mos (n. 181.), tomando $DE = EC$ (Fig. 77.)

A equaçaõ differencial $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(xx + 2ax)}}$ dá $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{(x+a)\,dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, cujo integral he $BM = \sqrt{(2ax + xx)}$. Donde se vê que a catenaria he huma das curvas susceptiveis de rectificaçaõ.

Quando se daõ os dous pontos de suspensaõ A, D com o comprimento da corda, he necessario, para descrever a catenaria, determinar primeiramente a posiçaõ do vertice B, e a constante a. Para isso teremos tantas equaçoens quantas saõ as incognitas; mas naõ poderáõ resolver-se senaõ por approximaçaõ, por causa das quantidades logarithmicas que entraõ na equaçaõ da curva.

Quando huma corda pendente de dous pontos naõ tiver a figura, que acabámos de ver, naõ poderá estar em equilibrio. Fará necessariamente oscillações continuas, até que a fricçaõ, e a resistencia do ar a forcem a tomar a figura propria do equilibrio.

Galileu foi o primeiro, que pensou em indagar a curva, que huma cadeia pendente pelas extremidades fórma no estado do equilibrio. Mas todas as suas indagações pararaõ em conjecturar, que seria huma parabola; porque a Geometria do seu tempo naõ bastava para resolver este problema. Os irmaõs Bernoulis o emprenderaõ de novo, no tempo que nascia o calculo differencial, e nas suas Obras se póde ver o successo, com que o resolveraõ.

184 Entre muitas propriedades bellas da catenaria, que estes grandes Geometras deduziraõ dos seus calculos, ha huma mais analoga do que as outras ao assunto que tratamos. Consiste esta em que o centro de gravidade da catenaria desce ao ponto mais baixo que he possivel. Eisaqui como ella se póde demonstrar.

Seja G o centro de gravidade do arco $AMBD$ (Fig. 79.), e GG' a sua distancia á horizontal AE. He necessario provar, que esta distancia he hum *maximo*. E como $GG' = \frac{\int y\,ds}{ABD}$, e o arco ABD he de huma grandeza constante, toda a difficuldade se reduz a mostrar que na catenaria a expressaõ $\int y\,ds$ he hum maximo.

A

A natureza de qualquer maximo he tal, que o ſeu valor naõ deve mudar, em quanto ſuppuzermos huma variaçaõ infinitamente pequena nas quantidades que o produzem. Se fizermos pois variar infinitamente pouco hum ponto M' da curva propoſta, o valor do maximo naõ terá mudança alguma, ainda que os elementos contiguos MM', $M'M''$ ſejaõ tocados da dita variaçaõ. Huma vez que ſeja exprimida eſta condiçaõ, deverá attender-ſe tambem que o arco da curva fique conſtante; mas para exprimir de hum modo mais particular tanto eſta invariabilidade como a do maximo, ſerá neceſſario que façamos variar outro ponto M''.

Porém, para que a fluxaõ de cada ponto naõ traga comſigo mais do que huma indeterminada, he neceſſario ſuppor, que eſta fluxaõ ſe faz ſobre huma linha dada. Sendo eſta linha abſolutamente arbitraria, ſupporemos que a fluxaõ dos pontos M', M'' ſe faz ſobre as parallelas ao eixo $M'R'$, $M''R''$, a fim de ſer mais ſimples o calculo. Iſto poſto, as ordenadas naõ mudaráõ de valor, nem tambem as ſuas differenças RM', $R'M''$.

E como, tomando muitos elementos conſecutivos de huma meſma curva, a funçaõ F que convem ao primeiro ſe muda em $F + dF$ para o ſegundo, e pela meſma raſaõ $F + dF$ ſe muda em $F + dF + d(F + dF)$ para o terceiro, e aſſim por diante; repreſentando por F, F', F'' &c eſtes valores conſecutivos de F, a fim de abbreviar, teremos $F' = F + dF$, $F'' = F' + dF'$ &c. e conſeguintemente $F' - F = dF$, $F'' - F' = dF'$ &c. Em conſequencia diſto teremos pois $MP = y$, $M'P' = y'$, $M''P'' = y''$ &c, $AP = x$, $AP' = x'$, $AP'' = x''$ &c, donde concluiremos $PP' = dx$, $P'P'' = dx'$, $P''P''' = dx''$ &c, $M'R = dy$, $M''R' = dy'$ &c, $MM' = ds$, $M'M'' = ds'$ &c.

Em fim, pela condiçaõ do problema $\int y\,ds$ deve ſer hum maximo, e eſte naõ deve ſofrer mudança alguma da fluxaõ dos pontos M', M''. Porém $\int y\,ds$ exprime a ſoma dos elementos $y\,ds$ por toda a extenſaõ da curva de A até D, e eſta ſoma naõ varia de A até M, nem de M''' até D. Logo, ſe ella houveſſe de variar, naõ poderia ſer ſenaõ entre M e M''', onde o ſeu valor he $y\,ds + y'\,ds' + y''\,ds''$. Logo a differencial deſta quantidade deve ſer igual a nada.

Mas

Mas como aqui ſe trata de differenciais dependentes da fluxaõ dos pontos M', M'', as quais naõ tem relaçaõ alguma com as differenças naturais, *iſto he*, com as differenciais das coordenadas, e do arco; diſtinguillas-hemos com a characteriſtica δ. Aſſim teremos $y\delta ds + y'\delta ds' + y''\delta ds'' = 0$, por quanto y, y', y'' naõ ſaõ variaveis. E porque o arco da curva $ds + ds' + ds''$ he conſtante, teremos igualmente $\delta ds + \delta ds' + \delta ds'' = 0$. Do meſmo modo, ſendo o intervallo $PP''' = dx + dx' + dx''$ tambem conſtante, teremos finalmente $\delta dx + \delta dx' + \delta dx'' = 0$.

Porém temos $dx^2 + dy^2 = ds^2$; logo $dx\delta dx + dy\delta dy = ds\delta ds$: e porque $\delta dy = 0$, ſerá $\delta dx = \frac{ds}{dx}\delta ds$. Donde teremos as tres equações ſeguintes

$$y\delta ds + y'\delta ds' + y''\delta ds'' = 0$$
$$\delta ds + \delta ds' + \quad ds'' = 0$$
$$\frac{ds}{dx}\delta ds + \frac{ds'}{dx'}\delta ds' + \frac{ds''}{dx''}\delta ds'' = 0.$$

A primeira he o meſmo que $(y - y')\delta ds + (y' - y'')(\delta ds + \delta ds') + y''(\delta ds + \delta ds' + \delta ds'') = 0$, a qual por meio da ſegunda ſe reduz a $dy\delta ds + dy'(\delta ds + \delta ds') = 0$. Do meſmo modo a ſegunda e a terceira daraõ $d\left(\frac{ds}{dx}\right)\delta ds + d\left(\frac{ds'}{dx'}\right)(\delta ds + \delta ds') = 0$; e deſtas duas ultimas equações concluiremos em fim $\frac{d\left(\frac{ds'}{dx'}\right)}{dy'} - \frac{d\left(\frac{ds}{dx}\right)}{dy} = 0$, ou $d\left[\frac{d\left(\frac{ds}{dx}\right)}{dy}\right] = 0$.

Integrando pois, teremos primeiramente $Cd\left(\frac{ds}{dx}\right) + dy = 0$; e tornando a integrar, teremos $\frac{Cds}{dx} + y = C'$, que he juſtamente a equaçaõ da catenaria, que acima achamos (n. 182.). Logo o centro de gravidade occupa na catenaria o lugar mais baixo que he poſſivel.

Note-ſe, que ſendo aqui $\int y\,ds$ hum maximo deve concluir-ſe, que entre todas as curvas iſoperimetras, terminadas nos dous pontos A e B, a catenaria he a que pela

ſua

ſua revoluçaõ ao redor do eixo horizontal AC produz a maior ſuperficie curva que he poſſivel.

185 Exemplo II. Suppondo que as direcções da gravidade concorrem em hum centro commum, pede-ſe a curva que deve formar huma corda AD em virtude do proprio pezo (Fig. 80.).

Sendo conduzida pelo ponto de ſuſpenſaõ A para o centro das forças a recta AC, de qualquer ponto da curva M tire-ſe para ella a perpendicular MQ. Completando o rectangulo $APMQ$, e fazendo $CQ = x$, $QM = y$, $CM = z$, o que era x e y na equaçaõ geral ſerá agora y, e $AC - x$; e aſſim ſe converterá em

$$d\left(\frac{(Ydy - Xdx)r}{ds^2}\right) = \frac{Ydx + Xdy}{ds}.$$

Seja F a velocidade communicada pela força central, a qual he huma funçaõ de z; a quantidade de movimento do elemento ds ſerá $Fds = MO$, que ſendo reſolvida em outras duas MS, MT, ſegundo as direcções MQ, PM, dará $z : Fds :: x : MT = \frac{Fxds}{z} = Y$, e $z : Fds :: y : MS = \frac{Fyds}{z} = X$.

Subſtituindo pois eſtes valores na equaçaõ geral, teremos $d\left[\frac{Fr}{zds}(xdy - ydx)\right] = \frac{F}{z}(xdx + ydy) = Fdz$, cujo integral he $\frac{Fr}{zds}(xdy - ydx) = \int Fdz$. Porém ſuppondo conſtante $mr = zd\Phi = du$, teremos o raio oſculador $r = \frac{zds^3}{(-ds^2 + zddz)du}$; e ſendo o angulo $ACM = \Phi$, teremos $xdy - ydx = zzd\Phi$; logo ſubſtituindo eſtes valores, teremos $\frac{Fzds^2}{-ds^2 + zddz} = \int Fdz$, ou $\frac{F}{\int Fdz} + \frac{1}{z} = \frac{ddz}{du^2 + dz^2}$. Multiplicando pois por dz, teremos $\frac{Fdz}{\int Fdz} + \frac{dz}{z} = \frac{dzddz}{du^2 + dz^2}$, cujo jo integral he $l\int F\,dz + lz = \frac{1}{2}\,l(du^2 + dz^2) - l\frac{du}{C}$, ou $z\int F\,dz = \frac{C\,ds}{du} = C\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{z^2\,d\varphi^2}\right)}$. Separando pois teremos finalmente

$$d\varphi = \frac{\pm C\,dz}{z\sqrt{[z^2(\int F\,dz)^2 - C^2]}}$$

por equaçaõ differencial da catenaria no caſo de ſerem as direcções da gravidade convergentes para o centro das forças.

Mas para moſtrarmos huma applicaçaõ deſte reſultado geral, ſupponhamos $F = \frac{bC}{azz}$, iſto he, ſupponhamos que a gravidade obra na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias, e teremos $\int F\,dz = \frac{-bC}{az} + \frac{C}{a}$; logo $d\varphi = \frac{\pm a\,dz}{z\sqrt{[(z-b)^2 - a^2]}}$. Eſta equaçaõ ſe integrará fazendo-a primeiro racional; e como b póde ſer maior, ou menor do que a, haverá dous caſos para examinar. Seja pois B o ponto mais baixo da curva, $CB = c$, e o angulo $BCM = \varphi$. Teremos no primeiro caſo

$$\varphi = \pm\frac{m^2-1}{m}\,l\,\frac{\sqrt{\left(m^2 - \frac{c}{z}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{c}{z}\right)}}{\sqrt{(m^2-1)}},$$

e no ſeguudo

$$\frac{c}{z} = \frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2}\,cos\,\frac{2m}{1+m^2}\,\varphi.$$

Se m for numero inteiro, a catenaria ſerá algebrica no ultimo caſo.

DA ALAVANCA.

186 A *Alavanca* he huma vara inflexivel PCQ apoyada ſobre hum ponto C (Fig. 81.), ao redor do qual póde mover-ſe livremente. Para maior ſimplicidade ſupporemos primeiramente, que ella naõ tem pezo algum.

Sejaõ duas potencias A e B applicadas ás duas extremidades P e Q de huma alavanca PCQ de qualquer figura ra que seja; devem achar-se as condições necessarias para que se ponhaõ em equilibrio por meio desta maquina.

Produzaõ-se as direcções AP, BQ das potencias até concorrerem no ponto E. E como podem considerar-se ambas actuando conjunctamente no ponto E, represente-se por EF a acçaõ da força A, e por EG a da força B; e a diagonal EH será a resultante. Bem se vê, que esta naõ póde ser destruida senaõ quando se dirigir ao ponto de apoyo C. Seja pois C a carga deste ponto representada pela resultante EH, e no caso do equilibrio teremos

$C : A : B :: EH : EF : EG :: sen\ PEQ : sen\ CEQ : sen\ CEP.$

187 Porquanto a resultante das potencias A e B passa pelo ponto de apoyo C, a soma dos momentos em ordem a este ponto deve reduzir-se a nada (n. 57.). Conduzindo pois do ponto C para as direcões das potencias AP, BQ as perpendiculares CM, CN, teremos $A . CM = B . CN$; resultado, que igualmente póde deduzir-se da proporçaõ $A : B :: sen\ CEQ : sen\ CEP$. Donde concluiremos geralmente a condiçaõ fundamental do equilibrio na alavanca,

Que *para haver equilibrio entre duas potencias applicadas ás extremidades de qualquer alavanca, he necessario que os seus momentos sejaõ iguais*, ou (que vem a ser o mesmo), *que cada huma das potencias seja reciprocamente como a distancia do ponto de apoyo á sua direcçaõ.*

188 Em geral: Seja qual for o numero das potencias applicadas de qualquer maneira aos braços de huma alavanca, naõ poderá haver equilibrio senaõ quando a resultante geral passar pelo ponto de apoyo. E por conseguinte a soma dos momentos das potencias, que tendem a fazer girar a alavanca para huma parte, deve ser igual á soma dos momentos das que tendem a fazella girar para a parte opposta, tomando-se os ditos momentos em ordem ao ponto de apoyo.

189 Se as duas potencias, ou os dous pezos A e B (Fig. 82.), tiverem as direcções parallelas, as perpendiculares CM, CN se acharáõ em huma mesma linha MN; e se alem disso a alavanca for recta, os dous braços CP, CQ seraõ proporcionais ás linhas CM, CN. Logo para haver equilibrio, deverá ser $A . CP = B . CQ$; isto he, *para que dous pezos applicados a huma alavanca recta se ponhaõ em equilibrio, será necessario que sejaõ entre si reciprocamen-*

te

te como os braços, aos quais estaõ applicados.

Logo, se o braço CP for o dobro de CQ hum pezo A de huma libra fará equilibrio ao pezo B de duas libras. Se a hum, e outro ajuntarmos o mesmo pezo, bem se vê que naõ póde subsistir o equilibrio. Mas o unico meio de o conservar nesse caso, he o ajuntar a B o dobro do que se ajuntar a A. Do mesmo modo se vê, que sendo CP triplo de CQ, o pezo A de huma libra fará equilibrio ao pezo B de tres libras, e assim por diante; donde se segue, que por meio de huma alavanca de proporcionado comprimento podemos reduzir ao equilibrio os pezos mais desiguais.

160 Se em lugar do pezo A imaginarmos huma potencia, que faça equilibrio ao pezo B, poderemos considerar na alavanca tres cousas differentes, ao menos em quanto ao nome, a saber, a *potencia*, o *pezo* ou resistencia, e o *ponto de apoyo*. Estas tres cousas naõ saõ realmente, senaõ tres potencias differentes, das quais as duas primeiras reunem a sua acçaõ contra o ponto de apoyo, o qual faz as vezes de terceira potencia, e destroe a resultante das outras duas.

Sem embargo, tem prevalecido o costume de distinguir tres especies de alavanca, conforme a posiçaõ da potencia, resistencia, e ponto de apoyo. Chama-se alavanca *da primeira especie*, quando o ponto de apoyo se acha entre a potencia, e a resistencia; *da segunda especie*, quando a resistencia se acha entre a potencia, e o ponto de apoyo; e *da terceira especie*, quando a potencia está entre a resistencia e o ponto de apoyo.

No primeiro caso, póde a potencia ter, ou naõ ter ventagem sobre o pezo, conforme o braço a que se applicar; no segundo, sempre tem ventagem sobre o pezo; e no terceiro, sempre fica de inferior partido.

191 Quando se quer sustentar huma massa M (Fig. 86.), huma grande pedra por exemplo, toma-se ordinariamente huma alavanca, da qual se faz passar huma pequena parte CP debaixo da mesma pedra; e entaõ, sendo o ponto C apoyado sobre o chaõ, a potencia Q obra com tanto maior superioridade, quanto o braço CQ ao qual se applica he mais comprido que a parte CP. Os que distinguem tres especies de alavancas, consideraõ esta como pertencente á segunda especie.

192 Mas quando hum homem ſuſtenta hum pezo na extremidade de hum braço, eſtendido horizontalmente, a alavanca que niſſo emprega he da terceira eſpecie, porque os muſculos que entaõ fazem as vezes de potencia ſe achaõ entre o pezo, e o ponto de apoyo. Porém em hum homem de mediana eſtatura, o comprimento do braço he para a diſtancia do muſculo *deltoide* ao ponto de apoyo, como 100 para 3; logo hum pezo de 30 libras naõ póde ſuſtentar-ſe neſta poſiçaõ, ſenaõ por hum esforço de 1000 libras. Por iſſo naõ devemos eſpantarnos da difficuldade, que ſe experimenta em ſuſtentar do modo referido qualquer pezo conſideravel.

A' primeira viſta parecerá, que huma diſpoſiçaõ diverſa ſeria mais favoravel á acçaõ dos noſſos muſculos. Mas reflectindo mais profundamente na couſa, he facil de ver que a alavanca da terceira eſpecie era a mais propria para produzir grandes movimentos nos pezos, que ſe levantaõ; e ſe para iſſo ſaõ neceſſarias maiores forças, com que intelligencia, mas ao meſmo tempo com que economia providenciou a tudo o Autor da Natureza! *Veja-ſe* Borelli *De motu animalium*, e Nieuwentyt *Exiſtence de Dieu démontrée par les merveilles de la Nature.*

193 Mas, para o tornar a dizer, eſtas tres eſpecies de alavancas ſe reduzem a huma ſó; porque he manifeſto, que podemos conſiderar indifferentemente o pezo, a potencia, e a carga do apoyo, como tres potencias differentes, das quais duas luctaõ com a terceira. E huma vez que ſe tenhaõ eſtabelecido em equilibrio, que embaraço póde haver em conſiderar qualquer dos tres pontos P, C, Q (Fig. 82.), como apoyo da alavanca, ſendo todos elles fixos?

Sabemos, por exemplo, que a carga do apoyo C he $A+B$; logo podemos conſideralla como huma potencia que obra de baixo para cima, e que faz equilibrio á potencia Q por meio da alavanca PCQ apoyada no ponto P. E entaõ teremos, por condiçaõ do equilibrio $(A+B) PC = B \cdot PQ$, donde ſe tira igualmente $A \cdot CP = B \cdot CQ$, como já moſtrámos.

194 Se huma alavanca BA (Fig. 83.), apoyada pelas duas extremidades A, B for carregada em C por qualquer pezo M, bem ſe vê que para achar a carga de cada hum dos apoyos, he neceſſario reſolver a potencia M em outras duas que ſejaõ parallelas, e paſſem por elles. A que

deve

deve paſſar pelo ponto A ſerá $\frac{BC}{AB}$ M, e a que deve paſſar pelo ponto B ſerá $\frac{AC}{AB}$ M.

195 Agora, ſe quizermos attender ao pezo da alavanca, conſiderallo-hemos como huma nova potencia, cuja acçaõ reunida no centro de gravidade ſe exercita perpendicularmente ao horizonte. Donde ſe ſegue, que naõ ſerá neceſſario attender ao pezo das alavancas, todas as vezes que o centro de gravidade correſponder ao ponto de apoyo.

Mas ſupponhamos, que as duas potencias A, B ſaõ parallelas, e verticais (Fig. 84.), e que G he o centro de gravidade da alavanca PCQ, de maneira que todo o ſeu pezo L actûe verticalmente pela direcçaõ GL. Entaõ conduzindo qualquer recta MN teremos por condiçaõ do equilibrio $B.CN + L.CI = A.CM$.

196 Sendo pois dada huma alavanca PCQ, o ſeu pezo L, e as potencias A, B applicadas ás extremidades della, acharemos o ponto de apoyo C, ſobre o qual deve formar-ſe o equilibrio, conduzindo qualquer recta mn que corte em m, i, n as perpendiculares PA, IL, QB dadas de poſiçaõ. Porque entaõ teremos $B.cn + L.ci = A.cm$; e ſubſtituindo $ci + in$ em lugar de cn, e $im - ic$ em lugar de cm, acharemos $B.ci + B.in + L.ci = A.im - A.ic$; logo $ic = \frac{A.im - B.in}{A + B + L}$. Tendo aſſim determinado o ponto c, por elle conduziremos a vertical cC, aqual cortará a alavanca no ponto C, e eſte ſerá o ponto de apoyo que buſcamos.

197 Conſideremos agora huma alavanca da ſegunda eſpecie CPQ (Fig. 85.), a qual ſupporemos recta, e uniformemente pezada. Seja o comprimento della $CQ = a$, a parte $CP = b$, e a ſua gravidade eſpecifica $= g$. Logo teremos ga por expreſſaõ do pezo total da alavanca L, o qual ſe conſidera actuar em I meio de CQ. Por conſeguinte, a condiçaõ do equilibrio nos dará $Ba = bA + \frac{1}{2}gaa$, ou $B = \frac{bA}{a} + \frac{1}{2}ga$. Se a for muito pequeno, deverá pois a potencia B ſer muito grande, e pelo contrario ſe a for muito grande tornará a ſer B muito gran-

de; logo entre estes dous extremos haverá hum certo valor de B, de maneira que naõ possa dar-se outro menor, que faça equilibrio á potencia A, e ao pezo da alavanca.

Para o determinar, differenciaremos o valor geral de B fazendo a variavel, e teremos $\frac{1}{2}\,g\,da - \frac{bA\,da}{aa}$. Dividindo por da, e igualando a nada, será $\frac{1}{2}\,g = \frac{bA}{aa}$; donde se tira $a = \sqrt{\frac{2bA}{g}}$, $ga = \sqrt{2bAg}$, e $\frac{bA}{a} = \frac{1}{2}\,ga$; logo $B = \sqrt{2bAg}$. Conhecendo pois o pezo A, a distancia CP na qual se acha applicado, e a gravidade especifica g da alavanca, acharemos immediatamente a mais pequena potencia que póde fazer-lhe equilibrio, calculando a formula $B = \sqrt{2bAg}$; e o comprimento da alavanca, calculando a formula $a = \sqrt{\frac{2bA}{g}}$.

Exemplo. Supponhamos $CP = 3$ pollegadas, $A = 200$ libras, e que a gravidade especifica da alavanca, ou geralmente o que péza huma das suas pollegadas, he $\frac{1}{2}$ libra. Entaõ, $CQ = a = \sqrt{2400} = 49$ pollegadas $= 4$ pés, e 1 pollegada, e $B = \sqrt{600} = \frac{49}{2}$ libras $= 24$ libras, e 8 onças. He pois necessario, que neste caso tenha a alavanca 4 pés, e huma pollegada de comprimento, e que se lhe applique huma potencia equivalente ao pezo de 24 libras, e 8 onças.

198 Quando se pertende mover huma pedra M sobre a sua esquina viva KL (Fig. 86.), por meio de huma alavanca da segunda especie CPQ, naõ deve tomar-se por B o pezo total da pedra, porque huma parte delle he sustentada pela esquina KL; mas para determinar o que tem realmente o lugar de B, podemos conduzirnos da maneira seguinte.

Seja G o centro de gravidade, e N o ponto onde a vertical que passa por G encontra a base $KLFG$; e produza-se PN até a linha KL. Isto posto, o pezo M actuando tando pela direcçaõ GN ſe reſolverá em duas potencias, que paſſaráõ huma por P, e a outra por T. A primeira terá por valor $\frac{NT}{PN}$; mas, como ella naõ he perpendicular á alavanca ſerá neceſſario reſolvella tambem em outras duas, huma parallela, e a outra perpendicular á alavanca. Em virtude da primeira, ver-ſe-hia correr a pedra pela alavanca, ſe a fricçaõ naõ foſſe ſuperior ao ſeu effeito; mas a ſegunda ſerá realmente tudo o que deve tomar-ſe por B.

Applicaçaõ dos principios precedentes á Theorica das balanças.

199 DOs principios, que acabamos de expôr, depende a conſtrucçaõ das *balanças*. Ainda que ellas ſejaõ de varias maneiras, todas ſe explicaõ facilmente, reduzindo-ſe ao que temos moſtrado na alavanca. Todo o mundo conhece as balanças ordinarias, que naõ ſaõ outra couſa ſenaõ huma alavanca poſta em equilibrio ſobre o ponto que a divide em partes iguais, a qual ſuſtenta nas extremidades dos *braços* dous *copos*, ou *pratos*, que ſervem para nelles ſe porem os pezos, e as materias que ſe haõ de pezar.

A alavanca AB (Fig. 87.), que particularmente ſe chama o *traveſſaõ* das balanças, he a peça principal deſta maquina. Os dous *braços* delle AX, BX devem ſer perfeitamente iguais em comprimento. Tambem he conveniente procurar, que ſejaõ igualmente pezados; mas eſta condiçaõ naõ he taõ importante como a primeira, para a bondade das balanças, porque he facil de compenſar a deſigualdade do pezo dos braços com o dos copos, mas naõ ha couſa alguma que poſſa emendar o erro, que provem da deſigualdade do comprimento.

O traveſſaõ he paſſado pelo meio por hum eixo boleado pela parte ſuperior, e agudo pela inferior, a fim de ſe dar ao traveſſaõ toda a mobilidade poſſivel. Eſte eixo paſſa por dous buracos S, X da *aza* STX. O *fiel* E faz parte do traveſſaõ, he perpendicular ao comprimento delle, e diſpoem-ſe de maneira que ſe ache exactamente no plano da aza todas as vezes que o traveſſaõ eſtiver bem hori-

horizontal. Em cada extremidade do travessaõ está dependurado por tres cordões, ou cadeias, hum prato maior, ou menor, conforme o uso para que a balança se destina. Quando ambos os pratos estaõ vazios, he necessario, se a balança he boa, que ella se ponha em equilibrio, e que o fiel naõ incline para huma nem para outra parte do plano da aza.

Seria inutil insistir sobre os usos de huma maquina taõ familiar. Ninguem ignora, em geral, que para pezar qualquer massa se poem esta em hum dos pratos, naõ importa qual, e no outro se vaõ metendo pezos conhecidos até estabelecer o equilibrio, que logo se conhece pela posiçaõ vertical do fiel; e que finalmente se conclue, que o pezo da massa he igual á soma dos pezos, que no outro prato lhe fazem equilibrio.

200 Huma cousa porém, como já dissemos, póde fazer muito defeituosa esta primeira especie de balanças, que he a desigualdade dos braços. Porque he facil de compensar o encurtamento de hum com o excesso do pezo do copo nelle pendurado; e entaõ sendo os pezos dos corpos na rasaõ inversa dos comprimentos dos braços, o equilibrio terá lugar, sem que todavia possamos fiarnos da exactidaõ da balança. Porque metendo a mercadoria no prato do braço mais comprido, está claro que ella fará equilibrio a hum pezo realmente maior que o seu.

201 Mas sabemos, que para verificar esta especie de balanças, basta fazer passar respectivamente de hum prato para o outro tanto o pezo como a cousa que se quer pezar. Logo se vê, que o pezo já maior do que devia ser, adquire novas forças pela applicaçaõ ao braço mais comprido, e que por huma subita preponderaçaõ faz desapparecer todo o equilibrio. Em fim, por muito dolosa que seja huma balança semelhante, com ella podemos determinar o verdadeiro pezo das mercadorias, se tomarmos o meio proporcional geometrico entre o pezo, que lhe faz equilibrio de huma parte, e o que lho faz da outra.

Para o demonstrar, seja y o pezo da mercadoria, e a o que mostra na balança, quando está applicada ao braço mais curto, que supponho ser AS; e teremos $y . AS = a . SX$. Seja b o pezo, que mostra a mesma mercadoria, estando applicada ao braço mais comprido; e teremos tambem $y . SX = b . AS$; logo $yy . AS . SX = ab . AS . SX$, e $y = \sqrt{ab}$.

Por

Por exemplo: Se depois de havermos pezado a mercadoria em hum dos pratos, acharmos que faz equilibrio com o pezo de 25 libras, e passando-a para o outro prato acharmos que o faz com o pezo de 26 libras, diremos que o verdadeiro pezo della he 25 libras, 7 onças, 7 oitavas, e 26 graõs.

202 A balança, que havemos descrito, he sem duvida muito accomodada para os usos ordinarios; mas naõ deixa de padecer alguns inconvenientes. Hum dos maiores he, que para pezar differentes mercadorias saõ necessarios differentes pezos; quando na *Balança Romana*, ou *balança de hum prato*, hum só pezo basta para pezar differentes mercadorias. Outro inconveniente da balança ordinaria he, que para a fazer mais perfeita, deve dar-se certo comprimento aos braços; e entaõ saõ sujeitos a dobrar-se, e se fazem inuteis. He necessario tambem, que o travessaõ possa mover-se com muita facilidade, e para isso deve a parte inferior do eixo ser bem aguda; porém quanto mais aguda, de qualquer materia que seja, tanto he mais sujeita a embotar-se, e huma vez que perca o fio, naõ póde a balança ter a primeira mobilidade, porque a fricçaõ do eixo he maior. Tambem se aumenta a fricçaõ por outra causa, que he a grandeza dos pezos; e dahi vem, que huma balança bastantemente sensivel para pezar em pequena quantidade materias preciosas, como ouro, e diamantes, naõ poderia servir por muito tempo neste uso, se se empregasse a pezar tambem outras materias de pezo consideravel.

Em quanto o travessaõ está horizontal, o pezo do fiel carrega sobre o eixo da balança: mas quando o travessaõ pende para huma das partes, bem se vê que o pezo do fiel ajuda a potencia que tem prevalecido sobre a outra. Por isso se tem o cuidado de naõ usar senaõ de fieis muito delgados, e ainda de lhes applicar por baixo hum pequeno contrapezo, que inclinando para a parte opposta lhes faça de alguma fórma equilibrio.

Na construcçaõ das balanças grandes devem preferir-se cadeias de metal ás cordas, naõ sómente porque resistem mais, mas tambem porque saõ menos expostas ás influencias da humidade e da secura. Tambem se devem preferir as materias mais duras e mais polidas para o travessaõ, ou ao menos para o eixo de huma balança solida, e facil de mover-ſe. Sobre eſte objecto podem alem diſto conſultar-ſe as Obras de muitos Geometras, *Jac. Bernoullii Oper. Vol. I .... Euleri diſquiſitio de bilancibus in Comm. Acad. Petrop. An.* 1738. *tom. X .... Lambert, Acta Helvetica Vol. III. &c.*

203 A *Balança Romana*, ou *Balança de hum copo* (Fig. 88.) he compoſta de huma alavanca, ou traveſſaõ *A B*, que ſe deve fazer movel o mais que for poſſivel ſobre hum eixo *C*, por huma ſuſpenſaõ ſemelhante á das balanças ordinarias. Hum dos braços *C B* deve ſer mais comprido que o outro *C A*, e quanto mais o for, tanto mais extenſo ſerá o uſo deſta balança. Na extremidade do braço menor ſe ſuſpende hum prato accomodado para receber as materias que ſe haõ de pezar, ou ſe applica hum gancho para as ſuſtentar; e ao longo do outro braço póde correr livremente hum pezo *F*, pendente por huma eſpecie de anel. Iſto poſto, eſtando o prato vazio, chega-ſe o pezo para o centro *C*, até haver equilibrio perfeito entre as partes da balança. Suppondo, que entaõ o anel *H* ſe acha ſituado no ponto *o* do braço *C B*, eſtá claro que ſe puzermos qualquer corpo *Q* no prato deſta balança, o equilibrio ſe romperá, até que apartando o pezo *F* do eixo *C*, quanto for conveniente, ſe torne a reſtituir; e entaõ veremos, que o momento *C A . Q* deve ſer igual ao momento *F . C H* menos o momento *F . C o* do meſmo pezo *F*, por quanto elle ſe tirou do lugar em que eſtava na primeira diviſaõ *o*. Logo ſerá *C A . Q* = *F . H o*.

Deſta conſtrucçaõ ſe ſegue, que dividindo o eſpaço *o B* em partes *o* 1, 12, 23, 34, &c, cada huma dellas igual ao braço menor *C A*, o numero correſpondente ao ponto em que ſe achar o anel *H* denotará as vezes que o corpo *Q* contém o pezo *F*. Por exemplo, ſe eſte pezo comprehendendo tambem o do anel for de huma libra, e eſtiver na terceira diviſaõ, concluiremos que o pezo *Q* he de tres libras; e aſſim dos mais. Multiplicando as diviſoens do braço *C B*, pezar-ſe-haõ com facilidade até as menores partes da libra: mas para os uſos ordinarios, baſta dividir em 16 partes iguais cada hum dos intervallos já marcados, a fim de ſe pezarem as onças com exactidaõ.

204 A balança da China he como a Romana, mas de huma forma muito ſimples, e applicada a maior numero de uſos.

ufos. Della se servem muito os Chins para pezar até as mais pequenas faiscas de ouro. Consiste em huma pequena vara, ou travessaõ de marfim *A B* (Fig.89.), de cuja extremidade *A* está pendente hum prato proprio para receber o que se quer pezar. Este travessaõ he furado em *C* de maneira, que passando hum cordaõ *C D* pelo buraco, nelle fica seguro por meio de hum nó, que tem na parte inferior. Por este cordaõ he que se sustenta a balança, a qual tem o outro braço dividido em partes bem iguais, e nelle hum contrapezo, que se vai afastando do ponto *C* até haver equilibrio. Mas a fim de fazer mais commodas as suas balanças, costumaõ os Chins dar no travessaõ outros dous furos *E*, *F*, para poderem suspendellas por tres pontos differentes, conforme a necessidade. Para cada eixo de suspensaõ tem o travessaõ huma divisaõ particular; e ficando sempre o prato na mesma extremidade, o contrapezo se aparta mais ou menos, conforme o eixo de suspensaõ.

Em lugar de fazer movel o contrapezo (Fig. 90.), podia fazer-se o prato; e esta balança serviria igualmente para os mesmos usos: mas em geral, he mais facil de mover o contrapezo, e dessa maneira se usa menos o prato da balança.

205 Os Maquinistas tem-se exercitado muito em descobrir novos meios de pezar toda a sorte de corpos. Huma das maquinas mais ingenhosas, que se tem imaginado para este effeito, consiste em hum quarto de circulo fixo sobre o pé *P*. No centro *C* se acha hum eixo perpendicular ao plano do quarto do circulo, e ao redor do eixo estaõ dipostas tres roldanas moveis e concentricas 1, 2, 3, por cada huma das quais passa hum cordaõ, em que se póde successivamente dependurar o prato. Os diametros das roldanas saõ arbitrarios: porém ellas saõ todas fixamente unidas a hum mesmo raio *C M* feito de materia algum tanto pezada, de maneira que naõ possaõ girar, sem que esta especie de *index* ou *alidada* se mova tambem. O cordaõ que passa pela roldana maior serve para os pezos mais pequenos, e os outros dous servem por gradaçaõ para pezar massas mais consideraveis.

O centro de gravidade *G* do index *C M* he o que faz as vezes de potencia. Supponhamos, que estando o prato vazio, *C M* corresponde ao ponto *o*; está claro, que carregando o prato se romperá o equilibrio a favor da materia

ria que ſe peza, e que o prato deſcerá conſeguintemente até que o index *C M* tenha ſubido para *D* a huma altura ſufficiente, para que o ſeu centro de gravidade obrando por hum braço de alavanca mais comprido poſſa fazer-lhe equilibrio. Mas a fim de que as maſſas mais pezadas naõ obriguem o index a ſubir rapidamente acima do ponto *D*, ajunta-ſe algum pezo na ſua extremidade *M*, para o fazer mais pezado, quando ſe trata de pezar maſſas conſideraveis. Tambem he bom pôr em *D* hum obſtaculo, que retenha o index no quarto de circulo, no caſo de que o ſeu pezo naõ ſeja baſtante.

He facil de ver, que neſta maquina o jogo do index ao redor do ponto *C* naõ póde ſer taõ livre, como o do traveſſaõ nas balanças ordinarias. A fricçaõ he neceſſariamente maior; e por iſſo naõ deve ſervir, ſenaõ para pezar maſſas mediocres, e que naõ ſejaõ de grande preço. Em concluſaõ: naõ ha meio, nem mais ſimples, nem mais proprio, para examinar os mais pequenos pezos, doque as balanças de que uſaõ os joyalheiros para pezar os diamantes, e os enſayadores da moeda para pezar o ouro. Saõ balanças ordinarias, mas taõ juſtas e ſenſiveis, que baſta muitas vezes a milleſſima parte de hum graõ para lhes alterar o equilibrio. He neceſſario pollas ao abrigo do vento, cubrindo-as com hum pequeno recipiente de vidro.

206 A facilidade de pezar as materias menos precioſas faz uſar de huma maquina de aço, cuja forma ſe reconhece facilmente pela inſpecçaõ da Figura 92. Tambem ſe uſa de outra maquina quaſi ſemelhante (Fig. 93), á qual ſe applica hum moſtrador dividido em mais ou menos partes, conforme ſe deſtina a pezar maſſas de maior, ou de menor pezo. Mas naõ deve eſperar-ſe grande exactidaõ do uſo deſtas ultimas maquinas, porque a fricçaõ, a alteraçaõ da elaſticidade, a ferrugem, e todas as influencias do ar as fazem neceſſariamente imperfeitas.

A eſtas primeiras applicações da alavanca ſe podiaõ ajuntar outras innumeraveis: mas todo o mundo ſabe, quanto ellas ſe multiplicaõ nos diverſos uſos da vida. Os remos dos barqueiros, as pontes levadiças com os ſeus contrapezos, as tizouras, tenazes, manivellas: tudo em fim nos offerece na arte, e na natureza applicações innumeraveis deſta maquina, que paſſa com raſaõ pela mais ſimples, e mais util de todas.

DA ROLDANA.

207 A *Roldana*, *polé*, ou *moutaõ* (Fig. 93.) he huma especie de roda, de grandeza arbitraria, cuja circumferencia *CFD* he cavada por huma especie de góla, a fim de nella se ajustar a corda *ACB*, cujas extremidades saõ occupadas huma pelo pezo, e a outra pela potencia. A roda inteira he movel sobre o eixo *E*, que atravessa a *alça* *EG*.

Quando a alça está suspensa de hum ponto fixo *G*, a roldana he *fixa*; e entaõ he necessario para haver equilibrio, que a potencia *B* seja perfeitamente igual ao pezo *A*. Donde se segue, que por meio desta maquina naõ pode ter a potencia ventagem alguma sobre o pezo, senaõ a de mudar a direcçaõ a seu arbitrio; circunstancia, que favorece muitas vezes o emprego da sua acçaõ, como se vê nas polés dos poços, mastros &c.

Porém, quando a corda que passa pela roldana está por huma das extremidades atada a hum ponto fixo *A* (Fig. 94.), e a alça levanta o pezo *M*, a roldana he *movel*; e entaõ, para haver equilibrio he necessario que a tensaõ do cordaõ *AC*, ou a carga do apoyo *A* seja igual á potencia *B*; porque a naõ ser assim, correria a roldana pela corda, até haver igualdade de huma e de outra parte.

Seja pois representada por *JK* a carga do apoyo fixo, e por *KL* a potencia *B*; a diagonal *HK* representará o pezo *M*. E porque temos $B : M :: KL : HL$, os triangulos semelhantes *HKL*, *CED* daráõ $B : M :: DE : CD$. Logo *para haver equilibrio na roldana movel, he necessario que seja a potencia B para o pezo M, como o raio da roldana para a subtensa do arco comprehendido pela corda.*

Donde se segue, que em quanto o dito arco for maior que 60° a potencia terá ventagem sobre o pezo; e que terá a maior que he possivel, quando o arco for de 180°, o que succederá todas as vezes que os cordoens *AC*, *BD* forem parallelos. Logo naõ póde esperar-se condiçaõ mais favoravel para a potencia applicada a huma roldana movel, do que polla em equilibrio com hum pezo duplo. Se o arco subtendido por *CD* tiver menos de 60°, bem se vê porque rasaõ a potencia fica de peior partido. He necessario advertir, que deve ter-se conta com o pezo da rolda-

roldana, quando se pertende grande exactidaõ no resulta-do do calculo, e entaõ basta ajuntar o pezo della ao da massa *M*.

A propriedade da roldana movel deu lugar á invençaõ de huma maquina, que se mostra representada na Fig. 95. Nella se vê hum pezo, ou huma potencia *Q*, cuja acçaõ communicando-se por meio de huma polé fixa *T* a sinco roldanas moveis, faz equilibrio ao pezo *P* suspenso no *gato* da quinta. Todas estas roldanas saõ iguais entre si, e os cordoens que as sustentaõ saõ parallelos. Cada hum delles está por huma das suas extremidades atado a hum ponto fixo *A* em huma peça de madeira, ou em qualquer muro.

Isto posto, he evidente que a primeira roldana movel O deve estar em equilibrio com huma potencia *Q* duas vezes menor que a carga, que ella sustenta. A carga da roldana seguinte deve pela mesma rasaõ ser quatro vezes maior que a mesma potencia, e assim por diante, até chegar á carga da roldana O^{IV}, que naõ he outra cousa mais do que o pezo *M*, e que se achará conseguintemente em equilibrio com outro pezo *Q* trinta e duas vezes menor. Multiplicando pois as roldanas moveis, podem aumentar-se consideravelmente as forças de huma potencia, que obra por meio desta maquina. A expressaõ geral deste aumento he $P = 2^m Q$.

208 Chama-se *Cadernal* huma maquina composta de muitas roldanas *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 96.), dispostas de qualquer maneira dentro de huma mesma *alça* *A D*, e chama-se em particular cadernal de dous, tres, ou quatro *gornes*, conforme o numero das roldanas. Huma força mediocre basta para fazer em hum cadernal equilibrio a huma grande resistencia: mas o effeito desta maquina será mais notavel, quando a hum cadernal fixo se ajuntar outro movel. Supponhamos, que o cadernal *A D* está pregado fortemente pelas orelhas *M* e *N* em quaisquer pontos fixos, e que outro cadernal *G E* carregado de hum grande pezo *P* está suspenso horizontalmente ao primeiro por huma unica corda *H* 7 6 5 4 3 2 1 *Q*, que joga por todos os gornes, e na extremidade *Q* he tirada pela potencia. Isto posto, busquemos a condiçaõ do equilibrio entre o pezo *P*, e a potencia *Q*: mas antes disso, naõ nos esqueçamos de advertir, que o pezo do cadernal movel, e de tudo o que lhe pertence deve ajuntar-se ao pezo *P*.

Pri-

Primeiramente eſtá claro, pelo que temos dito da roldana fixa, que a tenſaõ do cordaõ 1 he igual á potencia Q, e que a do cordaõ 2 he igual á do cordaõ 1. Por conſeguinte todos os cordoens do apparelho devem ter a meſma tenſaõ, e a força della ſerá medida pela potencia Q. Porém a tenſaõ de huma corda em equilibrio vem de duas potencias iguais, que a eſtendem para partes contrarias; logo podemos conſiderar cada cordaõ, como tirado de baixo para cima pela potencia Q, e de cima para baixo por outra potencia igual a Q. Mas eſta, que naõ tende evidentemente ſenaõ a carregar o cadernal fixo, ſerá abſorbida pela reſiſtencia que elle oppoem. A primeira pelo contrario tende a elevar o cadernal inferior; e aſſim conſideraremos cada cordaõ como a direcçaõ de huma potencia Q que tende a elevar o cadernal EFG.

Se reſolvermos pois cada huma deſtas direcções em outras duas, huma horizontal, e outra vertical, veremos facilmente que as primeiras devem deſtruir-ſe mutuamente, para que o cadernal naõ tenha movimento algum horizontal; e que as ſegundas ſaõ as que ſe empregaõ realmente em ſuſtentar o pezo P. Seja pois A o angulo, que faz qualquer dos cordoens com o horizonte. He facil de ver, que $Q\,ſen\,A$ he o esforço vertical que reſulta da potencia Q applicada ſegundo a direcçaõ do meſmo cordaõ. Logo teremos a ſoma de todas eſtas forças, ou $ſom.\,Q\,ſen\,A$, ou $Q.\,ſom\,ſen\,A = P$. He neceſſario pois, para eſtabelecer o equilibrio neſte apparelho, que a potencia ſeja para o pezo como o ſeno total para a ſoma dos ſenos dos angulos, que formaõ com o horizonte os cordoens, que ſobem do cadernal inferior para o ſuperior.

Donde ſe ſegue, que ſendo os cordoens parallelos, a potencia deve ſer para o pezo, como a unidade para o numero dos ditos cordoens; e por iſſo eſta diſpoſiçaõ he a mais favoravel á acçaõ da potencia.

A condiçaõ, que acabamos de expôr, tem igualmente lugar, quando os dous cadernais eſtaõ diſpoſtos verticalmente (Fig. 97.): mas entaõ he neceſſario, que as roldanas ſejaõ deſiguais; e querendo que os cordoens ſejaõ parallelos, he neceſſario, que os diametros das roldanas que a corda abraça ſucceſſivamente ſigaõ huma progreſſaõ arithmetica, que tenha por differença o diametro da mais pequena.

Suppondo pois que as roldanas D, E, C, F, B, G, A ſaõ reſpectivamente, em quanto aos diametros, como 1, 2,

3

3, 4, 5, 6, 7, teremos no caſo do equilibrio a condiçaõ ſeguinte: *O pezo deve equivaler a tantas vezes a potencia, quantos ſaõ os cordoens que ſobem do cadernal inferior para o ſuperior.* Aſſim no caſo preſente, huma potencia Q ſete vezes menor que o pezo P o ſuſtentaria em equilibrio. Podem tambem ſer iguais o diametros das roldanas, eſtando ao lado humas das outras, cada huma em ſua caſa, como ſe pratica em muitos apparelhos.

O uſo dos cadernais he muito commum nas manobras dos navios, e geralmente em todo o lugar, quando ſe trata de levantar grandes pezos. Eſta eſpecie de apparelhos he mais commoda, que muitas outras, porque para ſe fazer jogar naõ carece, nem de muito eſpaço, nem de grandes esforços. Porém em quanto ás ventagens que póde ter a potencia, he certo que naõ podem paſſar de certos limites; porque augmentando muito o numero das roldanas, e dos cordoens, a fricçaõ ſe faz taõ conſideravel, que a potencia naõ terá mais que ganhar.

Ha muitos outros modos de diſpór as roldanas, os quais ſe encaminhaõ mais ou menos a multiplicar as forças: mas nós naõ entraremos a referillos por meudo, ſendo baſtantes os principios precedentes, para calcular o effeito delles.

DO SARILHO, E DE OUTRAS MAQUINAS QUE A ELLE SE REDUZEM.

209 SObre dous apoyos *A*, *A* (Fig. 98.) deſcança horizontalmente hum cylindro *B B*, cujas extremidades podem girar com facilidade nos buracos, ou fendas dos apoyos. Perpendicularmente a eſte cylindro eſtá fixa huma roda *R*, que a potencia ſe esforça a mover. A roda leva comſigo na ſua revoluçaõ o cylindro, ao qual eſtá preza huma corda que ſuſtenta o pezo, e que o levanta pouco a pouco á medida que vai girando o cylindro. Eſte todo forma o que chamamos *Sarilho*, cujo uſo he taõ commum nas vezinhanças de Paris, e em outras partes, para tirar as pedras do fundo das pedreiras.

Muitas vezes em lugar da roda ſe uſa ſimpleſmente no Sarilho de huma manivella, ou de duas alavancas, ou barras, que cruzaõ perpendicularmente o cylindro: mas conſiderando eſtas alavancas, como outros tantos raios de huma meſma roda,

roda, bem se vê que naõ deixa de ser tudo huma mesma maquina. Somente parece, que a revoluçaõ do cylindro produzida pela força das alavancas he menos uniforme, doque a que se obra por meio da roda. Esta especie de maquinas se vê ordinariamente nas carroças, que servem de transportar as pipas de vinho.

210 Separemos agora da Fig. 98. todo o apparelho exterior e accessorio, para considerarmos as partes essencialmente relativas ao equilibrio. Seja pois *A B* (Fig 99.) o eixo do cylindro apoyado sobre as duas extremidades *A*, *B*, e seja *D F E* a semicircumferencia da roda, á qual está applicada a potencia *P* pela direcçaõ da tangente *F M P*: seja *H* o ponto, onde a corda *H Q* toca a superficie do cylindro, do qual *G H* representa o raio, ou a perpendicular conduzida do ponto *H* sobre o eixo *A B*. Imaginemos em fim, que a intersecçaõ do plano vertical *D F E* da roda com o plano horizontal *A B H* se representa pela recta *C M O*.

Isto posto, se concebermos a potencia *P* applicada em *M*, e representada por *M N*, poderemos resolvella em duas forças, huma horizontal representada por *M O*, e outra vertical representada por *M R*. Porém a primeira está na direcçaõ do ponto *C*; logo será destruida pela resistencia do eixo, empregando horizontalmente o seu esforço contra os pontos de apoyo fixos *A*, e *B*. Logo somente a segunda he a que deve fazer equilibrio ao pezo *Q*, dirigido por *H Q*. Imaginando pois a alavanca *M K H*, que tem o ponto de apoyo em K, teremos por condiçaõ do equilibrio $MR : Q :: HK : MK$. Porem os triangulos KMC, KGH saõ semelhantes, como tambem o saõ os triangulos MNR, MFC; logo teremos em primeiro lugar $HK : MK$, ou $MR : Q :: GH : CM$; e em segundo lugar, $MR : MN :: CF : CM$. Donde concluiremos

$$Q . GH = CF . MN = CF . P;$$

isto he: *Para haver equilibrio no sarilho, he necessario que a potencia seja para o pezo, como o raio do cylindro para o da roda*; ou (que vem a ser o mesmo) *he necessario que os momentos do pezo, e da potencia em ordem ao eixo sejaõ iguais*.

211 Para determinar a carga dos pontos de apoyo *A*, *B* he necessario resolver a força horizontal *M O*, ou $\frac{MF}{CM} P$

em

outras duas, huma dirigida para A, que será $Aa' = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{CB}{AB} P$; e a outra dirigida para B, que será $Bb' = \frac{MF}{CM} \cdot \frac{AC}{AB} P$. Do mesmo modo as duas forças verticais MR e Q se reduzem a huma $Q + MR$, ou $Q + \frac{CF}{CM} P$, que passa por K; e esta se resolverá em outras duas verticais, que passem por A, e B. A primeira dellas será $Aa = \frac{KB}{AB} \left(Q + \frac{CF}{CM} P \right)$, e a segunda será $Bb = \frac{AK}{AB} \left(Q + \frac{CF}{CM} P \right)$. Acabando pois os rectangulos $Aa'a''a$, $Bb'b''b$, as diagonais Aa'', Bb'' representaráõ as cargas, que sustentaõ os pontos A, B.

212 A condiçaõ do equilibrio no sarilho mostra, que a potencia terá tanto maior ventagem sobre o pezo, quanto for maior a roda, a que se applicar. Esta roda, em conclusaõ, póde collocar-se em qualquer ponto que se quizer do comprimento do cylindro, sem que o equilibrio se desordene. Por exemplo (Fig. 100.), podiamos suppor a secçaõ GH no mesmo plano da roda, e o equilibrio naõ deixaria por isso de exprimir-se pela equaçaõ $P . GF = Q . GH$; porque entaõ, obrando as duas forças P, Q huma contra a outra por meio da alavanca angular FCH, os seus esforços seraõ iguais, assim que tivermos $P . GF = Q . GH$.

213 Sendo a corda, de que se faz uso no sarilho, quasi sempre de hum diametro notavel, e communicando-se a acçaõ da potencia ao pezo pelo eixo da mesma corda, he necessario ajuntar o semidiametro della ao raio do cylindro.

Daqui vem, que he necessario aumentar a potencia, todas as vezes que a corda, tendo cuberto todo o comprimento do cylindro, sobrepoem as voltas humas a outras.

214 Se o eixo do sarilho (Fig. 101.), em lugar de ser horizontal, for perpendicular, entaõ tem o nome particular de *Cabrestante*. Delle se usa frequentemente para conduzir pouco a pouco massas consideraveis, como pedras grandes, obeliscos, estatuas equestres &c. Primeiramen-

te ſe levantaõ com alavancas, para ſe lhes introduzirem rolos por baixo, que facilitem o movimento; e algumas vezes ſe eſtabelecem ſobre hum tecido de madeiramento ſuſtentado em rodas groſſas, e maciças. Depois a huma diſtancia competente ſe prega fortemente no chaõ huma groſſa eſtaca, á qual ſe prende o cabreſtante. Quatro homens, ou mais ſe he neceſſario, applicados cada hum á ſua barra fazem voltar o cylindro; á medida da revoluçaõ ſe vai enroſcando a corda pela ſua circumferencia, e o pezo ſe adianta outro tanto. Quando eſtá perto da eſtaca, prega-ſe eſta mais adiante; faz-ſe a meſma manobra; e á força de a continuar, chega hum pequeno numero de obreiros a conduzir ao lugar do ſeu deſtino pezos deſmarcados.

Deſte modo he, que a pezar da grande fricçaõ que he neceſſario vencer, vemos muitas vezes mover ſem grandes esforços maſſas muito pezadas. Quando ſe trata de as conduzir a pequenas diſtancias, fixa-ſe por huma vez a ſituaçaõ do cabreſtante; e quando ſe trabalha com elle, hum homem ſentado ao pé do cylindro deſenrola as primeiras voltas da corda, ao paſſo que ſe vaõ formando outras. Em Paris todo o mundo conhece eſta manobra, que ſerve continuamente para deſcarregar os barcos de pedra &c.

215 Os ſarilhos, de que ſe uſa na conſtrucçaõ dos pequenos edificios, ordinariamente ſaõ ſuſtentados por duas peças de madeira, que formaõ hum angulo, no vertice do qual ſe acha huma roldana pela qual paſſa a corda, que deve levantar os materiais.

Chamaõ-ſe *Guindaſtes* os que ſe uſaõ na conſtrucçaõ dos maiores edificios, e nos eſtaleiros. No guindaſte, o ajuntamento de todas as partes do cylindro, e das rodas faz equilibrio a huma grande peça de madeira, cuja direcçaõ he obliqua ao horizonte, na qual eſtaõ as polés fixas por onde paſſa a corda. O todo he movel ſobre hum piaõ, de maneira que tendo elevado o pezo a huma certa altura, póde fazer-ſe andar horizontalmente em roda do guindaſte, por meio de huma roldana que chamaõ grua, e joga por cima do baileo, que he a modo de hum andaime, ou cadafalço armado ao redor do piaõ.

Para ſe darem mais forças a eſta maquina, poem-ſe ordinariamente em cada extremidade do cylindro huma roda de ſeis pés de raio, ſobre a qual ſe ſobe continuamente por pequenos degraos, a fim de actuar por meio do proprio pezo; ou, ſe cada huma tem o ſeu tambor, os obreiros as fazem girar caminhando pelo interior dellas.

216 Repreſentemos por CAB (Fig. 102.) o quarto da roda, ſobre a qual os homens caminhaõ, e por M, M', M'', M''', B, os pontos onde actûa o pezo delles, pelas direcções perpendiculares PM, $P'M'$, $P''M''$ &c. Logo ſendo M, M' &c os pezos reſpectivos delles, teremos por expreſſaõ dos ſeus momentos, em ordem ao centro C, os productos $M.CP$, $M'.CP'$ &c, cuja ſoma deve ſer igual ao momento da maſſa, que elles ſuſtentaõ.

Seja pois CE o raio do cylindro, e P o pezo que deve ſuſtentar-ſe. Teremos $P.CE = M.CP + M'.CP' + M''.CP'' + M'''.CP''' + B.CB$ (ſuppondo que naõ ha mais do que huma roda; porque ſendo duas, e ambas iguais tanto nas dimenſões, como nas potencias que lhes ſaõ applicadas, a ſoma dos momentos ſerá o dobro da expreſſaõ precedente).

217 Tomemos por exemplo hum guindaſte, que tenha duas rodas, em cada huma das quais trabalhem n homens todos de igual pezo, e applicados a diſtancias iguais AM, MM' &c. Seja M o pezo de cada hum delles, r o raio CE do cylindro aumentado do ſemidiametro da corda, R o raio CA da roda, e o arco $AM = \frac{90^\circ}{n} = x$. Teremos $P.r = 2M.R\,(\mathit{ſen}\,x + \mathit{ſen}\,2x + \mathit{ſen}\,3x \ldots\ldots +$ $\mathit{ſen}\,nx$, ou 1). Porém a ſoma deſta ſerie he $\frac{1 + \cot\frac{1}{2}x}{2}$ (Euler. Intr. in Analyſ. Infin. tom. 1.). Logo a equaçaõ precedente ſe reduzirá a eſta $P.r = M.R\left(1 + \cot\frac{1}{2}x\right)$.

Seja v. gr. o raio de cada huma das rodas de 8 pés, e o do cylindro juntamente com o ſemidiametro da corda de 6 polegadas. Pergunta-ſe o pezo P, que 6 homens applicados a huma roda podem ſuſtentar em equilibrio.

O pezo de hum homem mediano coſtuma avaliar-ſe em 150 libras. Aſſim ſubſtituindo na formula precedente todos os valores das quantidades, de que ſe compoem, acharemos temos que he $P = 16 . 150 (1 + cot. 7^{o} 30') = 16 . 150 . 8{,}5957541 = 20629{,}81$. Este pezo ferá pois de 20630 libras; e aumentando-fe as forças o que for neceffario para vencer a fricçaõ, levantarfe-há facilmente até onde fe quizer.

A mefma formula daria igualmente a conhecer o numero de homens, que feria neceffario applicar a cada roda, para fazerem equilibrio a hum pezo dado.

218 He de advertir, que nos calculos relativos ao ufo dos guindaftes deve attender-fe ao pezo, e á dureza das cordas. Quanto ellas faõ mais groffas, tanto mais refiftem a dobrar-fe á feiçaõ da circumferencia do cylindro; e quando faõ novas, ainda refiftem mais. Tambem fe experimenta maior difficuldade a efte refpeito, á medida que ellas fuftentaõ maiores pezos, que o movimento das rodas he mais rapido, e que as roldanas por onde paffaõ faõ mais pequenas. Quanto ao pezo, deve tambem ter-fe conta delle, muito principalmente quando a fegurança da manobra nos obriga a ufar de groffos calabres.

219 As maquinas, que fe compoem de differentes rodas, naõ faõ outra coufa mais que hum encadeamento de farilhos, nos quais a potencia obra na circumferencia da roda maior, por meio dos feus dentes. O que tem entaõ lugar de cylindro (Fig. 103.), he outra roda dentada muito mais pequena, que fe ajufta concentricamente ao eixo da grande, de maneira que naõ poffa mover-fe huma fem a outra. Para diftinçaõ, chama-fe a pequena *carrete.*

Os dentes das rodas faõ ordinariamente abertos no feu mefmo plano, ifto he, na direcçaõ da circumferencia para o centro. Algumas vezes porém pedem as circunftancias, que fe abraõ perpendicularmente ao plano (Fig. 104.), e entaõ fe chama roda *de coroa*, ou roda de *chaõ.* Tambem os carretes fe fazem de hum cylindro oco, ou *lanterna*, cuja fuperficie convexa he fubftituida por huns páos delgados, e roliços, chamados *fuzelos*, parallelos entre fi, e difpoftos a diftancias iguais (Fig. 105.). Eftes fuzelos produzem o mefmo effeito, que os dentes ordinarios, e fe ufaõ nas atafonas, e em muitos outros engenhos.

220 Supponhamos agora huma roda A dentada, ou naõ dentada (Fig. 106.), fobre a qual obra huma potencia Q pela direcçaõ da tangente MQ. Efta roda tem figamente no feu eixo hum carrete a, que endenta com ou-

tra roda B : o eixo desta leva outro carrete b, que move outra roda C; e para naõ multiplicarmos mais as peças, supponhamos que a roda C tem finalmente no seu eixo hum carrete, ou cylindro c, no qual se enrolla a corda NP, que suspende o pezo P, á medida que as rodas se movem. Isto posto, busquemos a relaçaõ, que deve ter a potencia Q com o pezo P, no caso do equilibrio.

Sejaõ R, R', R'' os raios das rodas A, B, C; sejaõ r, r', r'', os raios dos seus carretes respectivos; e sejaõ em fim a, b, P as forças, com as quais tendem a mover-se os pontos tangentes delles. Pela propriedade do sarilho teremos

$$Q : a :: r : R,\ a : b :: r' : R',\ b : P :: r'' : R'';$$

e multiplicando estas tres proporções, termo por termo, acharemos finalmente

$$Q : P :: r r' r'' : R R' R''.$$

Logo, *para estabelecer o equilibrio por meio das rodas dentadas, he necessario, que a potencia seja para o pezo, como o producto dos raios de todos os carretes para o producto dos raios de todas as rodas.*

Assim, sendo o raio de cada carrete huma decima parte do raio da roda, e havendo tres rodas, e tres carretes, huma potencia mil vezes menor que o pezo, huma só libra por exemplo, sustentaria mil; e se ajuntassemos sómente duas rodas com dous carretes, a mesma libra faria equilibrio a cem mil. Poucas maquinas saõ logo taõ proprias para multiplicar as forças, como as rodas dentadas.

221 Entre todas as maquinas, que se reduzem immediatamente ao sarilho, tem o *Macaco*, com muita rasaõ, hum dos primeiros lugares. Este he hum dos instrumentos mais simples da Mechanica, e naõ se conhece outro mais efficaz.

No macaco obra a potencia por meio de huma manivella $AMNP$ (Fig. 113.), cujo eixo NP tem hum carrete P, que move a barra dentada CD, e a obriga a sobir. Está claro, que para haver equilibrio nesta maquina, deve ser a potencia applicada á manivella para a força, que tende a levantar a barra CD, como o raio do carrete para o raio MN da manivella. E como o primeiro raio he muito mais pequeno que o segundo, podem levantar-se facilmente com o macaco pezos muito consideraveis.

Mas a força será muito maior, se ajuntarmos huma roda da com hum carrete de mais (Fig. 114.). Porque entaõ a potencia applicada á manivella ſerá para a força que tende a elevar a barra CD, como o producto dos raios dos carretes P, R para o producto dos raios da roda N, e da manivella MN.

Do movimento das rodas em geral, e do mechaniſmo dos relogios em particular.

222 MAs para conſiderarmos de caminho o movimento das rodas, ſupponhamos que o primeiro carrete a faz mover todo o ſyſtema de rodas, e carretes (Fig. 107.). Sejaõ repreſentados por n, n' os numeros dos dentes dos carretes a, b; e por N, N' os numeros dos dentes das rodas B, C. He evidente, que o primeiro carrete a naõ póde dar huma volta inteira ſem que a roda B faça huma parte da ſua revoluçaõ. Eſta parte deve correſponder a n dos ſeus dentes, e a ſua expreſſaõ geral he a parte $\frac{n}{N}$ de huma das ſuas revoluções totais.

A roda C deve, pela meſma raſaõ, fazer huma parte da ſua revoluçaõ, a qual he viſivelmente huma fracçaõ $\frac{n'}{N'}$ da quantidade $\frac{n}{N}$ que a roda B tem andado. Aſſim, em quanto o carrete a dá huma volta inteira, a roda C fará a parte $\frac{n\,n'}{N\,N'}$ da ſua revoluçaõ total.

223 Donde ſe ſegue em geral, *que o numero de voltas dadas pelo carrete, que move todo o ſyſtema, he para o numero das voltas da ultima roda, como o producto dos numeros de dentes de todas as rodas para o producto dos numeros de dentes de todos os carretes.*

224 Logo, ſe a rodagem foſſe movida toda pela roda C, a velocidade deſta roda ſeria para a do ultimo carrete a, como o producto dos numeros de dentes de todos os carretes para o producto dos numeros de dentes de todas as rodas. E daqui ſe póde determinar em todos os caſos o numero de dentes, que ſe deve dar a cada huma das peças, para que dando a primeira roda huma volta em certo tempo, a ultima dê tambem huma volta em hum tempo

po

po dado. Naõ ha coufa mais ingenhofa na Relogiaria do, que as applicações, que fe tem feito defte principio aos diverfos movimentos, que moftraõ os fegundos, os minutos, as horas, os dias, os mezes, e o curfo dos aftros. Examinemos hum pouco efte mechanifmo, confiderando-o nos relogios ordinarios.

225 O que dá o movimento a toda a maquina, he huma móla fpiral, que ordinariamente fe chama *móla real*, efcondida dentro do *tambor A* (Fig. 108.), o qual he movel fobre o feu eixo. Efta móla fe comprime, quando fe dá corda ao relogio; e como ella eftá fixa por huma das extremidades no eixo do tambor, e pela outra na fuperficie concava delle, he neceffario que para fe reftituir ao feu eftado natural faça girar o mefmo tambor. Porém o tambor tem fobre a fua fuperficie convexa huma pequena cadeia de aço, que nella prende por huma ponta, e pela outra no *fuzo B*, o qual he huma efpecie de conoide, que ordinariamente póde receber fete voltas, e meia da mefma cadeia. Ifto pofto, quando fe anda com o fuzo, por meio da chave applicada ao feu eixo *P*, faz-fe andar ao mefmo tempo o tambor; e affim fe comprime a móla interior, á medida que a cadeia vai paffando delle para o fuzo.

Mas logo que fe acaba de andar com o fuzo, a móla começa a foltar-fe, faz girar o tambor, a cadeia torna para a fuperficie delle, o fuzo a vai largando pouco a pouco, e communica o movimento a toda a maquina. He verdade, que as forças da móla diminuem á medida que ella fe vai foltando: e por iffo naõ poderia fazer girar uniformemente o fuzo, como he effencialmente neceffario, fe naõ fe tiveffem achado meios de compenfar aquella diminuiçaõ. Eifaqui primeiramente o mais efficaz. Em lugar de fe dar ao fuzo huma forma cylindrica, imaginou-fe darlhe a de hum conoide truncado, a fim de que os momentos das forças da móla foffem conftantemente iguais entre fi. Efta precauçaõ baftaria fó para confervar a uniformidade do movimento, fe pudeffemos fegurarnos na pratica de que a móla fe folta fempre por huma mefma lei conhecida, e de que ao fuzo fe tinha dado exactamente a figura que lhe he neceffaria. Mas como naõ he poffivel haver fobre eftes dous pontos inteira certeza, procurou-fe remediar o refto de irregularidade por outros meios.

226 An-

226 Antes de os darmos a conhecer, sigamos passo por passo os effeitos da móla. Esta se dispoem de maneira, que naõ possa restituir-se ao estado natural, senaõ no espaço de trinta horas; e assim o fuzo, que ha de dar sete voltas e meia, fará regularmente huma revoluçaõ em quatro horas. O mesmo fuzo está guarnecido na sua base de huma roda de 48 dentes bem iguais, os quais enlaçaõ com os de hum carrete, que tem 12 tambem muito iguais. Este carrete deve pois fazer huma revoluçaõ em huma hora; e por conseguinte, se na extremidade do seu eixo, produzido até o mostrador, se fixar hum ponteiro, este mostrará os minutos.

227 Falta dar movimento ao ponteiro das horas; e para isso se imaginou hum jogo de rodas situado entre o mostrador, e a chapa dianteira. O carrete *M* (Fig. 109.) está no eixo da roda dos minutos, e dá conseguintemente huma volta por hora: além disto endenta com a roda *N*, cujo carrete *P* elevado acima do seu plano faz mover a roda *Q*. Esta roda faz huma peça juntamente com o *cano*, ou pequeno cylindro vazado, em cuja extremidade está o ponteiro das horas, e por dentro do qual gira livremente a haste, que conduz o ponteiro dos minutos. Vê-se representada separadamente esta roda na Fig. 110: e naõ ha mais do que imaginalla suspensa ao mostrador por meio do cano, de sorte que possa girar livremente, como o faria ao redor da haste, ou eixo dos minutos.

Mas ainda póde fazer-se huma idéa mais clara deste jogo, lançando os olhos sobre a Fig. 111, que representa huma secçaõ perpendicular, feita pela haste da roda dos minutos. Esta haste K *O* tem o carrete *M M*, que endenta com a roda *N N*: e a roda *N N* tem na sua haste o carrete *P P*, que endenta com a roda *Q Q*, cujo cylindro vazado *C C E* E tem na sua extremidade superior *C C* o ponteiro das horas *C D*.

228 Agora para determinarmos o numero dos dentes das rodas *N*, *Q*, e dos carretes *P*, *M*, designemos estes quatro numeros pelas mesmas letras respectivas *N*, *Q*, *P*, *M*. E por quanto a roda *Q* deve dar huma volta em quanto o carrete P dá 12, teremos $12\ P.M = N.Q$ (n. 223.); donde se vê, que este Problema, como todos os outros da mesma natureza, he em geral muito indeterminado. Advertindo porém 1°, que as indeterminadas *P*, *M*, *N*, *Q* devem

vem ſer numeros inteiros; 2°, que os dentes de hum carrete naõ devem paſſar de 12, quanto for poſſivel; 3°, que os dentes de huma roda naõ devem paſſar de 100, quando ſe naõ quizer fazer o relogio muito voluminoſo; he facil de comprehender, que o numero das ſoluções poſſiveis deve ſer muito limitado. No caſo preſente, huma das mais ſimples he dar aos carretes P, M 10 e 12 dentes, e ás rodas N, Q 40 e 36. Igualmente ſe podem tomar as ametades deſtes quatro numeros.

229 Advirtamos porém, que ſendo determinado o numero dos dentes de cada peça, a grandeza das rodas e carretes naõ he mais arbitraria. Com effeito, para que huma roda poſſa endentar exactamente com hum carrete, he neceſſario que o intervallo entre os pontos tangentes de dous dentes conſecutivos da roda ſeja igual ao intervallo entre os pontos tangentes de dous dentes conſecutivos do carrete. Logo, ſendo N o numero dos dentes da roda, e n o numero dos dentes do carrete, deve ſer o raio da roda para o do carrete como o ſeno de $\frac{180°}{n}$ para o ſeno de $\frac{180°}{N}$; entendendo-ſe aqui pelo nome de raio, como ordinariamente ſe entende, a diſtancia do centro ao ponto do contacto. Aſſim teremos no jogo de rodas do caſo preſente (Fig. 111.), $NN = \frac{MM \,.\, \mathit{ſen}\ 15°}{\mathit{ſen}\ 5°}$, e $QQ = \frac{PP\ \mathit{ſen}\ 18°}{\mathit{ſen}\ 4°\ 30'}$.

Mas ainda falta huma condiçaõ, a que eſſencialmente ſe deve ſatisfazer; e he, que deve ſer $NN + MM = PP + QQ$, ou que $MM \,.\, \frac{\mathit{ſen}\ 15° + \mathit{ſen}\ 5°}{\mathit{ſen}\ 5°} = PP \,.\, \frac{\mathit{ſen}\ 18° + \mathit{ſen}\ 4°\ 30'}{\mathit{ſen}\ 4°\ 30'}$.
Donde concluiremos

$$NN = MM \,.\, \frac{\mathit{ſen}\ 15°}{\mathit{ſen}\ 5°}$$

$$PP = MM \,.\, \frac{\mathit{ſen}\ 10° \,.\, \mathit{coſ}\ 5° \,.\, \mathit{ſen}\ 4°\ 30'}{\mathit{ſen}\ 5° \,.\, \mathit{ſen}\ 11°\ 15' \,.\, \mathit{coſ}\ 6°\ 45'}$$

$$QQ = MM \,.\, \frac{\mathit{ſen}\ 10° \,.\, \mathit{coſ}\ 5° \,.\, \mathit{ſen}\ 18°}{\mathit{ſen}\ 5° \,.\, \mathit{ſen}\ 11°\ 15' \,.\, \mathit{coſ}\ 6°\ 45'}$$

Calculando eſtes valores por Logarithmos, acharemos

$NN = 2,9696MM \quad 2\frac{32}{33}MM$, $PP = - - -$ $0,8038MM = \frac{41}{51}MM$, e $QQ = 3,1658MM = 3\frac{1}{6}MM$. E assim será determinada a relaçaõ, que devem guardar entre si as peças deste movimento.

230 Com estas rodas pois, que ficaõ entre o mostrador e a primeira chapa do *tear*, he que se faz mover o ponteiro das horas concentricamente com o dos minutos; e naõ faltaria mais nada para a construcçaõ dos relogios, se a móla pudesse por si só fazer andar o fuzo com perfeita uniformidade. Mas o frio, e o calor, a humidade, e a secura, as diversas posições do relogio, tudo conspira a fazer que a móla se restitua com desigualdade. Por outra parte, se naõ se lhe oppuzesse alguma resistencia, que lhe moderasse o impulso, em lugar de se desenvolver a corda do fuzo em 30 horas, passaria toda ao tambor em hum instante. Esta resistencia he produzida pelo *volante*; e eisaqui de que modo.

Hum jogo de rodas, conduzido por huma roda que está na haste dos minutos, faz mover a ultima roda, que chamaõ roda *Catharina*, ou roda *de encontro*, a qual topa com os dentes nas *palhetas* do volante. Dá-se a esta roda hum numero impar de dentes, a fim de que cada hum delles corresponda diametralmente a hum espaço vazio, e que naõ possaõ ao mesmo tempo encontrar-se dous dentes com as palhetas do volante. Esta construcçaõ faz, que as palhetas saõ alternativamente impellidas pelos dentes superiores e inferiores da roda de encontro, e que á medida que passa cada dente faz o volante duas vibrações. Nos relogios ordinarios faz 17280 por hora.

A roda do volante faz as suas vibrações debaixo do *guarda-volante*, que alguns tambem chamaõ *gallo*; e está sujeita a huma pequena móla spiral, que vulgarmente chamaõ *pendula*, e melhor seria chamar-lhe *regulador*. Esta móla resiste ao movimento do volante, ou tambem o accelera, quando he necessario; resistencia, e aceleraçaõ, que se communica ao movimento de toda a maquina, e que assim se torna muito menos irregular. Bem se sabe, que andando com o registo, que vulgarmente chamaõ a *roda do tempo*, e que está junto

do

do guarda-volante, ſe retarda ou adianta o relogio, porque ſe alonga ou encurta aquella parte do regulador, que modera as vibrações, e que reſiſte mais ou menos ao movimento do volante, conforme lhe deixa o jogo mais ou menos livre.

231 Determinèmos agora o ſyſtema, que ſendo conduzido por huma roda ſituada na haſte dos minutos, deve produzir 17280 vibrações do volante por hora.

A primeira roda he pois a que dá huma volta por hora, e que aqui repreſentamos por R (Fig. 108. 112.). Eſta endenta no carrete r, que na ſua haſte tem a roda R', a qual endenta no carrete r'; e eſte conduz na ſua haſte a roda de coroa R'', que endenta no carrete r'', o qual finalmente conduz na ſua haſte a roda de encontro R'''. Tal he de ordinario a diſpoſiçaõ deſtas peças: mas ainda que naõ ſaõ todos os relogios fabricados da meſma maneira, os principios do calculo ſeguinte naõ deixaõ por iſſo de ſerem gerais, e applicaveis a todas as combinações poſſiveis.

Sejaõ R, R', R'', R''' os numeros reſpectivos dos dentes, que ſe devem dar ás rodas deſignadas por eſtas meſmas letras; e ſejaõ r, r', r'' os numeros dos dentes dos carretes reſpectivos. No tempo, em que a primeira roda R dá huma volta, o carrete r'', ou a roda R''' dará hum numero de voltas, que geralmente ſe exprime por $\frac{R \,.\, R' \,.\, R''}{r \,.\, r' \,.\, r''}$.

Eſta roda fará logo paſſar cada hora hum numero de dentes repreſentado por $\frac{R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R'''}{r \,.\, r' \,.\, r''}$: porém, para paſſar hum dente, he neceſſario que o volante faça duas vibrações; logo $\frac{2R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R'''}{r \,.\, r' \,.\, r''}$ deve dar 17280 vibrações. Logo teremos $R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R''' = 8640 \,.\, r \,.\, r' \,.\, r'''$; e ſuppondo todos os carretes de ſeis dentes cada hum, $R \,.\, R' \,.\, R'' \,.\, R''' = 1728 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 6$.

Mas como a roda de encontro deve ter hum numero impar de dentes, e como naõ póde ter menos de 13, nem mais de 17, reſta ſómente o ſuppor-lhe 15. Entaõ ſerá $R \,.\, R' \,.\, R'' = 1728 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 6 = 54 \,.\, 48 \,.\, 48$. Poder-ſe-ha pois dar 54 dentes á roda R, 48 a R', e outros 48 a R''., ficando a roda de encontro de 15, e cada hum dos carretes de 6. Os dous Problemas ſeguintes ſe reſolvem da meſma maneira.

132 Pro-

232. Problema I. *Achar os numeros de dentes, que se devem dar a cada huma das peças de hum jogo de rodas, o qual sendo movido por hum carrete no eixo da roda das horas, faça dar á ultima roda huma só volta no espaço de hum anno commum, isto he, em* $365^d\ 5^h\ 49'$.

O carrete posto no eixo da roda das horas dá huma volta em 12 horas, e a ultima roda deve dar huma em $365^d\ 5^h\ 49'$, ou em $8765^h\ \frac{49}{60}$, que dividindo por 12 dá $730\ \frac{349}{720}$. Sejaõ pois r, r', r'' os numeros dos dentes dos tres carretes, e R, R', R'' os numeros dos dentes das tres rodas, e teremos

$$R\,.\,R'\,.\,R'' = 730\,\frac{349}{720}\,r\,.\,r'\,.\,r''.$$

Isto posto, para que $R\,.\,R'\,.\,R''$ seja hum numero inteiro, a primeira cousa que occorre, he fazer $r\,.\,r'\,.\,r'' = 720$. Este numero se resolve nos factores 8, 9, 10, que saõ proprios para se darem aos dentes dos tres carretes; mas esta supposiçaõ dá $R\,.\,R'\,.\,R'' = 525949$, numero que naõ póde resolver-se em factores, que sirvaõ para os dentes das tres rodas R, R', R'': mas isto se remedeia, buscando por via de approximaçaõ o que se naõ póde haver exactamente. Eisaqui o modo.

Por quanto a questaõ se reduz a fazer que $\frac{349}{720}\,r\,.\,r'\,.\,r''$ seja hum numero inteiro, vejamos se diminuindo-o da mais pequena quantidade possivel $\frac{\delta}{720}$ podemos fazello inteiro. Supponhamos pois $\frac{349\,.\,r\,.\,r'\,.\,r'' - \delta}{720} = E$, ou $r\,.\,r'\,.\,r''$ $= \frac{720\,E + \delta}{349}$. O resto desta divisaõ he $\frac{\delta + 22\,E}{349}$; e se o multiplicarmos por 16, o resto será $\frac{16\,\delta + 3\,E}{349}$; tornando a multiplicar por 116, e tomando o resto da reducçaõ teremos $\frac{111\,\delta - E}{349}$, que deverá ser hum numero inteiro E'. Logo $E = 349\,E' + 111\,\delta$; e substituindo este valor, teremos $r\,.\,r'\,.\,r'' = 720\,E' + 229\,\delta$, e

R.

$R . R' . R'' = 525949\,E' + 167281\,\delta$, desprezando nesta ultima equação a quantidade $\frac{\delta}{720}$, que não he de consequencia alguma, como logo veremos.

Agora podemos dar a E' e δ os valores que quizermos, até que os productos $r . r' . r''$ e $R . R' . R''$ possão resolver-se em factores convenientes. Fazendo differentes tentativas, se achará que os valores que produzem bom effeito são $E' = -1$, e $\delta = 4$; donde se deduz $r . r' . r'' = 196$, e $R . R' . R'' = 143175$. Os factores de 196 são 4, 7, 7; e os de 143175 são 25, 69, 83; e póde tomar-se o dobro de hum dos primeiros, com tanto que tambem se tome o dobro de hum dos segundos. Assim teremos resolvido o problema, fazendo os tres carretes de 7, 7, e 8 dentes, e as tres rodas de 50, 69, e 83, disposto tudo de qualquer maneira; porque he cousa indifferente dar a esta, ou áquella roda hum dos tres ultimos numeros de dentes, e do mesmo modo nos carretes.

Supposto que temos desprezado huma pequena fracção no calculo precedente, não póde recear-se que dahi resulte erro sensivel. Apenas será necessaria correcção depois de ter deixado accumular todos estes erros por hum grande numero de periodos. Para nos convencermos, basta examinar o que se passa no movimento das rodas, que temos determinado. Está claro, que dando a ultima roda huma volta, dará o primeiro carrete $\frac{143175}{196}$; e porque este dá huma volta em 12 horas, aquella dará huma em $\frac{143175 \,.\, 12^h}{196}$ $= \frac{143175 \,.\, 3^h}{49} = 365^d\, 5^h\, 48'\, \frac{48}{49}$. Assim temos a solução com a differença sómente de $\frac{1}{49}$ de minuto, que he huma approximação maior do que era bastante.

Problema II. *Achar os numeros dos dentes, que se devem dar a hum jogo de rodas, o qual sendo movido por hum carrete situado no eixo dos minutos, faça dar á ultima roda huma volta em $29^d\, 12^h\, 44'\, 3''$, que he a revolução synodica da Lua.*

Reduzindo a horas este intervallo de tempo, acharemos

$708^h \frac{881}{1200}$; e chamando x o producto dos numeros dos dentes de todos os carretes, e y o producto dos numeros dos dentes das rodas, teremos $y = 708 \frac{881}{1200} x$; equaçaõ, que naõ póde ser resolvida, senaõ por approximaçaõ, supondo que $\frac{881\,x - \delta}{1200}$ he hum numero inteiro. Acabando o calculo, como no problema precedente, acharemos $x = 1200\,E - 79\delta$, e $y = 850481\,E - 55990\delta$; e pondo $E = 1$, e $\delta = 4$, sahirá $x = 884$, e $y = 626521$.

O primeiro destes numeros póde resolver-se em tres factores 4, 13, 17; e o segundo em quatro 7, 37, 41, 59. Mas querendo-o reduzir a tres deveriaõ multiplicar-se os dous mais pequenos 7, e 37, que dariaõ 259, numero muito grande para os dentes de huma roda. Resta pois, em semelhante caso, suppor quatro rodas e quatro carretes. Mas para introduzir de novo hum carrete de 6 dentes, he necessario dar 6 vezes mais dentes a alguma das rodas; e a escolha he bem facil, porque ha huma de 7. Temos pois resolvido o problema, empregando quatro carretes de 4, 6, 13, e 17 dentes, e quatro rodas de 37, 41, 42, e 59.

Estes principios bastaõ para explicar todo o mechanismo desta especie de movimentos. Da soluçaõ do primeiro problema nos podemos servir, para fazer que no mostrador se indiquem os dias, os mezes, os equinocios, os solsticios, e geralmente tudo o que respeita ao anno solar. E imitando o procedimento, que praticamos na soluçaõ do segundo problema, poderá mostrar-se de huma maneira muito exacta a idade da Lua, e todas as suas phases.

DO PLANO INCLINADO.

233 JÁ temos visto (n. 149. e seg.), quais saõ as condições necessarias, para que hum corpo posto sobre hum plano horizontal se mantenha em equilibrio. He necessario, em geral, que a vertical conduzida pelo centro de gravidade naõ deixe todos os pontos de apoyo para huma mesma parte. Examinemos agora o que deve observar-se no equilibrio de hum corpo, quando se poem sobre hum plano inclinado ao horizonte. Primeira-

Primeiramente he facil de ver, que as forças que sollicitaõ o corpo, devem todas reduzir-se a huma só, perpendicular ao mesmo plano inclinado; e que sem isso naõ póde haver equilibrio. Huma vez que tenha lugar a dita reducçaõ, he evidente que a resultante será destruida pela resistencia do plano, e que o corpo por conseguinte ficará em descanço, sem poder jámais mover-se, em quanto os pontos de apoyo naõ ficarem todos para huma mesma parte a respeito da resultante.

234 Seja pois a potencia P (Fig. 115.) a que retem o corpo em equilibrio, G o centro de gravidade do corpo, GQ a vertical que passa por elle, a qual encontre a direcçaõ da potencia em M. Supponhamos tambem, que a força P se representa por MR, e o pezo G por MQ. Completando o parallelogrammo $MQNR$, a diagonal MN representará a resultante, a qual, como dissemos, deve ser perpendicular ao plano, para ser por elle destruida.

A primeira condiçaõ necessaria, para haver equilibrio sobre o plano inclinado, exige pois que o centro de gravidade do corpo e a direcçaõ da potencia se achem em hum mesmo plano perpendicular ao plano inclinado.

Seja AB a secçaõ do plano QMP com o plano, sobre o qual se trata de estabelecer o equilibrio; seja BC a linha horizontal conduzida por B, a qual se chama a *base* do plano inclinado; e AC a vertical que passa por A, a qual se chama *altura* do mesmo plano. A recta BC he o *comprimento* delle, e o angulo ABC a sua *inclinaçaõ*.

Isto supposto: A segunda condiçaõ necessaria para haver equilibrio, he que a resultante MN seja perpendicular a AB. Por outra parte já sabemos, que a potencia P he para o pezo G, como $MR : MQ :: sen\,QMN : sen\,NMR$; e que a mesma potencia he para a pressaõ sobre o plano, como $MR : MN :: sen\,QMN : sen\,QMR$.

Da primeira destas proporções concluiremos, que a potencia será a menor que he possivel, quando for recto o angulo NMP, ou, que vem a ser o mesmo, quando a direcçaõ MP for parallela ao plano. Porque entaõ a potencia he para o pezo como o seno de QMN para o seno total. E como, neste caso, saõ semelhantes os triangulos QMN, ABC teremos esta proporçaõ: *A potencia he para o pezo como o seno da inclinaçaõ do plano ao horizonte para o raio, ou como a altura do plano para o seu comprimento.*

235 Em

235 Em consequencia destes principios he facil de explicar a força da maquina, de que ordinariamente se usa para meter os toneis nas cavas, ou adegas subterraneas (Fig. 116.). Esta maquina participa ao mesmo tempo de todas as ventagens do sarilho, da roldana movel, e do plano inclinado. As duas peças de madeira, em que joga o sarilho, estaõ encostadas como huma escada á parede, onde se acha a entrada da cava. Huma das pontas da corda, que abraça o tonel está preza a huma tranca, que se atravessa nos pés da escada; e a outra está preza ao cylindro do sarilho, e se desenrola pouco a pouco. Deste modo faz o tonel as vezes de huma roldana movel.

Sendo pois M o momento da força applicada ás barras do sarilho, e r o raio do cylindro, será $\frac{M}{r}$ a força que estende cada huma das pontas da corda; e suppondo as duas pontas parallelas, será $\frac{2M}{r}$ a força que retem o tonel P parallelamente ao plano inclinado. Chamando pois A a inclinaçaõ do plano ao horizonte, teremos $\frac{2M}{r} : P :: sen\, A : 1$; donde se tira $2M = P\, r\, sen\, A$.

Supponhamos agora, que estaõ dous homens applicados ao sarilho, e que conjuntamente empregaõ huma força de 200 libras. Supponhamos tambem, que as barras do sarilho saõ 10 vezes maiores que o raio do cylindro, e que a inclinaçaõ do plano ao horizonte he de 30°. Teremos $P = 200 \,.\, 10 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8000$ libras; e por conseguinte sustentaráõ estes dous homens o pezo de 80 quintais. Ajunte-se a isto o effeito da fricçaõ, que nestas circunstancias favorece tanto ao equilibrio, quanto se oppoem ao movimento.

236 Quando hum corpo se suppoem posto em equilibrio entre dous planos inclinados AB, AC (Fig. 117), he necessario que haja na vertical, que passa pelo seu centro de gravidade, ao menos hum ponto G, do qual conduzindo para os planos as perpendiculares Gq, Gn, estejaõ estas ambas em hum mesmo plano vertical, de maneira que naõ deixem para huma mesma parte os pontos, por onde o corpo assenta sobre os planos. Logo he necessario, que a intersecçaõ commua dos dous planos seja huma linha recta horizontal EF.

O pezo do corpo, que podemos reprefentar por GM, refolve-fe em duas forças GQ, GN que exprimem as preffoens refpectivas fobre os dous planos inclinados. Chamando-as pois Q, N, e o pezo do corpo G, teremos $G : Q : N :: GM : GQ : GN :: sen\ QGN : sen\ MGN : sen\ MGQ :: sen\ BAC : sen\ CAE : sen\ BAF$.

237 Por quanto cada *peça de volta* de huma abobada he hum corpo fuftentado em equilibrio entre os dous planos inclinados das duas peças vezinhas, para haver equilibrio, he neceffario que a vertical conduzida pelo centro de gravidade tenha ao menos hum dos feus pontos tal, que delle fe poffa tirar huma perpendicular para cada huma das faces das peças contiguas, com as condições acima declaradas (Fig. 118.). Como porém cada peça faz huma preffaõ lateral contra todas as que a fuftentaõ, he neceffario, alem do referido, que a preffaõ da peça *A* fobre a peça *B* feja igual e directàmente oppofta á preffaõ reciproca, que a peça *B* exercita contra a peça *A*. As unicas peças, que naõ tem reacçaõ contra as fuperiores, faõ os dous *faimeis* *F*, *G*, cujo pezo carréga todo fobre as *impoftas*. O refto actũa de peça em peça contra as partes inferiores, que recebendo huma preffaõ lateral, a communicaõ fucceffivamente até os mefmos faimeis.

Efta preffaõ geral communicada ás impoftas fe refolve em duas, huma perpendicular, e a outra parallela ao horizonte. A primeira carrega fobre os alicerces, e he deftruida pela refiftencia delles. A fegunda fórma a força do encontro da abobada, que tende a defviar as paredes para as ilhargas, e arruinar o edificio. Naõ ha coufa mais importante na conftrucçaõ das abobadas, do que a arte de diminuir a força do encontro, que ellas fazem contra os *pés direitos*.

Se as paredes, que fuftentaõ huma abobada, faõ de muita folidez, e de pouca altura, facilmente podem refiftir á preffaõ horizontal della. Mas quando a abobada he muito alta, e oufada, como faõ pela maior parte as dos grandes templos, entaõ actuando a preffaõ por hum braço de alavanca muito comprido fatigaria confideravelmente os pés direitos, e bem de preffa os derribaria, fe os Arquitectos naõ tiveffem o cuidado de niffo darem algum remedio.

O meio, que elles empregaõ de ordinario confifte em fortificar exteriormente os pés direitos com *botaréos* algumas vezes maciços, e pela maior parte formados de pequenas abobadas obliquas, que propagaõ até outros pégoens menos

eleva-

elevados o encontro da abobada principal, onde actuando por hum braço de alavanca mais curto he mais facil de se destruir.

Em fim, quando ha muitas abobadas continuadas, a pressaõ lateral, que obra nas extremidades, naõ he maior do que seria a de huma só abobada, igual na extensaõ a todas ellas. Que huma ponte seja de dés arcos, ou de quatro, o esforço geral que faz por desviar os membros das extremidades, he o mesmo; e por isso he necessario, que sejaõ igualmente fortes, para a poderem sustentar.

238 Supponhamos dous corpos A, B (Fig. 119.) atados ao fio ACB, que passa pela roldana C, e postos em equilibrio sobre os planos inclinados ED, DF. Seja MN a vertical, que passa pelo centro de gravidade do corpo A, e representemos por MN o pezo delle. Este se resolverá em duas forças, huma MO perpendicular ao plano DE, e a outra MP na direcçaõ do fio CM. Fazendo huma resoluçaõ semelhante do pezo do outro corpo, será QT a força com que elle estende o fio BCM. Logo, havendo equilibrio, será $MP = QT$, ou $\frac{A \; sen \; NMO}{sen \; CMO} = \frac{B \; sen \; RQS}{sen \; CQS}$.

Se os fios CA, CB forem parallelos aos planos DE, DF, a ultima equaçaõ se reduzirá a $A \; sen \; DEG = B \; sen \; DFG$, que se póde pôr nesta fórma $A . \frac{DG}{DE} = B . \frac{DG}{DF}$. Logo será necessario, neste caso, *que os pezos dos corpos* A, B *sejaõ como os comprimentos dos planos* DE, DF *sobre os quais se sustentaõ.*

239 Mas se dous corpos estiverem sobre duas laminas curvas AF, BF (Fig. 120), atados ás extremidades de hum fio, que passe pela pequena roldana C, de que modo determinaremos a condiçaõ do equilibrio?

Igualmente resolveremos cada hum dos pezos A, B em duas forças. E como representamos aqui estes dous pezos pelas verticais Aa, Bb, huma das forças será Aa', ou Bb', pela direcçaõ AN, ou BM perpendicular ao plano inclinado; e a outra será representada por Aa'', ou Bb'', cuja direcçaõ coincide com a do mesmo fio. Logo, no caso do equilibrio, teremos $Aa'' = Bb''$; e conduzindo a vertical CNM, os triangulos semelhantes daraõ Aa ou $A : Aa'' :: CN : CA$, e Bb ou $B : Bb'' :: CM : CB$;

K

CB; logo $A \,.\, \frac{CA}{CN} = B \,.\, \frac{CB}{CM}$.

Isto posto, tiremos duas linhas horizontais AP, BQ, e fazendo $CP = x$, $CQ = x'$, $CA = z$, $CB = z'$, $AP = y$, $BQ = y'$, será a subnormal $PN = \frac{y\,dy}{dx}$, $CN = x + \frac{y\,dy}{dx} = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx} = \frac{z\,dz}{dx}$, $CM = \frac{z'dz'}{dx'}$. Logo, para haver equilibrio, teremos $\frac{A\,dx}{dz} = \frac{B\,dx'}{dz'}$: porém $z + z'$ he huma quantidade constante, e conseguintemente $dz = -dz'$; logo a condiçaõ do equilibrio será representada por esta equaçaõ $A\,dx + B\,dx' = 0$, da qual se mostrará huma applicaçaõ no Problema seguinte.

240 *Dada a curva* AF, *com os pezos* A, B, *e o comprimento do fio* ACB, *achar outra curva* EB *tal, que postos os dous corpos em qualquer parte dellas estejaõ sempre em equilibrio.*

Como a equaçaõ geral $A\,dx + B\,dx' = 0$ tem lugar em todos os casos, o seu integral $Ax + Bx' = C$ nos ensina que o centro commum de gravidade dos dous corpos A e B deve achar-se constantemente sobre huma mesma linha horizontal, seja qual for a situaçaõ delles; por quanto já sabemos por outra parte que a distancia do ponto C á horizontal, que passa pelo centro de gravidade dos corpos A, B, tem por expressaõ $\frac{Ax + Bx'}{A + B}$.

Agora dando o nome de a ao comprimento do fio ACB, teremos $z + z' = a$, ou $z' = a - z$; e esta equaçaõ, juntamente com a primeira que temos achado, dará de hum modo muito simples os valores de x' e de z' pelos de x e de z. E assim, sendo dado qualquer ponto A da curva AF, immediatamente se conhecerá o ponto correspondente B da curva BE.

241 Supponhamos, por exemplo, que a curva AF he hum circulo que tem o centro em N, e chamemos r o seu raio, e c a linha CN. Teremos $zz = xx + rr - (c - x)^2 = rr - cc + 2cx$; e substituindo $a - z'$ em lugar de z, e $\frac{C - Bx'}{A}$ em lugar de x, teremos por equaçaõ da curva

pro-

procurada EF, $2az' - z'z' = aa - rr + cc - \frac{2cC}{A} + \frac{2cB}{A}x'$. Porém, como a conſtante C he arbitraria, podemos ſuppolla tal, que $aa - rr + cc = \frac{2cC}{A}$; e a equaçaõ precedente ſe mudará em $2az' - z'z' = \frac{2cB}{A}x'$, a qual pertence a huma epicycloide, cujos circulos generantes ſaõ iguais.

Seja com effeito ANE o circulo immovel (Fig. 121.), BNF o circulo movel, r o raio de cada hum delles, M o ponto deſcrevente, ſituado na linha BMD, e em qualquer parte della. Sendo iguais os arcos revolvidos NE, NF, ſerá iſosceles o triangulo ADB; e conduzindo MC parallela a AB, ſerá AC conſtantemente igual a MB, e conſeguintemente naõ receberá variaçaõ alguma. Iſto poſto, reportemos a curva ao ponto fixo C, e façamos $CM = z$, $CP = x$, $BM = AC = m$; e teremos 1°, $AB - CM : CM :: AC : CD = \frac{mz}{2r - z} = DM$; 2°, pela propriedade do triangulo iſosceles, $CM^2 = 2CD . CP$, ou $zz = \frac{2mzx}{2r - z}$, ou finalmente $2rz - zz = 2mx$, equaçaõ perfeitamente ſemelhante á da curva que procuravamos.

242 Eſta epicycloide he ſuſceptivel de tres fórmas differentes, conforme ſe tomar o ponto deſcrevente, ou na circumferencia do circulo movel, ou fóra, ou dentro della. No primeiro caſo, o ponto C onde deve eſtar a roldana he hum ponto de *reverſaõ* (Fig. 122.): no ſegundo he hum *ponto multiplo*, e a curva fórma huma pequena *folha* (Fig. 123.): e no terceiro he hum *ponto conjugado* (Fig. 121.), porque pertence realmente á curva, ſendo evidente que os valores de $x = 0$, $z = 0$ ſatisfazem a ſua equaçaõ; he porém ao meſmo tempo hum ponto *ſolitario*, que naõ communica com a curva, ſenaõ por meio de ramos imaginarios.

Para deſcrever pois a epicycloide, que ſatisfaz á queſtaõ propoſta, ſerá neceſſario tomar $CA = m = \frac{Bc}{A} = \frac{B}{A} CN$, e o raio dos dous circulos $= a =$ ao comprimento do fio. Entaõ o ponto M'_1, na diſtancia $\frac{B}{A} CN$ do centro, deſcreverá a epicycloide procurada.

A conſtante foi determinada de maneira, que a curva ſe ſujeitaſſe a paſſar pela roldana C. Se a quizeſſemos determinar por qualquer outra condiçaõ, a curva, ainda que differente, poderia ſempre conſtruir-ſe por meio da epicycloide precedente. As curvas, que ſatisfazem a eſta queſtaõ, ſaõ conhecidas pelo nome de *curvas de equilibraçaõ*. Nas Actas de Leipſick poderá ver-ſe a ſoluçaõ deſte meſmo Problema pelo Marquez do Hoſpital, com as addiçoens que Leibnitz e Bernoulli lhe fizeraõ.

143 Os planos inclinados ſaõ de grande uſo, quando he neceſſario aballar maſſas enormes, como por exemplo, quando ſe trata de lançar as náos ao mar, ou de as arraſtar outra vez ao eſtaleiro para ſerem concertadas. Os rodeios, que ſe tomaõ nas montanhas eſcarpadas, para fazer o caminho mais facil, ſaõ tambem huma prova ſenſivel das ventagens, que nos reſultaõ dos planos inclinados. Quanto he mais doce o lançamento de huma eſcada, tanto menor fadiga ſentimos em ſobir; porque a acçaõ do pezo he tanto menor, quanto he maior o comprimento do plano, ſendo as alturas iguais.

DO PARAFUZO.

244 O *Parafuzo* he hum cylindro recto AQ (Fig. 124.), reveſtido de hum cordaõ ou filete eſpiral de groſſura uniforme, cuja inclinaçaõ ao eixo do cylindro he conſtantemente a meſma em todo o ſeu comprimento. Dá-ſe o nome de *ſpira* a huma volta inteira do filete, ou roſca do parafuzo, e o intervallo que ſepara duas ſpiras conſecutivas chama-ſe *paſſo do parafuzo.*

Fazendo abſtracçaõ do relevo deſta maquina, póde conſiderar-ſe produzida por triangulos rectangulos ABC, BDE &c, que ſe enrolaõ no cylindro (Fig. 125.). Cada hum deſtes triangulos tem por altura o paſſo do parafuzo, e por baſe

base a circumferencia do cylindro, formando as hypothenusas o filete da rosca.

245 A *porca* he hum solido vazado, e interiormente aberto em fórma de hum rego spiral, de maneira; que por elle se possa insinuar a rosca do parafuzo. Póde considerar-se, como o molde da parte do parafuzo que nella se acha metida.

246 Humas vezes está fixo o parafuzo, e se anda em roda com a porca, como se pratica nas prensas dos Livreiros, e em todas as maquinas destinadas a apertar fortemente quaisquer corpos. Outras vezes pelo contrario he movel o parafuzo, quando se trata de quebrar, ou impurrar algum corpo. Andando em roda com o cylindro, a rosca se introduz pouco a pouco pelos regos da porca, e com a extremidade do mesmo cylindro se produz huma pressaõ incrivel.

Em geral, seja qual for dos casos precedentes o que tenha lugar, poderemos sempre considerar hum ponto da rosca movel, como posto sobre huma porçaõ infinitamente pequena *M N* de hum plano inclinado *A C*, que tem por altura o passo do parafuzo, e por base a circumferencia do cylindro (Fig. 125.). Logo, se quaisquer forças sollicitarem este ponto ao movimento, será necessario para haver equilibrio, que a resultante dellas seja perpendicular ao referido plano inclinado.

247 Supponhamos, por exemplo, que a porca está fixa, e que huma potencia *P* se applica á alavanca *A P* para fazer girar o parafuzo (Fig. 124.). Está claro, que no caso de movimento o parafuzo deve ir avante na direcçaõ do seu eixo. Imaginemos pois, que huma potencia *Q* applicada á extremidade do eixo contrabalança o esforço da primeira, e impede o adiantamento do parafuzo. Deve determinar-se a condiçaõ necessaria, para estabelecer este equilibrio.

A potencia *Q* applicada segundo a direcçaõ do eixo póde resolver-se em tantas potencias parallelas, quantos saõ os pontos da rosca movel (Fig. 126.). Seja pois representada por $MG = q$ a que sollicita o ponto *M* parallelamente ao eixo; e seja *M K* a força de rotaçaõ do ponto *M*, em virtude da potencia P. Para haver equilibrio, he necessario que a resultante *M H* seja perpendicular ao plano inclinado *M N*. Desta condiçaõ se segue, que o angulo

gulo HMG deve ser igual a KMN, e conseguintemente teremos $MK : q :: tang\, KMN : 1$, ou MK para q, como o passo do parafuzo AB (Fig. 125.) para a circumferencia, que tem o raio igual á distancia do ponto M ao eixo do cylindro. Designando pois esta distancia por r, a altura AB por b, e a rasaõ do diametro para a circumferencia por c, teremos geralmente $q : MK :: 2cr : b$.

Seja p huma potencia infinitamente pequena, que a huma distancia R do eixo seja capaz de imprimir, por meio de huma alavanca, no ponto M da rosca a força de rotaçaõ MK; teremos $MK : p :: R : r$. E multiplicando esta proporçaõ pela precedente, resultará $q : p :: 2cR : b$.

248 Concluamos pois, que a força p applicada á alavanca R para fazer andar em roda a particula M da rosca he para a força q parallela ao eixo, que contrabalança o seu esforço, como o passo do parafuzo para a circumferencia descrita pelo braço da alavanca R. Como esta rasaõ he constante, e como tem igualmente lugar em todos os pontos da rosca, que assentaõ sobre o plano inclinado da porca; concluiremos em geral (Fig. 124.), que a soma das potencias p, isto he, que a resultante P applicada ao braço da alavanca R, he para a soma das potencias q, isto he, para a sua resultante Q dirigida pelo eixo do parafuzo, como a altura de hum passo para a circumferencia, que seria descrita pelo raio R.

249 Seja pois qual for a figura, e grossura das spiras de hum parafuzo, e a quantidade dellas que na porca estejaõ introduzidas, teremos sempre por condiçaõ do equilibrio nesta maquina a proporçaõ seguinte.

A potencia P, *que tende a fazer girar o parafuzo pelo braço da alavanca* R, *he para a força com que o parafuzo tende a adiantar-se pela direcçaõ do eixo*, *ou*, (que vem a ser o mesmo) *para a pressaõ que elle póde exercitar sobre hum corpo posto na sua extremidade*, *ou em fim para a potencia* Q *que lhe faz equilibrio*, *como hum passo do parafuzo para a circumferencia*, *que descreveria a potencia* P *andando á roda do cylindro.*

Logo a potencia terá tanto maior energia para comprimir os corpos por meio do parafuzo, quanto forem as spiras mais chegadas humas ás outras, e quanto for mais comprido o braço da alavanca.

250 Além disto, a fricçaõ que he muito grande nes-

ta

ta maquina favorece muito o equilibrio, mas embaraça á proporçaõ o movimento. Sendo, por exemplo, hum parafuzo immovel posto em situaçaõ vertical, a porca deveria naturalmente descer pelo seu proprio pezo, andando em roda pelas roscas do parafuzo, até chegar á base delle. Com tudo, ainda que seja muito pezada, em qualquer parte que a ponhaõ, fica em descanço, até que alguma força externa a obrigue a girar, e a descer: donde se vê, quanto he consideravel a fricçaõ nesta maquina, principalmente quando se naõ tem a attençaõ de facilitar-lhe o jogo com materias oleosas. Este obstaculo ao movimento cresce tambem pelos gráos de calor, que contrahem as roscas á medida que os esforços da potencia saõ maiores; e por isso succede muitas vezes arrebentarem os parafuzos, quando se trabalhaõ com excesso, principalmente no tempo dos grandes frios.

Sem embargo, a força do parafuzo para comprimir os corpos póde ser conduzida a hum ponto, que naõ he facil de conceber. He necessario ter visto em grande os effeitos desta maquina, para fazer conceito, ao menos proximamente, do partido que della se póde tirar, segundo as differentes circunstancias. Naõ conhecemos em Paris cousa mais curiosa neste genero, do que a salla das Imprensas da Manufactura do Tabaco.

251 O *parafuzo de Archimedes*, ou *parafuzo sem fim*, naõ differe do parafuzo simples, senaõ por huma roda dentada, que se lhe ajunta (Fig. 127.). A potencia Q applicada á manivella BCQ anda em roda com o cylindro AB, guarnecido de duas spiras E e F, as quais enlaçaõ com os dentes da roda GHI; e esta tem no eixo hum cylindro K, na superficie do qual se enrola a corda, que suspende o pezo P.

Nesta maquina, o ponto tangente G de qualquer dente da roda póde considerar-se como huma porçaõ infinitamente pequena de huma porca movel sobre o parafuzo AB. Logo o passo do parafuzo he para a circumferencia do raio BC, como a potencia Q applicada á manivella para a força com que o ponto G da rosca tende a mover o dente da roda. Logo será esta força $= \frac{Q \,.\, circ\, BC}{EF}$.

Chamando pois r o raio do cylindro, e R o da roda, tere-

teremos $\frac{Q \,.\, circ\, BC}{EF}$, R por expressaõ do momento da força applicada em G, o qual deve ser igual a Pr, que he o momento do pezo. Assim he necessario, para haver equilibrio no parafuzo sem fim, *que a potencia seja para o pezo, como o producto do raio do cylindro pelo passo do parafuzo, para o producto do raio da roda pela circumferencia, que descreveria a manivella.*

Se fizermos, por exemplo, o raio da manivella dés vezes maior que o passo do parafuzo, e o raio da roda dés vezes maior que o do cylindro, acharemos que entaõ fará equilibrio a potencia Q a hum pezo 314 vezes maior. A sua energia será muito mais consideravel, se ella se applicasse a hum systema de maquinas semelhantes, unidas entre si da maneira seguinte.

252 Considere-se a potencia Q applicada á manivella de hum parafuzo, o qual endenta na sua roda. Tenha esta hum carrete, que faça andar outro parafuzo, cuja roda por meio de outro carrete mova o terceiro parafuzo. E na roda deste supponha-se o cylindro, em que se enrola a corda que suspende o pezo. Mostra-se pelo calculo, que sendo a potencia Q equivalente ao pezo de huma só libra deve contrabalançar o pezo P de 279253 libras, suppondo que as differentes partes da maquina tem as dimensões seguintes.

O raio da manivella tem 168 linhas, e conseguintemente a sua circumferencia 1056; o raio da primeira roda 96; o da segunda 90; o da terceira 85; o do primeiro carrete 20; o do segundo 18; e o do cylindro 16. Além disto suppomos, que o segundo parafuzo tem 14 linhas de raio no lugar onde toca o primeiro carrete, e 9 no lugar onde endenta com a sua roda; que o terceiro parafuzo tem 8 linhas de raio no ponto de contacto com o segundo carrete, e 6 no ponto de contacto com a terceira roda; e que o passo do primeiro parafuzo he de huma linha. Isto supposto, facilmente se acha, que haverá equilibrio todas as vezes que for a potencia para o pezo, como o producto do passo do primeiro parafuzo, do raio do cylindro, dos raios dos dous carretes, e dos raios dos dous ultimos parafuzos nos lugares onde actúaõ sobre as suas rodas respectivas, para o producto da circumferencia da manivella, dos raios das tres rodas, e dos raios dos dous ultimos parafuzos nos lugares

gares onde actuaõ ſobre os carretes das duas primeiras rodas. Aſſim teremos no caſo preſente,

$Q:P::1.20.9.18.6.16:1056.96.14.90.8.85::1:279253.$

DA CUNHA.

253 A *Cunha* he huma eſpecie de priſma triangular, feito ordinariamente de materia muito dura, como de ferro por exemplo (Fig.128.). Todos ſabem, que os uſos principais deſte inſtrumento ſaõ de rachar, ou fender differentes corpos. Os triangulos ABC, FDE ſaõ as duas *baſes* da cunha, CE he o *corte*, $BDCE$, $ACEF$ ſaõ as duas *faces*, e $AFBD$ he a *cabeça*: ſobre eſta ſe applica verticalmente a força da potencia.

254 Supponhamos, que a cunha ABC eſtá introduzida na fenda já começada VXY (Fig. 129.), e que a potencia P lhe dá hum golpe de martello na cabeça. A força, que reſulta deſte golpe pela direcçaõ QMN, deve reſolver-ſe em outras duas reſpectivamente perpendiculares ás duas faces da cunha AC, BC, ou ás partes tangentes VX, XY; condiçaõ neceſſaria, para que a reſiſtencia deſtes planos lhe poſſa fazer equilibrio. Conſeguintemente deve haver na direcçaõ QMN hum ponto M, do qual ſe poſſa conduzir huma perpendicular para cada huma das partes interiores do corpo já fendido. Repreſentemos pois a força P por MN, e reſolvamola em outras duas MK, ML pelas direcções MV, MY perpendiculares ás faces da cunha. Iſto poſto, como os triangulos KMN, ABC tem todos os ſeus lados reſpectivamente perpendiculares, teremos

$$MN:SM:SN::AB:BC:CA;$$

e conſeguintemente a força MK ſerá $=\frac{P.BC}{AB}$, e a força $ML=\frac{P.AC}{AB}$.

225 Supponhamos agora, que eſtando fixa a baſe da cunha, a força applicada na cabeça he a que baſta, para que a ruptura eſteja a ponto de ſe fazer até o ponto O. Neſta hypotheſe, a reſiſtencia R que a parte VXO oppoem ao esforço da potencia, que a quer ſeparar da outra parte OXY, deve

deve considerar-se, como fazendo equilibrio á força *MK* por meio da alavanca *VXRO*.

Conduzindo pois as perpendiculares *OR*, *OS* sobre as direcções da resistencia, e da força, teremos no caso do equilibrio, $R.OR = \frac{P.AC.OS}{AB}$; donde se tira esta proporçaõ $P:R::OR.AB:AC.OS$; e tal he a relaçaõ que entre si devem ter a potencia applicada sobre a cabeça da cunha, e a resistencia que ella experimenta da parte do corpo, que se pertende fender. Outra proporçaõ semelhante se achará pelo que respeita á outra parte do mesmo corpo: e geralmente concluiremos, que a cunha tem tanto maior força, quanto he mais aguda.

256 Mas como a resistencia *R* da parte *VXO*, e a perpendicular *OR* conduzida sobre a sua direcçaõ, saõ quantidades summamente variaveis, tanto pela natureza differente dos corpos que se pertendem fender, como pela disposiçaõ particular das suas fibras, as quais naõ tem o mesmo gráo de flexibilidade, naõ se póde esperar que jámais se estabeleça cousa alguma certa, sobre a sua verdadeira medida. E por isso, sem embargo de ser a cunha huma maquina taõ simples, a sua theoria physica, quando se considéra como instrumento proprio para separar as partes dos corpos, he cheia de incerteza, e escuridade.

Toda a ferramenta, que se emprega em cortar, se refere mais ou menos directamente á cunha. As navalhas, os machados, os rebotes, os pregos, os nossos dentes, principalmente os incisivos, o bico dos passaros, as pontas, e garras dos animais, outra cousa naõ saõ mais do que differentes formas de cunhas, com as quais se obraõ nos corpos divisões innumeraveis.

Reflexões gerais sobre as Maquinas.

257 QUando duas potencias se tem posto em equilibrio, he facil de fazer, que huma dellas prevaleça sobre a outra, ajudando ainda levemente o seu esforço. O ponto essencial na theorica das Maquinas se reduz pois a determinar as condições, que a cada huma dellas convém, para o effeito de estabelecer o equi-

equilibrio entre duas forças oppostas. E isto he o que procurámos fazer nesta ultima parte da Statica.

Dos principios, que havemos exposto, he manifesto que sempre nos será facil pôr huma potencia mediocre em estado de vencer huma muito grande. Para isso basta empregar huma, ou muitas maquinas simples, dispostas de maneira, que produzaõ o effeito proposto. Mas he de advertir, que augmentando a força, cahimos em hum inconveniente inevitavel, que he a diminuiçaõ da velocidade no movimento do pezo; donde resulta conseguintemente a perda do tempo. Naõ ha cousa mais facil, sem duvida, que fazer vencer pela força de hum só homem huma resistencia equivalente á força unida de trinta homens; mas esse homem gastará necessariamente trinta dias em fazer a obra, que seria feita em hum dia pelos trinta homens.

258 A experiencia conforme neste ponto com a theorica estabelece pois como hum facto constante, que *em todas as maquinas se perde tanto na velocidade, quanto se ganha na força*, ou, que vem a ser o mesmo, que se perde tanto no tempo, quanto se ganha na força. Reciprocamente, quando se emprega huma força consideravel, póde ganhar-se na velocidade, e conseguintemente no tempo.

No sarilho, por exemplo, dá a potencia huma volta na roda, em quanto o pezo anda sómente o espaço, que corresponde a huma volta do cylindro. Pelo que he a velocidade da potencia para a do pezo, como a circumferencia da roda para a do cylindro, ou como o raio da roda para o do cylindro. Porém, no caso do equilibro, esta ultima rasaõ he a que tem o pezo para a potencia. Logo no sarilho perde-se tanto no movimento, quanto se tinha ganhado no equilibrio.

Applicando este discurso ao parafuzo, veremos que elle se naõ adianta mais do que hum passo, em quanto a potencia dá huma volta da manivella. Logo a velocidade da potencia he para a velocidade do parafuzo na direcçaõ do eixo, ou para a velocidade do corpo comprimido, como a circumferencia descrita pela força motriz para o passo do parafuzo. Naõ differe pois esta rasaõ da que tem a resistencia, que impede o movimento do parafuzo na direcçaõ do eixo, com a potencia applicada á manivella no caso do equilibrio.

259 Em geral: Seja qual for a maquina por meio da

qual duas potencias P, Q estaõ em equilibrio, póde imaginar-se que ellas correm no mesmo instante os espaços infinitamente pequenos dp e dq, os quais devem ser proporcionais ás velocidades, por serem os tempos iguais. Porém, para que as massas P, Q animadas das velocidades dp, dq possaõ manter-se em equilibrio, he necessario que as quantidades de movimento sejaõ iguais. Logo será $P\,dp = Q\,dq$; e conseguintemente $Pp = Qq$.

Por esta ultima equaçaõ se mostra, que em todas as maquinas *naõ póde haver equilibrio entre duas potencias, senaõ quando ellas saõ tais, que se fossem postas em movimento andassem no mesmo tempo espaços reciprocamente proporcionais.* Este principio demonstra de hum modo geral o que acabamos de estabelecer, que a potencia perde tanto no movimento, quanto ganha no equilibrio; e podia tambem servir, para demonstrar as condições do mesmo equilibrio nas differentes maquinas, de que até agora tratámos.

He verdade, que para nos servirmos delle neste ultimo uso, seriamos obrigados a suppor as maquinas em movimento; o que repugna ao estado do equilibrio. Porém como esta supposiçaõ naõ he mais do que condicional, naõ se oppoem á solidez das consequencias, que podiamos tirar do referido principio. Tomemos por exemplo dous corpos pendentes das extremidades de huma alavanca. Sabemos, que devem conservar-se em equilibrio, todas as vezes que os seus pezos forem na rasaõ inversa dos braços da alavanca, aos quais estaõ applicados. Porém neste caso, he evidente que se por impossivel houvesse de mover-se a alavanca, os espaços corridos pelos dous pezos seriaõ na rasaõ inversa dos mesmos pezos: porque estes espaços seriaõ arcos semelhantes descritos pelos braços da alavanca, os quais saõ entre si como os raios.

Podiamos pois, á imitaçaõ de Descartes, Gravesande, e muitos outros, assentar os fundamentos da Statica sobre o principio, que acabamos de expór. As condições particulares do equilibrio em cada huma das maquinas simples se deduzem delle com muita facilidade; e como a sua applicaçaõ he muito geral, naõ he de admirar, que muitos Authores lhe tenhaõ dado preferencia sobre o methodo, que temos seguido. Mas sem embargo parece, que o principio mencionado naõ he muito directo, para servir de base

a

a huma theorica, que por outra parte he susceptivel de huma demonstraçaõ rigorosa.

260 Aqui seria o lugar de entrarmos na descriçaõ circunstanciada das maquinas compostas: mas além de que ella seria immensa, cada hum póde facilmente supprilla, tomando por modelo o que acima dissemos dos apparelhos de cadernais, das rodas, e do parafuzo sem fim. Toda a difficuldade consiste em achar, para o caso do equilibrio, a rasaõ da potencia ao pezo: e esta resulta sempre do producto de todas as rasões particulares, que o equilibrio exige em cada huma das maquinas simples, que entraõ na composiçaõ daquella, cujo effeito se pertende calcular. E póde tambem dizer-se, que esta rasaõ he sempre a inversa dos espaços, que deveriaõ andar no mesmo tempo as duas potencias, se por impossivel naõ estivessem em equilibrio.

Reflexões particulares sobre a fricçaõ.

COmo a fricçaõ modifica muito os effeitos das maquinas, principalmente sendo compostas, ninguem póde julgar-se dispensado de a meter em linha de conta, quando pertende calcular a força util de huma maquina com algum genero de exactidaõ. Por falta de avaliar, ao menos em parte, o que as forças moventes gastaõ da sua energia em vencer a resistencia procedida da fricçaõ, se tem cahido muitas vezes em erros naõ menos grosseiros, que dispendiosos. Digo, em parte; porque ninguem se póde lizongear de medir exactamente esta perda: Taõ variaveis, e incertos saõ os elementos, de que ella depende.

261 A fricçaõ provém da resistencia, que he necessario vencer, para fazer que hum corpo se mova sobre outro. Esta resistencia he infinitamente variavel; por quanto resulta da adhesaõ mutua, e enlaçamento das partes salientes de hum corpo com as intrantes do outro. As superficies mais polidas naõ saõ izentas destas pequenas desigualdades, as quais se descobrem sem numero usando do microscopio. Esta adhesaõ exige pois huma quantidade de força, para ser vencida. He absolutamente necessario romper os laços, que a formaõ, quando o corpo se naõ póde desembaraçar de outra maneira; e sem isso naõ haveria movimento.

262 A experiencia mostra muito bem, que a fricçaõ segue

gue proximamente a rasaõ das pressões, isto he, que hum corpo que assenta por huma das suas faces sobre qualquer plano, e que requer huma certa força para chegar ao ponto de mover-se, naõ exigiria para isto mais do que a ametade della, se o seu pezo, ou em geral, se a potencia que o comprime sobre o plano, se houvesse diminuido de huma ametade.

263 Tambem mostra a experiencia, que fazendo mover hum parallelepipedo sobre huma das suas faces menores, se acha sensivelmente a mesma resistencia da parte da fricçaõ, que se observa quando se pertende mover sobre qualquer das faces maiores. E dahi tem concluido alguns Physicos, seguindo a M. d' Amontons (*Mém. de l' Ac. Roy. des Sc. A.* 1699. 1703. 1704), que as superficies naõ tem parte na medida desta resistencia. Podia com tudo parecer, que quanto maior he a superficie, tanto mais se multiplicaõ os pontos do contacto, e tanto mais força he necessaria para dobrar, ou quebrar as pequenas pontas, que embaraçaõ o movimento. Mas se por huma parte saõ mais numerosos os pontos desiguais, por outra he menor o pezo que comprime a cada hum delles, e as partes prominentes de huma superficie se encaixaõ menos profundamente nas cavidades da outra, donde se requer menor força para as despegar. Porém esta compensaçaõ naõ he taõ exacta, principalmente quando o polído das partes he differente, que naõ deva contar-se a grandeza das superficies entre as causas da fricçaõ.

O tempo influe tambem nesta adhesaõ reciproca dos corpos. Porque as suas eminencias, e cavidades se ajustaõ, e encaixaõ tanto mais, quanto he maior o tempo que tem sido sujeitas aos effeitos da pressaõ. He hum facto provado pela experiencia, e confessado por todos os Physicos. E dahi vem, que huma vez que o corpo he posto em movimento naõ experimenta tanta resistencia, quanta experimentava no momento em que começou a mover-se.

264 Naõ sómente a duraçaõ da superposiçaõ, e contacto dos corpos aumenta a difficuldade de os mover, mas tambem os diversos gráos de temperatura, e de humidade na atmosphera contribuem muito a fazer summamente variaveis os effeitos da fricçaõ. Todos sabem, que huma porta, huma janella &c, naõ se abre com a mesma facilidade, quando o tempo está muito humido. Ajunte-se

te-ſe a iſto, que as fibras do plano reſiſtem mais, ou menos, conforme a direcçaõ do movimento, e conforme o gráo da flexibilidade particular de cada huma. Ajuntem-ſe em fim todas as variações, que trazem comſigo as qualidades particulares de certos corpos, que parecem ter entre ſi huma tal *Affinidade*, para fallarmos a linguagem da Chymica, que a ſua adheſaõ reciproca he muito mais forte: e certamente concluiremos, que naõ ha couſa mais embaraçada na conſideraçaõ das forças moventes, do que a theorica das fricçoens. A experiencia he neſta parte a guia mais ſegura; e eiſaqui hum modo de tirar della reſultados, ſobre os quais ſe poſſa contar.

265 Seja *M* hum corpo poſto ſobre o plano horizontal *A B* (Fig.130.), e tirado pela direcçaõ *Q C* pelo pezo *P*, por meio do fio *Q C P*, que ſuppomos paſſar por huma pequena roldana *C*. Eſtá claro, que a fricçaõ he neſte caſo o unico obſtaculo que ſe oppoem ao movimento do corpo *M*, porque toda a força do ſeu pezo he deſtruida pelo plano, ſobre o qual aſſenta. A naõ haver aquelle obſtaculo, baſtaria pois a menor potencia *P*, para o fazer mover horizontalmente. Tomem-ſe por *P* differentes pezos conſecutivamente, até ſe achar hum que eſteja a ponto de pôr o corpo em movimento: e entaõ teremos hum meio bem ſimples de conhecer a fricçaõ, como he o ſeguinte.

Produza-ſe a direcçaõ *C Q* até encontrar em *M* a vertical *M N*, que paſſa pelo centro de gravidade. Entaõ, repreſentando por *M N* o pezo do corpo, e por *M V* a força *P*, a diagonal *M T* ſerá a reſultante deſtas duas forças, a qual terá huma certa quantidade de inclinaçaõ ſobre a horizontal *A B*; e o angulo deſta inclinaçaõ *M T N* he o que ſe chama *angulo da fricçaõ.* Ora a tangente deſte angulo he para o raio, como a força da preſſaõ he para a da fricçaõ; logo conhecendo eſta ultima raſaõ ſerá facil de determinar o angulo da fricçaõ. E ſe a fricçaõ he hum quarto da preſſaõ, como ſe tem obſervado muitas vezes em certos corpos, concluiremos que o angulo da fricçaõ tem a tangente quadrupla do raio; e conſeguintemente ſerá de $75^\circ\ 58'$, como ſe acha nas Taboas.

266 Em geral: Para que hum corpo eſteja a ponto de mover-ſe, he neceſſario que a reſultante das forças que lhe ſaõ applicadas, faça com as ſuperficies que ſe tocaõ hum angulo igual ao angulo da fricçaõ. Além diſſo he neceſ-

necessario, que o ponto T da base AB, pelo qual passa a resultante, naõ venha a cahir fóra da mesma base; porque sendo assim, o corpo em lugar de se mover pelo plano adiante, tombaria sobre elle.

187 Tambem póde determinar-se a resistencia que resulta da fricçaõ, pondo qualquer corpo de pezo conhecido sobre hum plano AB movel sobre o eixo horizontal A, e inclinando-o até que o corpo esteja a ponto de escorregar (Fig. 131.). Entaõ o seu pezo representado por MT se resolverá em duas forças, huma MN perpendicular ao plano, e outra MV que lhe será parallella. A primeira he totalmente destruida pela resistencia do plano, e a segunda pela fricçaõ, á qual he conseguintemente igual. Logo a força da fricçaõ he para o pezo do corpo, como o seno da inclinaçaõ do plano para o seno total; e por conseguinte o angulo da fricçaõ MTN he igual ao angulo CAB do plano com a vertical.

268 Huma vez conhecido este angulo, póde ter-se conta com os effeitos da fricçaõ no uso das maquinas. Tomemos o sarilho por exemplo (Fig. 132.), e supponhamos a roda IKO com o cylindro LGF no mesmo plano, e o todo movel sobre o eixo CNT. Produzaõ-se as direcçoens PO, QF da potencia e do pezo, até concorrerem em M, e seja MT a direcçaõ da resultante.

Isto posto, se naõ houvesse fricçaõ que vencer, a resultante seria dirigida por MNC para o centro C, ou perpendicularmente á superficie do eixo: mas no caso da fricçaõ, será necessario que ella faça com o mesmo eixo hum angulo MTN igual ao angulo da fricçaõ. Seja qual for o valor deste angulo, que nós chamaremos f, no triangulo CMT conheceremos os dous lados CT, CM, e o angulo $CTM = 90^\circ + f$; logo $\frac{CT \cdot cof\, f}{CM}$ será o seno do angulo CMT, que chamaremos Φ. Seja o angulo $CMP = A$, e $CMF = B$, e conseguintemente $PMT = A - \Phi$, e $TMF = B + \Phi$. Sendo pois MT a direcçaõ da resultante das duas forças P, e Q, teremos $P : Q :: sen\, TMF : sen\, TMP :: sen\,(B + \Phi) : sen\,(A - \Phi)$; e esta he a rasaõ, que devem ter entre si as duas potencias, para fazerem equilibrio no sarilho.

Supponde parallelas as direcçoens das potencias P, Q, pode-

poderemos considerar como infinitamente pequenos os angulos A, B, Φ; e entaõ será $P : Q :: \mathit{sen}\, B + \mathit{sen}\, \Phi : \mathit{sen}\, A - \mathit{sen}\, \Phi$: porém $\mathit{sen}\, A = \frac{CO}{CM}$, $\mathit{sen}\, B = \frac{CF}{CM}$, e $\mathit{sen}\, \Phi = \frac{CT \,.\, \mathit{cos} f}{CM}$; logo $P : Q :: CF + CT.\mathit{cos} f : CO - CT.\mathit{cos} f$.

269 I. He de advertir em primeiro lugar, que na hypothese da fricçaõ ha sempre dous valores entre outros, que se podem dar á potencia para sustentar o pezo, hum maior, e o outro menor do que devia ser no caso de naõ ter lugar a fricçaõ. Porque tomando $NT' = NT$, póde a resultante dirigir-se por MT', sem alteraçaõ do equilibrio, visto fazer ainda com a superficie do eixo hum angulo igual ao angulo da fricçaõ.

No primeiro caso, que he o que acima examinámos, sendo MT a resultante das duas forças equilibradas, temos $P : Q :: \mathit{sen}\, TMF : \mathit{sen}\, TMO$; e está claro, que a potencia será entaõ maior do que havia de ser naõ havendo fricçaõ. Mas no segundo caso temos $P : Q :: \mathit{sen}\, T'MF : \mathit{sen}\, T'MO$; e está claro tambem, que entaõ será a potencia menor do que havia de ser, se naõ houvesse fricçaõ. Supponde as direcçoens das potencias parallelas, acharemos que os dous valores extremos de P saõ $\frac{Q(CF + CT.\mathit{cos} f)}{CO - CT.\mathit{cos} f}$, e $\frac{Q(CF - CT\, \mathit{cos} f)}{CO + CT.\mathit{cos} f}$.

Seja, por exemplo, o raio da roda CO sinco vezes maior que o do cylindro CF, e o do cylindro quatro vezes maior que o do eixo CT, e seja a força da fricçaõ huma quarta parte da pressaõ. Neste caso teremos $\mathit{tang} f = 4$, ou $\mathit{cos} f = \frac{1}{\sqrt{17}}$: e suppondo as direcçoens parallelas, os dous valores de P que bastaráõ para pôr o corpo Q a ponto de sobir, ou descer, seraõ representados por $\frac{Q(4\sqrt{17} + 1)}{20\sqrt{17} - 1}$, e $\frac{Q(4\sqrt{17} - 1)}{20\sqrt{17} + 1}$, que se reduzem a $0{,}2147\, Q$, e $0{,}1852\, Q$. O primeiro he com effeito maior, e o e o segundo menor que $\frac{1}{5}$ Q, valor unico que teria lugar, se naõ houvesse fricçaõ.

Esta soluçaõ póde applicar-se a huma alavanca, que girar sobre hum eixo, considerando *CO* e *CF*, como perpendiculares tiradas do centro do eixo para as direcçoens das potencias. Tambem se applicará á roldana fixa, fazendo $CO = CF$.

270 II. Tambem se deve reflectir, que no caso de que em fim se chegasse a estabelecer huma theorica clara e solida da resistencia occasionada pela fricçaõ, ainda ficaria huma difficuldade quasi insuperavel nos meios de a reduzir á practica. Porque essa theorica, qualquer que fosse por outra parte a sua generalidade, naõ deixaria por isso de exigir, que, para haver de applicar-se com successo, constasse primeiro com alguma exactidaõ o gráo da mesma resistencia, por experiencias reiteradas, uniformes, e extremamente variadas em cada hum dos casos, tanto do equilibrio, como do movimento. Porém naõ parece verosimil, que jámais se possaõ reduzir a regras constantes os factos, que relativamente á fricçaõ já saõ conhecidos, e muito menos a multidaõ immensa dos que ainda se naõ sabem.

O polido das superficies he susceptivel de taõ grande variedade, sem haver escala alguma de comparaçaõ, pela qual se possaõ distinguir os differentes gráos delle, que naõ era necessario mais para tirar a esperança de huma theorica geralmente applicavel aos effeitos da fricçaõ. Mas naõ he este o unico obstaculo, que se oppoem á existencia de semelhante descobrimento. A pressaõ, a grandeza, a natureza, e a velocidade das superficies, as variaçoens da atmosphera &c, saõ elementos igualmente necessarios nesta materia; e bem se sabe, quanta incerteza provêm de causas taõ differentes nos resultados das mesmas experiencias. Naõ deve pois esperar-se dos calculos relativos à fricçaõ, senaõ huma approximaçaõ mais ou menos exacta, e muitas vezes achada por mero orsamento, principalmente pelo que respeita ás maquinas executadas em grande.

271 III. Naõ faltaõ meios para diminuir a fricçaõ, já polindo bem as superficies, já separando-as por meio de rolos, já untando-as com materias oleosas; e sobre tudo evitando o movimento de corpos homogeneos, huns sobre outros. Porque a experiencia mostra, que metais differen-

tes

tes se movem com mais facilidade, quer seja roçando, quer revolvendo, e conseguintemente se gastaõ menos, do que fazendo as peças do mesmo metal. O aço, por exemplo, mais facilmente se move sobre o cobre, do que sobre outro aço. Tambem deve haver escolha entre os corpos heterogeneos, para facilitar mais e mais o movimento. Assim o aço gira melhor sobre o lataõ, do que sobre o cobre, chumbo, ou estanho. Saõ factos estabelecidos pela experiencia, á qual se deve recorrer principalmente em semelhante materia.

272 Porèm, se com todas estas precauçoens podemos diminuir os effeitos da fricçaõ, naõ devemos por isso crer que jámais se possaõ destruir de todo. Huma maquina sem fricçaõ he huma quimera: e outra tal he o *Movimento Perpetuo* taõ decantado, taõ procurado por alguns maquinistas, e quasi sempre objecto ridiculo das suas loucas despezas. Para que pudessem lizongear-se de produzir em fim esta *Grande Obra* da Mechanica, era necessario imaginar primeiro algum meio de restituir ás forças motrizes o que as fricçoens inevitaveis lhes fazem necessariamente perder. Esta reproducçaõ he impossivel, se de tempo em tempo naõ vier em soccorro huma potencia estranha que as reanime, ou comprimindo mólas, ou levantando pezos, ou dando de qualquer outro modo impulsaõ, movimento, e vida a estes automatos.

273 IV. Os meios de aumentar a fricçaõ saõ mais numerosos, e mais faceis do que os de a diminuir. Mas a maior parte delles he taõ conhecida, que seria cousa inutil lembrallos aqui. Ninguem ignora tambem a sua utilidade nas Artes mechanicas, e em quasi todos os usos da vida. Pela fricçaõ he que as limas, os raspadores, as serras, e em geral toda a ferramenta deste genero, obraõ sobre os corpos mais duros. Pela fricçaõ se chegaõ a polir os metais, os espelhos, e os mesmos diamantes. Se antes de descer as montanhas algum tanto escarpadas se eneravaõ os eixos das carruagens, he para retardar o movimento, aumentando a fricçaõ; e se para lançar, ou levar a ancora, se daõ algumas voltas da amarra no cylindro do cabrestante, he tambem para aumentar a resistencia por meio da fricçaõ. Huma só chaveta, que se aperta contra o rodizio de hum moinho, basta para resistir a todo o impulso do vento, ou da agua &c &c.

V. Geralmente se crê, que huma potencia tem a maior energia possível para sustentar em equilibrio qualquer pezo sobre hum plano horizontal, ou inclinado, quando obra por huma direcçaõ parallela ao mesmo plano; mas esta asserçaõ naõ he verdadeira, senaõ quando se prescinde dos effeitos da fricçaõ. Pelo calculo se acha, que para fazer mover qualquer corpo sobre hum plano horizontal, supposto a fricçaõ igual a hum terço da pressaõ, a direcçaõ mais favoravel que se póde dar á potencia, he a que faz com o plano hum angulo de 18° 27′ proximamente.

SE-

SEGUNDA PARTE DA MECHANICA OU A DYNAMICA.

NOÇOENS PRELIMINARES SOBRE O MOVIMENTO DE HUM CORPO SOLLICITADO POR MUITAS POTENCIAS.

274 QUANDO as potencias, que ſollicitaõ hum corpo ao movimento, naõ eſtaõ em equilibrio, he manifeſto que elle deve mover-ſe neceſſariamente; e ſe as potencias depois do primeiro impulſo ceſſarem de obrar ſobre o movel, e o deixarem a ſi meſmo, bem ſe vê que o ſeu movimento ha de ſer uniforme, e rectilineo. Mas ſe tendo chegado em certo tempo ao ponto *B* da ſua direcçaõ *ABC* (Fig. 133.), for ſollicitado por outra qualquer potencia, ſegundo a direcçaõ *BE*, entaõ repreſentando por *BC* a velocidade que elle tinha pela direcçaõ *AB*, e por *BE* a velocidade novamente recebida, a diagonal *BD* do parallelogrammo *BEDC* moſtrará a ſua direcçaõ, e velocidade effectivas.

Do meſmo modo, ſe em qualquer ponto *D* da nova direcçaõ *BD*, vier outra potencia a obrar ſobre o movel, e lhe imprimir a velocidade *DH*, tomaremos no prolongamento de *BD* huma recta *DG*, que repreſente a velocidade que elle tinha pela direcçaõ *BD*; e completando o parallelogrammo *DHFG*, acharemos que a diagonal *DF* exprime a nova direcçaõ, que o corpo deve tomar, e a velocidade com que ſe deve mover.

Continuando o meſmo procedimento, he facil de conceber que todo o corpo ſollicitado deſte modo por impulſoens

ſoens ſucceſſivas, deve correr os lados de hum polygono: e ſe os naõ deſcrever a todos com a meſma velocidade, ao menos deſcreverá uniformemente a cada hum delles em particular. Chamando pois s hum lado do polygono, t o tempo que gaſta o movel em o correr, e u a velocidade com que o corre, teremos $u = \frac{s}{t}$; mas eſtas tres quantidades podem ſer differentes em cada hum dos lados do polygono.

275 Supponhamos agora, que huma força acceleratriz obra ſobre o movel a cada inſtante infinitamente pequeno, iſto he, ſem interrupçaõ alguma. Eſtá claro, que a linha deſcrita ſerá compoſta de huma infinidade de pequenas diagonais, cuja ſerie continua formará hum arco de curva, em quanto a direcçaõ da força acceleratriz naõ conſpirar com a do movel. Cada huma deſtas diagonais ſerá pois hum dos elementos infinitamente pequenos ds da curva deſcrita, e dt ſerá o elemento do tempo t empregado em correr o arco inteiro s. E aſſim teremos, por formula geral da velocidade do movel, $u = \frac{ds}{dt}$.

276 Se o corpo ſe mover em linha recta, e ſe a força acceleratriz actuar pela ſua meſma direcçaõ, aumentará a cada inſtante a velocidade do movel de huma quantidade infinitamente pequena du. Mas eſta quantidade naõ ſerá a meſma em todos os inſtantes, ſenaõ no caſo de ſer conſtante a força acceleratriz. Como pois eſta força no inſtante dt imprime a velocidade du, he manifeſto que obrando igualmente no inſtante ſeguinte imprimiria outra velocidade igual du; de maneira, que ſe o movel naõ experimentaſſe outra acçaõ, ſenaõ a de huma tal força, no fim do ſegundo inſtante teria a velocidade $2du$. Eſta acçaõ, repetida por hum numero n de inſtantes, produziria pois a velocidade $n\,du$ no fim do tempo $n\,dt$.

Seja $n\,dt = 1$, ou $n = \frac{1}{dt}$, e teremos por expreſſaõ da velocidade adquirida em huma unidade de tempo $\frac{du}{dt}$. Chamemos p eſta quantidade, que naõ póde deixar de ſer conhecida, por quanto ella he a que ſerve de medida á

intenſaõ

intenſaõ da força acceleratriz. Logo teremos $du = p\,dt$; expreſſaõ igualmente propria para repreſentar o aumento, ou a diminuiçaõ da velocidade, que a força acceleratriz produz no movel, conforme a ſua direcçaõ conſpira com a delle, ou lhe he directamente contraria.

277 A quantidade p he variavel, todas as vezes que a força acceleratriz naõ he conſtante; porque aqui entendemos por p a velocidade, que a intenſaõ actual da força acceleratriz, repetida igual e continuamente por huma unidade de tempo, produziria em hum movel unicamente ſujeito á ſua acçaõ. He com tudo aſſaz ordinario entender-ſe por p a meſma força acceleratriz: mas ſe queremos ter idéas claras dos primeiros principios da Dynamica, he neceſſario que naõ percamos jámais de viſta o unico modo exacto de conſiderar as potencias. Já diſſemos (n. 25.), que ellas naõ devem, nem podem entrar em conſideraçaõ, ſenaõ em raſaõ dos effeitos que produzem.

Se toda a ſua acçaõ ſe exercita em hum inſtante, reſulta no movel huma determinada quantidade de movimento, cuja medida dá ſempre a conhecer a energia da potencia. Mas quando ſe trata de huma força acceleratriz, que obra deſigualmente em cada ponto do eſpaço deſcrito pelo movel, he neceſſario, a fim de medir os ſeus effeitos, ſuppór por hum momento que a força perſevera na ſua intenſaõ actual, e ver o que a ſua acçaõ repetida igual, e continuamente produziria de velocidade, em hum corpo unicamente ſujeito ao ſeu impulſo, por huma unidade de tempo.

278 Eſta velocidade, que nós chamamos p, he muito propria pára nos moſtrar a intenſaõ da força acceleratriz em hum ponto determinado, ſeja elle qual for; porque ſuppondo que o valor de p ſe faz duplo, dupla tambem deve ſer a aceleraçaõ, por quanto he p geralmente proporcional a du, ſendo dt conſtante. Por outra parte ſendo p variavel em cada ponto do eſpaço corrido pelo movel, moſtrará os differentes gráos de aceleraçaõ, que a força deve produzir em cada hum dos meſmos pontos. Donde ſe vê, que a quantidade p naõ deve entrar no calculo, ſenaõ como huma ſimples medida dos effeitos produzidos pela força acceleratriz, e que o modo mais adequado de avaliar a energia da meſma força conſiſte em conhecer o valor de p.

279 De-

279 Depois desta breve exposiçaõ do verdadeiro sentido, que se deve dar á formula $du = pdt$, naõ teremos duvida em dizer com todos os Geometras modernos, que *o elemento da velocidade he igual ao producto da força acceleratriz multiplicada pelo elemento do tempo.* Este enunciado porém, commodo pela sua brevidade, peccaria absolutamente da parte da exactidaõ, naõ se lhe unindo huma idêa distinta do que he necessario entender-se por p. Succede aqui o mesmo, que em muitas outras expressoens consagradas pelo uso. Todas saõ indifferentes, para quem huma vez tem alcançado o seu verdadeiro sentido.

280 Em conclusaõ: Ainda que a formula $du = pdt$ naõ tenha lugar, senaõ nos movimentos rectilineos perturbados por qualquer força acceleratriz, póde com tudo applicar-se facilmente aos curvilineos. Para isso, seja Mm (Fig. 134.) o elemento infinitamente pequeno, que o corpo descreve no instante dt. Se depois de o haver descrito, naõ fosse sollicitado por outra nenhuma potencia, continuaria a mover-se uniformemente em linha recta na sua primeira direcçaõ Mmm'; e no instante seguinte dt', ou $dt + ddt$, correria o espaço $mm' = \frac{ds\,dt'}{dt}$.

Supponhamos pois, que no ponto m he sollicitado o dito corpo por quaisquer potencias. Todas estas poderáõ reduzir-se a duas, huma T pela direcçaõ Mmm', e a outra N perpendicular a Mmm'. A primeira he geralmente conhecida pelo nome de *força tangencial*, e a segunda pelo de *força normal.* A força tangencial accelera a velocidade do movel na direcçaõ mm', e o fará chegar a hum ponto m'' no fim do tempo dt': e conseguintemente será o aumento da velocidade $du = T\,dt'$. A força normal, pelo contrario, naõ altéra o movimento do corpo, mas sómente lhe muda a direcçaõ, fazendo-lhe correr o pequeno espaço $m''\mu$ perpendicular a mm''. Porém a velocidade necessaria para correr o dito espaço no instante dt' he $\frac{m''\mu}{dt'}$, e esta velocidade he impressa pela força acceleratriz N; logo teremos $\frac{m''\mu}{dt'} = N\,dt'$, ou $m''\mu = N\,dt'^2$.

Em virtude destas duas forças, e da velocidade que já tinha

tinha o corpo no ponto m da sua *Trajectoria*, achar-se-ha no ponto μ depois do instante dt', e haverá descrito o segundo elemento $m''\mu$, ou $ds + dds$ da linha do seu movimenlo. Seja R o raio osculador da curva, que elle deve descrever. Teremos $m''\mu = \frac{ds^2}{R}$; e as tres equações relativas ao movimento do corpo seraõ $u = \frac{ds}{dt'}$, $du = Tdt'$, e $ds^2 = R.Ndt'^2$. E porque $dt' = dt + ddt$, e estas equações devem ser homogeneas, podemos substituir dt em lugar de dt', e as equações se reduzirão aos termos seguintes:

$$u = \frac{ds}{dt}$$

$$du = Tdt$$

$$ds^2 = R.Ndt^2, \text{ ou } uu = R.N.$$

E por estas equações he que póde determinar-se em qualquer ponto da trajectoria a velocidade de hum corpo sollicitado por quaisquer forças, em todos os casos, ao menos quando a dita linha se achar em hum mesmo plano.

281 Estabelecidas estas primeiras noções, passaremos a tratar da nossa materia, discutindo por ordem as questões principais da Dynamica, as quais em geral podem reduzir-se a tres. Na primeira consideraremos o movel, como hum ponto livre, que póde igualmente obedecer a todas as sollicitações das forças acceleratrizes. Na segunda consideraremos ainda o movel, como hum ponto, mas necessitado a mover-se sobre huma linha, ou superficie dada: de maneira que as forças, pelas quais he sollicitado ao movimento, naõ possaõ produzir outro effeito, senaõ o de accelerar, ou retardar a sua velocidade na trajectoria, que elle deve correr. Na terceira em fim examinaremos o movimento dos pontos, que actuando huns contra os outros, perturbaõ reciprocamente os seus movimentos respectivos: e dahi deduziremos o movimento dos corpos, considerados no estado actual, isto he, com volume finito. Tais saõ os objectos principais das tres Secções da Dynamica.

282 Mas antes de entrarmos no exame particular de cada hum delles, repetiremos a verdadeira significaçaõ das

quanti-

quantidades u e p nas equações fundamentais $u = \frac{ds}{dt}$, e $du = p\,dt$; porque he muito importante, que dellas se tenhaõ ideas claras, e exactas.

He necessario pois que por u entendamos aqui huma quantidade variavel, que exprime a cada instante o espaço, que o movel correria em huma unidade de tempo, se o seu movimento viesse de repente a fazer-se uniforme, e rectilineo. Por conseguinte, he u a velocidade, de que o movel seria animado, se as forças acceleratrizes cessassem de obrar, ou se aniquilassem em qualquer instante do movimento.

Por p entendemos outra quantidade variavel, que exprime a cada instante a velocidade, que a força acceleratriz, permanecendo constante, seria capaz de imprimir no movel, por huma acçaõ igual, e continuamente repetida por huma unidade de tempo.

283 Em fim, das duas formulas $u = \frac{ds}{dt}$, e $du = p\,dt$, se deduzem outras duas $u\,du = p\,ds$, e $p\,dt = d\left(\frac{ds}{dt}\right)$, as quais se applicaõ igualmente a quasi todos os objectos, que passamos a discutir. E com effeito se verá, que a maior parte destas discussões consistem na applicaçaõ destas quatro formulas a differentes valores de p.

SECÇAÕ I.

DO MOVIMENTO DE HUM PONTO LIVRE SOLLICITADO POR QUAISQUER POTENCIAS.

O Movimento de hum ponto livre póde considerar-se em dous estados differentes. O primeiro he quando se move por hum espaço *vazio*, ou de nenhuma resistencia; e o segundo, quando se move por hum *meio resistente*.

ARTIGO I.

Do movimento de hum ponto livre, por hum meio naõ resistente.

284 O Primeiro objecto, que naturalmente se offerece nesta theorica, he o exame geral de todos os movimentos rectilineos; mas como o dos corpos graves he o mais util, especialmente nos empenharemos em dar bem a conhecer todas as suas circunstancias.

A gravidade, como já dissemos em outra parte, he huma força acceleratriz constante, que exercita sobre todos os corpos huma acçaõ continua por direcções perpendiculares ao horizonte. Supponhamos pois, que qualquer corpo se deixa cahir livremente por huma linha vertical: a gravidade obrará sobre elle, e o sollicitará ao movimento sem interrupçaõ alguma. Será logo animado de huma força acceleratriz constante, que podemos chamar g; e assim teremos por equaçaõ do seu movimento $du = g\,dt$, cujo integral he $u = gt$.

285 Esta formula nos ensina já, que *na queda dos corpos graves, saõ as velocidades na rasaõ dos tempos, contados desde o principio do movimento.*

Integrando tambem a equaçaõ $u\,du = g\,ds$, teremos $uu = 2gs$; e substituindo $g^2 t^2$ em lugar de uu, teremos $s = \frac{1}{2} g t^2$. Este novo resultado geral nos mostra, que *os espaços corridos desde a origem do movimento saõ na rasaõ duplicada dos tempos.*

Como as velocidades adquiridas saõ proporcionais aos tempos, igualmente diremos, que *os espaços corridos saõ na rasaõ duplicada das velocidades adquiridas*: o que immediatamente se concluiria tambem da equaçaõ $uu = 2gs$.

Estas duas equações $u = gt$, e $s = \frac{1}{2} g t^2$, que comprehendem a terceira $uu = 2gs$, bastaõ para determinar em todos os casos as circunstancias relativas ao movimento dos graves, huma vez que seja bem conhecida a quantidade constante g, para cuja determinaçaõ exacta naõ se tem desprezado cousa alguma.

Por

Por experiencias repetidas, feitas com todo o cuidado que podia esperar-se dos Physicos mais habeis, e confirmadas sobre tudo pelos resultados mais uniformes da theorica dos pendulos, se tem averiguado com a maior segurança, que era possivel, as leis da acceleraçaõ produzida no movimento dos corpos em virtude da gravidade. Sabemos de facto, que na latitude de Paris hum corpo deixado a si mesmo corre no primeiro segundo da sua queda 15 pés e $\frac{1}{10}$, ou mais exactamente $15^{p},098$.

Suppondo pois que se conta o tempo por segundos, e o espaço por pés, quando for $t = 1$, será $s = 15{,}098$. Substituindo estes valores na equaçaõ $s = \frac{1}{2} g t^2$, concluiremos $g = 30{,}196$; valor, que representa com muita exactidaõ a força da gravidade, e que no movimento dos córpos graves faz as vezes da força acceleratriz p, que entra na formula geral $du = p\,dt$.

287 Sendo assim determinado o valor de g, bastará conhecer huma das tres quantidades u, s, t, para determinar immediatamente as outras duas, por meio das equações $u = gt$, $s = \frac{1}{2} g t^2$, e $uu = 2gs$.

I. Por exemplo: Pergunta-se, que tempo he necessario, para que hum corpo deixado livremente a si mesmo caia da altura de 400 pés?

A equaçaõ $s = \frac{1}{2} g t^2$ nos dará $t^2 = \frac{400}{15{,}098} = 26{,}4935$; logo $t = \sqrt{26{,}4935} = 5\frac{1}{7}$. Seraõ logo necessarios $5'' \frac{1}{7}$ para cahir o corpo da altura proposta.

II. Pergunta-se, qual deve ser a velocidade do mesmo corpo no fim da queda?

Substituindo os valores conhecidos na equaçaõ $uu = 2gs$, teremos $uu = 2 \cdot 30{,}196 \cdot 400 = 24156{,}8$; logo $u = \sqrt{24156{,}8} = 155\frac{3}{7}$. Será pois a velocidade adquirida pelo corpo de $155\frac{3}{7}$ pés, isto he, correria uniformemente te 155 $\frac{3}{7}$ pés por ſegundo, ſe depois de haver cahido da altura de 400 pés, deixaſſe inteiramente de obrar ſobre elle a força da gravidade.

III. Achar a profundidade de hum poço, ao fundo do qual ſe obſerva que naõ chega hum corpo, que livremente ſe deixa cahir, ſenaõ em $7''$?

Tomando a equaçaõ $s = \frac{1}{2} g t^2$, e ſubſtituindo nella os valores de g, e de t, acharemos $s = 15{,}098 \cdot 49 = 739 \frac{4}{5}$ pés.

IV. Sendo a profundidade de hum poço de $739 \frac{4}{5}$ pés, e o tempo da quéda de $7''$, quantos pés deve o grave correr no primeiro ſegundo?

Como os eſpaços corridos ſaõ proporcionais aos quadrados dos tempos, teremos $49 : 1 :: 739 \frac{4}{5} : x = 15{,}098$, como tambem da equaçaõ $\frac{1}{2} g = \frac{s}{t^2}$ ſe podia deduzir immediatamente.

V. De que altura deve cahir hum corpo, para adquirir huma velocidade de 400 pés por ſegundo?

A equaçaõ $u u = 2 g s$ nos dará $s = \frac{160000}{60{,}392} =$ $2649 \frac{1}{3}$. Será pois a altura procurada de $2649 \frac{1}{3}$ pés; de ſorte que ſe depois de havella corrido, ceſſaſſe totalmente a acçaõ da gravidade, o corpo continuaria a mover-ſe com huma velocidade uniforme, que lhe faria andar 400 pés cada ſegundo.

Por eſtas formulas ſe calculou a Taboa ſeguinte

TA-

TABOA

Do Descenso dos Graves.

Tempo	Espaço corrido	Velocidade adquirida.	Tempo	Espaço corrido	Velocidade adquirida
Segundos	Pés	Pés	Segundos	Pés	Pés
1	15,098	30,196	31	14509	936,08
2	60,392	60,392	32	15460	966,27
3	135,88	90,588	33	16442	996,47
4	241,57	120,78	34	17453	1026,7
5	377,45	150,98	35	18495	1056,9
6	543,53	181,18	36	19567	1087,1
7	739,80	211,37	37	20669	1117,2
8	966,27	241,57	38	21802	1147,4
9	1222,9	271,76	39	22964	1177,6
10	1509,8	301,96	40	24157	1207,8
11	1826,9	332,16	41	25380	1238,0
12	2174,1	362,36	42	26633	1268,2
13	2551,6	392,55	43	27916	1298,4
14	2959,2	422,74	44	29230	1328,6
15	3397,0	452,94	45	30573	1358,8
16	3865,1	483,14	46	31947	1389,0
17	4363,3	513,33	47	33351	1419,2
18	4891,7	543,53	48	34786	1449,4
19	5450,4	573,72	49	36250	1479,6
20	6039,2	603,92	50	37745	1509,8
21	6658,2	634,11	51	39270	1540,0
22	7307,4	664,31	52	40826	1570,2
23	7986,8	694,51	53	42410	1600,4
24	8696,4	724,71	54	44025	1630,6
25	9436,3	754,90	55	45671	1660,8
26	10206	785,10	56	47348	1691,0
27	11006	815,30	57	49053	1721,2
28	11837	845,50	58	50790	1751,4
29	12697	875,68	59	52556	1781,5
30	13588	905,88	60	54353	1811,8

288 Chama-se *altura devida a huma velocidade* aquella, donde hum grave deveria cahir para adquirir a dita velocidade. Seja h a altura conveniente, e u a velocidade, que della resulta. Teremos $uu = 2gh$; e concluiremos, que *as velocidades saõ na rasaõ subduplicada das alturas, que lhe saõ devidas*. O uso destas alturas he muito commum nas obras de Dynamica, depois que os Geometras Modernos as introduziraõ nos seus calculos em lugar das velocidades, ás quais servem de medida.

289 Se hum corpo, ao tempo de cahir, tivesse recebido certa velocidade vertical da acçaõ de qualquer força motriz, poderiamos chamar h a altura devida a essa velocidade; e o movel, tendo corrido o espaço s, estaria no mesmo caso como se tivesse cahido da altura $h + s$. Assim teriamos por equações do seu movimento $u = gt + \sqrt{2gh}$, $s + h = \frac{1}{2} g \left(t + \frac{\sqrt{2h}}{g}\right)^2$, ou $s = \frac{1}{2} g t^2 + t\sqrt{2gh}$.

290 Supponhamos agora, que se lança hum corpo de baixo para cima com a velocidade U, e que se trata de determinar o seu movimento. Para isso recorreremos á equaçaõ $du = p\,dt$; e observando, que a velocidade do movel he continuamente retardada pela acçaõ g da gravidade, escrevella-hemos desta maneira $-du = g\,dt$. Se integrarmos esta equaçaõ de fórma que seja $u = U$, quando $t = 0$, teremos $u = U - gt$. Substituindo este valor de u na equaçaõ $ds = u\,dt$, dará $ds = U\,dt - gt\,dt$; e integrando, $s = Ut - \frac{1}{2} g t^2$.

As duas equações, que temos achado, saõ evidentes por si mesmas. Porque o movel conservaria sempre a mesma velocidade U, se naõ fosse retardado pela acçaõ da gravidade: porém a gravidade no tempo t lhe imprime a velocidade gt em sentido contrario; logo a velocidade do corpo deve ser $U - gt$. Igualmente se manifesta, que o espaço corrido pelo movel deve ser $s = Ut - \frac{1}{2} g t^2$. Porque, se a gravidade naõ interviesse, andaria o corpo no tempo t o espaço Ut: mas a gravidade retarda o movimento, e lhe faz descer a quantidade $\frac{1}{2} g t^2$; logo o es-

paço

paço corrido effectivamente pelo movel será $U t - \frac{1}{2} g t^2$;

291 A primeira equaçaõ $u = U - g t$ prova que o movel continuará a sobir até que seja $U = g t$, isto he, até que a gravidade lhe tenha imprimido em sentido contrario huma velocidade igual á da projecçaõ. Entaõ se achará elevado á altura devida á velocidade U: mas apenas tiver chegado a ella, sendo esgotada toda a força de projecçaõ, a gravidade continuará a produzir o seu effeito, e o corpo tornará pelo mesmo caminho, conforme as leis que temos mostrado, gastando tanto tempo em descer, quanto tinha gastado em sobir.

292 Daqui se póde facilmente conhecer a que altura sobio hum corpo lançado verticalmente ao ar, todas as vezes que se souber o tempo que correu desde o principio do movimento até o instante da queda. Supponhamos, por exemplo, que huma bomba lançada de hum morteiro, por huma direcçaõ vertical, torna a cahir sendo passados 18 segundos. Neste caso devia sobir pelo tempo de 9″ a huma altura igual a 15,098 pés multiplicados por 81 (por serem os espaços como os quadrados dos tempos): e assim diremos, que chegou á altura de 1223 pés.

293 A formula $u u = 2 g h$ mostra tambem, que se dous corpos forem sujeitos á acçaõ de duas gravidades differentes, naõ podem adquirir a mesma velocidade, senaõ cahindo de alturas reciprocamente proporcionais ás forças das ditas gravidades. Podia pois experimentar-se por este meio, se a força da gravidade terrestre he a mesma em differentes lugares: mas adiante veremos, que as oscillações dos pendulos saõ mais proprias para verificar este facto com mais exactidaõ.

294 A gravidade obra geralmente sobre todos os corpos, de maneira que todos pezaõ huns para os outros, e para hum centro determinado; e a sua acçaõ naõ se limita aos corpos sublunares, mas penetra o universo inteiro. Tal he com effeito a base do systema de Newton. Este Geometra incomparavel mostra primeiramente a necessidade de reconhecer no Sol, e em todos os Planetas esta força universal chamada *Attracçaõ*, ou *Gravitaçaõ*, pela qual todas as partes de que elles se compoem, e todos os corpos que os rodeiaõ, gravitaõ para os seus respectivos centros. Calculando depois os effeitos desta gravitaçaõ a respeito

peito dos corpos ſituados nas ſuperficies do Sol, de Jupiter, de Saturno, e da Terra, achou que ſaõ entre ſi na raſaõ deſtes quatro numeros 10000, 943, 529, 435. Applicando pois a eſtes reſultados a formula $uu = 2gh$, eſtá claro, que as alturas de que hum corpo deveria cahir junto á ſuperficie deſtes aſtros, a fim de adquirir huma meſma velocidade, ſeraõ reſpectivamente como $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{943}$, $\frac{1}{529}$, $\frac{1}{435}$.

295 Em geral, poderemos determinar o movimento dos corpos graves junto á ſuperficie do Sol, e dos outros dous Planetas, ſubſtituindo em lugar de g nas equaçoens $u = gt$, e $s = \frac{1}{2}gt^2$, a quantidade $\frac{10000}{435} \cdot 30{,}196$ no Sol, $\frac{943}{435} \cdot 30{,}196$ em Jupiter, e $\frac{529}{435} \cdot 30{,}196$ em Saturno. Pelo que ſerá junto á ſuperficie do Sol $g = 694{,}16$, em Jupiter $g = 65{,}459$, e em Saturno $g = 36{,}721$. Donde ſe vê, que qualquer grave junto á ſuperficie do Sol correria no primeiro ſegundo do ſeu deſcenſo livre $347\frac{2}{25}$ pés, em Jupiter $32\frac{3}{4}$, em Saturno $18\frac{2}{5}$, e na Terra $15\frac{1}{10}$.

Das Forças Centrais.

296 CHamaõ-ſe *forças centrais*, ou *centripetas*, as que ſollicitaõ continuamente hum corpo para qualquer ponto determinado.

Seja hum corpo A (Fig. 135.), que ſollicitado por qualquer força dirigida para o ponto C, começa deſde o deſcanço a caminhar livremente de A para C: pergunta-ſe, quais devem ſer as circunſtancias principais do ſeu movimento?

Chamemos x o eſpaço AM corrido no tempo t, u a ve-

 locidade

locidade no ponto M, e a a distancia AC; e seja f huma distancia ao ponto C, na qual a força central se acha igual á da gravidade g. Isto posto, se a força central obrar em qualquer rasaõ composta das distancias, de maneira que seja n o expoente dessa rasaõ, acharemos a expressaõ da força acceleratriz no ponto M pela proporçaõ seguinte

$$f^n : g :: (a-x)^n : \frac{g(a-x)^n}{f^n}.$$

Donde concluiremos $udu = \frac{gdx(a-x)^n}{f^n}$ (n. 283.). Seja h a altura devida á velocidade u; teremos $uu = 2gh$, e conseguintemente $udu = gdh$. Logo $dh = \frac{dx(a-x)^n}{f^n}$, cujo integral será $h = \frac{C-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. A constante C se determina, reflectindo que no principio do movimento, no ponto A, deve ser ao mesmo tempo $x = 0$, e $h = 0$; condiçaõ, que dá $C = a^{n+1}$. Logo

$h = \frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Huma vez que for conhecida a altura h devida á velocidade u, esta se determinará immediatamente pela equaçaõ $u = \sqrt{2gh}$.

O unico caso, que escapa á formula precedente, he o de $n = -1$. Entaõ obra a força central na rasaõ inversa das distancias, e para determinar o valor de h he necessario integrar por logarithmos. A integraçaõ neste caso particular dará $h = f.\,l\frac{a}{a-x}$.

297 Se o expoente $n+1$ for positivo, acharemos que a altura devida á velocidade do movel, quando chegar ao centro C, será $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, porque entaõ he $x = a$. Porém se $n+1$ for hum numero negativo $-m$, teremos $h = \frac{f^{m+1}}{ma^m}.\frac{a^m-(a-x)^m}{(a-x)^m}$; expressaõ, que

dá

dá $b = \infty$, quando $x = a$. Donde concluiremos, que a velocidade do corpo, chegando ao centro, feria infinita, como he facil de conceber, advertindo que a força central obra neffe cafo com tanto maior efficacia, quanto o movel fe chega mais para o mefmo centro.

Nefte mefmo cafo porém, fe o corpo cahiffe de huma altura infinita, ou fe o ponto A eftiveffe infinitamente diftante do centro C, quando chegaffe ao ponto M naõ teria adquirido, fenaõ huma velocidade finita. Porque fuppondo a e x infinitas no valor geral de b, teremos $b = \frac{f^{m+1}}{m.(CM)^m} = \frac{f^{-n}}{m(CM)^{-n-1}}$. Se a força central, por exemplo, for na rafaõ inverfa dos quadrados das diftancias, ferá $b = \frac{f^2}{CM}$; logo a velocidade de hum corpo, que tiveffe defcido de huma altura infinita, feria reciprocamente como a raiz quadrada do efpaço que lhe faltaria correr para chegar ao centro.

298 Se $n = 1$, ou fe a força centripeta for proporcional ás diftancias do centro, ferá $b = \frac{2ax - xx}{2f}$. E porque $dt = \frac{dx}{u} = \frac{dx}{\sqrt{2gb}}$, ferá neceffario para virmos no conhecimento de t, que integremos a expreffaõ $\sqrt{\frac{f}{g}} . \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. O integral he $\sqrt{\frac{f}{g}}$. $Arc\ cof \frac{a - x}{x}$; logo tomando c pela femicircumferencia, teremos por expreffaõ do tempo da defcida até o centro C a quantidade conftante $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{f}{g}}$.

299 Se $n = -2$, ou fe a força centripeta for na rafaõ inverfa dos quadrados das diftancias, como pelas mais conftantes obfervações parece eftar já eftabelecido, teremos $b = \frac{ff}{a} . \frac{x}{a - x}$; e $dt = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}} . dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$ $= \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}} . \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Porém $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$

 póde

póde resolver-se em $\frac{\left(\frac{1}{2}a-x\right)dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, e $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. A primeira parte he a differencial de $\sqrt{(ax-xx)}$, e a segunda he a de hum arco de circulo, cujo seno verso he x, sendo o diametro a. Logo $t = \frac{\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}\left[\sqrt{(ax-xx)}\right.$

$\left.+\frac{1}{2}a.\ Arc\ cos\left(\frac{\frac{1}{2}a-x}{\frac{1}{2}a}\right)\right]$; integral completo, porque dá $t=0$, quando $x=0$.

Logo fazendo $x=a$, conheceremos o tempo que o corpo deve gastar em chegar ao centro das forças, pela expressaõ $\frac{\frac{1}{2}ca\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}$. Como esta quantidade he proporcional a $a\sqrt{a}$, concluiremos geralmente: *Que os tempos do descenso dos corpos, desde a origem do movimento até o centro, saõ como as raizes quadradas dos cubos das alturas, donde tem descido, ou na rasaõ sesquiplicada das alturas*, que quer dizer o mesmo.

300 Se suppuzessemos constante a força central, e sempre a mesma que no ponto A, onde tem por valor a expressaõ $\frac{gff}{aa}$, entaõ correria o movel o espaço a com hum movimento uniformemente accelerado, e o tempo se determinaria pela formula $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{gff}{aa}t^2$, que dá $t = \frac{2a\sqrt{a}}{f\sqrt{2g}}$. Donde se segue, que *o tempo que gasta o movel em chegar ao centro, quando a força central he sempre a mesma que na origem do movimento, he para o tempo que gastaria crescendo a dita força na rasaõ duplicada inversa das distancias, como o raio para a oitava parte da circumferencia*; ou como 14 para 11, que he proxi-proximamente a rasaõ que tem 2 para $\frac{1}{2}c$.

O que temos dito dos movimentos rectilineos he o que basta

basta para os determinar, quaisquer que sejaõ as forças acceleratrizes. Naõ ha mais do que substituir o valor competente de p na equaçaõ $u\,du = p\,ds$, ou $g\,db = p\,ds$, e depois disso integrar. Passemos aos movimentos curvilineos.

301 Sendo hum corpo sollicitado por quaisquer forças acceleratrizes, e tendo recebido na origem do movimento huma certa velocidade de projecçaõ, por qualquer direcçaõ, de maneira que seja obrigado a mover-se por huma *Orbita*, ou *Trajectoria* curvilinea: pergunta-se, como póde determinar-se a natureza desta orbita, a velocidade que deve ter o corpo em qualquer ponto della, e o tempo que gastará em chegar a hum ponto dado.

Seja $AMm\mu$ (Fig. 136.) a curva, que o movel ha de descrever, seja AP o eixo della, mN a normal, e mT a tangente no ponto m. Chamemos, ao ordinario, $AP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$, a velocidade no ponto $M = u$, a altura devida a esta velocidade $= b$ $= \frac{uu}{2g}$, o tempo empregado em correr o arco AM $= t$, e o raio osculador $R = \frac{-ds^3}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Isto posto, reduziremos todas as forças que sollicitaõ o movel a duas, huma N pela direcçaõ da normal mN, e a outra T pela direcçaõ da tangente mT. E porque já temos (n. 280.) as equações $ds = u\,dt$, $du = T\,dt$, e $N.R = uu = 2gb$, desta ultima poderemos logo concluir em geral: *Que a força normal he para a da gravidade, como a altura devida á velocidade do movel para a ametade do raio osculador.* Depois, das duas equações $ds = u\,dt$, e $du = T\,dt$, tiraremos $u\,du = T\,ds$, cujo integral he $uu = 2\int T\,ds$: porém $uu = N.R$; logo $N.R = 2\int T\,ds$.

Esta equaçaõ naõ inclue u, nem t, porque as forças N e T saõ funções de x, e de y. Mas seraõ necessarias tres integrações consecutivas para chegar á equaçaõ finita da curva procurada; e sendo esta huma vez conhecida, determinar-se-ha a velocidade pela formula $uu =$

$2\int T\,ds$, e o tempo pela formula $t = \int \frac{ds}{u}$. Tal he, em geral, o methodo que póde ſeguir-ſe na ſoluçaõ deſte Problema. Mas eſte caminho, ainda que muito natural, naõ he com tudo o mais ſimples em muitos caſos. Eisaqui outro, que nos parece merecer preferencia.

302 Todo o corpo, que ſe move por huma linha curva, póde conſiderar-ſe como dotado de dous movimentos, hum parallelo á abſciſſa x, e o outro parallelo á ordenada y. Porque, ſe em virtude do primeiro póde correr o eſpaço Mr ou dx no inſtante dt, e ſe em virtude do ſegundo póde correr no meſmo inſtante o eſpaço rm ou dy, eſtá claro, que em virtude de ambos correrá realmente a pequena diagonal Mm, ou ds. A ſua velocidade parallela a AP, que chamaremos *horizontal*, ſerá pois repreſentada por $\frac{dx}{dt}$; a velocidade parallela a PM, que chamaremos vertical, por $\frac{dy}{dt}$; e a velocidade effectiva, por $\frac{ds}{dt}$.

Ora, quaiſquer que ſejaõ as forças que ſollicitaõ o corpo, ſempre pódem reduzir-ſe a duas, huma X pela direcçaõ de MR parallela a x, e a outra Y pela direcçaõ de MP parallela a y: a primeira das quais accelera o movimento horizonal, e a ſegunda o vertical. E porque o elemento da velocidade he ſempre igual ao producto da força acceleratriz pelo elemento do tempo (n. 279.), teremos as duas equações

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt, \text{ e } d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt,$$

as quais com a equaçaõ ordinaria $ds = u\,dt$ determinaráõ o movimento do corpo.

303 Eſtas equações, quanto ao fundo, naõ differem das que deduzimos pelo methodo precedente. Para nos ſegurarmos diſſo, multipliquemos a primeira por $\frac{dx}{dt}$, e a ſegunda por $\frac{dy}{dt}$; e ajuntando os productos teremos

dx

$\frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = X dx + Y dy$: porém $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = uu$; logo $\frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = u\,du = X dx + Y dy$.

Agora, effeituando as differenciações indicadas nas meſmas duas equações, teremos $dt\,ddx - dx\,ddt = X dt^3$, e $dt\,ddy - dy\,ddt = Y dt^3$, donde eliminando ddt, virá $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dt^2 (Y dx - X dy)$. E porque o raio oſculador $R = \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, ſubſtituindo teremos $\frac{ds^3}{R} = dt^2 (X dy - Y dx)$, iſto he, $\frac{uu}{R} = \frac{X dy - Y dx}{ds}$. Eſta ultima equaçaõ, com a outra $u\,du = X dx + Y dy$, ſaõ pois equivalentes ás duas $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y dt$.

Em fim, reſolvendo a força X por MR em outras duas, huma tangencial por Mm, que ſerá $\frac{dx}{ds} X$, e a outra normal por MN, que ſerá $\frac{dy}{ds} X$; e reſolvendo tambem a força Y por MQ em outras duas, huma tangencial que ſerá $\frac{dy}{ds} Y$, e a outra normal que ſerá $-\frac{dx}{ds} Y$: acharemos a força tangencial total $T = \frac{X dx + Y dy}{ds}$, e a normal $N = \frac{X dy - Y dx}{ds}$. Logo as duas equações $u\,du = T ds$, e $uu = N.R$ ſaõ

saõ equivalentes ás que temos achado $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt$: e deste modo, a conformidade dos resultados he huma prova da bondade de ambos os methodos.

Applicaçaõ ao movimento dos graves lançados por qualquer direcçaõ, e em particular ao tiro das bombas.

304 PAra darmos toda a clareza a esta theorica, applicalla-hemos a hum caso particular. Supponhamos, por exemplo, que sómente a força da gravidade perturba o movimento do corpo lançado pela direcçaõ AV, com huma velocidade dada V, e por hum angulo $VAP = a$ (Fig. 137.).

Neste caso temos $Y = -g$, e $X = 0$, donde se reduziráõ as nossas duas equações geraes a $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g\,dt$. Integrando pois teremos $\frac{dx}{dt} = C$, e $\frac{dy}{dt} = C' - gt$. A primeira mostra, que a velocidade horizontal he constante, como está claro que deve ser, porquanto naõ he alterado este movimento. Ora $V\cos a$ exprime a velocidade horizontal, e $V\operatorname{sen} a$ a vertical no principio do movimento; logo $C = V\cos a$, e $C' = V\operatorname{sen} a$. Substituindo estes valores nas equações integradas, teremos $dx = V\,dt\cos a$, e $dy = V\,dt\operatorname{sen} a - gt\,dt$. Tornando a integrar, será $x = Vt\cos a$, e $y = Vt\operatorname{sen} a - \frac{1}{2}gt^2$; e eliminando t, será $y = x\operatorname{tang} a - \frac{1}{2}g \cdot \frac{xx}{VV\cos a^2}$.

Logo designando pela constante b a altura devida á velocidade

dade da projecçaõ V, teremos $y = x \; tang \; a - \frac{xx}{4 b \; cos \; a^2}$ por equaçaõ ás coordenadas da curva. E porque huma dellas y he de huma só dimensaõ, concluiremos que a trajectoria he huma parabola.

305 Segue-se pois desta determinaçaõ, que todo o grave lançado em hum espaço vazio por qualquer direcçaõ, que naõ fosse a vertical, descreveria huma curva parabolica. Mas no estado actual das cousas, em que a resistencia do ar influe tanto sobre o movimento dos corpos, estas trajectoriàs differem sensivelmente da parabola, que teria lugar nos meios naõ resistentes. Adiante veremos, quanto he cheia de embaraço a sua exacta determinaçaõ.

306 O methodo, que tivemos em deduzir a equaçaõ $y = x \; tang \; a - \frac{xx}{4 b \; cos \; a^2}$, naõ he o unico que conduz ao mesmo resultado. Póde demonstrar-se de muitos outros modos, que o caminho de hum projectil no vacuo he huma parabola. Póde, por exemplo, considerar-se a velocidade inicial do movel, como composta de huma velocidade $V \; sen \; a$ pela direcçaõ vertical AK, e de outra $V \; cos \; a$ pela horizontal AP. Isto posto, se o corpo naõ tivesse senaõ a primeira velocidade, chegaria no tempo t a huma altura $AQ = V t \; sen \; a - \frac{1}{2} g t^2$ (n. 290.): mas no mesmo tempo, a segunda velocidade deve transportallo horizontalmente por hum espaço $QM = V t \; cos \; a$; logo deve o corpo achar-se realmente no ponto M, quando for passado o tempo t; donde teremos, como acima, $y = V t \; sen \; a - \frac{1}{2} g t^2$, e $x = V t \; cos \; a$.

A formula, que serve para determinar o tempo, será $t = \frac{x}{V \; cos \; a}$. E pelo que respeita á velocidade do movel, em qualquer ponto da trajectoria, acharemos que he sempre a que elle teria adquirido cahindo de huma altura igual a $b - y$. Porque recorrendo á equaçaõ geral $u du = X dx + Y dy$ (n. 303.), e fazendo $X = 0$, e $Y = -g$; teremos $u du = -g dy$, e a altura devida á veloci-

velocidade do movel, ou $\frac{uu}{2g} = b - y$.

Para se determinarem os pontos, onde a curva encontra a horizontal AP, he necessario suppor $y = 0$ na equaçaõ $y = x \, tang \, a - \frac{xx}{4b \cos a^2}$. Entaõ se acharáõ para x os dous valores seguintes, $x = 0$, e $x = 4b \, tang \, a. \cos a^2 = 4b \, sen \, a \cos a = 2b \, sen \, 2a$. O primeiro convem ao ponto A, e o segundo ao ponto C.

307 Esta determinaçaõ dá por *amplitude do tiro* a distancia $AC = 2b \, sen \, 2a$. Logo a maior amplitude b que he possivel, será quando tivermos $sen \, 2a = 1$; e por isso he, que dando a hum morteiro a inclinaçaõ de 45° se lançará huma bomba á maior distancia que he possivel, sendo todas as mais cousas iguais. Nesse caso será a amplitude da sua trajectoria o dobro da altura devida á velocidade da projecçaõ.

308 Deve notar-se aqui, que a huma abscissa AP naõ corresponde mais do que huma só ordenada PM; porque na equaçaõ $y = x \, tang \, a - \frac{xx}{4b \cos a^2}$, a ordenada y naõ tem mais do que hum só valor. Mas a huma ordenada AQ, ou $PM = P'M'$, correspondem sempre duas abscissas QM, QM', ou AP, AP'; porque a equaçaõ $xx - 2bx \, sen \, 2a + 4by \cos a^2 = 0$ dá evidentemente dous valores para x.

Pela natureza das equaçoens do segundo gráo, será a soma das raizes $AP + AP'$ igual ao coefficiente do segundo termo $2b \, sen \, a$, que exprime como temos visto o valor de AC. Logo $AP + AP' = AC$, e conseguintemente $AP = CP'$: donde se mostra, que as porçoens AM, CM' da trajectoria saõ iguais, e semelhantes. Logo a ordenada DB, que passa pelo meio D da amplitude AC, divide a trajectoria em duas partes BMA, $BM'C$ iguais, e semelhantes entre si; e conseguintemente he BD o eixo da parabola, B o seu vertice, e DB a maior altura a que sóbe o projectil. Para determinar pois este *maximo*, naõ he necessario mais do que tomar $x = b \, sen \, 2a$, e immediatamente se achará $DB = y = b \, sen \, a^2$; e por conseguinte

guinte ferá o parametro da parabola defcrita $= \frac{AD^2}{DB} = 4 b \, cof \, a^2$.

309 Na pratica do *tiro das bombas*, ordinariamente fe determina a força da polvora, fazendo hum tiro de prova pelo angulo de 45°; porque medindo a amplitude, ou alcance horizontal defte tiro, e tomando a fua ametade, fe conhece immediatamente a altura devida á velocidade de projecçaõ. Huma vez conhecida a força da polvora, podemos com a mefma carga fazer cahir huma bomba em qualquer ponto *D* do plano horizontal (Fig. 138.), menos diftante da bateria do que o ponto *C*, no qual fe termina a amplitude maxima *AC*, que produz o tiro pelo angulo de 45°.

Para iffo, bafta conhecer o angulo da projecçaõ $DAV = a$. Seja pois $AD = b$; e teremos $2 b \, fen \, 2 a = b$, e por conseguinte $fen \, 2 a = \frac{b}{2 b}$.

Supponhamos, por exemplo, que a amplitude *AC* pelo angulo de 45° fe achou de 500 braças, e que a diftancia *AD* he de 388,7 braças. Logo teremos $fen \, 2 a = \frac{388{,}7}{500} = 0{,}7774$; feno, que nas Taboas correfponde proximamente a 51° 2'. Logo o angulo de projecçaõ deverá fer de 25° 31'.

310 He verdade, que em lugar do angulo 51° 2' podiamos tomar o feu fupplemento 128° 58', cuja ametade 64° 29' daria hum fegundo angulo de projecçaõ, complemento do primeiro. Donde fe fegue, que fempre ha duas inclinaçoens diverfas, que fe podem dar ao morteiro, para fazer cahir huma bomba em hum ponto determinado. Prefere-fe o angulo maior, quando fe pertende arruinar edificios, romper abobadas &c; e o menor, quando fe quer, que a bomba depois de cahir continue a faltar para diante, e que arrebentando caufe maior eftrago em tudo o que achar ao redor de fi.

A rafaõ defta preferencia he manifefta. Porque fe a bomba cahir quafi perpendicularmente, empregará a maior parte da fua força em ferir o lugar onde der; e por iffo, quando fe intenta demolir os edificios, fe apontaõ os morteiros fempre pelo angulo maior que 45°. Mas queremrendo, que as bombas depois de cahirem continuem a fazer chapeletas, destruindo tudo o que encontraõ, escolhe-se o angulo menor, para que cahindo obliquamente, e resolvendo-se a sua força em duas, huma vertical, e outra horizontal, seja esta ultima sufficiente para as transportar com impulso, e estrago, até finalmente arrebentarem.

311 Se o ponto M (Fig. 139.), que se quer bombear, naõ estiver na linha horizontal AP, será primeiramente necessario medir, pelos methodos da Trigonometria, a distancia AM, que chamaremos m, e o angulo MAP que o raio visual AM faz com a horizontal AP, ao qual chamaremos δ. Depois disso far-se-ha hum tiro de prova pelo angulo de 45°, com a carga que se tem determinado usar, a fim de conhecer a força da polvora, que deve ser tal que produza huma amplitude maior que AP.

Isto supposto, como $AP = m \cos \delta$, e $PM = m \operatorname{sen} \delta$, poderemos substituir estes dous valóres em lugar de x e de y na equaçaõ $\frac{xx}{4b} = x \operatorname{sen} a \cos a - y \cos a^2$, e acharemos $\frac{mm \cos \delta^2}{4b} = m \operatorname{sen} a \cos a \cos \delta - m \cos a^2 \operatorname{sen} \delta$, ou $\frac{m \cos \delta^2}{4b} = \cos a \operatorname{sen} (a - \delta) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (2a - \delta) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \delta$. Logo $\operatorname{sen} (2a - \delta) = \operatorname{sen} \delta + \frac{m \cos \delta^2}{2b}$.

312 Para construir esta equaçaõ, buscar-se-ha nas Taboas hum angulo ϕ, cuja tangente seja igual a $\frac{m \cos \delta}{2b}$, e assim teremos $\operatorname{sen} (2a - \delta) = \operatorname{sen} \delta + \cos \delta \operatorname{tang} \phi = \frac{\operatorname{sen} (\delta + \phi)}{\cos. \phi}$. Conhecendo o angulo $2a - \delta$, e o seu supplemento, a hum e outro se ajuntará δ, e se tomará a ametade de cada huma das somas, que daráõ os dous gráos de inclinaçaõ do morteiro, igualmente proprios para se lançar a bomba ao lugar proposto.

Por exemplo: Tendo-se achado o angulo MAP de $6^\circ\ 12'$, a distancia AM de 564 toesas, e a amplitude de 45°, ou a quantidade $2b$ de 740 toesas, queremos saber

ber a inclinaçaõ que deve dar-se ao morteiro, para que a bomba venha a cahir no ponto M.

Primeiramente calcularemos o angulo φ pela formula $tang\,\varphi = \frac{m\,cos\,\delta}{2\,b}$, conforme ao que acima dissemos: eisaqui a operaçaõ

$$\begin{array}{llr} 2\,b = 740 & \text{- - - - - - - -}\; C\,L. & 7,1307683 \\ m\; = 564 & \text{- - - - - - - - - -}\; L. & 2,7512791 \\ \delta = 6^\circ\,12' & \text{- - - - - - - -}\; L.cos. & 9,9974523 \\ \hline \text{Log.}\,tang\,\varphi & \text{- - - - - - - - -} & 9,8794997 \end{array}$$

Assim acharemos nas Taboas que o angulo φ he de $37^\circ\,9'$; e por conseguinte $\delta + \varphi = 43^\circ\,21'$. Conhecidos estes, calcularemos o angulo $2\,a - \delta$ pela formula $sen\,(2\,a - \delta) = \frac{sen\,(\delta + \varphi)}{cos\,\varphi}$, como aqui se mostra

$$\begin{array}{llr} \varphi = 37^\circ\,9' & \text{- - - - - -}\; CL.\,cos. & 0,0985105 \\ \delta + \varphi = 43\;\;21 & \text{- - - - - - -}\; L.\,sen. & 9,8366109 \\ \hline \text{Log.}\,sen\,(2\,a - \delta) & \text{- - - - -} & 9,9351214 \end{array}$$

A este logarithmo corresponde nas Taboas o angulo $59^\circ\,28'$, cujo supplemento he $120^\circ\,32'$. Ajuntando a hum e outro $6^\circ\,12'$, teremos $65^\circ\,40'$ e $126^\circ\,44'$, cujas ametades saõ $32^\circ\,50'$ e $63^\circ\,22'$. Dando pois ao morteiro a inclinaçaõ de qualquer destes dous ultimos angulos, cahirá a bomba no ponto M.

Como importa muito no tiro das bombas regular-lhes as *espoletas*, de maneira que naõ arrebentem muito cedo, nem muito tarde, he preciso saber o tempo, que ellas devem gastar em chegar ao alvo. Para isso temos a formula $t = \frac{x}{V\,cos\,a} = \frac{m\,cos\,\delta}{cos\,a\,V\,2gb}$. Tomando pois, no caso precedente, hum dos valores calculados de a, determinaremos t da maneira seguinte

$t =$

$$
\begin{array}{ll}
a = 32^\circ\ 50' \text{ - - - - - - - - } & CL\,.\,cos\,.\ 0,0755908 \\
2b = 740 \text{ - - - - - - - - - - - - } & \frac{1}{2} CL\,.\ 8,5653842 \\
g = 30,196 \text{ - - - - - - - - - - } & \frac{1}{2} CL\,.\ 9,2600253 \\
m = 564 \text{ - - - - - - - - - - - - - - } & L\,.\ 2,7512791 \\
\delta = 60^\circ\ 12' \text{ - - - - - - - - } & \underline{L\cdot cos\,.\ 9,9974523} \\
Log.\ t \text{ - - - - - - - - - - - - - - - } & 0,6497317
\end{array}
$$

Logo ſerá $t = 4,464$; mas he neceſſario advertir, que tendo ſido as quantidades m, b contadas em toeſas, e g em pés, para determinarmos o verdadeiro valor de t devemos multiplicar o valor achado por $\sqrt{6}$. Aſſim ajuntando $\frac{1}{2} l6$, que he 0,3890756, ao logarithmo achado 0,6497317, teremos $l\,t = 1,0388073$, que correſponde a 10,93. Gaſtará pois a bomba 10″, 93 em chegar ao ponto M pela parabola menor.

Se ao logarithmo 1, 0388073 ajuntarmos o do coſeno de 32° 50′ que he 9, 9244092, e o complemento logarithmico do coſeno de 63° 22′ que he 0, 3484514, teremos 1, 3116679 por logarithmo do tempo, que a bomba gaſtará em chegar ao meſmo ponto pela parabola maior, que ſerá conſeguintemente 20″, 5.

313 *M.* de Maupertuis reſolveu taõ brevemente, e de hum modo taõ completo, os problemas relativos ao tiro das bombas, que póde citar-ſe, como hum modelo de preciſaõ, a ſua Memoria intitulada *Balliſtica Arithmetica.* Os que ſe naõ achaõ em eſtado de conſultar a Hiſtoria da Academia Real das Sciencias, aqui poderáõ julgar da elegancia das ſuas ſoluçoens, que ſaõ da maneira ſeguinte.

Seja $CA = b =$ á altura devida á velocidade de projecçaõ por AG (Fig. 140.); e ſeja $AQ = s =$ ao eſpaço que a bomba correria uniformemente, ſe a gravidade a naõ abaixaſſe pelo eſpaço $QM = z$. Teremos pois $s : 2z :: \sqrt{b} : \sqrt{z}$ (n. 28. e 288.); logo $s^2 = 4bz$, e a trajectoria ſerá conſeguintemente huma parabola.

Seja $AP = x$, $PM = y$, $tang\,QAP = t$; e ſerá $PQ = tx$, $QM = PQ - PM = tx - y$, e $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$. Logo $s^2 = x^2 + t^2x^2 = 4bz = 4btx - 4by$.

Logo

Logo $x^2(1+t^2)=4b(tx-y)$; equaçaõ ás coordenadas, na qual ſe introduzio de propoſito o angulo de inclinaçaõ QAP, a fim de ſe poder determinar a direcçaõ do morteiro.

314 Querendo, por exemplo, lançar huma bomba ſobre o ponto E com huma carga dada, mediremos a diſtancia $AD=b$, e a altura $DE=c$. Fazendo pois $x=b$, e $y=c$, tiraremos da equaçaõ precedente o valor de $t=\frac{2b}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{(4b^2-4bc-bb)}$; logo póde a bomba chegar ao meſmo ponto por duas inclinaçoens differentes do morteiro. Mas para que os valores de t ſejaõ reais, he neceſſario que $4b^2$ ſeja maior que $4bc+bb$, ou ao menos igual.

Se o ponto E eſtiver na linha horizontal, ſerá $t=\frac{2b}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{(4b^2-bb)}$; e ſe eſtiver abaixo della, $t=\frac{2b}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{(4b^2+4bc-bb)}$.

Sendo neceſſario determinar a carga conveniente para ferir o ponto E por hum angulo dado, calcularemos a força do tiro repreſentada por $CA=b=\frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$; formula, pela qual ſe moſtra, que ſendo conſtante a inclinaçaõ do morteiro, ſaõ as amplitudes porporcionais a b; porque ſendo entaõ $c=0$, temos $AB=b=\frac{4t}{1+t^2}b$.

315 O *maximo* da amplitude ſe acha, differenciando a equaçaõ $x=\frac{4t}{1+t^2}b$, ou $\frac{x}{b}=\frac{4t}{1+t^2}$; porque fazendo $d\frac{4t}{1+t^2}=0$, teremos $t=1=tang\,45^\circ$. Logo a maior amplitude poſſivel, que ſe póde haver de huma carga dada, he quando ſe aponta o morteiro pelo angulo de 45°.

316 Em fim, para conhecer o *minimo* da carga, differenciaremos primeiramente a equaçaõ $b=\frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$,

ou

ou $\frac{4b}{b^2} = \frac{1+t^2}{bt-c}$, que dará $t = \frac{c}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(b^2+c^2)}$; depois, ſubſtituindo o valor poſitivo de t na equaçaõ, teremos para o caſo da menor carga poſſivel $b = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2)}$.

Outras applicaçoens ao movimento dos projecteis.

317 MAs tornemos ao exame das noſſas equaçoens geraes $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X\,dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dt$. E para continuarmos a moſtrar as ſuas applicaçoens, ſupponhamos ainda que o corpo he ſómente ſollicitado pela força vertical Y. Neſſe caſo teremos do meſmo modo $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, ou $dx = C\,dt$; e conſeguintemente ſerá conſtante a velocidade horizontal, como no caſo que até agora temos tratado.

Porém a outra equaçaõ dará $\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Y\,dy$; cujo integral he $\frac{dy^2}{dt^2} = 2\int Y\,dy$; e porque dt he proporcional a dx, teremos $\frac{dy^2}{dx^2} = m\int Y\,dy$, e conſeguintemente $dx = \frac{dy}{\sqrt{(m\int Y\,dy)}}$; equaçaõ ſeparada, ſe Y for huma funçaõ de y.

318 Seja, por exemplo, lançado qualquer corpo pela direcçaõ BV (Fig. 141.), com qualquer velocidade, e ſeja attrahido para a recta AP na raſaõ inverſa dos quadrados da ſua diſtancia a eſta linha: pergunta-ſe a equaçaõ da ſua trajectoria.

A condiçaõ da força vertical dá $Y = -\frac{gff}{yy}$, e con-

conseguintemente $\int Y\,dy = gff\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{b}\right)$. Logo a equaçaõ differencial da trajectoria será $dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a}{y} - \frac{a}{b}\right)}}$,

ou tambem $dx\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(by - yy)}} = \frac{y\,dy - \frac{1}{2}b\,dy}{\sqrt{(by - yy)}} +$
$\frac{\frac{1}{2}b\,dy}{\sqrt{(by - yy)}}$; e integrando, $x\sqrt{\frac{a}{b}} = C - \sqrt{(by - yy)}$
$+ \frac{1}{2}b.\ Arc\ cos\left(\frac{\frac{1}{2}b - y}{\frac{1}{2}b}\right)$.

Se o corpo fosse attrahido para a recta AP na rasaõ inversa dos cubos das distancias, teriamos $Y = -\frac{gf^3}{y^3}$, e $\int Y\,dy = \frac{gf^3}{2}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b^2}\right)$. Donde concluiremos $dx =$
$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)}}$, ou $\frac{a\,dx}{b} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$. O integral desta equaçaõ he $\frac{ax}{b} = C - \sqrt{(bb - yy)}$; logo a trajectoria será em geral huma secçaõ conica, que terá a linha AP por eixo principal.

319 Reciprocamente, sendo dada a trajectoria BM, podemos determinar a força Y perpendicular a AP, necessaria para que o corpo descreva livremente a mesma trajectoria. Porque se differenciarmos a equaçaõ $\frac{dy^2}{dx^2} =$
$m\int Y\,dy$, ou $\frac{\frac{1}{2}C^2\,dy^2}{dx^2} = \int Y\,dy$, será $\frac{C^2\,dy}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$
$= Y\,dy$, e conseguintemente $Y = \frac{C^2}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ou, sup-

pondo

pondo dx conſtante, $Y = \frac{C^2\, ddy}{dx}$.

320 Por exemplo: Se quizermos ſaber, qual deve ſer a força Y perpendicular a AP, para que o corpo deſcreva huma ſecçaõ conica BM, que tenha por eixo principal AP, tomaremos a equaçaõ geral das linhas da ſegunda ordem, que he $yy = a + px + qxx$, e differenciando-a teremos $ydy = \frac{1}{2} pdx + qxdx$. Suppondo dx conſtante, e tornando a differenciar, teremos $yddy + dy^2 = qdx^2$; e multiplicando eſte reſultado por y^2, ſerá $y^3 ddy = qy^2 dx^2 - y^2 dy^2 = qdx^2(a + px + qxx) - dx^2(\frac{1}{2} p + qx)^2 = (aq - \frac{1}{4} pp)dx^2$. Logo $Y = \frac{C^2(aq - \frac{1}{4}pp)}{y^3}$; e conſeguintemente ſerá a força vertical neſte caſo reciprocamente proporcional aos cubos das ordenadas, como tinhamos achado pelo methodo directo.

He de notar, que Y deſvanece, quando $aq = \frac{1}{4} pp$: mas entaõ $a + px + qxx$ he hum quadrado perfeito, e a ſecçaõ conica ſe reduz á meſma linha recta da projecçaõ. E com effeito por ſi meſmo ſe entende, que naõ he neceſſaria mais força que a da projecçaõ, para reter o movel em huma trajectoria rectilinea.

321 Em geral: Se o corpo for animado por ambas as forças X e Y, das meſmas equaçoens do movimento $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = Xdt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = Ydt$, teremos $\frac{dx^2}{dt^2} = 2\int X dx$, e $\frac{dy^2}{dt^2} = 2\int Y dy$. Por conſeguinte ſerá a equaçaõ da trajectoria $\frac{dx}{\sqrt{\int X dx}} = \frac{dy}{\sqrt{\int Y dy}}$. Sendo pois X e Y funçoens reſpectivas de x e y, eſta equaçaõ ſerá ſeparada, e poderá integrar-ſe, ao menos pelas quadraturas.

Suppon-

Supponդo, por exemplo, que a força vertical Y he a da gravidade, e que a horizontal X he reciprocamente proporcional aos cubos das diſtancias do movel á vertical, que paſſa pela origem das abſciſſas, teremos $Y = -g$, $X = -\frac{gf^3}{x^3}$, e conſeguintemente $\int Y dy = g(b-y)$, e $\int X dx = \frac{gf^3}{2}\left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{aa}\right)$. Será logo a equaçaõ differencial da trajectoria $\frac{dy}{\sqrt{(b-y)}} = \sqrt{\frac{2a^2}{f^3}}$. $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cujo integral he $\sqrt{(b-y)} = C \pm \sqrt{\left[\frac{2a^2}{f^3}(a^2-x^2)\right]}$. Logo a trajectoria neſte caſo ſerá, em geral, huma linha da quarta ordem; e em particular, ſerá a parabola ordinaria, quando for $C = 0$.

322 Examinemos agora o movimento de hum corpo, que ſendo lançado por hum eſpaço naõ reſiſtente, com qualquer força de projecçaõ, he attrahido para hum ponto fixo por huma força centripeta, variavel de qualquer maneira nas differentes diſtancias a reſpeito do meſmo ponto.

Seja AM a trajectoria do movel (Fig. 142.), C o centro das forças, a abſciſſa $AP = x$, a ordenada $PM = y$, a diſtancia $AC = a$, o raio vectôr $CM = z$, e P o valor abſoluto da força centripeta no ponto M, repreſentada por MO. Reſolvendo eſta força em duas, huma MT pela direcçaõ MA, e a outra MS por huma direcçaõ parallela a AP, a expreſſaõ da primeira ſerá $\frac{PM}{CM}.MO = \frac{Py}{z}$, e da ſegunda $\frac{CP}{CM}.MO = \frac{P(a-x)}{z}$. Teremos pois a força $X = \frac{P(a-x)}{z}$, e a força $Y = -\frac{Py}{z}$; e ſubſtituindo eſtes valores nas equaçoens da ſoluçaõ geral (n. 302.), teremos $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{a-x}{z} P dt$, e $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{y}{z} P dt$.

Isto posto, multipliquemos a primeira destas equações po y, e a segunda por $a-x$; e ajuntando os productos, teremos $y\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)+(a-x)\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, cujo integral he $y.\frac{dx}{dt}+(a-x)\frac{dy}{dt}=C$, ou $y\,dx+(a-x)\,dy=C\,dt$; equaçaõ absolutamente independente da força central P, e que somente suppoem ser a direcçaõ della sempre para o mesmo ponto fixo. Integrando esta ultima equaçaõ, teremos $2\int y\,dx+(a-x)y=Ct$, ou $\int y\,dx+\frac{1}{2}(a-x)y=\frac{1}{2}Ct$: porém $\int y\,dx+\frac{1}{2}(a-x)y$ he a area do sector ACM; logo, *qualquer que seja a força central, as areas descritas pelo raio vector saõ proporcionais aos tempos.*

Na theorica das forças centrais, ha poucas Proposições taõ fecundas, e taõ gerais como esta. Newton a tomou por base dos seus calculos em tudo o que demonstrou sobre esta materia. *Phil. Princip. Mathem. Sect.* II. *Prop.* I.

323 Suppondo o angulo $ACM=\Phi$, teremos $\frac{1}{2}\int zz\,d\Phi$ por expressaõ da area AMC; logo $zz\,d\Phi=C\,dt$, e $\frac{d\Phi}{dt}=\frac{C}{zz}$: porém $\frac{d\Phi}{dt}$ he a velocidade angular do movel, ou (que vem a ser o mesmo) a velocidade com que gira o raio vector; logo *a velocidade angular he reciprocamente proporcional ao quadrado da distancia.*

324 Se conduzirmos do centro C a perpendicular CN sobre a tangente em M, será $CN=\frac{zz\,d\Phi}{ds}=\frac{C\,dt}{ds}=\frac{C}{u}$. Logo *a velocidade effectiva do movel em qualquer ponto da sua orbita he reciprocamente como a perpendicular conduzida do centro para a tangente da curva no mesmo ponto.*

325 Multiplicando a primeira das duas equações gerais (n. 322.) por $\frac{dx}{dt}$, e a segunda por $\frac{dy}{dt}$, teremos

dx

$$\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{-Py\,dy+P(a-x)\,dx}{z}:$$

porém $zz=yy+(a-x)^2$, e conseguintemente $z\,dz=y\,dy-(a-x)\,dx$; logo $u\,du=-P\,dz$; e integrando, $uu=-2\int P\,dz$. Como P he huma funçaõ de z, esta equaçaõ dará a velocidade u em z. Donde se segue, que *o movel terá na sua trajectoria a mesma velocidade, que teria na mesma distancia outro qualquer corpo que por linha recta descesse para o centro, com tanto que ambos se achassem huma vez em distancias iguais com velocidades iguais.* He a Prop. XL dos Principios de Newton. Sect. VIII.

326 Agora, para construir a trajectoria, tomemos as duas equações $zz\,d\Phi=C\,dt$, e $uu=-2\int P\,dz$. Substituindo na ultima $\frac{ds^2}{dt^2}$, ou $\frac{dz^2+z^2\,d\Phi^2}{dt^2}$ em lugar de uu, teremos $dz^2+z^2\,d\Phi^2=-2\,dt^2\int P\,dz$; e substituindo nesta em lugar de dt^2 o seu valor $\frac{z^4\,d\Phi^2}{C^2}$ tirado da primeira, teremos $(dz^2+zz\,d\Phi^2)\,C^2=-2z^4\,d\Phi^2\int P\,dz$. Logo $d\Phi=\frac{\pm C\,dz}{z\sqrt{(-2z^2\int P\,dz-C^2)}}$, equaçaõ separada, e que sempre poderá construir-se, ao menos por quadraturas. Deste modo he que Newton resolve este problema na Prop. XLI dos seus Principios.

Pelo que respeita á ambiguidade dos sinais $\pm$, deve notar-se que provém de que o angulo de projecçaõ CAV póde ser agudo, ou obtuso. Se he agudo, diminue z á medida que o angulo Φ aumenta, e entaõ he necessario usar do sinal $-$. Se he obtuso, z e Φ crescem ao mesmo tempo, e nesse caso deve tomar-se o sinal $+$. Bem se vê, que se o angulo de projecçaõ fosse recto, os dous sinais seriaõ indifferentes.

327 Em fim, seja qual for a hypothese da força central, sempre o circulo poderá ser huma trajectoria, com tanto que se observem duas condições. A primeira, que a velocidade de projecçaõ tenha sido impressa por huma direcçaõ perpendicular ao raio vector; e a segunda, que o quadrado desta velocidade seja igual ao producto da força central pelo raio do circulo, ou (que vem a ser o mesmo) que a força central seja para a da gravidade, como a altura devi-

devida á velocidade de projecçaõ para ametade do raio.

Porque sendo a trajectoria circular, temos $dz = 0$, e conseguintemente será tambem em geral $-2z^2 \int P\,dz - C^2 = 0$; logo $\int P\,dz = \frac{-C^2}{2zz}$, e differenciando, $P\,dz = \frac{C^2}{z^3}\,dz$, ou $P = \frac{C^2}{z^3}$. E porque entaõ he $z\,d\Phi = ds = u\,dt$, a equaçaõ $zz\,d\Phi = C\,dt$ dará $C = uz$, e conseguintemente $P = \frac{uu}{z}$, ou $uu = Pz$, ou $2gb = Pz$. Isto mesmo se segue de que neste caso he a força centripeta igual á força normal; e esta he para a força da gravidade, como a altura devida á velocidade do movel para ametade do raio.

328 Exemplo I. Suppondo que a força central he na rasaõ directa da distancia ao centro, determinar a equaçaõ da trajectoria de hum movel lançado com qualquer velocidade (Fig. 143.).

Seja f a distancia, onde a força central se acha igual á da gravidade, e teremos em geral $P = \frac{gz}{f}$, e $\int P\,dz = \frac{gzz}{2f} + C'$. Agora suppondo, que o movel foi lançado do ponto A pela direcçaõ AV perpendicular a CA, e com huma velocidade V, teremos $dz = 0$ no ponto A, e conseguintemente $z\,d\Phi = ds$. Assim mudar-se-ha no ponto A a equaçaõ $z^2\,d\Phi = C\,dt$ em $z\,ds = C\,dt$; donde se tira $C = \frac{z\,ds}{dt} = aV$.

Porém $uu = -2\int P\,dz = -2C' - \frac{gzz}{f}$; e porque $u = V$, quando $z = a$, será $2C' = -VV - \frac{ga^2}{f}$; logo $uu = VV + \frac{ga^2}{f} - \frac{gzz}{f} = -2\int P\,dz$. Substituindo pois estes valores, e o de $VV = 2gb$, na equaçaõ geral (n. 326.), teremos $d\Phi = \frac{-a\,dz\sqrt{2fb}}{z\sqrt{[(a^2-z^2)(z^2-2fb)]}}$.

Para

Para integrarmos esta equaçaõ seja $\sqrt{(a^2-z^2)} = pz$; e substituindo nella os valores de z, e dz, teremos $d\Phi = \frac{dp\sqrt{2fb}}{\sqrt{(a^2-2fb-2fbp^2)}}$. Seja $p\sqrt{2fb} = q\sqrt{(a^2-2fb)}$; e teremos a nova transformada $d\Phi = \frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}}$, cujo integral he $q = sen\,\Phi$; sem constante, porque q, ou $\frac{\sqrt{2fb}.\sqrt{(a^2-z^2)}}{z\sqrt{(a^2-2fb)}}$ se desvanece, quando $\Phi = 0$, ou quando $z = a$. Será pois $sen\,\Phi = \frac{\sqrt{2fb}.\sqrt{(a^2-z^2)}}{z\sqrt{(a^2-2fb)}}$, ou $z^2 sen\,\Phi^2 (a^2-2fb) = 2fb(a^2-z^2)$.

Fazendo agora $CP = x$, $PM = y$, poderemos substituir yy em lugar de $z^2 sen\,\Phi^2$, e $yy + xx$ em lugar de zz. E assim teremos $yy(a^2-2fb) = 2fb(a^2-x^2-y^2)$, ou $yy = \frac{2fb}{aa}(aa-xx)$ por equaçaõ ás coordenadas da trajectoria. Esta equaçaõ pertence a huma ellipse, que tem o centro em C, sendo a ametade do eixo maior $AC = a$, e a ametade do menor $BC = \sqrt{2fb}$. Suppomos, que $a > 2fb$; se fosse $a < 2fb$, seria BC a ametade do eixo maior.

329 Logo, se hum corpo depois de haver sido lançado por huma direcçaõ perpendicular ao raio vector AC, com huma velocidade devida á altura b, for sollicitado para o centro C por huma força centripeta na rasaõ directa das distancias ao mesmo centro, de maneira que na distancia f seja esta força igual á da gravidade, o movel descreverá huma ellipse, cujo centro será o mesmo que o das forças, sendo a ametade de hum dos eixos $AC = a$, e do outro $BC = \sqrt{2fb}$.

Se a projecçaõ naõ tivesse sido perpendicular ao raio vector, mas por huma linha MV', que com elle fizesse hum angulo dado CMV', igualmente se poderiaõ determinar os eixos da trajectoria, e a sua posiçaõ. Porque seja k a altura devida á velocidade do corpo em M, ou á velocidade de projecçaõ. Como temos em geral $uu = VV + \frac{g}{f}(aa-zz)$, será $2fk = 2fb + aa - mm$:

porém

porém $2fb = BC^2$; logo $2fk = CO^2$. Conhecemos pois $CM = m$, $CO = \sqrt{2fk}$, e o angulo CMV', que comprehendem estes dous semidiametros conjugados; e conseguintemente será facil de descrever a ellipse, que serve de trajectoria ao movel, no caso de ser obliquo o angulo de projecçaõ.

330 Quanto ao tempo, que o movel emprega em correr qualquer arco AM da sua trajectoria, temos visto que he para a area ACM, como a unidade para a quantidade $\frac{1}{2}aV$. Por conseguinte, chamando c o numero 3,14159 &c, e b a ametade do eixo CB, o tempo de huma revoluçaõ inteira, ou o *tempo periodico* terá por expressaõ $\frac{cab}{\frac{1}{2}aV} = \frac{2cb}{V}$. Logo *o tempo periodico será o mesmo, que gastaria hum corpo em descrever uniformemente com a velocidade V a circumferencia do circulo descrito com o raio CB.*

Como temos $b = \sqrt{2fb}$, e $V = \sqrt{2gb}$, póde o tempo periodico representar-se igualmente por $2c\sqrt{\frac{f}{g}}$; quantidade, que naõ depende senaõ da força central, e que nos mostra conseguintemente, que *se muitos corpos lançados com quaisquer velocidades primitivas descreverem trajectorias ellipticas ao redor do mesmo centro, os seus tempos periodicos seraõ iguais.*

331 A altura k devida á velocidade do projectil em qualquer ponto M da sua orbita he representada por $\frac{CO^2}{2f}$ (n. 329.), e conseguintemente *he a velocidade proporcional ao semidiametro conjugado* CO. Sendo pois V a velocidade no ponto A, e u a velocidade no ponto M, teremos $u = \frac{V.CO}{CB}$. Logo *terá o movel a maior velocidade, quando se achar nas extremidades do eixo menor; e a menor velocidade, quando se achar nas extremidades do eixo maior.*

332 Os pontos da maior, e menor velocidade do projectil, chamaõ-se em geral *os apsides* da sua orbita; e quando se trata do movimento dos planetas á roda do Sol, chama-se em particular apside superior, ou *aphelio*, o ponto

to da sua menor velocidade; e apside inferior, ou *perihelio*, o ponto da menor velocidade.

333 Exemplo II. Supponda, que a força centripeta he na rasaõ inversa do quadrado da distancia, e que na distancia f he igual á força da gravidade, determinar a trajectoria de hum movel lançado com qualquer velocidade (Fig. 144.).

Neste caso temos $P = \frac{gff}{zz}$, e $\int P dz = -\frac{gff}{z} + C'$; donde será $uu = -2\int P dz = -2C' + \frac{2gff}{z}$. Porém, fazendo $AC = a$, e a velocidade de projecçaõ no ponto $A = V$, teremos $VV = -2C' + \frac{2gff}{a}$, e conseguintemente $-2C' = VV - \frac{2gff}{a}$; logo, substituindo este valor, será $uu = -2\int P dz = VV + \frac{2gff}{z} - \frac{2gff}{a}$. Seja pois v a altura devida á velocidade u, e b a altura devida á velocidade de projecçaõ V; e teremos $v = b + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$.

Isto posto, se a velocidade de projecçaõ for perpendicular ao raio vector CA, a constante da equaçaõ $z^2 d\Phi = C dt$ será $= aV$, e assim teremos por equaçaõ differencial da trajectoria $d\Phi = \frac{a dz}{z\sqrt{\left[zz + \frac{ffzz}{b}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right) - aa\right]}}$, ou $d\Phi = \frac{a dz \sqrt{ab}}{z\sqrt{[(z-a)(\overline{ab-ff}.z + a^2 b)]}}$. Seja $\frac{2a^2 b - f^2 z}{z} = p$, ou $z = \frac{2a^2 b}{f^2 + p}$; e teremos $\frac{dz}{z} = \frac{-dp}{f^2 + p}$, $z - a = \frac{2a^2 b - af^2 - ap}{f^2 + p}$, $(ab - ff)z + a^2 b = \frac{a^2 b(2ab - ff + p)}{f^2 + p}$, e $\sqrt{[(z-a)(\overline{ab-ff}.z +}$

$a^2 b)] = \frac{a\sqrt{ab}}{f^2+p}\sqrt{[(2ab-ff)^2-p^2]}$. Logo $d\Phi = \frac{-dp}{\sqrt{[(2ab-ff)^2-p^2]}}$. Integrando pois, teremos $\frac{p}{2ab-ff} = cos\,\Phi$, ou $\frac{2a^2b-f^2z}{2abz-f^2z} = cos\,\Phi$, sem constante, porque dá ao mesmo tempo $\Phi = 0$, e $z = a$. Logo a equação finita da trajectoria será na hypothese presente $2a^2b - f^2z = (2ab-ff)\,z\,cos\,\Phi$.

E porque fazendo $AP = x$, temos $z\,cos\,\Phi = a - x$, está claro que a equação entre os z e os x da curva deve ser $f^2z = 2a^2b + (ff - 2ab)\,(a - x) = af^2 + (2ab-ff)\,x$. Elevando pois ao quadrado, substituindo em lugar de z^2 o seu valor $y^2 + (a-x)^2$, e reduzindo, teremos por equação ás coordenadas $f^4y^2 = 4a^2bf^2x + 4ab(ab-ff)\,x^2$; equação, que em geral pertence a huma secção conica, que tem por vertice o ponto A, e por eixo a linha AP. Será pois a trajectoria huma ellipse, se for $ab < f^2$; huma parabola, se $ab = f^2$; e huma hyperbola, se $ab > f^2$.

334 Na primeira supposição, se determinará o eixo maior Aa da ellipse, fazendo $y = 0$, que dará $x = Aa = \frac{af^2}{f^2-ab}$; e a ametade do eixo menor DB se achará, tomando $x = \frac{1}{2}Aa$, que dará $DB = \frac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{(f^2-ab)}}$. Porém $AC = a$, e conseguintemente $Ca = \frac{a^2b}{f^2-ab}$; logo $AC \cdot Ca = \frac{a^3b}{f^2-ab} = DB^2$. Donde se segue, que o *ponto C, onde se acha o centro das forças, he hum dos fócos da ellipse.*

335 Será o fóco mais vezinho do ponto A, quando for $2ab > f^2$; e o mais distante, quando for $2ab < f^2$. Quando porém for $2ab = f^2$, ambos os fócos se reunirão em hum só, e a trajectoria será conseguintemente circular. Do mesmo modo se mostra, que sendo a trajectoria huma parabola, ou hyperbola, sempre o centro das forças se acha no fóco.

Appli-

Applicaçaõ da Theorica precedente ao Movimento dos Planetas.

336 A Fim de applicar esta theorica ao movimento dos corpos celestes, supponhamos que elles se movem por trajectorias ellipticas, e façamos o eixo maior dellas $= A$, o menor $= B$, e o parametro $=$ P. Teremos $A = \frac{af^2}{f^2 - ab}$, $B = \frac{2a\sqrt{ab}}{\sqrt{(f^2 - ab)}}$, e $P = \frac{B^2}{A} = \frac{4a^2b}{f^2}$. Porém, como temos visto, o tempo de huma revoluçaõ inteira he igual á area da ellipse dividida por $\frac{1}{2}a\sqrt{}$; logo será o tempo periodico $= \frac{\frac{1}{4}c.A.B}{\frac{1}{2}a\sqrt{2gb}}$, e substituindo em lugar de B o seu valor $\sqrt{A.P}$, ou $\frac{2a}{f}\sqrt{Ab}$, será o mesmo tempo periodico $= \frac{c.A^{\frac{3}{2}}}{f\sqrt{2g}}$. Donde concluiremos, que *se muitos corpos descreverem trajectorias ellipticas ao redor do mesmo centro de forças, seraõ os tempos periodicos como as raizes quadradas dos cubos dos eixos maiores das suas orbitas*, ou (que vem a dizer o mesmo) *na rasaõ sesquiplicada dos mesmos eixos.*

337 E porque a altura devida á velocidade he em geral $v = b + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$, concluiremos tambem que o perihelio está na extremidade do eixo mais vezinha do fóco, e o aphelio na outra extremidade do mesmo eixo.

He cousa sabida, que no Systema de Newton todos os planetas gravitaõ para o Sol, na rasaõ inversa do quadrado da distancia em que estaõ a respeito do centro delle. Logo se os planetas recebêraõ no principio do seu movimento huma certa velocidade de projecçaõ obliqua, como era necessario para naõ cahirem todos sobre o Sol, esta força primordial de projecçaõ, combinada com a força da gravitaçaõ, que he entaõ a força central, deve fazellos

los deſcrever huma ſecçaõ conica, que tenha o centro meſmo do Sol em hum dos ſeus fócos. E como por huma parte todos elles tem ſuas revoluções periodicas, e por outra parte varîaõ de diſtancia ao Sol em differentes pontos das ſuas orbitas, eſtá claro, que entre as ſecções conicas a ellipſe he a unica trajectoria dos planetas, que obſervamos. Porém em geral eſtas ellipſes tem pequena *excentricidade*, iſto he, differem pouco de huma figura circular.

338 Do que acima temos demonſtrado concluiremos pois I. *Que os planetas deſcrevem ao redor do Sol areas proporcionais aos tempos.* II. *Que os tempos periodicos ſaõ como as raizes quadradas dos cubos dos eixos maiores das ſuas orbitas.* Os cometas eſtaõ no meſmo caſo, com eſta differença porém que as ſuas orbitas ſaõ ellipſes muito allongadas, nas quais por conſeguinte póde tomar-ſe a parte inferior, nas vezinhanças do perihelio, como hum arco de parabola.

Eſtas duas Leis memoraveis do movimento dos planetas tinhaõ ſido já deſcubertas pelo celebre Aſtronomo Kepler, e por eſſa raſaõ ſe chamáraõ *Regras de Kepler.* Mas eſtava reſervado para Newton o demonſtrallas com todo o rigor, por hum encadeamento ſingular de principios, de calculos, e de conſequencias. Depois de haver poſto por baſe do ſeu Syſtema a cauſa phyſica deſtas leis, moſtrou que ellas deviaõ neceſſariamente ter lugar, ſuppondo que a força centripeta, que retem os planetas nas ſuas orbitas, he dirigida para o centro do Sol, e que obra na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias ao meſmo centro.

Por mais que ſe tenhaõ feito paſſar eſtas leis pelas provas reiteradas das mais delicadas obſervações, nunca ſe achou facto algum que as deſmentiſſe, antes todos concorrem maravilhoſamente a confirmallas; e nenhuma couſa tem contribuido de hum modo mais efficaz para fazer adoptar geralmente o ſyſtema, ao qual ellas ſervem de baſe.

Todos os planetas ſe movem ſegundo a ordem dos *Signos*; e ainda que as ſuas orbitas naõ eſtaõ no meſmo plano, a ſua inclinaçaõ a reſpeito da *ecliptica* naõ paſſa de 8 gráos. Os dous pontos, onde ellas encontraõ o plano da ecliptica, chamaõ-ſe *nodos.*

339 Obſervando com toda a exactidaõ poſſivel as circunſtancias da revoluçaõ dos aſtros, tem-ſe achado os tempos periodicos da maneira ſeguinte:

Mercu-

Mercurio	87^d	23^h	$15' \frac{1}{2}$	, ou	87^d, 969
Venus	224	16	$48 \frac{1}{3}$	, ou	224 , 700
Terra	365	6	$9 \frac{1}{6}$	, ou	365 , 256
Marte	686	23	$30 \frac{1}{2}$	, ou	686 , 980
Jupiter	4332	12		, ou	4332 , 5
Saturno	10759	8		, ou	10759 , 33

Sendo pois os eixos maiores das orbitas dos planetas como as raizes cubicas dos quadrados dos tempos periodicos, concluiremos, que ſuppondo o eixo maior da orbita terreſtre dividido em 100000 partes, os eixos das orbitas dos ſeis planetas precedentes ſeraõ repreſentados reſpectivamente pelos numeros 38710 . . . . 72333 . . . . 100000 . . . . 152369 . . . . 520109 . . . . 953803, os quais ſaõ muito conformes ao que ſe tem achado por obſervações immediatas. Como ſabemos por outra parte, que o eixo maior da orbita terreſtre he proximamente de 48000 ſemidiametros terreſtres, naõ temos mais que multiplicar os numeros precedentes por $\frac{48}{100}$, para os reduzirmos todos a ſemidiametros terreſtres. Eſta multiplicaçaõ dará 15581 . . . . ; 34720 . . . . 48000 . . . . 73137 . . . . 249652 . . . . 457825. E porque o ſemidiametro da terra he de 19615800 pés, podemos reduzir os referidos eixos a medidas conhecidas.

340 Agora poderemos determinar a força attractiva do Sol, ou a diſtancia f do ſeu centro, onde ella he igual á força da gravidade. Porque ſendo o tempo periodico $T = \frac{c \,.\, A \sqrt{A}}{f \sqrt{2g}}$, teremos $f = \frac{c \,.\, A \sqrt{A}}{T \sqrt{2g}}$, onde he neceſſario advertir que o tempo ſe conta em ſegundos; e tanto A como f em pés. Se quizermos pois exprimir eſtas duas ultimas quantidades em ſemidiametros terreſtres,

tres, deveremos eſcrever $f = \frac{c \cdot A^{\frac{1}{2}} \sqrt{19615800}}{T \sqrt{2g}}$. Porém o diametro A da orbita annual he de 48000 ſemidiametros terreſtres, e o tempo periodico T he de 365^d $6^h\ 9'\ 10'' = 31558150''$; logo $f =$ - - - - - - - -

$$\frac{(3,14159265)(48000)^{\frac{1}{2}}(19615800)^{\frac{1}{2}}}{(31558150)(60,392)^{\frac{1}{2}}} = 596\frac{1}{2}.$$

Logo a força attractiva do Sol, tomada a $596\frac{1}{2}$ ſemidiametros terreſtres do ſeu centro, he igual á força que a gravidade exercita ſobre os corpos ſituados junto á ſuperficie da terra.

341 Para determinar o movimento verdadeiro de hum planeta (Fig. 145.), he neceſſario conhecer por meio das obſervações a excentricidade da ſua orbita, ou a diſtancia CS entre o centro e o fóco, que he ametade da differença entre a maxima e minima diſtancia do planeta a reſpeito do centro do Sol. Seja pois eſta excentricidade $= E$, e o eixo maior $AB = A$, e conſeguintemente o menor $2CD = \sqrt{(AA - 4EE)}$, e ſeja f a quantidade, que mede a intenſaõ da força acceleratriz. Iſto poſto, eisaqui como ſe póde calcular a velocidade do planeta em qualquer ponto M da ſua orbita.

Por quanto já temos achado, que $v = b + \frac{ff}{z} - \frac{ff}{a}$, he neceſſario primeiramente determinar b. Para iſſo temos $A = \frac{af^2}{f^2 - ab}$, donde ſe tira $b = \frac{f^2(A-a)}{A \cdot a}$; e ſubſtituindo eſte valor, teremos $v = \frac{ff}{z} - \frac{ff}{A}$. Donde ſe ſegue, que a velocidade perihelia em A he devida á altura $\frac{ff}{a} - \frac{ff}{A} = \frac{ff}{\frac{1}{2}A - E} - \frac{ff}{A} = \frac{ff(A+2E)}{A(A-2E)}$, e que a velocidade aphelia em B he devida á altura

$$\frac{ff}{\frac{1}{2}A+E}-\frac{ff}{A}=\frac{ff(A-2E)}{A(A+2E)}.$$

342 Note-ſe, que eſtas duas alturas ſaõ entre ſi como $(A+2E)^2$ para $(A-2E)^2$, ou como o quadrado de SB para o de SA. Logo as velocidades correſpondentes ſaõ como SB para SA; e aſſim vemos por outra parte que deve ſer, reflectindo que as velocidades nos differentes pontos da trajectoria ſaõ reciprocamente como as perpendiculares conduzidas do centro das forças para as tangentes.

343 Se quizermos ſaber o tempo, que deve gaſtar hum planeta em deſcrever hum arco AM da ſua orbita, contado deſde o ponto do perihelio A, faremos eſta proporçaõ: *Como a area da ellipſe he para a area* ASM, *aſſim o tempo periodico para o tempo procurado.*

344 Mas ſe quizermos reſolver o problema inverſo, ou buſcar o *lugar* do planeta na ſua orbita em qualquer inſtante dado, he neceſſario calcular o angulo ao Sol ASM, correſpondente ao tempo determinado t, que tem corrido deſde a paſſagem pelo perihelio até chegar o planeta ao ponto M. O angulo ASM chama-ſe *anomalia verdadeira*; e o problema, que tem a determinaçaõ delle por objecto, he muito conhecido dos Aſtronomos pelo nome de *Problema de Kepler*. Até o preſente naõ ſe tem podido reſolver, ſenaõ de hum modo approximado.

O circulo ANB deſcrito ſobre o diametro AB, chama-ſe o *circulo do excentrico*. Se produzirmos até o ponto N da ſua circumferencia a ordenada MP, eſtá claro que, ſendo o ſector circular ANS para o ſector elliptico AMS em huma raſaõ conſtante, ſerá o ſector circular ANS para a area de todo o circulo, como o tempo t empregado em correr o arco AM para o tempo periodico T.

Reduz-ſe pois a queſtaõ a conduzir pelo ponto dado S huma linha SN, que corte no circulo do excentrico huma parte dada da ſua area $ANS=\frac{t}{T}$. Para iſſo, ſeja o raio do excentrico $AC=1$, a excentricidade $CS=E$, e o arco de circulo AN que ſe quer determinar, e que ſe chama *anomalia do excentrico* $=\varphi$. Aſſim teremos

mos por valor da area ANS a quantidade $\frac{1}{2} AC . AN$ $- \frac{1}{2} CS . PN = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} E \, ſen \, \varphi$, e a area inteira do circulo ſerá $c . AC^2$; logo $\varphi - E \, ſen \, \varphi = \frac{t}{T} . 2c$

345 Se qualquer corpo ſe moveſſe uniformemente pela circumferencia do excentrico, e acabaſſe nelle a ſua revoluçaõ no meſmo tempo que o planeta a ſua na ellipſe, teriamos $\frac{t}{T} . 2c$ por expreſſaõ do arco AQ, que elle deſcreveria no tempo t. Eſte arco he o que ſe chama *anomalia media do planeta*, e ſempre he conhecido em ſe dando o tempo t, por quanto he $T : t :: 360^\circ : AQ$.

Sendo pois a anomalia media $= \mathcal{G}$, teremos $\varphi - E \, ſen \, \varphi = \mathcal{G}$. Porém deſta equaçaõ naõ póde deduzir-ſe o valor de φ, ſenaõ por approximaçaõ. Será com tudo tanto mais facil de alcançar, quanto for menor a excentricidade E. Para maior facilidade do calculo, ſupporemos que as quantidades φ e $\mathcal{G}$ ſaõ repreſentadas em gráos e partes decimais de gráo; o que exige que tambem ſe reduza o valor abſoluto de $E \, ſen \, \varphi$ em gráos, multiplicando-o por $\frac{180}{c}$. Neſtes termos ſerá a equaçaõ, que havemos de reſolver, $\varphi - \mathcal{G} = \frac{180 . E}{c} ſen \, \varphi$.

346 Exemplo. Na orbita de Marte, que he a mais excentrica de todas, exceptuando a de Mercurio, queremos ſaber o lugar do planeta $65^d\ 10^h\ 59'\ 31''\ \frac{1}{5}$ depois da ſua paſſagem pelo perihelio.

Marte faz a ſua revoluçaõ em $686^d\ 23^h\ 30'\ \frac{1}{2}$; e reduzindo a partes decimais de dia teremos $T = 686{,}98$ e $t = 65{,}458$. Aſſim calculando a formula $\mathcal{G} = \frac{2ct}{T}$. por logarithmos, teremos

686 , 98 - - - - - - - C L. 7 , 1630559
360 - - - - - - - - - - - - L. 2 , 5563025
65 , 458 - - - - - - - - L. 1 , 8159627
Log. ζ - - - - - - - 1 , 5353211

A este Logarithmo corresponde o numero 34° , 30213, que he o valor procurado da anomalia media , correspondente ao tempo proposto.

Por outra parte consta das observações , que o eixo maior da orbita de Marte he para a sua excentricidade como 2004343 para 93134 . Logo $E = \frac{186268}{2004343}$; e por conseguinte será facil de calcular o Logarithmo do coefficiente $\frac{180 . E}{c}$ na equação $\varphi - \zeta = \frac{180 . E}{c}$ *sen* φ.

3 , 14159265 - - - - - - - C L. 9 , 5028501
2004343 - - - - - - - - - - C L. 3 , 6980280
180 - - - - - - - - - - - - - L. 2 , 2552725
186268 - - - - - - - - - - - L. 5 , 2701383

$L \frac{180 . E}{c}$ - - - - - - - - - - - 0 , 7262889

Será pois a equação, que temos para resolver, *log.* ($\varphi - \zeta$) = 0 , 7262889 + *log sen* φ. Ora, como φ não deve ser muito maior que ζ ou 34° , supponhamos primeiramente $\varphi = 36°$; e tendo achado pelo calculo , que este valor ainda he pequeno , supponhamos em segundo lugar $\varphi = 38°$. Fazendo o calculo para estas supposições , teremos

I	II
$\varphi = 36°$	$\varphi = 38°$
$\zeta = 34° , 30$ &c	$\zeta = 34° , 30$ &c
$\varphi - \zeta = 1 , 7$	$\varphi - \zeta = 3 , 7$
L sen φ = 9, 7692187	*L sen* φ = 9, 7893420
0, 7262889	0, 7262889
$L(\varphi - \zeta)$ = 0, 4955076	$L(\varphi - \zeta)$ — 0,5156309
$\varphi - \zeta = 3, 13$	$\varphi - \zeta = 3, 28$
Erro + 1, 43	*Erro* — 0, 42

347 Iſto poſto, imaginemos huma linha recta MBM' (Fig. 146.), cujas abſciſſas AP, AP' repreſentem as ſuppoſiçoens 36, e 38; e as ordenadas PM, $P'M'$, repreſentem os erros correſpondentes. Aſſim teremos eſta proporçaõ: como a ſoma MC dos dous erros para a differença PP' das duas ſuppoſiçoens, aſſim PM ou 1, 43 para o quarto termo $PB = 1, 546$, o qual ſendo ajuntado á primeira ſuppoſiçaõ 36° dará proximamente $\varphi = 37°, 546$. Mas para conſeguirmos huma approximaçaõ maior, façamos outras duas ſuppoſiçoens, tomando na primeira $\varphi = 37°, 54$, e na ſegunda $\varphi = 37°, 55$; e hum calculo ſemelhante ao precedente nos dará

III	IV
$\varphi = 37, 54$	$\varphi = 37, 55$
$\varsigma = 34, 30213$	$\varsigma = 34, 30213$
$\varphi - \varsigma = 3, 23787$	$\varphi - \varsigma = 3, 24787$
$L\,ſen\,\varphi = 9, 7848420$	$L\,ſen\,\varphi = 9, 7849406$
$0, 7262889$	$0, 7262889$
$L(\varphi - \varsigma) = 0, 5111309$	$L(\varphi - \varsigma) = 0, 5112295$
$\varphi - \varsigma = 3, 24437$	$\varphi - \varsigma = 3, 24511$
Erro $+ 0, 00650$	*Erro* $- 0, 00276$

Deſtes dous reſultados deduziremos eſta proporçaõ: A ſoma dos erros 0, 00926 he para a differença das ſuppoſiçoens 0, 01, como o primeiro erro 0, 0065 he para o quarto termo, que ſe achará $= 0, 00702$, e ajuntando-ſe á primeira ſuppoſiçaõ dará $\varphi = 37°, 54702$.

Eſte valor he exacto até á ultima letra decimal, porque ſubſtituindo 37°, 54702 em lugar de φ na equaçaõ $L(\varphi - \varsigma) = 0, 7262889 + L\,ſen\,\varphi$, naõ ſe acha erro algum. Concluamos pois, que a anomalia do excentrico AN he de 37°, 54702, ou de $37° \, 32' \, 49'' \frac{3}{11}$.

348 Agora, ſendo já conhecida a anomalia do excentrico AN, paſſaremos a determinar a anomalia verdadeira ASM (Fig. 145.). Para iſſo ſupponhamos $CA = a$,

$CP = x$, $CS = e$; e tendo reflectido que he $tang\ \frac{1}{2}\ \Phi = \frac{1 - cos\ \Phi}{sen\ \Phi}$, teremos $tang\ \frac{1}{2}\ ASM = \frac{SM - PS}{PM}$, e $tang\ \frac{1}{2}\ ACN = \frac{CN - CP}{PN} = \frac{AP}{PN}$. Porém, pelas propriedades da ellipse, temos o raio vector $SM = a - \frac{ex}{a}$, e conseguintemente $SM - SP = a + e - x - \frac{ex}{a} = \frac{a + e}{a}$. $(a - x) = \frac{a + e}{a}\ AP$. Logo $tang\ \frac{1}{2}\ ASM : tang\ \frac{1}{2}\ ACN :: \frac{a + e}{a} \cdot \frac{AP}{PM} : \frac{AP}{PN} :: a + e : \frac{a.PM}{PN} :: a + e : CD :: a + e : \sqrt{(aa - ee)} :: \sqrt{(a + e)} : \sqrt{(a - e)}$. Logo *a raiz quadrada da distancia peribelia he para a raiz quadrada da distancia aphelia, como a tangente da ametade da anomalia do excentrico para a tangente da ametade da anomalia verdadeira.*

Teremos pois no nosso exemplo $\sqrt{1818075} : \sqrt{2190611} :: tang\ 18^\circ\ 46'\ 24''\ \frac{7}{11} : tang\ \frac{1}{2}\ ASM$; e calculando esta proporçaõ por logarithmos, acharemos

1818075 - - - - - -	$\frac{1}{2}$ C L.	6,8701941
2190611 - - - - - - - -	$\frac{1}{2}$ L.	3,1702826
$18^\circ\ 46'\ 24''\ \frac{7}{11}$ - - -	L. tang.	9,5313664
Log. tang $\frac{1}{2}$ ASM - - -		9,5718431

Este logarithmo corresponde nas Taboas ao angulo de $20^\circ\ 27'\ 40''\ \frac{8}{11}$; e assim teremos a anomalia verdadeira $ASM = 40^\circ\ 55'\ 21''\ \frac{5}{11} = 40^\circ,92232$, com a qual se determina o lugar de Marte na sua orbita ao instante dado.

Ajuntando as differentes partes deste calculo, será pois a anomalia media $AQ = 34°, 30213 = 34° 18' 7'' \frac{2}{3}$; a anomalia do excentrico $AN = 37°, 54702 = 37° 32' 49'' \frac{3}{11}$; e a anomalia verdadeira $ASM = 40°, 92232 = 40° 55' 21'' \frac{5}{11}$.

55. Para ajuntarmos aqui huma approximaçaõ analytica do Problema precedente, seja a ametade do eixo maior $AC = 1$ (Fig. 145.), a excentricidade $CS = e$, o raio vector $SM = r$, a anomalia verdadeira $ASM = u$, a anomalia media $AQ = z$, e $2c$ a circumferencia do circulo que tem o raio $= 1$. A superficie do circulo AEB será representada por c, e a da ellipse por $c\sqrt{(1-e^2)}$; o elemento do sector ASM será $\frac{1}{2}rrdu$, e o do circulo $\frac{1}{2}dz$. Logo acharemos $\frac{1}{2}dz : \frac{1}{2}rrdu :: c : c\sqrt{(1-e^2)}$, e conseguintemente $dz = \frac{rrdu}{\sqrt{(1-e^2)}}$.

Porém he $SM = AC - \frac{e.CP}{AC} = AC - \frac{e^2 + e.PS}{AC}$; ou $r = 1 - e^2 - er\, cos\, u$; logo $r = \frac{1-e^2}{1+e\, cos\, u}$. E substituindo este valor de r na equaçaõ $dz = \frac{rrdu}{\sqrt{(1-e^2)}}$, será $dz = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}} du}{(1+e\, cos\, u)^2} = (1-e^2)^{\frac{3}{2}} du (1+e\, cos\, u)^{-2}$.

Reduzindo pois $(1-e^2)^{\frac{3}{2}}$ a huma serie, e $(1+e\, cos\, u)^{-2}$ a outra; multiplicando-as; reduzindo as potencias de $cos\, u$ a cosenos de multiplos de u; e desprezando as potencias de e que passarem da quarta, por serem de extrema pequenheza, ainda que seja na orbita de Mercu-

Mercurio; teremos $dz = du - 2e\,du\,\cos u + \frac{1}{4}(6e^2 + e^4)\,du\cos 2u - e^3\,du\cos 3u + \frac{5}{8}e^4\,du\cos 4u$; e integrando,

$$z = u - 2e\,\text{sen}\,u + \frac{1}{8}(6e^2 + e^4)\,\text{sen}\,2u$$
$$- \frac{1}{3}e^3\,\text{sen}\,3u + \frac{5}{32}e^4\,\text{sen}\,4u.$$

Se contarmos as anomalias desde o ponto do aphelio, os termos que nesta expressaõ tem o final $-$ deveráõ mudallo em $+$.

Para acharmos agora a anomalia verdadeira pela media, supponhamos dz constante, e teremos

$$\frac{du}{dz} = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1+e\cos u)^2, \text{ ou}$$

$$\frac{du}{dz} = 1 + 2e^2 + \frac{21}{8}e^4 + (2e + 3e^3)\cos u$$
$$+ \frac{1}{4}(2e^2 + 3e^4)\cos 2u$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = -(2e^2 + 12e^4) - (2e + 18e^3)\cos u$$
$$-(8e^2 + 46e^4)\cos 2u - 11e^3\cos 3u$$
$$-7e^4\cos 4u.$$

$$\frac{d^5u}{dz^5} = (2e^2 + \frac{99}{2}e^4) + (2e + 78e^3)\cos u$$
$$+(38e^2 + 617e^4)\cos 2u + 185e^3\cos 3u$$
$$+ \frac{835}{2}e^4\cos 4u.$$

$$\frac{d^7u}{dz^7} = -(2e^2 + \frac{399}{2}e^4) - (2e + 318e^3)\cos u$$
$$-(158e^2 + 6411e^4)\cos 2u$$
$$-2051e^3\cos 3u - \frac{21819}{2}e^4\cos 4u.$$

Supponhamos $u = z + A\,\text{sen}\,z + B\,\text{sen}\,2z + C\,\text{sen}\,3z$ +

$+ D\,sen\,4z$; e fazendo ſempre conſtante dz, teremos tambem

$$\frac{du}{dz} = 1 + A\,cos\,z + 2B\,cos\,2z + 3C\,cos\,3z + 4D\,cos\,4z$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = -A\,cos\,z - 8B\,cos\,2z - 27C\,cos\,3z - 64D\,cos\,4z$$

$$\frac{d^5u}{dz^5} = A\,cos\,z + 32B\,cos\,2z + 243C\,cos\,3z + 1024D\,cos\,4z$$

$$\frac{d^7u}{dz^7} = -A\,cos\,z - 128B\,cos\,2z - 2187C\,cos\,3z$$
$$- 16384D\,cos\,4z.$$

Igualando pois eſtes valores aos precedentes reſpectivamente, e ſuppondo ambas as anomalias na ſua origem do perihelio, onde os ſeus coſenos, e os de todos os multiplos dellas, saõ iguais ao raio, ou á unidade, teremos as quatro equações ſeguintes, para determinarmos os coefficientes A, B, C, D:

$$A + 2B + 3C + 4D = 2e + \frac{5}{2}e^2 + 3e^3 + \frac{27}{8}e^4$$

$$A + 8B + 27C + 64D = 2e + 10e^2 + 29e^3 + 65e^4$$

$$A + 32B + 243C + 1024D = 2e + 40e^2 + 263e^3$$
$$+ 1084e^4$$

$$A + 128B + 2187C + 16384D = 2e + 160e^2 + 2369e^3$$
$$+ 17520e^4$$

Donde concluiremos $A = 2e - \frac{1}{4}e^3$, $B = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4$, $C = \frac{13}{12}e^3$, e $D = \frac{103}{96}e^4$.

Logo ſerá

$$u = z + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) sen\,z + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) sen\,2z$$
$$+ \frac{13}{12}e^3\,sen\,3z + \frac{103}{96}e^4\,sen\,4z.$$

Suppondo as dimenſões da orbita de Marte tais, como acima foraõ referidas, ſerá $e = 0{,}09293$; e ſubſtituindo eſte valor, teremos por equaçaõ deſte Planeta

$$u = z + 0{,}18566\,sen\,z + 0{,}01076\,sen\,2z$$
$$+ 0{,}00087\,sen\,3z + 0{,}00008\,sen\,4z.$$

Como

Como nesta expressaõ se representaõ as anomalias em partes do raio, que se tem tomado por unidade, querendo representallas em gráos, e partes de gráo, será necessario multiplicar os coefficientes numericos por $57^{o}, 29578$, que he o arco igual ao mesmo raio, e teremos

$$u = z + 10^{o}\ 38'\ 15''\ sen\ z + 36'\ 59''\ sen\ 2\ z$$
$$+ 2'\ 59''\ sen\ 3\ z + 16''\ sen\ 4\ z.$$

Se as anomalias se contarem do aphelio, como ordinariamente se costuma nas orbitas dos Planetas, deve mudar-se o final $+$ em $-$ nos coefficientes de $sen\ z$, e $sen\ 3\ z$. ʃʃ

Tal he em geral, o modo de calcular os movimentos dos corpos celestes. Mas estes movimentos, ainda que muito regulares por si mesmos, saõ com tudo sujeitos a humas pequenas desigualdades, das quais agora mostraremos brevemente as causas, e os effeitos.

Da Attracçaõ dos Corpos Celestes, e do Problema dos Tres Corpos.

349 O Sol, conforme ao que tem mostrado Newton, he dotado de huma força attractiva, que faz mover ao redor delle os seis Planetas principais; e estes Planetas tambem, assim como todos os mais astros em geral, tem huma força semelhante, pela qual obraõ naõ sómente huns contra os outros, mas todos juntos contra o mesmo Sol.

Parece que esta propriedade he, como a inercia, inherente a cada particula da materia, e que naõ podendo ser effeito da impulsaõ de fluido algum, deve buscar-se a sua causa na vontade do Autor da Natureza.

Considerando pois a gravitaçaõ reciproca de todos os corpos, como huma lei primitiva do systema solar, primeiramente exporemos alguns factos indicados pela observaçaõ, ou adivinhados, para o dizermos assim, pela theorica; e depois os applicaremos ao movimento dos Planetas.

350 Se a attracçaõ compete a cada huma das partes da materia, he evidente que a distancias iguais dos seus centros devem os Planetas attrahir na rasaõ das massas. Mas se as distancias forem differentes, prova o calculo (e a observaçaõ o confirma) que a attracçaõ he na rasaõ directa das

das maſſas, e na inverſa dos quadrados das diſtancias; ſem o que naõ ſeriaõ as trajectorias ſecçőes conicas.

E como ſabemos por outra parte, que eſtes aſtros deſcrevem orbitas ellipticas ao redor do Sol, he facil de concluir que ſe a acçaõ reciproca dos Planetas naõ lhes alteraſſe hum pouco os movimentos, deveriaõ ſer os apſides, os planos, e os nodos das ditas orbitas abſolutamente invariaveis. Sómente os Aſtronomos podiaõ verificar eſte facto; e elles ſe empenháraõ niſſo com tanto cuidado, e diligencia, que naõ reſta duvida alguma ſobre a alteraçaõ das orbitas planetarias.

Newton prediſſe a Flamſtead, que ſendo Jupiter de todos os Planetas o que tinha mais maſſa, e conſeguintemente mais força attractiva, havia de perturbar ſenſivelmente no tempo da ſua conjunçaõ o movimento dos outros corpos celeſtes, principalmente o de Saturno, e dos ſeus ſatellites. Obſerváraõ-ſe pois neſta epoca com maior cuidado do que jamais ſe tinha feito; e a profecia de Newton ſe comprio com eſpanto, porque Jupiter produzio no tempo periodico de Saturno huma alteraçaõ de doze dias.

351 A força attractiva da terra, eſta meſma força que junto á ſuperficie della nós chamamos gravidade, he a que retem a Lua na ſua orbita. A Lua faz a ſua revoluçaõ periodica em $27^d\ 7^h\ 43'$; a ſua diſtancia media he de 60 ſemidiametros tereſtres; e ſuppondo a ſua orbita circular, he facil de moſtrar, que o ſeno verſo do arco que ella deſcreve em hum minuto he de 15 pés e $\frac{1}{12}$. Eſte he pois o eſpaço, que ella andaria para a terra em hum minuto, ſe a gravidade ſó obraſſe ſobre ella. E porque os eſpaços corridos em virtude das forças acceleratrizes ſaõ como os quadrados dos tempos, ſegue-ſe que a força central que obra ſobre a Lua deve fazer-lhe correr no primeiro ſegundo da queda $\frac{1}{3600}$ de 15 pés e $\frac{1}{12}$.

E como eſta força deve ſempre actuar na raſaõ inverſa dos quadrados das diſtancias, eſtá claro que em huma diſtancia 60 vezes menor, iſto he, junto á ſuperficie da terra, deveria fazer andar á Lua 15 pés e $\frac{1}{12}$ em hum ſegundo. Tal he realmente o efpaço, que a gravidade faz correr aos corpos graves junto á fuperficie da terra. Logo a força central da Lua naõ he outra coufa, fenaõ a mefma gravidade que experimentamos no defcenfo dos corpos graves, modificada fómente na rafaõ inverfa do quadrado da diftancia.

352 O mefmo principio retém nas fuas refpectivas orbitas a todos os *Satellites*. A força attractiva de Saturno he a que faz andar á roda delle finco Luas; e a força attractiva de Jupiter, quatro. Todos eftes Planetas *fecundarios* defcrevem orbitas ellipticas ao redor do feu Planeta principal. Os feus movimentos faõ muito regulares, e os tempos periodicos exactamente proporcionais ás raizes quadradas dos cubos das fuas diftancias ao centro do Planeta principal. Obfervaõ-fe, em huma palavra, em ordem aos feus refpectivos centros de forças, fujeitos ás mefmas leis que guardaõ os Planetas principais nas fuas revoluções ao redor do Sol.

Mas fe os Satellites de Saturno, de Jupiter, e da Terra, provaõ fenfivelmente que eftes tres Planetas faõ dotados de huma força attractiva, naõ poderemos por analogia admittir huma força femelhante em Marte, Venus, e Mercurio? E naõ ferá natural o penfar, que ella obra tambem na rafaõ directa das maffas, e inverfa dos quadrados das diftancias? A mefma Lua, e os outros Satellites, naõ faõ por ventura corpos femelhantes á terra? Porque rafaõ pois lhes negaremos efta força commua a todos os outros, e talvez infeparavel da materia, por huma lei primitiva do Creador?

353 Ao menos, naõ ha coufa que mais verofimil pareça aos Phyficos, do que a acçaõ da Lua fobre a Terra. As marés do Oceano offerecem huma prova bem palpavel, fendo certo que a defigual gravitaçaõ das aguas para a Lua produz efte phenomeno; porque o Sol coopera niffo muito pouco. A fua força he com tudo realmente muito maior; mas como elle eftá perto de 400 vezes mais diftante de nós do que a Lua, e como a terra he muito pequena em comparaçaõ delle, a fua acçaõ fobre as differentes partes do globo terreftre he fenfivelmente a mefma. Por outra parte actûa por direcções quafi parallelas, e iffo tambem concorre para que os feus effeitos fejaõ menos fenfiveis fobre as aguas do mar.

A Lua, pelo contrario, eſtando muito vezinha da terra em comparaçaõ do Sol, obra por linhas muito mais divergentes; e como a ſua acçaõ ſobre as differentes partes do globo he differente, deſtas duas cauſas reunidas deve reſultar huma commoçaõ geral nos corpos, que della forem ſuſceptiveis. As aguas do Oceano immediatamente ſujeitas á ſua attracçaõ devem pois elevar-ſe, e as aguas collaterais abaixar-ſe. Mas como a revoluçaõ diurna da terra muda continuamente os aſpectos, bem ſe vê que as aguas ja elevadas naõ podem conſervar-ſe por muito tempo acima do ſeu livel ordinario; antes devem deſcer abaixo delle, para depois ſe tornarem a elevar, propagando de humas a outras até ás praias eſtas enchentes, e vaſantes.

Agora paſſamos a moſtrar os effeitos deſta gravitaçaõ reciproca dos corpos celeſtes, e até que ponto faz os ſeus movimentos mais complicados, e irregulares na apparencia. Mas antes diſſo advertiremos, que ſe os Geometras do noſſo ſeculo fizeraõ deſta indagaçaõ o objecto principal dos ſeus trabalhos, he porque conhecêraõ a grande utilidade que delle reſultava, para aperfeiçoar a theorica da Lua, da qual depende a determinaçaõ das Longitudes no mar. Tambem advertiremos, que naõ podendo ſemelhante materia ſer tratada completamente em huma obra como eſta, o noſſo intento he ſómente o de moſtrar o caminho aos leitores intereſſados neſte conhecimento.

354 Probl. I. *Sendo dous corpos M, M'* (Fig. 147) *lançados por hum meio naõ reſiſtente com quaiſquer velocidades, e attrahindo-ſe reciprocamente na raſaõ das ſuas maſſas, determinar o ſeu movimento.*

Referindo as duas trajectorias deſtes moveis ao meſmo eixo AP, ſeja $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x'$, $P'M' = y'$, $MM' = z$. Repreſentando pois a acçaõ do corpo M' ſobre o corpo M por $MN = P$, teremos por expreſſaõ da acçaõ do corpo M ſobre o corpo M' a recta $M'N' = \frac{M}{M'} P$, porque elles actûaõ na raſaõ directa das ſuas maſſas. Reſolvamos agora as duas forças MN, $M'N'$, cada huma em outras duas, das quais huma ſeja parallela, e a outra perpendicular a AP. As parallelas ſeraõ $MQ = \frac{P(x'-x)}{z}$, e $M'Q' = \frac{M}{M'} \cdot \frac{P(x'-x)}{z}$; e as perpendiculares seraõ $MO = \frac{P(y'-y)}{z}$, e $M'O' = \frac{M}{M'} \cdot \frac{P(y'-y)}{z}$. Donde resultaráõ as quatro equações seguintes,

$$\frac{P}{z}(x'-x)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z}(x'-x)\,dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{P}{z}(y'-y)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z}(y'-y)\,dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Se multiplicarmos a primeira por M, e a segunda por M', e diminuirmos o segundo producto do primeiro, teremos $Md\left(\frac{dx}{dt}\right) + M'd\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$, cujo integral he $M \cdot \frac{dx}{dt} + M' \cdot \frac{dx'}{dt} = C$. Tratando da mesma maneira a terceira, e quarta equaçaõ, teremos $M \cdot \frac{dy}{dt} + M' \cdot \frac{dy'}{dt} = C'$. Porém $M \cdot \frac{dx}{dt} + M' \cdot \frac{dx'}{dt}$ he a quantidade de movimento do centro de gravidade das duas massas parallelamente a AP, e $M \cdot \frac{dy}{dt} + M' \cdot \frac{dy'}{dt}$ he a quantidade de movimento do mesmo centro perpendicularmente a AP. Logo, como temos achado constantes estas quantidades, está claro que o centro de gravidade G, ou para fallarmos mais propriamente, que o *centro de massas* dos corpos M, M' se move uniformemente por huma linha recta HG. Donde se vê, que a posiçaõ desta linha, e a velocidade do centro de gravidade, podem determinar-se pelas velocidades da projecçaõ, que receberáõ os corpos M, M', e pela situaçaõ delles no principio do movimento.

355 Isto posto, como o centro de gravidade descreve huma linha recta, podemos tomalla para eixo das abscissas (Fig. 148.); e entaõ, sendo a ordenada y', ou $P'M'$ nega-

negativa, o movimento do corpo M se determinará por estas duas equações

$$\frac{P}{z}(x'-x)dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$
$$\frac{P}{z}(y'+y)dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Mas para determinarmos o movimento do mesmo corpo em ordem ao ponto movel G, supporémos primeiramente $MG = Z$, e $PG = X$; depois deduziremos o valor de $AG = x + X$, e teremos a equaçaõ $d\left(\frac{dAG}{dt}\right) = d\left(\frac{dx}{dt}\right) + d\left(\frac{dX}{dt}\right) = 0$, porque a velocidade do centro de gravidade $\frac{dAG}{dt}$ he constante. Logo $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$; e substituindo estes valores, teremos para exprimir o movimento do corpo M a respeito do ponto movel G as duas equações seguintes

$$\frac{PXdt}{Z} = -d\left(\frac{dX}{dt}\right), \text{ e } \frac{Pydt}{Z} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right);$$

as quais saõ absolutamente as mesmas, que achariamos, se o corpo M fosse attrahido para o ponto G considerado como fixo, por huma força central P, funçaõ de MM', e conseguintemente da distancia Z, por quanto he $MM' = \frac{M+M'}{M'}Z$. Isto mesmo he por outra parte evidente, reflectindo-se que o corpo M' obra sobre o outro M pela direcçaõ MM', que passa sempre pelo ponto G.

356 Donde se segue, que o movimento de dous corpos, que se attrahem mutuamente com certas forças, naõ he differente do que haveriaõ de ter, se elles fossem attrahidos para o seu centro commum de gravidade pelas mesmas forças, em quanto o mesmo centro se movesse uniformemente em linha recta.

Segue-se tambem, que as forças tendentes ao centro de gravidade sempre devem ser alguma funçaõ das distancias ao mesmo centro; porque saõ huma funçaõ de MM', que tem huma rasaõ constante com MG.

Póde

Póde formar-se huma idéa deste movimento, imaginando dous pontos quaisquer sobre dous raios de huma roda movel. Cada hum delles descreverá hum circulo ao redor do centro da roda, em quanto o mesmo centro se move por huma linha recta.

357 Em geral (Fig. 149.): Os dous corpos M, M' descrevem ao redor do centro G curvas semelhantes, porque GM' he sempre para GM na rasaõ constante de M para M', e por conseguinte todas as dimensões homólogas destas curvas estaraõ na mesma rasaõ.

Sendo dada a lei, pela qual se attrahem estes dous corpos, conheceremos pois a força tendente ao centro G, e conseguintemente determinaremos as trajectorias MQN, $M'Q'N'$, que elles descreveriaõ ao redor do ponto G, se elle estivesse fixo. Logo teremos, no fim de qualquer tempo t, o lugar de cada hum delles na sua trajectoria.

Sejaõ, por exemplo, M e M' os lugares dos dous moveis. Se o centro de gravidade se adiantou no mesmo tempo pelo espaço Gg, conduziremos as linhas Mm, $M'm'$ parallelas, e iguaes a Gg, e teremos os pontos m, m' por lugares absolutos dos dous moveis. Suppondo pois, que elles descrevem circulos ao redor do centro de gravidade, o seu movimento absoluto se fará por cycloides *allongadas*, ou *encurtadas*, conforme for a velocidade de translaçaõ do centro de gravidade maior, ou menor que a velocidade de cada hum dos moveis na sua orbita respectiva.

358 Se os dous corpos M, M' (Fig. 147.), além da sua attracçaõ reciproca, fossem sollicitados por quaisquer forças, estas se reduziriaõ a duas X e Y pelas direcções MQ e MO, pelo que respeita ao corpo M; e a outras duas X' e Y' pelas direcções $M'Q'$ e $M'O'$, pelo que respeita ao corpo M'. Entaõ as quatro equações do movimento destes dous corpos seriaõ desta maneira,

$$X\,dt + \frac{P}{z}(x'-x)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$X'\,dt - \frac{M}{M'}\cdot\frac{P}{z}(x'-x)\,dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$Y\,dt + \frac{P}{z}(y'-y)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

Y'

$$Y' dt - \frac{M}{M'} \cdot \frac{P}{z} (y' - y) dt = d \left(\frac{dy'}{dt} \right).$$

Multiplicando pois, como acima, a primeira por M, a ſegunda por M', e ajuntando os productos; e fazendo o meſmo com a terceira, e quarta; teremos por reſultado as duas equaçoens ſeguintes,

$$(MX + M'X') dt = Md \left(\frac{dx}{dt} \right) + M'd \left(\frac{dx'}{dt} \right)$$

$$(MY + M'Y') dt = Md \left(\frac{dy}{dt} \right) + M'd \left(\frac{dy'}{dt} \right).$$

Logo a força acceleratriz do centro de gravidade na direcçaõ de AP' ſerá neſte caſo $\frac{MX + M'X'}{M + M'}$, e a força que accelera o ſeu movimento perpendicular a AP, ou que tende a apartallo deſta linha, ſerá repreſentada por $\frac{MY + M'Y'}{M + M'}$. Donde concluiremos, que o centro de gravidade ſe moverá da meſma maneira, como ſe lhe foſſem immediatamente applicadas as quantidades de movimento, que recebem os dous corpos, em virtude das forças acceleratrizes (n. 155.).

Mas como naõ ſe conhece a relaçaõ entre y' e y, nem entre x' e x, naõ poderá em geral determinar-ſe o movimento do centro de gravidade, ſenaõ no caſo de ſerem as potencias conſtantes. Entaõ deſcreverá huma parabola, e os dous corpos ſe moveráõ ao redor delle, como ſe eſtiveſſe fixo.

359 PROBL. II. *Sendo tres corpos M, M', M'' attrahidos mutuamente na raſaõ directa das maſſas, e na inverſa de qualquer potencia das diſtancias, determinar os ſeus movimentos* (Fig. 150.).

Suppondo que os tres corpos eſtaõ reſpectivamente em M, M', M'', e referindo as trajectorias ao eixo AP, ſeja $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x'$, $P'M' = y'$, $AP'' = x''$, $P''M'' = y''$, $MM' = z$, $M'M'' = z'$, $MM'' = z''$, e o expoente da potencia das diſtancias $= n$. Como pois cada corpo actûa ſobre os outros dous proporcionalmente á ſua maſſa dividida pela potencia n da diſtancia, multiplicaremos eſta quantidade por huma conſtante a, para termos o valor absoluto de cada força acceleratriz. Assim o corpo M attrahirá o corpo M' com huma força $M'N' = \frac{aM}{z^n}$; e o corpo M'', com huma força $M''T'' = \frac{aM}{z''^n}$. Do mesmo modo teremos as forças $MN = \frac{aM'}{z^n}$, e $M''N'' = \frac{aM'}{z'^n}$, com as quais o corpo M' attrahe os corpos M, M''; e finalmente as forças $MT = \frac{aM''}{z''^n}$, e $M'T' = \frac{aM''}{z'^n}$, com as quais o corpo M'' sollicita os outros dous.

Agora resolvendo cada huma destas forças em outras duas, huma parallela, e outra perpendicular a AP, acharemos os valores seguintes, que exprimem separadamente as que sollicitaõ a cada hum dos tres corpos. Temos pois

Para M	Para M'	Para M''
$MN = \frac{aM'}{z^n}$	$M'N' = \frac{aM}{z^n}$	$M''N'' = \frac{aM'}{z'^n}$
$MO = \frac{aM'}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z}$	$M'O' = \frac{aM}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z}$	$M''O'' = \frac{aM'}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'}$
$MQ = \frac{aM'}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z}$	$M'Q' = \frac{aM}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z}$	$M''Q'' = \frac{aM'}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'}$
$MT = \frac{aM''}{z''^n}$	$M'T' = \frac{aM''}{z'^n}$	$M''T'' = \frac{aM}{z''^n}$
$MV = \frac{aM''}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''}$	$M'V' = \frac{aM''}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'}$	$M''V'' = \frac{aM}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''}$
$MS = \frac{aM''}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''}$	$M'S' = \frac{aM''}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'}$	$M''S'' = \frac{aM}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''}$

360 Isto posto, sendo $MQ + MS$ a força do corpo M parallela a AP, teremos $(MQ + MS)\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Do mesmo modo teremos $(MV + MO)\,dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$,

(M'

$(M' S' - M' Q)\,dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$, $(M' V' - M' O')\,dt = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, $(M'' S'' + M'' Q'')\,dt = d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$, e $(M'' V'' + M'' O'')\,dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$. E ſubſtituindo os valores analyticos, teremos as ſeis equaçoens ſeguintes,

$$\frac{aM'dt}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z} + \frac{aM''dt}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''} = d\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\frac{aM''dt}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'} - \frac{aM\,dt}{z^n} \cdot \frac{x'-x}{z} = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'\,dt}{z'^n} \cdot \frac{x''-x'}{z'} + \frac{aM\,dt}{z''^n} \cdot \frac{x''-x}{z''} = -d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z} + \frac{aM''dt}{z''^n} \cdot \frac{y''-y}{z''} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{aM''dt}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'} - \frac{aM\,dt}{z^n} \cdot \frac{y'-y}{z} = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{aM'dt}{z'^n} \cdot \frac{y''-y'}{z'} + \frac{aM\,dt}{z''} \cdot \frac{y''-y}{z''} = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right);$$

361 Se multiplicarmos a primeira por M, a ſegunda por M', e a terceira por $-M''$, e ſomarmos os productos; e ſe tratarmos da meſma maneira as tres ultimas equaçoens, teremos

$$M\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) + M'\,d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + M''\,d\left(\frac{dx''}{dt}\right) = 0$$

$$M\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) + M'\,d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + M''\,d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0;$$

cujos integrais

$$M\frac{dx}{dt} + M'\frac{dx'}{dt} + M''\frac{dx''}{dt} = C$$

$$M\frac{dy}{dt} + M'\frac{dy'}{dt} + M''\frac{dy''}{dt} = C'$$

moſtraõ

mostraõ tambem, que o movimento do centro de gravidade he uniforme, e rectilineo. Logo em geral, *qualquer que seja o numero dos corpos que se attrahem mutuamente, as suas acçoens reciprocas naõ influiráõ nada sobre o movimento do seu centro commum de gravidade, e este centro terá sempre a mesma velocidade e direcçaõ, que tinha no principio do movimento.*

362 Donde se segue, que o centro de massas do systema planetario ou está em quietaçaõ, ou se move uniformemente, e em linha recta. Pouco importa saber, qual destes dous casos he o que tem lugar no estado actual das cousas. Os movimentos relativos seraõ os mesmos em qualquer delles.

Devem pois todos os planetas, e o mesmo Sol, fazer as suas revoluçoens ao redor deste centro. Mas a massa do Sol he taõ grande em comparaçaõ da que tem os planetas, que quando todos elles se achassem em conjunçaõ, o centro de massas de todo o systema naõ estaria distante do centro do Sol mais do que hum diametro deste astro. He pois o movimento do Sol, ao redor do centro do mundo planetario, bem pouca cousa; mas sem embargo, he necessario que delle se faça conta nas indagaçoens mais delicadas.

363 Se multiplicarmos a primeira das seis equaçoens geraes acima achadas por $M\frac{dx}{dt}$, a segunda por $M'\frac{dx'}{dt}$, e a terceira por $-M''\frac{dx''}{dt}$, e ajuntarmos os productos, a soma dará

$$-\frac{aMM'}{z^{n+1}}(x'-x)(dx'-dx)-\frac{aMM''}{z''^{n+1}}(x''-x)(dx''-dx)-\frac{aM'M''}{z'^{n+1}}(x''-x')(dx''-dx')=$$
$$M\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)+M'\frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right)+M''\frac{dx''}{dt}d\left(\frac{dx''}{dt}\right);$$

e se fizermos as mesmas operaçoens nas tres ultimas equaçoens, o resultado nos dará tambem

$$-\frac{aMM'}{z^{n+1}}(y'-y)(dy'-dy)-\frac{aMM''}{z''^{n+1}}(y''-y)(dy''-dy)$$

$$-dy) - \frac{a M' M''}{z'^{n+1}} (y'' - y') (dy'' - dy') =$$

$$M \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) + M' \frac{dy'}{dt} d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + M'' \frac{dy''}{dt} d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Ajuntemos estas duas equaçoens. E para abbreviar o calculo, reparemos primeiro que sendo u, u', u'' as velocidades dos corpos M, M' M'', teremos $u\,du = \frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $u'\,du' = \frac{dx'}{dt} d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{dy'}{dt} d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, e $u''\,du'' = \frac{dx''}{dt} d\left(\frac{dx''}{dt}\right) + \frac{dy''}{dt} d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$. Notemos tambem, que $zz = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$, $z''z'' = (x''-x)^2 + (y''-y)^2$, e $z'z' = (x''-x')^2 + (y''-y')^2$; e por conseguinte, $z\,dz = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy)$, $z''dz'' = (x''-x)(dx''-dx) + (y''-y)(dy''-dy)$, e $z'dz' = (x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy')$. Isto posto, acharemos que a soma das nossas duas equações se reduz á equaçaõ seguinte

$$M u\,du + M' u'\,du' + M'' u''\,du'' = -\frac{a M M' dz}{z^n} - \frac{a M M'' dz''}{z''^n} - \frac{a M' M'' dz'}{z'^n},$$

cujo integral

$$M u^2 + M' u'^2 + M'' u''^2 + \frac{2 a M M' z^{1-n}}{1-n} + \frac{2 a M M'' z''^{1-n}}{1-n} + \frac{2 a M' M'' z'^{1-n}}{1-n} = C$$

contém o principio da *Conservaçaõ das forças vivas*, de que os Geometras modernos fazem grande uso. Veja-se a Dynamica de *M*. d'Alembert.

O integral, que acabamos de achar, e os outros dous que daõ o movimento do centro de gravidade, saõ os tres unicos que se tem podido deduzir geralmente das seis equações do Problema. Seria necessario, que os limites

mites do calculo integral estivessem mais adiantados do que estaõ, para elle se poder resolver completamente; mas ao menos está apontado o caminho.

Este Problema tem-se feito muito famoso neste seculo pelos trabalhos dos Geometras, que se occupáraõ na soluçaõ delle. He geralmente conhecido pelo nome de *Problema dos tres corpos*; e como delle depende a Theorica da Lua, espera-se que novos esforços produziráõ novos descobrimentos sobre este objecto.

364 Para se applicarem as equações precedentes ao movimento da Lua, da Terra, e do Sol, seria necessario pôr $n = 2$, porque a força central he na rasaõ inversa dos quadrados das distancias. Tambem seria necessario introduzir no calculo outras tres equações, porque as primeiras naõ pódem dar com exactidaõ o movimento da Lua; e a rasaõ he, porque a sua orbita naõ está no plano da ecliptica, mas tem com ella huma inclinaçaõ de perto de 5 gráos, e todas as vezes que o movimento se faz assim em planos differentes ha tres equações de mais pelas tres novas coordenadas que se devem introduzir. Mas o gráo de difficuldade pelo que respeita ás integrações, he o mesmo; somente o calculo se faz mais comprido.

365 Ha com tudo hum caso, em que póde determinar-se exactamente o movimento de muitos corpos, que se attrahem mutuamente; e he quando se suppozerem as forças proporcionais ás distancias. Porque entaõ descreveráõ trajectorias ellipticas ao redor do centro commum de gravidade, em quanto este centro se move uniformemente, e em linha recta. Eisaqui como isto se póde mostrar, sem recorrer ao calculo antecedente.

Sejaõ M, M', M'' os tres corpos (Fig. 151.), cujo movimento se ha de determinar. Para saber, qual deve ser o do corpo M, por exemplo, attrahido pelos outros dous M', M'', representemos primeiramente por $MN = aM'.M'M$ a acçaõ do corpo M', e por $MN' = aM''.M''M$ a do corpo M''. Depois, imaginando huma linha recta qualquer $m'Mm''$, e huma perpendicular a ella MQ, resolveremos cada huma das forças MN, MN' em outras duas pelas direcções Mm', MQ. Assim teremos $MO = aM'.Mm'$, $MO' = aM''.Mm''$, $MP = aM'.M'm'$, $MP' = aM''.M''m''$; e sendo a

 resul-

resultante representada por MS, teremos $MT = aM'.Mm' - aM''.Mm''$, e $MQ = aM''.M''m'' + aM'.M'm'$.

Porém, sendo o centro de gravidade em G, temos $Mg = \frac{M'.Mm' - M''.Mm''}{M + M' + M''}$, e $Gg = \frac{M''.M''m'' + M'.M'm'}{M + M' + M''}$.

Logo $\frac{Gg}{Mg} = \frac{ST}{TM}$; e conseguintemente está o ponto G na direcçaõ da resultante MS. Donde se vê, que as acções dos deus corpos M', M'' sollicitaõ o corpo M para o centro de gravidade G com a força $MS = \frac{MG.MT}{Mg} = a(M + M' + M'')MG$. Mover-se-haõ pois os tres corpos, como se naõ tendo força alguma de atracçaõ entre si, fossem attrahidos para o centro commum de gravidade, na rasaõ das suas distancias ao dito centro, por huma massa central igual á soma de todos tres. Logo descreveráõ ellipses ao redor deste centro, e os seus tempos periodicos seraõ iguaes; o que tem lugar geralmente, qualquer que seja o numero dos corpos.

366 O mesmo resultado se póde deduzir das equações geraes (Fig. 152.). Porque tomando por linha dos x o caminho do centro de gravidade G, e supponde a velocidade delle $= k$, a abscissa $GP = X = kt - x$, teremos $M'(x' - x) + M''(x'' - x) = M'.PP' + M''.PP'' = (M + M' + M'')X$, $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$, e $M'(y' - y) + M''(y'' - y) = -(M + M' + M'')y$; Logo a primeira, e quarta equaçaõ daraõ para o movimento do corpo M as duas equações seguintes

$$a(M + M' + M'')X\,dt = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

$$a(M + M' + M'')y\,dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Porém estas equações saõ as mesmas, que achariamos se o corpo fosse attrahido para o ponto G, na rasaõ directa das distancias, pela massa $M + M' + M''$. Logo está demonstrado, que no caso de muitos corpos se attrahirem na rasaõ directa das suas distancias, todos descreveráõ orbitas ellipticas ao redor do centro commum de gravi-

gravidade, movendo-se este uniformemente por huma trajectoria rectilinea.

ARTIGO II.

Do movimento de hum ponto livre, sollicitado por quaisquer potencias, em hum meio resistente.

567 SEndo a inercia huma propriedade geral da materia, naõ póde hum corpo dar movimento a outro, sem lhe communicar huma parte do seu. E como esta communicaçaõ se naõ faz jámais, sem haver huma perda real da parte do movel, está claro, que experimentando elle perdas reiteradas a cada instante, bem de pressa se ha de extinguir toda a sua velocidade.

Isto he o que vemos succeder continuamente a todos os moveis, que nos rodeiaõ. Porque o fluido, no qual se movem, naõ póde ceder á impressaõ delles, nem sahir do seu lugar para lhes abrir passagem, sem receber hum movimento que o obrigue a isso. Este fluido, unicamente pela sua inercia, resiste pois á impulsaõ dos moveis, com tanta efficacia, como se tivesse hum movimento opposto ao delles, e igual á sua propria inercia: e dahi vem, que quanto he maior a densidade do fluido, tanto maior he a resistencia.

Sejá A huma superficie plana exposta á impulsaõ directa de hum fluido, ou movida ella mesma pelo fluido, por huma direcçaõ perpendicular, e com huma velocidade $= u$. No instante dt deverá pois correr o espaço $= u\,dt$, e conseguintemente terá deslocado hum volume de fluido $= A u\,dt$. Seja a densidade do fluido $= D$; e teremos $A D u\,dt$ por expressaõ da massa, que tem sido posta em movimento, no instante dt.

Quando esta massa tiver recebido da superficie movel a velocidade u, a sua quantidade de movimento será $A D u^2 dt$; e como este effeito da impulsaõ produz no fluido huma resistencia igual ao movimento recebido, teremos $M\,du = A D u^2\,dt$, chamando M a massa do corpo que

que expõem a ſuperficie A á percuſſaõ directa do fluido, e entendendo por du a diminuiçaõ inſtantanea da velocidade, cauſada pela reſiſtencia do fluido.

368 Logo póde a reſiſtencia de qualquer fluido conſiderar-ſe, como huma força retardatriz $\frac{A\,D\,u^2}{M}$, ſempre oppoſta directamente á impulſaõ do movel; e eſta força, como ſe vê, he em raſaõ composta da ſuperficie do movel, da denſidade do fluido, e do quadrado da velocidade. De ſorte que, ſendo todas as mais couſas iguais, *hum corpo movido no meſmo fluido experimenta huma reſiſtencia proporcional ao quadrado da velocidade.*

Tal he, em geral, a medida da reſiſtencia, que a inercia dos fluidos oppoem ao movimento de qualquer corpo. Mas eſta cauſa ſerá por ventura a unica, que retarda o movimento dos corpos? parece que naõ. A experiencia moſtra, que a adheſaõ reciproca das partes dos fluidos produz outra eſpecie de reſiſtencia, á qual ſe deve attender. Mas como eſta tenacidade, mais ou menos forte conforme a diverſa natureza dos fluidos, he ſenſivelmente a meſma em inſtantes iguais, quando a reſiſtencia que provem da inercia he proporcional ao quadrado da velocidade, o effeito da primeira he pouco notavel nos movimentos muito rapidos. O contrario ſuccede nos movimentos vagaroſos, e entaõ naõ ſe póde deixar de attender ao referido effeito.

369 Se a ſuperficie A naõ receber directamente a corrente do fluido, reſolver-ſe-ha a velocidade obliqua u em outras duas, que ſeraõ repreſentadas por $u \cos a$, e $u \operatorname{sen} a$, chamando a o angulo formado pela ſuperficie, e pela corrente do fluido. A primeira ſerá pela direcçaõ da ſuperficie, e naõ produzirá reſiſtencia alguma; a ſegunda ſerá perpendicular á meſma ſuperficie, e della reſultará toda a reſiſtencia. Pelo que ſubſtituindo $u \operatorname{sen} a$ em lugar de u na formula $D\,A\,u^2$, teremos $D\,A \cdot u^2 \operatorname{sen} a^2$ por expreſſaõ da reſiſtencia no caſo da percuſſaõ obliqua. Mas he neceſſario ter ſempre na lembrança, que eſta força ſe exercita perpendicularmente á ſuperficie movel A. Donde ſe ſegue, que *ſendo todas as mais couſas iguais, a reſiſtencia de hum meſmo fluido contra huma ſuperficie plana, e obliqua he proporcional ao quadrado do ſeno do angulo de incidencia.*

370 Neſte

370 Neſte ultimo caſo, he evidente que A ſen a^2 exprime a ſuperficie, que, ſendo expoſta ao impulſo directo do fluido, experimentaria a meſma reſiſtencia, que experimenta a ſuperficie A movida obliquamente. Donde ſe vê geralmente, que para determinar a reſiſtencia que hum fluido deve oppôr ao movimento de qualquer ſuperficie, baſta conhecer a ſuperficie plana, que por hum impulſo directo experimentaria a meſma reſiſtencia. Tambem advertiremos, que para naõ embaraçar inutilmente o calculo com o factor $D u^2$, nos exemplos ſeguintes conſideraremos eſtas ſuperficies directamente expoſtas ao fluido, como as medidas naturais da reſiſtencia, que elle produz.

371 Supponhamos pois hum priſma movido em qualquer fluido parallelamente ás ſuas baſes (Fig. 153.). Baſtará conſiderar huma ſecçaõ $AMHBK$, e multiplicar a reſiſtencia linear, que ella padece, pelo comprimento do ſolido, para determinar a ſuperficie, que ſendo expoſta ao impulſo directo experimentaria a meſma reſiſtencia que o ſolido.

Seja pois BA a direcçaõ do movimento, Mm o elemento da curva, e MV huma recta parallela a BA; ſerá mMr o angulo de incidencia do fluido ſobre Mm, e teremos $Mm\,.\,\text{ſen}\; mMV^2$ por expreſſaõ da reſiſtencia, que eſte elemento experimenta ſegundo a perpendicular MN. Iſto poſto, reportemos os pontos da curva ao eixo AB, e ſupponhamos $AP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$. Será $Mm\,.$ $\text{ſen}\; mMV^2 = ds\,.\,\dfrac{dy^2}{ds^2}$; e reſolvendo eſta força em outras duas NO e OM, huma parallela, e a outra perpendicular ao eixo AP, teremos por meio dos triangulos ſemelhantes NOM, Mmr, a força $NO = dy\,.\,\dfrac{dy^2}{ds^2}$, e $MO =$ $dx\,.\,\dfrac{dy^2}{ds^2}$. Logo a força total pela direcçaõ do eixo AB ſerá repreſentada por $\int \dfrac{dy^3}{ds^2}$; e a força perpendicular ao meſmo eixo, por $\int \dfrac{dx\,dy^2}{ds^2}$:

372 Eſtes integrais devem tomar-ſe em toda a parte

H M K terminada nos pontos *H* e K, que saõ os mais distantes do eixo *A B*; porque a outra parte *H B* K naõ padece resistencia alguma da parte do fluido. Se a curva for symmetrica de ambas as partes do eixo *A B*, a força perpendicular ao mesmo eixo será destruida, e sómente restará a força parallela $\int \frac{dy^3}{ds^2}$, que será o dobro da que se exercita em huma das partes *A H*.

373 Para determinar pois a direcçaõ, e o valor de toda a força que resulta da acçaõ, ou reacçaõ do fluido sobre todas as partes da secçaõ proposta, tomaremos a soma dos momentos das forças *M F* em ordem ao eixo *A P*, e dividindo-a pela soma das forças, teremos a distancia *G E* da sua resultante ao eixo. Do mesmo modo, tomando a soma dos momentos das forças *O M* em ordem ao ponto *A*, e dividindo-a pela soma das mesmas forças, teremos a distancia *A E* da sua resultante ao dito ponto. Será pois

$$AE = \frac{\int x\,dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}{\int dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}},\ \text{e}\ GE = \frac{\int y\,dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}{\int dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}}.$$

Depois que assim for determinado o ponto *G*, tomaremos $GI = \int dx \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$, e $GL = \int dy \,.\, \frac{dy^2}{ds^2}$; e acabando o rectangulo, a diagonal *G T* dará o valor, e a direcçaõ da resistencia total que padece a secçaõ *H M*K.

374 Exemplo. Sendo a secçaõ do solido proposto hum circulo, cujo diametro $AB = 2a$ (Fig. 153. *), pergunta-se qual deve ser a resistencia total do fluido parallelamente a *A B*?

Neste caso, $yy = 2ax - xx$, $ds^2 = \frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2}$, e $\int dy \frac{dy^2}{ds^2} = \int \left(dy - \frac{y^2 dy}{a^2} \right) = y - \frac{y^3}{3a^2}$. Tomando este integral de *A* até *H*, teremos $\frac{2}{3}a$, cujo dobro $\frac{4}{3}a$ expri-

exprime a resistencia que experimenta o semicirculo HAK na direcçaõ do eixo AB; e a resistencia total se reduz a esta só, porque a outra he nenhuma. Acharemos pois a superficie, que sendo exposta ao impulso directo do fluido experimentaria a mesma resistencia que a superficie convexa de hum cylindro, tomando os dous terços da sua secçaõ rectangular que passa pelo eixo. E porque $\frac{4}{3}a$ exprime a resistencia, que o fluido oppoem ao semicirculo HAK, e $2a$ a que o diametro HK padeceria da parte do mesmo fluido, concluiremos que a primeira naõ he mais que dous terços da segunda.

375 Consideremos agora a resistencia, que deve experimentar hum solido de revoluçaõ, movido pela direcçaõ do seu eixo (Fig. 154.). Seja Mm hum elemento da curva, o qual pela revoluçaõ descreve huma pyramide conica truncada, da qual se tomará a parte comprehendida entre dous apothemas infinitamente vesinhos. Esta parte, que chamaremos ω, sendo plana, experimentará huma resistencia $= \omega \cdot \frac{dy^2}{ds^2}$, porque $\frac{dy}{ds}$ he o seno da incidencia.

Como esta resistencia se exercita perpendicularmente ao elemento ω, resolver-se-ha em outras duas, huma parallela, e a outra perpendicular ao eixo. A primeira terá por valor $\omega \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy^2}{ds^2}$; e porque o angulo de incidencia he o mesmo em todos os elementos ω, e a soma destes elementos, ou a superficie da pyramide conica truncada he $2cyds$, teremos $\frac{2cydy^3}{ds^2}$ por expressaõ da resistencia opposta a esta superficie; e conseguintemente, será $2c\int\frac{ydy^3}{ds^2}$ a resistencia, que deve experimentar o solido inteiro na direcçaõ do eixo.

Exemplo. Se o solido for huma esfera, cujo vertice seja A (Fig. 153.*), teremos $yy = 2ax - xx$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{a^2-y^2}$, $\frac{ydy^3}{ds^2} = ydy - \frac{y^3dy}{aa}$. O integral

tegral he $\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4a^2}$; que tomando $y = a$ ſe reduz a $\frac{1}{4}a^2$. Logo a reſiſtencia da esfera inteira ſerá $2c \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{ca^2}{2}$. Donde ſe moſtra, que *a esfera experimenta ametade da reſiſtencia, que experimentaria hum dos ſeus circulos maximos.*

376 Para conhecer a curvatura, que deve tomar no equilibrio huma corda, ou huma vela preza a dous pontos fixos, e eſtendida pela força do vento (Fig. 155.), notaremos 1°, que a acçaõ deſte fluido ſobre o elemento Mm he proporcional ao meſmo elemento, e ao quadrado do ſeno de incidencia. 2°, que ſendo a direcçaõ do vento parallela ás ordenadas PM, eſta acçaõ deve ſer repreſentada por $aMm \cdot \text{ſen}\, PMm^2 = ads \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$.

Iſto poſto, a equaçaõ geral de huma corda atada a dous pontos fixos, e ſollicitada por duas quaiſquer potencias X, e Y he (n. 181.)

$$d\left(\frac{(Ydx + Xdy)r}{ds^2}\right) + \frac{Ydy - Xdx}{ds} = 0$$

Ora $\frac{Ydx + Xdy}{ds}$ repreſenta a força normal, que reſulta de todas as potencias, e que no caſo preſente he $= \frac{ads\,dx^2}{ds^2}$, e $\frac{Ydy - Xdx}{dx}$ repreſenta a força tangencial, que neſte caſo he nulla. Logo a equaçaõ da curva procurada he $d\left(\frac{ardx^2}{ds^2}\right) = 0$, cujo integral ſe acha $\frac{ardx^2}{ds^2} = ab$. E ſubſtituindo o valor do raio oſculador $r = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$, teremos $\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{dx^2}{ds^2}} = \frac{dy}{b}$; e integrando, $C - y = \frac{bds}{dx}$; equaçaõ que he preciſamente a de huma corda