ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA

PARA

O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA

PARA

O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS

PRIMEIRO CONGRESSO

CELEBRADO NA CIDADE DO PORTO
DE 26 DE JUNHO A 1 DE JULHO DE 1921
JUNTAMENTE COM
O OITAVO CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO ESPANHOLA
PARA O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS

SECÇÕES DE MATEMÁTICA, ASTRONOMIA E SCIÊNCIAS FÍSICO-QUÍMICAS

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1923

SOBRE AS NOÇÕES FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE INFINITESIMAL

CONFERÊNCIA

PELO

DR. PEDRO JOSÉ DA CUNHA

É assombrosa a extensão que a Análise Infinitesimal tem atingido nos nossos dias. Não só se têm expandido consideràvelmente quási tôdas as divisões desta Sciência já conhecidas das gerações anteriores, como também se têm desenvolvido novas e importantes ramificações, mercê dos fecundos trabalhos de investigação dos sábios do nosso tempo.

Dominando todo êste vastíssimo conjunto há um certo número de *ideas* ou *noções fundamentais;* algumas apareceram logo ao alvorecer da sciência, como que inactas no espírito dos primeiros pensadores; outras foram surgindo à medida que a sciência se ia desenvolvendo; e de tôdas se partia, sem uma análise discreta da sua essência, para a investigação de novos factos e para a sua relacionação. Foi só quando se tornou considerável o pêso das suas conseqüências, que os sábios reconheceram a necessidade de profundá-las, fazendo-as o objecto duma revisão cuidadosa. E revisões destas têm naturalmente de operar-se ainda muitas vezes na série dos tempos. A Análise Infinitesimal é como que um grande edifício, a que se vão juntando constantemente novas alas e novos andares; nada mais natural do que, de vez em quando, reforçarem-se-lhe os alicerces.

O exame crítico das noções fundamentais, em que assenta todo êste edifício da Análise, pode ser feito sob vários aspectos, mas vou limitar-me a considerar aquele que interessa mais particularmente aos professores de ensino superior.

Sendo limitada a duração dos cursos universitários, e ilimitado e ràpidamente crescente o âmbito da sciência, há-de sempre haver diferença, e cada vez maior, entre a massa total dos conhecimentos adquiridos num dado ramo scientífico e a parte que um estudante pode assimilar durante a sua passagem por êsses cursos. Oferece-se, portanto, ao ensino superior o seguinte problema:

Sendo materialmente impossível sairem os alunos das Universidades, conhecendo todos os factos averiguados da sciência do seu tempo, evitar que, ao lançarem-se na vida prática, haja uma *diferença de fase* que os iniba de se porem ràpidamente em dia com as ideas dominantes e de se integrarem no movimento scientífico contemporâneo.

Êste problema só pode ser resolvido dirigindo-se a acção dos professores mais à *qualidade* do que à *quantidade* do ensino a ministrar. É preciso habilitar os alunos, não a reproduzirem de memória o maior número de coisas que possam reter, do cabedal de conhecimentos armazenado pela sua geração e pelas gerações anteriores, mas a apreenderem com o seu próprio esfôrço tôda a obra scientífica já realizada no domínio para que os atrairem as suas disposições naturais, e a alargarem as aplicações e os horizontes da sciência a que se consagrarem, usando com êxito dos seus processos de trabalho e, porventura, dos seus métodos de investigação.

Em perfeita concordância de ideas vejo o sr. Paul Appell, o ilustre reitor da Academia de Paris, sustentar, numa conferência realizada em 1 de Fevereiro de 1920 perante a Associação Geral dos Estudantes daquela capital, que se deve opôr absolutamente o espírito scientífico ao espírito de erudição; que o fim do ensino público é o desenvolvimento do espírito scientífico; que êste é caracterizado pela acção, pela procura da verdade acima de tudo; e que o ensino superior deve tender, não apenas a desenvolver conhecimentos, mas a provocar o espírito de iniciativa e o gôsto pela investigação.

Nesta ordem de ideas é forçoso que o professor aproveite o melhor possível a duração dos seus cursos para insuflar nos alunos ideas claras e precisas sôbre os conceitos fundamentais da sciência que professa, sôbre os factos capitais da mesma sciência que se deve sempre ter em vista nas suas aplicações, e sôbre os seus métodos de exposição e de investigação, de forma que cada um dêles, ao concluir a sua formatura, conheça as novas directrizes em que se desenvolve o esfôrço investigador dos seus contemporâneos; esteja apto a prosseguir os seus estudos, alargando os seus conhecimentos em qualquer ramo especial da sciência a que deseje dedicar-se; esteja senhor dos métodos de investigação, que são próprios dêsse ramo da sciência, para poder contribuir para os seus progressos, se para isso tiver disposição natural; e esteja em condições de aplicar a sciência adquirida na resolução dos problemas que interessam à vida prática, designadamente à engenharia, à indústria e à agricultura.

Estas considerações genéricas são inteiramente aplicáveis à Análise Infinitesimal. No seu ensino deve ter-se em vista mais a *qualidade* do que a *quantidade*, isto é, alcançado um mínimo de conhecimentos, definido pelas necessidades dos cursos subseqüentes, não importa que a cultura especial que um aluno tenha adquirido, em confronto com o estado contemporâneo da Análise, denuncie uma *diferença de intensidade;* essa diferença é mesmo inevitável; o que importa é que não haja uma *diferença de fase.* O aluno deve estar familiarizado com as ideas correntes, os modos de ser e os métodos de investigação da Análise moderna; não deve ter cristalizado dentro dos horizontes mais estreitos e dos métodos menos fecundos e eficazes das gerações que o precederam.

Se do exposto deriva a necessidade dum cuidado especial na organização dos programas, na escolha das matérias sôbre que há-de versar o ensino, ressalta ao mesmo tempo a conveniência de apresentar as noções fundamentais da Análise sob o aspecto por que devem ser encaradas à face dos últimos desenvolvimentos que ela tem experimentado; de lhes dar, portanto, o maior grau possivel de generalidade, sem prejuízo da clareza e do rigor.

Vou passar em revista essas noções fundamentais, apresentando-as, sem pretenções a originalidade, pela forma que melhor me parece coadunar-se com as condições que formulei.

*

* *

Remontam quási à origem das sciências matemáticas, intimamente ligados um ao outro, dois dos conceitos mais fecundos destas sciências; são os de *limite* e de *infinitamente pequeno*, que podem dizer-se já conhecidos de Archimedes. Hoje considera-se um conceito ainda mais geral. É o de *função*, que domina tôda a sciência.

Como é sabido, os antigos chamavam *funções* às variáveis cujos valores dependem dos das variáveis independentes, seja qual fôr a natureza desta dependência; e entendiam por *variáveis independentes* as variáveis cujos valores são inteiramente arbitrários.

Estas noções, assim apresentadas, eram pouco precisas. Mesmo com relação às variáveis independentes, podemos multiplicar à vontade as questões em que as variáveis, a considerar como tais, só podem tomar valores tirados de determinadas classes de números, e não são por isso inteiramente arbitrárias.

Dizemos hoje que mais precisamente as quantidades $x, y, \ldots$ são variáveis independentes, quando não existe nenhuma relação entre elas, por forma que, fixados os valores de tôdas menos uma, a restante pode tomar todos aqueles de que é susceptível.

Por outro lado, dizemos que u é função de $x, y, \ldots$, quando u está ligado com estas variáveis de tal sorte que a cada ponto $(x, y, \ldots)$ pertencente a um dado conjunto (E) corresponde um, e um só, valor de u. Assim a noção de função aparece ligada à de *conjunto de pontos*, o que mostra a vantagem de fazer preceder as noções da Análise Infinitesimal do estudo das principais propriedades da teoria dos conjuntos.

Impõe-se inicialmente a consideração das noções de conjunto e de potência, a distinção entre os conjuntos com a potência do contínuo e com a potência do numerável, e o estabelecimento das propriedades fundamentais duns e doutros.

Em seguida é necessário considerar os conjuntos de pontos, deduzir as suas principais propriedades e tratar da sua medição, para o que, nesta altura, basta aplicar o critério de Jordan.

Pode objectar-se que aquela definição de função, apesar de parecer muito geral, não o é na realidade, pois exclue as variáveis que admitem mais do que um valor para cada sistema de valores doutras de que dependem. Sabe-se, porém, que esta dúvida se afasta decompondo essas variáveis em ramos, e estudando cada um dêles separadamente.

A verdade é que a definição é tão geral que abrange até as grandezas que não são susceptíveis duma representação analítica, sempre a mesma, em todos os pontos do conjunto em que são definidas. Assim, por exemplo, se a todos os pontos do intervalo 0–1, de abscissa racional, fizermos corresponder o número 1, e a todos os de abscissa irracional o número 0, definiremos nesse intervalo uma função, que só pode ter um dos valores 0 ou 1; ela cabe realmente bem dentro da nossa definição de função, mas não podemos representá-la por uma expressão analítica única.

Esta consideração é suficiente para evidenciar que, embora y seja função de x, não se pode dizer, duma maneira geral, que, reciprocamente, x seja função de y. No exemplo citado, se quiséssemos fazer de y a variável independente, esta só teria os valores 0 e 1, e a cada um dêles corresponderia uma infinidade de valores de x. Nem pela definição antiga, nem, muito menos, pela nova definição, se pode considerar neste caso x como função de y.

Para os antigos, que tinham sempre em mente a representação gráfica das funções, os valores destas eram as ordenadas dos pontos das suas curvas representativas, e os da variável independente, as abscissas. Ora tanto fazia exprimir as ordenadas em função das abscissas como as abscissas em função das ordenadas; donde a noção intuïtiva, que hoje temos que pôr de parte como conseqüência da generalização da noção de função, de que, sendo y função de x, é x, recìprocamente, função de y.

Resulta desta grande generalidade com que apresentamos a noção de função, que é impossível estabelecer uma propriedade qualquer que seja aplicável a tôdas as funções em geral. Pode dizer-se que raciocínio algum é factível sem que se parta de hipóteses restritivas, que lhe sirvam de base. Somos assim levados a considerar classes de funções, tais como as *funções limitadas*, as *funções integráveis* e tantas outras, conforme as propriedades que lhes atribuímos.

*

* *

Passemos agora à noção de *limite*.

Os antigos partiam da seguinte definição:

Quando uma grandeza variável toma sucessivamente valores que se aproximam cada vez mais duma grandeza constante, de modo que a diferença para com esta se possa tornar e manter menor que qualquer quantidade dada, diz-se que a constante é o *limite* da variável; e isto quer a variável esteja sempre abaixo, sempre acima, ou ora abaixo, ora acima, da constante. E para precisar melhor a noção acrescentava Duhamel nos seus *Éléments de Calcul Infinitésimal* que se a diferença entre a constante e os valores sucessivos da variável, depois de se tornar inferior a uma quantidade designada, se tornar em seguida maior que ela, depois mais pequena, em seguida maior, e assim indefinidamente, a constante não deve ser considerada como limite da variável.

A idea de limite, assim enunciada, parece, à primeira vista, excluir o caso de certas funções que, quando a variável de que dependem varia sempre no mesmo sentido aproximando-se dum número dado, oscilam indefinidamente em tôrno dum valor limite, sendo cada vez menor a amplitude das oscilações; tal é, por exemplo, a função $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, que tende para zero quando x tende para o infinito, e passa e repassa indefinidamente pelo valor zero.

Por outro lado, as expressões *tornar-se* e *manter-se menor*, não traduzidas por símbolos matemáticos, não ofereciam nitidez e precisão suficientes.

Foi para tirar a esta noção tudo o que ela tinha de vago e de impreciso que se adoptou a seguinte definição:

Diz-se que uma variável u, que passa por uma infinidade de valores diferentes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

tende para um limite A, quando, por menor que seja a quantidade positiva δ, existe sempre um número n_1 tal que, para todos os valores de n superiores a n_1 se tem

$$|A - u_n| < \delta.$$

Tomando esta definição como ponto de partida estabelece-se o teorema de Cauchy, que dá a condição necessária e suficiente para a existência do limite, e baseados nele se deduzem muitos outros princípios que são de uso freqüente na Análise matemática; mas a referida definição ainda se presta a um reparo, que tem, a meu ver, uma grande importância. A maneira como designamos os valores sucessivos da variável, distinguindo-os uns dos outros por índices numéricos, mostra que êsses valores formam uma sucessão numerável; ora, na maior parte das aplicações, a variável, que está em jôgo, passa por uma infinidade de valores contínuos.

É certo que dum conjunto com a potência do contínuo se pode sempre extrair conjuntos numeráveis, e até duma infinidade de maneiras; mas êsses conjuntos numeráveis, ainda que todos tendam para limites, podem ter limites diferentes.

Se considerarmos, por exemplo, a fracção $\frac{1}{x}$, e fizermos crescer x indefinidamente passando por valores que formem um conjunto com a potência do contínuo, poderemos destacar dêsse conjunto uma infinidade de outros, numeráveis, e tais que a todos êles corresponda o limite zero; neste caso compreende-se que se diga que $\frac{1}{x}$ tende para zero quando x cresce indefinidamente, ainda que se suponha que o conjunto dos valores por que passa x tenha a potência do contínuo.

Mas se a variável a considerar se exprime por $(1 + x) \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, e queremos o seu limite para $x = 0$, podemos fazer

$$x = \frac{1}{2n\pi + \alpha},$$

sendo n um número inteiro, e α um arco qualquer $\gtreqless 0$ e $< 2\pi$.

Para cada valor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, atribuído a α, podemos dar a n todos os valores inteiros e positivos desde zero até ao infinito, e extrair, portanto, do conjunto dos valores da variável uma infinidade de sucessões numeráveis:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_1}\right)\operatorname{sen}\alpha_1,\ \left(1+\frac{1}{2\pi+\alpha_1}\right)\operatorname{sen}\alpha_1,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{2n\pi+\alpha_1}\right)\operatorname{sen}\alpha_1,\ \ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_2}\right)\operatorname{sen}\alpha_2,\ \left(1+\frac{1}{2\pi+\alpha_2}\right)\operatorname{sen}\alpha_2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{2n\pi+\alpha_2}\right)\operatorname{sen}\alpha_2,\ \ldots,$$

. . . .

Os elementos da primeira sucessão tendem para $\operatorname{sen}\alpha_1$; os da segunda, para $\operatorname{sen}\alpha_2$; e assim sucessivamente. Ao contrário, pois, do que sucedia no exemplo anterior, cada uma destas sucessões tem um limite diferente, e não há pròpriamente limite para a variável quando se restabelece a hipótese dela passar por um conjunto de valores com a potência do contínuo.

Diremos, pois, que uma variável u tende para o limite A, quando, passando por uma sucessão discontínua de valores

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

se verifica a condição

$$|A - u_n| < \delta$$

para $n > n_1$; ou quando, passando por uma infinidade contínua de valores, tôdas e quaisquer sucessões numeráveis, que dela se podem extrair, tendem para o limite comum A.

Empregando a linguagem de teoria dos conjuntos, o limite é, no primeiro caso, um *ponto limite* ordinário, e no segundo, um *ponto de condensação.*

Na última hipótese podemos dizer, duma maneira bem expressiva, que a variável tende para um *limite determinado.*

Esta possibilidade de a variável passar, ou não, por uma sucessão de valores que tenham a potência do contínuo, leva-nos a reflectir um pouco na generalidade dos princípios que se estabelecem na teoria dos limites. Eis o facto que me parece mais digno de registo:

Costuma-se demonstrar, como uma conseqüência do teorema de Cauchy, que uma variável que cresce (ou decresce) constantemente, sem nunca exceder (ou se tornar inferior a) um número dado, tende para um limite. O teorema fica assim estabelecido só para o caso das sucessões numeráveis. É, pois, interessante reconhecer que êle é verdadeiro, mesmo que a variável passe por um conjunto de valores que tenha a potência do contínuo; isto é, que os limites de tôdas as sucessões numeráveis, que dêsse conjunto se podem tirar, são, neste caso, necessàriamente iguais entre si.

*

* *

Conhecida a noção de limite, nenhuma dificuldade oferece a de *infinitamente pequeno*. No meu entender, convém reünir num só corpo de doutrina os princípios relativos a essas variáveis, que muitas vezes se encontram dispersos. Refiro-me aos teoremas sôbre a classificação dos infinitamente pequenos, à noção fecudíssima de *infinitamente pequenos equivalentes* e aos princípios relativos à substituïção dos infinitamente pequenos. É muito interessante salientar o quanto tem de relativa a noção de infinitamente pequeno; que a mesma quantidade pode ser considerada como infinitamente pequena, como finita ou como infinitamente grande, conforme a que se toma como infinitamente pequeno de referência. Esta nota tem importância em muitos casos, sobretudo quando se quere determinar os verdadeiros valores de certas expressões que, para dados valores das variáveis, se apresentam sob formas indeterminadas.

*

* *

Examinemos agora a noção de *conjunto limitado*, donde deriva a de *função limitada*, que considero uma das mais importantes de entre tôdas as noções fundamentais da análise moderna.

Seja um conjunto (E) a uma só dimensão.

Se todos os seus elementos são números inferiores a um número fixo L, dizemos que o conjunto é limitado *superiormente* ou *à direita*.

Para estes conjuntos existe sempre um ponto M tal que não há em (E) nenhum elemento maior que M; e por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento de (E) que seja $> M-\delta$ e $\overline{\gtrless} M$.

Anàlogamente, se todos os elementos do conjunto são números superiores a um número fixo l, dizemos que o conjunto é limitado *inferiormente* ou *à esquerda*. E para estes conjuntos existe sempre um ponto m tal que não há em (E) nenhum elemento menor que m; e, por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento de $(E) \overline{\gtrless} m$ e $< m+\delta$.

O número M, *limite superior*, é a fronteira comum do conjunto (E_1), formado por todos os números maiores do que todos os elementos de (E), e do seu conjunto complementar (C_1); e o número m, *limite inferior*, a fronteira comum do conjunto formado por todos os números menores do que todos os elementos de (E) e do seu conjunto complementar.

Referir-me hei agora em especial ao limite superior, porque o que se diz dêle aplica-se *mutatis mutandis* ao limite inferior.

Da própria definição dêsse número se conclue que êle pode pertencer, ou não, ao conjunto que se considera, ou, por outras palavras, que pode ser, ou não, *atingido*. Com efeito, por definição de ponto fronteira, M tanto pode pertencer ao conjunto (E_1) como ao seu complementar (C_1), e se pertence a (E_1) não pertence a (E). Fazendo parte de (C_1), ainda pode não pertencer a (E), visto que todos os pontos de (E) são pontos de (C_1), mas pode suceder que nem todos os pontos de (C_1) sejam pontos de (E). E vem a propósito dizer que, se alguns autores, como o sr. Jordan, consideram sinónimas as designações de *limite superior* ou *máximo*, por um lado, e de *limite inferior* ou *mínimo*, por outro, eu inclino-me de preferência para a maneira de ver dos que só consideram os limites, superior e inferior, como máximo, ou mínimo, quando são atingidos.

A grande variedade e importância das teorias, em que intervem a noção do conjunto limitado, têm-me convencido da conveniência de insistir um pouco no estabelecimento desta noção, apreciando-a sob todos os espectos por que pode ser analisada.

Assim, examinando a possibilidade de o limite superior ser, ou não, atingido, três casos se podem dar:

1.º O limite M é atingido, mas existe um número δ suficientemente pequeno para que entre M e $M-\delta$ não haja nenhum elemento do conjunto;

2.º O limite M não é atingido, mas por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento do conjunto entre M e $M-\delta$;

3.º O limite M é atingido, e, por menor que seja o número positivo δ, existe sempre algum elemento do conjunto entre M e $M-\delta$.

Interessa, pois, poder conhecer, tendo em atenção as aplicações:

a) Se, sendo o limite M atingido, existe, ou não, algum elemento do conjunto compreendido entre M e $M-\delta$, por menor que seja δ; ou

b) Se, existindo sempre algum elemento do conjunto entre M e $M-\delta$, por menor que seja δ, M pertence, ou não, ao conjunto.

Na primeira hipótese a resposta é evidentemente afirmativa se o conjunto é denso nas vizinhanças de M, porque então entre qualquer elemento do conjunto situado nessas vizinhanças e o próprio M pode-se sempre intercalar um terceiro elemento, e portanto uma infinidade.

Mas esta condição da densidade do conjunto, que é suficiente, não é de modo algum necessária. Se o conjunto é perfeito, todos os seus pontos (e portanto M) são pontos limites. A condição de haver elementos entre M e $M-\delta$ verifica-se necessàriamente. Ora um conjunto pode ser perfeito e não ser denso em intervalo algum; é o que sucede, por exemplo, ao conjunto de tôdas as fracções decimais, limitadas ou não, que se escrevem com os algarismos 0 e 1, ou ao conjunto de tôdas as fracções contínuas ilimitadas em que figura um número limitado de quocientes incompletos diferentes.

Mas a condição de o conjunto ser perfeito, ou concentrado, também não é necessária, porquanto pode o conjunto ser fechado e M ser um dos seus pontos limites. Entretanto, o ser o conjunto simplesmente fechado não é condição suficiente, pois que nos conjuntos fechados há pontos que não são pontos limites, e M pode ser precisamente um dêsses pontos.

Na segunda hipótese, M é necessàriamente atingido se o conjunto é fechado, pois que é um ponto limite do conjunto, e êste abrange todos os seus pontos limites. Mas a condição de o conjunto ser fechado não é necessária, pois que, sendo concentrado, pode o ponto M ser precisamente um dos pontos comuns a êsse conjunto e ao seu derivado.

Resulta desta discussão que só para os conjuntos perfeitos limitados superiormente é que podemos afirmar *à priori* que o limite superior M goza das três seguintes propriedades:

1.ª Não há no conjunto nenhum elemento maior que M;

2.ª Há no conjunto um elemento igual a M; e

3.ª Por menor que seja o número positivo δ, existe sempre no conjunto algum elemento compreendido entre M e $M-\delta$.

A questão de um limite ser, ou não, atingido pode apresentar-se sob uma modalidade diferente na forma, pôsto que equivalente no fundo. O limite superior, por exemplo, é atingido, quando há no conjunto um elemento que é maior do que todos os outros; não é atingido no caso contrário. Esta última hipótese pode exemplificar-se com o conjunto dos números irracionais compreendidos entre o e 1, o qual tem evidentemente 1 como limite superior não atingido. Por mais próximo que um dêstes números irracionais esteja da unidade, entre êle e 1 pode sempre intercalar-se um terceiro, o que mostra a impossibilidade de haver no conjunto um elemento maior do que todos os outros. O primeiro caso verifica-se com o conjunto dos números reais compreendidos entre o e 1 no sentido lato, onde existe o elemento 1, maior do que todos os outros, que é um limite superior atingido.

*

* *

Não vale a pena demorar-me na generalização da noção de conjunto limitado aos conjuntos a qualquer número de dimensões, nem insistir na noção de função limitada, no conjunto em que é definida; nenhum dêstes conceitos dá lugar a considerações especiais.

Referir-me hei, apenas, à conveniência de acentuar bem, para vincar nìtidamente o que seja uma *função limitada*, que, para que uma função seja limitada não basta que não se torne infinita. Uma função $f(x)$, definida no conjunto dos números reais, de modo que, para $x = 0$, se tenha $f(0) = 0$, e, em todos os outros pontos, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, não é infinita em ponto algum, mas nas vizinhanças do ponto o pode tomar um valor tão grande quanto se queira, e por conseguinte maior do que qualquer número dado.

Esta particularidade curiosa, de uma função poder não ser limitada sem se tornar infinita, não custa a conceber, dada a generalidade com que se estabelece a noção de função; mas é útil ponderar que essa particularidade pode dar-se mesmo com as funções que são susceptíveis duma representação analítica, sempre a mesma, em todos os pontos do conjunto em que são definidas.

Consideremos, por exemplo, a série

$$\varphi(x) = x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+x^2)^n} + \cdots$$

cuja soma é zero para $x=0$, e

$$x+\frac{1}{x},$$

para qualquer outro valor de x.

Como a função, que ela define, é impar, poderemos limitar-nos a considerar os valores positivos de x. Dado, então, um número positivo N, tão grande quanto se queira, basta atribuir a x um valor que torne $\frac{1}{x}>N$ $\left(\text{ou } x<\frac{1}{N}\right)$ para que se tenha, por maioria de razão, $\varphi(x)>N$, donde se conclui que $\varphi(x)$ não é limitada. Mas esta função também não pode tornar-se infinita, porque isso só poderia verificar-se para $x=0$, e neste caso $\varphi(x)$ anula-se.

*

* *

A noção de função limitada, conjugada com a de conjunto mensurável, permite estabelecer desde logo a noção de *integral definido* com uma grande generalidade. Em vez de se iniciar o estudo da integração pelos integrais ordinários das funções contínuas, pode começar-se pelos *integrais de Darboux*, donde se passa imediatamente para o *integral de Riemann* e para as *funções integráveis*. Assim, com o mesmo trabalho, estabelece-se a noção de integral estendida a um domínio a qualquer número de dimensões, e sem nos prendermos com a continuïdade da função integranda. E a própria condição de integrabilidade nos permite associar desde logo às funções contínuas, dentro do conjunto das funções integráveis, outra classe importante, a das *funções de variação limitada.*

*

* *

A noção de *continuïdade* é uma daquelas que mais têm evolucionado. O célebre aforismo — *natura non facit saltus* — que por tanto tempo reinou como verdade incontroversa, fez crer aos homens de sciência que a continuïdade se manifestava em todos os fenómenos naturais, e que era por isso mesmo, salvo pontos isolados, uma propriedade intrínseca das funções que relacionam analìticamente os elementos dêsses fenómenos. Admitia-se *à priori* a existência da continuïdade, ligando-a até indissolùvelmente à existência da derivada. Hoje sabe-se que há funções contínuas que não têm derivada em ponto algum, e outras que num intervalo finito não têm derivada num número infinito de pontos.

O alargamento da primitiva noção de função colocou a continuïdade no número das propriedades que tanto podem verificar-se como não, de sorte que as funções, em que ela se manifesta, constituem apenas uma classe entre a infinidade de classes diferentes em que tôdas as funções possíveis se poderiam distribuir. Sabe-se mesmo que, ao passo que as funções contínuas formam um conjunto com a potência do contínuo, as funções, que apresentam discontinuïdades, formam um conjunto com uma potência superior.

Livros antigos, de há 50 anos a esta parte, ainda definiam a continuïdade dizendo que uma *variável* é *contínua* quando não pode passar dum valor para outro sem passar por todos os valores intermédios; e que uma *função* é contínua quando, fazendo variar duma maneira contínua as variáveis de que depende, ela varia também duma maneira contínua, isto é, não passa dum valor para outro sem passar por todos as valores intermédios.

Como conseqüência desta definição mostrava-se que, sendo $f(x)$ uma função contínua de x num intervalo dado, a acréscimos infinitamente pequenos dados a x nesse intervalo correspondem acréscimos infinitamente pequenos de $f(x)$. Ora é fácil apresentar funções que, num intervalo determinado, passem por todos os valores compreendidos entre dois números dados, e tais que a um acréscimo infinitamente pequeno dado a um valor da variável compreendido nesse intervalo corresponda um acréscimo finito da função. É o que se dá com a expressão

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{x + I\left(\frac{1}{1+x^2}\right)},$$

em que o símbolo $I(z)$ designa o maior número inteiro contido em z. Esta função, no intervalo de -2 a $+2$ passa por todos os valores compreendidos entre -1 e $+1$; anula-se para $x=0$; e para valores de x infinitamente próximos de zero pode tomar valores finitos.

Hoje exprime-se a continuïdade da função $f(x)$ no ponto x_0 por meio das desigualdades

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \delta$$

para

$$|h| < \varepsilon,$$

que se podem condensar na expressão única

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

ou, o que é o mesmo,

$$\lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mas para que haja realmente continuïdade é preciso que estas condições se verifiquem qualquer que seja a lei segundo a qual h tende para zero (ou x para x_0).

Para apresentar esta noção com todo o rigor exigível, pondo as coisas no seu verdadeiro pé, isto é, para dar a impressão de que a continuïdade é uma propriedade tão precária como qualquer outra, pode proceder-se assim:

Por meio de exemplos simples é fácil mostrar que nem sempre se tem

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

qualquer que seja a sucessão de valores por que passa h ao tender para zero, ou que $f(x)$ nem sempre converge para um limite determinado quando x tende para x_0. Nesse pressuposto, diz-se que a função $f(x)$ é indeterminada no ponto x_0; o limite superior e o limite inferior dos valores para que tende $f(x)$ quando x tende para x_0 passando por valores superiores a x_0, dizem-se o *limite superior de indeterminação* e o *limite inferior de indeterminação* à direita do ponto x_0. Podemos afirmar que estes números existem sempre, porque, se o conjunto daqueles valores é limitado, os limites de indeterminação são os limites do próprio conjunto; se não é limitado, dizemos que são iguais a $\pm\infty$. Do mesmo modo, o limite superior e o limite inferior dos valores para que tende $f(x)$ quando se faz tender x para x_0 passando por valores inferiores a x_0, limites que também podemos considerar sempre existentes, são o *limite superior de indeterminação* e o *limite inferior de indeterminação* à esquerda do mesmo ponto.

É o que se pode exemplificar com as funções sen $\frac{1}{x}$, ou tang $\frac{1}{x}$. Estas funções são indeterminadas no ponto zero, e quando se faz tender x para zero, os limites superiores e inferiores de indeterminação, à direita e à esquerda do mesmo ponto, são, respectivamente, ± 1 para a primeira e $\pm\infty$ para a segunda.

Pode suceder que os dois limites de indeterminação à direita sejam iguais entre si, ou, por outras palavras, que $f(x)$ tenda para um limite determinado quando x tende para x_0 passando por valores superiores a x_0. Êsse limite designa-se, como é sabido, por $f(x_0+0)$, reservando-se o símbolo $f(x_0)$ para exprimir o valor que toma $f(x)$ no ponto x_0.

Do mesmo modo pode acontecer que os dois limites de indeterminação à esquerda sejam iguais entre si, ou, o que é o mesmo, que $f(x)$ tenda para um limite determinado quando x tender para x_0, passando por valores menores do que x_0. Êsse limite exprime-se, como se sabe, por $f(x_0-0)$.

Os três números $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ e $f(x_0-0)$ podem ser todos diferentes; ou dois iguais e o terceiro diferente; ou todos iguais. E o caso intermédio ainda se decompõe em três, que tantas são as combinações distintas de 3 objectos tomados 2 a 2.

A consideração da questão sob êste aspecto geral é conseqüência forçada da idea que formamos de função, e nada mais fácil do que mostrar com exemplos concretos a possibilidade de tôdas estas hipóteses se verificarem.

Se não existe, ou é infinito, qualquer dos três números $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ e $f(x_0-0)$, ou se, existindo com valores finitos, não são todos três iguais entre si, diz-se que a função $f(x)$ é *discontínua* no ponto x_0, ou que x_0 é um *ponto de discontinuïdade* de $f(x)$.

No caso particular de ser

$$f(x_0+0)=f(x_0)\gtrless f(x_0-0),$$

a função $f(x)$ é *semicontínua à direita* do ponto x_0; sendo

$$f(x_0-0)=f(x_0)\gtrless f(x_0+0),$$

$f(x)$ é *semicontínua à esquerda* do ponto x_0; quando se tem, ainda em números finitos,

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0),$$

é então que se diz que a função $f(x)$ é *contínua* no ponto x_0 e que x_0 é um *ponto de continuïdade* da mesma função.

A continuïdade de $f(x)$ no ponto x_0 pressupõe conseguintemente a verificação das quatro seguintes condições:

1.ª A existência do número finito $f(x_0+0)$;

2.ª A existência do número finito $f(x_0 - 0)$;
3.ª A igualdade dêstes números; e
4.ª A coïncidência do seu valor comum com $f(x_0)$.

Estabelecida assim a noção da continuïdade, conveniente é identificá-la com estoutra, que às vezes é mais cómoda nas aplicações:

Se $f(x)$ é contínua no ponto x_0, dado um número positivo δ, tão pequeno quanto se queira, existe sempre um número positivo ε tal que, a todos os valores de x compreendidos entre $x_0 - \varepsilon$ e $x_0 + \varepsilon$ correspondem valores de $f(x)$ compreendidos entre $f(x_0) - \delta$ e $f(x_0) + \delta$.

A noção de continuïdade estende-se muito naturalmente às funções de mais duma variável, sem que seja necessário fazer considerações especiais sôbre o assunto.

*
* *

Definida a continuïdade num ponto, segue-se examinar o que deva entender-se por continuïdade duma função em todo o conjunto em que é definida.

A maior parte dos autores dizem que uma função é contínua num conjunto quando é contínua em todos os seus pontos. Neste caso, aos diferentes pontos M, M', ... dêsse conjunto correspondem, para um dado valor de δ, determinados números ε, ε', ..., acima dos quais não se verifica a desigualdade:

$$|f(x+h) - f(x)| < \delta.$$

Estes números ε, e ε', ... *(módulos de continuïdade)* podem ter, ou não, um limite inferior η maior que zero; e, se êsse limite existe, tôdas as desigualdades daquela forma, relativas aos diferentes pontos do conjunto, se verificam para

$$|h| < \eta.$$

Neste caso a continuïdade diz-se *uniforme*, e η é o *módulo da continuïdade uniforme* correspondente ao valor considerado de δ.

Outros autores só consideram contínua a função num conjunto quando existe êsse limite η diferente de zero; isto é, quando os primeiros consideram uniforme a continuïdade.

Quanto a mim, por coerência, prefiro o primeiro modo de ver.

Voltando, por exemplo, à série

$$x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x^2)^n}+\cdots$$

reconheço que ela é convergente para qualquer valor de x, mas que não é uniformemente convergente num intervalo que contenha o ponto zero: não digo, porém, que ela seja divergente neste ponto. Por analogia, dada uma função, que é contínua em todos os pontos dum conjunto, mas para a qual os respectivos módulos de continuïdade tem um limite inferior nulo, não digo que ela não seja contínua nesse conjunto; digo que é contínua, embora junte que não o é uniformemente.

*
* *

A questão da continuïdade num conjunto leva-nos assim ao conceito abstracto da *uniformidade*, que desempenha um papel muito importante em várias teorias, e designadamente na das funções definidas por séries ou por integrais.

*
* *

Assim como as funções contínuas estão incluídas no conjunto das funções integráveis, assim também as funções deriváveis estão incluídas no conjunto das funções contínuas.

No estabelecimento da noção de derivada acho conveniente seguir-se o critério indicado para a continuïdade, para dar desde logo a noção nítida, de que as funções que admitem derivada, constituem apenas uma classe dentro do conjunto de tôdas as funções possíveis.

A noção fundamental da teoria da derivação é evidentemente a noção de *derivada* num ponto duma função duma só variável.

Suponhamos então uma função $f(x)$, duma só variável x, definida num intervalo (E).

Sendo x_0 um ponto dêsse intervalo, admitamos que damos a x_0 acréscimos h tais que os pontos x_0+h ainda pertençam ao mesmo intervalo.

De cada um dêstes acréscimos h dados a x_0 advém para a função um acréscimo

$$f(x_0+h)-f(x_0),$$

e pode suceder que a razão

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

não tenda para um limite determinado quando h tender para zero. Neste caso os limites, superior e inferior, de indeterminação, à direita e à esquerda do ponto x_0, tomam, respectivamente, os nomes de *números derivados*, superiores e inferiores, à direita e à esquerda dêsse ponto.

É o que se dá com a função

$$f(x)=x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

no ponto o; e os seus números derivados nesse ponto são, como é fácil de ver, $+1$ os dois superiores e -1 os dois inferiores.

Se os dois números derivados à direita (ou à esquerda) são iguais entre si, diz-se que a função $f(x)$ tem no ponto x_0 uma *semiderivada à direita* (ou à esquerda). É o caso de

$$f(x)=(x-a)\,e^{-\frac{1}{x-a}},$$

que tem uma semiderivada nula à direita do ponto a, e uma semiderivada infinita à esquerda do mesmo ponto.

Se no ponto x_0 existem as duas semiderivadas, e são iguais entre si, diz-se que o seu valor comum é a derivada de $f(x)$ no ponto x_0. A derivada de $f(x)$ no ponto x_0, quando existe, é então o limite determinado para que tende

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

quando h tende para zero passando por uma sucessão de valores quaisquer.

Se aquela razão cresce indefinidamente quando h tende para zero, ainda se diz que existe derivada, mas que esta derivada é infinita.

Estabelecida a noção de derivada num ponto, passa-se imediatamente para a de *função derivada* ou simplesmente *derivada* duma função num intervalo, e prova-se que tôda a função, que admite derivada, é contínua nos pontos em que a derivada é finita.

A existência da derivada finita pressupõe, conseguintemente, a verificação das quatro condições que caracterizam a continuïdade; mas é preciso juntar-lhes mais uma, que é a de o acréscimo da função ser da mesma ordem que o acréscimo da variável, salvo os pontos em que a derivada é nula.

*
* *

Da noção de derivada passa-se para a de *diferencial*, cujo significado e importância são manifestos, depois das propriedades, que já se conhecem, dos infinitamente pequenos equivalentes. E estas noções fàcilmente se generalizam ao caso das funções definidas num domínio a qualquer número de dimensões, tendo em vista a definição de variáveis independentes, o que conduz às noções de *derivada parcial* e de *diferencial total*.

Por outro lado, a consideração dos integrais definidos de limite superior variável leva-nos à noção de *integral indefinido*, ou a uma primeira noção de *função primitiva*, e à relação de reciprocidade, ou antes de inversão, que existe entre o cálculo diferencial e o cálculo integral, e que tão grande papel desempenha nos raciocínios subseqüentes.

*
* *

Ocioso será encarecer a conveniência de interpretar geomètricamente estas noções, sobretudo as de integral definido, de derivada e de diferencial; não só essa interpretação nos permite compreendermos melhor êsses conceitos fundamentais, como também, conjugada com a noção de *diferencial dum arco de curva*, é o ponto de partida de tôdas as aplicações geométricas do cálculo infinitesimal.

*
* *

As considerações feitas reportam-se às funções de variáveis reais; mas as noções fundamentais, que temos considerado, são o alicerce de todo o edifício do cálculo, e pode dizer-se que, para penetrarmos nas vastas dependências da análise moderna, em que as funções de variáveis imaginárias desempenham um importantíssimo papel, só nos falta uma noção fundamental, a de *função analítica* ou *monogénea* de variável imaginária.

Por muito tempo consideraram-se idênticas as funções de variável complexa que Cauchy chamou *monogéneas*, e as que Weierstrass denominou *analíticas;* graças, porém, aos trabalhos do sr. Borel, está averiguado que os domínios de Weierstrass não são os domínios mais gerais em que se pode definir uma função monogénea no sentido de Cauchy, donde se depreende a existência de funções monogéneas não analíticas.

O critério de Cauchy reveste, conseguintemente, maior grau de generalidade; tem ainda a seu favor o ser o mais intuïtivo, o mais natural e o que pode assimilar-se com menor preparação.

Como se sabe, diz-se que a expressão

$$P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

em que P e Q designam funções reais de x e y, é uma função analítica ou monogénea de $z = x + iy$, quando tem derivada em relação a esta variável. As condições necessárias e suficientes para o facto se dar, ou sejam

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

dizem-se as *condições de monogeneidade.*

Sôbre esta definição só tenho que observar que nela se tomam como equivalentes as designações de *analítica* e *monogénea*, que, segundo os recentes trabalhos do sr. Borel, a que já me referi, correspondem na realidade a coisas diferentes. Não vejo, todavia, inconveniente em que elas continuem a usar-se como sinónimas, subentendendo-se que tomamos a designação de função analítica *no sentido de Cauchy.*

*

* *

E tendo assim passado em ligeira revista as noções fundamentais da anàlise infinitesimal, porei têrmo às minhas considerações para não fatigar mais a atenção dos meus ouvintes.

O programa traçado está cumprido. Apenas lamento não ter podido explaná-lo com maior proficiência, ou que não fôsse pessoa mais autorizada quem, perante esta douta assemblea, desenvolvesse, sob todos os seus aspectos, os temas importantes em que ao de leve toquei.

1921, Junho.

SOBRE O DETERMINANTE DE RONSKY

PELO
Dr. PACHECO DE AMORIM

PROPOSIÇÃO 1.ª

Seja

$$R = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

um determinante de Ronsky e

$$R_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1' & A_2' & \dots & A_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

outro determinante do mesmo tipo, formado com os complementos algébricos dos elementos da última linha do 1.º Digo que

$$R_1 \equiv R^{n-1}.$$

*
* *

Com efeito, por força das propriededes dos menores dum determinante qualquer, é:

$$(1) \quad \begin{cases} (1) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j)} = 0 & (j < n-1) \\ (2) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(n-1)} = R. \end{cases}$$

Derivando a equação (1), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} + \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(j)} = 0. \qquad [(j < n-1)$$

Mas, em virtude da mesma equação (1),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} = 0$$

para todos os valores de j, tais que $j+1 < n-1$; e, em virtude (2),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} = R$$

para $j+1 = n-1$.

Logo

$$(2) \quad \begin{cases} (3) & \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(j)} = 0 \qquad (j < n-2) \\ (4) & \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(n-2)} = (-1) \cdot R. \end{cases}$$

Derivando as equações (3) e procedendo do mesmo modo, obtemos o systema

$$(3) \quad \begin{cases} (5) & \sum_{i=1}^{n} A_i'' u_i^{(j)} = 0 \qquad (j < n-3) \\ (6) & \sum_{i=1}^{n} A_i'' u_i^{(n-3)} = (-1)^2 \cdot R. \end{cases}$$

É manifesto que, procedendo desta forma k vezes, obtemos o sistema

$$(k+1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} u_i^{(j)} = 0 \qquad (j < n-k-1) \\ \sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} u_i^{(n-k-1)} = (-1)^k \cdot R. \end{cases}$$

Seguindo com estas operações até $k = n-1$, obtemos a equação final

$$(n-1) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n-1)} u_i = (-1)^{n-1} \cdot R.$$

Posto isto, multipliquemos os determinantes propostos R e R_1, linha a linha. Se dispuzermos os resultados obtidos em colunas, vir-nos há

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A'_1 & A'_2 & \dots & A'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} O & O & \dots & O & \mp R \\ O & O & \dots & \pm R & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & -R & \dots & * & * \\ R & * & \dots & * & * \end{vmatrix},$$

onde os asteriscos representam elementos que não importam ao valor do produto.

Na verdade, multiplicando os elementos da primeira linha de R_1 pelos elementos das diversas linhas de R, obtemos os primeiros membros das equações do sistema (1) e foi com os segundos membros destas equações que formámos a primeira coluna do determinante produto. E da mesma forma se obtiveram as restantes colunas do produto à custa das equações dos sistemas (2), (3), etc.

O desenvolvimento dêste determinante produto dá lugar a um só termo, cujo sinal é dado pelo factor $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$, por ser n a ordem suposta de R.

Por sua vez os elementos que entram neste termo são

$$R, \quad (-1)R, \quad (-1)^2 R, \quad \dots \quad (-1)^{n-1} R,$$

elementos cujo produto é

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R^n.$$

Donde concluimos que

$$R_1 \cdot R = R^n$$

e que

$$R_1 \equiv R^{n-1},$$

c. d. d.

Corolário 1.º — Se o determinante R for nulo ou constante, o determinante R_1 também o será, e recìprocameute.

Corolário 2.º — Se for nulo o complemento algébrico de um elemento qualquer da última linha do determinante de Ronsky, êste determinante também o será.

Corolário 3.º — Se dois quaisquer elementos

$$A_1 A_2 \ldots A_n,$$

de R_1 forem constantes, ou se três quaisquer dos mesmos elementos forem funções lineares da variavel independente x, ou quatro forem polinómios do segundo gráu em x, etc., R_1 e R serão nulos, como é fácil de ver.

Corolário 4.º — Do corolário 2.º deduz-se ainda que será nulo qualquer determinante de Ronsky em que seja nulo o complemento algébrico de um menor qualquer contido nas suas últimas linhas; ou por outra, o determinante de Ronsky será nulo se também o for um menor qualquer contido nas primeiras linhas.

Seja, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Nesta suposição diremos que

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_1'' & u_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

pelo corolário 2.º

E, continuando desta sorte, chegamos por fim à igualdade

$$R = 0.$$

Scólio. — É de notar que os elementos

$$u_1 \, u_2 \, \ldots \, u_n$$

satisfazem, como já vimos, ao seguinte sistema:

$$\begin{array}{l}
A_1 u_1 \quad + A_2 u_2 \quad + \cdots + A_n u_n \quad = 0 \\
A_1' u_1 \quad + A_2' u_2 \quad + \cdots + A_n' u_n \quad = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_1^{(n-2)} u_1 + A_2^{(n-2)} u_2 + \cdots + A_n^{(n-2)} u_n = 0 \\
A_1^{(n-1)} u_1 + A_2^{(n-1)} u_2 + \cdots + A_n^{(n-1)} u_n = (-1)^{n-1} \cdot R.
\end{array}$$

PROPOSIÇÃO 2.ª

Representando por $C[A_k^{(n-1)}]$ o complemento algébrico do elemento $A_k^{(n-1)}$ do determinante R_1, digo que

$$C[A_k^{(n-1)}] \equiv (-1)^{n+1} u_k R^{n-2}.$$

Com efeito,

$$C[A_k^{(n-1)}] = \begin{vmatrix}
A_1 & A_2 & \ldots A_k & \ldots A_n \\
A_1' & A_2' & \ldots A_k' & \ldots A_n' \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
A_1^{(n-2)} & A_2^{(n-2)} & \ldots A_k^{(n-2)} & \ldots A_n^{(n-2)} \\
0 & 0 & \ldots 1 & \ldots 0
\end{vmatrix}.$$

Multiplicando $C[A_k^{(n-1)}]$ por R, obtemos

$$C\,[A_k^{(n-1)}]\cdot R \equiv \begin{vmatrix} O & O & \dots & O & u_k \\ O & O & \dots & \pm O & u_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & -R & \dots & * & u_k^{(n-2)} \\ R & * & \dots & * & u_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} O & O & \dots & \pm R \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ O & -R & \dots & * \\ R & * & & * \end{vmatrix} \cdot u_k$$

$$\equiv (-1)^{n+1} R^{n-1} \cdot u_k.$$

Donde se conclue que

$$C\,[A_k^{(n-1)}] \equiv (-1)^{n+1} \cdot u_k \cdot R^{n-2},$$

c. d. d.

PROPOSIÇAO 3.ª

Representando por

$$C \begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

o complemento algébrico do menor

$$\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

contido nas duas *últimas* linhas de R_1, digo que

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix} = (-1)^{2(n+1)} \cdot R^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u_j' & u_k' \end{vmatrix}.$$

Com efeito,

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix} . R \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} A_1 & \ldots & A_j & \ldots & A_k & \ldots & A_n \\ A_1' & \ldots & A_j' & \ldots & A_k' & \ldots & A_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & 1 & \ldots & O & \ldots & O \\ O & \ldots & O & \ldots & 1 & \ldots & O \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \\ u_1^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} O & O & \ldots & u_j & u_k \\ O & O & \ldots & u_j' & u_k' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & -R & \ldots & u_j^{(n-2)} & u_k^{(n-2)} \\ R & * & \ldots & u_j^{(n-1)} & u_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{2(n+1)} \cdot R^{n-2} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u_j' & u_k' \end{vmatrix}.$$

Donde se conclue que

$$C\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{2(n+1)} R^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u_j' & u_k' \end{vmatrix}.$$

c. d. d.

Scólio. — É de notar: 1.º, que os produtos de R_1 por R, e de $C\begin{bmatrix} A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \\ A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \end{bmatrix}$ por R, são determinantes que só diferem pelas duas últimas colunas; 2.° que os menores

$$\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}$$

são contidos em colunas das mesmas ordens, sendo, porém, o primeiro contido nas duas últimas linhas da R_1 e o segundo contido nas duas primeiras linhas de R. Chamaremos *correspondentes* aos menores de R_1 e de R relacionados pela forma que fica dito, seja qual for a sua ordem.

PROPOSIÇÃO 4.ª

Representando por M um menor qualquer de R_1 contido nas últimas i linhas e em quaisquer i colunas, e por m o menor correspondente do determinante R e ainda por $C[M]$ o complemento algébrico de M, digo que

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m \cdot R^{n-i-1}.$$

Com efeito, efectuando o produto $C(M) \cdot R$ como efectuamos o de $C\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$ por R, obtemos um determinante que só difere do determinante produto de $R_1 \cdot R$ pelas últimas i colunas que são precisamente as i colunas de R em que se contém m.

Desenvolvendo êste determinante em relação aos menores contidos nas suas últimas i colunas, obtém-se um só termo que é

$$\pm m R^{n-i}.$$

Para lhe determinar o sinal, notemos que a paridade dum menor contido nas primeiras i linhas e nas últimas i colunas do determinante de ordem n, é a do número

$$1+2+\cdots+i+(n+n-1+\cdots+n-i+1)=i+ni=i(n+1):$$

ou seja

$$C[M] \cdot R \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m \cdot R^{n-i};$$

donde se conclue que

$$C[M] = (-1)^{i(n+1)} \cdot m R_1^{n-i-1}$$

c. d. d.

Scólio. — O complemento algébrico de M, $C[M]$ é, com o seu sinal ou com sinal trocado, igual a um menor de R_1 contido nas $n-i$ primeiras linhas. O teorema que acabamos de demonstrar, diz-nos que estes menores admitem como factor a R ou a uma potência de R, logo que a sua ordem seja igual ou superior a duas unidades.

Corolário 1.° — Se R fôr nulo, são nulos todos os menores de R_1 contidos nas suas K primeiras linhas, qualquer que seja $K \gtrless 2$.

Corolàrio 2.° — No caso particular de $K = 2$, teremos:

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ A'_i & A'_j \end{vmatrix} = 0$$

para todos os valores de i e j desde 1 até n.

Corolário 3.° — Mostram-nos estas identidades que se um dos elementos $A_1\, A_2 \ldots A_n$ for constante e diferente de zero, todos os outros elementos serão também constantes, nulas ou não.

Corolário 4.° — Para os valores de i e j tais que A'_i e A' sejam diferentes de zero, teremos:

$$\frac{A'_i}{A_i} = \frac{A'_j}{A_j} = \cdots$$

donde se conclue que

$$\frac{A_i}{\alpha_i} = \frac{A_j}{\alpha_j} = \cdots,$$

sendo α_i e $\alpha_j \ldots$ constantes, não arbitrárias, mas perfeitamente determinadas pelas expressões de $u_1, u_2, \ldots u_n$.
Associando estes resultados com a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i = 0,$$

obtem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_j \equiv 0$$

que é a bem conhecida relação linear e homogénea existente entre os elementos

$$u_1 u_2 \ldots u_n,$$

do determinante de Ronsky nulo.

PROPOSIÇAO 5.ª

Da relação

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} m R^{n-i-1}$$

demonstrada na proposição 4.ª, deduz-se:

$$M \cdot C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} m M R^{n-i-1}.$$

Somando todas as relações análogas que se obtém com os menores M contidos nas últimas i linhas de R_1, vem:

$$R_1 \equiv (-1)^{i(n+1)} R^{n-i-1} \Sigma m M.$$

E como

$$R_1 \equiv R^{n-1},$$

segue-se que:

$$\Sigma m M \equiv (-1)^{i(n+1)} R^i.$$

No caso particular de $i = 1$, esta relação dá-nos a equação

$$\Sigma A_j^{(n-1)} u_j \equiv (-1)^{n+1} R,$$

já por nós determinada na proposição 1.ª

*

* *

Dados que sejam os elementos $u_1 u_2 \ldots u_n$ de R fàcilmente se calculam os elementos $A_1 A_2 \ldots A_n$ de R_1, que são, como dissémos, os complementos algébricos dos elementos da última linha de R.

Dados que sejam os elementos $A_1 A_2 \ldots A_n$ de R_1, também se podem calcular, em geral, os elementos $u_1 u_2 \ldots u_n$ de R, com a auxílio das proposições atrás demonstradas.

Seja

$$(1) \qquad A_1 = \varphi_1(x), \quad A_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots \quad A_n = \varphi_n(x)$$

sendo $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ funções dadas.

Pedem-se as expressões de $u_1 u_2 \ldots u_n$ em x.

As equações (1) constituem um sistema de equações diferenciais de ordem $n-1$, a n variáveis.

Para o integrar, derivemo-lo $(n-1)$ vezes, o que nos dá o seguinte quadro:

$$\begin{array}{llll}
A_1 = \varphi_1(x) & \ldots & A_n = \varphi_n(x) \\
A_1' = \varphi_1'(x) & \ldots & A_n' = \varphi_n'(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1^{(n-1)} = \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & A_n^{(n-1)} = \varphi_n^{(n-1)}(x).
\end{array}$$

Multiplicando as equações da primeira coluna por u_1, as da segunda por u_2, ... as da última por u_n, e somando em seguida as equações correspondentes a uma mesma linha, obtemos o seguinte sistema:

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
\varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2 + \ldots + \varphi_n(x)u_n = 0 \\
\varphi_1'(x)u_1 + \varphi_2'(x)u_2 + \ldots + \varphi_n'(x)u_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1^{(n-1)}(x)u_1 + \varphi_2^{(n-1)}(x)u_2 + \ldots + \varphi_n^{(n-1)}(x)u_n = (-1)^{n-1} \cdot R,
\end{array}\right.$$

que é formado pelas equações postas em evidência no scólio da proposição 1.ª

Do sistema (1) deduz-se, pois, o sistema (2). Recìprocamente de (2) deduz-se (1), se $R \neq 0$. Para isso basta derivar $(n-1)$ vezes o systema (2) e notar que entre as equações assim obtidas se encontram as do systema:

$$\begin{array}{l}
\varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2 + \ldots + \varphi_n(x)u_n = 0 \\
\varphi_1(x)u_1' + \varphi_2(x)u_2' + \ldots + \varphi_n(x)u_n' = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1(x)u_1^{(n-1)} + \varphi_2(x)u_2^{(n-1)} + \ldots + \varphi_n(x)u_n^{(n-1)} = R.
\end{array}$$

Daqui se conclue, se for $R \neq 0$, que

$$\varphi_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 & \dots & u_n \\ 0 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ R & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{R} = A_1.$$

E da mesma forma se obtém as demais equações do systema (1).

No caso de $R \neq 0$, os dois systemas (1) e (2) são, pois, equivalentes e as soluções de um são as do outro.

Mas as soluções de (2) são

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ 0 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} R & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = \frac{R}{R_1} \begin{vmatrix} \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

Dum modo geral

$$u_k = \frac{(-1)^{n-1} R}{R_1} C[\varphi_k^{(n-1)}],$$

representando por $C[\varphi_k^{(n-1)}]$ o complemento algébrico do elemento $\varphi_k^{(n-1)}(x)$ do determinante do sistema (2) que é R_1.

Como

$$R_1 = R^{n-1},$$

virá:

$$u_k = (-1)^{n+1} \frac{C[\varphi_k^{(n-1)}]}{R^{n-2}},$$

relação esta já achada na proposição 2.ª

Vê-se pois que o sistema (1) proposto, admite um sistema de soluções desprovidas de constantes arbitrárias, se $R_1 \neq 0$ e que êsse sistema é único.

No caso de $R_1 = 0$, ou bem se verificam as relações expostas no corolário 2.º da proposição 4.ª, ou não.

Se não, o sistema proposto é incompatível, o que significa que as funções dadas

$$\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \ldots \quad \varphi_n(x)$$

não podem corresponder aos valores dos complementos algébricos dos elementos da última linha dum determinante de Ronsky, porque se correspondessem, de facto, as ditas relações haviam de verificar-se.

Se as ditas relações se verificam, teremos então que

$$\frac{\varphi_1(x)}{\alpha_1} = \frac{\varphi_2(x)}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\varphi_n(x)}{\alpha_n} = \lambda(x)$$

e as equações propostas transformam-se em

$$(3) \qquad A_1 = \alpha_1 \lambda(x); \quad A_2 = \alpha_2 \lambda(x) \quad \ldots \quad A_n = \alpha_n \lambda(x).$$

Destas equações deduz-se, por ser $R = 0$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Ora, do sistema formado por esta equação e por uma qualquer das equações (3), deduzem-se todas as outras equações (3).

Seja, por exemplo,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0 \\ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \ldots & u_n \\ u'_2 & u'_3 & \ldots & u'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_2^{(n-2)} & u_3^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = \alpha_1 \lambda(x). \end{array} \right.$$

Eleminando u_2 entre estas duas equações, obtemos

$$A_2 = \alpha_2 \lambda(x).$$

Eliminando u_3, obtemos

$$A_3 = a_3 \lambda(x);$$

e assim para as demais.

Vê-se, pois, que quaisquer valores de $u_1 u_2 \ldots u_n$ que satisfaçam ao sistema (4), satisfarão a (3). Mas o sistema (4) é indeterminado. Logo (3) também o será.

Em resumo, o sistema (1) de equaçães diferenciais de ordem $(n-1)$ admite um sistema de soluções desprovidas de constantes arbitrárias, caso $R_1 \neq 0$. De contrário, ou é indeterminado, ou incompatível, segundo se verificam ou não as relações

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x) & \varphi_j(x) \\ \varphi_i'(x) & \varphi_j'(x) \end{vmatrix} = 0$$

que se obtém dando a i e a j todos os valores desde 1 a n.

SOBRE UMA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS RAIZES DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

POR

F. GOMES TEIXEIRA

O método dado por J. Walker nos *Proceedings of the London mathematical Society* (1) (t. II, p. 161) para determinar as tangentes à cissoide de Diocle que passam por um ponto dado sugere a seguinte representação geométrica das raizes da equação do 3.° grau.

Seja

$$(1) \qquad t^3 + Ht + L = 0$$

uma equação do 3.° grau dada, e consideremos a cissoide representada pela equação

$$2(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

ou paramètricamente

$$x = \frac{2az^2}{1+z^2}, \quad y = \frac{2az^3}{1+z^2}.$$

O círculo representado pela equação

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + m = 0$$

corta a cissoide considerada em quatro pontos correspondentes aos valores de z dados pela equação

$$z^4 - \frac{k}{a}z^3 + \frac{m - 4ah}{4a^2}z^2 + \frac{m}{4a^2} = 0,$$

---

1 Ver: Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. I, pág 4.

e tres dêstes valores serão idênticos aos das raizes da equação (1), se for

$$t^4 - \frac{k}{a}t^3 + \frac{m-4ah}{4a^2}t^2 + \frac{m}{4a^2} = (t-t_0)(t^3+Ht+L),$$

e portanto

$$\frac{k}{a} = t_0, \quad \frac{m-4ah}{4a^2} = H, \quad L - Ht_0 = 0, \quad \frac{m}{4a^2} = -Lt_0$$

ou

$$t_0 = \frac{L}{H}, \quad h = -a\frac{H+L^2}{H}, \quad k = a\frac{L}{H}, \quad m = -4a^2\frac{L^2}{H}.$$

Logo a equação do círculo (C) que corta a cissoide no ponto correspondente a t_0 e em tres pontos correspondentes aos valores de t que representam as raizes da equação (1) é

$$(2) \qquad H(x^2+y^2) + 2a(H^2+L^2)x - 2aLy - 4a^2L^2 = 0.$$

Observando agora que $\frac{y}{x}t$ e $\frac{L}{H} = t_0$, vê-se que um dos pontos em que o círculo (C) corta a cissoide coincide com um ponto de intersecção desta curva com a recta correspondente à equação

$$(3) \qquad Hy - Lx = 0.$$

Notemos agora que o círculo que entra na definição que Diocles deu da cissoide tem por equação [1]

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

e que esta equação dá

$$x - 2a = -\frac{y^2}{x}.$$

Substituindo na equação (2) êste valor de $x - 2a$ nos termos $2aL^2(x-2a)$ e x^2+y^2 por $2ax$, esta equação toma a

[1] Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. I, pág. 1.

forma

$$L^2 y^2 + Lxy - (H + H^2) x^2 = 0,$$

e dá para $\frac{y}{x}$ os valores

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{L}, \quad \frac{y}{x} = -\frac{1+H}{L}.$$

Logo o círculo (2) corta o círculo (4) em dois pontos que coincidem com os pontos em que êste último círculo é cortado pelas rectas representadas pelas equações

$$(5) \qquad Ly - Hx = 0, \quad Ly + (H+1)x = 0.$$

Portanto as rectas (3) e (5) cortam, a primeira a cissoide e as duas últimas o círculo que entra na sua definição, em três pontos que determinam o círculo (C), que corta a mesma cissoide em três novos pontos que determinam tres rectas que passam pelo ponto de reversão da cissoide e cujos coeficientes angulares representam as raizes da equação (1).

Convem notar que uma mesma cissoide serve para tôdas as equações.

Apliquemos esta doutrina à concoide de Nicomedes representada pela equação

$$\rho = \frac{h}{\cos\theta} + k.$$

Os pontos de inflexão de um ramo correspondem aos valores de C que satisfazem à equação [1]

$$(6) \qquad 2\rho^3 - 3h^2\rho - a^2k = 0,$$

e os do outro ramo aos valores de ρ que satisfazem à equação

$$(7) \qquad 2\rho^3 - 3h^2\rho + a^2k = 0.$$

Pondo $\rho = ht$ a primeira destas equações toma a forma

$$(8) \qquad 2ht^3 - 3ht - k = 0.$$

Aplicando as fórmulas dadas anteriormente, pondo $H = -\frac{3}{2}$,

---

[1] Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, t. 1, pág. 262.

$L = -\frac{k}{2h}$, temos a regra seguinte para determinar os pontos de inflexão do ramo considerado da concoide:

Trace-se uma cissoide de Diocles cujo ponto de reversão e cujo eixo coincidam com o ponto duplo O e com o eixo da concoide dada, e depois tirem-se pelo ponto O as rectas representadas pelas equações

$$3hy - kx = 0, \quad 3hx + ky = 0, \quad ky + hx = 0$$

as quais passam respectivamente pelos pontos $(3h, k)$, $(k, 3h)$, $(k, -h)$. Pelo ponto onde a primeira corta de novo a cissoide e pelos pontos onde as outras cortam de novo o círculo que entra na definição da cissoide descrevamos uma circunferência, a qual corta a cissoide em três novos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Os coeficientes angulares das rectas que passam por estes pontos e por O representam as raizes da equação (8), e, representando por ρ', ρ'', ρ''' as raizes da equação (6), temos as relações

$$\rho' = h\frac{y_1}{x_1}, \quad \rho'' = h\frac{y_2}{x_2}, \quad \rho''' = h\frac{y_3}{x_3},$$

que mostram que a perpendicular ao eixo da cissoide tirado pelo ponto $(h, 0)$ corta as rectas que passam pelo vértice da concoide e pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) nos pontos cujas ordenadas representam as raizes da equação (6).

Do mesmo modo se acham os pontos de inflexão que existem no outro ramo da concoide.

Os pontos de inflexão da concoide de Nicomedes foram determinados por Huygens, Sluze, etc., por meio das cónicas. O método que acabamos de expor parece-nos mais simples.

A NUMERAÇÃO FRACCIONÁRIA
NO PAPIRO DE RHIND
E EM HERÃO DE ALEXANDRIA

POR

FERNANDO DE VASCONCELOS

Professor de Cálculo Diferencial, Integral e de Probabilidades
no Instituto Superior de Agronomia

I

O *Manual do Calculador egípcio*, traduzido e comentado, há pouco mais de quarenta anos por Augusto Eisenlohr (1), pertence, como é sabido, à colecção Rhind conservada no *Bristish Museum* e foi escrito 1700 a 2000 anos a. J. C. por Ahmes, célebre escriba ou sacerdote que, sob o título *Instrucções para conhecer todas as coisas secretas*, apresenta um sumário de regras e de questões, com uma colecção de problemas de aritmética e de geometria, cujo valor é de excepcional importância na história das matemáticas, porque nos dá directamente uma idea dos conhecimentos matemáticos dos antigos Egipcios, e nos mostra, como não eram exagerados os louvores que os autores gregos e latinos, consagravam neste particular ao Egipto, que, ainda no século IV a. J. C., decorridos perto de 200 anos sôbre a fundação das Escolas jónica e pitagórica, era considerada pelos Gregos, como uma escola importante de matemáticas e de conhecimentos humanos, que todo o sábio devia conhecer e directamente consultar.

Trata a primeira parte do *Manual de Ahmes* da redução de fracções $\frac{2}{n+1}$, em que n toma todos os valores inteiros desde 1 a 49, numa soma de fracções tendo tôdas por nu-

---

(1) A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (1.ª ed., Leipzig, 1877; 2.ª ed., 1891); Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880.

merador a unidade, fracções estas que, para distinguir das fracções ordinárias da forma moderna, de numerador e denominador inteiros, mas quaisquer, chamaremos *fracções elementares* ou, com os autores ingleses e americanos, *fracções primárias* ou ainda, como Loria (1), *fracções fundamentais*. A redução é feita sem que se indique o método ou regra usada na decomposição das fracções, apresentando, como se verifica da célebre Memória de Paul Tannery, intitulada *Questões heronianas* (2) em que o assunto é larga e profundamento estudado, os resultados que seguem:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18},$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66},$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104},$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30},$$

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68},$$

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114},$$

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42},$$

$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276},$$

$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75},$$

$$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54},$$

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},$$

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155},$$

$$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66},$$

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42},$$

$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296},$$

$$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78},$$

$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328},$$

$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301},$$

$$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90},$$

$$\frac{2}{47}=\frac{1}{50}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470},$$

$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196},$$

(1) Gino Loria, *Le scienze esatte nell'Antica Grecia* (2.ª ed., Milano, 1914).

(2) *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2.ª série, t. VIII, 1884); Paul Tannery, *Memoires scientifiques* publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen (t. 2.º, 1912).

$$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102},$$

$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795},$$

$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330},$$

$$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114},$$

$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531},$$

$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610},$$

$$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126},$$

$$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195},$$

$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536},$$

$$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138},$$

$$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710},$$

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365},$$

$$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150},$$

$$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308},$$

$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790},$$

$$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}+\frac{1}{162},$$

$$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498},$$

$$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{255},$$

$$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174},$$

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890},$$

$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},$$

$$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186},$$

$$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{576},$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}.$$

Apresentada assim a Tábua de Ahmes, é interessante procurar saber quais as regras que presidiram à sua elaboração, interêsse que sobe de ponto, tornando mesmo necessário um estudo aprofundado do assunto, quando, como diz P. Tannery, na Memória citada, quisermos estabelecer o termo de comparação com as sucessões de fracções elementares, na Escola heroniana. De facto, Tannery na sua Memória, intitulada *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (1) mostrou que o modo de extracção das raízes quadradas incomensuráveis na Escola heroniana está intimamente ligado ao sis-

---

(1) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (2.ª série, t. IV, 1882); P. Tannery, t. 1.º, pág. 182-225.

tema de representação das fracções por uma sucessão de fracções primárias; e, «ao reünir algumas observações sôbre a história dêste sistema», escreve (1):

«Na verdade, as questões, a que dá origem o emprêgo dêste sistema dos Egípcios, constituem assunto quási completamente esgotado, quer por M. Cantor, na exposição feita no primeiro capítulo dos seus *Vorlesungen*, quer por F. Hultsch, no trabalho da confrontação do original com esta Obra. Mas, ainda que eu venha a limitar-me a repetir pouco mais ou menos o que já foi dito por estes dois ilustres sábios, julgo indispensável fazê-lo, para bem estabelecer o termo de comparação com as sucessões de fracções primárias na Escola heroniana».

A importância, pois, do estudo da numeração fraccionária do papiro de Rhind está, pelo que se acaba de dizer, perfeitamente afirmada, e, pela autoridade incontestada do seu autor, inteiramente comprovada. Por outro lado, o mesmo ilustre sàbio P. Tannery, geómetra eminente, cuja obra scientífica é verdadeiramente notável no estudo das sciências exactas na antiguidade, na já referida Memória *L'Arith. des Grecs dans Héron d'Aléxandrie* (2), diz:

«A forma que êle emprega — trata-se de Herão — para a redacção, embora inteiramente diferente da dos problemas geométricos euclidianos, é idêntica à que se encontrou num *Manual do Calculador egípcio*, obra que pertence talvez ao décimo quinto século antes da era cristã. Esta identidade de forma supõe, para a maneira de tratar estes problemas, uma tradição escrita ininterrupta, tradição que nos parece, além disso, estabelecida pela existência nas colecções chamadas heronianas de soluções anteriores às determinações exactas, soluções tôdas semelhantes às do *Manual egípcio* acima citado».

E, sôbre as vantagens do emprêgo no cálculo dêste sistema de numeração, lê-se ainda na mesma Memória (3):

«Êste sistema de numeração, recebido sem alteração dos calculadores egípcios, como o prova o papiro de Rhind, tem vantagens notáveis, quando, como era de uso, o denominador mais elevado não excede 100; com efeito, com um pouco de prática, chega-se a operar muito ràpidamente a multiplicação por uma fracção elementar, quer dum número inteiro, quer duma outra fracção semelhante. Quanto à adição, para a redução de duas fracções elementares de denominadores iguais

---

(1) P. Tannery, *Mém. sc.*, t. 2.°, págs. 137-138.
(2) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 1.°, pág. 198.
(3) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 1.°, pág. 205.

e ímpares, sabemos, precisamente pelo documento egípcio, que era objecto dum exercício particular. A subtracção exige também alguns artifícios simples; mas, em suma, com êste sistema, a prática das quatro regras é cómoda e a aproximação para as necessidades ordinárias é satisfatória.

«É ùnicamente a existência dêste sistema que devemos ter em vista, para o objectivo das nossas investigações, e devemos primeiramente preguntar: ¿admitido um tal modo de numeração, como procederíamos *naturalmente* para prosseguir à extracção duma raiz quadrada cuja parte inteira estivesse já determinada?»

O que acabamos de transcrever é suficiente para comprovar como o sistema de numeração fraccionária com fracções tendo tôdas por numerador a unidade, herdado dos Egípcios, dominou, por largos séculos no cálculo aritmético dos Gregos, que, não obstante conhecerem bem cedo — parece que já desde os fins do século V a. J. C. — o sistema moderno das fracções ordinárias com numerador e denominador qualquer, empregaram quási sempre o primeiro, de preferência, para a representação das fracções, sendo de notar que nos escritos gregos do século XIV, ainda o processo egípcio foi empregado, como se vê na *Geometria* de G. Pediasismos [1], guarda-selos do patriarca de Constantinopla, no reinado de Andrónico II (1328-1341), e nos escritos um pouco posteriores de Isaac Argírio [2].

A êste respeito, lê-se nas *Questões heronianas* [3]:

«O sistema moderno das fracções ordinárias, que se encontra, de facto, empregado concorrentemente com os desenvolvimentos em fracções elementares na colecção dos escritos heronianos, foi imaginado cedo pelos Gregos, como conseqüência das suas especulações sôbre as relações numéricas dos intervalos musicais; parece já conhecido no tempo de Platão e foi empregado já antes de Arquimedes, por Aristarco de Samos, ainda que apenas sob a forma de relação entre dois números.

«Mas o triunfo do novo sistema não foi nunca definitivo na prática dos cálculos: deve-se notar, especialmente, que Ptolemeu, quando não emprega a notação sexagesimal, se serve, de preferência, do antigo processo para a representação das fracções. Diofanto mesmo parece tê-lo empregado em-

---

(1) *Joannes Pediasismus oder Galenus Geometrie zum ersten Male herausgegeben und erläutert*, von G. Friedlein, Berlin, 1866.

(2) J. Baillet, *Le papirus mathématique d'Akmim*. Paris, 1892, pág. 37.

(3) Paul Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 155.

quanto lhe foi possível, não obstante a natureza dos problemas que tratava o conduzir necessàriamente, a preferir o outro sistema».

De tudo quanto temos dito, resulta pois, que o sistema antigo da numeração fracionária exige, pela sua alta antiguidade e, precisamente, pela sua persistência constante, através dos séculos, na logística grega, a apreciação e o exame cuidadoso dos que se dedicam ao estudo, sempre cheio de novidades e de belezas, da história das matemáticas na antiguidade. Na essência, êste sistema coincide com o nosso; e, revestindo muito embora, por vezes, uma forma um pouco mais complicada que o sistema moderno das nossas fracções ordinárias, tem a vantagem, num grande número de casos, tratando-se principalmente de fracções irredutíveis de termos contendo mais de dois algarismos, de falar mais à inteligência, mostrando o modo da composição destas fracções.

Por exemplo, a fracção $\frac{239}{6460}$ exprime, sob esta forma, apenas a relação irredutível entre os números 239 e 6460, sem que mostre qualquer outra dependência ou ligação dos mesmos números entre si ou com os seus divisores. No entanto, é fácil verificar a possibilidade de decompôr a mesma fracção, na soma de três fracções elementares de denominadores muito mais simples que o denominador da fracção dada, conforme a seguinte igualdade [1]

$$\frac{239}{6460}=\frac{1}{68}+\frac{1}{85}+\frac{1}{95};$$

com a qual, efectuando as operações indicadas, se reconhecem novas relações de dependência entre o número primo 239 e os divisores de 6460, como segue:

$$6460=4\times5\times17\times19$$
$$239=4\times17+4\times19+5\times19.$$

Ainda, por exemplo, a decomposição expressa por

$$\frac{157}{348}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{29},$$

[1] Baillet, *ob. cit.*, págs. 39 e 76.

mostra-nos as seguintes relações

$$348 = 3 \times 4 \times 29$$
$$157 = 3 \times 4 + 5 \times 29$$

entre 157 e os divisores de 348; etc.

Além de que, há questões concretas e problemas cuja solução é mais prática com o emprêgo das fracções elementares do que com o emprêgo das fracções irredutíveis do sistema moderno.

E, se de facto, é certo que o sistema das fracções elementares não conduz a uma representação uniforme para cada fracção determinada e, ao contrário, apresenta formas bastante diferentes, cuja identidade é possível conhecer apenas pela redução ao mesmo denominador, também não é menos exacto que as fracções ordinárias que nós usamos, afectam, por vezes, também, aspectos e formas diferentes, cuja identidade, fora dos casos conhecidos da divisão por 2, 3, 5, 11 e alguns dos seus múltiplos, é reconhecida, apenas, depois de obtermos o máximo divisor comum entre os termos da fracção. Assim pois, e salvo o respeito devido a sábios eminentes, como P. Tannery (¹) e o professor Gino Loria (²), não me parece que se possa apontar o sistema fraccionário egípcio como apresentando, exclusivamente, em si, o inconveniente de falta de uniformidade, que, fàcilmente, verificamos que também existe nos aspectos um tanto complicados, que tomam, por vezes, as fracções ordinárias.

Por exemplo, não é fácil reconhecer que as fracções $\frac{19}{23}$ e $\frac{2261}{2737}$ são idênticas, a menos que achemos o máximo divisor $119 = 7 \times 17$, entre os dois termos da última fracção.

Os cálculos da colecção heroniana apresentam o sistema mixto do emprêgo de fracções da forma moderna e transformação dos resultados em fracções elementares, sistema êste que, em muitos casos, pelas razões que atrás expendi quanto às fracções irredutíveis, me parece que haveria vantagem em adoptar nos cálculos, para um grande número de questões.

II

Na primeira parte dêste trabalho transcrevi a opinião de P. Tannery, quanto à vantagem e necessidade do estudo do

(¹) P. Tannery, *ob. cit.*, t, 2.º, pág. 147.
(²) Gino Loria, *ob. cit.*, 2.ª ed., pág. 779.

sistema antigo de numeração fraccionária, estudo que, como foi dito, o mesmo ilustre geómetra apresenta desenvolvidamente nas *Questões heronianas*, embora, segundo afirme, pouco mais faça que repetir o que já fôra dito por Cantor e F. Hultsch que tinham, quási completamente, esgotado o assunto.

E, a êste respeito, lembra Tannery, ainda antes de entrar na apreciação dos princípios que poderiam ter servido para formar a Tábua de Ahmes, que o sistema de que se trata é constantemente seguido no papiro de Rhind, apenas com duas excepções: uma referente às fracções $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ do *bescha*, unidade de medida egípcia para os grãos e para os líquidos; a outra, respeitante à fracção $\frac{2}{3}$ que os Egípcios e depois os Gregos consideraram sempre fracção elementar, embora fôsse conhecida e expressamente notada a identidade $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, nas regras de cálculo daquele papiro, onde se lê sob o n.º 61:

«Tomar os $\frac{2}{3}$ duma fracção. Se te preguntam: quais são os $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$, tomas a sua metade e a sua sexta parte, e isso faz os seus $\frac{2}{3}$. Proceder do mesmo modo para qualquer outra fracção que se apresente.»

P. Tannery, em seguida, estuda a decomposição, dum modo geral da fracção $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número primo ímpar, em duas fracções elementares, e diz que há uma única solução possível

$$(1) \qquad \frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}p},$$

O exame da tabela mostra, porém, que êste modo de decomposição só poderia ter sido empregado para as fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{2}{23}$; e que os Egípcios não tiveram a noção da regra geral expressa na fórmula (1), e que só acidentalmente encontraram naquelas fracções a decomposição em duas fracções elementares, mostram-no nìtidamente os outros desenvolvimentos em três e quatro fracções que, todos, como se lê em P. Tannery se compreendem na fórmula

$$(2) \qquad \frac{2}{p} = \frac{1}{M} + \frac{1}{ap} + \frac{1}{bp} + \frac{1}{cp},$$

em que M é o menor múltiplo comum dos factores a, b, c, cujo número é 2 ou 3, pois que estas decomposições da tabela compreendem um máximo de quatro fracções elementares. No caso limite de ser $M=a$, ter-se há a decomposição em duas fracções.

Ora, considerando a fórmula (2) e, depois de ter verificado que os valores de M que se encontram na Tábua de Ahmes são os números 2, 3, 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 56 e 60, conclui Tannery [1]:

«O processo geral do desenvolvimento é então fácil de reconhecer; devia-se escolher primeiro entre os números com vários divisores e, principalmente, na série dos divisores ou dos primeiros múltiplos de 12 $\left(\frac{3}{2}\right.$ sendo contado como inteiro$\left.\right)$ ou na série dos sub-múltiplos de 60, um número M compreendido entre p e $\frac{p}{2}$; a diferença $\frac{2}{p}-\frac{1}{M}=\frac{2M-p}{Mp}$ desenvolviu-se em seguida fàcilmente em fracções elementares, decompondo $2M-p$ numa soma de divisores de M. Naturalmente M devia ser tomado o menor possível e, por êste modo os Egípcios acharam acidentalmente a divisão em duas fracções primárias para cinco das fracções $\frac{2}{p}$.»

Então, aplicando a regra ácima enunciada ao desenvolvimento das fracções desde $\frac{2}{13}$ a $\frac{2}{89}$ e examinando os diferentes casos apresentados, conclui o ilustre geómetra [2]:

«Em resumo, parece, de acôrdo com todos estes casos, que os Egípcios procuraram resolver por tentativas o problema de obter os menores denominadores possível...»

E, examinando, em seguida, os casos de aparecer $M=56$ no desenvolvimento de $\frac{2}{97}$ e $M=42$ no de $\frac{2}{43}$, diz:

«Não se pode evidentemente recusar admitir a opinião de M. Cantor, de que a Tábua que estudamos não foi feita duma só vez, segundo um desígnio preciso e conforme regras antecipadamente conhecidas; por outro lado, a preferência para os pequenos denominadores, posta sobretudo em evidência por F. Hultseh, é suficientemente clara ainda que as decomposições correspondentes não tenham sido sempre atingidas.»

---

(1) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 140.
(2) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, págs. 144 e 145.

III

Indicado, no número anterior, o estudo e trabalho de-veras notáveis dos três sábios eminentes F. Hultsch, Cantor e P. Tannery sôbre a Tábua de Ahmes, para a decomposição das fracções $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número primo, não se pode deixar de reconhecer que o assunto não está completamente resolvido e, portanto, que aberto está o caminho para o estudo das regras e princípios que podem ter sido seguidos pelos Egípcios na redução a fazer daquelas fracções cuja decomposição é, como vimos, expressa pelas igualdades:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$
$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66},$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104},$$
$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68},$$
$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114},$$
$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276},$$
$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},$$
$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155},$$
$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296},$$
$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328},$$
$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301},$$
$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470},$$
$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795},$$
$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531},$$
$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610},$$
$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536},$$
$$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710},$$
$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365},$$
$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790},$$
$$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498},$$
$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890},$$
$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

O exame dêstes desenvolvimentos mostra que a redução das fracções $\frac{2}{p}$ compreende duas, três ou quatro fracções elementares, a primeira das quais de denominador sempre inferior a p, mas maior que $\frac{p}{2}$, e as outras de denominadores formados pelos produtos de p por divisores do denominador da primeira fracção elementar, ou por êste, no caso das fracções $\frac{2}{3}$ a $\frac{2}{11}$.

Os denominadores das primeiras fracções do desenvolvimento são, sucessivamente, os números: 2; 3; 4; 6; 8; 12, que entra em três fracções sucessivas; 24, que entra também em três fracções $\frac{2}{29}, \frac{2}{37}, \frac{2}{41}$; 20, que entra no desenvolvimento de $\frac{2}{31}$; 42, que pertence à decomposição $\frac{2}{43}$; 30, empregado duas vezes; 36, uma vez; 40, três vezes; 60, quatro vezes; e, por último, 56. Isto é, os denominadores de que se trata, são: os divisores de 12, ou os seus múltiplos simples e os divisores de 60, devendo contar-se

$$8=\frac{2}{3}\times 12 \quad \text{e} \quad 40=\frac{2}{3}\times 60$$

como divisores simples, por ser $\frac{2}{3}$ fracção fundamental; encontrando-se, ainda isoladamente, 42 que é um múltiplo de 6, e 56 que é múltiplo de 8.

Pôsto isto, vejamos como os autores egípcios, apenas dentro de conhecimentos aritméticos limitados, podiam ter formado a Tábua de decomposição de $\frac{2}{p}$ no caso em que p é um número primo.

Notando que $\frac{2}{p}=2\times\frac{1}{p}$ e que 2 pode tomar a forma de fracção $\frac{2\times M}{M}$ com M número inteiro qualquer, resulta

$$\frac{2}{p}=\frac{2\times M}{M}\times\frac{1}{p}=\frac{2\times M}{M\times p}.$$

Ora, para a decomposição de $\frac{2\times M}{M\times p}$ em fracções elementares, como p é um número primo, é necessário que $2\times M$ seja um número que compreenda p e divisores de M, isto é, que seja

(3) $$2\times M=p+a+b+c,$$

supondo que a, b, c são divisores de M, e que há um máximo de quatro fracções elementares, conforme resulta da tabela. Ter-se há então, fàcilmente

$$\frac{2}{p}=\frac{p+a+b+c}{M\times p}=\frac{p}{M\times p}+\frac{a}{M\times p}+\frac{b}{M\times p}+\frac{c}{M\times p}, \tag{4}$$

donde

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{M}+\frac{1}{\frac{M}{a}\times p}+\frac{1}{\frac{M}{b}\times p}+\frac{1}{\frac{M}{c}\times p}$$

decomposição esta que exige que M seja um número inteiro maior que $\frac{p}{2}$. Evidentemente deve o factor M ser menor que p para evitar o emprêgo de grandes números como factores dos desenvolvimentos.

No caso limite, ter-se há

$$2\times M=p+1,$$

$$M=\frac{p+1}{2},$$

e, portanto,

$$\frac{2}{p}=\frac{p+1}{p\frac{p+1}{2}}, \tag{5}$$

$$\frac{2}{v}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{p\frac{p+1}{2}};$$

e no caso da decomposição definida por (3) pode o último divisor de M, b ou c conforme os casos, ser igual a 1.

São os desenvolvimentos correspondentes às fórmulas (4) e (5), e sob a forma nelas indicada, que é natural, em meu entender, que fôssem seguidos pelos autores egípcios na formação da Tábua de decomposição de $\frac{2}{p}$, quando p é um número primo, decomposição que foi feita, além dísso, obedecendo às seguintes regras:

a) O valor de M pelo qual, em todos os casos, se multiplicam os dois termos da fracção $\frac{2}{p}$, satisfaz à desigualdade

$$\frac{p}{2}<M<p.$$

b) O número M que multiplica os dois termos da fracção $\frac{2}{p}$ deve ser o menor possível, mas conter grande número de divisores, para seu conveniente emprêgo em facilitar os cálculos exigidos pela decomposição expressa na fórmula (4); como conseqüência, o número M deve ser escolhido, de preferência, na série dos sub-múltiplos ou dos primeiros múltiplos de 12, na série dos sub-múltiplos de 60 e, excepcionalmente, fora dêstes divisores, nos outros múltiplos de 6 e de 8.

c) Os últimos denominadores da decomposição nunca poderão conter mais de três algarismos e terão o menor valor possível.

d) O número n de fracções elementares da decomposição deve ser levado ao mínimo, dentro das condições anteriores.

Com estas regras simples, pre-estabelecidas, podiam os Egípcios, dentro dos seus limitados conhecimentos aritméticos, formar a tabela de que se trata, em que se verifica:

1.° Como conseqüência das regras (*a*) e (*b*), que os valores de M usados na Tábua compreendem os seguintes números:

$$2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 20;\ 24,\ 30;\ 36;\ 40;\ 42;\ 56;\ 60;$$

que foram adoptados em definitiva, depois de exame e comparação, em cada caso, com outros números, e tendo em atenção as regras (*c*) e (*d*), como veremos;

2.° Como conseqüência das regras (*c*) e (*d*) que a partir da redução de $\frac{2}{13}$, nunca mais 1 aparece na decomposição de $2 \times M$ definida pela igualdade (3) e, a partir de $\frac{2}{19}$, cessa também de figurar nessa decomposição o número 2, excepto na redução de $\frac{2}{53}$, sendo, a partir desta fracção, sempre superior a 3 o último número da decomposição de $2 \times M$, e, a partir de $\frac{2}{71}$, sempre superior a 4.

Nota-se, além disso, como conseqüência da regra (*d*), que o número n das fracções de decomposição nunca excede $n = 4$.

Analisemos agora cada um dos desenvolvimentos da Tábua de Ahmes, aplicando os preceitos e regras que enunciámos.

A) — *Redução de* $\frac{2}{3}$. —

$$p = 3), \quad M = 2), \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3+1}{3 \times 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

E esta a única decomposição possível.

B) — Redução de $\frac{2}{5}$. —

$$p=5),\quad M=3),\quad \frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{5+1}{5\times3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},$$

$$M=4),\quad \frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{5+2+1}{5\times4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}.$$

Dêstes dois desenvolvimentos deve, sem a menor dúvida, ser escolhido o primeiro, correspondente a $M=3$, que é o da Tábua.

C) — Redução de $\frac{2}{7}$. —

$$p=7),\quad M=4),\quad \frac{2}{7}=\frac{2\times4}{7\times4}=\frac{7+1}{7\times4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$

$$M=6),\quad \frac{2}{7}=\frac{2\times6}{7\times6}=\frac{7+3+2}{7\times6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}.$$

A decomposição correspondente a $M=4$ é a da Tábua e está de inteiro acôrdo com as condições pre-estabelecidas.

Se ensaiarmos a decomposição correspondente a $M=5$,

$$M=5),\quad \frac{2}{7}=\frac{2\times5}{7\times5}=\frac{7+3}{7\times5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{35},$$

verificamos que nunca poderia ser adoptada, por não ser possível decompôr 3 nos divisores de 35. Para esta última decomposição, multiplicam-se os dois termos de $\frac{3}{35}$ por 18, conforme as regras atrás expostas, resultando

$$\frac{3}{35}=\frac{3\times18}{35\times18}=\frac{35+19}{35\times18}=\frac{35+18+1}{35\times18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{35}+\frac{1}{35\times18}.$$

D) — Redução de $\frac{2}{11}$. —

$$p=11),\quad M=6),\quad \frac{2}{11}=\frac{2\times6}{11\times6}=\frac{11+1}{11\times6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66},$$

$$M=8),\quad \frac{2}{11}=\frac{2\times8}{11\times8}=\frac{11+4+1}{11\times8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{88}.$$

Deve ser adoptada, evidentemente, a redução correspondente a $M=6$, de acôrdo com a Tábua.

Se ensaiássemos a redução correspondente a $M = 10$, encontraríamos o seguinte resultado que deveria ser rejeitado

$$M = 10), \quad \frac{2}{11} = \frac{2 \times 10}{11 \times 10} = \frac{11 + 5 + 4}{11 \times 10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{22} + \frac{2 + 2}{11 \times 10}.$$

E) — Redução de $\frac{2}{13}$. —

$$p = 13), \quad M = 8), \quad \frac{2}{13} = \frac{2 \times 8}{13 \times 8} = \frac{13 + 2 + 1}{13 \times 8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104},$$

$$M = 12), \quad \frac{2}{13} = \frac{2 \times 12}{13 \times 12} = \frac{13 + 6 + 4 + 1}{13 \times 12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39} + \frac{1}{156},$$

$$= \frac{13 + 6 + 3 + 2}{13 \times 12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{78}.$$

Deve ser adoptada a redução correspondente a $M = 8$, que é a da Tábua de Ahmes.

Note-se que, nesta redução, o factor $M = 7$ daria a redução mais simples

$$M = 7), \quad \frac{1}{13} = \frac{2 \times 7}{13 \times 7} = \frac{13 + 1}{13 \times 7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91},$$

que não deve ter sido considerada por não ser 7 divisor de 12.

Ensaiando $M = 10$, viria

$$M = 10), \quad \frac{2}{13} = \frac{2 \times 10}{13 \times 10} = \frac{13 + 5 + 2}{13 \times 10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{26} + \frac{1}{65},$$

decomposição que também não deve ter sido considerada pelo motivo idêntico ao já apontado: 10 não é divisor simples de 12.

O exame das decomposições que apresentámos, correspondentes à redução desta fracção $\frac{2}{13}$, mostram à simples vista, como é vantajoso, para que os últimos denominadores dos desenvolvimentos sejam pequenos, que se adoptem valores de M tais que na decomposição de $2 \times M$ deixe de figurar o divisor 1. Isto mesmo, com o simples ensaio de $M = 12$, podem ter notado os autores egípcios, que fizeram a Tábua, na qual, a partir da fracção $\frac{2}{13}$, nunca mais figura na decomposição o divisor 1.

F) — Redução de $\frac{2}{17}$. —

$$p=17),\quad M=12),\quad \frac{2}{17}=\frac{2\times 12}{17\times 12}=\frac{17+4+3}{17\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68},$$

é a decomposição única, correspondente às regras que atrás estabelecemos.

Os ensaios correspondentes a $M=10$, $M=16=2\times 8$, dão os seguintes resultados

$$M=10),\quad \frac{2}{17}=\frac{2\times 10}{17\times 10}=\frac{17+2+1}{17\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{85}+\frac{1}{170},$$

$$M=16),\quad \frac{2}{17}=\frac{2\times 16}{17\times 16}=\frac{17+8+4+2+1}{17\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{34}+\frac{1}{68}+\frac{1}{136}+\frac{1}{272}.$$

G) — Redução de $\frac{2}{19}$. —

$$p=19),\quad M=12),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 12}{19\times 12}=\frac{19+4+1}{19\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{57}+\frac{1}{228},$$

$$=\frac{19+3+2}{19\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}.$$

O último desenvolvimento, de acôrdo com as regras pre-estabelecidas, é o da Tábua.

Experimentando os valores $M=10$, $M=16$, $M=18$, resulta

$$M=10),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 10}{19\times 10}=\frac{19+1}{19\times 10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190};$$

$$M=16),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 16}{2\times 19}=\frac{19+8+4+1}{19\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{38}+\frac{1}{76}+\frac{1}{304};$$

$$M=18),\quad \frac{2}{19}=\frac{2\times 18}{19\times 18}=\frac{19+9+6+2}{19\times 18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{38}+\frac{1}{57}+\frac{1}{171}.$$

H) — Redução de $\frac{2}{23}$. —

$$p=23),\quad M=12),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 12}{23\times 12}=\frac{23+1}{23\times 12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$$

é a decomposição da Tábua, correspondente às regras enunciadas.

As decomposições correspondentes a $M=15$, $M=16$, $M=20$, dão os seguintes resultados:

$$M=15),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 15}{23\times 15}=\frac{23+5+2}{23\times 15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{69}+\frac{2}{345},$$

$$M=16),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 16}{23\times 16}=\frac{23+8+1}{23\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{46}+\frac{1}{368},$$

$$M=20),\quad \frac{2}{23}=\frac{2\times 20}{23\times 20}=\frac{23+10+5+2}{23\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{46}+\frac{1}{92}+\frac{1}{230}.$$

I) — Redução de $\frac{2}{29}$. —

Conforme as regras, os ensaios a fazer são:

$$p=29),\quad M=20),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 20}{29\times 20}=\frac{29+5+4+2}{29\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{116}+\frac{1}{145}+\frac{1}{290},$$

$$M=24),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 24}{29\times 24}=\frac{29+12+4+3}{29\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},$$

devendo adoptar-se a última decomposição que é a da Tábua.

Os resultados correspondentes a $M=15$, $M=16$, são:

$$M=15),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 15}{29\times 15}=\frac{29+1}{29\times 15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{435},$$

$$M=16),\quad \frac{2}{29}=\frac{2\times 16}{29\times 16}=\frac{29+2+1}{29\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{232}+\frac{1}{464}.$$

J) — Redução de $\frac{2}{31}$. —

$$p=31),\quad M=20),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 20}{31\times 20}=\frac{31+5+4}{31\times 20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155},$$

$$M=24),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 24}{31\times 24}=\frac{31+12+3+2}{31\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{62}+\frac{1}{248}+\frac{1}{372},$$

$$=\frac{31+8+6+3}{31\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{93}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{31}=\frac{2\times 30}{31\times 30}=\frac{31+15+6+5+3}{31\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{62}+\frac{1}{155}+\frac{1}{186}+\frac{1}{310},$$

são as decomposições correspondentes às regras pre-estabelecidas, devendo ser adoptada a primeira que é a da Tábua.

A decomposição correspondente a $M = 16$,

$$M = 16), \quad \frac{2}{31} = \frac{2 \times 16}{31 \times 16} = \frac{31 + 1}{31 \times 16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}.$$

K) — Redução de $\frac{2}{37}$. —

$$p = 37), \quad M = 20), \quad \frac{2}{37} = \frac{2 \times 20}{37 \times 20} = \frac{37 + 2 + 1}{37 \times 20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{370} + \frac{1}{740},$$

$$M = 24), \quad \frac{2}{37} = \frac{2 \times 24}{37 \times 24} = \frac{37 + 8 + 3}{37 \times 24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296},$$

$$M = 30), \quad \frac{2}{37} = \frac{2 \times 30}{37 \times 30} = \frac{37 + 15 + 6 + 2}{37 \times 30} = \frac{1}{30} + \frac{1}{74} + \frac{1}{185} + \frac{1}{555},$$

$$M = 36), \quad \frac{2}{37} = \frac{2 \times 36}{37 \times 36} = \frac{37 + 18 + 12 + 4 + 1}{37 \times 36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{74} + \frac{1}{111} + \frac{1}{333} + \frac{1}{1332},$$

$$= \frac{37 + 18 + 9 + 6 + 2}{37 \times 36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{74} + \frac{1}{148} + \frac{1}{222} + \frac{1}{666}.$$

Conforme as regras estabelecidas, deve ser preferido o desenvolvimento correspondente a $M = 24$, que é o da Tábua.

L) — Redução de $\frac{2}{41}$. —

$$p = 41), \quad M = 24), \quad \frac{2}{41} = \frac{2 \times 24}{41 \times 24} = \frac{41 + 4 + 3}{41 \times 24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328},$$

$$M = 30), \quad \frac{2}{41} = \frac{2 \times 30}{41 \times 30} = \frac{41 + 10 + 6 + 3}{41 \times 30} = \frac{1}{30} + \frac{1}{123} = \frac{1}{205} + \frac{1}{410},$$

$$M = 36), \quad \frac{2}{41} = \frac{2 \times 36}{41 \times 36} = \frac{41 + 18 + 9 + 4}{41 \times 36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{82} + \frac{1}{164} + \frac{1}{369},$$

$$M = 40), \quad \frac{2}{41} = \frac{2 \times 40}{41 \times 40} = \frac{41 + 20 + 10 + 5 + 4}{41 \times 40} = \frac{1}{40} + \frac{1}{82} + \frac{1}{164} + \frac{1}{328} + \frac{1}{410}.$$

A primeira decomposição é a da Tábua, conforme as regras.

M) — Redução de $\frac{2}{43}$. —

$$p=43),\quad M=24),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 24}{43\times 24}=\frac{43+3+2}{43\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{344}+\frac{1}{516},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 30}{43\times 30}=\frac{43+15+2}{43\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 36}{43\times 36}=\frac{43+18+9+2}{43\times 36}=$$

$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{86}+\frac{1}{172}+\frac{1}{774},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 40}{43\times 40}=\frac{43+20+10+4+2+1}{43\times 40}=$$

$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{86}+\frac{1}{172}+\frac{1}{430}+\frac{1}{860}+\frac{1}{1720},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{43}=\frac{2\times 42}{43\times 42}=\frac{43+21+14+6}{43\times 42}=$$

$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}.$$

Ainda, de acôrdo com as regras enunciadas, deve ser adoptada a decomposição correspondente ao último desenvolvimento que é o da Tábua; embora a $M=24$ e $M=30$ correspondam três fracções, vemos que a última, em ambos os desenvolvimentos, provém do divisor 2 que, como dissemos, desde $\frac{2}{19}$ nunca mais é adoptado nas decomposições a não ser na de $\frac{2}{53}$. Notemos ainda que o emprêgo dos factores 24 e 30 daria as últimas fracções da decomposição com denominadores excessivamente elevados, em comparação com os desenvolvimentos das fracções anteriores e com o que se obtém usando nesta redução o factor $M=42$.

N) — Redução de $\frac{2}{47}$. —

$$p=47),\quad M=24),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 24}{47\times 24}=\frac{47+1}{47\times 24}=\frac{1}{24}+\frac{1}{1128},$$

$$M=30),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 30}{47\times 30}=\frac{47+10+3}{47\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470},$$

$$p=47),\quad M=36),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 36}{47\times 36}=\frac{47+12+9+4}{47\times 36}=$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{141}+\frac{1}{188}+\frac{1}{423},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 40}{47\times 40}=\frac{47+20+10+2+1}{47\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{94}+\frac{1}{188}+\frac{1}{940}+\frac{1}{1880},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{47}=\frac{2\times 42}{47\times 42}=\frac{47+21+14+2}{47\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{94}+\frac{1}{141}+\frac{1}{987}.$$

Deve ser adoptada a decomposição correspondente a $M=30$ que é a decomposição da Tábua.

O) — Redução de $\frac{2}{53}$. —

$$p=53),\quad M=30),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 30}{53\times 30}=\frac{53+5+2}{53\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 36}{53\times 36}=\frac{53+12+4+3}{53\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{159}+\frac{1}{477}+\frac{1}{636},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 40}{53\times 40}=\frac{53+20+5+2}{53\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{106}+\frac{1}{424}+\frac{1}{1060},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 42}{53\times 42}=\frac{53+21+7+3}{53\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{106}+\frac{1}{318}+\frac{1}{742},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{53}=\frac{2\times 48}{53\times 48}=\frac{53+24+16+3}{53\times 48}=\frac{2}{48}+\frac{1}{106}+\frac{1}{159}+\frac{1}{848},$$

A decomposição da Tábua é a primeira, correspondente a $M=30$, que tem justificação dentro das regras apontadas, — embora os desenvolvimentos correspondentes a $M=36$ e $M=42$ tenham os últimos denominadores um pouco menores —, por isso que apresenta apenas três fracções elementares.

P) — Redução de $\frac{2}{59}$. —

$$p=59),\quad M=30),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 30}{59\times 30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{1770},$$

$$M=36),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 36}{59\times 36}=\frac{59+9+4}{59\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531},$$

$$p=59),\quad M=40),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 40}{59\times 40}=\frac{59+10+5+4+2}{59\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{236}+\frac{1}{472}+\frac{1}{590}+\frac{1}{1180},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 42}{59\times 42}=\frac{59+21+3+1}{59\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{118}+\frac{1}{826}+\frac{1}{2478},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 48}{59\times 48}=\frac{59+24+12+1}{59\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{118}+\frac{1}{236}+\frac{1}{2832},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 54}{59\times 54}=\frac{59+27+18+3+1}{59\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{118}+\frac{1}{177}+\frac{1}{1062}+\frac{1}{3186},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{59}=\frac{2\times 56}{59\times 56}=\frac{59+28+14+7+4}{59\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{118}+\frac{1}{236}+\frac{1}{472}+\frac{1}{826}.$$

Evidentemente, deve ser adoptado o desenvolvimento da Tábua, correspondente a $M=36$, conforme as regras enunciadas.

Q) — Redução de $\frac{2}{61}$. —

$$p=61),\quad M=36),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 36}{61\times 36}=\frac{61+9+2}{61\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{244}+\frac{1}{1098},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 40}{61\times 40}=\frac{61+10+5+4}{61\times 40}=$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 42}{61\times 42}=\frac{61+14+7+2}{61\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{183}+\frac{1}{366}+\frac{1}{1281},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{61}=\frac{2\times 48}{61\times 48}=\frac{61+16+12+4+3}{61\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{183}+\frac{1}{244}+\frac{1}{732}+\frac{1}{976},$$

$$p=61),\ M=54),\ \frac{2}{61}=\frac{2\times 54}{61\times 54}=\frac{61+27+18+2}{61\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{122}+\frac{1}{183}+\frac{1}{1647},$$

$$M=56),\ \frac{2}{61}=\frac{2\times 56}{61\times 56}=\frac{61+28+14+7+2}{61\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{122}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{1708},$$

$$M=60),\ \frac{2}{61}=\frac{2\times 60}{61\times 60}=\frac{61+30+15+10+4}{61\times 60}=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{122}+\frac{1}{244}+\frac{1}{366}+\frac{1}{915}.$$

O exame dêstes polinómios mostra que deve ser adoptada a decomposição correspondente a $M=40$, que é a da Tábua.

R) — Redução de $\frac{2}{67}$. —

$$p=67),\ M=36),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 36}{67\times 36}=\frac{67+4+1}{67\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{603}+\frac{1}{2412},$$

$$M=40),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 40}{67\times 40}=\frac{67+8+5}{67\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536},$$

$$M=42),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 42}{67\times 42}=\frac{67+14+3}{67\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{201}+\frac{1}{938},$$

$$M=48),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 48}{67\times 48}=\frac{67+24+3+2}{67\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{134}+\frac{1}{1072}+\frac{1}{1608},$$

$$M=54),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 54}{67\times 54}=\frac{67+27+9+3+2}{67\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{134}+\frac{1}{402}+\frac{1}{1206}+\frac{1}{1809},$$

$$M=56),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 56}{67\times 56}=\frac{67+28+14+2+1}{67\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{134}+\frac{1}{268}+\frac{1}{1876}+\frac{1}{3752},$$

$$M=60),\ \frac{2}{67}=\frac{2\times 60}{67\times 60}=\frac{67+30+15+6+2}{67\times 60}=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{134}+\frac{1}{268}+\frac{1}{670}+\frac{1}{2010}.$$

Dêstes desenvolvimentos deve ser adoptado, evidentemente, o correspondente a $M=40$, que é o da Tábua.

S) — Redução de $\frac{2}{71}$. —

$$p=71),\quad M=36),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 36}{71\times 36}=\frac{71+1}{71\times 36}=\frac{1}{36}+\frac{1}{2556},$$

$$M=40),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 40}{71\times 40}=\frac{71+5+4}{71\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 42}{71\times 42}=\frac{71+7+6}{71\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{426}+\frac{1}{497},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 48}{71\times 48}=\frac{71+16+6+3}{71\times 48}=$$

$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{213}+\frac{1}{568}+\frac{1}{1136},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 54}{71\times 54}=\frac{71+27+9+1}{71\times 54}=$$

$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{142}+\frac{1}{426}+\frac{1}{3834},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 56}{71\times 56}=\frac{71+28+7+4+2}{71\times 56}=$$

$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{142}+\frac{1}{568}+\frac{1}{994}+\frac{1}{1988},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{71}=\frac{2\times 60}{71\times 60}=\frac{71+30+15+4}{71\times 60}=$$

$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{142}+\frac{1}{284}+\frac{1}{1065}.$$

Nos desenvolvimentos correspondentes a esta fracção, as decomposições para $M=40$ e $M=42$ contêm ambas três fracções elementares, com os últimos denominadores com três algarismos; e, conforme a regra *C*), se os autores egípcios tivessem ensaiado o factor 42, deveria ser adoptado o desenvolvimento correspondente. Na Tábua, porém, a redução de $\frac{2}{71}$ é feita com o factor $M=40$, facto que mostra a preferência já indicada, dos mesmos autores, para o emprêgo nos cálculos, de factores que devem ser procurados primeiro, entre a série dos submúltiplos e dos múltiplos de 12 e dos divisores de 60. Do uso dêstes factores afasta-se a Tábua, apenas duas vezes: uma, na redução de $\frac{2}{43}$ em que aparece o factor $M=42$, como vimos; outra, na redução de $\frac{2}{97}$ em que há necessidade de recorrer ao factor $M=56$, para evitar ter fracções elementares com denominadores contendo mais de três algarismos.

O factor $M=40$ foi usado nas duas reduções imediatamente anteriores: *à fortiori*, na redução de $\frac{2}{61}$, e, com grande vantagem, na redução de $\frac{2}{67}$. Podia ainda ter sido usado por simpatia na redução actual de $\frac{2}{71}$, mesmo que $M=42$ tivesse sido ensaiado, tanto mais que o último denominador da decomposição, 710, está dentro do valor mais alto dos denominadores das reduções anteriores.

T) — Redução de $\frac{2}{73}$. —

$$p=73),\quad M=40),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 40}{73\times 40}=\frac{73+5+2}{73\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{584}+\frac{1}{1460},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 42}{73\times 42}=\frac{73+6+3+2}{73\times 42}=$$
$$=\frac{1}{42}+\frac{1}{511}+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1533},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 48}{73\times 48}=\frac{73+12+8+3}{73\times 48}=$$
$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{292}+\frac{1}{438}+\frac{1}{1168},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 54}{73\times 54}=\frac{73+27+6+2}{73\times 54}=$$
$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{146}+\frac{1}{657}+\frac{1}{1971},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 56}{73\times 56}=\frac{73+28+7+4}{73\times 56}=$$
$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{146}+\frac{1}{584}+\frac{1}{1022},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 60}{73\times 60}=\frac{73+20+15+12}{73\times 60}=$$
$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}.$$

O exame dos desenvolvimentos correspondentes aos factores de preferência, $M=40$, $M=48$, $M=60$, e aos factores eventuais, múltiplos de 6 e de 8, compreendidos entre estes números, mostram que, dentro das regras enunciadas, deve ser usada *à fortiori*, a decomposição que corresponde a $M=60$ conforme a Tábua.

Se tivesse sido ensaiado o valor $M=44$, achar-se-ia o desenvolvimento mais simples:

$$M=44),\quad \frac{2}{73}=\frac{2\times 44}{73\times 44}=\frac{73+11+4}{73\times 44}=\frac{1}{44}+\frac{1}{292}+\frac{1}{803}.$$

U) — Redução de $\frac{2}{79}$. —

$$p=79),\quad M=40),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 40}{79\times 40}=\frac{79+1}{79\times 40}=\frac{1}{40}+\frac{1}{3160},$$

$$M=42),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 42}{79\times 42}=\frac{79+3+2}{79\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{1106}+\frac{1}{1659},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 48}{79\times 48}=\frac{79+12+3+2}{79\times 48}=$$

$$=\frac{1}{48}+\frac{1}{316}+\frac{1}{1264}+\frac{1}{1896},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 54}{79\times 54}=\frac{79+18+9+2}{79\times 54}=$$

$$=\frac{1}{54}+\frac{1}{237}+\frac{1}{474}+\frac{1}{2133},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 56}{79\times 56}=\frac{79+14+8+7+4}{79\times 56}=$$

$$=\frac{1}{56}+\frac{1}{316}+\frac{1}{553}+\frac{1}{632}+\frac{1}{1106},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{79}=\frac{2\times 60}{79\times 60}=\frac{79+20+15+6}{79\times 60}=$$

$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}.$$

O exame dêstes desenvolvimentos mostra que o único possível é o correspondente a $M=60$, que é o da Tábua.

V) — Redução de $\frac{2}{83}$. —

$$p=83),\quad M=42),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 42}{83\times 42}=\frac{83+1}{83\times 42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{3486},$$

$$M=48),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 48}{83\times 48}=\frac{83+12+1}{83\times 48}=\frac{1}{48}+\frac{1}{332}+\frac{1}{3984},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 54}{83\times 54}=\frac{83+18+6+1}{83\times 54}=\frac{1}{54}+\frac{1}{249}+\frac{1}{747}+\frac{1}{4482},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 56}{83\times 56}=\frac{83+14+8+7}{83\times 56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{332}+\frac{1}{581}+\frac{1}{664},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{83}=\frac{2\times 60}{83\times 60}=\frac{83+15+12+10}{83\times 60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}.$$

A decomposição correspondente a $M=60$ é a mais conveniente e é a da Tábua.

X) — Redução de $\frac{2}{89}$. —

$$p=89),\quad M=48),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 48}{89\times 48}=\frac{89+4+3}{89\times 48}=\frac{1}{48}+\frac{1}{1068}+\frac{1}{1424},$$

$$M=54),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 54}{89\times 54}=\frac{89+18+1}{89\times 54}=\frac{1}{54}+\frac{1}{267}+\frac{1}{4806},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 56}{89\times 56}=\frac{89+14+7+2}{89\times 56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{356}+\frac{1}{712}+\frac{1}{2492},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{89}=\frac{2\times 60}{89\times 60}=\frac{89+15+10+6}{89\times 60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}.$$

A decomposição correspondente a $M=60$, única que pode ser adoptada dentro das regras preestabelecidas, é a da Tábua.

Y) — Redução de $\frac{2}{97}$. —

$$p=97),\quad M=54),\quad \frac{2}{97}=\frac{2\times 54}{97\times 54}=\frac{97+9+2}{97\times 54}=\frac{1}{54}+\frac{1}{582}+\frac{1}{2619},$$

$$M=56),\quad \frac{2}{97}=\frac{2\times 56}{97\times 56}=\frac{97+8+7}{97\times 56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$

$$M=60),\quad \frac{2}{97}=\frac{2\times 60}{97\times 60}=\frac{97+12+6+5}{97\times 60}=\frac{1}{60}+\frac{1}{485}+\frac{1}{970}+\frac{1}{1164}.$$

Nesta redução não pode ser usado o factor $M = 60$, por causa do denominador da última fracção, superior a 999. O desenvolvimento correspondente a $M = 56$, que está dentro das regras enunciadas, é o da Tábua.

IV

Examinando os desenvolvimentos que minuciosamente apresentámos, podemos ver como os autores egípcios, sem regras nem fórmulas complicadas, sem lutas entre os factores de M, escolhidos — ao contrário do que se lê nas *Questões heronianas*(¹) — naturalmente e simplesmente, foram levados a formar a Tábua da decomposição de $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número primo. O que era fundamental, ao que se reconhece, e estabelecidas as regras da decomposição que decorrem dos simples raciocínios que levaram às fórmulas (4) e (5), é que os denominadores das fracções elementares não atingissem a casa dos milhares, talvez porque os Egípcios dificilmente concebessem números muito pequenos, de modo análogo, ao que na origem sucedia aos Gregos, quanto aos números grandes, que tinham repugnância em considerar, conforme observa Hankel (²); sendo êste o motivo que determinou o emprêgo do factor $M = 56$, fora dos múltiplos de 12 e dos divisores de 60, na redução de $\frac{2}{97}$, bem como se recorreu a $M = 42$ na redução de $\frac{2}{43}$ para obter denominadores muito mais pequenos que os que resultariam de $M = 24$ e $M = 30$.

Em seguida, e muito lògicamente, tendo sido escolhidos nas fracções mais simples, 12 e os seus divisores para os valores do factor M que deve multiplicar $\frac{2}{p}$, a partir de $\frac{2}{23}$ houve necessidade de pôr de parte o número 12 para ser possível a decomposição, e é então, conforme os casos, como vimos, que o valor de M usado é, ou múltiplo de 12 ou submúltiplo de 60,

(¹) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 142: «A partir de $p = 29$, para a escolha de M, parece haver luta entre os múltiplos de 12 e os divisores de 60.»

(²) *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, 1874, pág. 17.

números estes de grande número de divisores, como se torna necessário empregar em reduções desta natureza.

É assim, que $M=24$ aparece na redução de $\frac{2}{29}$, porque produz uma decomposição mais vantajosa sob o ponto de vista do último denominador que $M=20$, e, é assim também, que êste último factor aparece no desenvolvimento de $\frac{2}{31}$, muito lògicamente, pois, como verificámos, a decomposição respectiva tem menor número de fracções elementares e com denominador bastante menor que a que corresponde a $M=24$. Êste último factor é usado, em seguida, na redução da fracção imediata $\frac{2}{37}$, com vantagem manifesta sôbre o desenvolvimento correspondente a $M=20$; e, assim sucessivamente, são usados os diferentes valores M, conforme se verifica e explica nas reduções das diferentes fracções $\frac{2}{p}$.

Notemos ainda, dentro da restrição imposta ao maior valor dos denominadores das fracções elementares, que a decomposição binária correspondente à fórmula geral

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}p}$$

não poderia ser mais empregada a partir da redução de $\frac{2}{43}$. Com efeito, a fracção seguinte é $\frac{2}{47}$, para a qual esta última fórmula dá o valor

$$\frac{2}{47}=\frac{1}{24}+\frac{1}{1128},$$

com o segundo denominador superior a 1000.

Lê-se nas *Questões heronianas* (¹): «No ponto de vista egípcio, a decomposição $\frac{2}{17}$ oferece uma particularidade a assinalar. Se $\frac{p+1}{2}=m^2$, tem-se

$$\frac{p}{2}=\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{mp}+\frac{1}{(m+1)p};$$

(¹) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.º, pág. 142.

os dois factores de p não diferem senão duma unidade. Esta decomposição acha-se efectivamente aplicada para $p=31$, e para $p=97$. No primeiro caso, vemos aparecer $M=20$, emquanto que $M=24$ é preferido nos números próximos; no segundo caso, temos $M=7\times 8$ fora da série sexagesimal; mas, ao contrário, a decomposição análoga $\frac{2}{71}=\frac{1}{42}+\frac{1}{6\times 71}+\frac{1}{7\times 71}$ não é dada, ainda que 42 seja escolhido para valor de M num caso menos favorável».

De facto, as decomposições correspondentes a $\frac{2}{17}$, $\frac{2}{31}$ e $\frac{2}{97}$ estão compreendidas na fórmula apresentada por Tannery; mas que os Egípcios não a conheceram, resulta claramente da decomposição adoptada $\frac{2}{71}$. Como já expliquei e resulta do exame dos diferentes desenvolvimentos, o factor $M=20$ é usado muito lògicamente na redução de $\frac{2}{31}$, e o emprêgo de $M=56$, na decomposição de $\frac{2}{97}$, tornou-se absolutamente necessário, porque a $M=60$ corresponde uma fracção elementar com denominador igual a 1164.

Lê-se ainda nas *Questões heronianas* (¹): «O múltiplo 36 não aparece senão uma vez

$$\frac{2}{59}-\frac{1}{36}=\frac{9+4}{36\times 59}=\frac{1}{4\times 59}+\frac{1}{9\times 59},$$

em logar de

$$\frac{2}{59}-\frac{1}{30}=\frac{1}{30\times 59}, \tag{6}$$

emquanto que

$$\frac{2}{53}-\frac{1}{30}=\frac{2+5}{30\times 53}=\frac{1}{6\times 53}+\frac{1}{15\times 53} \tag{7}$$

em logar de

$$\frac{2}{53}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3\times 53}+\frac{1}{9\times 53}+\frac{1}{12\times 53}. \tag{8}$$

(¹) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.°, págs. 143 e 144.

«Daqui por diante não há mais múltiplos de 12 antes de 60:

$$\frac{2}{61}-\frac{1}{49}=\frac{10+5+4}{40\times 61}, \quad \text{em lugar de} \quad \frac{2}{61}-\frac{1}{36}=\frac{1}{4\times 61}+\frac{1}{18\times 61},$$

$$\frac{2}{67}-\frac{1}{40}=\frac{8+5}{40\times 67}, \quad \text{em lugar de} \quad \frac{2}{67}-\frac{1}{36}=\frac{1}{12\times 67}+\frac{1}{18\times 67},$$

$$\frac{2}{71}-\frac{1}{40}=\frac{5+4}{40\times 71}, \quad \text{em lugar de} \quad \frac{2}{71}-\frac{1}{36}=\frac{1}{36\times 71}.$$

«Mas 60 aparece antes que seja necessário

$$\frac{2}{73}-\frac{1}{60}=\frac{20+15+12}{60\times 73}, \quad \text{em logar de} \quad \frac{2}{73}-\frac{1}{40}=\frac{5+2}{40\times 73},$$

$$\frac{2}{79}-\frac{1}{60}=\frac{20+15+6}{60\times 79}, \quad \text{em logar de} \quad \frac{2}{79}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40\times 79}.»$$

Pelo que tem sido dito, a decomposição (6) não podia ter sido empregada, e (7) é preferível a (8), como já foi explicado. $M=40$ e $M=60$ são empregados para substituirem os factores 36 e 40, exactamente, quando se torna necessário; com efeito, tem-se

$$18\times 61=1098, \quad 18\times 67=1206, \quad 36\times 71=2556;$$

e

$$40\times 73=2920, \quad 40\times 79=3610;$$

o que mostra que, ao contrário do que se lê nas *Questões heronianas*, não podem ser empregadas as decomposições de $\frac{2}{61}$, $\frac{2}{67}$ e $\frac{2}{71}$ com $M=36$, nem podem ser empregadas as decomposições $\frac{2}{73}$ e $\frac{2}{79}$ com $M=40$.

V

Passando agora a considerar as fracções $\frac{2}{p}$ em que p é um número composto, verificámos que entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{99}$ os valores de p são: ou potências inteiras simples de 3, de 5 ou de 7, ou o produto de dois factores primos, um dos quais é 3, 5 ou 7, figurando 3 ou o seu quadrado em treze fracções

$$(\alpha) \qquad \frac{2}{15}, \frac{2}{21}, \frac{2}{33}, \frac{2}{39}, \frac{2}{45}, \frac{2}{51}, \frac{2}{57}, \frac{2}{63}, \frac{2}{69}, \frac{2}{75}, \frac{2}{87}, \frac{2}{93}, \frac{2}{99};$$

5, em cinco fracções

$$(\beta) \qquad \frac{2}{35}, \frac{2}{55}, \frac{2}{65}, \frac{2}{85}, \frac{2}{95};$$

e 7, em duas fracções

$$(\gamma) \qquad \frac{2}{77}, \frac{2}{91}.$$

As fracções em que entram simples potências de 3, 5 e 7, são:

$$(\delta) \qquad \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{25}, \frac{2}{49}.$$

Dum modo geral, as trese fracções (α) e as três primeiras (δ) estão compreendidas na forma $\frac{2}{3a}$, as cinco fracções (β) e a 4.ª (δ) na forma $\frac{2}{5a}$, e as duas fracções (γ) e a 5.ª (δ) na forma $\frac{2}{7a}$.

Pôsto isto, verifica-se do exame da Tábua de Ahmes que, em tôdas as fracções em cujo denominador entra 3, como factor, os desenvolvimentos obedecem às seguintes relações

$$(8) \qquad \frac{2}{3a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a},$$

de acôrdo com a regra enunciada no papiro para obter os $\frac{2}{3}$ duma fracção.

Os desenvolvimentos das fracções $\frac{2}{5a}$ não compreendidas na forma $\frac{2}{3a}$ e os das fracções $\frac{2}{7a}$ que se não compreendem nas formas anteriores, obedecem, como regra, às relações

$$(9) \qquad \frac{2}{5a} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{15a}$$

$$(10) \qquad \frac{2}{7a} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{28a}$$

análogas à relação (8). À regra expressa nas relações (8), (9) e (10), fazem excepção, apenas, as seguintes fracções

$$(11) \qquad \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times 7}, \quad \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times 11}, \quad \frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}, \quad \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13};$$

sendo os desenvolvimentos de $\frac{2}{55}$ e $\frac{2}{95}$, correspondentes a

$$\frac{2}{55}=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{95}=\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{5},$$

em vez de

$$\frac{2}{55}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{11}, \quad \frac{2}{95}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{19};$$

e os desenvolvimentos de $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, compreendidos na fórmula

$$\frac{2}{ab}=\frac{2\frac{a+b}{2}}{ab\frac{a+b}{2}}=\frac{1}{a\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{b\frac{a+b}{2}}.$$

Porém, todos os desenvolvimentos das fracções $\frac{2}{p}$ em que p é um número composto, estão dentro das regras e preceitos que serviram para fazer as decomposições no caso em que p é um número primo, com as simplificações que resultam de ser p um múltiplo de 3, 5 ou de 7, pois que, neste caso, de ser

$$(12) \qquad \frac{2}{p}=\frac{2M}{p\times M}=\frac{2M}{3a\times M}, \quad \text{ou} \quad =\frac{2M}{5a\times M}, \quad \text{ou} \quad =\frac{2M}{7a\times M},$$

resulta que as reduções em fracções elementares se obtêm muito simplesmente, fazendo

$$2M=3+1, \quad \text{ou} \quad M=\frac{3+1}{2}=2, \quad \text{no 1.º caso;}$$

$$2M=5+1, \quad \text{ou} \quad M=\frac{5+1}{2}=3, \quad \text{no 2.º caso;}$$

$$2M=7+1, \quad \text{ou} \quad M=\frac{7+1}{2}=4, \quad \text{no 3.º caso.}$$

E, tem-se, então, com facilidade,

$$p=3a),\quad \frac{2}{3a}=\frac{2\times 2}{3a\times 2}=\frac{3+1}{3a\times 2}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a},$$

$$p=5a),\quad \frac{2}{5a}=\frac{2\times 3}{5a\times 3}=\frac{5+1}{5a\times 3}=\frac{1}{3a}+\frac{1}{15a},$$

$$p=7a),\quad \frac{2}{7a}=\frac{2\times 4}{7a\times 4}=\frac{7+1}{7a\times 4}=\frac{1}{4a}+\frac{1}{28a}.$$

Estas reduções muito simples e com factores simples 2, 3, 4, todos divisores de 12, são, em regra, as da Tábua, fazendo excepção as quatro fracções (11) cujos desenvolvimentos porém se não afastam ainda das regras e preceitos que têm sido indicados.

De facto, a redução da Tábua

$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330},$$

obtém-se da expressão (12) sob a forma

$$\frac{2}{p}=\frac{2M}{5a\times M},$$

fazendo $2M=a+1$, ou $M=\frac{a+1}{2}$. No caso sujeito, tem-se $M=\frac{11+1}{2}=6$, o que dá

$$\frac{2}{55}=\frac{2}{5\times 11}=\frac{2\times 6}{5\times 11\times 6}=\frac{11+1}{5\times 11\times 6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}.$$

As reduções

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\quad \frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},$$

obtêm-se respectivamente das expressões (12),

$$\frac{2}{p}=\frac{2M}{5a\times M},\quad \frac{2}{p}=\frac{2M}{7a\times M},$$

em que $2M=5+a$, $2M=7+a$, ou $M=\frac{5+a}{2}$, $M=\frac{7+a}{2}$.

Nos casos de que se trata, vem

$$\frac{2}{35}=\frac{2}{5\times 7}=\frac{2\times 6}{5\times 7\times 6}=\frac{5+7}{5\times 7\times 6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42},$$

$$\frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 10}{7\times 13\times 10}=\frac{13+7}{7\times 13\times 10}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},$$

representando esta última decomposição o único caso dum factor $M<12$, que não é divisor dêste número, mas de 60.

Se aplicarmos à redução de $\frac{2}{95}$, processo idêntico ao usado nas decomposições $\frac{2}{33}$ e $\frac{2}{91}$, resultará $M=\frac{19+5}{2}=12$ e

$$\frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 12}{5\times 19\times 12}=\frac{19+5}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{228},$$

ou

$$=\frac{19+3+2}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570},$$

como resulta da comparação dêste desenvolvimento com o que foi obtido de $\frac{2}{19}$ e consta da alínea *G*), como é facil verificar.

VI

De tudo quanto tem sido exposto, resulta ter de reconhecer-se que os Egípcios para a construção da Tábua de decomposição das fracções $\frac{2}{2n+1}$, em que $n<50$, usaram de processos gerais com as modificações correspondentes aos diferentes casos tratados; mostrando as diferentes reduções apresentadas a variedade dos seus conhecimentos, e, em geral, o justo critério com que foram escolhidos os polinómios da decomposição, como já vimos no exame detalhado dos possíveis desenvolvimentos que apresentámos no caso de p ser um número primo, e, como se pode ver da análise dos desenvolvimentos que provêm da aplicação dos critérios de redução que estudámos, no caso em que p é um número composto, desenvolvimentos em que se verificam os resultados que seguem.

a) — *Redução de* $\frac{2}{9}$. —

$$p=3a),\ a=3),\ M=\frac{3+1}{2}),\ \frac{2}{9}=\frac{2}{3\times3}=\frac{2\times2}{3\times3\times2}=\frac{3+1}{3\times3\times2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{3},$$

é a decomposição da Tábua, e a única possível, dentro dos critérios de redução que foram estabelecidos.

b) — *Redução de* $\frac{2}{15}$. —

$$p=3a),\ a=5),\ M=\frac{3+1}{2}),\ \frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2\times2}{3\times5\times2}=\frac{3+1}{3\times5\times2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{5};$$

$$M=\frac{5+1}{2}),\ \frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2\times3}{3\times5\times3}=\frac{5+1}{3\times5\times3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{45},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{5+3}{2}),\ \frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{2\times4}{3\times5\times4}=\frac{5+3}{3\times5\times4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

O primeiro resultado, evidentemente mais cómodo e mais prático para os cálculos, é o da Tábua.

c) — *Redução de* $\frac{2}{21}$. —

$$p=3a),\ a=7),\ M=\frac{3+1}{2}),\ \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2\times2}{3\times7\times2}=\frac{3+1}{3\times7\times2}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{7};$$

$$M=\frac{7+1}{2}),\ \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2\times4}{3\times7\times4}=\frac{7+1}{3\times7\times4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84},$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{7+3}{2}),\ \frac{2}{21}=\frac{2}{3\times7}=\frac{2\times5}{3\times7\times5}=\frac{7+3}{3\times7\times5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O último não deveria ser empregado por ser $M=5$.

d) — Redução de $\frac{2}{25}$. —

$$p=5a),\ a=5),\ M=\frac{5+1}{2}),\ \frac{2}{25}=\frac{2}{5\times5}=\frac{2\times3}{5\times5\times3}=\frac{5+1}{5\times5\times3}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{5}.$$

É a decomposição da Tábua e a única possível dentro dos critérios estabelecidos.

e) — Redução de $\frac{2}{27}$. —

$$p=3a),\ a=9),\ M=\frac{3+1}{2}),\ \frac{2}{27}=\frac{2}{3\times9}=\frac{2\times2}{3\times9\times2}=\frac{3+1}{3\times9\times2}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{9},$$
$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{9+1}{2}),\ \frac{2}{27}=\frac{2}{3\times9}=\frac{2\times5}{3\times9\times5}=\frac{9+1}{3\times9\times5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{135},$$

$$M=\frac{9+3}{2}),\ \frac{2}{27}=\frac{2}{3\times9}=\frac{2\times6}{3\times9\times6}=\frac{9+3}{3\times9\times6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo, correspondente a $M=5$, não deve ser usado.

f) — Redução de $\frac{2}{33}$. —

$$p=3a),\ a=11),\ M=\frac{3+1}{2}),\ \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times11}=\frac{2\times2}{3\times11\times2}=\frac{3+1}{3\times11\times2}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{11}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{11};$$

$$M=\frac{11+1}{2}),\ \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times11}=\frac{2\times6}{3\times11\times6}=\frac{11+1}{3\times11\times6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{198},$$
$$=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{11+3}{2}),\ \frac{2}{33}=\frac{2}{3\times11}=\frac{2\times7}{3\times11\times7}=\frac{11+3}{3\times11\times7}=\frac{1}{21}+\frac{1}{77}$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O último, correspondente a $M=7$, não deve ser usado.

g) — Redução de $\frac{2}{35}$. —

$$p=5a),\ a=7),\ M=\frac{5+1}{2}\Big),\ \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{2\times3}{5\times7\times3}=\frac{5+1}{5\times7\times3}=\frac{1}{21}+\frac{1}{105},$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{7};$$

$$M=\frac{7+1}{2}\Big),\ \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{2\times4}{5\times7\times4}=\frac{7+1}{5\times7\times4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{140},$$

$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{5};$$

$$M=\frac{7+5}{2}\Big),\ \frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{2\times6}{5\times7\times6}=\frac{7+5}{5\times7\times6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}.$$

O último desenvolvimento é o da Tábua, como já se viu.

h) — Redução de $\frac{2}{39}$. —

$$p=3a),\ a=13),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\ \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2\times2}{3\times13\times2}=\frac{3+1}{3\times13\times2}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78},$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{13}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{13};$$

$$M=\frac{13+1}{2}\Big),\ \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2\times7}{3\times13\times7}=\frac{13+1}{3\times13\times7}=\frac{1}{21}+\frac{1}{273};$$

$$M=\frac{13+3}{2}\Big),\ \frac{2}{39}=\frac{2}{3\times13}=\frac{2\times8}{3\times13\times8}=\frac{13+3}{3\times13\times8}=\frac{1}{24}+\frac{1}{104},$$

$$=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)\frac{1}{3}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo não poderia ser usado por não ser $M=7$, divisor de 12, podendo usar-se $M=8$, conforme o terceiro desenvolvimento que, sob a forma $\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}+\frac{1}{156}+\frac{1}{312}$, é menos cómodo que o primeiro.

i) — *Redução de* $\frac{2}{45}$. —

$$p=3a),\quad a=15),\quad M=\frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{3\times15}=\frac{2\times2}{3\times15\times2}=\frac{3+1}{3\times15\times2}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{15}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{15},$$
$$=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{15+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{3\times15}=\frac{2\times8}{3\times15\times8}=\frac{15+1}{3\times15\times8}=\frac{1}{24}+\frac{1}{360};$$

$$M=\frac{15+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{3\times15}=\frac{2\times9}{3\times15\times9}=\frac{15+3}{3\times15\times9}=\frac{1}{27}+\frac{1}{135}.$$

O primeiro desenvolvimento, muito prático e cómodo, é o da Tábua. O último, correspondente a $M=9$, não deve ser usado.

Notando-se que a redução desta fracção se pode fazer em relação aos factores 5 e 9 da decomposição de 45, poderemos considerar os desenvolvimentos que seguem:

$$M=\frac{5+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{5\times9}=\frac{2\times3}{5\times9\times3}=\frac{5+1}{5\times9\times3}=\frac{1}{27}+\frac{1}{135};$$
$$M=\frac{9+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{5\times9}=\frac{2\times5}{5\times9\times5}=\frac{9+1}{5\times9\times5}=\frac{1}{25}+\frac{1}{225};$$
$$M=\frac{9+5}{2}\Big),\quad \frac{2}{45}=\frac{2}{5\times9}=\frac{2\times7}{5\times9\times7}=\frac{9+5}{5\times9\times7}=\frac{1}{35}+\frac{1}{63}.$$

Dêstes novos desenvolvimentos, só seria de considerar o primeiro que reproduz o terceiro da decomposição

$$45=3\times15.$$

Os outros dois, com $M=5$ e $M=7$, não podiam ser usados.

j) — *Redução de* $\frac{2}{49}$. —

$$p=7a),\quad a=7),\quad M=\frac{7+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{49}=\frac{2\times4}{7\times7\times4}=\frac{7+1}{7\times7\times4}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196},$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{7}.$$

É o único desenvolvimento possível, e é o da Tábua.

k) — *Redução de* $\frac{2}{51}$. —

$$p=3a),\ a=17),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\ \frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times2}{3\times17\times2}=\frac{3+1}{3\times17\times2}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{17}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{17};$$
$$M=\frac{17+1}{2}\Big),\ \frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times9}{3\times17\times9}=\frac{17+1}{3\times17\times9}=\frac{1}{27}+\frac{1}{459};$$
$$M=\frac{17+3}{2}\Big),\ \frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times10}{3\times17\times10}=\frac{17+3}{3\times17\times10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{170}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua; corresponde à regra geral para obter $\frac{2}{3}$ duma fracção.

O segundo desenvolvimento, correspondente a $M=9$, não deve ser usado, mas, sim, $M=12>\frac{17}{2}$ e <17, que daria

$$\frac{2}{51}=\frac{2}{3\times17}=\frac{2\times12}{3\times17\times12}=\frac{17+4+3}{3\times17\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{153}+\frac{1}{204},$$
$$=\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}\right)\frac{1}{3},$$

menos cómodo que o primeiro.

O terceiro, como regra, não deve ser considerado.

l) — *Redução de* $\frac{2}{55}$. —

$$p=5a),\ a=11),\ M=\frac{5+1}{2}\Big),\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times11}=\frac{2\times3}{5\times11\times3}=\frac{5+1}{5\times11\times3}=\frac{1}{33}+\frac{1}{165},$$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{11}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{11};$$
$$M=\frac{11+1}{2}\Big),\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times11}=\frac{2\times6}{5\times11\times6}=\frac{11+1}{5\times11\times6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330},$$
$$=\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\right)\frac{1}{5};$$
$$M=\frac{11+5}{2}\Big),\ \frac{2}{55}=\frac{2}{5\times11}=\frac{2\times8}{5\times11\times8}=\frac{11+5}{5\times11\times8}=\frac{1}{40}+\frac{1}{88}.$$

O segundo desenvolvimento, como já foi dito, é o da Tábua.

m) — Redução de $\frac{2}{57}$. —

$$p=3a), \quad a=19), \quad M=\frac{3+1}{2}), \quad \frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times2}{3\times19\times2}=\frac{3+1}{3\times19\times2}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114},$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{19}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{19}:$$

$$M=\frac{19+1}{2}), \quad \frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times10}{3\times19}=\frac{19+1}{3\times19\times10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{570};$$

$$M=\frac{19+3}{2}), \quad \frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times11}{3\times19\times11}=\frac{19+3}{3\times19\times11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{209}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da regra e o da Tábua. O terceiro desenvolvimento não pode ser considerado pelo motivo que temos apontado relativo aos factores M. Se na decomposição correspondente ao segundo desenvolvimento, usássemos o factor $M=12$ que é $>\frac{19}{2}$ e <19, resultaria

$$\frac{2}{57}=\frac{2}{3\times19}=\frac{2\times12}{3\times19\times12}=\frac{19+3+2}{3\times19\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{228}+\frac{1}{342},$$

$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}.$$

n) — Redução de $\frac{2}{63}$. —

$$p=3a), \quad a=21), \quad M=\frac{3+1}{2}), \quad \frac{2}{63}=\frac{2}{3\times21}=\frac{2\times2}{3\times21\times2}=\frac{3+1}{3\times21\times2}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126},$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{21}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{21};$$

$$M=\frac{21+1}{2}), \quad \frac{2}{63}=\frac{2}{3\times21}=\frac{2\times11}{3\times21\times11}=\frac{21+1}{3\times21\times11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{693};$$

$$M=\frac{21+3}{2}), \quad \frac{2}{63}=\frac{2}{3\times21}=\frac{2\times12}{3\times21\times12}=\frac{21+3}{3\times21\times12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{252},$$

$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{84}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo, que corresponde a $M=11$, não pode ser eonsiderado, devendo servir quando se quiser recorrer ao factor 21, o valor

$M = 12$, cujo desenvolvimento comparado com o de $\frac{2}{21}$ para $M = 4$, dá um desenvolvimento igual a $\frac{2}{21} \cdot \frac{1}{3}$.

E, como 63 é também igual a 7×9, poderemos considerar as seguintes decomposições:

$$M = \frac{7+1}{2}), \quad \frac{2}{63} = \frac{2}{7 \times 9} = \frac{2 \times 4}{7 \times 9 \times 4} = \frac{7+1}{7 \times 9 \times 4} = \frac{1}{36} + \frac{1}{252};$$

$$M = \frac{9+1}{2}), \quad \frac{2}{63} = \frac{2}{7 \times 9} = \frac{2 \times 5}{7 \times 9 \times 5} = \frac{9+1}{7 \times 9 \times 5} = \frac{1}{35} + \frac{1}{315};$$

$$M = \frac{9+7}{2}), \quad \frac{2}{63} = \frac{2}{7 \times 9} = \frac{2 \times 8}{7 \times 9 \times 8} = \frac{9+7}{7 \times 9 \times 8} = \frac{1}{56} + \frac{1}{72};$$

dos quais a primeira reproduz o terceiro desenvolvimento correspondente a 3×21 e a segunda não pode ser usada.

o) — Redução de $\frac{2}{65}$. —

$$p = 5a), \; a = 13), \; M = \frac{5+1}{2}), \quad \frac{2}{65} = \frac{2}{5 \times 13} = \frac{2 \times 3}{5 \times 13 \times 3} = \frac{5+1}{5 \times 13 \times 3} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195},$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{13};$$

$$M = \frac{13+1}{2}), \quad \frac{2}{65} = \frac{2}{5 \times 13} = \frac{2 \times 7}{5 \times 13 \times 7} = \frac{13+1}{5 \times 13 \times 7} = \frac{1}{35} + \frac{1}{455};$$

$$M = \frac{13+5}{2}), \quad \frac{2}{65} = \frac{2}{5 \times 13} = \frac{2 \times 9}{5 \times 13 \times 9} = \frac{13+5}{5 \times 13 \times 9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{585}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. Os outros dois não podem ser considerados, pois é $M = 7$ e $M = 9$. No segundo, recorrendo a $M = 8$, resultaria

$$\frac{2}{65} = \frac{2}{5 \times 13} = \frac{2 \times 8}{5 \times 13 \times 8} = \frac{13+2+1}{5 \times 13 \times 8} = \frac{1}{40} + \frac{1}{260} = \frac{1}{520},$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right)\frac{1}{5} = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{5}.$$

p) — *Redução de* $\frac{2}{69}$. —

$$p=3a),\ a=23),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\ \frac{2}{69}=\frac{2}{3\times 23}=\frac{2\times 2}{3\times 23\times 2}=\frac{3+1}{3\times 23\times 2}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{23}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{23};$$

$$M=\frac{23+1}{2}\Big),\ \frac{2}{69}=\frac{2}{3\times 23}=\frac{2\times 12}{3\times 23\times 12}=\frac{23+1}{3\times 23\times 12}=\frac{1}{36}+\frac{1}{828},$$
$$=\frac{2}{23}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{276}\right)\frac{1}{3};$$

$$M=\frac{23+3}{2}\Big),\ \frac{2}{69}=\frac{2\times 13}{3\times 23\times 13}=\frac{23+3}{3\times 23\times 13}=\frac{1}{39}+\frac{1}{299}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O terceiro, correspondente a $M=13$, não pode ser usado.

q) — *Redução de* $\frac{2}{75}$. —

$$p=3a),\ a=25),\ M=\frac{3+1}{2}\Big),\ \frac{2}{75}=\frac{2}{3\times 25}=\frac{2\times 2}{3\times 25\times 2}=\frac{3+1}{3\times 25\times 2}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{25}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{25};$$

$$M=\frac{25+1}{2}\Big),\ \frac{2}{75}=\frac{2}{3\times 25}=\frac{2\times 13}{3\times 25\times 13}=\frac{25+1}{3\times 25\times 13}=\frac{1}{69}+\frac{1}{1725};$$

$$M=\frac{25+3}{2}\Big),\ \frac{2}{75}=\frac{2}{3\times 25}=\frac{2\times 14}{3\times 25\times 14}=\frac{25+3}{3\times 25\times 14}=\frac{1}{42}+\frac{1}{350}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo e o terceiro não podem ser usados. Querendo porém recorrer ao desenvolvimento correspondente a $a=25$, poderemos usar $M=15$, divisor de 60, e a redução dará

$$\frac{2}{75}=\frac{2}{3\times 25}=\frac{2\times 15}{3\times 25\times 15}=\frac{25+5}{3\times 25\times 15}=\frac{1}{45}+\frac{1}{225},$$
$$=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{75}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{3}.$$

Fazendo agora as decomposições correspondentes à decomposição $75 = 5 \times 15$ tem-se:

$$M = \frac{5+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{75} = \frac{2}{5\times15} = \frac{2\times3}{5\times15\times3} = \frac{5+1}{5\times15\times3} = \frac{1}{45} + \frac{1}{225};$$

$$M = \frac{15+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{75} = \frac{2}{5\times15} = \frac{2\times8}{5\times15\times8} = \frac{15+1}{5\times15\times8} = \frac{1}{40} + \frac{1}{600};$$

$$M = \frac{15+5}{2}\Big),\quad \frac{2}{75} = \frac{2}{5\times15} = \frac{2\times10}{5\times15\times10} = \frac{15+5}{5\times15\times10} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150};$$

Destas reduções, a terceira, muito simples é, como já se disse, mas obtida por outra forma, a da Tábua.

r) — Redução de $\frac{2}{77}$. —

$$p = 7a),\ a = 11),\ M = \frac{7+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{77} = \frac{2}{7\times11} = \frac{2\times4}{7\times11\times4} = \frac{7+1}{7\times11\times4} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308},$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{11} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)\frac{1}{11};$$

$$M = \frac{11+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{77} = \frac{2}{7\times11} = \frac{2\times6}{7\times11\times6} = \frac{11+1}{7\times11\times6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{462},$$

$$= \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{7} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66}\right)\frac{1}{7};$$

$$M = \frac{11+7}{2}\Big),\quad \frac{2}{77} = \frac{2}{7\times11} = \frac{2\times9}{7\times11\times9} = \frac{11+7}{7\times11\times9} = \frac{1}{63} + \frac{1}{99}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O último não pode ser considerado por ser $M = 9$.

s) — Redução de $\frac{2}{81}$. —

$$p = 3a),\ a = 27),\ M = \frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{81} = \frac{2}{3\times27} = \frac{2\times2}{3\times27\times2} = \frac{3+1}{3\times27\times2} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162},$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{27};$$

$$= \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{54}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{3};$$

$$M = \frac{27+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{81} = \frac{2}{3\times27} = \frac{2\times14}{3\times27\times14} = \frac{27+1}{3\times27\times14} = \frac{1}{42} + \frac{1}{1134};$$

$$M = \frac{27+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{81} = \frac{2}{3\times27} = \frac{2\times15}{3\times27\times15} = \frac{27+3}{3\times27\times15} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo, conforme as regras relativas aos valores M, não podia ser usado. Como é também $81 = 9 \times 9$, poderíamos ensaiar

$$M = \frac{9+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{81} = \frac{2}{9 \times 9} = \frac{2 \times 5}{9 \times 9 \times 5} = \frac{9+1}{9 \times 9 \times 5} = \frac{1}{45} + \frac{1}{405},$$

que, correspondendo a $M = 5$, não pode ser considerado.

t) — *Redução de* $\frac{2}{85}$. —

$$p = 3a), \quad a = 17), \quad M = \frac{5+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 3}{5 \times 17 \times 3} = \frac{5 \times 1}{5 \times 17 \times 3} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255},$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{17} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{17};$$

$$M = \frac{17+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 9}{5 \times 17 \times 9} = \frac{17+1}{5 \times 17 \times 9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{765};$$

$$M = \frac{17+5}{2}\Big), \quad \frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 11}{5 \times 17 \times 11} = \frac{17+5}{5 \times 17 \times 11} = \frac{1}{55} + \frac{1}{187}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. Ao segundo desenvolvimento, conforme as regras enunciadas, deve substituir-se

$$\frac{2}{85} = \frac{2}{5 \times 17} = \frac{2 \times 12}{5 \times 17 \times 12} = \frac{17+4+3}{5 \times 17 \times 12} = \frac{1}{60} + \frac{1}{252} + \frac{1}{340},$$
$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}\right)\frac{1}{5} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{5}.$$

O terceiro não pode também ser usado.

u) — *Redução de* $\frac{2}{87}$. —

$$p = 3a), \quad a = 29), \quad M = \frac{3+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{87} = \frac{2}{3 \times 29} = \frac{2 \times 2}{3 \times 29 \times 2} = \frac{3+1}{3 \times 29 \times 2} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174},$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{29} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{29};$$

$$M = \frac{29+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{87} = \frac{2}{3 \times 29} = \frac{2 \times 15}{3 \times 29 \times 15} = \frac{1}{45} + \frac{1}{435};$$

$$M = \frac{29+3}{2}\Big), \quad \frac{2}{87} = \frac{2}{3 \times 29} = \frac{2 \times 16}{3 \times 29 \times 16} = \frac{29+3}{3 \times 29 \times 16} = \frac{1}{48} + \frac{1}{464}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. Como temos dito, o terceiro, que corresponde a $M=16$, não podia ser usado, e o segundo, só como excepção. Recorrendo a $M=24$ que é $>\frac{29}{2}$ e <29, resulta

$$\frac{2}{87}=\frac{2}{3\times 29}=\frac{2\times 24}{3\times 29\times 24}=\frac{29+12+4+3}{3\times 29\times 24}=\frac{1}{72}+\frac{1}{174}+\frac{1}{522}+\frac{1}{696},$$
$$=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{29}\cdot\frac{1}{3}.$$

v) — Redução de $\frac{2}{91}$. —

$$p=7a),\quad a=13),\quad M=\frac{7+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 4}{7\times 13\times 4}=\frac{7+1}{7\times 13\times 4}=\frac{1}{52}+\frac{1}{364},$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{13}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)\frac{1}{13};$$
$$M=\frac{13+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 7}{7\times 13\times 7}=\frac{13+1}{7\times 13\times 7}=\frac{1}{49}+\frac{1}{637};$$
$$M=\frac{13+7}{2}\Big),\quad \frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 10}{7\times 13\times 10}=\frac{13+7}{7\times 13\times 10}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}.$$

O último desenvolvimento, muito simples, é o da Tábua; e é, como dissémos, o único caso adoptado de decomposição, em que figura um factor M menor que 12, que não é divisor dêste número, mas de 60. O segundo não pode ser considerado, tendo, no caso de se querer fazer a decomposição recorrendo ao factor $a=13$, de recorrer ao valor $M=8$, que dará

$$\frac{2}{91}=\frac{2}{7\times 13}=\frac{2\times 8}{7\times 13\times 8}=\frac{13+2+1}{7\times 13\times 8}=\frac{1}{56}+\frac{1}{364}+\frac{1}{728},$$
$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)\frac{1}{7}=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{7}.$$

x) — Redução de $\frac{2}{93}$. —

$$p=3a),\quad a=31),\quad M=\frac{3+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 2}{3\times 31\times 2}=\frac{3+1}{3\times 31\times 2}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186},$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{31}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{31};$$
$$M=\frac{31+1}{2}\Big),\quad \frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 16}{3\times 31\times 16}=\frac{31+1}{3\times 31\times 16}=\frac{1}{48}+\frac{1}{1488};$$
$$M=\frac{31+3}{2}\Big),\quad \frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 17}{3\times 31\times 17}=\frac{31+3}{3\times 31\times 17}=\frac{1}{51}+\frac{1}{527}.$$

O primeiro desenvolvimento é o da Tábua. O segundo e o terceiro não podem ser usados.

Ao segundo desenvolvimento, de acôrdo com as regras relativas aos factores, poderemos substituir

$$\frac{2}{93}=\frac{2}{3\times 31}=\frac{2\times 20}{5\times 31\times 20}=\frac{31+5+4}{3\times 31\times 20}=\frac{1}{60}+\frac{1}{372}+\frac{1}{465},$$
$$=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{31}\cdot\frac{1}{3}.$$

y) — Redução de $\frac{2}{95}$. —

$p=5a)$, $a=19)$, $M=\frac{5+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 3}{5\times 19\times 3}=\frac{5+1}{5\times 19\times 3}=\frac{1}{57}+\frac{1}{285},$
$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{19}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\frac{1}{19};$$

$M=\frac{19+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 10}{5\times 19\times 10}=\frac{19+1}{5\times 19\times 10}=\frac{1}{50}+\frac{1}{950};$

$M=\frac{19+5}{2}\Big)$, $\frac{2}{95}=\frac{2}{5\times 19}=\frac{2\times 12}{5\times 19\times 12}=\frac{19+5}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{228}.$

De acôrdo com as regras que têm sido expostas, o segundo desenvolvimento não deve, como regra, ser considerado. O terceiro desenvolvimento é simples e mais cómodo que o primeiro; com a forma, talvez posterior, de decomposição

$$\frac{2}{95}=\frac{2\times 12}{5\times 19\times 12}=\frac{19+3+2}{5\times 19\times 12}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570},$$
$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}\right)\frac{1}{5}=\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{5},$$

obtem-se o resultado da Tábua.

z) — Redução de $\frac{2}{99}$. —

$p=3a)$, $a=33)$, $M=\frac{3+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{99}=\frac{2}{3\times 33}=\frac{2\times 2}{3\times 33\times 2}=\frac{3+1}{3\times 33\times 2}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198},$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{33}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{33},$$
$$=\left(\frac{1}{22}+\frac{1}{66}\right)\frac{1}{3}=\frac{2}{33}\cdot\frac{1}{3};$$

$M=\frac{33+1}{2}\Big)$, $\frac{2}{99}=\frac{2}{3\times 33}=\frac{2\times 17}{3\times 33\times 17}=\frac{33+1}{3\times 33\times 17}=\frac{1}{51}+\frac{1}{1683};$

$M=\frac{33+3}{2}\Big)$, $\frac{2}{99}=\frac{2}{3\times 33}=\frac{2\times 18}{3\times 33\times 18}=\frac{33+3}{3\times 33\times 18}=\frac{1}{54}+\frac{1}{594}.$

Dêstes desenvolvimentos, só o primeiro pode ser considerado; é o da regra geral relativa aos $\frac{2}{3}$ duma fracção e o da Tábua. Ainda poderão ser estudadas as decomposições relativas a $99 = 9 \times 11$, como segue:

$$M = \frac{9+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{9 \times 11} = \frac{2 \times 5}{9 \times 11 \times 5} = \frac{9+1}{9 \times 11 \times 5} = \frac{1}{55} + \frac{1}{495},$$

$$M = \frac{11+1}{2}\Big), \quad \frac{2}{99} = \frac{2}{9 \times 11} = \frac{2 \times 6}{9 \times 11 \times 6} = \frac{11+1}{9 \times 11 \times 6} = \frac{1}{54} + \frac{1}{594},$$

$$M = \frac{11+9}{2}\Big), \quad \frac{2}{99} = \frac{2}{9 \times 11} = \frac{2 \times 10}{9 \times 11 \times 10} = \frac{11+9}{9 \times 11 \times 10} = \frac{1}{90} + \frac{1}{110};$$

das quais a primeira, correspondente a $M = 5$, não pode ser considerada, e a segunda que corresponde ao valor achado para $99 = 3 \times 33$, no caso $M = \frac{a+b}{2}$, não apresenta vantagens práticas sôbre a que foi adoptada na Tábua, ao contrário da última que parece preferível nos cálculos; o que levou P. Tannery, a propósito do exame dêste caso e do da decomposição de $\frac{2}{95}$, expressa na relação

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{228},$$

decomposições estas obtidas em condições idênticas às que os Egípcios empregaram na redução das fracções $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, a dizer [1]:

«Elas correspondem à fórmula $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$, cuja aplicação sistemática teria permitido satisfazer, em certos casos, o *desideratum* dos Egípcios mais completamente do que o desenvolvimento da Tábua.»

O exame das decomposições das fracções $\frac{2}{p}$, no caso em que p é um número composto que, em detalhe, apresentámos, mostra, como foi dito, que na Tábua de Ahmes se compreendem, em regra, os desenvolvimentos mais favoráveis para os cálculos. E, sendo certo, evidentemente, que os Egípcios

(1) P. Tannery, *ob. cit.*, t. 2.°, pág. 146.

desconheciam a regra geral, expressa na fórmula de Tannery, devendo ter chegado às decomposições $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$ que se compreendem nessa fórmula, pelo critério simples e geral que expus para tôdas as fracções $\frac{2}{p}$, de multiplicar os dois termos desta fracção por determinados factores M, que, no caso de ser $p = ab$, podem ter o valor $\frac{a+b}{2}$, devendo porém eliminar-se dêstes factores os que não forem divisores de 12, múltiplos dêste número, ou divisores de 60, resulta verificar-se, como vimos, que a decomposição a que corresponde a fórmula de Tannery não é aplicável às fracções

$$\frac{2}{9}, \frac{2}{21}, \frac{2}{25}, \frac{2}{33}, \frac{2}{45}, \frac{2}{49}, \frac{2}{57}, \frac{2}{65}, \frac{2}{69}, \frac{2}{77}, \frac{2}{81}, \frac{2}{85}, \frac{2}{87}, \frac{2}{93},$$

isto é, ao maior número das fracções $\frac{2}{ab}$; podendo aplicar-se às fracções $\frac{2}{75}$ e $\frac{2}{99}$ apenas quando consideremos os seus denominadores, não sob a forma geral de múltiplos simples de 3, mas sob a forma especial $75 = 5 \times 15$, $99 = 9 \times 11$. No caso das outras fracções $\frac{2}{ab}$, as reduções mostram, em geral, o justo critério do emprêgo dos desenvolvimentos da Tábua de Ahmes.

VII

Se examinarmos agora as outras decomposições em fracções elementares que se encontram nas *Questões heronianas* nos capítulos II e seguintes, vemos que, quando o numerador é igual a uma soma de divisores do denominador, se fazem simplesmente as reduções, mantendo, tanto quanto possível, o princípio egípcio de ter os menores denominadores possível. Se o denominador é um número primo, ou se no numerador não se contém uma soma exacta de divisores do denomidador, faz-se a decomposição, multiplicando ambos os termos da fracção por um número M conveniente escolhido, de acôrdo com os critérios e regras que julgo terem sido adoptadas no papiro de Rhind, e que foram já expostas.

Em especial, $\frac{3}{p}$ decompõe-se também, usando os desen-