \\
\delta = 60^\circ\ 12' \text{ - - - - - - - - } L.\,cos. & 9,9974523 \\
\hline
Log.\ t \text{ - - - - - - - - - - - - - - } & 0,6497317
\end{array}$$

Logo ferá $t = 4,464$; mas he neceſſario advertir, que tendo ſido as quantidades $m$, $b$ contadas em toeſas, e $g$ em pés, para determinarmos o verdadeiro valor de $t$ devemos multiplicar o valor achado por $\sqrt{6}$. Aſſim ajuntando $\frac{1}{2} l6$, que he 0,3890756, ao logarithmo achado 0,6497317, teremos $l\,t = 1,0388073$, que correſponde a 10,93. Gaſtará pois a bomba $10''$, 93 em chegar ao ponto $M$ pela parabola menor.

Se ao logarithmo 1, 0388073 ajuntarmos o do coſeno de $32^\circ\ 50'$ que he 9, 9244092, e o complemento logarithmico do coſeno de $63^\circ\ 22'$ que he 0, 3484514, teremos 1, 3116679 por logarithmo do tempo, que a bomba gaſtará em chegar ao meſmo ponto pela parabola maior, que ferá conſeguintemente $20''$, 5.

313 *M.* de Maupertuis reſolveu taõ brevemente, e de hum modo taõ completo, os problemas relativos ao tiro das bombas, que póde citar-ſe, como hum modelo de preciſaõ, a ſua Memoria intitulada *Balliſtica Arithmetica.* Os que ſe naõ achaõ em eſtado de conſultar a Hiſtoria da Academia Real das Sciencias, aqui poderáõ julgar da elegancia das ſuas ſoluçoens, que ſaõ da maneira ſeguinte.

Seja $CA = b =$ á altura devida á velocidade de projecçaõ por $AG$ (Fig. 140.); e ſeja $AQ = s =$ ao eſpaço que a bomba correria uniformemente, ſe a gravidade a naõ abaixaſſe pelo eſpaço $QM = z$. Teremos pois $s : 2z :: \sqrt{b} : \sqrt{z}$ (n. 28. e 288.); logo $s^2 = 4bz$, e a trajectoria ferá conſeguintemente huma parabola.

Seja $AP = x$, $PM = y$, $tang\,QAP = t$; e ferá $PQ = tx$, $QM = PQ - PM = tx - y$, e $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$. Logo $s^2 = x^2 + t^2x^2 = 4bz = 4btx - 4by$.

Logo

Logo $x^2(1+t^2)=4b(tx-y)$; equaçaõ ás coordenadas, na qual ſe introduzio de propoſito o angulo de inclinaçaõ $QAP$, a fim de ſe poder determinar a direcçaõ do morteiro.

314 Querendo, por exemplo, lançar huma bomba ſobre o ponto $E$ com huma carga dada, mediremos a diſtancia $AD=b$, e a altura $DE=c$. Fazendo pois $x=b$, e $y=c$, tiraremos da equaçaõ precedente o valor de $t=\frac{2b}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{(4b^2-4bc-bb)}$; logo póde a bomba chegar ao meſmo ponto por duas inclinaçoens differentes do morteiro. Mas para que os valores de $t$ ſejaõ reais, he neceſſario que $4b^2$ ſeja maior que $4bc+bb$, ou ao menos igual.

Se o ponto $E$ eſtiver na linha horizontal, ſerá $t=\frac{2b}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{(4b^2-bb)}$; e ſe eſtiver abaixo della, $t=\frac{2b}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{(4b^2+4bc-bb)}$.

Sendo neceſſario determinar a carga conveniente para ferir o ponto $E$ por hum angulo dado, calcularemos a força do tiro repreſentada por $CA=b=\frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$; formula, pela qual ſe moſtra, que ſendo conſtante a inclinaçaõ do morteiro, ſaõ as amplitudes porporcionais a $b$; porque ſendo entaõ $c=0$, temos $AB=b=\frac{4t}{1+t^2}b$.

315 O *maximo* da amplitude ſe acha, differenciando a equaçaõ $x=\frac{4t}{1+t^2}b$, ou $\frac{x}{b}=\frac{4t}{1+t^2}$; porque fazendo $d\frac{4t}{1+t^2}=0$, teremos $t=1=tang\,45^\circ$. Logo a maior amplitude poſſivel, que ſe póde haver de huma carga dada, he quando ſe aponta o morteiro pelo angulo de $45^\circ$.

316 Em fim, para conhecer o *minimo* da carga, differenciaremos primeiramente a equaçaõ $b=\frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$,

ou

ou $\frac{4b}{b^2} = \frac{1+t^2}{bt-c}$, que dará $t = \frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(b^2+c^2)}$; depois, ſubſtituindo o valor poſitivo de $t$ na equaçaõ, teremos para o caſo da menor carga poſſivel $b = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2)}$.

## *Outras applicaçoens ao movimento dos projecteis.*

317 MAs tornemos ao exame das noſſas equaçoens geraes $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y dt$. E para continuarmos a moſtrar as ſuas applicaçoens, ſupponhamos ainda que o corpo he ſómente ſollicitado pela força vertical $Y$. Neſſe caſo teremos do meſmo modo $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, ou $dx = C dt$; e conſeguintemente ſerá conſtante a velocidade horizontal, como no caſo que até agora temos tratado.

Porém a outra equaçaõ dará $\frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y dy$; cujo integral he $\frac{dy^2}{dt^2} = 2\int Y dy$; e porque $dt$ he proporcional a $dx$, teremos $\frac{dy^2}{dx^2} = m\int Y dy$, e conſeguintemente $dx = \frac{dy}{\sqrt{(m\int Y dy)}}$; equaçaõ ſeparada, ſe $Y$ for huma funçaõ de $y$.

318 Seja, por exemplo, lançado qualquer corpo pela direcçaõ $BV$ (Fig. 141.), com qualquer velocidade, e ſeja attrahido para a recta $AP$ na raſaõ inverſa dos quadrados da ſua diſtancia a eſta linha: pergunta-ſe a equaçaõ da ſua trajectoria.

A condiçaõ da força vertical dá $Y = -\frac{gff}{yy}$, e con-

conseguintemente $\int Y\,dy = gff\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b}\right)$. Logo a equaçaõ differencial da trajectoria será $dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a}{y} - \frac{a}{b}\right)}}$, ou tambem $dx\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(by - yy)}} = \frac{y\,dy - \frac{1}{2}b\,dy}{\sqrt{(by - yy)}} + \frac{\frac{1}{2}b\,dy}{\sqrt{(by - yy)}}$; e integrando, $x\sqrt{\frac{a}{b}} = C - \sqrt{(by - yy)} + \frac{1}{2}b.\ \text{Arc cos}\left(\frac{\frac{1}{2}b - y}{\frac{1}{2}b}\right)$.

Se o corpo fosse attrahido para a recta $AP$ na rasaõ inversa dos cubos das distancias, teriamos $Y = -\frac{gf^3}{y^3}$, e $\int Y\,dy = \frac{gf^3}{2}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b^2}\right)$. Donde concluiremos $dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)}}$, ou $\frac{a\,dx}{b} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$. O integral desta equaçaõ he $\frac{ax}{b} = C - \sqrt{(bb - yy)}$; logo a trajectoria será em geral huma secçaõ conica, que terá a linha $AP$ por eixo principal.

319 Reciprocamente, sendo dada a trajectoria $BM$, podemos determinar a força $Y$ perpendicular a $AP$, necessaria para que o corpo descreva livremente a mesma trajectoria. Porque se differenciarmos a equaçaõ $\frac{dy^2}{dx^2} = m\int Y\,dy$, ou $\frac{\frac{1}{2}C^2\,dy^2}{dx^2} = \int Y\,dy$, será $\frac{C^2\,dy}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = Y\,dy$, e conseguintemente $Y = \frac{C^2}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ou, sup-

pondo $dx$ conſtante, $Y = \frac{C^2\, ddy}{dx}$.

320 Por exemplo: Se quizermos ſaber, qual deve ſer a força $Y$ perpendicular a $AP$, para que o corpo deſcreva huma ſecçaõ conica $BM$, que tenha por eixo principal $AP$, tomaremos a equaçaõ geral das linhas da ſegunda ordem, que he $yy = a + px + qxx$, e differenciando-a teremos $ydy = \frac{1}{2} pdx + qxdx$. Suppondo $dx$ conſtante, e tornando a differenciar, teremos $yddy + dy^2 = qdx^2$; e multiplicando eſte reſultado por $y^2$, ſerá $y^3 ddy = qy^2 dx^2 - y^2 dy^2 = qdx^2 (a + px + qxx) - dx^2 (\frac{1}{2} p + qx)^2 = (aq - \frac{1}{4} pp) dx^2$. Logo $Y = \frac{C^2 (aq - \frac{1}{4} pp)}{y^3}$; e conſeguintemente ſerá a força vertical neſte caſo reciprocamente proporcional aos cubos das ordenadas, como tinhamos achado pelo methodo directo.

He de notar, que $Y$ deſvanece, quando $aq = \frac{1}{4} pp$: mas entaõ $a + px + qxx$ he hum quadrado perfeito, e a ſecçaõ conica ſe reduz á meſma linha recta da projecçaõ. E com effeito por ſi meſmo ſe entende, que naõ he neceſſaria mais força que a da projecçaõ, para reter o movel em huma trajectoria rectilinea.

321 Em geral: Se o corpo for animado por ambas as forças $X$ e $Y$, das meſmas equaçoens do movimento $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = Xdt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Ydt$, teremos $\frac{dx^2}{dt^2} = 2\int Xdx$, e $\frac{dy^2}{dt^2} = 2\int Ydy$. Por conſeguinte ſerá a equaçaõ da trajectoria $\frac{dx}{\sqrt{\int Xdx}} = \frac{dy}{\sqrt{\int Ydy}}$. Sendo pois $X$ e $Y$ funçoens reſpectivas de $x$ e $y$, eſta equaçaõ ſerá ſeparada, e poderá integrar-ſe, ao menos pelas quadraturas.

Suppon-

Suppondo, por exemplo, que a força vertical $Y$ he a da gravidade, e que a horizontal $X$ he reciprocamente proporcional aos cubos das diſtancias do movel á vertical, que paſſa pela origem das abſciſſas, teremos $Y = -g$, $X = -\frac{gf^3}{x^3}$, e conſeguintemente $\int Y\, dy = g(b-y)$, e $\int X\, dx = \frac{gf^3}{2}\left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{aa}\right)$. Será logo a equaçaõ differencial da trajectoria $\frac{dy}{\sqrt{(b-y)}} = \sqrt{\frac{2a^2}{f^3}}$. $\frac{x\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, cujo integral he $\sqrt{(b-y)} = C \pm \sqrt{\left[\frac{2a^2}{f^3}(a^2 - x^2)\right]}$. Logo a trajectoria neſte caſo será, em geral, huma linha da quarta ordem; e em particular, será a parabola ordinaria, quando for $C = 0$.

322 Examinemos agora o movimento de hum corpo, que ſendo lançado por hum eſpaço naõ reſiſtente, com qualquer força de projecçaõ, he attrahido para hum ponto fixo por huma força centripeta, variavel de qualquer maneira nas differentes diſtancias a reſpeito do meſmo ponto.

Seja $AM$ a trajectoria do movel (Fig. 142.), $C$ o centro das forças, a abſciſſa $AP = x$, a ordenada $PM = y$, a diſtancia $AC = a$, o raio vectôr $CM = z$, e $P$ o valor abſoluto da força centripeta no ponto $M$, repreſentada por $MO$. Reſolvendo eſta força em duas, huma $MT$ pela direcçaõ $MA$, e a outra $MS$ por huma direcçaõ parallela a $AP$, a expreſſaõ da primeira ſerá $\frac{PM}{CM} \cdot MO = \frac{Py}{z}$, e da ſegunda $\frac{CP}{CM} \cdot MO = \frac{P(a-x)}{z}$. Teremos pois a força $X = \frac{P(a-x)}{z}$, e a força $Y = -\frac{Py}{z}$; e ſubſtituindo eſtes valores nas equaçoens da ſoluçaõ geral (n. 302.), teremos $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{a-x}{z} P\, dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{y}{z} P\, dt$.

Isto posto, multipliquemos a primeira destas equações po $y$, e a segunda por $a-x$; e ajuntando os productos, teremos $y\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)+(a-x)\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, cujo integral he $y.\frac{dx}{dt}+(a-x)\frac{dy}{dt}=C$, ou $y\,dx+(a-x)\,dy=C\,dt$; equaçaõ absolutamente independente da força central P, e que somente suppoem ser a direcçaõ della sempre para o mesmo ponto fixo. Integrando esta ultima equaçaõ, teremos $2\int y\,dx+(a-x)y=Ct$, ou $\int y\,dx+\frac{1}{2}(a-x)y=\frac{1}{2}Ct$: porém $\int y\,dx+\frac{1}{2}(a-x)y$ he a area do sector $ACM$; logo, *qualquer que seja a força central, as areas descritas pelo raio vector saõ proporcionais aos tempos.*

Na theorica das forças centrais, ha poucas Proposições taõ fecundas, e taõ gerais como esta. Newton a tomou por base dos seus calculos em tudo o que demonstrou sobre esta materia. *Phil. Princip. Mathem. Sect.* II. *Prop.* I.

323 Suppondo o angulo $ACM=\phi$, teremos $\frac{1}{2}\int zz\,d\phi$ por expressaõ da area $AMC$; logo $zz\,d\phi=C\,dt$, e $\frac{d\phi}{dt}=\frac{C}{zz}$: porém $\frac{d\phi}{dt}$ he a velocidade angular do movel, ou (que vem a ser o mesmo) a velocidade com que gira o raio vector; logo *a velocidade angular he reciprocamente proporcional ao quadrado da distancia.*

324 Se conduzirmos do centro $C$ a perpendicular $CN$ sobre a tangente em $M$, será $CN=\frac{zz\,d\phi}{ds}=\frac{C\,dt}{ds}=\frac{C}{u}$. Logo *a velocidade effectiva do movel em qualquer ponto da sua orbita he reciprocamente como a perpendicular conduzida do centro para a tangente da curva no mesmo ponto.*

325 Multiplicando a primeira das duas equações gerais (n. 322.) por $\frac{dx}{dt}$, e a segunda por $\frac{dy}{dt}$, teremos

$dx$

$$\frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-Py\,dy + P(a-x)\,dx}{z}:$$

porém $zz = yy + (a-x)^2$, e conseguintemente $z\,dz = y\,dy - (a-x)\,dx$; logo $u\,du = -P\,dz$; e integrando, $uu = -2\int P\,dz$. Como P he huma funçaõ de $z$, esta equaçaõ dará a velocidade $u$ em $z$. Donde se segue, que *o movel terá na sua trajectoria a mesma velocidade, que teria na mesma distancia outro qualquer corpo que por linha recta descesse para o centro, com tanto que ambos se achassem huma vez em distancias iguais com velocidades iguais.* He a Prop. XL dos Principios de Newton. Sect. VIII.

326 Agora, para construir a trajectoria, tomemos as duas equações $zz\,d\Phi = C\,dt$, e $uu = -2\int P\,dz$. Substituindo na ultima $\frac{ds^2}{dt^2}$, ou $\frac{dz^2 + z^2\,d\Phi^2}{dt^2}$ em lugar de $uu$, teremos $dz^2 + z^2\,d\Phi^2 = -2\,dt^2\int P\,dz$; e substituindo nesta em lugar de $dt^2$ o seu valor $\frac{z^4\,d\Phi^2}{C^2}$ tirado da primeira, teremos $(dz^2 + zz\,d\Phi^2)\,C^2 = -2z^4\,d\Phi^2\int P\,dz$. Logo $d\Phi = \frac{\pm C\,dz}{z\sqrt{(-2z^2\int P\,dz - C^2)}}$, equaçaõ separada, e que sempre poderá construir-se, ao menos por quadraturas. Deste modo he que Newton resolve este problema na Prop. XLI dos seus Principios.

Pelo que respeita á ambiguidade dos sinais $\pm$, deve notar-se que provém de que o angulo de projecçaõ $CAV$ póde ser agudo, ou obtuso. Se he agudo, diminue $z$ á medida que o angulo $\Phi$ aumenta, e entaõ he necessario usar do sinal $-$. Se he obtuso, $z$ e $\Phi$ crescem ao mesmo tempo, e nesse caso deve tomar-se o sinal $+$. Bem se vê, que se o angulo de projecçaõ fosse recto, os dous sinais seriaõ indifferentes.

327 Em fim, seja qual for a hypothese da força central, sempre o circulo poderá ser huma trajectoria, com tanto que se observem duas condições. A primeira, que a velocidade de projecçaõ tenha sido impressa por huma direcçaõ perpendicular ao raio vector; e a segunda, que o quadrado desta velocidade seja igual ao producto da força central pelo raio do circulo, ou (que vem a ser o mesmo) que a força central seja para a da gravidade, como a altura devi-

devida á velocidade de projecçaõ para ametade do raio.

Porque sendo a trajectoria circular, temos $dz = 0$, e conseguintemente será tambem em geral $-2z^2 \int P\,dz - C^2 = 0$; logo $\int P\,dz = \frac{-C^2}{2zz}$, e differenciando, $P\,dz = \frac{C^2}{z^3}\,dz$, ou $P = \frac{C^2}{z^3}$. E porque entaõ he $z\,d\Phi = ds = u\,dt$, a equaçaõ $zz\,d\Phi = C\,dt$ dará $C = uz$, e conseguintemente $P = \frac{uu}{z}$, ou $uu = Pz$, ou $2gb = Pz$. Isto mesmo se segue de que neste caso he a força centripeta igual á força normal; e esta he para a força da gravidade, como a altura devida á velocidade do movel para ametade do raio.

328 Exemplo I. Suppondo que a força central he na rasaõ directa da distancia ao centro, determinar a equaçaõ da trajectoria de hum movel lançado com qualquer velocidade (Fig. 143.).

Seja $f$ a distancia, onde a força central se acha igual á da gravidade, e teremos em geral $P = \frac{gz}{f}$, e $\int P\,dz = \frac{gzz}{2f} + C'$. Agora suppondo, que o movel foi lançado do ponto $A$ pela direcçaõ $AV$ perpendicular a $CA$, e com huma velocidade $V$, teremos $dz = 0$ no ponto $A$, e conseguintemente $z\,d\Phi = ds$. Assim mudar-se-ha no ponto $A$ a equaçaõ $z^2\,d\Phi = C\,dt$ em $z\,ds = C\,dt$; donde se tira $C = \frac{z\,ds}{dt} = aV$.

Porém $uu = -2\int P\,dz = -2C' - \frac{gzz}{f}$; e porque $u = V$, quando $z = a$, será $2C' = -VV - \frac{ga^2}{f}$; logo $uu = VV + \frac{ga^2}{f} - \frac{gzz}{f} = -2\int P\,dz$. Substituindo pois estes valores, e o de $VV = 2gb$, na equaçaõ geral (n. 326.), teremos $d\Phi = \frac{-a\,dz\sqrt{2fb}}{z\sqrt{[(a^2-z^2)(z^2-2fb)]}}$.

Para

Para integrarmos esta equaçaõ seja $\sqrt{(a^2 - z^2)} = pz$; e substituindo nella os valores de $z$, e $dz$, teremos $d\Phi = \frac{dp\sqrt{2fb}}{\sqrt{(a^2 - 2fb - 2fbp^2)}}$. Seja $p\sqrt{2fb} = q\sqrt{(a^2 - 2fb)}$; e teremos a nova transformada $d\Phi = \frac{dq}{\sqrt{(1 - qq)}}$, cujo integral he $q = sen\,\Phi$; sem constante, porque $q$, ou $\frac{\sqrt{2fb}.\sqrt{(a^2 - z^2)}}{z\sqrt{(a^2 - 2fb)}}$ se desvanece, quando $\Phi = 0$, ou quando $z = a$. Será pois $sen\,\Phi = \frac{\sqrt{2fb}.\sqrt{(a^2 - z^2)}}{z\sqrt{(a^2 - 2fb)}}$, ou $z^2 sen\,\Phi^2 (a^2 - 2fb) = 2fb(a^2 - z^2)$.

Fazendo agora $CP = x$, $PM = y$, poderemos substituir $yy$ em lugar de $z^2 sen\,\Phi^2$, e $yy + xx$ em lugar de $zz$. E assim teremos $yy(a^2 - 2fb) = 2fb(a^2 - x^2 - y^2)$, ou $yy = \frac{2fb}{aa}(aa - xx)$ por equaçaõ ás coordenadas da trajectoria. Esta equaçaõ pertence a huma ellipse, que tem o centro em $C$, sendo a ametade do eixo maior $AC = a$, e a ametade do menor $BC = \sqrt{2fb}$. Suppomos, que $a > 2fb$; se fosse $a < 2fb$, seria $BC$ a ametade do eixo maior.

329 Logo, se hum corpo depois de haver sido lançado por huma direcçaõ perpendicular ao raio vector $AC$, com huma velocidade devida á altura $b$, for sollicitado para o centro $C$ por huma força centripeta na razaõ directa das distancias ao mesmo centro, de maneira que na distancia $f$ seja esta força igual á da gravidade, o movel descreverá huma ellipse, cujo centro será o mesmo que o das forças, sendo a ametade de hum dos eixos $AC = a$, e do outro $BC = \sqrt{2fb}$.

Se a projecçaõ naõ tivesse sido perpendicular ao raio vector, mas por huma linha $MV'$, que com elle fizesse hum angulo dado $CMV'$, igualmente se poderiaõ determinar os eixos da trajectoria, e a sua posiçaõ. Porque seja $k$ a altura devida á velocidade do corpo em M, ou á velocidade de projecçaõ. Como temos em geral $uu = VV + \frac{g}{f}(aa - zz)$, será $2fk = 2fb + aa - mm$: porém

porém $2fb = BC^2$; logo $2fk = CO^2$. Conhecemos pois $CM = m$, $CO = \sqrt{2fk}$, e o angulo $CMV'$, que comprehendem estes dous semidiametros conjugados; e conseguintemente será facil de descrever a ellipse, que serve de trajectoria ao movel, no caso de ser obliquo o angulo de projecçaõ.

330 Quanto ao tempo, que o movel emprega em correr qualquer arco $AM$ da sua trajectoria, temos visto que he para a area $ACM$, como a unidade para a quantidade $\frac{1}{2} aV$. Por conseguinte, chamando $c$ o numero 3,14159 &c, e $b$ a ametade do eixo $CB$, o tempo de huma revoluçaõ inteira, ou o *tempo periodico* terá por expressaõ $\frac{cab}{\frac{1}{2}aV} = \frac{2cb}{V}$. Logo *o tempo periodico será o mesmo, que gastaria hum corpo em descrever uniformemente com a velocidade V a circumferencia do circulo descrito com o raio C B.*

Como temos $b = \sqrt{2fb}$, e $V = \sqrt{2gb}$, póde o tempo periodico representar-se igualmente por $2c\sqrt{\frac{f}{g}}$; quantidade, que naõ depende senaõ da força central, e que nos mostra conseguintemente, que *se muitos corpos lançados com quaisquer velocidades primitivas descreverem trajectorias ellipticas ao redor do mesmo centro, os seus tempos periodicos seraõ iguais.*

331 A altura $k$ devida á velocidade do projectil em qualquer ponto $M$ da sua orbita he representada por $\frac{CO^2}{2f}$ (n. 329.), e conseguintemente *he a velocidade proporcional ao semidiametro conjugado* CO. Sendo pois $V$ a velocidade no ponto $A$, e $u$ a velocidade no ponto $M$, teremos $u = \frac{V \cdot CO}{CB}$. Logo *terá o movel a maior velocidade, quando se achar nas extremidades do eixo menor; e a menor velocidade, quando se achar nas extremidades do eixo maior.*

332 Os pontos da maior, e menor velocidade do projectil, chamaõ-se em geral *os apsides* da sua orbita; e quando se trata do movimento dos planetas á roda do Sol, chama-se em particular apside superior, ou *aphelio*, o ponto

to da sua menor velocidade; e apside inferior, ou *perihelio*, o ponto da menor velocidade.

333 EXEMPLO II. Supondo, que a força centripeta he na rasaõ inversa do quadrado da distancia, e que na distancia $f$ he igual á força da gravidade, determinar a trajectoria de hum movel lançado com qualquer velocidade (Fig. 144.).

Neste caso temos $P = \frac{gff}{zz}$, e $\int P\,dz = -\frac{gff}{z} + C'$; donde será $uu = -2\int P\,dz = -2C' + \frac{2gff}{z}$. Porém, fazendo $AC = a$, e a velocidade de projecçaõ no ponto $A = V$, teremos $VV = -2C' + \frac{2gff}{a}$, e conseguintemente $-2C' = VV - \frac{2gff}{a}$; logo, substituindo este valor, será $uu = -2\int P\,dz = VV + \frac{2gff}{z} - \frac{2gff}{a}$. Seja pois $v$ a altura devida á velocidade $u$, e $b$ a altura devida á velocidade de projecçaõ $V$; e teremos $v = b + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$.

Isto posto, se a velocidade de projecçaõ for perpendicular ao raio vector $CA$, a constante da equaçaõ $z^2\,d\Phi = C\,dt$ será $= aV$, e assim teremos por equaçaõ differencial da trajectoria $d\Phi = \frac{a\,dz}{z\sqrt{\left[zz + \frac{ffzz}{b}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right) - aa\right]}}$, ou $d\Phi = \frac{a\,dz\sqrt{ab}}{z\sqrt{[(z-a)(\overline{ab-ff}.z + a^2 b)]}}$. Seja $\frac{2a^2 b - f^2 z}{z} = p$, ou $z = \frac{2a^2 b}{f^2 + p}$; e teremos $\frac{dz}{z} = \frac{-dp}{f^2 + p}$, $z - a = \frac{2a^2 b - af^2 - ap}{f^2 + p}$, $(ab - ff)z + a^2 b = \frac{a^2 b(2ab - ff + p)}{f^2 + p}$, e $\sqrt{[(z-a)(\overline{ab-ff}.z + a^2}$

$a^2 b)] = \frac{a\sqrt{ab}}{f^2+p}\sqrt{[(2ab-ff)^2-p^2]}$. Logo $d\Phi = \frac{-dp}{\sqrt{[(2ab-ff)^2-p^2]}}$. Integrando pois, teremos $\frac{p}{2ab-ff} = cos\,\Phi$, ou $\frac{2a^2b-f^2z}{2abz-f^2z} = cos\,\Phi$, sem constante, porque dá ao mesmo tempo $\Phi = 0$, e $z = a$. Logo a equaçaõ finita da trajectoria será na hypothese presente $2a^2b - f^2z = (2ab-ff)z\,cos\,\Phi$.

E porque fazendo $AP = x$, temos $z\,cos\,\Phi = a - x$, está claro que a equaçaõ entre os $z$ e os $x$ da curva deve ser $f^2 z = 2a^2b + (ff-2ab)(a-x) = af^2 + (2ab-ff)x$. Elevando pois ao quadrado, substituindo em lugar de $z^2$ o seu valor $y^2 + (a-x)^2$, e reduzindo, teremos por equaçaõ ás coordenadas $f^4y^2 = 4a^2bf^2x + 4ab(ab-ff)x^2$; equaçaõ, que em geral pertence a huma secçaõ conica, que tem por vertice o ponto $A$, e por eixo a linha $AP$. Será pois a trajectoria huma ellipse, se for $ab < f^2$; huma parabola, se $ab = f^2$; e huma hyperbola, se $ab > f^2$.

334 Na primeira supposiçaõ, se determinará o eixo maior $Aa$ da ellipse, fazendo $y = 0$, que dará $x = Aa = \frac{af^2}{f^2-ab}$; e a ametade do eixo menor $DB$ se achará, tomando $x = \frac{1}{2}Aa$, que dará $DB = \frac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{(f^2-ab)}}$. Porém $AC = a$, e conseguintemente $Ca = \frac{a^2b}{f^2-ab}$; logo $AC \cdot Ca = \frac{a^3b}{f^2-ab} = DB^2$. Donde se segue, que *o ponto C, onde se acha o centro das forças, he hum dos fócos da ellipse.*

335 Será o fóco mais vezinho do ponto $A$, quando for $2ab > f^2$; e o mais distante, quando for $2ab < f^2$. Quando porém for $2ab = f^2$, ambos os fócos se reuniráõ em hum só, e a trajectoria será conseguintemente circular. Do mesmo modo se mostra, que sendo a trajectoria huma parabola, ou hyperbola, sempre o centro das forças se acha no fóco.

*Appli-*

## *Applicaçaõ da Theorica precedente ao Movimento dos Planetas.*

336 A Fim de applicar esta theorica ao movimento dos corpos celestes, supponhamos que elles se movem por trajectorias ellipticas, e façamos o eixo maior dellas $= A$, o menor $= B$, e o parametro $=$ P. Teremos $A = \frac{af^2}{f^2 - ab}$, $B = \frac{2a\sqrt{ab}}{\sqrt{(f^2 - ab)}}$, e $P = \frac{B^2}{A} = \frac{4a^2b}{f^2}$. Porém, como temos visto, o tempo de huma revoluçaõ inteira he igual á area da ellipse dividida por $\frac{1}{2}aV$; logo será o tempo periodico $= \frac{\frac{1}{4}c.A.B}{\frac{1}{2}a\sqrt{2gb}}$, e substituindo em lugar de $B$ o seu valor $\sqrt{A.P}$, ou $\frac{2a}{f}\sqrt{Ab}$, será o mesmo tempo periodico $= \frac{c.A^{\frac{3}{2}}}{f\sqrt{2g}}$. Donde concluiremos, que *se muitos corpos descreverem trajectorias ellipticas ao redor do mesmo centro de forças, seraõ os tempos periodicos como as raizes quadradas dos cubos dos eixos maiores das suas orbitas*, ou (que vem a dizer o mesmo) *na rasaõ sesquiplicada dos mesmos eixos.*

337 E porque a altura devida á velocidade he em geral $v = b + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$, concluiremos tambem que o perihelio está na extremidade do eixo mais vezinha do fóco, e o aphelio na outra extremidade do mesmo eixo.

He cousa sabida, que no Systema de Newton todos os planetas gravitaõ para o Sol, na rasaõ inversa do quadrado da distancia em que estaõ a respeito do centro delle. Logo se os planetas recebêraõ no principio do seu movimento huma certa velocidade de projecçaõ obliqua, como era necessario para naõ cahirem todos sobre o Sol, esta força primordial de projecçaõ, combinada com a força da gravitaçaõ, que he entaõ a força central, deve fazellos

los deſcrever huma secçaõ conica, que tenha o centro meſmo do Sol em hum dos ſeus fócos. E como por huma parte todos elles tem ſuas revoluções periodicas, e por outra parte varîaõ de diſtancia ao Sol em differentes pontos das ſuas orbitas, eſtá claro, que entre as secções conicas a ellipſe he a unica trajectoria dos planetas, que obſervamos. Porém em geral eſtas ellipſes tem pequena *excentricidade*, iſto he, differem pouco de huma figura circular.

338 Do que acima temos demonſtrado concluiremos pois I. *Que os planetas deſcrevem ao redor do Sol areas proporcionais aos tempos.* II. *Que os tempos periodicos ſaõ como as raizes quadradas dos cubos dos eixos maiores das ſuas orbitas.* Os cometas eſtaõ no meſmo caſo, com eſta differença porém que as ſuas orbitas ſaõ ellipſes muito allongadas, nas quais por conſeguinte póde tomar-ſe a parte inferior, nas vezinhanças do perihelio, como hum arco de parabola.

Eſtas duas Leis memoraveis do movimento dos planetas tinhaõ ſido já deſcubertas pelo celebre Aſtronomo Kepler, e por eſſa raſaõ ſe chamáraõ *Regras de Kepler.* Mas eſtava reſervado para Newton o demonſtrallas com todo o rigor, por hum encadeamento ſingular de principios, de calculos, e de conſequencias. Depois de haver poſto por baſe do ſeu Syſtema a cauſa phyſica deſtas leis, moſtrou que ellas deviaõ neceſſariamente ter lugar, ſuppondo que a força centripeta, que retem os planetas nas ſuas orbitas, he dirigida para o centro do Sol, e que obra na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias ao meſmo centro.

Por mais que ſe tenhaõ feito paſſar eſtas leis pelas provas reiteradas das mais delicadas obſervações, nunca ſe achou facto algum que as deſmentiſſe, antes todos concorrem maravilhoſamente a confirmallas; e nenhuma couſa tem contribuido de hum modo mais efficaz para fazer adoptar geralmente o ſyſtema, ao qual ellas ſervem de baſe.

Todos os planetas ſe movem ſegundo a ordem dos *Signos*; e ainda que as ſuas orbitas naõ eſtaõ no meſmo plano, a ſua inclinaçaõ a reſpeito da *ecliptica* naõ paſſa de 8 gráos. Os dous pontos, onde ellas encontraõ o plano da ecliptica, chamaõ-ſe *nodos.*

339 Obſervando com toda a exactidaõ poſſivel as circunſtancias da revoluçaõ dos aſtros, tem-ſe achado os tempos periodicos da maneira ſeguinte:

*Mercu-*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Mercurio* | $87^d$ | $23^h$ | $15' \frac{1}{2}$ | , ou | $87^d, 969$ |
| *Venus* | 224 | 16 | $48 \frac{1}{3}$ | , ou | 224 , 700 |
| *Terra* | 365 | 6 | $9 \frac{1}{6}$ | , ou | 365 , 256 |
| *Marte* | 686 | 23 | $30 \frac{1}{2}$ | , ou | 686 , 980 |
| *Jupiter* | 4332 | 12 | | , ou | 4332 , 5 |
| *Saturno* | 10759 | 8 | | , ou | 10759 , 33 |

Sendo pois os eixos maiores das orbitas dos planetas como as raizes cubicas dos quadrados dos tempos periodicos, concluiremos, que ſuppondo o eixo maior da orbita terreſtre dividido em 100000 partes, os eixos das orbitas dos ſeis planetas precedentes ſeraõ repreſentados reſpectivamente pelos numeros 38710 . . . . 72333 . . . . 100000 . . . . 152369 . . . . 520109 . . . . 953803, os quais ſaõ muito conformes ao que ſe tem achado por obſervações immediatas. Como ſabemos por outra parte, que o eixo maior da orbita terreſtre he proximamente de 48000 ſemidiametros terreſtres, naõ temos mais que multiplicar os numeros precedentes por $\frac{48}{100}$, para os reduzirmos todos a ſemidiametros terreſtres. Eſta multiplicaçaõ dará 15581 . . . . ; 34720 . . . . 48000 . . . . 73137 . . . . 249652 . . . . 457825. E porque o ſemidiametro da terra he de 19615800 pés, podemos reduzir os referidos eixos a medidas conhecidas.

340 Agora poderemos determinar a força attractiva do Sol, ou a diſtancia $f$ do ſeu centro, onde ella he igual á força da gravidade. Porque ſendo o tempo periodico $T = \frac{c \,.\, A \sqrt{A}}{f \sqrt{2g}}$, teremos $f = \frac{c \,.\, A \sqrt{A}}{T \sqrt{2g}}$, onde he neceſſario advertir que o tempo ſe conta em ſegundos, e tanto $A$ como $f$ em pés. Se quizermos pois exprimir eſtas duas ultimas quantidades em ſemidiametros terreſ-

tres,

tres, deveremos escrever $f = \frac{c \cdot A^{\frac{1}{2}} \sqrt{19615800}}{T\sqrt{2g}}$. Porém o diametro $A$ da orbita annual he de 48000 semidiametros terrestres, e o tempo periodico $T$ he de $365^d$ $6^h\ 9'\ 10'' = 31558150''$; logo $f =$ - - - - - - - -

$$\frac{(3,14159265)(48000)^{\frac{1}{2}}(19615800)^{\frac{1}{2}}}{(31558150)(60,392)^{\frac{1}{2}}} = 596\frac{1}{2}.$$

Logo a força attractiva do Sol, tomada a $596\frac{1}{2}$ semidiametros terrestres do seu centro, he igual á força que a gravidade exercita sobre os corpos situados junto á superficie da terra.

341 Para determinar o movimento verdadeiro de hum planeta ( Fig. 145. ), he necessario conhecer por meio das observações a excentricidade da sua orbita, ou a distancia $CS$ entre o centro e o fóco, que he ametade da differença entre a maxima e minima distancia do planeta a respeito do centro do Sol. Seja pois esta excentricidade $= E$, e o eixo maior $AB = A$, e conseguintemente o menor $2\,CD = \sqrt{(AA - 4EE)}$, e seja $f$ a quantidade, que mede a intensaõ da força acceleratriz. Isto posto, eisaqui como se póde calcular a velocidade do planeta em qualquer ponto $M$ da sua orbita.

Por quanto já temos achado, que $v = b + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$, he necessario primeiramente determinar $b$. Para isso temos $A = \frac{af^2}{f^2 - ab}$, donde se tira $b = \frac{f^2(A-a)}{A \cdot a}$; e substituindo este valor, teremos $v = \frac{ff}{z} - \frac{ff}{A}$. Donde se segue, que a velocidade perihelia em $A$ he devida á altura $\frac{ff}{a} - \frac{ff}{A} = \frac{ff}{\frac{1}{2}A - E} - \frac{ff}{A} = \frac{ff(A+2E)}{A(A-2E)}$, e que a velocidade aphelia em $B$ he devida á altura

ff

$$\frac{ff}{\frac{1}{2}A+E}-\frac{ff}{A}=\frac{ff(A-2E)}{A(A+2E)}.$$

342 Note-se, que estas duas alturas saõ entre si como $(A+2E)^2$ para $(A-2E)^2$, ou como o quadrado de $SB$ para o de $SA$. Logo as velocidades correspondentes saõ como $SB$ para $SA$; e assim vemos por outra parte que deve ser, reflectindo que as velocidades nos differentes pontos da trajectoria saõ reciprocamente como as perpendiculares conduzidas do centro das forças para as tangentes.

343 Se quizermos saber o tempo, que deve gastar hum planeta em descrever hum arco $AM$ da sua orbita, contado desde o ponto do perihelio $A$, faremos esta proporçaõ: *Como a area da ellipse he para a area* ASM, *assim o tempo periodico para o tempo procurado.*

344 Mas se quizermos resolver o problema inverso, ou buscar o *lugar* do planeta na sua orbita em qualquer instante dado, he necessario calcular o angulo ao Sol $ASM$, correspondente ao tempo determinado $t$, que tem corrido desde a passagem pelo perihelio até chegar o planeta ao ponto $M$. O angulo $ASM$ chama-se *anomalia verdadeira*; e o problema, que tem a determinaçaõ delle por objecto, he muito conhecido dos Astronomos pelo nome de *Problema de Kepler*. Até o presente naõ se tem podido resolver, senaõ de hum modo approximado.

O circulo $ANB$ descrito sobre o diametro $AB$, chama-se o *circulo do excentrico.* Se produzirmos até o ponto $N$ da sua circumferencia a ordenada $MP$, está claro que, sendo o sector circular $ANS$ para o sector elliptico $AMS$ em huma rasaõ constante, será o sector circular $ANS$ para a area de todo o circulo, como o tempo $t$ empregado em correr o arco $AM$ para o tempo periodico $T$.

Reduz-se pois a questaõ a conduzir pelo ponto dado $S$ huma linha $SN$, que corte no circulo do excentrico huma parte dada da sua area $ANS = \frac{t}{T}$. Para isso, seja o raio do excentrico $AC = 1$, a excentricidade $CS = E$, e o arco de circulo $AN$ que se quer determinar, e que se chama *anomalia do excentrico* $= \varphi$. Assim teremos

mos por valor da area $ANS$ a quantidade $\frac{1}{2}AC.AN$ $-\frac{1}{2}CS.PN = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}E\,sen\,\varphi$, e a area inteira do circulo será $c.AC^2$; logo $\varphi - E\,sen\,\varphi = \frac{t}{T}.2c$

345 Se qualquer corpo se movesse uniformemente pela circumferencia do excentrico, e acabasse nelle a sua revoluçaõ no mesmo tempo que o planeta a sua na ellipse, teriamos $\frac{t}{T}\cdot 2c$ por expressaõ do arco $AQ$, que elle descreveria no tempo $t$. Este arco he o que se chama *anomalia media do planeta*, e sempre he conhecido em se dando o tempo $t$, por quanto he $T : t :: 360° : AQ$.

Sendo pois a anomalía media $= \mathfrak{G}$, teremos $\varphi - E\,sen\,\varphi = \mathfrak{G}$. Porém desta equaçaõ naõ póde deduzir-se o valor de $\varphi$, senaõ por approximaçaõ. Será com tudo tanto mais facil de alcançar, quanto for menor a excentricidade $E$. Para maior facilidade do calculo, supporemos que as quantidades $\varphi$ e $\mathfrak{G}$ saõ representadas em gráos e partes decimais de gráo; o que exige que tambem se reduza o valor absoluto de $E\,sen\,\varphi$ em gráos, multiplicando-o por $\frac{180}{c}$. Nestes termos será a equaçaõ, que havemos de resolver, $\varphi - \mathfrak{G} = \frac{180.E}{c} sen\,\varphi$.

346 Exemplo. Na orbita de Marte, que he a mais excentrica de todas, exceptuando a de Mercurio, queremos saber o lugar do planeta $65^d\,10^h\,59'\,31''\frac{1}{5}$ depois da sua passagem pelo perihelio.

Marte faz a sua revoluçaõ em $686^d\,23^h\,30'\frac{1}{2}$; e reduzindo a partes decimais de dia teremos $T = 686{,}98$ e $t = 65{,}458$. Assim calculando a formula $\mathfrak{G} = \frac{2ct}{T}$. por logarithmos, teremos

686

| | | |
|---|---|---|
| 686 , 98 | - - - - - - - C L. | 7 , 1630559 |
| 360 | - - - - - - - - - - - - L. | 2 , 5563025 |
| 65 , 458 | - - - - - - - - L. | 1 , 8159627 |
| *Log.* $\mathfrak{C}$ | - - - - - - - | 1 , 5353211 |

A este Logarithmo corresponde o numero 34° , 30213, que he o valor procurado da anomalia media , correspondente ao tempo proposto.

Por outra parte consta das observações , que o eixo maior da orbita de Marte he para a sua excentricidade como 2004343 para 93134 . Logo $E = \frac{186268}{2004343}$; e por conseguinte será facil de calcular o Logarithmo do coefficiente $\frac{180 . E}{c}$ na equaçaõ $\varphi - \mathfrak{C} = \frac{180 . E}{c}$ *sen* $\varphi$.

| | | |
|---|---|---|
| 3 , 14159265 | - - - - - - - C L. | 9 , 5028501 |
| 2004343 | - - - - - - - - - - C L. | 3 , 6980280 |
| 180 | - - - - - - - - - - - - - L. | 2 , 2552725 |
| 186268 | - - - - - - - - - - - - L. | 5 , 2701383 |
| L $\frac{180 . E}{c}$ | - - - - - - - - - - - | 0 , 7262889 |

Será pois a equaçaõ, que temos para resolver, *log* ( $\varphi - \mathfrak{C}$ ) $= 0 , 7262889 +$ *log sen* $\varphi$. Ora, como $\varphi$ naõ deve ser muito maior que $\mathfrak{C}$ ou 34° , supponhamos primeiramente $\varphi = 36°$ ; e tendo achado pelo calculo , que este valor ainda he pequeno , supponhamos em segundo lugar $\varphi =$ 38° . Fazendo o calculo para estas supposições , teremos

| I | II |
|---|---|
| $\varphi = 36°$ | $\varphi = 38°$ |
| $\mathfrak{C} = 34° , 30$ &c | $\mathfrak{C} = 34° , 30$ &c |
| $\varphi - \mathfrak{C} = 1 , 7$ | $\varphi - \mathfrak{C} = 3 , 7$ |
| *L sen* $\varphi = 9, 7692187$ | *L sen* $\varphi = 9, 7893420$ |
| 0, 7262889 | 0, 7262889 |
| $L ( \varphi - \mathfrak{C} ) = 0, 4955076$ | $L ( \varphi - \mathfrak{C} ) - 0,5156309$ |
| $\varphi - \mathfrak{C} = 3, 13$ | $\varphi - \mathfrak{C} = 3, 28$ |
| *Erro* + 1, 43 | *Erro* − 0, 42 |

347 Isto posto, imaginemos huma linha recta $MBM'$ (Fig. 146.), cujas abscissas $AP$, $AP'$ representem as supposiçoens 36, e 38; e as ordenadas $PM$, $P'M'$, representem os erros correspondentes. Assim teremos esta proporçaõ: como a soma $MC$ dos dous erros para a differença $PP'$ das duas supposiçoens, assim $PM$ ou 1, 43 para o quarto termo $PB = 1, 546$, o qual sendo ajuntado á primeira supposiçaõ 36° dará proximamente $\varphi = 37°, 546$. Mas para conseguirmos huma approximaçaõ maior, façamos outras duas supposiçoens, tomando na primeira $\varphi = 37°, 54$, e na segunda $\varphi = 37°, 55$; e hum calculo semelhante ao precedente nos dará

| III | | IV | |
|---|---|---|---|
| $\varphi =$ | 37, 54 | $\varphi =$ | 37, 55 |
| $6 =$ | 34, 30213 | $6 =$ | 34, 30213 |
| $\varphi - 6 =$ | 3, 23787 | $\varphi - 6 =$ | 3, 24787 |
| $L\,sen\,\varphi =$ | 9, 7848420 | $L\,sen\,\varphi =$ | 9, 7849406 |
| | 0, 7262889 | | 0, 7262889 |
| $L(\varphi - 6) =$ | 0, 5111309 | $L(\varphi - 6) =$ | 0, 5112295 |
| $\varphi - 6 =$ | 3, 24437 | $\varphi - 6 =$ | 3, 24511 |
| *Erro* | + 0, 00650 | *Erro* | − 0, 00276 |

Destes dous resultados deduziremos esta proporçaõ: A soma dos erros 0, 00926 he para a differença das supposiçoens 0, 01, como o primeiro erro 0, 0065 he para o quarto termo, que se achará $= 0, 00702$, e ajuntando-se á primeira supposiçaõ dará $\varphi = 37°, 54702$.

Este valor he exacto até á ultima letra decimal, porque substituindo 37°, 54702 em lugar de $\varphi$ na equaçaõ $L(\varphi - 6) = 0, 7262889 + L\,sen\,\varphi$, naõ se acha erro algum. Concluamos pois, que a anomalia do excentrico $AN$ he de 37°, 54702, ou de $37°\ 32'\ 49''\ \frac{3}{11}$.

348 Agora, sendo já conhecida a anomalia do excentrico $AN$, passaremos a determinar a anomalia verdadeira $ASM$ (Fig. 145.). Para isso supponhamos $CA = a$,

CP

$CP = x$, $CS = e$; e tendo reflectido que he $tang\ \frac{1}{2}\ \Phi = \frac{1 - cos\ \Phi}{sen\ \Phi}$, teremos $tang\ \frac{1}{2}\ ASM = \frac{SM - PS}{PM}$, e $tang\ \frac{1}{2}\ ACN = \frac{CN - CP}{PN} = \frac{AP}{PN}$. Porém, pelas propriedades da ellipse, temos o raio vector $SM = a - \frac{ex}{a}$, e conseguintemente $SM - SP = a + e - x - \frac{ex}{a} = \frac{a + e}{a} \cdot (a - x) = \frac{a + e}{a}\ AP$. Logo $tang\ \frac{1}{2}\ ASM : tang\ \frac{1}{2}\ ACN :: \frac{a + e}{a} \cdot \frac{AP}{PM} : \frac{AP}{PN} :: a + e : \frac{a.PM}{PN} :: a + e : CD :: a + e : \sqrt{(aa - ee)} :: \sqrt{(a + e)} : \sqrt{(a - e)}$. Logo *a raiz quadrada da distancia peribelia he para a raiz quadrada da distancia aphelia, como a tangente da ametade da anomalia do excentrico para a tangente da ametade da anomalia verdadeira.*

Teremos pois no nosso exemplo $\sqrt{1818075} : \sqrt{2190611} :: tang\ 18^\circ\ 46'\ 24''\ \frac{7}{11} : tang\ \frac{1}{2}\ ASM$; e calculando esta proporçaõ por logarithmos, acharemos

$$
\begin{array}{lr}
1818075 \text{ - - - - - - } \frac{1}{2}\ CL. & 6,8701941 \\
2190611 \text{ - - - - - - - - } \frac{1}{2}\ L. & 3,1702826 \\
18^\circ\ 46'\ 24''\ \frac{7}{11} \text{ - - - } L.\ tang. & 9,5313664 \\
\hline
Log.\ tang\ \frac{1}{2}\ ASM \text{ - - - } & 9,5718431
\end{array}
$$

Este logarithmo corresponde nas Taboas ao angulo de $20^\circ\ 27'\ 40''\ \frac{8}{11}$; e assim teremos a anomalia verdadeira $ASM = 40^\circ\ 55'\ 21''\ \frac{5}{11} = 40^\circ,92232$, com a qual se determina o lugar de Marte na sua orbita ao instante dado.

Ajuntando as differentes partes deste calculo, será pois a anomalia media $AQ = 34^\circ, 30213 = 34^\circ\ 18'\ 7''\ \frac{2}{3}$; a anomalia do excentrico $AN = 37^\circ, 54702 = 37^\circ\ 32'\ 49''\ \frac{3}{11}$; e a anomalia verdadeira $ASM = 40^\circ, 92232 = 40^\circ\ 55'\ 21''\ \frac{5}{11}$.

55. Para ajuntarmos aqui huma approximaçaõ analytica do Problema precedente, seja a ametade do eixo maior $AC = 1$ (Fig. 145.), a excentricidade $CS = e$, o raio vector $SM = r$, a anomalia verdadeira $ASM = u$, a anomalia media $AQ = z$, e $2c$ a circumferencia do circulo que tem o raio $= 1$. A superficie do circulo $AEB$ será representada por $c$, e a da ellipse por $c\sqrt{(1 - e^2)}$; o elemento do sector $ASM$ será $\frac{1}{2} rr\,du$, e o do circulo $\frac{1}{2}dz$. Logo acharemos $\frac{1}{2}dz : \frac{1}{2}rr\,du :: c : c\sqrt{(1-e^2)}$, e conseguintemente $dz = \frac{rr\,du}{\sqrt{(1-e^2)}}$.

Porém he $SM = AC - \frac{e.CP}{AC} = AC - \frac{e^2 + e.PS}{AC}$; ou $r = 1 - e^2 - er\cos u$; logo $r = \frac{1-e^2}{1+e\cos u}$. E substituindo este valor de $r$ na equaçaõ $dz = \frac{rr\,du}{\sqrt{(1-e^2)}}$, será $dz = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}du}{(1+e\cos u)^2} = (1-e^2)^{\frac{3}{2}}du(1+e\cos u)^{-2}$.

Reduzindo pois $(1-e^2)^{\frac{3}{2}}$ a huma serie, e $(1 + e\cos u)^{-2}$ a outra; multiplicando-as; reduzindo as potencias de $\cos u$ a cosenos de multiplos de $u$; e desprezando as potencias de $e$ que passarem da quarta, por serem de extrema pequenheza, ainda que seja na orbita de Mercu-

Mercurio; teremos $dz = du - 2e\,du\cos u + \frac{1}{4}(6e^2 + e^4)\,du\cos 2u - e^3\,du\cos 3u + \frac{5}{8}e^4\,du\cos 4u$; e integrando,

$$z = u - 2e\,sen\,u + \frac{1}{8}(6e^2 + e^4)\,sen\,2u$$
$$- \frac{1}{3}e^3\,sen\,3u + \frac{5}{32}e^4\,sen\,4u.$$

Se contarmos as anomalias desde o ponto do aphelio, os termos que nesta expressaõ tem o final $-$ deveráõ mudallo em $+$.

Para acharmos agora a anomalia verdadeira pela media, supponhamos $dz$ constante, e teremos

$$\frac{du}{dz} = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1+e\cos u)^2, \text{ ou}$$

$$\frac{du}{dz} = 1 + 2e^2 + \frac{21}{8}e^4 + (2e + 3e^3)\cos u + \frac{1}{4}(2e^2 + 3e^4)\cos 2u$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = -(2e^2 + 12e^4) - (2e + 18e^3)\cos u - (8e^2 + 46e^4)\cos 2u - 11e^3\cos 3u - 7e^4\cos 4u.$$

$$\frac{d^5u}{dz^5} = (2e^2 + \frac{99}{2}e^4) + (2e + 78e^3)\cos u + (38e^2 + 617e^4)\cos 2u + 185e^3\cos 3u + \frac{835}{2}e^4\cos 4u.$$

$$\frac{d^7u}{dz^7} = -(2e^2 + \frac{399}{2}e^4) - (2e + 318e^3)\cos u - (158e^2 + 6411e^4)\cos 2u - 2051e^3\cos 3u - \frac{21819}{2}e^4\cos 4u.$$

Supponhamos $u = z + A\,sen\,z + B\,sen\,2z + C\,sen\,3z$ +

$+ D\, sen\, 4z$; e fazendo sempre constante $dz$, teremos tambem

$$\frac{du}{dz} = 1 + A \cos z + 2B \cos 2z + 3C \cos 3z + 4D \cos 4z$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = -A \cos z - 8B \cos 2z - 27C \cos 3z - 64D \cos 4z$$

$$\frac{d^5u}{dz^5} = A \cos z + 32B \cos 2z + 243C \cos 3z + 1024D \cos 4z$$

$$\frac{d^7u}{dz^7} = -A \cos z - 128B \cos 2z - 2187C \cos 3z$$
$$- 16384D \cos 4z.$$

Igualando pois estes valores aos precedentes respectivamente, e suppondo ambas as anomalias na sua origem do perihelio, onde os seus cosenos, e os de todos os multiplos dellas, saõ iguais ao raio, ou á unidade, teremos as quatro equações seguintes, para determinarmos os coefficientes $A, B, C, D$:

$$A + 2B + 3C + 4D = 2e + \frac{5}{2}e^2 + 3e^3 + \frac{27}{8}e^4$$

$$A + 8B + 27C + 64D = 2e + 10e^2 + 29e^3 + 65e^4$$

$$A + 32B + 243C + 1024D = 2e + 40e^2 + 263e^3$$
$$+ 1084e^4$$

$$A + 128B + 2187C + 16384D = 2e + 160e^2 + 2369e^3$$
$$+ 17520e^4$$

Donde concluiremos $A = 2e - \frac{1}{4}e^3$, $B = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4$, $C = \frac{13}{12}e^3$, e $D = \frac{103}{96}e^4$.

Logo será

$$u = z + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) sen\, z + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) sen\, 2z$$
$$+ \frac{13}{12}e^3\, sen\, 3z + \frac{103}{96}e^4\, sen\, 4z.$$

Suppondo as dimensões da orbita de Marte tais, como acima foraõ referidas, será $e = 0{,}09293$; e substituindo este valor, teremos por equaçaõ deste Planeta

$$u = z + 0{,}18566\, sen\, z + 0{,}01076\, sen\, 2z$$
$$+ 0{,}00087\, sen\, 3z + 0{,}00008\, sen\, 4z.$$

Como

Como nesta expressaõ se representaõ as anomalias em partes do raio, que se tem tomado por unidade, querendo representallas em gráos, e partes de gráo, será necessario multiplicar os coefficientes numericos por $57^\circ, 29578$, que he o arco igual ao mesmo raio, e teremos

$$u = z + 10^\circ\ 38'\ 15''\ sen\ z + 36'\ 59''\ sen\ 2\ z$$
$$+ 2'\ 59''\ sen\ 3\ z + 16''\ sen\ 4\ z.$$

Se as anomalias se contarem do aphelio, como ordinariamente se costuma nas orbitas dos Planetas, deve mudar-se o final + em − nos coefficientes de *sen* z, e *sen* 3 z. ℈

Tal he em geral, o modo de calcular os movimentos dos corpos celestes. Mas estes movimentos, ainda que muito regulares por si mesmos, saõ com tudo sujeitos a humas pequenas desigualdades, das quais agora mostraremos brevemente as causas, e os effeitos.

## *Da Attracçaõ dos Corpos Celestes, e do Problema dos Tres Corpos.*

349 O Sol, conforme ao que tem mostrado Newton, he dotado de huma força attractiva, que faz mover ao redor delle os seis Planetas principais; e estes Planetas tambem, assim como todos os mais astros em geral, tem huma força semelhante, pela qual obraõ naõ sómente huns contra os outros, mas todos juntos contra o mesmo Sol.

Parece que esta propriedade he, como a inercia, inherente a cada particula da materia, e que naõ podendo ser effeito da impulsaõ de fluido algum, deve buscar-se a sua causa na vontade do Autor da Natureza.

Considerando pois a gravitaçaõ reciproca de todos os corpos, como huma lei primitiva do systema solar, primeiramente exporemos alguns factos indicados pela observaçaõ, ou adivinhados, para o dizermos assim, pela theorica; e depois os applicaremos ao movimento dos Planetas.

350 Se a attracçaõ compete a cada huma das partes da materia, he evidente que a distancias iguais dos seus centros devem os Planetas attrahir na rasaõ das massas. Mas se as distancias forem differentes, prova o calculo (e a observaçaõ o confirma) que a attracçaõ he na rasaõ directa das

das maſſas, e na inverſa dos quadrados das diſtancias; ſem o que naõ ſeriaõ as trajectorias ſecções conicas.

E como ſabemos por outra parte, que eſtes aſtros deſcrevem orbitas ellipticas ao redor do Sol, he facil de concluir que ſe a acçaõ reciproca dos Planetas naõ lhes alteraſſe hum pouco os movimentos, deveriaõ ſer os apſides, os planos, e os nodos das ditas orbitas abſolutamente invariaveis. Sómente os Aſtronomos podiaõ verificar eſte facto; e elles ſe empenháraõ niſſo com tanto cuidado, e diligencia, que naõ reſta duvida alguma ſobre a alteraçaõ das orbitas planetarias.

Newton prediſſe a Flamſtead, que ſendo Jupiter de todos os Planetas o que tinha mais maſſa, e conſeguintemente mais força attractiva, havia de perturbar ſenſivelmente no tempo da ſua conjunçaõ o movimento dos outros corpos celeſtes, principalmente o de Saturno, e dos ſeus ſatellites. Obſerváraõ-ſe pois neſta epoca com maior cuidado do que jamais ſe tinha feito; e a profecia de Newton ſe comprio com eſpanto, porque Jupiter produzio no tempo periodico de Saturno huma alteraçaõ de doze dias.

351 A força attractiva da terra, eſta meſma força que junto á ſuperficie della nós chamamos gravidade, he a que retem a Lua na ſua orbita. A Lua faz a ſua revoluçaõ periodica em $27^d\ 7^h\ 43'$; a ſua diſtancia media he de 60 ſemidiametros tereſtres; e ſuppondo a ſua orbita circular, he facil de moſtrar, que o ſeno verſo do arco que ella deſcreve em hum minuto he de 15 pés e $\frac{1}{12}$. Eſte he pois o eſpaço, que ella andaria para a terra em hum minuto, ſe a gravidade ſó obraſſe ſobre ella. E porque os eſpaços corridos em virtude das forças acceleratrizes ſaõ como os quadrados dos tempos, ſegue-ſe que a força central que obra ſobre a Lua deve fazer-lhe correr no primeiro ſegundo da queda $\frac{1}{3600}$ de 15 pés e $\frac{1}{12}$.

E como eſta força deve ſempre actuar na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias, eſtá claro que em huma diſtancia 60 vezes menor, iſto he, junto á ſuperficie da terra, deveria fazer andar á Lua 15 pés e $\frac{1}{12}$ em hum ſegundo

gundo. Tal he realmente o espaço, que a gravidade faz correr aos corpos graves junto á superficie da terra. Logo a força central da Lua naõ he outra cousa, senaõ a mesma gravidade que experimentamos no descenso dos corpos graves, modificada sómente na rasaõ inversa do quadrado da distancia.

352 O mesmo principio retém nas suas respectivas orbitas a todos os *Satellites*. A força attractiva de Saturno he a que faz andar á roda delle sinco Luas; e a força attractiva de Jupiter, quatro. Todos estes Planetas *secundarios* descrevem orbitas ellipticas ao redor do seu Planeta principal. Os seus movimentos saõ muito regulares, e os tempos periodicos exactamente proporcionais ás raizes quadradas dos cubos das suas distancias ao centro do Planeta principal. Observaõ-se, em huma palavra, em ordem aos seus respectivos centros de forças, sujeitos ás mesmas leis que guardaõ os Planetas principais nas suas revoluções ao redor do Sol.

Mas se os Satellites de Saturno, de Jupiter, e da Terra, provaõ sensivelmente que estes tres Planetas saõ dotados de huma força attractiva, naõ poderemos por analogia admittir huma força semelhante em Marte, Venus, e Mercurio? E naõ será natural o pensar, que ella obra tambem na rasaõ directa das massas, e inversa dos quadrados das distancias? A mesma Lua, e os outros Satellites, naõ saõ por ventura corpos semelhantes á terra? Porque rasaõ pois lhes negaremos esta força commua a todos os outros, e talvez inseparavel da materia, por huma lei primitiva do Creador?

353 Ao menos, naõ ha cousa que mais verosimil pareça aos Physicos, do que a acçaõ da Lua sobre a Terra. As marés do Oceano offerecem huma prova bem palpavel, sendo certo que a desigual gravitaçaõ das aguas para a Lua produz este phenomeno; porque o Sol coopera nisso muito pouco. A sua força he com tudo realmente muito maior; mas como elle está perto de 400 vezes mais distante de nós do que a Lua, e como a terra he muito pequena em comparaçaõ delle, a sua acçaõ sobre as differentes partes do globo terrestre he sensivelmente a mesma. Por outra parte actûa por direcções quasi parallelas, e isso tambem concorre para que os seus effeitos sejaõ menos sensiveis sobre as aguas do mar.

A

A Lua, pelo contrario, eſtando muito vezinha da terra em comparaçaõ do Sol, obra por linhas muito mais divergentes; e como a ſua acçaõ ſobre as differentes partes do globo he differente, deſtas duas cauſas reunidas deve reſultar huma commoçaõ geral nos corpos, que della forem ſuſceptiveis. As aguas do Oceano immediatamente ſujeitas á ſua attracçaõ devem pois elevar-ſe, e as aguas collaterais abaixar-ſe. Mas como a revoluçaõ diurna da terra muda continuamente os aſpectos, bem ſe vê que as aguas ja elevadas naõ podem conſervar-ſe por muito tempo acima do ſeu livel ordinario; antes devem deſcer abaixo delle, para depois ſe tornarem a elevar, propagando de humas a outras até ás praias eſtas enchentes, e vaſantes.

Agora paſſamos a moſtrar os effeitos deſta gravitaçaõ reciproca dos corpos celeſtes, e até que ponto faz os ſeus movimentos mais complicados, e irregulares na apparencia. Mas antes diſſo advertiremos, que ſe os Geometras do noſſo ſeculo fizeraõ deſta indagaçaõ o objecto principal dos ſeus trabalhos, he porque conhecêraõ a grande utilidade que delle reſultava, para aperfeiçoar a theorica da Lua, da qual depende a determinaçaõ das Longitudes no mar. Tambem advertiremos, que naõ podendo ſemelhante materia ſer tratada completamente em huma obra como eſta, o noſſo intento he ſómente o de moſtrar o caminho aos leitores intereſſados neſte conhecimento.

354 Probl. I. *Sendo dous corpos $M$, $M'$ (Fig. 147) lançados por hum meio naõ reſiſtente com quaiſquer velocidades, e attrahindo-ſe reciprocamente na raſaõ das ſuas maſſas, determinar o ſeu movimento.*

Referindo as duas trajectorias deſtes moveis ao meſmo eixo $AP$, ſeja $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x'$, $P'M' = y'$, $MM' = z$. Repreſentando pois a acçaõ do corpo $M'$ ſobre o corpo $M$ por $MN = P$, teremos por expreſſaõ da acçaõ do corpo $M$ ſobre o corpo $M'$ a recta $M'N' = \frac{M}{M'}P$, porque elles actûaõ na raſaõ directa das ſuas maſſas. Reſolvamos agora as duas forças $MN$, $M'N'$, cada huma em outras duas, das quais huma ſeja parallela, e a outra perpendicular a $AP$. As parallelas ſeraõ $MQ = \frac{P(x'-x)}{z}$, e $M'Q' = \frac{M}{M'} \cdot \frac{P(x'-x)}{z}$; e as perpendiculares seraõ $MO = \frac{P(y'-y)}{z}$, e $M'O' = \frac{M}{M'}$. $\frac{P(y'-y)}{z}$. Donde resultaráõ as quatro equações seguintes,

$$\frac{P}{z}(x'-x)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{M}{M'}\cdot\frac{P}{z}(x'-x)\,dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{P}{z}(y'-y)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{M}{M'}\cdot\frac{P}{z}(y'-y)\,dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Se multiplicarmos a primeira por $M$, e a segunda por $M'$, e diminuirmos o segundo producto do primeiro, teremos $M\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + M'\,d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$, cujo integral he $M.\frac{dx}{dt} + M'.\frac{dx'}{dt} = C$. Tratando da mesma maneira a terceira, e quarta equaçaõ, teremos $M.\frac{dy}{dt} + M'.\frac{dy'}{dt} = C'$. Porém $M.\frac{dx}{dt} + M'.\frac{dx'}{dt}$ he a quantidade de movimento do centro de gravidade das duas massas parallelamente a $AP$, e $M.\frac{dy}{dt} + M'.\frac{dy'}{dt}$ he a quantidade de movimento do mesmo centro perpendicularmente a $AP$. Logo, como temos achado constantes estas quantidades, está claro que o centro de gravidade $G$, ou para fallarmos mais propriamente, que o *centro de massas* dos corpos $M$, $M'$ se move uniformemente por huma linha recta $HG$. Donde se vê, que a posiçaõ desta linha, e a velocidade do centro de gravidade, podem determinar-se pelas velocidades da projecçaõ, que receberáõ os corpos $M$, $M'$, e pela situaçaõ delles no principio do movimento.

355 Isto posto, como o centro de gravidade descreve huma linha recta, podemos tomalla para eixo das abscissas (Fig. 148.); e entaõ, sendo a ordenada $y'$, ou $P'M'$ nega-

negativa, o movimento do corpo $M$ se determinará por estas duas equações

$$\frac{P}{z}(x' - x)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{P}{z}(y' + y)\,dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Mas para determinarmos o movimento do mesmo corpo em ordem ao ponto movel $G$, supporemos primeiramente $MG = Z$, e $PG = X$; depois deduziremos o valor de $AG = x + X$, e teremos a equaçaõ $d\left(\frac{dAG}{dt}\right) = d\left(\frac{dx}{dt}\right) + d\left(\frac{dX}{dt}\right) = 0$, porque a velocidade do centro de gravidade $\frac{dAG}{dt}$ he constante. Logo $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$; e substituindo estes valores, teremos para exprimir o movimento do corpo $M$ a respeito do ponto movel $G$ as duas equações seguintes

$$\frac{PXdt}{Z} = -d\left(\frac{dX}{dt}\right), \text{ e } \frac{Pydt}{Z} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right);$$

as quais saõ absolutamente as mesmas, que achariamos, se o corpo $M$ fosse attrahido para o ponto $G$ considerado como fixo, por huma força central $P$, funçaõ de $MM'$, e conseguintemente da distancia $Z$, por quanto he $MM' = \frac{M + M'}{M'}Z$. Isto mesmo he por outra parte evidente, reflectindo-se que o corpo $M'$ obra sobre o outro $M$ pela direcçaõ $MM'$, que passa sempre pelo ponto $G$.

356 Donde se segue, que o movimento de dous corpos, que se attrahem mutuamente com certas forças, naõ he differente do que haveriaõ de ter, se elles fossem attrahidos para o seu centro commum de gravidade pelas mesmas forças, em quanto o mesmo centro se movesse uniformemente em linha recta.

Segue-se tambem, que as forças tendentes ao centro de gravidade sempre devem ser alguma funçaõ das distancias ao mesmo centro; porque saõ huma funçaõ de $MM'$, que tem huma rasaõ constante com $MG$.

Póde

Póde formar-se huma idéa deste movimento, imaginando dous pontos quaisquer sobre dous raios de huma roda movel. Cada hum delles descreverá hum circulo ao redor do centro da roda, em quanto o mesmo centro se move por huma linha recta.

357 Em geral (Fig. 149.): Os dous corpos $M$, $M'$ descrevem ao redor do centro $G$ curvas semelhantes, porque $GM'$ he sempre para $GM$ na rasaõ constante de $M$ para $M'$, e por conseguinte todas as dimensões homólogas destas curvas estaraõ na mesma rasaõ.

Sendo dada a lei, pela qual se attrahem estes dous corpos, conheceremos pois a força tendente ao centro $G$, e conseguintemente determinaremos as trajectorias $MQN$, $M'Q'N'$, que elles descreveriaõ ao redor do ponto $G$, se elle estivesse fixo. Logo teremos, no fim de qualquer tempo $t$, o lugar de cada hum delles na sua trajectoria.

Sejaõ, por exemplo, $M$ e $M'$ os lugares dos dous moveis. Se o centro de gravidade se adiantou no mesmo tempo pelo espaço $Gg$, conduziremos as linhas $Mm$, $M'm'$ parallelas, e iguais a $Gg$, e teremos os pontos $m$, $m'$ por lugares absolutos dos dous moveis. Suppondo pois, que elles descrevem circulos ao redor do centro de gravidade, o seu movimento absoluto se fará por cycloides *allongadas*, ou *encurtadas*, conforme for a velocidade de translaçaõ do centro de gravidade maior, ou menor que a velocidade de cada hum dos moveis na sua orbita respectiva.

358 Se os dous corpos $M$, $M'$ (Fig. 147.), além da sua attracçaõ reciproca, fossem sollicitados por quaisquer forças, estas se reduziriaõ a duas $X$ e $Y$ pelas direcções $MQ$ e $MO$, pelo que respeita ao corpo $M$; e a outras duas $X'$ e $Y'$ pelas direcções $M'Q'$ e $M'O'$, pelo que respeita ao corpo $M'$. Entaõ as quatro equações do movimento destes dous corpos seriaõ desta maneira,

$$X\,dt + \frac{P}{z}(x'-x)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$X'\,dt - \frac{M}{M'}\cdot\frac{P}{z}(x'-x)\,dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$Y\,dt + \frac{P}{z}(y'-y)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Y'

$$Y' d t - \frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z} (y' - y) d t = d \left( \frac{d y'}{d t} \right).$$

Multiplicando pois, como acima, a primeira por $M$, a ſegunda por $M'$, e ajuntando os productos; e fazendo o meſmo com a terceira, e quarta; teremos por reſultado as duas equaçoens ſeguintes,

$$(MX + M'X') d t = M d \left( \frac{d x}{d t} \right) + M' d \left( \frac{d x'}{d t} \right)$$

$$(MY + M'Y') d t = M d \left( \frac{d y}{d t} \right) + M' d \left( \frac{d y'}{d t} \right).$$

Logo a força acceleratriz do centro de gravidade na direcçaõ de $AP'$ ſerá neſte caſo $\frac{MX + M'X'}{M + M'}$, e a força que accelera o ſeu movimento perpendicular a $AP$, ou que tende a apartallo deſta linha, ſerá repreſentada por $\frac{MY + M'Y'}{M + M'}$. Donde concluiremos, que o centro de gravidade ſe moverá da meſma maneira, como ſe lhe foſſem immediatamente applicadas as quantidades de movimento, que recebem os dous corpos, em virtude das forças acceleratrizes (n. 155.).

Mas como naõ ſe conhece a relaçaõ entre $y'$ e $y$, nem entre $x'$ e $x$, naõ poderá em geral determinar-ſe o movimento do centro de gravidade, ſenaõ no caſo de ſerem as potencias conſtantes. Entaõ deſcreverá huma parabola, e os dous corpos ſe moveráõ ao redor delle, como ſe eſtiveſſe fixo.

359 Probl. II. *Sendo tres corpos $M$, $M'$, $M''$ attrahidos mutuamente na raſaõ directa das maſſas, e na inverſa de qualquer potencia das diſtancias, determinar os ſeus movimentos* (Fig. 150.).

Suppondo que os tres corpos eſtaõ reſpectivamente em $M$, $M'$, $M''$, e referindo as trajectorias ao eixo $AP$, ſeja $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x'$, $P'M' = y'$, $AP'' = x''$, $P''M'' = y''$, $MM' = z$, $M'M'' = z'$, $MM'' = z''$, e o expoente da potencia das diſtancias $= n$. Como pois cada corpo actûa ſobre os outros dous proporcionalmente á ſua maſſa dividida pela potencia $n$ da diſtancia, multiplicaremos eſta quantidade por huma conſtante $a$, para termos

o va-

o valor absoluto de cada força acceleratriz. Assim o corpo $M$ attrahirá o corpo $M'$ com huma força $M'N' = \frac{aM}{z^n}$; e o corpo $M''$, com huma força $M''T'' = \frac{aM}{z''^n}$.
Do mesmo modo teremos as forças $MN = \frac{aM'}{z^n}$, e $M''N'' = \frac{aM'}{z'^n}$, com as quais o corpo $M'$ attrahe os corpos $M, M''$; e finalmente as forças $MT = \frac{aM''}{z''^n}$, e $M'T' = \frac{aM''}{z'^n}$, com as quais o corpo $M''$ sollicita os outros dous.

Agora resolvendo cada huma destas forças em outras duas, huma parallela, e outra perpendicular a $AP$, acharemos os valores seguintes, que exprimem separadamente as que sollicitaõ a cada hum dos tres corpos. Temos pois

| Para $M$ | Para $M'$ | Para $M''$ |
|---|---|---|
| $MN = \frac{aM'}{z^n}$ | $M'N' = \frac{aM}{z^n}$ | $M''N'' = \frac{aM'}{z'^n}$ |
| $MO = \frac{aM'}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z}$ | $M'O' = \frac{aM}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z}$ | $M''O'' = \frac{aM'}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'}$ |
| $MQ = \frac{aM'}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z}$ | $M'Q' = \frac{aM}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z}$ | $M''Q'' = \frac{aM'}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'}$ |
| $MT = \frac{aM''}{z''^n}$ | $M'T' = \frac{aM''}{z'^n}$ | $M''T'' = \frac{aM}{z''^n}$ |
| $MV = \frac{aM''}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''}$ | $M'V' = \frac{aM''}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'}$ | $M''V'' = \frac{aM}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''}$ |
| $MS = \frac{aM''}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''}$ | $M'S' = \frac{aM''}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'}$ | $M''S'' = \frac{aM}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''}$ |

360 Isto posto, sendo $MQ + MS$ a força do corpo $M$ parallela a $AP$, teremos $(MQ + MS)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.
Do mesmo modo teremos $(MV + MO)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$,

(M'

$(M'S' - M'Q')\,dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$, $(M'V' - M'O')\,dt = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, $(M''S'' + M''Q'')\,dt = d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$, e $(M''V'' + M''O'')\,dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$. E substituindo os valores analyticos, teremos as seis equaçoens seguintes,

$$\frac{aM'dt}{z^n}\cdot\frac{x'-x}{z}+\frac{aM''dt}{z''^n}\cdot\frac{x''-x}{z''}=d\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\frac{aM''dt}{z'^n}\cdot\frac{x''-x'}{z'}-\frac{aM\,dt}{z^n}\cdot\frac{x'-x}{z}=d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'\,dt}{z'^n}\cdot\frac{x''-x'}{z'}+\frac{aM\,dt}{z''^n}\cdot\frac{x''-x}{z''}=-d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z^n}\cdot\frac{y'-y}{z}+\frac{aM''dt}{z''^n}\cdot\frac{y''-y}{z''}=d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{aM''dt}{z'^n}\cdot\frac{y''-y'}{z'}-\frac{aM\,dt}{z^n}\cdot\frac{y'-y}{z}=d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z'^n}\cdot\frac{y''-y'}{z'}+\frac{aM\,dt}{z''}\cdot\frac{y''-y}{z''}=-d\left(\frac{dy''}{dt}\right);$$

361 Se multiplicarmos a primeira por $M$, a segunda por $M'$, e a terceira por $-M''$, e somarmos os productos; e se tratarmos da mesma maneira as tres ultimas equaçoens, teremos

$$M\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)+M'd\left(\frac{dx'}{dt}\right)+M''d\left(\frac{dx''}{dt}\right)=0$$

$$M\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)+M'd\left(\frac{dy'}{dt}\right)+M''d\left(\frac{dy''}{dt}\right)=0;$$

cujos integrais

$$M\frac{dx}{dt}+M'\frac{dx'}{dt}+M''\frac{dx''}{dt}=C$$

$$M\frac{dy}{dt}+M'\frac{dy'}{dt}+M''\frac{dy''}{dt}=C'$$

mostraõ

moſtraõ tambem, que o movimento do centro de gravidade he uniforme, e rectilineo. Logo em geral, *qualquer que ſeja o numero dos corpos que ſe attrahem mutuamente, as ſuas acçoens reciprocas naõ influiráõ nada ſobre o movimento do ſeu centro commum de gravidade, e eſte centro terá ſempre a meſma velocidade e direcçaõ, que tinha no principio do movimento.*

362 Donde ſe ſegue, que o centro de maſſas do ſyſtema planetario ou eſtá em quietaçaõ, ou ſe move uniformemente, e em linha recta. Pouco importa ſaber, qual deſtes dous caſos he o que tem lugar no eſtado actual das couſas. Os movimentos relativos ſeraõ os meſmos em qualquer delles.

Devem pois todos os planetas, e o meſmo Sol, fazer as ſuas revoluçoens ao redor deſte centro. Mas a maſſa do Sol he taõ grande em comparaçaõ da que tem os planetas, que quando todos elles ſe achaſſem em conjunçaõ, o centro de maſſas de todo o ſyſtema naõ eſtaria diſtante do centro do Sol mais do que hum diametro deſte aſtro. He pois o movimento do Sol, ao redor do centro do mundo planetario, bem pouca couſa; mas ſem embargo, he neceſſario que delle ſe faça conta nas indagaçoens mais delicadas.

363 Se multiplicarmos a primeira das ſeis equaçoens geraes acima achadas por $M\frac{dx}{dt}$, a ſegunda por $M'\frac{dx'}{dt}$, e a terceira por $-M''\frac{dx''}{dt}$, e ajuntarmos os productos, a ſoma dará

$$-\frac{aMM'}{z^{n+1}}(x'-x)(dx'-dx)-\frac{aMM''}{z''^{n+1}}(x''-x)(dx''-dx)-\frac{aM'M''}{z'^{n+1}}(x''-x')(dx''-dx')=$$

$$M\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)+M'\frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right)+M''\frac{dx''}{dt}d\left(\frac{dx''}{dt}\right);$$

e ſe fizermos as meſmas operaçoens nas tres ultimas equaçoens, o reſultado nos dará tambem

$$-\frac{aMM'}{z^{n+1}}(y'-y)(dy'-dy)-\frac{aMM''}{z''^{n+1}}(y''-y)(dy''-dy)$$

$$-dy)-\frac{aM'M''}{z'^{n+1}}(y''-y')(dy''-dy')=$$

$$M\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)+M'\frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right)+M''\frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Ajuntemos estas duas equaçoens. E para abbreviar o calculo, reparemos primeiro que sendo $u$, $u'$, $u''$ as velocidades dos corpos $M$, $M'$ $M''$, teremos $udu = \frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $u'du' = \frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, e $u''du'' = \frac{dx''}{dt}d\left(\frac{dx''}{dt}\right) + \frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$. Notemos tambem, que $zz = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$, $z''z'' = (x''-x)^2 + (y''-y)^2$, e $z'z' = (x''-x')^2 + (y''-y')^2$; e por conseguinte, $zdz = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy)$, $z''dz'' = (x''-x)(dx''-dx) + (y''-y)(dy''-dy)$, e $z'dz' = (x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy')$. Isto posto, acharemos que a soma das nossas duas equaçoes se reduz á equaçaõ seguinte

$$Mudu + M'u'du' + M''u''du'' = -\frac{aMM'dz}{z^n} - \frac{aMM''dz''}{z''^n} - \frac{aM'M''dz'}{z'^n},$$

cujo integral

$$Mu^2 + M'u'^2 + M''u''^2 + \frac{2aMM'z^{1-n}}{1-n} + \frac{2aMM''z''^{1-n}}{1-n} + \frac{2aM'M''z'^{1-n}}{1-n} = C$$

contém o principio da *Conservaçaõ das forças vivas*, de que os Geometras modernos fazem grande uso. Veja-se a Dynamica de *M*. d'Alembert.

O integral, que acabamos de achar, e os outros dous que daõ o movimento do centro de gravidade, saõ os tres unicos que se tem podido deduzir geralmente das seis equaçoes do Problema. Seria necessario, que os limites

mites do calculo integral estivessem mais adiantados do que estaõ, para elle se poder resolver completamente; mas ao menos está apontado o caminho.

Este Problema tem-se feito muito famoso neste seculo pelos trabalhos dos Geometras, que se occupáraõ na soluçaõ delle. He geralmente conhecido pelo nome de *Problema dos tres corpos*; e como delle depende a Theorica da Lua, espera-se que novos esforços produziráõ novos descobrimentos sobre este objecto.

364 Para se applicarem as equações precedentes ao movimento da Lua, da Terra, e do Sol, seria necessario pór $n = 2$, porque a força central he na rasaõ inversa dos quadrados das distancias. Tambem seria necessario introduzir no calculo outras tres equações, porque as primeiras naõ pódem dar com exactidaõ o movimento da Lua; e a rasaõ he, porque a sua orbita naõ está no plano da ecliptica, mas tem com ella huma inclinaçaõ de perto de 5 gráos, e todas as vezes que o movimento se faz assim em planos differentes ha tres equações de mais pelas tres novas coordenadas que se devem introduzir. Mas o gráo de difficuldade pelo que respeita ás integrações, he o mesmo; somente o calculo se faz mais comprido.

365 Ha com tudo hum caso, em que póde determinar-se exactamente o movimento de muitos corpos, que se attrahem mutuamente; e he quando se suppozerem as forças proporcionais ás distancias. Porque entaõ descreveráõ trajectorias ellipticas ao redor do centro commum de gravidade, em quanto este centro se move uniformemente, e em linha recta. Eisaqui como isto se póde mostrar, sem recorrer ao calculo antecedente.

Sejaõ $M, M', M''$ os tres corpos (Fig. 151.), cujo movimento se ha de determinar. Para saber, qual deve ser o do corpo $M$, por exemplo, attrahido pelos outros dous $M', M''$, representemos primeiramente por $MN = aM' . M'M$ a acçaõ do corpo $M'$, e por $MN' = aM'' . M''M$ a do corpo $M''$. Depois, imaginando huma linha recta qualquer $m'Mm''$, e huma perpendicular a ella $MQ$, resolveremos cada huma das forças $MN, MN'$ em outras duas pelas direcções $Mm', MQ$. Assim teremos $MO = aM' . Mm'$, $MO' = aM'' . Mm''$, $MP = aM' . M'm'$, $MP' = aM'' . M''m''$; e sendo a resultante representada por $MS$, teremos $MT = aM'.Mm' - aM''.Mm''$, e $MQ = aM''.M''m'' + aM'.M'm'$.

Porém, sendo o centro de gravidade em $G$, temos $Mg = \frac{M'.Mm' - M''.Mm''}{M + M' + M''}$, e $Gg = \frac{M''.M''m'' + M'.M'm'}{M + M' + M''}$.

Logo $\frac{Gg}{Mg} = \frac{ST}{TM}$; e conseguintemente está o ponto $G$ na direcçaõ da resultante $MS$. Donde se vê, que as acções dos deus corpos $M'$, $M''$ sollicitaõ o corpo $M$ para o centro de gravidade $G$ com a força $MS = \frac{MG.MT}{Mg} = a(M + M' + M'')MG$. Mover-se-haõ pois os tres corpos, como se naõ tendo força alguma de attracçaõ entre si, fossem attrahidos para o centro commum de gravidade, na rasaõ das suas distancias ao dito centro, por huma massa central igual á soma de todos tres. Logo descreveráõ ellipses ao redor deste centro, e os seus tempos periodicos seraõ iguaes; o que tem lugar geralmente, qualquer que seja o numero dos corpos.

366 O mesmo resultado se póde deduzir das equações geraes (Fig. 152.). Porque tomando por linha dos $x$ o caminho do centro de gravidade $G$, e suppondo a velocidade delle $= k$, a abscissa $GP = X = kt - x$, teremos $M'(x' - x) + M''(x'' - x) = M'.PP' + M''.PP'' = (M + M' + M'')X$, $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$, e $M'(y' - y) + M''(y'' - y) = -(M + M' + M'')y$.

Logo a primeira, e quarta equaçaõ daraõ para o movimento do corpo $M$ as duas equações seguintes

$$a(M + M' + M'')X\,dt = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

$$a(M + M' + M'')y\,dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Porém estas equações saõ as mesmas, que achariamos se o corpo fosse attrahido para o ponto $G$, na rasaõ directa das distancias, pela massa $M + M' + M''$. Logo está demonstrado, que no caso de muitos corpos se attrahirem na rasaõ directa das suas distancias, todos descreveráõ orbitas ellipticas ao redor do centro commum de gravi-

gravidade, movendo-se este uniformemente por huma trajectoria rectilinea.

## ARTIGO II.

### *Do movimento de hum ponto livre, sollicitado por quaisquer potencias, em hum meio resistente.*

567 SEndo a inercia huma propriedade geral da materia, naõ póde hum corpo dar movimento a outro, sem lhe communicar huma parte do seu. E como esta communicaçaõ se naõ faz jámais, sem haver huma perda real da parte do movel, está claro, que experimentando elle perdas reiteradas a cada instante, bem de pressa se ha de extinguir toda a sua velocidade.

Isto he o que vemos succeder continuamente a todos os moveis, que nos rodeiaõ. Porque o fluido, no qual se movem, naõ póde ceder á impressaõ delles, nem sahir do seu lugar para lhes abrir passagem, sem receber hum movimento que o obrigue a isso. Este fluido, unicamente pela sua inercia, resiste pois á impulsaõ dos moveis, com tanta efficacia, como se tivesse hum movimento opposto ao delles, e igual á sua propria inercia: e dahi vem, que quanto he maior a densidade do fluido, tanto maior he a resistencia.

Sejá $A$ huma superficie plana exposta á impulsaõ directa de hum fluido, ou movida ella mesma pelo fluido, por huma direcçaõ perpendicular, e com huma velocidade $= u$. No instante $dt$ deverá pois correr o espaço $= u\,dt$, e conseguintemente terá deslocado hum volume de fluido $= A u\,dt$. Seja a densidade do fluido $= D$; e teremos $A D u\,dt$ por expressaõ da massa, que tem sido posta em movimento, no instante $dt$.

Quando esta massa tiver recebido da superficie movel a velocidade $u$, a sua quantidade de movimento será $A D u^2 dt$; e como este effeito da impulsaõ produz no fluido huma resistencia igual ao movimento recebido, teremos $M\,du = A D u^2 dt$, chamando $M$ a massa do corpo

que

que expõem a ſuperficie $A$ á percuſſaõ directa do fluido, e entendendo por $du$ a diminuiçaõ inſtantanea da velocidade, cauſada pela reſiſtencia do fluido.

368 Logo póde a reſiſtencia de qualquer fluido conſiderar-ſe, como huma força retardatriz $\frac{A D u^2}{M}$, ſempre oppoſta directamente á impulſaõ do movel; e eſta força, como ſe vê, he em raſaõ composta da ſuperficie do movel, da denſidade do fluido, e do quadrado da velocidade. De ſorte que, ſendo todas as mais couſas iguais, *hum corpo movido no meſmo fluido experimenta huma reſiſtencia proporcional ao quadrado da velocidade.*

Tal he, em geral, a medida da reſiſtencia, que a inercia dos fluidos oppoem ao movimento de qualquer corpo. Mas eſta cauſa ſerá por ventura a unica, que retarda o movimento dos corpos? parece que naõ. A experiencia moſtra, que a adheſaõ reciproca das partes dos fluidos produz outra eſpecie de reſiſtencia, á qual ſe deve attender. Mas como eſta tenacidade, mais ou menos forte conforme a diverſa natureza dos fluidos, he ſenſivelmente a meſma em inſtantes iguais, quando a reſiſtencia que provem da inercia he proporcional ao quadrado da velocidade, o effeito da primeira he pouco notavel nos movimentos muito rapidos. O contrario ſuccede nos movimentos vagaroſos, e entaõ naõ ſe póde deixar de attender ao referido effeito.

369 Se a ſuperficie $A$ naõ receber directamente a corrente do fluido, reſolver-ſe-ha a velocidade obliqua $u$ em outras duas, que ſeraõ repreſentadas por $u \cos a$, e $u \sen a$, chamando $a$ o angulo formado pela ſuperficie, e pela corrente do fluido. A primeira ſerá pela direcçaõ da ſuperficie, e naõ produzirá reſiſtencia alguma; a ſegunda ſerá perpendicular á meſma ſuperficie, e della reſultará toda a reſiſtencia. Pelo que ſubſtituindo $u \sen a$ em lugar de $u$ na formula $D A u^2$, teremos $D A \cdot u^2 \sen a^2$ por expreſſaõ da reſiſtencia no caſo da percuſſaõ obliqua. Mas he neceſſario ter ſempre na lembrança, que eſta força ſe exercita perpendicularmente á ſuperficie movel $A$. Donde ſe ſegue, que *ſendo todas as mais couſas iguais, a reſiſtencia de hum meſmo fluido contra huma ſuperficie plana, e obliqua he proporcional ao quadrado do ſeno do angulo de incidencia.*

370 Neſte

370 Neſte ultimo caſo, he evidente que $A$ *ſen* $a^2$ exprime a ſuperficie, que, ſendo expoſta ao impulſo direćto do fluido, experimentaria a meſma reſiſtencia, que experimenta a ſuperficie $A$ movida obliquamente. Donde ſe vê geralmente, que para determinar a reſiſtencia que hum fluido deve oppôr ao movimento de qualquer ſuperficie, baſta conhecer a ſuperficie plana, que por hum impulſo direćto experimentaria a meſma reſiſtencia. Tambem advertiremos, que para naõ embaraçar inutilmente o calculo com o factor $D u^2$, nos exemplos ſeguintes conſideraremos eſtas ſuperficies direćtamente expoſtas ao fluido, como as medidas naturais da reſiſtencia, que elle produz.

371 Supponhamos pois hum priſma movido em qualquer fluido parallelamente ás ſuas baſes (Fig. 153.). Baſtará conſiderar huma ſecçaõ $AMHBK$, e multiplicar a reſiſtencia linear, que ella padece, pelo comprimento do ſolido, para determinar a ſuperficie, que ſendo expoſta ao impulſo direćto experimentaria a meſma reſiſtencia que o ſolido.

Seja pois $BA$ a direcçaõ do movimento, $Mm$ o elemento da curva, e $MV$ huma rećta parallela a $BA$; ſerá $mMr$ o angulo de incidencia do fluido ſobre $Mm$, e teremos $Mm \,.\, \textit{ſen}\; mMV^2$ por expreſſaõ da reſiſtencia, que eſte elemento experimenta ſegundo a perpendicular $MN$. Iſto poſto, reportemos os pontos da curva ao eixo $AB$, e ſupponhamos $AP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$. Será $Mm \,.$ $\textit{ſen}\; mMV^2 = ds \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$; e reſolvendo eſta força em outras duas $NO$ e $OM$, huma parallela, e a outra perpendicular ao eixo $AP$, teremos por meio dos triangulos ſemelhantes $NOM$, $Mmr$, a força $NO = dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$, e $MO =$ $dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$. Logo a força total pela direcçaõ do eixo $AB$ ſerá repreſentada por $\int \frac{dy^3}{ds^2}$; e a força perpendicular ao meſmo eixo, por $\int \frac{dx\,dy^2}{ds^2}$:

372 Eſtes integrais devem tomar-ſe em toda a parte

H

*H M K* terminada nos pontos *H* e *K*, que saõ os mais distantes do eixo *A B*; porque a outra parte *H B K* naõ padece resistencia alguma da parte do fluido. Se a curva for symmetrica de ambas as partes do eixo *A B*, a força perpendicular ao mesmo eixo será destruida, e sómente restará a força parallela $\int \frac{dy^3}{ds^2}$, que será o dobro da que se exercita em huma das partes *A H*.

373 Para determinar pois a direcçaõ, e o valor de toda a força que resulta da acçaõ, ou reacçaõ do fluido sobre todas as partes da secçaõ proposta, tomaremos a soma dos momentos das forças *M F* em ordem ao eixo *A P*, e dividindo-a pela soma das forças, teremos a distancia *G E* da sua resultante ao eixo. Do mesmo modo, tomando a soma dos momentos das forças *O M* em ordem ao ponto *A*, e dividindo-a pela soma das mesmas forças, teremos a distancia *A E* da sua resultante ao dito ponto. Será pois

$$AE = \frac{\int x\,dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}{\int dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}, \text{ e } GE = \frac{\int y\,dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}{\int dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}.$$

Depois que assim for determinado o ponto *G*, tomaremos $GI = \int dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$, e $GL = \int dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$; e acabando o rectangulo, a diagonal *G T* dará o valor, e a direcçaõ da resistencia total que padece a secçaõ *H M K*.

374 Exemplo. Sendo a secçaõ do solido proposto hum circulo, cujo diametro $AB = 2a$ (Fig. 153. *), pergunta-se qual deve ser a resistencia total do fluido parallelamente a *A B*?

Neste caso, $yy = 2ax - xx$, $ds^2 = \frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2}$, e $\int dy \frac{dy^2}{ds^2} = \int \left( dy - \frac{y^2 dy}{a^2} \right) = y - \frac{y^3}{3a^2}$. Tomando este integral de *A* até *H*, teremos $\frac{2}{3} a$, cujo dobro $\frac{4}{3} a$

expri-

exprime a resistencia que experimenta o semicirculo $HAK$ na direcçaõ do eixo $AB$; e a resistencia total se reduz a esta só, porque a outra he nenhuma. Acharemos pois a superficie, que sendo exposta ao impulso directo do fluido experimentaria a mesma resistencia que a superficie convexa de hum cylindro, tomando os dous terços da sua secçaõ rectangular que passa pelo eixo. E porque $\frac{4}{3}a$ exprime a resistencia, que o fluido oppoem ao semicirculo $HAK$, e $2a$ a que o diametro $HK$ padeceria da parte do mesmo fluido, concluiremos que a primeira naõ he mais que dous terços da segunda.

375 Consideremos agora a resistencia, que deve experimentar hum solido de revoluçaõ, movido pela direcçaõ do seu eixo (Fig. 154.). Seja $Mm$ hum elemento da curva, o qual pela revoluçaõ descreve huma pyramide conica truncada, da qual se tomará a parte comprehendida entre dous apothemas infinitamente vesinhos. Esta parte, que chamaremos $\omega$, sendo plana, experimentará huma resistencia $= \omega . \frac{dy^2}{ds^2}$, porque $\frac{dy}{ds}$ he o seno da incidencia.

Como esta resistencia se exercita perpendicularmente ao elemento $\omega$, resolver-se-ha em outras duas, huma parallela, e a outra perpendicular ao eixo. A primeira terá por valor $\omega . \frac{dy}{ds} . \frac{dy^2}{ds^2}$; e porque o angulo de incidencia he o mesmo em todos os elementos $\omega$, e a soma destes elementos, ou a superficie da pyramide conica truncada he $2cyds$, teremos $\frac{2cydy^3}{ds^2}$ por expressaõ da resistencia opposta a esta superficie; e conseguintemente, será $2c\int\frac{ydy^3}{ds^2}$ a resistencia, que deve experimentar o solido inteiro na direcçaõ do eixo.

Exemplo. Se o solido for huma esfera, cujo vertice seja $A$ (Fig. 153.*), teremos $yy = 2ax - xx$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{a^2 - y^2}$, $\frac{ydy^3}{ds^2} = ydy - \frac{y^3dy}{aa}$. O integral

tegral he $\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4a^2}$; que tomando $y = a$ se reduz a $\frac{1}{4}a^2$. Logo a resistencia da esfera inteira será $2c \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{ca^2}{2}$. Donde se mostra, que *a esfera experimenta ametade da resistencia, que experimentaria hum dos seus circulos maximos.*

376 Para conhecer a curvatura, que deve tomar no equilibrio huma corda, ou huma vela preza a dous pontos fixos, e estendida pela força do vento (Fig. 155.), notaremos 1°, que a acçaõ deste fluido sobre o elemento $Mm$ he proporcional ao mesmo elemento, e ao quadrado do seno de incidencia. 2°, que sendo a direcçaõ do vento parallela ás ordenadas $PM$, esta acçaõ deve ser representada por

$$aMm \,.\, \text{sen } PMm^2 = ads \,.\, \frac{dx^2}{ds^2}.$$

Isto posto, a equaçaõ geral de huma corda atada a dous pontos fixos, e sollicitada por duas quaisquer potencias $X$, e $Y$ he (n. 181.)

$$d\left(\frac{(Ydx + Xdy)r}{ds^2}\right) + \frac{Ydy - Xdx}{ds} = 0$$

Ora $\frac{Ydx + Xdy}{ds}$ representa a força normal, que resulta de todas as potencias, e que no caso presente he $= \frac{adsdx^2}{ds^2}$, e $\frac{Ydy - Xdx}{dx}$ representa a força tangencial, que neste caso he nulla. Logo a equaçaõ da curva procurada he $d\left(\frac{ardx^2}{ds^2}\right) = 0$, cujo integral se acha $\frac{ardx^2}{ds^2} = ab$. E substituindo o valor do raio osculador $r = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$, teremos $\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{dx^2}{ds^2}} = \frac{dy}{b}$; e integrando, $C - y = \frac{bds}{dx}$; equaçaõ que he precisamente a de huma corda

corda estendida pelo seu proprio pezo. Assim concluiremos, que a curvatura, que o vento faz tomar a huma corda, ou a huma vela, he a mesma que ella tomaria em virtude da sua gravidade, com a differença sómente que o eixo em lugar de ser vertical estará situado segundo a direcçaõ da corrente do fluido.

Estas primeiras noções sobre a resistencia dos fluidos eraõ necessarias para facilitar a medida dos effeitos, que resultaõ no movimento dos corpos. Mas para a facilitar ainda mais, consideraõ-se os corpos simplesmente como pontos, e a resistencia do meio como huma força tangencial, sempre opposta á direcçaõ do movimento.

377 Como todos oo fluidos conhecidos resistem aos moveis na rasaõ do quadrado da sua velocidade $u$, seja $b$ a velocidade com a qual elles experimentariaõ huma resistencia igual á força da gravidade $g$; e teremos $\frac{g\,u^2}{b^2}$ por expressaõ geral, e medida absoluta da resistencia. A quantidade $b$ dependerá evidentemente da densidade do fluido; e por isso naõ será constante, se naõ no caso de o ser tambem a densidade do meio resistente.

A densidade do ar, por exemplo, diminue sensivelmente á medida que nos elevamos na atmosfera, subindo ás mais altas cordilheiras. A da agua diminue da mesma maneira, á proporçaõ que se chega para a sua superficie; porque ninguem ignora, quanto saõ densas as aguas do mar em grandes profundidades. Deve pois entaõ ser variavel a quantidade $b$, e o coefficiente $\frac{g}{b^2}$ que se chama *expoente da resistencia* deve a cada instante depender da posiçaõ actual do movel.

378 Se por maior generalidade se suppoem a resistencia do meio proporcional á potencia $m$ da velocidade $u$, ou, que vem a ser o mesmo, igual á expressaõ $\frac{g\,u^m}{b^m}$, naõ he porque se achem na natureza exemplos desta variedade. O unico caso, que ella parece offerecernos he o de $m = 2$; os outros naõ saõ mais do que hypotheses puramente Mathematicas, das quais se faz mençaõ em ordem ás consequencias notaveis, que dellas resultaõ algumas vezes.

379 Seja

379 Seja pois hum corpo movido por huma linha recta em virtude de huma impulsaõ primitiva. Está claro, que a resistencia do meio póde sim alterar-lhe a velocidade, mas naõ a direcçaõ. Seja $x$ o espaço corrido no tempo $t$, desde o principio do movimento, e supponda a resistencia do meio proporcional ao quadrado da velocidade $u$, teremos $\frac{g\,u^2}{b^2}$ por expressaõ da força retardatriz. Logo, sendo uniforme a densidade do fluido, teremos $du = -\frac{g u^2 dt}{bb}$, do de se tira $-\frac{du}{uu} = \frac{g\,dt}{bb}$, e $-\frac{du}{u} = \frac{g\,u\,dt}{bb} = \frac{g\,dx}{bb}$.

Os integrais destas duas equações saõ $\frac{gt}{bb} = \frac{1}{u} + C$, e $lu = C' - \frac{gx}{bb}$. Seja $V$ a velocidade inicial; entaõ $t = 0$, $x = 0$, e $C' = lV$, $C = -\frac{1}{V}$; logo $\frac{gt}{bb} = \frac{1}{u} - \frac{1}{V}$, e $l\frac{V}{u} = \frac{gx}{bb}$. Teremos pois no fim de qualquer tempo $t$ a velocidade $u = \frac{bb}{gt + \frac{bb}{V}}$, e o espaço corrido $x = \frac{bb}{g}\,l\left(1 + \frac{gtV}{bb}\right)$.

Do mesmo modo, tendo o movel corrido o espaço $x$, acharemos a sua velocidade $u = V e^{-gx:bb}$, e o tempo $t = \frac{bb}{gV}\left(e^{gx:bb} - 1\right)$. Será pois inteiramente determinado o movimento do corpo; e bem se vê, que a pezar da resistencia do meio, continuará a mover-se sem jámais parar.

380 Supponhamos em geral a resistencia $= \frac{g\,u^m}{b^m}$, e a densidade constante. Será $du = -\frac{g\,u^m}{b^m}\,dt$; e substituindo

indo $\frac{dx}{u}$ em lugar de $dt$, acharemos que $du = -\frac{gu^{m-1}}{b^m}dx$. Seraõ pois as equaçoens do movimento $u^{-m}du = -\frac{gdt}{b^m}$, e $u^{1-m}du = -\frac{gdx}{b^m}$, cujos integrais tomados de maneira que $x$ e $t$ se desvaneçaõ, quando $u = V$, seraõ $\frac{V^{1-m} - u^{1-m}}{1-m} = \frac{gt}{b^m}$, e $\frac{V^{2-m} - u^{2-m}}{2-m} = \frac{gx}{b^m}$.

Por estas equações póde determinar-se o espaço corrido, e a velocidade do movel, no fim de qualquer tempo $t$. Se $m$ for menor que 2, a equaçaõ $\frac{V^{2-m} - u^{2-m}}{2-m} = \frac{gx}{b^m}$ mostra que a velocidade $u$ será nenhuma, ou que o movimento cessará, assim que o movel tiver corrido hum espaço $x = \frac{b^m}{g} \cdot \frac{V^{2-m}}{2-m}$; mas se $m$ for igual, ou maior que 2, este espaço será infinito; e assim deverá o movimento durar perpetuamente.

381 Busquemos agora qual deve ser o movimento de hum corpo grave, que desce desde o descanço em linha recta por hum meio uniformemente denso, que resiste na rasaõ directa do quadrado da velocidade.

Tendo entaõ por força acceleratriz do corpo a gravidade $g$, e por força retardatriz a quantidade $\frac{gu^2}{bb}$, será $du = \left(g - \frac{gu^2}{bb}\right)dt$, que pela substituiçaõ de $\frac{dx}{u}$ em lugar de $dt$, dará $udu = \left(g - \frac{gu^2}{bb}\right)dx$; donde se tira facilmente $gdt = \frac{bbdu}{bb-uu}$, e $gdx = \frac{b^2udu}{bb-uu}$. Integrando

grando estas duas equações de maneira que $u$, $x$, e $t$ se desvaneçaõ ao mesmo tempo, teremos $gt = \frac{b}{2} l \frac{b+u}{b-u}$, e $2gx = b^2 l \frac{b^2}{bb-uu}$. Assim acharemos que a hum espaço $x$ compete huma velocidade $u = b\sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}$, e hum tempo $t = \frac{b}{g} l \left( e^{\frac{gx}{bb}} + \sqrt{( e^{\frac{2gx}{bb}} - 1)} \right)$.

Tais saõ as formulas, de que devemos servirnos para determinar o movimento dos corpos graves, quando quizermos attender á resistencia do ar.

382 Se o grave for lançado de baixo para cima com huma velocidade $V$, entaõ concorre a gravidade com a resistencia do fluido a retardar o movimento. Será pois $du = -\left(g + \frac{gu^2}{bb}\right)dt$, e $udu = -\left(g + \frac{gu^2}{bb}\right)dx$; e separando, acharemos $gdx = \frac{-b^2udu}{bb+uu}$, e $gdt = \frac{-b^2du}{bb+uu}$, que integrando-se daraõ $2gx = b^2 l \frac{b^2+V^2}{b^2+u_2}$, e $\frac{gt}{b} = Arc\ tang \frac{V}{b} - Arc\ tang \frac{u}{b}$, ou $tang \frac{gt}{b} = \frac{bV-bu}{bb+uV}$. Estas equações daõ no fim do espaço $x$ a velocidade $u = \sqrt{\left( e^{\frac{-2gx}{bb}} (bb+VV) - bb \right)}$, e o tempo $t = \frac{b}{g} Arc\ tang \frac{V}{b}$

$$- \frac{b}{g} Arc\ tang \sqrt{( e^{\frac{-2gx}{bb}} \left(1 + \frac{VV}{bb}\right) - 1)}.$$

383 Suppondo $u = 0$, o grave acabará de subir, e a altura a que terá chegado será neste caso representada por

bb

$\frac{bb}{2g} l \left(1 + \frac{VV}{bb}\right)$. Por exemplo : ſe a velocidade de projecçaõ $V$ for igual a $b$, a altura a que ha de chegar o gravé ſerá para a altura a que chegaria no vacuo, como o logarithmo de 2 para a unidade, ou proximamente como 61 para 88 ; e o tempo que gaſtará para chegar a eſta altura ſerá para o que gaſtaria no vacuo como 3,141 &c para 4.

## *Applicaçaõ da theorica precedente á experiencia.*

384 EM conſequencia da theorica, que acima havemos expoſto ( n. 368. ), parece que deveria concluir-ſe, que a reſiſtencia de hum fluido a huma ſuperficie plana $A$, que lhe he preſentada directamente, tem por medida abſoluta $\frac{ADu^2}{M}$, ſendo $M$ a maſſa do movel, $u$ a velocidade, e $D$ a denſidade do fluido. Mas eſte reſultado naõ he conforme á verdade, ſenaõ em quanto moſtra, que a reſiſtencia he proporcional ao quadrado da velocidade. Para ter o valor abſoluto della, ſeria neceſſario conhecer a natureza dos fluidos muito melhor do que até agora ſe conhece.

385 Newton, tomando a experiencia por guia neſta indagaçaõ, concluio dos ſeus diverſos reſultados, que os fluidos reſiſtem ſómente a ametade do que indica a formula precedente. Se a demonſtraçaõ, que elle dá ( *Princip. Math. Lib.* II. *Sect.* VII. ), naõ parece baſtantemente directa, ao menos naõ póde negar-ſe a conformidade da concluſaõ com as ſuas experiencias. Por eſſa raſaõ julgamos, que devemos encoſtarnos á ſua determinaçaõ, em quanto a Phyſica naõ der maiores luzes ſobre eſta materia. He verdade, que por novas experiencias feitas com muito cuidado parece, que a reſiſtencia dos fluidos naõ ſegue exactamente a raſaõ da ſua denſidade, nem a das ſuperficies que encontraõ. Mas iſſo naõ faz, que a medida da reſiſtencia, tal como Newton a determinou, deixe de ſe verificar de hum modo muito ſufficiente, nas applicações que havemos de fazer.

Eſtas

Estas applicações saõ todas relativas á cahida dos corpos graves; e como as experiencias, que havemos de referir, foraõ feitas com corpos esfericos, será conveniente que primeiro calculemos a resistencia que deve experimentar qualquer globo em hum fluido.

386 Seja pois o diametro do globo $= a$, e a sua densidade $= D'$; será o volume delle $= \frac{1}{6} a^3 c$, a sua massa $= \frac{1}{6} a^3 c \,.\, D'$, e a superficie de hum circulo maximo $= \frac{1}{4} a^2 c$; e conseguintemente a superficie plana $A$ que experimentaria huma resistencia igual á do globo será $= \frac{1}{8} a^2 c$ (n. 370.). Substituindo estes valores na formula da resistencia, teremos $\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8} a^2 c \,.\, D \,.\, u^2}{\frac{1}{6} a^3 c D'}$, ou $\frac{3}{8} \cdot \frac{D}{D'} \cdot \frac{u^2}{a}$.

Como tinhamos representado o valor desta formula por $\frac{g u^2}{b b}$, podemos concluir que $\frac{g}{b b} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{D'}$; donde se tira $\frac{b b}{g} = \frac{8}{3} a \cdot \frac{D'}{D}$. Será pois necessario conhecer a razaõ que tem a densidade do globo com a do fluido, o que naõ será difficultoso, comparando o pezo do primeiro com o de hum volume igual do segundo.

387 Além disto, naõ deve entender-se aqui por $g$ a força da gravidade, ou a velocidade 30,196 que ella communica aos corpos graves em hum segundo. Porque perdendo todo o corpo mergulhado em hum fluido huma parte do seu pezo, igual ao pezo do volume do fluido, cujo lugar occupa, e sendo esta parte $= \frac{D}{D'}$, está claro que neste caso deve tomar-se $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30{,}196$.

388 Temos achado acima, que cahindo hum corpo desde o descanço por hum meio uniformemente resisten-

te,

te, deve correr o espaço $x$ no tempo

$$t = \frac{b}{2g}\, l \left( \frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}} \right). \text{ Logo } e^{\frac{2gt}{b}} =$$

$$\frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}, \text{ donde vem } \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})} =$$

$$\frac{e^{\frac{2gt}{b}} - 1}{e^{\frac{2gt}{b}} + 1},\ 1 - e^{\frac{-2gx}{bb}} = \frac{(e^{\frac{2gt}{b}} - 1)^2}{(e^{\frac{2gt}{b}} + 1)^2};$$

$$e^{\frac{-2gx}{bb}} = \frac{4e^{\frac{2gt}{b}}}{(e^{\frac{2gt}{b}} + 1)^2},\ e^{\frac{gx}{bb}} = \frac{e^{\frac{2gt}{b}} + 1}{2e^{\frac{gt}{b}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{gt}{b}} + e^{\frac{-gt}{b}}}{2};\ \text{logo } x = \frac{bb}{g}\, l \left( \frac{e^{\frac{gt}{b}} + e^{\frac{-gt}{b}}}{2} \right).$$

Este he o valor do espaço corrido no fim do tempo $t$.

389 Como nos differentes casos, que havemos de examinar, he sempre o tempo de alguns segundos, a quantidade $e^{\frac{gt}{b}}$ deve ser hum numero assaz consideravel; e por isso, sem receio de erro algum attendivel, podemos desprezar o termo $e^{\frac{-gt}{b}}$. Assim teremos $x = \frac{bb}{g}\, l\, \frac{1}{2}\, e^{\frac{gt}{b}}$ $= \frac{bb}{g}\left(\frac{gt}{b} - l2\right) = bt - \frac{bb}{g} \cdot 0{,}6931472$. Este resultado nos mostra já, que o movimento virá a ser uniforme em passando alguns segundos.

A quantidade $b$ he a maior velocidade, que o grave póde adquirir na cahida, como se collige evidentemente da equaçaõ $u = b\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}}\right)}$. E ainda que em rigor naõ possa adquirilla, senaõ em hum tempo infinito, com tudo he tal a convergencia com que se chega para ella, que passados alguns segundos será a differença absolutamente insensivel. Isto posto, eisaqui algumas experiencias feitas por Newton, e referidas na Secçaõ VII. Prop. XL dos seus Principios.

390 Exper. I. Hum globo, que no ar pezava $156\frac{1}{4}$ grãos (libra Romana), e na agua 77, cahio em 4 segundos de tempo de huma altura de 112 pollegadas de Londres, em hum vaso cheio de agua da chuva.

Comecemos pela reducçaõ destas medidas ás de Paris. O pé de Londres he para o de Paris, como 811 para 864; e assim a altura, de que o globo cahio, era de 105,13 pollegadas do pé de Paris. A libra Romana contém 6638 grãos da libra de Paris; e por conseguinte a onça da libra Romana, que he a duodecima parte della, contém $553\frac{1}{6}$ dos nossos grãos, e o graõ da libra Romana, que he a 480ma parte da onça, vale o mesmo que 1,15243 dos nossos.

Feita toda a reducçaõ, acharemos pois que o pezo do globo no ar era de 180,07 grãos, e na agua de 88,74. A differença destes dous pezos, ou 91,33 grãos, exprime o pezo de hum volume de agua igual ao do globo; e como a densidade do ar he a 850ma parte da densidade da agua, concluiremos que hum volume semelhante de ar tem de pezo $\frac{91,33}{850}$, ou 0,11 grãos. Logo o pezo do globo no vacuo será de 180,18 grãos, e o de hum volume igual de agua 91,44 grãos: logo $\frac{D'}{D} = \frac{18018}{9144}$.

391 Agora poderemos determinar o diametro do globo de huma maneira muito mais exacta, do que se podia conseguir pelo methodo directo. Porque, sendo o diametro avaliado em pés, será a solidez do globo $\frac{1}{6}a^3c$ pés cubicos: ora hum volume igual de agua peza 91,44 grãos, e sabe-

ſabemos por outra parte que hum pé cubico de agua da chuva peza 70 libras, ou 70 . 9216 grãos; logo teremos $\frac{1}{6} a^3 c . 70 . 9216 = 91,44$, ou $a^3 c . 1344 = 1,143$; donde ſe tira $a^3 = \frac{1,143}{c . 1344}$, que poſto em calculo por logarithmos dará

| | | |
|---|---|---|
| $c$ | - - - - - - - - - - - | $CL . 9,5028501$ |
| 1344 | - - - - - - - - | $CL . 6,8716007$ |
| 1,143 | - - - - - - - - | $L . 0,0580462$ |
| $l . a^3$ | - - - - | 6,4324970 |
| $l a$ | - - - - - | 8,8108323. |

Aſſim acharemos o valor de $a$, que he de 0,06469 pés. Reſta calcular o valor de $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a . \frac{D'}{D} = \frac{6006}{1143} a$.

| | | |
|---|---|---|
| 1143 | - - - - - - - - | $CL . 6,9419538$ |
| $a$ | - - - - - - - - - - | $L . 8,8108323$ |
| 6006 | - - - - - - - - | $L . 3,7785853$ |
| $l \frac{bb}{g}$ | - - - - - - - - | 9,5313714. |

Porém temos $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{8874}{18018} . 30,196$; logo

| | | |
|---|---|---|
| 18018 | - - - - - - - - - - - - | $CL . 5,7442934$ |
| 8874 | - - - - - - - - - - - - | $L . 3,9481194$ |
| 30,196 | - - - - - - - - - - - - | $L . 1,4799494$ |
| $Lg$ | - - - - - - - - - - - | 1,1723622. |

Achado o logarithmo de $g$, como já temos calculado o de $\frac{bb}{g}$, a ſoma de ambos nos dará $l b^2 = 0,7037336$, e conſeguintemente $l b = 0,3518668$. Iſto poſto, como o eſpaço corrido $x = bt - \frac{bb}{g} . 0,6931472$, e como neſte caso $t = 4''$, a continuação do calculo dará

| | | | |
|---|---|---|---|
| $L\,b$ - - - | 0, 3518668 | $L\,\frac{bb}{g}$ - - - | 9, 5313714 |
| $L\,t$ - - - | 0, 6020600 | $L$ 0,69 &c - | 9, 8408254 |
| | 0, 9539268 | | 9, 3721968. |

O primeiro destes logarithmos corresponde a 8, 9935 pés; e o segundo a 0, 2356. Logo o espaço corrido pelo globo em $4''$ será de 8,7579 pés, que reduzidos a pollegadas dão 105, 0948. Porem correu 105, 13 conforme a experiencia de Newton; logo a theorica concorda perfeitamente com a experiencia.

392 EXPER. II. Hum globo, que pezava no ar $76\frac{1}{3}$ grãos (libra Romana), e na agua $5\frac{1}{16}$ grãos, cahio em $15''$ da mesma altura de 112 pollegadas de Londres.

Multiplicando os pezos por 1, 15243, teremos 87, 97 grãos de Paris por pezo do globo no ar, e $5\frac{5}{6}$ grãos na agua. A differença, ou o pezo de hum volume igual de agua he 82, 14, do qual a 850ma parte, ou 0, 09 he o pezo de hum volume igual de ar. Logo o pezo do globo no vacuo he de 88, 06 grãos, e o de hum volume igual de agua 82, 23; e conseguintemente $\frac{D'}{D} = \frac{8806}{8223}$. Mas $\frac{1}{6}a^3c.70.9216 = 82,23$, ou $a^3c.3584 = 2,741$; logo $a^3 = \frac{2,741}{c.3584}$; donde teremos

| | | |
|---|---|---|
| $c$ - - - - - - - - - - - - | $CL$. | 9, 5028501 |
| 3584 - - - - - - - - - - | $CL$. | 6, 4456320 |
| 2, 741 - - - - - - - - - | $L$. | 0, 4379090 |
| | $La^3$ - - - - - - - - - | 6, 3863911 |
| | $La$ - - - - - - - - - | 8, 7954637. |

Paſſando agora a calcular a formula $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a \cdot \frac{D'}{D} =$ $\frac{70448}{24669} a$, teremos

| | |
|---|---|
| 24669 - - - - - - - - - | $CL$. 5, 6078485 |
| 70448 - - - - - - - - - - | $L$. 4, 8478687 |
| $a$ - - - - - - - - - - - - - | $L$. 8, 7954637 |
| $L \frac{bb}{g}$ - - - - - - - - | 9, 2511809. |

Calculando tambem a formula $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30, 196 =$ $\frac{583}{8806} \cdot 30, 196$, teremos

| | |
|---|---|
| 8806 - - - - - - - - - - | $CL$. 6, 0552213 |
| 583 - - - - - - - - - - - | $L$. 2, 7656686 |
| 30, 196 - - - - - - - - - | $L$. 1, 4799494 |
| $Lg$ - - - - - - - - | 0, 3008393. |

A ſoma dos logarithmos de $\frac{bb}{g}$ e de $g$ dará pois $lb^2 =$ 9, 5520202, e conſeguintemente $lb = 9, 7760101$. Ora o eſpaço corrido $x = bt - \frac{bb}{g} \cdot 0, 6931472$, e o tempo $t = 15''$; logo em fim

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Lb$ - - - | 9, 7760101 | $L \frac{bb}{g}$ - - - - | 9, 2511809 |
| $L$ 15 - - | 1, 1760913 | L.0,693 &c - | 9, 8408254 |
| | 0, 9521014 | | 9, 0920063. |

O primeiro deſtes logarithmos corresponde a 8, 9557, e o ſegundo a 0, 1236; logo o eſpaço corrido pelo globo ſerá de 8, 8321 pés, ou de 105, 98 pollegadas. Aſſim eſtá bem conforme a theorica com a experiencia, porque a altura corrida foi de 105, 13 pollegadas.

As duas experiencias, que acabamos de referir, foraõ feitas na agua; as ſeguintes no ar.

393 Exper. III. Hum globo de vidro, que tinha 5 pollegadas

legadas de diametro, e 483 grãos de pezo no ar, gaſtou $8'' \frac{1}{5}$ em cahir do alto da Igreja de S. Paulo de Londres, iſto he, da altura de 220 pés de Inglaterra.

Reduzindo tudo ás noſſas medidas, acharemos que o globo pezava 556, 23 grãos no ar, que tinha 0, 39111 pés de diametro, e que em $8'' \frac{1}{5}$ correu o eſpaço de 206 $\frac{1}{2}$ pés. Vejamos pois, ſe a theorica precedente dá eſte eſpaço por reſultado.

Como temos o diametro $a = 0,39111$, ſerá o pezo de hum volume igual de agua $= \frac{1}{6} a^3 c . 70 . 9216$, cuja 850ma parte, ou 23, 774 grãos dará o pezo de hum volume igual de ar. Aſſim teremos o pezo do globo no vacuo de 580 grãos, e $\frac{D'}{D} = \frac{580}{23,77}$. Calculando pois a formula $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a . \frac{D'}{D} = \frac{4640}{71,32} . 0,39111$, acharemos

| | |
|---|---|
| 71, 32 - - - - - - - - - | CL . 8, 1467887 |
| 4640 - - - - - - - - - | L . 3, 6665180 |
| 0, 39111 - - - - - - - - | L . 9, 5922960 |
| $L \frac{bb}{g}$ - - - - - | L . 1, 4056027. |

Depois calculando a formula $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{556,23}{580} . 30,196$, acharemos

| | |
|---|---|
| 580 - - - - - - - - - - | CL . 7, 2365720 |
| 556, 23 - - - - - - - - | L . 2, 7452544 |
| 30, 196 - - - - - - - - | L . 1, 4799494 |
| $L g$ - - - - - - - - | 1, 4617758. |

Tomando a ametade da ſoma dos logarithmos de $\frac{bb}{g}$ e de de $g$, teremos $lb = 1, 4336892$. E como o espaço corrido he $x = bt - \frac{bb}{g} \cdot 0, 6931472$, e $t = 8'', 2$, acharemos

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Lb$ - - - | 1, 4336892 | $L\frac{bb}{g}$ - - - - - | 1, 4056027 |
| $Lt$ - - - | 0, 9138138 | $L.0,69$ &c - | 9, 8408254 |
| | 2, 3475030 | | 1, 2464281. |

Ao primeiro logarithmo corresponde 222, 59, e ao segundo 17, 64; logo $x = 204, 95$ pés. A differença he de pé e meio neste caso; mas reflectindo, que dous minutos terceiros de mais, ou de menos na medida do tempo, deviaõ produzir o erro de hum pé nesta experiencia, póde dar-se a theorica por exacta sufficientemente.

394 Exper. IV. Huma bexiga em fórma de globo, que tinha 5 pollegadas de diametro, e de pezo $99\frac{1}{8}$ grãos, gastou $21''\frac{1}{8}$ em cahir do alto da cupula da mesma Igreja, que tem de elevaçaõ 272 pés. Ou (reduzindo ás nossas medidas) hum globo de 0, 39111 pés de diametro, e de 114, 24 grãos de pezo, cahio em $21''\frac{1}{8}$ da altura de $256\frac{1}{5}$ pés.

Por quanto já temos achado que o pezo de hum volume igual de ar he de 23, 77 grãos, segue-se que a bexiga pezaria no vacuo 138 grãos. Logo teremos $\frac{D'}{D} = \frac{138}{23,77}$, $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3}a \cdot \frac{D'}{D} = \frac{368}{23,77} \cdot 0, 39111$, e finalmente $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30, 196 = \frac{114,23}{138} \cdot 30, 196$. Isto posto, formaremos o calculo da maneira seguinte

| | | |
|---|---|---|
| 23, 77 - - - - - - - - - | C L . | 8, 6239708 |
| 368 - - - - - - - - - - - | L . | 2, 5658478 |
| 0,39111 - - - - - - - - - | L . | 9, 5922960 |
| $L\,\frac{bb}{g}$ - - - - - - - - | | 0, 7821146 |
| L 0, 693 &c - - - | | 9, 8408254 |
| | | 0, 6229400. |

A este ultimo logarithmo corresponde o numero 4, 197 valor de $\frac{bb}{g}$ . 0, 6931472. Depois teremos

| | | |
|---|---|---|
| 138 - - - - - - - - - - | C L . | 7 , 8601209 |
| 114 , 23 - - - - - - - | L . | 2 , 0577861 |
| 30 , 196 - - - - - - - | L . | 1 , 4799494 |
| $l\,\frac{bb}{g}$ - - - - - - - - - - - | | 0 , 7821146 |
| $lb^2$ - - - - - - | | 2 , 1799710 |
| $lb$ - - - - - - | | 1 , 0899855 |
| $lt$ - - - - - - | | 1 , 3247967 |
| $lbt$ - - - | | 2 , 4147822 . |

Assim acharemos $bt$ de 259 , 887 pés ; e tirando a parte achada 4 , 197 , será o espaço corrido $x = 255 , 69$ pés. Confórme a experiencia foi de 256 , 2 ; do qual naõ differe o resultado da theorica mais que meio pé ; e bem se vê , que a mais leve inexactidaõ da parte da observaçaõ podia ter occasionado esta differença.

O espaço , que este movel teria corrido no vacuo em o mesmo tempo seria de 6737 pés ; e dahi se vê a que erros seremos expostos , se nesta especie de movimentos desprezarmos a resistencia do ar.

## *Da trajectoria dos graves lançados por qualquer direcçaõ em hum meio resistente.*

395 Busquemos agora a trajectoria , que deve descrever hum projectil, que sendo lançado por qualquer direcçaõ em hum meio de uniforme resistencia , he

he ſollicitado pela acçaõ conſtante da gravidade por direcções entre ſi parallelas.

Seja $a$ o angulo da projecçaõ, $b$ a altura devida á velocidade della, $v$ a altura devida á velocidade em qualquer ponto da trajectoria, e $\frac{gv}{k}$ a reſiſtencia do meio proporcional ao quadrado da velocidade; e teremos por expreſſaõ da força retardatriz horizontal $\frac{gv}{k} \cdot \frac{dx}{ds}$, e da vertical $g + \frac{gv}{k} \cdot \frac{dy}{ds}$. Donde reſultaõ as duas equações ſeguintes

$$\frac{gv}{k} \cdot \frac{dx}{ds} dt + d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$g\,dt + \frac{gv}{k} \cdot \frac{dy}{ds} dt + d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

das quais ſe deduz facilmente eſta terceira $dv + dy + \frac{v\,ds}{k} = 0$.

Como temos $gv = \frac{uu}{2} = \frac{ds^2}{2dt^2}$, a primeira equaçaõ póde reduzir-ſe a eſta fórma $\frac{ds}{k} + 2d\left(\frac{dx}{dt}\right) : \frac{dx}{dt} = 0$, cujo integral he $\frac{s}{k} + 2l\frac{dx}{dt} = l\,2gC$, ou $\frac{dx^2}{dt^2} e^{\frac{s}{k}} = 2gC$, ou $v \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = C e^{\frac{-s}{k}}$

Seja pois agora $dy = p\,dx$, e teremos $v e^{\frac{s}{k}} = C(1+pp)$, $dv\, e^{\frac{s}{k}} + \frac{v\,ds}{k} e^{\frac{s}{k}} = 2Cp\,dp$, ou

$dv$

$dv + \frac{vds}{k} = e^{\frac{-s}{k}} . 2Cpdp = -dy$ (pela terceira equaçaõ) $= -pdx$, ou $e^{\frac{s}{k}} dx + 2Cdp = 0$. Multiplicando por $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$, teremos $ds . e^{\frac{s}{k}} + 2Cdp\sqrt{(1+pp)} = 0$, cujo integral he $ke^{\frac{s}{k}} + Cp\sqrt{(1+pp)} + Cl\left(p + \sqrt{(1+pp)}\right) = C'$.

Subſtituindo $-\frac{2Cdp}{dx}$ em lugar de $e^{\frac{s}{k}}$, e ſeparando, teremos

$$\frac{dx}{2k} = \frac{-dp}{\frac{C'}{C} - p\sqrt{(1+pp)} - l\left(p + \sqrt{(1+pp)}\right)}.$$

Para determinar as conſtantes, recorreremos á equaçaõ $v . \frac{dx^2}{ds^2} = C . e^{\frac{-s}{k}}$, e no ponto da projecçaõ teremos $dx = ds . cos\,a$, $s = 0$, $v = b$; logo $C = b\,cos\,a^2$. No meſmo ponto teremos $p = tang\,a$; logo a equaçaõ $ke^{\frac{s}{k}} + Cp\sqrt{(1+pp)} + Cl\left(p + \sqrt{(1+pp)}\right) = C'$ dará $\frac{C'}{C} = \frac{k}{b\,cos\,a^2} + \frac{sen\,a}{cos\,a^2} + l\left(\frac{1 + sen\,a}{cos\,a}\right)$. Aſſim teremos por equaçaõ da trajectoria $\frac{dx}{2k} =$

$-dp$

$$\frac{-dp}{\frac{k}{b\cos a^2}+\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a^2}+l\left(\frac{1+\operatorname{sen} a}{\cos a}\right)-p\sqrt{(1+pp)}-l\left(p+\sqrt{(1+pp)}\right)};$$

expressaõ, que em geral naõ he possivel integrar por nenhum dos methodos conhecidos.

396 Se o meio resiste pouco, como o ar, $k$ será huma quantidade muito grande, e se ao mesmo tempo a altura $b$ devida á velocidade da projecçaõ for muito pequena, a quantidade $\frac{k}{b\cos a^2}$ será muito grande; de sorte, que reduzindo o denominador a huma serie, resultará ao menos huma integraçaõ approximada. Mas naõ he este o caso, de que se trata principalmente na *Ballistica*, porque sendo a velocidade dos projecteis quasi sempre muito grande, a quantidade $b$ vem a ser comparavel a $k$.

397 Com tudo, se o angulo de projecçaõ he pequeno, facilmente se conseguirá a approximaçaõ seguinte.

Como $p$ he huma quantidade pequena, em lugar de integrarmos exactamente a equaçaõ $2C\,dp\sqrt{(1+pp)}+e^{\frac{s}{k}}ds=0$, reduzamos $\sqrt{(1+pp)}$ a huma serie convergente $1+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{8}p^4+\frac{1}{16}p^6-\frac{5}{128}p^8$ &c, e teremos $\int dp\sqrt{(1+pp)}=C''+p+\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{40}p^5+\frac{1}{112}p^7-$ &c. Este integral deve tomar-se de maneira que desvaneça, quando $p=\operatorname{tang} a$; e conseguintemente será $C''=-\operatorname{tang} a-\frac{1}{6}\operatorname{tang} a^3+\frac{1}{40}\operatorname{tang} a^5-$ &c. Logo a equaçaõ da trajectoria será $\frac{dx}{k}=$

$$\frac{-dp}{\frac{k}{2b\cos a^2}+\operatorname{tang} a-p+\frac{1}{6}(\operatorname{tang} a^3-p^3)-\frac{1}{40}(\operatorname{tang} a^5-p^5)\text{\&c}}$$

Sendo pequeno o angulo da projecçaõ, poderáõ despre-

zar-

zar-se as potencias superiores de *tang a* e de *p*, e pôr-se por primeira approximaçaõ

$$\frac{dx}{k} = \frac{-dp}{\frac{k}{2\,b\,cos\,a^2} + tang\,a - p}.$$

O integral desta equaçaõ he $\frac{x}{k} + C = l\left(\frac{k}{2\,b\,cos\,a^2} + tang\,a - p\right)$; e porque $tang\,a = p$, quando $x = 0$, será $C = l\frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}$, e $\frac{x}{k} = l\left(1 + \frac{2\,b\,cos\,a}{k}(tang\,a - p)\right)$; ou $e^{\frac{x}{k}} - 1 = \frac{2\,b\,cos\,a^2}{k}(tang\,a - p)$. Logo $p = tang\,a - \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right) = \frac{dy}{dx}$, ou $dy = \left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right)dx - \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}e^{\frac{x}{k}}dx$, cujo integral he

$$y = \left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right)x - \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right);$$

e esta he a equaçaõ da trajectoria.

398 Representemo-la pela curva *A M B* (Fig. 156.); e diminuamos as ordenadas da quantidade $NP = CA = \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}$, de sorte que o ponto *C* seja a origem das abscissas, e *M N* a ordenada. Assim teremos por equaçaõ ás coordenadas *C N* ($x$), e *M N* ($y$),

$$y = x\left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right) - \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}e^{\frac{x}{k}}.$$

Conduza-se pelo ponto *C* a recta *C Q*, que faça com *C N* hum

hum angulo $G$, de maneira que seja $tang\,G = tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}$; logo será $QN = x\left(tang\,a + \frac{G}{2\,b\,cos\,a^2}\right)$, e conseguintemente $QM = \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}\,e^{\frac{x}{k}}$: porém $x = CQ.\,cos\,G$; logo entre $CQ$ e $QM$, que poderemos chamar $x'$ e $y'$ teremos a equaçaõ

$$y' = \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}\,e^{\frac{x'\,cos.\,G}{k}}.$$

Donde se segue, que a curva $AM$ he huma logarithmica, que tem por asymptota $CQ$, cujas ordenadas verticais fazem com a mesma asymptota hum angulo, cuja cotangente $= tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}$, sendo a subtangente da curva $= \frac{k}{cos\,G}$.

O ponto O mais elevado se achará, suppondo $p = 0$. Entaõ $tang\,a - \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right) = 0$, e $x = k\,l\left(1 + \frac{b\,sen\,2\,a}{k}\right)$; logo a maior elevaçaõ $OL = \left(k\,tang\,a + \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}\right)l\left(1 + \frac{b\,sen\,2\,a}{k}\right) - k\,tang\,a.$

A amplitude $AB$ se acha pondo $y = 0$; e teremos

$$x\left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right) = \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right),$$

ou $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1 + \frac{b\,sen\,2\,a}{k}$; equaçaõ, que por maior brevidade escreveremos desta fórma $z = 1 + \frac{b\,sen\,2\,a}{k}$. Mas

naõ

naõ póde resolver-se, senaõ por meio de falsas posiçoens, como logo veremos.

399 Eisaqui algumas experiencias, sobre as quais faremos agora ensayo da theorica precedente. Todas ellas foraõ feitas com hum canhaõ de 24 carregado com 9 arrateis de polvora.

| ANGULOS de projecçaõ | AMPLITUDES Observadas |
|---|---|
| 1° 11′ | 300 T. |
| 4 | 820 |
| 15 | 1675 |
| 20 | 1740 |
| 25 | 1825 |
| 30 | 1910 |
| 35 | 2020 |
| 40 | 2050 |
| 45 | 2200 |

Mas he necessario antes de tudo determinar a quantidade $k$. Para isso reflectiremos, que temos representado a resistencia por $\frac{gv}{k} = \frac{uu}{2k}$. Assim $k$ he a ametade do que acima temos designado por $\frac{bb}{g}$ (n. 386.); e conseguintemente $k = \frac{4}{3} \cdot \frac{D'}{D} a'$, sendo $a'$ o diametro da bala.

O diametro das balas de 24 he de $5 \frac{4}{9}$ pollegadas, ou de $\frac{49}{9 \cdot 72}$ toesas. A densidade do ar he para a do ferro fundido, de que estas balas se fazem, como 1 para 6047. Logo $k = \frac{4}{3} \cdot 6047 \cdot \frac{49}{9 \cdot 72} = 609,677$ toesas; e conseguintemente $lk = 2,7850998$.

Determinemos agora a quantidade $b$, ou a altura devida á velocidade da projecçaõ. Na primeira experiencia temos

temos o angulo de projecçaõ $a = 1^\circ\, 11'$, e a amplitude observada $x = 300$ toesas, que he o alcance de *ponto em branco*, assim chamado, porque a linha de mira pelo *razo dos metais* faz com o eixo da peça hum angulo de $1^\circ\, 11'$. Isto posto, todas as quantidades que entraõ na equaçaõ fundamental $z = 1 + \frac{b\, sen\, 2\, a}{k}$ se determinaráõ facilmente. Porque $e^{\frac{x}{k}}$ he o numero, cujo logarithmo hyperbolico he $\frac{x}{k}$, ou cujo logarithmo ordinario he $\frac{x}{k} \cdot 0,4342945 = \frac{300}{609,677} \cdot 0,4342945 = 0,2137006$. Logo $e^{\frac{x}{k}} = 1,6356883$. Teremos pois

$$
\begin{array}{lr}
\frac{x}{k} \text{ - - - - - - - - - - } C\,L. & 0,3079785 \\
0,6356883 \text{ - - - - - - } L. & 9,8032442 \\
\hline
L\,z \text{ - - - - - - - - - - - } & 0,1112227
\end{array}
$$

Assim acharemos $z = 1,291882$. Logo $\frac{b\, sen\, 2\, a}{k} = 0,291882$, ou $b = \frac{k \cdot 0,291882}{sen\, 2^\circ\, 22'}$; e continuando o calculo por logarithmos, teremos

$$
\begin{array}{lr}
sen\, 2^\circ\, 22' \text{ - - - - - - - } C\,L. & 1,3841090 \\
0,291882 \text{ - - - - - - - - - - } L. & 9,4652073 \\
k \text{ - - - - - - - - - - - - - - } L. & 2,7850998 \\
\hline
l\,b \text{ - - - - - - - - - - - } & 3,6344161.
\end{array}
$$

Será pois $b = 4309$ toesas. Hum calculo absolutamente semelhante da experiencia feita pelo angulo de $4^\circ$ dará $b = 4863$; e pelo angulo de $15^\circ$, $b = 5261$. Tomando pois o meio entre estes tres resultados, podemos suppor que a altura devida á velocidade de projecçaõ, era

era nestas experiencias de 4811 toesas, e que a força da polvora dava por conseguinte á balá huma velocidade de 1320 pés, ou de 220 toesas por segundo.

Sendo assim determinado este valor, calculemos as amplitudes que a theorica dá para cada huma das inclinaçoens apontadas na Taboa precedente, e vejamos se ellas concordaõ com as observadas.

I. Para o alcance de *ponto em branco*, pelo angulo de projecçaõ $1° 11'$, teremos pois a equaçaõ $z = 1 + \frac{b}{k}\, sen\, 2° 22'$; e calculando-a por logarithmos, acharemos

| | |
|---|---|
| 609, 677 - - - - - - - - - | C L . 7, 2149002 |
| 4811 - - - - - - - - - - - - | L . 3, 6831371 |
| *sen* 2° 22' - - - - - - - - - | L . 8, 6158910 |
| | 9, 5139283. |

Este ultimo logarithmo corresponde a 0, 32653; e conseguintemente teremos $z = 1, 32653$.

Seja pois $\frac{x}{k} = 0, 5$; e teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1, 649$, e $z = 1, 298$, com o defeito de 0,028.

Seja $\frac{x}{k} = 0, 51$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1, 665$, e $z = 1, 304$, com o defeito de 0, 022. Assim diremos: a differença dos dous erros 0, 006 he para o menor delles 0, 022, como a differença das hypotheses 0, 01 he para hum quarto termo; logo $\frac{x}{k} = 0, 546$.

Seja $\frac{x}{k} = 0, 55$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1, 733253$; e $z = 1, 3332$, com o excesso de 0, 0067. Fazendo $\frac{x}{k} = 0, 545$, teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1, 724608$, e $z = 1, 3295$, com o excesso de 0, 003. Assim teremos 0, 0037 : 0, 003 : : 0,005 :

0, 005 : 0, 004, que nos dá $\frac{x}{k} = 0,541$; e como este valor he assaz exacto, será a amplitude que buscamos $x = k \cdot 0,541 = 330$ toesas.

II. No tiro pelo angulo de $4^\circ$, havemos de resolver a equaçaõ $z = 1 + \frac{b}{k} sen\, 8^\circ$; e praticando do mesmo modo, teremos

$$\begin{array}{ll} \frac{b}{k} \text{ - - - - - - - - - - - - - } & L.\ 0,8980373 \\ sen\, 8^\circ \text{ - - - - - - - - - - - } & L.\ 9,1435553 \\ \hline & 0,0415926. \end{array}$$

A este logarithmo corresponde o numero 1, 1005; logo $z = 2, 1005$. Seja $\frac{x}{k} = \frac{4}{3}$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 3,7936$, e $z = 2,0952$, com o defeito de 0, 0053. Seja $\frac{x}{k} = 1,35$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 3,8574$, e $z = 2,1166$, com o excesso de 0, 0161. Assim diremos $0,0214 : 0,0053 :: \frac{1}{60} : 0,004128$; logo $\frac{x}{k} = \frac{4}{3} + 0,004128 = 1,3375$, e $x = 815$ toesas.

III. Pelo angulo de $15^\circ$ teremos a equaçaõ $z = 1 + \frac{b}{k} sen\, 30^\circ = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{k} = 4,9537$. Seja $\frac{x}{k} = 2,5$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 12,180$, e $z = 4,472$ com o defeito de 0,482. Seja $\frac{x}{k} = 2,6$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 13,464$, e $z = 4,794$ com o defeito de 0,160. Diremos pois $0,322 : 0,160 :: 0,1 : 0,05$; e será $\frac{x}{k} = 2,65$.

Seja pois $\frac{x}{k} = 2,65$; e acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 14,15404$, e $z = 4,9638$ com o excesso de 0,0101. Seja $\frac{x}{k} = 2,64$; o dará $e^{\frac{x}{k}} = 14,01320$, e $z = 4,9292$ com o defeito de 0,0245. Assim teremos 0,0346 : 0,0245 : : 0,01 : 0,007; donde vem $\frac{x}{k} = 2,647$, e $x = 1614$ toesas.

IV. Pelo angulo de 20°, será $z = 1 + \frac{b}{k}$ *sen* 40°; e assim teremos

$$\frac{b}{k} \text{ - - - - - - - - - - - } L.\,0,8980373$$
$$\textit{sen } 40^\circ \text{ - - - - - - - - } \underline{L.\,9,8080675}$$
$$0,7061048.$$

A este logarithmo corresponde o numero 5,0828; logo $z = 6,0828$. Seja $\frac{x}{k} = 3$; logo $e^{\frac{x}{k}} = 20,086$, e $z = 6,36$ com o excesso de 0,28. Seja $\frac{x}{k} = 2,9$; logo $e^{\frac{x}{k}} = 18,175$, e $z = 5,92$ com o defeito de 0,16. Assim teremos 0,44 : 0,16 : : 0,1 : 0,037; donde será $\frac{x}{k} = 2,937$; e $x = 1791$ toesas.

V. Por hum calculo semelhante acharemos para o tiro de 25° $z = 7,05747$. Fazendo pois $\frac{x}{k} = 3,1$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 22,198$, e $z = 6,839$ com o defeito de 0,218. E fazendo $\frac{x}{k} = 3,2$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 24,533$, e $z = 7,354$ com o excesso de 0,297. Pelo que a proporção 0,515 : 0,218 :

0,218 : : 0,1 : 0,0423 dará $\frac{x}{k} = 3,1423$, e $x = 1916$ toesas.

VI. Do mesmo modo para o tiro de 30°; será $z = 7,8481$. Suppondo $\frac{x}{k} = 3,3$; acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 27,11$, e $z = 7,91$ com o excesso de 0,07. Suppondo $\frac{x}{k} = 3,25$; acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 25,79$, e $z = 7,63$ com o defeito de 0,22. Donde a proporção 0,29 : 0,22 : : 0,05 : 0,038 dará $\frac{x}{k} = 3,288$, e $x = 2005$ toesas.

VII. Para o tiro de 35°, teremos $z = 8,4306$. Porém suppondo $\frac{x}{k} = 3,4$, acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 29,964$, e $z = 8,519$ com o excesso de 0,088; e suppondo $\frac{x}{k} = 3,39$, teremos $e^{\frac{x}{k}} = 29,666$, e $z = 8,456$ com o excesso de 0,025. Será pois 0,063 : 0,025 : : 0,01 : 0,004; e tirando este ultimo termo de 3,39, teremos $\frac{x}{k} = 3,386$, e $x = 2064$ toesas.

VIII. Para o tiro de 40°, acharemos $z = 8,7873$; e suppondo $\frac{x}{k} = 3,45$, será $e^{\frac{x}{k}} = 31,5004$, e $z = 8,841$ com o excesso de 0,054; suppondo porém $\frac{x}{k} = 3,44$, será $e^{\frac{x}{k}} = 31,187$, e $z = 8,775$ com o defeito de 0,012. Assim a proporção 0,066 : 0,012 : : 0,01 : 0,0018 dará $\frac{x}{k} = 3,4418$, e $x = 2098$ toesas.

IX. Em fim pelo angulo de 45°, temos $z = 8,9075$; e suppondo $\frac{x}{k} = 3,45$, acharemos $z = 8,841$ com o defeito de 0,066; porém suppondo $\frac{x}{k} = 3,46$, acharemos $z = 8,9066$, valor sufficientemente exacto, que dará $x = 2110$ toesas.

Mas a fim de melhor se poderem comparar os resultados da experiencia com os da theorica, ajuntaremos aqui a Taboa seguinte.

| *Angulos de projecçaõ* | *Amplitudes observadas* | *Amplitudes calculadas* | *Differenças* |
|---|---|---|---|
| 1° 11′ | 300 T | 330 | + 30 |
| 4 | 820 | 815 | − 5 |
| 15 | 1675 | 1614 | − 61 |
| 20 | 1740 | 1791 | + 51 |
| 25 | 1825 | 1916 | + 91 |
| 30 | 1910 | 2005 | + 95 |
| 35 | 2020 | 2064 | + 44 |
| 40 | 2050 | 2098 | + 48 |
| 45 | 2200 | 2110 | − 90 |

Esta Taboa foi calculada, como se tem visto, na supposiçaõ de que a força da polvora imprimia nas balas huma velocidade devida á altura de 4811 toesas, que he hum meio deduzido das tres primeiras observações. A peça era de 24, e a carga de 9 arrateis, como já dissemos.

Comparando pois as amplitudes observadas com as que dá a theorica approximada, de que nos temos servido, he facil de ver que concordaõ sufficientemente. Muito mais, advertindo que estas experiencias naõ podem fazer-se com a exactidaõ que era necessaria para verificar huma theoria. Por mais cuidado que se ponha em fazer todas as cousas iguais nesta especie de provas, succede muitas vezes que pelo mesmo angulo, e com a mesma carga, differem as amplitudes de 50, e ainda de 100 toesas. A maior differença, que temos achado, he de 95 toesas, que saõ proximamenmamente a vigesima parte da amplitude; e este erro parece antes proceder da experiencia. Porque no caso de que o angulo do maior alcance fosse realmente de 45°, o que he quando menos duvidoso, a differença dos alcances de 45° e 40° deveria ser menor que a dos que correspondem a 40° e 35°, como se sabe pela natureza dos *maximos*. Assim deveria ser a amplitude de 45° menor que 2080, quando a experiencia a dá de 2200 toesas.

# *SECÇAO II.*

## *DO MOVIMENTO DE HUM CORPO SOBRE HUMA LINHA DADA.*

400 SUpponhamos 1°, que o movel he hum ponto physico de hum volume infinitamente pequeno. 2°, que a linha sobre a qual se move naõ lhe permitte o desviar-se della, como por exemplo o faria hum canal, cujo diametro fosse igual ao do corpo. 3°, que o corpo se póde mover livremente por este canal, sem experimentar fricçaõ alguma.

401 Hum canal desta fórma naõ poderá pois destruir, senaõ os movimentos que lhe forem perpendiculares; e por conseguinte, a resistencia que provem desta causa se exercitará toda perpendicularmente á linha descrita pelo movel, de maneira que naõ resultará dahi força nenhuma tangencial, que lhe altere a velocidade. Logo, se o corpo se mover em virtude de hum impulso primitivo, e o seu movimento naõ for alterado por força nenhuma acceleratriz, por qualquer curva que seja obrigado a mover-se, terá em toda a parte a mesma velocidade; e conseguintemente, descreverá arcos iguais em tempos iguais.

402 Mas sem recorrer a hum canal izento de fricçaõ, póde fazer-se mover hum corpo em qualquer linha dada, conforme o methodo do celebre Huyghens. Seja *AM* a linha dada (Fig. 157.), *BN* a sua evoluta, e *MN* o raio osculador no ponto *M*. Tomar-se-ha pois hum fio inextensivel *MNC*, que por huma ponta se fixará no ponto *C* da evoluta, de maneira que possa applicar-se sobre a lamina *CNB*; e pela outra ponta sustentará o corpo, que no seu movimento será forçado a descrever a curva dada *AM*.

Bem

Bem se vê, que hum movel naõ póde ser desta maneira constrangido na sua direcçaõ, sem que resulte huma pressaõ continua sobre a linha do seu movimento, ou (que vem a ser o mesmo) sem que o fio da evoluta naõ experimente huma certa tensaõ. Logo, se em sentido contrario se applicasse ao movel huma força igual a esta pressaõ, he evidente que descreveria a mesma curva; mas entaõ seria o movimento livre.

Supponhamos, que elle se move pela curva *A M* em virtude de huma impulsaõ primitiva, sem ser perturbado por potencia alguma, e chamemos *F* a força da pressaõ que elle exercita sobre a curva *A M*, segundo a perpendicular *N M*. Se esta força, considerada como força acceleratriz, se imprimisse no movel pela direcçaõ opposta *M N*, a trajectoria *A M* seria por elle descrita com movimento livre. Porém *F* neste caso he a força normal; logo terá por valor o quadrado da velocidade $uu$ dividido pelo raio osculador *M N* (n. 280.).

Este mesmo he pois o valor da pressaõ do movel sobre a curva, ou da tensaõ do fio, chamada commumente *Força centrifuga*. Esta denominaçaõ procedeu de que tendendo o movel pela sua inercia a mover-se uniformemente, e em linha recta, naõ póde ser constrangido a descrever huma linha curva, sem fazer hum esforço continuo a escapar pela tangente, e afastar-se do centro do seu movimento.

403 Logo *a força centrifuga he igual ao quadrado da velocidade dividido pelo raio osculador; e conseguintemente he para a força da gravidade, como a altura devida á velocidade do movel para ametade do mesmo raio osculador*. Mas naõ deve por isso entender-se, que a força centrifuga depende da gravidade; porque o movel sempre exercitaria a sua pressaõ sobre a linha do movimento, ainda que naõ existisse a força da gravidade.

404 Quaisquer que sejaõ por outra parte as forças, que sollicitaõ hum corpo na sua trajectoria, sempre podem reduzir-se a duas, huma tangencial $T$, e a outra normal $N$. A primeira servirá de alterar a velocidade do movel, e teremos $g\,dv = T\,ds$; e a segunda produzirá huma nova pressaõ sobre a curva descrita, de maneira que obrando para a mesma parte que a força centrifuga $\frac{uu}{R}$, a pressaõ total

ſerá $\frac{uu}{R} + N$, e obrando em direcçaõ oppoſta, a preſſaõ ſerá taõ ſómente $\frac{uu}{R} - N$.

Neſte ultimó caſo a preſſaõ ſerá nenhuma, quando for $\frac{uu}{R} = N$; e entaõ deſcreverá o movel livremente a curva propoſta. Por iſſo eſta he a meſma equaçaõ, que achamos para os movimentos livres (n. 280.).

405 Por meio da formula $g\,dv = T\,ds$, e da equaçaõ conhecida da curva, acharemos a velocidade do movel em qualquer ponto. O tempo ſe achará, integrando a formula $\frac{ds}{u}$; e a preſſaõ ſobre a trajectoria ſerá repreſentada por $\frac{uu}{R} \pm N$. Mas eſte ultimo elemento naõ he neceſſario para conhecer o movimento do corpo.

406 Seja $BM$ a linha dada (Fig. 158.), $AP$ o ſeu eixo, $X$ e $Y$ as duas forças acceleratrizes dirigidas, huma por $MN$ parallelamente a $AP$, e a outra por $PM$. Seja $P$ a preſſaõ total ſobre a curva, ſegundo a perpendicular $OM$. Se eſta força ſe applicar por huma direcçaõ contraria $MO$, o movimento ſerá livre. Reſolvendo pois a força $P$ por $MO$ em duas, huma pela direcçaõ $MN$, que ſera $= \frac{P\,dy}{ds}$, e a outra pela direcçaõ $MQ$, que ſerá $= \frac{P\,dx}{ds}$; teremos

$$\left(X + \frac{P\,dy}{ds}\right) dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\left(Y - \frac{P\,dx}{ds}\right) dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

E ſubſtituindo $\frac{ds}{u}$ em lugar de $dt$,

$$X\,ds + P\,dy = u\,d\left(\frac{u\,dx}{ds}\right) = uu\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + u\,du.\,\frac{dx}{ds}$$

$Y\,ds$

$$Yds - Pdx = ud\left(\frac{udy}{ds}\right) = uud\left(\frac{dy}{ds}\right) + udu.\frac{dy}{ds}.$$

Multiplicando a primeira por $dx$, e a ſegunda por $dy$, a ſoma dos productos dará $(Xdx + Ydy)\,ds = uuds\left[\frac{dx}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] + ududs$, ou $udu = Xdx + Ydy$; equaçaõ, que coincide com a outra $gdv = Tds$.

Do meſmo modo, havendo multiplicado a primeira por $dy$, e a ſegunda por $dx$, a differença dos productos dará $(Xdy - Ydx)\,ds + Pds^2 = uuds\left[\frac{dy}{ds}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] = -\frac{u^2dx^2}{ds}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Porem o raio oſculador $R = \frac{ds^3}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; logo

$$P = \frac{u^2}{R} + \frac{Ydx - Xdy}{ds}.$$

Donde ſe vê, que naõ havendo força alguma acceleratriz, a preſſaõ ſobre a curva deve ſer $\frac{u^2}{R}$; e que havendo potencias acceleratrizes, a preſſaõ da força centrifuga he aumentada ou diminuida da força normal, conforme a direcçaõ della. E he preciſamente o meſmo, que acima achámos, conſiderando o movimento de outra maneira.

Eiſaqui em poucas palavras o methodo geral de calcular o movimento de hum corpo ſobre huma linha dada.

## *Applicaçaõ da Theorica precedente a alguns caſos particulares.*

407 SUpponhamos, que hum movel eſtá ſuſpenſo de hum fio atado pela outra extremidade a hum ponto fixo. Se eſte movel for impellido por qualquer direcçaõ, que naõ ſeja a do meſmo fio, deſcreverá neceſſariamente a circumferencia de hum circulo ao redor do ponto de

de suspensaõ, e isso com movimento uniforme, se naõ houver potencia que lhe altére o movimento impresso.

Seja $V$ a velocidade do movel, a qual se acha resolvendo a velocidade impressa em outras duas, huma $V$ perpendicular ao raio, e a outra pela direcçaõ delle. Seja $F$ a tensaõ do fio, ou a força centrifuga, e $R$ o raio do circulo. Teremos pois $F = \frac{V^2}{R}$, ou para dizer melhor $F = \frac{MV^2}{R}$, sendo $M$ a massa do movel; porque $\frac{V^2}{R}$ naõ he outra cousa senaõ huma força acceleratriz, cujo effeito he a velocidade que póde imprimir a força centrifuga.

Para conhecer pois a intensaõ verdadeira desta potencia, he necessario multiplicar $\frac{V^2}{R}$ pela massa do corpo. Assim achamos, que *a força centrifuga he para o pezo do corpo, como a altura devida á velocidade para ametade do raio.* Suppondo, por exemplo, que a velocidade he devida á altura de 40 pés, e que o raio do circulo he de 10 pés, a força centrifuga, ou a tensaõ do fio será para o pezo do corpo, como 8 para 1.

408 Seja $T$ o tempo periodico do movel; teremos $V = \frac{2cR}{T}$, e a força centrifuga $F = \frac{M.4c^2R}{T^2}$. Logo *a força centrifuga he proporcional ao raio do circulo directamente, e ao quadrado do tempo periodico reciprocamente.*

409 Como a terra tem hum movimento de rotaçaõ ao redor do seu eixo, todas as suas partes saõ animadas de hum certo gráo de força centrifuga, maior ou menor, conforme ellas estaõ mais, ou menos distantes do eixo da revoluçaõ. Como esta força debaixo do equador he directamente opposta á da gravidade, está claro que deve nella causar maior diminuiçaõ. Quanto aos lugares intermedios do equador até os pólos, a diminuiçaõ da gravidade deve ser menos sensivel á medida que se for caminhando para os mesmos pólos, onde a força centrifuga he nulla.

Donde se segue, que se a terra foi originalmente fluida, em virtude do seu movimento de rotaçaõ naõ podia conservar a fórma esferica, que a gravidade lhe procurava dar. Porque pezando menos as partes mais vezinhas do equa-

equador, era necessario maior quantidade dellas, para estabelecer o equilibrio. Assim devia tomar esta massa fluida huma figura á maneira de ellipsoide, mais abatida para os pólos, e elevada para o equador, tal proximamente como a do solido gerado pela revoluçaõ de huma ellipse á roda do eixo menor. Este he tambem o resultado, que daõ as mais exactas medidas dos gráos do meridiano, feitas nestes ultimos tempos. Todas concordaõ em mostrar o abatimento do globo terrestre para a parte dos pólos, e elevaçaõ para a parte do equador; e as que passaõ por melhores provaõ, que o eixo tem de menos que o diametro do equador $\frac{1}{215}$ delle.

410 Examinemos agora o movimento de hum corpo, que desce pela acçaõ da gravidade por huma linha recta $AC$ inclinada ao horizonte (Fig. 159.). Seja $A$ a origem do movimento, $AM$ o espaço $x$ corrido no tempo $t$, e $u$ a velocidade adquirida no ponto $M$. Conduzindo pelo ponto $A$ a vertical $AB$, e pelo ponto $C$ a horizontal $BC$, poderemos resolver a força da gravidade $g$ pela direcçaõ $MP$ em outras duas, huma pela direcçaõ $MC$, que será $g\ sen\ a$; e a outra perpendicular a $MC$, que será $g\ cos\ a$, entendendo por $a$ a inclinaçaõ $ACB$ da recta $AC$ com o horizonte. A ultima destas forças dará a pressaõ sobre o plano inclinado, por quanto a força centrifuga he nulla neste caso; e esta pressaõ he para o pezo do corpo, como o coseno de $a$ para o raio. A outra força $g\ sen\ a$ servirá de accelerar o movimento pela direcçaõ $AM$. Assim descerá o corpo, como se fosse sollicitado por huma força de gravidade $= g\ sen\ a$ pela direcçaõ $AM$, e o seu movimento será uniformemente accelerado. Logo teremos as duas equações seguintes,

$$u = gt\ sen\ a,\ \text{e}\ x = \frac{1}{2} gt^2\ sen\ a;$$

donde se podem deduzir muitas consequencias uteis.

I. O tempo empregado em correr $AC$ (Fig. 159.) he $\sqrt{\frac{2AC}{g\ sen\ a}} = \sqrt{\frac{2AC^2}{gAB}}$; logo he como a recta $AC$, quando $AB$ he constante. Por conseguinte os tempos empregados em descer do ponto $A$ até a horizontal $BC$ saõ

como

como as linhas, pelas quais descem os corpos.

II. Se descrevermos hum circulo, cujo diametro $AB$ seja vertical (Fig. 160.), o movel partindo de A para $M$ pela corda $AM$ gastará o mesmo tempo, que seria necessario para descer até $B$ pelo diametro $AB$, porque no circulo a quantidade $\frac{AM^2}{AP}$ he constante.

III. A velocidade do movel chegando ao ponto $C$ (Fig. 159.) he $\sqrt{2gAC\,sen\,a} = \sqrt{2gAB}$. Logo será igual á que o corpo teria adquirido cahindo pela vertical $AB$; donde se segue, que a velocidade adquirida pelo descenso de hum movel entre dous planos horizontais, he sempre a mesma, ou elle desça livremente pela vertical, ou por hum plano inclinado, ou ainda por hum arco de curva, como veremos no artigo seguinte.

## *Do Movimento de Oscillaçaõ nos meios naõ resistentes.*

411 SEja $ACA'$ huma curva qualquer (Fig. 161.), pela qual desçe hum corpo em virtude da gravidade, começando do ponto $A$. Referindo a curva a qualquer eixo vertical $BC$, conduzindo as horizontais $AB$, $MP$, e fazendo $BP = x$, $PM = y$, será a força da gravidade $g$ por $MG$ parallela a $BP$; e conseguintemente $X = g$, $Y = o$ (n. 406.). Logo $dv = dx$, e $v = x + a$ no caso de ter o movel no ponto $A$ huma velocidade inicial devida á altura $a$. Descendo pois o corpo pelo arco $AM$ de huma horizontal $AB$ até outra $MP$, adquire precisamente a mesma velocidade, como se tivesse cahido pela vercical $BP$.

Supponhamos, que elle sem velocidade alguma inicial desce do ponto $A$; a velocidade em $M$ será devida á altura $BP$, e a velocidade em $C$ á altura $BC$. Mas se $C$ he o ponto mais baixo da curva, e se o ramo $CM'A'$ he huma continuaçaõ della qualquer; a velocidade em $M'$ será sempre devida á altura $BP$, e a velocidade em $A'$ á altura o. Deve pois subir o movel até $A'$ á mesma altura donde tinha descido; e de $A'$ tornará a descer pelo mesmo caminho, e com a velocidade adquirida no ponto $C$ subirá rá pelo primeiro ramo até o ponto $A$ da origem do movimento. Assim irá alternativamente de $A$ para $A'$, e de $A'$ para $A$, até que algum obstaculo estranho se opponha ao seu movimento. A este movimento alternativo he que se dá o nome de *Movimento de Oscillaçaõ*.

412 Para conhecer a duraçaõ de huma oscillaçaõ inteira, ou (que vem a ser o mesmo) para determinar o tempo da descida por $AMC$, e subida por $CM'A'$, he necessario integrar $\frac{ds}{\sqrt{2gv}}$, ou $\frac{ds}{\sqrt{2gx}}$ desde $A$ até $A'$.

413 Exemplo I. Seja $AMD$ hum arco de circulo descrito do centro $C$ com o raio $CA = a$ (Fig. 162.). Tire-se a vertical $CD$; e supposndo que he $A$ o ponto donde o movel começa a descer pelo arco $AMD$, seja $DP = x$, e $BD = b$. Assim será $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $ds = \frac{-a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, e $u = \sqrt{2g(b-x)}$. Logo $dt =$

$$\frac{-a\,dx}{\sqrt{2g(b-x)(2ax-xx)}} = \frac{a}{\sqrt{2g(2a-x)}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} + \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^4}{16a^4} \; \&c \right).$$

Para achar pois o tempo da descida inteira, he necessario integrar cada termo desta serie, de maneira que o integral se desvaneça quando $x = b$, e depois tomar o valor delle quando $x = 0$. O calculo integral dá geralmente

$$\int \frac{-x^m\,dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{(bx-xx)}}{m} +$$

$$\frac{b(2m-1)}{2m} \int \frac{-x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$

logo, se cadahum destes integrais se tomar entre os limites

tes $x=b$, e $x=0$, como temos dito, teremos

$$\int\frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=\frac{b(2m-1)}{2m}\int\frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$

formula, que dará as applicações seguintes:

$$\int\frac{-x dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=\frac{b}{2}\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}},$$

$$\int\frac{-x^2 dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=\frac{3b}{4}\int\frac{-x dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=\frac{1.3}{2.4}b^2\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}},$$

$$\int\frac{-x^3 dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=\frac{5b}{6}\int\frac{-x^2 dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}b^3\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \text{ \&c.}$$

Donde se segue, que o tempo da descida pelo arco *AMD* he $t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{b}{2a}+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{b^2}{4a^2}+\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{b^3}{8a^3}+\frac{1.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{b^4}{16a^4}\text{ \&c}\right)\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$.

Porém $\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}=Arc\,cos\frac{2x-b}{b}$; e este integral desvanece, quando $x=b$, e tem por valor o numero conhecido $c=3,141$ &c quando $x=0$. Logo o tempo da descida será

$$t=\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{b}{2a}+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{b^2}{4a^2}+\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{b^3}{8a^3}\text{ \&c}\right);$$

e por conseguinte, chamando $T$ o tempo de huma oscillaçaõ inteira, será

$$T=c\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{b}{2a}+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{b^2}{4a^2}\text{ \&c}\right).$$

Se o arco *AMD* for pequeno a respeito do raio, o seno verso $b$ será taõ pequeno relativamente ao arco, como este o he em comparaçaõ do raio. Poder-se-haõ pois nesse caso desprezar todos os termos da serie que contém $b$, tomando-se sómente $T=c\sqrt{\frac{a}{g}}$.

E

E se quizermos avaliar o erro que desta ultima formula resulta, quando os arcos saõ consideraveis, naõ ha mais que comparar o resultado della com o da serie. Por exemplo se $AMD = 30^{\circ}$, teremos $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,134$; donde he facil de concluir que o tempo de huma oscillaçaõ inteira, tal como o dá a formula $c\sqrt{\frac{a}{g}}$, naõ differe da sua duraçaõ real senaõ huma sexagesima parte proximamente; de maneira, que se a oscillaçaõ for de hum segundo, será o defeito sómente de hum terceiro. Porém se $AMD = 5^{\circ}$, teremos $\frac{b}{a} = 0,0038$, e o tempo deduzido da formula $c\sqrt{\frac{a}{g}}$ naõ discrepará da realidade mais que $\frac{1}{2000}$, de sorte que seráõ necessarias duas mil oscillações, para se cometter o erro de hum segundo; e se os arcos forem sendo menores, as differenças cadavez se faráõ mais insensiveis.

Em fim, como a formula $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$ he independente de $b$, está claro que as oscillações de hum corpo por arcos muito pequenos de hum mesmo circulo devem todas ser de igual duraçaõ; e por isso neste caso se chamaõ *Oscillações isochronas.*

E por quanto he absolutamente o mesmo suppor que hum corpo $M$ se move sobre hum arco de circulo solido $AMD$, ou que oscilla na extremidade de hum fio de suspensaõ $CM$, concluiremos igualmente que *hum pendulo* (porque este he o nome que entaõ se dá ao movel) *que faz as oscillações muito pequenas, as faz todas no mesmo tempo.*

415 A expressaõ deste tempo he $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$, sendo o comprimento do pendulo representado por $a$. Donde se segue, que *a duraçaõ de huma oscillaçaõ he directamente proporcional á raiz quadrada do comprimento do pendulo, e reciprocamente á raiz quadrada da força da gravidade,*

*dade.* Hum pendulo, que tem o comprimento quadruplo do de outro, deve pois fazer as oſcillações duas vezes mais vagaroſas, ſendo a gravidade conſtante &c.

416 Seja $N$ o numero das oſcillações feitas em hum certo tempo $t$; teremos $T = \frac{t}{N} = c\sqrt{\frac{a}{g}}$, e conſeguintemente $a = \frac{t^2 g}{c^2 N^2}$. Logo *os comprimentos de dous pendulos ſaõ reciprocamente como os quadrados dos numeros das oſcillações feitas em hum tempo dado.*

417 Daqui ſe tem deduzido hum meio muito ſimples de determinar por experiencia o comprimento do pendulo, que deve fazer cada vibraçaõ em hum ſegundo.

Suſpendei hum corpo bem denſo por hum fio de metal muito delgado, e dai a eſte fio tres pés de comprimento, porque eſte he pouco mais ou menos o comprimento procurado; deſviai hum pouco eſte pendulo da vertical para o fazer oſcillar, e contai exactamente as vibrações que faz em qualquer tempo determinado, em huma hora por exemplo. Entaõ fareis eſta proporçaõ: Como o quadrado de 3600 (numero das oſcillações que o pendulo de ſegundos faria no meſmo tempo) para o quadrado do numero das oſcillações contadas, aſſim o comprimento do pendulo da experiencia para o comprimento procurado do pendulo de ſegundos.

Por eſte methodo ſe conheceu, que na latitude de Paris he o pendulo de ſegundos de 3 pés 8 linhas e $\frac{57}{100}$ de huma linha. Mas como eſtas experiencias ſe fazem com corpos de hum volume finito, he neceſſario ter o cuidado de medir exactiſſimamente os comprimentos dos pendulos deſde o ponto de ſuſpenſaõ até outro ponto chamado *Centro de oſcillaçaõ*, do qual havemos de fallar na Secçaõ III.

418 Huma vez que ſeja conhecido o comprimento do pendulo, que bate exactamente os ſegundos, com ſumma facilidade ſe deduz o comprimento de qualquer outro, que deva fazer as oſcillações em mais, ou menos tempo. O pendulo, por exemplo, que em Paris deve fazer cada oſcillaçaõ em meio ſegundo, terá evidentemente 9 polle-

lega-

legadas 2 linhas e $\frac{14}{100}$ de huma linha; e o pendulo, que houvesse de bater minutos, deveria ter 3600 vezes o comprimento do pendulo de segundos, isto he, $11014\frac{1}{4}$ pés.

Sobre isto he que se funda o modo de regular os relogios oscillatorios. Quando elles se retardaõ, levanta-se a *meia-laranja* da pendula; e abaixa-se pelo contrario, quando se adiantaõ. Mas para determinar a quantidade, que se deve levantar, ou abaixar, seja o comprimento actual da pendula $= a$, a quantidade que se lhe deve ajuntar ou diminuir $= \pm x$, o numero das vibrações de que elle se retarda, ou adianta em hum tempo dado, por exemplo em huma hora $= \delta$, e o numero das vibrações que devia fazer estando bem regulado $= b$. Isto posto, teremos (n. 416.) esta proporçaõ $a : a \pm x :: b^2 : (b \pm \delta)^2$; logo $x = \frac{a\delta(2b \pm \delta)}{b^2}$.

419 Da mesma theorica se tem usado para determinar com a ultima exactidaõ a força da gravidade; e além de que a idèa he muito ingenhosa, o calculo he de singular facilidade. Porque sendo $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$, e supponđo $T = 1$, e $a =$ ao comprimento do pendulo de segundos $= 440, 57$ linhas, teremos $g = c^2 . 440, 57$ linhas $= 30, 196$ pés, como acima temos supposto; donde se conclue que o espaço corrido por qualquer corpo no primeiro segundo da sua quéda he de $15, 098$ pés.

420 Se a força da gravidade diminue á medida que nos chegamos para o equador, o comprimento do pendulo de segundos deve variar em differentes latitudes; porque a equaçaõ $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$ mostra, que sendo T constante *devem os comprimentos dos pendulos de segundos ser em differentes latitudes na rasaõ directa das forças da gravidade.* Com effeito, tendo ido *M. Richer* a Cayena em 1672 para fazer algumas observações, reflectio que a pendula de segundos que tinha levado de Paris retardava sensivelmente, de sorte que foi obrigado a levantar a *meia-laranja* huma

linha

linha e $\frac{1}{4}$ para a fazer bater novamente os ſegundos.

Depois de *M. Richer*, tem-ſe verificado muitas vezes, e em muitos lugares o facto que elle atteſtou. Eisaqui huma parte deſtas obſervações

| Lugares das Obſervações | Latitudes | Comprimento do pendulo |
|---|---|---|
| No Equador em 2434 toeſ. de alt. | 0° 0' | 438,70 linh. |
| - - - - - - em 1466 toeſ. de alt. | 0. 0 | 438,83 |
| - - - - - - ao livel do mar | 0 0 | 439,07 |
| Em Porto-bello - - - - - - - - - | 9 34 | 439,16 |
| Na ilha de S. Domingos - - - - | 18 27 | 439,33 |
| No Cairo - - - - - - - - - - - - - | 30 2 | 440,25 |
| Em Roma - - - - - - - - - - - - - | 41 44 | 440,28 |
| Em Paris - - - - - - - - - - - - - | 48 50 | 440,57 |
| Em Londres - - - - - - - - - - - | 51 31 | 440,65 |
| Em Leyda - - - - - - - - - - - - | 52 9 | 440,71 |
| Em Petersburg - - - - - - - - - | 59 56 | 440,97 |
| Em Archangel - - - - - - - - - - | 64 35 | 441,13 |
| Em Pello - - - - - - - - - - - - - | 66 48 | 441,17 |

Todos eſtes reſultados, e muitos outros concordaõ em provar a diminuiçaõ da gravidade dos pólos para o equador; e deſta diminuiçaõ ſe conclue a exiſtencia da força centrifuga procedida da rotaçaõ da terra, a qual traz comſigo a figura ellipſoidal, e o abatimento da terra para a parte dos pólos, regulado pelo livel das aguas do mar.

421 O tempo, que o movel gaſta em deſcer pela corda *AD*, he igual ao tempo que gaſtaria em cahir pelo diametro vertical; e eſte tempo he repreſentado pela formula $2\sqrt{\frac{a}{g}}$. Mas o tempo que elle gaſta em deſcer pelo arco *AMD* he $\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{a}{g}}$, e $\frac{1}{2}c$ he menor que 2. Logo he menor o tempo da deſcida pelo arco *AMD*, do que pela corda *AD*. Neſte caſo, ainda que a linha

recta seja o caminho mais breve, naõ he com tudo o que exige o menor tempo, nem taõ pouco o mesmo circulo. Ha muito tempo que *M. Bernoulli* mostrou pela primeira vez, que a cycloide he a que tem esta notavel propriedade, como adiante veremos.

422 EXEMPLO II. Sejaõ $AB$, $AC$ duas semicycloides (Fig. 163.), descritas pela rotaçaõ do circulo que tem por diametro $AK$, sobre a horizontal $GKH$. Tomando-se hum fio $ARM$ duplo de $AK$, ou igual no comprimento a huma destas curvas, suspendendo-se por huma das extremidades no ponto $A$, e suppondo-se na outra extremidade hum corpo infinitamente pequeno, este corpo no seu movimento descreverá a cycloide inteira $BDC$, cujo circulo genitór será igual ao das duas semicycloides, e cuja base será a horizontal $BKC$. Isto posto, pergunta-se o tempo de huma oscillaçaõ deste pendulo pelo arco $FDF'$.

Seja o comprimento do pendulo $= a$, e conseguintemente o diametro do circulo genitór $= \frac{1}{2} a$, o arco $DM = s$, e $DP = x$. Pela natureza da cycloide teremos $s^2 = 2ax$, e conseguintemente $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax}}$. Chamando pois $b$ a altura $DE$ do ponto $F$, onde começa o movimento, a velocidade do movel no ponto $M$ será $u = \sqrt{2g(b-x)}$; donde resulta $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx - xx)}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Mas o integral de $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$ tomado entre os limites de $x = b$, e $x = 0$, sempre se reduz a $c$; logo o tempo da descida pelo arco $FMD$ será $t = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g}}$, e o tempo de huma oscillaçaõ inteira pelo arco $FDF'$ será $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$. Donde se vê, que este tempo he sempre para o que gastaria o movel em descer pelo diametro vertical $KD$ como $c$ para $1$, ou como a circumferencia para o diametro de hum circulo. Logo *todas as oscillações de hum pendulo, que descre-*

*se quaisquer arcos de huma cycloide, saõ de igual duraçaõ.*

423 Esta singular propriedade deu á cycloide, e a todas as outras curvas que tem a mesma ventagem, o nome de *Curvas Tautóchronas*. M. Huyghens, homem de raro ingenho, foi o primeiro, que depois de haver demonstrado que tanto as pequenas como as grandes oscillações de hum mesmo pendulo, suspendido da fórma referida entre duas laminas cycloidais, saõ todas feitas em tempos iguais, imaginou que hum pendulo desta especie seria proprio para regulador do movimento dos relogios. E com effeito; ainda que as impressões da roda de encontro sejaõ desiguais, as oscillações deste pendulo naõ deixaráõ por isso de ser isóchronas.

Mas esta invençaõ, ainda que de summa belleza na theorica, naõ foi de grande utilidade na pratica. Para se conseguir o bom effeito della, era necessario vencer difficuldades quasi insuperaveis. Consistem estas em dar, e conservar ás laminas de metal $AR$, $AR'$ huma figura cycloidal bem exacta, e bem igual; e como podia lizongear-se alguem de o conseguir, concorrendo tantas causas para o embaraçar? A contracçaõ inevitavel das laminas no tempo de frio, e a dilataçaõ no tempo de calor se oppunhaõ sobre tudo á uniformidade da sua figura, e isto bastava para fazer duvidoso o isochronismo do novo pendulo. Por este, e outros inconvenientes, determináraõ os Artistas substituir o pendulo circular em lugar do cycloidal de M. Huyghens, depois de se haver demonstrado que as oscillações por arcos pequenos de circulo eraõ igualmente isochronas, quanto bastava para o uso que se procurava. Mas para julgar do merecimento das invenções modernas, relativamente á perfeiçaõ do pendulo circular, e á medida do tempo, será necessario ler as Obras dos Sabios, que particularmente se occupáraõ nesta materia.

424 Seja $EMD$ huma curva qualquer (Fig. 164.), e $E$ o ponto donde hum corpo principia a cahir, em virtude de huma força centripeta $P$ dirigida para $C$, e proporcional a qualquer funçaõ das distancias; deve determinar-se a velocidade deste corpo em qualquer ponto $M$, e o tempo da sua descida pelo arco $EM$.

Fazendo $CM = z$, resolvamos a força $P$ dirigida por $MC$ em outras duas, huma normal, e outra tangencial.

cial. A primeira ſerá $\frac{P\sqrt{(ds^2-dz^2)}}{ds}$, que ajuntando-ſe com a força centrifuga $\frac{uu}{R}$ dará a preſſaõ total ſobre a curva. A ſegunda ſerá $\frac{-Pdz}{ds}$, e eſta deverá unicamente accelerar o movimento. Logo $gdv = -Pdz$, e $gv = gb - \int Pdz$. O tempo ſe determinará conſeguintemente pela formula $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2gb-2\int Pdz)}}$.

Exemplo. Supponhamos, que o arco $EMD$ he infinitamente pequeno, que encontra a angulos rectos o eixo $CD$, e que o raio oſculador em $D$ he $= a$. Neſte caſo podemos conſiderar o arco $EMD$ como hum arco do circulo deſcrito com o raio $a$, e a potencia $P$ como conſtante, e como repreſentada por $ng$. Teremos pois $v = n(b-z)$, ſendo $CE = b$; logo $dt\sqrt{2gn} = \frac{-ds}{\sqrt{(b-z)}}$. Porém pela natureza do circulo, pondo $CD = f$, e $DP = x$, temos $2ax - xx + (f+x)^2 = zz$; logo $x = \frac{zz-ff}{2a+2f}$, e $ss = 2ax = \frac{zz-ff}{a+f}a$; logo $zz = ff + \frac{a+f}{a}ss$, e $z = f + \frac{a+f}{2af}ss$.

Mas quando $z = b$, a quantidade $s$ deve ſer $= DME$ que chamaremos $m$; logo $b-z = \frac{a+f}{2af}(mm-ss)$; logo em fim $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(mm-ss)}}\sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. Tomando pois o integral entre os limites $s = m$, e $s = o$; teremos $t = \frac{1}{2}c\sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$, e conſeguintemente o

tempo

tempo de huma oſcillaçaõ inteira pelo arco infinitamente pequeno $EDE'$ ſerá $T = c\sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. Ora o pendulo, que tem o comprimento $l$, e que he animado pela força da gravidade $g$, por direcções parallelas, faz as ſuas oſcillações em hum tempo repreſentado por $c\sqrt{\frac{l}{g}}$; logo no caſo precedente o comprimento do pendulo ſimples iſochrono deve ſer $\frac{af}{n(a+f)}$.

425 Se $EMD$ foſſe huma linha recta, o raio oſculador $a$ ſeria infinito, e teriamos entaõ $T = c\sqrt{\frac{f}{ng}}$; e ſe a força central foſſe a meſma da gravidade, ſeria neſſe caſo $T = c\sqrt{\frac{f}{g}}$. Donde ſe ſegue, que hum corpo ſobre hum plano perfeitamente horizontal, ſobre o qual naõ experimentaſſe fricçaõ alguma, ſendo apartado hum pouco do ponto $D$ por onde paſſa a perpendicular conduzida do centro $C$, faria oſcillações, cadahuma das quais teria por duraçaõ $c\sqrt{\frac{f}{g}}$. Teria pois o pendulo iſochrono por comprimento hum ſemidiametro terreſtre e faria cada oſcillaçaõ em 42′ 12″; e por conſeguinte, para fazer 17 oſcillações, ſeriaõ neceſſarias quaſi 12 horas inteiras.

## *Do Movimento de Oſcillaçaõ nos meios reſiſtentes.*

426 Examinemos agora o movimento de hum pendulo cycloidal (Fig. 163.), no caſo de ſer a reſiſtencia do meio na raſaõ duplicada da velocidade, que he, como já temos dito, a hypotheſe que ſe conforma com as experiencias.

Seja $DA = a$, $DK = \frac{1}{2}a$, $DP = x$, $DM = s = \sqrt{2ax}$. A força da gravidade $g$ accelerará o corpo pela dire-

direcçaõ da tangente, e esta acceleraçaõ será $\frac{g\,dx}{ds}$; e a resistencia do meio, pelo contrario, o retardará com a força $\frac{gu^2}{b^2}$, ou $\frac{gv}{k}$. Logo $dv = -dx + \frac{v\,ds}{k}$, ou $dv - \frac{v\,ds}{k} = -dx = -\frac{s\,ds}{a}$. Multiplicando por $e^{-\frac{s}{k}}$, teremos $e^{-\frac{s}{k}}dv - \frac{v\,ds}{k}e^{-\frac{s}{k}} = \frac{-s\,ds}{a}e^{-\frac{s}{k}}$, cujo integral he $e^{-\frac{s}{k}}v = C + \frac{k^2+sk}{a}e^{-\frac{s}{k}}$, ou $v = Ce^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2+sk}{a}$. Mas sendo o arco $DMF = m$, he necessario que tenhamos $s = m$, quando for $v = 0$; logo $Ce^{\frac{m}{k}} + \frac{k^2+mk}{a} = 0$; e conseguintemente $v = \frac{k^2+sk}{a} - \frac{k^2+mk}{a}e^{\frac{s-m}{k}}$.

A maior velocidade será, quando $dv = 0$. Entaõ pela equaçaõ differencial teremos $\frac{v}{k} = \frac{s}{a}$; e pela ultima equaçaõ, $k - (k+m)e^{\frac{s-m}{k}} = 0$. Donde tiraremos $s = m - kl\left(1 + \frac{m}{k}\right)$, e conseguintemente $s = \frac{m^2}{2k} - \frac{m^3}{3k^2} + \frac{m^4}{4k^3}$ &c. Aqui naõ he pois o lugar da maior velocidade no ponto mais baixo da curva $D$, como no vacuo, mas hum pouco antes do movel chegar a $D$.

427 A altura devida á velocidade do movel no pon-

to $D$ he $\frac{k^2}{a} - \frac{k^2+mk}{a} e^{\frac{-m}{k}}$. Com esta subirá pelo arco $DF'$; mas entaõ se ajuntará a força da gravidade $\frac{gdx}{ds}$ com a resistencia do meio $\frac{gv}{k}$ a retardar-lhe o movimento. Logo teremos $dv = -dx - \frac{vds}{k}$, ou $dv + \frac{vds}{k} = -dx$. Esta formula se integrará como a da descida, advertindo sómente que $k$ deve tomar-se negativamente. Assim teremos $v = C'e^{\frac{-s}{k}} + \frac{k^2 - sk}{a}$. Mas quando $s = o$, he $v = \frac{k^2}{a} - \frac{k^2+mk}{k} e^{\frac{-m}{k}}$; logo $C' = -\frac{k^2+mk}{a} e^{\frac{-m}{k}}$, e por conseguinte $v = \frac{k^2 - sk}{a} - \frac{k^2+mk}{a} e^{\frac{-s-m}{k}}$.

Seja $m'$ o arco total $DF''$, que o corpo descreve na subida. Acharemos o valor de $m'$, fazendo $v = o$, e resolvendo a equaçaõ $k - m' = (k+m) e^{\frac{-m-m'}{k}}$, ou $(k-m') e^{\frac{m'}{k}} = (k+m) e^{\frac{-m}{k}}$. Reduzindo esta equaçaõ a duas series, teremos $\frac{-m'^2}{2} + \frac{m'^3}{3k} + \frac{m'^4}{8k^2} + \frac{m'^5}{30k^3}$ &c $= \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3k} + \frac{m^4}{8k^2} - \frac{m^5}{30k^3}$ &c; donde pelo methodo inverso das series, se tira $m' = m - \frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{k} + \frac{4}{9} \cdot \frac{m^3}{k^2} - \frac{44}{135} \cdot \frac{m^4}{k^3} +$ &c.

428 Esta ultima serie he de grande uso, quando a resistencia do meio he pequena; porque entaõ he $k$ muito

to grande. Por outra parte advertiremos, que esta serie se chega muito para huma progressaõ geometrica, por quanto os tres primeiros termos estaõ exactamente em proporçaõ, e o quarto estará tambem se lhe suppusermos o coefficiente $\frac{8}{27}$, que differe pouco de $\frac{44}{135}$. Somando pois esta serie de termos, acharemos $m' = \frac{3km}{3k+2m}$. Sendo pois o arco descrito na descida representado por $m$, teremos $\frac{3km}{3k+2m}$ por expressaõ do arco da subida; e porque esta ultima quantidade he menor que $m$, concluiremos que os corpos em hum meio resistente naõ tem, como no vacuo, a propriedade de subirem a alturas iguais ás donde desceraõ; facto, que pela experiencia de todos os dias he manifesto.

429 Sendo feita a primeira oscillaçaõ pelo arco $m + m'$, o movel começará a segunda descendo pelo arco $m'$, e acaballa-ha subindo pelo arco $m'' = \frac{3km'}{3k+2m'}$. Substituindo nesta expressaõ o valor de $m' = \frac{3km}{3k+2m}$, teremos $m'' = \frac{3km}{3k+4m}$. Do mesmo modo fará a terceira oscillaçaõ descendo pelo arco $m''$, e subindo por outro arco mais pequeno $m''' = \frac{3km''}{3k+2m''} = \frac{3km}{3k+6m}$. Logo em geral, quando fizer a oscillaçaõ $n$, descerá por hum arco $= \frac{3km}{3k+2m(n-1)}$, e subirá por hum arco $= \frac{3km}{3k+2mn}$.

Chamando $M$ este ultimo arco, teremos $M = \frac{3km}{3k+2mn}$, ou $3k(m-M) = 2nmM$; donde se vê, que o numero das oscilaçoens he proporcional a $\frac{1}{M} - \frac{1}{m}$. Tambem

bem se poderia conhecer por experiencia a quantidade $k$ que exprime a resistencia, medindo o primeiro arco de descida $m$, e o ultimo de subida $M$, e contando-se exactamente o numero das oscillaçoens.

430 Agora para determinarmos o tempo de huma oscillaçaõ, deveremos recorrer á formula que acima achamos, $v = \frac{k^2 + sk}{a} - \frac{k^2 + mk}{a} e^{\frac{s-m}{k}}$, a qual sendo convertida em huma serie dá $av = k^2 + sk - (k^2 + mk)$ $\left(1 + \frac{s-m}{k} + \frac{(s-m)^2}{2k^2} + \frac{(s-m)^3}{6k^3} + \frac{(s-m)^4}{24k^4} \&c\right)$ $= \frac{m^2 - s^2}{2} - \frac{(2m+s)(m-s)^2}{6k} + \frac{(3m+s)(m-s)^3}{24k^2}$ $- \frac{(4m+s)(m-s)^4}{120k^3} + \&c.$ Logo $V\left(\frac{m^2 - s^2}{2av}\right)$ $= 1 + \frac{(2m+s)(m-s)}{6k(m+s)} + \frac{m^2(m-s)^2}{24k^2(m+s)^2}$ &c. E porque $dt = \frac{-ds}{V2gv}$, teremos

$$dt = \left(\frac{-ds}{V(m^2 - s^2)} - \frac{1}{6k} \cdot \frac{ds(2m+s)(m-s)}{(m+s)V(m^2 - s^2)}\right.$$
$$\left. - \frac{m^2}{24k^2} \cdot \frac{ds(m-s)^2}{(m+s)^2 V(m^2 - s^2)} \&c\right) V\frac{a}{g}.$$

Porém $\int \frac{-ds}{V(m^2 - s^2)} = Arc\ cos\ \frac{s}{m}$, que se reduz a $\frac{1}{2}c$ quando $s = 0$. O outro termo $\frac{-ds(2m+s)(m-s)}{(m+s)V(m^2 - s^2)}$ póde coverter-se em $\frac{-2m^2 ds}{(m+s)V(m^2 - s^2)} + \frac{sds}{V(m^2 - s^2)}$, cujo integral he $2mV\frac{m-s}{m+s} - V(m^2 - s^2)$, que sendo $s = 0$ se reduz a $m$. E o terceiro termo $\frac{-ds(m-s)^2}{(m+s)^2 V(m^2 - s^2)}$ tem

tem por integral $-2\sqrt{\frac{m-s}{m+s}} + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{m-s}{m+s}\right)^{\frac{3}{2}}$

$+ 2\ Arc\ tang \sqrt{\left(\frac{m-s}{m+s}\right)}$, o qual ſendo $s = o$ ſe reduz a $-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}c$. Logo em fim ſerá o tempo da deſcida pelo arco $FMD$ determinado pela equaçaõ

$$t = \left[\frac{c}{2} + \frac{m}{6k} + \frac{m^2}{24k^2}\left(\frac{c}{2} - \frac{4}{3}\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}:$$

431 Quanto ao tempo da ſubida, notaremos que entaõ he $v = \frac{k^2 - sk}{a} - \frac{k^2 + mk}{a} e^{\frac{-s-m}{k}}$; e que ſendo $m'$ o arco total, he $(k + m)\ e^{\frac{-m}{k}} = (k - m')\ e^{\frac{m'}{k}}$; logo teremos $av = k^2 - sk - (k^2 - m'k)\ e^{\frac{m'-s}{k}}$; equaçaõ, que ſe deduz da formula $av = k^2 + sk - (k^2 + mk)\ e^{\frac{s-m}{k}}$, que temos achado para a deſcida, pondo $m'$ em lugar de $m$, e fazendo $k$ negativo. Como pois o integral, que dá o tempo da ſubida, deve igualmente tomar-ſe entre os limites $s = o$, e $s = m'$, naõ he neceſſario mais do que fazer $k$ negativo, e pôr $m'$ em lugar de $m$ na formula do tempo da deſcida; e aſſim teremos por expreſſaõ do tempo da ſubida

$$t' = \left[\frac{c}{2} - \frac{m'}{6k} + \frac{m'^2}{24k^2}\left(\frac{c}{2} - \frac{4}{3}\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}:$$

Ajuntando eſtas duas formulas, teremos pois o tempo T de huma oſcillaçaõ inteira pela equaçaõ ſeguinte

$$T = \left[c + \frac{m-m'}{6k} + \frac{m^2 + m'^2}{24k^2}\left(\frac{c}{2} - \frac{4}{3}\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}:$$

432 Se neſta equaçaõ ſubſtituirmos o valor de $m'$, que he

he $m - \frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{k}$ &c, isto he, se puzermos $\frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{k}$ em lugar de $m - m'$, e $m^2$ em lugar de $m'^2$, teremos

$$T = \left(1 + \frac{m^2}{24k^2}\right) c \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Donde se vê, que este tempo naõ excede o que já temos achado para huma oscillaçaõ feita no vacuo, senaõ em huma quantidade extremamente pequena $\frac{m^2}{24k^2} c \sqrt{\frac{a}{g}}$, a qual he proporcional ao quadrado do arco descrito pelo pendulo.

Quando o pendulo fizer a oscillaçaõ $n$, he o arco da subida $M = \frac{3km}{3k + 2mn}$, e o da descida precedente $= \frac{3km}{3k + 2m(n-1)}$. Logo será o tempo desta oscillaçaõ representado por $\left(1 + \frac{3m^2}{8(3k + 2m(n-1))^2}\right) c \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Eisaqui todas as circunstancias do movimento de hum pendulo cycloidal, determinadas para qualquer oscillaçaõ feita em hum meio de pouca resistencia, como he o ar por exemplo; e tudo isto póde applicar-se ao pendulo circular, quando os arcos das oscillações forem pequenos.

433 Quando a resistencia dos fluidos he em parte constante, e em parte proporcional ao quadrado da velocidade, he necessario nos movimentos mais vagarosos, ou nas oscillações muito pequenas, attender á primeira parte que póde vir a ser sensivel em comparaçaõ da segunda. Esta consideraçaõ naõ faz o calculo mais complicado, como he facil de ver pela applicaçaõ seguinte.

Supponhamos que o ponto $F$ (Fig. 163.) he o principio da descida pelo arco $FMD$, e que o movel se acha em qualquer ponto $M$. Fazendo $DP = x$, e $DM = s$, será $\frac{g\,dx}{ds}$ a força tangencial que resulta da gravidade; e designando por $R$ a resistencia, teremos $dv = -dx + \frac{R\,ds}{g}$. Porém neste caso a resistencia $R$ he composta da

parte

parte $\frac{gv}{k}$ proporcional ao quadrado da velocidade, e de huma parte constante $\frac{gb}{k}$; logo $dv = -dx + \frac{vds}{k} + \frac{bds}{k}$; equação, que dará geralmente a velocidade do movel, seja qual for a curva que elle descreva pelo seu movimento.

Se for huma cycloide, sendo o comprimento do pendulo $= a$, teremos $s^2 = 2ax$, e $dx = \frac{sds}{a}$; logo $dv - \frac{vds}{k} = - \frac{sds}{a} + \frac{bds}{k}$. Multiplicando por $e^{\frac{-s}{k}}$, e integrando, $ve^{\frac{-s}{k}} = C - be^{\frac{-s}{k}} + \frac{k^2 + sk}{a} e^{\frac{-s}{k}}$; e porque no caso de $s = m$, deve ser $v = o$, teremos $C = - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$, e $v = \frac{k^2 + sk}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{s-m}{k}}$. Logo, quando $s = o$, isto he, no ponto mais baixo da curva $D$, será a velocidade do movel devida á altura $\frac{k^2}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$.

Pelo que respeita ao ascenso, será $dv + \frac{vds}{k} = - \frac{sds}{a} - \frac{bds}{k}$. Multiplicando por $e^{\frac{s}{k}}$, e integrando, teremos $ve^{\frac{s}{k}} = C' - be^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2 - sk}{a} e^{\frac{s}{k}}$, e conseguintemente

$v = C' e^{\frac{-s}{k}} - b + \frac{k^2 - sk}{a}$. Mas sendo $s = 0$, deve ser $v = \frac{k^2}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$; logo $C' = -\left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$, e por conseguinte $v = \frac{k^2 - sk}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-s-m}{k}}$. E porque sendo $s = m'$, temos $v = 0$, será $\frac{k^2 - m'k}{a} - b = \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m'-m}{k}}$, ou $(k^2 - m'k - ab) e^{\frac{m'}{k}} = (k^2 + mk - ab) e^{\frac{-m}{k}}$.

O methodo inverso das series dará $m' = m - \frac{1}{k}\left(2ab + \frac{2}{3}m^2\right) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{4}{3}abm + \frac{4}{9}m^3\right)$ &c $= m\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{k} + \frac{4}{9}\cdot\frac{m^2}{k^2}\right) - \frac{2ab}{k}\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{k}\right) = \left(m - \frac{2ab}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{k} + \frac{4}{9}\cdot\frac{m^2}{k^2}\right) = \frac{3km - 6ab}{3k + 2m}$.

Na segunda oscillaçaõ será pois o arco da subida $m'' = \frac{3km' - 6ab}{3k + 2m'} = \frac{3km - 12ab}{3k + 4m}$; na terceira oscillaçaõ $m''' = \frac{3km'' - 6ab}{3k + 2m''} = \frac{3km - 18ab}{3k + 6m}$; e em geral na oscillaçaõ $n$, será o arco da subida que chamamos $M =$

$\frac{3km - 6nab}{3k + 2nm}$. Donde ſe póde tirar $n = \frac{3k(m - M)}{2mM + 6ab}$.

Daqui ſe ſegue, que medindo bem exactamente o arco da deſcida $m$ na primeira oſcillaçaõ, e o arco $M$ da ſubida na ultima, havendo-ſe tambem contado o numero total das oſcillações, teremos huma equaçaõ entre $b$ e $k$. Repetindo ſegunda vez a meſma experiencia, teremos outra equaçaõ entre as meſmas quantidades $b$ e $k$, a qual combinada com a primeira ſervirá para determinar o valor de cada huma dellas. Por eſte meio pois conheceremos a reliſtencia abſoluta do ar, tanto a parte proporcional ao quadrado da velocidade, como a parte conſtante.

## *Exemplo tirado de algumas experiencias de Newton ſobre a reſiſtencia do ar.*

434 ENtre outras experiencias feitas com muito cuidado ſobre eſta materia, lemos nos Principios de Newton *L. II. Sect. VI. Prop. XXXI* a experiencia ſeguinte.

Hum globo de madeira, que tinha de diametro 6 pollegadas e $\frac{7}{8}$ de Londres, e que pezava 57 onças Romanas e $\frac{7}{22}$, eſtava pendurado de hum fio de maneira, que o centro de oſcillaçaõ (onde todo o corpo ſe conſidera eſtar reunido, e oſcillar como hum ponto) diſtava do ponto de ſuſpenſaõ 10 pés e $\frac{1}{2}$, medida de Londres. Tinha-ſe feito no fio hum nó diſtante do ponto de ſuſpenſaõ 10 pés e huma pollegada. O arco deſcrito por eſte nó ſervia para medir o que deſcrevia o centro de oſcillaçaõ no meſmo tempo; e para eſte effeito ſe multiplicava o primeiro por $\frac{126}{121}$.

Poz-ſe eſte pendulo em movimento, de maneira que o arco descrito pelo nó até a vertical fosse de 2 pollegadas, e deixou-se oscillar até perder a oitava parte do movimento. Elle a perdeu no fim de 164 oscillações, e o ultimo arco de subida foi de 1 pollegada e $\frac{3}{4}$.

Depois afastou-se o nó da vertical 4 pollegadas; e observou-se, que tendo feito 121 oscillações perdeu a oitava parte do movimento, e foi o ultimo arco de subida 3 pollegadas $\frac{1}{2}$. Em fim repetindo a mesma operação a respeito de outras distancias, se achárão os resultados seguintes.

| Primeiro arco de descida | Ultimo arco de subida | Numero das oscillações |
|---|---|---|
| 2 | $1\frac{3}{4}$ | 164 |
| 4 | $3\frac{1}{2}$ | 121 |
| 8 | 7 | 69 |
| 16 | 14 | $35\frac{1}{2}$ |
| 32 | 28 | $18\frac{1}{2}$ |
| 64 | 56 | $9\frac{2}{3}$ |

Appliquemos agora a theorica a estas experiencias, porque os resultados são muito interessantes.

Sendo o primeiro arco de descida $= m$, no fim de hum numero $n$ de oscillações teremos o ultimo arco de subida $= \frac{3km - 6nab}{3k + 2nm}$, quantidade que no caso destas experiencias he $= \frac{7}{8}m$; e conseguintemente deveremos ter $\frac{3}{8}km = n\left(\frac{7}{4}m^2 + 6ab\right)$.

Seja

Seja $m'$ outro arco de descida, e $n'$ o numero das oscillações correspondentes. Igualmente teremos $\frac{3}{8} k m' = n' \left( \frac{7}{4} m'^2 + 6 a b \right)$; logo $\frac{3}{8} k \left( \frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} \right) = \frac{7}{4} \left( m^2 - m'^2 \right)$, e finalmente $k = \frac{14}{3} \cdot \frac{m^2 - m'^2}{\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}}$.

Se $m$ for duplo de $m'$, como succede tomando duas observações consecutivas da Taboa precedente, será $k = \frac{14 m' n n'}{2 n' - n}$. Porém he de advertir, que $m'$ he o arco descrito pelo centro de oscillação, e se em lugar delle substituirmos o arco descrito pelo nó, resultará por valor de $k$ $\frac{121}{126}$ da sua verdadeira quantidade sómente.

Tomemos pois as duas primeiras observações, que daõ $m' = 2$, $n' = 164$, $n = 121$; e acharemos $\frac{14 m' n n'}{2 n' - n} = 2684$ pollegadas $= 223$ pés e $\frac{2}{3} = \frac{121}{126} k$. Tomando a segunda e terceira das mesmas observações, e fazendo $m' = 4$, $n' = 121$, $n = 69$, acharemos $\frac{121}{126} k = 225$ pés e $\frac{1}{4}$. E comparando do mesmo modo duas a duas as observações seguintes, teremos por $\frac{121}{126} k$ em pés de Londres os valores seguintes

$$223 \frac{2}{3} \ldots\ldots 225 \frac{1}{4} \ldots\ldots 223 \ldots\ldots 233 \frac{1}{2} \ldots\ldots 244.$$

He verdade que os dous ultimos valores differem sensivelmente dos tres primeiros. Mas deve advertir-se, que esta theorica calculada para os pendulos cycloidais, naõ póde applicar-se aos circulares, senaõ quando os arcos destes saõ muito pequenos. E por isso devia necessariamente achar-se huma differença sensivel nos dous ultimos valores, por terem resultado de oscillações feitas por arcos algum tanto consideraderaveis, ſendo hum de 32 pollegadas, e o outro de 64.

Se nos cingirmos pois aos tres primeiros valores, como deve ſer, a ſua conformidade he quanta ſe podia eſperar de experiencias de tal delicadeza; e ſe tomarmos o meio arithmetico, teremos 224 pés por valor real de $\frac{121}{126}k$. Logo $k = 233$ pés de Londres; e porque o pé de Londres he para o de Paris como 811 para 864, ſerá $k = 219$ pés de Paris.

Sendo pois o globo deſtas experiencias animado de huma velocidade devida á altura de 219 pés, experimentaria da parte do ar huma reſiſtencia igual á gravidade; e conſeguintemente, em havendo adquirido eſta velocidade continuaria a mover-ſe uniformemente, porque a acceleraçaõ da gravidade ſeria igual e contraria á reſiſtencia do fluido.

435 Determinada a quantidade $k$, que mede a parte principal deſta reſiſtencia, iſto he, a parte proporcional ao quadrado da velocidade, falta determinar $b$ que mede a parte conſtante. Para iſſo uſaremos da equaçaõ $\frac{3}{8} \cdot \frac{km}{n} = \frac{7}{4}m^2 + 6ab$, que dá $48\,ab = 3k \cdot \frac{m}{n} - 14m^2$. Ora na primeira deſtas obſervações $m = \frac{126}{121} \cdot 2$ pollegadas, $k = \frac{126}{121} \cdot 12 \cdot 224$, $a = 126$, e $n = 164$; logo $b = 0{,}00759$ de huma pollegada.

Calculando a meſma quantidade pela ſegunda experiencia, e tomando $m = \frac{126}{121} \cdot 4$, e $n = 121$, teremos $b = 0{,}00763$; reſultado muito conforme ao primeiro, para deixar de inſpirar confiança na theorica, que a elle nos conduzio. Se tomarmos o meio arithmetico, acharemos $b = 0{,}00761$ de huma pollegada. E porque temos ſuppoſto, que a parte conſtante da reſiſtencia era repreſentada por $\frac{gb}{k}$; ſubſtituindo o valor de $k = 12 \cdot 233$ pollegadas, ſerá $\frac{b}{k} = 0{,}0000027$.

Assim achamos, que a resistencia constante que o globo experimenta da parte do ar he proximamente huma quatro-centesima-millesima parte da gravidade. Mas ainda que fosse mais pequena, sempre della deveria fazer-se caso nos movimentos muito vagarosos, porque póde entaõ exceder infinitamente a parte da resistencia, que he proporcional ao quadrado da velocidade.

436 Como esta resistencia constante tem lugar em todos os fluidos, póde succeder que o pendulo fique em equilibrio, sem que o fio esteja exactamente vertical. Basta para isso (Fig. 162.), que a força tangencial $g$ *sen* $MCD$ da gravidade seja igual á resistencia $\frac{g}{400000}$; e por conseguinte, que o seno de $MCD$ seja 0,0000027; donde resulta o angulo $MCD$ de $33'''$. Logo o prumo indicado pelo pendulo destas experiencias podia distar da verdadeira vertical $33'''$.

437 Daqui se segue, que o referido pendulo devia ficar em quietaçaõ, assim que o ultimo arco de subida fosse $= \frac{ab}{k}$. O numero das oscillações necessarias para chegar a este estado se calculará pela formula $\frac{ab}{k} = \frac{3km - 6nab}{3k + 2nm}$; donde se tira $anb = \frac{3km - 3ab}{6 + \frac{2m}{k}}$. E applicando esta formula á primeira experiencia, teremos $n = 8565593$ oscillações, que devia fazer o pendulo antes de haver perdido todo o seu movimento.

E porque o comprimento deste pendulo era de 126 pollegadas de Londres, ou de $\frac{21 \cdot 811}{1728}$ pés de Paris, o tempo de cada oscillaçaõ devia ser de $1'',7948$. Logo deveria o pendulo oscillar por pouco menos de 178 dias, fazendo abstracçaõ naõ sómente da resistencia, que o ar oppunha ao movimento do fio, mas tambem da fricçaõ occasionada pelo ponto de suspensaõ. Na pratica porém naõ he necessario tanto tempo, porque o movimento brevemente se faz insensivel, e entaõ he como se já tivesse chegado ao estado de quietaçaõ.

Da

## *Da Linha do mais breve descenso.*

438 PEde-se, que entre dous pontos dados $A$, $B$ (Fig. 165.), se descreva em hum plano vertical a curva $AMB$, de maneira que descendo hum corpo por ella, de $A$ até $B$, corra o arco $AB$ no menor tempo possivel.

Este Problema se reduz a achar a linha, na qual a expressaõ do tempo he hum *minimo*. Para a determinar, conduzamos pelo ponto $A$ huma horizontal $AP$, e tomemos na curva dous elementos consecutivos $MM'$, $M'M''$. Dos pontos $M$, $M'$, $M''$ levantemos $MP$, $M'P'$, $M''P''$ perpendiculares á recta $AP$, e seja $AP = x$, $PM = y$, e $AM = s$.

Isto posto, quando o corpo chegar ao ponto $M$ deverá ter a mesma velocidade, como se houvesse cahido pela vertical $PM$; e conseguintemente o tempo empregado em correr o arco $AM$ será representado por $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. He logo necessario que $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$, ou simplesmente que $\int \frac{ds}{\sqrt{y}}$ seja hum *minimo*.

Para exprimir esta condiçaõ, supponhamos que o ponto $M'$ varia infinitamente pouco na direcçaõ horizontal. Está claro, que se o arco $MM''$ faz parte da curva procurada, o tempo naõ deve por isso variar. Por conseguinte, a unica parte do tempo susceptivel de variaçaõ, he a que emprega o corpo em correr os dous elementos consecutivos $MM'$, $M'M''$, ou $\frac{ds}{\sqrt{y}} + \frac{ds'}{\sqrt{y'}}$. Com effeito, de qualquer maneira que seja situado o ponto $M'$, se elle sómente variar, a velocidade em $M''$ para correr $M''B$ será sempre a mesma.

Teremos pois $\frac{\delta ds}{\sqrt{y}} + \frac{\delta ds'}{\sqrt{y'}} = 0$; e porque $ds^2 = dx^2 + dy^2$, acharemos que $ds\,\delta ds = dx\,\delta dx$, e que $ds'\,\delta ds' = dx'\,\delta dx'$. Logo $\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta dx + \frac{dx'}{ds'\sqrt{y'}}\delta dx'$

 $= 0$.

$= 0$. Mas ſendo $dx + dx'$ huma quantidade conſtante; temos $\delta dx' = -\delta dx$; logo $\frac{dx'}{ds'\sqrt{y'}} - \frac{dx}{ds\sqrt{y}} = 0$, e conſeguintemente $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\right) = 0$, equaçaõ da curva procurada.

Integrando, teremos $\frac{dx}{ds\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ou $a\,dx^2 = y\,ds^2 = y\,dx^2 + y\,dy^2$; logo $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$. Eſta equaçaõ já moſtra, que a curva procurada he a cycloide, como he facil de reconhecer, reduzindo-a a eſta fórma $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{y\,dy - \frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$, cujo integral he $x = C - \sqrt{(ay-yy)} + \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$.

439 Da equaçaõ $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$ ſe ſegue, que no ponto mais baixo da curva $D$ (Fig. 166.) he a ordenada $CD = a$; e ſe imaginarmos hum ſemicirculo deſcrito ſobre o diametro $CD$, e conduzida a horizontal $MQ$, teremos $NQ = \sqrt{(ay-yy)}$, e $CN = \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$; logo $AP = CN - NQ$. Pela meſma raſaõ $AC = CND$; logo $AC - AP$, ou $CP$, ou $MQ = CND - CN + NQ = ND + NQ$, ou $MN = DN$, que he a propriedade mais conhecida da cycloide. Logo *a cycloide he a linha do mais breve deſcenſo.*

440 Como ſaõ dados os dous pontos $A$, e $B$ (Fig. 167.), naõ ſerá difficultoſo deſcrever por elles a curva procurada. Podemos primeiramente deſcrever qualquer cycloide ſobre a baſe horizontal $AL$ tomada arbitrariamente. Encontrando eſta curva a corda $AB$ no ponto $K$, pelo ponto $B$ conduziremos a linha $BF$ parallela a $KL$, e ſerá $AF$ a baſe da cy-

cycloide procurada, ou (que vem a ser o mesmo) será $AF$ igual á circumferencia do circulo genitôr; e sendo este conhecido, a descripçaõ da cycloide procurada naõ tem mais difficuldade. Funda-se esta construcçaõ em que as cycloides saõ curvas semelhantes; effectivamente naõ entra na equaçaõ dellas outra constante que o diametro do circulo genitôr.

Todos os Geometras da primeira ordem se occupáraõ no principio deste seculo sobre o problema da linha do mais breve descenso, e todos acháraõ por resultado hum arco de cycloide. Daqui vem o nome de *Curvas brachistóchronas*, para designar geralmente todas as que em differentes casos tem a propriedade de serem as linhas do mais breve descenso. Mas para tratarmos este artigo com mais generalidade, ajuntaremos o problema seguinte.

441 Sendo hum corpo sollicitado por quaisquer potencias sobre hum plano dado, achar a linha do mais breve descenso de hum ponto até outro qualquer ponto dado (Fig. 165.).

Reduzidas todas as potencias a duas, huma pela direcçaõ $PM$, e a outra parallela a $AP$, seja a primeira $= Y$, a segunda $= X$, e a altura devida á velocidade no ponto $M = v$. Assim teremos por expressaõ do tempo da descida pelo arco $MM'M''$ a quantidade $\frac{ds}{\sqrt{v}} + \frac{ds'}{\sqrt{v'}}$, que differenciada deve por-se $= 0$. Nesta differenciaçaõ, tudo o que depende do ponto $M'$ he variavel; e assim teremos

$$\frac{\delta ds}{\sqrt{v}} + \frac{\delta ds'}{\sqrt{v'}} - \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0.$$

Suppondo, que a fluxaõ do ponto $M'$ se faz horizontalmente, teremos $\delta dy = 0$, e conseguintemente $\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx$, e $\delta ds' = \frac{dx'}{ds'}\delta dx' = -\frac{dx'}{ds'}\delta dx$. Logo

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}} - \frac{dx'}{ds'\sqrt{v'}}\right)\delta dx - \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0,$$ isto he,

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right)\delta dx + \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0.$$

Sendo

Sendo pois a força tangencial $= \frac{X\,dx + Y\,dy}{ds}$, teremos $g\,dv = X\,dx + Y\,dy$, e $g\,dv' = X'\,dx' + Y'\,dy'$ Mudando nesta ultima $d$ em $\delta$, teremos $g\,\delta v' = X'\,\delta x' + Y'\,\delta y' = X'\,\delta\,dx$; logo $\delta v' = \frac{X'}{g}\,\delta\,dx$, e substituindo será a equaçaõ da curva $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right) + \frac{X\,ds}{2g\,v\sqrt{v}} = 0$. Se em lugar da expressaõ $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right)$ substituirmos $\frac{1}{\sqrt{v}}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx\,dv}{2v\,ds\sqrt{v}}$, viremos a ter $2v\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{X\,ds^2 - g\,dx\,dv}{g\,ds} = 0$; e pondo em lugar de $g\,dv$ o seu valor $X\,dx + Y\,dy$, será $2v\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{X\,dy^2 - Y\,dy\,dx}{g\,ds} = 0$, ou $\frac{Y\,dx - X\,dy}{ds} = 2g\,v\,\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$. Mas he o raio osculador $R = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$; logo $\frac{Y\,dx - X\,dy}{ds} = \frac{2g\,v}{R}$. Donde se segue, que *a linha da mais breve descida he aquella, em que a força centrifuga he igual á força normal; de maneira, que a pressaõ total sobre a curva seja o dobro de qualquer dellas.*

442 Esta ultima conclusaõ he o Theorema que M. Euler propoem na sua Mechanica, para a indagaçaõ geral das brachistochronas. Mas esta propriedade naõ se extende aos meios resistentes, porque a velocidade em $M''$ para correr o arco $M''B$ naõ he mais a mesma, quando o ponto $M'$ recebe qualquer variaçaõ. He necessario pois calcular o aumento do tempo por todo o arco $M\,M'\,M'' + M''B$, o que faz esta indagaçaõ muito mais difficultosa.

Da soluçaõ geral, que acabamos de dar, póde facilmente deduzir-se a do primeiro caso. Entaõ he $X = 0$, $Y = g$,

$g$, $v = y$; e teremos $\frac{dx}{ds} = \frac{2y}{R} = \frac{2yd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$. Logo $\frac{dy}{2y} = d\left(\frac{dx}{ds}\right) : \frac{dx}{ds}$; e integrando $\frac{1}{2}\, ly = l\frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}\, la$, ou $y = \frac{adx^2}{ds^2}$; donde ſe tira $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, como tinhamos achado ( n. 438. ).

# SECCAÕ III.

## DO MOVIMENTO DOS CORPOS QUE OBRAM HUNS CONTRA OS OUTROS DE QUALQUER MANEIRA.

NAS duas Secções precedentes temos ſuppoſto os moveis, como pontos ſolitarios, que podiaõ obedecer livremente a toda a ſorte de potencias. Agora determinaremos o ſeu movimento, ſuppondo que elles actuaõ huns contra os outros, ou por colliſaõ, ou por meio de quaiſquer vinculos, com os quais eſtejaõ ligados, e unidos entre ſi.

## ARTIGO I.

### *Do movimento que reſulta da colliſaõ dos corpos.*

443 POſto que naõ conhecemos corpo algum perfeitamente *duro*, nem perfeitamente *elaſtico*, fomos com tudo obrigados a ſuppor-lhe a exiſtencia, para eſtabelecer huma theorica geral das leis do movimento, no caſo da colliſaõ. Por iſſo na applicaçaõ deſtas leis, deveremos tomallas como approximações maiores, ou menores, conforme os corpos ſe chegarem mais ou menos para a *dureza*, ou para a *elaſticidade* perfeita.

Para que elles foſſem perfeitamente duros, era neceſſario que força nenhuma os pudeſſe comprimir, nem alterar em nada a ſua figura; e para que foſſem perfeitamente elaſticos,

ſticos, que a elaſticidade os reſtituiſſe ao primeiro eſtado no meſmo inſtante em que ceſſa a compreſſaõ. Mas para o dizer outra vez, naõ conhecemos corpo algum de volume finito, que tenha perfeitamente qualquer deſtas duas propriedades. O diamante he muito duro, o marfim muito elaſtico; mas naõ paſſaõ de modelos imperfeitos deſtas propriedades.

Sem embargo, depois de havermos poſto o principio que deu M. d' Alembert no ſeu Tratado de Dynamica, para determinar o movimento de muitos corpos, que entre ſi actuaõ de qualquer maneira, applicallo-hemos á colliſaõ dos corpos, e aõ movimento do centro de gravidade do ſeu ſyſtema.

444 Sejaõ *A*, *B*, *C* &c as particulas de qualquer ſyſtema, nas quais ſe imprimaõ reſpectivamente os movimentos *a*, *b*, *c* &c. Como ellas naõ ſaõ livres, ſupponhamos que mudaõ os movimentos recebidos em outros a, b, c &c. Aſſim podemos imaginar que os movimentos impreſſos *a*, *b*, *c*, &c ſaõ compoſtos, cada hum de outros dous, hum a, ou b, ou c &c, que cada particula tomará reſpectivamente, e o outro $\alpha$, ou $\beta$, ou $\gamma$ &c. Os primeiros deſtes movimentos a, b, c &c tem o ſeu effeito inteiramente, ſem que os vinculos do ſyſtema lhe ſirva de embaraço algum, porque tal he a ſuppoſiçaõ. Os outros $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ &c, naõ tendo influido nada em alterar os primeiros, ſeraõ mutuamente deſtruidos entre ſi. Logo ſaõ combinados de maneira, que deixariaõ todo o ſyſtema em equilibrio, ſe as partes delle naõ foſſem animadas de outros movimentos. Daqui reſulta o principio ſeguinte, para achar o movimento de muitos corpos, que actuaõ entre ſi de qualquer maneira.

## *PRINCIPIO FUNDAMENTAL.*

*SE forem reſolvidos os movimentos a, b, c &c, impreſſos nas differentes partes de hum meſmo ſyſtema, cada hum em outros dous* a, $\alpha$; b, $\beta$; c, $\gamma$ *&c, de maneira que naõ dando ás ditas partes outros movimentos mais que* a, b, c *&c, ellas os conſervaſſem, ſem ſe embaraçar mutuamente, e que naõ lhes dando ſenaõ os movimentos* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *&c, todo o ſyſtema ficaſſe em quietaçaõ; entaõ ſeraõ* a, b, c *&c os movimentos, que as partes do ſyſtema tomaráõ em virtude dos*

*dos movimentos impressos a , b , c &c , e da acção reciproca que exercitaõ entre si.*

445 Este principio igualmente simples, e fecundo, extende-se a todas as theorias, que entramos a explicar, principiando pela collisaõ dos corpos duros.

Suppomos aqui, que os centros de gravidade de dous corpos, que se encontraõ, se movem por huma mesma linha, e que o plano tangente ao ponto do encontro he perpendicular á direcçaõ do movimento delles. O concurso destas duas supposições traz sempre comsigo huma percussaõ directa, e exclue conseguintemente todo o movimento de rotaçaõ.

446 Sejaõ pois dous corpos duros $M$, $m$, movidos para a mesma parte com as velocidades $V$, $v$, que pela collisaõ se mudaõ em $u, u'$. Podemos, conforme o principio fundamental, considerar no instante da percussaõ os corpos $M$, $m$, como animados das velocidades $u$, $u'$, que deveráõ conservar depois della, e das velocidades $V-u$, e $v-u'$, que seraõ destruidas. Porém as velocidades $u$, $u'$ naõ devem embaraçar-se reciprocamente, conforme o mesmo principio; logo saõ iguais, porque o corpo que encontra naõ tem acçaõ sobre o encontrado, senaõ até o ponto de serem as velocidades iguais; logo $u = u'$.

Tambem deve haver hum perfeito equilibrio entre o corpo $M$ animado da velocidade $V-u$, e o corpo $m$ animado da velocidade $u'-v$ em sentido contrario. Logo $M(V-u) = m(u-v)$; donde se tira $u = \frac{MV+mv}{M+m}$.

447 Esta formula mostra, que *a velocidade commua dos dous moveis depois do encontro se acha, dividindo a soma das quantidades de movimento, que elles tinhaõ antes do encontro, pela soma das massas.*

Donde se segue, que na hypothese presente se conserva a mesma quantidade de movimento antes, e depois da percussaõ. Ganha hum dos moveis pela collisaõ o que o outro perde pela inercia.

Se os dous moveis caminharem por direcçoens oppostas, faremos $v$ negativo na formula precedente, e teremos $u = \frac{MV-mv}{M+m}$; logo para achar a velocidade commua depois do encontro neste caso, será necessario dividir a diffe-

differença das quantidades de movimento, que os corpos tinhaõ antes da collisaõ, pela soma das massas.

E se hum dos dous corpos, $m$ por exemplo, estiver em quietaçaõ, faremos $v = o$, e será $u = \frac{MV}{M + m}$. Donde se segue, que sempre haverá communicaçaõ de movimento, por muito pequenas que sejaõ tanto a velocidade como a massa do corpo, que fére o outro. Assim póde a menor força finita vencer a inercia da maior massa.

Para darmos hum exemplo destas formulas, sejaõ dous corpos duros, dos quais hum $M$ péza 5 libras, e o outro $m$ péza 3 libras, movidos para a mesma parte com as velocidades respectivas de 9 pés, e 1 pé por segundo. Substituindo estes valores, teremos $u = \frac{5 \cdot 9 + 3 \cdot 1}{5 + 3} = 6$; e diremos, que ambos os corpos depois da collisaõ teraõ a velocidade commua de 6 pés por segundo. Se as direcçoens fossem contrarias, teriamos $u = 5$ pés $\frac{1}{4}$; e se o corpo $m$ estivesse em quietaçaõ, $u = 5$ pés $\frac{5}{8}$.

448 Sendo elasticos porém os dous moveis $M$, $m$, primeiramente se comprimiráõ hum ao outro, até que os seus centros de gravidade, e o ponto de contacto tenhaõ huma velocidade igual, que chamaremos $u$. Mas assim que cessar a compressaõ, os dous corpos se serviráõ mutuamente de apoyo, e a elasticidade retornando forças iguais ás da compressaõ lhes imprimirá a mesma quantidade de movimento, com a qual foraõ comprimidos. Em virtude desta reacçaõ tenderáõ os dous moveis a separar-se hum do outro.

Logo, se elles se moverem para a mesma parte, no qual caso temos $u = \frac{MV + mv}{M + m}$, a força com que o corpo incurrente comprime o outro será $M (V - u)$, e esta lhe será restituida pela elasticidade em sentido contrario. Assim naõ terá depois da percussaõ mais que a velocidade $u$ diminuida de $V$ $u$, isto he, a velocidade de $2u - V$.

O se-

O ſegundo corpo pelo contrario, fazendo equilibrio á compreſſaõ do primeiro com a força $m\ (u-v)$, e ſendo-lhe eſta reſtituida pela elaſticidade ſegundo a direcçaõ do ſeu proprio movimento, deverá mover-ſe depois do encontro com a velocidade $u$ aumentada de $u-v$, que ſe reduz a $2u-v$. Logo *para achar a velocidade de cada hum dos corpos depois da colliſaõ, he neceſſario tirar a ſua velocidade primitiva do dobro da velocidade commua, que ambos teriaõ ſe foſſem perfeitamente duros.*

Se ſuppuzermos, que elles ſe encontraõ por direcçoens contrarias (tomando ſempre $MV$ pela maior quantidade de movimento), teremos $u=\frac{MV-mv}{M+m}$; e a velocidade do corpo $M$ depois da colliſaõ ſerá como d'antes $2u-V$; mas a do corpo $m$ ſerá entaõ $2u+v$, como tambem ſe deduz do caſo precedente, fazendo $v$ negativo.

449 Seja $V'$ a velocidade de $M$, e $v'$ a de $m$ depois da colliſaõ; e ſuppondo que ambos ſe movem para a meſma parte, teremos

$$V'=\frac{2MV+2mv}{M+m}-V=\frac{(M-m)V+2mv}{M+m},$$

$$v'=\frac{2MV+2mv}{M+m}-v=\frac{(m-M)v+2MV}{M+m};$$

donde ſe tira, que $MV'+mv'=MV+mv$, iſto he, que a ſoma das quantidades de movimento he a meſma tanto antes, como depois da colliſaõ.

Mas ſe os moveis ſe encontrarem por direcçoens oppoſtas, teremos entaõ

$$V'=\frac{2MV-2mv}{M+m}-V=\frac{(M-m)V-2mv}{M+m},$$

$$v'=\frac{2MV-2mv}{M+m}+v=\frac{(M-m)v+2MV}{M+m};$$

donde ſe tira eſta equaçaõ $MV'+mv'=MV-mv$, que naõ dá as ſomas das quantidades de movimento iguais, como no caſo precedente.

450 Em ambos os caſos porém, teremos ſempre a equa-

equaçaõ $MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2$. Sendo pois o producto da maſſa de hum corpo pelo quadrado da ſua velocidade chamado por Leibnitz *força viva* do meſmo corpo, podemos dizer neſte ſentido, que *os corpos perfeitamente elaſticos conſervaõ depois da colliſaõ a meſma ſoma das forças vivas, que tinhaõ antes della.*

Podemos pois conſiderar as leis da colliſaõ dos corpos elaſticos, como incluidas neſtas duas equaçoens muito ſimples

$$MV + mv = MV' + mv'$$
$$MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2,$$

das quais ſe deduz outra ainda mais ſimples $V' + V = v' \pm v$, tomando-ſe o ſinal + quando os corpos ſe encontraõ por huma meſma direcçaõ, e — quando ſe encontraõ por direcçoens oppoſtas.

Se o corpo ferido $m$ eſtiver em quietaçaõ, e for a ſua maſſa igual á do corpo incurrente $M$, teremos $M = m$, $v = 0$; e conſeguintemente $V' = 0$, e $v' = V$. Logo o corpo incurrente $M$ ficará em quietaçaõ, e o corpo ferido $m$ partirá com toda a velocidade, que trazia o corpo $M$. Iſto ſe experimenta todos os dias no jogo do bilhar, quando com huma bóla ſe fere outra em cheio.

451 Se ſuppuzermos muitos corpos elaſticos, iguais, contiguos huns aos outros, e que tenhaõ todos o ſeu centro em huma meſma linha, entaõ o movimento impreſſo no primeiro paſſará pelos intermedios a communicar-ſe ao ultimo, e eſte ſó ſe moverá com a velocidade impreſſa, ficando os outros immoveis. Mas ſe fizeſſemos mover os dous primeiros juntamente, entaõ os dous ultimos ſe deſtacariaõ da fileira com a meſma velocidade que os primeiros tinhaõ antes da colliſaõ.

A raſaõ diſto he, porque ferindo o ſegundo corpo primeiramente o terceiro, logo lhe communica a ſua velocidade, que paſſa immediatamente ao ultimo, o qual ſe deſtaca conſeguintemente dos outros; mas como o ſegundo tranſmittindo a ſua velocidade ao ultimo, ſe comprime de ambas as partes, ſepara-ſe hum momento do primeiro, que vem conſecutivamente a fazer o meſmo effeito, deſtacando o penultimo, que ſeguirá por conſeguinte ao ultimo. Em geral, ſempre haverá tantos corpos que ſe deſtacaráõ dos precedentes, quantos forem os que juntamente vierem a ferir a fileira dos outros.

Se

Se dous corpos elasticos $M$, $m$ se encontrarem por direcçoens oppostas, hum $M$ com a velocidade de 7 pés, e o outro $m$ com a de 3 pés por segundo, e com huma massa tripla de $M$, teremos $m = 3M$, $V = 7$, $v = 3$; e substituindo estes valores na formula do segundo caso, acharemos $V' = -8$, e $v' = 2$. Logo os dous moveis tornaráõ para traz pelo mesmo caminho, por onde vieraõ a encontrar-se, com as velocidades respectivas de 8 e de 2 pés por segundo. Pódem ver-se outras applicaçoens em Gravesande *Physices Elementa Mathem.* L. II. Cap. VI.

Até aqui temos considerado a collisaõ entre dous corpos sómente. Quando forem muitos, pelo problema seguinte poderemos conhecer o meio de determinar o seu movimento.

452 Probl. *Sendo dado hum corpo esferico $C$* (Fig. 168.), *movido pela linha $CI$ com a velocidade $CD = V$, e encontrando ao mesmo tempo com os dous corpos $A$, $B$ em quietaçaõ, perguntaõ-se as velocidades de todos tres, e a direcçaõ de $C$ depois da collisaõ.*

Seja $CEK$ a direcçaõ do corpo $C$, e $CE$ a sua velocidade depois da collisaõ. Consideremos a velocidade primitiva $CD$ resolvida em duas, das quais huma seja $CE$, a qual tenha effeito depois da collisaõ, e a outra $CF$, que se destrua na mesma collisaõ. Ora como a velocidade $CE$ naõ deve embaraçar as que haõ de tomar os corpos $A$, $B$, conduzamos $EG$, $EH$ perpendiculares aos raios $CA$, $CB$; e será manifesto, que deve $CG$ representar a velocidade do ponto de contacto $A$, e conseguintemente a do corpo $A$, e pela mesma rasaõ $CH$ representará a velocidade do corpo $B$. Podemos pois no instante da percussaõ considerar os corpos $C$, $A$, $B$, como animados respectivamente das velocidades $CE$, $CG$, $CH$, que elles devem conservar, sem se embaraçarem mutuamente, e das velocidades $CF$, $-CG$, $-CH$, com as quais devem fazer equilibrio entre si.

Seja o angulo $ACI$, ou o arco $AI = \alpha$, o arco $BI = \beta$, o arco $KI = \phi$, $CD = V$, $CE = V'$; e conseguintemente $CG = V' \cos(\alpha - \phi)$, $CH = V' \cos(\beta + \phi)$. Como pois as forças $C.CF$, $A.CG$, e $B.CH$, dirigidas por $CF$, $AC$, $BC$, devem estar em equilibrio, se resolvermos a cada huma dellas em outras duas, huma por $CD$, e outra perpendicular a $CD$, tanto a so-

ma

ma das primeiras, como a das ultimas se reduzirá a nada. Logo teremos

$$C.CF.\cos FCD - B.CH.\cos BCI - A.CG.\cos ACI = 0$$
$$C.CF.\operatorname{sen} FCD - B.CH.\operatorname{sen} BCI + A.CG.\operatorname{sen} ACI = 0.$$

Porém temos $CF.\cos FCD = CD - CE.\cos ICK = V - V'\cos\varphi$, e $CF.\operatorname{sen} FCD = CE.\operatorname{sen} ICK = V'\operatorname{sen}\varphi$; logo substituindo estes valores, teremos

$$C(V - V'\cos\varphi) - BV'\cos 6\cos(6+\varphi) - AV'\cos\alpha\cos(\alpha-\varphi) = 0$$
$$CV'\operatorname{sen}\varphi - BV'\operatorname{sen} 6\cos(6+\varphi) + AV'\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha-\varphi) = 0.$$

Esta ultima equaçaõ dá $C\operatorname{sen}\varphi - B\operatorname{sen} 6(\cos 6\cos\varphi - \operatorname{sen} 6\operatorname{sen}\varphi) + A\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi) = 0$; e por conseguinte

$$\tang\varphi = \frac{\frac{1}{2}B\operatorname{sen} 2\,6 - \frac{1}{2}A\operatorname{sen} 2\alpha}{C + B\operatorname{sen} 6^2 + A\operatorname{sen}\alpha^2}.$$

Será pois determinada a direcçaõ, que o corpo $C$ deve tomar depois da collisaõ. E para conhecer a sua velocidade, deduziremos o valor de $V'$ da primeira equaçaõ, a qual dá

$$V' = \frac{CV}{C\cos\varphi + B\cos 6\cos(6+\varphi) + A\cos\alpha\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Quanto ás velocidades dos corpos $A$, B pelas direcçoens $CA$, $CB$ igualmente se determinaráõ pelas formulas seguintes.

$$V'\cos(\alpha-\varphi) = \frac{CC\cos\alpha + CB\operatorname{sen} 6\operatorname{sen}(\alpha+6)}{C(A+B+C) + AB\operatorname{sen}(\alpha+6)^2}$$

$$V'\cos(6+\varphi) = \frac{CC\cos 6 + CA\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+6)}{C(A+B+C) + AB\operatorname{sen}(\alpha+6)^2};$$

Qualquer que seja o numero dos corpos, sempre o problema se poderá resolver de hum modo semelhante ao que temos praticado.

## *Do Movimento do Centro de gravidade commum de muitos corpos.*

453 TEmos visto na Statica, que se as diversas partes de hum systema saõ perfeitamente livres, os movimentos que se imprimem em cada huma em particular se transmetem todos ao centro de gravidade por direcçoens parallelas, donde se concluio que deve este centro mover-se, como se todas as potencias lhe fossem applicadas immediatamente. Agora mostraremos, que o mesmo succede quando todas as partes do systema saõ ligadas entre si, com tanto que o systema inteiro esteja livre, naõ sendo obrigado a mover-se ao redor de algum ponto fixo.

Os movimentos a, b, c &c, que as partes do systema devem tomar, podem resolver-se em dous: a saber, nos movimentos impressos *a*, *b*, *c* &c, e nos movimentos destruidos $-\alpha$, $-\beta$, $-\varkappa$ &c. Mas quanto a estes ultimos, deve haver equilibrio; logo o centro de gravidade naõ póde delles receber movimento algum; e por conseguinte o caminho, que ha de seguir este centro em virtude dos movimentos a, b, c &c, que as partes do systema haõ tomado pela sua acçaõ mutua, será precisamente o mesmo que teria seguido em virtude dos movimentos *a*, *b*, *c* &c, que as mesmas partes teriaõ, se fossem livres.

454 Disto se segue, que *o estado de movimento, ou de quietaçaõ do centro de gravidade commum de muitos corpos, naõ se altéra pela acçaõ mutua dos mesmos corpos entre si, com tanto que o systema seja livre.*

Se qualquer corpo *M* (Fig. 169.) receber hum impulso pela direcçaõ da recta *A B*, que naõ passa pelo seu centro de gravidade *G*, este centro se moverá, como se a potencia *A B* lhe fosse applicada por huma direcçaõ parallela *G D*; logo ficaria em quietaçaõ, se em sentido contrario lhe fosse applicada huma potencia *G D'* igual a *AB*. Como porém as duas potencias *G D'* e *AB*, ainda que iguaes entre si, naõ saõ directamente oppostas, e conseguintemente naõ podem destruir-se mutuamente, e como temos mostrado que o centro de gravidade *G* fica em quietaçaõ; o unico movimento que póde tomar o corpo he o movimento de rotaçaõ ao redor do mesmo centro.

455 Logo se qualquer corpo for sollicitado por potencias, cujas direcçoens naõ passem pelo seu centro de gravidade, deveremos concluir: 1°, que *o centro de gravidade se moverá, como se todas as potencias lhe fossem applicadas por direcçoens parallelas aquellas, pelas quais obraõ actualmente.* 2°, que *as outras partes do mesmo corpo tomaráõ hum movimento de rotaçaõ ao redor do centro de gravidade, como ellas o teriaõ tomado em virtude das mesmas potencias, se o centro de gravidade fosse hum ponto absolutamente fixo.*

456 O movimento do centro de gravidade chama-se *Movimento progressivo*; e como elle he commum a todas as partes do corpo, de qualquer maneira que se mova, poderá sempre considerar-se o movimento de cada parte, como composto de outros dous, hum progressivo, que he o mesmo em todas as partes, igual, e parallelo ao do centro de gravidade, e o outro de rotaçaõ ao redor deste centro. Sendo pois o movimento progressivo aquelle, que toma hum ponto sollicitado por quaisquer potencias, póde determinar-se pelos principios, que havemos exposto nas Secçoens precedentes. O que falta, para determinar o movimento de hum corpo, he o calcular o movimento de rotaçaõ ao redor do centro de gravidade. Logo daremos o methodo.

## *Outra applicaçaõ do Principio geral aos movimentos que se fazem nas Maquinas.*

457 COmo a acçaõ reciproca, que muitos corpos ligados entre si exercitaõ huns contra os outros, se mostra principalmente nas Maquinas, de que frequentemente nos servimos nos usos da vida, he de muita importancia conhecer-lhe os effeitos, e para isso serviráõ os exemplos seguintes.

Probl. I. *Determinar o movimento de dous corpos M, m atados a hum fio sem gravidade M C m, que passa por huma roldana fixa C* (Fig. 170.).

Chamando $p$ a força acceleratriz do corpo $M$; advertiremos 1°, que esta seria a gravidade $g$ toda inteira, se o corpo $m$ naõ actuasse contra $M$. 2°, que a força acceleratriz do corpo $m$ he tambem a quantidade $p$, sendo porém a sua acçaõ em sentido contrario pela direcçaõ $ma$. Assim podemos considerar o corpo $M$, como sollicitado pela força acceleratriz $p$, que elle conservará, e pela força $g-p$ que será destruida: e do mesmo modo o corpo $m$, como sollicitado pela força $p$ segundo a direcçaõ $ma$, que elle conservará, e pela força $g+p$ segundo a direcçaõ $am$, a qual será destruida.

Devendo pois os dous moveis ficar em equilibrio, se fossem sómente animados das forças respectivas $g-p$ e $g+p$, pela propriedade da roldana fixa teremos $M(g-p) = m(g+p)$; e conseguintemente $p = \frac{M-m}{M+m} g$. Esta he a expressaõ da força acceleratriz dos dous moveis; e porque he constante, concluiremos que elles deveráõ ter hum movimento uniformemente accelerado. Logo no fim de qualquer tempo $t$, será a velocidade adquirida $= \frac{M-m}{M+m} gt$, e o espaço corrido $= \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{1}{2} gt^2$.

458 Probl. II. *Suppondo que o fio $MCm$ do problema precedente he uniformemente pezado, determinar o movimento dos corpos $M$, $m$.*

Seja $AM = x$, $am = a-x$, e o pezo especifico do fio $= f$. O pezo da parte $AM$ será $fx$, e o da parte $am$ será $f(a-x)$. Logo a força acceleratriz do corpo $M$ terá por expressaõ a quantidade $\frac{M-m+fx-f(a-x)}{M+m+fx+f(a-x)} g$, ou

$\frac{M-m-fa+2fx}{M+m+fa} g$. Porém para abbreviar, supponhamos

$\frac{M-m-fa}{M+m+fa} = \alpha$, e $\frac{2f}{M+m+fa} = \mathcal{G}$; e será a expressaõ da força representada por $(\alpha + \mathcal{G}x) g$, a qual neste caso naõ será constante, nem o movimento uniformemente accelerado.

Sendo pois a velocidade $= u$, teremos $u\,du = g\,dx\,(\alpha + \mathcal{G}x)$, cujo integral he $uu = g(\mathcal{G}xx + 2\alpha x)$; e porque naõ ajunto constante, supponho tacitamente que a origem dos $x$ se naõ toma já no ponto $A$, mas no ponto $D$ onde começou o movimento.

Determinada deste modo a velocidade, falta achar o tempo empregado em correr o espaço $x$. Para isso deveremos integrar a equação $dt\sqrt{g} = \frac{dx}{\sqrt{(6xx + 2\alpha x)}}$, que dará

$$t = \frac{1}{\sqrt{6g}} . l\left(\frac{\alpha + 6x + \sqrt{(6^2 x^2 + 2\alpha 6x)}}{\alpha}\right).$$

459 Probl. III. *Determinar o movimento de hum corpo M, que por meio da roldana fixa A faz subir outro corpo m suspenso da roldana movel B, sendo os tres cordoens parallelos entre si* (Fig. 171.).

Seja $p$ a força acceleratriz de $M$; e conseguintemente $\frac{1}{2}p$ será a de $m$. Poderemos pois considerar os corpos $M$, $m$, como animados das forças acceleratrizes $p$, e $-\frac{1}{2}p$, que elles conservaõ, e das forças $g - p$, $g + \frac{1}{2}p$, com as quais devem fazer equilibrio entre si. Logo pela propriedade das roldanas moveis, teremos $2M(g-p) = m\left(g + \frac{1}{2}p\right)$; donde se tira $p = \frac{4M - 2m}{4M + m} g$. Logo o movimento de ambos os corpos será uniformemente accelerado; e achada a expressaõ da força acceleratriz, todas as mais circumstancias se calcularáõ, como no descenso dos graves.

A força acceleratriz de $m$, ou $\frac{1}{2}p$, será pois $\frac{2M - m}{4M + m} g$; a sua velocidade no fim de qualquer tempo $t$ será $\frac{2M - m}{4M + m} gt$; e a sua quantidade de movimento no fim do mesmo tempo $\frac{2Mm - mm}{4M + m} gt$.

Se quizermos pois achar a relaçaõ, que deve haver entre $M$ e $m$, para que a quantidade de movimento communicada ao corpo $m$ em hum tempo dado seja a maior que he possivel, será necessario que a expressaõ $\frac{2Mm - mm}{4M + m}$ seja hum *maximo*. Entaõ differenciando-a, na supposiçaõ de somensómente $m$ ser variavel, teremos $2Mm - mm = (4M + m)(2M - 2m)$, ou $8M^2 - 8Mm - m^2 = 0$; donde se tira a rasaõ procurada $\frac{m}{M} = -4 + \sqrt{24} = \frac{9}{10}$ proximamente.

460 Probl. IV. *Determinar o movimento de hum pezo M applicado á roda ABC de hum sarilho, o qual faz mover outro pezo m applicado ao cylindro a b c* (Fig. 172.).

Seja $R$ o raio da roda, e $r$ o do cylindro; e chamando $p$ a força acceleratriz do corpo $M$, será $\frac{pr}{R}$ a do corpo $m$. Isto posto seguindo sempre o principio geral, consideremos os pezos $M$, $m$ animados das forças acceleratrizes $p$, $-\frac{pr}{R}$, que haõ de conservar, e das forças $g - p$, e $g + \frac{pr}{R}$, que seraõ destruidas. E porque os momentos destas devem ser iguais, teremos $MR(g - p) = mr\left(g + \frac{pr}{R}\right)$; donde resulta $p = \frac{MR - mr}{MR^2 + mr^2} Rg$. Assim será o movimento destes dous corpos uniformemente accelerado; e conseguintemente a velocidade do corpo $M$ no fim do tempo $t$ será $= \frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} gt$, e o espaço corrido $= \frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} gt^2$. Está claro, que naõ haveria movimento, se fosse $MR = mr$, como por outra parte consta da condiçaõ do equilibrio; e se fosse $MR < mr$, o pezo $M$ subiria em lugar de descer, como he tambem por outra parte evidente.

Do mesmo modo acharemos, que a força acceleratriz do corpo $m$ he $\frac{MR - mr}{MR^2 + mr^2} rg$; donde no tempo $t$ será a velocidade deste corpo $= \frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} gt$, e o espaço corrido de baixo por cima $= \frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} gt^2$.

V 2 Que

Querendo achar a rasaõ, que deve haver entre $R$ e $r$; para que o corpo $m$ seja levantado com a maior prontidaõ possivel, será necessario fazer que $\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2}$ seja hum maximo. Differenciaremos pois esta quantidade, fazendo variar $\frac{r}{R}$, ou simplesmente $R$, e teremos $(MRr - mr^2)\,2MR = (MR^2 + mr^2)\,Mr$, ou $MR^2 - 2mrR = mr^2$; equaçaõ, da qual facilmente se determinará o valor de $\frac{R}{r} = \frac{m}{M} + \sqrt{\left(\frac{m^2}{M^2} + \frac{m}{M}\right)}$. Por exemplo: Se $m : M :: 144 : 25$, acharemos $R = 12r$, isto he, para elevar o pezo com a maior prontidaõ possivel, neste caso, he necessario que o raio da roda seja doze vezes maior que o do cylindro.

461 Mas supondo, que o corpo $M$ deve correr hum espaço dado, e querendo determinar a rasaõ entre $R$ e $r$, tal que o corpo $m$ corra o maior espaço possivel, e no tempo mais breve que he possivel, será necessario que este espaço dividido pelo tempo, ou que $\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2}gt$ seja hum maximo. Porém nesta supposiçaõ, o espaço corrido pelo pezo $M$, ou $\frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2}gt^2$ he huma quantidade dada; logo concluiremos que $t$ he proporcional a $\sqrt{\left(\frac{MR^2 + mr^2}{MR^2 - mrR}\right)}$; e conseguintemente deveremos ter $\left(\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{MR^2 + mr^2}{MR^2 - mrR}\right)}$, ou $\frac{r^2(MR - mr)}{R(MR^2 + mr^2)} = Max.$ Differenciemos esta ultima expressaõ, fazendo variar $R$, ou $r$, ou $\frac{r}{R}$, e de qualquer modo sahirá a equaçaõ cubica $m^2r^3 + 3mMR^2r = 2M^2R^3$, a qual naõ tem mais do que huma raiz real, cujo valor he

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{\left[\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\right)}\right]}$$

$$+\sqrt[3]{\left[\frac{M^2}{m^2}-\frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{M^2}{m^2}+\frac{M}{m}\right)}\right]}.$$

Assim por exemplo, se $m : M :: 2197 : 400$, ou se $\frac{m}{M} =$ $5,4925$, acharemos $\frac{R}{r} = 8,45$, ou $R : r :: 169 : 20$.

462 Probl. V. *Determinar o movimento de hum corpo $M$, o qual por meio do fio $MDm$, que passa pela roldana fixa $D$, faz mover juntamente o corpo $m$ posto sobre o plano inclinado $AC$, que supponios parallelo ao cordaõ $Dm$* (Fig. 173.).

Seja $\mathfrak{S}$ o angulo $ACB$, ou a inclinaçaõ do plano com o horizonte, e $p$ a força acceleratriz do pezo $M$, a qual será a mesma que deve ter $m$. Assim podemos considerar os corpos $M$, $m$, como animados das forças $p$, e $-p$, que deveráõ subsistir, e juntamente das forças $g-p$, e $g\,sen\,\mathfrak{S}+p$, que seraõ destruidas.

Como estas ultimas forças se exercitaõ por $DM$ e $Dm$, as quantidades de movimento que resultaõ devem ser iguais. Assim teremos $M(g-p) = m(g\,sen\,\mathfrak{S}+p)$, donde se tira $p = \frac{M - m\,sen\,\mathfrak{S}}{M+m}g$. Será pois o movimento dos dous corpos $M$, $m$ uniformemente accelerado; a velocidade no fim do tempo $t$ será $= \frac{M - m\,sen\,\mathfrak{S}}{M+m}gt$, e o espaço corrido $= \frac{M - m\,sen\,\mathfrak{S}}{M+m}.\frac{1}{2}gt^2$. E porque a quantidade de movimento do corpo $m$ he $\frac{Mm - m^2\,sen\,\mathfrak{S}}{M+m}gt$; para que ella seja hum maximo, deverá ser $\frac{M}{m} = -1$ $+\sqrt{\left(1+\frac{1}{sen\,\mathfrak{S}}\right)}$.

AR

# ARTIGO II.

## *Do movimento dos corpos, considerados como pontos unidos por fios, ou varas inflexiveis.*

463 PRROBL. I. *Sendo dous corpos M, N ligados entre si por hum fio inextensivel MN, ou por huma vara sem massa, determinar o seu movimento* (Fig. 174.).

Sejaõ $mM$, $nN$ os elementos descritos no instante $dt$ pelos corpos $M$, $N$. Se elles fossem livres, no instante seguinte descreveriaõ os elementos $Mm'$, $Nn'$ iguais aos precedentes, e na mesma direcçaõ. Supponhamos pois, que em virtude da sua acçaõ reciproca chegaõ, hum ao ponto $\mu$, e o outro ao ponto $\nu$; e que os movimentos $Mm'$, $Nn'$, que elles teriaõ se fossem livres, se resolvem, cada hum em outros dous, a saber $M\mu$ e $N\nu$ que pela hypothese deveráõ conservar, e $M$m, $N$n que seraõ conseguintemente destruidos. Para isso he necessario, que as rectas $M$m e $N$n estejaõ situadas na direcçaõ de $MN$, e que seja $M \cdot M\text{m} = N \cdot N\text{n}$.

Agora reportando as duas trajectorias ao eixo $APQ$, supponhamos $AP = x$, $PM = y$, $MN = a$, $AQ = x'$, $NQ = y'$. A força acceleratriz do corpo $M$ por m$M$, que resulta da acçaõ do corpo $N$, sendo chamada $\varphi$, a força do corpo $N$, que resulta da acçaõ reciproca do corpo $M$ pela direcçaõ n$N$, será representada por $\frac{M}{N}\varphi$.

Isto posto, resolvamos a força $\varphi$ em duas; huma parallela a $AP$, cujo valor será $\frac{\varphi(x'-x)}{a}$, e a outra pela direcçaõ $MP$, que será representada por $\frac{\varphi(y-y')}{a}$.

Teremos pois para o corpo $M$ as duas equaçoens seguintes,

$$\frac{x'-x}{a}\varphi\, dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi\, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Do

Do mesmo modo, resolvendo a força $\frac{M}{N}\,\varphi$ em outras duas, teremos para o corpo $N$ as duas equaçoens seguintes,

$$\frac{M(x'-x)}{aN}\,\varphi\,dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right),$$

$$\frac{M(y'-y)}{aN}\,\varphi\,dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Donde resultaõ estoutras duas,

$$M\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + N\,d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0,$$

$$M\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + N\,d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = 0,$$

as quais sendo integradas, daráõ

$$M.\frac{dx}{dt} + N.\frac{dx'}{dt} = C,$$

$$M.\frac{dy}{dt} + N.\frac{dy'}{dt} = C'.$$

Destes dous integrais se segue, que o movimento do centro de gravidade he uniforme, e rectilineo; o que concorda com o principio acima demonstrado, que o estado do centro de gravidade naõ se altéra pela acçaõ reciproca das partes de hum systema.

Em quanto o centro de gravidade se move uniformemente, e em linha recta, os corpos $M$ e $N$ descreveráõ necessariamente ao redor delle circumferencias de circulos uniformemente, como he facil de mostrar pelo que dissemos no calculo das attracçoens. Por outra parte he evidente, que naõ existindo no systema força alguma acceleratriz perpendicular a $MN$, naõ póde ser alterada a velocidade angular ao redor do ponto $G$.

De passagem notaremos, que das quatro equaçoens precedentes resulta esta $M.\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + M.\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ $+ N.\frac{dx'}{dt}\,d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + N.\frac{dy'}{dt}\,d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = 0$, cujo integral

gral he $M \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + N \cdot \frac{ds'^2}{dt^2} = C = MV^2 + NV'^2$, chamando $V$ e $V'$ as velocidades iniciais de $M$ e de $N$. Donde se segue, que *a soma das forças vivas se conserva sempre a mesma.*

464 Probl. II. *Sendo suppostas as mesmas cousas que no problema precedente, e supposndo de mais que os corpos M e N estaõ sujeitos á acçaõ de huma força acceleratriz constante, como a gravidade g, pela direcçaõ das ordenadas MP, NQ, determinar o movimento delles* (Fig. 174.).

Como as forças acceleratrizes por PM, e $NQ$ saõ diminuidas neste caso da quantidade $g$, teremos as quatro equaçoens do movimento desta maneira,

$$\frac{x'-x}{a}\varphi\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi\,dt - g\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{x'-x}{a}\cdot\frac{M}{N}\cdot\varphi\,dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\cdot\frac{M}{N}\cdot\varphi\,dt + g\,dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right):$$

Das quais primeiramente se póde tirar $M\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + N\,d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$; equaçaõ, que mostra o movimento horizontal do centro de gravidade sempre uniforme. Depois tiraremos tambem $M\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + N\,d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = -g\,dt\,(M+N)$. Porém $\left(M\frac{dy}{dt} + N\frac{dy'}{dt}\right) : (M+N)$ he a velocidade vertical do centro de gravidade; logo, fazendo esta velocidade $= v$, teremos $dv = -g\,dt$. Donde se segue, que o centro de gravidade se move precisamente como hum ponto livre, e que descreve conseguintemente huma parabola, ao mesmo tempo que os dous corpos $M$, $N$ descrevem ao redor delle circumferencias

rencias de circulos com movimento uniforme.

465 PROBL. III. *Sendo os tres corpos B, C, D ligados ao fio B C D, e havendo recebido quaisquer impulsos, determinar o seu movimento* ( Fig. 175. ).

Supponhamos, que estes corpos no instante $dt$ acabaõ de descrever os elementos $bB$, $cC$, $dD$ das suas respectivas trajectorias. Se elles neste ponto ficassem livres, descreveriaõ no instante seguinte as linhas $Bb'$, $Cc'$, $Dd'$, iguais ás primeiras, e na mesma direcçaõ. Logo, sendo obrigados pela mutua acçaõ, que exercitaõ entre si, a descrever $B\mathfrak{G}$, $C\varkappa$, $D\delta$, podemos considerar, conforme ao principio geral, as velocidades impressas $Bb'$, $Cc'$, $Dd'$, como compostas das velocidades $B\mathfrak{G}$, $C\varkappa$, $D\delta$, que elles conservaõ realmente, e das velocidades Bb, Cc, Dd, com as quais devem conseguintemente fazer equilibrio entre si. Para isso, he pois necessario que Bb, Dd se achem na direcçaõ dos cordoens $BC$, $DC$; e que formando o parallelogrammo $Cecf$, seja $C.Ce = B.Bb$, e $C.cf = D.Dd$. Logo chamando $\varphi$ a força acceleratriz de $B$ que resulta da acçaõ do corpo $C$ pela direcçaõ $BC$, e $\psi$ a força acceleratriz de $D$ pela direcçaõ $DC$, teremos para o corpo $C$ duas forças acceleratrizes, huma $\frac{B}{C}\varphi$ pela direcçaõ $CB$, e a outra $\frac{D}{C}\psi$ pela direcçaõ $CD$.

Referindo pois ao mesmo eixo $AP$ as tres curvas descritas, supponhamos $AP = x$, $BP = y$, $AP' = x'$, $CP' = y'$, $AP'' = x''$, $DP'' = y''$, $CB = a$, $CD = b$; e conseguintemente $a^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$, e $b^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2$. Isto posto, a força $\varphi$ pela direcçaõ BC se resolve em duas, huma $\frac{y'-y}{a}\varphi$ pela direcçaõ PB, e outra $\frac{x'-x}{a}\varphi$ parallela a $AP$. Fazendo huma resoluçaõ semelhante das forças $eC$, $fC$, $dD$, teremos as seis equaçoens do movimento da maneira seguinte

$$\frac{x'-x}{a}\varphi\, dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{x''-x'}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi\, dt - \frac{x'-x}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi\, dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$x''-x'$

$$\frac{x''-x'}{b}\psi\,dt = -d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y''}{b}\cdot\frac{D}{C}\cdot\psi\,dt + \frac{y'-y}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi\,dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y''}{b}\psi\,dt = d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Multiplicando a primeira por $B$, a ſegunda por $C$, a terceira por $-D$, e ajuntando os productos; depois, multiplicando a quarta por $B$, a quinta por $-C$, a ſexta por $D$, e ajuntando tambem os productos; teremos eſtas duas equaçoens

$$Bd\left(\frac{dx}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dx'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dx''}{dt}\right) = 0$$

$$Bd\left(\frac{dy}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dy'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0,$$

as quais moſtraõ que o movimento do centro de gravidade he uniforme e rectilineo, como por outra parte ſabemos que deve ſer. Reduz-ſe pois a queſtaõ a buſcar o movimento dos tres corpos ao redor do centro de gravidade, conſiderado como fixo.

466 Supponhamos, que a linha $AP$ he a direcçaõ do centro de gravidade, e que eſte ſe acha actualmente em $G$. Repreſentando por $\gamma$ a velocidade delle, ſerá $AG = \gamma t$, no caſo de ſe ter achado no ponto $A$ quando principiou o movimento. Seja $GP = X$, $GP' = X'$, $GP'' = X''$; e teremos pela propriedade do centro de gravidade, $BX + CX' - DX'' = 0$, e $By + Cy' + Dy'' = 0$ (porque he neceſſario que alguma das diſtancias $y$, $y'$, $y''$ ſeja negativa). Teremos mais $x = \gamma t - X$, $x' = \gamma t - X'$, $x'' = \gamma t + X''$; e ſubſtituindo eſtes valores nas tres primeiras equaçoens geraes, reſultaraõ as ſeguintes, que determinaõ o movimento dos tres corpos relativamente ao centro de gravidade.

$X - X'$

$$\frac{X - X'}{a} \varphi\, dt = - d\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

$$\frac{X - X'}{a} \cdot \frac{B}{C} \varphi\, dt - \frac{X' + X''}{b} \cdot \frac{D}{C} \psi\, dt = d\left(\frac{dX'}{dt}\right)$$

$$\frac{X' + X''}{b} \psi\, dt = - d\left(\frac{dX''}{dt}\right)$$

$$\frac{y' - y}{a} \varphi\, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y' - y}{a} \cdot \frac{B}{C} \varphi\, dt + \frac{y' - y''}{b} \cdot \frac{D}{C} \psi\, dt = - d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{y' - y''}{b} \psi\, dt = d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Multipliquemos as tres primeiras reſpectivamente por $-B\frac{dX}{dt}$, $C\frac{dX'}{dt}$, $-D\frac{dX''}{dt}$, e as tres ultimas por $B\frac{dy}{dt}$, $-C\frac{dy'}{dt}$, $D\frac{dy''}{dt}$. Depois diſſo ajuntemos todos os productos; e notando que as equações $a^2 = (y' - y)^2 + (X' - X)^2$, e $b^2 = (y'' - y')^2 + (X'' + X')^2$ daõ $(y' - y)(dy' - dy) + (X' - X)(dX' - dX) = 0$, e $(y'' - y')(dy'' - dy') + (X'' + X')(dX'' + dX') = 0$, ſerá o reſultado

$$B\frac{dX}{dt} d\left(\frac{dX}{dt}\right) + B\frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) + C\frac{dX'}{dt} d\left(\frac{dX'}{dt}\right) +$$

$$C\frac{dy'}{dt} d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + D\frac{dX''}{dt} d\left(\frac{dX''}{dt}\right) + D\frac{dy''}{dt} d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0$$

Integrando eſta equaçaõ, teremos

$$B\left(\frac{dX^2 + dy^2}{dt^2}\right) + C\left(\frac{dX'^2 + dy'^2}{dt^2}\right)$$

$$+ D\left(\frac{dX''^2 + dy''^2}{dt^2}\right) = C';$$

donde ſe ſegue, que a ſoma das forças vivas he ſempre a meſma.

Multipli-

Multipliquemos agora as tres primeiras por $-By$; $Cy'$, $Dy''$ respectivamente, e as tres ultimas por $-BX$, $CX'$, $DX''$; ajuntemos os productos, e reduzindo teremos o resultado seguinte

$$B\left[y d\left(\frac{dX}{dt}\right)-X d\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]+C\left[y' d\left(\frac{dX'}{dt}\right)-X' d\left(\frac{dy'}{dt}\right)\right]-D\left[y'' d\left(\frac{dX''}{dt}\right)-X'' D\left(\frac{dy''}{dt}\right)\right]=0;$$

cujo integral he

$$B(X dy-y dX)+C(X' dy'-y' dX')-D(X'' dy''-y'' dX'')=C'' dt.$$

467 Mas para darmos a estas equações huma forma mais simples, seja o angulo $AGB=\Phi$, $AGC=\Phi'$, $AGD=\Phi''$, e o raio $GB=z$, $GC=z'$, $GD=z''$. Assim teremos $y=z\,sen\,\Phi$, $y'=z'\,sen\,\Phi'$, $y''=z''\,sen\,\Phi'$, $X=z\,cos\,\Phi$, $X'=z'\,cos\,\Phi'$, $X''=-z''\,cos\,\Phi''$, $dX^2+dy^2=dz^2+z^2\,d\Phi^2$, $X\,dy-y\,dX=z^2\,d\Phi$. Substituindo estes valores nas duas equações integrais, que acabamos de achar, seráõ reduzidas ás seguintes

$$B(dz^2+z^2\,d\Phi^2)+C(d'z^2+z'^2\,d\Phi'^2)+D(dz''^2+z''^2\,d\Phi''^2)=C'\,dt^2$$

$$Bz^2\,d\Phi+Cz'^2\,d\Phi'+Dz''^2\,d\Phi''=C''\,dt;$$

Alem disto teremos as quatro equações finitas

$$Bz\,sen\,\Phi+Cz'\,sen\,\Phi'+Dz''\,sen\,\Phi''=0$$

$$Bz\,cos\,\Phi+Cz'\,cos\,\Phi'+Dz''\,cos\,\Phi''=0$$

$$2zz'\,cos(\Phi'-\Phi)=z^2+z'^2-a^2$$

$$2z'z''\,cos(\Phi''-\Phi')=z'^2+z''^2-b^2;$$

Nestas seis equações se contém a soluçaõ do problema. Porque deduzindo das quatro ultimas os valores de $\Phi$, $z$, $\Phi''$, $z''$ em $\Phi'$ e $z'$, para os substituir nas duas equações differenciais, e eliminado $dt$, teremos huma equaçaõ differencial do primeiro grão entre $\Phi'$ e $z'$, a qual dará a curva descrita pelo ponto $C$ ao redor do centro de gravidade. Integrando depois o valor de $dt$, teremos a posiçaõ deste ponto no fim de qualquer tempo dado; e sendo esta posiçaõ huma vez determinada, a dos outros dous corpos naõ tem mais difficuldade.

Em conclusaõ, póde satisfazer-se ás equações precedentes supondo que $z$, $z'$, $z''$ saõ quantidades constantes, do mesmo modo que $\Phi'-\Phi$, e $\Phi''-\Phi'$. Logo póde haver casos, em que cadahum dos corpos descreva

huma

huma circumferencia de circulo ao redor de $G$, com a mesma velocidade angular.

468 Para chegar á soluçaõ geral, he pois necessario effeituar o calculo, que havemos indicado. Este he muito longo, mas naõ tem outra difficuldade: assim suppriremos as miudezas, que facilmente se pódem entender.

Primeiramente, das quatro equações finitas pódem deduzir-se as duas seguintes

$$Bz^2 + Cz'^2 + Dz''^2 + (B+C+D)z'^2 = Ba^2 + Db^2,$$
$$D^2 z''^2 = (B+C)(Bz^2 + Cz'^2) - BCa^2.$$

Supponhamos por abbreviar, $m = \dfrac{Ba^2(C+D) + D^2 b^2}{B(B+C+D)}$, e $n = \dfrac{Db^2(B+C) + B^2 a^2}{D(B+C+D)}$; e substituindo estes valores nas duas ultimas equações, teremos

$$z^2 = m - \frac{C+D}{B} z'^2, \text{ e } z''^2 = n - \frac{B+C}{D} z'^2;$$

Isto posto, da terceira e quarta equaçaõ teremos

$$(d\varphi - d\varphi')\,\mathit{sen}(\varphi' - \varphi) = d\left(\frac{z^2 + z'^2 - a^2}{2zz'}\right)$$

$$(d\varphi' - d\varphi'')\,\mathit{sen}(\varphi'' - \varphi') = d\left(\frac{z'^2 + z''^2 - b^2}{2z'z''}\right);$$

Fazendo pois o calculo, eliminaremos $z$ e $z''$ por meio dos seus valores achados; e suppondo, a fim de abbreviar,

$$P = \sqrt{\left[2z'^2(B^2a^2 + D^2b^2) - z'^4(B+C+D)^2 - \left(\frac{D^2b^2 - B^2a^2}{B+C+D}\right)^2\right]},$$ será o resultado deste calculo

$$d\varphi - d\varphi' = \frac{[D^2b^2 - Ba^2(C+D)]z'^2 + B^2(a^2m - m^2)}{Bm - z'^2(D+C)} \cdot \frac{dz'}{Pz'}$$

$$d\varphi' - d\varphi'' = \frac{[B^2a^2 - Db^2(B+C)]z'^2 + D^2(b^2n - n^2)}{Dn - z'^2(B+C)} \cdot \frac{dz'}{Pz'}.$$

E fazendo pela mesma razaõ

$$Q = [D^2b^2 - Ba^2(C+D)]z'^2 + B^2(a^2m - m^2)$$
$$R = [B^2a^2 - Db^2(B+C)]z'^2 + D^2(b^2n - n^2),$$

teremos

$$d\Phi = d\Phi' + \frac{Q\,dz'}{Bz^2 \,.\, Pz'}, \text{ e } d\Phi'' = d\Phi' - \frac{R\,dz'}{Dz''^2 . Pz'}:$$

Agora tornando á equaçaõ geral $Bz^2\,d\Phi + Cz'^2\,d\Phi' + Dz''^2\,d\Phi'' = H\,dt$ ($H$ he huma constante), a qual mostra que multiplicando cada corpo pela area que descreve ao redor do centro de gravidade, a soma dos productos he proporcional ao tempo; e eliminando della $z^2$, $z''^2$, $d\Phi$, e $d\Phi''$, por meio dos valores achados, resultará

$$[Ba^2 + Db^2 - z'^2(B+C+D)]d\Phi' + \frac{dz'}{Pz'}(Q-R) = H\,dt,$$

ou $[Ba^2 + Db^2 - z'^2(B+C+D)]d\Phi' + \frac{dz'}{Pz'}\Big[(Db^2 - Ba^2)(B +$

$$C + D)z'^2 + \frac{(Ba^2 + Db^2)(B^2a^2 - D^2b^2)}{B+C+D}\Big] = H\,dt.$$

Depois, a equaçaõ das forças vivas $B(dz^2 + z^2 d\Phi^2) + C(dz'^2 + z'^2 d\Phi'^2) + D(dz''^2 + z''^2 d\Phi''^2) = KH^2\,dt^2$ ($K$ he huma constante), feitas as mesmas eliminações, dará

$$\left[\frac{(C+D)^2 z'z'}{Bz^2} + C + \frac{(B+C)^2 z'z'}{Dz''z''}\right]dz'^2 +$$

$$\left(\frac{Q^2}{Bz^2} + \frac{R^2}{Dz''^2}\right)\frac{dz'^2}{P^2 z'^2} + [Ba^2 + Db^2 - z'^2(B +$$

$$C + D)]\,d\Phi'^2 + \frac{2\,dz'\,d\Phi'}{Pz'}(Q-R) = KH^2\,dt^2:$$

Seja $M = Ba^2 + Db^2 - z'^2(B + C + D)$; e teremos $H\,dt = M\,d\Phi' + \frac{dz'}{Pz'}(Q-R)$. Substituindo este valor na equaçaõ precedente a fim de eliminar $dt$, teremos

$$\left[\frac{(C+D)^2 z'z'}{Bz^2} + C + \frac{(B+C)^2 z'z'}{Dz''^2}\right]dz'^2 + \Big(\frac{Q^2}{Bz^2}$$

$$+ \frac{R^2}{Dz''^2}\Big)\frac{dz'^2}{P^2 z'^2} + M\,d\Phi'^2 + \frac{2\,dz'\,d\Phi'}{Pz'}(Q-R) =$$

$$K\Big[M^2\,d\Phi'^2 + \frac{2M\,d\Phi'\,dz'}{Pz'}(Q-R) + \frac{dz'^2}{P^2 z'^2}(Q$$

$- R)^2\Big]$. Logo

(K

$$(KM^2-M)\left(\frac{d\Phi'^2}{dz'^2}+\frac{2(Q-R)d\Phi'}{MPz'dz'}+\frac{(Q-R)^2}{M^2P^2z'^2}\right)P^2z'^2$$
$$=\frac{(C+D)^2P^2z'^4+Q^2}{Bz^2}+\frac{(B+C)^2P^2z'^4+R^2}{Dz''^2}+\frac{(Q-R)^2}{M}.$$

E extrahindo a raiz, acharemos

$$d\Phi'=\frac{(R-Q)dz'}{MPz'}\pm\frac{dz'}{Pz'\sqrt{(KM^2-M)}}\sqrt{\left[\frac{(C+D)^2P^2z'^4+Q^2}{Bm-z'^2(C+D)}\right.}$$
$$\left.+\frac{(B+C)^2P^2z'^4+R^2}{Dn-z'^2(B+C)}+\frac{(Q-R)^2}{M}\right];$$

e conseguintemente

$$dt=\frac{dz'}{Pz'\sqrt{(KM^2-M)}}\sqrt{\left[\frac{(C+D)^2P^2z'^4+Q^2}{Bm-z'^2(C+D)}\right.}$$
$$\left.+\frac{(B+C)^2P^2z'^4+R^2}{Dn-z'^2(B+C)}+\frac{(Q-R)^2}{M}\right].$$

Estas duas equações finais estaõ pois separadas, e a posiçaõ do ponto $C$ a respeito do centro de gravidade naõ exige, para ser conhecida, mais do que integrações de differenciais de huma só variavel. E sendo determinada a posiçaõ deste ponto, a dos corpos $B$ e $D$ se determinará logo pelos valores de $z$ e $z''$. Quanto ás quantidades $P$, $Q$, $R$, $M$, estas saõ já conhecidas pelas funções de $z'$, ás quais as suppuzemos iguais.

469 Probl. IV. *Sendo tres corpos $B$, $C$, $D$ considerados como pontos, e ligados á alavanca angular $BCD$ inflexivel, e sem massa, e havendo recebido quaisquer impulsoens primitivas, determinar o seu movimento* (Fig. 176.).

Resolvamos primeiramente, como no problema precedente, o movimento que teria cada hum dos corpos no instante seguinte, se viesse a ser livre, em outros dous, hum que tenha lugar, e outro que seja destruido, e representemos os ultimos por $Bb$, $Cc$, $Dd$.

Depois, resolvamos o movimento $Bb$ em outros dous $Bb''$, $Bb'$ pelas direcções de $CB$, $DB$; e os outros dous semelhantemente. Assim, para haver equilibrio he necessario que seja $B.Bb''=C.Cc'$, $B.Bb'=D.Dd''$, $C.Cc''=D.Dd'$. Sejaõ $\Phi$ e $\mu$ as forças acceleratrizes do corpo $B$ resultantes da acçaõ dos corpos $C$ e $D$

por

por $BC$ e $BD$, e $\psi$ a do corpo $D$ pela direcçaõ $DC$: Eſtá claro, que o movimento do corpo $C$ ſe determinará como no problema precedente, e que o dos corpos $B$ e $D$ ſerá alterado de mais pelas forças $\mu$ e $\frac{B}{D}\mu$, ſegundo as direcções $BD$, e $DB$.

Chamando pois $c$ a diſtancia conſtante $BD$, teremos para o corpo $B$ a força acceleratriz $\frac{x''-x}{c}\mu$ por huma direcçaõ parallela a $AP$, e a força $\frac{y''-y}{c}\mu$ pela direcçaõ de $PB$. Do meſmo modo para o corpo $D$ teremos as duas forças acceleratrizes $-\frac{x''-x}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu$, e $-\frac{y''-y}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu$. Aſſim formaremos as ſeis equações ſeguintes

$$\frac{x'-x}{a}\varphi dt + \frac{x''-x}{c}\mu dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{x''-x'}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi dt - \frac{x'-x}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{x''-x'}{b}\psi dt + \frac{x''-x}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu dt = -d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi dt + \frac{y''-y}{c}\mu dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y''-y}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi dt - \frac{y'-y}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi dt = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{y''-y'}{b}\psi dt + \frac{y''-y}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right);$$

Das tres primeiras, e das tres ultimas concluiremos da meſma maneira que no problema precedente

$$Bd\left(\frac{dx}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dx'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dx''}{dt}\right) = 0$$

$$Bd\left(\frac{dy}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dy'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0;$$

donde

donde se segue, que o movimento do centro de gravidade he uniforme, e rectilineo.

Reflectindo tambem, que as equações $(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = a^2$, $(x''-x')^2 + (y''-y')^2 = b^2$, e $(x''-x)^2 + (y''-y)^2 = c^2$, daõ $(x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) = 0$, $(x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy') = 0$, e $(x''-x)(dx''-dx) + (y''-y)(dy''-dy) = 0$; acharemos

$$B\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + B\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + C\frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right) +$$

$$C\frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + D\frac{dx''}{dt}d\left(\frac{dx''}{dt}\right) + D\frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0;$$

logo integrando

$$B\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) + C\left(\frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2}\right)$$

$$+ D\left(\frac{dx''^2 + dy''^2}{dt^2}\right) = \text{const.}$$

Este integral, e os dous que já temos para o movimento do centro de gravidade, daõ a soluçaõ completa do problema. Por isso naõ há necessidade das outras tres equaçoens que se podiaõ deduzir, alem de que ellas incluiriaõ as quantidades desconhecidas $\varphi$, $\psi$, $\mu$, que he inutil determinar.

470 Naõ somente he constante a soma das forças vivas, ou dos productos de cada massa pelo quadrado da sua *velocidade absoluta*, mas tambem a soma dos productos de cada massa pelo quadrado da sua *velocidade de rotaçaõ*; de maneira, que sendo qualquer o numero dos corpos, a soma das forças vivas que elles tem girando ao redor do centro de gravidade, naõ será susceptivel de variaçaõ alguma. Supponhamos que o centro de gravidade se move parallelamente a $AP$ com a velocidade $\gamma$; está claro, que se a cada parte do systema se imprimir a velocidade $\gamma$ por direcçaõ parallelamente contraria á do centro de gravidade, os movimentos respectivos destas partes seráõ sempre os mesmos; e porque entaõ ficará o centro de gravidade em quietaçaõ, teremos o movimento das partes ao redor delle.

Sendo pois a velocidade $\frac{dx}{dt}$ do corpo $B$ parallelamente a $AP$ diminuida da quantidade $\gamma$, a força viva delle será $B\left[\frac{dy^2}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}-\gamma\right)^2\right]$, e a soma das forças vivas de todas as partes do systema será representada pela expressaõ $\int B\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2\gamma\,dx}{dt}+\gamma^2\right)$. Porém sabemos que $\int B\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)$ he a soma das forças vivas absolutas, a qual havemos mostrado ser constante; logo tudo se reduz a provar que $\int\frac{B\,dx}{dt}$ he tambem huma quantidade constante. Mas isso he evidente, por quanto este integral exprime a quantidade de movimento do centro de gravidade. Donde concluiremos, que *a soma das forças vivas absolutas he igual á soma das forças vivas ao redor do centro de gravidade e da força viva do mesmo centro.*

471 Isto posto, se chamarmos $z$, $z'$, $z''$ as distancias do centro de gravidade aos pontos $B$, $C$, $D$ (advertindo que estas distancias saõ constantes, porque a alavanca se tem supposto inflexivel), e $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ os angulos que estes raios vectores formaõ com a direcçaõ do centro de gravidade, teremos para exprimir a soma das forças vivas ao redor delle.

$$B\frac{z^2\,d\varphi^2}{dt^2}+C\frac{z'^2\,d\varphi'^2}{dt^2}+D\frac{z''^2\,d\varphi''^2}{dt^2}=\text{const.}$$

E porque o centro de gravidade naõ muda de posiçaõ a respeito dos pontos $B$, $C$, $D$, seraõ os angulos $\varphi'-\varphi$ e $\varphi''-\varphi'$ constantes, e por conseguinte $d\varphi=d\varphi'=d\varphi''$. Logo $(Bz^2+Cz'^2+Dz''^2)\frac{d\varphi^2}{dt^2}=\text{const.}$, isto he $\frac{d\varphi}{dt}=\text{const.}$ Logo o movimento angular do systema ao redor do centro de gravidade he uniforme.

Logo em geral, *qualquer que seja o numero dos corpos situados no mesmo plano, e ligados entre si por alavancas infle-*

*inflexiveis, e sem massa, se receberem quaisquer impulsões pelo mesmo plano; 1°, o seu centro commum de gravidade se moverá, como se todas estas forças lhe fossem applicadas por direcções parallelas, e o seu movimento será uniforme e rectilineo; 2°, cada parte do systema girará uniformemente ao redor do centro commum de gravidade.*

472 Vejamos agora, como pelas impulsões iniciais póde determinar-se o movimento de todo o systema (Fig. 177.).

Sejaõ $Bb$, $Cc$, $Dd$ as velocidades impressas nos corpos $B$, $C$, $D$; o centro de gravidade $G$ (que se conhecerá pelas duas proporções $BE : ED :: D : B$, e $CG : GE :: B + D : C$) se moverá, como se todas as forças $B . Bb$, $C . Cc$, $D . Dd$ lhe fossem applícadas.

Represeníemos por $RR'$ o valor, e a direcçaõ da resultante destas forças; e o centro de gravidade $G$ descreverá $GF$ parallela a $RR'$ com a velocidade $\frac{RR'}{B + C + D}$, e o systema girará ao redor do ponto $G$, como se elle estivesse fixo. Mas para determinar este movimento, seja $d\varphi$ o angulo descrito pelo systema no primeiro instante $dt$ ao redor de $G$ para a parte $BCD$; e teremos por expressaõ dos arcos $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$ descritos pelos pontos $B$, $C$, $D$ as quantidades $GB . d\varphi$, $GC . d\varphi$, $GD . d\varphi$.

Imaginemos pois os movimentos $Bb . dt$, $Cc . dt$, $Dd . dt$, que os corpos teriaõ no instante $dt$, se fossem livres, como compostos de outros movimentos, dos quais huns teraõ lugar por $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$, e os outros seraõ destruidos. A soma dos momentos destes ultimos em ordem ao ponto $G$ será nulla, e conseguintemente a soma dos momentos das forças por $Bb$, $Cc$, $Dd$, será igual á soma dos momentos das forças por $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$, sendo tomados todos em ordem ao ponto $G$; logo o momento da resultante será

$$RR'.RG. dt = B.GB.GBd\varphi + C.GC.GC\,d\varphi + D.GD.GDd\varphi ;$$

e conseguintemente

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{RR' . RG}{B . GB^2 + C . GC^2 + D . GD^2} .$$

Donde se vê, que a velocidade angular do systema ao redor do centro de gravidade $G$ he igual ao momento da resultante dividido pela soma dos productos de cada massa

X 2 pelo

pelo quadrado da sua distancia ao centro de gravidade. Conhecida a velocidade angular, póde determinar-se a posição do systema a respeito da recta $GF$ em qualquer instante.

473 Probl. V. *Sendo hum fio $CMM'$ carregado de dous corpos $M$ e $M'$, determinar as oscillações deste pendulo ao redor do ponto fixo $C$, na supposição de que ellas sejaõ infinitamente pequenas* (Fig. 178.).

Conduza-se a vertical $CP'$, da qual os corpos naõ se apartaráõ senaõ a distancias infinitamente pequenas $MP$, $M'P'$; e seja $MP = x$, $M'P' = x'$, $CM = a$, $MM' = a'$.

A gravidade $g$ pela direcçaõ vertical $M'G'$ se resolve em duas forças, huma pela direcçaõ $M'P'$, e a outra por $M'H'$. Sendo pois recto o angulo $H'M'P'$, a primeira destas forças será $g\ sen\ H'M'G' = g\ sen\ M'MK$ (conduzindo pelo ponto $M$ a vertical $MK$) $= \frac{x'-x}{a'}g$. Esta he a força acceleratriz do corpo $M'$; e assim teremos

$$\frac{x'-x}{a'}g\,dt = -d\left(\frac{d'x}{dt}\right).$$

A força por $M'H'$, ou pela direcçaõ do fio, que resulta da gravidade $g$ pela direcçaõ vertical $M'G'$, he igual a $g$, porque naõ differe mais que em huma quantidade infinitamete pequena da segunda ordem. Assim tira o corpo $M'$ pelo corpo $M$ com todo o seu pezo $M'g$ pela direcçaõ $MM'$, e esta acçaõ produz no corpo $M$ huma força acceleratriz $\frac{M'g}{M}$.

Esta força se resolve em duas, huma pela direcçaõ $MP$, e a outra pela direcçaõ do fio $CMH$. A primeira tem por valor $\frac{M'g}{M}\ sen\ HMM' = \frac{M'g}{M}(sen\ MCP - sen\ M'MK)$ $= \frac{M'g}{M}\left(\frac{x}{a} - \frac{x'-x}{a'}\right)$. Além disto, do pezo do mesmo corpo $M$, ou da gravidade $g$ por $MK$, resulta huma força tangencial por $MP$, que he representada por $g\ sen\ MCP$ $= \frac{x}{a}g$. Logo a força acceleratriz total do corpo $M$ será

$\frac{gx}{a} + \frac{M'g}{M} \cdot \frac{x}{a} - \frac{M'g}{M} \cdot \frac{x'-x}{a'}$; e ſuppondo $dt$ conſtante teremos por equações do movimento

$$-ddx' = \frac{x'-x}{a'} g dt^2$$

$$-ddx = \left(\frac{x}{a}\left(1 + \frac{M'}{M}\right) - \frac{M'}{M} \cdot \frac{x'-x}{a'}\right) g dt^2;$$

474 Tomemos hum caſo particular, e ſupponhamos que as maſſas $M$, $M'$ ſaõ iguais, aſſim como tambem as diſtancias $a$, $a'$. Neſte caſo as equações precedentes ſe reduziráõ á fórma ſeguinte

$$-ddx' = (x'-x) \frac{g dt^2}{a}$$

$$-ddx = (3x - x') \frac{g dt^2}{a}.$$

Multiplicando a primeira por hum coefficiente conſtante $\mathfrak{C}$, e ajuntando o producto com a ſegunda, teremos

$$ddx + \mathfrak{C} ddx' + [(3-\mathfrak{C})x + (\mathfrak{C}-1)x'] \frac{g dt^2}{a} = 0.$$

Supponhamos agora que $(3-\mathfrak{C})x + (\mathfrak{C}-1)x'$ he hum multiplo de $x + \mathfrak{C}x'$, o que exige que $\frac{\mathfrak{C}-1}{3-\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, ou que $\mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{C} = 1$, e por conſeguinte que $\mathfrak{C} = 1 \pm \sqrt{2}$. Deſignando pois hum deſtes dous valores por $\mathfrak{C}$, e o outro por $\mathfrak{C}'$, teremos a equaçaõ $ddx + \mathfrak{C}ddx' + (3-\mathfrak{C})(x + \mathfrak{C}x') \frac{g dt^2}{a} = 0$: a qual, fazendo $x + \mathfrak{C}x' = z$, ſe reduz a $ddz + (3-\mathfrak{C}) z \frac{g dt^2}{a} = 0$.

Multiplicando por $2dz$, e integrando, teremos $dz^2 + (3-\mathfrak{C}) z^2 \frac{g dt^2}{a} = C dt^2$. Logo $dt \sqrt{\frac{g}{a}(3-\mathfrak{C})} = \frac{dz}{\sqrt{(b^2 - z^2)}}$. Tornando pois a integrar acharemos que $z = b \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3-\mathfrak{C})\right)}$, ſuppondo que os corpos naõ receberaõ impulſaõ alguma primitiva. Agora reſtituindo

indo o valor de $z$, teremos $x + \mathfrak{C} x' = b \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathfrak{C})\right)}$; e do meſmo modo achariamos $x + \mathfrak{C}' x' = b' \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathfrak{C}')\right)}$. Logo, ſendo $m$ e $m'$ os valores iniciais de $x$ e $x'$, teremos as duas equações

$$x + \mathfrak{C} x' = (m + \mathfrak{C} m') \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathfrak{C})\right)}$$

$$x + \mathfrak{C}' x' = (m + \mathfrak{C}' m') \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathfrak{C}')\right)},$$

as quais daráõ a conhecer os valores de $x$ e $x'$, ſubſtituindo em lugar de $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}'$ os ſeus valores $1 + \sqrt{2}$, e $1 - \sqrt{2}$; e aſſim ſerá determinada a poſiçaõ dos dous corpos no fim de qualquer tempo t.

Se ſuppuzermos $m + \mathfrak{C}' m' = 0$, ou $\frac{m}{m'} = -1 + \sqrt{2}$, entaõ $x + \mathfrak{C}' x' = 0$; e conſeguintemente terá ſempre $x$ huma meſma raſaõ com $x'$. Logo ambos os corpos chegaráõ á vertical no meſmo inſtante, e o tempo que gaſtaráõ em fazer eſta meia oſcillaçaõ ſe achará pela primeira equaçaõ, da qual ſe concluirá $\cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathfrak{C})\right)} = 0$, ou $t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathfrak{C})\right)} = \frac{1}{2} c$; logo $t = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g(2 - \sqrt{2})}}$, e as oſcillações do pendulo compoſto deſtes dous corpos ſeraõ conſeguintemente iſochronas ás de hum pendulo ſimples que tiver por comprimento $\frac{a}{2 - \sqrt{2}}$, ou $\frac{17}{10} a$ proximamente.

Do meſmo modo, ſe ſuppuzermos $m + \mathfrak{C} m' = 0$, ou $\frac{m}{m'} = -1 - \sqrt{2}$, teremos $x + \mathfrak{C} x' = 0$, e os dous moveis chegaráõ tambem neſte caſo á vertical no meſmo tempo. A duraçaõ deſta meia oſcillaçaõ ſerá $\frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g(2 + \sqrt{2})}}$, e o comprimento do pendulo ſimples iſochrono $\frac{a}{2 + \sqrt{2}}$, ou $\frac{3}{10} a$ proximamente.

475 Quando o fio estiver carregado de tres corpos $M$, $M'$, $M''$, póde seguir-se o mesmo methodo para determinar o seu movimento (Fig. 179.).

Seja $CM = a$, $MM' = a'$, $M'M'' = a''$, $MP = x$, $M'P' = x'$, $M''P'' = x''$. Resolvendo a força da gravidade por $M''G''$ em duas, huma por $M''m''$, e a outra por $M''P''$, esta ultima terá por valor $g\ sen\ m''M''G''$, ou $\frac{g(x''-x')}{a''}$; logo $-ddx'' = \frac{x''-x'}{a''} g dt^2$.

A força por $M''m''$ naõ differe da que obra por $M''G''$, e tem por valor $M''g$, donde resulta no corpo $M'$ a força acceleratriz $\frac{M''g}{M'}$ pela direcçaõ $M'M''$. Resolvendo-a em duas, huma por $M'm'$, e a outra por $M'P'$, esta ultima será $\frac{M''g}{M'} sen\ m'M'M'' = \frac{M''g}{M'}\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x''-x'}{a''}\right)$.

Por outra parte da gravidade propria do corpo $M'$ resulta a força tangencial $\frac{g(x'-x)}{a'}$; logo teremos $-ddx' =$
$$\left[\frac{x'-x}{a'} + \frac{M''}{M'}\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x''-x'}{a''}\right)\right] g dt^2.$$

A outra força por $M'm'$ terá por valor $M''g$, que junta com a do corpo $M'$ pela mesma direcçaõ dá a força total $(M''+M')g$. Desta resulta no corpo $M$ a força acceleratriz $\frac{M''+M'}{M} g$ pela direcçaõ $MM'$, a qual produz pela direcçaõ $MP$ a força tangencial representada por

$\frac{M''+M'}{M} g\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x}{a}\right)$. A gravidade propria do corpo $M$ produz tambem a força tangencial $\frac{gx}{a}$; logo teremos $-ddx = \left[\frac{x}{a} + \frac{M'+M''}{M}\left(\frac{x}{a} - \frac{x'-x}{a'}\right)\right] g dt^2$.

476 Em geral, *qualquer que seja o numero dos corpos, com tanto que estejaõ infinitamente pouco distantes da vertical, cada hum se póde considerar como sollicitado verticalmente pela sua gravidade propria, e pelo pezo de todos os*

*os corpos inferiores ſegundo a direcçaõ do mais vezinho.*

Eſte principio baſtará ſempre para determinar a força acceleratriz de cada corpo, e para formar conſeguintemente as equações do movimento.

# ARTIGO III.

## *Do Movimento de rotaçaõ de qualquer corpo ao redor de hum eixo dado.*

### PRINCIPIO FUNDAMENTAL.

477 *SEndo qualquer corpo ſujeito a girar ao redor de hum eixo dado, ſe huma ou muitas potencias dirigidas por planos perpendiculares ao eixo de rotaçaõ lhe imprimirem movimento ao redor do meſmo eixo, quaiſquer que ſejaõ as forças com que ſe moverem as differentes partes do ſyſtema, ſempre a ſoma dos momentos dellas ſerá igual á ſoma dos momentos das potencias, ou ao momento da ſua reſultante, tomando-ſe todos eſtes momentos em ordem ao eixo de rotaçaõ.*

Porque, qualquer que ſeja o movimento de cada huma das partes, ſe lhes foſſe impreſſo outro igual, e directamente contrario, o ſyſtema ficaria em equilibrio. He pois neceſſario que as forças de cada huma das partes dirigidas em ſentido contrario façaõ equilibrio ás potencias motrizes. Logo, pela condiçaõ do equilibrio no ſarilho, a ſoma dos momentos de humas he igual á ſoma dos momentos de outras, tomados relativamente ao eixo de rotaçaõ.

Mas ſem recorrer á propriedade do ſarilho, podemos moſtrar iſto meſmo pelo principio de M. d'Alembert. Porque ſupponhamos quaiſquer potencias applicadas ás partes do ſyſtema; o movimento impreſſo em cada huma ſerá compoſto do movimento que ella effectivamente tomar, e de outro que chamaremos G. Logo o momento da força impreſſa, relativamente ao eixo, ſerá igual ao momento da força que a parte tiver tomado mais o momento de G, e conſeguintemente a ſoma dos momentos de todas as forças motrizes ſerá igual á ſoma dos momentos das forças que realmente tem as partes do ſyſtema mais á ſoma dos momen-

momentos de todas as forças $G$. Mas as forças $G$ devem eſtar em equilibrio, e conſeguintemente a ſoma dos ſeus momentos he nulla; logo a ſoma dos momentos das potencias he igual á ſoma dos momentos das forças que realmente tem as partes do ſyſtema.

478 Temos ſuppoſto, que as potencias motrizes eraõ dirigidas por planos perpendiculares ao eixo de rotaçaõ. Se forem obliquas, ſerá neceſſario reſolver cada huma dellas em outras duas, huma parallela ao eixo, que naõ poderá produzir movimento ao redor delle, e a outra ſituada em hum plano perpendicular ao meſmo eixo, a qual ſó produzirá o movimento de rotaçaõ.

479 Seja pois $R$ a reſultante das potencias motrizes, $D$ a ſua diſtancia ao eixo, e conſeguintemente o ſeu momento $R D$. Seja $\varphi$ a velocidade angular do ſyſtema, iſto he, o arco que em huma unidade de tempo deſcreve hum ponto ſituado na diſtancia 1 do eixo de rotaçaõ. Deſignando por $d$ M qualquer particula do corpo ſituada na diſtancia $r$, a ſua velocidade ſerá $r\varphi$, a quantidade de movimento $r\varphi dM$, o momento relativo ao eixo $r^2 \varphi dM$, e a ſoma deſtes momentos $\int r^2 \varphi dM$, ou ſimpleſmente $\varphi \int r^2 dM$. Logo $\varphi \int r^2 dM = R \cdot D$, ou $\varphi = \dfrac{R \cdot D}{\int r^2 dM}$.

O integral $\int r^2 dM$ exprime a ſoma dos productos de cada particula do ſyſtema pelo quadrado da ſua diſtancia ao eixo. Eſta quantidade, que he ſempre dada pela natureza do corpo, chama-ſe *momento de inercia.*

480 Da formula $\varphi = \dfrac{R \cdot D}{\int r^2 dM}$ concluiremos geralmente, que *ſendo applicadas a qualquer corpo quaiſquer potencias, ſituadas em planos perpendiculares ao eixo de rotaçaõ, a velocidade angular á roda do meſmo eixo ſerá igual á ſoma dos momentos das forças motrizes, ou ao momento da ſua reſultante dividido pelo momento de inercia.*

Com eſta velocidade angular huma vez impreſſa girará o corpo ao redor do ſeu eixo perpetuamente, ſe alguma potencia naõ alterar de novo o ſeu movimento.

481 Mas ſe o corpo for ſujeito á acçaõ de qualquer força acceleratriz, entaõ chamando $R$ a reſultante das acções particulares deſta força ſobre todas as partes do ſyſtema, e $D$ a ſua diſtancia ao eixo, ſerá $R D dt$ o momento que

ella

ella póde produzir no instante $dt$, e o aumento ou diminuiçaõ da velocidade angular do corpo será $d\Phi = \frac{R D dt}{\int r^2 dM}$.

Tais saõ, em compendio, os principios com os quais se póde determinar em todos os casos o movimento de qualquer corpo, ao redor de hum eixo dado. Mas como he necessario antes disso saber determinar o momento de inercia, primeiro tambem indicaremos o methodo.

## *Dos Momentos de inercia, e dos tres Eixos principais em qualquer corpo.*

482 SEndo o momento de inercia a soma dos productos de cada particula de hum corpo multiplicada pelo quadrado da sua distancia a hum eixo dado, parecerá á primeira vista que para cada eixo em particular he necessario hum calculo novo. Mas agora mostraremos, que tudo se reduz a buscar os momentos de inercia em ordem aos eixos, que passaõ pelo centro de gravidade, e que a indagaçaõ destes póde reduzir-se sómente a tres.

483 Seja $AB$ o eixo de rotaçaõ (Fig. 180.), $G$ o centro de gravidade do corpo, $M$ o lugar do elemento $dM$. Pelo ponto $M$ conduza-se o plano $MPQ$ perpendicular ao eixo $AB$, cuja intersecçaõ com o plano $AGB$ da figura seja a recta $PQ$. Pelo ponto $G$ conduza-se a linha $GH$ parallela, e $Gg$ perpendicular ao eixo $AB$. Em fim seja $MQ$ perpendicular a $PQ$, e ao plano da figura.

Isto posto, teremos $MP^2 = MH^2 + PH^2 + 2\,PH.HQ = MH^2 + Gg^2 + 2\,Gg.HQ$; logo $\int dM.MP^2 = \int dM.MH^2 + \int dM.Gg^2 + 2\,Gg \int dM.HQ$. Porem, pela natureza do centro de gravidade, temos $\int dM.HQ = 0$; logo

$$\int dM.MP^2 = \int dM.MH^2 + M.Gg^2.$$

Donde concluiremos, que *o momento de inercia relativamente a qualquer eixo he igual ao momento de inercia relativamente ao eixo parallelo, que passa pelo centro de gravidade, e mais ao producto da massa do corpo pelo quadrado da distancia destes dous eixos.*

484 Assim vemos, que entre todos os eixos parallelos, o

o que passa pelo centro de gravidade he aquelle, a cujo respeito o momento de inercia he o mais pequeno; e que he facil de achar o momento de inercia relativo a qualquer eixo, huma vez que sejaõ conhecidos os momentos de inercia relativos aos eixos, que passaõ pelo centro de gravidade.

Supposto porém que por este centro se póde conduzir huma infinidade de eixos differentes, e que os momentos de inercia a elles referidos podem variar infinitamente, bem se vê que nenhum delles póde ser infinito, nem tambem nullo. Logo he necessario que entre todos elles haja hum *maximo*, e hum *minimo*. A' indagaçaõ destes se destina o calculo seguinte.

485 Seja $A$ o centro de gravidade do corpo (Fig 181.), e $AX$, $XY$, $YZ$ as tres coordenadas do ponto $Z$, onde se acha o elemento $dM$, as quais designaremos por $x, y, z$. Seja $AF$ o eixo, a respeito do qual o momento de inercia deve ser hum maximo, ou hum minimo. Por $AF$ conduza-se o plano $AEF$ perpendicular ao da figura $AFX$, e do ponto $Y$ para a intersecçaõ $AE$ destes dous planos se tire a perpendicular $YX'$.

Designando pois o angulo $BAE$ por $\alpha$, e $EAF$ por $\beta$, teremos $AX' = AY\, cos(YAX - \alpha) = x\, cos\, \alpha + y\, sen\, \alpha$, e $X'Y = y\, cos\, \alpha - x\, sen\, \alpha$. Completando o rectangulo $X'YZY''$ poderemos considerar $AX'$, $X'Y''$, $Y''Z$ como as tres coordenadas orthogonais do ponto $Z$; e se do ponto $Y''$, onde $ZY''$ atravessa o plano $AFE$ ao qual he perpendicular, conduzirmos a linha $Y''X''$ perpendicular a $AF$, teremos por valores de tres novas coordenadas orthogonais as rectas $AX''$, $X''Y''$, $Y''Z$, as quais chamaremos $x''$, $y''$, $z''$, e teremos

$$x'' = AX'\, cos\, \beta + X'Y''\, sen\, \beta = x\, cos\, \alpha\, cos\, \beta + y\, sen\, \alpha\, cos\, \beta + z\, sen\, \beta$$

$$y'' = X'Y''\, cos\, \beta - AX'\, sen\, \beta = z\, cos\, \beta - y\, sen\, \alpha\, sen\, \beta - x\, cos\, \alpha\, sen\, \beta$$

$$z'' = y\, cos\, \alpha - x\, sen\, \alpha.$$

Isto posto, o quadrado da distancia do ponto $Z$ ao eixo $AF$ será $y''^2 + z''^2 = x^2\,(sen\, \alpha^2 + cos\, \alpha^2\, sen\, \beta^2) + y^2\,(cos\, \alpha^2 + sen\, \alpha^2\, sen\, \beta^2) + z^2\, cos\, \beta^2 - 2xy\, cos\, \alpha\, sen\, \alpha + 2xy\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha\, sen\, \beta^2 - 2yz\, sen\, \alpha\, sen\, \beta\, cos\, \beta - 2xz\, cos\, \alpha\, sen\, \beta\, cos\, \beta$. E fazendo, a fim de abbreviar,

$$\int x^2\, dM = A,\quad \int y^2\, dM = B,\quad \int z^2\, dM = C$$

$$\int xy\, dM = D,\quad \int xz\, dM = E,\quad \int yz\, dM = F;$$

inte-

integrais, que devem tomar-se em toda a extensaõ do corpo, e que aqui suppomos conhecidos; o momento de inercia a respeito do eixo $AF$ será

$$A(\operatorname{sen}\alpha^2 + \cos\alpha^2 \operatorname{sen}\beta^2) + B(\cos\alpha^2 + \operatorname{sen}\alpha^2 \operatorname{sen}\beta^2) + C\cos\beta^2 - 2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta^2 - 2E\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos\alpha - 2F\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Do mesmo modo as formulas integrais $\int x'' z'' dM$, e $\int x'' y'' dM$, que importará conhecer, teraõ por valores

$$\int x'' z'' dM = -A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + D\cos 2\alpha\cos\beta - E\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + F\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\int x'' y'' dM = -A\cos\alpha^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta - B\operatorname{sen}\alpha^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta + C\operatorname{sen}\beta\cos\beta - 2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta + E\cos\alpha\cos 2\beta + F\operatorname{sen}\alpha\cos 2\beta.$$

Agora, por quanto o momento de inercia he hum *maximo*, ou hum *minimo*, será necessario differenciar o seu valor, fazendo primeiro variar $\alpha$, e depois $\beta$, e igualando cada huma das expressoens a nada. Teremos pois em primeiro lugar

$$2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta^2 - 2B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta^2 - 2D\cos 2\alpha\cos\beta^2 + 2E\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta - 2F\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 0,$$

e dividindo por $-2\cos\beta$, sahirá

$$-A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + D\cos 2\alpha\cos\beta - E\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + F\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = 0; \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

donde se segue, que $\int x'' z'' dM = 0$.

Em segundo lugar, fazendo variar $\beta$, teremos

$$2A\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos\alpha^2 + 2B\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\alpha^2 - 2C\operatorname{sen}\beta\cos\beta + 4D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos 2\beta - 2F\operatorname{sen}\alpha\cos 2\beta = 0; \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

donde se segue igualmente, que $\int x'' y'' dM = 0$.

Da equaçaõ, que acima notamos com o final (I), se tira $\tan\beta = \dfrac{(A-B)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha}{F\cos\alpha - E\operatorname{sen}\alpha}$; e da equaçaõ (II), $\tan 2\beta = \dfrac{2E\cos\alpha + 2F\operatorname{sen}\alpha}{A\cos\alpha^2 + B\operatorname{sen}\alpha^2 - C + 2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$.

Por outra parte sabemos, que $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan\beta^2}$;

logo teremos $\dfrac{2E\cos\alpha + 2F\operatorname{sen}\alpha}{A\cos\alpha^2 + B\operatorname{sen}\alpha^2 - C + 2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} =$

(2F

$$\frac{(2F\cos\alpha - 2E\,\text{sen}\,\alpha)[(A-B)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha]}{(F\cos\alpha - E\,\text{sen}\,\alpha)^2 - [(A-B)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha]^2};$$

donde finalmente se concluirá a equaçaõ seguinte:

$$\begin{aligned}&[E^2F - D^2F + (B-C)DE]\,\text{tang}\,\alpha^3\\ &+[E^3 - 2EF^2 + D^2E + (B-2A+C)DF + (A-B)(B-C)E]\,\text{tang}\,\alpha^2\\ &+[F^3 - 2FE^2 + D^2F + (A-2B+C)DE - (A-B)(A-C)F]\,\text{tang}\,\alpha\\ &+EF^2 - D^2E + (A-C)DF = 0.\end{aligned}$$

486 Sendo pois esta huma equaçaõ do terceiro gráo, e devendo ter duas raizes reais, porque ha necessariamente dous eixos, dos quais hum dá o *maximo*, e outro o *minimo*, seraõ as tres raizes todas reais. Supponhamos, que já se conhece hum eixo, a respeito do qual seja o momento de inercia hum *maximo*, ou hum *minimo*, e vejamos como entaõ se podem immediatamente determinar os outros dous. Digo *immediatamente*, porque seria difficil o deduzillos da equaçaõ precedente.

Seja $A$ o centro de gravidade do corpo, $AB$ o eixo conhecido, a respeito do qual o momento de inercia he hum *maximo*, ou hum *minimo*. Sabemos já que neste caso deve ser $\int xy\,dM = 0$, e $\int xz\,dM = 0$. Assim fazendo $D = 0$, e $E = 0$ nos valores de tang $\mathfrak{C}$ e tang $2\mathfrak{C}$ acima achados, teremos as duas equações

$$\text{tang}\,\mathfrak{C} = \frac{(A-B)\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{F\cos\alpha},\ \text{tang}\,2\mathfrak{C} = \frac{2F\,\text{sen}\,\alpha}{A\cos\alpha^2 + B\,\text{sen}\,\alpha^2 - C}.$$

A primeira dá tang $\mathfrak{C} = \frac{A-B}{F}\,\text{sen}\,\alpha$, ou $\cos\alpha = 0$. Porém a formula tang $\mathfrak{C} = \frac{A-B}{F}\,\text{sen}\,\alpha$ daria tang $2\mathfrak{C} = \frac{2F(A-B)\,\text{sen}\,\alpha}{F^2 - (A-B)^2\,\text{sen}\,\alpha^2}$, e este valor sendo igualado ao precedente conduziria á equaçaõ $\frac{F^2}{A-B} = A - C$, que naõ dá nada a conhecer, e que he falsa; logo naõ ha outra cousa que satisfaça á primeira equaçaõ, senaõ $\cos\alpha = 0$, e conseguintemente será tang $2\mathfrak{C} = \frac{2F}{B-C}$.

487 Por quanto he $\cos\alpha = 0$, os dous eixos se acharáõ no plano perpendicular a $AB$. Por outra parte, dando

a

a equaçaõ *tang* $2 G = \frac{2F}{B - C}$ dous valores para $G$, hum delles $G$, e o outro $90^\circ + G$, segue-se que os dous eixos saõ perpendiculares entre si. Assim concluiremos, que *em qualquer corpo ha tres eixos perpendiculares entre si, a respeito dos quais os momentos de inercia fazem hum maximo, ou hum minimo.*

Estes eixos, dos quais se usa muito nesta parte da Dynamica, chamaõ-se *os tres eixos principais* de hum corpo. Até agora os consideramos entre todos aquelles, que passaõ pelo centro de gravidade; mas como naõ ha cousa no nosso calculo, pela qual se supponha que o ponto $A$ he o centro de gravidade do corpo, deveremos concluir geralmente, que *a respeito de qualquer ponto de hum corpo sempre ha tres eixos, cuja propriedade he de fazer os momentos de inercia os maiores, ou mais pequenos possiveis, e que estes tres eixos saõ perpendiculares entre si.*

488 Mas como he mais ordinario, e mais commodo considerar os eixos principais em ordem ao centro de gravidade, sejaõ $AB$, $AC$, $AD$ estes tres eixos (Fig. 181.). Por quanto elles saõ perpendiculares entre si, podem considerar-se como directrizes parallelas ás coordenadas $x, y, z$; e porque de huma parte a propriedade do centro de gravidade dá $\int x\, dM = 0$, $\int y\, dM = 0$, $\int z\, dM = 0$, e da outra temos pela natureza dos eixos principais $\int xy\, dM = 0$, $\int xz\, dM = 0$, $\int yz\, dM = 0$, está claro que o calculo será muito mais simples.

489 He verdade, que naõ se conhecendo nenhum destes eixos, he necessario para os determinar que se resolva huma equaçaõ muito complicada do terceiro gráo. Conhecendo porem hum delles, facilmente se determinaõ os outros dous, tomando o eixo conhecido por huma das directrizes, ou pela linha dos $x$, e as outras duas directrizes parallelas a $y$, e $z$ arbitrariamente. Entaõ, supponde os integrais $\int y^2\, dM = B$, $\int z^2\, dM = C$, $\int yz\, dM = F$, teremos o angulo $G$ que faz hum dos outros dous eixos principais com a directriz parallela a $y$ pela formula *tang* $2G = \frac{2F}{B - C}$, e o momento de inercia a respeito de hum destes eixos será $= A + B \operatorname{sen} G^2 + C \cos G^2 - F \operatorname{sen} 2G$.

490 Dos tres momentos, que daõ os tres eixos principais

pais, hum deve ser hum *maximo*, e outro hum *minimo*. O terceiro, se naõ for igual a hum dos outros, naõ póde ser maximo, nem minimo absoluto; mas exceptuando isto, no mais terá as mesmas propriedades.

Advirta-se, que produzindo dous eixos principais momentos iguais, todos os eixos possiveis situados no seu mesmo plano produziráõ momentos iguais, pois naõ póde haver outro maior, nem menor, que o produzido pelos eixos principais. O mesmo se entenda, quando todos os tres eixos principais daõ momentos iguais.

491 Sejaõ $AB$, $AC$, $AD$ os tres eixos principais do corpo (Fig. 181.), e seja $AF$ outro eixo qualquer que passe pelo ponto $A$, cuja posiçaõ seja dada pelos angulos $BAE = \alpha$, $EAF = \beta$. Porquanto temos entaõ $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, será o momento de inercia em ordem ao eixo $AF$ representado por $A\,(sen\,\alpha^2 + cos\,\alpha^2\,sen\,\beta^2) + B\,(cos\,\alpha^2 + sen\,\alpha^2\,sen\,\beta^2) + C\,cos\,\beta^2$, como se deduz da formula geral (n. 485.).

Chamemos $Ma^2$, $Mb^2$, $Mc^2$ os momentos de inercia em ordem aos eixos $AB$, $AC$, $AD$; e teremos $Ma^2 = B + C$, $Mb^2 = A + C$, $Mc^2 = A + B$; logo $A =$

$\frac{1}{2}M(b^2 + c^2 - a^2)$, $B = \frac{1}{2}M(a^2 + c^2 - b^2)$, $C =$

$\frac{1}{2}M(a^2 + b^2 - c^2)$, e conseguintemente o momento de

inercia em ordem a qualquer eixo $AF$ será representado por $M\,(a^2\,cos\,\alpha^2\,cos\,\beta^2 + b^2\,sen\,\alpha^2\,cos\,\beta^2 + c^2\,sen\,\beta^2)$ Porém he facil de ver, que $cos\,FAB = cos\,\alpha\,cos\,\beta$, $cos\,FAC = sen\,\alpha\,cos\,\beta$, e $cos\,FAD = sen\,\beta$; logo o momento de inercia a respeito de qualquer eixo $AF$ será representado muito simplesmente pela formula seguinte

$$M\,(a^2\,cos\,FAB^2 + b^2\,cos\,FAC^2 + c^2\,cos\,FAD^2).$$

Imaginemos agora huma esfera descrita ao redor do centro de gravidade $G$ (Fig. 182.), e supponhamos em $A$, $B$, $C$ os pólos dos eixos principais, de maneira que $AB$, $BC$, $AC$ sejaõ quartos de circulo. Sendo pois $Ma^2$, $Mb^2$, $Mc^2$ os momentos de inercia relativos aos eixos $GA$, $GB$, $GC$, teremos por momento de inercia em ordem a qualquer eixo $GF$ a expressaõ $M\,(a^2\,cos\,AF^2 + b^2\,cos\,BF^2 + c^2\,cos\,CF^2)$. Logo, chamando $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ os arcos $AF$, $BF$,

$CF$,

$CF$, o valor deste momento será $M(a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2)$. Pela propriedade da esfera temos $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$; e assim será facil de determinar o momento de inercia em ordem a qualquer eixo, huma vez que sejaõ conhecidos os momentos relativos aos eixos principais. Alguns exemplos acabaráõ de illustrar esta theorica.

Nelles consideraremos somente os momentos de inercia relativamente aos eixos, que passaõ pelo centro de gravidade. Supporemos tambem, que os corpos saõ homogeneos, isto he, que todas as suas partes saõ de igual densidade, a fim de podermos representar pelas linhas, superficies, e solidos as suas respectivas massas.

## *Exemplos da determinaçaõ dos tres eixos principais nas linhas, nas superficies, e nos solidos.*

492 I. SEja $AGA$ hum fio, ou huma alavanca extremamente delgada, que se possa considerar como huma linha recta (Fig. 183.). Estando o centro de gravidade $G$ no ponto do meio, he manifesto que a mesma linha $AGA$ será hum dos eixos principais, porque o momento de inercia a respeito de $AGA$ he nullo, e por conseguinte hum minimo. Os outros dous eixos principais seraõ duas quaisquer perpendiculares $GB$.

Isto posto, seja $GM = x$, e $Mm = dx$; os elementos $Mm$, $Mm$ tomados de huma, e outra parte do ponto $G$ daráõ a respeito do eixo $GB$ o momento de inercia $2x^2 dx$, cujo integral he $\frac{2}{3}x^3$. Designando pois a linha inteira por $2a$, será $\frac{2}{3}a^3$, ou $\frac{1}{3}Ma^2$ o momento de inercia relativamente a qualquer eixo $GB$ perpendicular a $GA$.

Logo, se $GF$ for qualquer eixo obliquo, cuja inclinaçaõ sobre $GA$ seja $= q$, teremos por momento de inercia a respeito delle a quantidade $\frac{1}{3}Ma^2 \operatorname{sen} q^2$. Além de que isto he evidente, póde deduzir-se do que acima mostramos,

mos, obſervando que na formula geral $M\ (a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2)$ temos neſte caſo $a = 0$, $b^2 = c^2 = \frac{1}{3}a^2$, $\cos\beta = \operatorname{sen} q$, e $\gamma = 90°$; porque o terceiro eixo $GC$ ſe ſuppoem perpendicular ao plano dos eixos $AG$, $GB$.

493 II. Seja $BMA$ hum anel circular infinitamente delgado (Fig. 184.), cuja maſſa ſeja $M$. Aſſim poderá conſiderar-ſe, como huma circumferencia de circulo, e hum dos eixos principais ſerá perpendicular em $C$ ao plano do meſmo circulo, e os outros dous ſeraõ quaiſquer diametros $BAC$.

A reſpeito do primeiro eixo, o momento de inercia ſerá $Ma^2$, ſendo $a$ o raio do circulo, e a reſpeito do diametro $BCA$ ſerá $\int Mm \,.\, MP^2 = \int a \,.\, MP \,.\, Pp = a \times$ *area* do circulo $= a^3 c$. Quanto á circumferencia, pela qual havemos repreſentado a maſſa $M$, ſerá $2ac$; logo o momento de inercia em ordem a qualquer diametro ſerá $\frac{M}{2ac} \,.\, a^3 c = \frac{1}{2} Ma^2$; de maneira, que naõ he mais que huma ametade do momento de inercia relativo ao eixo principal perpendicular ao plano do circulo.

494 Em geral, ſe hum corpo $M$ póde ſer conſiderado como huma linha, ou como huma ſuperficie ſituada em hum meſmo plano, hum dos eixos principais deverá ſer perpendicular ao dito plano, e os outros dous eſtaraõ nelle ſituados. Porque he neceſſario, para que hum eixo ſeja principal, que tomando-ſe nelle huma abſciſſa $x$ contada deſde o centro de gravidade, e as ordenadas $y$, $z$ a hum ponto qualquer, tenhamos $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$ (n. 485.). Porém neſte caſo he ſempre $x = 0$ em ordem a todos os pontos do corpo; logo eſtes integrais ſe reduzem ambos a nada, e conſeguintemente o eixo perpendicular ao plano da figura he hum dos principais; e os outros dous eſtaraõ neceſſariamente ſituados no meſmo plano, porque devem ſer perpendiculares ao primeiro.

495 III. Se agora conſiderarmos a ſuperficie de hum circulo (Fig. 185.), cujo raio ſeja $= a$, e conſeguintemente a maſſa $M = a^2 c$; todos os diametros poderáõ ſervir

vir de eixos principais, e teremos $\int y^2\,dM = \int z^2\,dM$. Logo o momento de inercia a reſpeito do eixo ($P$) perpendicular ao plano do circulo he o dobro do momento relativo a qualquer diametro. Ora o momento do anel circular deſcrito pelo elemento $Mm$, e tomado em ordem ao eixo ($P$) he $2c \,.\, CM \,.\, Mm \,.\, CM = 2c\,z^3\,dz$, ſuppondo $CM = z$, cujo integral he $\frac{1}{2} z^4 c$, e ſendo tomado para todo o circulo $\frac{1}{2} a^4 c$; logo o momento de inercia a reſpeito do eixo ($P$) he $\frac{1}{2} M a^2$, e a reſpeito de qualquer diametro $\frac{1}{4} M a^2$.

496 IV. Em qualquer ſolido de revoluçaõ (Fig. 186.), o eixo da figura he hum dos eixos principais, e os outros dous ſaõ quaiſquer diametros da ſecçaõ circular feita perpendicularmente ao eixo pelo centro de gravidade. Para o moſtrar, he neceſſario que vejamos como tomando ſobre o eixo $GP$ huma abciſſa $GP = x$, e no plano perpendicular as duas coordenadas $PQ = y$, $QM = z$, teremos $\int xy\,dM = 0$, e $\int xz\,dM = 0$.

Sendo pois $x$ conſtante em huma meſma ſecçaõ, teremos nella $\int xy\,dM = x\int y\,dM$; e porque $\int y\,dM$ exprime a maſſa deſta ſecçaõ multiplicada pela diſtancia do ſeu centro de gravidade á linha perpendicular em $P$ ao plano $GPQ$, ſendo eſta diſtancia nulla por ſe achar o centro de gravidade em $P$, he neceſſario que para cada ſecçaõ perpendicular a $GP$ tenhamos $\int xy\,dM = 0$, e conſeguintemente em toda a extenſaõ do ſolido ſerá $\int xy\,dM = 0$, e $\int xz\,dM = 0$. Logo o eixo do ſolido $GP$ he hum dos eixos principais.

Os outros dous eſtaráõ neceſſariamente ſituados na ſecçaõ perpendicular ao eixo no ponto $G$; logo ſeráõ quaiſquer diametros deſta ſecçaõ, porque ella he circular. Sendo aſſim determinados os eixos principais, falta conhecer os momentos de inercia a reſpeito delles.

Pela propriedade do circulo temos primeiramente $\int y^2\,dM = \int z^2\,dM$; logo o momento de inercia relativamente ao eixo $GP$ ſerá $2\int y^2\,dM$, e a reſpeito de qual-

quer

quer diametro da secçaõ circular feita pelo ponto $G$ será $\int x^2\, dM + \int y^2\, dM$. Como $x$ he constante, quando se trata do elemento comprehendido, por duas secções infinitamente vezinhas, e como por outra parte a massa deste elemento he $cZP^2\, dx$, teremos $\int x^2\, dM = \int cZP^2 x^2\, dx$.

Ainda que esta formula parece negativa, quando $x$ o he, naõ deve com tudo o momento de inercia, que resulta de huma parte do centro de gravidade, subtrahir-se daquelle que resulta da outra; mas he necessario ajuntallos sempre, porque o elemento $dM$ da massa sempre se ajunta ao resto do corpo, e por isso deve tomar-se sempre positivo, assim como $\int x^2\, dx$. Este pequeno inconveniente se evitaria, contando as abscissas da extremidade do eixo.

Representando por $Y$ a superficie da secçaõ do solido, feita perpendicularmente ao plano $GPQ$, na distancia $y$ do eixo, teremos o valor de $Y$ em $y$ pela natureza do solido, e a expressaõ $\int y^2\, dM = \int y^2 Y\, dy$. Em fim, sendo a massa do solido $M = \int cy^2\, dx$, multiplicaremos os momentos achados por $\dfrac{M}{c\int y^2\, dx}$.

497 V. Supponhamos que o solido he hum cylindro (Fig. 187.). Entaõ $ZP$ he constante, que faremos $= b$, e o comprimento do cylindro $= 2a$. Assim teremos $\int x^2\, dM = cb^2 . \dfrac{x^3}{3} = cb^2 . \dfrac{a^3}{3}$ para huma ametade do cylindro, e $\int x^2\, dM = cb^2 . \dfrac{2a^3}{3}$ para o cylindro inteiro.

Quanto á secçaõ $Y$, he neste caso hum rectangulo, que tem de comprido $2a$, e de largo $2\sqrt{(b^2-y^2)}$. Logo $\int y^2\, dM$

$$= \int 4ay^2\, dy \sqrt{(b^2-y^2)} = 4a\left[\frac{1}{4} b^2 \int dy \sqrt{(b^2-y^2)} - \frac{1}{4} y (b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Devendo este integral tomar-se entre os limites $y = 0$, $y = b$, teremos $\int dy \sqrt{(b^2-y^2)} = \dfrac{1}{4} b^2 c$, valor de hum quarto de circulo cujo raio he $b$, e o integral se reduzirá a $\dfrac{1}{4} b^4 ac$, cujo dobro $\dfrac{1}{2} b^4 ac$ será igual a $\int y^2\, dM$ tomado em toda a extenſaõ do ſolido. Por outra parte a maſſa do cylindro $M = 2a \cdot cb^2$; logo o momento de inercia relativamente ao eixo do cylindro ſerá $\frac{M}{2acb^2} \cdot b^4 ac = \frac{1}{2} Mb^2$, e em ordem a qualquer dos outros eixos ſerá $\frac{M}{2acb^2} \left( cb^2 \cdot \frac{2}{3} a^3 + \frac{1}{2} acb^4 \right) = M \left( \frac{1}{3} aa + \frac{1}{4} bb \right)$. Logo os momentos de inercia a reſpeito de todos os eixos, que paſſaõ pelo centro de gravidade, ſeraõ iguaes entre ſi, quando for $\frac{1}{3} aa + \frac{1}{4} bb = \frac{1}{2} bb$, ou $4a^2 = 3b^2$.

498 VI. Se o ſolido for huma esfera, he evidente que os momentos de inercia referidos a todos os eixos que paſſaõ pelo centro de gravidade, devem ſer iguais. E porque ſendo o raio $= a$, ſe acha $\int x^2\, dM = c\, x^2\, dx\, (a^2 - x^2) = c \left( \frac{a^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)$, teremos por valor deſte integral, fazendo $x = a$, a expreſſaõ $\frac{2}{15} ca^5$, cujo dobro $\frac{4}{15} ca^5 = \int x^2\, dM$ tomado em toda a extenſaõ do ſolido. Logo o momento de inercia em ordem a qualquer diametro he $\int x^2\, dM = \frac{8}{15} ca^5 \cdot \frac{M}{\frac{4}{3} ca^3} = \frac{2}{5} Ma^2$.

499 VII. Quando ſe trata de huma lentilha $ACBD$ (Fig. 188.), compoſta de dous ſegmentos esfericos iguais, ou produzida pela revoluçaõ de dous arcos iguais, e ſemelhantes $AC$, $AD$ ao redor da ſua frecha $CD$, entaõ o centro de gravidade ſe acha em $G$ meio de $CD$; e fazendo $DG = CG = a$, $AG = BG = b$, o raio dos dous arcos $DC = r = \frac{b^2 + a^2}{2a}$, e $PD = p$, teremos $PZ^2 = 2rp - pp$, e $GP = x = a - p$.

Será pois $\int x^2\, dM = c \int dp\, (a - p)^2\, (2rp - pp) =$

$c\left[2r\left(\frac{a^2p^2}{2}-\frac{2}{3}ap^3+\frac{1}{4}p^4\right)-\frac{a^2p^3}{3}+\frac{1}{2}ap^4-\frac{1}{5}p^5\right]$. Suppondo $p=a$, e dobrando este integral, teremos $\int x^2\,dM=c\left(\frac{1}{3}ra^4-\frac{1}{15}a^5\right)=\frac{1}{6}ca^3(a^2+b^2)-\frac{1}{15}ca^5=c\left(\frac{1}{6}a^3b^2+\frac{1}{10}a^5\right)=\frac{ca^3}{30}(3a^2+5b^2)$.

Será tambem $\int y^2\,dM=\frac{1}{4}c\int PZ^4\,dp=\frac{1}{4}c\int(2rp-pp)^2\,dp=\frac{1}{4}c\left(\frac{4r^2p^3}{3}-rp^4+\frac{p^5}{5}\right)$. Fazendo $p=a$, e dobrando, acharemos $\int y^2\,dM=\frac{1}{2}ca^3\left(\frac{4}{3}r^2-ar+\frac{1}{5}a^2\right)=\frac{1}{30}ca^3(20r^2-15ar+3a^2)=\frac{1}{60}ca(a^4+5a^2b^2+10b^4)$. Porém temos a massa $M=\int c\,dp(2rp-pp)=c\left(rp^2-\frac{1}{3}p^3\right)$; logo fazendo $p=a$, e dobrando, será $M=\frac{1}{3}ac(a^2+3b^2)$, e conseguintemente $\int x^2\,dM=\frac{1}{10}Ma^2.\frac{5b^2+3a^2}{3b^2+a^2}$, e $\int y^2\,dM=\frac{1}{20}M.\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}$. Donde teremos finalmente por momento de inercia em ordem ao eixo principal $CD$ a quantidade $\frac{1}{10}M.\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}$, e a respeito de qualquer dos outros dous eixos $AB$ a quantidade $\int x^2\,dM+\int y^2\,dM=\frac{1}{20}M.\frac{7a^4+15a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}$.

500 VII. Em fim, se o solido for hum parallelepipedo (Fig. 189.), a determinaçaõ dos eixos principais naõ involve difficuldade. Saõ tres linhas $IGL$, $XGY$, $VGT$ conduzidas pelo centro de gravidade parallelamente aos tres

tres lados. Sejaõ pois eſtes lados $AB = 2a$, $AC = 2b$, $CH = 2f$, e $x$, $y$, $z$ as tres coordenadas parallelas conduzidas pelo centro de gravidade.

Iſto poſto, como todas as ſecçoens feitas perpendicularmente a $GI$ ſaõ $= 4bf$, teremos $\int x^2\, dM = 4bf \int x^2\, dx = \frac{4bfx^3}{3}$. Fazendo $x = a$, e dobrando (ou de outra ſorte, tomando o integral entre os limites $x = + a$, $x = - a$) acharemos $\int x^2\, dM = \frac{abf . 2a^3}{3} = \frac{1}{3} M a^2$, por quanto $M = 8abf$. Do meſmo modo acharemos $\int y^2\, dM = \frac{1}{3} M b^2$, e $\int z^2\, dM = \frac{1}{3} M f^2$. Aſſim teremos por momentos de inercia em ordem aos tres eixos reſpectivamente parallelos a $AB$, $AC$, $CH$, as quantidades ſeguintes.

$$\frac{1}{3} M (b^2 + f^2) = \frac{1}{12} M (AC^2 + CH^2)$$

$$\frac{1}{3} M (a^2 + f^2) = \frac{1}{12} M (AB^2 + BE^2)$$

$$\frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \quad \frac{1}{12} M (AB^2 + AC^2).$$

Eſtes tres valores ſempre ſaõ iguais, tanto no cubo, como nos outros corpos regulares.

Sendo baſtantemente declarado o methodo, que ſe deve ſeguir, para determinar em todos os caſos os eixos principais, e os momentos de inercia, acabaremos eſte artigo com a diſtribuiçaõ dos corpos em claſſes relativas aos ſeus eixos principais.

501 A *primeira claſſe* ſerá pois a dos corpos, que tem todos os tres eixos principais ſemelhantes, ou, que tem os momentos de inercia referidos aos meſmos tres eixos iguais entre ſi. Eſta propriedade compete a huma infinidade de corpos, além dos ſinco regulares.

A *ſegunda claſſe* ſerá a daquelles, que tem dous eixos principais iguais entre ſi, e conſeguintemente os momentos de inercia reſpectivos tambem iguais. Neſte caſo eſtaõ todos os ſolidos de revoluçaõ, e além delles outros muitos.

A

A *terceira classe* finalmente será formada de todos os corpos, que tem os tres eixos desiguais, assim como os momentos de inercia tomados a respeito delles. Esta classe he muito mais numerosa que as precedentes, e para determinar os eixos principais dos corpos nella comprehendidos, he necessario resolver huma equaçaõ muito complicada do terceiro gráo; de maneira, que quasi he impossivel determinar os seus momentos em geral.

502 Como os eixos principais podem considerar-se a respeito de qualquer outro ponto, que naõ seja o centro de gravidade, dahi resultaráõ novas divisoens semelhantes ás precedentes. Mas hum corpo, que pertence a huma classe, attendidos os eixos principais que passaõ pelo centro de gravidade, poderá pertencer a huma classe differente quando se attender aos eixos principais que passaõ por outro qualquer ponto. Por exemplo, hum corpo da primeira classe relativamente aos eixos principais do centro de gravidade, sempre pertencerá a classe differente relativamente aos eixos principais de qualquer outro ponto.

# ARTIGO IV.

## *Do Movimento de Oscillaçaõ de hum corpo grave ao redor de hum eixo horizontal.*

503 SEja $AMB$ ( Fig. 190. ) huma secçaõ vertical do corpo, feita pelo centro de gravidade $G$ perpendicularmente ao eixo de rotaçaõ, de sorte que este eixo seja perpendicular ao plano da figura no ponto $C$. Suppoem-se, que o corpo faz as suas oscillaçoens na extremidade de huma vara $CAG$ inflexivel, e sem massa.

Se representarmos a massa do corpo por $M$, e a gravidade por $g$, será $Mg$ a expressaõ da força acceleratriz que obra em G pela vertical $GL$., e o momento desta força a respeito do eixo de rotaçaõ será $Mg \cdot HG$, sendo $GH$ huma perpendicular conduzida do ponto $G$ para a vertical $CH$.

Suppondo pois $CG = f$, e o angulo $GCH = \phi$, teremos $Mg \cdot f \operatorname{sen} \phi$ por expressaõ do momento da força acceleratriz. Logo, sendo $W$ a velocidade angular do corpo $MAB$ ao redor do eixo de oscillaçaõ, teremos $dW =$

$M$

$\frac{M f \, sen \, \Phi}{\int r^2 \, dM} g \, dt$ (n. 481.); quantidade, na qual $\int r^2 \, dM$ he o momento de inercia em ordem ao eixo de rotaçaõ.

Seja $M b^2$ o momento de inercia referido ao eixo, que passa pelo centro de gravidade parallelamente ao eixo de rotaçaõ, e teremos $\int r^2 \, dM = M b^2 + M f^2$ (n.483.). Logo $dW = \frac{f \, sen \, \Phi}{f^2 + b^2} g \, dt$. Mas supponDo que o movimento se faz de $G$ para $H$, temos $dt = \frac{d\Phi}{W}$; logo $W dW = \frac{-f}{f^2 + b^2} g \, d\Phi \, sen \, \Phi$. O integral he $W^2 = n^2 + \frac{2 f g \, cos \, \Phi}{f^2 + b^2}$; e supponDo que na origem do movimento a linha $CG$ fazia com a vertical $CH$ o angulo $\mathfrak{G}$, teremos $\Phi = \mathfrak{G}$, quando $W = 0$; logo em geral $W^2 = \frac{2 f g}{f^2 + b^2}(cos \, \Phi - cos \, \mathfrak{G})$.

504 Ora hum pendulo simples, que tivesse sido ao mesmo tempo que o corpo $M$ desviado da vertical até fazer com ella o angulo $\mathfrak{G}$, e que se achasse actualmente na distancia $\Phi$ com a velocidade angular $W$, sendo o seu comprimento $L = \frac{f^2 + b^2}{f}$, teria igualmente por expressaõ do quadrado da sua velocidade angular $W^2 = \frac{2 f g}{f^2 + b^2}(cos \, \Phi - cos \, \mathfrak{G})$. Logo o pendulo simples, que tiver o comprimento $L = \frac{f^2 + b^2}{f}$, deverá mover-se precisamente como o corpo $M$; fará as suas oscillaçoens no mesmo tempo; e lhe será conseguintemente isochrono.

505 Se concebermos na direcçaõ de $CG$ hum ponto grave O na distancia $CO = L = \frac{f^2 + b^2}{f}$, este ponto se moverá como se fosse livre, isto he, sem que as outras partes do corpo perturbem o seu movimento, porque entaõ he $CO$ igual ao comprimento do pendulo simples, que faria as suas oscillaçoens no mesmo tempo que o corpo.

Logo

Logo o movimento do corpo ſe faz, como ſe toda a ſua maſſa eſtiveſſe concentrada em $O$; porque entaõ o ponto $O$ teria ſempre o meſmo movimento, e as outras partes ſeguiriaõ ſem reſiſtencia o movimento delle; e por iſſo ſe chama eſte ponto *Centro de Oſcillaçaõ*.

506 Diſto ſe ſegue, que quando hum corpo he obrigado a mover-ſe ao redor de hum eixo fixo, a ſua maſſa naõ deve já conſiderar-ſe reunida no centro de gravidade, mas no centro de oſcillaçaõ, o qual he o que ſe move como ſe toda a maſſa eſtiveſſe nelle concentrada.

Segue-ſe tambem, que o maior effeito que póde produzir ſobre outro corpo a percuſſaõ de hum movel, que gira ao redor de hum eixo fixo, deve ter lugar quando o golpe he dado pelo centro de oſcillaçaõ, ou ao menos por hum ponto que igualmente diſte do eixo. Eſta he a raſaõ, porque o centro de oſcillaçaõ ſe chama tambem *centro de percuſſaõ*.

507 Mas para illuſtrar, e confirmar ao meſmo tempo eſta verdade, ſerá conveniente moſtrar, que quando hum corpo gira ao redor de hum eixo fixo, a reſultante das forças de que as differentes particulas ſaõ animadas, paſſa pelo centro de oſcillaçaõ, ou ao menos por huma diſtancia igual á delle, a reſpeito do eixo.

Seja $ACP$ o eixo de rotaçaõ (Fig. 191.), $G$ o centro de gravidade, $dM$ huma particula qualquer do corpo ſituada em $M$. Do ponto $M$ tire-ſe $MQ$ perpendicular ao plano $GCP$; e do ponto $Q$, $QP$ perpendicular a $CP$. Aſſim deſignando por $W$ a velocidade angular do corpo, teremos $W.PM$ por expreſſaõ da velocidade do elemento $dM$ pela direcçaõ $Mm$ perpendicular a $MP$, e $W.PM.dM$ por expreſſaõ da força do meſmo elemento. Donde reſultará a força $W.QP.dM$ pela direcçaõ $QM$, e a força $W.QM.dM$ parallela a $QP$. Eſtas ultimas forças ſeráõ mutuamente deſtruidas, por quanto $\int QM.dM = 0$; porém ſem embargo de ſer a ſua reſultante nulla, como obra a huma diſtancia infinita, o momento que produzirá a reſpeito do eixo $AP$ ſerá finito, e terá por valor $W.\int QM^2.dM$.

A reſultante das forças dirigidas por $QM$ ſerá perpendicular ao plano $AGC$, e o ſeu valor ſerá $W\int QP\,dM = W.M.CG$, que chamaremos $R$. O ſeu momento a reſpeito do eixo ſerá $= W\int QP^2.dM$, e a ſua diſtancia

cia ao meſmo eixo $= \frac{\int QP^2 . dM}{M . CG}$.

Mas em lugar das forças parallelas a $QP$, que ſem embargo de terem a reſultante nulla produzem o momento $W \int QM^2 . dM$, póde ſubſtituir-ſe a força $R$ na diſtancia do eixo $\frac{W \int QM^2 . dM}{R}$, ou $\frac{\int QM^2 . dM}{M . CG}$. Logo em lugar de todas as forças, de que as particulas ſaõ animadas, póde ſubſtituir-ſe a força $R$ reſultante das forças dirigidas por $QM$, cujo valor he $W . M . CG$, applicando-ſe na diſtancia do eixo $\frac{\int QP^2 . dM}{M . CG} + \frac{\int QM^2 . dM}{M . CG}$ $= \frac{\int PM^2 . dM}{M . CG}$. Logo a força, que reſulta das que animaõ a cada huma das particulas do ſyſtema, paſſa por huma diſtancia do eixo igual á do centro de oſcillaçaõ, e conſeguintemente neſta diſtancia he que a percuſſaõ ſerá mais forte.

508 Eſtá claro, pelo que temos demonſtrado, que para determinar o movimento de oſcillaçaõ de qualquer corpo de volume finito, ao redor de hum eixo horizontal, naõ he neceſſario mais que conhecer bem a diſtancia do centro de oſcillaçaõ ao ponto fixo, ou (que vem a ſer o meſmo) conhecer o comprimento de hum pendulo ſimples iſochrono nas ſuas oſcillaçoens ás do meſmo corpo.

Sendo pois $r$ a diſtancia de qualquer particula $dM$ do corpo ao eixo de rotaçaõ, $\int r^2 dM$ o momento de inercia relativo ao meſmo eixo, e $f$ a diſtancia $CG$ do centro de gravidade ao meſmo eixo, teremos a diſtancia do centro de oſcillaçaõ $L = \frac{\int r^2 dM}{Mf}$. Donde ſe vê, que *a diſtancia do centro de oſcillaçaõ ao eixo he igual ao momento de inercia relativamente ao eixo, dividido pelo producto da maſſa do corpo multiplicada pela diſtancia do centro de gravidade ao meſmo eixo.*

Se $Mb^2$ repreſentar o momento de inercia, a reſpeito do eixo parallelo que paſſa pelo centro de gravidade, teremos $\int r^2 dM = Mb^2 + Mf^2$; logo a diſtancia do centro de oſcilla-

oscillaçaõ $L = \frac{Mb^2 + Mf^2}{Mf} = f + \frac{b^2}{f}$. Donde se vê que este centro está sempre mais distante do eixo que o centro de gravidade a quantidade positiva $GO = \frac{b^2}{f}$. Assim, pelo que acima temos dito dos momentos de inercia, sem difficuldade se podem determinar os centros de oscillaçaõ.

## *Exemplos.*

509 I. QUando se fazem as experiencias sobre os pendulos, ordinariamente se usa de hum globo $AMB$ (Fig. 192.), pendurado por hum fio de metal muito delgado. Desprezando pois a massa do fio, e suppondo o raio do globo $= b$, e a distancia do centro delle ao ponto de suspensaõ $= f$, teremos $b^2 = \frac{2}{5} b^2$ (n. 498.). Logo a distancia do centro de oscillaçaõ ao eixo, ou $CO = f + \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{f}$; e se as oscillaçoens forem pequenas, será a duraçaõ de cada huma $c\sqrt{\left(\frac{f^2 + \frac{2}{5}b^2}{fg}\right)}$:

Quando $f = 0$, e quando $f = \infty$, o pendulo simples isochrono será infinitamente longo. Por tanto, entre estes limites deverá haver hum *minimo*; e este terá lugar, quando for $f = b\sqrt{\frac{2}{5}}$. Entaõ seraõ as oscillaçoens feitas com a prontidaõ maior que he possivel; e sendo pequenas, cada huma terá por duraçaõ $c\sqrt{\frac{2f}{g}}$.

510 Para que este pendulo faça cada huma das oscillaçoens em hum segundo, he necessario em geral que $c\sqrt{\left(\frac{f^2 + \frac{2}{5}b^2}{fg}\right)} = 1$, ou (que vem a ser o mesmo) que $f^2 + \frac{2}{5} b^2 = \frac{fg}{c^2}$; e conseguintemente $f = \frac{g}{2c^2}$

$\pm$

$\pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4c^4} - \frac{2}{5} b^2\right)}$. Donde se vê, que ha sempre dous modos de suspender hum globo de maneira, que faça cada oscillaçaõ em hum segundo.

Se o raio $b$ do globo for pequeno, he necessario que a distancia do centro delle ao ponto de suspensaõ seja representada por hum destes valores $\frac{g}{c^2} - \frac{2}{5} b^2 \cdot \frac{c^2}{g}$, ou $\frac{2}{5} b^2 \cdot \frac{c^2}{g}$. Mas neste ultimo caso, bem se vê que o ponto de suspensaõ cahiria dentro do globo, e muito perto do centro. Por isso naõ se usa, senaõ do outro valor, tomando $f = \frac{g}{2c^2} + \sqrt{\left(\frac{g^2}{4c^4} - \frac{2}{5} b^2\right)}$.

511 Os dous valores de $f$ seriaõ iguais em geral, se tivessemos $\frac{g^2}{4c^4} = \frac{2}{5} b^2$, ou $b = \frac{g}{c^2} \sqrt{\frac{5}{8}}$. Logo, como $\frac{g}{c^2}$ he o comprimento do pendulo simples de segundos, o qual he de 440, 57 linh., seria necessario que o raio do globo fosse de 348, 3 linh., ou de 2 pés, 5 poll. 0, 3 linh. Entaõ o intervallo $CG$ (Fig. 194.) entre o centro e o ponto de suspensaõ seria $\frac{g}{2c^2}$, ou a ametade do pendulo simples de segundos, isto he, 1 pé 6 poll. 4 linh. e $\frac{2}{7}$. Conduzindo $CF$ perpendicular a $AG$, he facil de ver que $cos\, AF = \frac{CG}{b} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, e que o arco $AF$ he conseguintemente de $50° 46'$. Sendo assim determinado o diametro do globo, e o ponto de suspensaõ $C$, as oscillaçoens delle se faraõ em hum segundo.

Se fizermos oscillar o globo ao redor do ponto $A$, teremos $f = b$; logo o comprimento do pendulo simples isochrono será $\frac{2}{5} b$; e querendo que faça huma oscilla-

çaõ

ção por segundo, deverá ser o raio $b = \frac{5}{7} . 440$, 57 linhas $=$ 2 pés, 2 poll. 2 linh. e $\frac{2}{3}$.

512 II. Consideremos agora hum pendulo composto de dous pezos $A$, $B$ (Fig. 193.), que supporemos esfericos, e enfiados em huma vara inflexivel, e sem massa $CAB$. Sejaõ $\alpha$ e $\beta$ os raios destes globos, $a$ e $b$ as distancias respectivas dos seus centros ao ponto de suspensaõ $C$. A distancia do centro de oscillaçaõ, ou o comprimento do pendulo simples isochrono, será

$$CO = \frac{A\left(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2\right) + B\left(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2\right)}{Aa + Bb}.$$

Isto posto, qual he a distancia $a$ em que deve por-se o corpo menor $A$, para que as oscillações sejaõ as mais prontas, que podem resultar deste pendulo? Entaõ deve o pendulo simples isochrono $CO$ ser hum *minimo*; e conseguintemente differenciaremos o seu valor fazendo $a$ variavel, e teremos $A^2\left(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2\right) + AB\left(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2\right) = 2A^2a^2 + 2ABab$, isto he, $a^2 + \frac{2Bb}{A}a = \frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{B}{A}\left(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2\right)$; donde se tira

$$a = -\frac{B}{A}b \pm \sqrt{\left[\frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{B}{A}\left(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2\right) + \frac{B^2}{A^2}b^2\right]},$$

e o comprimento do pendulo simples isochrono se achará $= 2a$. Bem se vê, que dos dous valores de $a$ somente o positivo pode satisfazer ao caso presente.

Se os dous globos forem homogeneos, teremos $\frac{B}{A} = \frac{\beta^3}{\alpha^3}$, e conseguintemente $a = -\frac{\beta^3}{\alpha^3}b + \sqrt{\left[\frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{\beta^3}{\alpha^3}(b^2 +\right.}$

a

$\frac{2}{5}\beta^2) + \frac{\beta^6}{\alpha^6} b^2$ ]; e se os raios delles forem muito pequenos em comparaçaõ de $CB$, será proximamente

$$a = -\frac{B}{A}b + b\sqrt{\left(\frac{B}{A} + \frac{B^2}{A^2}\right)}.$$

513. Se fossem tres globos $A$, $B$, $C$, os seus raios $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, e as distancias ao ponto de suspensaõ contadas do centro $a$, $b$, $c$, a distancia do centro de oscillaçaõ seria

$$\frac{A(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2) + B(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2) + C(c^2 + \frac{2}{5}\gamma^2)}{Aa + Bb + Cc},$$

e assim por diante, qualquer que seja o numero dos corpos.

514 III. Se hum globo $AMK$ (Fig. 195.), suspendido da vara cylindrica $FA$, oscillar ao redor do eixo horizontal $DCE$, determinar-se-ha o seu centro de oscillaçaõ $CO$ da maneira seguinte.

Seja $A$ o pezo do globo, $B$ o do cylindro, $a$ o raio do globo, $2b$ o comprimento $FA$ do cylindro, $2b$ o seu diametro, $f$ a distancia $CA$, $G$ e $O$ os centros de gravidade e de oscillaçaõ do systema. Como o centro de gravidade do cylindro está em $I$ meio de $FA$, teremos primeiramente $(A+B)CG = A.CB + B.CI = A(a+f) + B(f-b)$. Depois acharemos o momento de inercia do globo em ordem ao eixo $DCE = A(f+a)^2 + \frac{2}{5}Aa^2$, e do cylindro em ordem ao eixo horizontal que passa pelo seu centro de gravidade $I = B\left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2\right)$ (n.497.), e em ordem ao eixo $DCE = B\left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2 + (f-b)^2\right]$. Logo será a distancia do centro de oscillaçaõ

$$CO = \frac{A\left[\frac{2}{5}a^2 + (f+a)^2\right] + B\left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2 + (f-b)^2\right]}{A(f+a) + B(f-b)}.$$

515 Pas

515 Para que este pendulo seja de segundos, he necessario que $CO = \frac{g}{c^2}$. Com esta condiçaõ se determinará huma das quantidades que se achaõ no seu valor, o que sempre poderá fazer-se pela resoluçaõ de huma equaçaõ do segundo gráo.

Quando o eixo de rotaçaõ se acha no alto da vara, temos $f = 2b$, e o valor precedente de $CO$ se muda no seguinte

$$CO = \frac{A\left(\frac{7}{5}a^2 + 4ab + 4b^2\right) + B\left(\frac{4}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2\right)}{A(2b+a) + Bb}.$$

Supponhamos, por exemplo, $A = 15$ libr. $B = \frac{1}{8}$libr., $CA = 2b = 3$ pés, $a = \frac{1}{4}$ pé, e que o diametro $2b$ de $FA$ he muito pequeno em comparaçaõ do seu comprimento, de sorte que se possa desprezar $\frac{1}{4}b^2$; e acharemos $CO = 3,2528$ pés. Se a massa da vara se desprezasse, teriamos $CO = 3,2577$; e o erro seria de $\frac{7}{10}$ de huma linha proximamente.

516 IV. Examinemos em fim o centro de oscillaçaõ de hum pendulo composto de huma lentilha $BGDF$ (Fig. 196.), suspensa de huma vara $AB$ de figura parallelepipeda, como se usa de ordinario. Aqui naõ representamos mais que a secçaõ perpendicular ao plano, em que se move o pendulo.

Seja $FG = 2a$, $BD = 2b$, $AB = 2f$, $CB = b$, a largura da vara $ib = m$, e a espessura $= n$, o pezo da lentilha $= L$, e o da vara $= P$. E primeiramente, sendo o centro de gravidade do pendulo em hum ponto $G$, e o da vara em hum ponto $I$, teremos $(L + P)CG = L.EC + P.CI = L(b+b) + P(b-f)$. Depois por momento de inercia da lentilha em ordem ao eixo $FG$ teremos a quantidade $\frac{1}{20}L.\frac{7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2}$ (n. 499.), e

conse-

conſeguintemente em ordem ao eixo horizontal $TCV$ a quantidade $\frac{1}{20} L . \frac{7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2} + L(b + b)^2$. Em fim por momento de inercia da vara relativamente ao eixo que paſſa pelo centro de gravidade $I$, teremos $\frac{1}{12} P(4f^2 + n^2)$ (n. 500.), e relativamente ao eixo $TCV$ ſerá o momento della $\frac{1}{12} P(4f^2 + n^2) + P(b-f)^2$. Logo

$$CO = \frac{\frac{1}{20} L(7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{(a^2 + 3b^2)[L(b+b) + P(b-f)} + \frac{L(b+b)^2 + \frac{1}{12} P(4f^2 + n^2) + P(b-f)^2}{L(b+b) + P(b-f)}$$

quantidade, que ſe deverá igualar a $\frac{g}{c^2}$, querendo que o tempo de cada oſcillaçaõ ſeja de hum ſegundo.

517 Huyghens foi o primeiro que indagou felizmente, e que determinou por hûm methodo directo os centros de oſcillaçaõ dos planos e dos ſolidos (*Horol. Oſcil. Part. IV. Prop. XXI & XXII*). Todos ſabem como eſte grande homem poſſuia o talento de conduzir as theorias mais elevadas aos uſos da maior utilidade, e quanto lhe ſaõ devedoras todas as partes da Mathematica. As artes naõ lhe devem menos, principalmente a da Relogiaria. Depois de haver feito neſte genero deſcobrimentos immortais, teve a idêa de os applicar á indagaçaõ de huma medida invariavel, e bem depreſſa deduzio do pendulo ſimples iſochrono a exiſtencia della. Eisaqui, qual foi o ſeu raciocinio.

Se hum relogio de ſegundos for bem ajuſtado com o tempo medio por obſervaçaõ das eſtrellas, ou por outra qualquer que ſeja propria para iſſo, naõ ha couſa mais facil do que procurar hum pendulo ſimples, que faça as ſuas oſcillações no meſmo tempo. Baſta alongar, ou encurtar o

fio;

ſão, até coincidirem bem exactamente por hum quarto, ou meia-hora quando muito, as oſcillações dos dous pendulos. Tendo chegado a eſta preciſaõ, naõ ha mais que medir com muita exactidaõ a diſtancia do ponto de ſuſpenſaõ ao centro de oſcillaçaõ no pendulo ſimples; porque dividindo eſta diſtancia em tres partes, cada huma dellas poderá ſervir de medida invariavel, e univerſal. O meſmo autor lhe deu o nome de *pé horario.*

Bem ſe vê com effeito, que em quanto a força da gravidade for a meſma no meſmo lugar, naõ póde haver mudança no comprimento do pendulo ſimples. Os ſeculos vindouros poderáõ pois verificar, e determinar as medidas actuais, comparando-as com eſte comprimento invariavel, no caſo de que pelo decurſo dos tempos ellas ſe alterem, ou ſe percaõ. Baſtará, por exemplo, que a poſteridade ſaiba que o pendulo ſimples de ſegundos era em Paris de 3 pés 8 linhas e $\frac{57}{100}$, para concluir que o pé regio era para o pé horario como 43200 para 44057. Se os antigos tiveſſem aſſim fixado as ſuas medidas, naõ haveria tanto que diſputar ſobre as dos Hebreus, dos Egypcios, dos Gregos, e dos Romanos.

## ARTIGO V.

### *Das duas eſpecies de movimento que póde tomar hum corpo livre, ſendo impellido por huma direcçaõ, que naõ paſſa pelo ſeu centro de gravidade.*

518 SEja *M* hum corpo qualquer (Fig. 197.), e *G* o ſeu centro de gravidade. Pergunta-ſe, qual ſerá o movimento delle, ſe qualquer potencia *A* o ſollicitar por huma direcçaõ *A F*, que naõ paſſa pelo centro de gravidade?

Já temos viſto, que o centro de gravidade deve mover-ſe, como ſe a força motriz lhe foſſe immediatamente applicada pela direcçaõ parallela *G E*; e conſeguintemente tomará por eſta linha a velocidade $\frac{A}{M}$. Tambem vi-mos, que ao mesmo tempo que o centro de gravidade se adianta com o movimento progressivo, as outras partes devem girar á roda delle, como se estivesse fixo.

Supponhamos pois que a rotaçaõ se faz a respeito de hum eixo perpendicular em $G$ ao plano da figura, e seja W a velocidade angular que tomará o corpo ao redor delle, $f$ a perpendicular $GF$, $Af$ o momento da força motriz, e $Mk^2$ o momento de inercia em ordem ao eixo de rotaçaõ. Assim teremos por expressaõ da velocidade inicial de rotaçaõ $W = \frac{Af}{Mk^2}$. Mas este eixo de rotaçaõ, e esta velocidade conservar-se-haõ por ventura do mesmo modo nos instantes seguintes?

519 Para resolver este problema, he necessario buscar em geral quais saõ em qualquer corpo os eixos, ao redor dos quais sendo huma vez posto em movimento, deverá conservallo uniformemente, sem variar de eixo de rotaçaõ.

Seja $AP$ o eixo procurado (Fig. 198.), $G$ o centro de gravidade do corpo, $MQ$ huma perpendicular ao plano $GAP$ conduzida do ponto $M$, onde se acha o elemento $dM$, $GA$ e $PQ$ duas perpendiculares ao eixo conduzidas dos pontos $G$ e $Q$. Supponhamos $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, a velocidade angular do corpo $= W$; e teremos $W . PM$ por expressaõ da velocidade de rotaçaõ do elemento $dM$. Donde será a força centrifuga delle pela direcçaõ $PM$ representada por $\frac{W^2 . PM^2}{PM} dM$ (n. 407.) $= W^2 PM . dM$.

Esta força resolve-se em duas, huma por $QM = W^2 . z dM$, e a outra parallela a $PQ = W^2 y dM$. A resultante de todas as forças $W^2 . z dM$ deve ser nulla, porque $\int z dM = 0$, e a resultante de todas as forças $W^2 . y dM$ deverá ser $= W^2 . M . GA$. Mas he necessario, que o eixo $AP$ seja tal, que as forças centrifugas se façaõ mutuamente equilibrio, e que naõ possaõ conseguintemente alterar a velocidade angular, nem o mesmo eixo. Logo $W^2 M . GA = 0$, isto he, deve o eixo de rotaçaõ passar pelo centro de gravidade.

520 Mas alem disto ainda he necessario mais; porque as forças $W^2 \int z dM$ e $W^2 \int y dM$ ainda que nullas em si mesmas, como se devem conceber actuando em distancias infini-

infinitas $\frac{\int x z d M}{\int z d M}$, e $\frac{\int x y d M}{\int y d M}$, produziriaõ momentos finitos $W^2 \int x z d M$, e $W^2 \int x y d M$, capazes de fazer variar tanto o eixo de rotaçaõ, como a velocidade angular. Logo he tambem neceſſario, que ſeja $\int xzdM = 0$, e $\int x y dM = 0$, para que o effeito das forças centrifugas ſeja abſolutamente deſtruido. Porém as formulas $\int xzdM = 0$, $\int x y d M = 0$ naõ tem lugar, ſenaõ quando $AP$ he hum dos eixos principais. Logo podemos concluir geralmente, que *em qualquer corpo livre os eixos principais do centro de gravidade ſaõ os unicos, ao redor dos quais ſe perpetua uniformemente qualquer movimento primitivo de rotaçaõ.*

E por conſeguinte; a ſoluçaõ do Problema ſuppoem, que o eixo perpendicular em $G$ ao plano da figura he hum dos eixos principais.

521 No movimento, de que tratamos aqui, caminhando o centro de gravidade $G$ uniformemente pela linha $G E$ (Fig. 199.), e girando as outras partes ao redor de $G$ ſegundo $K L$, deve haver neceſſariamente na recta $F G K$ perpendicular a $G E$ hum ponto $C$, cuja velocidade de rotaçaõ perpendicular a $C G$ ſeja igual á velocidade do centro de gravidade, e que fique conſeguintemente em deſcanço por hum inſtante. Eſte ponto he o que M. Bernoulli chama *centro eſpontaneo de rotaçaõ.*

Para o determinarmos, reflectiremos que $\frac{A}{M}$ exprime a velocidade do centro de gravidade commua a todas as partes do ſyſtema, e $\frac{A f}{M k^2}$ a velocidade angular do corpo á roda do centro de gravidade, e conſeguintemente que $\frac{A f}{M k^2} \cdot C G$ he a velocidade de rotaçaõ do ponto $C$. Logo teremos $\frac{A f}{M k^2} \cdot C G = \frac{A}{M}$, e $C G = \frac{k^2}{f}$. Donde ſe ſegue, que *o centro eſpontaneo de rotaçaõ naõ he couſa differente do centro de oſcillaçaõ do corpo, ſuppondo que elle oſcilla ao redor de hum eixo perpendicular em* F *ao plano da figura*; e conſeguintemente ſe determinará pelos meſmos principios.

55. Daqui ſe póde facilmente entender a origem do movi-

movimento de rotaçaõ dos planetas. Huma ſimples força de projecçaõ applicada por huma direcçaõ, que naõ paſſaſſe pelo centro de gravidade, baſtava para produzir ſimultaneamente os movimentos periodicos, com que elles deſcrevem as ſuas trajectorias, e os movimentos de rotaçaõ, com que giraõ ao redor dos ſeus proprios centros; e bem facilmente ſe póde determinar a diſtancia do centro, onde devia ſer applicada eſta força, para produzir os movimentos que conſtaõ das obſervações.

Seja o corpo $M$ huma esfera (Fig. 197.), e o ſeu raio $= R$; e teremos $Mk^2 = \frac{2}{5} M R^2 + M f^2$, $W = \frac{Af}{\frac{2}{5} M R^2 + M f^2}$, ou $f^2 - \frac{A}{MW} f + \frac{2}{5} R^2 = 0$, e conſeguintemente $f = \frac{A}{2MW} - \sqrt{\left(\frac{A^2}{4M^2W^2} - \frac{2}{5}R^2\right)}$:

Para applicarmos iſto ao movimento da terra, reflectiremos que fazendo ella a revoluçaõ diurna em hum dia e a periodica em hum anno, ſerá a velocidade angular ao redor do ſol repreſentada por $\frac{W}{365}$ proximamente; e ſuppondo que o raio da orbita annua he de 22000 ſemidiametros terreſtres, ſerá a velocidade de projecçaõ repreſentada por $\frac{22000\, R\, W}{365} = \frac{4400\, R\, W}{73} = \frac{A}{M}$. E ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, teremos $f = \frac{2200\, R}{73} - \sqrt{\left[\left(\frac{2200\, R}{73}\right)^2 - \frac{2}{5} R^2\right]} = \frac{1}{150} R$ proximamente, como M. Bernoulli achou por outro methodo.

Achado o valor de $f$, podemos determinar o centro eſpontaneo de rotaçaõ (Fig. 199.), e teremos $CG = \frac{\frac{2}{5} R^2 + f^2}{f} = 60\, R$ proximamente; reſultado muito notavel, por dar eſte centro coincidente com a diſtancia da Lua. He difficil de crer, que iſto ſuccedeſſe aſſim por acaſo, mas mais difficil ſerá aſſignar a connexaõ phyſica, que

que tem a Lua com o movimento diurno da terra. 55.

522 Probl. I. Vindo hum corpo duro $m$ (Fig. 200.) com a velocidade $V$ encontrar outro corpo tambem duro $M$ perpendicularmente á superficie delle, mas por huma direcçaõ $IK$, que naõ passa pelo seu centro de gravidade $G$: pergunta-se, qual ha de ser o movimento de ambos elles, supposndo $M$ livre, e em descanço.

Seja $v$ a velocidade do corpo $m$ depois da percussaõ, desorte que $m(V-v)$ exprima a quantidade de movimento por elle communicada ao corpo $M$ segundo a direcçaõ $IK$. Sabemos já que o centro de gravidade $G$ se ha de mover, como se esta força lhe fosse immediatamente impressa por huma direcçaõ parallela $GE$; e assim terá por $GE$ a velocidade $\frac{m(V-v)}{M}$. Por outra parte sabemos, que as mais partes do corpo deveráõ girar ao redor do ponto $G$ com a velocidade angular $W = \frac{mf(V-v)}{Mk^2}$, representando $f$ a recta $GK$ perpendicular a $IK$, e $Mk^2$ o momento de inercia a respeito do eixo perpendicular em $G$ ao plano da figura, eixo ao redor do qual o corpo se suppoem girar.

Agora he necessario, que a velocidade do ponto de contacto $I$ segundo a direcçaõ $IK$ seja igual á velocidade $v$, que resta ao corpo $m$, a fim de que este naõ possa mais actuar sobre o corpo $M$. Ora em virtude do movimento de rotaçaõ ao redor de $G$, a velocidade do ponto $I$ perpendicularmente a $GI$ he $\frac{mf(V-v)}{Mk^2} \cdot GI$, donde resulta por $IK$ a velocidade $\frac{m(V-v)f^2}{Mk^2}$; e esta juntamente com a velocidade progressiva do centro de gravidade deve ser igual a $v$. Logo teremos a equaçaõ $\frac{m(V-v)f^2}{Mk^2} + \frac{m(V-v)}{M} = v$, da qual se tira $v = \frac{m(f^2+k^2)V}{m(f^2+k^2)+Mk^2}$. Logo será a velocidade do centro de gravidade $\frac{m(V-v)}{M} = \frac{mk^2 V}{m(f^2+k^2)+Mk^2}$,

e

e a velocidade angular de rotaçaõ ao redor do ponto $G$ ſerá $W = \frac{m f V}{m(f^2 + k^2) + M k^2}$; com o que ſe tem reſolvido o problema propoſto.

Se foſſe $f = o$, teriamos a velocidade $v = \frac{m V}{M + m}$, a do centro de gravidade $= \frac{m V}{M + m} = v$, e a velocidade angular $W = o$. Com effeito, ſendo entaõ directa a percuſſaõ, e determinando-ſe o movimento pelas formulas ordinarias (n. 447.), ſe acharia o meſmo reſultado.

523 Probl. II. Dous corpos duros e esfericos $A$, $a$ (Fig. 201.), ſuſpendidos dos pontos fixos $C$, $c$ pelas varas inflexiveis $CA$, $ca$ vem a encontrar-ſe com as velocidades angulares $V$, $v$: qual ſerá o ſeu movimento depois da colliſaõ?

Sejaõ $V'$, $v'$ as velocidades angulares, que elles teráõ depois do encontro. Pelo principio geral ſerá pois neceſſario, que as velocidades $V'$, $v'$ naõ ſe embaraſſem mutuamente, e que os corpos $A$, $a$ animados das velocidades angulares $V - V'$, $v - v'$ façaõ equilibrio entre ſi. Conduzindo $CB = F$, e $cb = f$, perpendiculares á linha $Aa$ que paſſa pelos centros e pelo ponto do contacto, eſtá claro que a primeira condiçaõ exige que as velocidades dos pontos $B$, $b$ ſejaõ iguais, e conſeguintemente teremos $V' F = v' f$.

Em ſegundo lugar, cada particula $dM$ do corpo $A$ ſituada na diſtancia $r$ do eixo $C$ ſendo animada da velocidade $(V - V')r$, que ella ha de perder, dá relativamente ao meſmo eixo o momento $(V - V')r^2 dM$; logo a ſoma dos momentos ſerá $(V - V')\int r^2 dM = (V - V')A.K^2$, chamando $A.K^2$ o momento de inercia do corpo $A$ a reſpeito do eixo $C$.

Donde ſe ſegue, que o corpo $A$ animado da velocidade angular $V - V'$ he equivalente a huma força $\frac{(V - V')AK^2}{F}$ applicada em $B$ pela direcçaõ $AB$. Do meſmo modo o corpo $a$ animado da velocidade angular $v - v'$ he equivalente a huma força $\frac{(v - v')ak^2}{f}$ applicada em $b$ pela

direc-

direcçaõ $AB$. Logo, pela ſegunda condiçaõ, he neceſſario que tenhamos $\frac{(V-V')AK^2}{F} + \frac{(v-v')ak^2}{f} = 0$.

Eſta equaçaõ juntamente com a outra $V'F = v'f$, determinará as velocidades angulares $V'$, $v'$, cujos valores ſaõ $V' = \frac{f(AK^2Vf + ak^2vF)}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$, $v' = \frac{F(AK^2Vf + ak^2vF)}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$.

524 Até aqui temos ſuppoſto os corpos duros; mas ſe elles foſſem elaſticos, as formulas achadas careceriaõ das modificações, que a elaſticidade requer. Porque entaõ reſtituindo eſta força ao corpo $A$ em ſentido contrario a velocidade $V-V'$, que elle tinha perdido pela compreſſaõ, naõ lhe reſtará mais que a velocidade $2V'-V$. Do meſmo modo o corpo $a$ tendo ganhado na compreſſaõ a velocidade $v'-v$, pela ſua elaſticidade ganharia outro tanto, e depois da percuſſaõ teria a velocidade $2v'-v$. Subſtituindo pois em lugar de $V'$, $v'$ os valores que acabamos de achar, teremos as velocidades angulares

do corpo $A = \frac{Af^2K^2V + 2afFk^2v - aF^2k^2V}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$

do corpo $a = \frac{ak^2F^2v + 2AfFK^2V - Af^2K^2v}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$.

Antes da colliſaõ huma particula $dM$ do corpo $A$ ſituada na diſtancia $r$ do eixo de rotaçaõ, tinha a velocidade $rV$, e a força viva $r^2V^2dM$; logo a força viva do corpo $A$ era $V^2\int r^2dM = V^2 \cdot AK^2$, e a ſoma das forças vivas dos dous corpos $V^2 . AK^2 + v^2 . ak^2$. Eſta ſoma veio a ſer depois da colliſaõ $AK^2(2V'-V)^2 + ak^2(2v'-v)^2$, ou $V^2 . AK^2 + v^2 . ak^2 + 4AK^2V'(V'-V) + 4ak^2v'(v'-v)$. Porém he facil de ver, que os dous ultimos termos ſe reduzem a nada; porque as duas equações $V'F = v'f$, e $\frac{AK^2(V'-V)}{F} + \frac{ak^2(v'-v)}{f} = 0$, daõ $V'(V'-V)AK^2 + v'(v'-v)ak^2 = 0$. Logo a ſoma das forças vivas he ſempre a meſma antes e depois da colliſaõ, quando os dous corpos ſaõ perfeitamente elaſticos.

# FIM.

razão $AB$. Logo, pela formula [illegible], se [illegible] ro que fe achão [illegible]

Elle [illegible] juntamente [illegible] [illegible] minará as velocidades [illegible]

[illegible]

114. Até aqui temos tratado os corpos [illegible] [illegible] [illegible] força em [illegible] [illegible] do outro o corpo $A$ [illegible] a velocidade [illegible], pela lei [illegible] e depois da pancada terá a velocidade [illegible] Substituindo [illegible] de achar, teremos as velocidades [illegible]

[illegible] do corpo $A$ = [illegible]

do corpo $B$ = [illegible]

Antes da collisão [illegible] corpo $A$ [illegible] [illegible] cidade [illegible], e a força viva [illegible] do corpo $A$ era [illegible] [illegible] forças vivas dos dous corpos [illegible] [illegible] ultimos termos se [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible] das forças vivas he sempre a mesma [illegible] da collisão, quando os dous corpos [illegible] [illegible]

# FIM.

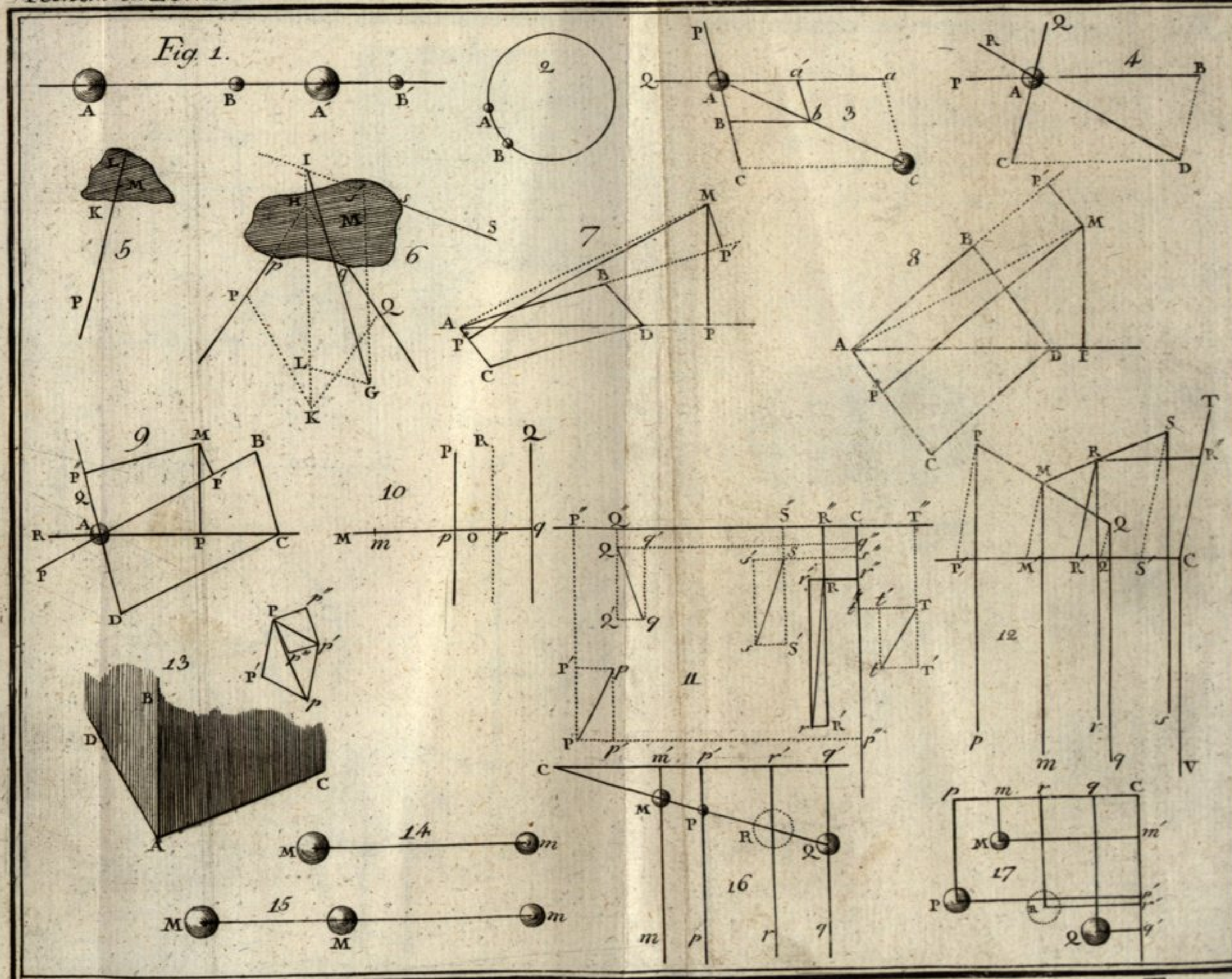



Fig. 17.

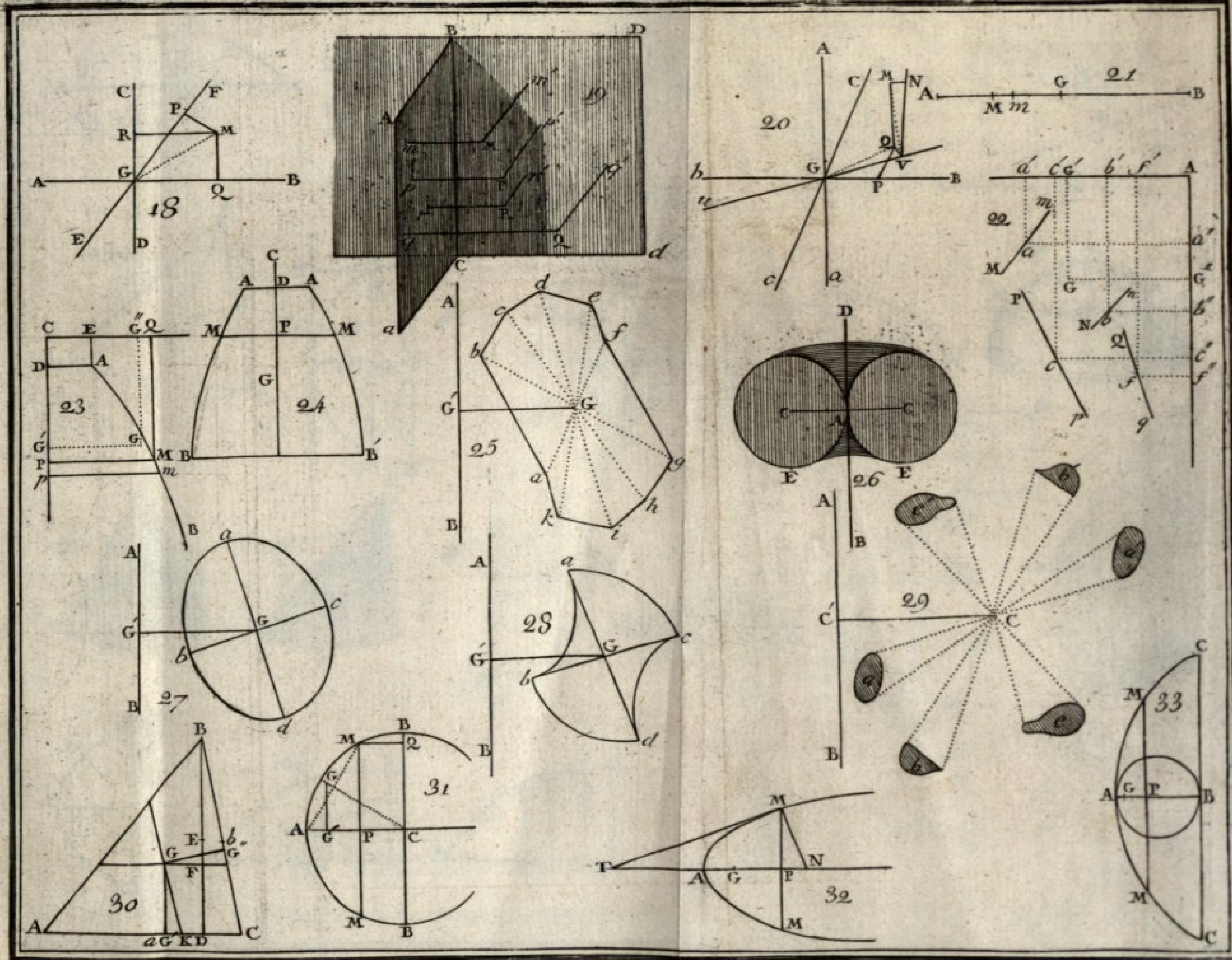


Fig. 33.

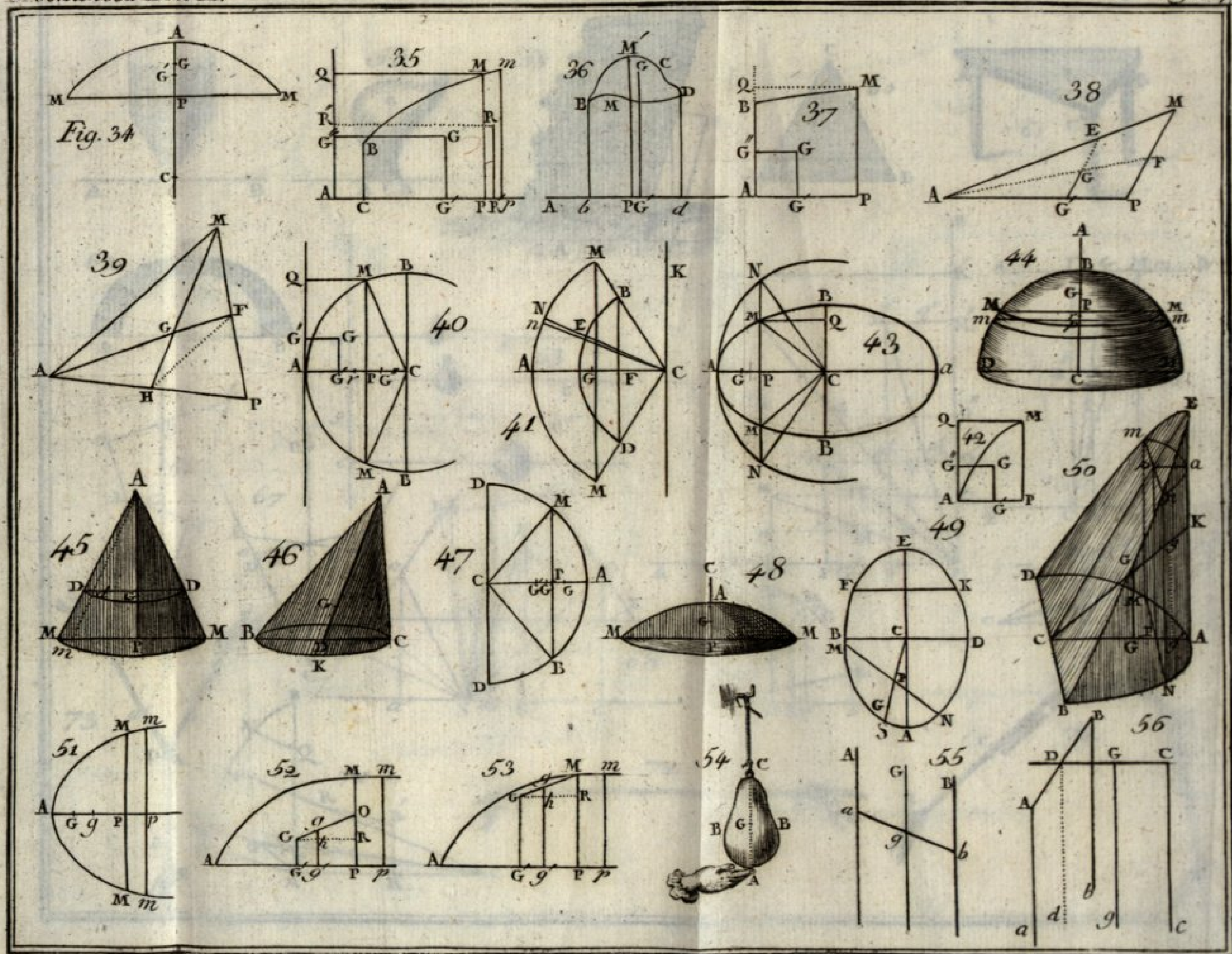
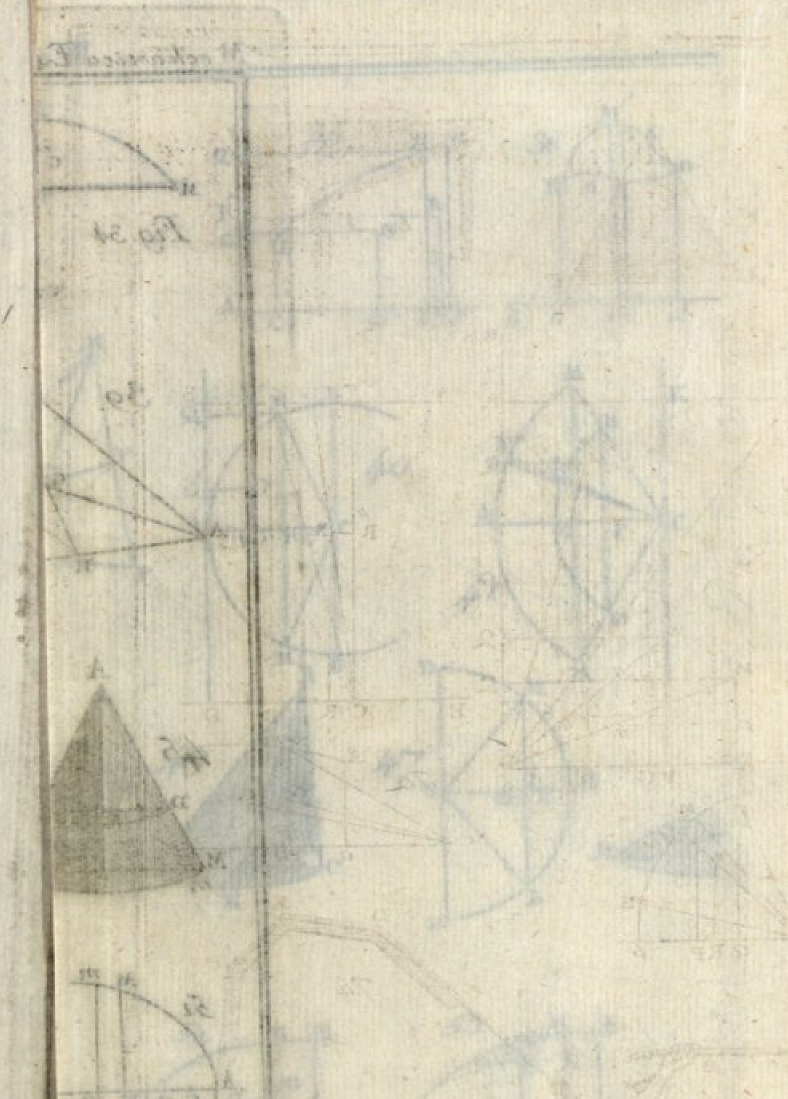
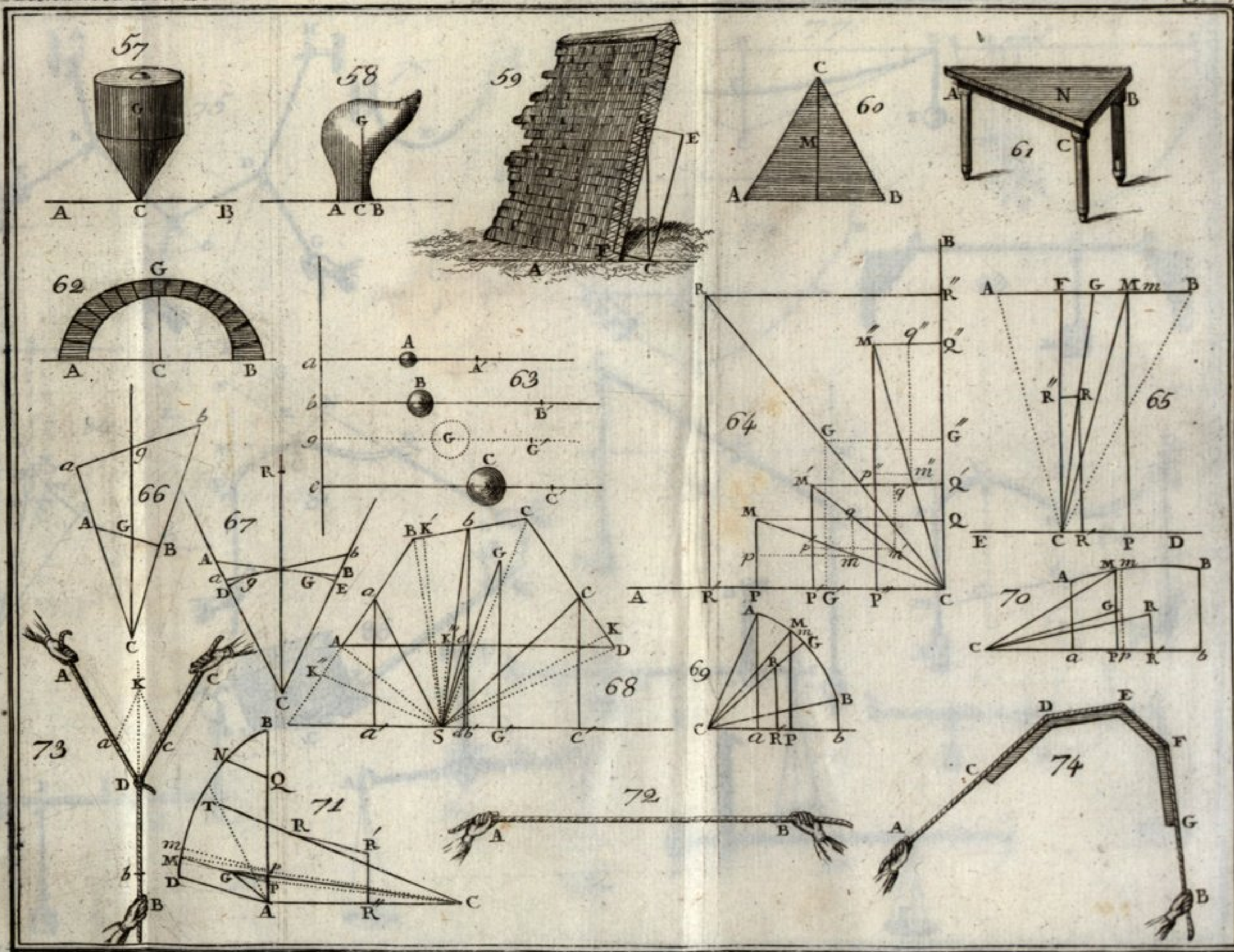



Fig. 56.




57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74

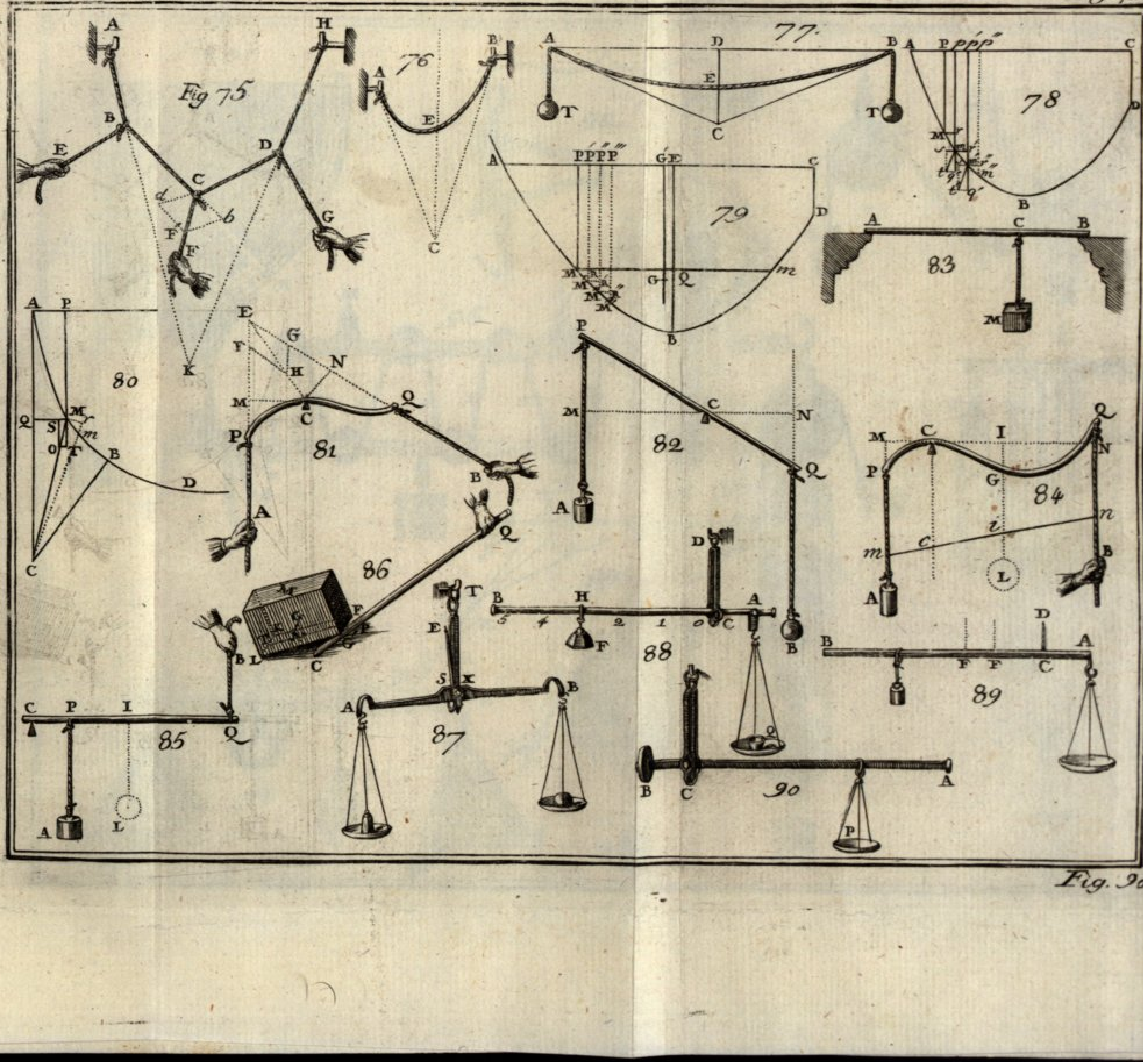



Fig. 90.

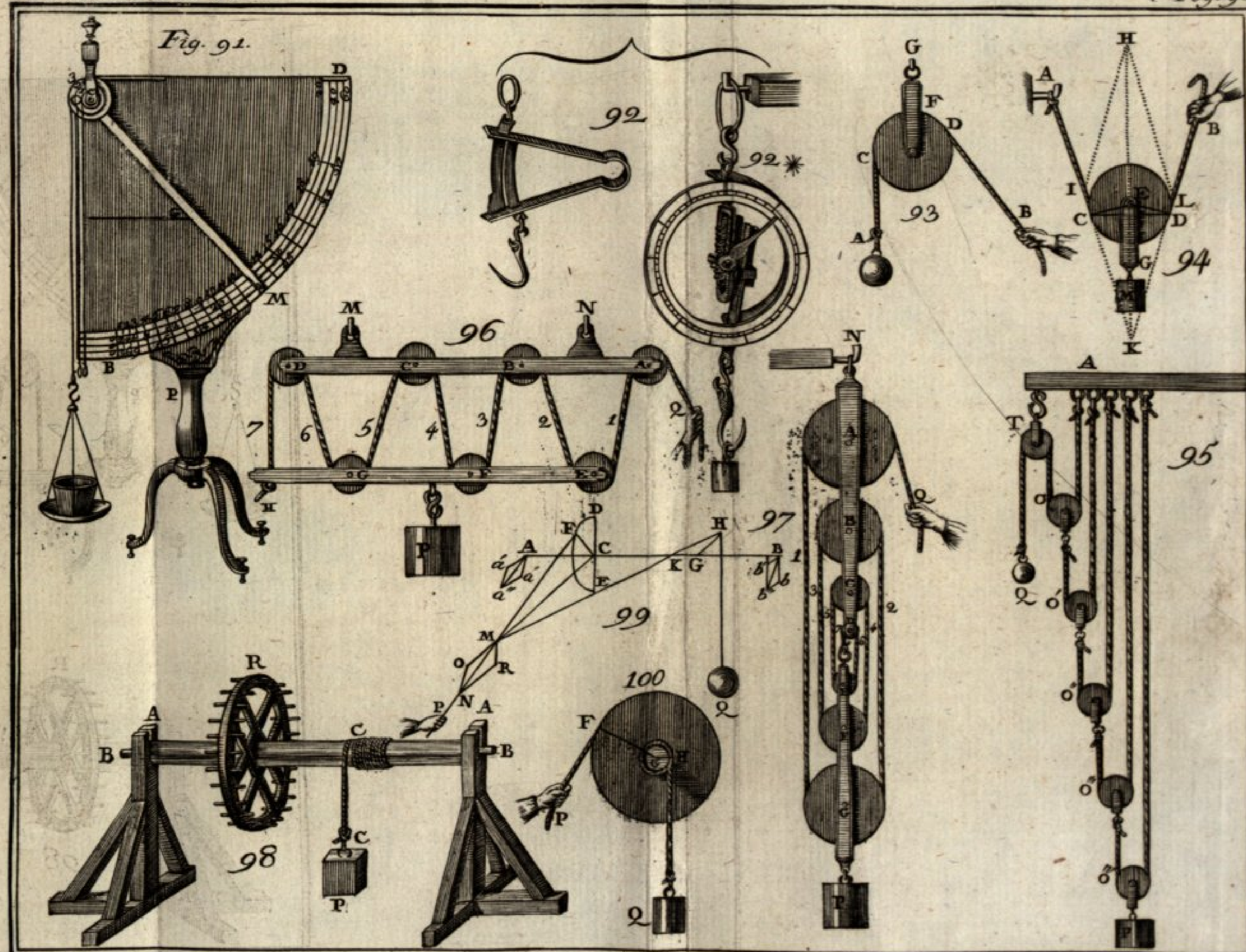



Fig. 100.

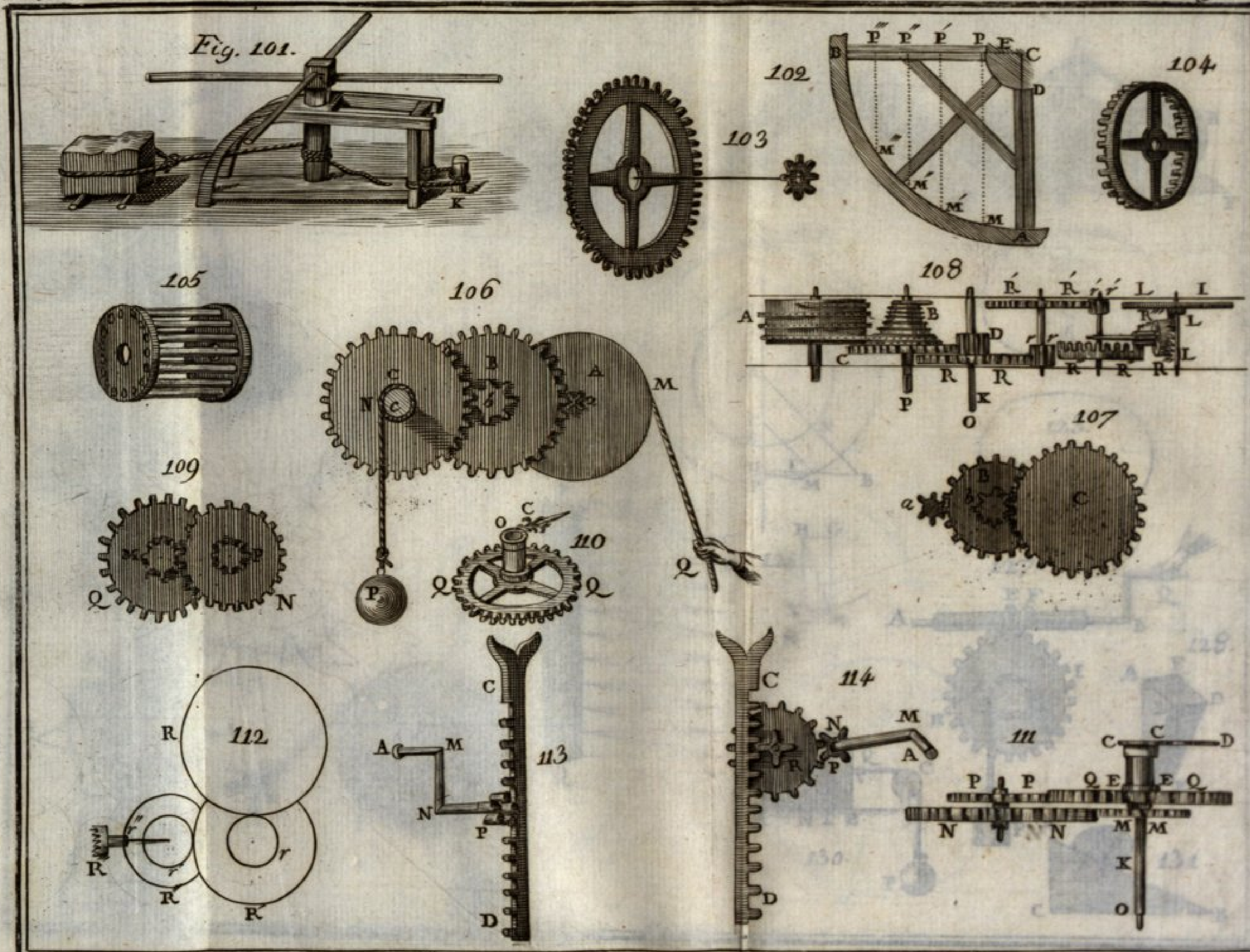



Fig. 114.

Fig. 116.

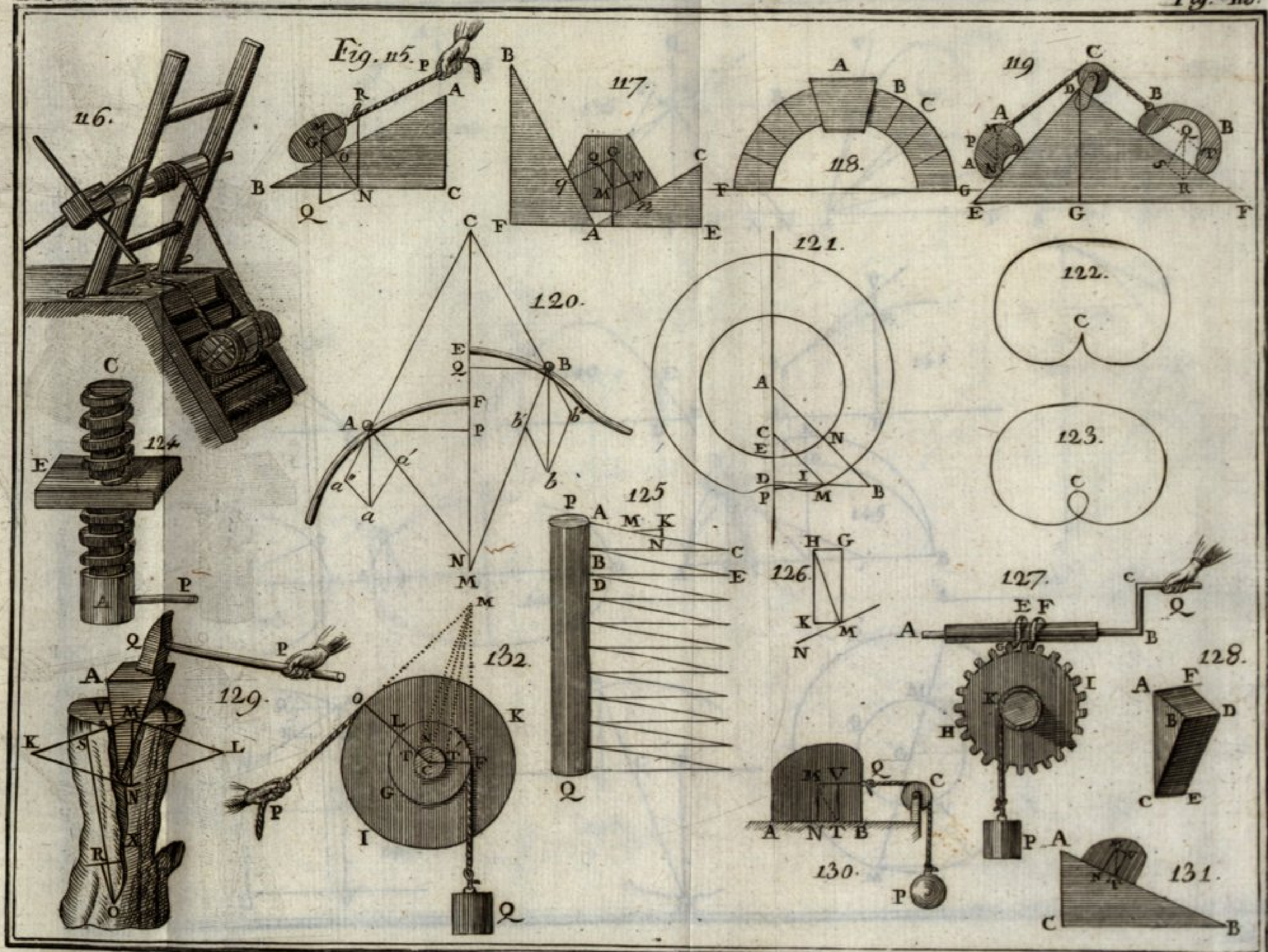



Fig. 131.

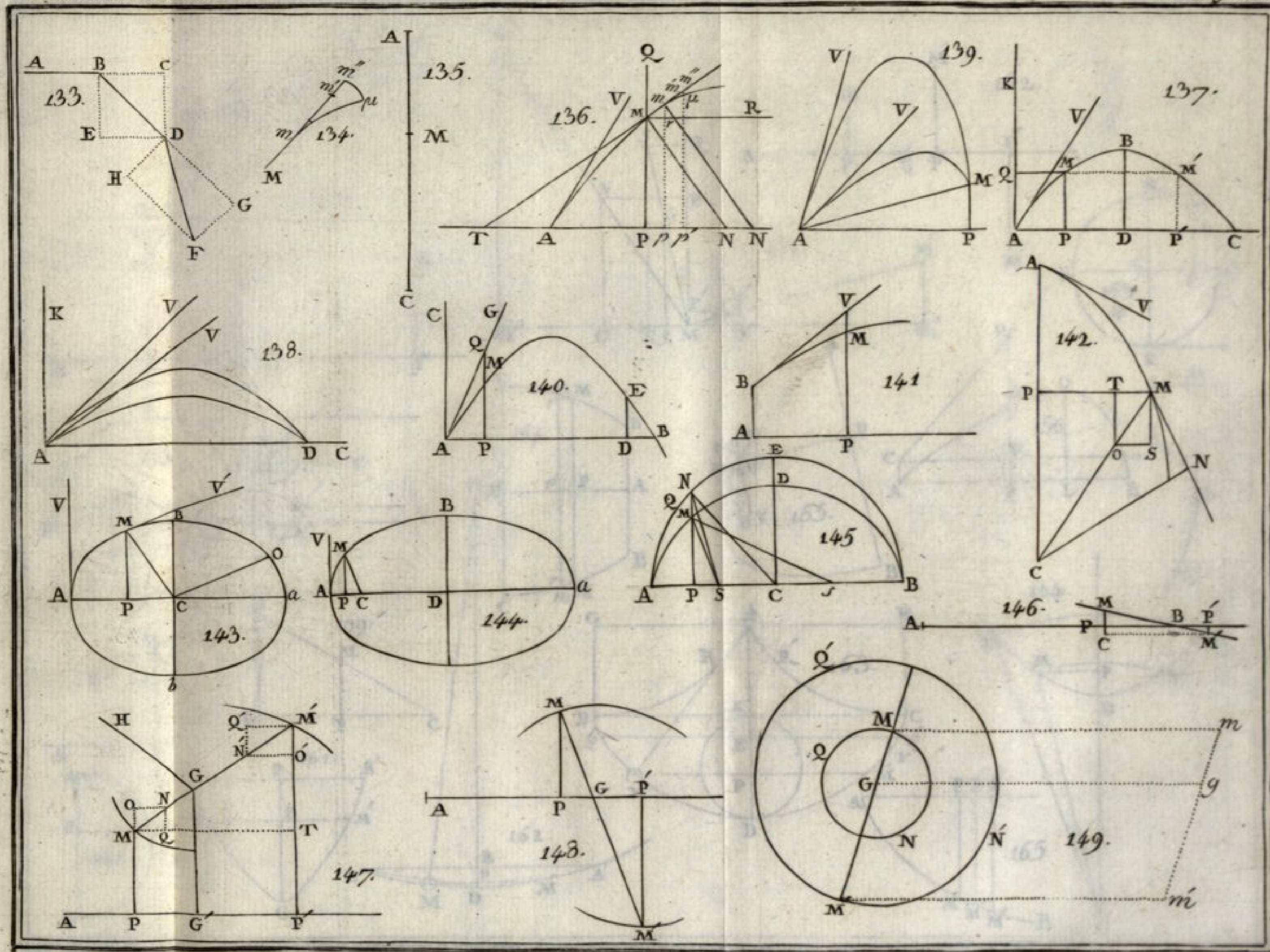

133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141
142.
143.
144.
145
146.
147.
148.
149.

Fig. 149.

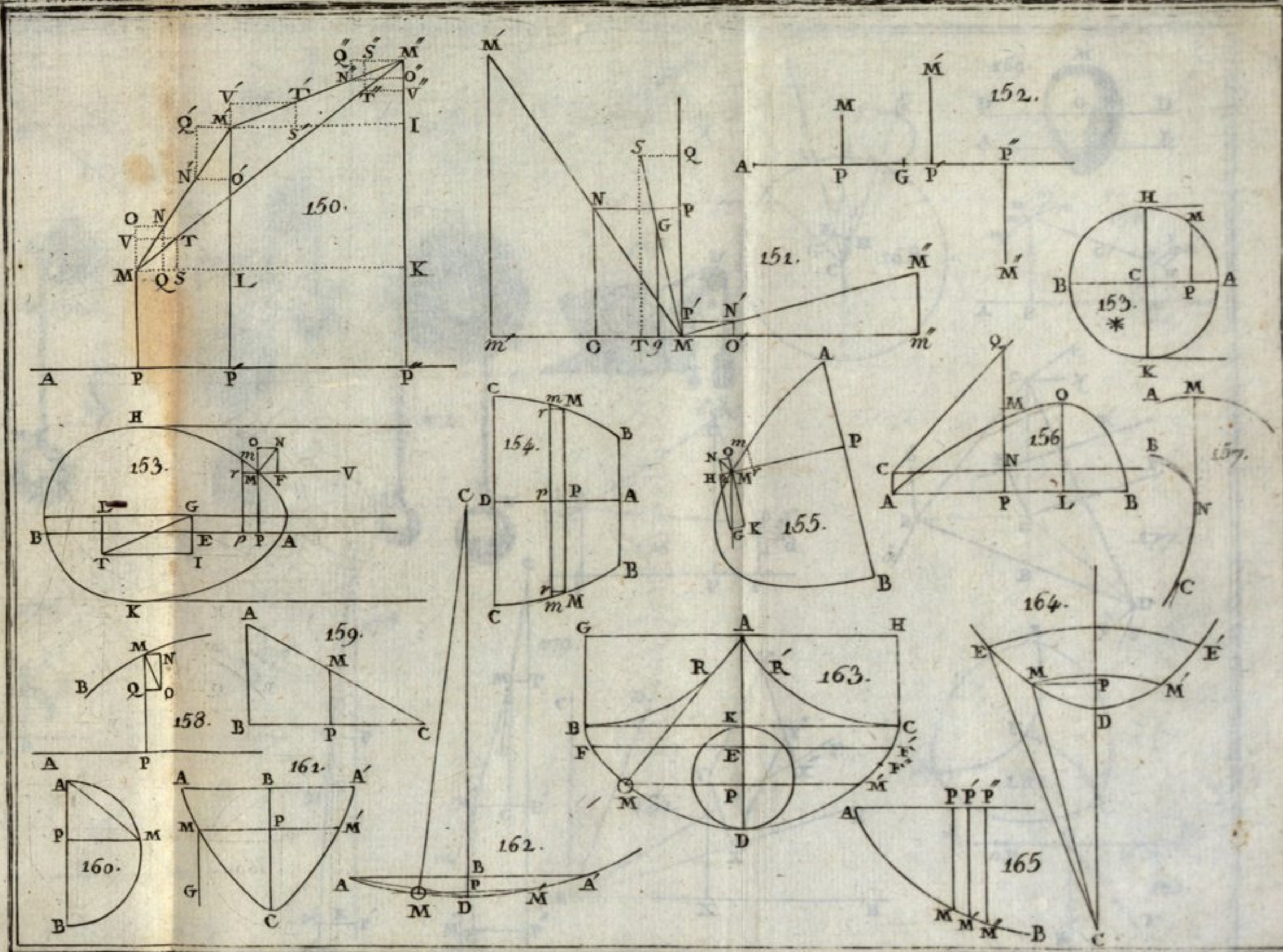

150.
151.
152.
153.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.
165

Fig. 165.

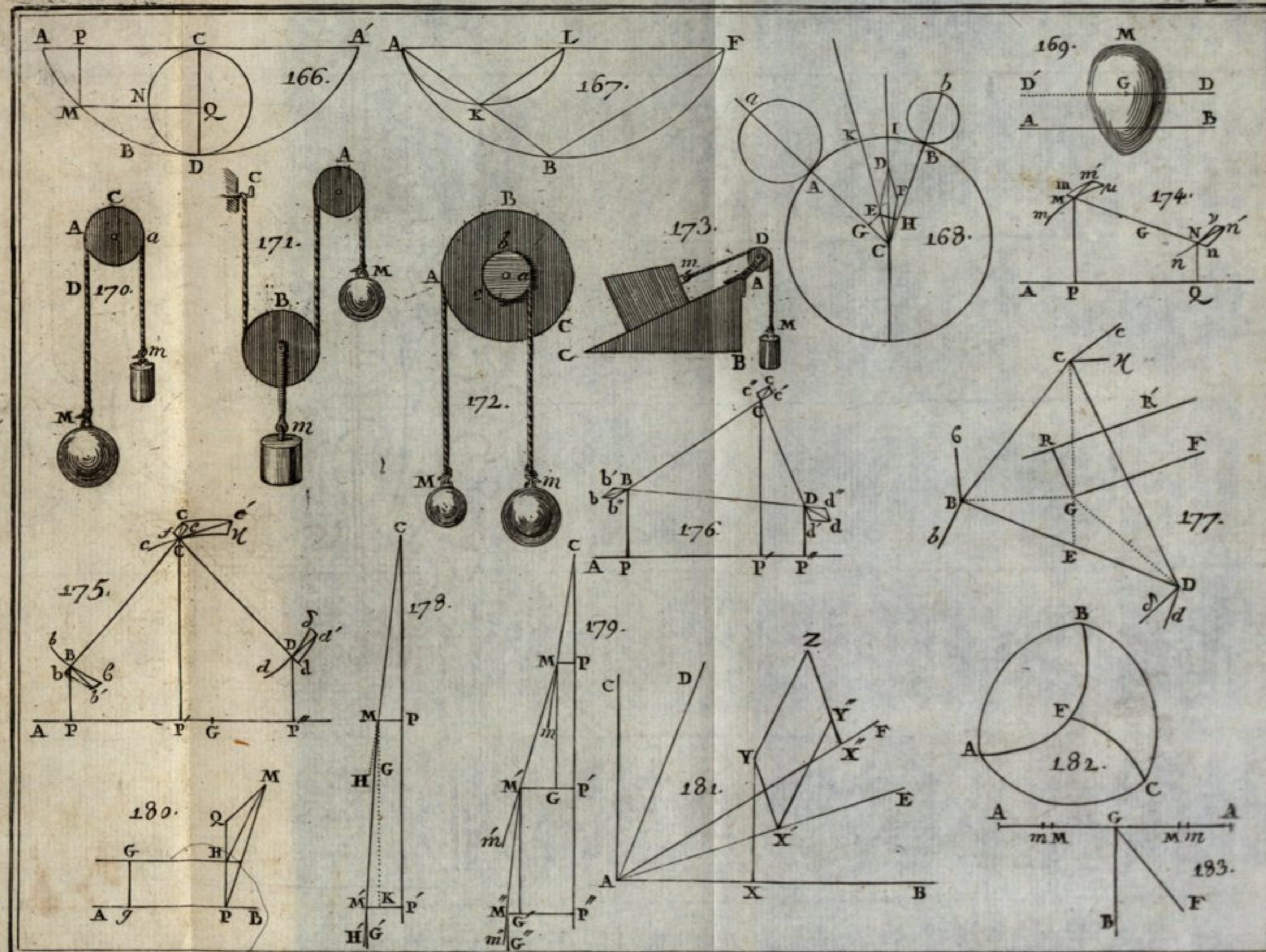


Fig. 183

M. MARIA

TRATADO

DE

MECHANICA