corda estendida pelo seu proprio pezo. Assim concluiremos, que a curvatura, que o vento faz tomar a huma corda, ou a huma vela, he a mesma que ella tomaria em virtude da sua gravidade, com a differença sómente que o eixo em lugar de ser vertical estará situado segundo a direcçaõ da corrente do fluido.

Estas primeiras noções sobre a resistencia dos fluidos eraõ necessarias para facilitar a medida dos effeitos, que resultaõ no movimento dos corpos. Mas para a facilitar ainda mais, consideraõ-se os corpos simplesmente como pontos, e a resistencia do meio como huma força tangencial, sempre opposta á direcçaõ do movimento.

377 Como todos oo fluidos conhecidos resistem aos moveis na rasaõ do quadrado da sua velocidade u, seja b a velocidade com a qual elles experimentariaõ huma resistencia igual á força da gravidade g; e teremos $\frac{g u^2}{b^2}$ por expressaõ geral, e medida absoluta da resistencia. A quantidade b dependerá evidentemente da densidade do fluido; e por isso naõ será constante, se naõ no caso de o ser tambem a densidade do meio resistente.

A densidade do ar, por exemplo, diminue sensivelmente á medida que nos elevamos na atmosfera, subindo ás mais altas cordilheiras. A da agua diminue da mesma maneira, á proporçaõ que se chega para a sua superficie; porque ninguem ignora, quanto saõ densas as aguas do mar em grandes profundidades. Deve pois entaõ ser variavel a quantidade b, e o coefficiente $\frac{g}{b^2}$ que se chama *expoente da resistencia* deve a cada instante depender da posiçaõ actual do movel.

378 Se por maior generalidade se suppoem a resistencia do meio proporcional á potencia m da velocidade u, ou, que vem a ser o mesmo, igual á expressaõ $\frac{g u^m}{b^m}$, naõ he porque se achem na natureza exemplos desta variedade. O unico caso, que ella parece offerecernos he o de $m = 2$; os outros naõ saõ mais do que hypotheses puramente Mathematicas, das quais se faz mençaõ em ordem ás consequencias notaveis, que dellas resultaõ algumas vezes.

379 Seja

379 Seja pois hum corpo movido por huma linha recta em virtude de huma impulsaõ primitiva. Está claro, que a resistencia do meio póde sim alterar-lhe a velocidade, mas naõ a direcçaõ. Seja x o espaço corrido no tempo t, desde o principio do movimento, e supondo a resistencia do meio proporcional ao quadrado da velocidade u, teremos $\frac{g u^2}{b^2}$ por expressaõ da força retardatriz. Logo, sendo uniforme a densidade do fluido, teremos $du = -\frac{gu^2 dt}{bb}$, do de se tira $-\frac{du}{uu} = \frac{g dt}{bb}$, e $-\frac{du}{u} = \frac{g u dt}{bb} = \frac{g dx}{bb}$.

Os integrais destas duas equações saõ $\frac{gt}{bb} = \frac{1}{u} + C$, e $lu = C' - \frac{gx}{bb}$. Seja V a velocidade inicial; entaõ $t = 0$, $x = 0$, e $C' = lV$, $C = -\frac{1}{V}$; logo $\frac{gt}{bb} = \frac{1}{u} - \frac{1}{V}$, e $l\frac{V}{u} = \frac{gx}{bb}$. Teremos pois no fim de qualquer tempo t a velocidade $u = \frac{bb}{gt + \frac{bb}{V}}$, e o espaço corrido $x = \frac{bb}{g} l \left(1 + \frac{gtV}{bb}\right)$.

Do mesmo modo, tendo o movel corrido o espaço x, acharemos a sua velocidade $u = V e^{-gx:bb}$, e o tempo $t = \frac{bb}{gV}\left(e^{gx:bb} - 1\right)$. Será pois inteiramente determinado o movimento do corpo; e bem se vê, que a pezar da resistencia do meio, continuará a mover-se sem jámais parar.

380 Supponhamos em geral a resistencia $= \frac{g u^m}{b^m}$, e a densidade constante. Será $du = -\frac{g u^m}{b^m} dt$; e substituindo

indo $\frac{dx}{u}$ em lugar de dt, acharemos que $du = -\frac{gu^{m-1}}{b^m}dx$. Seraõ pois as equaçoens do movimento $u^{-m}du = -\frac{gdt}{b^m}$, e $u^{1-m}du = -\frac{gdx}{b^m}$, cujos integrais tomados de maneira que x e t se desvaneçaõ, quando $u = V$, seraõ $\frac{V^{1-m} - u^{1-m}}{1-m} = \frac{gt}{b^m}$, e $\frac{V^{2-m} - u^{2-m}}{2-m} = \frac{gx}{b^m}$.

Por estas equações póde determinar-se o espaço corrido, e a velocidade do movel, no fim de qualquer tempo t. Se m for menor que 2, a equaçaõ $\frac{V^{2-m} - u^{2-m}}{2-m} = \frac{gx}{b^m}$ mostra que a velocidade u será nenhuma, ou que o movimento cessará, assim que o movel tiver corrido hum espaço $x = \frac{b^m}{g} \cdot \frac{V^{2-m}}{2-m}$; mas se m for igual, ou maior que 2, este espaço será infinito; e assim deverá o movimento durar perpetuamente.

381 Busquemos agora qual deve ser o movimento de hum corpo grave, que desce desde o descanço em linha recta por hum meio uniformemente denso, que resiste na rasaõ directa do quadrado da velocidade.

Tendo entaõ por força acceleratriz do corpo a gravidade g, e por força retardatriz a quantidade $\frac{gu^2}{bb}$, será $du = \left(g - \frac{gu^2}{bb}\right)dt$, que pela substituiçaõ de $\frac{dx}{u}$ em lugar de dt, dará $udu = \left(g - \frac{gu^2}{bb}\right)dx$; donde se tira facilmente $gdt = \frac{bbdu}{bb-uu}$, e $gdx = \frac{b^2udu}{bb-uu}$. Integrando

grando estas duas equações de maneira que u, x, e t se desvaneção ao mesmo tempo, teremos $g\,t = \frac{b}{2}\,l\,\frac{b+u}{b-u}$, e $2\,g\,x = b^2\,l\,\frac{b^2}{bb-uu}$. Assim acharemos que a hum espaço x compete huma velocidade $u = b\sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}$, e hum tempo $t = \frac{b}{g}\,l\left(e^{\frac{gx}{bb}} + \sqrt{(e^{\frac{2gx}{bb}} - 1)}\right)$.

Tais saõ as formulas, de que devemos servirnos para determinar o movimento dos corpos graves, quando quizermos attender á resistencia do ar.

382 Se o grave for lançado de baixo para cima com huma velocidade V, entaõ concorre a gravidade com a resistencia do fluido a retardar o movimento. Será pois $du = -\left(g + \frac{g\,u^2}{bb}\right)dt$, e $u\,du = -\left(g + \frac{g\,u^2}{bb}\right)dx$; e separando, acharemos $g\,dx = \frac{-b^2\,u\,du}{bb+uu}$, e $g\,dt = \frac{-b^2\,du}{bb+uu}$, que integrando-se daraõ $2\,g\,x = b^2\,l\,\frac{b^2+V^2}{b^2+u^2}$, e $\frac{g\,t}{b} = \text{Arc tang}\,\frac{V}{b} - \text{Arc tang}\,\frac{u}{b}$, ou $\text{tang}\,\frac{g\,t}{b} = \frac{bV-bu}{bb+uV}$. Estas equações daõ no fim do espaço x a velocidade $u = \sqrt{\left(e^{\frac{-2gx}{bb}}(bb+VV) - bb\right)}$, e o tempo $t = \frac{b}{g}\,\text{Arc tang}\,\frac{V}{b}$

$$- \frac{b}{g}\,\text{Arc tang}\,\sqrt{\left(e^{\frac{-2gx}{bb}}\left(1 + \frac{VV}{bb}\right) - 1\right)}.$$

383 Suppondo $u = 0$, o grave acabará de subir, e a altura a que terá chegado será neste caso representada por

bb

$\frac{bb}{2g} l \left(1 + \frac{VV}{bb}\right)$. Por exemplo : se a velocidade de projecçaõ V for igual a b, a altura a que ha de chegar o grave será para a altura a que chegaria no vacuo, como o logarithmo de 2 para a unidade, ou proximamente como 61 para 88 ; e o tempo que gastará para chegar a esta altura será para o que gastaria no vacuo como 3,141 &c para 4.

Applicaçaõ da theorica precedente á experiencia.

384 EM consequencia da theorica, que acima havemos exposto (n. 368.), parece que deveria concluir-se, que a resistencia de hum fluido a huma superficie plana A, que lhe he presentada directamente, tem por medida absoluta $\frac{A D u^2}{M}$, sendo M a massa do movel, u a velocidade, e D a densidade do fluido. Mas este resultado naõ he conforme á verdade, senaõ em quanto mostra, que a resistencia he proporcional ao quadrado da velocidade. Para ter o valor absoluto della, seria necessario conhecer a natureza dos fluidos muito melhor do que até agora se conhece.

385 Newton, tomando a experiencia por guia nesta indagaçaõ, concluio dos seus diversos resultados, que os fluidos resistem sómente a ametade do que indica a formula precedente. Se a demonstraçaõ, que elle dá (*Princip. Math. Lib.* II. *Sect.* VII.), naõ parece bastantemente directa, ao menos naõ póde negar-se a conformidade da conclusaõ com as suas experiencias. Por essa rasaõ julgamos, que devemos encostarnos á sua determinaçaõ, em quanto a Physica naõ der maiores luzes sobre esta materia. He verdade, que por novas experiencias feitas com muito cuidado parece, que a resistencia dos fluidos naõ segue exactamente a rasaõ da sua densidade, nem a das superficies que encontraõ. Mas isso naõ faz, que a medida da resistencia, tal como Newton a determinou, deixe de se verificar de hum modo muito sufficiente, nas applicações que havemos de fazer.

Estas

Eſtas applicações ſaõ todas relativas á cahida dos corpos graves; e como as experiencias, que havemos de referir, foraõ feitas com corpos esfericos, ſerá conveniente que primeiro calculemos a reſiſtencia que deve experimentar qualquer globo em hum fluido.

386 Seja pois o diametro do globo $= a$, e a ſua denſidade $= D'$; ſerá o volume delle $= \frac{1}{6} a^3 c$, a ſua maſſa $= \frac{1}{6} a^3 c \cdot D'$, e a ſuperficie de hum circulo maximo $= \frac{1}{4} a^2 c$; e conſeguintemente a ſuperficie plana A que experimentaria huma reſiſtencia igual á do globo ſerá $= \frac{1}{8} a^2 c$ (n. 370.). Subſtituindo eſtes valores na formula da reſiſtencia, teremos $\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{8} a^2 c \,.\, D \,.\, u^2}{\frac{1}{6} a^3 c D'}$, ou $\frac{3}{8} \cdot \frac{D}{D'} \cdot \frac{u^2}{a}$.

Como tinhamos repreſentado o valor deſta formula por $\frac{g u^2}{b b}$, podemos concluir que $\frac{g}{b b} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{D'}$; donde ſe tira $\frac{b b}{g} = \frac{8}{3} a \cdot \frac{D'}{D}$. Será pois neceſſario conhecer a razaõ que tem a denſidade do globo com a do fluido, o que naõ ſerá difficultoſo, comparando o pezo do primeiro com o de hum volume igual do ſegundo.

387 Além diſto, naõ deve entender-ſe aqui por g a força da gravidade, ou a velocidade 30,196 que ella communica aos corpos graves em hum ſegundo. Porque perdendo todo o corpo mergulhado em hum fluido huma parte do ſeu pezo, igual ao pezo do volume do fluido, cujo lugar occupa, e ſendo eſta parte $= \frac{D}{D'}$, eſtá claro que neſte caſo deve tomar-ſe $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30{,}196$.

388 Temos achado acima, que cahindo hum corpo deſde o deſcanço por hum meio uniformemente reſiſten-

te, deve correr o espaço x no tempo

$$t = \frac{b}{2g}\, l \left(\frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}} \right). \text{ Logo } e^{\frac{2gt}{b}} =$$

$$\frac{1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}{1 - \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})}}, \text{ donde vem } \sqrt{(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}})} =$$

$$\frac{e^{\frac{2gt}{b}} - 1}{e^{\frac{2gt}{b}} + 1},\ 1 - e^{\frac{-2gx}{bb}} = \frac{(e^{\frac{2gt}{b}} - 1)^2}{(e^{\frac{2gt}{b}} + 1)^2};$$

$$e^{\frac{-2gx}{bb}} = \frac{4 e^{\frac{2gt}{b}}}{(e^{\frac{2gt}{b}} + 1)^2},\ e^{\frac{gx}{bb}} = \frac{e^{\frac{2gt}{b}} + 1}{2e^{\frac{gt}{b}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{gt}{b}} + e^{\frac{-gt}{b}}}{2}; \text{ logo } x = \frac{bb}{g}\, l \left(\frac{e^{\frac{gt}{b}} + e^{\frac{-gt}{b}}}{2} \right).$$

Este he o valor do espaço corrido no fim do tempo t.

389 Como nos differentes casos, que havemos de examinar, he sempre o tempo de alguns segundos, a quantidade $e^{\frac{gt}{b}}$ deve ser hum numero assaz consideravel; e por isso, sem receio de erro algum attendivel, podemos desprezar o termo $e^{\frac{-gt}{b}}$. Assim teremos $x = \frac{bb}{g}\, l\, \frac{1}{2}\, e^{\frac{gt}{b}}$ $= \frac{bb}{g}\left(\frac{gt}{b} - l2\right) = bt - \frac{bb}{g} \cdot 0{,}6931472$. Este resultado nos mostra já, que o movimento virá a ser uniforme em passando alguns segundos.

A quantidade b he a maior velocidade, que o grave póde adquirir na cahida, como se collige evidentemente da da equaçaõ $u = b\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-2gx}{bb}}\right)}$. E ainda que em rigor naõ possa adquirilla, senaõ em hum tempo infinito, com tudo he tal a convergencia com que se chega para ella, que passados alguns segundos será a diferença absolutamente insensivel. Isto posto, eisaqui algumas experiencias feitas por Newton, e referidas na Secçaõ VII. Prop. XL dos seus Principios.

390 Exper. I. Hum globo, que no ar pezava $156\frac{1}{4}$ grãos (libra Romana), e na agua 77, cahio em 4 segundos de tempo de huma altura de 112 pollegadas de Londres, em hum vaso cheio de agua da chuva.

Comecemos pela reducçaõ destas medidas ás de Paris. O pé de Londres he para o de Paris, como 811 para 864; e assim a altura, de que o globo cahio, era de 105,13 pollegadas do pé de Paris. A libra Romana contém 6638 grãos da libra de Paris; e por conseguinte a onça da libra Romana, que he a duodecima parte della, contém $553\frac{1}{6}$ dos nossos grãos, e o graõ da libra Romana, que he a 480^ma^ parte da onça, vale o mesmo que 1,15243 dos nossos.

Feita toda a reducçaõ, acharemos pois que o pezo do globo no ar era de 180,07 grãos, e na agua de 88,74. A differença destes dous pezos, ou 91,33 grãos, exprime o pezo de hum volume de agua igual ao do globo; e como a densidade do ar he a 850^ma^ parte da densidade da agua, concluiremos que hum volume semelhante de ar tem de pezo $\frac{91,33}{850}$, ou 0,11 grãos. Logo o pezo do globo no vacuo será de 180,18 grãos, e o de hum volume igual de agua 91,44 grãos: logo $\frac{D'}{D} = \frac{18018}{9144}$.

391 Agora poderemos determinar o diametro do globo de huma maneira muito mais exacta, do que se podia conseguir pelo methodo directo. Porque, sendo o diametro avaliado em pés, será a solidez do globo $\frac{1}{6}a^3 c$ pés cubicos: ora hum volume igual de agua peza 91,44 grãos, e sabe-

sabemos por outra parte que hum pé cubico de agua da chuva peza 70 libras, ou 70 . 9216 grãos; logo teremos $\frac{1}{6}a^3 c . 70 . 9216 = 91,44$, ou $a^3 c . 1344 = 1,143$; donde se tira $a^3 = \frac{1,143}{c . 1344}$, que posto em calculo por logarithmos dará

c - - - - - - - - - - -	$CL . 9,5028501$
1344 - - - - - - -	$CL . 6,8716007$
$1,143$ - - - - - - -	$L . 0,0580462$
$l . a^3$ - - - -	$6,4324970$
$l a$ - - - - -	$8,8108323.$

Assim acharemos o valor de a, que he de 0,06469 pés. Resta calcular o valor de $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a . \frac{D'}{D} = \frac{6006}{1143} a$.

1143 - - - - - - - -	$CL . 6,9419538$
a - - - - - - - - - - -	$L . 8,8108323$
6006 - - - - - - - -	$L . 3,7785853$
$l \frac{bb}{g}$ - - - - - - - - -	$9,5313714.$

Porém temos $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{8874}{18018} . 30,196$; logo

18018 - - - - - - - - - - -	$CL . 5,7442934$
8874 - - - - - - - - - - - -	$L . 3,9481194$
$30,196$ - - - - - - - - - - -	$L . 1,4799494$
Lg - - - - - - - - - - -	$1,1723622.$

Achado o logarithmo de g, como já temos calculado o de $\frac{bb}{g}$, a soma de ambos nos dará $l b^2 = 0,7037336$, e conseguintemente $l b = 0,3518668$. Isto posto, como o espaço corrido $x = bt - \frac{bb}{g} . 0,6931472$, e como neste

 caso

caso $t = 4''$, a continuação do calculo dará

$L\,b$ - - -	0, 3518668	$L\,\frac{bb}{g}$ - - -	9, 5313714
$L\,t$ - - -	0, 6020600	L 0,69 &c -	9, 8408254
	0, 9539268		9, 3721968.

O primeiro destes logarithmos corresponde a 8, 9935 pés, e o segundo a 0, 2356. Logo o espaço corrido pelo globo em $4''$ será de 8, 7579 pés, que reduzidos a pollegadas daõ 105, 0948. Porem correu 105, 13 conforme a experiencia de Newton; logo a theorica concorda perfeitamente com a experiencia.

392 EXPER. II. Hum globo, que pezava no ar $76\frac{1}{3}$ grãos (libra Romana), e na agua $5\frac{1}{16}$ grãos, cahio em $15''$ da mesma altura de 112 pollegadas de Londres.

Multiplicando os pezos por 1, 15243, teremos 87, 97 grãos de Paris por pezo do globo no ar, e $5\frac{5}{6}$ grãos na agua. A differença, ou o pezo de hum volume igual de agua he 82, 14, do qual a 850ma parte, ou 0, 09 he o pezo de hum volume igual de ar. Logo o pezo do globo no vacuo he de 88, 06 grãos, e o de hum volume igual de agua 82, 23; e conseguintemente $\frac{D'}{D} = \frac{8806}{8223}$. Mas $\frac{1}{6}a^3 c . 70 . 9216 = 82, 23$, ou $a^3 c . 3584 = 2, 741$; logo $a^3 = \frac{2, 741}{c . 3584}$; donde teremos

c - - - - - - - - - - - -	CL.	9, 5028501
3584 - - - - - - - - - -	CL.	6, 4456320
2, 741 - - - - - - - -	L.	0, 4379090
La^3 - - - - - - - - -		6, 3863911
La - - - - - - - - -		8, 7954637.

Passan-

Passando agora a calcular a formula $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a . \frac{D'}{D} =$ $\frac{70448}{24669} a$, teremos

$$\begin{array}{ll} 24669 \text{ - - - - - - - - } & CL.\ 5,6078485 \\ 70448 \text{ - - - - - - - - - } & L.\ 4,8478687 \\ a \text{ - - - - - - - - - - - - - } & L.\ 8,7954637 \\ \hline L\frac{bb}{g} \text{ - - - - - - - } & 9,2511809. \end{array}$$

Calculando tambem a formula $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 =$ $\frac{583}{8806} . 30,196$, teremos

$$\begin{array}{ll} 8806 \text{ - - - - - - - - - } & CL.\ 6,0552213 \\ 583 \text{ - - - - - - - - - - } & L.\ 2,7656686 \\ 30,196 \text{ - - - - - - - - - } & L.\ 1,4799494 \\ \hline Lg \text{ - - - - - - - } & 0,3008393. \end{array}$$

A soma dos logarithmos de $\frac{bb}{g}$ e de g dará pois $l b^2 =$ $9,5520202$, e conseguintemente $l b = 9,7760101$. Ora o espaço corrido $x = bt - \frac{bb}{g} . 0,6931472$, e o tempo $t = 15''$; logo em fim

$$\begin{array}{ll|ll} Lb \text{ - - - } & 9,7760101 & L\frac{bb}{g} \text{ - - - - } & 9,2511809 \\ L\ 15 \text{ - - } & 1,1760913 & L.0,693\ \&c \text{ - } & 9,8408254 \\ \hline & 0,9521014 & & 9,0920063. \end{array}$$

O primeiro destes logarithmos corresponde a 8,9557, e o segundo a 0,1236; logo o espaço corrido pelo globo será de 8,8321 pés, ou de 105,98 pollegadas. Assim está bem conforme a theorica com a experiencia, porque a altura corrida foi de 105,13 pollegadas.

As duas experiencias, que acabamos de referir, foraõ feitas na agua; as seguintes no ar.

393 Exper. III. Hum globo de vidro, que tinha 5 pollegadas

legadas de diametro, e 483 grãos de pezo no ar, gastou $8'' \frac{1}{5}$ em cahir do alto da Igreja de S. Paulo de Londres, isto he, da altura de 220 pés de Inglaterra.

Reduzindo tudo ás nossas medidas, acharemos que o globo pezava 556, 23 grãos no ar, que tinha 0, 39111 pés de diametro, e que em $8'' \frac{1}{5}$ correu o espaço de $206 \frac{1}{2}$ pés. Vejamos pois, se a theorica precedente dá este espaço por resultado.

Como temos o diametro $a = 0,39111$, será o pezo de hum volume igual de agua $= \frac{1}{6} a^3 c . 70 . 9216$, cuja 850^ma parte, ou 23, 774 grãos dará o pezo de hum volume igual de ar. Assim teremos o pezo do globo no vacuo de 580 grãos, e $\frac{D'}{D} = \frac{580}{23,77}$. Calculando pois a formula $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3} a . \frac{D'}{D} = \frac{4640}{71,32} . 0,39111$, acharemos

$$
\begin{array}{lll}
71,32 \text{ - - - - - - - - - -} & CL. & 8,1467887 \\
4640 \text{ - - - - - - - - - -} & L. & 3,6665180 \\
0,39111 \text{ - - - - - - - - -} & L. & 9,5922960 \\
\hline
L \frac{bb}{g} \text{ - - - - -} & L. & 1,4056027.
\end{array}
$$

Depois calculando a formula $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{556,23}{580} . 30,196$, acharemos

$$
\begin{array}{lll}
580 \text{ - - - - - - - - - -} & CL. & 7,2365720 \\
556,23 \text{ - - - - - - - - -} & L. & 2,7452544 \\
30,196 \text{ - - - - - - - - -} & L. & 1,4799494 \\
\hline
L g \text{ - - - - - - - - -} & & 1,4617758.
\end{array}
$$

Tomando a ametade da soma dos logarithmos de $\frac{bb}{g}$ e de de g, teremos $lb = 1,4336892$. E como o eſpaço corrido he $x = bt - \frac{bb}{g} \cdot 0,6931472$, e $t = 8'',2$, acharemos

$$\begin{array}{lr|lr} Lb \text{ - - -} & 1,4336892 & L\frac{bb}{g} \text{ - - - - -} & 1,4056027 \\ Lt \text{ - - -} & 0,9138138 & L.0,69 \ \&c \text{ -} & 9,8408254 \\ \hline & 2,3475030 & & 1,2464281. \end{array}$$

Ao primeiro logarithmo correſponde 222, 59, e ao ſegundo 17, 64; logo $x = 204,95$ pés. A differença he de pé e meio neſte caſo; mas reflectindo, que dous minutos terceiros de mais, ou de menos na medida do tempo, deviaõ produzir o erro de hum pé neſta experiencia, póde dar-ſe a theorica por exacta ſufficientemente.

394 Exper. IV. Huma bexiga em fórma de globo, que tinha 5 pollegadas de diametro, e de pezo $99\frac{1}{8}$ grãos, gaſtou $21''\frac{1}{8}$ em cahir do alto da cupula da meſma Igreja, que tem de elevaçaõ 272 pés. Ou (reduzindo ás noſſas medidas) hum globo de 0, 39111 pés de diametro, e de 114, 24 grãos de pezo, cahio em $21''\frac{1}{8}$ da altura de $256\frac{1}{5}$ pés.

Por quanto já temos achado que o pezo de hum volume igual de ar he de 23, 77 grãos, ſegue-ſe que a bexiga pezaria no vacuo 138 grãos. Logo teremos $\frac{D'}{D} = \frac{138}{23,77}$, $\frac{bb}{g} = \frac{8}{3}a \cdot \frac{D'}{D} = \frac{368}{23,77} \cdot 0,39111$, e finalmente $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) 30,196 = \frac{114,23}{138} \cdot 30,196$. Iſto poſto, formaremos o calculo da maneira ſeguinte

$$\begin{array}{lr}
23,77 \text{ - - - - - - - - -} & CL.\ 8,6239708 \\
368 \text{ - - - - - - - - - - - -} & L.\ 2,5658478 \\
0,39111 \text{ - - - - - - - - -} & L.\ 9,5922960 \\
\hline
L\,\frac{bb}{g} \text{ - - - - - - - -} & 0,7821146 \\
L\,0,693\ \&c \text{ - - -} & 9,8408254 \\
\hline
 & 0,6229400.
\end{array}$$

A este ultimo logarithmo corresponde o numero 4, 197 valor de $\frac{bb}{g}$. 0, 6931472. Depois teremos

$$\begin{array}{lr}
138 \text{ - - - - - - - - - -} & CL.\ 7,8601209 \\
114,23 \text{ - - - - - - -} & L.\ 2,0577861 \\
30,196 \text{ - - - - - - -} & L.\ 1,4799494 \\
l\,\frac{bb}{g} \text{ - - - - - - - - - - -} & 0,7821146 \\
\hline
lb^2 \text{ - - - - - - -} & 2,1799710 \\
lb \text{ - - - - - - -} & 1,0899855 \\
lt \text{ - - - - - - -} & 1,3247967 \\
\hline
lbt \text{ - - -} & 2,4147822
\end{array}$$

Assim acharemos bt de 259, 887 pés; e tirando a parte achada 4, 197, será o espaço corrido $x = 255, 69$ pés. Confórme a experiencia foi de 256, 2; do qual naõ differe o resultado da theorica mais que meio pé; e bem se vê, que a mais leve inexactidaõ da parte da observaçaõ podia ter occasionado esta differença.

O espaço, que este movel teria corrido no vacuo em o mesmo tempo seria de 6737 pés; e dahi se vê a que erros seremos expostos, se nesta especie de movimentos desprezarmos a resistencia do ar.

Da trajectoria dos graves lançados por qualquer direcçaõ em hum meio resistente.

395 BUsquemos agora a trajectoria, que deve descrever hum projectil, que sendo lançado por qualquer direcçaõ em hum meio de uniforme resistencia, he

he follicitado pela acçaõ conſtante da gravidade por direcções entre ſi parallelas.

Seja a o angulo da projecçaõ, b a altura devida á velocidade della, v a altura devida á velocidade em qualquer ponto da trajectoria, e $\frac{gv}{k}$ a reſiſtencia do meio proporcional ao quadrado da velocidade; e teremos por expreſſaõ da força retardatriz horizontal $\frac{gv}{k} \cdot \frac{dx}{ds}$, e da vertical $g + \frac{gv}{k} \cdot \frac{dy}{ds}$. Donde reſultaõ as duas equações ſeguintes

$$\frac{gv}{k} \cdot \frac{dx}{ds} dt + d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$g\,dt + \frac{gv}{k} \cdot \frac{dy}{ds} dt + d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

das quais ſe deduz facilmente eſta terceira $dv + dy + \frac{v\,ds}{k} = 0$.

Como temos $gv = \frac{uu}{2} = \frac{ds^2}{2dt^2}$, a primeira equaçaõ póde reduzir-ſe a eſta fórma $\frac{ds}{k} + 2d\left(\frac{dx}{dt}\right) : \frac{dx}{dt} = 0$, cujo integral he $\frac{s}{k} + 2l\frac{dx}{dt} = l\,2gC$, ou $\frac{dx^2}{dt^2} e^{\frac{s}{k}} = 2gC$, ou $v \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = C e^{\frac{-s}{k}}$

Seja pois agora $dy = p\,dx$, e teremos $v e^{\frac{s}{k}} = C(1+pp)$, $dv\,e^{\frac{s}{k}} + \frac{v\,ds}{k} e^{\frac{s}{k}} = 2Cp\,dp$, ou

dv

$dv + \frac{vds}{k} = e^{\frac{-s}{k}} . 2Cp\,dp = -dy$ (pela terceira equação) $= -p\,dx$, ou $e^{\frac{s}{k}} dx + 2C\,dp = 0$. Multiplicando por $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$, teremos $ds . e^{\frac{s}{k}} + 2C\,dp\sqrt{(1+pp)} = 0$, cujo integral he $k\,e^{\frac{s}{k}} + Cp\sqrt{(1+pp)} + Cl\left(p + \sqrt{(1+pp)}\right) = C'$.

Substituindo $-\frac{2C\,dp}{dx}$ em lugar de $e^{\frac{s}{k}}$, e separando, teremos

$$\frac{dx}{2k} = \frac{-dp}{\frac{C'}{C} - p\sqrt{(1+pp)} - l\left(p + \sqrt{(1+pp)}\right)}.$$

Para determinar as constantes, recorreremos á equação $v . \frac{dx^2}{ds^2} = C . e^{\frac{-s}{k}}$, e no ponto da projecção teremos $dx = ds . \cos a$, $s = 0$, $v = b$; logo $C = b \cos a^2$. No mesmo ponto teremos $p = \tan g\, a$; logo a equação $k\,e^{\frac{s}{k}} + Cp\sqrt{(1+pp)} + Cl\left(p + \sqrt{(1+pp)}\right) = C'$ dará $\frac{C'}{C} = \frac{k}{b \cos a^2} + \frac{\mathrm{sen}\, a}{\cos a^2} + l\left(\frac{1 + \mathrm{sen}\, a}{\cos a}\right)$. Assim teremos por equação da trajectoria $\frac{dx}{2k} =$

-dp

$$\frac{-dp}{\frac{k}{b\,cos\,a^2}+\frac{sen\,a}{cos\,a^2}+l\left(\frac{1+sen\,a}{cos\,a}\right)-p\sqrt{(1+pp)}-l\left(p+\sqrt{(1+pp)}\right)};$$

expressaõ, que em geral naõ he possivel integrar por nenhum dos methodos conhecidos.

396 Se o meio resiste pouco, como o ar, k será huma quantidade muito grande, e se ao mesmo tempo a altura b devida á velocidade da projecçaõ for muito pequena, a quantidade $\frac{k}{b\,cos\,a^2}$ será muito grande; de sorte, que reduzindo o denominador a huma serie, resultará ao menos huma integraçaõ approximada. Mas naõ he este o caso, de que se trata principalmente na *Ballistica*, porque sendo a velocidade dos projecteis quasi sempre muito grande, a quantidade b vem a ser comparavel a k.

397 Com tudo, se o angulo de projecçaõ he pequeno, facilmente se conseguirá a approximaçaõ seguinte.

Como p he huma quantidade pequena, em lugar de integrarmos exactamente a equaçaõ $2C\,dp\sqrt{(1+pp)}+e^{\frac{s}{k}}ds=0$, reduzamos $\sqrt{(1+pp)}$ a huma serie convergente $1+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{8}p^4+\frac{1}{16}p^6-\frac{5}{128}p^8$ &c, e teremos $\int dp\sqrt{(1+pp)}=C''+p+\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{40}p^5+\frac{1}{112}p^7-$&c. Este integral deve tomar-se de maneira que desvaneça, quando $p=tang\,a$; e conseguintemente será $C''=-tang\,a-\frac{1}{6}tang\,a^3+\frac{1}{40}tang\,a^5-$&c. Logo a equaçaõ da trajectoria será $\frac{dx}{k}=$

$$\frac{-dp}{\frac{k}{2b\,cos\,a^2}+tang\,a-p+\frac{1}{6}(tang\,a^3-p^3)-\frac{1}{40}(tang\,a^5-p^5)\&c}$$

Sendo pequeno o angulo da projecçaõ, poderáõ despre-

zar-

zar-se as potencias superiores de $tang\, a$ e de p, e pôr-se por primeira approximaçaõ

$$\frac{dx}{k} = \frac{-dp}{\frac{k}{2\,b\,cos\,a^2} + tang\,a - p}.$$

O integral desta equaçaõ he $\frac{x}{k} + C = l\left(\frac{k}{2\,b\,cos\,a^2} + tang\,a - p\right)$; e porque $tang\,a = p$, quando $x = 0$, será $C = l\frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}$, e $\frac{x}{k} = l\left(1 + \frac{2\,b\,cos\,a}{k}(tang\,a - p)\right)$; ou $e^{\frac{x}{k}} - 1 = \frac{2\,b\,cos\,a^2}{k}(tang\,a - p)$. Logo $p = tang\,a - \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right) = \frac{dy}{dx}$, ou $dy = \left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right)dx - \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}e^{\frac{x}{k}}dx$, cujo integral he

$$y = \left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right)x - \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right);$$

e esta he a equaçaõ da trajectoria.

398 Representemo-la pela curva AMB (Fig. 156.); e diminuamos as ordenadas da quantidade $NP = CA = \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}$, de sorte que o ponto C seja a origem das abscissas, e MN a ordenada. Assim teremos por equaçaõ ás coordenadas CN (x), e MN (y),

$$y = x\left(tang\,a + \frac{k}{2\,b\,cos\,a^2}\right) - \frac{k^2}{2\,b\,cos\,a^2}e^{\frac{x}{k}}.$$

Conduza-se pelo ponto C a recta CQ, que faça com CN hum

hum angulo G, de maneira que seja $tang\, G = tang\, a + \frac{k}{2\, b\, cos\, a^2}$; logo será $QN = x\left(tang\, a + \frac{G}{2\, b\, cos\, a^2}\right)$,

e conseguintemente $QM = \frac{k^2}{2\, b\, cos\, a^2}\, e^{\frac{x}{k}}$: porém $x = CQ.\, cos\, G$; logo entre CQ e QM, que poderemos chamar x' e y' teremos a equação

$$y' = \frac{k^2}{2\, b\, cos\, a^2}\, e^{\frac{x'\, cos.\, G}{k}}.$$

Donde se segue, que a curva AM he huma logarithmica, que tem por asymptota CQ, cujas ordenadas verticais fazem com a mesma asymptota hum angulo, cuja cotangente $= tang\, a + \frac{k}{2\, b\, cos\, a^2}$, sendo a subtangente da curva $= \frac{k}{cos\, G}$.

O ponto O mais elevado se achará, suppondo $p = o$.

Então $tang\, a - \frac{k}{2\, b\, cos\, a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right) = o$, e $x = k\, l\left(1 + \frac{b\, sen\, 2\, a}{k}\right)$; logo a maior elevação $OL = \left(k\, tang\, a + \frac{k^2}{2\, b\, cos\, a^2}\right) l\left(1 + \frac{b\, sen\, 2\, a}{k}\right) - k\, tang\, a$.

A amplitude AB se acha pondo $y = o$; e teremos

$$x\left(tang\, a + \frac{k}{2\, b\, cos\, a^2}\right) = \frac{k^2}{2\, b\, cos\, a^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - 1\right),$$

ou $\frac{e^{\frac{x}{k}} - 1}{\frac{x}{k}} = 1 + \frac{b\, sen\, 2\, a}{k}$; equação, que por maior brevidade escreveremos desta fórma $z = 1 + \frac{b\, sen\, 2a}{k}$. Mas não naõ póde resolver-se, senaõ por meio de falsas posiçoens, como logo veremos.

399 Eisaqui algumas experiencias, sobre as quais faremos agora ensayo da theorica precedente. Todas ellas foraõ feitas com hum canhaõ de 24 carregado com 9 arrateis de polvora.

ANGULOS de projecçaõ	AMPLITUDES Observadas
1° 11′	300 T.
4	820
15	1675
20	1740
25	1825
30	1910
35	2020
40	2050
45	2200

Mas he necessario antes de tudo determinar a quantidade k. Para isso reflectiremos, que temos representado a resistencia por $\frac{gv}{k} = \frac{uu}{2k}$. Assim k he a ametade do que acima temos designado por $\frac{bb}{g}$ (n. 386.); e conseguintemente $k = \frac{4}{3} \cdot \frac{D'}{D} a'$, sendo a' o diametro da bala.

O diametro das balas de 24 he de $5\frac{4}{9}$ pollegadas, ou de $\frac{49}{9 \cdot 72}$ toesas. A densidade do ar he para a do ferro fundido, de que estas balas se fazem, como 1 para 6047. Logo $k = \frac{4}{3} \cdot 6047 \cdot \frac{49}{9 \cdot 72} = 609,677$ toesas; e conseguintemente $l\,k = 2,7850998$.

Determinemos agora a quantidade b, ou a altura devida á velocidade da projecçaõ. Na primeira experiencia temos

temos o angulo de projecçaõ $a = 1^\circ\, 11'$, e a amplitude observada $x = 300$ toesas, que he o alcance de *ponto em branco*, assim chamado, porque a linha de mira pelo *razo dos metais* faz com o eixo da peça hum angulo de $1^\circ\, 11'$. Isto posto, todas as quantidades que entraõ na equaçaõ fundamental $z = 1 + \frac{b\, sen\, 2\, a}{k}$ se determinaráõ facilmente. Porque $e^{\frac{x}{k}}$ he o numero, cujo logarithmo hyperbolico he $\frac{x}{k}$, ou cujo logarithmo ordinario he $\frac{x}{k} \cdot 0,4342945 = \frac{300}{609,677} \cdot 0,4342945 = 0,2137006$. Logo $e^{\frac{x}{k}} = 1,6356883$. Teremos pois

$$
\begin{array}{lr}
\frac{x}{k} \text{ - - - - - - - - - - } C\,L. & 0,3079785 \\
0,6356883 \text{ - - - - - - } L. & 9,8032442 \\
\hline
L\,z \text{ - - - - - - - - - - - } & 0,1112227
\end{array}
$$

Assim acharemos $z = 1,291882$. Logo $\frac{b\, sen\, 2\, a}{k} = 0,291882$, ou $b = \frac{k \cdot 0,291882}{sen\, 2^\circ\, 22'}$; e continuando o calculo por logarithmos, teremos

$$
\begin{array}{lr}
sen\, 2^\circ\, 22' \text{ - - - - - - - } C\,L. & 1,3841090 \\
0,291882 \text{ - - - - - - - - - - } L. & 9,4652073 \\
k \text{ - - - - - - - - - - - - - - } L. & 2,7850998 \\
\hline
l\,b \text{ - - - - - - - - - - - } & 3,6344161.
\end{array}
$$

Será pois $b = 4309$ toesas. Hum calculo absolutamente semelhante da experiencia feita pelo angulo de 4° dará $b = 4863$; e pelo angulo de 15°, $b = 5261$. Tomando pois o meio entre estes tres resultados, podemos suppor que a altura devida á velocidade de projecçaõ, era

era neſtas experiencias de 4811 toeſas, e que a força da polvora dava por conſeguinte á balá huma velocidade de 1320 pés, ou de 220 toeſas por ſegundo.

Sendo aſſim determinado eſte valor, calculemos as amplitudes que a theorica dá para cada huma das inclinaçoens apontadas na Taboa precedente, e vejamos ſe ellas concordaõ com as obſervadas.

I. Para o alcance de *ponto em branco*, pelo angulo de projecçaõ $1^\circ\ 11'$, teremos pois a equaçaõ $z = 1 + \frac{b}{k}\ sen\ 2^\circ\ 22'$; e calculando-a por logarithmos, acharemos

609, 677 - - - - - - - -	C L.	7, 2149002
4811 - - - - - - - - - - -	L.	3, 6831371
sen 2° 22′ - - - - - - - -	L.	8, 6158910
		9, 5139283.

Eſte ultimo logarithmo correſponde a 0, 32653; e conſeguintemente teremos $z = 1,\ 32653$.

Seja pois $\frac{x}{k} = 0,\ 5$; e teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1,\ 649$, e $z = 1,\ 298$, com o defeito de 0,028.

Seja $\frac{x}{k} = 0,\ 51$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1,\ 665$, e $z = 1,\ 304$, com o defeito de 0, 022. Aſſim diremos: a differença dos dous erros 0, 006 he para o menor delles 0, 022, como a differença das hypotheſes 0, 01 he para hum quarto termo; logo $\frac{x}{k} = 0,\ 546$.

Seja $\frac{x}{k} = 0,\ 55$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1,\ 733253$; e $z = 1,\ 3332$, com o exceſſo de 0, 0067. Fazendo $\frac{x}{k} = 0,\ 545$, teremos $e^{\frac{x}{k}} = 1,\ 724608$, e $z = 1,\ 3295$, com o exceſſo de 0, 003. Aſſim teremos 0, 0037 : 0, 003 : : 0,005 :

0, 005 : 0, 004, que nos dá $\frac{x}{k} = 0,541$; e como este valor he assaz exacto, será a amplitude que buscamos $x = k \cdot 0,541 = 330$ toesas.

II. No tiro pelo angulo de $4°$, havemos de resolver a equaçaõ $z = 1 + \frac{b}{k}$ *sen* $8°$; e praticando do mesmo modo, teremos

$$\begin{array}{ll} \frac{b}{k} \text{ - - - - - - - - - - - - } & L.\ 0,8980373 \\ sen\ 8° \text{ - - - - - - - - - - } & L.\ 9,1435553 \\ \hline & 0,0415926. \end{array}$$

A este logarithmo corresponde o numero $1,1005$; logo $z = 2,1005$. Seja $\frac{x}{k} = \frac{4}{3}$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 3,7936$, e $z = 2,0952$, com o defeito de $0,0053$. Seja $\frac{x}{k} = 1,35$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 3,8574$, e $z = 2,1166$, com o excesso de $0,0161$. Assim diremos $0,0214 : 0,0053 :: \frac{1}{60} : 0,004128$; logo $\frac{x}{k} = \frac{4}{3} + 0,004128 = 1,3375$, e $x = 815$ toesas.

III. Pelo angulo de $15°$ teremos a equaçaõ $z = 1 + \frac{b}{k}$ *sen* $30° = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{k} = 4,9537$. Seja $\frac{x}{k} = 2,5$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 12,180$, e $z = 4,472$ com o defeito de $0,482$. Seja $\frac{x}{k} = 2,6$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 13,464$, e $z = 4,794$ com o defeito de $0,160$. Diremos pois $0,322 : 0,160 :: 0,1 : 0,05$; e será $\frac{x}{k} = 2,65$.

Seja pois $\frac{x}{k} = 2,65$; e acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 14,15404$, e $z = 4,9638$ com o excesso de 0,0101. Seja $\frac{x}{k} = 2,64$; o dará $e^{\frac{x}{k}} = 14,01320$, e $z = 4,9292$ com o defeito de 0,0245. Assim teremos 0,0346 : 0,0245 : : 0,01 : 0,007; donde vem $\frac{x}{k} = 2,647$, e $x = 1614$ toesas.

IV. Pelo angulo de 20°, será $z = 1 + \frac{b}{k}$ *sen* 40°; e assim teremos

$$\frac{b}{k} \text{ - - - - - - - - - - - } L.\,0,8980373$$
$$\textit{sen}\ 40^\circ \text{ - - - - - - - - } \underline{L.\,9,8080675}$$
$$0,7061048.$$

A este logarithmo corresponde o numero 5,0828; logo $z = 6,0828$. Seja $\frac{x}{k} = 3$; logo $e^{\frac{x}{k}} = 20,086$, e $z = 6,36$ com o excesso de 0,28. Seja $\frac{x}{k} = 2,9$; logo $e^{\frac{x}{k}} = 18,175$, e $z = 5,92$ com o defeito de 0,16. Assim teremos 0,44 : 0,16 : : 0,1 : 0,037; donde será $\frac{x}{k} = 2,937$; e $x = 1791$ toesas.

V. Por hum calculo semelhante acharemos para o tiro de 25° $z = 7,05747$. Fazendo pois $\frac{x}{k} = 3,1$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 22,198$, e $z = 6,839$ com o defeito de 0,218. E fazendo $\frac{x}{k} = 3,2$; teremos $e^{\frac{x}{k}} = 24,533$, e $z = 7,354$ com o excesso de 0,297. Pelo que a proporção 0,515 : 0,218 :

0,218 : : 0,1 : 0,0423 dará $\frac{x}{k} = 3,1423$, e $x = 1916$ toesas.

VI. Do mesmo modo para o tiro de 30°; será $z = 7,8481$. Suppondo $\frac{x}{k} = 3,3$; acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 27,11$, e $z = 7,91$ com o excesso de 0,07. Suppondo $\frac{x}{k} = 3,25$; acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 25,79$, e $z = 7,63$ com o defeito de 0,22. Donde a proporção 0,29 : 0,22 : : 0,05 : 0,038 dará $\frac{x}{k} = 3,288$, e $x = 2005$ toesas.

VII. Para o tiro de 35°, teremos $z = 8,4306$. Porém suppondo $\frac{x}{k} = 3,4$, acharemos $e^{\frac{x}{k}} = 29,964$, e $z = 8,519$ com o excesso de 0,088; e suppondo $\frac{x}{k} = 3,39$, teremos $e^{\frac{x}{k}} = 29,666$, e $z = 8,456$ com o excesso de 0,025. Será pois 0,063 : 0,025 : : 0,01 : 0,004; e tirando este ultimo termo de 3,39, teremos $\frac{x}{k} = 3,386$, e $x = 2064$ toesas.

VIII. Para o tiro de 40°, acharemos $z = 8,7873$; e suppondo $\frac{x}{k} = 3,45$, será $e^{\frac{x}{k}} = 31,5004$, e $z = 8,841$ com o excesso de 0,054; suppondo porém $\frac{x}{k} = 3,44$, será $e^{\frac{x}{k}} = 31,187$, e $z = 8,775$ com o defeito de 0,012. Assim a proporção 0,066 : 0,012 : : 0,01 : 0,0018 dará $\frac{x}{k} = 3,4418$, e $x = 2098$ toesas.

IX. Em fim pelo angulo de 45°, temos $z = 8,9075$; e suppondo $\frac{x}{k} = 3,45$, acharemos $z = 8,841$ com o defeito de 0,066; porém suppondo $\frac{x}{k} = 3,46$, acharemos $z = 8,9066$, valor sufficientemente exacto, que dará $x = 2110$ toesas.

Mas a fim de melhor se poderem comparar os resultados da experiencia com os da theorica, ajuntaremos aqui a Taboa seguinte.

Angulos de projecçaõ	*Amplitudes observadas*	*Amplitudes calculadas*	*Differenças*
1° 11′	300 T	330	+ 30
4	820	815	− 5
15	1675	1614	− 61
20	1740	1791	+ 51
25	1825	1916	+ 91
30	1910	2005	+ 95
35	2020	2064	+ 44
40	2050	2098	+ 48
45	2200	2110	− 90

Esta Taboa foi calculada, como se tem visto, na supposiçaõ de que a força da polvora imprimia nas balas huma velocidade devida á altura de 4811 toesas, que he hum meio deduzido das tres primeiras observações. A peça era de 24, e a carga de 9 arrateis, como já dissemos.

Comparando pois as amplitudes observadas com as que dá a theorica approximada, de que nos temos servido, he facil de ver que concordaõ sufficientemente. Muito mais, advertindo que estas experiencias naõ podem fazer-se com a exactidaõ que era necessaria para verificar huma theoria. Por mais cuidado que se ponha em fazer todas as cousas iguais nesta especie de provas, succede muitas vezes que pelo mesmo angulo, e com a mesma carga, differem as amplitudes de 50, e ainda de 100 toesas. A maior differença, que temos achado, he de 95 toesas, que saõ proxima-

mamen-

mamente a vigesima parte da amplitude ; e este erro parece antes proceder da experiencia. Porque no caso de que o angulo do maior alcance fosse realmente de 45°, o que he quando menos duvidoso, a differença dos alcances de 45° e 40° deveria ser menor que a dos que correspondem a 40° e 35°, como se sabe pela natureza dos *maximos*. Assim deveria ser a amplitude de 45° menor que 2080, quando a experiencia a dá de 2200 toesas.

SECÇAÕ II.

DO MOVIMENTO DE HUM CORPO SOBRE HUMA LINHA DADA.

400 SUpponhamos 1°, que o movel he hum ponto physico de hum volume infinitamente pequeno. 2°, que a linha sobre a qual se move naõ lhe permitte o desviar-se della, como por exemplo o faria hum canal, cujo diametro fosse igual ao do corpo. 3°, que o corpo se póde mover livremente por este canal, sem experimentar fricçaõ alguma.

401 Hum canal desta fórma naõ poderá pois destruir, senaõ os movimentos que lhe forem perpendiculares ; e por conseguinte, a resistencia que provem desta causa se exercitará toda perpendicularmente á linha descrita pelo movel, de maneira que naõ resultará dahi força nenhuma tangencial, que lhe altere a velocidade. Logo, se o corpo se mover em virtude de hum impulso primitivo, e o seu movimento naõ for alterado por força nenhuma acceleratriz, por qualquer curva que seja obrigado a mover-se, terá em toda a parte a mesma velocidade ; e conseguintemente, descreverá arcos iguais em tempos iguais.

402 Mas sem recorrer a hum canal izento de fricçaõ, póde fazer-se mover hum corpo em qualquer linha dada, conforme o methodo do celebre Huyghens. Seja *AM* a linha dada (Fig. 157.), *BN* a sua evoluta, e *MN* o raio osculador no ponto *M*. Tomar-se-ha pois hum fio inextensivel *MNC*, que por huma ponta se fixará no ponto *C* da evoluta, de maneira que possa applicar-se sobre a lamina *CNB*; e pela outra ponta sustentará o corpo, que no seu movimento será forçado a descrever a curva dada *AM*.

Bem

Bem ſe vê, que hum movel naõ póde ſer deſta maneira conſtrangido na ſua direcçaõ, ſem que reſulte huma preſſaõ continua ſobre a linha do ſeu movimento, ou (que vem a ſer o meſmo) ſem que o fio da evoluta naõ experimente huma certa tenſaõ. Logo, ſe em ſentido contrario ſe applicaſſe ao movel huma força igual a eſta preſſaõ, he evidente que deſcreveria a meſma curva; mas entaõ ſeria o movimento livre.

Supponhamos, que elle ſe move pela curva AM em virtude de huma impulſaõ primitiva, ſem ſer perturbado por potencia alguma, e chamemos F a força da preſſaõ que elle exercita ſobre a curva AM, ſegundo a perpendicular NM. Se eſta força, conſiderada como força acceleratriz, ſe imprimiſſe no movel pela direcçaõ oppoſta MN, a trajectoria AM ſeria por elle deſcrita com movimento livre. Porém F neſte caſo he a força normal; logo terá por valor o quadrado da velocidade uu dividido pelo raio oſculador MN (n. 280.).

Eſte meſmo he pois o valor da preſſaõ do movel ſobre a curva, ou da tenſaõ do fio, chamada communmente *Força centrifuga.* Eſta denominaçaõ procedeu de que tendendo o movel pela ſua inercia a mover-ſe uniformemente, e em linha recta, naõ póde ſer conſtrangido a deſcrever huma linha curva, ſem fazer hum esforço continuo a eſcapar pela tangente, e afaſtar-ſe do centro do ſeu movimento.

403 Logo *a força centrifuga he igual ao quadrado da velocidade dividido pelo raio oſculador; e conſeguintemente he para a força da gravidade, como a altura devida á velocidade do movel para ametade do meſmo raio oſculador.* Mas naõ deve por iſſo entender-ſe, que a força centrifuga depende da gravidade; porque o movel ſempre exercitaria a ſua preſſaõ ſobre a linha do movimento, ainda que naõ exiſtiſſe a força da gravidade.

404 Quaiſquer que ſejaõ por outra parte as forças, que ſollicitaõ hum corpo na ſua trajectoria, ſempre podem reduzir-ſe a duas, huma tangencial T, e a outra normal N. A primeira ſervirá de alterar a velocidade do movel, e teremos $g\,dv = T\,ds$; e a ſegunda produzirá huma nova preſſaõ ſobre a curva deſcrita, de maneira que obrando para a meſma parte que a força centrifuga $\frac{uu}{R}$, a preſſaõ total

ſerá

ſerá $\frac{uu}{R} + N$, e obrando em direcçaõ oppoſta, a preſſaõ ſerá taõ ſómente $\frac{uu}{R} - N$.

Neſte ultimó caſo a preſſaõ ſerá nenhuma, quando for $\frac{uu}{R} = N$; e entaõ deſcreverá o movel livremente a curva propoſta. Por iſſo eſta he a meſma equaçaõ, que achamos para os movimentos livres (n. 280.).

405 Por meio da formula $g\,dv = T\,ds$, e da equaçaõ conhecida da curva, acharemos a velocidade do movel em qualquer ponto. O tempo ſe achará, integrando a formula $\frac{ds}{u}$; e a preſſaõ ſobre a trajectoria ſerá repreſentada por $\frac{uu}{R} \pm N$. Mas eſte ultimo elemento naõ he neceſſario para conhecer o movimento do corpo.

406 Seja BM a linha dada (Fig. 158.), AP o ſeu eixo, X e Y as duas forças acceleratrizes dirigidas, huma por MN parallelamente a AP, e a outra por PM. Seja P a preſſaõ total ſobre a curva, ſegundo a perpendicular OM. Se eſta força ſe applicar por huma direcçaõ contraria MO, o movimento ſerá livre. Reſolvendo pois a força P por MO em duas, huma pela direcçaõ MN, que ſera $= \frac{P\,dy}{ds}$, e a outra pela direcçaõ MQ, que ſerá $= \frac{P\,dx}{ds}$; teremos

$$\left(X + \frac{P\,dy}{ds}\right) dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\left(Y - \frac{P\,dx}{ds}\right) dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

E ſubſtituindo $\frac{ds}{u}$ em lugar de dt,

$$X\,ds + P\,dy = u\,d\left(\frac{u\,dx}{ds}\right) = uu\,d\left(\frac{dx}{ds}\right) + u\,du.\ \frac{dx}{ds}$$

Yds

$$Y ds - P dx = u d\left(\frac{u dy}{ds}\right) = u u d\left(\frac{dy}{ds}\right) + u du \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Multiplicando a primeira por dx, e a ſegunda por dy, a ſoma dos productos dará $(X dx + Y dy)\, ds = u u ds \left[\frac{dx}{ds} \cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} \cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] + u du u ds$, ou $u du = X dx + Y dy$; equaçaõ, que coincide com a outra $g dv = T ds$.

Do meſmo modo, havendo multiplicado a primeira por dy, e a ſegunda por dx, a differença dos productos dará $(X dy - Y dx) ds + P ds^2 = u u ds \left[\frac{dy}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right] = -\frac{u^2 dx^2}{ds} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Porem o raio oſculador $R = \dfrac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; logo

$$P = \frac{u^2}{R} + \frac{Y dx - X dy}{ds}.$$

Donde ſe vê, que naõ havendo força alguma acceleratriz, a preſſaõ ſobre a curva deve ſer $\frac{u^2}{R}$; e que havendo potencias acceleratrizes, a preſſaõ da força centrifuga he aumentada ou diminuida da força normal, conforme a direcçaõ della. E he preciſamente o meſmo, que acima achámos, conſiderando o movimento de outra maneira.

Eiſaqui em poucas palavras o methodo geral de calcular o movimento de hum corpo ſobre huma linha dada.

Applicaçaõ da Theorica precedente a alguns caſos particulares.

407 SUpponhamos, que hum movel eſtá ſuſpenſo de hum fio atado pela outra extremidade a hum ponto fixo. Se eſte movel for impellido por qualquer direcçaõ, que naõ ſeja a do meſmo fio, deſcreverá neceſſariamente a circumferencia de hum circulo ao redor do ponto de

de ſuſpenſaõ, e iſſo com movimento uniforme, ſe naõ houver potencia que lhe altére o movimento impreſſo.

Seja V a velocidade do movel, a qual ſe acha reſolvendo a velocidade impreſſa em outras duas, huma V perpendicular ao raio, e a outra pela direcçaõ delle. Seja F a tenſaõ do fio, ou a força centrifuga, e R o raio do circulo. Teremos pois $F = \frac{V^2}{R}$, ou para dizer melhor $F = \frac{MV^2}{R}$, ſendo M a maſſa do movel; porque $\frac{V^2}{R}$ naõ he outra couſa ſenaõ huma força acceleratriz, cujo effeito he a velocidade que póde imprimir a força centrifuga.

Para conhecer pois a intenſaõ verdadeira deſta potencia, he neceſſario multiplicar $\frac{V^2}{R}$ pela maſſa do corpo. Aſſim achamos, que *a força centrifuga he para o pezo do corpo, como a altura devida á velocidade para ametade do raio.* Suppondo, por exemplo, que a velocidade he devida á altura de 40 pés, e que o raio do circulo he de 10 pés, a força centrifuga, ou a tenſaõ do fio ſerá para o pezo do corpo, como 8 para 1.

408 Seja T o tempo periodico do movel; teremos $V = \frac{2cR}{T}$, e a força centrifuga $F = \frac{M.4c^2R}{T^2}$. Logo *a força centrifuga he proporcional ao raio do circulo directamente, e ao quadrado do tempo periodico reciprocamente.*

409 Como a terra tem hum movimento de rotaçaõ ao redor do ſeu eixo, todas as ſuas partes ſaõ animadas de hum certo gráo de força centrifuga, maior ou menor, conforme ellas eſtaõ mais, ou menos diſtantes do eixo da revoluçaõ. Como eſta força debaixo do equador he directamente oppoſta á da gravidade, eſtá claro que deve nella cauſar maior diminuiçaõ. Quanto aos lugares intermedios do equador até os pólos, a diminuiçaõ da gravidade deve ſer menos ſenſivel á medida que ſe for caminhando para os meſmos pólos, onde a força centrifuga he nulla.

Donde ſe ſegue, que ſe a terra foi originalmente fluida, em virtude do ſeu movimento de rotaçaõ naõ podia conſervar a fórma esferica, que a gravidade lhe procurava dar. Porque pezando menos as partes mais vezinhas do equa-

equador, era neceſſario maior quantidade dellas, para eſtabelecer o equilibrio. Aſſim devia tomar eſta maſſa fluida huma figura á maneira de ellipſoide, mais abatida para os pólos, e elevada para o equador, tal proximamente como a do ſolido gerado pela revoluçaõ de huma ellipſe á roda do eixo menor. Eſte he tambem o reſultado, que daõ as mais exactas medidas dos gráos do meridiano, feitas neſtes ultimos tempos. Todas concordaõ em moſtrar o abatimento do globo terreſtre para a parte dos pólos, e elevaçaõ para a parte do equador; e as que paſſaõ por melhores provaõ, que o eixo tem de menos que o diametro do equador $\frac{1}{215}$ delle.

410 Examinemos agora o movimento de hum corpo, que deſce pela acçaõ da gravidade por huma linha recta AC inclinada ao horizonte (Fig. 159.). Seja A a origem do movimento, AM o eſpaço x corrido no tempo t, e u a velocidade adquirida no ponto M. Conduzindo pelo ponto A a vertical AB, e pelo ponto C a horizontal BC, poderemos reſolver a força da gravidade g pela direcçaõ MP em outras duas, huma pela direcçaõ MC, que ſerá $g\ ſen\ a$; e a outra perpendicular a MC, que ſerá $g\ coſ\ a$, entendendo por a a inclinaçaõ ACB da recta AC com o horizonte. A ultima deſtas forças dará a preſſaõ ſobre o plano inclinado, por quanto a força centrifuga he nulla neſte caſo; e eſta preſſaõ he para o pezo do corpo, como o coſeno de a para o raio. A outra força $g\ ſen\ a$ ſervirá de accelerar o movimento pela direcçaõ AM. Aſſim deſcerá o corpo, como ſe foſſe ſollicitado por huma força de gravidade $= g\ ſen\ a$ pela direcçaõ AM, e o ſeu movimento ſerá uniformemente accelerado. Logo teremos as duas equações ſeguintes,

$$u = gt\ ſen\ a, \text{ e } x = \frac{1}{2} gt^2\ ſen\ a;$$

donde ſe podem deduzir muitas conſequencias uteis.

I. O tempo empregado em correr AC (Fig. 159.) he $\sqrt{\frac{2\,AC}{g\ ſen\ a}} = \sqrt{\frac{2\,AC^2}{g\,AB}}$; logo he como a recta AC, quando AB he conſtante. Por conſeguinte os tempos empregados em deſcer do ponto A até a horizontal BC ſaõ

como

como as linhas, pelas quais defcem os corpos.

II. Se defcrevermos hum circulo, cujo diametro AB feja vertical (Fig. 160.), o movel partindo de A para M pela corda AM gaftará o mefmo tempo, que feria neceffario para defcer até B pelo diametro AB, porque no circulo a quantidade $\frac{AM^2}{AP}$ he conftante.

III. A velocidade do movel chegando ao ponto C (Fig. 159.) he $\sqrt{2gAC \, sen \, a} = \sqrt{2gAB}$. Logo ferá igual á que o corpo teria adquirido cahindo pela vertical AB; donde fe fegue, que a velocidade adquirida pelo defcenfo de hum movel entre dous planos horizontais, he fempre a mefma, ou elle defça livremente pela vertical, ou por hum plano inclinado, ou ainda por hum arco de curva, como veremos no artigo feguinte.

Do Movimento de Ofcillaçaõ nos meios naõ refiftentes.

411 SEja ACA' huma curva qualquer (Fig. 161.), pela qual defçe hum corpo em virtude da gravidade, começando do ponto A. Referindo a curva a qualquer eixo vertical BC, conduzindo as horizontais AB, MP, e fazendo $BP = x$, $PM = y$, ferá a força da gravidade g por MG parallela a BP; e confeguintemente $X = g$, $Y = 0$ (n. 406.). Logo $dv = dx$, e $v = x + a$ no cafo de ter o movel no ponto A huma velocidade inicial devida á altura a. Defcendo pois o corpo pelo arco AM de huma horizontal AB até outra MP, adquire precifamente a mefma velocidade, como fe tiveffe cahido pela vercical BP.

Supponhamos, que elle fem velocidade alguma inicial defce do ponto A; a velocidade em M ferá devida á altura BP, e a velocidade em C á altura BC. Mas fe C he o ponto mais baixo da curva, e fe o ramo $CM'A'$ he huma continuaçaõ della qualquer; a velocidade em M' ferá fempre devida á altura BP, e a velocidade em A' á altura o. Deve pois fubir o movel até A' á mefma altura donde tinha defcido; e de A' tornará a defcer pelo mefmo caminho, e com a velocidade adquirida no ponto C fubirá rá pelo primeiro ramo até o ponto A da origem do movimento. Assim irá alternativamente de A para A', e de A' para A, até que algum obstaculo estranho se opponha ao seu movimento. A este movimento alternativo he que se dá o nome de *Movimento de Oscillação.*

412 Para conhecer a duração de huma oscillação inteira, ou (que vem a ser o mesmo) para determinar o tempo da descida por AMC, e subida por $CM'A'$, he necessario integrar $\frac{ds}{\sqrt{2gv}}$, ou $\frac{ds}{\sqrt{2gx}}$ desde A até A'.

413 Exemplo I. Seja AMD hum arco de circulo descrito do centro C com o raio $CA = a$ (Fig. 162.). Tire-se a vertical CD; e suppondo que he A o ponto donde o movel começa a descer pelo arco AMD, seja $DP = x$, e $BD = b$. Assim será $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $ds = \frac{-a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, e $u = \sqrt{2g(b - x)}$. Logo $dt =$

$$\frac{-a\,dx}{\sqrt{2g(b-x)(2ax-xx)}} = \frac{a}{\sqrt{2g(2a-x)}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^4}{16a^4} \;\&c\right).$$

Para achar pois o tempo da descida inteira, he necessario integrar cada termo desta serie, de maneira que o integral se desvaneça quando $x = b$, e depois tomar o valor delle quando $x = 0$. O calculo integral dá geralmente

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{(bx-xx)}}{m} + \frac{b(2m-1)}{2m} \int \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$

logo, se cadahum destes integrais se tomar entre os limites

tes $x = b$, e $x = 0$, como temos dito, teremos

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx - xx)}} = \frac{b(2m-1)}{2m} \int \frac{-x^{m-1} dx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$

formula, que dará as applicações seguintes:

$$\int \frac{-x dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{b}{2} \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}},$$

$$\int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{3b}{4} \int \frac{-x dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1.3}{2.4} b^2 \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$

$$\int \frac{-x^3 dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{5b}{6} \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} b^3 \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \ \&c.$$

Donde se segue, que o tempo da descida pelo arco AMD he $t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{b^3}{8a^3} + \frac{1.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} \cdot \frac{b^4}{16a^4} \ \&c\right) \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$.

Porém $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} = Arc\ cos \frac{2x-b}{b}$; e este integral desvanece, quando $x = b$, e tem por valor o numero conhecido $c = 3,141$ &c quando $x = 0$. Logo o tempo da descida será

$$t = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{b^3}{8a^3} \ \&c\right);$$

e por conseguinte, chamando T o tempo de huma oscillaçaõ inteira, será

$$T = c\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{b^2}{4a^2} \ \&c\right).$$

Se o arco AMD for pequeno a respeito do raio, o seno verso b será taõ pequeno relativamente ao arco, como este o he em comparaçaõ do raio. Poder-se-haõ pois nesse caso desprezar todos os termos da serie que contém b, tomando-se sómente $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$.

E se quizermos avaliar o erro que desta ultima formula resulta, quando os arcos saõ consideraveis, naõ ha mais que comparar o resultado della com o da serie. Por exemplo se $AMD = 30^\circ$, teremos $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}134$; donde he facil de concluir que o tempo de huma oscillaçaõ inteira, tal como o dá a formula $c\sqrt{\frac{a}{g}}$, naõ differe da sua duraçaõ real senaõ huma sexagesima parte proximamente; de maneira, que se a oscillaçaõ for de hum segundo, será o defeito sómente de hum terceiro. Porém se $AMD = 5^\circ$, teremos $\frac{b}{a} = 0{,}0038$, e o tempo deduzido da formula $c\sqrt{\frac{a}{g}}$ naõ discrepará da realidade mais que $\frac{1}{2000}$, de sorte que seráõ necessarias duas mil oscillações, para se cometter o erro de hum segundo; e se os arcos forem sendo menores, as differenças cadavez se faráõ mais insensiveis.

Em fim, como a formula $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$ he independente de b, está claro que as oscillações de hum corpo por arcos muito pequenos de hum mesmo circulo devem todas ser de igual duraçaõ; e por isso neste caso se chamaõ *Oscillações isochronas.*

E por quanto he absolutamente o mesmo suppor que hum corpo M se move sobre hum arco de circulo solido AMD, ou que oscilla na extremidade de hum fio de suspensaõ CM, concluiremos igualmente que *hum pendulo* (porque este he o nome que entaõ se dá ao movel) *que faz as oscillações muito pequenas, as faz todas no mesmo tempo.*

415 A expressaõ deste tempo he $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$, sendo o comprimento do pendulo representado por a. Donde se segue, que *a duraçaõ de huma oscillaçaõ he directamente proporcional á raiz quadrada do comprimento do pendulo, e reciprocamente á raiz quadrada da força da gravidade,*

dade. Hum pendulo, que tem o comprimento quadruplo do de outro, deve pois fazer as oſcillações duas vezes mais vagaroſas, ſendo a gravidade conſtante &c.

416 Seja N o numero das oſcillações feitas em hum certo tempo t; teremos $T = \frac{t}{N} = c\sqrt{\frac{a}{g}}$, e conſeguintemente $a = \frac{t^2 g}{c^2 N^2}$. Logo *os comprimentos de dous pendulos ſaõ reciprocamente como os quadrados dos numeros das oſcillações feitas em hum tempo dado.*

417 Daqui ſe tem deduzido hum meio muito ſimples de determinar por experiencia o comprimento do pendulo, que deve fazer cada vibraçaõ em hum ſegundo.

Suſpendei hum corpo bem denſo por hum fio de metal muito delgado, e dai a eſte fio tres pés de comprimento, porque eſte he pouco mais ou menos o comprimento procurado; deſviai hum pouco eſte pendulo da vertical para o fazer oſcillar, e contai exactamente as vibrações que faz em qualquer tempo determinado, em huma hora por exemplo. Entaõ fareis eſta proporçaõ: Como o quadrado de 3600 (numero das oſcillações que o pendulo de ſegundos faria no meſmo tempo) para o quadrado do numero das oſcillações contadas, aſſim o comprimento do pendulo da experiencia para o comprimento procurado do pendulo de ſegundos.

Por eſte methodo ſe conheceu, que na latitude de Paris he o pendulo de ſegundos de 3 pés 8 linhas e $\frac{57}{100}$ de huma linha. Mas como eſtas experiencias ſe fazem com corpos de hum volume finito, he neceſſario ter o cuidado de medir exactiſſimamente os comprimentos dos pendulos deſde o ponto de ſuſpenſaõ até outro ponto chamado *Centro de oſcillaçaõ*, do qual havemos de fallar na Secçaõ III.

418 Huma vez que ſeja conhecido o comprimento do pendulo, que bate exactamente os ſegundos, com ſumma facilidade ſe deduz o comprimento de qualquer outro, que deva fazer as oſcillações em mais, ou menos tempo. O pendulo, por exemplo, que em Paris deve fazer cada oſcillaçaõ em meio ſegundo, terá evidentemente 9 pollega-

legadas 2 linhas e $\frac{14}{100}$ de huma linha; e o pendulo, que houveſſe de bater minutos, deveria ter 3600 vezes o comprimento do pendulo de ſegundos, iſto he, $11014\frac{1}{4}$ pés.

Sobre iſto he que ſe funda o modo de regular os relogios oſcillatorios. Quando elles ſe retardaõ, levanta-ſe a *meia-laranja* da pendula; e abaixa-ſe pelo contrario, quando ſe adiantaõ. Mas para determinar a quantidade, que ſe deve levantar, ou abaixar, ſeja o comprimento actual da pendula $= a$, a quantidade que ſe lhe deve ajuntar ou diminuir $= \pm x$, o numero das vibrações de que elle ſe retarda, ou adianta em hum tempo dado, por exemplo em huma hora $= \delta$, e o numero das vibrações que devia fazer eſtando bem regulado $= b$. Iſto poſto, teremos (n. 416.) eſta proporçaõ $a : a \pm x :: b^2 : (b \pm \delta)^2$; logo $x = \frac{a\delta(2b \pm \delta)}{b^2}$.

419 Da meſma theorica ſe tem uſado para determinar com a ultima exactidaõ a força da gravidade; e além de que a idèa he muito ingenhoſa, o calculo he de ſingular facilidade. Porque ſendo $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$, e ſuppondo $T = 1$, e $a =$ ao comprimento do pendulo de ſegundos $= 440, 57$ linhas, teremos $g = c^2 . 440, 57$ linhas $= 30, 196$ pés, como acima temos ſuppoſto; donde ſe conclue que o eſpaço corrido por qualquer corpo no primeiro ſegundo da ſua quéda he de 15, 098 pés.

420 Se a força da gravidade diminue á medida que nos chegamos para o equador, o comprimento do pendulo de ſegundos deve variar em differentes latitudes; porque a equaçaõ $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$ moſtra, que ſendo T conſtante *devem os comprimentos dos pendulos de ſegundos ſer em differentes latitudes na raſaõ directa das forças da gravidade.* Com effeito, tendo ido *M. Richer* a Cayena em 1672 para fazer algumas obſervações, reflectio que a pendula de ſegundos que tinha levado de Paris retardava ſenſivelmente, de forte que foi obrigado a levantar a *meia-laranja* huma

linha

linha e $\frac{1}{4}$ para a fazer bater novamente os ſegundos.

Depois de *M. Richer*, tem-ſe verificado muitas vezes, e em muitos lugares o facto que elle atteſtou. Eisaqui huma parte deſtas obſervações

Lugares das Obſervações	Latitudes	Comprimento do pendulo
No Equador em 2434 toeſ. de alt.	0° 0'	438,70 linh.
- - - - - - em 1466 toeſ. de alt.	0. 0	438,83
- - - - - - ao livel do mar	0 0	439,07
Em Porto-bello - - - - - - - - -	9 34	439,16
Na ilha de S. Domingos - - - -	18 27	439,33
No Cairo - - - - - - - - - - - - -	30 2	440,25
Em Roma - - - - - - - - - - - - -	41 44	440,28
Em Paris - - - - - - - - - - - - -	48 50	440,57
Em Londres - - - - - - - - - - -	51 31	440,65
Em Leyda - - - - - - - - - - - -	52 9	440,71
Em Petersburg - - - - - - - - -	59 56	440,97
Em Archangel - - - - - - - - - -	64 35	441,13
Em Pello - - - - - - - - - - - - -	66 48	441,17

Todos eſtes reſultados, e muitos outros concordaõ em provar a diminuiçaõ da gravidade dos pólos para o equador; e deſta diminuiçaõ ſe conclue a exiſtencia da força centrifuga procedida da rotaçaõ da terra, a qual traz comſigo a figura ellipſoidal, e o abatimento da terra para a parte dos pólos, regulado pelo livel das aguas do mar.

421 O tempo, que o movel gaſta em deſcer pela corda *AD*, he igual ao tempo que gaſtaria em cahir pelo diametro vertical; e eſte tempo he repreſentado pela formula $2\sqrt{\frac{a}{g}}$. Mas o tempo que elle gaſta em deſcer pelo arco *AMD* he $\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{a}{g}}$, e $\frac{1}{2}c$ he menor que 2. Logo he menor o tempo da deſcida pelo arco *AMD*, do que pela corda *AD*. Neſte caſo, ainda que a linha

recta seja o caminho mais breve, naõ he com tudo a que exige o menor tempo, nem taõ pouco o mesmo circulo. Ha muito tempo que *M. Bernoulli* mostrou pela primeira vez, que a cycloide he a que tem esta notavel propriedade, como adiante veremos.

422 Exemplo II. Sejaõ AB, AC duas semicycloides (Fig. 163.), descritas pela rotaçaõ do circulo que tem por diametro AK, sobre a horizontal GKH. Tomando-se hum fio ARM duplo de AK, ou igual no comprimento a huma destas curvas, suspendendo-se por huma das extremidades no ponto A, e suppondo-se na outra extremidade hum corpo infinitamente pequeno, este corpo no seu movimento descreverá a cycloide inteira BDC, cujo circulo genitór será igual ao das duas semicycloides, e cuja base será a horizontal BKC. Isto posto, pergunta-se o tempo de huma oscillaçaõ deste pendulo pelo arco FDF'.

Seja o comprimento do pendulo $= a$, e conseguintemente o diametro do circulo genitór $= \frac{1}{2} a$, o arco $DM = s$, e $DP = x$. Pela natureza da cycloide teremos $s^2 = 2ax$, e conseguintemente $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax}}$. Chamando pois b a altura DE do ponto F, onde começa o movimento, a velocidade do movel no ponto M será $u = \sqrt{2g(b-x)}$; donde resulta $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Mas o integral de $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$ tomado entre os limites de $x = b$, e $x = 0$, sempre se reduz a c; logo o tempo da descida pelo arco FMD será $t = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g}}$, e o tempo de huma oscillaçaõ inteira pelo arco FDF' será $T = c\sqrt{\frac{a}{g}}$. Donde se vê, que este tempo he sempre para o que gastaria o movel em descer pelo diametro vertical KD como c para 1, ou como a circumferencia para o diametro de hum circulo. Logo *todas as oscillações de hum pendulo, que descre-*

de quaisquer arcos de huma cycloide, saõ de igual duraçaõ.

423 Esta singular propriedade deu á cycloide, e a todas as outras curvas que tem a mesma ventagem, o nome de *Curvas Tautóchronas*. M. Huyghens, homem de raro ingenho, foi o primeiro, que depois de haver demonstrado que tanto as pequenas como as grandes oscillações de hum mesmo pendulo, suspendido da fórma referida entre duas laminas cycloidais, saõ todas feitas em tempos iguais, imaginou que hum pendulo desta especie seria proprio para regulador do movimento dos relogios. E com effeito; ainda que as impressões da roda de encontro sejaõ desiguais, as oscillações deste pendulo naõ deixaráõ por isso de ser isóchronas.

Mas esta invençaõ, ainda que de summa belleza na theorica, naõ foi de grande utilidade na pratica. Para se conseguir o bom effeito della, era necessario vencer difficuldades quasi insuperaveis. Consistem estas em dar, e conservar ás laminas de metal AR, AR' huma figura cycloidal bem exacta, e bem igual; e como podia lizongear-se alguem de o conseguir, concorrendo tantas causas para o embaraçar? A contracçaõ inevitavel das laminas no tempo de frio, e a dilataçaõ no tempo de calor se oppunhaõ sobre tudo á uniformidade da sua figura, e isto bastava para fazer duvidoso o isochronismo do novo pendulo. Por este, e outros inconvenientes, determináraõ os Artistas substituir o pendulo circular em lugar do cycloidal de M. Huyghens, depois de se haver demonstrado que as oscillações por arcos pequenos de circulo eraõ igualmente isochronas, quanto bastava para o uso que se procurava. Mas para julgar do merecimento das invenções modernas, relativamente á perfeiçaõ do pendulo circular, e á medida do tempo, será necessario ler as Obras dos Sabios, que particularmente se occupáraõ nesta materia.

424 Seja EMD huma curva qualquer (Fig. 164.), e E o ponto donde hum corpo principia a cahir, em virtude de huma força centripeta P dirigida para C, e proporcional a qualquer funçaõ das distancias; deve determinar-se a velocidade deste corpo em qualquer ponto M, e o tempo da sua descida pelo arco EM.

Fazendo $CM = z$, resolvamos a força P dirigida por MC em outras duas, huma normal, e outra tangencial.

cial. A primeira ſerá $\frac{P\sqrt{(ds^2 - dz^2)}}{ds}$, que ajuntan-do-ſe com a força centrifuga $\frac{uu}{R}$ dará a preſſaõ total ſobre a curva. A ſegunda ſerá $\frac{-Pdz}{ds}$, e eſta deverá unicamente accelerar o movimento. Logo $gdv = -Pdz$, e $gv = gb - \int Pdz$. O tempo ſe determinará conſeguintemente pela formula $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2gb - 2\int Pdz)}}$.

Exemplo. Supponhamos, que o arco EMD he infinitamente pequeno, que encontra a angulos rectos o eixo CD, e que o raio oſculador em D he $= a$. Neſte caſo podemos conſiderar o arco EMD como hum arco do circulo deſcrito com o raio a, e a potencia P como conſtante, e como repreſentada por ng. Teremos pois $v = n(b - z)$, ſendo $CE = b$; logo $dt\sqrt{2gn} = \frac{-ds}{\sqrt{(b-z)}}$. Porém pela natureza do circulo, pondo $CD = f$, e $DP = x$, temos $2ax - xx + (f+x)^2 = zz$; logo $x = \frac{zz - ff}{2a + 2f}$ e $ss = 2ax = \frac{zz - ff}{a + f}a$; logo $zz = ff + \frac{a+f}{a}ss$, e $z = f + \frac{a+f}{2af}ss$.

Mas quando $z = b$, a quantidade s deve ſer $= DME$ que chamaremos m; logo $b - z = \frac{a+f}{2af}(mm - ss)$; logo em fim $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(mm - ss)}}\sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. Tomando pois o integral entre os limites $s = m$, e $s = 0$; teremos $t = \frac{1}{2}c\sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$, e conſeguintemente o

tempo

tempo de huma oſcillaçaõ inteira pelo arco infinitamente pequeno EDE' ſerá $T = c\sqrt{\frac{af}{gn(a+f)}}$. Ora o pendulo, que tem o comprimento l, e que he animado pela força da gravidade g, por direcções parallelas, faz as ſuas oſcillações em hum tempo repreſentado por $c\sqrt{\frac{l}{g}}$; logo no caſo precedente o comprimento do pendulo ſimples iſochrono deve ſer $\frac{af}{n(a+f)}$.

425 Se EMD foſſe huma linha recta, o raio oſculador a ſeria infinito, e teriamos entaõ $T = c\sqrt{\frac{f}{ng}}$; e ſe a força central foſſe a meſma da gravidade, ſeria neſſe caſo $T = c\sqrt{\frac{f}{g}}$. Donde ſe ſegue, que hum corpo ſobre hum plano perfeitamente horizontal, ſobre o qual naõ experimentaſſe fricçaõ alguma, ſendo apartado hum pouco do ponto D por onde paſſa a perpendicular conduzida do centro C, faria oſcillações, cadahuma das quais teria por duraçaõ $c\sqrt{\frac{f}{g}}$. Teria pois o pendulo iſochrono por comprimento hum ſemidiametro terreſtre e faria cada oſcillaçaõ em 42′ 12″; e por conſeguinte, para fazer 17 oſcillações, ſeriaõ neceſſarias quaſi 12 horas inteiras.

Do Movimento de Oſcillaçaõ nos meios reſiſtentes.

426 Examinemos agora o movimento de hum pendulo cycloidal (Fig. 163.), no caſo de ſer a reſiſtencia do meio na raſaõ duplicada da velocidade, que he, como já temos dito, a hypotheſe que ſe conforma com as experiencias.

Seja $DA = a$, $DK = \frac{1}{2}a$, $DP = x$, $DM = s = \sqrt{2ax}$. A força da gravidade g accelerará o corpo pela dire-

direcçaõ da tangente, e esta acceleraçaõ será $\frac{g\,dx}{ds}$; e a resistencia do meio, pelo contrario, o retardará com a força $\frac{gu^2}{b^2}$, ou $\frac{gv}{k}$. Logo $dv = -dx + \frac{v\,ds}{k}$, ou $dv - \frac{v\,ds}{k} = -dx = -\frac{s\,ds}{a}$. Multiplicando por $e^{\frac{-s}{k}}$, teremos $e^{\frac{-s}{k}}dv - \frac{v\,ds}{k}e^{\frac{-s}{k}} = \frac{-s\,ds}{a}e^{\frac{-s}{k}}$, cujo integral he $e^{\frac{-s}{k}}v = C + \frac{k^2+sk}{a}e^{\frac{-s}{k}}$, ou $v = Ce^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2+sk}{a}$. Mas sendo o arco $DMF = m$, he necessario que tenhamos $s = m$, quando for $v = 0$; logo $Ce^{\frac{m}{k}} + \frac{k^2+mk}{a} = 0$; e conseguintemente $v = \frac{k^2+sk}{a} - \frac{k^2+mk}{a}e^{\frac{s-m}{k}}$.

A maior velocidade será, quando $dv = 0$. Entaõ pela equaçaõ differencial teremos $\frac{v}{k} = \frac{s}{a}$; e pela ultima equaçaõ, $k - (k+m)\,e^{\frac{s-m}{k}} = 0$. Donde tiraremos $s = m - k\,l\left(1+\frac{m}{k}\right)$, e conseguintemente $s = \frac{m^2}{2k} - \frac{m^3}{3k^2} + \frac{m^4}{4k^3}$ &c. Aqui naõ he pois o lugar da maior velocidade no ponto mais baixo da curva D, como no vacuo, mas hum pouco antes do movel chegar a D.

427 A altura devida á velocidade do movel no ponto

to D he $\frac{k^2}{a} - \frac{k^2+mk}{a} e^{\frac{-m}{k}}$. Com esta subirá pelo arco DF'; mas entaõ se ajuntará a força da gravidade $\frac{gdx}{ds}$ com a resistencia do meio $\frac{gv}{k}$ a retardar-lhe o movimento. Logo teremos $dv = -dx - \frac{vds}{k}$, ou $dv + \frac{vds}{k} = -dx$. Esta formula se integrará como a da descida, advertindo sómente que k deve tomar-se negativamente. Assim teremos $v = C'e^{\frac{-s}{k}} + \frac{k^2 - sk}{a}$. Mas quando $s = 0$, he $v = \frac{k^2}{a} - \frac{k^2+mk}{k} e^{\frac{-m}{k}}$; logo $C' = -\frac{k^2+mk}{a} e^{\frac{-m}{k}}$, e por conseguinte $v = \frac{k^2 - sk}{a} - \frac{k^2+mk}{a} e^{\frac{-s-m}{k}}$.

Seja m' o arco total DF'', que o corpo descreve na subida. Acharemos o valor de m', fazendo $v = 0$, e resolvendo a equaçaõ $k - m' = (k+m) e^{\frac{-m-m'}{k}}$, ou $(k-m') e^{\frac{m'}{k}} = (k+m) e^{\frac{-m}{k}}$. Reduzindo esta equaçaõ a duas series, teremos $-\frac{m'^2}{2} + \frac{m'^3}{3k} + \frac{m'^4}{8k^2} + \frac{m'^5}{30k^3}$ &c $= \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3k} + \frac{m^4}{8k^2} - \frac{m^5}{30k^3}$ &c; donde pelo methodo inverso das series, se tira $m' = m - \frac{2}{3}\frac{m^2}{k} + \frac{4}{9}\cdot\frac{m^3}{k^2} - \frac{44}{135}\cdot\frac{m^4}{k^3} +$ &c.

428 Esta ultima serie he de grande uso, quando a resistencia do meio he pequena; porque entaõ he k muito

to grande. Por outra parte advertiremos, que esta serie se chega muito para huma progressaõ geometrica, por quanto os tres primeiros termos estaõ exactamente em proporçaõ, e o quarto estará tambem se lhe suppusermos o coefficiente $\frac{8}{27}$, que differe pouco de $\frac{44}{135}$. Somando pois esta serie de termos, acharemos $m' = \frac{3km}{3k+2m}$. Sendo pois o arco descrito na descida representado por m, teremos $\frac{3km}{3k+2m}$ por expressaõ do arco da subida; e porque esta ultima quantidade he menor que m, concluiremos que os corpos em hum meio resistente naõ tem, como no vacuo, a propriedade de subirem a alturas iguaes ás donde desceraõ; facto, que pela experiencia de todos os dias he manifesto.

429 Sendo feita a primeira oscillaçaõ pelo arco $m + m'$, o movel começará a segunda descendo pelo arco m', e acaballa-ha subindo pelo arco $m'' = \frac{3km'}{3k+2m'}$. Substituindo nesta expressaõ o valor de $m' = \frac{3km}{3k+2m}$, teremos $m'' = \frac{3km}{3k+4m}$. Do mesmo modo fará a terceira oscillaçaõ descendo pelo arco m'', e subindo por outro arco mais pequeno $m''' = \frac{3km''}{3k+2m''} = \frac{3km}{3k+6m}$. Logo em geral, quando fizer a oscillaçaõ n, descerá por hum arco $= \frac{3km}{3k+2m(n-1)}$, e subirá por hum arco $=$ $\frac{3km}{3k+2mn}$.

Chamando M este ultimo arco, teremos $M = \frac{3km}{3k+2mn}$, ou $3k(m-M) = 2nmM$; donde se vê, que o numero das oscilaçoens he proporcional a $\frac{1}{M} - \frac{1}{m}$. Tambem

bem ſe poderia conhecer por experiencia a quantidade k que exprime a reſiſtencia, medindo o primeiro arco de deſcida m, e o ultimo de ſubida M, e contando-ſe exactamente o numero das oſcillaçoens.

430 Agora para determinarmos o tempo de huma oſcillaçaõ, deveremos recorrer á formula que acima achamos, $v = \frac{k^2 + sk}{a} - \frac{k^2 + mk}{a} e^{\frac{s-m}{k}}$, a qual ſendo convertida em huma ſerie dá $av = k^2 + sk - (k^2 + mk)$ $\left(1 + \frac{s-m}{k} + \frac{(s-m)^2}{2k^2} + \frac{(s-m)^3}{6k^3} + \frac{(s-m)^4}{24k^4} \&c\right)$ $= \frac{m^2 - s^2}{2} - \frac{(2m+s)(m-s)^2}{6k} + \frac{(3m+s)(m-s)^3}{24k^2}$ $- \frac{(4m+s)(m-s)^4}{120k^3} + \&c.$ Logo $\sqrt{\left(\frac{m^2 - s^2}{2av}\right)}$ $= 1 + \frac{(2m+s)(m-s)}{6k(m+s)} + \frac{m^2(m-s)^2}{24k^2(m+s)^2}$ &c. E porque $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2gv}}$, teremos

$$dt = \left(\frac{-ds}{\sqrt{(m^2 - s^2)}} - \frac{1}{6k} \cdot \frac{ds(2m+s)(m-s)}{(m+s)\sqrt{(m^2 - s^2)}} - \frac{m^2}{24k^2} \cdot \frac{ds(m-s)^2}{(m+s)^2 \sqrt{(m^2 - s^2)}} \&c\right) \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Porém $\int \frac{-ds}{\sqrt{(m^2 - s^2)}} = Arc\,cos\,\frac{s}{m}$, que ſe reduz a $\frac{1}{2}c$ quando $s = 0$. O outro termo $\frac{-ds(2m+s)(m-s)}{(m+s)\sqrt{(m^2 - s^2)}}$ póde coverter-ſe em $\frac{-2m^2 ds}{(m+s)\sqrt{(m^2 - s^2)}} + \frac{s\,ds}{\sqrt{(m^2 - s^2)}}$, cujo integral he $2m\sqrt{\frac{m-s}{m+s}} - \sqrt{(m^2 - s^2)}$, que ſendo $s = 0$ ſe reduz a m. E o terceiro termo $\frac{-ds(m-s)^2}{(m+s)^2 \sqrt{(m^2 - s^2)}}$

tem

tem por integral $-2\sqrt{\frac{m-s}{m+s}}+\frac{2}{3}.\left(\frac{m-s}{m+s}\right)^{\frac{3}{2}}$

$+2\,Arc\ tang\sqrt{\left(\frac{m-s}{m+s}\right)}$, o qual ſendo $s=0$ ſe reduz a $-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}c$. Logo em fim ſerá o tempo da deſcida pelo arco *FMD* determinado pela equaçaõ

$$t=\left[\frac{c}{2}+\frac{m}{6k}+\frac{m^2}{24k^2}\left(\frac{c}{2}-\frac{4}{3}\right)\right].\sqrt{\frac{a}{g}}:$$

431 Quanto ao tempo da ſubida, notaremos que entaõ he $v=\frac{k^2-sk}{a}-\frac{k^2+mk}{a}e^{\frac{-s-m}{k}}$; e que ſendo m' o arco total, he $(k+m)\,e^{\frac{-m}{k}}=(k-m')\,e^{\frac{m'}{k}}$; logo teremos $av=k^2-sk-(k^2-m'k)\,e^{\frac{m'-s}{k}}$; equaçaõ, que ſe deduz da formula $av=k^2+sk-(k^2+mk)\,e^{\frac{s-m}{k}}$, que temos achado para a deſcida, pondo m' em lugar de m, e fazendo k negativo. Como pois o integral, que dá o tempo da ſubida, deve igualmente tomar-ſe entre os limites $s=0$, e $s=m'$, naõ he neceſſario mais do que fazer k negativo, e pôr m' em lugar de m na formula do tempo da deſcida; e aſſim teremos por expreſſaõ do tempo da ſubida

$$t'=\left[\frac{c}{2}-\frac{m'}{6k}+\frac{m'^2}{24k^2}\left(\frac{c}{2}-\frac{4}{3}\right)\right].\sqrt{\frac{a}{g}}:$$

Ajuntando eſtas duas formulas, teremos pois o tempo T de huma oſcillaçaõ inteira pela equaçaõ ſeguinte

$$T=\left[c+\frac{m-m'}{6k}+\frac{m^2+m'^2}{24k^2}\left(\frac{c}{2}-\frac{4}{3}\right)\right].\sqrt{\frac{a}{g}}:$$

432 Se neſta equaçaõ ſubſtituirmos o valor de m', que he

he $m - \frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{k}$ &c, iſto he, ſe puzermos $\frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{k}$ em lugar de $m - m'$, e m^2 em lugar de m'^2, teremos

$$T = \left(1 + \frac{m^2}{24k^2}\right) c \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Donde ſe vè, que eſte tempo naõ excede o que já temos achado para huma oſcillaçaõ feita no vacuo, ſenaõ em huma quantidade extremamente pequena $\frac{m^2}{24k^2} c \sqrt{\frac{a}{g}}$, a qual he proporcional ao quadrado do arco deſcrito pelo pendulo.

Quando o pendulo fizer a oſcillaçaõ n, he o arco da ſubida $M = \frac{3km}{3k + 2mn}$, e o da deſcida precedente $= \frac{3km}{3k + 2m(n-1)}$. Logo ſerá o tempo deſta oſcillaçaõ repreſentado por $\left(1 + \frac{3m^2}{8(3k + 2m(n-1))^2}\right) c \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Eiſaqui todas as circunſtancias do movimento de hum pendulo cycloidal, determinadas para qualquer oſcillaçaõ feita em hum meio de pouca reſiſtencia, como he o ar por exemplo; e tudo iſto póde applicar-ſe ao pendulo circular, quando os arcos das oſcillações forem pequenos.

433 Quando a reſiſtencia dos fluidos he em parte conſtante, e em parte proporcional ao quadrado da velocidade, he neceſſario nos movimentos mais vagaroſos, ou nas oſcillações muito pequenas, attender á primeira parte que póde vir a ſer ſenſivel em comparaçaõ da ſegunda. Eſta conſideraçaõ naõ faz o calculo mais complicado, como he facil de ver pela applicaçaõ ſeguinte.

Supponhamos que o ponto F (Fig. 163.) he o principio da deſcida pelo arco FMD, e que o movel ſe acha em qualquer ponto M. Fazendo $DP = x$, e $DM = s$, ſerá $\frac{g\,dx}{ds}$ a força tangencial que reſulta da gravidade; e deſignando por R a reſiſtencia, teremos $dv = -dx + \frac{R\,ds}{g}$. Porém neſte caſo a reſiſtencia R he compoſta da

parte

parte $\frac{gv}{k}$ proporcional ao quadrado da velocidade, e de huma parte conſtante $\frac{gb}{k}$; logo $dv = -dx + \frac{vds}{k} + \frac{bds}{k}$; equaçaõ, que dará geralmente a velocidade do movel, ſeja qual for a curva que elle deſcreva pelo ſeu movimento.

Se for huma cycloide, ſendo o comprimento do pendulo $= a$, teremos $s^2 = 2ax$, e $dx = \frac{sds}{a}$; logo $dv - \frac{vds}{k} = -\frac{sds}{a} + \frac{bds}{k}$. Multiplicando por $e^{\frac{-s}{k}}$, e integrando, $ve^{\frac{-s}{k}} = C - be^{\frac{-s}{k}} + \frac{k^2 + sk}{a} e^{\frac{-s}{k}}$; e porque no caſo de $s = m$, deve ſer $v = o$, teremos $C = -\left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$, e $v = \frac{k^2 + sk}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{s-m}{k}}$. Logo, quando $s = o$, iſto he, no ponto mais baixo da curva D, ſerá a velocidade do movel devida á altura $\frac{k^2}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$.

Pelo que reſpeita ao aſcenſo, ſerá $dv + \frac{vds}{k} = -\frac{sds}{a} - \frac{bds}{k}$. Multiplicando por $e^{\frac{s}{k}}$, e integrando, teremos $ve^{\frac{s}{k}} = C' - be^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2 - sk}{a} e^{\frac{s}{k}}$, e conſeguintemente

v

$v = C' e^{\frac{-s}{k}} - b + \frac{k^2 - sk}{a}$. Mas sendo $s = 0$, deve ser $v = \frac{k^2}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$; logo $C' = -\left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m}{k}}$, e por conseguinte $v = \frac{k^2 - sk}{a} - b - \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-s-m}{k}}$. E porque sendo $s = m'$, temos $v = 0$, será $\frac{k^2 - m'k}{a} - b = \left(\frac{k^2 + mk}{a} - b\right) e^{\frac{-m'-m}{k}}$, ou $(k^2 - m'k - ab) e^{\frac{m'}{k}} = (k^2 + mk - ab) e^{\frac{-m}{k}}$.

O methodo inverso das series dará $m' = m - \frac{1}{k}\left(2ab + \frac{2}{3}m^2\right) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{4}{3}abm + \frac{4}{9}m^3\right)$ &c $= m\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{k} + \frac{4}{9}\cdot\frac{m^2}{k^2}\right) - \frac{2ab}{k}\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{k}\right) = \left(m - \frac{2ab}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{m}{k} + \frac{4}{9}\cdot\frac{m^2}{k^2}\right) = \frac{3km - 6ab}{3k + 2m}$.

Na segunda oscillaçaõ será pois o arco da subida $m'' = \frac{3km' - 6ab}{3k + 2m'} = \frac{3km - 12ab}{3k + 4m}$; na terceira oscillaçaõ $m''' = \frac{3km'' - 6ab}{3k + 2m''} = \frac{3km - 18ab}{3k + 6m}$; e em geral na oscillaçaõ n, será o arco da subida que chamamos $M =$

$\frac{3km-6nab}{3k+2nm}$. Donde ſe póde tirar $n=\frac{3k(m-M)}{2mM+6ab}$.

Daqui ſe ſegue, que medindo bem exactamente o arco da deſcida m na primeira oſcillaçaõ, e o arco M da ſubida na ultima, havendo-ſe tambem contado o numero total das oſcillações, teremos huma equaçaõ entre b e k. Repetindo ſegunda vez a meſma experiencia, teremos outra equaçaõ entre as meſmas quantidades b e k, a qual combinada com a primeira ſervirá para determinar o valor de cada huma dellas. Por eſte meio pois conheceremos a reſiſtencia abſoluta do ar, tanto a parte proporcional ao quadrado da velocidade, como a parte conſtante.

Exemplo tirado de algumas experiencias de Newton ſobre a reſiſtencia do ar.

434 ENtre outras experiencias feitas com muito cuidado ſobre eſta materia, lemos nos Principios de Newton *L. II. Sect. VI. Prop. XXXI* a experiencia ſeguinte.

Hum globo de madeira, que tinha de diametro 6 pollegadas e $\frac{7}{8}$ de Londres, e que pezava 57 onças Romanas e $\frac{7}{22}$, eſtava pendurado de hum fio de maneira, que o centro de oſcillaçaõ (onde todo o corpo ſe conſidera eſtar reunido, e oſcillar como hum ponto) diſtava do ponto de ſuſpenſaõ 10 pés e $\frac{1}{2}$, medida de Londres. Tinha-ſe feito no fio hum nó diſtante do ponto de ſuſpenſaõ 10 pés e huma pollegada. O arco deſcrito por eſte nó ſervia para medir o que deſcrevia o centro de oſcillaçaõ no meſmo tempo; e para eſte effeito ſe multiplicava o primeiro por $\frac{126}{121}$.

Poz-ſe eſte pendulo em movimento, de maneira que o arco descrito pelo nó até a vertical fosse de 2 pollegadas, e deixou-se oscillar até perder a oitava parte do movimento. Elle a perdeu no fim de 164 oscillações, e o ultimo arco de subida foi de 1 pollegada e $\frac{3}{4}$.

Depois afastou-se o nó da vertical 4 pollegadas; e observou-se, que tendo feito 121 oscillações perdeu a oitava parte do movimento, e foi o ultimo arco de subida 3 pollegadas $\frac{1}{2}$. Em fim repetindo a mesma operaçaõ a respeito de outras distancias, se acháraõ os resultados seguintes.

Primeiro arco de descida	Ultimo arco de subida	Numero das oscillações
2	$1\frac{3}{4}$	164
4	$3\frac{1}{2}$	121
8	7	69
16	14	$35\frac{1}{2}$
32	28	$18\frac{1}{2}$
64	56	$9\frac{2}{3}$

Appliquemos agora a theorica a estas experiencias, porque os resultados saõ muito interessantes.

Sendo o primeiro arco de descida $= m$, no fim de hum numero n de oscillações teremos o ultimo arco de subida $= \frac{3km - 6nab}{3k + 2nm}$, quantidade que no caso destas experiencias he $= \frac{7}{8}m$; e conseguintemente deveremos ter $\frac{3}{8}km = n\left(\frac{7}{4}m^2 + 6ab\right)$.

Seja

Seja m' outro arco de descida, e n' o numero das oscillações correspondentes. Igualmente teremos $\frac{3}{8} k m' = n' \left(\frac{7}{4} m'^2 + 6 a b\right)$; logo $\frac{3}{8} k \left(\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}\right) = \frac{7}{4} \left(m^2 - m'^2\right)$, e finalmente $k = \frac{14}{3} \cdot \frac{m^2 - m'^2}{\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}}$.

Se m for duplo de m', como succede tomando duas observações consecutivas da Taboa precedente, será $k = \frac{14 m' n n'}{2 n' - n}$. Porém he de advertir, que m' he o arco descrito pelo centro de oscillaçaõ, e se em lugar delle substituirmos o arco descrito pelo nó, resultará por valor de k $\frac{121}{126}$ da sua verdadeira quantidade sómente.

Tomemos pois as duas primeiras observações, que daõ $m' = 2$, $n' = 164$, $n = 121$; e acharemos $\frac{14 m' n n'}{2 n' - n} = 2684$ pollegadas $= 223$ pés e $\frac{2}{3} = \frac{121}{126} k$. Tomando a segunda e terceira das mesmas observações, e fazendo $m' = 4$, $n' = 121$, $n = 69$, acharemos $\frac{121}{126} k = 225$ pés e $\frac{1}{4}$.

E comparando do mesmo modo duas a duas as observações seguintes, teremos por $\frac{121}{126} k$ em pés de Londres os valores seguintes

$$223 \frac{2}{3} \ldots\ldots 225 \frac{1}{4} \ldots\ldots 223 \ldots\ldots 233 \frac{1}{2} \ldots\ldots 244.$$

He verdade que os dous ultimos valores differem sensivelmente dos tres primeiros. Mas deve advertir-se, que esta theorica calculada para os pendulos cycloidais, naõ póde applicar-se aos circulares, senaõ quando os arcos destes saõ muito pequenos. E por isso devia necessariamente achar-se huma differença sensivel nos dous ultimos valores, por terem resultado de oscillações feitas por arcos algum tanto consideraderaveis, ſendo hum de 32 pollegadas, e o outro de 64.

Se nos cingirmos pois aos tres primeiros valores, como deve ſer, a ſua conformidade he quanta ſe podia eſperar de experiencias de tal delicadeza; e ſe tomarmos o meio arithmetico, teremos 224 pés por valor real de $\frac{121}{126}k$. Logo $k = 233$ pés de Londres; e porque o pé de Londres he para o de Paris como 811 para 864, ſerá $k = 219$ pés de Paris.

Sendo pois o globo deſtas experiencias animado de huma velocidade devida á altura de 219 pés, experimentaria da parte do ar huma reſiſtencia igual á gravidade; e conſeguintemente, em havendo adquirido eſta velocidade continuaria a mover-ſe uniformemente, porque a acceleraçaõ da gravidade ſeria igual e contraria á reſiſtencia do fluido.

435 Determinada a quantidade k, que mede a parte principal deſta reſiſtencia, iſto he, a parte proporcional ao quadrado da velocidade, falta determinar b que mede a parte conſtante. Para iſſo uſaremos da equaçaõ $\frac{3}{8} \cdot \frac{km}{n} = \frac{7}{4}m^2 + 6ab$, que dá $48ab = 3k \cdot \frac{m}{n} - 14m^2$. Ora na primeira deſtas obſervações $m = \frac{126}{121} \cdot 2$ pollegadas, $k = \frac{126}{121} \cdot 12 \cdot 224$, $a = 126$, e $n = 164$; logo $b = 0{,}00759$ de huma pollegada.

Calculando a meſma quantidade pela ſegunda experiencia, e tomando $m = \frac{126}{121} \cdot 4$, e $n = 121$, teremos $b = 0{,}00763$; reſultado muito conforme ao primeiro, para deixar de inſpirar confiança na theorica, que a elle nos conduzio. Se tomarmos o meio arithmetico, acharemos $b = 0{,}00761$ de huma pollegada. E porque temos ſuppoſto, que a parte conſtante da reſiſtencia era repreſentada por $\frac{gb}{k}$; ſubſtituindo o valor de $k = 12 \cdot 233$ pollegadas, ſerá $\frac{b}{k} = 0{,}0000027$.

Assim achamos, que a resistencia constante que o globo experimenta da parte do ar he proximamente huma quatro-centesima-millesima parte da gravidade. Mas ainda que fosse mais pequena, sempre della deveria fazer-se caso nos movimentos muito vagarosos, porque póde entaõ exceder infinitamente a parte da resistencia, que he proporcional ao quadrado da velocidade.

436 Como esta resistencia constante tem lugar em todos os fluidos, póde succeder que o pendulo fique em equilibrio, sem que o fio esteja exactamente vertical. Basta para isso (Fig. 162.), que a força tangencial $g\ sen\ MCD$ da gravidade seja igual á resistencia $\frac{g}{400000}$; e por consequinte, que o seno de MCD seja 0,0000027; donde resulta o angulo MCD de $33'''$. Logo o prumo indicado pelo pendulo destas experiencias podia distar da verdadeira vertical $33'''$.

437 Daqui se segue, que o referido pendulo devia ficar em quietaçaõ, assim que o ultimo arco de subida fosse $= \frac{ab}{k}$. O numero das oscillações necessarias para chegar a este estado se calculará pela formula $\frac{ab}{k} = \frac{3km - 6nab}{3k + 2nm}$; donde se tira $anb = \frac{3km - 3ab}{6 + \frac{2m}{k}}$. E applicando esta formula á primeira experiencia, teremos $n = 8565593$ oscillações, que devia fazer o pendulo antes de haver perdido todo o seu movimento.

E porque o comprimento deste pendulo era de 126 pollegadas de Londres, ou de $\frac{21 . 811}{1728}$ pés de Paris, o tempo de cada oscillaçaõ devia ser de $1'',7948$. Logo deveria o pendulo oscillar por pouco menos de 178 dias, fazendo abstracçaõ naõ sómente da resistencia, que o ar oppunha ao movimento do fio, mas tambem da fricçaõ occasionada pelo ponto de suspensaõ. Na pratica porém naõ he necessario tanto tempo, porque o movimento brevemente se faz insensivel, e entaõ he como se já tivesse chegado ao estado de quietaçaõ.

Da

Da Linha do mais breve descenso.

438 PEde-se, que entre dous pontos dados A, B (Fig. 165.), se descreva em hum plano vertical a curva AMB, de maneira que descendo hum corpo por ella, de A até B, corra o arco AB no menor tempo possivel.

Este Problema se reduz a achar a linha, na qual a expressaõ do tempo he hum *minimo*. Para a determinar, conduzamos pelo ponto A huma horizontal AP, e tomemos na curva dous elementos consecutivos MM', $M'M''$. Dos pontos M, M', M'' levantemos MP, $M'P'$, $M''P''$ perpendiculares á recta AP, e seja $AP = x$, $PM = y$, e $AM = s$.

Isto posto, quando o corpo chegar ao ponto M deverá ter a mesma velocidade, como se houvesse cahido pela vertical PM; e conseguintemente o tempo empregado em correr o arco AM será representado por $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. He logo necessario que $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$, ou simplesmente que $\int \frac{ds}{\sqrt{y}}$ seja hum *minimo*.

Para exprimir esta condiçaõ, supponhamos que o ponto M' varia infinitamente pouco na direcçaõ horizontal. Está claro, que se o arco MM'' faz parte da curva procurada, o tempo naõ deve por isso variar. Por conseguinte, a unica parte do tempo susceptivel de variaçaõ, he a que emprega o corpo em correr os dous elementos consecutivos MM', $M'M''$, ou $\frac{ds}{\sqrt{y}} + \frac{ds'}{\sqrt{y'}}$. Com effeito, de qualquer maneira que seja situado o ponto M', se elle sómente variar, a velocidade em M'' para correr $M''B$ será sempre a mesma.

Teremos pois $\frac{\delta ds}{\sqrt{y}} + \frac{\delta ds'}{\sqrt{y'}} = 0$; e porque $ds^2 = dx^2 + dy^2$, acharemos que $ds\,\delta ds = dx\,\delta dx$, e que $ds'\,\delta ds' = dx'\,\delta dx'$. Logo $\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta dx + \frac{dx'}{ds'\sqrt{y'}}\delta dx'$ $= 0$.

$= 0$. Mas ſendo $dx + dx'$ huma quantidade conſtante; temos $\delta dx' = -\delta dx$; logo $\frac{dx'}{ds'\sqrt{y'}} - \frac{dx}{ds\sqrt{y}} = 0$, e conſeguintemente $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\right) = 0$, equaçaõ da curva procurada.

Integrando, teremos $\frac{dx}{ds\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ou $a\,dx^2 = y\,ds^2 = y\,dx^2 + y\,dy^2$; logo $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$. Eſta equaçaõ já moſtra, que a curva procurada he a cycloide, como he facil de reconhecer, reduzindo-a a eſta fórma $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{y\,dy - \frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$, cujo integral he $x = C - \sqrt{(ay-yy)} + \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$.

439 Da equaçaõ $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$ ſe ſegue, que no ponto mais baixo da curva D (Fig. 166.) he a ordenada $CD = a$; e ſe imaginarmos hum ſemicirculo deſcrito ſobre o diametro CD, e conduzida a horizontal MQ, teremos $NQ = \sqrt{(ay-yy)}$, e $CN = \int \frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-yy)}}$; logo $AP = CN - NQ$. Pela meſma raſaõ $AC = CND$; logo $AC - AP$, ou CP, ou $MQ = CND - CN + NQ = ND + NQ$, ou $MN = DN$, que he a propriedade mais conhecida da cycloide. Logo *a cycloide he a linha do mais breve deſcenſo.*

440 Como ſaõ dados os dous pontos A, e B (Fig. 167.), naõ ſerá difficultoſo deſcrever por elles a curva procurada. Podemos primeiramente deſcrever qualquer cycloide ſobre a baſe horizontal AL tomada arbitrariamente. Encontrando eſta curva a corda AB no ponto K, pelo ponto B conduziremos a linha BF parallela a KL, e ſerá AF a baſe da cy-

cycloide procurada, ou (que vem a ſer o meſmo) ſerá AF igual á circumferencia do circulo genitôr; e ſendo eſte conhecido, a deſcripçaõ da cycloide procurada naõ tem mais difficuldade. Funda-ſe eſta conſtrucçaõ em que as cycloides ſaõ curvas ſemelhantes; effectivamente naõ entra na equaçaõ dellas outra conſtante que o diametro do circulo genitôr.

Todos os Geometras da primeira ordem ſe occupáraõ no principio deſte ſeculo ſobre o problema da linha do mais breve deſcenſo, e todos acháraõ por reſultado hum arco de cycloide. Daqui vem o nome de *Curvas brachiſtóchronas*, para deſignar geralmente todas as que em differentes caſos tem a propriedade de ſerem as linhas do mais breve deſcenſo. Mas para tratarmos eſte artigo com mais generalidade, ajuntaremos o problema ſeguinte.

441 Sendo hum corpo ſollicitado por quaiſquer potencias ſobre hum plano dado, achar a linha do mais breve deſcenſo de hum ponto até outro qualquer ponto dado (Fig. 165.).

Reduzidas todas as potencias a duas, huma pela direcçaõ PM, e a outra parallela a AP, ſeja a primeira $= Y$, a ſegunda $= X$, e a altura devida á velocidade no ponto $M = v$. Aſſim teremos por expreſſaõ do tempo da deſcida pelo arco $MM'M''$ a quantidade $\frac{ds}{\sqrt{v}} + \frac{ds'}{\sqrt{v'}}$, que differenciada deve por-ſe $= 0$. Neſta differenciaçaõ, tudo o que depende do ponto M' he variavel; e aſſim teremos

$$\frac{\delta ds}{\sqrt{v}} + \frac{\delta ds'}{\sqrt{v'}} - \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0.$$

Suppondo, que a fluxaõ do ponto M' ſe faz horizontalmente, teremos $\delta dy = 0$, e conſeguintemente $\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx$, e $\delta ds' = \frac{dx'}{ds'}\delta dx' = -\frac{dx'}{ds'}\delta dx$. Logo

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}} - \frac{dx'}{ds'\sqrt{v'}}\right)\delta dx - \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0, \text{ iſto he,}$$

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right)\delta dx + \frac{ds'\delta v'}{2v'\sqrt{v'}} = 0.$$

Sendo

Sendo pois a força tangencial $= \frac{X dx + Y dy}{ds}$, teremos $g dv = X dx + Y dy$, e $g dv' = X' dx' + Y' dy'$ Mudando nesta ultima d em δ, teremos $g \delta v' = X' \delta x' + Y' \delta y' = X' \delta dx$; logo $\delta v' = \frac{X'}{g} \delta dx$, e substituindo será a equação da curva $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right) + \frac{X ds}{2gv\sqrt{v}} = 0$. Se em lugar da expressão $d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{v}}\right)$ substituirmos $\frac{1}{\sqrt{v}} d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx\,dv}{2v\,ds\sqrt{v}}$, viremos a ter $2vd\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{X ds^2 - g\,dx\,dv}{g\,ds} = 0$; e pondo em lugar de $g dv$ o seu valor $X dx + Y dy$, será $2vd\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{X dy^2 - Y dy\,dx}{g\,ds} = 0$, ou $\frac{Y dx - X dy}{ds} = 2gv \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$. Mas he o raio osculador $R = \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$; logo $\frac{Y dx - X dy}{ds} = \frac{2gv}{R}$.

Donde se segue, que *a linha da mais breve descida he aquella, em que a força centrifuga he igual á força normal; de maneira, que a pressaõ total sobre a curva seja o dobro de qualquer dellas.*

442 Esta ultima conclusaõ he o Theorema que M. Euler propoem na sua Mechanica, para a indagaçaõ geral das brachistochronas. Mas esta propriedade naõ se extende aos meios resistentes, porque a velocidade em M'' para correr o arco $M''B$ naõ he mais a mesma, quando o ponto M' recebe qualquer variaçaõ. He necessario pois calcular o aumento do tempo por todo o arco $MM'M'' + M''B$, o que faz esta indagaçaõ muito mais difficultosa.

Da soluçaõ geral, que acabamos de dar, póde facilmente deduzir-se a do primeiro caso. Entaõ he $X = 0$, $Y = g$, g, $v = y$; e teremos $\frac{dx}{ds} = \frac{2y}{R} = \frac{2yd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$. Logo $\frac{dy}{2y} = d\left(\frac{dx}{ds}\right) : \frac{dx}{ds}$; e integrando $\frac{1}{2}ly = l\frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}la$, ou $y = \frac{adx^2}{ds^2}$; donde ſe tira $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, como tinhamos achado (n. 438.).

SECCAÕ III.

DO MOVIMENTO DOS CORPOS QUE OBRAM HUNS CONTRA OS OUTROS DE QUALQUER MANEIRA.

NAS duas Secções precedentes temos ſuppoſto os moveis, como pontos ſolitarios, que podiaõ obedecer livremente a toda a ſorte de potencias. Agora determinaremos o ſeu movimento, ſuppondo que elles actuaõ huns contra os outros, ou por colliſaõ, ou por meio de quaiſquer vinculos, com os quais eſtejaõ ligados, e unidos entre ſi.

ARTIGO I.

Do movimento que reſulta da colliſaõ dos corpos.

443 POſto que naõ conhecemos corpo algum perfeitamente *duro*, nem perfeitamente *elaſtico*, fomos com tudo obrigados a ſuppor-lhe a exiſtencia, para eſtabelecer huma theorica geral das leis do movimento, no caſo da colliſaõ. Por iſſo na applicaçaõ deſtas leis, deveremos tomallas como approximações maiores, ou menores, conforme os corpos ſe chegarem mais ou menos para a *dureza*, ou para a *elaſticidade* perfeita.

Para que elles foſſem perfeitamente duros, era neceſſario que força nenhuma os pudeſſe comprimir, nem alterar em nada a ſua figura; e para que foſſem perfeitamente elaſticos,

ſticos, que a elaſticidade os reſtituiſſe ao primeiro eſtado no meſmo inſtante em que ceſſa a compreſſaõ. Mas para o dizer outra vez, naõ conhecemos corpo algum de volume finito, que tenha perfeitamente qualquer deſtas duas propriedades. O diamante he muito duro, o marfim muito elaſtico; mas naõ paſſaõ de modelos imperfeitos deſtas propriedades.

Sem embargo, depois de havermos poſto o principio que deu M. d' Alembert no ſeu Tratado de Dynamica, para determinar o movimento de muitos corpos, que entre ſi actuaõ de qualquer maneira, applicallo-hemos á colliſaõ dos corpos, e aõ movimento do centro de gravidade do ſeu ſyſtema.

444 Sejaõ *A*, *B*, *C* &c as particulas de qualquer ſyſtema, nas quais ſe imprimaõ reſpectivamente os movimentos *a*, *b*, *c* &c. Como ellas naõ ſaõ livres, ſupponhamos que mudaõ os movimentos recebidos em outros a, b, c &c. Aſſim podemos imaginar que os movimentos impreſſos *a*, *b*, *c*, &c ſaõ compoſtos, cada hum de outros dous, hum a, ou b, ou c &c, que cada particula tomará reſpectivamente, e o outro α, ou β, ou γ &c. Os primeiros deſtes movimentos a, b, c &c tem o ſeu effeito inteiramente, ſem que os vinculos do ſyſtema lhe ſirva de embaraço algum, porque tal he a ſuppoſiçaõ. Os outros α, β, γ &c, naõ tendo influido nada em alterar os primeiros, ſeraõ mutuamente deſtruidos entre ſi. Logo ſaõ combinados de maneira, que deixariaõ todo o ſyſtema em equilibrio, ſe as partes delle naõ foſſem animadas de outros movimentos. Daqui reſulta o principio ſeguinte, para achar o movimento de muitos corpos, que actuaõ entre ſi de qualquer maneira.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL.

SE forem reſolvidos os movimentos a, b, c &c, *impreſſos nas differentes partes de hum meſmo ſyſtema, cada hum em outros dous* a, α; b, β; c, $\varkappa$ *&c, de maneira que naõ dando ás ditas partes outros movimentos mais que* a, b, c *&c, ellas os conſervaſſem, ſem ſe embaraçar mutuamente, e que naõ lhes dando ſenaõ os movimentos* α, β, $\varkappa$ *&c, todo o ſyſtema ficaſſe em quietaçaõ; entaõ ſeraõ* a, b, c *&c os movimentos, que as partes do ſyſtema tomaráõ em virtude dos*

dos movimentos impressos a, b, c &c, e da acçaõ reciproca que exercitaõ entre si.

445 Este principio igualmente simples, e fecundo, extende-se a todas as theorias, que entramos a explicar, principiando pela collisaõ dos corpos duros.

Suppomos aqui, que os centros de gravidade de dous corpos, que se encontraõ, se movem por huma mesma linha, e que o plano tangente ao ponto do encontro he perpendicular á direcçaõ do movimento delles. O concurso destas duas supposições traz sempre comsigo huma percussaõ directa, e exclue conseguintemente todo o movimento de rotaçaõ.

446 Sejaõ pois dous corpos duros M, m, movidos para a mesma parte com as velocidades V, v, que pela collisaõ se mudaõ em u, u'. Podemos, conforme o principio fundamental, considerar no instante da percussaõ os corpos M, m, como animados das velocidades u, u', que deveràõ conservar depois della, e das velocidades $V-u$, e $v-u'$, que seraõ destruidas. Porém as velocidades u, u' naõ devem embaraçar-se reciprocamente, conforme o mesmo principio; logo saõ iguais, porque o corpo que encontra naõ tem acçaõ sobre o encontrado, senaõ até o ponto de serem as velocidades iguais; logo $u=u'$.

Tambem deve haver hum perfeito equilibrio entre o corpo M animado da velocidade $V-u$, e o corpo m animado da velocidade $u'-v$ em sentido contrario. Logo $M(V-u)=m(u-v)$; donde se tira $u=\dfrac{MV+mv}{M+m}$.

447 Esta formula mostra, que *a velocidade commua dos dous moveis depois do encontro se acha, dividindo a soma das quantidades de movimento, que elles tinhaõ antes do encontro, pela soma das massas.*

Donde se segue, que na hypothese presente se conserva a mesma quantidade de movimento antes, e depois da percussaõ. Ganha hum dos moveis pela collisaõ o que o outro perde pela inercia.

Se os dous moveis caminharem por direcçoens oppostas, faremos v negativo na formula precedente, e teremos $u=\dfrac{MV-mv}{M+m}$; logo para achar a velocidade commua depois do encontro neste caso, será necessario dividir a diffe-

differença das quantidades de movimento, que os corpos tinhaõ antes da collisaõ, pela soma das massas.

E se hum dos dous corpos, m por exemplo, estiver em quietaçaõ, faremos $v = 0$, e será $u = \frac{MV}{M+m}$. Donde se segue, que sempre haverá communicaçaõ de movimento, por muito pequenas que sejaõ tanto a velocidade como a massa do corpo, que fére o outro. Assim póde a menor força finita vencer a inercia da maior massa.

Para darmos hum exemplo destas formulas, sejaõ dous corpos duros, dos quais hum M péza 5 libras, e o outro m péza 3 libras, movidos para a mesma parte com as velocidades respectivas de 9 pés, e 1 pé por segundo. Substituindo estes valores, teremos $u = \frac{5 \cdot 9 + 3 \cdot 1}{5+3} = 6$; e diremos, que ambos os corpos depois da collisaõ teraõ a velocidade commua de 6 pés por segundo. Se as direcçoens fossem contrarias, teriamos $u = 5$ pés $\frac{1}{4}$; e se o corpo m estivesse em quietaçaõ, $u = 5$ pés $\frac{5}{8}$.

448 Sendo elasticos porém os dous moveis M, m, primeiramente se comprimiráõ hum ao outro, até que os seus centros de gravidade, e o ponto de contacto tenhaõ huma velocidade igual, que chamaremos u. Mas assim que cessar a compressaõ, os dous corpos se serviráõ mutuamente de apoyo, e a elasticidade retornando forças iguais ás da compressaõ lhes imprimirá a mesma quantidade de movimento, com a qual foraõ comprimidos. Em virtude desta reacçaõ tenderáõ os dous moveis a separar-se hum do outro.

Logo, se elles se moverem para a mesma parte, no qual caso temos $u = \frac{MV + mv}{M+m}$, a força com que o corpo incurrente comprime o outro será $M(V-u)$, e esta lhe será restituida pela elasticidade em sentido contrario. Assim naõ terá depois da percussaõ mais que a velocidade u diminuida de V u, isto he, a velocidade de $2u - V$.

O se-

O ſegundo corpo pelo contrario, fazendo equilibrio á compreſſaõ do primeiro com a força $m(u-v)$, e ſendo-lhe eſta reſtituida pela elaſticidade ſegundo a direcçaõ do ſeu proprio movimento, deverá mover-ſe depois do encontro com a velocidade u aumentada de $u-v$, que ſe reduz a $2u-v$. Logo *para achar a velocidade de cada hum dos corpos depois da colliſaõ, he neceſſario tirar a ſua velocidade primitiva do dobro da velocidade commua, que ambos teriaõ ſe foſſem perfeitamente duros.*

Se ſuppuzermos, que elles ſe encontraõ por direcçoens contrarias (tomando ſempre MV pela maior quantidade de movimento), teremos $u=\frac{MV-mv}{M+m}$; e a velocidade do corpo M depois da colliſaõ ſerá como d'antes $2u-V$; mas a do corpo m ſerá entaõ $2u+v$, como tambem ſe deduz do caſo precedente, fazendo v negativo.

449 Seja V' a velocidade de M, e v' a de m depois da colliſaõ; e ſuppondo que ambos ſe movem para a meſma parte, teremos

$$V'=\frac{2MV+2mv}{M+m}-V=\frac{(M-m)V+2mv}{M+m},$$

$$v'=\frac{2MV+2mv}{M+m}-v=\frac{(m-M)v+2MV}{M+m};$$

donde ſe tira, que $MV'+mv'=MV+mv$, iſto he, que a ſoma das quantidades de movimento he a meſma tanto antes, como depois da colliſaõ.

Mas ſe os moveis ſe encontrarem por direcçoens oppoſtas, teremos entaõ

$$V'=\frac{2MV-2mv}{M+m}-V=\frac{(M-m)V-2mv}{M+m},$$

$$v'=\frac{2MV-2mv}{M+m}+v=\frac{(M-m)v+2MV}{M+m};$$

donde ſe tira eſta equaçaõ $MV'+mv'=MV-mv$, que naõ dá as ſomas das quantidades de movimento iguaes, como no caſo precedente.

450 Em ambos os caſos porém, teremos ſempre a equa-

equação $MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2$. Sendo pois o producto da maſſa de hum corpo pelo quadrado da ſua velocidade chamado por Leibnitz *força viva* do meſmo corpo, podemos dizer neſte ſentido, que *os corpos perfeitamente elaſticos conſervaõ depois da colliſaõ a meſma ſoma das forças vivas, que tinhaõ antes della.*

Podemos pois conſiderar as leis da colliſaõ dos corpos elaſticos, como incluidas neſtas duas equaçoens muito ſimples

$$MV \pm mv = MV' + mv'$$
$$MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2,$$

das quais ſe deduz outra ainda mais ſimples $V' + V = v' \pm v$, tomando-ſe o final $+$ quando os corpos ſe encontraõ por huma meſma direcçaõ, e $-$ quando ſe encontraõ por direcçoens oppoſtas.

Se o corpo ferido m eſtiver em quietaçaõ, e for a ſua maſſa igual á do corpo incurrente M, teremos $M = m$, $v = 0$; e conſeguintemente $V' = 0$, e $v' = V$. Logo o corpo incurrente M ficará em quietaçaõ, e o corpo ferido m partirá com toda a velocidade, que trazia o corpo M. Iſto ſe experimenta todos os dias no jogo do bilhar, quando com huma bóla ſe fere outra em cheio.

451 Se ſuppuzermos muitos corpos elaſticos, iguais, contiguos huns aos outros, e que tenhaõ todos o ſeu centro em huma meſma linha, entaõ o movimento impreſſo no primeiro paſſará pelos intermedios a communicar-ſe ao ultimo, e eſte ſó ſe moverá com a velocidade impreſſa, ficando os outros immoveis. Mas ſe fizeſſemos mover os dous primeiros juntamente, entaõ os dous ultimos ſe deſtacariaõ da fileira com a meſma velocidade que os primeiros tinhaõ antes da colliſaõ.

A raſaõ diſto he, porque ferindo o ſegundo corpo primeiramente o terceiro, logo lhe communica a ſua velocidade, que paſſa immediatamente ao ultimo, o qual ſe deſtaca conſeguintemente dos outros; mas como o ſegundo tranſmittindo a ſua velocidade ao ultimo, ſe comprime de ambas as partes, ſepara-ſe hum momento do primeiro, que vem conſecutivamente a fazer o meſmo effeito, deſtacando o penultimo, que ſeguirá por conſeguinte ao ultimo. Em geral, ſempre haverá tantos corpos que ſe deſtacaráõ dos precedentes, quantos forem os que juntamente vierem a ferir a fileira dos outros.

Se

Se dous corpos elaſticos M, m ſe encontrarem por direcçoens oppoſtas, hum M com a velocidade de 7 pés, e o outro m com a de 3 pés por ſegundo, e com huma maſſa tripla de M, teremos $m = 3M$, $V = 7$, $v = 3$; e ſubſtituindo eſtes valores na formula do ſegundo caſo, acharemos $V' = -8$, e $v' = 2$. Logo os dous moveis tornaráõ para traz pelo meſmo caminho, por onde vieraõ a encontrar-ſe, com as velocidades reſpectivas de 8 e de 2 pés por ſegundo. Pódem ver-ſe outras applicaçoens em Graveſande *Phyſices Elementa Mathem.* L. II. Cap. VI.

Até aqui temos conſiderado a colliſaõ entre dous corpos ſómente. Quando forem muitos, pelo problema ſeguinte poderemos conhecer o meio de determinar o ſeu movimento.

452 Probl. *Sendo dado hum corpo esferico C* (Fig. 168.), *movido pela linha CI com a velocidade $CD = V$, e encontrando ao meſmo tempo com os dous corpos A, B em quietaçaõ, perguntaõ-ſe as velocidades de todos tres, e a direcçaõ de C depois da colliſaõ.*

Seja CEK a direcçaõ do corpo C, e CE a ſua velocidade depois da colliſaõ. Conſideremos a velocidade primitiva CD reſolvida em duas, das quais huma ſeja CE, a qual tenha effeito depois da colliſaõ, e a outra CF, que ſe deſtrua na meſma colliſaõ. Ora como a velocidade CE naõ deve embaraçar as que haõ de tomar os corpos A, B, conduzamos EG, EH perpendiculares aos raios CA, CB; e ſerá manifeſto, que deve CG repreſentar a velocidade do ponto de contacto A, e conſeguintemente a do corpo A, e pela meſma raſaõ CH repreſentará a velocidade do corpo B. Podemos pois no inſtante da percuſſaõ conſiderar os corpos C, A, B, como animados reſpectivamente das velocidades CE, CG, CH, que elles devem conſervar, ſem ſe embaraçarem mutuamente, e das velocidades CF, $-CG$, $-CH$, com as quais devem fazer equilibrio entre ſi.

Seja o angulo ACI, ou o arco $AI = \alpha$, o arco $BI = \beta$, o arco $KI = \phi$, $CD = V$, $CE = V'$; e conſeguintemente $CG = V' \cos(\alpha - \phi)$, $CH = V' \cos(\beta + \phi)$. Como pois as forças $C.CF$, $A.CG$, e $B.CH$, dirigidas por CF, AC, BC, devem eſtar em equilibrio, ſe reſolvermos a cada huma dellas em outras duas, huma por CD, e outra perpendicular a CD, tanto a ſoma ma das primeiras, como a das ultimas ſe reduzirá a nada. Logo teremos

$$C.CF.\cos FCD - B.CH.\cos BCI - A.CG.\cos ACI = 0$$
$$C.CF.\operatorname{sen} FCD - B.CH.\operatorname{sen} BCI + A.CG.\operatorname{sen} ACI = 0.$$

Porém temos $CF.\cos FCD = CD - CE.\cos ICK = V - V'\cos\varphi$, e $CF.\operatorname{sen} FCD = CE.\operatorname{sen} ICK = V'\operatorname{sen}\varphi$; logo ſubſtituindo eſtes valores, teremos

$$C(V - V'\cos\varphi) - BV'\cos\beta\cos(\beta + \varphi) - AV'\cos\alpha\cos(\alpha - \varphi) = 0$$
$$CV'\operatorname{sen}\varphi - BV'\operatorname{sen}\beta\cos(\beta + \varphi) + AV'\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha - \varphi) = 0.$$

Eſta ultima equaçaõ dá $C\operatorname{sen}\varphi - B\operatorname{sen}\beta(\cos\beta\cos\varphi - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varphi) + A\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi) = 0$; e por conſeguinte

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{1}{2}B\operatorname{sen}2\beta - \frac{1}{2}A\operatorname{sen}2\alpha}{C + B\operatorname{sen}\beta^2 + A\operatorname{sen}\alpha^2}.$$

Será pois determinada a direcçaõ, que o corpo C deve tomar depois da colliſaõ. E para conhecer a ſua velocidade, deduziremos o valor de V' da primeira equaçaõ, a qual dá

$$V' = \frac{CV}{C\cos\varphi + B\cos\beta\cos(\beta + \varphi) + A\cos\alpha\cos(\alpha - \varphi)}.$$

Quanto ás velocidades dos corpos A, B pelas direcçoens C A, CB igualmente ſe determinaráõ pelas formulas ſeguintes.

$$V'\cos(\alpha - \varphi) = \frac{CC\cos\alpha + CB\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{C(A + B + C) + AB\operatorname{sen}(\alpha + \beta)^2}$$
$$V'\cos(\beta + \varphi) = \frac{CC\cos\beta + CA\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{C(A + B + C) + AB\operatorname{sen}(\alpha + \beta)^2};$$

Qualquer que ſeja o numero dos corpos, ſempre o problema ſe poderá reſolver de hum modo ſemelhante ao que temos praticado.

Do Movimento do Centro de gravidade commum de muitos corpos.

453 TEmos visto na Statica, que se as diversas partes de hum systema saõ perfeitamente livres, os movimentos que se imprimem em cada huma em particular se transmetem todos ao centro de gravidade por direcçoens parallelas, donde se concluio que deve este centro mover-se, como se todas as potencias lhe fossem applicadas immediatamente. Agora mostraremos, que o mesmo succede quando todas as partes do systema saõ ligadas entre si, com tanto que o systema inteiro esteja livre, naõ sendo obrigado a mover-se ao redor de algum ponto fixo.

Os movimentos a, b, c &c, que as partes do systema devem tomar, podem resolver-se em dous: a saber, nos movimentos impressos *a*, *b*, *c* &c, e nos movimentos destruidos $-\alpha$, $-\beta$, $-\varkappa$ &c. Mas quanto a estes ultimos, deve haver equilibrio; logo o centro de gravidade naõ póde delles receber movimento algum; e por conseguinte o caminho, que ha de seguir este centro em virtude dos movimentos a, b, c &c, que as partes do systema haõ tomado pela sua acçaõ mutua, será precisamente o mesmo que teria seguido em virtude dos movimentos *a*, *b*, *c* &c, que as mesmas partes teriaõ, se fossem livres.

454 Disto se segue, que *o estado de movimento, ou de quietaçaõ do centro de gravidade commum de muitos corpos, naõ se altéra pela acçaõ mutua dos mesmos corpos entre si, com tanto que o systema seja livre.*

Se qualquer corpo *M* (Fig. 169.) receber hum impulso pela direcçaõ da recta *A B*, que naõ passa pelo seu centro de gravidade *G*, este centro se moverá, como se a potencia *A B* lhe fosse applicada por huma direcçaõ parallela *GD*; logo ficaria em quietaçaõ, se em sentido contrario lhe fosse applicada huma potencia *G D'* igual a *AB*. Como porém as duas potencias *G D'* e *AB*, ainda que iguais entre si, naõ saõ directamente oppostas, e conseguintemente naõ podem destruir-se mutuamente, e como temos mostrado que o centro de gravidade *G* fica em quietaçaõ; o unico movimento que póde tomar o corpo he o movimento de rotaçaõ ao redor do mesmo centro.

455 Lo-

455 Logo se qualquer corpo for sollicitado por potencias, cujas direcçoens naõ passem pelo seu centro de gravidade, deveremos concluir: 1°, que *o centro de gravidade se moverá, como se todas as potencias lhe fossem applicadas por direcçoens parallelas aquellas, pelas quais obraõ actualmente.* 2°, que *as outras partes do mesmo corpo tomaráõ hum movimento de rotaçaõ ao redor do centro de gravidade, como ellas o teriaõ tomado em virtude das mesmas potencias, se o centro de gravidade fosse hum ponto absolutamente fixo.*

456 O movimento do centro de gravidade chama-se *Movimento progressivo*; e como elle he commum a todas as partes do corpo, de qualquer maneira que se mova, poderá sempre considerar-se o movimento de cada parte, como composto de outros dous, hum progressivo, que he o mesmo em todas as partes, igual, e parallelo ao do centro de gravidade, e o outro de rotaçaõ ao redor deste centro. Sendo pois o movimento progressivo aquelle, que toma hum ponto sollicitado por quaisquer potencias, póde determinar-se pelos principios, que havemos exposto nas Secçoens precedentes. O que falta, para determinar o movimento de hum corpo, he o calcular o movimento de rotaçaõ ao redor do centro de gravidade. Logo daremos o methodo.

Outra applicaçaõ do Principio geral aos movimentos que se fazem nas Maquinas.

457 COmo a acçaõ reciproca, que muitos corpos ligados entre si exercitaõ huns contra os outros, se mostra principalmente nas Maquinas, de que frequentemente nos servimos nos usos da vida, he de muita importancia conhecer-lhe os effeitos, e para isso serviráõ os exemplos seguintes.

Probl. I. *Determinar o movimento de dous corpos M, m atados a hum fio sem gravidade M C m, que passa por huma roldana fixa C* (Fig. 170.).

Chamando p a força acceleratriz do corpo M; advertiremos 1°, que esta seria a gravidade g toda inteira, se o corpo m naõ actuasse contra M. 2°, que a força acceleratriz do corpo m he tambem a quantidade p, sendo porém a ſua acçaõ em ſentido contrario pela direcçaõ ma. Aſſim podemos conſiderar o corpo M, como ſollicitado pela força acceleratriz p, que elle conſervará, e pela força $g-p$ que ſerá deſtruida: e do meſmo modo o corpo m, como ſollicitado pela força p ſegundo a direcçaõ ma, que elle conſervará, e pela força $g+p$ ſegundo a direcçaõ am, a qual ſerá deſtruida.

Devendo pois os dous moveis ficar em equilibrio, ſe foſſem ſómente animados das forças reſpectivas $g-p$ e $g+p$, pela propriedade da roldana fixa teremos $M(g-p)$ $=m(g+p)$; e conſeguintemente $p=\frac{M-m}{M+m}g$. Eſta he a expreſſaõ da força acceleratriz dos dous moveis; e porque he conſtante, concluiremos que elles deveráõ ter hum movimento uniformemente accelerado. Logo no fim de qualquer tempo t, ſerá a velocidade adquirida $=$ $\frac{M-m}{M+m}gt$, e o eſpaço corrido $=\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{1}{2}gt^2$.

458 PROBL. II. *Suppondo que o fio MCm do problema precedente he uniformemente pezado, determinar o movimento dos corpos M, m.*

Seja $AM=x$, $am=a-x$, e o pezo eſpecifico do fio $=f$. O pezo da parte AM ſerá fx, e o da parte am ſerá $f(a-x)$. Logo a força acceleratriz do corpo M terá por expreſſaõ a quantidade $\frac{M-m+fx-f(a-x)}{M+m+fx+f(a-x)}g$, ou $\frac{M-m-fa+2fx}{M+m+fa}g$. Porém para abbreviar, ſupponhamos $\frac{M-m-fa}{M+m+fa}=\alpha$, e $\frac{2f}{M+m+fa}=G$; e ſerá a expreſſaõ da força repreſentada por $(\alpha+Gx)g$, a qual neſte caſo naõ ſerá conſtante, nem o movimento uniformemente accelerado.

Sendo pois a velocidade $=u$, teremos $udu=gdx$ $(\alpha+Gx)$, cujo integral he $uu=g(Gxx+2\alpha x)$; e porque naõ ajunto conſtante, ſupponho tacitamente que a origem dos x ſe naõ toma já no ponto A, mas no ponto D onde começou o movimento.

Determinada deſte modo a velocidade, falta achar o tempo empregado em correr o eſpaço x. Para iſſo deveremos integrar a equaçaõ $dt\sqrt{g} = \frac{dx}{\sqrt{(Gxx + 2\alpha x)}}$, que dará

$$t = \frac{1}{\sqrt{Gg}} \cdot l\left(\frac{\alpha + Gx + \sqrt{(G^2x^2 + 2\alpha Gx)}}{\alpha}\right).$$

459 PROBL. III. *Determinar o movimento de hum corpo M, que por meio da roldana fixa A faz ſubir outro corpo m ſuſpenſo da roldana movel B, ſendo os tres cordoens parallelos entre ſi* (Fig. 171.).

Seja p a força acceleratriz de M; e conſeguintemente $\frac{1}{2}p$ ſerá a de m. Poderemos pois conſiderar os corpos M, m, como animados das forças acceleratrizes p, e $-\frac{1}{2}p$, que elles conſervaõ, e das forças $g - p$, $g + \frac{1}{2}p$, com as quais devem fazer equilibrio entre ſi. Logo pela propriedade das roldanas moveis, teremos $2M(g-p) = m\left(g + \frac{1}{2}p\right)$; donde ſe tira $p = \frac{4M - 2m}{4M + m}g$. Logo o movimento de ambos os corpos ſerá uniformemente acelerado; e achada a expreſſaõ da força acceleratriz, todas as mais circumſtancias ſe calcularáõ, como no deſcenſo dos graves.

A força acceleratriz de m, ou $\frac{1}{2}p$, ſerá pois $\frac{2M - m}{4M + m}g$; a ſua velocidade no fim de qualquer tempo t ſerá $\frac{2M - m}{4M + m}gt$; e a ſua quantidade de movimento no fim do meſmo tempo $\frac{2Mm - mm}{4M + m}gt$.

Se quizermos pois achar a relaçaõ, que deve haver entre M e m, para que a quantidade de movimento communicada ao corpo m em hum tempo dado ſeja a maior que he poſſivel, ſerá neceſſario que a expreſſaõ $\frac{2Mm - mm}{4M + m}$ ſeja hum *maximo*. Entaõ differenciando-a, na ſuppoſiçaõ de ſomenſómente m ſer variavel, teremos $2Mm - mm = (4M + m)$ $(2M - 2m)$, ou $8M^2 - 8Mm - m^2 = 0$; donde ſe tira a raſaõ procurada $\frac{m}{M} = -4 + \sqrt{24} = \frac{9}{10}$ proximamente.

460 Probl. IV. *Determinar o movimento de hum pezo M applicado á roda ABC de hum ſarilho, o qual faz mover outro pezo m applicado ao cylindro abc* (Fig. 172.).

Seja R o raio da roda, e r o do cylindro; e chamando p a força acceleratriz do corpo M, ſerá $\frac{pr}{R}$ a do corpo m. Iſto poſto ſeguindo ſempre o principio geral, conſideremos os pezos M, m animados das forças acceleratrizes p, $-\frac{pr}{R}$, que haõ de conſervar, e das forças $g - p$, e $g + \frac{pr}{R}$, que ſeraõ deſtruidas. E porque os momentos deſtas devem ſer iguais, teremos $MR\,(g - p) = mr$ $\left(g + \frac{pr}{R}\right)$; donde reſulta $p = \frac{MR - mr}{MR^2 + mr^2} Rg$. Aſſim ſerá o movimento deſtes dous corpos uniformemente acelerado; e conſeguintemente a velocidade do corpo M no fim do tempo t ſerá $= \frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} gt$, e o eſpaço corrido $= \frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} gt^2$. Eſtá claro, que naõ haveria movimento, ſe foſſe $MR = mr$, como por outra parte conſta da condiçaõ do equilibrio; e ſe foſſe $MR < mr$, o pezo M ſubiria em lugar de deſcer, como he tambem por outra parte evidente.

Do meſmo modo acharemos, que a força acceleratriz do corpo m he $\frac{MR - mr}{MR^2 + mr^2} rg$; donde no tempo t ſerá a velocidade deſte corpo $= \frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} gt$, e o eſpaço corrido de baixo por cima $= \frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} gt^2$.

Querendo achar a rasaõ, que deve haver entre R e r, para que o corpo m seja levantado com a maior prontidaõ possivel, será necessario fazer que $\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2}$ seja hum maximo. Differenciaremos pois esta quantidade, fazendo variar $\frac{r}{R}$, ou simplesmente R, e teremos $(MRr - mr^2)\,2MR = (MR^2 + mr^2)\,Mr$, ou $MR^2 - 2mrR = mr^2$; equaçaõ, da qual facilmente se determinará o valor de $\frac{R}{r} = \frac{m}{M} + \sqrt{\left(\frac{m^2}{M^2} + \frac{m}{M}\right)}$. Por exemplo: Se $m : M :: 144 : 25$, acharemos $R = 12\,r$, isto he, para elevar o pezo com a maior prontidaõ possivel, neste caso, he necessario que o raio da roda seja doze vezes maior que o do cylindro.

461 Mas suppondo, que o corpo M deve correr hum espaço dado, e querendo determinar a rasaõ entre R e r, tal que o corpo m corra o maior espaço possivel, e no tempo mais breve que he possivel, será necessario que este espaço dividido pelo tempo, ou que $\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} gt$ seja hum maximo. Porém nesta supposiçaõ, o espaço corrido pelo pezo M, ou $\frac{MR^2 - mRr}{MR^2 + mr^2} \cdot \frac{1}{2} gt^2$ he huma quantidade dada; logo concluiremos que t he proporcional a $\sqrt{\left(\frac{MR^2 + mr^2}{MR^2 - mrR}\right)}$; e conseguintemente deveremos ter $\left(\frac{MRr - mr^2}{MR^2 + mr^2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{MR^2 + mr^2}{MR^2 - mrR}\right)}$, ou $\frac{r^2\,(MR - mr)}{R\,(MR^2 + mr^2)} = Max.$ Differenciemos esta ultima expressaõ, fazendo variar R, ou r, ou $\frac{r}{R}$, e de qualquer modo sahirá a equaçaõ cubica $m^2 r^3 + 3\,mMR^2 r = 2\,M^2 R^3$, a qual naõ tem mais do que huma raiz real, cujo valor he

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{\left[\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{M^2}{m^2} + \frac{M}{m}\right)}\right]}$$

$$+\sqrt[3]{\left[\frac{M^2}{m^2}-\frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{M^2}{m^2}+\frac{M}{m}\right)}\right]}.$$

Assim por exemplo, se $m : M :: 2197 : 400$, ou se $\frac{m}{M} =$ $5,4925$, acharemos $\frac{R}{r} = 8,45$, ou $R : r :: 169 : 20$.

462 PROBL. V. *Determinar o movimento de hum corpo M, o qual por meio do fio MDm, que passa pela roldana fixa D, faz mover juntamente o corpo m posto sobre o plano inclinado AC, que suppomos parallelo ao cordaõ Dm* (Fig. 173.).

Seja $\mathfrak{G}$ o angulo ACB, ou a inclinaçaõ do plano com o horizonte, e p a força acceleratriz do pezo M, a qual será a mesma que deve ter m. Assim podemos considerar os corpos M, m, como animados das forças p, e $-p$, que deveráõ subsistir, e juntamente das forças $g-p$, e $g \, sen \, \mathfrak{G} + p$, que seraõ destruidas.

Como estas ultimas forças se exercitaõ por DM e Dm, as quantidades de movimento que resultaõ devem ser iguais. Assim teremos $M(g-p) = m(g \, sen \, \mathfrak{G} + p)$, donde se tira $p = \frac{M - m \, sen \, \mathfrak{G}}{M+m} g$. Será pois o movimento dos dous corpos M, m uniformemente accelerado; a velocidade no fim do tempo t será $= \frac{M - m \, sen \, \mathfrak{G}}{M+m} g t$, e o espaço corrido $= \frac{M - m \, sen \, \mathfrak{G}}{M+m} \cdot \frac{1}{2} g t^2$. E porque a quantidade de movimento do corpo m he $\frac{Mm - m^2 \, sen \, \mathfrak{G}}{M+m} g t$; para que ella seja hum maximo, deverá ser $\frac{M}{m} = -1$ $+ \sqrt{\left(1 + \frac{1}{sen \, \mathfrak{G}}\right)}$.

ARTIGO II.

Do movimento dos corpos, considerados como pontos unidos por fios, ou varas inflexiveis.

463 PRROBL. I. *Sendo dous corpos M, N ligados entre si por hum fio inextensivel MN, ou por huma vara sem massa, determinar o seu movimento* (Fig. 174.).

Sejaõ mM, nN os elementos descritos no instante dt pelos corpos M, N. Se elles fossem livres, no instante seguinte descreveriaõ os elementos Mm', Nn' iguais aos precedentes, e na mesma direcçaõ. Supponhamos pois, que em virtude da sua acçaõ reciproca chegaõ, hum ao ponto μ, e o outro ao ponto ν; e que os movimentos Mm', Nn', que elles teriaõ se fossem livres, se resolvem, cada hum em outros dous, a saber $M\mu$ e $N\nu$ que pela hypothese deveráõ conservar, e Mm, Nn que seraõ conseguintemente destruidos. Para isso he necessario, que as rectas Mm e Nn estejaõ situadas na direcçaõ de MN, e que seja $M.M\text{m} = N.N\text{n}$.

Agora reportando as duas trajectorias ao eixo APQ, supponhamos $AP = x$, $PM = y$, $MN = a$, $AQ = x'$, $NQ = y'$. A força acceleratriz do corpo M por mM, que resulta da acçaõ do corpo N, sendo chamada φ, a força do corpo N, que resulta da acçaõ reciproca do corpo M pela direcçaõ nN, será representada por $\frac{M}{N}\varphi$.

Isto posto, resolvamos a força φ em duas; huma parallela a AP, cujo valor será $\frac{\varphi(x'-x)}{a}$, e a outra pela direcçaõ MP, que será representada por $\frac{\varphi(y-y')}{a}$. Teremos pois para o corpo M as duas equaçoens seguintes,

$$\frac{x'-x}{a}\varphi\, dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi\, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Do mesmo modo, resolvendo a força $\frac{M}{N}\varphi$ em outras duas, teremos para o corpo N as duas equaçoens seguintes,

$$\frac{M(x'-x)}{aN}\varphi dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right),$$

$$\frac{M(y'-y)}{aN}\varphi dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Donde resultaõ estoutras duas,

$$M d\left(\frac{dx}{dt}\right) + N d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0,$$

$$M d\left(\frac{dy}{dt}\right) + N d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = 0,$$

as quais sendo integradas, daráõ

$$M.\frac{dx}{dt} + N.\frac{dx'}{dt} = C,$$

$$M.\frac{dy}{dt} + N.\frac{dy'}{dt} = C'.$$

Destes dous integrais se segue, que o movimento do centro de gravidade he uniforme, e rectilineo; o que concorda com o principio acima demonstrado, que o estado do centro de gravidade naõ se altéra pela acçaõ reciproca das partes de hum systema.

Em quanto o centro de gravidade se move uniformemente, e em linha recta, os corpos M e N descreveráõ necessariamente ao redor delle circumferencias de circulos uniformemente, como he facil de mostrar pelo que dissemos no calculo das attracçoens. Por outra parte he evidente, que naõ existindo no systema força alguma acceleratriz perpendicular a MN, naõ póde ser alterada a velocidade angular ao redor do ponto G.

De passagem notaremos, que das quatro equaçoens precedentes resulta esta $M.\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + M.\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ $+ N.\frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + N.\frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = 0$, cujo integral

gral he $M . \frac{ds^2}{dt^2} + N . \frac{ds'^2}{dt^2} = C = MV^2 + NV'^2$, chamando V e V' as velocidades iniciais de M e de N. Donde se segue, que *a soma das forças vivas se conserva sempre a mesma.*

464 Probl. II. *Sendo suppostas as mesmas cousas que no problema precedente, e supposto de mais que os corpos M e N estão sujeitos á acção de huma força acceleratriz constante, como a gravidade g, pela direcção das ordenadas MP, NQ, determinar o movimento delles* (Fig. 174.).

Como as forças acceleratrizes por PM, e NQ saõ diminuidas neste caso da quantidade g, teremos as quatro equaçoens do movimento desta maneira,

$$\frac{x'-x}{a} \varphi\, dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a} \varphi\, dt - g\, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{x'-x}{a} . \frac{M}{N} . \varphi\, dt = -d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a} . \frac{M}{N} . \varphi\, dt + g\, dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right).$$

Das quais primeiramente se póde tirar $M d\left(\frac{dx}{dt}\right) + N d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$; equaçaõ, que mostra o movimento horizontal do centro de gravidade sempre uniforme. Depois tiraremos tambem $M d\left(\frac{dy}{dt}\right) + N d\left(\frac{dy'}{dt}\right) = - g\, dt\, (M + N)$. Porém $\left(M \frac{dy}{dt} + N \frac{dy'}{dt}\right) : (M + N)$ he a velocidade vertical do centro de gravidade; logo, fazendo esta velocidade $= v$, teremos $dv = - g\, dt$. Donde se segue, que o centro de gravidade se move precisamente como hum ponto livre, e que descreve conseguintemente huma parabola, ao mesmo tempo que os dous corpos M, N descrevem ao redor delle circumferencias

rencias de circulos com movimento uniforme.

465 PROBL. III. *Sendo os tres corpos B, C, D ligados ao fio B C D, e havendo recebido quaisquer impulsos, determinar o seu movimento* (Fig. 175.).

Supponhamos, que estes corpos no instante dt acabaõ de descrever os elementos bB, cC, dD das suas respectivas trajectorias. Se elles neste ponto ficassem livres, descreveriaõ no instante seguinte as linhas Bb', Cc', Dd', iguais ás primeiras, e na mesma direcçaõ. Logo, sendo obrigados pela mutua acçaõ, que exercitaõ entre si, a descrever $B\,G$, $C\,\varkappa$, $D\,\delta$, podemos considerar, conforme ao principio geral, as velocidades impressas Bb', Cc', Dd', como compostas das velocidades $B\,G$, $C\,\varkappa$, $D\,\delta$, que elles conservaõ realmente, e das velocidades B b, C c, D d, com as quais devem conseguintemente fazer equilibrio entre si. Para isso, he pois necessario que Bb, D d se achem na direcçaõ dos cordoens BC, DC; e que formando o parallelogrammo $Cecf$, seja $C.Ce = B.Bb$, e $C.cf = D.Dd$. Logo chamando φ a força acceleratriz de B que resulta da acçaõ do corpo C pela direcçaõ BC, e ψ a força acceleratriz de D pela direcçaõ DC, teremos para o corpo C duas forças acceleratrizes, huma $\frac{B}{C}\varphi$ pela direcçaõ CB, e a outra $\frac{D}{C}\psi$ pela direcçaõ CD.

Referindo pois ao mesmo eixo AP as tres curvas descritas, supponhamos $AP = x$, $BP = y$, $AP' = x'$, $CP' = y'$, $AP'' = x''$, $DP'' = y''$, $CB = a$, $CD = b$; e conseguintemente $a^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$, e $b^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2$. Isto posto, a força φ pela direcçaõ B C se resolve em duas, huma $\frac{y'-y}{a}\varphi$ pela direcçaõ P B, e outra $\frac{x'-x}{a}\varphi$ parallela a AP. Fazendo huma resoluçaõ semelhante das forças eC, fC, d D, teremos as seis equaçoens do movimento da maneira seguinte

$$\frac{x'-x}{a}\varphi\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{x''-x'}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi\,dt - \frac{x'-x}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi\,dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$x''-x'$

$$\frac{x'' - x'}{b} \psi \, dt = - d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{y' - y}{a} \phi \, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y' - y''}{b} \cdot \frac{D}{C} \cdot \psi \, dt + \frac{y' - y}{a} \cdot \frac{B}{C} \phi \, dt = - d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{y' - y''}{b} \psi \, dt = d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Multiplicando a primeira por B, a ſegunda por C, a terceira por $-D$, e ajuntando os productos; depois, multiplicando a quarta por B, a quinta por $-C$, a ſexta por D, e ajuntando tambem os productos; teremos eſtas duas equaçoens

$$B d\left(\frac{dx}{dt}\right) + C d\left(\frac{dx'}{dt}\right) + D d\left(\frac{dx''}{dt}\right) = 0$$

$$B d\left(\frac{dy}{dt}\right) + C d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + D d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0,$$

as quais moſtraõ que o movimento do centro de gravidade he uniforme e rectilineo, como por outra parte ſabemos que deve ſer. Reduz-ſe pois a queſtaõ a buſcar o movimento dos tres corpos ao redor do centro de gravidade, conſiderado como fixo.

466 Supponhamos, que a linha AP he a direcçaõ do centro de gravidade, e que eſte ſe acha actualmente em G. Repreſentando por γ a velocidade delle, ſerá $AG = \gamma t$, no caſo de ſe ter achado no ponto A quando principiou o movimento. Seja $GP = X$, $GP' = X'$, $GP'' = X''$; e teremos pela propriedade do centro de gravidade, $BX + CX' - DX'' = 0$, e $By + Cy' + Dy'' = 0$ (porque he neceſſario que alguma das diſtancias y, y', y'' ſeja negativa). Teremos mais $x = \gamma t - X$, $x' = \gamma t - X'$, $x'' = \gamma t + X''$; e ſubſtituindo eſtes valores nas tres primeiras equaçoens gerais, reſultaráõ as ſeguintes, que determinaõ o movimento dos tres corpos relativamente ao centro de gravidade.

$X - X'$

$$\frac{X-X'}{a}\varphi\, dt = -d\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

$$\frac{X-X'}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi\, dt - \frac{X'+X''}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi\, dt = d\left(\frac{dX'}{dt}\right)$$

$$\frac{X'+X''}{b}\psi\, dt = -d\left(\frac{dX''}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi\, dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi\, dt + \frac{y'-y''}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi\, dt = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y''}{b}\psi\, dt = d\left(\frac{dy''}{dt}\right).$$

Multipliquemos as tres primeiras reſpectivamente por $-B\frac{dX}{dt}$, $C\frac{dX'}{dt}$, $-D\frac{dX''}{dt}$, e as tres ultimas por $B\frac{dy}{dt}$, $-C\frac{dy'}{dt}$, $D\frac{dy''}{dt}$. Depois diſſo ajuntemos todos os productos; e notando que as equações $a^2=(y'-y)^2+(X'-X)^2$, e $b^2=(y''-y')^2+(X''+X')^2$ daõ $(y'-y)(dy'-dy)+(X'-X)(dX'-dX)=0$, e $(y''-y')(dy''-dy')+(X''+X')(dX''+dX')=0$, ſerá o reſultado

$$B\frac{dX}{dt}d\left(\frac{dX}{dt}\right)+B\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)+C\frac{dX'}{dt}d\left(\frac{dX'}{dt}\right)+$$
$$C\frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right)+D\frac{dX''}{dt}d\left(\frac{dX''}{dt}\right)+D\frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right)=0$$

Integrando eſta equaçaõ, teremos

$$B\left(\frac{dX^2+dy^2}{dt^2}\right)+C\left(\frac{dX'^2+dy'^2}{dt^2}\right)$$
$$+D\left(\frac{dX''^2+dy''^2}{dt^2}\right)=C';$$

donde ſe ſegue, que a ſoma das forças vivas he ſempre a meſma.

Multipli-

Multipliquemos agora as tres primeiras por $-By$; Cy', Dy'' respectivamente, e as tres ultimas por $-BX$, CX', DX''; ajuntemos os productos, e reduzindo teremos o resultado seguinte

$$B\left[y\,d\left(\frac{dX}{dt}\right)-X\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]+C\left[y'\,d\left(\frac{dX'}{dt}\right)-X'd\left(\frac{dy'}{dt}\right)\right]-D\left[y''d\left(\frac{dX''}{dt}\right)-X''D\left(\frac{dy''}{dt}\right)\right]=0;$$

cujo integral he

$$B(X\,dy-y\,dX)+C(X'\,dy'-y'\,dX')-D(X''\,dy''-y''\,dX'')=C''\,dt.$$

467 Mas para darmos a estas equações huma forma mais simples, seja o angulo $AGB=\Phi$, $AGC=\Phi'$, $AGD=\Phi''$, e o raio $GB=z$, $GC=z'$, $GD=z''$. Assim teremos $y=z\,sen\,\Phi$, $y'=z'\,sen\,\Phi'$, $y''=z''\,sen\,\Phi'$, $X=z\,cos\,\Phi$, $X'=z'\,cos\,\Phi'$, $X''=-z''\,cos\,\Phi''$, $dX^2+dy^2=dz^2+z^2\,d\Phi^2$, $X\,dy-y\,dX=z^2\,d\Phi$. Substituindo estes valores nas duas equações integraes, que acabamos de achar, seráõ reduzidas ás seguintes

$$B(dz^2+z^2\,d\Phi^2)+C(d'z^2+z'^2\,d\Phi'^2)+D(dz''^2+z''^2\,d\Phi''^2)=C'\,dt^2$$

$$Bz^2\,d\Phi+C\,z'^2\,d\Phi'+D\,z''^2\,d\Phi''=C''\,dt;$$

Alem disto teremos as quatro equações finitas

$$B\,z\,sen\,\Phi+C\,z'\,sen\,\Phi'+D\,z''\,sen\,\Phi''=0$$

$$B\,z\,cos\,\Phi+C\,z'\,cos\,\Phi'+D\,z''\,cos\,\Phi''=0$$

$$2\,z\,z'\,cos\,(\Phi'-\Phi)=z^2+z'^2-a^2$$

$$2\,z'\,z''\,cos\,(\Phi''-\Phi')=z'^2+z''^2-b^2;$$

Nestas seis equações se contém a soluçaõ do problema. Porque deduzindo das quatro ultimas os valores de Φ, z, Φ'', z'' em Φ' e z', para os substituir nas duas equações differenciaes, e eliminado dt, teremos huma equaçaõ differencial do primeiro gráo entre Φ' e z', a qual dará a curva descrita pelo ponto C ao redor do centro de gravidade. Integrando depois o valor de dt, teremos a posiçaõ deste ponto no fim de qualquer tempo dado; e sendo esta posiçaõ huma vez determinada, a dos outros dous corpos naõ tem mais difficuldade.

Em conclusaõ, póde satisfazer-se ás equações precedentes supponde que z, z', z'' saõ quantidades constantes, do mesmo modo que $\Phi'-\Phi$, e $\Phi''-\Phi'$. Logo póde haver casos, em que cadahum dos corpos descreva

huma

huma circumferencia de circulo ao redor de G, com a meſma velocidade angular.

468 Para chegar á ſoluçaõ geral, he pois neceſſario effeituar o calculo, que havemos indicado. Eſte he muito longo, mas naõ tem outra difficuldade: aſſim ſuppriremos as miudezas, que facilmente ſe pódem entender.

Primeiramente, das quatro equações finitas pódem deduzir-ſe as duas ſeguintes

$$Bz^2 + Cz'^2 + Dz''^2 + (B+C+D)z'^2 = Ba^2 + Db^2,$$
$$D^2 z''^2 = (B+C)(Bz^2 + Cz'^2) - BCa^2.$$

Supponhamos por abbreviar, $m = \dfrac{Ba^2(C+D) + D^2 b^2}{B(B+C+D)}$,

e $n = \dfrac{Db^2(B+C) + B^2 a^2}{D(B+C+D)}$; e ſubſtituindo eſtes valores nas duas ultimas equações, teremos

$$z^2 = m - \frac{C+D}{B} z'^2, \text{ e } z''^2 = n - \frac{B+C}{D} z'^2;$$

Iſto poſto, da terceira e quarta equaçaõ teremos

$$(d\varphi - d\varphi')\,\mathit{ſen}(\varphi' - \varphi) = d\left(\frac{z^2 + z'^2 - a^2}{2zz'}\right)$$

$$(d\varphi' - d\varphi'')\,\mathit{ſen}(\varphi'' - \varphi') = d\left(\frac{z'^2 + z''^2 - b^2}{2z'z''}\right);$$

Fazendo pois o calculo, eliminaremos z e z'' por meio dos ſeus valores achados; e ſuppondo, a fim de abbreviar,

$$P = \sqrt{\left[2z'^2(B^2a^2 + D^2b^2) - z'^4(B+C+D)^2 - \left(\frac{D^2l^2 - B^2a^2}{B+C+D}\right)^2\right]},$$ ſerá o reſultado deſte calculo

$$d\varphi - d\varphi' = \frac{[D^2b^2 - Ba^2(C+D)]z'^2 + B^2(a^2m - m^2)}{Bm - z'^2(D+C)} \cdot \frac{dz'}{Pz'}$$

$$d\varphi' - d\varphi'' = \frac{[B^2a^2 - Db^2(B+C)]z'^2 + D^2(b^2n - n^2)}{Du - z'^2(B+C)} \cdot \frac{dz'}{Pz'}.$$

E fazendo pela meſma raſaõ

$$Q = [D^2b^2 - Ba^2(C+D)]z'^2 + B^2(a^2m - m^2)$$
$$R = [B^2a^2 - Db^2(B+C)]z'^2 + D^2(l^2n - n^2),$$

teremos

$d\varphi$

$$d\Phi = d\Phi' + \frac{Q\,dz'}{Bz^2 . Pz'},\ \text{e}\ d\Phi'' = d\Phi' - \frac{R\,dz'}{Dz''^2 . Pz'}:$$

Agora tornando á equaçaõ geral $Bz^2\,d\Phi + Cz'^2\,d\Phi' + Dz''^2\,d\Phi'' = H\,dt$ (H he huma conſtante), a qual moſtra que multiplicando cada corpo pela area que deſcreve ao redor do centro de gravidade, a ſoma dos productos he proporcional ao tempo; e eliminando della z^2, z''^2, $d\Phi$, e $d\Phi''$, por meio dos valores achados, reſultará

$$[Ba^2 + Db^2 - z'^2(B+C+D)]d\Phi' + \frac{dz'}{Pz'}(Q-R) = H\,dt,$$

ou $[Ba^2 + Db^2 - z'^2(B+C+D)]d\Phi' + \frac{dz'}{Pz'}[(Db^2 - Ba^2)(B+$

$$C+D)z'^2 + \frac{(Ba^2+Db^2)(B^2a^2 - D^2b^2)}{B+C+D}\Big] = H\,dt.$$

Depois, a equaçaõ das forças vivas $B(dz^2 + z^2 d\Phi^2) + C(dz'^2 + z'^2 d\Phi'^2) + D(dz''^2 + z''^2 d\Phi''^2) = KH^2\,dt^2$ (K he huma conſtante), feitas as meſmas eliminações, dará

$$\left[\frac{(C+D)^2 z'z'}{Bz^2} + C + \frac{(B+C)^2 z'z'}{Dz''z''}\right]dz'^2 + \left(\frac{Q^2}{Bz^2} + \frac{R^2}{Dz''^2}\right)\frac{dz'^2}{P^2z'^2} + [Ba^2 + Db^2 - z'^2(B+$$

$$C+D)]\,d\Phi'^2 + \frac{2\,dz'\,d\Phi'}{Pz'}(Q-R) = KH^2\,dt^2:$$

Seja $M = Ba^2 + Db^2 - z'^2(B+C+D)$; e teremos $H\,dt = M\,d\Phi' + \frac{dz'}{Pz'}(Q-R)$. Subſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente a fim de eliminar dt, teremos

$$\left[\frac{(C+D)^2 z'z'}{Bz^2} + C + \frac{(B+C)^2 z'z'}{Dz''^2}\right]dz'^2 + \left(\frac{Q^2}{Bz^2} + \frac{R^2}{Dz''^2}\right)\frac{dz'^2}{P^2z'^2} + M\,d\Phi'^2 + \frac{2\,dz'\,d\Phi'}{Pz'}(Q-R) =$$

$$K\left[M^2\,d\Phi'^2 + \frac{2M\,d\Phi'\,dz'}{Pz'}(Q-R) + \frac{dz'^2}{P^2z'^2}(Q-R)^2\right].$$ Logo

(K

$$(KM^2 - M)\left(\frac{d\Phi'^2}{dz'^2} + \frac{2(Q-R)d\Phi'}{MPz'dz'} + \frac{(Q-R)^2}{M^2P^2z'^2}\right)P^2 z'^2$$
$$= \frac{(C+D)^2P^2z'^4+Q^2}{Bz^2} + \frac{(B+C)^2P^2z'^4+R^2}{Dz''^2} + \frac{(Q-R)^2}{M}.$$

E extrahindo a raiz, acharemos

$$d\Phi' = \frac{(R-Q)dz'}{MPz'} \pm \frac{dz'}{Pz'\sqrt{(KM^2-M)}}\sqrt{\left[\frac{(C+D)^2P^2z'^4+Q^2}{Bm-z'^2(C+D)}\right.}$$
$$\left. + \frac{(B+C)^2P^2z'^4+R^2}{Dn-z'^2(B+C)} + \frac{(Q-R)^2}{M}\right];$$

e conſeguintemente

$$dt = \frac{dz'}{Pz'\sqrt{(KM^2-M)}}\sqrt{\left[\frac{(C+D)^2P^2z'^4+Q^2}{Bm-z'^2(C+D)}\right.}$$
$$\left. + \frac{(B+C)^2P^2z'^4+R^2}{Dn-z'^2(B+C)} + \frac{(Q-R)^2}{M}\right].$$

Eſtas duas equações finais eſtaõ pois ſeparadas, e a poſiçaõ do ponto *C* a reſpeito do centro de gravidade naõ exige, para ſer conhecida, mais do que integrações de differenciais de huma ſó variavel. E ſendo determinada a poſiçaõ deſte ponto, a dos corpos *B* e *D* ſe determinará logo pelos valores de z e z''. Quanto ás quantidades P, Q, R, M, eſtas ſaõ já conhecidas pelas funções de z', ás quais as ſuppuzemos iguais.

469 PROBL. IV. *Sendo tres corpos B, C, D conſiderados como pontos, e ligados á alavanca angular BCD inflexivel, e ſem maſſa, e havendo recebido quaisquer impulſoens primitivas, determinar o ſeu movimento* (Fig. 176.).

Reſolvamos primeiramente, como no problema precedente, o movimento que teria cada hum dos corpos no inſtante ſeguinte, ſe vieſſe a ſer livre, em outros dous, hum que tenha lugar, e outro que ſeja deſtruido, e repreſentemos os ultimos por *B*b, *C*c, *D*d.

Depois, reſolvamos o movimento *B*b em outros dous *B*b'', *B*b' pelas direcções de *CB*, *DB*; e os outros dous ſemelhantemente. Aſſim, para haver equilibrio he neceſſario que ſeja $B.Bb'' = C.Cc'$, $B.Bb' = D.Dd''$, $C.Cc'' = D.Dd'$. Sejaõ Φ e μ as forças acceleratrizes do corpo *B* reſultantes da acçaõ dos corpos *C* e *D* por

por BC e BD, e ψ a do corpo D pela direcçaõ DC; Està claro, que o movimento do corpo C se determinará como no problema precedente, e que o dos corpos B e D serà alterado de mais pelas forças μ e $\frac{B}{D}\mu$, segundo as direcções BD, e DB.

Chamando pois c a distancia constante BD, teremos para o corpo B a força acceleratriz $\frac{x''-x}{c}\mu$ por huma direcçaõ parallela a AP, e a força $\frac{y''-y}{c}\mu$ pela direcçaõ de PB. Do mesmo modo para o corpo D teremos as duas forças acceleratrizes $-\frac{x''-x}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu$, e $-\frac{y''-y}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu$. Assim formaremos as seis equações seguintes

$$\frac{x'-x}{a}\varphi dt + \frac{x''-x}{c}\mu dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{x''-x'}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi dt - \frac{x'-x}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi dt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\frac{x''-x'}{b}\psi dt + \frac{x''-x}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu dt = -d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$$

$$\frac{y'-y}{a}\varphi dt + \frac{y''-y}{c}\mu dt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{y''-y}{b}\cdot\frac{D}{C}\psi dt - \frac{y'-y}{a}\cdot\frac{B}{C}\varphi dt = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$$

$$\frac{y''-y'}{b}\psi dt + \frac{y''-y}{c}\cdot\frac{B}{D}\mu dt = -d\left(\frac{dy''}{dt}\right);$$

Das tres primeiras, e das tres ultimas concluiremos da mesma maneira que no problema precedente

$$Bd\left(\frac{dx}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dx'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dx''}{dt}\right) = 0$$

$$Bd\left(\frac{dy}{dt}\right) + Cd\left(\frac{dy'}{dt}\right) + Dd\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0;$$

donde

donde se segue, que o movimento do centro de gravidade he uniforme, e rectilineo.

Reflectindo tambem, que as equações $(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = a^2$, $(x''-x')^2 + (y''-y')^2 = b^2$, e $(x''-x)^2 + (y''-y)^2 = c^2$, daõ $(x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) = 0$, $(x''-x')(dx''-dx') + (y''-y')(dy''-dy') = 0$, e $(x''-x)(dx''-dx) + (y''-y)(dy''-dy) = 0$; acharemos

$$B\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + B\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + C\frac{dx'}{dt}d\left(\frac{dx'}{dt}\right) +$$

$$C\frac{dy'}{dt}d\left(\frac{dy'}{dt}\right) + D\frac{dx''}{dt}d\left(\frac{dx''}{dt}\right) + D\frac{dy''}{dt}d\left(\frac{dy''}{dt}\right) = 0;$$

logo integrando

$$B\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) + C\left(\frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2}\right)$$

$$+ D\left(\frac{dx''^2 + dy''^2}{dt^2}\right) = \text{const.}$$

Este integral, e os dous que já temos para o movimento do centro de gravidade, daõ a soluçaõ completa do problema. Por isso naõ há necessidade das outras tres equaçoens que se podiaõ deduzir, alem de que ellas incluiriaõ as quantidades desconhecidas φ, ψ, μ, que he inutil determinar.

470 Naõ somente he constante a soma das forças vivas, ou dos productos de cada massa pelo quadrado da sua *velocidade absoluta*, mas tambem a soma dos productos de cada massa pelo quadrado da sua *velocidade de rotaçaõ*; de maneira, que sendo qualquer o numero dos corpos, a soma das forças vivas que elles tem girando ao redor do centro de gravidade, naõ será susceptivel de variaçaõ alguma. Supponhamos que o centro de gravidade se move parallelamente a AP com a velocidade γ; está claro, que se a cada parte do systema se imprimir a velocidade γ por direcçaõ parallelamente contraria á do centro de gravidade, os movimentos respectivos destas partes seráõ sempre os mesmos; e porque entaõ ficará o centro de gravidade em quietaçaõ, teremos o movimento das partes ao redor delle.

Sendo pois a velocidade $\frac{dx}{dt}$ do corpo B parallelamente á AP diminuida da quantidade γ, a força viva delle será $B\left[\frac{dy^2}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}-\gamma\right)^2\right]$, e a soma das forças vivas de todas as partes do systema será representada pela expressaõ $\int B\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2\gamma\,dx}{dt}+\gamma^2\right)$. Porém sabemos que $\int B\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)$ he a soma das forças vivas absolutas, a qual havemos mostrado ser constante; logo tudo se reduz a provar que $\int\frac{B\,dx}{dt}$ he tambem huma quantidade constante. Mas isso he evidente, por quanto este integral exprime a quantidade de movimento do centro de gravidade. Donde concluiremos, que *a soma das forças vivas absolutas he igual á soma das forças vivas ao redor do centro de gravidade e da força viva do mesmo centro.*

471 Isto posto, se chamarmos z, z', z'' as distancias do centro de gravidade aos pontos B, C, D (advertindo que estas distancias saõ constantes, porque a alavanca se tem supposto inflexivel), e φ, φ', φ'' os angulos que estes raios vectores formaõ com a direcçaõ do centro de gravidade, teremos para exprimir a soma das forças vivas ao redor delle.

$$B\frac{z^2\,d\varphi^2}{dt^2}+C\frac{z'^2\,d\varphi'^2}{dt^2}+D\frac{z''^2\,d\varphi''^2}{dt^2}=\text{const.}$$

E porque o centro de gravidade naõ muda de posiçaõ a respeito dos pontos B, C, D, seraõ os angulos $\varphi'-\varphi$ e $\varphi''-\varphi'$ constantes, e por conseguinte $d\varphi=d\varphi'=d\varphi''$. Logo $(Bz^2+Cz'^2+Dz''^2)\frac{d\varphi^2}{dt^2}=\text{const.}$, isto he $\frac{d\varphi}{dt}=\text{const.}$ Logo o movimento angular do systema ao redor do centro de gravidade he uniforme.

Logo em geral, *qualquer que seja o numero dos corpos situados no mesmo plano, e ligados entre si por alavancas infle-*

inflexiveis, e sem massa, se receberem quaisquer impulsões pelo mesmo plano; 1°, o seu centro commum de gravidade se moverá, como se todas estas forças lhe fossem applicadas por direcções parallelas, e o seu movimento será uniforme e rectilineo; 2°, cada parte do systema girará uniformemente ao redor do centro commum de gravidade.

472 Vejamos agora, como pelas impulsões iniciais póde determinar-se o movimento de todo o systema (Fig. 177.).

Sejaõ Bb, Cc, Dd as velocidades impressas nos corpos B, C, D; o centro de gravidade G (que se conhecerá pelas duas proporções $BE : ED :: D : B$, e $CG : GE :: B + D : C$) se moverá, como se todas as forças $B.Bb$, $C.Cc$, $D.Dd$ lhe fossem applicadas.

Representemos por RR' o valor, e a direcçaõ da resultante destas forças; e o centro de gravidade G descreverá GF parallela a RR' com a velocidade $\frac{RR'}{B+C+D}$, e o systema girará ao redor do ponto G, como se elle estivesse fixo. Mas para determinar este movimento, seja $d\varphi$ o angulo descrito pelo systema no primeiro instante dt ao redor de G para a parte BCD; e teremos por expressaõ dos arcos $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$ descritos pelos pontos B, C, D as quantidades $GB.d\varphi$, $GC.d\varphi$, $GD.d\varphi$.

Imaginemos pois os movimentos $Bb.dt$, $Cc.dt$, $Dd.dt$, que os corpos teriaõ no instante dt, se fossem livres, como compostos de outros movimentos, dos quais huns teraõ lugar por $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$, e os outros seraõ destruidos. A soma dos momentos destes ultimos em ordem ao ponto G será nulla, e conseguintemente a soma dos momentos das forças por Bb, Cc, Dd, será igual á soma dos momentos das forças por $B\beta$, $C\varkappa$, $D\delta$, sendo tomados todos em ordem ao ponto G; logo o momento da resultante será

$$RR'.RG.dt = B.GB.GBd\varphi + C.GC.GCd\varphi + D.GD.GDd\varphi;$$

e conseguintemente

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{RR'.RG}{B.GB^2 + C.GC^2 + D.GD^2}.$$

Donde se vê, que a velocidade angular do systema ao redor do centro de gravidade G he igual ao momento da resultante dividido pela soma dos productos de cada massa pelo quadrado da ſua diſtancia ao centro de gravidade. Conhecida a velocidade angular, póde determinar-ſe a poſiçaõ do ſyſtema a reſpeito da recta GF em qualquer inſtante.

473 Probl. V. *Sendo hum fio CMM' carregado de dous corpos M e M', determinar as oſcillações deſte pendulo ao redor do ponto fixo C, na ſuppoſiçaõ de que ellas ſejaõ infinitamente pequenas* (Fig. 178.).

Conduza-ſe a vertical CP', da qual os corpos naõ ſe apartaráõ ſenaõ a diſtancias infinitamente pequenas MP, $M'P'$; e ſeja $MP = x$, $M'P' = x'$, $CM = a$, $MM' = a'$.

A gravidade g pela direcçaõ vertical $M'G'$ ſe reſolve em duas forças, huma pela direcçaõ $M'P'$, e a outra por $M'H'$. Sendo pois recto o angulo $H'M'P'$, a primeira deſtas forças ſerá $g \, sen \, H'M'G' = g \, sen \, M'MK$ (conduzindo pelo ponto M a vertical MK) $= \frac{x'-x}{a'} g$. Eſta he a força acceleratriz do corpo M'; e aſſim teremos

$$\frac{x'-x}{a'} g \, dt = -d\left(\frac{d'x}{dt}\right).$$

A força por $M'H'$, ou pela direcçaõ do fio, que reſulta da gravidade g pela direcçaõ vertical $M'G'$, he igual a g, porque naõ differe mais que em huma quantidade infinitamete pequena da ſegunda ordem. Aſſim tira o corpo M' pelo corpo M com todo o ſeu pezo $M'g$ pela direcçaõ MM', e eſta acçaõ produz no corpo M huma força acceleratriz $\frac{M'g}{M}$.

Eſta força ſe reſolve em duas, huma pela direcçaõ MP, e a outra pela direcçaõ do fio CMH. A primeira tem por valor $\frac{M'g}{M} \, sen \, HMM' = \frac{M'g}{M} (sen \, MCP - sen \, M'MK) = \frac{M'g}{M}\left(\frac{x}{a} - \frac{x'-x}{a'}\right)$. Além diſto, do pezo do meſmo corpo M, ou da gravidade g por MK, reſulta huma força tangencial por MP, que he repreſentada por $g \, sen \, MCP = \frac{x}{a} g$. Logo a força acceleratriz total do corpo M ſerá

g ↄ

$\frac{gx}{a} + \frac{M'g}{M} \cdot \frac{x}{a} - \frac{M'g}{M} \cdot \frac{x'-x}{a'}$; e ſuppondo dt conſtante teremos por equações do movimento

$$-ddx' = \frac{x'-x}{a'} g dt^2$$

$$-ddx = \left(\frac{x}{a}\left(1 + \frac{M'}{M}\right) - \frac{M'}{M} \cdot \frac{x'-x}{a'}\right) g dt^2;$$

474 Tomemos hum caſo particular, e ſupponhamos que as maſſas M, M' ſaõ iguais, aſſim como tambem as diſtancias a, a'. Neſte caſo as equações precedentes ſe reduziráõ á fórma ſeguinte

$$-ddx' = (x'-x)\frac{g dt^2}{a}$$

$$-ddx = (3x-x')\frac{g dt^2}{a}.$$

Multiplicando a primeira por hum coefficiente conſtante $\mathfrak{C}$, e ajuntando o producto com a ſegunda, teremos

$$ddx + \mathfrak{C}ddx' + [(3-\mathfrak{C})x + (\mathfrak{C}-1)x']\frac{g dt^2}{a} = 0.$$

Supponhamos agora que $(3-\mathfrak{C})x + (\mathfrak{C}-1)x'$ he hum multiplo de $x + \mathfrak{C}x'$, o que exige que $\frac{\mathfrak{C}-1}{3-\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, ou que $\mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{C} = 1$, e por conſeguinte que $\mathfrak{C} = 1 \pm \sqrt{2}$. Deſignando pois hum deſtes dous valores por $\mathfrak{C}$, e o outro por $\mathfrak{C}'$, teremos a equaçaõ $ddx + \mathfrak{C}ddx' + (3-\mathfrak{C})(x + \mathfrak{C}x')\frac{g dt^2}{a} = 0$: a qual, fazendo $x + \mathfrak{C}x' = z$, ſe reduz a $ddz + (3-\mathfrak{C})z\frac{g dt^2}{a} = 0$.

Multiplicando por $2dz$, e integrando, teremos $dz^2 + (3-\mathfrak{C})z^2\frac{g dt^2}{a} = C dt^2$. Logo $dt\sqrt{\frac{g}{a}(3-\mathfrak{C})} = \frac{dz}{\sqrt{(b^2-z^2)}}$. Tornando pois a integrar acharemos que $z = b\cos t\sqrt{\left(\frac{g}{a}(3-\mathfrak{C})\right)}$, ſuppondo que os corpos naõ receberaõ impulſaõ alguma primitiva. Agora reſtituindo

indo o valor de z, teremos $x + \mathsf{G} x' = b \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathsf{G})\right)}$; e do meſmo modo achariamos $x + \mathsf{G}' x' = b' \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathsf{G}')\right)}$. Logo, ſendo m e m' os valores iniciais de x e x', teremos as duas equações

$$x + \mathsf{G} x' = (m + \mathsf{G} m') \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathsf{G})\right)}$$

$$x + \mathsf{G}' x' = (m + \mathsf{G}' m') \cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathsf{G}')\right)},$$

as quais daráõ a conhecer os valores de x e x', ſubſtituindo em lugar de G e G' os ſeus valores $1 + \sqrt{2}$, e $1 - \sqrt{2}$; e aſſim ſerá determinada a poſiçaõ dos dous corpos no fim de qualquer tempo t.

Se ſuppuzermos $m + \mathsf{G}' m' = 0$, ou $\frac{m}{m'} = -1 + \sqrt{2}$, entaõ $x + \mathsf{G}' x' = 0$; e conſeguintemente terá ſempre x huma meſma raſaõ com x'. Logo ambos os corpos chegaráõ á vertical no meſmo inſtante, e o tempo que gaſtaráõ em fazer eſta meia oſcillaçaõ ſe achará pela primeira equaçaõ, da qual ſe concluirá $\cos t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathsf{G})\right)} = 0$, ou $t \sqrt{\left(\frac{g}{a}(3 - \mathsf{G})\right)} = \frac{1}{2} c$; logo $t = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g(2 - \sqrt{2})}}$, e as oſcillações do pendulo compoſto deſtes dous corpos ſeraõ conſeguintemente iſochronas ás de hum pendulo ſimples que tiver por comprimento $\frac{a}{2 - \sqrt{2}}$, ou $\frac{17}{10} a$ proximamente.

Do meſmo modo, ſe ſuppuzermos $m + \mathsf{G} m' = 0$, ou $\frac{m}{m'} = -1 - \sqrt{2}$, teremos $x + \mathsf{G} x' = 0$, e os dous moveis chegaráõ tambem neſte caſo á vertical no meſmo tempo. A duraçaõ deſta meia oſcillaçaõ ſerá $\frac{1}{2} c \sqrt{\frac{a}{g(2 + \sqrt{2})}}$, e o comprimento do pendulo ſimples iſochrono $\frac{a}{2 + \sqrt{2}}$, ou $\frac{3}{10} a$ proximamente.

475 Quan-

475 Quando o fio estiver carregado de tres corpos M, M', M'', póde seguir-se o mesmo methodo para determinar o seu movimento (Fig. 179.).

Seja $CM = a$, $MM' = a'$, $M'M'' = a''$, $MP = x$, $M'P' = x'$, $M''P'' = x''$. Resolvendo a força da gravidade por $M''G''$ em duas, huma por $M''m''$, e a outra por $M''P''$, esta ultima terá por valor $g \operatorname{sen} m''M''G''$, ou $\frac{g(x''-x')}{a''}$; logo $-ddx'' = \frac{x''-x'}{a''} g dt^2$.

A força por $M''m''$ naõ differe da que obra por $M''G''$, e tem por valor $M''g$, donde resulta no corpo M' a força acceleratriz $\frac{M''g}{M'}$ pela direcçaõ $M'M''$. Resolvendo-a em duas, huma por $M'm'$, e a outra por $M'P'$, esta ultima será $\frac{M''g}{M'} \operatorname{sen} m'M'M'' = \frac{M''g}{M'}\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x''-x'}{a''}\right)$. Por outra parte da gravidade propria do corpo M' resulta a força tangencial $\frac{g(x'-x)}{a'}$; logo teremos $-ddx' = \left[\frac{x'-x}{a'} + \frac{M''}{M'}\left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x''-x'}{a''}\right)\right] g dt^2$.

A outra força por $M'm'$ terá por valor $M''g$, que junta com a do corpo M' pela mesma direcçaõ dá a força total $(M''+M')g$. Desta resulta no corpo M a força acceleratriz $\frac{M''+M'}{M} g$ pela direcçaõ MM', a qual produz pela direcçaõ MP a força tangencial representada por $\frac{M''+M'}{M} g \left(\frac{x'-x}{a'} - \frac{x}{a}\right)$. A gravidade propria do corpo M produz tambem a força tangencial $\frac{gx}{a}$; logo teremos $-ddx = \left[\frac{x}{a} + \frac{M'+M''}{M}\left(\frac{x}{a} - \frac{x'-x}{a'}\right)\right] g dt^2$.

476 Em geral, *qualquer que seja o numero dos corpos, com tanto que estejaõ infinitamente pouco distantes da vertical, cada hum se póde considerar como sollicitado verticalmente pela sua gravidade propria, e pelo pezo de todos os*

os corpos inferiores segundo a direcçaõ do mais vezinho.

Este principio bastará sempre para determinar a força acceleratriz de cada corpo, e para formar conseguintemente as equações do movimento.

ARTIGO III.

Do Movimento de rotaçaõ de qualquer corpo ao redor de hum eixo dado.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL.

477 *Sendo qualquer corpo sujeito a girar ao redor de hum eixo dado, se huma ou muitas potencias dirigidas por planos perpendiculares ao eixo de rotaçaõ lhe imprimirem movimento ao redor do mesmo eixo, quaisquer que sejaõ as forças com que se moverem as differentes partes do systema, sempre a soma dos momentos dellas será igual á soma dos momentos das potencias, ou ao momento da sua resultante, tomando-se todos estes momentos em ordem ao eixo de rotaçaõ.*

Porque, qualquer que seja o movimento de cada huma das partes, se lhes fosse impresso outro igual, e directamente contrario, o systema ficaria em equilibrio. He pois necessario que as forças de cada huma das partes dirigidas em sentido contrario façaõ equilibrio ás potencias motrizes. Logo, pela condiçaõ do equilibrio no sarilho, a soma dos momentos de humas he igual á soma dos momentos de outras, tomados relativamente ao eixo de rotaçaõ.

Mas sem recorrer á propriedade do sarilho, podemos mostrar isto mesmo pelo principio de M. d'Alembert. Porque supponhamos quaisquer potencias applicadas ás partes do systema; o movimento impresso em cada huma será composto do movimento que ella effectivamente tomar, e de outro que chamaremos G. Logo o momento da força impressa, relativamente ao eixo, será igual ao momento da força que a parte tiver tomado mais o momento de G, e conseguintemente a soma dos momentos de todas as forças motrizes será igual á soma dos momentos das forças que realmente tem as partes do systema mais á soma dos momen-

momentos de todas as forças G. Mas as forças G devem eſtar em equilibrio, e conſeguintemente a ſoma dos ſeus momentos he nulla; logo a ſoma dos momentos das potencias he igual á ſoma dos momentos das forças que realmente tem as partes do ſyſtema.

478 Temos ſuppoſto, que as potencias motrizes eraõ dirigidas por planos perpendiculares ao eixo de rotaçaõ. Se forem obliquas, ſerá neceſſario reſolver cada huma dellas em outras duas, huma parallela ao eixo, que naõ poderá produzir movimento ao redor delle, e a outra ſituada em hum plano perpendicular ao meſmo eixo, a qual ſó produzirá o movimento de rotaçaõ.

479 Seja pois R a reſultante das potencias motrizes, D a ſua diſtancia ao eixo, e conſeguintemente o ſeu momento $R\,D$. Seja φ a velocidade angular do ſyſtema, iſto he, o arco que em huma unidade de tempo deſcreve hum ponto ſituado na diſtancia 1 do eixo de rotaçaõ. Deſignando por dM qualquer particula do corpo ſituada na diſtancia r, a ſua velocidade ſerá $r\varphi$, a quantidade de movimento $r\varphi\,dM$, o momento relativo ao eixo $r^2\varphi\,dM$, e a ſoma deſtes momentos $\int r^2\varphi\,dM$, ou ſimpleſmente $\varphi\int r^2\,dM$. Logo $\varphi\int r^2\,dM = R\,.\,D$, ou $\varphi = \dfrac{R\,.\,D}{\int r^2\,dM}$.

O integral $\int r^2\,dM$ exprime a ſoma dos producłos de cada particula do ſyſtema pelo quadrado da ſua diſtancia ao eixo. Eſta quantidade, que he ſempre dada pela natureza do corpo, chama-ſe *momento de inercia*.

480 Da formula $\varphi = \dfrac{R\,.\,D}{\int r^2\,dM}$ concluiremos geralmente, que *ſendo applicadas a qualquer corpo quaiſquer potencias, ſituadas em planos perpendiculares ao eixo de rotaçaõ, a velocidade angular á roda do meſmo eixo ſerá igual á ſoma dos momentos das forças motrizes, ou ao momento da ſua reſultante dividido pelo momento de inercia.*

Com eſta velocidade angular huma vez impreſſa girará o corpo ao redor do ſeu eixo perpetuamente, ſe alguma potencia naõ alterar de novo o ſeu movimento.

481 Mas ſe o corpo for ſujeito á acçaõ de qualquer força acceleratriz, entaõ chamando R a reſultante das acções particulares deſta força ſobre todas as partes do ſyſtema, e D a ſua diſtancia ao eixo, ſerá $R\,D\,dt$ o momento que ella

ella póde produzir no instante dt, e o aumento ou diminuiçaõ da velocidade angular do corpo será $d\Phi = \frac{R D dt}{\int r^2 d M}$.

Tais saõ, em compendio, os principios com os quais se póde determinar em todos os casos o movimento de qualquer corpo, ao redor de hum eixo dado. Mas como he necessario antes disso saber determinar o momento de inercia, primeiro tambem indicaremos o methodo.

Dos Momentos de inercia, e dos tres Eixos principais em qualquer corpo.

482 Sendo o momento de inercia a soma dos productos de cada particula de hum corpo multiplicada pelo quadrado da sua distancia a hum eixo dado, parecerá á primeira vista que para cada eixo em particular he necessario hum calculo novo. Mas agora mostraremos, que tudo se reduz a buscar os momentos de inercia em ordem aos eixos, que passaõ pelo centro de gravidade, e que a indagaçaõ destes póde reduzir-se sómente a tres.

483 Seja AB o eixo de rotaçaõ (Fig. 180.), G o centro de gravidade do corpo, M o lugar do elemento dM. Pelo ponto M conduza-se o plano MPQ perpendicular ao eixo AB, cuja intersecçaõ com o plano AGB da figura seja a recta PQ. Pelo ponto G conduza-se a linha GH parallela, e Gg perpendicular ao eixo AB. Em fim seja MQ perpendicular a PQ, e ao plano da figura.

Isto posto, teremos $MP^2 = MH^2 + PH^2 + 2\,PH.HQ = MH^2 + Gg^2 + 2\,Gg.HQ$; logo $\int dM.MP^2 = \int dM.MH^2 + \int dM.Gg^2 + 2\,Gg\int dM.HQ$. Porem, pela natureza do centro de gravidade, temos $\int dM.HQ = 0$; logo

$$\int dM.MP^2 = \int dM.MH^2 + M.Gg^2.$$

Donde concluiremos, que *o momento de inercia relativamente a qualquer eixo he igual ao momento de inercia relativamente ao eixo parallelo, que passa pelo centro de gravidade, e mais ao producto da massa do corpo pelo quadrado da distancia destes dous eixos.*

484 Assim vemos, que entre todos os eixos parallelos, o

o que passa pelo centro de gravidade he aquelle, a cujo respeito o momento de inercia he o mais pequeno; e que he facil de achar o momento de inercia relativo a qualquer eixo, huma vez que sejaõ conhecidos os momentos de inercia relativos aos eixos, que passaõ pelo centro de gravidade.

Supposto porém que por este centro se póde conduzir huma infinidade de eixos differentes, e que os momentos de inercia a elles referidos podem variar infinitamente, bem se vê que nenhum delles póde ser infinito, nem tambem nullo. Logo he necessario que entre todos elles haja hum *maximo*, e hum *minimo*. A' indagaçaõ destes se destina o calculo seguinte.

485 Seja A o centro de gravidade do corpo (Fig 181.), e AX, XY, YZ as tres coordenadas do ponto Z, onde se acha o elemento dM, as quais designaremos por x, y, z. Seja AF o eixo, a respeito do qual o momento de inercia deve ser hum maximo, ou hum minimo. Por AF conduza-se o plano AEF perpendicular ao da figura AFX, e do ponto Y para a intersecçaõ AE destes dous planos se tire a perpendicular YX'.

Designando pois o angulo BAE por α, e EAF por β, teremos $AX' = AY \cos(YAX - \alpha) = x \cos\alpha + y \sin\alpha$, e $X'Y = y\cos\alpha - x \sin\alpha$. Completando o rectangulo $X'YZY''$ poderemos considerar AX', $X'Y''$, $Y''Z$ como as tres coordenadas orthogonais do ponto Z; e se do ponto Y'', onde ZY'' atravessa o plano AFE ao qual he perpendicular, conduzirmos a linha $Y''X''$ perpendicular a AF, teremos por valores de tres novas coordenadas orthogonais as rectas AX'', $X''Y''$, $Y''Z$, as quais chamaremos x'', y'', z'', e teremos

$$x'' = AX' \cos\beta + X'Y'' \sin\beta = x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta$$

$$y'' = X'Y''\cos\beta - AX'\sin\beta = z\cos\beta - y\sin\alpha\sin\beta - x\cos\alpha\sin\beta$$

$$z'' = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Isto posto, o quadrado da distancia do ponto Z ao eixo AF será $y''^2 + z''^2 = x^2(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2\sin\beta^2) + y^2(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\sin\beta^2) + z^2\cos\beta^2 - 2xy\cos\alpha\sin\alpha + 2xy\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta^2 - 2yz\sin\alpha\sin\beta\cos\beta - 2xz\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$. E fazendo, a fim de abbreviar,

$$\int x^2\,dM = A,\quad \int y^2\,dM = B,\quad \int z^2\,dM = C$$

$$\int xy\,dM = D,\quad \int xz\,dM = E,\quad \int yz\,dM = F;$$

inte-

integrais, que devem tomar-se em toda a extensaõ do corpo, e que aqui suppomos conhecidos; o momento de inercia a respeito do eixo AF será

$$A(\operatorname{sen}\alpha^2+\cos\alpha^2\operatorname{sen}\beta^2)+B(\cos\alpha^2+\operatorname{sen}\alpha^2\operatorname{sen}\beta^2)$$
$$+C\cos\beta^2-2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta^2-2E\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos\alpha$$
$$-2F\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Do mesmo modo as formulas integrais $\int x''z''dM$, e $\int x''y''dM$, que importará conhecer, teraõ por valores

$$\int x''z''dM=-A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta+B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta$$
$$+D\cos 2\alpha\cos\beta-E\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+F\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\int x''y''dM=-A\cos\alpha^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta-B\operatorname{sen}\alpha^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$
$$+C\operatorname{sen}\beta\cos\beta-2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$
$$+E\cos\alpha\cos 2\beta+F\operatorname{sen}\alpha\cos 2\beta.$$

Agora, por quanto o momento de inercia he hum *maximo*, ou hum *minimo*, será necessario differenciar o seu valor, fazendo primeiro variar α, e depois β, e igualando cada huma das expressoens a nada. Teremos pois em primeiro lugar

$$2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta^2-2B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta^2$$
$$-2D\cos 2\alpha\cos\beta^2+2E\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$
$$-2F\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta=0,$$

e dividindo por $-2\cos\beta$, sahirá

$$-A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta+B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta+D\cos 2\alpha\cos\beta$$
$$-E\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+F\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=0;\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

donde se segue, que $\int x''z''dM=0$.

Em segundo lugar, fazendo variar β, teremos

$$2A\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos\alpha^2+2B\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\alpha^2$$
$$-2C\operatorname{sen}\beta\cos\beta+4D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$
$$-2E\cos\alpha\cos 2\beta-2F\operatorname{sen}\alpha\cos 2\beta=0;\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

donde se segue igualmente, que $\int x''y''dM=0$.

Da equaçaõ, que acima notamos com o final (I), se tira $\tang\beta=\dfrac{(A-B)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-D\cos 2\alpha}{F\cos\alpha-E\operatorname{sen}\alpha}$; e da equaçaõ (II), $\tang 2\beta=\dfrac{2E\cos\alpha+2F\operatorname{sen}\alpha}{A\cos\alpha^2+B\operatorname{sen}\alpha^2-C+2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$.

Por outra parte sabemos, que $\tang 2\beta=\dfrac{2\tang\beta}{1-\tang\beta^2}$;

logo teremos $\dfrac{2E\cos\alpha+2F\operatorname{sen}\alpha}{A\cos\alpha^2+B\operatorname{sen}\alpha^2-C+2D\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=$

(2F

$$\frac{(2F\cos\alpha - 2E\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,[\,(A-B)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha\,]}{(F\cos\alpha - E\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 - [\,(A-B)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - D\cos 2\alpha\,]^2};$$

donde finalmente se concluirá a equaçaõ seguinte:

$$\begin{aligned}&[\,E^2F - D^2F + (B-C)DE\,]\,\mathrm{tang}\,\alpha^3\\ &+[\,E^3-2EF^2+D^2E+(B-2A+C)DF+(A-B)(B-C)E\,]\,\mathrm{tang}\,\alpha^2\\ &+[\,F^3-2FE^2+D^2F+(A-2B+C)DE-(A-B)(A-C)F\,]\,\mathrm{tang}\,\alpha\\ &+EF^2 - D^2E + (A-C)DF = 0.\end{aligned}$$

486 Sendo pois esta huma equaçaõ do terceiro gráo, e devendo ter duas raizes reais, porque ha necessariamente dous eixos, dos quais hum dá o *maximo*, e outro o *minimo*, seraõ as tres raizes todas reais. Supponhamos, que já se conhece hum eixo, a respeito do qual seja o momento de inercia hum *maximo*, ou hum *minimo*, e vejamos como entaõ se podem immediatamente determinar os outros dous. Digo *immediatamente*, porque seria difficil o deduzillos da equaçaõ precedente.

Seja A o centro de gravidade do corpo, AB o eixo conhecido, a respeito do qual o momento de inercia he hum *maximo*, ou hum *minimo*. Sabemos já que neste caso deve ser $\int xy\,dM = 0$, e $\int xz\,dM = 0$. Assim fazendo $D = 0$, e $E = 0$ nos valores de $\mathrm{tang}\,G$ e $\mathrm{tang}\,2G$ acima achados, teremos as duas equações

$$\mathrm{tang}\,G = \frac{(A-B)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{F\cos\alpha},\ \mathrm{tang}\,2G = \frac{2F\,\mathrm{sen}\,\alpha}{A\cos\alpha^2 + B\,\mathrm{sen}\,\alpha^2 - C}.$$

A primeira dá $\mathrm{tang}\,G = \frac{A-B}{F}\,\mathrm{sen}\,\alpha$, ou $\cos\alpha = 0$. Porém a formula $\mathrm{tang}\,G = \frac{A-B}{F}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ daria $\mathrm{tang}\,2G = \frac{2F(A-B)\,\mathrm{sen}\,\alpha}{F^2 - (A-B)^2\,\mathrm{sen}\,\alpha^2}$, e este valor sendo igualado ao precedente conduziria á equaçaõ $\frac{F^2}{A-B} = A - C$, que naõ dá nada a conhecer, e que he falsa; logo naõ ha outra cousa que satisfaça á primeira equaçaõ, senaõ $\cos\alpha = 0$, e conseguintemente será $\mathrm{tang}\,2G = \frac{2F}{B-C}$.

487 Por quanto he $\cos\alpha = 0$, os dous eixos se acharáõ no plano perpendicular a AB. Por outra parte, dando

a

a equaçaõ *tang* $2G = \frac{2F}{B-C}$ dous valores para G, hum delles G, e o outro $90° + G$, segue-se que os dous eixos saõ perpendiculares entre si. Assim concluiremos, que *em qualquer corpo ha tres eixos perpendiculares entre si, a respeito dos quais os momentos de inercia fazem hum maximo, ou hum minimo.*

Estes eixos, dos quais se usa muito nesta parte da Dynamica, chamaõ-se *os tres eixos principais* de hum corpo. Até agora os consideramos entre todos aquelles, que passaõ pelo centro de gravidade; mas como naõ ha cousa no nosso calculo, pela qual se supponha que o ponto A he o centro de gravidade do corpo, deveremos concluir geralmente, que *a respeito de qualquer ponto de hum corpo sempre ha tres eixos, cuja propriedade he de fazer os momentos de inercia os maiores, ou mais pequenos possiveis, e que estes tres eixos saõ perpendiculares entre si.*

488 Mas como he mais ordinario, e mais commodo considerar os eixos principais em ordem ao centro de gravidade, sejaõ AB, AC, AD estes tres eixos (Fig. 181.). Por quanto elles saõ perpendiculares entre si, podem considerar-se como directrizes parallelas ás coordenadas x, y, z; e porque de huma parte a propriedade do centro de gravidade dá $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$, e da outra temos pela natureza dos eixos principais $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$, $\int yz\,dM = 0$, está claro que o calculo será muito mais simples.

489 He verdade, que naõ se conhecendo nenhum destes eixos, he necessario para os determinar que se resolva huma equaçaõ muito complicada do terceiro gráo. Conhecendo porem hum delles, facilmente se determinaõ os outros dous, tomando o eixo conhecido por huma das directrizes, ou pela linha dos x, e as outras duas directrizes parallelas a y, e z arbitrariamente. Entaõ, supponddo os integrais $\int y^2\,dM = B$, $\int z^2\,dM = C$, $\int yz\,dM = F$, teremos o angulo G que faz hum dos outros dous eixos principais com a directriz parallela a y pela formula *tang* $2G = \frac{2F}{B-C}$, e o momento de inercia a respeito de hum destes eixos será $= A + B\,\mathrm{sen}\,G^2 + C\cos G^2 - F\,\mathrm{sen}\,2G$.

490 Dos tres momentos, que daõ os tres eixos principais

pais, hum deve ſer hum *maximo*, e outro hum *minimo*. O terceiro, ſe naõ for igual a hum dos outros, naõ póde ſer maximo, nem minimo abſoluto; mas exceptuando iſto, no mais terá as meſmas propriedades.

Advirta-ſe, que produzindo dous eixos principais momentos iguais, todos os eixos poſſiveis ſituados no ſeu meſmo plano produziráõ momentos iguais, pois naõ póde haver outro maior, nem menor, que o produzido pelos eixos principais. O meſmo ſe entenda, quando todos os tres eixos principais daõ momentos iguais.

491 Sejaõ AB, AC, AD os tres eixos principais do corpo (Fig. 181.), e ſeja AF outro eixo qualquer que paſſe pelo ponto A, cuja poſiçaõ ſeja dada pelos angulos $BAE = \alpha$, $EAF = \beta$. Porquanto temos entaõ $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, ſerá o momento de inercia em ordem ao eixo AF repreſentado por $A\,(sen\,\alpha^2 + cos\,\alpha^2\,sen\,\beta^2) + B\,(cos\,\alpha^2 + sen\,\alpha^2\,sen\,\beta^2) + C\,cos\,\beta^2$, como ſe deduz da formula geral (n. 485.).

Chamemos Ma^2, Mb^2, Mc^2 os momentos de inercia em ordem aos eixos AB, AC, AD; e teremos $Ma^2 = B + C$, $Mb^2 = A + C$, $Mc^2 = A + B$; logo $A = \frac{1}{2}M(b^2 + c^2 - a^2)$, $B = \frac{1}{2}M(a^2 + c^2 - b^2)$, $C = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2 - c^2)$, e conſeguintemente o momento de inercia em ordem a qualquer eixo AF ſerá repreſentado por $M\,(a^2\,cos\,\alpha^2\,cos\,\beta^2 + b^2\,sen\,\alpha^2\,cos\,\beta^2 + c^2\,sen\,\beta^2)$. Porém he facil de ver, que $cos\,FAB = cos\,\alpha\,cos\,\beta$, $cos\,FAC = sen\,\alpha\,cos\,\beta$, e $cos\,FAD = sen\,\beta$; logo o momento de inercia a reſpeito de qualquer eixo AF ſerá repreſentado muito ſimpleſmente pela formula ſeguinte

$$M\,(a^2\,cos\,FAB^2 + b^2\,cos\,FAC^2 + c^2\,cos\,FAD^2).$$

Imaginemos agora huma esfera deſcrita ao redor do centro de gravidade G (Fig. 182.), e ſupponhamos em A, B, C os pólos dos eixos principais, de maneira que AB, BC, AC ſejaõ quartos de circulo. Sendo pois Ma^2, Mb^2, Mc^2 os momentos de inercia relativos aos eixos GA, GB, GC, teremos por momento de inercia em ordem a qualquer eixo GF a expreſſaõ $M\,(a^2\,cos\,AF^2 + b^2\,cos\,BF^2 + c^2\,cos\,CF^2)$. Logo, chamando α, β, γ os arcos AF, BF, CF,

GF, o valor deste momento será $M (a^2 \cos \alpha^2 + b^2 \cos \beta^2 + c^2 \cos \gamma^2)$. Pela propriedade da esfera temos $\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1$; e assim será facil de determinar o momento de inercia em ordem a qualquer eixo, huma vez que sejaõ conhecidos os momentos relativos aos eixos principais. Alguns exemplos acabaráõ de illustrar esta theorica.

Nelles consideraremos somente os momentos de inercia relativamente aos eixos, que passaõ pelo centro de gravidade. Supporemos tambem, que os corpos saõ homogeneos, isto he, que todas as suas partes saõ de igual densidade, a fim de podermos representar pelas linhas, superficies, e solidos as suas respectivas massas.

Exemplos da determinaçaõ dos tres eixos principais nas linhas, nas superficies, e nos solidos.

492 I. SEja AGA hum fio, ou huma alavanca extremamente delgada, que se possa considerar como huma linha recta (Fig. 183.). Estando o centro de gravidade G no ponto do meio, he manifesto que a mesma linha AGA será hum dos eixos principais, porque o momento de inercia a respeito de AGA he nullo, e por conseguinte hum minimo. Os outros dous eixos principais seraõ duas quaisquer perpendiculares GB.

Isto posto, seja $GM = x$, e $Mm = dx$; os elementos Mm, Mm tomados de huma, e outra parte do ponto G daráõ a respeito do eixo GB o momento de inercia $2x^2 dx$, cujo integral he $\frac{2}{3}x^3$. Designando pois a linha inteira por $2a$, será $\frac{2}{3}a^3$, ou $\frac{1}{3}Ma^2$ o momento de inercia relativamente a qualquer eixo GB perpendicular a GA.

Logo, se GF for qualquer eixo obliquo, cuja inclinaçaõ sobre GA seja $= q$, teremos por momento de inercia a respeito delle a quantidade $\frac{1}{3}Ma^2 \operatorname{sen} q^2$. Além de que isto he evidente, póde deduzir-se do que acima mostramos,

mos, obſervando que na formula geral $M\ (a^2 \cos\alpha^2 + b^2 \cos\beta^2 + c^2 \cos\gamma^2)$ temos neſte caſo $a = 0$, $b^2 = c^2 = \frac{1}{3} a^2$, $\cos\beta = \operatorname{sen} q$, e $\gamma = 90°$; porque o terceiro eixo GC ſe ſuppoem perpendicular ao plano dos eixos AG, GB.

493 II. Seja BMA hum anel circular infinitamente delgado (Fig. 184.), cuja maſſa ſeja M. Aſſim poderá conſiderar-ſe, como huma circumferencia de circulo, e hum dos eixos principais ſerá perpendicular em C ao plano do meſmo circulo, e os outros dous ſeraõ quaiſquer diametros BAC.

A reſpeito do primeiro eixo, o momento de inercia ſerá Ma^2, ſendo a o raio do circulo, e a reſpeito do diametro BCA ſerá $\int Mm \,.\, MP^2 = \int a \,.\, MP \,.\, Pp = a \times$ *area* do circulo $= a^3 c$. Quanto á circumferencia, pela qual havemos repreſentado a maſſa M, ſerá $2ac$; logo o momento de inercia em ordem a qualquer diametro ſerá $\frac{M}{2ac} \,.\, a^3 c = \frac{1}{2} Ma^2$; de maneira, que naõ he mais que huma ametade do momento de inercia relativo ao eixo principal perpendicular ao plano do circulo.

494 Em geral, ſe hum corpo M póde ſer conſiderado como huma linha, ou como huma ſuperficie ſituada em hum meſmo plano, hum dos eixos principais deverá ſer perpendicular ao dito plano, e os outros dous eſtaraõ nelle ſituados. Porque he neceſſario, para que hum eixo ſeja principal, que tomando-ſe nelle huma abſciſſa x contada deſde o centro de gravidade, e as ordenadas y, z a hum ponto qualquer, tenhamos $\int xy\, dM = 0$, $\int xz\, dM = 0$ (n. 485.). Porém neſte caſo he ſempre $x = 0$ em ordem a todos os pontos do corpo; logo eſtes integrais ſe reduzem ambos a nada, e conſeguintemente o eixo perpendicular ao plano da figura he hum dos principais; e os outros dous eſtaraõ neceſſariamente ſituados no meſmo plano, porque devem ſer perpendiculares ao primeiro.

495 III. Se agora conſiderarmos a ſuperficie de hum circulo (Fig. 185.), cujo raio ſeja $= a$, e conſeguintemente a maſſa $M = a^2 c$; todos os diametros poderáõ ſer-

 vir

vir de eixos principais, e teremos $\int y^2\, dM = \int z^2\, dM$. Logo o momento de inercia a reſpeito do eixo (P) perpendicular ao plano do circulo he o dobro do momento relativo a qualquer diametro. Ora o momento do anel circular deſcrito pelo elemento Mm, e tomado em ordem ao eixo (P) he $2c \cdot CM \cdot Mm \cdot CM = 2c\, z^3\, dz$, ſuppondo $CM = z$, cujo integral he $\frac{1}{2} z^4 c$, e ſendo tomado para todo o circulo $\frac{1}{2} a^4 c$; logo o momento de inercia a reſpeito do eixo (P) he $\frac{1}{2} M a^2$, e a reſpeito de qualquer diametro $\frac{1}{4} M a^2$.

496 IV. Em qualquer ſolido de revoluçaõ (Fig. 186.), o eixo da figura he hum dos eixos principais, e os outros dous ſaõ quaiſquer diametros da ſecçaõ circular feita perpendicularmente ao eixo pelo centro de gravidade. Para o moſtrar, he neceſſario que vejamos como tomando ſobre o eixo GP huma abciſſa $GP = x$, e no plano perpendicular as duas coordenadas $PQ = y$, $QM = z$, teremos $\int xy\, dM = 0$, e $\int xz\, dM = 0$.

Sendo pois x conſtante em huma meſma ſecçaõ, teremos nella $\int xy\, dM = x \int y\, dM$; e porque $\int y\, dM$ exprime a maſſa deſta ſecçaõ multiplicada pela diſtancia do ſeu centro de gravidade á linha perpendicular em P ao plano GPQ, ſendo eſta diſtancia nulla por ſe achar o centro de gravidade em P, he neceſſario que para cada ſecçaõ perpendicular a GP tenhamos $\int xy\, dM = 0$, e conſeguintemente em toda a extenſaõ do ſolido ſerá $\int xy\, dM = 0$, e $\int xz\, dM = 0$. Logo o eixo do ſolido GP he hum dos eixos principais.

Os outros dous eſtaráõ neceſſariamente ſituados na ſecçaõ perpendicular ao eixo no ponto G; logo ſeráõ quaiſquer diametros deſta ſecçaõ, porque ella he circular. Sendo aſſim determinados os eixos principais, falta conhecer os momentos de inercia a reſpeito delles.

Pela propriedade do circulo temos primeiramente $\int y^2\, dM = \int z^2\, dM$; logo o momento de inercia relativamente ao eixo GP ſerá $2 \int y^2\, dM$, e a reſpeito de qualquer diametro da secçaõ circular feita pelo ponto G será $\int x^2 \, dM + \int y^2 \, dM$. Como x he constante, quando se trata do elemento comprehendido, por duas secções infinitamente vezinhas, e como por outra parte a massa deste elemento he $cZP^2 \, dx$, teremos $\int x^2 \, dM = \int cZP^2 x^2 \, dx$.

Ainda que esta formula parece negativa, quando x o he, naõ deve com tudo o momento de inercia, que resulta de huma parte do centro de gravidade, subtrahir-se daquelle que resulta da outra; mas he necessario ajuntallos sempre, porque o elemento dM da massa sempre se ajunta ao resto do corpo, e por isso deve tomar-se sempre positivo, assim como $\int x^2 \, dx$. Este pequeno inconveniente se evitaria, contando as abscissas da extremidade do eixo.

Representando por Y a superficie da secçaõ do solido, feita perpendicularmente ao plano GPQ, na distancia y do eixo, teremos o valor de Y em y pela natureza do solido, e a expressaõ $\int y^2 \, dM = \int y^2 Y \, dy$. Em fim, sendo a massa do solido $M = \int cy^2 \, dx$, multiplicaremos os momentos achados por $\frac{M}{c\int y^2 \, dx}$.

497 V. Supponhamos que o solido he hum cylindro (Fig. 187.). Entaõ ZP he constante, que faremos $= b$, e o comprimento do cylindro $= 2a$. Assim teremos $\int x^2 \, dM = cb^2 \cdot \frac{x^3}{3} = cb^2 \cdot \frac{a^3}{3}$ para huma ametade do cylindro, e $\int x^2 \, dM = cb^2 \cdot \frac{2a^3}{3}$ para o cylindro inteiro.

Quanto á secçaõ Y, he neste caso hum rectangulo, que tem de comprido $2a$, e de largo $2\sqrt{(b^2 - y^2)}$. Logo $\int y^2 \, dM = \int 4ay^2 \, dy \sqrt{(b^2 - y^2)} = 4a \left[\frac{1}{4} b^2 \int dy \sqrt{(b^2 - y^2)} - \frac{1}{4} y (b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]$. Devendo este integral tomar-se entre os limites $y = 0$, $y = b$, teremos $\int dy \sqrt{(b^2 - y^2)} = \frac{1}{4} b^2 c$, valor de hum quarto de circulo cujo raio he b, e o integral se reduzirá a $\frac{1}{4} b^4 ac$, cujo dobro $\frac{1}{2} b^4 ac$ será igual a $\int y^2 \, dM$ tomado em toda a extenſaõ do ſolido. Por outra parte a maſſa do cylindro $M = 2a \cdot cb^2$; logo o momento de inercia relativamente ao eixo do cylindro ſerá $\frac{M}{2acb^2} \cdot b^4 ac = \frac{1}{2} M b^2$, e em ordem a qualquer dos outros eixos ſerá $\frac{M}{2acb^2} \left(cb^2 \cdot \frac{2}{3} a^3 + \frac{1}{2} acb^4 \right) = M \left(\frac{1}{3} aa + \frac{1}{4} bb \right)$. Logo os momentos de inercia a reſpeito de todos os eixos, que paſſaõ pelo centro de gravidade, ſeraõ iguaes entre ſi, quando for $\frac{1}{3} aa + \frac{1}{4} bb = \frac{1}{2} bb$, ou $4a^2 = 3b^2$.

498 VI. Se o ſolido for huma esfera, he evidente que os momentos de inercia referidos a todos os eixos que paſſaõ pelo centro de gravidade, devem ſer iguais. E porque ſendo o raio $= a$, ſe acha $\int x^2 \, dM = c \, x^2 \, dx \, (a^2 - x^2) = c \left(\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)$, teremos por valor deſte integral, fazendo $x = a$, a expreſſaõ $\frac{2}{15} ca^5$, cujo dobro $\frac{4}{15} ca^5 = \int x^2 \, dM$ tomado em toda a extenſaõ do ſolido. Logo o momento de inercia em ordem a qualquer diametro he $\int x^2 \, dM = \frac{8}{15} ca^5 \cdot \frac{M}{\frac{4}{3} ca^3} = \frac{2}{5} M a^2$.

499 VII. Quando ſe trata de huma lentilha $ACBD$ (Fig. 188.), compoſta de dous ſegmentos esfericos iguais, ou produzida pela revoluçaõ de dous arcos iguais, e ſemelhantes AC, AD ao redor da ſua frecha CD, entaõ o centro de gravidade ſe acha em G meio de CD; e fazendo $DG = CG = a$, $AG = BG = b$, o raio dos dous arcos $DC = r = \frac{b^2 + a^2}{2a}$, e $PD = p$, teremos $PZ^2 = 2rp - pp$, e $GP = x = a - p$.

Será pois $\int x^2 \, dM = c \int dp \, (a-p)^2 \, (2rp - pp) =$

$c\left[2r\left(\frac{a^2p^2}{2}-\frac{2}{3}ap^3+\frac{1}{4}p^4\right)-\frac{a^2p^3}{3}+\frac{1}{2}ap^4-\frac{1}{5}p^5\right]$. Suppondo $p=a$, e dobrando este integral, teremos $\int x^2\,dM=c\left(\frac{1}{3}ra^4-\frac{1}{15}a^5\right)=\frac{1}{6}ca^3(a^2+b^2)-\frac{1}{15}ca^5=c\left(\frac{1}{6}a^3b^2+\frac{1}{10}a^5\right)=\frac{ca^3}{30}(3a^2+5b^2)$.

Será tambem $\int y^2\,dM=\frac{1}{4}c\int PZ^4\,dp=\frac{1}{4}c\int(2rp-pp)^2\,dp=\frac{1}{4}c\left(\frac{4r^2p^3}{3}-rp^4+\frac{p^5}{5}\right)$. Fazendo $p=a$, e dobrando, acharemos $\int y^2\,dM=\frac{1}{2}ca^3\left(\frac{4}{3}r^2-ar+\frac{1}{5}a^2\right)=\frac{1}{30}ca^3(20r^2-15ar+3a^2)=\frac{1}{60}ca(a^4+5a^2b^2+10b^4)$. Porém temos a massa $M=\int c\,dp(2rp-pp)=c\left(rp^2-\frac{1}{3}p^3\right)$; logo fazendo $p=a$, e dobrando, será $M=\frac{1}{3}ac(a^2+3b^2)$, e conseguintemente $\int x^2\,dM=\frac{1}{10}Ma^2\,.\,\frac{5b^2+3a^2}{3b^2+a^2}$, e $\int y^2\,dM=\frac{1}{20}M\,.\,\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}$. Donde teremos finalmente por momento de inercia em ordem ao eixo principal CD a quantidade $\frac{1}{10}M\,.\,\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}$, e a respeito de qualquer dos outros dous eixos AB a quantidade $\int x^2\,dM+\int y^2\,dM=\frac{1}{20}M\,.\,\frac{7a^4+15a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}$.

500 VII. Em fim, se o solido for hum parallelepipedo (Fig. 189.), a determinaçaõ dos eixos principais naõ involve difficuldade. Saõ tres linhas IGL, XGY, VGT conduzidas pelo centro de gravidade parallelamente aos tres

tres lados. Sejaõ pois estes lados $AB = 2a$, $AC = 2b$, $CH = 2f$, e x, y, z as tres coordenadas parallelas conduzidas pelo centro de gravidade.

Isto posto, como todas as secçoens feitas perpendicularmente a GI saõ $= 4bf$, teremos $\int x^2 dM = 4bf \int x^2 dx = \frac{4bfx^3}{3}$. Fazendo $x = a$, e dobrando (ou de outra sorte, tomando o integral entre os limites $x = +a$, $x = -a$) acharemos $\int x^2 dM = \frac{abf \,.\, 2a^3}{3} = \frac{1}{3} Ma^2$, por quanto $M = 8abf$. Do mesmo modo acharemos $\int y^2 dM = \frac{1}{3} Mb^2$, e $\int z^2 dM = \frac{1}{3} Mf^2$. Assim teremos por momentos de inercia em ordem aos tres eixos respectivamente parallelos a AB, AC, CH, as quantidades seguintes.

$$\frac{1}{3} M(b^2 + f^2) = \frac{1}{12} M(AC^2 + CH^2)$$

$$\frac{1}{3} M(a^2 + f^2) = \frac{1}{12} M(AB^2 + BE^2)$$

$$\frac{1}{3} M(a^2 + b^2) \quad \frac{1}{12} M(AB^2 + AC^2).$$

Estes tres valores sempre saõ iguais, tanto no cubo, como nos outros corpos regulares.

Sendo bastantemente declarado o methodo, que se deve seguir, para determinar em todos os casos os eixos principais, e os momentos de inercia, acabaremos este artigo com a distribuiçaõ dos corpos em classes relativas aos seus eixos principais.

501 A *primeira classe* será pois a dos corpos, que tem todos os tres eixos principais semelhantes, ou, que tem os momentos de inercia referidos aos mesmos tres eixos iguais entre si. Esta propriedade compete a huma infinidade de corpos, além dos sinco regulares.

A *segunda classe* será a daquelles, que tem dous eixos principais iguais entre si, e conseguintemente os momentos de inercia respectivos tambem iguais. Neste caso estaõ todos os solidos de revoluçaõ, e além delles outros muitos.

A

A *terceira classe* finalmente será formada de todos os corpos, que tem os tres eixos desiguais, assim como os momentos de inercia tomados a respeito delles. Esta classe he muito mais numerosa que as precedentes, e para determinar os eixos principais dos corpos nella comprehendidos, he necessario resolver huma equaçaõ muito complicada do terceiro gráo; de maneira, que quasi he impossivel determinar os seus momentos em geral.

502 Como os eixos principais podem considerar-se a respeito de qualquer outro ponto, que naõ seja o centro de gravidade, dahi resultaráõ novas divisoens semelhantes ás precedentes. Mas hum corpo, que pertence a huma classe, attendidos os eixos principais que passaõ pelo centro de gravidade, poderá pertencer a huma classe differente quando se attender aos eixos principais que passaõ por outro qualquer ponto. Por exemplo, hum corpo da primeira classe relativamente aos eixos principais do centro de gravidade, sempre pertencerá a classe differente relativamente aos eixos principais de qualquer outro ponto.

ARTIGO IV.

Do Movimento de Oscillaçaõ de hum corpo grave ao redor de hum eixo horizontal.

503 SEja AMB (Fig. 190.) huma secçaõ vertical do corpo, feita pelo centro de gravidade G perpendicularmente ao eixo de rotaçaõ, de sorte que este eixo seja perpendicular ao plano da figura no ponto C. Suppoem-se, que o corpo faz as suas oscillaçoens na extremidade de huma vara CAG inflexivel, e sem massa.

Se representarmos a massa do corpo por M, e a gravidade por g, será Mg a expressaõ da força acceleratriz que obra em G pela vertical GL., e o momento desta força a respeito do eixo de rotaçaõ será $Mg \cdot HG$, sendo GH huma perpendicular conduzida do ponto G para a vertical CH.

Suppondo pois $CG = f$, e o angulo $GCH = \varphi$, teremos $Mg \cdot f \operatorname{sen} \varphi$ por expressaõ do momento da força acceleratriz. Logo, sendo W a velocidade angular do corpo MAB ao redor do eixo de oscillaçaõ, teremos $dW =$

M

$\frac{M f \operatorname{sen} \Phi}{\int r^2 d M} g\, d t$ (n. 481.); quantidade, na qual $\int r^2 d M$ he o momento de inercia em ordem ao eixo de rotaçaõ.

Seja $M b^2$ o momento de inercia referido ao eixo, que paſſa pelo centro de gravidade parallelamente ao eixo de rotaçaõ, e teremos $\int r^2 d M = M b^2 + M f^2$ (n.483.). Logo $d W = \frac{f \operatorname{sen} \Phi}{f^2 + b^2} g\, d t$. Mas ſuppondo que o movimento ſe faz de G para H, temos $d t = \frac{d \Phi}{W}$; logo $W d W = \frac{-f}{f^2 + b^2} g\, d \Phi \operatorname{sen} \Phi$. O integral he $W^2 = n^2 + \frac{2 f g \cos \Phi}{f^2 + b^2}$; e ſuppondo que na origem do movimento a linha $C G$ fazia com a vertical CH o angulo $\mathfrak{G}$, teremos $\Phi = \mathfrak{G}$, quando $W = 0$; logo em geral $W^2 = \frac{2 f g}{f^2 + b^2}$ $(\cos \Phi - \cos \mathfrak{G})$.

504 Ora hum pendulo ſimples, que tiveſſe ſido ao meſmo tempo que o corpo M deſviado da vertical até fazer com ella o angulo $\mathfrak{G}$, e que ſe achaſſe actualmente na diſtancia Φ com a velocidade angular W, ſendo o ſeu comprimento $L = \frac{f^2 + b^2}{f}$, teria igualmente por expreſſaõ do quadrado da ſua velocidade angular $W^2 = \frac{2 f g}{f^2 + b^2}$ $(\cos \Phi - \cos \mathfrak{G})$. Logo o pendulo ſimples, que tiver o comprimento $L = \frac{f^2 + b^2}{f}$, deverá mover-ſe preciſamente como o corpo M; fará as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo; e lhe ſerá conſeguintemente iſochrono.

505 Se concebermos na direcçaõ de $C G$ hum ponto grave O na diſtancia $C O = L = \frac{f^2 + b^2}{f}$, eſte ponto ſe moverá como ſe foſſe livre, iſto he, ſem que as outras partes do corpo perturbem o ſeu movimento, porque entaõ he $C O$ igual ao comprimento do pendulo ſimples, que faria as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que o corpo.

Logo

Logo o movimento do corpo ſe faz, como ſe toda a ſua maſſa eſtiveſſe concentrada em O; porque entaõ o ponto O teria ſempre o meſmo movimento, e as outras partes ſeguiriaõ ſem reſiſtencia o movimento delle; e por iſſo ſe chama eſte ponto *Centro de Oſcillaçaõ*.

506 Diſto ſe ſegue, que quando hum corpo he obrigado a mover-ſe ao redor de hum eixo fixo, a ſua maſſa naõ deve já conſiderar-ſe reunida no centro de gravidade, mas no centro de oſcillaçaõ, o qual he o que ſe move como ſe toda a maſſa eſtiveſſe nelle concentrada.

Segue-ſe tambem, que o maior effeito que póde produzir ſobre outro corpo a percuſſaõ de hum movel, que gira ao redor de hum eixo fixo, deve ter lugar quando o golpe he dado pelo centro de oſcillaçaõ, ou ao menos por hum ponto que igualmente diſte do eixo. Eſta he a raſaõ, porque o centro de oſcillaçaõ ſe chama tambem *centro de percuſſaõ*.

507 Mas para illuſtrar, e confirmar ao meſmo tempo eſta verdade, ſerá conveniente moſtrar, que quando hum corpo gira ao redor de hum eixo fixo, a reſultante das forças de que as differentes particulas ſaõ animadas, paſſa pelo centro de oſcillaçaõ, ou ao menos por huma diſtancia igual á delle, a reſpeito do eixo.

Seja ACP o eixo de rotaçaõ (Fig. 191.), G o centro de gravidade, dM huma particula qualquer do corpo ſituada em M. Do ponto M tire-ſe MQ perpendicular ao plano GCP; e do ponto Q, QP perpendicular a CP. Aſſim deſignando por W a velocidade angular do corpo, teremos $W.PM$ por expreſſaõ da velocidade do elemento dM pela direcçaõ Mm perpendicular a MP, e $W.PM.dM$ por expreſſaõ da força do meſmo elemento. Donde reſultará a força $W.QP.dM$ pela direcçaõ QM, e a força $W.QM.dM$ parallela a QP. Eſtas ultimas forças ſeráõ mutuamente deſtruidas, por quanto $\int QM.dM = 0$; porém ſem embargo de ſer a ſua reſultante nulla, como obra a huma diſtancia infinita, o momento que produzirá a reſpeito do eixo AP ſerá finito, e terá por valor $W.\int QM^2.dM$.

A reſultante das forças dirigidas por QM ſerá perpendicular ao plano AGC, e o ſeu valor ſerá $W\int QP\,dM = W.M.CG$, que chamaremos R. O ſeu momento a reſpeito do eixo ſerá $= W\int QP^2.dM$, e a ſua diſtancia

cia

cia ao meſmo eixo $= \frac{\int QP^2 . dM}{M . CG}$.

Mas em lugar das forças parallelas a QP, que ſem embargo de terem a reſultante nulla produzem o momento $W\int QM^2 . dM$, póde ſubſtituir-ſe a força R na diſtancia do eixo $\frac{W\int QM^2 . dM}{R}$, ou $\frac{\int QM^2 . dM}{M . CG}$. Logo em lugar de todas as forças, de que as particulas ſaõ animadas, póde ſubſtituir-ſe a força R reſultante das forças dirigidas por QM, cujo valor he $W . M . CG$, applicando-ſe na diſtancia do eixo $\frac{\int QP^2 . dM}{M . CG} + \frac{\int QM^2 . dM}{M . CG}$ $= \frac{\int PM^2 . dM}{M . CG}$. Logo a força, que reſulta das que animaõ a cada huma das particulas do ſyſtema, paſſa por huma diſtancia do eixo igual á do centro de oſcillaçaõ, e conſeguintemente neſta diſtancia he que a percuſſaõ ſerá mais forte.

508 Eſtá claro, pelo que temos demonſtrado, que para determinar o movimento de oſcillaçaõ de qualquer corpo de volume finito, ao redor de hum eixo horizontal, naõ he neceſſario mais que conhecer bem a diſtancia do centro de oſcillaçaõ ao ponto fixo, ou (que vem a ſer o meſmo) conhecer o comprimento de hum pendulo ſimples iſochrono nas ſuas oſcillaçoens ás do meſmo corpo.

Sendo pois r a diſtancia de qualquer particula dM do corpo ao eixo de rotaçaõ, $\int r^2 dM$ o momento de inercia relativo ao meſmo eixo, e f a diſtancia CG do centro de gravidade ao meſmo eixo, teremos a diſtancia do centro de oſcillaçaõ $L = \frac{\int r^2 dM}{Mf}$. Donde ſe vê, que *a diſtancia do centro de oſcillaçaõ ao eixo he igual ao momento de inercia relativamente ao eixo, dividido pelo producto da maſſa do corpo multiplicada pela diſtancia do centro de gravidade ao meſmo eixo.*

Se Mb^2 repreſentar o momento de inercia, a reſpeito do eixo parallelo que paſſa pelo centro de gravidade, teremos $\int r^2 dM = Mb^2 + Mf^2$; logo a diſtancia do centro de oſcilla-

oſcillaçaõ $L = \frac{Mb^2 + Mf^2}{Mf} = f + \frac{b^2}{f}$. Donde ſe vê que eſte centro eſtá ſempre mais diſtante do eixo que o centro de gravidade a quantidade poſitiva $GO = \frac{b^2}{f}$. Aſſim, pelo que acima temos dito dos momentos de inercia, ſem difficuldade ſe podem determinar os centros de oſcillaçaõ.

Exemplos.

509 I. QUando ſe fazem as experiencias ſobre os pendulos, ordinariamente ſe uſa de hum globo AMB (Fig. 192.), pendurado por hum fio de metal muito delgado. Deſprezando pois a maſſa do fio, e ſuppondo o raio do globo $= b$, e a diſtancia do centro delle ao ponto de ſuſpenſaõ $= f$, teremos $b^2 = \frac{2}{5} b^2$ (n. 498.). Logo a diſtancia do centro de oſcillaçaõ ao eixo, ou $CO = f + \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{f}$; e ſe as oſcillaçoens forem pequenas, ſerá a duraçaõ de cada huma $c\sqrt{\left(\frac{f^2 + \frac{2}{5} b^2}{fg}\right)}$:

Quando $f = 0$, e quando $f = \infty$, o pendulo ſimples iſochrono ſerá infinitamente longo. Por tanto, entre eſtes limites deverá haver hum *minimo*; e eſte terá lugar, quando for $f = b\sqrt{\frac{2}{5}}$. Entaõ ſeraõ as oſcillaçoens feitas com a prontidaõ maior que he poſſivel; e ſendo pequenas, cada huma terá por duraçaõ $c\sqrt{\frac{2f}{g}}$.

510 Para que eſte pendulo faça cada huma das oſcillaçoens em hum ſegundo, he neceſſario em geral que $c\sqrt{\left(\frac{f^2 + \frac{2}{5} b^2}{fg}\right)} = 1$, ou (que vem a ſer o meſmo) que $f^2 + \frac{2}{5} b^2 = \frac{fg}{c^2}$; e conſeguintemente $f = \frac{g}{2c^2}$

$\pm$

$\pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4c^4} - \frac{2}{5} b^2\right)}$. Donde se vê, que ha sempre dous modos de suspender hum globo de maneira, que faça cada oscillaçaõ em hum segundo.

Se o raio b do globo for pequeno, he necessario que a distancia do centro delle ao ponto de suspensaõ seja representada por hum destes valores $\frac{g}{c^2} - \frac{2}{5} b^2 . \frac{c^2}{g}$, ou $\frac{2}{5} b^2 . \frac{c^2}{g}$. Mas neste ultimo caso, bem se vê que o ponto de suspensaõ cahiria dentro do globo, e muito perto do centro. Por isso naõ se usa, senaõ do outro valor, tomando $f = \frac{g}{2c^2} + \sqrt{\left(\frac{g^2}{4c^4} - \frac{2}{5} b^2\right)}$.

511 Os dous valores de f seriaõ iguais em geral, se tivessemos $\frac{g^2}{4c^4} = \frac{2}{5} b^2$, ou $b = \frac{g}{c^2} \sqrt{\frac{5}{8}}$. Logo, como $\frac{g}{c^2}$ he o comprimento do pendulo simples de segundos, o qual he de 440, 57 linh., seria necessario que o raio do globo fosse de 348, 3 linh., ou de 2 pés, 5 poll. 0, 3 linh. Entaõ o intervallo CG (Fig. 194.) entre o centro e o ponto de suspensaõ seria $\frac{g}{2c^2}$, ou a ametade do pendulo simples de segundos, isto he, 1 pé 6 poll. 4 linh. e $\frac{2}{7}$. Conduzindo CF perpendicular a AG, he facil de ver que $cos\, AF = \frac{CG}{b} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, e que o arco AF he conseguintemente de 50° 46'. Sendo assim determinado o diametro do globo, e o ponto de suspensaõ C, as oscillaçoens delle se faraõ em hum segundo.

Se fizermos oscillar o globo ao redor do ponto A, teremos $f = b$; logo o comprimento do pendulo simples isochrono será $\frac{2}{5} b$; e querendo que faça huma oscilla-

çaõ

ção por segundo, deverá ser o raio $b = \frac{5}{7}$. 440, 57 linhas $=$ 2 pés, 2 poll. 2 linh. e $\frac{2}{3}$.

512 II. Consideremos agora hum pendulo composto de dous pezos A, B (Fig. 193.), que supporemos esfericos, e enfiados em huma vara inflexivel, e sem massa CAB. Sejaõ α e β os raios destes globos, a e b as distancias respectivas dos seus centros ao ponto de suspensaõ C. A distancia do centro de oscillaçaõ, ou o comprimento do pendulo simples isochrono, será

$$CO = \frac{A(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2) + B(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2)}{Aa + Bb}.$$

Isto posto, qual he a distancia a em que deve por-se o corpo menor A, para que as oscillações sejaõ as mais prontas, que podem resultar deste pendulo? Entaõ deve o pendulo simples isochrono CO ser hum *minimo*; e conseguintemente differenciaremos o seu valor fazendo a variavel, e teremos $A^2(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2) + AB(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2) = 2A^2a^2 + 2ABab$, isto he, $a^2 + \frac{2Bb}{A}a = \frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{B}{A}(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2)$; donde se tira

$$a = -\frac{B}{A}b \pm \sqrt{\left[\frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{B}{A}(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2) + \frac{B^2}{A^2}b^2\right]},$$

e o comprimento do pendulo simples isochrono se achará $= 2a$. Bem se vê, que dos dous valores de a somente o positivo pode satisfazer ao caso presente.

Se os dous globos forem homogeneos, teremos $\frac{B}{A} = \frac{\beta^3}{\alpha^3}$, e conseguintemente $a = -\frac{\beta^3}{\alpha^3}b + \sqrt{\left[\frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{\beta^3}{\alpha^3}(b^2 +\right.}$

$\frac{2}{5}\beta^2) + \frac{\beta^6}{\alpha^6} b^2 \Big]$; e ſe os raios delles forem muito pequenos em comparaçaõ de CB, ſerá proximamente

$$a = -\frac{B}{A} b + b\sqrt{\left(\frac{B}{A} + \frac{B^2}{A^2}\right)}.$$

513. Se foſſem tres globos A, B, C, os ſeus raios α, β, γ, e as diſtancias ao ponto de ſuſpenſaõ contadas do centro a, b, c, a diſtancia do centro de oſcillaçaõ ſeria

$$\frac{A(a^2 + \frac{2}{5}\alpha^2) + B(b^2 + \frac{2}{5}\beta^2) + C(c^2 + \frac{2}{5}\gamma^2)}{Aa + Bb + Cc},$$

e aſſim por diante, qualquer que ſeja o numero dos corpos.

514 III. Se hum globo AM K (Fig. 195.), ſuſpendido da vara cylindrica FA, oſcillar ao redor do eixo horizontal DCE, determinar-ſe-ha o ſeu centro de oſcillaçaõ CO da maneira ſeguinte.

Seja A o pezo do globo, B o do cylindro, a o raio do globo, $2b$ o comprimento FA do cylindro, $2b$ o ſeu diametro, f a diſtancia CA, G e O os centros de gravidade e de oſcillaçaõ do ſyſtema. Como o centro de gravidade do cylindro eſtá em I meio de FA, teremos primeiramente $(A+B)CG = A.CB + B.CI = A(a+f) + B(f-b)$. Depois acharemos o momento de inercia do globo em ordem ao eixo $DCE = A(f+a)^2 + \frac{2}{5}Aa^2$, e do cylindro em ordem ao eixo horizontal que paſſa pelo ſeu centro de gravidade $I = B\left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2\right)$ (n.497.), e em ordem ao eixo $DCE = B\left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2 + (f-b)^2\right]$. Logo ſerá a diſtancia do centro de oſcillaçaõ

$$CO = \frac{A\left[\frac{2}{5}a^2 + (f+a)^2\right] + B\left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2 + (f-b)^2\right]}{A(f+a) + B(f-b)}.$$

515 Paſ

515 Para que este pendulo seja de segundos, he necessario que $CO = \frac{g}{c^2}$. Com esta condiçaõ se determinará huma das quantidades que se achaõ no seu valor, o que sempre poderá fazer-se pela resoluçaõ de huma equaçaõ do segundo gráo.

Quando o eixo de rotaçaõ se acha no alto da vara, temos $f = 2b$, e o valor precedente de CO se muda no seguinte

$$CO = \frac{A\left(\frac{7}{5}a^2 + 4ab + 4b^2\right) + B\left(\frac{4}{3}b^2 + \frac{1}{4}b^2\right)}{A(2b+a) + Bb}.$$

Supponhamos, por exemplo, $A = 15$ libr. $B = \frac{1}{8}$ libr., $CA = 2b = 3$ pés, $a = \frac{1}{4}$ pé, e que o diametro $2b$ de FA he muito pequeno em comparaçaõ do seu comprimento, de sorte que se possa desprezar $\frac{1}{4}b^2$; e acharemos $CO = 3,2528$ pés. Se a massa da vara se desprezasse, teriamos $CO = 3,2577$; e o erro seria de $\frac{7}{10}$ de huma linha proximamente.

516 IV. Examinemos em fim o centro de oscillaçaõ de hum pendulo composto de huma lentilha $BGDF$ (Fig. 196.), suspensa de huma vara AB de figura parallelepipeda, como se usa de ordinario. Aqui naõ representamos mais que a secçaõ perpendicular ao plano, em que se move o pendulo.

Seja $FG = 2a$, $BD = 2b$, $AB = 2f$, $CB = b$, a largura da vara $ib = m$, e a espessura $= n$, o pezo da lentilha $= L$, e o da vara $= P$. E primeiramente, sendo o centro de gravidade do pendulo em hum ponto G, e o da vara em hum ponto I, teremos $(L + P)CG = L.EC + P.CI = L(b+b) + P(b-f)$. Depois por momento de inercia da lentilha em ordem ao eixo FG teremos a quantidade $\frac{1}{20}L.\frac{7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2}$ (n. 499.), e

conse-

conſeguintemente em ordem ao eixo horizontal TCV a quantidade $\frac{1}{20} L . \frac{7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2} + L(b + b)^2$. Em fim por momento de inercia da vara relativamente ao eixo que paſſa pelo centro de gravidade I, teremos $\frac{1}{12} P(4f^2 + n^2)$ (n. 500.), e relativamente ao eixo TCV ſerá o momento della $\frac{1}{12} P(4f^2 + n^2) + P(b-f)^2$. Logo

$$CO = \frac{\frac{1}{20} L(7a^4 + 15a^2b^2 + 10b^4}{(a^2 + 3b^2)[L(b+b) + P(b-f)} + \frac{L(b+b)^2 + \frac{1}{12} P(4f^2 + n^2) + P(b-f)^2}{L(b+b) + P(b-f)}$$

quantidade, que ſe deverá igualar a $\frac{g}{c^2}$, querendo que o tempo de cada oſcillaçaõ ſeja de hum ſegundo.

517 Huyghens foi o primeiro que indagou felizmente, e que determinou por hum methodo directo os centros de oſcillaçaõ dos planos e dos ſolidos (*Horol. Oſcil. Part.* IV. *Prop.* XXI *&* XXII). Todos ſabem como eſte grande homem poſſuia o talento de conduzir as theorias mais elevadas aos uſos da maior utilidade, e quanto lhe ſaõ devedoras todas as partes da Mathematica. As artes naõ lhe devem menos, principalmente a da Relogiaria. Depois de haver feito neſte genero deſcobrimentos immortais, teve a idêa de os applicar á indagaçaõ de huma medida invariavel, e bem depreſſa deduzio do pendulo ſimples iſochrono a exiſtencia della. Eisaqui, qual foi o ſeu raciocinio.

Se hum relogio de ſegundos for bem ajuſtado com o tempo medio por obſervaçaõ das eſtrellas, ou por outra qualquer que ſeja propria para iſſo, naõ ha couſa mais facil do que procurar hum pendulo ſimples, que faça as ſuas oſcillações no meſmo tempo. Baſta alongar, ou encurtar o fio;

ſio, até coincidirem bem exactamente por hum quarto, ou meia-hora quando muito, as oſcillações dos dous pendulos. Tendo chegado a eſta preciſaõ, naõ ha mais que medir com muita exactidaõ a diſtancia do ponto de ſuſpenſaõ ao centro de oſcillaçaõ no pendulo ſimples; porque dividindo eſta diſtancia em tres partes, cada huma dellas poderá ſervir de medida invariavel, e univerſal. O meſmo autor lhe deu o nome de *pé horario.*

Bem ſe vê com effeito, que em quanto a força da gravidade for a meſma no meſmo lugar, naõ póde haver mudança no comprimento do pendulo ſimples. Os ſeculos vindouros poderáõ pois verificar, e determinar as medidas actuais, comparando-as com eſte comprimento invariavel, no caſo de que pelo decurſo dos tempos ellas ſe alterem, ou ſe percaõ. Baſtará, por exemplo, que a poſteridade ſaiba que o pendulo ſimples de ſegundos era em Paris de 3 pés 8 linhas e $\frac{57}{100}$, para concluir que o pé regio era para o pé horario como 43200 para 44057. Se os antigos tiveſſem aſſim fixado as ſuas medidas, naõ haveria tanto que diſputar ſobre as dos Hebreus, dos Egypcios, dos Gregos, e dos Romanos.

ARTIGO V.

Das duas eſpecies de movimento que póde tomar hum corpo livre, ſendo impellido por huma direcçaõ, que naõ paſſa pelo ſeu centro de gravidade.

518 SEja *M* hum corpo qualquer (Fig. 197.), e *G* o ſeu centro de gravidade. Pergunta-ſe, qual ſerá o movimento delle, ſe qualquer potencia *A* o ſollicitar por huma direcçaõ *A F*, que naõ paſſa pelo centro de gravidade?

Já temos viſto, que o centro de gravidade deve mover-ſe, como ſe a força motriz lhe foſſe immediatamente applicada pela direcçaõ parallela *G E*; e conſeguintemente tomará por eſta linha a velocidade $\frac{A}{M}$. Tambem vi-mos, que ao mesmo tempo que o centro de gravidade se adianta com o movimento progressivo, as outras partes devem girar á roda delle, como se estivesse fixo.

Supponhamos pois que a rotaçaõ se faz a respeito de hum eixo perpendicular em G ao plano da figura, e seja W a velocidade angular que tomará o corpo ao redor delle, f a perpendicular GF, Af o momento da força motriz, e Mk^2 o momento de inercia em ordem ao eixo de rotaçaõ. Assim teremos por expressaõ da velocidade inicial de rotaçaõ $W = \frac{Af}{Mk^2}$. Mas este eixo de rotaçaõ, e esta velocidade conservar-se-haõ por ventura do mesmo modo nos instantes seguintes?

519 Para resolver este problema, he necessario buscar em geral quais saõ em qualquer corpo os eixos, ao redor dos quais sendo huma vez posto em movimento, deverá conservallo uniformemente, sem variar de eixo de rotaçaõ.

Seja AP o eixo procurado (Fig. 198.), G o centro de gravidade do corpo, MQ huma perpendicular ao plano GAP conduzida do ponto M, onde se acha o elemento dM, GA e PQ duas perpendiculares ao eixo conduzidas dos pontos G e Q. Supponhamos $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, a velocidade angular do corpo $= W$; e teremos $W . PM$ por expressaõ da velocidade de rotaçaõ do elemento dM. Donde será a força centrifuga delle pela direcçaõ PM representada por $\frac{W^2 . PM^2}{PM} dM$ (n. 407.) $= W^2 PM . dM$.

Esta força resolve-se em duas, huma por $QM = W^2 . z dM$, e a outra parallela a $PQ = W^2 y dM$. A resultante de todas as forças $W^2 . z dM$ deve ser nulla, porque $\int z dM = 0$, e a resultante de todas as forças $W^2 . y dM$ deverá ser $= W^2 . M . GA$. Mas he necessario, que o eixo AP seja tal, que as forças centrifugas se façaõ mutuamente equilibrio, e que naõ possaõ conseguintemente alterar a velocidade angular, nem o mesmo eixo. Logo $W^2 M . GA = 0$, isto he, deve o eixo de rotaçaõ passar pelo centro de gravidade.

520 Mas alem disto ainda he necessario mais; porque as forças $W^2 \int z dM$ e $W^2 \int y dM$ ainda que nullas em si mesmas, como se devem conceber actuando em distancias infini-

infinitas $\frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}$, e $\frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM}$, produziriaõ momentos finitos $W^2 \int xz\,dM$, e $W^2 \int xy\,dM$, capazes de fazer variar tanto o eixo de rotaçaõ, como a velocidade angular. Logo he tambem neceſſario, que ſeja $\int xz\,dM = 0$, e $\int xy\,dM = 0$, para que o effeito das forças centrifugas ſeja abſolutamente deſtruido. Porém as formulas $\int xz\,dM = 0$, $\int xy\,dM = 0$ naõ tem lugar, ſenaõ quando AP he hum dos eixos principais. Logo podemos concluir geralmente, que *em qualquer corpo livre os eixos principais do centro de gravidade ſaõ os unicos, ao redor dos quais ſe perpetua uniformemente qualquer movimento primitivo de rotaçaõ.*

E por conſeguinte; a ſoluçaõ do Problema ſuppoem, que o eixo perpendicular em G ao plano da figura he hum dos eixos principais.

521 No movimento, de que tratamos aqui, caminhando o centro de gravidade G uniformemente pela linha GE (Fig. 199.), e girando as outras partes ao redor de G ſegundo KL, deve haver neceſſariamente na recta FGK perpendicular a GE hum ponto C, cuja velocidade de rotaçaõ perpendicular a CG ſeja igual á velocidade do centro de gravidade, e que fique conſeguintemente em deſcanço por hum inſtante. Eſte ponto he o que M. Bernoulli chama *centro eſpontaneo de rotaçaõ.*

Para o determinarmos, reflectiremos que $\frac{A}{M}$ exprime a velocidade do centro de gravidade commua a todas as partes do ſyſtema, e $\frac{Af}{Mk^2}$ a velocidade angular do corpo á roda do centro de gravidade, e conſeguintemente que $\frac{Af}{Mk_2} \cdot CG$ he a velocidade de rotaçaõ do ponto C. Logo teremos $\frac{Af}{Mk^2} \cdot CG = \frac{A}{M}$, e $CG = \frac{k^2}{f}$. Donde ſe ſegue, que *o centro eſpontaneo de rotaçaõ naõ he couſa differente do centro de oſcillaçaõ do corpo, ſuppondo que elle oſcilla ao redor de hum eixo perpendicular em* F *ao plano da figura*; e conſeguintemente ſe determinará pelos meſmos principios.

55. Daqui ſe póde facilmente entender a origem do movi-

movimento de rotaçaõ dos planetas. Huma ſimples força de projecçaõ applicada por huma direcçaõ, que naõ paſſaſſe pelo centro de gravidade, baſtava para produzir ſimultaneamente os movimentos periodicos, com que elles deſcrevem as ſuas trajectorias, e os movimentos de rotaçaõ, com que giraõ ao redor dos ſeus proprios centros; e bem facilmente ſe póde determinar a diſtancia do centro, onde devia ſer applicada eſta força, para produzir os movimentos que conſtaõ das obſervações.

Seja o corpo M huma esfera (Fig. 197.), e o ſeu raio $= R$; e teremos $Mk^2 = \frac{2}{5} MR^2 + Mf^2$, $W = \frac{Af}{\frac{2}{5} MR^2 + Mf^2}$, ou $f^2 - \frac{A}{MW} f + \frac{2}{5} R^2 = 0$, e conſeguintemente $f = \frac{A}{2MW} - \sqrt{\left(\frac{A^2}{4M^2W^2} - \frac{2}{5} R^2\right)}$:

Para applicarmos iſto ao movimento da terra, reflectiremos que fazendo ella a revoluçaõ diurna em hum dia e a periodica em hum anno, ſerá a velocidade angular ao redor do ſol repreſentada por $\frac{W}{365}$ proximamente; e ſuppondo que o raio da orbita annua he de 22000 ſemidiametros terreſtres, ſerá a velocidade de projecçaõ repreſentada por $\frac{22000\,RW}{365} = \frac{4400\,RW}{73} = \frac{A}{M}$. E ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, teremos $f = \frac{2200\,R}{73} - \sqrt{\left[\left(\frac{2200\,R}{73}\right)^2 - \frac{2}{5} R^2\right]} = \frac{1}{150} R$ proximamente, como M. Bernoulli achou por outro methodo.

Achado o valor de f, podemos determinar o centro eſpontaneo de rotaçaõ (Fig. 199.), e teremos $CG = \frac{\frac{2}{5} R^2 + f^2}{f} = 60\,R$ proximamente; reſultado muito notavel, por dar eſte centro coincidente com a diſtancia da Lua. He difficil de crer, que iſto ſuccedeſſe aſſim por acaſo, mas mais difficil ſerá aſſignar a connexaõ phyſica, que

que tem a Lua com o movimento diurno da terra. ∫∫.

522 Probl. I. Vindo hum corpo duro m (Fig. 200.) com a velocidade V encontrar outro corpo tambem duro M perpendicularmente á superficie delle, mas por huma direcçaõ IK, que naõ passa pelo seu centro de gravidade G: pergunta-se, qual ha de ser o movimento de ambos elles, supposto M livre, e em descanço.

Seja v a velocidade do corpo m depois da percussaõ, desorte que $m(V-v)$ exprima a quantidade de movimento por elle communicada ao corpo M segundo a direcçaõ IK. Sabemos já que o centro de gravidade G se ha de mover, como se esta força lhe fosse immediatamente impressa por huma direcçaõ parallela GE; e assim terá por GE a velocidade $\frac{m(V-v)}{M}$. Por outra parte sabemos, que as mais partes do corpo deveráõ girar ao redor do ponto G com a velocidade angular $W = \frac{mf(V-v)}{Mk^2}$, representando f a recta GK perpendicular a IK, e Mk^2 o momento de inercia a respeito do eixo perpendicular em G ao plano da figura, eixo ao redor do qual o corpo se suppoem girar.

Agora he necessario, que a velocidade do ponto de contacto I segundo a direcçaõ IK seja igual á velocidade v, que resta ao corpo m, a fim de que este naõ possa mais actuar sobre o corpo M. Ora em virtude do movimento de rotaçaõ ao redor de G, a velocidade do ponto I perpendicularmente a GI he $\frac{mf(V-v)}{Mk^2} \cdot GI$, donde resulta por IK a velocidade $\frac{m(V-v)f^2}{Mk^2}$; e esta juntamente com a velocidade progressiva do centro de gravidade deve ser igual a v. Logo teremos a equaçaõ $\frac{m(V-v)f^2}{Mk^2} + \frac{m(V-v)}{M} = v$, da qual se tira $v = \frac{m(f^2+k^2)V}{m(f^2+k^2)+Mk^2}$. Logo será a velocidade do centro de gravidade $\frac{m(V-v)}{M} = \frac{mk^2 V}{m(f^2+k^2)+Mk^2}$,

e

e a velocidade angular de rotação ao redor do ponto G será $W = \dfrac{mfV}{m(f^2 + k^2) + Mk^2}$; com o que se tem resolvido o problema proposto.

Se fosse $f = 0$, teriamos a velocidade $v = \dfrac{mV}{M+m}$, a do centro de gravidade $= \dfrac{mV}{M+m} = v$, e a velocidade angular $W = 0$. Com effeito, sendo então directa a percussão, e determinando-se o movimento pelas formulas ordinarias (n. 447.), se acharia o mesmo resultado.

523 Probl. II. Dous corpos duros e esfericos A, a (Fig. 201.), suspendidos dos pontos fixos C, c pelas varas inflexiveis CA, ca vem a encontrar-se com as velocidades angulares V, v: qual será o seu movimento depois da collisão?

Sejão V', v' as velocidades angulares, que elles terão depois do encontro. Pelo principio geral será pois necessario, que as velocidades V', v' não se embaracem mutuamente, e que os corpos A, a animados das velocidades angulares $V - V'$, $v - v'$ fação equilibrio entre si. Conduzindo $CB = F$, e $cb = f$, perpendiculares á linha Aa que passa pelos centros e pelo ponto do contacto, está claro que a primeira condição exige que as velocidades dos pontos B, b sejão iguaes, e conseguintemente teremos $V'F = v'f$.

Em segundo lugar, cada particula dM do corpo A situada na distancia r do eixo C sendo animada da velocidade $(V - V')r$, que ella ha de perder, dá relativamente ao mesmo eixo o momento $(V - V')r^2 dM$; logo a soma dos momentos será $(V - V')\int r^2 dM = (V - V')A.K^2$, chamando $A.K^2$ o momento de inercia do corpo A a respeito do eixo C.

Donde se segue, que o corpo A animado da velocidade angular $V - V'$ he equivalente a huma força $\dfrac{(V - V')AK^2}{F}$ applicada em B pela direcção AB. Do mesmo modo o corpo a animado da velocidade angular $v - v'$ he equivalente a huma força $\dfrac{(v - v')ak^2}{f}$ applicada em b pela

direc-

direcçaõ AB. Logo, pela ſegunda condiçaõ, he neceſſario que tenhamos $\frac{(V-V')AK^2}{F} + \frac{(v-v')ak^2}{f} = o$.

Eſta equaçaõ juntamente com a outra $V'F = v'f$, determinará as velocidades angulares V', v', cujos valores ſaõ $V' = \frac{f(AK^2Vf + ak^2vF)}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$, $v' = \frac{F(AK^2Vf + ak^2vF)}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$.

524 Até aqui temos ſuppoſto os corpos duros; mas ſe elles foſſem elaſticos, as formulas achadas careceriaõ das modificaçoẽs, que a elaſticidade requer. Porque entaõ reſtituindo eſta força ao corpo A em ſentido contrario a velocidade $V - V'$, que elle tinha perdido pela compreſſaõ, naõ lhe reſtará mais que a velocidade $2V' - V$. Do meſmo modo o corpo a tendo ganhado na compreſſaõ a velocidade $v' - v$, pela ſua elaſticidade ganharia outro tanto, e depois da percuſſaõ teria a velocidade $2v' - v$. Subſtituindo pois em lugar de V', v' os valores que acabamos de achar, teremos as velocidades angulares

$$\text{do corpo } A = \frac{Af^2K^2V + 2afFk^2v - aF^2k^2V}{AK^2f^2 + ak^2F^2}$$

$$\text{do corpo } a = \frac{ak^2F^2v + 2AfFK^2V - Af^2K^2v}{AK^2f^2 + ak^2F^2}.$$

Antes da colliſaõ huma particula dM do corpo A ſituada na diſtancia r do eixo de rotaçaõ, tinha a velocidade rV, e a força viva r^2V^2dM; logo a força viva do corpo A era $V^2\int r^2dM = V^2 . AK^2$, e a ſoma das forças vivas dos dous corpos $V^2.AK^2 + v^2.ak^2$. Eſta ſoma veio a ſer depois da colliſaõ $AK^2(2V'-V)^2 + ak^2(2v'-v)^2$, ou $V^2.AK^2 + v^2.ak^2 + 4AK^2V'(V'-V) + 4ak^2v'(v'-v)$. Porém he facil de ver, que os dous ultimos termos ſe reduzem a nada; porque as duas equaçoẽs $V'F = v'f$, e $\frac{AK^2(V'-V)}{F} + \frac{ak^2(v'-v)}{f} = o$, daõ $V'(V'-V)AK^2 + v'(v'-v)ak^2 = o$. Logo a ſoma das forças vivas he ſempre a meſma antes e depois da colliſaõ, quando os dous corpos ſaõ perfeitamente elaſticos.

FIM.

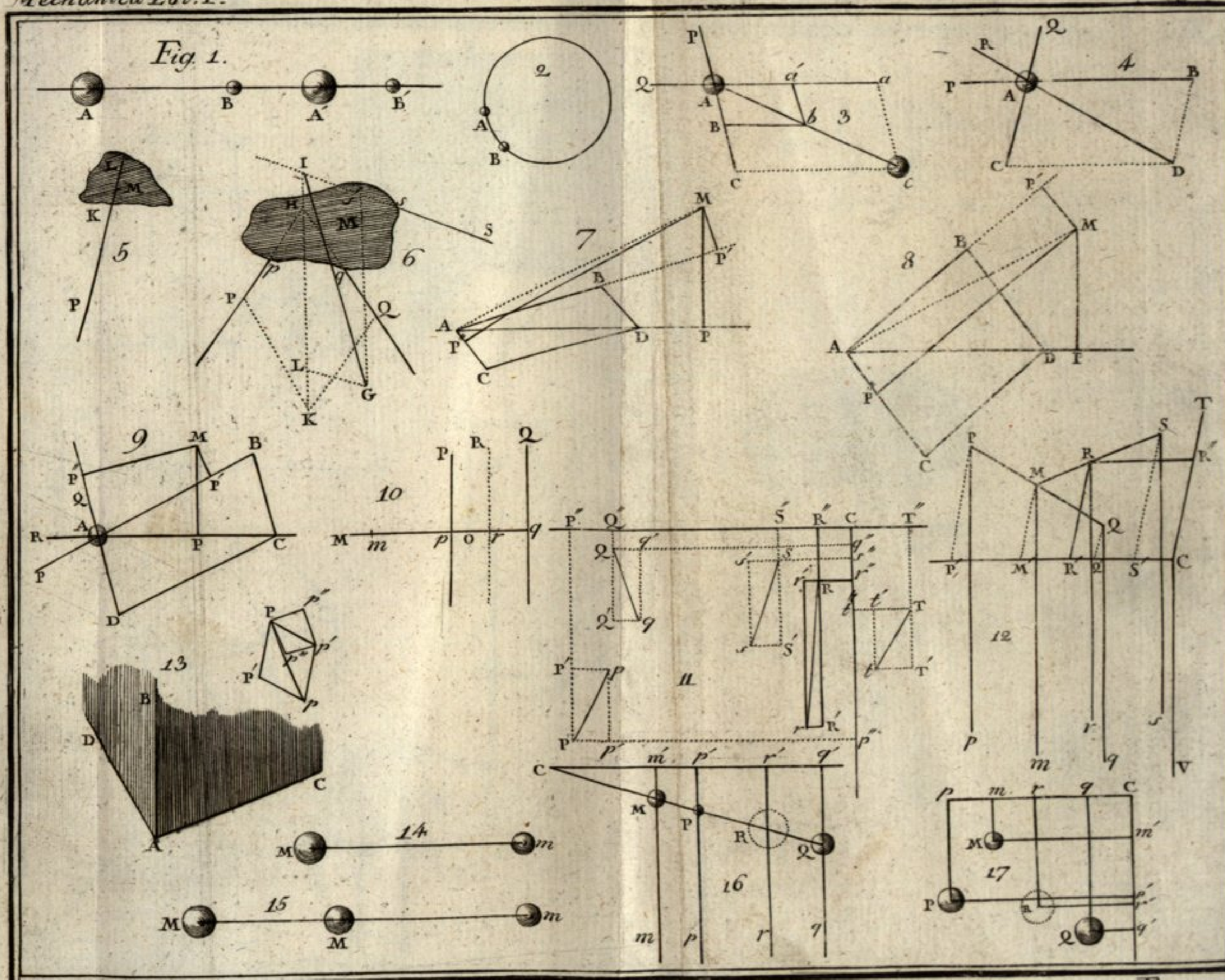

Fig. 17.