TRATADO
DE
MECHANICA.

TRATADO
DE
MECHANICA
POR
M. MARIA

DA CAZA, E SOCIEDADE DE Sorbonna, Cenſor Regio, e Profeſſor de Mathematica no Collegio Mazarino.

Traduzido do Francez.

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXV.

Por Ordem de Sua Mageſtade, e com Privilegio.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo Eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abollir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quais os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita Abolliçaõ ficáraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta de Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para ra a ſobredita Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu o havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo, a eſte fim a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſó he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quais ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos da Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultra-marinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais Peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guardar

dar ſem duvida, ou embargo algum, qualquer que elle ſeja, naõ obſtante a ſobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco, que Tenho revogado ao ſobredito fim na parte, que ſó reſpeita ás ſobreditas impreſſoens; ficando para tudo o mais em ſeu vigor, e inteira validade. E eſte valerá como ſe paſſaſſe pela Chancellaria, poſto que por ella naõ ha de paſſar; e o ſeu effeito haja de durar hum, e muitos annos; naõ obſtantes as Ordenaçoens em contrario as quais Hey por derogadas para eſte effeito ſómente. Dado no Palacio de Noſſa Senhora da Ajuda em deſeſeis de Dezembro de mil ſetecentos ſetenta e tres.

REY ∴

Marquez de Pombal.

ALvará, porque Voſſa Mageſtade pelos motivos nelle expreſſos: He ſervido transferir para a Univerſidade de Coimbra o Privilegio excluſivo para as impreſſoens dos Livros Claſſicos dos Eſtudos Mathematicos; havendo

ceſſado

cessado o fim, com que antes fora Concedido, e Doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

TABOA

Das materias que ſe contém neſte Tratado.

INTRODUCÇAÕ.

STATICA.

SECÇAÕ I.

pos

SEC-

SECÇAÕ II.

DYNA-

DYNAMICA.

SECÇAÕ I.

Da

SECÇÃO II.

SECÇÃO III.

ERRA-

ERRATAS.

Pag.	Linh.	Errat.	Emend.
19	8,12,13	C	A
ibid.	9,10,16	A	C
ibid.	14	C	B
23	12	$P:Q$	$Q:P$
54	12	$\frac{AP}{AM}$	$\frac{AP}{PM}$
62	2	$\frac{11}{33}a$	$\frac{14}{33}a$
94	2	$\cos\varphi$	$\cos\frac{1}{2}\varphi$
106	23	$\pm l$ &c	$\pm a\,l$ &c
111	20	Se m	Se $m+\frac{1}{m}$
117	3	$\frac{NT}{PN}$	$\frac{NT}{PT}M$
123	26	HL	HK
147	1	EF	EB
153	29	$SM:SN$	$LM:LN$
175	16	$\frac{\sqrt{2b}}{g}$	$\sqrt{\frac{2b}{g}}$
179	22	$\frac{a-x}{x}$	$\frac{a-x}{a}$
194	1	$\frac{C^2\,ddy}{dx}$	$\frac{C^2\,ddy}{dx^2}$
195	22	MA	MP
201	2	da menor	da maior
222	17	y' e y	Y' e Y
ibid.	18	x' e x	X' e X
224	2	$d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$	$-d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$
234	20	$\frac{Y\,dy-X\,dx}{ax}$	$\frac{Y\,dy-X\,dx}{ds}$
235	13	oo	os

Pag.	*Linh.*	*Errat.*	*Emend.*
238	2	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2}$
ibid.	17	$b\,b$	$b\,b.$
253	2	G	k
257	13	$e^{\overline{k}}$	$e^{\frac{x}{k}}$
270	4	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
274	8	GKH	GAH
279	8	$\frac{k^2 + mk}{k}$	$\frac{k^2 + mk}{a}$
309	23	$\frac{M}{m}$	$\frac{m}{M}$
331	18	AFX	AEX
338	6	$2c.CM.Mm.CM$	$2c.CM.Mm.CM^2$
340	5	$\frac{2}{3}a^2$	$\frac{2}{3}a^3$
342	8	$\frac{abf.2a^3}{3}$	$\frac{4bf.2a^3}{3}$
ibid.	16	$)\ \frac{1}{12}$	$) = \frac{1}{12}$
344	7	$= \frac{d\Phi}{W}$	$= -\frac{d\Phi}{W}$

Na pag. 302 o fegundo membro das ultimas duas equações deve multiplicar-fe por V.

TRA-

TRATADO
DE
MÉCHANICA.

INTRODUCÇAÕ.

Divisões, e Definições.

I.

A *MECHANICA* em geral he a Sciencia que tem por objecto o Movimento dos corpos, e o Equilibrio das Forças oppostas.

Quando a Mechanica trata em particular dos principios, leis, e effeitos do movimento, chama-se *Dynamica*, sendo nos corpos solidos; e sendo nos fluidos, *Hydrodynamica*.

Do mesmo modo, quando trata do equilibrio das forças oppostas, tambem se divide em *Statica*, e *Hydrostatica*, conforme se occupa em determinar as condições necessarias para o equilibrio dos solidos, ou dos fluidos.

Como a Statica e a Dynamica servem de fundamento aos outros ramos da Mechanica, por ellas he que deve principiar-se o estudo desta Sciencia, e ambas seraõ a materia deste Tratado.

2 Dizemos que hum corpo está em movimento, todas as vezes que elle muda de lugar. Para se effeituar esta mudança, he necessario que o movel deixe o lugar onde está, e tendo passado por todos os lugares intermedios chegue finalmente ao lugar que deve occupar.

Esta passagem successiva de hum lugar para outro humas vezes se faz mais depressa, outras mais devagar. Assim nos relogios, o ponteiro dos minutos faz o giro do mostrador na duodecima parte do tempo, que gasta o ponteiro das horas em dar o mesmo giro. Assim os relampagos, annunciadores dos rayos, atraveſſaõ mais rapidamente a atmoſphera, doque o eſtampido dos trovões.

3 A idea do movimento inclue pois tres objectos principais, que ſaõ como elementos da Mechanica. I. *O eſpaço corrido pelo movel.* II. *O tempo, em que he corrido.* III. *A relaçaõ entre o eſpaço, e o tempo.* Eſta relaçaõ he o que todo o mundo entende pelo nome de *Velocidade*; e della ſerá conveniente, que formemos aqui huma idea bem diſtinta.

4 Seja qual for a natureza do eſpaço, ſobre a qual tantas vezes ſe tem diſputado a perder de viſta, podemos concebello como huma extenſaõ immenſa, e penetravel, na qual todos os corpos do Univerſo eſtaõ mergulhados, occupando todos huma porçaõ maior, ou menor, conforme ſaõ de mais, ou menos volume. He pois o volume dos corpos a medida da porçaõ do eſpaço que elles enchem, e que ſe chama o *Lugar* dos meſmos corpos.

Iſto poſto, imaginemos neſta immenſidade dous pontos, que eſtejaõ a huma diſtancia finita hum do outro, de huma braça por exemplo. Se hum corpo poſto em movimento, por qualquer cauſa que for, correr o eſpaço deſta diſtancia, naõ o poderá fazer ſenaõ em hum certo tempo. E ſeja tambem qual for a natureza do tempo, he provado pela experiencia, que o meſmo movel animado de mais forte movimento corre a meſma diſtancia em menos tempo; de ſorte, que ſendo o movimento duplo, por exemplo, naõ lhe ſerá neceſſario mais doque ametade do tempo.

5 Mas como no eſpaço indefinido, que imaginamos confuſamente, podemos tomar diſtancias determinadas, que chamaremos *pollegadas*, *pés*, *braças* &c, e que ſeraõ medidas fixas, ou *unidades de comprimento*, ás quais ſe reportaráõ todas as dimensões da meſma eſpecie: aſſim tambem no profundo abyſmo do tempo podemos determinar certas medidas fixas e conhecidas, que ſerviráõ como *unidades de tempo* para termo de comparaçaõ de quaiſquer outras durações, com tanto que ſejaõ finitas, e lhes daremos o nome de *horas*, *minutos*, *ſegundos* &c.

Deſte modo pois, ſe acharmos que o movel, em virtude do primeiro movimento referido, gaſta hum minuto em correr o eſpaço de huma braça; diremos, que em virtude do ſegundo o correrá em meio minuto, e que pela impreſſaõ de hum movimento ſeſſenta vezes mais rapido o correria em hum ſegundo de tempo.

6 Ago-

6 Agora he facil de ver, que se huma parte, huma medida, huma unidade de espaço requer, para haver de ser corrida pelo movel, huma, ou duas, ou tres unidades de tempo, o numero *n* de unidades de espaço naõ poderá ser corrido senaõ em hum numero *n*, ou 2*n*, ou 3*n* de unidades de tempo, supponda que o movel conserva o mesmo movimento por toda a carreira do espaço, por onde caminha. Donde se vê, que há sempre huma certa relaçaõ entre o numero das unidades de espaço, e o das unidades de tempo; relaçaõ bem facil de determinar pela simples divisaõ destes dous numeros. O quociente exprime em todos os casos a velocidade do movel.

7 Daqui se entenderá aquelle principio taõ conhecido na Mechanica (aindaque muito mal enunciado), que *a velocidade he igual ao espaço dividido pelo tempo.*

Mas tomemos as cousas de mais alto, e tendo-nos posto no ponto de vista, em que os primeiros descobridores da Mechanica deveriaõ olhar para a materia que tratamos, procuremos seguir os seus passos, e analyzar os primeiros esforços das suas meditações.

8 A materia, e o movimento, se offerecêraõ por toda a parte ás suas attenções, como ainda se offerecem cada instante ás nossas. Sem duvida que familiarizados, assim como nós, desde a infancia com todas as maravilhas que resultaõ do movimento, mais se haveriaõ de afadigar em servir-se dos effeitos, doque em procurar as causas. Qual porem deveria ser o assombro daquelles, que primeiro se occupáraõ nestas indagações! E com effeito, que outra cousa se póde considerar mais pasmosa nas obras da natureza, doque a simples communicaçaõ do movimento, para quem lhe contempla as maravilhas?

Tenho hum braço em quietaçaõ; minha alma ordena que se mova, e logo se move! A' minha maõ está presente hum corpo, que pela sua quietaçaõ parece que deveria descançar em huma inacçaõ eterna; e de repente este mesmo corpo sendo arrastado, impellido, ou arremessado, se poem em movimento! Acha outros corpos na sua carreira? com elles reparte as suas forças, por humas leis as mais constantes, aindaque pareçaõ diversificar-se ao infinito.

Humas vezes pára repentinamente, e suas forças parecem aniquilar-se em hum instante; outras vezes torna para traz, ou, ſe continûa o primeiro caminho, he com huma velocidade ſenſivelmente enfraquecida, que naõ eſtá longe de extinguir-ſe. Ella ſe acaba, e eiſahi o corpo reſtituido ao eſtado de deſcanço, donde eu o tinha tirado. Qual he pois a móla ſecreta, que o pode obrigar ao movimento? qual a intelligencia, que preſide a huma diſtribuiçaõ taõ exacta das ſuas forças? que he feito do movimento delle, e dos corpos que tinha impellido, levado comſigo, ou ao menos aballado na ſua paſſagem? Eiſaqui já muitas queſtões, ás quais poderiaõ ajuntar-ſe muitas outras. E á viſta de tudo iſto, he por ventura de eſpantar, que os mais celebres Filoſofos da antiguidade, de concerto neſte ponto com os Modernos mais Sabios, tenhaõ conſiderado a exiſtencia e a communicaçaõ do movimento, como huma prova ſem replica da exiſtencia de Deos?

9 A eſtas primeiras obſervações ſe ajuntáraõ bem depreſſa as da *gravidade*, e da *fricçaõ*. Sempre os corpos ſe tem viſto ſujeitos a eſta lei imperioſa, que conſtantemente os ſollicita para a terra. Mas qual he o principio della? nada ſe ſabe. Os effeitos porém naõ ſaõ por iſſo menos palpaveis, nem menos univerſais em todos os corpos, que nos rodeiaõ.

O mais ordinario deſtes effeitos he de deſtruir pouco a pouco os movimentos oppoſtos á direcçaõ da gravidade. Lançai huma pedra ao ar; e vereis, que a gravidade enfraquecendo-lhe a velocidade chega em breve tempo a extinguilla, e depois a produzir huma velocidade toda contraria, com que a pedra cahe acceleradamente para a terra. Niſſo naõ há couſa, que naõ ſeja muito commua, antes ſe teria por hum prodigio, ſe aſſim naõ ſuccedeſſe. Mas, qual he a raſaõ porque ella cahe? porque naõ continûa a afaſtar-ſe da terra, ſeguindo a ſua primitiva direcçaõ, com toda a velocidade que lhe tendes imprimido? Porquê, direis vós? he porque huma *potencia* ſuperior repelle continuamente todos os corpos para a terra. Porém, que potencia he eſſa? ninguem a póde definir, aindaque todo o mundo experimenta os ſeus effeitos. Tem-ſe aſſentado em dar-lhe os nomes de *pezo*, *gravidade*, *gravitaçaõ* &c., termos todos ſynonimos, que exprimem eſta tendencia geral, que todos os corpos tem para o centro da terra.

10 Eſſa

10 Esta propriedade naõ he com tudo essencial á materia. Pelo pensamento se póde considerar despida della, sem alterar em nada a sua natureza. Neste estado naõ offerece mais doque hum composto de partes mais ou menos chegadas humas ás outras, conforme os intersticios que houver nos corpos, que resultaõ do ajuntamento e uniaõ das mesmas partes. Tambem se tem assentado em dar á quantidade destas partes o nome de *massa*. Assim, quando hum corpo tem duas vezes as partes materiais de outro, dizemos que tem huma massa dupla.

11 A naõ consultar, senaõ o que vemos, e as propriedades da materia que nos saõ conhecidas, he cousa assentada que hum corpo he absolutamente indifferente para toda a sorte de direcções no seu movimento. A bomba que se atira de hum morteiro, a bala que sahe de hum canhaõ, todos os corpos lançados por quaisquer direcções, naõ sahiriaõ jámais da linha do seu movimento primitivo, se causas externas lhes naõ oppuzessem obstaculos invenciveis; e conservariaõ eternamente a sua primeira velocidade, se a gravidade, se o ar, a agua, ou qualquer outro meio, por onde atravessaõ, e se as fricções multiplicadas que devem vencer, naõ concorressem a destruilla.

Como todos estes obstaculos estaõ sujeitos a variações infinitas, seria impossivel fixar cousa alguma na sciencia do movimento, se naõ se tivesse principiado por fazer huma abstracçaõ geral de todos elles. Fez-se com effeito; e depois de se haver procurado quais seriaõ as leis do movimento, se naõ houvesse cousa alguma na natureza, que lhes perturbasse a harmonia, transportáraõ-se ao estado natural das cousas, a fim de poder avaliar os effeitos produzidos pelos referidos obstaculos. Assim foraõ postos os fundamentos da Mechanica.

12 Seguindo o mesmo procedimento, supporemos pois: I, que os corpos naõ tem pezo, ou gravidade alguma; II, que no seu movimento naõ experimentaõ resistencia alguma do meio por onde caminhaõ, nem fricçaõ alguma dos planos sobre os quais se movem.

Feitas estas supposições, determinaremos as leis do movimento; e depois de havermos calculado os effeitos, passaremos a comparallos com os resultados da experiencia. Tal he em geral o plano, que seguiremos no curso desta Obra. Mas antes de começar, he necessario que ajuntemos aqui outras noções preliminares.

13 Chama-se *movimento uniforme* o de hum corpo, que em tempos iguais corre espaços iguais. Se há na natureza exemplos deste movimento, devem ser bem raros, por causa de todos os obstaculos, que se oppoem á sua uniformidade. O melhor relogio naõ offerece mais doque grandes approximações desta igualdade rigorosa e absoluta, tanto no giro regular das rodas e ponteiros, como nas oscillações da pendula. Naõ deixa por isso de conceber-se a possibilidade do movimento uniforme; e a definiçaõ que temos dado naõ suppoem mais doque isso.

14 Se os espaços corridos pelo movel vaõ cadavez sendo maiores, chama-se este *movimento accelerado*. Naõ há cousa mais commua, que esta especie de movimento no estado presente das cousas. Vede, com que aceleraçaõ chega á terra hum corpo, que se deixa cahir de huma altura consideravel.

15 Ao contrario, se os espaços corridos em tempos iguais vaõ cadavez sendo menores, entaõ o movimento se chama *retardado*. Entre milhares de exemplos, que temos cada dia debaixo dos olhos, basta trazer á lembrança hum corpo atirado para o ar, e huma bóla correndo por hum plano. Primeiramente se vê, que o movimento começa sensivelmente a enfraquecer, e bem depressa o corpo torna a descer, e a bóla perde todo o movimento.

16 Tudo o que dá, tudo o que imprime o movimento em hum corpo, se chama em geral, *potencia*, *força*, *causa motriz*, *agente*. Mas se esta força obra sem interrupçaõ alguma sobre o movel, chama-se em particular *força acceleratriz*. A gravidade está neste caso a respeito de todos os corpos em movimento, considerados no estado natural.

17 Como o movimento he huma passagem successiva de hum lugar para o outro, o descanço, ou quietaçaõ he huma perseverança continua no mesmo lugar. Distingue-se de duas mameiras, quietaçaõ *absoluta*, e *relativa*.

A primeira he, quando o corpo naõ somente naõ tem movimento algum proprio, que o faça mudar de lugar, mas tambem naõ participa de movimento algum commum dos corpos, que o rodeiaõ. Existe por ventura no mundo huma quietaçaõ semelhante? isso he o que se ignora: e a questaõ he de bem pouca importancia. Desde o homem, que repousa no somno mais tranquillo, até ás massas enormes dos rochedos e montanhas, cuja quietaçaõ parece taõ fixa e segu-

ſegura, tudo gira inceſſantemente ao redor do eixo da terra, e tudo com a meſma terra he tranſportado com paſmoſa velocidade pelo immenſo eſpaço da orbita, que ella deſcreve.

Quanto á quietaçaõ relativa, naõ póde negar-ſe a ſua exiſtencia. Eſta he a que tem hum corpo, que ſe conſerva no meſmo lugar relativo, iſto he, que naõ muda de diſtancia a reſpeito dos corpos, que o rodeiaõ immediatamente. Aſſim o mareante deitado em hum navio eſtá em quietaçaõ, por muita que ſeja a velocidade comque navega a embarcaçaõ.

Poſtas eſtas noções preliminares, eiſaqui os fundamentos da Mechanica.

Principios gerais da Mechanica.

Principio I.

18 T*Odo o corpo que eſtá em quietaçaõ, nella ſe conſervaria eternamente, ſe por alguma cauſa externa naõ foſſe poſto em movimento.*

Eſte principio he fóra de toda a conteſtaçaõ. Porque de duas couſas huma: ou he neceſſaria huma cauſa externa que lhe imprima o movimento, ou elle meſmo póde tirar-ſe da quietaçaõ em que eſtá, e dar-ſe a ſi meſmo o movimento que naõ tinha. Mas em que tempo há de começar a mover-ſe, e que direcçaõ ha de tomar, quando naõ há mais raſaõ para que ſe mova agora, naõ ſe tendo movido antes, nem para que ſe mova para eſta parte, e naõ para aquella?

Sobre eſte principio fundou Deſcartes, e depois delle Newton, a theorica das forças Mechanicas. Sabemos, que o primeiro tendo ſuppoſto o eſpaço cheio de materia, naõ pedia mais doque movimento para explicar o Mechaniſmo do Univerſo. Tinha muito bem comprehendido, que a materia deixada a ſi meſma ficaria para ſempre na inercia e quietaçaõ. Recorreu pois ao Ser Supremo, para dar ſomente o primeiro aballo áquelle montaõ informe; e encarregando-ſe, para o dizer aſſim, do reſto da obra, elevou aquelle vaſto edificio, cujas ruinas ainda cauſaõ eſpanto pela magnificencia e ouſadia, que deſcobrem no ſeu plano.

Po-

Porém Newton advertido pela fragilidade daquelle systema, da necessidade de tomar outro caminho, fez todos os seus esforços para achar o verdadeiro. Subio, como Descartes, á origem das cousas; e lá naõ vendo, como elle, na materia mais doque hum ser puramente passivo, sem acçaõ, sem força, e sem movimento, julgou que ella por sua natureza tinha sido condenada a eterno descanço, se o Creador a naõ tirasse delle. Suppoz pois, que todos os corpos do systema solar tinhaõ sido lançados pela maõ omnipotente, cada hum por sua linha recta differente, mas todos com huma gravitaçaõ universal para hum centro determinado; e desta supposiçaõ se elevou por calculos novos aos descobrimentos immortais, cujas consequencias quanto mais se tem desenvolvido, e comparado com as observações, tanto mais tem confirmado a hypothese, em que se fundaõ.

Principio II.

19 *TOdo o corpo posto huma vez em movimento, nelle continuaria para sempre uniformemente, e em linha recta, se naõ fosse impedido pela acçaõ de causas externas.*

Este principio naõ he menos certo, que o precedente. Porque assim como hum corpo em quietaçaõ naõ póde darse a si mesmo o movimento, do mesmo modo naõ póde destruir, nem ainda alterar o movimento que tiver recebido, pois que para ambas as cousas se requer huma força, acçaõ, e energia, que a pura materia naõ tem. He pois necessario: 1°, que o corpo conserve perpetuamente, quanto he da sua parte, o movimento recebido.

2°, Que o movimento seja uniforme. Porque se em tempos iguais o movel naõ andasse espaços iguais, aumentaria, ou diminuiria elle mesmo o seu movimento, o que naõ he possivel.

3°, Como na origem do movimento, a direcçaõ he determinada pela causa motriz, naõ ha mais rasaõ para que o movel se desvie della para huma parte doque para a outra. Deverá logo continuar naõ sómente com o mesmo gráo de velocidade, mas tambem na mesma direcçaõ primitiva.

Tal seria, torno a dizer, o movimento de todos os corpos, se a gravidade, a fricçaõ, e a resistencia do meio, junta com a de tantas outras particulas de materia, ou agi-

agitadas, ou em quietaçaõ, que encontraõ na passagem successiva de huns lugares para outros, naõ aniquilassem em fim tanto as maiores, como as mais pequenas velocidades, e naõ mudassem quasi todas as direcções.

Principio III.

20 *A Especie de resistencia, que todos os corpos oppoem á sua mudança de estado, tanto para a quietaçaõ, como para o movimento* (Newton lhe deu o nome de força de inercia) *he sempre proporcional á massa dos mesmos corpos.*

Esta resistencia com effeito he o resultado de todas as resistencias que oppoem as partes de materia, de que os corpos se compoem, pois cada huma resiste á mudança do seu estado. Logo quanto mais partes materiais houver em hum corpo, isto he, quanto a sua massa for maior, tanto maior será a força de inercia.

21 He necessario haver advertencia em naõ confundir esta força com a da gravidade: 1°, porque ella teria lugar, ainda na supposiçaõ de que os corpos naõ fossem graves. 2°, porque ella resiste igualmente a todas as direcções, e a gravidade naõ se oppoem senaõ aos movimentos que lhe saõ oppostos. 3°, porque a acçaõ instantanea da gravidade naõ he susceptivel de comparaçaõ alguma com as potencias finitas, e a força da inercia, ou a resistencia que oppoem os corpos á mudança de estado, he sempre proporcional á força motriz, que nelles obra essa mudança, e vence a dita resistencia.

Principio IV.

22 *A Quantidade de movimento de qualquer corpo, que se move uniformemente, he igual ao producto da massa pela velocidade.*

A massa de hum corpo he a soma das partes materiais, de que elle se compoem; e o seu movimento total resulta de todos os movimentos particulares dessas mesmas partes. Porém todas ellas tem a mesma velocidade, que he a do movel, e cada huma se considera ter huma unidade de movimento. Logo multiplicando a soma das partes pela velocidade commua, o producto será o movimento total.

23 Se

23 Se o movel naõ tiveſſe, ſenaõ hum movimento de rotaçaõ, todo o mundo ſabe que entaõ as ſuas partes naõ teriaõ todas a meſma velocidade. Mas aqui naõ ſe trata, ſenaõ do movimento rectilineo, que qualquer potencia lhe póde imprimir.

24 Chamando pois *M* a maſſa do movel, e *V* a ſua velocidade, teremos geralmente *MV* por expreſſaõ do ſeu movimento.

Eſte modo de avaliar as forças de hum movel, tem experimentado muitas contradicçoens, depois que Leibnitz introduzio na Mechanica a celebre diſtinçaõ de *forças vivas e mortas*, ſobre as quais ſe tem diſputado por tanto tempo. Seguido de muitos Geometras illuſtres pertendia Leibnitz, que para avaliar as forças de hum corpo em movimento era neceſſario multiplicar a maſſa pelo quadrado da velocidade; e a eſte producto deu o nome de *força viva*. Por *força morta* porém entendia ſómente o ſimples esforço, ou preſſaõ de hum corpo, ou de huma potencia contra hum obſtaculo inſuperavel; e eſta confeſſava, que devia medir-ſe multiplicando a maſſa pela velocidade, que neſſe caſo naõ era mais do que *virtual*.

Os outros Geometras pouco contentes deſta novidade; e naturalmente apercebidos contra as ſubtilezas Metaphyſicas daquelle grande homem, perſiſtiraõ na opiniaõ antiga. Muitos tambem a defenderaõ com ſucceſſo, e o incendio da diſputa ſe ateou vivamente. Mas depois de ſe ter bem altercado de parte a parte, cada hum ficou no ſeu parecer, como ſuccede quaſi ſempre, e as couſas naõ ficáraõ por iſſo de peor condiçaõ, nem para huns, nem para outros; prova certa de que os fundamentos da Mechanica naõ eraõ intereſſados na queſtaõ.

Baſta eſta conſideraçaõ para nos deſviar de tomarmos partido naquella eſpecie de ſciſma. O objecto naõ vale certamente o trabalho, depois que por exames reiterados de ambos os methodos tem conſtado, que daõ abſolutamente os meſmos reſultados na ſoluçaõ dos meſmos Problemas.

Nós pois diremos, que a quantidade de movimento he igual ao producto da maſſa pela velocidade. E porque o effeito de qualquer potencia conſiſte em imprimir no corpo huma quantidade certa de movimento; accreſcentaremos, que a medida mais natural e mais uniforme da acçaõ da meſma potencia ſobre qualquer maſſa, he o producto da dita maſta maſſa pela velocidade que lhe he communicada, ſendo claro, que a acçaõ deve ſer tanto maior, quanto for maior a maſſa que ſe ha de mover, e a velocidade com que ſe ha de mover.

25 Muitas vezes nos ſuccederá chamarmos força, ou potencia aquillo que naõ he realmente mais do que o effeito; porque na Mechanica, as cauſas naõ intereſſaõ couſa alguma, ſenaõ pelos effeitos que produzem. Pela maior parte ignoramos a ſua natureza, ainda que os effeitos ſejaõ muito conhecidos. Aſſim as leis, e os effeitos da gravidade, ainda que de hum ſeculo a eſta parte ſe tenhaõ averiguado com toda a exactidaõ, de quaſi nada tem ſervido para nos dar luz alguma ſobre a cauſa phyſica deſte phenomeno.

Baſtará pois ter huma vez fixado o ſentido dos termos *força*, e *potencia*, tantas vezes repetidos nas obras de Mechanica, para naõ haver já mais embaraço no ſignificado, e uſo delles.

26 Obſervemos por fim deſte artigo, que huma meſma força applicada a differentes corpos deve imprimir velocidades diverſas, para que o effeito ſeja o meſmo. Porque ſendo V a velocidade, que ella póde communicar a huma maſſa dada M, e v a que deve communicar a outra maſſa m, para que as quantidades de movimento ſejaõ iguaes, teremos $mv = MV$; donde ſe tira $v = \frac{MV}{m}$ por expreſſaõ da velocidade do ſegundo movel m.

Formulas do Movimento Uniforme.

27 POr quanto no movimento uniforme os eſpaços corridos em tempos iguaes ſaõ iguaes, he evidente que os eſpaços ſempre devem ſer proporcionaes aos tempos, que o movel gaſta em os correr; e reciprocamente, que ſendo os eſpaços proporcionaes aos tempos, o movimento he uniforme.

Chamando pois V a velocidade de hum movel, ou, que vem a ſer o meſmo neſte caſo, chamando V o eſpaço que elle anda em huma unidade de tempo, em hum ſegundo, por exemplo; e chamando E o eſpaço proporcional que deve andar em hum numero T de ſegundos, teremos $V : E :: 1 : T$; e por conſeguinte $E = VT$; formula geral do movi-

movimento uniforme, da qual ſe deduz $V = \frac{E}{T}$, e $T = \frac{E}{V}$; de ſorte, que ſendo dadas duas deſtas quantidades E, V, T, a terceira ſe determina immediatamente.

28 Como pois temos $V = \frac{E}{T}$, ſegue-ſe que tambem qualquer outra velocidade uniforme $v = \frac{e}{t}$. Logo ſerá $V : v :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; e por conſeguinte $Evt = eVT$. Deſta formula ſe deduzem os Theoremas ſeguintes.

I. *As velocidades de dous moveis animados de hum movimento uniforme ſaõ entre ſi na raſaõ directa dos eſpaços, e na inverſa dos tempos.* Porque a equaçaõ geral $Evt = eVT$ ſe reſolve neſta proporçaõ $V : v :: Et : eT$.

II. *Sendo iguais os tempos, as velocidades ſaõ na raſaõ dos eſpaços.* Porque na equaçaõ geral tirando $T = t$, fica $Ev = eV$, e conſeguintemente $V : v :: E : e$.

III. *Sendo os eſpaços iguais, as velocidades ſaõ reciprocamente como os tempos.* Porque tirando da meſma equaçaõ $E = e$, fica $vt = VT$, e por conſeguinte $V : v :: t : T$.

IV. *Se os eſpaços corridos por dous moveis forem proporcionais aos tempos, as velocidades ſeraõ iguais.* Porque entaõ ſendo $E : e :: T : t$, teremos $Et = eT$, e conſeguintemente $V = v$.

V. *Se os eſpaços forem na raſaõ inverſa dos tempos; as velocidades ſeraõ na raſaõ inverſa dos quadrados dos meſmos tempos.* Porque ſendo $E : e :: t : T$, e ſubſtituindo por E, e os ſeus valores VT, vt, teremos $VT : vt :: t : T$, e $VT^2 = vt^2$, donde ſe tira $V : v :: t^2 : T^2$.

VI. *Na meſma ſuppoſiçaõ precedente, ſeraõ as velocidades na raſaõ duplicada dos eſpaços.* Porque ſendo $E : e :: t : T$, e ſubſtituindo em lugar de t, T os ſeus valores $\frac{e}{v}$, $\frac{E}{V}$, teremos $E : e :: \frac{e}{v} : \frac{E}{V}$, donde ſe tira $Ve^2 = vE^2$, e conſeguintemente ſerá $V : v :: E^2 : e^2$.

29 Pela meſma equaçaõ $Evt = eVT$ ſe vê, que os eſpaços corridos uniformemente por dous moveis ſaõ na raſaõ composta dos tempos e das velocidades. Logo, ſe

as ve-as velocidades forem iguais, os eſpaços ſeraõ como os tempos; e ſe os tempos forem iguais, como as velocidades. Logo tambem, ſe as velocidades forem reciprocamente proporcionais aos tempos, os eſpaços ſeraõ iguais &c.

Com a meſma facilidade ſe vê, que os tempos ſaõ na raſaõ directa dos eſpaços e inverſa das velocidades &c. &c.

Reflexoens ſobre o Movimento Uniforme.

30 A' Primeira viſta parecerá, que o eſpaço, tempo, e velocidade, ſendo como ſaõ quantidades realmente heterogeneas, naõ eraõ ſuſceptiveis de comparaçaõ alguma entre ſi. Mas reparando bem na fórma em que as temos conſiderado no artigo precedente, naõ ha couſa que ſe opponha á comparaçaõ de humas com as outras. Temos conſiderado a velocidade *V*, como repreſentada pelo eſpaço corrido pelo movel no tempo 1, iſto he, em huma parte fixa e determinada de tempo, que tomamos por unidade; logo *V* he comparavel a *E*. Quanto á quantidade T, neſta ſuppoſiçaõ naõ he mais doque hum numero abſtracto, que ſe póde comparar com outra qualquer quantidade.

31 Por muito grande que ſeja a eſcuridade das diſcuſſoens Metaphyſicas ſobre a natureza do tempo, he certo que nós todos o concebemos como correndo uniformemente. Deve pois buſcar-ſe a medida da ſua duraçaõ no movimento uniforme. Mas como por huma parte naõ podemos eſtar ſeguros da uniformidade do movimento, ſenaõ pela igualdade dos tempos que o movel gaſta em correr eſpaços iguais, e por outra parte naõ podemos julgar da igualdade dos tempos, ſem termos huma medida fixa regulada por algum movimento uniforme, he claro, que eſtamos metidos em hum circulo vicioſo, e que em rigor naõ temos meio exacto para medirmos o tempo. He neceſſario pois, que nos contentemos com huma ſimples approximaçaõ.

32 Deſte modo he, que o movimento de hum relogio de pendula, feito com todo o cuidado, ſe julga uniforme, como he realmente, ſem erro ſenſivel. Aſſim tambem o movimento de rotaçaõ, que o Globo Terreſtre faz todos os dias ao redor do ſeu eixo, e que nos faz parecer que todo o Ceo gira ao redor de nós em ſentido contrario, com muita raſaõ he tido por uniforme. Quan-

Quando porém se transporta este movimento ao Sol, como se pratica no uso civil, para medir o tempo pelas revoluçoens diurnas deste astro, achaõ-se nelle algumas pequenas irregularidades, que fazem os dias humas vezes mais curtos, e outras mais compridos. Mas para remediar o pequeno inconveniente destas desigualdades, regulaõ-se as pendulas Astronomicas, naõ pelo *movimento verdadeiro* do Sol, qual o daõ as *meridianas*, o que seria quasi impossivel; mas pelo *movimento medio*, ou pela revoluçaõ apparente das *fixas*. Com esta precauçaõ, huma pendula bem regulada naõ se aparta fóra de certos limites, conhecidos e calculados para cada hum dos dias, da hora que mostraõ os melhores relogios de Sol, e que se chama *tempo verdadeiro*. A hora da pendula he o *tempo medio*, e a differença de hum a outro em cada dia chama-se *Equaçaõ*. E, para o dizer de passagem, *pendulas de equaçaõ* saõ as que tem dous ponteiros de minutos, hum que mostra o tempo medio, outro o verdadeiro.

33 Em quanto naõ podemos dar a theorica do movimento dos pendulos, bastará observar que os singulares progressos dos Artistas modernos tem conduzido os movimentos da relogiaria a hum ponto taõ subido de exactidaõ, que naõ póde achar-se mais difficuldade alguma em quanto á medida do tempo. Observemos tambem, que he costume na Mechanica contallo por segundos; e desta sorte tomaremos sempre daqui por diante hum segundo por unidade do tempo.

Problemas sobre o Movimento Uniforme.

34 PROBL. I. Movendo-se uniformemente dous corpos A e B pela recta AB com as velocidades V e v, e estando actualmente a huma distancia $AB = d$; achar em que tempo estaráõ em huma distancia $= c$. (Fig. 1.)

Seja x o tempo, que buscamos. Entaõ, se os dous moveis vaõ para a mesma parte, quando for passado o tempo x, achar-se-ha B em B', e A em A', de sorte que a sua distancia $A'B'$ será igual a c.

Isto posto, temos $AA' = Vx$, e $BB' = vx$ (n.7.), logo $d + vx - Vx = \pm c$. Ponho $\pm c$, ainda que sómente o final $+$ convem á figura, porque póde succeder que o ponto A' esteja seja para diante do ponto B'. Será pois $x = \frac{d \mp c}{V - v}$.

Assim he susceptivel este pequeno Problema de duas soluçoens, como he facil de ver, reflectindo que os dous moveis de huma e outra parte do ponto do encontro podem achar-se na mesma distancia c. Para determinar o tempo, em que deveráõ encontrar-se, faremos $c = 0$, e teremos $x = \frac{d}{V - v}$; valor, que he o meio arithmetico entre os dous que resultaõ do caso geral. Mas para que esta formula tenha lugar, he necessario suppor que os moveis saõ dous pontos, porque de outra sorte haverá collisaõ entre elles, quando c for igual á soma dos seus raios, sendo elles esfericos.

Exemplo. Supponhamos, que A corre 4 pés, e B $2\frac{3}{4}$ em hum segundo, e que distaõ actualmente 20 pés. Pergunta-se, quando deveráõ estar em distancia de 6 pés?

Teremos $x = \frac{20 \mp 6}{4 - \frac{11}{4}} = \frac{80 \mp 24}{5}$. Achar-se-haõ pois na distancia pedida tanto no fim de $11'' \frac{1}{5}$, como de $20'' \frac{4}{5}$, cujo meio arithmetico $16''$ dá o momento do encontro; bem entendido, que para ter lugar a segunda soluçaõ he necessario suppor, que os dous corpos, sendo como realmente saõ inpenetraveis, naõ se movem precisamente na mesma linha, nem no mesmo plano, mas em linhas parallelas distantes entre si quanto bastar, para que os corpos naõ padeçaõ collisaõ no encontro. Deste modo se encontra o ponteiro dos minutos com o das horas, e a Lua com o Sol, quando o eclipsa a nosso respeito.

35 Probl. II. Dous moveis A e B, animados de differentes velocidades uniformes, giraõ ao redor de huma mesma circumferencia, e ambos para a mesma parte: a sua distancia actual he a; quando será c? (Fig. 2.).

Seja V a velocidade do corpo A, que supponho ser o que a tem maior, e v a velocidade do corpo B; e seja x o tempo procurado. Se os dous moveis andaõ na direcçaõ AB, acha-

acharemos como no primeiro Problema $x = \frac{d \mp c}{V - v}$; porém se a direcçaõ de ambos for de B para A, entaõ será $x = \frac{\pm c - d}{V - v}$. Se elles andassem em direcçaõ contraria A para B, e B para A, far-se-hia a velocidade v negativa, e o denominador seria $V + v$.

Exemplo. A velocidade do corpo A he tal, que corre huma sexta parte da circumferencia em hum segundo, e a do corpo B tal que naõ corre senaõ huma oitava parte da circumferencia no mesmo tempo. Estaõ actualmente distantes huma quinta parte da mesma circumferencia, e ambos se movem para a parte AB. Pergunta-se, quando deveráõ estar na distancia de huma vigesima parte da circumferencia?

Temos pois neste caso $V = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{8}$, $V - v = \frac{1}{24}$, $d = \frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{20}$. Donde acharemos $x = 24\left(\frac{1}{5} \mp \frac{1}{20}\right)$, que dá os dous valores $3'' \frac{3}{5}$, e $6''$, cujo meio arithmetico $4'' \frac{4}{5}$ mostra o instante da conjunçaõ dos dous moveis.

Se com as mesmas velocidades girassem de B para A, teriamos entaõ $x = 24\left(\pm \frac{1}{20} - \frac{1}{5}\right) = -3'' \frac{3}{5}$, ou $= -6''$ valores negativos, que mostraõ ser já passado o instante que se procura.

Suppondo as velocidades na rasaõ de $1 : \frac{1}{12}$, e de $1 : \frac{1}{60}$, pelo primeiro caso se resolveráõ todas as questoens deste genero pelo que respeita ao movimento dos ponteiros das horas e dos minutos, e dos ponteiros dos minutos e dos segundos.

Quando naõ se trata de mais, que de saber o tempo do encontro de dous moveis quaisquer, que do modo sobredito andaõ á roda de hum circulo, de dous caminhantes, por exemplo, que caminhaõ pelo contorno de huma ilha, basta a Arithmetica ordinaria para resolver facilmentte esta especie de Problemas.

Huma ilha, por exemplo, tem 39 leguas de circuito. Dous

Dous caminhantes partem do mesmo ponto, e ao mesmo tempo, fazendo hum delles 14 leguas de jornada por dia, e o outro 11. Pergunta-se, quando se haõ de encontrar?

Por quanto o primeiro ganha 3 leguas por dia mais que o segundo, e tendo ganhado 39 deveráõ ambos encontrar-se em hum mesmo ponto do circuito, será isto no fim de 13 dias, porque temos $3^{l} : 39^{l} :: 1^{d} : x^{d} = 13^{d}$. Do mesmo modo se praticaria em todas as outras supposiçoens, que se podem fazer.

36 Todas as vezes que dous corpos se movem na mesma circumferencia, que póde conseguintemente tomar-se por unidade, he manifesto que se acharáõ realmente na mesma distancia c, quando o intervallo que os separar for c, $1 + c$, $2 + c$, $3 + c$, ou geralmente $E + c$, entendendo por E qualquer numero inteiro. Podemos pois generalizar as formulas precedentes; e teremos no primeiro caso $x = \frac{d \mp E \mp c}{V - v}$, e no segundo $x = \frac{\pm E \pm c - d}{V - v}$, donde se tira huma infinidade de soluçoens.

Deste modo, se na formula $x = \frac{\pm c - d}{V - v}$ fizessemos successivamente $c = 1 + \frac{1}{20}$, $c = 2 + \frac{1}{20}$ &c, teriamos achado os valores positivos $x = 20'' \frac{2}{5}$, $x = 24'' + 20'' \frac{2}{5}$; e assim por diante, aumentando sempre $24''$.

37 Probl. III. Tendo os mesmos corpos A e B entre si a distancia d contada pela circumferencia AB: pergunta se, em que tempo se encontraráõ pela primeira vez, ou em geral pela vez m? (Fig. 2.).

A reposta naõ tem difficuldade. Porque he manifesto, que a sua distancia deve ser entaõ $m - 1$; e por conseguinte, se A que tem a maior velocidade for adiante de B em ordem ao movimento, teremos $x = \frac{m - d}{V - v}$; e pelo contrario, se A for no alcance de B, teremos $x = \frac{m - 1 + d}{V - v}$, por expressaõ do tempo do encontro.

Exemplo. Seja $V = \frac{1}{6}$, $v = \frac{1}{8}$, $d = \frac{1}{5}$. O primeiro caſo dará $x = 24\,m - \frac{24}{5}$, e o ſegundo $x = 24\,(m-1) + \frac{24}{5}$; e fazendo $m = 1$, acharemos que ſeraõ neceſſarios $19'' \frac{1}{5}$ para ſucceder o primeiro encontro no primeiro caſo, e $4'' \frac{4}{5}$ no ſegundo.

38 Probl. IV. Tres corpos A, B, C partem de hum meſmo ponto a deſcrever a circumferencia de hum meſmo circulo com as velocidades reſpectivas deſignadas por v, v', v''. Pergunta-ſe, em que tempo ſe tornaráõ a ajuntar todos em hum meſmo ponto?

Seja x o tempo procurado; vx, $v'x$, $v''x$ ſeraõ os eſpaços corridos no momento do encontro. Ora o maior deſtes eſpaços deve exceder a cada hum dos outros em hum numero inteiro de voltas; logo ſerá $v'x - vx = E$, e $v''x - v'x = E'$. Onde notaremos, que o encontro geral dos tres corpos ſerá quando os corpos A, B ſe tiverem encontrado as vezes E, os corpos B e C as vezes E', e os corpos A e C as vezes $E + E'$.

As duas equaçoens precedentes daraõ $x = \frac{E}{v'-v} = \frac{E'}{v''-v'}$, e $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{E}{E'}$; logo ſe a fracçaõ $\frac{v'-v}{v''-v'}$ depois de abbreviada aos termos mais ſimples ſe reduzir a $\frac{p}{q}$, teremos no primeiro encontro $E = p$, e $E' = q$, e no ſegundo $E = 2p$, $E' = 2q$ &c; logo $x = \frac{p}{v'-v}$ dará o inſtante do primeiro encontro geral dos tres corpos.

Exemplo. Supponhamos $v = \frac{1}{16}$, $v' = \frac{1}{4}$, $v'' = \frac{41}{80}$; Será $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{5}{7}$, $p = 5$, e $x = 26'' \frac{2}{3}$. Acharſe-haõ pois os tres corpos reunidos pela primeira vez no fim de de $26'' \frac{2}{3}$; mas este primeiro encontro geral será o quinto particular de A com B, o septimo de B com C, e o duodecimo de A com C.

Se algum dos corpos fizesse as suas voltas ao contrario dos outros, deveria fazer-se negativa a sua velocidade nas equaçoens precedentes.

39 Eisaqui como se póde discorrer, para dar pela Arithmetica ordinaria a soluçaõ desta especie de Problemas. C naõ corre senaõ a $\frac{1}{16}$ parte da circumferencia no tempo que A corre $\frac{41}{80}$; logo A ganha de avanço $\frac{9}{20}$ em cada segundo, e por conseguinte estes dous corpos se encontraõ de $2'' \frac{2}{9}$ em $2'' \frac{2}{9}$. Do mesmo modo, naõ correndo C mais que $\frac{1}{16}$ em quanto B corre $\frac{1}{4}$, ganhará B sobre C em cada segundo o adiantamento de $\frac{3}{16}$; logo os dous corpos A e C se encontraráõ de $5'' \frac{1}{3}$ em $5'' \frac{1}{3}$. Com o mesmo discurso acharemos, que A e B concorreráõ no mesmo ponto de $3' \frac{17}{21}$ em $3'' \frac{17}{21}$. Ora para que estes tres periodos coincidaõ, isto he, para que os tres corpos venhaõ a huma conjunçaõ geral, naõ temos mais que buscar tres numeros inteiros que sejaõ entre si como $2'' \frac{2}{9} : 3'' \frac{17}{21} : 5'' \frac{1}{3}$. Os mais pequenos saõ 5. 7. e 12. Logo o primeiro encontro geral será o 5° encontro particular de A com B, ou o 7° de B com C, ou o 12° de A com C, como acima achámos. E o instante, em que ha de succeder, se determinará conseguintemente multiplicando $5'' \frac{1}{3}$ por 5, ou $3'' \frac{17}{21}$ por 7,

ou $2'' \frac{2}{9}$ por 12, que se achará como acima ser no fim de $26'' \frac{2}{3}$.

40 Probl. V. Quatro moveis A, B, C, D partem de hum mesmo ponto, e ao mesmo tempo, a descrever a circumferencia de hum circulo com as velocidades respectivas v, v', v'', v''', todas na mesma direcçaõ. Pergunta-se, quanto tempo haõ de gastar, para tornarem a encontrar-se todos em hum mesmo ponto?

Seja x o tempo buscado; os espaços nelle corridos seraõ vx, $v'x$, $v''x$, $v'''x$. Donde teremos como no Problema antecedente as equaçoens $(v'-v)x = E$, $(v''-v')x = E'$, $(v'''-v'')x = E''$; e conseguintemente $x = \frac{E}{v'-v} = \frac{E'}{v''-v'} = \frac{E''}{v'''-v''}$; logo será $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{E}{E'}$, e $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{E}{E''}$.

Supponhamos agora, que tendo abbreviado a fracçaõ $\frac{v'-v}{v''-v'}$ aos termos mais simples se reduz a $\frac{p}{q}$, e que $\frac{v'-v}{v'''-v''}$ se reduz tambem a $\frac{p'}{q'}$. Entaõ será $E = ep$, e $E = e'p'$ (sendo tambem e, e' numeros inteiros); logo $ep = e'p'$, e por conseguinte $\frac{e}{e'} = \frac{p'}{p}$. Logo, se reduzirmos a fracçaõ $\frac{p'}{p}$ á expressaõ mais simples $\frac{e}{e'}$, teremos primeiramente o valor de e, depois o de E, e finalmente o de $x = \frac{ep}{v'-v}$.

Exemplo. Seja $v = 1$, $v' = 1{,}11$, $v'' = 1{,}242$, $v''' = 1{,}2805$. Teremos $\frac{v'-v}{v''-v'} = \frac{0{,}11}{0{,}132} = \frac{5}{6}$, e $\frac{v'-v}{v'''-v''} = \frac{0{,}11}{0{,}0385} = \frac{20}{7}$. Logo $p = 5$, $p' = 20$, $\frac{p'}{p} = 4$, $e = 4$, e em fim $x = \frac{4 \cdot 5}{0{,}11} = \frac{2000}{11} = 181'' \frac{9}{11}$. Seraõ pois necessa-

rios

nos $3' 1'' \frac{9}{11}$, para que os quatro moveis venhaõ á primeira conjunçaõ geral.

O methodo ferá o mefmo para hum numero maior de corpos, e para o cafo em que elles naõ partirem todos do mefmo ponto.

Theorica do Movimento Compofto.

41 IMaginemos que o corpo *A* (Fig. 3.) eftá fituado fobre hum plano *ACa*, que fe move uniformemente na direcçaõ *Aa*, e com huma velocidade tal, que a cada unidade de tempo caminha hum efpaço igual á linha recta *Aa*. He evidente, que efte corpo confiderado relativamente ao plano *ACa* naõ tem movimento algum; mas fendo vifto por hum obfervador immovel, pofto fóra do plano, achar-fe-há que realmente fe move com hum movimento igual, e parallelo ao movimento do dito plano.

Ifto pofto, confideremos que qualquer potencia *P* obra fobre o mefmo corpo, fegundo a direcçaõ *PAC*, e que lhe imprime huma velocidade tal, que em cada unidade de tempo deva correr o efpaço *AC*. Naõ póde duvidar-fe, que em virtude defta velocidade propria ha de achar-fe o corpo fobre o plano no ponto *C*, quando findar a primeira unidade do tempo. Mas como, em virtude do movimento do plano, a linha *AC* fe adianta com hum movimento parallelo e uniforme para *ac*, e deve realmente coincidir com *ac* no fim da mefma unidade de tempo, eftá claro que o ponto *C* cahirá fobre o ponto *c*, e que participando o corpo *A* do movimento commum do plano deve achar-fe em *c* no fim da primeira unidade de tempo.

Do mefmo modo fe prova, que no fim de qualquer parte *T* da mefma unidade de tempo o corpo *A* animado da mefma velocidade *AC* ha de correr hum efpaço proporcional $AB = T \cdot AC$, em quanto o movimento commum tranfporta a linha *AB* parallelamente a fi mefma por hum efpaço $Aa' = Bb = T \cdot Aa$; logo a linha *AB* coincidirá com *a'b*, e confeguintemente ferá *b* o lugar do corpo *A* no fim do tempo *T*. Mas he facil de ver, que todos os pontos *b* determinados defta maneira fe achaõ fobre a mefma diagonal *Ac*, por quanto he $AB : Bb :: AC : Cc$; logo o corpo *A* defcreverá realmente a diagonal *Ac*.

Mas

Mas ainda naõ temos dito tudo. O movimento do corpo *A* pela diagonal *Ac* deverá ser uniforme. Porque he *Ab* : *Ac* : : *AB* : *AC*; e substituindo em lugar de *AB* o seu valor *T* . *AC*, será *Ab* : *Ac* : : *T* . *AC* : *AC* : : *T* : 1; logo será *Ab* para *Ac* como o tempo empregado em correr *Ab* para o tempo empregado em correr *Ac*, e conseguintemente será uniforme o movimento do corpo A pela diagonal *Ac* (n. 27.).

42 Por quanto hum corpo em descanço sobre hum plano movel tem toda a velocidade absoluta delle, he manifesto, que se hum corpo se mover uniformemente segundo a linha recta *QAa* com a velocidade *Aa*, e receber no ponto *A* da potencia *P* huma velocidade *AC* na direcçaõ *PAC*, ha de descrever uniformemente a diagonal *Ac* de hum parallelogrammo formado sobre os lados *Aa*, *AC*, que representaráõ as velocidades do movel segundo as direcções *Aa*, *AC*, representando a diagonal *Ac* a sua nova direcçaõ, e velocidade.

43 Mas, como a velocidade segundo a direcçaõ *Aa*, seja qual for a sua causa, póde considerar-se como effeito de huma potencia *Q*, que obra ao mesmo tempo que a potencia P, cujo effeito se dirige segundo *AC*; e como estas duas potencias, ou estas duas forças saõ proporcionais ás velocidades, que ambas haveriaõ de produzir separadamente no movel, se ellas naõ obrassem em commum: està claro, que as podemos substituir em lugar das sobreditas velocidades, representando-as da mesma maneira pelos lados de hum parallelogrammo, que daqui por diante chamaremos *o parallelogrammo das forças*.

Huma vez que forem bem comprehendidas todas estas cousas, naõ haverá difficuldade em admittir, e fixar na lembrança o principio seguinte, cujo uso he de summa frequencia e utilidade em toda a Mechanica.

Principio do Movimento Composto.

44 T*Odas as vezes que duas potencias obrarem ao mesmo tempo, e sobre o mesmo movel, por direcções differentes; o movel descreverá a diagonal de hum parallelogrammo formado sobre as direcções das potencias, com os lados proporcionais ás mesmas potencias.*

Con-

Consequencias que resultaõ deste Principio.

45 DUas potencias P e Q, representadas por *AB* e *AC* (Fig. 4.), produzem pois o mesmo effeito que huma só potencia *R*, representada por *AD* diagonal do parallelogrammo *ABCD*. Podemos chamar P e Q *potencias componentes*, e R *potencia resultante*. Isto posto teremos sempre, em semelhante caso, esta serie de proporções muito conhecida na Mechanica:

$$P : Q : R : : AB : AC : AD.$$

46 Como no triangulo *CAD* temos por outra parte $AC : CD : AD : : sen\ ADC : sen\ DAC : sen\ ACD : : sen\ DAB : sen\ DAC : sen\ CAB$; será tambem $P : Q : R : : sen\ DAB : sen\ DAC : sen\ CAB$; consequencia muito util, da qual apprendemos, que *qualquer destas tres potencias he sempre como o seno do angulo comprehendido pelas direcções das outras duas.*

47 Donde se segue, que sendo os angulos *DAB*, *DAC* infinitamente pequenos, e confundindo-se entaõ os senos respectivos com os arcos que lhes servem de medida, teremos $sen\ (DAB + DAC)$, ou $sen\ CAB = sen\ DAB + sen\ DAC$, e conseguintemente $R = P + Q$. Logo *quando duas potencias obraõ pela mesma linha, a resultante terá a mesma direcçaõ, e será igual á soma de ambas; e se obrarem por direcções contrarias, a resultante será igual á sua differença.*

Applicações do Principio precedente.

48 PElo principio do movimento composto naõ somente póde determinar-se a resultante de duas potencias, que obraõ juntamente sobre o mesmo ponto de hum corpo; mas tambem he facil de se determinar, sendo maior o numero das potencias. Para este effeito, escolher-se-haõ duas dellas, quaisquer que sejaõ, e se buscará a sua resultante pelo principio geral. Depois se passará a comparar esta primeira resultante com outra qualquer das potencias componentes, e se achará huma segunda resultante, a qual por si só terá o lugar das tres potencias já comparadas. Logo comparando-a com a quarta potencia, e continuando assim por diante, finalmente se chegará a determinar a resultante geral de todas as potencias propostas.

49 Por huma resoluçaõ opposta á composiçaõ precedente,

te, facilmente podemos tornar a achar as potencias simples, que tem concorrido, ou podiaõ concorrer a formar a ultima resultante que temos determinado. Muitas vezes nos ha de ser necessario considerar qualquer potencia, como resultante de outras duas representadas pelos lados de hum parallelogrammo, do qual ella representará a diagonal, e substituir em seu lugar estas forças lateraes, que lhe saõ equivalentes, porque produzem absolutamente o mesmo effeito. Esta composiçaõ, e resoluçaõ das forças saõ os dous recursos principais de toda a Statica.

50 Se as potencias que obraõ sobre o mesmo corpo naõ forem todas applicadas a hum mesmo ponto, eisaqui o methodo de determinar a sua resultante.

Primeiramente devemos notar, que sendo o effeito de qualquer potencia *P* (Fig. 5.) dar a todas as partes de hum corpo *M* huma velocidade igual, que as faça mover por direcçoens parallelas á da mesma potencia, como suppomos aqui, pouco importa o ponto da recta *PK* em que ella exercita a sua acçaõ, ou seja por meio de huma alavanca, ou de huma corda, ou de qualquer outro instrumento. A unica condiçaõ necessaria, para que ella produza constantemente o mesmo effeito, consiste em supporlhe sempre a mesma força, e a mesma direcçaõ *PK*, seja qual for o ponto desta direcçaõ, em que ella exercita a sua acçaõ.

Isto supposto, consideremos as tres potencias *P*, *Q*, *S* (Fig. 6.) actuando juntamente sobre o corpo *M* pelas direcções *Pp*, *Qq*, *Ss* situadas todas em hum mesmo plano. Produzaõ-se *Pp* e *Qq* até concorrerem no ponto *H*; e porque as potencias *P* e *Q* se podem considerar applicadas no ponto *H*, será a resultante dellas *HK*, diagonal do parallelogrammo formado sobre os lados *HP*, *HQ*, que representaõ as velocidades, que cada huma das duas forças communicaria separadamente ao movel.

Agora produzindo a direcçaõ da resultante *HK* até encontrar no ponto *I* a direcçaõ da potencia *S*, pela mesma rasaõ consideraremos a resultante applicada em *I*, e representada pela recta *IL*, que seja igual a *HK*. E como no mesmo ponto *I* se julga tambem applicada a potencia *S* representada pela recta *IS'*, naõ falta mais do que completar o parallelogrammo *S'ILG*, para determinar o valor, e a direcçaõ da resultante *IG*. Em virtude pois das potencias

cias P, Q, S tomará o movel huma velocidade igual, e parallela a IG, como se experimentasse a acçaõ de huma só potencia representada por esta ultima resultante.

51 Por este meio poderemos sempre determinar a resultante de quantas forças quizermos, e resolver tambem qualquer força em muitas outras, que tenhaõ certas condições, sem as quais seria indeterminado este ultimo Problema.

Mas ainda que o methodo precedente naõ exige mais do que huma construcçaõ geometrica bem simples, naõ he com tudo proprio para ser posto em calculo. Por isso passaremos a outro, que encherá melhor o nosso objecto.

Dos Momentos, e dos seus Usos.

52 Chama-se *Momento* de huma potencia o producto da mesma potencia pela distancia da sua direcçaõ a qualquer ponto fixo tomado arbitrariamente. Como esta especie de productos tem grandissimo uso em todas as partes da Mechanica; pareceu mais simples designallos pelo unico termo de *momentos*, do que repetir de cada vez a sua definiçaõ.

53 No plano do parallelogrammo $ABDC$ (Fig. 7.) tome-se hum ponto fixo M, do qual se conduzaõ para a diagonal AD, e para os lados AB, AC produzidos, se for necessario, as perpendiculares respectivas MP, MP', MP''. Seja o angulo $BAD = a$, o angulo $DAC = b$, $AP = x$, $MP = y$, $MP' = y'$, $MP'' = y''$.

Primeiramente teremos o angulo $MAP' = MAP - a$; logo $sen\, MAP'$, ou $\frac{y'}{AM} = sen\, MAP \,.\, cos\, a - sen\, a \,.\, cos\, MAP = \frac{y}{AM}\, cos\, a - \frac{x}{AM}\, sen\, a$; logo será $y' = y\, cos\, a - x\, sen\, a$.

Depois teremos o angulo $MAP'' = b + MAP$, donde concluiremos da mesma maneira $y'' = y\, cos\, b + x\, sen\, b$. Eliminando x destas duas equações, teremos $y''\, sen\, a + y'\, sen\, b = y\,(\,sen\, a\, cos\, b + sen\, b\, cos\, a\,) = y\, sen\,(\,a + b\,)$: porem $sen\, a : sen\, b : sen\,(\,a + b\,) :: AC : AB : AD$; logo $AD.MP = AB.MP' + AC.MP''$.

Se o ponto M for comprehendido entre os lados do angulo

gulo *BAD* (Fig. 8.), he claro, que a diftancia MP' fe torna negativa. Affim póde o ultimo refultado applicar-fe aos dous cafos, efcrevendo-o defta maneira: $AD.MP = AC.MP'' \pm AB.MP'$.

54 Donde fe fegue, que podendo fempre duas potencias P, Q, com a fua refultante R, exprimir-fe pelos lados, e diagonal de hum parallelogrammo *ABCD* (Fig. 9.), fe de qualquer ponto M tomado no plano do mefmo parallelogrammo fe conduzirem perpendiculares fobre as direcções das tres forças; o producto da refultante pela perpendicular MP (que mede a diftancia da fua direcçaõ ao ponto M) he igual á foma, ou á differença dos productos refpectivos das duas componentes pelas perpendiculares MP', MP'' conduzidas do mefmo ponto M fobre as fuas direcções refpectivas.

Toma-fe a foma dos ditos productos, quando o ponto M eftá fóra do angulo *BAD*; e a differença, quando eftá dentro. Porém eftes dous productos faõ os momentos refpectivos das potencias componentes, e o outro producto he o momento da fua refultante. Logo podemos concluir geralmente, que *o momento de qualquer força refultante he igual á foma, ou á differença dos momentos das duas componentes, conforme fe tomar o ponto fixo fóra, ou dentro do angulo por ellas comprehendido.*

55 Eftes dous cafos fe diftinguem fempre com muita facilidade, imaginando o parallelogrammo das forças de tal forte unido e fujeito ao ponto M, que naõ poffa girar fenaõ ao redor delle. Porque entaõ, fe o ponto M naõ for comprehendido dentro do angulo das potencias *BAD*, ellas tenderáõ a fazer girar para a mefma parte o plano com todo o fyftema das linhas nelle defcritas. Mas fe o ponto M fe tomar dentro dos lados do angulo *BAD*, as duas potencias tenderáõ a fazer girar todo o fyftema para partes contrarias. Póde logo dizer-fe, que o momento da refultante he igual á foma, ou á differença dos momentos das duas componentes, conforme eftas tendem a fazer girar o fyftema para a mefma parte, ou para partes contrarias.

56 Em geral: *Qualquer que feja o numero, e a direcçaõ das potencias, o momento da refultante fempre ferá igual á foma dos momentos das componentes que tendem a fazer girar o fyftema para huma parte, menos a foma dos momentos daquellas que tendem a fazello girar para a parte contraria.*

Efta

Esta he huma das Proposições mais uteis da theorica dos momentos. Alem de que ella se segue immediatamente do que acabamos de mostrar, ainda se póde fazer mais sensivel por hum raciocinio bem simples, como he o seguinte.

Duas potencias quaisquer das componentes tem huma resultante, cujo momento he igual á soma, ou differença dos momentos de ambas ellas. Esta resultante sendo comparada com huma terceira componente dá huma segunda resultante, cujo momento he igual á soma ou differença dos momentos das tres componentes, e assim por diante. Logo o momento da resultante geral he igual á soma, ou differença dos momentos de todas as componentes; ou, que vem a ser o mesmo, o momento da resultante geral he igual á soma dos momentos que tendem a fazer girar o systema para huma parte, menos a soma dos momentos que tendem a fazello girar para a parte contraria.

57 Logo, *se o ponto fixo M se achar na resultante, a soma total dos momentos das componentes será nenhuma.* Quer dizer, que entaõ a soma dos momentos das forças que tendem a fazer girar para huma parte, he igual á soma dos momentos das que tendem a fazer girar para a parte contraria; conclusaõ, que he necessario naõ perder nunca de vista.

Vejamos agora, como a theorica dos momentos póde ter uso na composiçaõ das forças; e para começarmos pelas applicações mais simples, consideremos primeiro duas forças parallelas, que obraõ no mesmo plano.

58 Sejaõ pois P e Q as potencias propostas (Fig. 10.), e seja M o ponto fixo, ao qual se reportaõ os seus momentos. Conduzindo a perpendicular $Mprq$, e supponde que ambas as potencias obraõ para a mesma parte, teremos geralmente $R \cdot Mr = P \cdot Mp + Q \cdot Mq$. Se reportassemos os momentos a outro qualquer ponto fixo m, tomado sobre a mesma linha Mq, teriamos igualmente $R \cdot mr = P \cdot mp + Q \cdot mq$. Logo tirando esta ultima equaçaõ da primeira, e dividindo por Mm, acharemos $R = P + Q$.

59 Este resultado he muito util para a composiçaõ das forças parallelas, e póde enunciar-se desta maneira: *A resultante das forças parallelas, que obraõ para a mesma parte, he igual á sua soma.*

60 Do mesmo modo se prova, que *a resultante das forças*

ças parallelas, que obraõ para partes contrarias, he igual á sua differença; e isto naõ somente estando o ponto fixo, ao qual se reportaõ os momentos, fóra do intervallo que separa as direcções das forças, mas tambem dentro dellas, como neste exemplo. Porque sem embargo de que achando-se o dito ponto, como v. gr. o ponto O, dentro das direcções, naõ podem entaõ as forças P e Q actuar para partes oppostas sem tender a fazer girar a linha pOq para a mesma parte, a resultante naõ deixa por isso de ser igual á sua differença. E por conclusaõ, este ultimo caso nos adverte, que naõ devemos indifferentemente confundir as forças, que tendem a fazer girar para a mesma parte, com as forças que obraõ para a mesma parte.

61 Do que temos dito se segue, que se o ponto M coincidir com o ponto p, teremos $R.pr$, ou $(P+Q)pr = Q.pq$; donde tiraremos $P.pr = Q.qr$, e $P:Q::qr:pr$. Logo *as forças saõ entre si na rasaõ inversa das suas distancias á resultante*. O mesmo se acharia, reportando os momentos ao ponto r da mesma resultante.

62 Por quanto no caso proposto temos estas duas equações $P.pr = Q.qr$, e $R.pr = Q.pq$, dellas tiraremos $P:Q:R::qr:pr:pq$. Donde se deduzem as consequencias seguintes:

I. Que todos os pontos r da resultante estaõ respectivamente em distancias iguais dos pontos que lhes correspondem nas direcções das suas componentes; e por conseguinte, que *a direcçaõ da resultante he parallela ás direcções das componentes*.

II. Que póde qualquer das tres potencias P, Q, R representar-se pela linha comprehendida pelas direcções das outras duas. Por exemplo, sendo P representada por qr, será Q representada por pr, e R por pq.

III. Que sendo dadas as potencias P, Q com as suas direcções, sempre poderá facilmente achar-se o ponto r, pelo qual deve passar a sua resultante, por meio da equaçaõ $(P+Q)pr = Q.pq$, que dá a distancia procurada $pr = \frac{Q.pq}{P+Q}$.

63 Supponhamos agora qualquer numero de forças parallelas, as quais todas estejaõ situadas no mesmo plano. Claro está, que a sua resultante he igual á soma daquellas

que

que obrarem para huma parte, menos a ſoma daquellas que obrarem para a parte contraria. E porque o momento da meſma reſultante he igual á ſoma dos momentos de todas as componentes, *a diſtancia da ſua direcçaõ a hum ponto dado ſe achará dividindo a ſoma dos momentos das forças componentes pela meſma reſultante, ou pela ſoma das forças, que vem a ſer o meſmo.* Porém he neceſſario ter bem na lembrança, que ſe entre eſtas forças houver algumas, que tendaõ a fazer girar o ſyſtema ao contrario das outras, devem tomar-ſe os ſeus momentos com ſignais negativos; e ſe houver alguma, que obre para parte contraria ás outras, deve tambem eſcrever-ſe com ſignal negativo na ſoma total das forças.

O que acabamos de dizer, he baſtante para determinar a reſultante de quantas forças parallelas quizermos, com tanto que todas eſtejaõ ſituadas no meſmo plano. Paſſemos pois ao methodo de a determinar, quando as forças ſaõ obliquas, ſempre porém no meſmo plano.

64 Supponhamos quatro forças P, Q, S, T (Fig. 11.), que repreſentaremos pelas rectas obliquas Pp, Qq, Ss, Tt, as quais indicaõ juntamente a direcçaõ das ſuas acções reſpectivas. Tome-ſe no plano das meſmas forças qualquer ponto C, e por elle ſe conduzaõ as rectas CP'', Cp'' perpendiculares entre ſi. Depois diſto reſolvendo cada huma das forças (n. 49.), como Pp, em outras duas PP', Pp' reſpectivamente parallelas ás perpendiculares CP'', Cp'', teremos por tudo oito forças, quatro das quais ſeraõ parallelas a CP'', e outras quatro a Cp''.

A reſultante das quatro forças parallelas a Cp'' obra de alto para baixo, e o ſeu valor he $TT' + SS' + QQ' - PP'$, e a ſua direcçaõ póde determinar-ſe pela diſtancia que deve ter a reſpeito da linha Cp'', a qual diſtancia ſe exprime geralmente por - - - - - - - - - - - -

$$\frac{SS' . Ss'' + QQ' . Qq'' - PP' . Pp'' - TT' . Tt''}{TT' + SS' + QQ' - PP'}.$$

E a reſultante das forças parallelas a CP'' obra da direita para a eſquerda, cujo valor he $Tt' + Ss' - Qq' - Pp'$; e a diſtancia da ſua direcçaõ á linha CP he - - -

$$\frac{Tt' . TT'' + Ss' . SS'' - Qq' . QQ'' - Pp' . PP''}{Tt' + Ss' - Qq' - Pp'}.$$

Seja

Seja pois reprefentada por CR'' a diftancia da primeira refultante á linha Cp'', e por Cr'' a diftancia da fegunda á linha CP''. Se completarmos o rectangulo $R''Cr''R$, teremos $R''R$ por direcçaõ da primeira refultante, e $r''R$ por direcçaõ da fegunda. Eftas duas refultantes uniráõ pois os feus esforços no ponto de interfecçaõ R; e confeguintemente fe tomarmos de huma parte $RR' = TT' + SS' + QQ' - PP'$, e da outra $Rr' = Tt' + Ss' - Qq' - Pp'$, he evidente que completando o rectangnlo $r'RR'r$, a diagonal Rr dará em fim o valor, e a direcçaõ, da refultante geral que bufcamos

Naõ he logo difficultofo o achar a refultante de quantas forças quizermos, ou fejaõ parallelas, ou obliquas, com tanto que todas fe fupponhaõ exiftentes no mefmo plano. Faltanos determinar a mefma refultante, quando as potencias de que fe compoem eftaõ em planos differentes.

65 A fim de procedermos fempre do mais fimples para o mais compofto, primeiramente fupporemos, que as potencias naõ faõ mais do que tres, que actúaõ todas para a mefma parte, e que as fuas direcções faõ todas parallelas, ainda que exiftentes em tres planos differentes.

Sejaõ pois P, Q, S eftas tres potencias (Fig. 12.); e feja TCP' hum plano perpendicular ás fuas direcções (He neceffario fuprir aqui hum pouco pela imaginaçaõ ao que pelas figuras naõ póde reprefentar-fe, fenaõ imperfeitamente. Póde, por exemplo, conceber-fe hum prifma triangular recto, cujas tres faces feraõ os planos das potencias, e huma das bafes ferá o plano perpendicular TCP'). Tendo tomado nefte plano qualquer ponto C, por elle fe conduzaõ as linhas CT, CP' perpendiculares entre fi.

Ifto pofto, a refultante M das duas potencias Pp, Qq ferá igual á fua foma, exiftirá no feu mefmo plano, ferá parallela a cada huma dellas, e paffará a huma diftancia

$$PM = \frac{Q}{P+Q} PQ.$$

Do mefmo modo, a refultante R das potencias Mm, Ss, ferá igual á fua foma $P + Q + S$, eftará no plano de ambas, ferá parallela a cada huma dellas, e paffará a huma diftancia $MR = \dfrac{S}{P+Q+S} MS$.

66 Donde fe fegue em geral, que *a refultante de qual-*

quer numero de forças parallelas, situadas em quaesquer planos, he igual á sua soma, quando ellas obraõ todas para a mesma parte.

Para determinar a sua posiçaõ, dos pontos P, M, Q, R, S se conduziráõ outras tantas perpendiculares a CP', e fazendo $CS' = a$, $CQ' = b$, $CP' = c$, teremos $P'Q' = c - b$, $Q'S' = b - a$, $P'S' = c - a$. Isto posto, as parallelas PP', MM', QQ', RR', SS' daraõ em primeiro lugar $P'M' : P'Q' :: PM : PQ :: Q : P + Q$; logo substituindo o valor de $P'Q'$, teremos $P'M' = \frac{Q(c-b)}{P+Q}$.

Em segundo lugar daraõ $S'R' : S'M' :: SR : SM :: P + Q : P + Q + S$; logo será $S'R' = \frac{S'M'(P+Q)}{P+Q+S}$ $= \frac{P(c-a)+Q(b-a)}{P+Q+S}$; logo $CR' = a + S'R' =$ $\frac{aS+bQ+cP}{P+Q+S} = \frac{P.CP'+Q.CQ'+S.CS'}{P+Q+S}$.

Supponhamos agora huma recta CV parallela ás direcções das potencias, e teremos a distancia RR'' da resultante a hum plano VCT (o qual se acha necessariamente parallelo ás mesmas direcções) dividindo a soma dos momentos relativos ao dito plano pela soma das forças.

Procedendo da mesma fórma conheceremos a distancia RR' da mesma resultante a outro plano VCP' parallelo ás direcções das potencias, e perpendicular ao primeiro. Será logo determinado o ponto R, por onde deve passar a resultante, cuja posiçaõ será conseguintemente determinada. Porém já temos calculado o seu valor; logo temos conhecido, e determinado a resultante de qualquer numero de forças, que actûaõ em planos differentes, sendo todas parallelas entre si.

67 Em fim, se as forças forem obliquas (Fig. 13.), imaginaremos conduzidas de qualquer ponto A tres linhas AB, AC, AD perpendiculares entre si (representem-se como os tres lados, ou as tres esquinas, que em hum cubo, por exemplo, terminaõ no vertice do mesmo angulo solido); e supposndo que Pp he huma das potencias obliquas, resolvella-hemos em outras duas, das quais huma PP' seja parallela ao plano ABD, e a outra Pp' parallela ao plano DAC.

Do

Do mesmo modo resolveremos esta segunda potencia Pp', em outras duas Pp'', Pp''', huma parallela a AC, e a outra a AD. Assim teremos em lugar da força Pp tres forças, cujas direcções seraõ respectivamente parallelas a tres linhas dadas de posiçaõ.

Depois de ter assim resolvido cada huma das forças propostas em outras tres parallelas ás mesmas tres linhas, pelo que já temos dito buscaremos a resultante particular de todas as forças parallelas á recta AB, depois a das forças parallelas a AD, e em fim a das forças parallelas a AC. Teremos logo por ultima analyse para determinar a resultante geral das tres particulares, situadas sim em planos differentes, mas parallelas entre si; circunstancia, que finalmente reduz este caso aos termos do precedente.

68 Seguindo pois este methodo, podemos reduzir qualquer numero de forças propostas a tres forças respectivamente parallelas a tres linhas perpendiculares entre si. Poderiaõ tambem reduzir-se a duas, naõ fazendo de cada huma mais do que huma simples resoluçaõ. Mas naõ he possivel reduzillas geralmente a huma só, como se pratica nas forças que existem todas no mesmo plano.

Reflexões sobre as materias precedentes.

69 I. NAõ ha cousa mais ordinaria na natureza, que os exemplos do movimento composto. O batel, que atravessando a corrente de hum rio descahe da linha, por onde o leva o impulso dos remos; a chama, e o fumo, que o menor assopro aparta da direcçaõ vertical; a chuva, a neve, e a saraiva, que cahem mais, ou menos obliquamente, conforme o vento he mais, ou menos impetuoso; os balanços, que se experimentaõ em duas carruagens, que se embaraçaõ; o risco a que se expoem o cavalleiro, que salta do cavallo no meio da carreira; o peixe, que batendo com a cauda para partes encontradas se adianta pela direcçaõ media: tudo nos offerece applicações sem numero do fecundissimo principio da composiçaõ das forças.

Pelo discurso desta obra se verá tambem de que utilidade he a sua resoluçaõ, cujos exemplos naõ saõ menos frequentes, a qual na medida das forças obliquas he sobre tudo muito necessaria.

70 II,

70 II. Naõ he ſem raſaõ, que na Mechanica ſe diſtinguem duas eſpecies de movimento, *abſoluto*, e *relativo.* Saõ muito differentes hum do outro, como ſe póde julgar pelo exemplo ſeguinte.

O mareante, que dorme ſocegadamente na ſua embarcaçaõ, eſtá ſem duvida em deſcanço a reſpeito das differentes partes do navio; mas o ſangue, que lhe circula inceſſantemente pelas veias e arterias, realmente ſe move a reſpeito delle. Tambem ſe move a reſpeito dos objectos ſituados fóra da embarcaçaõ, de cujo movimento participa. Será logo o movimento do ſangue produzido por duas cauſas ſimultaneas, das quais huma he a acçaõ do coraçaõ, e do ſyſtema arterioſo, e a outra o impulſo que move o navio. Eſtas duas forças produziráõ primeiramente hum movimento compoſto no ſangue do mareante.

Mas ſe elle acorda, ſe corre pelo convéz, ſe ſobe, ou deſce pelas enxarcias, eiſaqui hum terceiro movimento, do qual participará igualmente o ſangue. Se o mar he tempeſtuoſo, eiſahi quarto movimento, procedido dos balanços do navio. Se a terra ſe move ſobre o ſeu eixo, eiſahi hum quinto; e ſe ella alem diſſo he tranſportada pela vaſta circumferencia da Ecliptica, ſe o ſeu eixo experimenta nutações, ſe a Ecliptica meſma tem movimento proprio relativamente ao eſpaço abſoluto, ſe as correntes particulares deſviaõ o navio da ſua derrota, e ſe a todas eſtas cauſas ſe ajuntarem outras que talvez ignoramos, he evidente que o movimento abſoluto do ſangue do mareante ſerá compoſto de todos eſtes movimentos particulares. E quem poderá dizernos, qual he a ſua intenſaõ, qual a direcçaõ, e por conſeguinte qual deve ſer a ſua influencia?

71 III. Por eſta ſimples expoſiçaõ he facil de ver, que naõ ha no mundo hum ſó movimento abſoluto, que conheçamos com alguma apparencia de exactidaõ; e iſto por falta de objectos abſolutamente immoveis, ſituados fóra naõ ſomente da terra, mas de tudo o que fórma o ſyſtema ſolar, aos quais, como a pontos fixos e invariaveis, pudeſſemos reportar todos os movimentos expoſtos aos noſſos ſentidos.

He verdade, que as eſtrellas fixas nos ſervem de pontos de comparaçaõ, porque ellas nos parecem conſervar entre ſi diſtancias inalteraveis. Mas póde ſer que o naõ julgemos aſſim, ſenaõ por huma conſequencia daquella illuſaõ taõ natural, que nos move a crer que a embarcaçaõ em que eſtamos naõ tem movimento algum, porque naõ vemos bulir-se nada de quanto nos rodeia. Póde ser tambem que aquelles astros tenhaõ movimentos taõ compostos como os nossos, e que a prodigiosa distancia que nos separa faça as suas variações insensiveis aos nossos olhos. Sobre isso ha mais do que simples conjecturas, depois que os Astronomos modernos se tem aperfeiçoado tanto na arte de observar.

72 IV. Em conclusaõ, as leis do movimento naõ seriaõ menos invariaveis, no caso de suppormos em movimento o mesmo espaço, no qual ellas tem o seu effeito; porque todos os movimentos particulares se executariaõ da mesma maneira. Que huma embarcaçaõ navegue a todo o panno, que esteja ancorada, ou encalhada sobre hum banco de areia, o piloto com a mesma facilidade traçará as linhas, e figuras necessarias para a determinaçaõ da sua derrota, e os marinheiros igualmente faraõ as manobras convenientes. Que a terra seja transportada pelo movimento annuo, que róde sobre o seu eixo pelo movimento diurno, ou que esteja perfeitamente immovel, tudo he indifferente pelo que toca á percussaõ dos corpos, e ao equilibrio das potencias, de que havemos de calcular os effeitos. Os movimentos relativos saõ os unicos, que nos interessaõ. Passemos ao ultimo principio geral da Mechanica.

Theorica do Equilibrio.

73 O Equilibrio, como sabe todo o mundo, resulta do esforço mutuo, que as potencias iguais, e oppostas fazem humas contra outras. Se hum corpo, por exemplo, he sollicitado ao movimento por duas forças absolutamente iguais, e diametralmente oppostas, he evidente que deve ficar immovel, porque naõ póde obedecer com preferencia a nenhuma das ditas impressões. Entaõ as forças, que o sollicitaõ ficaõ em equilibrio, e assim se conservariaõ para sempre, se outras forças naõ viessem a terminar esta especie de combate.

74 Do mesmo modo, se duas massas iguais animadas de igual velocidade por direcções oppostas vierem a encontrar-se huma com a outra, devem necessariamente ficar em descanço depois da collisaõ, porque nenhuma dellas poderá prevalecer sobre a outra. Fazemos aqui abstracçaõ de todas as qualidades puramente accessorias da materia, e por isso

isso suppomos as massas destituidas de toda a elasticidade.

75 O mesmo seria no caso de que duas massas desiguais M, m viessem a encontrar-se de partes oppostas com as velocidades V, v reciprocamente proporcionais a M, m. Porque entaõ as quantidades de movimento seriaõ iguais (n. 22.), e deveriaõ conseguintemente contrabalançar-se igualmente, em perfeito equilibrio.

Por outra parte, podemos reduzir este segundo caso ao primeiro. Porque supponhamos a velocidade V do corpo M dupla da velocidade v do corpo m; mas ao mesmo tempo a massa deste dupla da massa daquelle. Logo poderá considerar-se o corpo m como partido em duas massas, huma anterior, outra posterior, cada huma dellas igual á do corpo M, e cada huma animada com a mesma velocidade commua v. Mas em lugar desta velocidade podemos substituir na parte anterior a velocidade $2v$ para diante, e a velocidade v para traz; e por esta decomposiçaõ, que naõ he nem sem exemplo, nem sem utilidade, a parte anterior animada da velocidade $2v$ para diante fará equilibrio ao corpo M (por quanto tem a mesma massa, e a mesma velocidade que elle), ao mesmo tempo que animada da velocidade v para traz fará equilibrio com a parte posterior, pela mesma rasaõ; logo o todo ficará em equilibrio.

Mas para generalizar hum pouco este exemplo, supponhamos que as duas massas M, m saõ entre si como dous numeros inteiros quaisquer E, e. Teremos pois $M = \frac{mE}{e}$, e $v = \frac{VE}{e}$, ou (fazendo $\frac{m}{e} = p$, e $\frac{V}{e} = q$) $M = Ep$, e $v = Eq$. Porém em lugar da massa $M = Ep$ animada da velocidade $V = eq$, podemos substituir hum numero $E.e$ de massas p animadas da velocidade q; e do mesmo modo em lugar da massa $m = ep$ animada da velocidade $v = Eq$ podemos substituir hum numero $E.e$ de massas p animadas da velocidade q. Logo haverá geralmente equilibrio na hypothese presente entre dous corpos quaisquer, todas as vezes que as suas massas M, m tiverem entre si huma rasaõ racional.

Este equilibrio naõ deixará de ter lugar no mesmo caso de suppormos incommensuravel a rasaõ das duas massas, por quanto será sempre possivel exprimir esta rasaõ em nume-

 ros

ros racionais de maneira, que o erro ſeja menor que qualquer aſſignavel quantidade. Logo, quando as maſſas ſaõ reciprocamente como as velocidades em dous moveis, que actûaõ hum contra o outro por direcções diametralmente oppoſtas, ſempre haverá equilibrio. Já temos moſtrado, que o deve haver tambem, quando as maſſas, e as velocidades oppoſtas ſaõ iguais. Logo deve ter-ſe por inconteſtavel a Propoſiçaõ ſeguinte.

Principio do Equilibrio.

76 *DOus corpos fazem equilibrio entre ſi, todas as vezes que, ſendo as direcções diametralmente oppoſtas, as quantidades de movimento forem iguais.*

Conſequencias que reſultaõ deſte Principio.

77 I. Se dous corpos *M*, *m* (Fig. 14.) actuarem hum contra o outro por meio de huma alavanca inflexivel, ou, ſe unidos por hum fio incapaz de extenſaõ, tenderem a ſeparar-ſe hum do outro, com quantidades de movimento iguais, haverá neceſſariamente equilibrio entre elles: porque entaõ a ſua acçaõ reciproca ſerá independente da diſtancia *Mm*.

78 II. Se de tres corpos *M'*, *M*, *m* (Fig. 15.), ligados ao meſmo fio, os dous ultimos tirarem para a parte contraria á do corpo *M'*, ſerá neceſſario para haver equilibrio, que a quantidade de movimento do corpo *M'* ſeja igual á ſoma das quantidades de movimento dos outros dous.

79 III. Em geral, ſeja qual for o numero dos corpos, que atados pelo meſmo fio, ou ligados pela meſma vara, actuarem huns contra os outros, todo o ſyſtema ficará em equilibrio, ſe a ſoma das quantidades de movimento daquelles que tiraõ para huma parte for igual á ſoma das quantidades de movimento daquelles que tiraõ para a parte contraria.

80 IV. E porque as potencias ſe medem pelas quantidades de movimento, que ellas ſaõ capazes de produzir em maſſas dadas, ſegue-ſe que actuando quaiſquer potencias mutuamente humas contra as outras, devem guardar equilibrio em todos os caſos, em que a ſoma das que obrarem para huma parte for igual á ſoma das que fizerem o ſeu eſforço para a parte oppoſta.

81 V.

81 V. Logo haverá ſempre equilibrio entre qualquer numero de potencias, ſejaõ quais forem as ſuas direcções, todas as vezes que a reſultante geral de todas ſe reduzir a nada.

Os principios, que até agora temos explicado neſta Introducçaõ, podem ſer conſiderados como leis gerais, que ſe derivaõ unicamente da ſimples exiſtencia da materia, e do movimento, fazendo abſtracçaõ de toda a hypotheſe phyſica. Eſtas leis teriaõ pois lugar na natureza, ſe naõ recebeſſem innumeraveis modificações de huma grande multidaõ de obſtaculos.

Vejamos agora até que ponto podem eſtes obſtaculos influir em tudo o que reſpeita ao equilibrio, e ao movimento. Para procedermos com ordem, naõ examinaremos as condições do equilibrio nas Maquinas, ſenaõ depois de havermos tratado com miudeza da Theorica dos centros de gravidade, que he de muita importancia. A' diſcuſſaõ deſtes dous objectos ſaõ deſtinadas as duas ſecções da Statica. A primeira contém os methodos, e as formulas neceſſarias para determinar em todos os caſos o centro de gravidade. E a ſegunda tem por fim a deſcripçaõ, as propriedades, o calculo, e os uſos das Maquinas principais.

Depois de termos aſſim diſcutido na Primeira parte deſta Obra o que reſpeita ao equilibrio, trataremos na Segunda do que pertence ao movimento.

PRI-

PRIMEIRA PARTE
DA
MECHANICA
OU
A STATICA

SECÇAÕ I.

DOS CENTROS DE GRAVIDADE.

82 TOdos experimentamos, que hum corpo deixado a si mesmo cahe perpendicularmente ao horizonte, e que ainda quando he sustentado tende sempre a caminhar para a superficie da terra por hum esforço determinado segundo a mesma direcçaõ.

Observaçoens sem numero nos attestaõ, que succede o mesmo em todos os paizes, e que este phenomeno naõ tem menos lugar sobre os cumes das mais altas montanhas, do que nos campos rasos, e na profundidade dos valles. Por toda a parte, até aos mais profundos abysmos, buscaõ os corpos, para o dizermos assim, chegar-se mais para hum ponto fixo, que he visivelmente o centro da terra, porque ella he sensivelmente redonda, e as direcçoens perpendiculares aos diversos horizontes vaõ conseguintemente unir-se no seu centro.

Mas esta tendencia universal naõ he certamente essencial aos corpos. He hum esforço real, de que a materia por si mesma naõ he capaz. Na sua natureza naõ ha cousa que assim o peça, nem que o possa produzir; e a sua inercia he hum obstaculo de mais á existencia de semelhante

lhante impulſo. He logo neceſſario, que tenha por principio alguma força exterior dirigida para o centro da terra: e eſta força he a que ſe chama, como já diſſemos, *Gravidade*, *Gravitaçaõ*, ou *Attracçaõ*.

Ainda que naõ ha mais doque opinioens, quando muito veroſimeis, ſobre a cauſa da gravidade, he com tudo facil de provar a ſua exiſtencia, e de conhecer os ſeus effeitos. Averiguada huma vez a ſua exiſtencia, e conhecidos os ſeus effeitos, naõ he neceſſario mais para expſicar tudo o que reſpeita ao movimento, e ao equilibrio dos corpos graves. Eisaqui pois as obſervaçoens mais conſtantes ſobre a força da gravidade.

83 I. Ella obra igualmente ſobre todas as partes materiais dos corpos terreſtres, iſto he, a todas imprime a meſma velocidade no meſmo tempo. Tem-ſe averiguado iſto, deixando cahir no meſmo inſtante, e da meſma altura, maſſas muito deſiguais. O tempo do deſcenſo he abſolutamente igual, quando ſe faz a experiencia dentro do *recipiente* da maquina pneumatica. Todos os Phyſicos ſabem, que o ouro, por exemplo, aindaque o mais compacto dos metais, quando ſe deixa ao unico impulſo da gravidade, naõ deſce mais veloz do que a laã, e a pluma mais leve. Se o tempo do deſcenſo naõ he o meſmo fóra do recipiente, he porque o ar ſe oppoem deſigualmente ao ſeu movimento. Concluamos pois, que a gravidade he huma força, que tende a imprimir em todos os corpos a meſma velocidade no meſmo tempo.

84 II. Em hum meſmo lugar da terra, e em todas as eſtaçoens do anno, a gravidade faz correr aos corpos livres o meſmo eſpaço no meſmo tempo, ao menos ſem differença alguma ſenſivel. Logo he huma força conſtante, que obra ſempre igualmente.

85 III. E porque a acçaõ da gravidade ſe renova a cada inſtante ſobre todos os corpos, quer eſtejaõ em deſcanço, quer em movimento, devemos tambem concluir, que he huma força acceleratriz univerſal, e conſtante. Daqui vem, que em todos os paizes deſce hum corpo com velocidade tanto maior, quanto he maior o tempo que livremente eſteve ſujeito á impreſſaõ da gravidade.

86 IV. Além diſto, a velocidade que a gravidade imprime em qualquer corpo em hum inſtante he infinitamente pequena; porque de outra ſorte no fim de qualquer tempo

po

po finito ſeria infinita, o que he impoſſivel. Naõ he logo comparavel a acçaõ inſtantanea da gravidade com potencia nenhuma finita, por muito pequena que ſe ſupponha; porque eſta produz huma velocidade finita em hum inſtante. Sómente depois ſer paſſado hum tempo finito, he que o effeito accumulado da gravidade póde comparar-ſe com o das outras potencias motrizes.

87 V. As direcçoens da gravidade ſaõ parallelas em hum meſmo lugar. Dous fios a prumo, por exemplo, guardaõ entre ſi hum parallelíſmo ſenſivel em hum meſmo edificio, na meſma cidade, e geralmente em todos os lugares, que tem ſenſivelmente o meſmo horizonte. Iſto naõ impede, que as direcçoens concorraõ realmente no centro da terra, porque eſte centro póde reputar-ſe a huma diſtancia infinita a reſpeito do pequeno intervallo, que ſepara as meſmas direcçoens nas circumſtancias que temos propoſto.

88 VI. Por obſervaçoens exactas e frequentes ſe tem achado, que hum corpo na Latitude de París corre no primeiro ſegundo do ſeu deſcenſo livre, em virtude da gravidade, 15 pés huma pollegada huma linha $\frac{7}{9}$ do pé regio de Paris, ou 15^p, 098, ou mais exactamente 2173, 631356 linhas. No ſegundo ſeguinte corre 45 pés 3 pollegadas 5 linhas $\frac{1}{3}$, e no terceiro 75 pés 5 pollegadas e 9 linhas.

Daqui ſe podiaõ deduzir facilmente as formulas neceſſarias para determinar no movimento dos corpos graves o tempo do deſcenſo, as alturas donde cahem, e as velocidades adquiridas a cada inſtante Mas reſervamos iſto para a Dynamica. Aqui naõ ſe trata, ſenaõ do equi*l*íbo; e ſe temos principiado por eſtas noçoens, foi para fazer mais intelligivel a theorica dos centros de gravidade, que agora entramos a expôr.

De-

Definiçaõ do centro de gravidade, com o methodo de o determinar, quando os corpos estaõ em huma mesma linha recta.

89 POr quanto a gravidade exercita a sua acçaõ igualmente sobre todas as partes da materia, de que se compoem a massa de qualquer corpo, cada huma destas partes faz huma força igual para descer pela direcçaõ, que se encaminha ao centro da terra. De todas estas forças parciais unidas juntamente resulta o esforço geral, com que o corpo inteiro tende a caminhar para o mesmo centro, e este esforço total he o que chamamos *pezo* dos corpos.

90 He pois o pezo de qualquer corpo igual á quantidade de movimento, que a gravidade tende nelle imprimir continuamente em cada instante. Logo he proporcional á massa, porque a velocidade de todas as partes he igual.

Ora este pezo naõ póde ser sustentado, senaõ por huma potencia, cuja energia seja, quando menos, igual a elle. Logo póde o mesmo pezo considerar-se como huma potencia real, cuja acçaõ se exercita perpendicularmente ao horizonte; e conseguintemente dous, ou muitos pezos podem comparar-se entre si, e contrabalançar-se mutuamente, como todas as outras forças mechanicas.

Mas por causa do ligamento, com que as diversas partes de hum mesmo corpo se achaõ enlaçadas entre si, naõ póde huma obedecer ao impulso da gravidade, se todas as outras lhe naõ obedecerem ao mesmo tempo. Logo, sendo parallelas as direcçoens, pelas quais a gravidade sollicita todas as sobreditas partes, a resultante de todas deve passar por algum ponto intermedio, que he de alguma fórma o centro de reuniaõ de todas as forças particulares. Este ponto, unico em cada corpo, he o que chamamos *centro de gravidade.*

91 E como, sendo este ponto sustentado, o corpo fica necessariamente em equilibrio, porque a resultante se reduz entaõ a nada; tambem reciprocamente naõ póde o corpo ficar em equilibrio, se o dito ponto naõ for sustentado, porque entaõ terá effeito a resultante, e o corpo cahirá. Concluamos pois que *o centro de gravidade de hum corpo he hum ponto, no qual todo o pezo delle se concebe reunido e con-*

e concentrado, de maneira que sustentando este unico ponto, o corpo inteiro se sustentará em equilibrio em todos os casos.

92 Póde tambem dizer-se, que o centro de gravidade de qualquer systema de corpos he hum ponto, pelo qual passa sempre a resultante de todos os esforços particulares, que fazem as partes do systema em virtude da gravidade, seja qual for a situaçaõ do mesmo systema.

93 Para se determinar este ponto, basta pois considerar o systema em duas situaçoens differentes, e determinar para cada huma dellas a direcçaõ da resultante. Porque produzindo estas duas direcçoens, necessariamente haõ de concorrer, e o ponto do concurso será o centro de gravidade que buscamos.

Para nos convencermos disto, bastará demonstrar que em qualquer outra situaçaõ do systema a resultante passará sempre pelo ponto do concurso das duas primeiras. Para isso, sejaõ quantos corpos se quizerem M, P, Q (Fig. 16.), situados sobre a mesma linha recta, a qual supporemos inflexivel, e sem massa: e a fim de simplificar mais, consideraremos estes corpos, como outros tantos pontos, nos quais as suas massas estejaõ concentradas. Seja g a velocidade que a gravidade lhes imprime em hum tempo dado, em hum segundo por exemplo, pelas direcçoens Mm, Pp, Qq perpendiculares ao horizonte; e seraõ Mg, Pg, Qg as quantidades respectivas de movimento. Estas forças podendo ser consideradas, como outras tantas potencias, applicadas aos pontos M, P, Q, e parallelas entre si, tomaremos arbitrariamente hum ponto C no prolongamento da linha QM, e por elle faremos passar a recta Cq' perpendicular ás direcçoens das ditas potencias.

Isto posto, acharemos a distancia Cr' á direcçaõ da resultante, fazendo $Cr' = \frac{Mg.Cm' + Pg.Cp' + Qg.Cq'}{Mg + Pg + Qg}$ (n. 63.) $= \frac{M.Cm' + P.Cp' + Q.Cq'}{M + P + Q}$; donde pela natureza das linhas proporcionais acharemos a distancia do centro de gravidade R ao ponto C, ou $CR = \frac{M.CM + P.CP + Q.CQ}{M + P + Q}$. Este valor de CR naõ depende em maneira alguma da obliquidade da linha MQ a respeito da horizontal. Logo a resultanſultante deſte ſyſtema de corpos, paſſará ſempre pelo centro de gravidade que acabamos de determinar, ſeja qual for a ſituaçaõ do meſmo ſyſtema.

94 Diſto ſe ſegue, que *em qualquer numero de corpos, conſiderados como pontos, e ſituados ſobre a meſma linha, acharemos a diſtancia do centro de gravidade a qualquer ponto tomado na dita linha, multiplicando cada huma das maſſas pela ſua diſtancia ao meſmo ponto, e dividindo a ſoma dos productos pela ſoma das maſſas.*

95 Chamando pois *momento* o producto de qualquer maſſa pela ſua diſtancia a hum ponto, ou a huma linha, teremos ſempre a diſtancia do centro de gravidade ao meſmo ponto, ou á meſma linha, dividindo a ſoma dos momentos pela ſoma das maſſas.

Obſerve-ſe porém, que no caſo de eſtarem os corpos ſituados para huma e outra parte do ponto fixo, naõ deve tomar-ſe a ſoma total dos momentos, mas a differença das ſomas que ficaõ de huma e outra parte, ou, que vem a ſer o meſmo, na ſoma total dos momentos devem tomar-ſe como negativos os que ficarem para a outra parte do ponto fixo, a reſpeito dos que arbitrariamente ſe tomarem como poſitivos.

96 Obſerve-ſe tambem, que no caſo de ſerem os corpos, cujo centro commum de gravidade houvermos de procurar, todos homogeneos, e conſeguintemente de igual denſidade, como ſupporemos daqui por diante, podem ſubſtituir-ſe os volumes em lugar das maſſas, a fim de reduzir a indagaçaõ dos centros de gravidade a huma queſtaõ de pura Geometria.

Indagaçaõ do centro de gravidade, quando os corpos naõ eſtaõ na meſma linha, aindaque todos ſituados no meſmo plano.

97 SUpponhamos, que os tres corpos *M*, P, Q (Fig. 17.), conſiderados como pontos, em que ſe reunem os esforços particulares da gravidade das partes materiais de que a ſua maſſa ſe compoem, eſtaõ diſpoſtos em triangulo em hum meſmo plano. Entaõ por qualquer ponto *C* tomado no dito plano conduzindo huma recta horizontal *Cp*, e outra vertical *Cp'*, poderemos

mos tirar de cada hum dos pontos graves para estas duas rectas as perpendiculares Pp, Pp'; Mm, Mm'; Qq, Qq'. Por meio destas perpendiculares acharemos bem facilmente, que a resultante do systema triangular, considerado na sua posiçaõ actual, ha de passar a huma distancia

$$Rr' = \frac{M.Mm' + P.Pp' + Q.Qq'}{M + P + Q}.$$

E supposdo agora, que todo o systema faz hum quarto de revoluçaõ, de maneira que a horizontal Cp venha a ser vertical, acharemos do mesmo modo que a resultante deve passar a huma distancia

$$Rr = \frac{M.Mm + P.Pp + Q.Qq}{M + P + Q}.$$

Será pois determinado o centro de gravidade R. Mas falta mostrar, que em qualquer outra situaçaõ do systema, deve passar a resultante por este ponto, que temos achado.

Já sabemos (n. 57.), que a soma dos momentos em ordem a qualquer ponto da resultante se reduz necessariamente a nada; de sorte, que podemos segurarnos de que hum ponto pertence á dita resultante, todas as vezes que a soma dos momentos em ordem ao dito ponto for nenhuma. Logo, se AB (Fig. 18.) he a resultante de qualquer systema na primeira situaçaõ, e se em segunda posiçaõ perpendicular á primeira, a resultante he CD perpendicular a AB, bastará provar que a resultante em qualquer outra posiçaõ está necessariamente sujeita a passar pelo ponto do concurso G, ou, que vem a ser o mesmo, bastará provar que a soma dos momentos em ordem a qualquer linha EF, que passa pelo ponto G, he nenhuma.

98 Seja pois M hum dos pontos graves do systema, do qual se tirem as perpendiculares MP, MQ, MR aos tres eixos, que representaõ as nossas tres resultantes. Será pois o angulo $PGM = PGQ - MGQ$, e consequintemente $sen\, PGM = sen\, PGQ \cos MGQ - sen\, MGQ \cos PGQ$; donde tiraremos $\frac{MP}{GM} = sen\, PGQ.\frac{GQ}{GM} - \cos PGQ \frac{MQ}{GM}$; e por conseguinte será $PM = sen\, PGQ.\, MR - \cos PGQ.\, MQ$. Tomando pois o momento do ponto M em ordem ao eixo EF, teremos $M.\, PM = sen\, PGQ.\, M.\, MR - \cos PGQ.$

M.

$M . MQ$, e a ſoma dos momentos $\int M . PM = \mathit{sen}\ PGQ . \int M . MR - \mathit{cos}\ PGQ . \int M . MQ$. Porém AB, CD ſaõ duas reſultantes, e conſeguintemente a ſoma dos momentos reportados a cada huma dellas deve ſer nenhuma, iſto he, deve ſer $\int M . MR = 0$, e $\int M . MQ = 0$. Logo ſerá tambem $\int M . PM = 0$. Logo a ſoma dos momentos em ordem a EF he nenhuma, e por conſeguinte qualquer reſultante paſſa ſempre pelo ponto determinado pela interſecçaõ das duas primeiras.

Indagaçaõ do centro de gravidade, quando os corpos eſtaõ em planos differentes.

99 SEjaõ dous planos ABC, BCd (Fig. 19.) perpendiculares entre ſi, e ao horizonte. Se de cada hum dos pontos graves M, P, Q conduzirmos perpendiculares para cada hum deſtes dous planos, acharemos primeiramente a diſtancia Rr da reſultante ao plano ABC neſta primeira ſituaçaõ, tomando a ſoma dos momentos em ordem ao meſmo plano, e dividindo-a pela ſoma das maſſas (n. 66.), o que nos dará

$$Rr = \frac{M . Mm + P . Pp + Q . Qq}{M + P + Q}.$$

Depois por hum calculo ſemelhante acharemos a ſua diſtancia ao plano BCd, que he

$$Rr' = \frac{M . Mm' + P . Pp' + Q . Qq'}{M + P + Q}.$$

Mas com eſtas duas diſtancias naõ podemos ainda determinar, ſenaõ a reſultante, que ſabemos ſer perpendicular ao horizonte, como os planos ABC, BCd, e que deve paſſar pela interſecçaõ R das duas diſtancias. He verdade, que o centro de gravidade que buſcamos deve ſer hum dos pontos deſta reſultante; mas qual he?

Para o determinarmos, imaginaremos o ſyſtema revirado em huma ſituaçaõ perpendicular, de tal maneira que o plano horizontal aCd venha a ſer vertical; e neſta nova poſiçaõ a ſegunda reſultante paſſará a huma diſtancia deſte plano, a qual terá por valor a ſoma dos momentos a ella reportados dividida pela ſoma das maſſas.

100 Logo *para conhecer o centro de gravidade de qual-*

quer

quer systema, cujas partes estaõ situadas em planos differentes, he necessario suppor tres planos perpendiculares entre si; e a soma dos momentos tomados em ordem a cada hum dos planos dividida pela soma das massas dará a distancia respectiva do centro de gravidade a cada hum dos mesmos planos.

Huma vez conhecidas estas tres distancias, naõ he necessario mais para determinar o centro de gravidade. Faltaria porém alguma cousa a esta theorica, se naõ se mostrasse que a resultante em qualquer outra posiçaõ do systema deve necessariamente passar pelo centro de gravidade assim determinado. Para o demonstrar, basta fazer ver, que se a soma dos momentos tomados successivamente em ordem a tres planos, que passaõ pelo centro de gravidade, he nenhuma, a mesma soma tomada em ordem a qualquer outro plano que passar pelo mesmo ponto deve tambem ser nenhuma.

101 Sejaõ pois *AGC*, *AGB*, *CGB* (Fig. 20.) tres planos perpendiculares entre si, a cujo respeito a soma dos momentos he nenhuma. Seja outro plano qualquer *GVN*, que passe pelo centro de gravidade; seja M hum dos pontos graves do systema, do qual se conduza *MQ* perpendicular ao plano *CGB*, e do ponto de projecçaõ *Q* tire-se *QP* perpendicular á recta GB. Imagine-se depois disto hum plano *MQVN* perpendicular ao plano *GVN*, e neste plano conduza-se a recta *MN* perpendicular á sua intersecçaõ commua *NV*; a recta *QV* será perpendicular a *GV*, e o angulo *QVN* medirá a inclinaçaõ dos planos *CGB*, *GVN*.

Sendo tudo isto huma vez concebido, a demonstraçaõ naõ he difficultosa. Porém a fim de abbreviar, supponhamos $GP = x$, $PQ = y$, $MQ = z$, o angulo $VGB = a$, e o angulo $QVN = b$.

Teremos pois em primeiro lugar o angulo $QGV = QGP - a$, e conseguintemente $sen\ QGV = sen\ QGP\ cos\ a - sen\ a\ cos\ QGP$; donde se deduz $QV = y\ cos\ a - x\ sen\ a$.

Em segundo lugar teremos o angulo $MVN = b - QVM$, e $sen\ MVN = sen\ b\ cos\ QVM - sen\ QVM\ cos\ b$; donde se tirará $MN = sen\ b\ .\ QV - MQ\ .\ cos\ b = -x\ sen\ a\ sen\ b + y\ cos\ a\ sen\ b - z\ cos\ b$.

Sendo pois *MN* a perpendicular conduzida do ponto *M* para o plano *GVN*, teremos por soma dos momentos em ordem a este plano $\int M\ .\ MN = -sen\ a\ sen\ b\ .\int M\ .\ x + cos\ a\ sen\ b\ .\int M\ .\ y - cos\ b\ .\int M\ .\ z$.

E porque ſendo x, y, z as diſtancias reſpectivas do ponto M aos tres planos perpendiculares entre ſi, as ſomas dos momentos $\int M . x$, $\int M . y$, $\int M . z$ tomados em ordem aos meſmos planos ſaõ nenhumas, a ſoma dos momentos $\int M . MN$ referidos ao quarto plano qualquer GVN ſerá tambem nenhuma.

102 Depois de havermos aſſim deſenvolvido o methodo de determinar os centros de gravidade de qualquer ſyſtema de corpos ſituados no meſmo plano, ou em planos diverſos, e depois de havermos moſtrado que em cada corpo, e em cada ſyſtema de corpos o centro de gravidade he hum ponto unico, e ſempre o meſmo em todas as ſituaçoens poſſiveis: ſerá conveniente, que appliquemos agora eſtes principios á determinaçaõ do centro de gravidade nos corpos, que a Geometria nos enſina a medir e a conhecer. Eſta applicaçaõ, em quanto ao mais, naõ póde certamente ter-ſe por huma eſteril curioſidade. Nella ſe reunem duas ventagens, de trazer á lembrança as formulas mais uteis da Analyſe, e de ſervir de fundamento á Statica, cujo auxilio he de ſumma importancia nas Artes.

I.

Determinar o centro de gravidade das linhas.

103 SEja primeiramente huma linha recta AB (Fig. 21.), homogenea em todo o ſeu comprimento, e por conſequencia uniformemente pezada. He facil de ver, que o ſeu pezo total reſulta do pezo de cada hum dos ſeus elementos. Seja pois Mm hum deſtes elementos infinitamente pequenos, e ſeja A o ponto fixo, ao qual ſe reportem os momentos; $AM = x$, e $Mm = dx$.

Poſto iſto, acharemos a diſtancia do ponto A ao centro de gravidade, dividindo a ſoma dos momentos de todos os pequenos pezos Mm pela ſoma dos meſmos pezos. Logo ſerá $AG = \frac{\int x\,dx}{\int dx}$: porém $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, e $\int dx = x$, ſem conſtante, porque eſtes dois integrais ſe deſvanecem fazendo $x = 0$; logo $\frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{x}{2}$. Fazendo pois $x = AB$, a fim de acharmos o centro de gravidade da linha inteira AB,

AB, teremos $AG = \frac{AB}{2}$; ultimo refultado, que nos enfinaria, fe por outra parte o naõ viffemos evidentemente, que *o centro de gravidade de qualquer linha recta, uniformemente pezada, fe acha fempre no meio della.*

104 Se o pezo defta linha naõ foffe uniforme, o centro de gravidade naõ eftaria no meio della. Para fixar entaõ o ponto, que elle deve occupar, reprefentemos em geral por X a denfidade da linha em qualquer ponto M, fendo X huma funçaõ de x: e teremos $AG = \frac{\int X x dx}{\int X dx}$.

Supponhamos que a denfidade de cada ponto M he proporcional á diftancia AM. Nefte cafo ferá $AG = \frac{\int xx dx}{\int x dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AB$. Logo ferá o centro de gravidade aos dous terços da linha, contando defde o ponto fixo A.

II.

Determinar o centro de gravidade do perimetro dos polygonos.

105 Como o perimetro de qualquer polygono he formado pelo ajuntamento de muitas linhas rectas, facilmente fe póde determinar o feu centro de gravidade. Supponhamos pois as quatro linhas Mm, Nn, Pp, Qq (Fig. 22.), difpoftas de qualquer maneira. Eftá claro, que os feus centros particulares de gravidade fe achaõ no meio de cada huma, em a, b, c, f, e que eftes quatro pontos podem confiderar-fe, como carregados, cadahum do pezo total da fua linha.

Ifto fuppofto, acharemos o centro commum de gravidade dos fobreditos pontos (n. 97.), imaginando em hum mefmo plano duas rectas Aa', Aa'' perpendiculares entre fi, fobre as quais fe conduziráõ perpendiculares tiradas de cada hum dos pontos graves; e affim teremos

$$GG' = \frac{Mm.aa' + Nn.bb' + Pp.cc' + Qq.ff'}{Mm + Nn + Pp + Qq}$$

$$GG'' = \frac{Mm.aa'' + Nn.bb'' + Pp.cc'' + Qq.ff''}{Mm + Nn + Pp + Qq}.$$

Com eſtas duas diſtancias conheceremos pois em todos os caſos ſemelhantes o centro dos centros de gravidade G, de qualquer numero de linhas uniformemente pezadas, de que ſe componha o perimetro de hum polygono.

As meſmas formulas applicadas aos polygonos regulares dariaõ o centro de gravidade do perimetro no meſmo centro da figura; couſa, que naõ póde ter difficuldade alguma.

III.

Determinar o centro de gravidade de qualquer curva.

106 SEja a curva AMB (Fig. 23.), cujo centro de gravidade ſe pertende determinar. Supponhamos $CP = x$, $PM = y$, $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; e teremos $y\,ds$ por expreſſaõ do momento de Mm, tomado em ordem ao eixo CP, e $x\,ds$ em ordem ao outro eixo CQ. Logo ſerá determinado o centro de gravidade G da curva AMB pelas duas formulas $GG' = \frac{\int y\,ds}{s}$, $GG'' = \frac{\int x\,ds}{s}$, nas quais devem tomar-ſe os integrais de A até B.

107 Se a curva tiver dois arcos iguais e ſemelhantes AB, AB' (Fig. 24.), he evidente que o centro de gravidade deve achar-ſe no eixo CP. Por iſſo naõ he neceſſario entaõ mais doque calcular a diſtancia $CG = \frac{\int x\,ds}{s}$ $= \frac{\int x \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

108 Dando a formula $GG' = \frac{\int y\,ds}{s}$ a diſtancia do centro de gravidade da curva AMB á linha das abſciſſas CP (Fig. 23.), he facil de deduzir hum methodo differente do que ſe enſina na Geometria, para determinar o valor das ſuperficies curvas dos ſolidos de revoluçaõ. Porque cha-

chamando c a circumferencia do circulo, cujo diametro he 1, isto he, fazendo $c = 3,14159265358979 32$ &c, sabemos que $2c\int y ds$ he a formula geral desta especie de superficies, a qual por conseguinte exprime a superficie curva gerada pela rovoluçaõ de AMB ao redor do eixo CP.

Porém temos $2c.GG' = \frac{2c\int y ds}{s}$; logo $2c\int y ds = s.2c.GG' =$ ao producto da linha generante AMB pela circumferencia, que descreve o seu centro de gravidade.

109 Póde generalizar-se este resultado, e concluir-se que *girando quantas linhas quizermos, rectas ou curvas, ao redor de qualquer eixo, a superficie por ellas gerada será sempre igual ao producto da soma das linhas generantes pela circumferencia, que na mesma revoluçaõ descreve o seu centro commum de gravidade: com tanto que todas estas linhas estejaõ de huma mesma parte a respeito do eixo da revoluçaõ.* Havendo algumas porém, que estejaõ da outra parte, deverá diminuir-se a superficie, que ellas produzem, da superficie produzida pelas outras; e a differença dará a superficie do solido.

110 Daqui se infere hum methodo bem simples para achar o centro de gravidade de qualquer systema de linhas. Porque a distancia deste centro a huma recta tomada arbitrariamente se achará, fazendo revolver o systema ao redor da dita linha, e dividindo a soma das superficies produzidas, pela circumferencia cujo raio for igual á soma das linhas generantes.

E reciprocamente: Se por outra parte for conhecido o centro de gravidade de hum systema de linhas, será facil de conhecer a superficie do solido descrito pela sua revoluçaõ ao redor de qualquer recta, multiplicando a soma das linhas generantes pela circumferencia, que descreve o seu centro commum de gravidade.

111 Logo, se qualquer polygono symmetrico, ou regular $abfbk$, fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer linha recta AB (Fig. 25.), a superficie do solido descrito será igual ao producto do perimetro do polygono pela circumferencia, cujo raio for igual á perpendicular GG', conduzida do centro da figura para o eixo da revoluçaõ AB.

Logo tambem a revoluçaõ de hum circulo, ou de huma ellipse qualquer ACE (Fig. 26.), ao redor da sua tan-

tangente no ponto A, defcreverá huma fuperficie igual ao producto do perimetro da figura pela circumferencia, que defcreve o raio AC. Se o folido de revoluçaõ for gerado por hum circulo, entaõ ferá a fuperficie igual á de hum quadrado, que por lado tiver huma linha recta igual á circumferencia do mefmo circulo.

Em geral (Fig. 27. 28.): Se qualquer figura $abdc$ compofta de duas, ou de quatro partes iguais, e femelhantes ab, ac, cd, bd, fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer eixo AB, a fuperficie do folido, que refultar, ferá igual ao producto do perimetro $abdc$ pela circumferencia, cujo raio he GG', e cujo comprimento he $2c \,.\, GG'$.

Em fim, fe ao redor de qualquer ponto C (Fig. 29.) eftiverem difpoftas de huma maneira fymmetrica quantas figuras fe quizerem a, a'; b, b'; c, c', a fuperficie do folido gerado pela revoluçaõ do fyftema inteiro, ao redor de qualquer eixo AB, ferá igual ao producto da foma dos perimetros de todas as figuras pela circumferencia, cujo raio he CC', e cujo comprimento he $2c \,.\, CC'$.

As differentes Propofições, que acabamos de enunciar, podiaõ fer demonftradas directamente pelos unicos principios da Geometria. Mas effe modo de as deduzir eftá muito longe de ter toda a elegancia do methodo fundado na theorica dos centros de gravidade.

Exemplos.

112 I. Achar o centro de gravidade G do perimetro de qualquer triangulo ABC (Fig. 30.).

Bufque-fe primeiramente a diftancia defte centro ao lado AC, fazendo girar o triangulo ao redor delle, e dividindo a fuperficie, que defcrever, pela circumferencia, cujo raio he igual ao perimetro do mefmo triangulo. Achar-fe-há pois que AB defcreve huma pyramide conica recta, a qual tem por fuperficie $AB \,.\, \frac{1}{2}\, circ\, BD$, e que BC defcreve outra pyramide conica recta, cuja fuperficie he $BC \,.\, \frac{1}{2}\, circ\, BD$; logo

$$GG' = \frac{(AB + BC)\frac{1}{2}\, circ\, BD}{circ\,(AB + BC + AC)} = \frac{\frac{1}{2}(AB + BC)BD}{(AB + BC + AC)};$$

O

O principio dos momentos daria immediatamente o mesmo resultado, porque o momento do lado AB he $\frac{1}{2} AB \cdot BD$, e o do lado BC he $\frac{1}{2} BC \cdot BD$.

Busque-se depois por huma construcçaõ geometrica o ponto G: e para isso, seja E o meio da perpendicular BD, e conduza-se a recta GF parallela á base AC, e em distancia igual a GG'. Logo será $EF = \frac{1}{2} BD - GG' = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot AC}{AB + BC + AC}$. Dividindo pois a superficie do triangulo pelo seu perimetro, se achará a distancia EF, e será determinado o ponto F, pelo qual deve sempre passar a linha FG parallela á base AC.

Busque-se em fim por hum processo semelhante a recta KG parallela ao lado BC, e a sua intersecçaõ com FG determinará o ponto G, centro de gravidade do perimetro triangular ABC.

113 He verdade, que este centro podia tambem determinar-se de hum modo mais facil, e igualmente geral. Porque seja a o meio do lado AC, e b o meio de BC; e do centro de gravidade G (que se suppoem conhecido) tirem-se para os lados AC, BC as perpendiculares GG', GG''. Isto posto, será resolvido o Problema, se conhecermos as rectas aG', bG''. Para isso faremos estas duas proporções,

$$4AC : AB + BC - AC :: AB - BC : aG'$$
$$4BC : AB + AC - BC :: AB - AC : bG''.$$

114 II. *Achar o centro de gravidade G de qualquer arco circular AM* (Fig. 31.).

A sua distancia GG' ao raio AC se achará dividindo a superficie do segmento esferico, que descreve o arco AM na sua revoluçaõ ao redor de AP, pela circumferencia, cujo raio he igual ao comprimento do mesmo arco. Teremos pois em primeiro lugar $GG' = \frac{AP \cdot circ\ AC}{circ\ AM} = \frac{AP \cdot AC}{AM}$. Em segundo lugar, fazendo revoluçaõ o mesmo mo arco ao redor do eixo perpendicular BC, teremos $CG' = \frac{CQ . circ AC}{circ AM} = \frac{PM . AC}{AM}$. Logo para determinar o ponto G faremos as duas proporções seguintes.

O arco AM he para o seu seno verso AP, como o raio para a distancia GG' do centro de gravidade ao raio AC.

O arco AM he para o seu seno recto PM, como o raio para a distancia CG' do centro de gravidade ao eixo BC.

Bastará porém calcular huma destas distancias; porque bem se vê, que o centro de gravidade deve achar-se no raio CG, que divide o arco AM em duas partes iguais. Isto mesmo se demonstra pelas formulas precedentes, das quais se tira $\frac{GG'}{CG'} = \frac{AP}{AM}$; logo os triangulos CGG', APM saõ semelhantes, e o angulo $AMP = GCG' = \frac{1}{2} ACM$.

Quando houvermos pois de determinar o centro de gravidade G' de hum arco circular MAM, tiraremos hum raio CA, que o divida em partes iguais no ponto A, e sobre elle tomaremos a parte $CG' = \frac{AC . MPM}{MAM}$, isto he, *huma quarta proporcional ao arco, á sua corda, e ao raio.*

Donde se segue reciprocamente, que se por outra parte pudessemos de hum modo exacto determinar o centro de gravidade de hum arco de circulo, teriamos juntamente a rectificaçaõ rigorosa delle.

115 III. *Achar o centro de gravidade G de hum arco parabolico MAM dividido em duas partes iguais no vertice A (Fig. 32.).*

Seja o parametro $= 1$, e teremos pela equaçaõ da parabola $yy = x$. Logo $AG = \frac{\int yydy \sqrt{(1 + 4yy)}}{\int dy \sqrt{(1 + 4yy)}}$ - - - (n. 107.) $= \frac{\frac{1}{16} y (1 + 4yy)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16} \int dy \sqrt{(1 + 4yy)}}{\int dy \sqrt{(1 + 4yy)}} =$ $\frac{1}{16} . \frac{y (1 + 4yy)^{\frac{3}{2}}}{AM} - \frac{1}{16}$. Logo conduzindo a tangen-

te

te MT, e a normal MN, será $AG = \frac{1}{16} \cdot \frac{MT^3}{PM^2 . AM} - \frac{1}{16} = \frac{NT . MT}{8AM} - \frac{1}{16}$. Tomaremos pois huma quarta proporcional a $8AM$, NT, MT, da qual tiraremos a decima-sexta parte do parametro, para termos a distancia AG do centro de gravidade G ao vertice A.

116 IV. *Achar o centro de gravidade de hum arco cycloidal MAM, cujo circulo generante tem por diametro AB* (Fig. 33.).

Seja $AB = a$. Pela natureza desta curva teremos $AM^2 = s^2 = 4ax$. Logo será $AG = \frac{\int x\, ds}{s} = \frac{\int s^2\, ds}{4as} = \frac{s^3}{12as} = \frac{s^2}{12a} = \frac{4ax}{12a} = \frac{1}{3}x$. Está pois sempre o centro de gravidade a hum terço da abscissa AP, contando do vertice, e o da cycloide inteira a hum terço do diametro AB.

117 Se as linhas forem de natureza differente, ou naõ puderem exprimir-se por huma mesma equaçaõ, he necessario buscar o centro de gravidade particular de cadahuma, e depois considerallo como hum ponto, carregado de todo o pezo da sua linha. Estes centros combinados entre si daraõ o centro commum, que se busca. Eisaqui hum exemplo.

118 V. *Achar o centro de gravidade G' de hum arco de circulo MAM com a sua corda MM* (Fig. 34.).

Como o centro de gravidade G do arco MAM se determina pela distancia $CG = \frac{CA . MPM}{MAM}$, e como P he o centro de gravidade da corda MM, consideraremos os pontos G, P carregados dos pezos MAM, MPM, e acharemos a distancia $CG' = \frac{CG . MAM + CP . MPM}{MAM + MPM} = \frac{(CA + CP) MPM}{MAM + MPM}$. Donde se tira esta proporçaõ $MAM + MPM : MPM :: CA + CP : CG'$. O methodo geral (n. 110.) daria o mesmo resultado. Passemos ao centro de gravidade das superficies planas.

IV.

IV.

Determinar o centro de gravidade de qualquer ſuperficie plana.

119 SEja BM huma curva qualquer, reportada ao eixo AP (Fig. 35.), e ſeja $MPpm$ o elemento da ſuperficie do trapezio $BCPM$. O centro de gravidade R deſte elemento he ao meſmo tempo o ſeu centro de figura, e póde conſiderar-ſe carregado de todo o ſeu pezo ydx. Pelo que os momentos deſte pequeno rectangulo em ordem aos eixos perpendiculares AP, AQ ſeraõ $ydx \,.\, RR'$, e $ydx \,.\, RR''$: porém $RR' = \frac{1}{2}y$, e $RR'' = x$;

logo $GG' = \dfrac{\frac{1}{2}\int yy\,dx}{\int y\,dx}$, e $AG' = \dfrac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$. Bem entendido, que eſtes integrais devem tomar-ſe de B até M, ſendo a origem das abſciſſas em A.

120 Se imaginarmos, que a figura $BCPM$ faz huma revoluçaõ ao redor do eixo AP, o ſolido gerado terá por medida $c\int yy\,dx$. E porque o valor de GG', que temos achado, nos dá $2c \,.\, GG' \,.\, \int y\,dx = c\int yy\,dx$, concluiremos, que o ſolido formado pela revoluçaõ do eſpaço $BCPM$ ao redor do eixo AP he igual ao priſma recto, que tiver por baſe o meſmo eſpaço, e por altura a circumferencia deſcrita pelo ſeu centro de gravidade.

121 A meſma propriedade terá lugar, ſeja qual for a figura generante, e a ſua poſiçaõ a reſpeito do eixo. Supponhamos com effeito qualquer figura BCD (Fig. 36.), referida a hum eixo AP, e conduzamos huma ordenada PMM', que corte em M, e M' as partes inferior e ſuperior do perimetro da figura. Fazendo $AP = x$, $PM = y$, $PM' = y'$, ſerá $(y' - y)dx$ o elemento do eſpaço $BM'M$, $\dfrac{y' + y}{2}$ a diſtancia do ſeu centro de gravidade ao eixo AP, e $\dfrac{(y' + y)(y' - y)}{2}dx = \dfrac{y'y' - yy}{2}dx$ o ſeu momento em ordem ao meſmo eixo. Donde concluiremos $GG' = \dfrac{\int(y'y' - yy)\,dx}{2BCD}$, ou $2c \,.\, GG' \,.\, BCD =$

$= c\int y' y' dx - c\int yy dx$. Porém está claro que $c\int y' y' dx$ he a expressaõ do solido produzido pela revoluçaõ da parte superior da figura *BCD*, e que $c\int yy dx$ exprime igualmente o solido gerado pela revoluçaõ da parte inferior *BMD*. Logo a differença destes dous solidos dará evidentemente o solido produzido pela revoluçaõ da figura *BCD* ao redor do eixo *AP*.

122 Em fim, seja qual for o numero das figuras generantes, este methodo terá sempre a mesma applicaçaõ. Porque de huma parte, cada figura multiplicada pela circumferencia, que descreve o seu centro de gravidade, dá o solido por ella produzido na sua revoluçaõ; e da outra parte, a soma dos productos de cada figura pela circumferencia, que descreve o seu particular centro de gravidade, he igual á soma das figuras multiplicada pela circumferencia, que descreve o centro commum de gravidade, porque as circumferencias saõ proporcionais aos raios, e a soma dos productos de cada figura pela distancia do seu centro de gravidade ao eixo, he igual á soma das figuras multiplicada pela distancia do centro commum de gravidade ao mesmo eixo. Logo o producto total da soma das figuras multiplicada pela circumferencia, que descreve o centro commum de gravidade, dará a soma dos solidos produzidos pela revoluçaõ de cada huma das figuras. Deve pois ter-se por geralmente demonstrado o Theorema seguinte.

123 *Todas as vezes que huma, ou muitas figuras quaisquer, situadas no mesmo plano, girarem ao redor de hum eixo, tomado como se quizer no mesmo plano, a soma dos solidos por ellas produzidos na sua revoluçaõ, he igual á soma de todas as figuras, multiplicada pela circumferencia, que descreve o centro de gravidade de todo o systema.* Bem entendido, que se todas as figuras generantes naõ estiverem da mesma parte a respeito do eixo, deve tirar-se a soma dos solidos produzidos pelas figuras, que estaõ de huma parte, da soma dos solidos produzidos pelas figuras, que estaõ da outra; e a differença será o resultado que se procura.

Este Theorema, e o que acima demonstrámos (n. 109.), tem grande uso na Mechanica. Ambos saõ conhecidos pela denominaçaõ de *Theoremas do P. Guldin*, que foi o primeiro que os publicou em huma obra intitulada *Centrobaryca.*

124 Pe-

124 Pelo ultimo Theorema póde medir-se a solidez de todos os solidos gerados pela revoluçaõ de qualquer figura symmetrica, do mesmo modo que pelo primeiro temos medido as superficies curvas dos mesmos solidos, como se vê nos casos seguintes.

I. Se o polygono symmetrico da Fig. 25. fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer eixo $A B$, o solido que resultar terá por medida o producto da superficie do mesmo polygono multiplicada pela circumferencia do raio $G G'$.

II. Se o circulo $A C E$ (Fig. 26.) fizer huma revoluçaõ ao redor da sua tangente $A B$, o solido por elle produzido terá por medida a superficie do mesmo circulo multiplicada pela circumferencia. Sendo pois o raio $= a$, será o dito solido $= 2 a^3 c^2$.

III. Se huma ellipse (Fig. 27. 28.), ou qualquer outra figura composta de duas, ou de quatro partes iguais, semelhantes, e symmetricamente dispostas a respeito de hum ponto G, fizer huma revoluçaõ ao redor de qualquer linha $A B$, o solido que resultar será igual a hum prisma recto, que tenha por base a figura generante e por altura huma recta igual á circumferencia descrita pela revoluçaõ do ponto G.

IV. Em geral: Se a respeito de hum ponto C (Fig. 29.) estiverem quantas figuras se quizer, iguais, semelhantes, e distribuidas symmetricamente em roda delle, o solido produzido pela revoluçaõ de todo o systema ao redor de qualquer eixo $A B$, terá por medida a soma de todas as superficies generantes multiplicadas pela circumferencia descrita pelo raio $C' C$.

125 Reciprocamente, quando se tratar de conhecer o centro de gravidade de qualquer figura plana, esta se fará girar ao redor de qualquer eixo tomado arbitrariamente, e dividindo o solido que resultar pela superficie generante, e por $2 c$, o quociente será a distancia do centro de gravidade ao eixo de rotaçaõ. Achando pois outra distancia semelhante a hum segundo eixo tomado tambem arbitrariamente, o centro de gravidade será determinado, e conhecido.

Ha com tudo hum pequeno inconveniente na applicaçaõ deste methodo; e he, que para nos servirmos delle he necessario, que por outra parte conheçamos a medida dos solidos que pódem descrever as superficies, cujo centro

de

de gravidade queremos determinar. Faltando isso, será necessario recorrer ás formulas gerais acima dadas (n. 119.). Eisaqui algumas applicações, que daraõ nova luz a esta materia.

Exemplos.

126 I. *Achar o centro de gravidade de qualquer trapezio* $ABMP$ (Fig. 37.), *o de hum triangulo, ou de qualquer figura rectilinea.*

Já sabemos pela Geometria, que a pyramide conica truncada, que resulta da revoluçaõ deste trapezio ao redor do eixo AP, tem por valor $\frac{c}{3}AP(AB^2+AB.MP+MP^2)$, e que a superficie do trapezio se exprime por $\frac{1}{2}AP(AB+MP)$. Logo será a distancia - - - - - - - -

$$GG' = AG'' = \frac{\frac{c}{3}AP(AB^2+AB.MP+MP^2)}{2c\frac{1}{2}AP(AB+MP)}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{AB^2+AB.MP+MP^2}{AB+MP}$$

$$= \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}.\frac{MP^2}{AB+MP}.$$

Donde se vê, que este valor he absolutamente independente da linha AP.

Do mesmo modo sabemos, que a pyramide conica recta descrita pela revoluçaõ do triangulo BQM ao redor do eixo AQ, tem por valor $\frac{1}{3}BQ.c.QM^2 = \frac{1}{3}c.AP^2(MP-AB)$, e que o cylindro descrito pela revoluçaõ do rectangulo $APMQ$ ao redor do mesmo eixo tem por medida $c.AP.^2MP$. Logo o solido produzido pela revoluçaõ do trapezio $ABMP$ terá por expressaõ $c.AP^2.\left(\frac{2}{3}MP+\frac{1}{3}AB\right)$; e conseguintemente

tere-

teremos a distancia

$$GG'' = AG' = \frac{\frac{1}{3}c \,.\, AP^2 (AB + 2MP)}{2c \,.\, \frac{1}{2} AP (AB + MP)}$$

$$= \frac{1}{3} AP \,.\, \frac{AB + 2MP}{AB + MP}$$

$$= \frac{2}{3} AP - \frac{1}{3} \,.\, \frac{AP \,.\, AB}{AB + MP}.$$

He facil de ver, que estas formulas sempre tem lugar; seja qual for o angulo formado sobre as parallelas AB, MP pela secante AP, com tanto que haja a advertencia de tomar sempre GG' e GG'' respectivamente parallelas a AQ e AP. Logo por estas duas formulas determinaremos o centro de gravidade de qualquer trapezio.

127 Daqui se segue, que fazendo $AB = 0$, e convertendo-se o trapezio em hum triangulo AMP (Fig. 38.), o centro de gravidade se determinará facilmente tomando $AG' = \frac{2}{3} AP$, e conduzindo $G'G = \frac{1}{3} MP$, e parallela a MP.

Porem, se pelo ponto G assim determinado, e pelo ponto A imaginarmos huma recta AGF, teremos $AG' : AP$, ou $2 : 3 :: AG : AF :: GG' : FP$; logo $FG = \frac{1}{3} AF$, e $FP = \frac{1}{2} MP$. Isto nos dará huma construcçaõ muito simples, para determinar o centro de gravidade de qualquer triangulo AMP. Conduziremos a recta AF do vertice A para o meio F do lado opposto, na qual tomaremos a porçaõ FG, que seja huma terça parte della; e será G o centro procurado.

128 Seria facil de achar a mesma construcçaõ de hum modo ainda mais simples, que naõ suppoem o calculo precedente. Porque(Fig. 39.), como a recta AF conduzida do vertice A para o meio do lado opposto MP divide em partes iguais todas as paralielas a MP, passa por todos os centros de gravidade particulares dellas, e conseguintemente pelo centro de gravidade do mesmo triangulo. Pela mesma rasaõ, conduzindo MH do vertice M para o meio do lado

lado opposto AP, esta segunda recta passará tambem pelo centro de gravidade; o qual por conseguinte se achará no ponto G determinado pela intersecçaõ das linhas AF, MH. Mas para deduzir o valor de FG, tire-se a recta HF, que será parallela ao terceiro lado AM, e teremos $PH : PA$, ou $1 : 2 :: HF : AM :: GF : AG$; logo $FG = \frac{1}{3} AF$.

129 Agora, que cousa mais facil do que achar o centro de gravidade de qualquer figura rectilinea? Dividir-se-ha primeiramente em triangulos, e se buscaráõ os centros particulares de gravidade de todos elles: depois considerando estes centros, como pontos carregados do pezo dos seus triangulos, determinar-se-ha o centro commum de gravidade, que será o da figura proposta.

130 II. *Achar o centro de gravidade de hum semi-segmento circular* AMP (Fig. 40.), *e o do segmento inteiro.*

Fazendo $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$; teremos $yy = 2ax - xx$, e $\int yydx = \int(2axdx - xxdx) = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$, e por conseguinte $GG' = \frac{(a - \frac{1}{3}x)\frac{1}{2}x^2}{AMP}$.

Do mesmo modo teremos $\int xydx = \int[(x-a)dx . \sqrt{(2ax - xx)} + adx\sqrt{2ax - xx})] = -\frac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a . AMP$; logo $AG' = \frac{a . AMP - \frac{1}{3} PM^3}{AMP}$, ou $CG' = \frac{1}{3} . \frac{PM^3}{AMP}$.

O mesmo resultado se acharia, sem ter necessidade destas integrações, se fizessemos revolver successivamente o semi-segmento AMP ao redor dos eixos CA, CB, e medissemos as porções de esfera por elle produzidas.

131 Agora, para determinar o centro de gravidade de todo o segmento $MAMPM$, naõ he necessario mais do que a distancia $CG' = \frac{\frac{1}{3} PM^3}{AMP}$; cujo valor calculado pa-

ra

ra o femicirculo $B A B$ dará $\frac{4}{3} \cdot \frac{a}{c}$, que fe reduz proximamente a $\frac{11}{33} a$.

132 III. *Achar o centro de gravidade de qualquer sector circular* $M A M C$ (Fig. 40.).

Nefte Problema podemos fervirnos de qualquer dos tres modos feguintes. 1º. Podemos refolver o fector em duas partes, das quais feja huma o fegmento $M A M P M$, e a outra o triangulo $M C M$. A primeira tem o feu centro de gravidade em G', e a fegunda em G'''; logo o fector deve ter o feu em hum ponto r, de forte que feja

$$C r (M A M P M + M C M) = C G' . M A M P M + C G''' . M C M = \frac{2}{3} P M^3 + \frac{2}{3} C P . C P . P M = - - \frac{2}{3} P M (C P^2 + P M^2) = \frac{2}{3} P M . C M^2 ;$$ logo $$C r = \frac{\frac{2}{3} P M . C M^2}{A M . C M} = \frac{2}{3} \cdot \frac{M M . C M}{M A M}.$$

Donde, para determinar o centro de gravidade de hum fector circular em todos os cafos, teremos efta proporçaõ: *O arco* $M A M$ *he para a fua corda* $M M$, *como dous terços do raio para a diftancia do centro do circulo ao centro de gravidade do fector.*

2º. Podemos confiderar o fector, como formado por triangulos infinitamente pequenos $C N n$ (Fig. 41.), todos com o vertice no centro do circulo, cujos centros particulares de gravidade eftaráõ feguidamente fobre o arco $B E D$ defcrito com o raio $C B = \frac{2}{3} C M$. Affim naõ refta mais do que determinar o centro de gravidade do arco $B E D$ (n. 114), que fe achará tomando

$$C G = \frac{C B . B F D}{B E D} = \frac{2}{3} \cdot \frac{C M . M M}{M A M}.$$

3º. Podemos tambem fuppor, que o fector $C M A M$ faz huma revoluçaõ ao redor do eixo $C K$, perpendicular a $C A$. O folido produzido ferá huma efpecie de fector esferico, que terá por medida a fuperficie defcrita na mefma ma revoluçaõ MM . *circ* AC multiplicada pelo terço do raio. Logo teremos (n. 125.)

$$CG = \frac{MM . 2c . AC . \frac{1}{3} AC}{2c . MAM . \frac{1}{2} CM} = \frac{2}{3} . \frac{CM . MM}{MAM} .$$

133 IV. *Achar o centro de gravidade de huma parabola* AM *de qualquer ordem que seja* (Fig. 42.) .

Suppondo o parametro $= 1$, a equaçaõ desta curva $y^m = x$ nos dará $dx = m y^{m-1} dy$, e conseguintemente $\int y dx = \int m y^m dy = \frac{m}{m+1} y^{m+1}$; logo

$$GG' = \frac{\frac{1}{2} \int yy dx}{\int y dx} = \frac{\frac{m}{m+2} y^{m+2}}{\frac{2m}{m+1} y^{m+1}} = \frac{m+1}{2m+4} . PM.$$

$$GG'' = \frac{\int xy dx}{\int y dx} = \frac{\frac{m}{2m+1} y^{2m+1}}{\frac{m}{m+1} y^{m+1}} = \frac{m+1}{2m+1} . AP.$$

Estas formulas na parabola ordinaria daõ $GG' = \frac{3}{8} MP$, e $GG'' = \frac{3}{5} AP$; valores , que daraõ sempre a conhecer facilmente o seu centro de gravidade.

134 V. *Achar o centro de gravidade de hum segmento elliptico qualquer* $AMPM$ (Fig. 43.) .

Considerando os momentos em ordem ao segundo eixo , e fazendo $CP = x$, $PM = y$, $CA = a$, $CB = b$, acharemos $CG = \frac{\int -y x dx}{\int -y dx}$. Porém $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$; logo $x dx = - \frac{aa}{bb} y dy$, e $\int -y x dx = \frac{1}{3} . \frac{a^2}{b^2} y^3$;

logo $CG = \frac{\frac{2}{3} . \frac{a^2}{b^2} . PM^3}{MAMPM} = \frac{\frac{2}{3} . \frac{a^3}{b^3} PM^3}{\frac{a}{b} . MAMPM} = \frac{2}{3} . \frac{PN^3}{NANPN}$.

Don-

Donde se mostra, que *o centro de gravidade do segmento elliptico A M P M he o mesmo que o do segmento circular N A N P N.*

O mesmo succede com o centro de gravidade do sector elliptico *C M A M C* a respeito do sector circular *C N A N C*, cujo arco he sempre determinado pelo prolongamento de *M M*.

V.

Determinar o centro de gravidade das superficies curvas.

135 NAõ póde haver difficuldade nesta indagaçaõ, quando se trata da superficie lateral de hum prisma. Porque bem se vê, que o centro de gravidade desta especie de superficies deve necessariamente achar-se no meio da linha, que descreve o centro de gravidade da base, na formaçaõ do prisma. Passemos pois aos solidos de revoluçaõ.

136 Seja huma superficie curva, produzida pela revoluçaõ do arco *M B* ao redor do eixo *A P* (Fig. 44.). He evidente, que o seu centro de gravidade *G* deve estar no mesmo eixo, e que para ser determinado, naõ he necessario mais do que conhecer a sua distancia á origem das abscissas, que supporemos em *A*.

Está claro tambem, que o elemento *M m* descreve a superficie de huma pyramide conica truncada, a qual tem por medida $2cyds$, e por centro de gravidade o ponto *r* no meio de *P p*. Este ponto póde considerar-se carregado de todo o pezo da superficie $2cyds$, e o seu momento em ordem ao ponto *A* origem das abscissas será $2cxyds$. Logo a formula $AG = \frac{\int xyds}{\int yds}$ fará sempre conhecer os centros de gravidade das superficies curvas dos solidos de revoluçaõ.

Exemplos.

I. A *Achar o centro de gravidade da superficie curva de huma pyramide conica recta MAM* (Fig.45.).

Fa-

Fazendo $AP = x$, $PM = y$, e o angulo $MAP = a$, teremos primeiramente $y = x\ tang\, a$, e $ds = \frac{dx}{cos\, a}$, e conseguintemente $AG = \frac{\int xx\,dx}{\int x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}AP.$ Donde se collige, que *o centro de gravidade da superficie conica he o mesmo que o do triangulo M A M.*

Com igual facilidade se podia chegar ao mesmo resultado, imaginando a superficie conica dividida em huma infinidade de pequenos triangulos iguais e semelhantes MAm, cujos centros particulares de gravidade se achaõ todos em huma circumferencia descrita do pólo A com o raio $AD = \frac{2}{3}AM$, e o centro de gravidade desta circumferencia se achará conseguintemente em G na distancia $AG = \frac{2}{3}AP.$

II. *Achar o centro de gravidade da superficie de hum segmento esferico, e em geral de qualquer zona* (Fig. 44.).

Sendo a o raio da esfera, e B a origem das abscissas, teremos $y\,ds = a\,dx$, e conseguintemente $BG = \frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{1}{2}x.$ Donde se vê geralmente, que *o centro de gravidade da superficie de hum segmento esferico, ou de qualquer zona, está no meio da porçaõ do eixo comprehendida por elle, ou por ella.*

III. *Achar o centro de gravidade da superficie convexa de hum solido paraboloide* (Fig. 44.).

Seja BM hum arco da parabola, que pela sua revoluçaõ descreve o solido paraboloide, e seja B a origem das abscissas. Fazendo o parametro $= 1$, será a equaçaõ da parabola generante $yy = x$, e acharemos o centro de gravidade da superficie convexa do paraboloide, pela formula seguinte

E $BG =$

$$BG = \frac{\int y^3 dy \sqrt{(1+4yy)}}{\int y\, dy \sqrt{(1+4yy)}} = - - - - - -$$

$$\frac{\frac{1}{5}\left[(1+4yy)^{\frac{5}{2}} - 1\right] - \frac{1}{3}\left[(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - 1\right]}{4 \cdot \frac{1}{3}\left[(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - 1\right]}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{yy(1+4yy)^{\frac{3}{2}}}{(1+4yy)^{\frac{3}{2}} - 1} - \frac{1}{10}.$$

VI.

Determinar o centro de gravidade de qualquer ſolido.

137 IMaginemos o ſolido partido por ſecções infinitamente vezinhas, e parallelas á hum plano tomado arbitrariamente. Chamando T qualquer deſtas ſecções, e x a ſua diſtancia ao dito plano, ſerá $T\,dx$ a expreſſaõ do elemento do ſolido comprehendido entre duas ſecções contiguas, e $Tx\,dx$ a expreſſaõ do ſeu momento. Logo a diſtancia do centro de gravidade do ſolido ao plano referido ſerá geralmente repreſentada pela formula $\frac{\int Tx\,dx}{\int T\,dx}$, na qual $\int T\,dx$ he o meſmo que o volume do ſolido propoſto. Repetindo o meſmo calculo a reſpeito de outros dous planos perpendiculares entre ſi, e ao primeiro, teremos tres diſtancias ao centro de gravidade, que he o que baſta para o determinar.

Exemplos.

138 I. *Achar o centro de gravidade dos priſmas, dos cylindros rectos e obliquos, das pyramides angulares e conicas; e geralmente de todos os polyedros.*

Sendo as ſecções dos priſmas, e cylindros, todas paralrallelas e iguais ás bases oppostas, está claro que o seu centro commum de gravidade deve achar-se no meio da linha recta, que passa pelos centros particulares de gravidade das mesmas bases. Donde naõ tem difficuldade alguma este primeiro caso.

O segundo naõ he menos facil. Porque todos os corpos, gerados á maneira das pyramides, podem ser partidos por secções parallelas, e semelhantes á base (Fig. 46.): e entaõ a recta AD, conduzida do vertice para o centro de gravidade da base D, deve evidentemente passar pelo centro de gravidade de cada huma das secções, e conseguintemente pelo do solido proposto. Logo para conhecer a distancia AG, imaginaremos o pezo de cada secçaõ reunido no seu centro particular de gravidade em hum ponto D da recta AD, que chamaremos x; e advertindo, que todas estas secções saõ proporcionais aos quadrados das suas distancias respectivas ao ponto do vertice A, teremos

$$AG = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}AD.$$

Logo *o centro de gravidade dos solidos pyramidais estará sempre aos tres quartos da distancia AD, contada do vertice para o centro de gravidade da base.* E com este conhecimento, ficará muito facil a indagaçaõ do centro de gravidade de toda a sorte de polyedros.

139 II. *Achar em particular o centro de gravidade de quaisquer solidos de revoluçaõ.*

Tomando qualquer segmento perpendicular ao eixo de revoluçaõ, he manifesto que o seu centro de gravidade deve achar-se no mesmo eixo. Porém a expressaõ do elemento comprehendido entre duas secções infinitamente vezinhas he $cyydx$; logo a distancia do centro de gravidade do solido á origem das abscissas será representada geralmente pela formula $\frac{\int yyxdx}{\int yydx}$.

Supponhamos, por exemplo, que nos pedem o centro de gravidade de qualquer segmento esferico (Fig. 44.). Nesse caso teremos $yy = 2ax - xx$; donde resulta - - -

$\int yyxdx = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$, e $\int yydx = axx - \frac{1}{3}x^3$; logo a diſtancia do centro de gravidade de qualquer ſegmento esferico ao vertice ſerá conhecida pela formula

$$BG = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}x.$$

Deſta ſorte, fazendo $x = 2a$, para termos o centro de gravidade da esfera inteira, que por outra parte ſabemos que coincide com o centro da figura, acharemos $BG = a$; e fazendo $x = a$, teremos $BG = \frac{5}{8}a$, iſto he, ſerá o centro de gravidade de hum hemisferio aos ſinco oitavos do raio, contando do vertice.

III. *Achar o centro de gravidade de qualquer ſector esferico CMAB* (Fig. 47.).

Todo o ſector esferico póde reſolver-ſe em duas partes, huma das quais he o ſegmento esferico AMB, e a outra huma pyramide conica recta CBM. O ſegmento tem o centro de gravidade G na diſtancia $AG = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}x$, e a pyramide conica o centro de gravidade G^I na diſtancia $AG^I = \frac{3x + a}{4}$. A ſolidez do ſegmento tem por valor $\frac{c}{3}(3axx - x^3)$, a da pyramide conica $\frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx)$, e a do ſector $\frac{2}{3}ca^2x$. Logo tomando os momentos em ordem ao ponto A, a fim de determinarmos o centro de gravidade G^{II} do ſector inteiro, teremos $\frac{2}{3}ca^2x.\ AG^{II} = \frac{c}{3}(3ax^2 - x^3)\left(\frac{8a - 3x}{12a - 4x}x\right) + \frac{c}{3}(a - x)(2ax - x^2)\left(\frac{3x + a}{4}\right)$; e fazendo as reduções neceſſarias;

A

$AG'' = \frac{2a+3x}{8}$; expressaõ, que igualmente nos dá o centro de gravidade do hemisferio aos sinco oitavos do raio contados do vertice, como achámos no exemplo precedente.

O mesmo resultado se achará, concebendo o sector esferico, como formado de huma infinidade de pyramides, as quais tenhaõ por vertice commum o centro C. Porque os centros particulares de gravidade de todas ellas se acharáõ em huma superficie esferica descrita do mesmo centro C com hum raio igual aos tres quartos de CM, e o centro de gravidade da dita superficie se achará na distancia $\frac{2a+3x}{8}$ a respeito do ponto A.

140 IV. *Achar o centro de gravidade dos solidos paraboloides, hyperboloides, e ellipsoides.*

Em quanto ao paraboloide, sendo a equaçaõ da parabola generante $yy = x$, teremos immediatamente $AG = \frac{\int xxdx}{\int xdx} = \frac{2}{3}AP$.

Na hyperbola he $yy = 2ax + xx$ (Fig 48.); e substituindo este valor na formula geral, teremos - - - - -

$$AG = \frac{\int(2ax + xx)xdx}{\int(2ax + xx)dx} = \frac{8a+3x}{12a+4x}x.$$

Donde se vê, que tomando huma abscissa x infinita, he $AG = \frac{3}{4}x$; e ao contrario, tomando a abscissa infinitamente pequena, he $AG = \frac{2}{3}x$; de sorte, que AG se acha sempre entre os dous terços, e tres quartos de AP.

Pelo que respeita ao centro de gravidade de qualquer segmento ellipsoidal, feito por huma secçaõ perpendicular ao eixo, he sempre o mesmo que o do segmento correspondente da esfera circunscrita, e se achará da mesma maneira.

Mas, se a secçaõ do ellipsoide, em lugar de ser perpendicular ao eixo, for obliqua de qualquer sorte, como MPN (Fig. 49.), de que modo determinaremos entaõ

o

o centro de gravidade do ſegmento $MSNP$, que della reſulta?

Supponhamos conduzido pelo centro C hum plano elliptico perpendicular ao plano da ſecçaõ, o qual divide o ſegmento propoſto em duas partes iguais, e ſemelhantes, e pelo ponto P meio de MN tiremos o ſemidiametro CPS. Iſto poſto, demonſtra-ſe na Geometria que a ſecçaõ MPN he huma ellipſe, que tem por eixo maior a recta MN, e que he ſemelhante ás outras ſecções, cujos eixos reſpectivos ſaõ as duplas ordenadas ao ſemidiametro CS. Donde ſe ſegue, que o centro de gravidade G deve acharſe no ſemidiametro CS; e que, fazendo $SP = x$, $PM = y$, $CS = m$, ſerá a diſtancia deſte centro ao ponto S,

$$SG = \frac{\int PM^2\, x\, dx}{\int PM^2\, dx} = \frac{\int x\, dx\, (2mx - xx)}{\int dx\, (2mx - xx)} = \frac{8m - 3x}{12m - 4x}\, x;$$

valor perfeitamente ſemelhante ao que achámos para o ſegmento, que reſulta de huma ſecçaõ perpendicular ao eixo maior.

141 V. *Dado hum ſemicylindro recto elevado ſobre o ſemicirculo* DAB, *achar o centro de gravidade do ſolido, formado pela ſecçaõ de hum plano elliptico*, DBE *ao qual ſe dá o nome de unha cylindrica* (Fig. 50.).

He manifeſto, que o centro procurado deve achar-ſe neceſſariamente em algum ponto do plano triangular CEA, que divide a unha em duas partes iguais, e ſemelhantes entre ſi. Sendo pois GG' huma perpendicular conduzida do centro de gravidade G para o raio CA, deveremos primeiramente determinar CG'.

Para iſſo ſupporemos o ſolido dividido por ſecções parallelas ao diametro DB, e perpendiculares á baſe. Cada ſecçaõ ſerá hum rectangulo $MPNnpm$, que terá por baſe $2y$, e por altura $Pp = \frac{bx}{a}$, fazendo $CA = a$, $AE = b$, e $CP = x$. Pelo que, fazendo ao ordinario $PM = y = \sqrt{(aa - xx)}$, teremos a ſuperficie de qualquer deſtas ſecções $= \frac{2b}{a}\, xy$, a ſolidez do elemento comprehendido entre duas ſecções contiguas $= \frac{2b}{a}\, xy\, dx$, e o ſeu momento em ordem a hum plano que paſſe por BD perpendicudicularmente á baſe $= \frac{2b}{a} xxy\,dx$. Logo teremos

$$CG' = \frac{\int xxy\,dx}{\int xy\,dx} = \frac{\int xx\,dx\sqrt{(aa-xx)}}{\int x\,dx\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Porém $\int xx\,dx\sqrt{(aa-xx)} = -\frac{1}{4}x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ $+\frac{a^2}{4}\int dx\sqrt{(aa-xx)} = -\frac{1}{4}x(aa-xx)^{\frac{3}{2}} +$ $\frac{1}{4}a^2 . CDMP$. Logo para o ſolido inteiro ſerá o integral $\frac{1}{4}a^2 . CDMAC$, ou $\frac{1}{8}a^3 . AMD$. Do meſmo modo $\int x\,dx\sqrt{(aa-xx)} = \frac{1}{3}\left[a^3 - (aa-xx)^{\frac{3}{2}}\right]$, e o ſeu valor total $\frac{1}{3}a^3$; (donde concluiremos de paſſagem, que a ſolidez da unha he $\frac{2b}{a} . \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^2 b$). Logo finalmente $CG' = \frac{\frac{1}{8}a^3 : AMD}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{3}{8}AMD$, ou proximamente $\frac{33}{56}AC$.

Falta agora determinar a outra diſtancia GG'. Para eſſe effeito, imaginemos o ſolido dividido por ſecções parallelas á ſua baſe, cada huma das quaes ſerá hum ſegmento $mpna$ igual á ſua projecçaõ $MPNA$. Chamando pois z a perpendicular Aa, teremos $GG' = \frac{\int MPNA . z\,dz}{\int MPNA . dz}$: porém $\int MPNA . dz$ he tambem a ſolidez da unha, que temos achado $= \frac{2}{3}a^2 b$; logo, advertindo que $z = \frac{bx}{a}$, teremos $\int MPNA . z\,dz = \frac{bb}{aa}\int MPNA . x\,dx = \frac{bb}{aa}$

(M

$\left(MPNA.\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\, d.MPNA\right)$: mas por outra parte he $d.MPNA = -2y\,dx$; logo $\int MPNA.x\,dx = MPNA.\frac{x^2}{2} + \int x^2\,dx\,\sqrt{(aa-xx)} = MPNA.\frac{xx}{2} - \frac{1}{4}x(aa-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}a^2 : CDMP$. O valor deste integral tomado para todo o solido dará $\frac{1}{8}a^3.AMD$; logo $GG' = \frac{\frac{3b}{aa}.\frac{1}{8}a^3}{\frac{2}{3}a^2b}AMD = \frac{3}{16}.\frac{b}{a}AMD = \frac{3}{16}$ da quarta parte da circumferencia, que descreveria o raio EA.

Deste calculo se tira $CG' : G'G :: \frac{3}{8} : \frac{3b}{16a} :: a : \frac{b}{2}$; logo o centro de gravidade G está na recta CGK, conduzida do centro C para o meio K da linha AE. E com effeito esta recta passa por todos os centros particulares de gravidade das secções rectangulares $MmNn$, que formaõ a unha; logo deve passar pelo centro commum de gravidade de todas ellas, que he manifestamente o centro de gravidade da mesma unha. Assim para o determinar, basta tomar CG' igual aos tres oitavos da quarta parte da circumferencia da base, e tirar pelo ponto G' huma perpendicular á mesma base, a qual cortará a linha CK no centro procurado G.

142 Por tudo o que até aqui temos expendido, está claro, que naõ há linha, nem superficie, nem solido algum, cujo centro de gravidade se naõ possa achar, todas as vezes que tivermos a sua equaçaõ. Naõ succede porém o mesmo, quando hum solido, por exemplo, he de tal sorte irregular, que naõ póde calcular-se o seu volume, senaõ approximadamente; porque entaõ naõ poderemos tambem conseguir para o centro de gravidade, mais do que huma determinaçaõ mais, ou menos approximada, conforme a do volume.

Para isso consideramos o solido dividido em partes tais, que possaõ reduzir-se sem erro sensivel aos solidos prismaticos,

maticos, ou a quaifquer outros corpos geometricos, cujo centro de gravidade nos he conhecido. Feita efta refoluçaõ, tomamos a foma dos momentos de todas as partes em ordem a hum plano determinado, e a dividimos pela foma das mefmas partes, ifto he, pelo volume do folido, para conhecermos a diftancia do centro de gravidade ao mefmo plano.

E fe o corpo naõ for fymmetrico, repetiremos o mefmo calculo a refpeito de outros dous planos perpendiculares entre fi, e ao primeiro, a fim de determinarmos ao menos proximamente o centro commum de gravidade. Para conpenfarmos a falta de exactidaõ neftes refultados, será conveniente, que entaõ confideremos o centro de gravidade, naõ já como hum ponto mathematico, mas como huma pequena esfera defcrita do ponto achado como centro, e com hum raio tanto mais pequeno, quanto for mais approximado o calculo, que fegundo as differentes circumftancias houvermos praticado.

Extracto de outro methodo para determinar os centros de gravidade.

143 NAs Memorias da Academia Real das Sciencias fe acha hum methodo muito fimples, pelo qual fe defcobrem geralmente todas as formulas, já calculadas para os centros de gravidade. Como he naõ fómente agradavel, mas tambem inftructivo, o chegar aos mefmos refultados por caminhos differentes, indicaremos aqui o que M. Clairaut traçou em huma pequena Memoria, que fe contêm no volume de 1731. Eifaqui o fundamento.

O centro commum de gravidade de dous corpos fe acha dividindo a linha, que ajunta os feus centros particulares de gravidade, na rafaõ inverfa dos feus pezos.

Suppofto efte principio, confidera o Autor em qualquer fuperficie hum dos feus elementos infinitamente pequenos, e tomando o feu centro de gravidade, como he fempre muito facil, fuppoem conduzida huma recta defte ponto para o centro de gravidade procurado. Depois divide efta linha na rafaõ inverfa dos pezos da fuperficie inteira e do feu elemento; donde tira a formula dos centros de gravidade de todas as fuperficies. Ex-

Exemplos.

I. SEja qualquer curva *MAM* (Fig. 51.), dividida igualmente em duas pelo eixo *AP*. He claro, que o ſeu centro de gravidade deve achar-ſe na linha *AP*: ſupponhamos, que em *G*. O ſeu elemento *MmmM* tem o centro de gravidade no meio de *Pp*, e por ſer *Pp* infinitamente pequena, póde ſuppor-ſe em P. Seja *g* o centro de gravidade da ſuperficie *mAm*, e conſeguintemente *Gg* a differencial, ou fluxaõ de *AG*: Fazendo $AG = u$, $AP = x$, $PM = y$, teremos Gg (du) : gP, ou GP ($x - u$) : : $MmmM$ ($2ydx$) : MAM ($2\int ydx$); donde ſe deduz $du\int ydx = xydx - uydx$, ou $uydx + du\int ydx = xydx$, cujo integral $u\int ydx = \int xydx$ nos dará $u = AG = \dfrac{\int xydx}{\int ydx}$ (n. 119.).

II. Seja qualquer eſpaço *APM* comprehendido entre a abſciſſa *AP*, a ordenada *PM*, e o arco *AM* (Fig. 52.). Perguntaõ-ſe as formulas do ſeu centro de gravidade.

Supponhamos primeiramente, que eſte eſpaço varía de huma quantidade infinitamente pequena *MmpP*, cujo centro de gravidade *O* eſtará no meio de *PM*. Depois ſupponhamos que o eſpaço propoſto *APM* tem o ſeu centro de gravidade em qualquer ponto *G*, e conduzamos a recta *GO*. O centro procurado deve eſtar em hum dos pontos *g* deſta linha.

Para determinarmos eſte ponto, dividiremos *GO* de maneira, que ſeja $Gg : gO : : MmpP : APM$; e depois diſſo abaixando ſobre *AP* as perpendiculares GG', gg', e conduzindo *GR* parallela a *AP*, teremos $Gg : gO$, ou $Gg : GO : : G'g' : G'P' : : MmpP : APM$.

Suppondo pois $AG' = u$, $GG' = t$, $AP = x$, $PM = y$, ſerá $G'g' = du$, $gb = dt$, $Pp = dx$, $PO = \frac{1}{2}y$; e teremos na proporçaõ precedente $Gg : GO : : du : x - u : : ydx : \int ydx$; donde concluiremos igualmente $u = AG' = \dfrac{\int xydx}{\int ydx}$.

Iſto poſto, os triangulos ſemelhantes *Ggb*, *GOR* daráõ $Gb : GR : : gb : OR$, ou algebricamente $du : x - u : : dt : \frac{1}{2}y - t : : ydx : \int ydx$; logo $dt\int ydx = \frac{1}{2}yydx -$

$tydx$, ou $dt\int dx + tydx = \frac{1}{2}yydx$; e integrando, $t\int ydx = \frac{1}{2}\int yydx$. Donde finalmente concluiremos $t =$

$$GG' = \frac{\frac{1}{2}\int yydx}{\int ydx} \ (\text{n. } 119.).$$

III. Seja AM hum arco de qualquer curva (Fig. 53.). Devemos achar as formulas necessarias para determinar geralmente o seu centro de gravidade.

Seja G o centro procurado, e M o do elemento Mm; divida-se MG em hum ponto g na rasaõ de Mm a AM; conduzaõ-se as parallelas, como na figura precedente, e conservando as mesmas denominaçoens, teremos $Gb : GR :: gb : MR$, ou $du : x - u :: dt : y - t$, e $Gg : GM :: G'g' : G'P :: Mm : AM$; logo $du : x - u :: ds : s$, e $dt : y - t :: ds : s$; e conseguintemente $u = AG' = \frac{\int xds}{s}$, e $t = GG' = \frac{\int yds}{s}$, formulas perfeitamente semelhantes ás que já achámos (n. 106.).

Seguindo o mesmo methodo, naõ póde haver difficuldade em calcular as formulas, que determinaõ o centro de gravidade dos solidos.

Applicaçoens da Theorica dos centros de gravidade.

A Theorica dos centros de gravidade naõ he de pura especulaçaõ, como muitas outras. Serve para explicar muitos phenomenos da natureza, principalmente os que dizem respeito á estabilidade dos corpos. Por isso será conveniente, que ajuntemos aqui algumas illustraçoens, que sirvaõ de base a estas applicaçoens.

144 Por quanto o centro de gravidade he aquelle ponto unico, onde todo o pezo de hum corpo se acha reunido para o sollicitar ao movimento, está claro que naõ póde o corpo pôr-se em quietaçaõ, se naõ for sustentado o seu centro de gravidade. Como porém naõ he possivel sustentallo immediatamente, naõ podemos esperar que hum

corpo

corpo ſe ponha em equilibrio, ſenaõ no caſo de ſe achar o centro de gravidade na linha vertical, que paſſa pelo ponto que o ſuſtenta.

Suppondo pois, que qualquer ſolido *BB* (Fig. 54.) eſtá ſuſpendido no ponto *C*, ou ſuſtentado no ponto *A*, naõ poderá haver equilibrio, nem quietaçaõ por conſeguinte, ſe *CG*, ou *AG* naõ eſtiverem na vertical, que paſſa pelo centro de gravidade *G*. Em todos os outros caſos haverá o ſeu effeito a gravidade, ſem que nada ſe opponha á ſua acçaõ, de maneira que a deſtrua; e reſultará huma eſpecie de rotaçaõ. Mas quando o ponto de ſuſpenſaõ, ou de ſuſtentaçaõ for verticalmente oppoſto á direcçaõ do centro de gravidade, todo o esforço com que elle he ſollicitado ao movimento ſerá aniquilado, e terá lugar o equilibrio.

145 Reciprocamente: Todas as vezes que qualquer corpo eſtiver em equilibrio, concluiremos que o ſeu centro de gravidade he ſuſtentado por huma linha vertical. Aſſim, para determinarmos de hum modo ſimples o centro de gravidade de qualquer ſolido, pollo-hemos em equilibrio ſobre a eſquina de hum priſma triangular, e notaremos ſobre a ſua ſuperficie a linha de interſecçaõ que ella faz com a eſquina do priſma. Depois, tornaremos a pollo em outra ſituaçaõ ſobre a meſma eſquina, de ſorte que igualmente fique em equilibrio, e notaremos outra linha como a precedente na meſma ſuperficie. Eſtas duas linhas ſe cruzaráõ em hum ponto, do qual imaginaremos huma perpendicular conduzida para a profundidade do corpo, e eſſa paſſando pelo centro de gravidade moſtrará a direcçaõ, pela qual he neceſſario ſuſpender, ou ſuſtentar o corpo, para haver equilibrio.

Em falta de priſma triangular, podemos ſervirnos da borda de huma meza, ſobre a qual poremos o corpo, de maneira que eſteja proximo a cahir, e notaremos com hum lapis a linha do contacto. Depois tornaremos a pollo em ſituaçaõ obliqua á primeira, mas igualmente proximo a cahir, e teremos outra linha que ſe cruzará com a primeira. O mais he facil de ſe entender.

Tambem póde ſuſpender-ſe o corpo por qualquer dos ſeus pontos, e depois de eſtar em quietaçaõ ſuppoem-ſe huma vertical conduzida pelo ponto de ſuſpenſaõ a travez do corpo. Tornando a ſuſpendello por outro ponto, imagina-ſe outra vertical, que vai cortar a primeira, e o centro

tro

tro de gravidade se achará sempre no ponto do concurso.

146 Examinemos agora a condiçaõ do equilibrio, quando hum corpo he sustentado por dous pontos. He necessario, em geral, que todo o esforço do seu pezo seja destruido pela resistencia dos dous pontos de sustentaçaõ. Porém isso naõ póde ter lugar, senaõ quando o centro de gravidade estiver no plano vertical, que passa pelos ditos dous pontos. Em qualquer outra situaçaõ, naõ seria o corpo embaraçado de girar ao redor do eixo, que repousa sobre os dous pontos de apoyo, antes ao redor delle faria oscillaçoens innumeraveis, se a fricçaõ, e a resistencia do ar, naõ o reduzissem finalmente á situaçaõ, que convem ao equilibrio.

147 Neste caso naõ he difficil de determinar a carga respectiva dos dous pontos, em que o corpo se sustenta. Seja *G* o centro de gravidade de hum corpo, cujo pezo se considera todo concentrado nelle, e actuando pela direcçaõ perpendicular *Gg* (Fig. 55.). Resolva-se esta potencia em outras duas parallelas *Aa*, *Bb* que passem pelos pontos *A*, *B*; e conduzindo qualquer recta *agb*, cujas partes seraõ conhecidas, far-se-haõ estas duas proporçoens: *ab* he para *bg* como o pezo total do corpo para a parte que sustenta o ponto *A*, e *ab* he para *ag* como o pezo do mesmo corpo para a carga do ponto *B*.

148 Se hum corpo for sustentado por tres pontos *A*, *B*, *C* (Fig. 56.), que naõ existirem em linha recta, será absolutamente immovel; e nesse caso poderemos calcular pelo methodo seguinte a carga de cada hum dos pontos, em que se sustenta.

Imaginemos hum plano *ABC*, que passe pelos tres pontos dados, e encontre em *G* a vertical *Gg* conduzida pelo centro de gravidade. E chamando *G* o pezo do corpo, e *A*, *B*, *C* as cargas respectivas dos tres pontos dados, resolvamos a potencia *G* em outras duas, que passem por *C*, e por *D*; e teremos primeiramente

$$DC : G :: DG : C = \frac{DG}{DC} G :: GC : D = \frac{GC}{DC} G.$$

Depois resolvendo a potencia *D* em outras duas, que passem por *A*, e por *B*, teremos

$$AB : \frac{GC}{DC} G :: AD : B = \frac{AD.GC}{AB.DC} G :: DB : A = \frac{DB.GC}{AB.DC} G.$$

O

O meſmo reſultado ſe podia conſeguir, imaginando dous planos verticais que deixaſſem para huma meſma parte os tres apoyos, e o centro de gravidade. Porque entaõ, chamando a, b, c, g as diſtancias dos apoyos A, B, C e do centro de gravidade G a hum dos planos, e a', $b'c'$, g' as diſtancias reſpectivas ao outro, teriamos as tres equaçoens ſeguintes

$$Aa + Bb + Cc = Gg$$
$$Aa' + Bb' + Cc' = Gg'$$
$$A + B + C = G,$$

pelas quais facilmente ſe determinariaõ os valores de A, B, C.

149 Mas, ſe o corpo eſtiver poſto ſobre hum plano horizontal, quais devem ſer as condiçoens do ſeu equilibrio?

I. Se elle naõ aſſentar ſobre o plano, ſenaõ por huma das ſuas extremidades, ſerá neceſſario que a vertical que paſſa pelo centro de gravidade G, paſſe tambem pelo ponto de contacto C (Fig. 57.). Faltando eſta condiçaõ, cahirá neceſſariamente o corpo para a parte da dita vertical; e ao contrario, ſendo a vertical dirigida ao ponto C, deve o corpo ficar em deſcanço, porque a força que o ſollicita ao movimento por eſſa direcçaõ he deſtruida pela oppoſiçaõ diametral do plano, e por outra parte naõ ha mais raſaõ para cahir para huma parte do que para a outra.

He verdade, que o menor aballo do plano, que o mais leve aſſopro póde deſordenar eſte equilibrio, principalmente ſe o corpo tiver altura conſideravel, e aſſentar ſobre huma ponta muito aguda. Mas he, porque entaõ huma potencia eſtranha, por pequena que ſeja, vem ajuntarſe com a da gravidade, e ſollicita o corpo por huma nova reſultante; circunſtancia, de que preſcindimos aqui. Concluamos pois, que para eſtabelecer o equilibrio de hum corpo ſobre huma das ſuas pontas, he neſſario que eſta ponta, e o centro de gravidade eſtejaõ na meſma vertical.

II. Se o corpo aſſentar ſobre qualquer plano por huma das ſuas faces, he neceſſario para o caſo do equilibrio que a vertical GC (Fig. 58.), que paſſa pelo centro de gravidade, paſſe tambem por algum dos pontos da baſe, e de outra ſorte cahirá o corpo para a parte da meſma vertical.

Deſte modo he, que as muralhas ſe ſuſtentaõ perpendicularmente ao horizonte, ainda que as pedras naõ eſtejaõ ligadas entre ſi, com tanto que eſtejaõ bem a prumo. Naõ

po-

poderaõ cahir já mais, em quanto a vertical, que paſſa pelo ſeu centro de gravidade ſe apoyar ſobre a baſe; e por eſſa raſaõ a eſtabilidade dos edificios depende muito da groſſura dos alicerſes.

Eſta eſtabilidade ſerá tambem tanto mais forte, quanto as paredes forem menos elevadas, ſendo todas as mais couſas iguais. Porque ſe forem de altura conſideravel, a mais leve inclinaçaõ fará cahir facilmente fóra da baſe a vertical, que paſſa pelo centro de gravidade. E por iſſo ſerá inevitavel a ruina, ſe á força de argamaſſa, de gatos de ferro, e de outros meios ſemelhantes, naõ ſe oppuſer huma reſiſtencia proporcionada ao esforço da reſultante.

Supponhamos com effeito, que he *GC* (Fig. 59.) a vertical, que paſſa pelo centro de gravidade; e reſolvamos o ſeu esforço em outros dous, hum *GF* ao longo do muro, e o outro *GE* perpendicular ao meſmo muro. O primeiro ſerá deſtruido pela reſiſtencia dos alicerſes, e o ſegundo naõ o póde ſer, ſenaõ pelo ligamento dos materiais; porque entaõ faz a parede as vezes de huma alavanca, tanto mais favoravel ao esforço *GE*, quanto mais inclinada. Será logo neceſſaria em *A* huma reſiſtencia tanto mais forte, quanto for o edificio menos a prumo; por onde ſe faz palpavel a utilidade dos alicerſes profundos, e bem aſſentados.

150 III. Se o corpo aſſentar por muitas faces ſobre hum plano horizontal, ſerà neceſſario para haver de ſuſtentar-ſe, que a vertical, que paſſa pelo centro de gravidade, paſſe tambem por qualquer das faces, ou por entre ellas, de ſorte que lhe naõ fiquem todas para huma meſma parte. Faltando eſtas duas condiçoens, naõ póde a reſultante reſolver-ſe em tantas potencias parallelas, quantos ſaõ os pontos do contacto; logo naõ ſerá deſtruida totalmente, e por conſeguinte cahirá o corpo ſobre o plano, que o ſuſtenta.

Seja, por exemplo, o corpo *M* apoyado ſobre hum plano horizontal em *A*, e *B* (Fig. 60.). Para que elle ſe conſerve em equilibrio, he neceſſario que a vertical conduzida pelo ſeu centro de gravidade paſſe por hum dos pontos da linha *AB*. Se eſtiveſſe apoyado em *A*, *B*, *C*, ſeria neceſſario que a meſma vertical naõ cahiſſe fóra do triangulo *ABC* (Fig. 61.); e ſe *A*, *B*, *C*, foſſem quaiſquer

quer ſuperficies que ſerviſſem de baſes ao corpo N, pela meſma raſaõ ſeria neceſſario que a vertical ſobredita naõ cahiſſe fóra da figura triangular formada pelas tangentes das tres baſes.

151 Imaginemos agora huma maſſa da fórma *AGB* (Fig. 62.), que ſegundo as condiçoens que acabámos de expôr, eſteja em equilibrio ſobre as duas baſes *A* e *B*, e ſuppônhamos que tem o centro de gravidade em *G*. O ſeu pezo obrará pela vertical *GC*, e forcejando por ſeparar para a direita e para a eſquerda as partes, que ſe oppoem á deſcida do ponto *G*, empregará toda a ſua energia em precipitar-lhes a queda. Logo, ſe o corpo for flexivel até hum certo ponto, o esforço do centro de gravidade o fará dobrar, até que a reſiſtencia das partes lateraes ſe opponha a novos gráos de inflexaõ; e entaõ tudo ſe paſſará, como ſe o corpo ſe tiveſſe tornado perfeitamente duro.

Saõ muito frequentes os exemplos, que neſta parte vemos na natureza; porque todos os corpos tem hum certo gráo de flexibilidade, ou maior, ou menor. Nas cordas ſobre tudo obſervamos eſte phenomeno; e por iſſo naõ podem jámais eſtender-ſe exactamente em linha recta em qualquer ſituaçaõ, que naõ ſeja a vertical. Por mais força que ſe empregue, ſempre conſervaõ certa inflexaõ, que principalmente ſe manifeſta no meio dellas. As meſmas vigas, por pouco que ſejaõ compridas, e carregadas, ſe encurvaõ e abatem ſenſivelmente no meio, quando apoyaõ ſómente pelas extremidades; e por iſſo he muitas vezes neceſſario eſcorallas com pontaletes, para prevenir a ruptura.

A eſtabilidade, e firmeza de hum corpo, aſſentado ſobre hum plano horizontal, depende, como temos dito, da poſiçaõ da ſua reſultante a reſpeito do plano, que o ſuſtenta. Logo, quanto mais ſe chegar eſta reſultante para o centro de gravidade das ſuperficies, pelas quais aſſenta o corpo, tanto maior ſerá a firmeza; e pelo contrario, quanto mais ſe apartar do meſmo centro, tanto ſerá maior o perigo de cahir.

Iſto he o que todos os dias experimentamos de innumeraveis maneiras differentes. Quando eſtamos em pé, e bem direitos, a vertical conduzida pelo noſſo centro de gravidade paſſa exactamente por entre os noſſos pés; vertical, que em particular ſe chama *linha de direcçaõ*. Quando caminhamos, quaſi todos os noſſos movimentos ſe ordenaõ a con-

conservar esta linha na mesma posiçaõ ; e quando nos sustentamos sobre a ponta de hum pé , he necessario que a resultante venha a passar por este ponto de apoyo. Em geral naõ podemos jámais cahir , senaõ quando a linha de direcçaõ deixa todos os pontos , em que nos estribamos , para huma mesma parte.

Quando levamos em huma maõ algum pezo consideravel , o nosso centro de gravidade muda de lugar , e conseguintemente a linha de direcçaõ o muda tambem , e nós sentimo-nos arrebatar para a parte do pezo que levamos. Entaõ naõ nos he taõ livre o andar ; e se o pezo he grande, corremos risco de cahir. Se pela maior parte prevenimos estas quedas , he porque usando de hum mechanismo tanto mais admiravel , quanto mais natural , mais pronto , e menos penoso , fazemos bem de pressa tornar para a parte contraria o centro de gravidade , estendendo simplesmente o outro braço. Quando queremos caminhar levando da direita e da esquerda pezos iguais , he-nos mais facil , porque pezos iguais de huma e outra parte naõ alteraõ a linha de direcçaõ , e o centro de gravidade naõ fatiga desigualmente as partes do nosso corpo.

Para trepar ao cume de huma montanha escarpada , inclinamo-nos para diante , apoyando sobre as pontas dos pés , a fim de contrabalançar o pezo do corpo que nos sollicita para traz: e pela rasaõ contraria, apoyamos sobre os calcanhares , quando descemos. Em geral , os nossos movimentos particulares , e a fricçaõ sobre tudo , contribuem grandemente para modificarmos os effeitos do nosso pezo , e para conservarmos huma estabilidade constante no meio de tudo o que tende a destruilla. Mas a experiencia , e a habituaçaõ ensinaõ mais nesta parte do que todos os livros de Mechanica juntos. Vede a destreza , com que os borlantins , e os grumetes , guardaõ pontualmente o equilibrio, em situaçoens difficultosas, onde os mais habeis Mechanicos se achariaõ muito embaraçados.

Do movimento uniforme dos centros de gravidade.

152 SEja hum systema qualquer de corpos perfeitamente livres , que naõ sendo ligados de fórma alguma entre si possaõ obedecer ás impulsões , que sepa-

paradamente se lhes derem: pergunta-se qual será o movimento do centro de gravidade de todo o systema, se cada huma das partes se mover com huma velocidade particular.

Bem se vê neste caso, que o centro de gravidade deve mudar de situaçaõ, e mover-se á medida que o estado do systema varia. Aqui naõ he hum ponto fixo, e immudavel, que reuna de alguma sorte todas as forças de hum mesmo corpo, ou de hum systema cujas partes estejaõ ligadas entre si. He hum ponto movel, cuja direcçaõ, e velocidade dependem das que tiver cada huma das partes do systema.

Já sabemos, que sendo as partes de hum systema todas animadas de movimentos iguais, e parallelos para a mesma parte, deve a resultante geral passar pelo centro de gravidade (n. 93.), e obrigallo conseguintemente a mover-se com huma velocidade igual, e parallela á do systema. Logo *quando muitas forças iguais, e parallelas actúaõ juntamente, e pela mesma direcçaõ, sobre as partes de hum systema, o centro de gravidade deve mover-se em linha recta com toda a velocidade commua do systema, e pela mesma direcçaõ.*

Semelhantemente, *se o centro de gravidade de qualquer systema, cujas partes forem solidamente ligadas entre si, se mover pela acçaõ de qualquer potencia, o seu movimento se distribuirá igualmente por todo o systema; e cada parte se moverá com huma velocidade igual, e parallela á delle.*

153 Logo, em geral: *Se qualquer força actuar sobre hum corpo, por huma direcçaõ que passe pelo centro de gravidade, todas as partes delle se moveráõ por direcções parallelas á do dito centro.* E para conhecermos a sua velocidade, dividiremos pela massa do mesmo corpo a quantidade de movimento, que a potencia lhe houver imprimido.

Com tanto pois que as direcções de differentes potencias concorraõ todas no centro de gravidade, ou que ao menos passe por elle a resultante geral das mesmas potencias, o movimento do corpo será parallelo á direcçaõ da resultante, e a velocidade de cada parte será igual á resultante dividida pela massa do movel; bem entendido, que entaõ suppoem-se as partes do systema solidamente unidas entre si.

154 Em conformidade disto, busquemos as propriedades, que deve ter o movimento do centro de gravidade G de qualquer numero de corpos A, B, C &c (Fig. 63.), movidos uniformemente pelas direcções parallelas aA, bB, cC com as velocidades respectivas V, V', V''.

I. Deve este centro mover-se por huma recta GG' parallela ás direções dos mesmos corpos. Porque sendo na origem do movimento a soma dos momentos nenhuma, se elles se tomarem em ordem a qualquer plano, que passar por GG', he necessario que seja tambem nenhuma na continuação do movimento, porquanto a distancia dos corpos ao plano sobredito he constantemente a mesma na hypothese presente. Acha-se pois o centro de gravidade a cada instante sobre todos os planos, que passaõ por GG'; logo naõ se aparta da sua intersecçaõ commua, que he a mesma linha GG'.

II. O seu movimento deve ser uniforme. Porque supondo que $abgc$ seja o perfil de hum plano perpendicular ás direções dos moveis, teremos no principio do movimento

$$(A+B+C)\,Gg = A\,.\,Aa + B\,.\,Bb + C\,.\,Cc;$$

e depois de qualquer tempo t, havendo os corpos corrido os espaços Vt, $V't$, $V''t$, de sorte que se achem em A', B', C', o seu centro de gravidade se achará em G'; logo tomando os momentos em ordem ao mesmo plano vertical $abgc$, teremos

$$(A+B+C)\,G'g = A\,.\,A'a + B\,.\,B'b + C\,.\,C'c.$$

Diminuindo desta equaçaõ a precedente, acharemos

$$(A+B+C)\,GG' = A\,.\,AA' + B\,.\,BB' + C\,.\,CC' = A\,.\,Vt + B\,.\,V't + C\,.\,V''t = (AV + BV' + CV'')\,t.$$

Logo o espaço GG' corrido pelo centro de gravidade he proporcional ao tempo; e conseguintemente, he uniforme o seu movimento.

III. A quantidade de movimento do centro de gravidade he igual á soma das quantidades de movimento de todos os corpos. Porque sendo v a velocidade do sobredito centro, teremos $(A+B+C)\,v = AV + BV' + CV''$: porém $A+B+C$ exprime a massa do centro de gravidade; logo o primeiro membro da equaçaõ exprime a sua quantidade de movimento. O segundo membro he evidentemente a soma das quantidades de movimento dos tres moveis. Logo ha igualdade perfeita entre a quantidade de movimento do centro de gravidade, e a soma das quantidades de movimento dos tres moveis.

He necessario porém ter a advertencia, quando algum dos corpos se mover por direcçaõ opposta á dos outros, de tirar a sua quantidade de movimento da soma das quantidades de movimento dos outros, para obter a do centro commum de gravidade.

Disto se segue, que se as differentes partes de hum systema tiverem velocidades iguais, parallelas, e para a mesma parte, a velocidade do centro de gravidade deve ser igual á de cada huma das partes, como já dissemos.

155 Segue-se tambem, que sendo as partes de qualquer systema de corpos postas em movimento por forças parallelas, deve o centro de gravidade mover-se com a velocidade, que teria adquirido pela acçaõ simultanea das ditas forças, se todas lhe fossem applicadas immediatamente. Porque entaõ será a sua quantidade de movimento igual á soma das quantidades de movimento de todas as partes do systema.

E dahi se segue em fim, que o centro de gravidade de hum systema deve ficar immovel, todas as vezes que a soma das quantidades de movimento dos corpos, que se movem para huma parte, for igual á soma das quantidades de movimento dos que se movem para a parte opposta.

156 Mas que succederá, se todas as partes do systema forem postas em movimento por quaisquer potencias, que as obriguem a mover-se por quaisquer direcções?

Temos visto, que toda a potencia póde resolver-se em outras tres parallelas a tres linhas dadas de posiçaõ. Chamemos estas linhas X, Y, Z. Logo podemos substituir ao movimento de cada parte de hum systema outros tres movimentos parallelos a estas linhas. E porque em virtude dos movimentos parallelos a X, deve mover-se o centro de gravidade, como se todas as potencias parallelas a X lhe fossem applicadas immediatamente, e o mesmo succede a respeito das potencias parallelas a Y, e Z; está claro, que o centro de gravidade se moverá realmente, como se todas estas forças parallelas a X, Y, Z obrassem immediatamente sobre elle, isto he, como se elle só fosse sollicitado a mover-se pela resultante geral de todas as potencias applicadas ás differentes partes do systema.

Logo se a resultante geral de todas as potencias applicadas ás differentes partes de hum systema for nenhuma, o centro commum de gravidade ficará immovel.

Sup-

Suppomos aqui, que as partes do ſyſtema naõ ſaõ ligadas entre ſi. Se o forem, naõ deixará de ter o centro de gravidade o meſmo movimento, que teria ſe todas as potencias actuaſſem immediatamente ſobre elle, como ſe verá na Dynamica.

Dos centros de gravidade, e dos eixos de equilibrio, ſendo a gravidade variavel, e concorrendo todas as ſuas direcções em hum meſmo ponto.

157 SE a acçaõ da gravidade foſſe por toda a parte a meſma, e ſe as linhas de direcçaõ foſſem exactamente parallelas, naõ haveria nada que ajuntar aos principios, que temos eſtabelecido, para determinar os centros de gravidade. Mas as direcções da gravidade concorrem todas no centro da terra, e a ſua força diminue na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias ao meſmo centro, como ſe moſtra naõ ſomente pelas obſervações, mas tambem pelo calculo. E por eſſa raſaõ deveremos ajuntar alguma couſa á theorica precedente, para a fazermos completa. Os ſeus reſultados com tudo naõ produziráõ erro ſenſivel, em quanto a meſma theorica ſe applicar a uſos ſemelhantes aos que temos referido circunſtanciadamente. Bem ſe vê, que em hum meſmo corpo, ou ſyſtema de corpos, tais como nós os temos conſiderado, todas as partes gravîtaõ por linhas parallelas, e com huma energia, que póde ſuppor-ſe igual ſem erro ſenſivel. Por eſſa raſaõ podemos ſervirnos das formulas demonſtradas nos artigos precedentes, para determinarmos o centro de gravidade em caſos ſemelhantes.

Mas para reduzirmos eſta theorica á hypotheſe, que verdadeiramente tem lugar na natureza, moſtraremos agora o methodo de determinar os centros de gravidade, ou para dizer melhor os *eixos de equilibrio*, na ſuppoſiçaõ de concorrerem as direcções dos graves em hum ponto determinado.

158 Seja pois C o ponto do concurſo (Fig. 64.), e ſejaõ M, M', M'' quantos pontos materiais ſe quizerem, ſituados porém no meſmo plano que o centro C; e ſuppo-

nhamos,

nhamos, que a acçaõ da gravidade lhes imprime em hum inſtante quantidades de movimento dirigidas para o meſmo centro, e repreſentadas por Mm, $M'm'$, $M''m''$. He manifeſto, que a ſua reſultante ſerá neceſſariamente dirigida para o meſmo ponto C, e que a direcçaõ della ſerá conhecida, ſe acharmos o valor do angulo ACR, que ella fórma com qualquer recta CA dada de poſiçaõ.

He tambem evidente, que ſendo ſuſtentado qualquer ponto deſta reſultante, por huma força diametralmente oppoſta, todo o ſyſtema ſe ſuſtentará igualmente, e que eſte equilibrio ſe conſervará naõ ſomente na ſituaçaõ actual do ſyſtema, mas em todas as ſituações que póde ter, fazendo huma revoluçaõ ao redor da linha CR; e por iſſo damos a eſta linha o nome de *eixo de equilibrio.*

Como nas differentes ſituações de hum corpo naõ paſſa ſempre o eixo de equilibrio por hum meſmo ponto delle, póde dizer-ſe que entaõ naõ tem centro algum de gravidade. Neſte caſo ſomos reduzidos a indagar o eixo de equilibrio, e o pezo do corpo, os quais ambos variaõ á medida que varía a diſtancia ao centro.

159 Supponhamos pois, que a gravidade actúa na raſaõ directa da diſtancia, de maneira que ſendo g a velocidade que communica aos corpos na diſtancia a do centro C (Fig. 64.), ſeja $\frac{gx}{a}$ a velocidade communicada na diſtancia x. Entaõ a velocidade, que receberá o ponto M, ſerá $\frac{g}{a}CM$, e a ſua quantidade de movimento ſerá $\frac{g}{a}CM.M$; logo teremos $Mm = \frac{g}{a}CM.M$, e pela meſma raſaõ

$$M'm' = \frac{g}{a}CM'.M', \text{ e } M''m'' = \frac{g}{a}CM''.M''.$$

Sejaõ agora duas rectas quaiſquer CA, CB perpendiculares entre ſi, e reſolva-ſe cada força Mm em outras duas Mp, Mq parallelas reſpectivamente ás ditas rectas. A reſultante de todas as forças parallelas a CA ſerá $= Mq + M'q' + M''q''$ (n. 63.), e a reſultante das forças parallelas a $CB = Mp + M'p' + M''p''$. E porque já ſabemos, que a reſultante geral RC deve paſſar pelo ponto C, naõ temos mais que tomar $CR' = Mq + M'q' + M''q''$, e $CR'' = Mp + M'p' + M''p''$, a fim de podermos completar o rectangulo $R'R''$, que determinará o valor, e a direcçaõ da resultante procurada; e por conseguinte conheceremos o eixo de equilibrio, e o pezo do systema.

Isto posto, os triangulos semelhantes daraõ $CM : Mm$, ou $CM : \frac{g}{a} CM.M$, ou $a : gM :: MP : Mp =$ - - - $\frac{gM.MP}{a} :: CP : mp = \frac{gM.CP}{a}$. Logo teremos

$$CR' = \frac{g}{a}(M.CP + M'.CP' + M''.CP''),$$

$$CR'' = \frac{g}{a}(M.MP + M'.M'P' + M''.M''P'');$$

$$\frac{RR'}{CR'} = tang\ RCR' = \frac{M.MP + M.M'P' + M''.M''P''}{M.CP + M'.CP' + M''.CP''};$$

formula, que finalmente dará sempre a conhecer a posicaõ do eixo de equilibrio na supposiçaõ precedente.

Sendo G o centro de gravidade no caso das direcções parallelas, teremos estas duas equações (n. 97.):

$(M + M' + M'')\,GG' = M.MP + M'.M'P' + M''.M''P''$.

$(M + M' + M'')\,CG' = M.MQ + M'.M'Q' + M''.M''Q''$.

Logo $\frac{GG'}{CG'} = \frac{RR'}{CR'}$, e conseguintemente o ponto G se acha na recta CR, e o eixo de equilibrio CR passa pelo centro ordinario de gravidade. O mesmo succederá em qualquer outra situaçaõ do systema.

Logo na hypothese presente, ainda que a gravidade seja dirigida para hum ponto fixo, e que a sua força cresça proporcionalmente ás distancias do mesmo ponto, naõ deixaráõ por isso os eixos de equilibrio de passar todos pelo centro de gravidade, como se a força da gravidade fosse constante, e as suas direcções parallelas. Somente o pezo do systema variará, segundo as differentes situações. E se naõ demonstramos esta notavel propriedade, senaõ no caso de se achar todo o systema em hum plano, que passe pelo centro das forças, he porque com os principios, que havemos exposto, póde facilmente extender-se a demonstraçaõ ao outro caso.

160 Exceptuando esta primeira hypothese da gravidade dire-

directamente proporcional ás distancias do centro das forças, em todas as mais naõ póde ser o centro de gravidade hum ponto fixo, mas será variavel segundo as posições diversas do systema; e por isso seremos entaõ obrigados a buscar o eixo de equilibrio, e o pezo do systema para cada huma das situações differentes, que tiver o mesmo systema. Mas para reduzirmos as nossas indagações á hypothese, que parece ser geralmente a da natureza, supporemos aqui que a gravidade obra sobre os corpos na rasaõ inversa do quadrado das distancias ao centro das forças.

161 Sendo pois g a velocidade, que a força central póde imprimir em hum instante em qualquer parte do systema, situada na distancia f do centro C (Fig. 64.), será $\frac{gff}{xx}$ a velocidade, que a mesma força no mesmo instante deverá imprimir em qualquer outra parte, que estiver na distancia x; porque he $\frac{1}{ff} : \frac{1}{xx} :: g : \frac{gff}{xx}$.

Isto posto, teremos $Mm = \frac{gff.M}{MC^2}$, $M'm' = \frac{gff.M'}{M'C^2}$, $M''m'' = \frac{gff.M''}{M''C^2}$; e por conseguinte

$$CR' = gff\left(\frac{M.CP}{MC^3} + \frac{M'.CP'}{M'C^3} + \frac{M''.CP''}{M''C^3}\right),$$

$$RR' = gff\left(\frac{M.MP}{MC^3} + \frac{M'.M'P'}{M'C^3} + \frac{M''.M''P''}{M''C^3}\right).$$

Logo a tangente do angulo ACR, que faz o eixo de equilibrio RC com a linha CA, se achará pela equaçaõ seguinte

$$\text{tang}\, ACR = \frac{\frac{M.MP}{MC^3} + \frac{M'.M'P'}{M'C^3} + \frac{M''.M''P''}{M''C^3}}{\frac{M.CP}{MC^3} + \frac{M'.CP'}{M'C^3} + \frac{M''.CP''}{M''C^3}}.$$

E o valor da resultante RC, ou da força necessaria a cada instante para sustentar o systema pelo seu eixo de equilibrio, se determinará, fazendo uso da expressaõ seguinte.

$$RC = gff \sqrt{\left[\left(\frac{M.CP}{MC^3} + \frac{M'.CP'}{M'C^3} + \frac{M''.CP''}{M''C^3} \right)^2 + \left(\frac{M.MP}{MC^3} + \frac{M'.M'P'}{M'C^3} + \frac{M''.M''P''}{M''C^3} \right)^2 \right]}.$$

Temos pois determinado naõ ſomente a poſiçaõ do eixo de equilibrio, mas tambem o valor da reſultante, iſto he, o pezo do ſyſtema. Porém ſuppomos ainda, que todos os pontos graves do ſyſtema eſtaõ no meſmo plano com o centro das forças.

162 Sendo, por exemplo, dada a linha recta AB, pergunta-ſe qual he o ſeu eixo de equilibrio (Fig. 65.).

Seja C o centro das forças, e tendo por elle conduzido a recta ED parallela a AB, de qualquer ponto M tomado em AB ſe tire huma perpendicular MP ſobre ED. Tomando pois hum elemento infinitamente pequeno Mm, teremos, como acabamos de moſtrar,

$$CR' = gff. \int \frac{CP.Mm}{MC^3}, \text{ e } RR' = gff. \int \frac{MP.Mm}{MC^3}.$$

E fazendo $CP = x$, $PM = b$, $MC = z$, e o angulo $MCP = \varphi$, teremos

$$CR' = gff. \int \frac{-x\,dx}{z^3},\ RR' = gff. \int \frac{-b\,dx}{z^3}.$$

Porém $z = \frac{b}{sen\,\varphi}$, $x = b \cot \varphi$, e $dx = \frac{-b\,d\varphi}{sen\,\varphi^2}$; logo $\frac{-x\,dx}{z^3} = \frac{d\varphi \cos\varphi}{b}$. O integral deſta expreſſaõ he $\frac{1}{b}(sen\,\varphi + C)$; e ſendo tomado de B até A, ſerá $\frac{1}{b}(sen\,ACD - sen\,BCD)$. Do meſmo modo $-\frac{b\,dx}{z^3} = \frac{1}{b}\,d\varphi\, sen\,\varphi$, cujo integral $\frac{1}{b}(C - \cos\varphi)$, ſendo tomado de B até A, he $\frac{1}{b}(\cos BCD - \cos ACD)$. Logo

$$CR' = \frac{gff}{b}(sen\,ACD - sen\,BCD),$$

$$RR' = \frac{gff}{b}(\cos BCD - \cos ACD).$$

Mas

Mas por abbreviar, chamemos A, B, C, os angulos CAB, ABC, ACB, e teremos $CR' = \frac{gff}{b}(\text{sen}\,A - \text{sen}\,B)$, e $RR' = \frac{gff}{b}(\cos A + \cos B)$; donde concluiremos

$$\text{tang}\,RCR' = \frac{\cos A + \cos B}{\text{sen}\,A - \text{sen}\,B} = \cot\frac{A-B}{2}.$$

Logo será o angulo $GCR' = 90° - \frac{1}{2}(A-B) = \frac{180° - A + B}{2}$; e tirando o angulo $BCD = B$, ficará o angulo $GCB = \frac{180° - A - B}{2} = \frac{C}{2}$.

163 Donde se segue, que *o eixo de equilibrio CG de qualquer linha recta AB divide em partes iguais o angulo ACB formado pelos dous raios conduzidos do centro das forças para as extremidades da mesma linha*; propriedade notavel pela sua simplicidade.

He pois manifesto, que na hypothese presente o centro de gravidade G de huma recta AB naõ está nem no ponto do meio, nem em qualquer outro ponto fixo, mas que deve variar conforme as posições differentes da mesma linha, a respeito do centro das forças. O unico caso de excepçaõ he, quando a linha girar ao redor do seu eixo de equilibrio; porque em todas as situações, que póde ter nesta revoluçaõ, he evidente que o seu centro de gravidade se conserva constantemente no mesmo ponto..

O resultado, que conseguimos pelo calculo precedente, prova de hum modo sensivel, que todas as rectas AB, ab (Fig. 66.), comprehendidas no angulo ACB, tem o mesmo eixo de equilibrio CGg; e que o de hum trapezio $ABba$, cujos dous lados concorrem no centro, he tambem a recta CGg, que divide o angulo ACB em duas partes iguais.

Agora, para determinarmos o pezo da linha AB (Fig. 65.), ou a resultante CR, recorreremos aos valores de CR'', RR'', que daraõ $CR = \frac{gff}{b}\sqrt{\left[(\cos A + \right.}$

cos

$$cos B)^2 + (sen\ A - sen\ B)^2 \Big] = \frac{gff}{b} \sqrt{\Big[2 + 2\ cos}$$

$$(A + B) \Big] = \frac{gff}{b} \sqrt{(2 - 2\ cos\ C)} = \frac{gff}{b} \cdot 2\ sen\ \frac{1}{2}\ C;$$

b he a perpendicular CF conduzida do centro C para a recta AB.

Sendo gff hum factor commum, que entra na expressaõ de todos os pezos, podemos separallo do calculo, supпondo-o igual á unidade: e o pezo de qualquer linha AB será $\frac{2\ sen\ \frac{1}{2}\ ACB}{CF}$.

164 Donde concluiremos, que todas as tangentes AGB, agb de hum arco DGE comprehendido entre os raios conduzidos do centro das forças (Fig. 67.), tem o mesmo eixo de equilibrio, e saõ igualmente pezadas, ainda que de comprimentos desiguais. Tambem podemos concluir, que o pezo de huma linha infinitamente longa naõ será infinito na hypothese presente, como he facil de conceber.

165 Em consequencia do que temos dito, naõ será difficultoso de se determinar o eixo de equilibrio do perimetro de qualquer polygono. Supponhamos, por exemplo, que se trata de hum quadrilatero $ABCD$, situado no plano do centro das forças S (Fig. 68.). Conduzindo para todos os seus angulos os raios AS, BS, CS, DS, dividiremos em duas partes iguais os angulos ASB, BSC, CSD por outros tantos eixos de equilibrio Sa, Sb, Sc.

Isto supposto, todo o pezo da linha CD, que tem por expressaõ $\frac{2\ sen\ DSc}{SK}$, póde considerar-se reunido no ponto c, e actuando pela direcçaõ cS. E se o resolvermos em outros dous, hum pela direcçaõ cc', ou perpendicular a huma linha recta dada de posiçaõ Sc', e outro parallelo a esta mesma linha, terá este por valor $\frac{2\ sen\ DSc\ .\ cos\ cSc'}{SK}$,

e aquelle $\frac{2\ sen\ DSc\ .\ sen\ cSc'}{SK}$. Fazendo pois a mesma resoluçaõ em todos os outros pezos, teremos geralmente

SG'

$$SG' = \frac{2\,sen\,DSc\,.\,cos\,cSc'}{SK} + \frac{2\,sen\,CSb\,.\,cos\,bSb'}{SK'} +$$

$$\frac{2\,sen\,DSd\,.\,cos\,dSd'}{SK'''} - \frac{2\,sen\,ASa\,.\,cos\,aSa'}{SK''},$$

$$GG' = \frac{2\,sen\,DSc\,.\,sen\,cSc'}{SK} + \frac{2\,sen\,CSb\,.\,sen\,bSb'}{SK'} +$$

$$\frac{2\,sen\,ASa\,.\,sen\,aSa'}{SK''} + \frac{2\,sen\,DSd\,.\,sen\,dSd'}{SK'''};$$

donde ſe deduzirá a expreſſaõ da tangente do angulo GSG', que determina a poſiçaõ do eixo de equilibrio SG; e o valor de SG, que repreſenta o pezo de todo o ſyſtema.

Se todas as linhas naõ eſtiveſſem no meſmo plano com o centro das forças, achar-ſe-hia o ſeu eixo de equilibrio, ſeguindo os principios que acabamos de expor. Paſſemos a indagar o eixo de equilibrio de hum arco de qualquer curva.

166 Seja o arco AMB ſituado em hum plano, que paſſe pelo centro C (Fig. 69.). Conſiderando hum dos ſeus elementos Mm, eſtá claro, que a ſua maſſa ds péza para o centro C na direcçaõ MC com huma força repreſentada por $\frac{ds}{CM^2}$. Sendo pois $CP = x$, e o angulo $MCP = \Phi$, e reſolvendo a força $\frac{ds}{CM^2}$ em outras duas, huma parallela a CP, e a outra parallela a MP, ſerá eſta repreſentada por $\frac{ds}{CM^2}\,sen\,\Phi = \frac{ds\,sen\,\Phi\,cos\,\Phi^2}{xx}$, e aquella por $\frac{ds}{CM^2}\,cos\,\Phi = \frac{ds\,cos\,\Phi^3}{xx}$. Logo ſendo CR o eixo de equilibrio, e o pezo do arco dado AMB, teremos

$$CR' = \int \frac{ds\,cos\,\Phi^3}{xx},\ e\ RR' = \int \frac{ds\,sen\,\Phi\,cos\,\Phi^2}{xx}.$$

167 Sendo, por exemplo, AMB hum arco de circulo, deſcrito do centro C com o raio $= a$; pergunta-ſe a poſiçaõ do eixo de equilibrio, e o ſeu pezo.

Neſte caſo temos $x = a\,cos\,\Phi$, $ds = -a\,d\Phi$; logo

RR'

$$RR' = \int \frac{-d\varphi \, sen\, \varphi}{a} = \frac{cos\,\varphi + C}{a} = \frac{cos\, BCb - cos\, ACa}{a},$$

$$CR' = \int \frac{-d\varphi \, cos\, \varphi}{a} = \frac{C' - sen\,\varphi}{a} = \frac{sen\, ACa - sen\, BCb}{a},$$

$$tang\, RCR' = \frac{cos\, BCb - cos\, ACa}{sen\, ACa - sen\, BCb} = tang\, \frac{BCb + ACa}{2}.$$

Donde he facil de concluir, que o eixo de equilibrio CR divide o arco AMB em duas partes iguais, como por outra parte se vê que deve ser.

Quanto ao pezo deste arco, a sua expressaõ será - -

$$\frac{1}{a}\sqrt{\left[(cos\, BCb - cos\, ACa)^2 + (sen\, ACa - sen\, BCb)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(2 - 2\, cos\, ACB)} = \frac{2\, sen\, \frac{1}{2} ACB}{a}.$$ Logo este pezo he o mesmo que o de qualquer tangente, igual á corda do arco dividida pelo raio.

168 Supponhamos agora, que se trata de achar o eixo de equilibrio de qualquer trapezio $AabB$ (Fig. 70.), formado pelo arco de huma curva AMB, duas ordenadas Aa, Bb, e huma abscissa ab, cuja direcçaõ passa pelo centro das forças C.

Primeiramente reflectiremos, que todas estas linhas formaõ hum systema, cujo plano passa pelo ponto C, e que o eixo de equilibrio do pequeno trapezio $MPpm$ será o mesmo que o da ordenada MP, isto he, huma recta CG que divide o angulo MCP em partes iguais. Sendo pois $CP = x$, e o angulo $MCP = \varphi$, teremos $CM = \frac{x}{cos\,\varphi}$, e $PM = x\, tang\, \varphi$. E porque o pezo de MP he representado por $\frac{2\, sen\, \frac{1}{2}\varphi}{x}$, o pezo do elemento $MPpm$ terá por valor $\frac{2\, sen\, \frac{1}{2}\varphi \, . \, dx}{x}$. Porém este pezo póde suppor-se actuando em G pela direcçaõ GC; logo sendo resolvido em outros dous, hum pela direcçaõ GP, e o outro pela direcrecçaõ CP, o primeiro delles será $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,\Phi^2\,.\,dx}{x}$, e o segundo $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,\Phi\,.\,cos\,\Phi\,dx}{x} = \frac{sen\,\Phi\,.\,dx}{x}$; donde teremos as formulas seguintes

$$CR' = \int \frac{sen\,\Phi\,dx}{x}$$

$$RR' = \int \frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,\Phi^2\,.\,dx}{x} = \int \frac{dx}{x}\,(1 - cos\,\Phi)$$

$$tang\,RCR' = \frac{\int \frac{dx}{x}\,(1 - cos\,\Phi)}{\int \frac{dx}{x}\,sen\,\Phi}.$$

169 Supponhamos em fim, que se trata de achar o eixo de equilibrio de huma superficie, cujo plano naõ passa pelo centro das forças (Fig. 71.).

Conduzindo do centro C huma perpendicular CA para o plano da superficie proposta, faremos passar pelo ponto A a linha das abscissas AP. E sendo PM huma ordenada da linha que termina a mesma superficie, o seu eixo de equilibrio será huma recta CG que divide o angulo MCP em partes iguais, e o seu pezo será representado por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP}{CP}$, e conseguintemente o do elemento $MmpP$ por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}$.

Considerando pois este pezo reunido em G, e actuando pela direcçaõ GC, podemos resolvello em outros dous, hum parallelo a AC, que terá por valor $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}\,.\,\frac{CA}{CG}$, e o outro pela direcçaõ GA que será representado por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}\,.\,\frac{GA}{CG}$. Este póde tambem resolſolver-ſe em outros dous, hum parallelo a PA, que terá por valor $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}\,.\,\frac{AP}{CG}$; e o outro parallelo a GP, que ſerá repreſentado por $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,.\,Pp}{CP}\,.\,\frac{PG}{CG}$.

Agora fazendo $CA = b$, $AP = x$, $PM = y$, teremos $CP = \sqrt{(bb + xx)}$, $CM = \sqrt{(bb + xx + yy)}$, $CG = \frac{CP}{cos\,\frac{1}{2}\,MCP}$, e conſeguintemente $\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP}{CG\,.\,CP} =$

$$\frac{2\,sen\,\frac{1}{2}\,MCP\,cos\,\frac{1}{2}\,MCP}{CP^2} = \frac{sen\,MCP}{CP^2} = \frac{y}{(bb + xx)\,CM}.$$

Em fim $CM : CP :: MG : GP$, ou $CM + CP : CP ::$ $PM : GP = \frac{PM\,.\,CP}{CM + CP} = \frac{CP}{PM}(CM - CP)$.

Logo, ſendo CR o eixo de equilibrio, e o pezo do trapezio $MPQN$, e tirando do ponto R a recta RR' perpendicular ao plano PAC, e a recta $R'R''$ perpendicular a CA, teremos as formulas ſeguintes

$$CR'' = \int \frac{b\,y\,dx}{(bb + xx)\sqrt{(bb + xx + yy)}}$$

$$R'R'' = \int \frac{x\,y\,dx}{(bb + xx)\sqrt{(bb + xx + yy)}}$$

$$RR' = \int \left(\frac{dx}{\sqrt{(bb + xx)}} - \frac{dx}{\sqrt{(bb + xx + yy)}} \right);$$

as quais determinaráõ o eixo de equilibrio, e o pezo do trapezio $MPQN$.

He de notar, que cortando CR o trapezio no ponto T, póde eſte ponto tomar-ſe de alguma ſorte como centro de gravidade; e aſſim, reſolvendo em trapezios todas as figuras planas que nos forem propoſtas, acharemos por meio deſtas formulas os ſeus centros de gravidade.

Para acabarmos com hum exemplo, em que ſe veja a applicaçaõ deſtas formulas, ſeja ABD hum quarto de circulo, que tenha o centro em A, e o raio $= a$. Neſte caſo

caſo ſerá $yy = aa - xx$, e conſeguintemente ſe reduziráõ as formulas precedentes como aqui ſe moſtra

$$CR'' = \int \frac{b\,dx\,\sqrt{(aa - xx)}}{(bb + xx)\sqrt{(aa + bb)}}.$$

$$R'R'' = \int \frac{x\,dx\,\sqrt{(aa - xx)}.}{(bb + xx)\sqrt{(aa + bb)}}$$

$$RR' = \int \left(\frac{dx}{\sqrt{(bb + xx}} - \frac{dx}{\sqrt{(aa + bb)}} \right):$$

Para integrarmos a primeira, faremos $\frac{x}{\sqrt{(aa - xx)}} = u$; e teremos a transformada $CR'' = \int \left(\frac{-b}{\sqrt{(aa + bb)}} \cdot \frac{du}{1 + uu} + \frac{b\,du\sqrt{(aa + bb)}}{bb + (aa + bb)uu} \right) = -\frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$ Arc tang u + Arc tang $\frac{u\sqrt{(aa + bb)}}{b} = -\frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Arc tang $\frac{x}{\sqrt{(aa - xx)}}$ + Arc tang $\frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{b\sqrt{(aa - xx)}}$. Aqui não he neceſſario ajuntar conſtante porque $x = 0$ dá o valor de todo o integral $= 0$. Aſſim para termos o ſeu valor correſpondente a todo o quarto de circulo, faremos $x = a$, e ſendo $c = 3,1415$ &c teremos

$$CR'' = \frac{\sqrt{(aa + bb)} - b}{\sqrt{(aa + bb)}} \cdot \frac{1}{2}c.$$

Para integrarmos a ſegunda, faremos $\sqrt{(aa - xx)} = z\sqrt{(aa + bb)}$, e teremos a transformada

$$R'R'' = \int \frac{-zz\,dz}{1 - zz} = z + \frac{1}{2}\,l\,\frac{1 - z}{1 + z} + C =$$

$$\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{\sqrt{(aa + bb)}} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{(aa + bb)} - \sqrt{(aa - xx)}}{\sqrt{(aa + bb)} + \sqrt{(aa - xx)}} + C.$$

Fazendo pois $x = a$, depois $x = 0$, e tirando o ultimo reſultado do primeiro, teremos

$$R'R'' = \frac{-a}{\sqrt{(aa + bb}} + l\,\frac{a + \sqrt{(aa + bb)}}{b}.$$

Em fim o integral da terceira formula he $RR' =$

l

$l\,\frac{x+\sqrt{(bb+xx)}}{b} - \frac{x}{\sqrt{(aa+bb)}}$, que fazendo $x = a$, dá

$$RR' = l\,\frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b} - \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}.$$

E porque temos achado $RR' = R'R''$, concluiremos que o centro de gravidade T está sobre o raio AT, que divide o quarto de circulo em duas partes iguais.

Pelo que pertence á distancia AT, que he igual a $\frac{AC\,.\,RR''}{CR''}$, será determinada pela formula

$$AT = \frac{2b\sqrt{2}}{c}\left[\frac{\sqrt{(aa+bb)}\;l\frac{a+\sqrt{(aa+bb)}}{b} - a}{\sqrt{(aa+bb)}-b}\right].$$

De forte, que fazendo $a = b$, teremos $AT = a.\frac{2(1+\sqrt{2})}{c}$. $[2l(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}] = 0{,}535677\,a$. Como já sabemos (n. 132.), que o centro de gravidade ordinario de hum quarto de circulo se acha na distancia do ponto A representada por $\frac{4}{3}.\frac{\sqrt{2}}{c}\,a = 0{,}600210\,a$, estes dous resultados naõ differem mais que $\frac{2}{31}$ do raio proximamente; e a differença procede de que na supposiçaõ presente as partes mais vezinhas do centro pezaõ mais.

Se puzermos $b = \frac{40}{9}a$, será $AT = a.\frac{2\sqrt{2}.40}{c}$ $\left(\frac{41}{9}\,l\,\frac{5}{4} - 1\right) = 0{,}595761\,a$. Neste caso sahe a differença muito menor, porque o centro das forças está mais distante. Logo se b for igual ao semidiametro terrestre, sendo a hum pequeno numero de palmos ou pollegadas, he evidente que a differença será insensivel. Em geral, se na formula, que temos achado por valor de AT, suppuzermos $b = \infty$, acharemos exactamente, como para o centro de gravidade ordinario, que $AT = \frac{4}{3}.\frac{\sqrt{2}}{c}\,a$.

SECÇAÕ II.

DO EQUILIBRIO NAS MAQUINAS.

AS forças, que obraõ immediatamente humas contra outras, naõ podem estar em equilibrio, se entre ellas naõ houver perfeita igualdade. Quando porém exercitaõ a sua acçaõ por meio de Maquinas, que favoreçaõ o seu esforço, succede muitas vezes que bem fracas potencias sustentaõ massas enormes. Por estas invençoens Mechanicas, que igualmente se devem á necessidade, e á industria dos homens, chegamos a aumentar, para o dizer assim, ao nosso arbitrio a energia das menores forças.

170 Entre as Maquinas humas saõ simples, outras compostas. Estas facilmente se entendem por aquellas; e por isso bastará conhecer bem as primeiras. As Maquinas simples podem reduzir-se a sete, a saber: *Cordas*, *Alavanca*, *Roldana*, *Sarilho*, *Plano inclinado*, *Parafuzo*, e *Cunha*; e ainda poderiaõ reduzir-se a menor numero, se algumas circunstancias particulares nos naõ persuadissem a considerallas separadamente.

Todas ellas tem o mesmo fim, que he o de favorecer o esforço da potencia contra os obstaculos, que por si só naõ poderia vencer; mas naõ saõ todas igualmente proprias para produzir este effeito. Para avaliar a efficacia de humas e outras, tem-se reduzido todas ao mesmo ponto de vista, que he o do equilibrio, e tem-se procurado as condiçoens necessarias em cada huma dellas, para que a potencia e resistencia se contrapezem mutuamente. Isto he o que agora entramos a mostrar.

DAS CORDAS.

DEpois que *M.* Varignon (*Nouv. Méch. Sect. II.* pag. 93. . . . . 210) tratou com muita miudeza a theorica das cordas, entráraõ estas a ser contadas entre as Maquinas simples, com o nome de *Maquinas Funiculares.* As cordas saõ com effeito hum meio de communicaçaõ entre differentes potencias, e dellas nos servimos quasi sempre nas outras maquinas; rasaõ porque será muito con-

conveniente que principiemos esta materia, dando a conhecer os seus usos principais. Mas a fim de estabelecermos alguma cousa fixa, seremos em primeiro lugar obrigados a suppollas perfeitamente flexiveis, e naõ pezadas, reservando para depois o consideralIas no seu estado natural.

Sejaõ duas potencias *A*, e *B* applicadas á corda *AB* (Fig. 72.), e actuando para partes oppostas. He manifesto, que mutuamente se destruiráõ os seus esforços, e ficaráõ conseguintemente em equilibrio, se ellas forem iguais entre si. Naõ ha cousa mais clara.

171 Sejaõ agora tres potencias *A*, *B*, *C* (Fig. 73.), applicadas aos tres cordoens *AD*, *BD*, *CD*, unidos no ponto *D*; perguntaõ-se as condiçoens necessarias, para que todo o systema se ponha em equilibrio.

Representemos por *Da* a potencia *A*, e por *Dc* a potencia *C*. Entaõ, completando o parallelogrammo *aDcK*, pelos principios já demonstrados acharemos

I. Que a acçaõ destas duas forças *A*, e *C* sobre o nó *D* deve ser igual á sua resultante *DK*.

II. Que o systema naõ póde estar em equilibrio, se a potencia *B* representada por *Db* naõ destruir o esforço da resultante *DK*; logo he necessario que lhe seja igual, e opposta, e conseguintemente deve achar-se sobre a mesma linha *Kb*. Donde se segue que *para haver equilibrio devem os tres cordoens estar no mesmo plano.*

III. Que as tres potencias *A*, *C*, *B* saõ entre si com o *Da*, *Dc*, *DK*. Porém $Da : Dc : DK :: sen\, KDC : sen\, aDK : sen\, aDc :: sen\, BDC : sen\, ADB : sen\, ADC$. Logo

$$A : B : C :: sen\, BDC : sen\, ADC : sen\, ADB;$$

Donde se segue, que *cada huma das potencias deve ser como o seno do angulo comprehendido pelas direcçoens das outras duas.*

172 Se a corda *ADC* em lugar de ser atada em o nó *D*, passasse livremente por hum anel situado na extremidade *D* da corda *BD*; entaõ, para haver equilibrio, seria necessario que o anel naõ pudesse correr pela corda *ADC* para huma, nem para outra parte; condiçaõ, que terá lugar todas as vezes que a linha dividir o angulo *ADC* em duas partes iguais. Neste caso as duas potencias *A*, *C* saõ iguais, e teremos as proporçoens seguintes.

$A : B :: sen\ BDC : sen\ ADC :: sen\ \frac{1}{2} ADC : sen\ ADC ::$

$1 : 2 \cos \frac{1}{2} ADC.$

173 Logo todas as vezes que duas potencias A, C obraõ huma contra a outra por meio de huma corda ADC, que passa por hum ponto fixo D, he necessario que para naõ correr a corda pelo dito ponto, isto he, para haver equilibrio, sejaõ as duas potencias iguais entre si. Donde concluiremos, que duas forças applicadas ás extremidades de huma corda, que passa pelo perimetro de hum polygono, ou de qualquer curva, naõ podem ser postas em equilibrio, se naõ forem iguais (Fig. 74.).

174 Quando houver mais de tres forças applicadas a outros tantos cordoens, ligados todos a hum mesmo nó, buscar-se-ha primeiramente a resultante de duas quaisquer dellas, e seraõ reduzidas a huma de menos. Depois continuar-se-ha a mesma reducçaõ até naõ haver mais que duas potencias iguais, e oppostas; e entaõ todo o systema se achará em equilibrio. O mesmo seria no caso de estarem alguns dos cordoens atados a pontos fixos, e immoveis; porque o esforço sustentado por cada hum desses pontos teria lugar de potencia.

175 Supponhamos agora (Fig. 75.), que huma corda $ABCDH$ he tirada pelas forças A, E, F, G, H applicadas aos pontos A, B, C, D, H, algumas das quais podem naõ ser mais do que pontos de apoyo. Para determinarmos as condiçoens do equilibrio, e as *tensoens* respectivas dos cordoens AB, BC, CD, DH, observaremos, que estando todo o systema em equilibrio, todas as suas partes o devem estar tambem. Logo poderemos considerar os pontos A e C como fixos, e a potencia E luctando contra a resistencia delles. Para haver pois equilibrio, será necessario em primeiro lugar, que a potencia E seja para o seno do angulo ABC, como a potencia A, ou o esforço sustentado pelo ponto fixo A, isto he, como a tensaõ do cordaõ AB, que representaremos por T, AB, he para o seno do angulo EBC; e em segundo lugar, que a mesma potencia E seja para o seno do mesmo angulo ABC, como a tensaõ do cordaõ BC para o seno do angulo ABE. Teremos pois

$E : sen\ ABC :: T, AB : sen\ EBC :: T, BC : sen\ ABE.$

Do mesmo modo, para que a parte $BCDF$ esteja em equilibrio,

librio, he necessario que se verifiquem as duas proporçoens seguintes

F : *sen BCD* : *T,BC* : *sen FCD* : : *T,CD* : *sen BCF* .

Em fim, o equilibrio particular do systema *CDHG* exige pela mesma rasaõ, que tenhaõ lugar estas outras proporçoens

G : *sen CDH* : : *T,CD* : *sen HDG* : : *T,DH* : *sen CDG*.

De todas estas proporçoens se tiraráõ seis equaçoens, e outras tantas condiçoens do equilibrio de todo o systema, com as quais se determinará a relaçaõ das tensoens de dous cordoens independentemente das forças *E*, *F*, *G*, e a relaçaõ de duas destas forças independentemente das tensoens dos cordoens &c.

176 A mesma cousa teria lugar, ainda que os cordoens *EB*, *FC*, *DG*, pela direcçaõ dos quais actúaõ as forças *E*, *F*, *G*, estivessem em planos differentes. E porque póde acontecer, que muitas potencias estejaõ applicadas juntamente ao mesmo ponto da corda *B*, nesse caso deveremos calcular primeiro a sua resultante; e suppondo-a em lugar dellas applicada ao dito ponto, acharemos as condiçoens do equilibrio da mesma maneira.

177 Mas demoremo-nos ainda hum pouco na consideraçaõ do systema funicular *ABCDH* (Fig. 75.). A potencia *F* representada por *CF'* se resolve em outras duas *Cb*, *Cd* na direcçaõ dos cordoens *BC*, *DC*, dos quais ellas exprimem as tensoens. A força *Cb* communica-se em *B*, e obra conjuntamente com a potencia *E*, de maneira que a sua resultante dirigida por BK se emprega em estender o cordaõ *BA*, ou em carregar o ponto de apoyo *A*, ou, de outra sorte, em fazer equilibrio á potencia *A*. Conseguintemente póde a tensaõ do cordaõ *BA* exprimir a resultante das duas potencias *E*, e *Cb*.

Do mesmo modo pela tensaõ do cordaõ *DH* se póde exprimir a resultante das forças *G*, e *Cd*; logo a resultante das quatro forças *E*, *Cb*, *Cd*, *G*, isto he, das tres *E*, *F*, *G* he absolutamente a mesma que a das tensoens dos dous cordoens extremos *AB*, *DH*; e por conseguinte deve passar pelo ponto de concurso K dos mesmos cordoens. E em geral,

178 *Seja qual for o numero, e a direcçaõ das potencias applicadas a huma mesma corda, a sua resultante passará sempre pelo ponto de concurso dos cordoens extremos.*

Quan-

Quando estas potencias actuarem todas para a mesma parte, e forem entre si parallelas, a resultante geral de todas será igual á sua soma, e terá huma direcçaõ parallela á das mesmas potencias. Seja pois huma corda pezada *AEB* (Fig. 76.), preza pelas extremidades nos pontos fixos *A*, *B*, a qual no estado de equibrio tome a curvatura *AEB*; e sejaõ *AC*, BC as duas tangentes em *A*, e *B*. A resultante das cargas dos pontos de suspensaõ *A*, *B* passará pelo ponto de concurso *C* das duas tangentes, a sua direcçaõ será representada por huma linha vertical *CE*, e o seu valor será o pezo da mesma corda, que he a soma das potencias que sollicitaõ a cada hum dos seus pontos. Chamando pois *A* e *B* as cargas dos dous pontos respectivos de suspensaõ, e *P* o pezo da corda, teremos

$$P : sen\, ACB : : A : sen\, ECB : : B : sen\, ACE.$$

179 Em lugar do ponto de suspensaõ *B* podemos conceber huma potencia, que communique a sua acçaõ ao ponto *A* por meio da corda *BEA*; e neste caso, a acçaõ da potencia *B*, se ella obrasse immediatamente sobre o ponto *A*, deve ser para a acçaõ que effectivamente lhe communica por meio da corda pezada AEB, como o seno do angulo *ACE* para o seno do angulo *ECB*. He logo facil de haver respeito ao pezo das cordas na communicaçaõ das acçoens de quaisquer potencias.

180 Donde se vê, que estando os pontos *A* e *B* na mesma linha horizontal, a potencia *B* transmete toda a sua acçaõ ao ponto A. Mas quando o ponto *B* estiver mais elevado, a potencia nelle applicada perderá parte da sua força na acçaõ communicada por meio da corda ao ponto *A*; e pelo contrario, estando *B* abaixo da horizontal que passa pelo ponto *A*, a potencia *B* terá huma acçaõ mais vantajosa sobre o ponto *A*, do que teria se lhe fosse immediatamente applicada. Donde se vê de hum modo sensivel, como por meio de cordas pezadas se podem multiplicar as forças em muitos casos.

181 Já dissemos, que naõ era possivel em rigor estender horizontalmente huma corda, de maneira que naõ tivesse inflexaõ alguma. A prova he muito facil, em consequencia do que acabamos de mostrar. Seja T a força que estende as duas extremidades oppostas da corda *AEB* (Fig. 77.), e seja P o pezo della. Teremos $T : P : : sen\, ACD : sen\, ACB$. Logo, se o angulo *ACB* for infinitamente obtuso,

ſo, iſto he, ſe a corda eſtiver perfeitamente eſtendida em linha recta, o ſeno do angulo *ACD* ſerá igual á unidade, e o do angulo *ACB* a nada. Seria pois neceſſaria huma tenſaõ infinita, para que a corda naõ tiveſſe a menor inflexaõ. Em quanto a força que ſe emprega em eſtendella for finita, o angulo *CAB* o ſerá tambem.

Sendo o angulo *ACB* o dobro do angulo *ACD*, temos $sen\,ACB = 2\,sen\,ACD.cos\,ACD = 2\,sen\,ACD.sen\,CAD$; logo $T.2\,sen\,CAD = P$. Supponhamos, que he T muito grande a reſpeito do pezo da corda P; AC naõ terá differença attendivel a reſpeito de AE, nem DE a reſpeito de EC. Chamando pois L o comprimento da corda, teremos $sen\,CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{2DE}{\frac{1}{2}L}$; e ſubſtituindo eſte valor concluiremos $2T.\frac{2DE}{\frac{1}{2}L} = P$, e $DE = \frac{P.L}{8T}$.

Conhecendo pois o comprimento L da corda, o ſeu pezo P, e a força T empregada em a eſtender horizontalmente, poderemos ſempre determinar a quantidade do abatimento no ponto do meio, a reſpeito da horizontal que paſſa pelas extremidades.

Exemplo. Dado hum pezo de 5 libras para eſtender huma corda que tem 24 pés de comprido, e 161 $\frac{5}{6}$ grãos de pezo, achar qual deve ſer a ſua inflexaõ.

Depois de haver reſolvido 5 libras em 5. 16. 8. 72 graõs; teremos $DE = \frac{161\frac{5}{6}.24}{5.16.64.72} = \frac{485,5}{5.16.8.72} = \frac{48,55}{64.72}$ pés $= \frac{48,55}{64.6}$ polleg. $= \frac{48,55}{32}$ linh. $= 1$ linh. $\frac{1}{2}$.

A experiencia deu juſtamente o meſmo reſultado, fazendo-ſe com huma corda, da qual trinta e tres diametros faziaõ duas pollegadas.

Da

Da curvatura das cordas, ſollicitadas pela acçaõ de quaiſquer potencias, e poſtas em equilibrio.

182 QUando huma corda (Fig. 78.), ou huma cadeia ſummamente flexivel ABD, eſtá pendente pelas extremidades A, e D, e he ſollicitada em cada hum dos ſeus pontos por quaiſquer forças ſituadas no meſmo plano que os pontos de ſuſpenſaõ, he ſem duvida que deve tomar certa curvatura propria do equilibrio. Mas qual he a curvatura propria do equilibrio? iſſo he o que agora examinaremos.

Primeiramente eſtabeleçamos qualquer eixo AC, ao qual ſe refiraõ os differentes pontos da curva, que procuramos determinar. Depois tomando quaiſquer tres elementos conſecutivos Mm, mm', $m'm''$, reflectiremos que ſendo a corda ſuppoſta em equilibrio, podemos conſiderar como fixos os dous pontos M e m', ſendo o ponto intermedio m ſollicitado por quaiſquer forças, cuja reſultante repreſentaremos por R, ou mt.

Iſto poſto, para que eſta potencia faça equilibrio com as tenſoens dos dous pequenos cordoens Mm, mm', he neceſſario que ſeja $R : T,mm' :: \text{ſen}\, Mmm' : \text{ſen}\, Mmt$, (n. 175.). E pela meſma raſaõ, conſiderando os pontos m, m'' como fixos, e ſendo o ponto intermedio m' ſollicitado pela ſua força $m't'$, que he $R + dR$, ou por abbreviar R', ſerá neceſſario que tenhamos $T,mm' : R' :: \text{ſen}\, t'm'm'' : \text{ſen}\, mm'm''$. Logo multiplicando eſtas duas proporçoens, termo por termo, teremos

$$R : R' :: \text{ſen}\, Mmm' . \text{ſen}\, t'm'm'' : \text{ſen}\, Mmt . \text{ſen}\, mm'm''.$$

Supponhamos agora o angulo $Mmm' = \varphi$, e $Mmt = \mu$; e teremos no elemento ſeguinte $mm'm'' = \varphi + d\varphi = \varphi'$ por abbreviar, e $mm't' = \mu'$. Logo $\text{ſen}\, t'm'm'' = -\text{ſen}\, (\mu' + \varphi') = -\text{ſen}\, \mu' \cos \varphi' - \text{ſen}\, \varphi' \cos \mu'$. E porque φ' differe infinitamente pouco de 180°, e conſeguintemente he $\cos \varphi' = -1$; teremos $R : R' :: \text{ſen}\, \varphi . \text{ſen}\, \mu' - \text{ſen}\, \varphi\, \text{ſen}\, \varphi' \cos \mu' : \text{ſen}\, \mu\, \text{ſen}\, \varphi' :: \frac{\text{ſen}\, \mu'}{\text{ſen}\, \varphi'} - \cos \mu' : \frac{\text{ſen}\, \mu}{\text{ſen}\, \varphi}$; donde teremos a equaçaõ ſeguinte

R'

$$\frac{R' sen\ \mu'}{sen\ \varphi'} - \frac{R\ sen\ \mu}{sen\ \varphi} - R' cos\ \mu' = 0,$$

a qual se póde reduzir a esta fórma, $d\left(\frac{R\ sen\ \mu}{sen\ \varphi}\right) -$ $R' cos\ \mu' = 0$, ou tambem a esta $d\left(\frac{R\ sen\ \mu}{sen\ \varphi}\right) -$ $R\ cos\ \mu = 0$; reflectindo, que $R' cos\ \mu' = R\ cos\ \mu +$ $d(R\ cos\ \mu)$, e que o ultimo termo desta expressaõ se desvanece em comparaçaõ do precedente.

Como as diversas potencias applicadas aos pontos da corda, podem reduzir-se a duas, huma mq pela direcçaõ da ordenada mp, e a outra mr parallela á abscissa Ap, chamemos Y a primeira, e X a segunda: e fazendo ao ordinario $AP = x$, $PM = y$, $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = ds$, teremos $sen\ \mu = sen\ (Mmr + tmq) = sen\ Mmr.$ $cos\ tmq + cos\ Mmr.\ sen\ tmq = \frac{dx}{ds}.\ \frac{Y}{tm} + \frac{dy}{ds}.\ \frac{X}{tm}$, e $cos\ \mu = cos\ Mmr.\ cos\ tmq - sen\ Mmr.\ sen\ tmq =$ $\frac{dy}{ds}.\ \frac{Y}{tm} - \frac{dx}{ds}.\ \frac{X}{tm}$. Logo será $R\ sen\ \mu = \frac{Ydx + Xdy}{ds}$, e $R\ cos\ \mu = \frac{Ydy - Xdx}{ds}$. Sendo pois r o raio osculador; será o angulo de contingencia, ou o seu seno $\frac{ds}{r} =$ $sen\ \varphi$, e teremos por equaçaõ da curva procurada

$$d\left(\frac{(Ydx + Xdy)\,r}{ds^2}\right) + \frac{Ydy - Xdx}{ds} = 0.$$

E porque esta equaçaõ he differencial da terceira ordem, será necessario integralla tres vezes consecutivamente, donde resultaráõ na equaçaõ finita tres constantes, que se determinaráõ de maneira que a curva passe por dous pontos dados, e tenha hum comprimento dado.

183 Exemplo I. Supponhamos, que sómente a força da gravidade actúa sobre todos os pontos ABD por direcçoens parallelas ás ordenadas PM. Pergunta-se, qual será a curva neste caso?

A acçaõ da gravidade tende a communicar ao elemento Mm a velocidade g, e a quantidade de movimento

mento gds. Aſſim teremos $Y = gds$, e $X = 0$; pelo que a equaçaõ geral ſe reduzirá a $d\left(\frac{rdx}{ds}\right) + dy = 0$, cujo integral he $\frac{rdx}{ds} = C - y$. Porém ſuppondo ds conſtante temos $r = \frac{dyds}{ddx}$; logo $\frac{ddx}{dx} - \frac{dy}{C-y} = 0$. O integral deſta expreſſaõ he $ldx + l(C-y) = lC'ds$, ou $dx(C-y) = C'ds$. Elevando ao quadrado, teremos $dx^2(C-y)^2 = C'^2 ds^2 = C'^2 dx^2 + C'^2 dy^2$; e ſeparando, teremos finalmente

$$dx = \frac{\pm C'dy}{\sqrt{[(C-y)^2 - C'^2]}}$$

por equaçaõ differencial da curva formada naturalmente por huma corda, ou cadeia ſummamente flexivel, pendente pelas duas extremidades. Eſta curva he geralmente conhecida pelo nome de *Catenaria*.

Fazendo-ſe $dy = 0$ (Fig 79.), immediatamente ſe determinará o ponto mais baixo da curva B, porque ſerá entaõ $C - y = C'$, ou $y = BE = C - C'$. E ſe quizermos referir a catenaria ao eixo vertical BE, conduziremos huma ordenada qualquer a eſte eixo, como MQ, e poremos $BQ = x$, e $QM = y$. Depois ſubſtituindo na equaçaõ precedente $C - C' - x$ em lugar de y, e $AE - y$ em lugar de x, teremos $dy = \frac{\pm C'dx}{V(xx + 2C'x)}$. Metendo pois a em lugar de C', e integrando, ſerá finalmente $y = \pm l\frac{a + x + V(xx + 2ax)}{a}$; donde ſe ſegue que a cada abſciſſa x correſpondem duas ordenadas iguais, de huma e outra parte do eixo BE, o qual he conſeguintemente hum diametro da curva.

Tomando os x poſitivos, vemos que os y creſcem até o infinito; mas tomando as abſciſſas negativas as ordenadas ſahem imaginarias. Aſſim naõ paſſa a catenaria além do vertice B, e póde aſſemelhar-ſe a ſua figura á de huma parabola. Por outra parte ella ſe confunde no ponto B com huma curva parabolica deſcrita com o parametro $2a$; e aſſim fica juſtificada a ſuppoſiçaõ que acima fizemos