volvimentos $\frac{2}{p}$ da Tábua egípcia e juntando aos resultados a fracção $\frac{1}{p}$; para $\frac{4}{p}$ quando os denominadores de $\frac{2}{p}$ são pares, usa-sa, por vezes, a redução correspondente a $2 \times \frac{2}{p}$, etc.; idênticamente se procede para outras decomposições.

Do capítulo II das *Questões heronianas* destacamos as fracções que seguem, indicando o processo simples da sua decomposição:

a) $\frac{3}{5}=\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{5+1}{5\times2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$; $\frac{4}{5}=\frac{4\times2}{5\times2}=\frac{5+2+1}{5\times2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$,

$\frac{4}{5}=\frac{4\times4}{5\times4}=\frac{10+5+1}{5\times4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$;

b) $\frac{5}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$;

c) $\frac{4}{7}=\frac{4\times2}{7\times2}=\frac{7+1}{7\times2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$; $\frac{5}{7}=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$;

$\frac{6}{7}=\frac{6\times6}{7\times6}=\frac{21+14+1}{7\times6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$;

d) $\frac{4}{9}=\frac{3+1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$; $\frac{8}{9}=\frac{8\times2}{9\times2}=\frac{12+3+1}{9\times2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$;

e) $\frac{7}{10}=\frac{5+2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$;

f) $\frac{6}{11}=\frac{6\times2}{11\times2}=\frac{11+1}{11\times2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$;

g) $\frac{11}{12}=\frac{8+3}{12}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$;

h) $\frac{4}{13}=2\times\frac{2}{13}=2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}$;

i) $\frac{3}{14}=\frac{2+1}{14}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$; $\frac{11}{14}=\frac{11\times2}{14\times2}=\frac{14+7+1}{14\times2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$;

j) $\frac{11}{18}=\frac{9+2}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$;

k) $\frac{3}{20}=\frac{3\times2}{20\times2}=\frac{5+1}{20\times2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}$;

m) $\frac{5}{21}=\frac{5\times2}{21\times2}=\frac{7+3}{21\times2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$; $\frac{11}{21}=\frac{7+3+1}{21}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}$;

n) $\frac{8}{25}=\frac{8\times4}{25\times4}=\frac{25+5+2}{25\times4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50},\ \frac{16}{25}=2\times\frac{8}{25}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{25};$

o) $\frac{4}{27}=\frac{3+1}{27}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27};$

p) $\frac{17}{30}=\frac{15+2}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{15};$

q) $\frac{23}{33}=\frac{22+1}{33}=\frac{2}{3}+\frac{1}{33};$

r) $\frac{19}{35}=\frac{19\times3}{35\times3}=\frac{35+15+7}{35+3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15};$

s) $\frac{31}{50}=\frac{25+5+1}{50}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50};$

t) $\frac{19}{51}=\frac{17+2}{51}=\frac{1}{3}+\frac{2}{51}=\frac{1}{3}+\frac{1}{34}+\frac{1}{102};$

u) $\frac{71}{84}=\frac{42+28+1}{84}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{84};$

v) $\frac{73}{112}=\frac{56+16+1}{112}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{112};$

x) $\frac{104}{125}=\frac{102\times2}{125\times2}=\frac{125+50+25+5+2+1}{122\times5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{125}+\frac{1}{250};$

y) $\frac{163}{224}=\frac{112+32+16+2+1}{224}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224},$

$=\frac{112+28+14+7+2}{224}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{112},$

$=\frac{160}{224}+\frac{3}{224}=\frac{5}{7}+\frac{2+1}{224}=\frac{5\times3}{7\times3}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}=\frac{2}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}.$

Também nos capítulos III e IV das *Questões heronianas* se encontram reduções que convém considerar, pois que os polinómios do desenvolvimento apresentam termos negativos. Não obstante, como se observa, os processos de decomposição não só não apresentam a menor complicação mas, ao contrário, são bastante simples, como se verifica nos seguintes exemplos:

α) $\frac{16}{51}=\frac{17-1}{51}=\frac{1}{3}-\frac{1}{51};\ \frac{17}{18}=1-\frac{1}{18};$

$\frac{285}{781}=\frac{285\times3}{781\times3}=\frac{781+71+3}{781\times3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}+\frac{1}{2343};$

$$\frac{659}{2820} = \frac{705 - 47 + 1}{2820} = \frac{1}{4} - \frac{1}{60} + \frac{1}{2820};$$

$$\frac{6886}{9585} = \frac{6886 \times 2}{9585 \times 2} = \frac{13772}{19170} = 1 - \frac{5398}{19170} = 1 - \frac{6390 - 1065 + 71 + 2}{19170}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{270} - \frac{1}{9585}.$$

Estes e outros exemplos que poderiam ser apresentados, mostram, como na logística grega se procedia à decomposição em fracções elementares, por processos simples, inteiramente de acôrdo com o método egípcio, embora com as modificações atinentes a cada caso especial tratado, não sendo necessária especial habilidade de cálculo [1] para proceder às transformações necessárias que, como temos visto, decorrem lògicamente e com tôda a facilidade; havendo, em meu entender, como atrás ficou dito, vantagem em adoptar, em certas questões, o sistema mixto do emprêgo de fracções da forma moderna e sua decomposição em fracções elementares, como se faz nos cálculos da colecção heroniana e de acôrdo com a tradição grega, mantida pelos bizantinos, através dos séculos.

---

[1] A propósito da decomposição da fracção $\frac{239}{6460}$, que se encontra no papiro de Akhmin e que o distinto professor Gino Loria apresenta sob a forma

$$\frac{239}{6460} = \frac{76 + 163}{6460} = \frac{76}{6460} + \frac{163}{6460} = \frac{1}{85} + \frac{68 + 95}{6460} =$$

$$= \frac{1}{85} + \frac{68}{6460} + \frac{95}{6460} = \frac{1}{85} + \frac{1}{95} + \frac{1}{68},$$

diz o mesmo sábio erudito (*Le sc. es. nell'Antica Grecia*, Milano, 2.ª ed., pág. 777): «A simples inspecção desta série de transformações faz ver que, para aplicar êste processo, é necessária uma não vulgar habilidade calculadora».

Neste exemplo, no entanto, a decomposição de 6460 em factores primos e a formação dos seus divisores 4, 5, 17, 19, 20, 68, 76, 85, 95 menores que 239, mostra fàcilmente o caminho a seguir, inteiramente de acôrdo com os princípios simples de decomposição expostos

$$\frac{239}{6460} = \frac{95 + 76 + 68}{6460} = \frac{1}{68} + \frac{1}{85} + \frac{1}{95}.$$

LIGAÇÃO DA DIVISIBILIDADE COM AS DÍZIMAS

POR

CARLOS EUGÉNIO ÁLVARES PEREIRA

A propósito da resolução dum problema de Aritmética racional de Azevedo Albuquerque, encontrei uma propriedade dos números, muito interessante, que estabelece a ligação íntima entre a divisibilidade e as dízimas.

O problema a que me refiro, é o seguinte: achar um múltiplo de 7 formado sòmente pelo algarismo 9. (Converte-se em dízima uma fracção de denominador 7).

Com efeito reduzindo a fracção $\frac{1}{7}$ a dízima, a fracção geratriz desta dízima é $\frac{142857}{999999}$.

Invertendo a fracção vem

$$\frac{999999}{142857}=7$$

e portanto

$$999999=7\times 142857=\text{m. }7.$$

Resolvido o problema, procurei relacionar o processo seguido para achar a divisibilidade dum número por qualquer divisor, com êste caso particular dum número forçosamente divisível por 7; e assim, reparando que os restos das sucessivas potências de 10 por 7 se reproduzem periòdicamente e são 1, 3, 2, 6, 4, 5, e decompondo o número 999999 em unidades de diferentes ordens, teremos:

$$\begin{aligned}999999&=9\times 10^5+9\times 10^4+9\times 10^3+9\times 10^2+9\times 10+9\\&=9\times(7+5)+9\times(7+4)+9\times(7+6)+9\times(7+2)+\\&+9\times(7+3)+9=7+9\times(5+4+6+2+3+1)\\&=\text{m. }7.\end{aligned}$$

Fica assim demonstrada a divisibilidade por 7 não só dos números constituídos por seis algarismos iguais a 9, como de todos os números constituídos por um número de algarismos iguais a 9, múltiplo de 6, visto os restos das sucessivas potências de 10 se reproduzirem periòdicamente, e portanto a sua soma ser periòdicamente múltipla de 7.

Com efeito,

$$999999999999 = \text{m. } 7 + 9 \times 42 = \text{m. } 7.$$

E agora é notório que todos os números constituídos por seis algarismos iguais ou múltiplo de seis algarismos iguais são divisíveis por 7; assim, se o número fôsse 111111, o mesmo raciocínio levar-me-ia à mesma conclusão:

$$\begin{aligned} 111111 &= 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 \\ &= (\text{m. } 7+5)+(\text{m. } 7+4)+(\text{m. } 7+6)+(\text{m. } 7+2)+(\text{m. } 7+3)+1 \\ &= \text{m. } 7 + (5+4+6+2+3+1) \\ &= \text{m. } 7 + 21 \\ &= \text{m. } 7. \end{aligned}$$

Procurando investigar se a periodicidade dos restos arrastava a divisibilidade dos números constituídos por algarismos iguais, reduzi a fracção $\frac{1}{13}$ à dízima e obtive um período de seis algarismos, cuja fracção genetriz é $\frac{076923}{999999}$ e portanto $999999 = 13$ (múltiplo de 13) ou $9 \times (111111) = \text{m. } 13$.

E como se um número divide um produto, e é primo com um dos factores, divide o outro, segue-se que 13, divide 111111 e portanto todos os números constituídos por seis ou múltiplo de seis algarismos iguais.

Deixando, porém, êste caso particular dum número formado por seis ou múltiplo de seis algarismos iguais e representando por n o número cujo recíproco gera a dízima o, $(abcdefg)$ o que corresponde à fracção genetriz $\frac{abcdefg}{9999999}$ teremos $\frac{1}{n} = \frac{abcdefg}{9999999}$ d'onde $9999999 = n$; e como $9999999 = 9 \times \times 1111111$ será $9 \times 1111111 = n$ e para todo o número n primo com 9 será $1111111 = \text{m. } n$. Ora como todo o número primo com 9 é primo com 3, visto que $9 = 3^2$ e, como todo o número primo com uma potência é primo com a sua base, podemos concluir, generalizando a investigação, que *todos os números primos com 3 cujos recíprocos gerem dízimas periódicas simples, são divisores dos números constituídos por um número de algarismos iguais ao número de algarismos do período.*

Observação. — Os números que não forem primos com 3, cujos recíprocos gerem dízimas periódicas simples, são divisores dos números constituídos por tantos algarismos, iguais a 9, qnantos forem os algarismos do período.

*

* *

Reduzindo $\frac{1}{35}$ à dízima, obtém-se uma dízima periódica mixta, com efeito $\frac{1}{35}=0{,}0(285714)$, cuja fracção genetriz é $\frac{285714}{9999990}$ e portanto $9999990=m.35$ e como $9999990=9\times 1111110$ e 35 é primo com 9 segue-se que divide 111110.

Deixando êste caso particular e representando por n_1 um número cujo recíproco gera a dízima $0{,}0l(m)$ e cuja fracção generatriz é

$$\frac{9l+m}{900}$$

teremos

$$\frac{1}{n_1}=\frac{9l+m}{900}$$

donde

$$900=n_1(9l+m)$$

$$900=m.\ n_1$$

e como

$$900=9\times 100$$

será

$$9\times 100=m.\ n_1$$

e para todo o número n_1 primo com 9 e portanto com 3, será

$$100=m.\ n_1.$$

Em geral *todos os números primos com 3 cujos recíprocos geram dízimas periódicas mixtas, são divisores dos números constituídos por número de algarismos iguais ao número dos* *algarismos do período, seguido de tantos zeros, quantos forem os algarismos do ante-período.*

Notando que os critérios de divisibilidade pelos divisores de $10^n - 1$ e de $10^n + 1$, já investigados, convergem nos números constituídos por algarismos iguais, quando o número dos seus algarismos for múltiplo de dois e de três, pois que são divisíveis por 11, 33, 99, quando a soma dos seus grupos de dois algarismos for divisível por 11, 33, 99, e por 111, 333, 999, quando a soma dos seus grupos de três algarismos o for, e ainda são divisíveis por 101, quando o excesso da soma dos seus grupos de dois algarismos de ordem impar sôbre o dos seus grupos de ordem par o for; recordando que são periòdicamente divisíveis, por 3, 7, 9, 11, 13, 27, 37, 77, 91, 143, 1001, quando são constituídos por seis ou múltiplo de seis algarismos iguais, visto que o excesso da soma dos seus grupos de três algarismos de ordem ímpar sôbre o dos grupos de três algarismos de ordem par é divisível por aqueles números; fica justificada pela investigação dos caracteres de divisibilidade dos números constituídos por algarismos iguais a conexão da divisibilidade daqueles números com as dízimas periódicas.

Para os números que não são constituídos por um grupo de algarismos iguais múltiplo de dois e de três, não convergem aquelas condições de divisibilidade, mas nem por isso é menos verdadeira a sua divisibilidade pelos números cujos recíprocos gerarem dízimas periódicas com o mesmo número de algarismos no período, ficando assim êste princípio mais genérico, que todos os princípios de divisibilidade conhecidos, visto que o divisor gera todos seus múltiplos naturais e periódicos.

COROLÁRIO. — *Todo o número* N *primo com 2, 3 e 5 divide um número infinito de números da série 11, 111, 1111, 11111, ...*

Se o primeiro número que divide tem i *algarismos, os outros têm um número de algarismos múltiplo de* i. *O número* i *é igual ao período na redução de* $\frac{1}{n}$ *a dízima.*

*
* *

Estabelecendo como princípio que os números constituídos por algarismos iguais são bases de divisibilidade, podemos simplificar, em certos casos, a decomposição dum número em factores primos, pela aplicação da seguinte regra:

Para decompôr um número em factores primos, reduz-se o seu recíproco a dízima (supondo que o número não admite os divisores 2 e 5) *e suprimem-se os factores primos cujo produto forma o valor absoluto do período, no número constituído por tantos noves quantos forem os algarismos do período.*

Exemplifiquemos: se quisermos a decomposição em factores primos do número 15873, reduz-se a fracção $\frac{1}{15873}$ a fracção genetriz é $\frac{63}{999999}$ e portanto $\frac{999999}{63} = 15873$ ou $999999 = 15873 \times 63$ mas $999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ e como $63 = 3^2 \times 7$

$$15873 = 3 \times 11 \times 13 \times 37.$$

Torna-se, pois, conveniente para poder aplicar esta regra, conhecer a decomposição em factores primos dos números constituídos por algarismos iguais a 9 e fazer uma pequena tabela:

$$999 = 3^3 \times 37$$
$$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$$
$$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$$
$$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$
$$9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$$
$$99999999 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$$
$$999999999 = 3^4 \times 37 \times 333667$$
$$9999999999 = 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9091$$
$$999999999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$$

. . . .

. . . .

*

* *

Desde o início desta investigação que os números constituídos por algarismos iguais nos aparecem como números balizas da divisibilidade, mas só agora se utilizou pràticamente a conexão das dízimas com a divisibilidade na decomposição dum número em factores primos.

A exclusão dos divisores 2 e 5, para aplicação da regra enunciada, simplifica-a, por o número, sem aqueles divisores, gerar uma dízima periódica simples; e não lhe tira a sua generalidade, pois se os números admitirem os divisores 2 e 5, conta-se com êles na decomposição em factores primos.

É evidente que conhecendo a decomposição em factores primos dos números constituídos por algarismos iguais a nove, fico conhecendo, pela aplicação da regra estabelecida, a decomposição em factores primos dos seus divisores, o que representa uma simplificação na decomposição dos números em factores primos, operação por vezes bastante morosa.

O que pretendo, porém, acentuar não é tanto o alcance prático da regra estabelecida, mas a generalização do princípio que estabelece a conexão das dízimas com a divisibilidade e com a decomposição em factores primos.

SÔBRE O MÉTODO DAS TANGENTES DE DESCARTES

POR

J. PEDRO TEIXEIRA

Professor na Universidade do Pôrto

Ficou célebre na história das matemáticas o método para achar as tangentes às curvas, dado por Descartes, em 1637, na sua *Geometria*. Já o glorioso geómetra e filósofo, quando o apresentou, dêle dizia, no seu estilo inconfundível, e que bem exprime o seu orgulho e alegria de o ter encontrado: «Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais desiré de savoir en géometrie» [1].

Foi o primeiro método da tangente, de carácter geral, que veiu a lume, e foi êle quem inaugurou a famosa e ruidosa polémica sôbre tangentes, que teve logar naquele tempo, em que tomaram parte muitos matemáticos, entre os quais, além de Descartes: Fermat, Roberval, Pascal, Torricelli, Sluse, Hudde, Huygens, e o frade Mercenne, que também serviu de intermediário na troca das ideas, que então era epistolar.

Da correspondência havida entre estes matemáticos, inserta nas obras de Descartes e de Fermat, e largamente citada pelos historiadores, se depreende que o debate nem sempre correu com serenidade e compostura, por que alguns dos contendores se apaixonavam demasiadamente pelas suas conclusões e eram desabridos com os que ousavam impugná-las ou mesmo sòmente criticá-las.

Parece que o mais autoritário de todos era Descartes e os mais alvejados pelos seus desprimores eram Fermat — o con-

---

[1] *La géometrie de René Descartes*, nouvelle édition (MDCCCLXXXVI), pág. 33. O método de Descartes era antes um método de normais, que êle designava dêste modo: «Façon générale pour trouver des lignes droites qui coupent les lignes courbes données ou leurs contingents à angles droits».

selheiro de Tolosa — como Descartes às vezes lhe chamava, decerto, com propósitos desdenhosos, e Roberval, o Rob, por que também eram estes os que mais vivamente o contrariavam.

A irritação de Descartes, com as críticas aos seus escritos, transparece em muitas passagens da polémica, sendo bastante curiosa esta, que figura em cartas a Beaune e Mercenne (1): «Ma géometrie est comme elle doit être pour empêcher que le Rob et ses semblables n'en puissent médir, sen que cela tourne à leur confusion; car ils ne sont pas capables de l'entendre, et j'ai composée ainsi tout à dessein, en y omettant ce que était le plus facil et n'y mettant que les choses qui en velaient le plus la peine. Mais je vous avoue que, sen la consideration de ces esprits malins, je l'aurai rendue beaucoup plus claire, ce que je farai peut-être encore quelque jour, si je vois que ces monstres soient assez vaincus ou abaissés»!

Mas *êles* não se renderam e Descartes morria dois anos depois desta singular declaração, ficando a sua *Geometria* com a forma desordenada, concisa e por vezes enigmática, que êle propositadamente lhe imprimiu.

Alguns matemáticos, como Beaune, Shooten e Hudde, procuraram depois esclarecer esta obra; mas a respeito do método das tangentes, que ela encerra, apenas o professor de Leyde o experimentou na conchoide de Nicomedes e o burgomestre de Amsterdam propôs um método para facilitar a sua execução, sem nada adiantarem sôbre a sua essência.

Durante a contenda, os adversários de Descartes tinham notado que o método era impotente para as curvas transcendentes; mas não consta da correspondência da polémica ou doutra parte, que duvidassem da sua eficácia nas curvas algébricas (2), embora reconhecessem que era bastante laborioso. Também posteriormente nada se tem dito a êste respeito, que seja do meu conhecimento, e o método figura nos escritos dos historiadores antigos, e ainda nos dos modernos, e em outras publicações que a êle se referem, com a categoria de geral, que Descartes lhe atribuiu.

Num interessante e erudito trabalho intitulado *Teoria das tangentes, antes da invenção do Cálculo diferencial*, historia e critica o sr. dr. Aníbal Scipião Gomes de Carvalho com grande cópia de informações e argumentos, os métodos das tangentes que têm sido dados, desde a antiguidade, e foi a sua leitura que chamou a minha atenção para êste assunto.

Achando esquisitas a natureza e contextura do método de Descartes, tive a curiosidade de o experimentar em alguns

(1) Vid. Leon Brunschvicg, *La philosophie mathematique.*
(2) Jean Bernoulli, *Opera Omnia,* tom. I, pág. 73.

problemas, que logo deram razão às minhas suspeitas de que o método, tomado à letra, nem sequer às cónicas devia dar as tangentes em geral; e que, se Descartes obteve por meio dêle as tangentes a estas curvas, à sua parábola e às suas ovais, e Shooten, à conchoide dos antigos, deveram estes êxitos às posições especiais em que colocaram essas curvas em relação ao eixos coordenados [1].

São alguns dêsses problemas que vou referir, sem pretender com isso que o método se modifique ou esclareça, por que não poderia rivalizar com os seus últimos descendentes, e também porque foi como está escrito e talvez por ter sido assim pôsto, que êle exerceu a sua acção no progresso da matemática, abrindo mesmo na história desta sciência uma época das mais fecundas e brilhantes; mas para rememorar e notar a impropriedade com que foi apelidado êste facto da história, que Descartes tanto desejou saber, e que tinha na conta das melhores manifestações do seu engenho. É uma relíquia do célebre inventor da Geometria analítica, em que se não deve tocar, e que eu aqui reproduzo, como êle entendeu escrevê-la, mas traduzida e em linguagem moderna:

Seja $f(x, y) = 0$ a equação duma curva e $C(a, b)$ um de seus pontos, onde queremos achar a tangente. Tomemos um ponto $P(v, 0)$ sôbre o eixo das abscissas para centro dum círculo, que passe pelo ponto C e seja $\overline{PC} = s$ o seu raio. A equação dêste círculo é:

$$(x - v)^2 + y^2 = s^2$$

e a equação

$$\phi\left(x, \sqrt{s^2 - (x - v)^2}\right) = 0 \tag{1}$$

tem a raiz a e também a raiz a' correspondente a outro ponto C', onde o círculo corte também a curva. Fazendo variar v e s de modo que o ponto C' caminhe para C e venha a confundir-se com êste ponto, a equação (1) deve ter então a como raiz dupla e $\overline{PC}$ deve ser então normal à curva. Os valores de v e s que obrigam (1) a ter a raiz dupla a determinam-se do seguinte modo.

---

(1) Descartes disse depois de fazer estas aplicações, onde não levava o cálculo até ao fim: «Et je ne voir rien qui empêche qu'on n'étende ce problème en même façon à toutes les lignes courbes qui tombent sous quelque calcul géometrique». Devo notar que Descartes tinha dum método geral das tangentes a mesma idea que hoje temos, isto é, que é um método independente das propriedades específicas das curvas e dos eixos a que se refiram.

Dê-se a (1) a forma inteira

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

e considere-se depois a igualdade

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots +$$
$$+ a_m = (x-a)^2 (x^{m-2} + b_1 x^{m-3} + b_2 x^{m-4} + \ldots)$$

e aplique-se-lhe o método dos coeficientes indeterminados.

Obtemos assim um sistema de m equações com as m incógnitas v, s, b_1, b_2, ..., que determina s e v [1].

Apliquemos o método a estes problemas:

1.º Seja achar a tangente à elipse

$$2x^2 + y^2 - 3 = 0$$

no ponto M (1,1).

Segundo o método, temos de eliminar y entre esta equação e a do círculo $(x-v)^2 + y^2 = s^2$ e dar-lhe a forma inteira. Pondo, para simplificar a escrita, $t^2 = s^2 - v^2$, obtemos a equação final

$$x^2 + 2vx + t - 3 = 0$$

e devemos determinar v e t pela condição desta equação ter a unidade como raiz dupla e para isso devemos pôr:

$$x^2 + 2vx + t - 3 = (x-1)^2$$

e aplicar o método dos coeficientes indeterminados, o que dá o sistema

$$t = 4, \quad 2v + 2 = 0$$

que tem a solução

$$t = 4, \quad v = -1.$$

O método resolve neste caso o problema, o que pode verificar-se pelo cálculo diferencial, procurando a equação da normal e achando depois o ponto onde ela corta o eixo das abscissas.

---

[1] A escolha do círculo leva-nos a crêr que nesta altura ainda não era conhecida a equação da recta, que parece ter sido dada por Fermat ou se o era, Descartes não quís usá-la, talvez por ser da invenção daquele geómetra...

2.º Seja ainda achar a tangente à elipse

$$2x^2+y^2+4x+2y=0$$

no ponto (o, o).

Executando o método como precedentemente, chegamos à equação final:

$$x^4+2(4+2v)x^3+[(4+2v)^2+2t+2]x^2+$$
$$+[2t(4+2v)-8v]x+t^2-4t=0$$

e depois ao sistema

$$t^2-4t=0, \quad 2t(4+2v)-8v=0$$

que tem as duas soluções

$$t=0, \quad v=0; \qquad t=4, \quad v=-4.$$

A primeira não resolve problema nenhum; e a segunda dá a tangente, não no ponto considerado, mas no ponto (o, —2).

3.º Seja ainda também achar a tangente à elipse

$$3x^2+3y^2-2xy-6=0$$

no ponto ($\sqrt{2}$, o).

Para simplificar o cálculo, escrevamos agora a equação do círculo de Descartes sob a forma:

$$(y-v)^2+x^2=s^2$$

sendo v a ordenada do ponto onde a normal corta o eixo dos yy. Conservando as outras notações, e fazendo os mesmos raciocínios, chegamos à equação final

$$4y^2-8vy^3+(36v^2-4t)y^2+(36vt-32v)y+9t^2-36t+36=0$$

e obtemos o sistema

$$9t^2-36t+36=0, \quad 36vt-72v=0$$

que é indeterminado.

De modo que o método resolve o problema no primeiro caso; não o resolve no segundo, e dá-o como indeterminado no terceiro.

Devemos notar que nos três casos a elipse é a mesma e o ponto escolhido para ponto de tangência é também o mesmo.

A segunda equação é a transformada da primeira, quando a origem das coordenadas se transporta para o ponto M; e a terceira, quando aos eixos se dá uma rotação de 45°.

É para notar, por ser imprevisto, por o ponto M ser ordinário, que o método, no terceiro caso, determina o problema, se calcularmos v e t pela condição da equação final ter a ordenada do ponto de tangência como raiz tripla; porque então àquêle sistema temos a acrescentar a equação

$$36v^2-4t=0$$

e o sistema assim formado tem as soluções

$$t=2, \quad v=\frac{\sqrt{2}}{3}; \qquad t=2, \quad v=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

entre as quais está a solução do problema proposto, mas sem que o método de Descartes nos habilite a assinar qual dêlas seja.

E é certo que podemos imaginar inúmeros problemas a respeito da elipse e também a respeito de outras cónicas e de outras curvas, onde o método assim se pode apresentar.

Sem outros raciocínios, creio poder concluir-se que o método das tangentes de Descartes, que os antigos já tinham excluído das curvas transcendentes, também para as curvas algébricas não se pode considerar como método geral. ¿Mas enganar-se-ia o geómetra na classificação do método, como o escreveu, ou teria na mente uma outra concepção, que assim exprimiu, em obediência ao critério exarado nas citadas cartas a Beaune e Mercenne, *para confusão de Rob e seus semelhantes?* Também se póde conjecturar que esta qualificação fôsse um dos ardis, que às vezes tecia, para experimentar os outros matemáticos.

Seja, porém, como fôr, é certo que esta produção de Descartes provocou o aparecimento de muitos outros métodos de tangentes, e talvez assim não sucedesse, se êle tivesse pôsto o problema em termos precisos e em harmonia com os recursos do seu tempo.

E o matemático sublime, sempre primoroso no teu trato, menos com os seus adversários na sciência, com quem chegava mesmo a ser injusto e cruel (1), voluntária ou involuntà-

(1) «Parece impossível que as autoridades deixem andar à sôlta na rua esta criatura, como se fôsse um animal racional», disse elle um dia a respeito de Fermat.

riamente, escreveu aqui direito por linhas tortas, por que nos métodos provocados, embora também falíveis, existia, menos velado do que no seu, o embrião do cálculo diferencial, que depois aí foi descoberto.

E podemos dizer que êste cálculo, bem forte e decidido, tem antepassados bem fracos e hesitantes que, mesmo assim, têm sido evocados pelos que tem querido que à França caiba a glória da sua descoberta.

Mas êle obedeceu às leis que sempre se observam na evolução das grandes concepções: aparecem primeiramente luzes débeis e vacilantes que pouco a pouco se avolumam e reunem, até darem o clarão que tudo ilumina, e este não é nenhuma delas, mas sim um somatório de tôdas. É certo que o cálculo diferencial foi encontrado na Inglaterra e na Alemanha por Newton e Leibnitz; mas talvez assim não sucedesse, e talvez êle ainda hoje não fôsse conhecido, se não fôsse esta precipitação ou esta travessura do francês René Descartes.

Com uma ou outra destas acendalhas, êle lançou o fogo ao rastilho, que havia de provocar a explosão mais luminosa que a história das matemáticas regista e cujos fulgores não lhe foi dado contemplar.

SOBRE
O ABAIXAMENTO DAS EQUAÇÕES

POR

J. PEDRO TEIXEIRA

Professor na Universidade do Pôrto

O método conhecido para abaixar o grau das equações algébricas, que têm raízes múltiplas, é geralmente bastante laborioso, pelas muitas divisões de polinómios que é necessário efectuar para obter as *reduzidas*, designando assim às equações que tem, como simples, as raízes de todos os graus de multiplicidade duma equação dada. As mais fastidiosas daquelas divisões, são as que se destinam a encontrar os m. d. c. que figuram no método, por causa dos coeficientes elevados que se introduzem para evitar fracções, que ainda mais morosos e aborrecidos tornavam os cálculos.

O problema é por vezes de tal modo complicado, que me parece cabida qualquer idea que lhe traga alguma simplificação; e é esta a razão desta nota, onde provo que êle se resolve com o auxílio dum só m. d. c., e às vezes mesmo sem êle, quando o grau da equação não exceder o 11.° e, para equações de grau superior, quando tenha de recorrer-se a outros, êles são em menor número do que no referido método.

Nesta doutrina eu utilizo estes dois teoremas, cuja demonstração omito, por ser simples:

Se um polinómio do grau $2m$ tem raizes exactas do grau m ou quadrada, elas são dadas pelas fórmulas

$$(1) \qquad (x^{2m}+a_1x^{2m-1}+x_2a^{2m-2}+\dots)^{\frac{1}{m}}= \\ =x^2+\frac{a^1}{m}x+\frac{a_2}{m}-\frac{m-1}{m^3}a_1^2,$$

$$(2) \qquad (x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\dots)^{\frac{1}{2}}= \\ =x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\dots+b_m,$$

onde os coeficientes b se obtêm do seguinte modo: O primeiro, b_1, é igual a $\frac{a_1}{2}$; e qualquer outro é igual a metade do coeficiente do termo da mesma ordem no polinómio proposto, diminuído da soma dos produtos que se obtém multiplicando o primeiro dos já achados pelo último, o segundo pelo penúltimo, o terceiro pelo antepenúltimo etc., e, quando forem em número impar, o médio, por sua metade. Assim

$$b_1=\frac{a_1}{2},\quad b_2=\frac{a_2}{2}-\frac{b_1^2}{2},\quad b_3=\frac{a_3}{2}-b_1b_2,\quad b_4=\frac{a_4}{2}-b_1b_3-\frac{b_2^2}{2},\quad \text{etc.}$$

Por meio destas fórmulas podemos determinar aquelas raízes, se antecipadamente soubermos que elas existem, ou verificar a sua existência ou não existência, formando à custa do polinómio dado aqueles segundos membros, elevando os polinómios assim obtidos às respectivas potências e comparando-as com aquele polinómio. Se os coeficientes a_1, a_2 .. forem inteiros, é sinal da não existência daquelas raízes o aparecimento do coeficiente fraccionário nos segundos membros daquelas fórmulas.

Pôsto isto, eu considero sòmente equações de coeficientes inteiros, já desembaraçados de raízes racionais. Estas equações não podem ter raízes únicas de qualquer gráu de multiplicidade e é esta proposição conhecida que serve de fundamento ao que vou dizer.

Para simplificar a linguagem, eu exprimo pela notação $(a_\alpha, b_\beta, \ldots)\ D_k$, a que chamo *combinação,* que uma equação $f(x)=0$ tem a raízes do grau α, b raízes do grau β etc., e que D_k, do grau k, é o m. d. c. entre $f(x)$ e $f'(x)$.

Se uma equação só tem raízes dum só grau de multiplicidade, m, pelo método clássico para abaixar o grau, teríamos pe procurar m m. d. c.; mas se tivéssemos um sinal que indicasse aquela circunstância, o primeiro nos bastava, e a reduzida seria $f(x):D=0$, evitando-se assim todo o trabalho ulterior que o método exige.

Se a equação tem raízes de dois graus de multiplicidade sòmente, m e n $m>n$, por aquele método teríamos de procurar m m. d. c.; mas se disso estivéssemos certos e dos valores de m e n, um sòmente nos bastava; porque, sendo X e Y os produtos dos binómios simples correspondentes às raízes das duas ordens de multiplicidade, teríamos

$$f(x)=X^m\,Y^n,\qquad D=X^{m-1}\,Y^{n-1}$$

e daqui se deduz

$$[f(x)]^{m-1} : D^m = Y^{m-n}$$

e os resolventes seriam

$$\left[[f(x)]^{m-1} : D^m\right]^{\frac{1}{m-n}} = Y - o$$

e

$$f(x) : D : Y = o.$$

Se uma equação só tem raízes de três graus de multiplicidade, m n, p que fôssem conhecidos, e $m > n > p$ teríamos

$$f(x) = X^m Y^n Z^p \qquad D = X^{m-1} Y^{n-1} Z^{p-1}$$

e por isso

$$f_1(x) = [f(x)]^{m-1} : D^m = Y^{m-n} Z^{m-p}$$

e a equação $f_1(x) = o$ está no caso precedente, e precisava só dum outro m. d. c.

Em geral, se uma equação tiver sòmente raízes de k graus de multiplicidade conhecidos, o problema do abaixamento resolve-se com o auxílio de $k - 1$ m. d. c.

Uma equação de grau inferior ao 6.°, admitida a restrição acima posta, não pode ter raízes de mais de um grau de multiplicidade. Com efeito, a *menor* combinação de raízes de dois graus é $(2_2, 2_1)$ D_2 e ela pertence a uma equação do 6.° grau.

Uma equação de grau inferior ao 12.°, não pode ter raizes de mais de dois graus de multiplicidade. Com efeito, a menor combinação destas raízes é $(2_3, 2_2, 2_1)$ D_6 e ela pertence a uma equação do 12.°

Do mesmo modo se prova que uma equação de grau inferior a 20° ou 30° etc., não pode ter raízes de mais de tres graus ou de quatro etc.

Dada, pois, uma equação, se alguma coisa nos indicasse a combinação das raízes que ela oferece, o problema do abaixamento podia simplificar-se, e é isto que se contém no seguinte teorema, que se deduz da análise das combinações que as equações podem apresentar:

O grau de m. d. c. entre f(x) *e* f′(x) *ou êsse grau e outras qualidades suas, que fàcilmente se lhe descobrem, determinam sempre a combinação que a equação oferece, de entre tôdas as possíveis, quando o grau dessa equação não excede o 13.°*

Com efeito:

3.° e 5.° graus. As equações dêstes graus são irredutíveis, 4.º grau. Esta equação, se não é irredutível, só pode oferecer $(2_2)\ D_2$ e a reduzida será $D_2 = 0$.

Mas aqui é dispensável obter D e basta ver por uma das fórmulas (1) ou (2) se o primeiro membro é ou não quadrado exacto. No caso afirmativo, será $[f(x)]^{\frac{1}{2}} = 0$ a reduzida.

6.º A equação dêste grau só pode oferecer alguma destas combinações

$$(3_2)\ D_3, \quad (2_2\, 2_1)\ D_2, \quad (2_3)\ D_4.$$

Se a equação tiver tres raízes duplas, D é do terceiro grau e a recíproca é também verdadeira. O mesmo se diz das outras. Aqui, pois, o grau de D é suficiente para caracterizar a combinação que a equação oferece.

Se é a primeira, é $D_3 = 0$ a reduzida; se é a segunda, as resolventes são:

$D_2 = 0$, que dá as raizes duplas, e $f(x) : D_2 = 0$, que dá as raízes simples; se é a terceira, a reduzida é $D_4^{\frac{1}{2}} = f(x)^{\frac{1}{3}} = 0$ o que se obtém por uma das fórmulas (1) e (2).

Se o termo independente de $f(x)$ for um quadrado ou um cubo exacto será útil examinar se $f(x)$ é um quadrado ou um cubo exacto pelas citadas fórmulas, pois em caso afirmativo escusado era procurar D.

7.º grau. A equação dêste grau só pode oferecer a combinação $(2_2,\ 3_1)\ D_2$ e as reduzidas seriam

$$D_2 = 0, \quad f(x) : D_2^2 = 0.$$

8.º grau. A equação dêste grau sòmente pode oferecer as combinações seguintes:

$$(4_2)\ D_4, \quad (3_2\, 2_1)\ D_3, \quad (2_2\, 4_1)\ D_2, \quad (2_3\, 2_1)\ D_4, \quad (2_4)\, D_6.$$

Se o grau de D é diferente de 4, êle caracteriza a combinação que a equação oferece e as reduzidas acham-se como na equação do 6.º grau; mas, se êsse grau for 4, êle é insuficiente para isso, pois pode dar-se alguma das combinações $(4_2)\ D_4\ (2_3,\ 2_1)\ D_4$.

Mas se D_4 for um quadrado perfeito, dá-se a segunda; no caso contrário dá-se a primeira.

Devemos notar que, se uma equação também frô desembaraçada dos factores comensuráveis do 2.º grau, ela não pode ter duas raizes únicas de qualquer grau de multiplicidade. Sendo assim, das equações até aqui consideradas, sòmente a do 6.º e a do 8.º graus podiam ter raizes múltiplas; mas então os seus primeiros membros serão quadrados perfeitos e a fórmula (1) resolve o problema, dispensando o trabalho de achar o m. d. c.

É também para notar que as equações até êste grau que não tenham raízes racionais, se resolvem algèbricamente, quando tenham raízes múltiplas.

9.° grau. A equação dêste grau só pode oferecer estas combinações:

$$(3_2 3_1)\, D_3, \quad (2_2 5_1)\, D_2, \quad (3_3)\, D_6, \quad (2_3 3_1)\, D_4$$

e quanto ao modo de caracterizar a combinação que tem lugar e ao modo de achar as reduzidas, tudo é análogo ao que tem sido já dito.

10.° grau. A equação dêste grau pode ter:

$$(5_2)\, D_5, \quad (4_2, 2_1)\, D_4, \quad (3_2 4_1)\, D_3, \quad (2_2 6_1)\, D_2$$
$$(2_3 4_1)\, D_4, \quad (2_3 2_2)\, D_6, \quad (2_4 2_1)\, D_6, \quad (2_5)\, D_8$$

Se o grau de D é diferente de 4 e de 6, nada há a acrescentar.

Se for 4, poderá bastar o termo independente de D para distinguir qual das duas combinações com D_4 terá lugar; quando não, a fórmula (2) resolve a questão. Se fôr 6, se o termo independente não for cubo exacto, fica logo feita a distinção entre as duas combinações com D_6; se o fôr, verifica-se se D_6 é ou não cubo exacto pela fórmula (1). Se tiver lugar $(2_3 2_2)\, D_6$, as reduzidas são:

$$[f(x)]^2 : D_6^3 = 0, \qquad D_6^2 : f(x) = 0.$$

11.° grau. A equação dêste grau pode ter:

$$(4_2 3_1)\, D_4, \ (3_2 5_1)\, D_3, \ (2_2 7_1)\, D_2, \ (3_3 2_1)\, D_6, \ (2_3 5_1)\, D_4, \ (2_4 3_1)\, D_6$$

e nada aqui aparece que não tenha já sido dito quanto ao modo de caracterizar as combinações e de achar as reduzidas.

Até ao 11.° grau, pois, um m. d. c. basta para resolver o problema do abaixamento.

Por uma discussão semelhante, se veria que m. d. c. entre $f(x)$ e $f'(x)$ caracteriza a combinação que oferece uma equação de 12.° ou 13.° graus; mas quando às reduzidas, êsse m. d. c. não basta na combinação $(2_3 2_2 2_1)\, D_6$ da equação do 12.° grau, e na $(2_3 2_2 3_1)\, D_6$ da equação do 13.° grau.

Para estes casos será necessário recorrer a outro m. d. c., como já foi dito.

Prosseguindo esta discussão para equações de graus superiores encontram-se casos em que o m. d. c. não pode caracterizar a combinação que a equação oferece. Assim a equação do 14.º grau pode oferecer

$$(6_2, 2_1)\, D_6, \quad (2_3, 2_2, 4_1)\, D_6, \quad (3_3, 5)\, D_6$$

correspondente a D_6, e por simples considerações sôbre êste polinómio, não as podemos distinguir, quando não tenha logar a última.

Mas fora dêstes casos, esta ordem de ideas ainda dá resultado.

Apliquemos esta doutrina à alguns exemplos de abaixamento:

Seja a equação do 11.º grau

$$f(x) = x^{11} - 13x^9 + 3x^8 + 64x^3 - 24x^6 - 152x^5 + 72x^4 + \\ + 176x^8 - 36x^2 - 80x + 48 = 0$$

que não tem raízes racionais.

Encontramos

$$D = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8.$$

No quadro das combinações desta equação, a D_6 correspondem $(3_3\, 2_1)\, D_6$ $(2_4\, 3_1)\, D_6$; mas como o termo independente de D_6 é um cubo exacto, sem ser um quadrado exacto, é a 2.ª que tem lugar, e as resolventes são:

$$\sqrt[3]{D_6} = x^2 - 2 = 0, \qquad f(x) : D_6 : \sqrt[3]{D_6} = x^3 - 3x + 3 = 0.$$

Seja ainda a equação do 12.º grau:

$$f(x) = x^{12} - 3x^4 - 3x^8 + 11x^6 + 6x^4 - 12x^2 - 8.$$

Encontraremos:

$$D = x^8 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4.$$

No quadro das combinações desta equação, a D_8, correspondem

$$(4_3)\, D_8, \quad (2_4, 2_2)\, D_8, \quad (2_5, 2_1)\, D_8.$$

Como o termo independente de D não é quarta potência exacta, a terceira é logo excluída; para ver qual das restantes tem lugar, examina-se pela fórmula (2) se D é ou não quadrado exacto. Verifica-se que sim e a sua raiz é $x^4 - x^2 - 2$.

É, pois, a primeira que tem lugar, e a equação tem as 4 raizes triplas $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, i, $-i$.

Seja ainda também a equação do 14.º grau.

$$f(x) = x^{14} - 2x^{12} + 3x^{10} - 6x^8 + 3x^6 - 6x^4 - x^2 + 2 = 0.$$

Encontra-se

$$D_8 = x^8 + 2x^4 + 1.$$

A êste grau de D, correspondem na equação proposta as combinações

$$(4_3, 2_1)\, D_8, \quad (2_3, 4_2)\, D_8, \quad (2_4, 2_2, 2_1)\, D_8.$$

Como D é o quadrado exacto dum polinómio do 4.º grau é a primeira que tem lugar, e as reduzidas são

$$\sqrt{D_8} = x^4 + 1 = 0, \quad f(x) : D_8 = x^2 - 2.$$

SÔBRE O DESENVOLVIMENTO DO COS nv

POR

J. PEDRO TEIXEIRA

Professor na Universidade do Pôrto

Na *Introductio in analysis infinitorum*, deu Euler os desenvolvimentos de $\operatorname{sen} nv : \operatorname{sen} v$ e $\cos nv$, segundo potências sòmente de $\cos v$, parecendo induzi-los dos valores de $\operatorname{sen} v$, $\operatorname{sen} 2v$, etc. e $\cos v$, $\cos 2v$, etc., obtidos pela conhecida lei de recorrência, mas sem os termos gerais e sem o complemento necessário neste género de raciocínio, nas questões de matemática [1].

Labey, naturalmente por não achar satisfatória a demonstração de Euler, procurou, nas suas apostilhas à tradução, que fez daquela obra, dar por outro modo a demonstração das fórmulas de Euler, mas apenas chegou aos termos que êste geómetra tinha posto, e não aos termos gerais [2]. Cauchy também se ocupou dêste assunto, mas também não estabeleceu estes termos [3]. A fórmula completa, relativa a $\operatorname{sen} nv$, foi depois estabelecida pela comparação de duas derivadas de ordem n da função $\operatorname{artg} x$; mas, quanto a $\cos . nv$, presumo que a fórmula ainda se achava como Euler a deixou, isto é, sem demonstração satisfatória.

Encontrei acidentalmente a fórmula completa em um trabalho meu sôbre o desenvolvimento do potencial logarítmico em série de polinómios esféricos [4], quando comparava o desenvolvimento de $\lg (u^2 - 2 \cos vu + 1)^{-\frac{1}{2}}$, obtido pela fórmula de

---

(1) Euler, *Introductio in analysis infinitorum*, trad. francesa, págs. 188 e 195.

(2) *Loc. cit.*, pág. 347,

(3) Cauchy, *Curso de analyse da Escola Polytechina*, pág. 234.

(4) *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, t. x.

Maclaurin, com o desenvolvimento da mesma função, posta sob a forma $-\frac{1}{2}\lg(1-uc^{iv})-\frac{1}{2}\lg(1-uc^{-iv})$.

É essa fórmula que vou dar aqui, mas mostrando agora que ela é um caso particular da fórmula de Waring, que dá a soma das potências do mesmo gráu das raizes duma equação algébrica.

Sendo $u_g (g=1, 2, \ldots, m)$ as raizes da equação

$$a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \ldots + a_1 u + a_0 = 0,$$

a fórmula de Waring é

$$\sum u_g^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, a_0^{-i} a_1^\alpha a_2^\beta \ldots a_m^\lambda}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \lambda!},$$

onde o somatório se refere às soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n \quad \text{e} \quad i = \alpha + \rho + \ldots + \lambda.$$

Aplicando a fórmula ao caso particular

$$u^2 - 2xu + 1 = 0,$$

ela dá

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,(-2n)^\alpha}{\alpha!\,\beta!},$$

onde o somatório se refere às soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta = n \quad \text{e} \quad i = \alpha + \beta.$$

Eliminando α e i entre estas três equações, vem

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n = n \sum_{\rho=0}^{k} (-1)^\beta \frac{(n-\beta-1)!}{(n-2\beta)!\,\beta!} 2^{n-2\beta} x^{n-2\beta},$$

onde k é o maior inteiro contido em $n:2$.

Supondo $|x| \overline{<} 1$, podem pôr $x = \cos v$ e vem:

$$(1) \qquad \cos uv = \sum_{\rho=0}^{k} (-1)^\beta \frac{(n-\beta-1)!\, n}{(n-2\beta)!\,\beta!} 2^{n-2\beta-1} \cos v^{n-2\beta},$$

que é a fórmula procurada.

Desta fórmula pode deduzir-se a fórmula conhecida relativa a $\operatorname{sen}.nv$ do modo seguinte: Se n é impar, k é igual a $(n-1):2$; se n é par, k é igual a $n:2$; mas para $\beta = n:2$, vem o termo $(-1)^{n:2}$. De modo que a fórmula pode escrever-se dêstes dois modos, conforme n é impar ou par, e onde k' é o maior inteiro contido em $(n-1):2$

$$(a)\quad \cos nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!\,n}{(n-2\beta)!\,\beta!}\, 2^{n-2\beta-1} \cos v^{n-2\beta},$$

$$(b)\quad \cos nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!\,n}{(n-2\beta)!\,\beta!}\, 2^{n-2\beta-1} \cos v^{n-2\beta} + (-1)^{n:2}.$$

Em ambos os casos, vem, por derivação em relação a v,

$$\operatorname{sen} nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \frac{(n-\beta-1)!}{(n-2\beta-1)!\,\beta!} \operatorname{sen} v\,(2\cos v)^{n-2\beta-1}$$

ou

$$\operatorname{sen} nv = \sum_{\beta=0}^{k'} (-1)^{\beta} \binom{n-\beta-1}{\beta} \operatorname{sen} v\,(2\cos v)^{n-2\beta-1}.$$

SÔBRE AS SÉRIES DE FOURIER

POR

J. PEDRO TEIXEIRA
Professor na Universidade do Pôrto

Eu julgo que não tem sido demonstrada, dum modo geral e directo, a representação duma função, $f(x)$, por uma série trigonométrica da forma:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 \cos . x + a_3 \cos . 3x + \ldots + a_{2n+1} \cos . (2n+1)x + \ldots \\ \quad + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_4 \operatorname{sen} . 4x + \ldots + b_{2n} \operatorname{sen} . 2nx + \ldots \end{cases}$$

no intervalo $(-\pi : 2, \pi : 2)$.

Para resolver o seu imaginoso problema do equilíbrio das temperaturas na lâmina indefinida, no caso particular da base ser aquecida uniformemente, Fourier representou a unidade dor uma série semelhante e determinou os coeficientes pelas equações, em número infinito, que daí resultam por derivações sucessivas, e nada diz sôbre a questão em geral [1].

Recentemente, Poincaré [2], ocupando-se do mesmo assunto, tomou uma outra função, $\varphi(x)$, e representou-a pela série

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 \cos . x + a_2 \cos . 2x + \ldots \\ \quad + b_1 \operatorname{sen} . x + b_2 \operatorname{sen} . 2x + \ldots \end{cases}$$

no intervalo $(-\pi, \pi)$, representação esta de que dá uma demonstração rigorosa, e tomou esta função $\varphi(x)$ de modo que no intervalo $(-\pi : 2, \pi : 2)$ tivesse os mesmos valores que $f(x)$ [2]. Este procedimento do erudito matemático, que lhe complicou o problema que tinha em vista, que êle afinal só resolveu no caso particular, já tratado por Fourier, levou-me a crêr que a

---

(1) *Œuvres de Fourier*, t. I. *Théorie analytique de la chaleur*, pág. 143.
(2) Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, pág. 43.

questão não tinha sido ainda tratada do modo acima dito e por isso vai fazer o objecto desta nota.

Se $f(x)$ for finita, não tiver infinitos máximos, mínimos e descontinuïdades no intervalo $(-\pi:2, \pi:2)$ e se fôr contínua no ponto x dêste intervalo, ella é representada pela série (1), com estes valores dos coeficientes:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{2n+1} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int f(z) \cos.(2n+1) z \, dz \\ b_{2n} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int f(z) \operatorname{sen}.2nz \, dz, \end{cases}$$

sendo os limites dos integrais $-\pi:2, \pi:2$ [1].

Se a representação existe, estes coeficientes são disso uma conseqüência, porque os integrais

$$\int \cos(2p+1) z \cos(2n+1) z \, dz,$$

$$\int \operatorname{sen} 2p\, 2 \operatorname{sen} 2nz \, dz$$

são nulos ou iguais a $\pi:2$, conforme $n \neq p$ ou $n = p$ e o integral

$$\int \cos(2p+1)\, 2 \operatorname{sen} 2nz \, dz$$

é sempre nulo, como fàcilmente se pode vêr, naqueles limites.

Tomemos agora a soma dos m primeiros termos da série (1)

$$S_m = \frac{2}{\pi} \int f(z) [\cos z \cos x + \cos 3z \cos 3x + \ldots +$$
$$+ \cos.(2m-1) z \cos.(2m-1) x + \operatorname{sen}.2z \operatorname{sen} 2x +$$
$$+ \operatorname{sen} 4z\, m\, 4x + \ldots + \operatorname{sen}.2mz \operatorname{sen} 2mx]\, dz.$$

e demos-lhe a forma:

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int f(z) [\cos(z-x) + \cos 2(z-x + \ldots + \cos 2m(z-x) +$$
$$+ \cos(z+x) - \cos 2(z+x) + \ldots - \cos 2m(z+x)]\, dz.$$

---

[1] Estes integrais existem por $f(z)$ satisfazer então à condição de Dirichlet.

É conhecida a fórmula:

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos pa = \frac{\operatorname{sen}(2p+1)\dfrac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}} - \frac{1}{2};$$

e, se aqui mudarmos a em $\pi + a$, obtemos:

$$-\cos a + \cos 2a - \ldots + (-1)^p \cos pa = (-1)^p \frac{\cos(2p+1)\dfrac{a}{2}}{2\cos\dfrac{a}{2}} - \frac{1}{2};$$

e a aplicação destas fórmulas à soma anterior dá:

$$S_m = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\frac{\operatorname{sen}(4m+1)\dfrac{z-x}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{z-x}{2}}dz - $$

$$-\frac{1}{2\pi}\int f(z)\frac{\cos(4m+1)\dfrac{z+x}{2}}{\cos\dfrac{z+x}{2}}dz.$$

Pondo no primeiro integral $2y = z - x$ e no segundo $2t = z + x$ e em ambos $4m + 1 = p$, vem

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int f(x+2y)\frac{\operatorname{sen} py}{\operatorname{sen} y}dy - \frac{1}{\pi}\int f(2t+\pi-x)\frac{\operatorname{sen} pt}{\operatorname{sen} t}dt$$

onde os limites do primeiro integral são: $-(\pi:2+x):2$, $(\pi:2x)-2$ e os do segundo, $(x-3\pi:2):2$, $(x-\pi:2):2$.

Os modelos dêstes limites, por ser $|x| < \pi:2$, são menores do que π; os do primeiro são de sinais contrários e os do segundo, do mesmo sinal; as funções de y e t $f(x+2y)$, $f(2t+\pi-x)$ tomam no intervalo limitado pelos limites dêstes integrais os mesmos valores que $f(z)$ no intervalo $(-\pi:2, \pi:2)$ e por isso são finitas, não têm infinitos máximos, mínimos e descontinuïdades naquele intervalo e a primeira é contínua no ponto o, e por isso, por um teorema conhecido de Dirichlet, o primeiro integral tem por limite $\pi f(x)$ e o segundo, *zero*, quando m ou p tende para o infinito, o que demonstra o que se queria demonstrar.

Seja o caso particular, $f(x)=x$.
Temos

$$a_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int z\cos.(2n+1)z.dz=0,$$

$$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int z\,\text{sen}\,nz\,dz=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

e

$$x=\text{sen}\,2x-\frac{1}{2}\text{sen}.4x+\frac{1}{3}\text{sen}.6x-\ldots$$

Verifiquemos êste resultado.
Consideremos a série

$$\text{sen}\,2x-\text{sen}.4x+\text{sen}.6x-\ldots+(-1)^{n+1}\text{sen}.2nx+\ldots$$

A soma dos seus m primeiros termos é:

$$S_m=\frac{1}{2}\text{tg}.x+(-1)^{m+1}\frac{\text{sen}.(2m+1)x}{2\cos x};$$

e, se x fôr do intervalo $(-\pi:2,\ \pi:2)$, ela, sem tender para um limite, quando m tende para o infinito, satisfaz à relação:

$$|S_m|<\sec x;$$

e por isso a série é oscilante. Mas se multiplicarmos os termos duma série oscilante por números positivos e decrescentes, que tendam para zero, como são os números 1, 1 : 2, 1 : 3, ..., resulta uma série convergente (teorema de Abel); logo a série

$$\text{sen}\,2x-\frac{1}{2}\text{sen}.4x+\frac{1}{3}\text{sen}.6x\ldots$$

é convergente, para todos os valores de x daquele intervalo.
Procuremos a sua soma.
Tomemos a soma dos seus m primeiros termos e formemos a sua derivada

$$\frac{1}{2}\frac{ds_m}{dx}=\cos.2x-\cos 4x+\ldots+(-1)^{m+1}\cos 2mx;$$

ou, por uma fórmula acima deduzida:

$$\frac{ds_x}{dx}=1+(-1)^{m+1}\frac{\cos(2m+1)x}{\cos x}.$$

Integrando entre o e x, não perdendo de vista que é $|x| < \pi : 2$ e atendendo a que $S_m(0) = 0$, vem

$$S_m(x) = x + (-1)^{m+1} \int_0^x \frac{\cos(2m+1)x}{\cos x} dx.$$

É fácil vêr, pela integração por partes, que êste integral tende para zero quando m tende para o infinito; logo

$$\lim_{m=\infty} S_m(x) = x$$

que é também uma outra demonstração da convergência da série.

Empregando os mesmos raciocínios e fórmulas trigonométricas usadas para estabelecer a representação (1), demonstravam-se estas outras representações de Fourier:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int f(z)\, dz, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int f(z) \cos nz\, dz;$$

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int f(z) \operatorname{sen} nz\, dz,$$

no intervalo $(0, \pi)$, se $f(x)$ satisfizer neste intervalo às condições acima postas, e onde os limites dos integrais são o e π.

Estas representações aparecem na *Teoria Matemática do Calor* de Fourier, com demonstrações insuficientes e não vejo que tenham sido depois demonstradas pelos métodos rigorosos.

A segunda serviu de base à solução geral do problema das temperaturas finais estacionárias, para a lâmina indefinida, dada por êste geómetra e depois por Emilie Mathieu, no seu curso de física matemática. Na mesma questão, Poincaré evitou o emprêgo desta série e seguiu um caminho mais complicado. ¿Teria alguma dúvida sôbre a sua veracidade?

CONTRIBUÏÇÃO PORTUGUESA
PARA UM CÉLEBRE PROBLEMA DE ÁLGEBRA

POR

L. WOODHOUSE

Dentro do período que decorre desde as investigações de Lagrange, sôbre a teoria das equações, até à época em que aparecem as obras de Abel e de Galois, foi elaborado um trabalho, hoje pôsto em esquecimento, publicado nas *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa* no ano de 1821, e subscrito pelo matemático português Francisco Simões Margiochi (1).

Pensa-se geralmente que, depois do desaparecimento de José Anastácio da Cunha e de Monteiro da Rocha, até que em Portugal alvoreceu o período de actividade iniciado por Daniel da Silva, o gôsto por êsses estudos tivesse adormecido entre nós. Não é bem assim, e é acto de justiça levantar do olvido alguns nomes portugueses que não merecem o abandôno em que jazem. Um dêstes é o de Francisco Simões Margiochi, figura interessante, homem de seguro merecimento, cuja vida agitada não obstou a que se votasse, com gôsto e proveito, à cultura das sciências matemáticas.

Nasceu em Lisboa em Outubro de 1774 e, tendo entrado para a Congregação do Oratório com o fim de se ordenar, abandonou cedo êste projecto, seguindo para a Universidade de Coimbra onde freqüentou as aulas da faculdade de Matemática. Espírito irrequieto e ardente, aberto às aspirações liberais que no tempo principiavam a infiltrar-se na sociedade portuguesa, sofreu por êsse motivo perseguições e até prisão, conseguindo, não obstante, concluir com brilho a sua formatura no ano de 1798.

Alistando-se em seguida na Armada Real, em atenção ao

---

(1) Memória — com o fim de provar que não podem ter forma de raízes as equações literais e completas dos graus superiores ao quarto.

seu mérito, foi em 1801 despachado lente substituto da Academia de Marinha, passando mais tarde a servir no Real Corpo de Engenheiros.

Dedicado durante bastantes anos exclusivamente às suas funções e ao estudo, a revolução de 1820 arrasta-o para a política e é eleito deputado às Constituintes. A sua alta mentalidade e ilustração conquistam-lhe de pronto um lugar relevante dentro daquele célebre congresso onde tantas notabilidades se distinguiram. Reeleito deputado às côrtes ordinárias em 1823, desempenha durante algum tempo as funções de presidente. Começa então a quadra movida da sua existência.

A atitude que toma por ocasião do encerramento das côrtes em 1823, depois da jornada de Vila Franca, obriga-o a emigrar. Parte para Inglaterra onde, lutando com inúmeras dificuldades, continua a ocupar-se dos seus estudos predilectos.

Outorgada a Carta Constitucional, Margiochi regressa à pátria e é reintegrado no pôsto de major de engenheiros do qual havia sido demitido, mas voltando D. Miguel a Portugal em 1828, novamente tem de emigrar para Inglaterra. Trava então no exílio relações de intimidade com Saldanha, seu antigo discípulo, a quem acompanhava quando êste em 1830 desembarcou no Pôrto e onde se conserva durante o memorável cêrco desta cidade.

Despontam então melhores dias para Margiochi: é promovido no exército, reintegrado no seu antigo lugar de lente da Academia de Marinha e, captando a confiança de D. Pedro, recebe diferentes distinções honoríficas, sendo nomeado ministro da marinha em 1833, par do reino em 1834 e a seguir vice-presidente do Conselho Superior de Instrução Pública, recentemente criado.

O movimento de Setembro de 1836 determina-o a abandonar a política. Recolhe-se definitivamente à vida privada, à revisão e ultimação dos seus trabalhos matemáticos que, mesmo durante os dias atribulados do exílio, ou, o período agitado da sua carreira política, jámais abandonara.

Homem de nobre e levantado carácter morreu pobre, em 1838. Espírito culto, versado na literatura latina e grega, dotado de aptidões poéticas apreciáveis, foram sobretudo as sciências matemáticas que mais o ocuparam e para as quais tinha, sem dúvida, felizes disposições.

Entre os seus trabalhos avulta um, que é o objecto desta nota: a Memória à qual há pouco me referi.

O fim que o autor procura atingir é principalmente dar, empregando processos seus, a demonstração da impossibilidade da resolução algébrica das equações de grau superior ao quarto. E para o conseguir [1] expõe prèviamente um método de resolução uniforme, aplicável às equações do 2.º, 3.º e 4.º graus, e pois que o método, por virtude da impossibilidade de realizar determinadas condições, falha para equações de grau superior ao quarto, pretende o autor concluir a impossibilidade da solução geral. Eis a súmula do trabalho.

Há portanto na Memória duas questões diversas que é mister considerar em separado: o método de resolução e a demonstração que dêle resulta.

Pôsto isto começarei por fazer da primeira e o mais sucintamente possível exposição e análise, observando desde já que as bases em que se firma são evidentemente inspiradas pelas doutrinas de Lagrange relativas à redução da resolução da equação dada à resolução da reduzida, cujas raízes são funções lineares das raízes da proposta e das raízes da unidade.

Da segunda e do seu valor provante me ocuparei de seguida.

*
* *

Represente-se a equação que se pretende resolver, privada do seu segundo termo, por

$$x^n + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

sendo [2] $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ as n raízes. Sejam $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}$ elementos em número $n-1$, constituintes dessas raízes, e que serão, ou melhor, cujas potências $a_1^r, a_2^r, a_3^r \ldots a_{n-1}^r$ deverão ser as raízes da reduzida. Em seguida estabeleçam-se as seguintes n relações fundamentais

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ x_2 = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_{n-2} + qa_{n-1} \\ x_3 = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + qa_{n-2} + ka_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = qa_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots + ka_{n-2} + ka_{n-1} \end{array} \right.$$

onde k e q aparecem como factores indeterminados.

---

[1] A Memória trata como assunto preliminar e preparatório da doutrina das funções simétricas das raízes das equações, assunto que deixarei de parte.

[2] Margiochi na sua Memória refere-se sempre às raízes com sinal contrário (antiraizes).

Estas relações mostram logo a possibilidade da permutação entre si dos elementos $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, todos os quais entram na composição de cada raiz.

Somando estas equações, não perdendo de vista a primeira, nem o facto de ser nula a soma das raízes da proposta, obtém-se

$$x_1[1+(n-2)k+q]=0$$

e por conseguinte, pois que x_1 é qualquer raiz (*Nota i*)

$$(a) \qquad 1+(n-2)k+q=0$$

Formulada esta condição, exprimam-se os elementos constituintes, cada um, em função de tôdas as raízes pela forma seguinte

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} nka_1 \;=kx_1+x_2 \quad +x_3+\ldots+x_{n-1} \quad +\frac{k}{q}x_n \\ nka_2 \;=kx_1+x_2 \quad +x_3+\ldots+\frac{k}{q}x_{n-1}+x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nka_{r-1}=kx_1+\frac{k}{q}x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} \quad +x_n \end{array}\right.$$

para o que se estabelecerá a nova condição

$$(b) \qquad 9+(n-2)k+\frac{k^2}{q}=0$$

o que é permitido, pois que k e q são duas arbitrárias. Da comparação de (a) com (b) resulta ser $k^2=q$ e, por conseguinte, estas duas equações serão substituídas pelo sistema condicional

$$(c) \qquad \left\{\begin{array}{c} 1+(n-2)k+k^2=0 \\ q=k^2 \end{array}\right.$$

Em virtude da segunda o sistema (2) converte-se em

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} nk^2a_1 \;=k^2x_1+kx_2+\ldots+kx_{n-1}+x_n \\ nk^2a_2 \;=k^2x_1+kx_2+\ldots+x_{n-1} \quad +kx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nka_{n-1}=k^2x_1+x_2 \quad +\ldots+kx_{n-1}+kx_n \end{array}\right.$$

e o grupo (1) é transformado em

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ x_2 = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_{n-2} + k^2 a_{n-1} \\ x_2 = ka_1 + ka_2 + \ldots + k^2 a_{n-2} + ka_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = k^2 a_1 + ka_2 + \ldots + ka_{n-2} + ka_{n-1} \end{cases}$$

Reduzidas, nos grupos (3) e (4), as duas arbitrárias k e q a uma única, a teoria das funções simétricas intervem naturalmente nesta altura para se ultimar a solução do problema.

É preciso compôr por meio dos coeficientes da equação dada os coeficientes da reduzida.

Mas, se $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ fôssem as raízes desta última equação, a primeira função que importaria calcular seria

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1}.$$

Ora, somando as equações (3) obtém-se um resultado que coincide com a primeira equação (1)

$$a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1} = x_1$$

e, sendo x_1 desconhecida, não será possível calcular os coeficientes desta equação.

Para mostrar a possibilidade de formar outra reduzida, cujas raízes sejam as potências $a_1^r a_2^r \ldots a_{n-1}^r$ dos elementos constituintes, basta examinar se há um número inteiro r tal que se possa exprimir a soma destas potências por meio de funções simétricas de $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$, porquanto, neste caso, da mesma forma é possível exprimir por funções simétricas as somas da potência $a_1^{2r} + a_2^{2r} + \ldots$, $a_1^{3r} + a_2^{3r} + \ldots$ etc. e, portanto, calcular todos os coeficientes desta reduzida em função dos coeficientes da equação dada.

Mas, para que isto possa conseguir-se, quere dizer, para que $a_1^r + a_2^r \ldots + a_{n-1}^r$ seja uma função de $x_1 x_2 \ldots x_n$ tal que estas quantidades se possam permutar entre si, deverão verificar se as condições $k^{2r} = 1$ $k^r = 1$ e, portanto, a quantidade k será raiz r da unidade, sem que, como é evidente, deixe de subsistir a relação

$$(d)\qquad 1 + (n-2)k + k^2 = 0.$$

Eis como se chega à dupla condição imposta a k, chave do método de resolução das equações e também da demonstração da sua impossibilidade além do 4.º grau, de ser ao mesmo tempo raiz da equação (d) e raiz da unidade.

*
* *

Fazendo aplicação da doutrina, considere-se primeiro a equação do 3.º grau

$$x^3 + A_2 x + A_3 = 0.$$

Fazendo $n = 3$ em (d) resulta

$$k^2 + k + 1 = \frac{k^3 - 1}{k - 1} = 0$$

e vê-se que k será uma raiz cúbica da unidade diferente de 1.

Representando essas duas raízes por ω_1 e ω_2 segue-se que as raízes da cúbica, em função dos elementos constituintes a_1 e a_2, serão da forma

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 \\ x_3 = \omega_2 a_1 + \omega_1 a_2 \end{cases}$$

e as equações que exprimem estes elementos em função das raízes

$$(6) \qquad \begin{cases} 3\, a_1 \omega_2 = \omega_2 x_1 + \omega_1 x_2 + x_3 \\ 3\, a_2 \omega_2 = \omega_2 x_1 + x_2 + \omega_1 x_3. \end{cases}$$

Atendendo agora a que $r = 3$, fazendo $z_1 = a_1^3$ $z_2 = a_2^3$, atendendo também a que é necessário calcular as funções simétricas simples de z_1 e z_2 e ainda às propriedades conhecidas das raízes da unidade, levantam-se ao cubo e somam-se as equações (6), levantam-se à sexta potência e somam-se as mesmas equações, o que permite calcular essas funções, exprimindo-as em dependência de funções simétricas das raízes da equação dada e, portanto, dos coeficientes desta mesma equação. *(Nota 2).*

Feitos estes cálculos, a reduzida tomará a forma

$$z^2 - A_3 z - \frac{A_2^3}{27} = 0$$

e a_1 e a_2 serão raízes cúbicas das raízes desta equação.

Considere-se em seguida a equação do 4.° grau.

$$x^4 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0.$$

A equação (*d*) converte-se neste caso em

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0.$$

O coeficiente k tomará o valor -1. Será o valor da raiz quadrada negativa de 1, e teremos também $r = 2$.

As raízes, expressas em elementos constituintes, assumem a forma

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ x_2 = -a_1 - a_2 + a_3 \\ x_3 = -a_1 + a_2 - a_3 \\ x_4 = a_1 - a_2 - a_3. \end{cases}$$

E estes, em função das raizes, darão

$$(8) \qquad \begin{cases} 4a_1 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ 4a_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 4a_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4. \end{cases}$$

Como $r = 2$, e há necessidade de calcular, a fim de compôr os coeficientes da reduzida, funções simétricas das raízes, levantam-se sucessivamente as equações (8) às potências segunda, quarta e sexta e somam-se. Desta maneira se obtém, anàlogamente ao que se fez anteriormente, a reduzida

$$z^3 + \frac{1}{2} A_2 z^2 + \left(\frac{1}{16} A_2^2 - \frac{1}{4} A_4\right) z - \frac{1}{64} A_3^2 = 0.$$

E, $a_1 a_2 a_3$ serão raízes quadradas das três raízes desta equação. *(Nota 3)*.

Quer se trate da resolução da equação do 3.° grau, quer da resolução da equação do 4.°, os elementos constituintes das raízes terão de ser obtidos extraindo raízes cúbicas, ou raízes quadradas, às raízes das equações reduzidas, o que naturalmente determina o aparecimento de soluções estranhas, as quais é necessário afastar.

As equações (3) poderão servir para êste fim; mas Margiochi prefere, em geral, fazer a selecção dos elementos constituintes das raízes escolhendo-os de forma a que satisfaçam no caso particular em que a equação que se pretende resolver tome a forma binómia. *(Nota 4).*

Se o grau da equação for superior ao 4.º a resolução algébrica pelo método em questão torna-se impossível. Com efeito, neste caso, a equação condicional

$$k^2 + (n-2)k + 1 = 0$$

tem raízes reais e irracionais

$$k = \frac{1}{2}[2 - n \pm \sqrt{n(n-4)}]$$

e estes números não poderão ser raízes da unidade, carácter essencial do número k, como anteriormente foi já demonstrado. *(Nota 5).*

*
* *

Nota 1. — A condição

$$1 + (n-2)k + q = 0$$

tal como é obtida no texto em que segui, condensando-a, a exposição feita na Memória, tem apenas o carácter de suficiente. É porém legítimo perguntar se esta condição, fundamental no método em questão, supondo dadas as raízes $x_1 x_0 \ldots x_n$ e incógnitos os elementos $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, também terá o carácter de condição necessária, como me parece mister que tenha.

Ora, se calcularmos a eliminante do sistema (1), deixando os pormenores de um cálculo assás longo, obteremos

$$x_1 (q-k)^{n-2}[1 + (n-2)k + q] = 0$$

e, poisque x_1 é qualquer e q é diferente de k, recaímos efectivamente na condição

$$1 + (n-2)k + q = 0$$

que é, portanto, condição necessária.

Nota 2. — O método proposto por Margiochi, sem dúvida interessante, tem a qualidade apreciável de acomodar, dentro de um processo uniforme, a resolução das equações, tanto do 3.º como do 4.º grau.

A sua filiação nas doutrinas de Lagrange é naturalmente justificada e fácil de reconhecer.

Como é bem sabido, e segundo estas doutrinas, o que essencialmente se procura é obter uma função linear das raízes da equação que se vai resolver, de tal maneira constituída, que tenha um número de valores distintos inferior a n, quando essas raízes se permutam entre si. Esta função determina-se depois resolvendo uma equação de grau inferior a n. Ora, separando no método de Margiochi, aplicado à cúbica, as equações que exprimem os elementos constituintes das raízes, essas equações serão (6)

$$3\,a_1\,\omega_2 = \omega_2\,x_1 + \omega_1\,x_2 + x_3$$
$$3\,a_2\,\omega_2 = \omega_2\,x_1 + x_2 \quad + \omega_1\,x_3.$$

as quais serão utilizadas na sequência do método depois de levantadas ao cubo. Executando esta operação, multiplicando os segundos membros por ω_1^3 obtem-se

$$(3\,a_1)^3 = (x_1 + \omega_2\,x_2 + \omega_1\,x_3)^3$$
$$(3\,a_2)^3 = (x_1 + \omega_1\,x_2 + \omega_2\,x_3)^3.$$

E os valores que representam os seus segundos membros coincidem precisamente com os dois valores distintos da função das raízes que, segundo o método de Lagrange, servirão, fazendo intervir as funções simétricas, para calcular os coeficientes da reduzida.

Quere isto dizer que, neste caso, os dois métodos coincidem nesta altura do seu desenvolvimento.

Nota 3. — Semelhantemente ao que acontece com a cúbica o método de Margiochi, em dada altura, entra em contacto com o método de Lagrange.

A função das raizes

$$(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$$

que, pela sua permutação, toma seis valores diferentes converte se, depois de quadrada, na função usada no método de Lagrange e que tem apenas três valores distintos.

As equações (8) do método de Margiochi, quadradas, como se exige a fim de calcular os coeficientes da reduzida, dão

$$16\,a_1^2 = [x_1 - x_2 - x_3 + x_4]^2$$
$$16\,a_2^2 = [x_1 - x_2 + x_3 - x_4]^2$$
$$16\,a_3^2 = [x_1 + x_2 - x_3 - x_4]^2$$

o que representa os três valores distintos da função de Lagrange e que se utilizam da mesma maneira. Desde êste momento os dois métodos seguem paralelamente.

Nota 4. — Omiti, neste breve ensaio, detalhes diversos e nomeadamente cálculos que dizem respeito à formação das equações reduzidas, porque, dependendo apenas da teoria bem conhecida das funções simétricas das raízes das equações, sôbre nenhuma dificuldade encerrarem, resultam, por outro lado, mais extensos do que interessantes. São inteiramente análogos àqueles a que conduz a prática do método de Lagrange.

O autor da Memória evidentemente reconhece quanto é prejudicada uma aplicação elegante da sua doutrina com os pesados detalhes de desenvolvimentos algébricos necessários e, para até certo ponto os evitar, indica o emprêgo das equações do tipo (1) de preferência às equações do tipo (2) afim de determinar os coeficientes das reduzidas. E, com efeito, desta preferência provém uma sensível simplificação.

No entanto as equações (2) não perdem por isso a sua utilidade prática, e poderão servir de critério para a conveniente selecção dos elementos constituintes das raízes da equação que se pretende resolver, afastando soluções estranhas.

Observe-se ainda que as soluções obtidas tomam, para a cúbica, a forma Tartaglia-Cardan e, para a equação do 4.º grau, a forma devida a Euler.

Nota 5. — ¿Qual é o valor demonstrativo da prova que Margiochi nos fornece da impossibilidade da resolução algébrica para além do 4.º grau?

Que o fim principal de Margiochi era produzir essa convicção não oferece dúvida, basta recordar o título do seu trabalho. ¿Atingiu-o porém tanto quanto desejava?

A êste propósito Rodolfo Guimarães no seu livro *Les mathématiques en Portugal* cita um parecer que, sôbre as conclusões contidas na Memória, se encontra no n.º 9, tom. XVII, dos *Annales de Gergonne* e onde se diz: *nous craignons que la demonstration ne produise pas une égale conviction dans l'esprit de tous les lecteurs.*

Também o penso. O parecer é justo.

Sem, por forma alguma, querer apoucar o mérito de um trabalho que, mais uma vez o afirmo, me parece bem pensado e merecedor de ser recordado, devo também confessar que não sinto bem o pêso e o valor da demonstração, como ela se impõe ao espírito todavia claro, do autor da Memória.

Em resumo, e para que bem se possa apreciar a sua fôrça, vou reproduzir o raciocínio completo, tal como êle se desenvolve através do trabalho de Margiochi.

Aceita a possibilidade de estabelecer expressões algébricas de diversos tipos que representem as raízes das equações resolúveis algèbricamente e é claro que, dada uma qualquer forma esquemática, ela poderá transformar-se em uma outra de diverso aspecto. Mas duas quaisquer dessas expressões, ou são na sua essência e fundamentalmente o mesmo, embora na aparência diversas, ou, pelo menos, entre elas não existe contradição fundamental.

E assim, se, com a forma estabelecida, não se podem resolver certas equações, escusado será investigar outra, porque com essa também nada se conseguirá. Ora, com a forma proposta pelo autor, a solução torna-se impossível para além do 4.º grau, igual impossibilidade se deverá concluir para outra forma qualquer que, na sua essência, não será diferente da que foi adoptada.

A Margiochi satisfaz êste raciocínio, no fundo certamente um tanto ingénuo; mas, se o valor da demonstração é contestável, nem porisso a tentativa deixa de ser apreciável e interessante, e, no seu conjunto, o trabalho do matemático português do princípio do século XIX, elaborado em época de grande agitação política, embora antes do seu exílio, não se torna menos merecedor de que o levantemos do olvido em que há muito tinha indevidamente resvalado.

O ENSINO MATEMÁTICO NAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS

CONFERÊNCIA

POR

L. WOODHOUSE

Senhor Presidente
Minhas Senhoras e Meus Senhores

Não se dissipou ainda a impressão que após de si deixaram as primorosas conferências que ouvimos há poucos dias nesta sala a dois distintos professores, nem essa recordação pode desvanecer-se de pronto. É pois bem natural a espectativa que se adivinha neste culto auditório e que torna difícil a situação de quem nesta altura (1) lhe cabe fazer-se ouvir, sem que possa impor-se, nem pelo prestígio que deriva dum alto saber, nem pelo encanto de uma exposição fluente e colorida, como com tanto agrado nosso a soube fazer qualquer dêsses abalisados conferentes.

Devo confessar que sinto todo o pêso dessa espectativa, que me oprime, e preferiria que esta conferência não tivesse logar marcado dentro do programa do nosso Congresso, porque o assunto poderia bem acomodar-se às breves proporções de uma simples e despretenciosa comunicação.

Em verdade, meus senhores, tanto bastaria para que, como vereis já, fôsse possível realizar o modesto plano que neste pouco se resume:

Dar aos nossos hóspedes, em singela e concisa notícia, a impressão do que representa como organização e do que vale como progresso, sôbre o que existia anteriormente a 1911, o

(1) Esta conferência realizou-se no dia do encerramento do Congresso e com ela se ultimaram os trabalhos da secção de matemática.

estado presente do ensino matemático universitário em Portugal;

Aproveitar a oportunidade de encontrar aqui reünidos representantes das Universidades portuguesas para, embora ao de leve, sublinhar algumas deficiências da organização presente, permitindo-me sugerir em seguida diversas modificações que, eu penso, poderão ser talvez ponto de partida para uma remodelação parcial, mas a meu ver proveitosa, prática e imediata do nosso ensino matemático superior.

Em curtas palavras desenvolverei êste tema.

O que terei a honra de submeter à apreciação dos meus ilustres colegas julgo-o de realização fácil, e tende a obter, sem encargos nem delongas, uma estrutura mais completa, e por êsse motivo mais produtiva, daquele ensino.

Aos distintos representantes do professorado da nobre Espanha, os quais com inteira satisfação me permito saüdar efusivamente, eu desejaria poder proporcionar não só a visão nítida e exacta de quanto temos caminhado na conquista de sensíveis progressos; mas ainda de quanto nos esforçamos sempre por completar e corrigir o existente, firmemente resolvidos a realizar o elevado ideal a que aspiramos e que nos permitirá consolidar sòlidamente o prestígio das Universidades desta nossa bem amada terra de Portugal.

O ensino matemático nas escolas superiores antes de 1911

Anteriormente a 1911, ano em que a instrução universitária passou entre nós por uma remodelação radical, o ensino matemático superior estave concentrado na Universidade de Coimbra, na Escola Politécnica de Lisboa e na Academia Politécnica do Pôrto.

É certo que nos Institutos Industriais destas duas últimas cidades se encontrava, como parte integrante dos respectivos planos de estudos, o ensino da álgebra superior, da geometria analítica, da geometria descritiva e da análise infinitesimal; mas com uma modalidade muito especial e francamente restrita. A índole acentuadamente utilitária dessas escolas, destinadas a formar sòmente técnicos, técnicos de engenharia, mas de cultura relativamente modesta, ou técnicos comercialistas, de conhecimentos matemáticos abertamente elementares, fixava êsse ensino, na melhor das hipóteses, dentro dos limites breves e amoldava-o à forma simples e utilitária que, pela sua índole, pelos seus métodos e pela sua extensão, se pode bem aproximar daquela categoria de conhecimentos hoje apresentados sob a rubrica corrente de *Matemáticas gerais*.

Em outras escolas iríamos encontrar também nessa época, e ainda sob a designação de cálculo diferencial e integral — citarei o Instituto Agrícola e a Escola Naval — análogo género de ensino, obedecendo também à mesma orientação elementar e às mesmas necessidades utilitárias e reduzidas.

Assim, a instrução matemática superior, nìtidamente caracterizada como tal, pelos seus fins, pelos seus métodos e pela sua extensão, podia considerar-se localizada nas três escolas há pouco mencionadas, isto é, na Universidade de Coimbra e nas Politécnicas de Lisboa e do Pôrto.

A Universidade e as Politécnicas

Nestes estabelecimentos êsse ensino abrangia, no ramo das matemáticas puras, uma cadeira de álgebra superior e geometria analítica, outra de cálculo diferencial e integral e mais outra de geometria descritiva. Havia ainda no ramo das matemáticas aplicadas as cadeiras de mecânica, astronomia e geodésia, e, sòmente na Universidade, se ensinava a física matemática e a mecânica celeste.

Ao cálculo das probabilidades não havia cadeira especialmente votada, êle era a bem dizer elemento parasitário, mais ou menos sumàriamente exposto, como anexo às cadeiras de astronomia ou geodésia, limitado quási à teoria dos erros.

A geometria projectiva ocupava também um lugar subalterno, pouco menos do que esquecida. Algumas poucas lições lhe eram porventura reservadas, por devoção dos respectivos professores, insertas no programa da cadeira de geometria descritiva. Eis o quadro, de linhas pouco largas, como vemos, melhor direi, de proporções manifestamente acanhadas, dos valores com que se constituía o ensino superior das matemáticas anteriormente à reforma de 1911.

Não podiam evidentemente dentro dêle caber grandes desenvolvimentos de doutrina, mas, cumpre dizê-lo, as boas vontades conjugadas de professores e de alunos, a devoção daqueles, tantas vezes comprovada, e os esforços dêstes permitiram que, não obstante manifestas deficiências, o ensino superior português se mantivesse sempre a um nível que jàmais nos envergonhou.

Anomalias e imperfeições da organização anterior a 1911

Não obstante, a pobreza orgânica, à qual acabo de me referir, era um facto notório e ainda agravado por outras circunstâncias às quais eu passo a mencionar de seguida.

O curso professado na Universidade de Coimbra, composto fundamentalmente pelas cadeiras de matemáticas puras há pouco citadas e completado pelas cadeiras de matemáticas aplicadas, mecânica, astronomia prática, astronomia teórica e física matemática, era rematado pela imposição das honras e dos gráus académicos na Faculdade de Matemática dessa Universidade a única então existente.

A êsses gráus aspirava porém um número muito limitado de alunos, pois o caso corrente era que a sua grande maioria, procurando as carreiras mais remuneradoras ou de mais rápido e fácil acesso, se limitava a freqüentar um número restrito destas cadeiras, muitas vezes uma ou duas apenas, do grupo das matemáticas puras, como elemento propedêutico de doutrinas que faziam parte de diversas outras faculdades universitárias onde êsses alunos se iam graduar; ou então para, mais tarde, abandonando a Universidade, transitarem para os cursos militares ou de engenharia, os quais não encontravam logar dentro da organização universitária dêsse tempo.

As Politécnicas de Lisboa e Pôrto preparavam também alunos no ramo matemático — a êste me refiro exclusivamente — para os cursos das carreiras militares e de engenharia. Esta última tinha o carácter de escola completa técnica, abrangendo o curso preparatório e o curso de aplicação, e, diga-se de passagem, pelo acendrado esfôrço do seu corpo docente, do qual fui o mais obscuro membro, soube conquistar uma posição culminante entre as escolas portuguesas.

Não conferiam graus académicos estes estabelecimentos de ensino, como já disse, pois êsse privilégio era atributo exclusivo da única Universidade, então existente; não obstante, os programas das cadeiras comuns a estas escolas e à de Coimbra eram organizados da mesma forma, obedecendo aos mesmos métodos de ensino e elaborados com a mesma extensão e, com efeito, era facto absolutamente incontroverso que o ensino em tôdas três, escola universitária, escola teórica sem prerrogativas universitárias e escola simultâneamente teórica e técnica, mantinha-se à mesma altura e era dado com a mesma extensão e a mesma intensidade.

Em resumo, o que deixo exposto revela não sòmente um organismo fundamentalmente acanhado, mas salienta ainda um defeito sensível, proveniente da incompleta adaptação da cultura matemática aos diversos fins que ela deveria servir — vício orgânico fundamental que caraterizou o regimen do ensino matemático superior daquele tempo e que sensìvelmente se modificou por efeito da organização actual.

Consintam-me que eu denuncie ainda uma singular disposição legal, bem caraterística, hoje revogada, mas que se manteve na Universidade de Coimbra até que se realizou a última reforma e que, sem desprimor, creio se pode justamente classificar de verdadeira anomalia pedagógica.

Existia então uma classe de alunos sob a designação de *obrigados* os quais, freqüentando determinadas cadeiras de matemática e ouvindo as lições dos seus mestres, a êles e aos outros alunos comuns, subordinadas ao mesmo programa, eram todavia dispensados de uma prova de exame final tão minuciosa e tão completa como aquela que era exigida aos seus outros condiscípulos não *obrigados*.

Eram alunos de meia sciência, destinados a cursos não essencialmente matemáticos, mas, não obstante, ensinados segundo os mesmos métodos e dentro do mesmo programa, que se organizara para aqueles que tinham de prestar provas de sciência completa.

Era flagrante o desconcêrto. Esta incongruência pedagógica deixou de existir, como há pouco disse.

A reforma de 1911

Em 1911 rasgou-se para o ensino superior novo horizonte, decretando se uma larga reforma da qual me ocuparei agora um tanto.

Foram nesse ano criadas as Universidades de Lisboa e do Pôrto, integrando-se nelas diversas escolas de ensino superior que se encontravam organizadas nestas duas cidades, mas que tinham vida independente.

Não é meu propósito apreciar na sua generalidade êste movimento renovador. ¿Foi oportuna a medida? ¿A sua contextura seria a mais própria, com o carácter de uniformidade que se lhe imprimiu? ¿Correspondem ao pensamento progressivo que a inspirou os resultados práticos que se colhem?

Não tratarei agora de apreciar estas interessantes questões; quero apenas encarar a reforma sob um aspecto muito particular e muito restrito: o ensino das matemáticas superiores.

As modificações que ela trouxe incidiram principalmente sôbre os seguintes pontos:

Expansão do ensino pela criação de novas cadeiras, sua diferenciação e melhor adaptação às finalidades dos diferentes cursos;

Modificação do regimen de freqüência dos alunos;

Organização mais regular e ampla do ensino prático, confiado aos assistentes, auxiliares do ensino magistral, aos quais pertence importantíssima função dentro da trama do ensino actualmente em vigor.

Do primeiro ponto me ocuparei daqui a pouco, e então procurarei investigar se, na urdidura do novo quadro ampliado, existe o necessário equilíbrio.

Mas, antes disso, farei algumas ligeiras referências ao maior ou menor número de obrigações impostas aos alunos em matéria de assistência aos exercícios escolares, isto é, ao regimen que hoje chamamos de freqüência livre e que, na antiga organização, era de freqüência obrigatória.

Freqüência livre e freqüência obrigatória

Anteriormente a 1911 vivia-se em regimen de freqüência obrigatória. Era obrigatória a presença nas aulas, como obrigatórias eram as lições, *as chamadas*, e os trabalhos escritos que aos alunos eram exigidos pelos respectivos professores.

Quási sempre estes adoptavam um livro, um compêndio, que, escolhido de maneira que se conformasse com o programa do curso, quando êste programa não era recortado sôbre o molde do livro, servia de norma às lições.

O texto dêsse livro devia naturalmente ser explicado pelo professor.

Essa explicação variava muito em extensão e detalhes segundo o critério e zêlo de quem a fazia, acontecendo, e não poucas vezes, ser reduzida a proporções insignificantes e até suprimida por completo.

¡Era em verdade, devemos confessá-lo, uma singular maneira de compreender a missão orientadora do mestre!

Mas era assim muitas vezes, e parecia até haver casos em que êle manifestava maior simpatia pela modesta função fiscal de verificar uma aplicação que se denunciava pela assiduïdade na presença do que interêsse por outra função bem mais nobre, a de conseguir despertar nos seus discípulos amor e não tédio pela sciência, salientando os seus aspectos atraentes, mostrando o seu valor, ensinando a utilizá-la.

Uma conseqüência, sem dúvida interessante, da organização que cessou era o conhecimento muito aproximado que durante o ano lectivo o professor conseguia obter do mérito dos seus discípulos, o que facilitava evidentemente o julgamento quando êle era chamado a desempenhar essa missão delicada e importante.

Com a organização actual, libertado o aluno daquelas obrigações, veio a perder-se essa vantagem inegável e a favorecer-se por outro lado o seu natural pendor para o desleixo e para o abandôno; mas como contrapartida, vê-se também despertar no professor um novo estímulo, que pode até certo ponto neutralizar aqueles inconvenientes, estímulo que o incita a criar, pela maneira como organiza e conduz o seu ensino, o interêsse bastante que atrai e fixa, sem coacções irritantes e às vezes contraproducentes, a atenção dos seus ouvintes.

São freqüentes os reparos que se ouvem às liberdades que a moderna legislação académica concede aos alunos em matéria de freqüência, e de cujo abuso têm resultado por vezes, forçoso é confessá-lo, conseqüências lamentáveis; não obstante eu devo afirmar que não me alinho ainda entre os seus adversários intransigentes.

Não posso fazê-lo, embora reconheça que os resultados obtidos não têm sido francamente animadores, mas convenço-me que não se tem lançado mão de tôdas as disposições, de todos os recursos que o estatuto faculta e que dizem respeito à acção do professor e à acção do assistente, que pode ser preciosa, e com as quais será possível atenuar inconvenientes e corrigir abusos, sem prejuízo da missão elevada e serêna que ao professor compete.

A êste cumpre hoje desempenhar mais alto dever do que aquele que se cifra em marcar lições e fiscalizar faltas; tem obrigação insofismável de ensinar, atraindo e não coagindo, missão bem mais elevada, agradável, tranqüila e prestigiosa.

Alheio a incidentes freqüentes e, quantas vezes desagradáveis com alunos menos dóceis e maus cumpridores dos seus deveres, poderá serênamente imprimir uma elevação, um cuidado e uma continuïdade à sua exposição que sujeito às velhas fórmulas mais dificilmente conseguiria.

Perdeu-se o contacto constante com os discípulos, o que é sem dúvida verdade, mas, se êsse contacto não é agora tão estreito, tão intenso como era outrora, também é certo que, repito-o, dentro do regulamentto universitário existem disposições que convenientemente aproveitadas e, se necessário fôr, um tanto ampliadas, podem, sem pressões e sem necessidade de reverter aos extremos molestos dos regulamentos extintos, corrigir aquelas faltas.

Mas não me alongarei mais nestas divagações e passarei a ocupar-me da ampliação do quadro das cadeiras da Faculdade, como êle foi traçado pela reforma de 1911.

A descongestionação do ensino e a ampliação das disciplinas

A acumulação, em uma mesma cadeira, de alunos, cuja educação matemática exigia orientações divergentes e acomodadas às diferentes finalidades das suas futuras carreiras, o ensino feito para todos uniformemente e subordinado sempre às mesmas normas inflexíveis — defeito que já denunciei e que era resultado da escassez da organização anterior — corrigiu-o em parte a reforma de 1911, criando, entre novas cadeiras de índole diversa, uma muito especial, destinada ao ensino das matemáticas gerais.

Merece, julgo eu, muita simpatia e é hoje necessidade iniludível de um proveitoso plano de educação matemática tôda a diferenciação criteriosa que se filie lógica e naturalmente na orientação divergente dos alunos, daqueles que procuram a cultura superior do curso teórico e aspiram à licenciatura em sciências matemáticas, daqueles que se destinam aos cursos técnicos elevados, onde deverão porventura utilizar algumas das mais elevadas concepções matemáticas, ou daqueles que apenas necessitem, sem exigências dum ensino, nem extenso nem profundo, embora sempre rigoroso e scientìficamente disciplinado, aproveitar quanto na matemática possam encontrar pràticamente utilizável.

Sou apologista sincero e convicto, repito, desta diferenciação que reputo fundamental e que corresponde a uma necessidade instante, mas o meu aplauso é com a reserva de uma condição, e essa imprescindível, de que as matemáticas, quando expostas para aqueles que sobretudo procuram a parte útil, de preferência à parte especulativa, se não afastem do indispensável espírito matemático, da necessária e característica exactidão.

Matemática útil e matemática especulativa

Eu bem sei que há quem pense e faça propaganda da orientação contrária, quem, tendo em pouca conta a forma severa e precisa da estrutura matemática, preconize para os técnicos e para os que não seguem cursos essencialmente matemáticos, uma sciência especial, simplificada, exclusiva e caracterizadamente utilitária. Recordo-me a êste propósito que, Darboux o geómetra eminente, prefaciando um apreciável tratado de matemáticas gerais, cita a propósito uma frase curiosa que atribui a Schiller.

Afigura-se ao grande poeta, diz êle, haver quem considere a sciência como uma deusa, por cujo amor tudo se sacrifica, emquanto que outros há que a apreciam, como se aprecia uma boa vaca leiteira, que tanto vale quanto rende.

A matemática orientada de conformidade com a segunda proposição do dilema reputo-a desastrosa.

Os conhecimentos matemáticos adquiridos sistemàticamente por métodos experimentais ou mesmo obtidos sem a nitidez companheira do rigor, sem orientação inspirada pelo verdadeiro espírito matemático emfim, ¡que frágil instrumento de investigação virão a constituir nas mãos de quem tentar utilizá-los! ¿Que efeito disciplinador, que acção educativa colherá quem assim os obtiver?

Eu reputo o encargo de expor sob o aspecto utilitário os necessários conhecimentos, missão que aos inexperientes se afigurará talvez fácil tarefa, um daqueles que mais responsabilidades fará pesar sôbre o professor, probo e consciente da sua alta missão, que queira e saiba transmitir, sem demolir a sciência, um conjunto apreciável de noções úteis enlaçando precisão e sobriedade com um solícito discernimento.

O novo quadro das cadeiras. Desequilíbrio da sua organização

Mas eu devo encerrar mais estoutra pequena divagação que me ia levando para longe do meu assunto e reverter à minha exposição, na altura em que me encontrava. Ocupava-me da reforma de 1911.

Criou, e muito bem, essa reforma o ensino das matemáticas gerais. Fez-se derivar por êsse novo canal uma corrente de alunos que, não aspirando à cultura matemática mais elevada, se fundia com a massa dos alunos que só esta demandavam.

Por outro lado organizava-se um elenco de novas cadeiras mais completo, do que resultava para o ensino uma maior e necessária amplitude.

As que foram então criadas juntamente com as existentes, constituem, nas três Universidades, o quadro seguinte.

Uma cadeira de matemáticas gerais, cujo ensino se faz em dois semestres. É destinada aos alunos da secção de sciências biológicas e geológicas da Faculdade de Sciências.

Uma de álgebra superior e de geometria analítica, em dois semestres.

Uma de cálculo diferencial e integral, em dois semestres. Estas duas cadeiras são destinadas aos alunos das secções de sciências matemáticas e de sciências físico-químicas da Faculdade de Sciências e aos alunos da Faculdade Técnica (engenharia).

Uma de geometria descritiva, em dois semestres, para os alunos da secção de matemática da Faculdade de Sciências e para os alunos da Faculdade Técnica.

Uma de análise superior, em dois semestres, uma outra de geometria projectiva, também em dois semestres e mais uma de cálculo das probabilidades, em um semestre, para os alunos da primeira secção da Faculdade de Sciências.

Tal é o conjunto das cadeiras pelas quais se encontram distribuídas as disciplinas que constituem o ensino das matemáticas puras, fundamento do ensino das matemáticas aplicadas da secção de matemática das Faculdades de Sciências e também base do mesmo ensino para as outras duas secções das mesmas Faculdades e para a Faculdade Técnica na Universidade do Pôrto.

Melhorias e imperfeições

Êste quadro representa um notável e claro progresso sôbre o que anteriormente existia, se bem que encerra alguns defeitos fáceis de remediar.

Por muito de leve que se analise êste agrupamento há um reparo que imediatamente se oferece fazer: um sensível desequilíbrio revelado na distribuïção das matérias pelas diversas cadeiras, atento o seu valor relativo e à extensão que importa dar-lhes.

A geometria projectiva reservam-se dois semetres, isto é, um ano inteiro, e paralelamente a geometria analítica e a álgebra superior são comprimidas dentro da mesma cadeira e ensinadas no mesmo espaço de tempo, levando assim ao inevitável resultado de uma disciplina ser sacrificada à outra, o que sempre e inevitàvelmente acontece.

E, na verdade, como será possível, querendo o professor elevar-se um pouco, sair para fora do emprêgo elementar das coordenadas cartesianas ordinárias e imprimir à geometria uma feição moderna, partindo da noção da razão dupla e da lei da dualidade, empregando as coordenadas de pontos e de linhas — como será possível, pergunto eu, utilizando estes princípios e os métodos modernos que dão à doutrina tão admirável unidade, beleza, simetria e fecundidade nos resultados — ¿como será possível concentrar tôda esta doutrina dentro de um semestre, cortado de férias, de interrupções, umas inevitáveis, outras infelizmente bem escusadas mas que a fatalidade tantas vezes tem feito surgir?

¿E a álgebra? A experiência mostra ser quási impossível ultrapassar a teoria da resolução numérica das equações.

A teoria das formas algébricas, os invariantes, as transformações lineares, os belos trabalhos de Lagrange, de Abel e Galois, tudo isto tem de ficar em grande parte no esquecimento, e, sòmente por um esfôrço ingente da parte do professor, quando auxiliado por uma rara boa vontade de alunos essencialmente dedicados, em anos de excepcionais condições de continuïdade, sem interrupções nem perturbações, se consegue expor algumas destas matérias.

Fala pela minha voz a experiência de largos anos de exercício de magistério, e eu poderia apontar em letras vermelhas, nos registos do meu ensino, aqueles, em que um conjunto de raras circunstâncias felizes permitiram a realização de um programa relativamente completo, como eu o desejaria ver realizado sempre.

E emquanto que esta impossível, esta incongruente concentração se impõe a duas disciplinas fundamentalmente importantes, a exposição da geometria pura, com a forma projectiva, se dilui por um ano inteiro, não obstante a sua importância, por forma alguma se possa admitir que seja superior à da geometria analítica.

Creio pois ter razão bastante para afirmar que se encontra no quadro actual das disciplinas, aliás bastante completo, um sensível desequilíbrio que importará corrigir. ¿Será isso fácil?

Para tentar estabelecer qualquer fórmula, que represente solução, harmónica no seu conjunto e pràticamente útil nos seus fins, aproveitando quanto possivel os elementos existentes, dois pontos convém considerar prèviamente. Nesta conformidade preguntarei:

¿Qual é a preparação provável do aluno, e com a qual se pode contar, quando êle ingressa nas Faculdades de Sciências?

¿Qual é em cada um dos ramos da Faculdade a extensão necessária e suficiente da cultura matemática que êle deve receber?

A cultura matemática preparatória dos alunos que ingressam nas Faculdades de Sciências

A resposta ao primeiro quesito havia de levar-me para muito longe e obrigar-me a percorrer um campo que não me proponho neste momento explorar.

Direi apenas que, se os programas do nosso ensino secundário são largamente desenvolvidos, os resultados colhidos têm sido notàvelmente inferiores às promessas lisongeiras que êles encerram.

Tem sido confiada aos nossos liceus uma dupla missão: dar aos alunos uma cultura geral, e, obtida esta, de, nos últimos anos dos respectivos cursos, os especializarem, ou no ramo de letras, ou no ramo de sciências, preparando para estudos superiores os que aspiram a mais elevada cultura scientífica.

Pelo que diz respeito a sciências e, em especial, à preparação matemática, ¿poderá afirmar-se que o aluno, depois de completar o curso secundário, se encontrará em geral apto para receber um ensino superior, elevado e intenso?

É forçoso confessar que quem quiser, neste momento, firmar o ensino superior matemático sôbre o ensino liceal actual será imprudente se confiar demasiado em uma sólida preparação secundária. É muito propositadamente me refiro a uma preparação sólida, e não a uma preparação extensa. É aquela, e não esta, que importa fomentar.

Oxalá que uma próxima reforma do ensino matemático dos liceus, que tanto urge preparar, se elabore sôbre a dupla base, a meu ver indiscutìvelmente necessária, da compressão dos programas e da intensificação do ensino, e não se deixe arrastar pela ilusão do programa aparatoso, mas cuja execução a prática mostre ser impossível.

Quer a função do liceu seja dar uma cultura geral média e a êste papel se limite, quer conserve ainda a missão de preparar para o ensino universitário, deverá afastar-se dos programas tôda a doutrina que represente ostentação vã e pretenciosa.

Pelo que diz respeito aos conhecimentos matemáticos faço votos por que se tenha bem presente a sua índole especial. É necessário que êles se liguem graduando-se, e não esqueça que vale a pena sacrificar doutrinas pseudo superiores de interêsse quimérico à necessidade absoluta de fazer um ensino perfeito e demorado da aritmética e da geometria euclidiana, ensino fundamental indispensável e que não se repete fora dos liceus.

¿Como se poderá, com efeito, seguir com proveito um ensino rasgado de geometria analítica ou descritiva sem possuir bastante completos os elementos da geometria euclidiana?

¿E quantas vezes se tem reconhecido a sua lamentável insubsistência?

A transição do ensino liceal para o ensino universitário

Ora se, como eu há pouco dizia, não se pode aguardar, em regra, uma sólida preparação elementar, claro é que, como conseqüência inevitável, se deverá pôr de parte por ilusória qualquer organização de ensino superior matemático que logo de entrada tome formas relativamente elevadas, e, sendo assim, o bom senso aconselhará uma transição que estabeleça continuïdade entre o ensino liceal e o ensino superior.

A minha aspiração seria que essa transição se fizesse em um período de estágio antes do ingresso definitivo nas Faculdades, mas junto destas e sob a sua imediata direcção e fiscalização, e depois de completado o curso do liceu, cuja função se limitaria a dar uma sólida e sincera instrução geral média, sem preocupação de preparar para cursos universitários.

Mas, não sendo possível por agora esperar uma tão profunda remodelação do ensino secundário, vejamos como, dentro do existente, se poderá estabelecer proveitosamente essa transição.

Para êste fim está naturalmente indicada a cadeira de matemáticas gerais, que ficaria sendo estudo obrigatório fundamental e inicial para qualquer das secções da Faculdade de Sciências. Aceite esta base, vejamos como dela deverão ramificar os conhecimentos matemáticos ulteriores, dentro das diversas secções.

A extensão do ensino matemático dentro da 1.ª secção da Faculdade de Sciências e a preparação matemática do engenheiro

A primeira secção da Faculdade de Sciências é aquela em que predominam as sciências matemáticas e nela atingem o seu máximo desenvolvimento.

A esta secção vêm também procurar a sua cultura matemática os alunos que se destinam à Faculdade Técnica (alunos engenheiros) e ainda aos cursos militares estranhos à Universidade.

¿Até que ponto é conveniente que seja levada a sua preparação matemática?

Não vou tratar aqui agora esta debatida questão e da qual tão proficientemente se ocupou o Congresso espanhol de engenharia realizado há dois anos. Citarei todavia as palavras de um matemático distintíssimo, o Sr. Rey Pastor, alta mentalidade espanhola à qual presto admirativa homenagem, proferidas nesse Congresso entre os aplausos dos assistentes.

Dísse êle ser mister distinguir entre o técnico subalterno, sem pretensões, que aplica os resultados práticos nos trabalhos vulgares, e o técnico superior que, cultivando a sciência, a pode fazer progredir. Para êste a cultura matemática elevada é indispensável, e conclui, que um país desprovido de escolas onde esta alta cultura se possa obter, seria um país de civilização incompleta e de cultura satélite.

Já em outra ocasião e em outro lugar tive ensejo de citar estas palavras, que traduzem uma opinião com a qual me conformo por completo.

Deve-se apartar sem hesitação um largo quinhão dos conhecimentos matemáticos, que encontramos na primeira secção da Faculdade de Sciências, para organizar a preparação indispensável aos alunos que se destinam à Faculdade Técnica.

A extensão do ensino matemático dos alunos da 2.ª e 3.ª secções da Faculdade de Sciências

A segunda secção é destinada a dar conhecimentos nos quais a nota dominante é a cultura das sciências físico-químicas.

Não se justifica que nesta secção os alunos recebam educação matemática inferior à do engenheiro.

Até agora têm êles sido obrigados às duas cadeiras seguintes: álgebra superior e geometria analítica e cálculo diferencial e integral.

Afigura-se mal equilibrada por um lado, deficiente por outro esta base matemática do estudo das sciências físicas.

É natural a exigência da geometria analítica, mesmo com a extensão que toma na primeira secção e ainda o cálculo, mas, pelo que diz respeito à álgebra superior, bastará quanta fôr necessária para o estudo da geometria analítica.

Por outro lado não compreendo como estes alunos tenham até agora sido dispensados de se instruírem nas matérias professadas no curso de cálculo das probabilidades.

Não sòmente a teoria dos erros lhes é indiscutìvelmente necessária para bem compararem, bem apreciarem e bem concluírem dos resultados experimentais os valores mais prováveis, mas ainda os princípios fundamentais das probabilidades constituem hoje a base de notáveis teorias físicas. Não há muito que com interêsse compulsei umas conferências notáveis do professor Guye, de Genebra, e que tinham por assunto a evolução dos fenómenos físico-químicos, ligada ao cálculo das probabilidades. Parece-me de tôda a oportunidade romper com uma velha tradição injustificável, substituindo parte do estudo da álgebra, inútil nas suas teorias superiores, pelo cálculo das probabilidades, sempre aproveitável, e talvez hoje indispensável.

A terceira secção da Faculdade de Sciências é a das sciências biológicas e geológicas. Para esta parece natural reservar-se a preparação matemática mínima.

Definida por esta forma a índole de cada uma das secções da Faculdade de Sciências e respectiva finalidade, e reconhecida a conveniência de um período de transição entre as matemáticas elementares dos estudos secundários, e as matemáticas superiores, com o carácter de elevação próprio do ensino superior dos cursos universitários, eu peço que me permitam dizer como na minha opinião, sem aumento do número de cadeiras da Faculdade, sem exigir aos alunos um maior esfôrço, mas obedecendo a uma diversa mas metódica distribuïção de doutrinas, eu penso que as deficiências apontadas seriam suprimidas, os defeitos emendados e se atingiria uma organização, dentro do existente, porventura não perfeita, mas certamente lógica e harmónica.

Um novo plano de estudos matemáticos nas Faculdades de Sciências

Das matemáticas gerais se faria o estudo obrigatório, inicial e fundamental dos conhecimentos professados nas três secções da Faculdade. A matéria seria exposta em três semestres.

Os dois primeiros abrangeriam a trigonometria esférica, a geometria analítica do plano e do espaço, tratada pelos métodos clássicos elementares, empregando as coordenadas cartesianas, não homogéneas, e as polares, alguma álgebra complementar, sem pretenções a álgebra superior, e os princípios de cálculo diferencial.

O terceiro semestre abrangeria os complementos dêsse cálculo e os elementos do cálculo integral, exposto em vista das futuras aplicações.

Nos dois primeiros semestres de matemáticas gerais se faria um ensino de transição do liceu para a Faculdade, ensino obrigatório a todos os seus alunos.

No terceiro se faria ensino expressamente consagrado aos alunos da terceira secção ùnicamente, que receberiam nestes três semestres a sua instrução matemática total.

A cadeira de geometria projectiva teria de ser desdobrada em duas outras semestrais, a primeira de geometria pura, a segunda de geometria analítica superior, complemento da geometria analítica elementar ensinada na cadeira de matemáticas gerais.

A actual cadeira de geometria analítica e álgebra seria convertida em duas cadeiras semestrais de álgebra superior, ensino complementar da álgebra da cadeira de matemáticas gerais. Na primeira se esplanariam as doutrinas precisas para o ensino da geometria analítica superior.

Os alunos da segunda secção seriam obrigados a freqüentar os dois primeiros semestres de matemáticas gerais, o semestre de álgebra superior, preparatória para a cadeira semestral de geometria analítica superior, esta cadeira e ainda cálculo diferencial e integral e cálculo das probabilidades.

Os alunos da primeira secção deveriam freqüentar, além dos dois primeiros semestres de matemáticas gerais, os dois semestres de álgebra, os dois semestres de geometria pura e analítica e ainda as cadeiras de geometria descritiva, de cálculo diferencial e integral, de análise superior e de cálculo das probabilidades, as quais continuariam com a forma actual e seriam obrigatórias para todos os alunos da primeira secção, juntamente com as cadeiras de mecânica, astronomia e geodesia, física matemática e mecânica celeste.

Para os alunos que se destinam à Faculdade Técnica e que não podem dispensar uma cultura matemática bastante elevada, eu proporia o mínimo seguinte: os dois semestres de matemáticas gerais, as cadeiras de geometria analítica e projectiva, de cálculo diferencial e integral, de geometria descritiva e de mecânica. De álgebra superior teriam de freqüentar a parte preparatória para a geometria analítica superior.

Para os cursos militares, que não fôssem de engenharia ou artilharia, bastariam os três semestres de matemáticas gerais.

Para os alunos de engenharia militar ou artilharia a preparação não deveria ser inferior à dos alunos que se destinam à Faculdade Técnica.

Resumindo e sintetizando o que fica dito eu creio poder formular a seguinte conclusão:

O ensino matemático universitário em Portugal, notàvelmente melhorado, tem ainda manifestas deficiências, mas os valiosos elementos criados pela reforma de 1911, convenientemente remodelados, podem fàcilmente constituir um quadro de conhecimentos base dum plano de estudos capaz de fornecer suficiente cultura matemática superior para tôdas as carreiras que dela precisem, sem alterar sensìvelmente a organização actual.

Meus Senhores

É tempo de pôr remate a estas reflexões, aliás bem ligeiras, em que me tenho demorado, encarando um dos aspectos do nosso ensino matemático.

Sòmente mais duas palavras e termino. O prometido é devido e eu prometi ser breve.

Falei da remodelação operada em Portugal em 1911, a qual, representando um progresso sem dúvida apreciável, tem ainda, sob o ponto de vista da cultura matemática, evidentes defeitos e sensíveis deficiências.

Falei com sinceridade pondo em destaque essas faltas. Com igual sinceridade repetirei que as julgo fáceis de remediar com pequeno esfôrço e alguma boa vontade.

Eu tenho, e sinto grande prazer em afirmá-lo hoje aqui, perante os nossos hóspedes, fé inabalável e confiança ilimitada no ressurgimento, pelo trabalho e por uma bem orientada educação moral e scientífica, desta nossa terra portuguesa bem-amada. Creio até poder afirmar que alguns sintomas prometedores se esboçam já. ¿Não serão indícios de um movimento reparador que desperta dois acontecimentos palpitantes que no momento presente e bem à nossa vista se desenrolam nesta cidade em campos diversos: no campo do trabalho o certamen do Palácio de Cristal, pleno de interessantes revelações sôbre o nosso progresso industrial; no campo intelectual o interêsse manifestado em meios tão diversos por êste Congresso, cujo êxito vai muito para além da nossa espectativa?

Mas não basta confiar e cruzar os braços; senão trabalhar para que êsse ressurgimento se vá operando progressiva e firmemente, sem perda de tempo, sem dispêndio inútil de energias.

Ora, uma orientação fecunda e um impulso enérgico e decidido para a realização dessa grande obra, deverá encontrar um dos seus mais fortes esteios no aperfeiçoamento e na expansão do nosso ensino, em todos os graus, em todos os campos.

São os conhecimentos matemáticos fundamento de grande número das mais belas e das mais prestantes ramificações do saber, indispensável e poderoso instrumento de investigação de outros, elemento educativo a todos favorável. Exige o seu ensino a mais desvelada atenção, quer se trate das investigações mais elevadas e transcendentes, quer se procure apenas, em domínios mais modestos, encontrar a melhor forma de fazer uma simples exposição utilitária ou elementar.

E, sendo isto certo, ¿não resultará dever indeclinável para quantos possam concorrer para que se estabeleça essa corrente de progresso e de aperfeiçoamento imprescindíveis, envidar, dentro da esfera da sua acção, dos seus conhecimentos, da sua experiência, todos os esforços para que a cultura desta maravilhosa sciência seja, quanto possível, cuidada e perfeita?

Assim o penso, e por êste motivo e porque a ocasião era propícia pareceu-me conveniente aproveitá-la trazendo para aqui um mais do que modesto tributo para a solução do problema do renovamento da nossa educação matemática superior, cuja estrutura, a meu ver ainda imperfeita, pode, sem notável esfôrço, evolucionar fàcilmente para formas mais equilibradas e por conseguinte mais produtivas.

É possível que eu me iluda e que melhores soluções imediatas seja possível formular capazes de sanar as imperfeições e corrigir as deficiências perturbadoras da regular expansão do nosso ensino, para as quais me permiti chamar a atenção dos meus sábios colegas.

VV. Ex.as o dirão e, se melhor se encontrar, eu o acolherei com reconhecimento, porque, Meus Senhores, o meu objectivo principal, o meu desejo mais veemente seria que êste toque de rebate fôsse ouvido e eu obtivesse a coadjuvação efectiva dos colegas das Universidades portuguesas para que, solidarizando-nos todos em um pensamento comum, unidos por uma mesma aspiração, apreciássemos com carinhoso cuidado êste e tantos outros problemas, que tão de perto nos interessam, congregando todos os esforços para que de nós partisse a iniciativa de uma reconstrução sólida e útil do ensino matemático superior em Portugal.

Sim, porque é dentro da nossa corporação que eu desejaria ver iniciado êsse movimento reparador, reflectido e prático, sem nos deixarmos transviar por pessimismos nem por preconceitos, sem nos deixarmos iludir por fantasias nem por fórmulas de problemática adaptação cujo valor prático só em época remota a experiência poderá confirmar ou condenar.

Eu quereria que, valorizando e completando tudo quanto pela experiência temos reconhecido poder dar resultados vantajosos, e que não é pouco, e eliminando ou modificando, quanto se tem denunciado nocivo ou inútil, e que também é bastante, pudéssemos de uma maneira suave, embora lenta, mas segura e reflectida, atingir formas definitivas e harmónicas com o condicionalismo do nosso ambiente e a psicologia da nossa raça.

Assim orientados eu creio que conseguiríamos realizar dentro de pouco tempo uma obra sólida, produtiva e duradoura, porque seria nossa, porque seria portuguesa e porque seria prática, correspondendo em fecunda utilidade aos ardentes votos que eu faço, que todos nós sem dúvida fazemos, pela consolidação e rendimento útil do nosso ensino, pelo enaltecimento e prestígio da Pátria portuguesa.

MODIFICAÇÃO DO MÉTODO DO PICNÓMETRO PARA DETERMINAR A DENSIDADE DOS SÓLIDOS

(CASO DOS SÓLIDOS ATACÁVEIS PELO AR E PELA AGUA)

POR

ÁLVARO R. MACHADO

O método picnométrico, imaginado por Klaprott, para a determinação da densidade dos sólidos e definitivamente introduzido por Regnault, é hoje o mais usado nos laboratórios como o mais exacto, contanto que se adopte técnica conveniente e o frasco se possa encher de líquido sempre uniformemente. Este método merece, pois, a atenção dos cultores das sciências físico-químicas, no sentido de o generalizarem, aperfeiçoarem os instrumentos e tornarem cómoda a técnica.

O frasco que nós mandamos construir (fig. 1) é de vidro fino, com a capacidade de cêrca de 60 cm^3, de gargalo um pouco largo (1 cm., ou mais, de diâmetro) de modo a poder deixar passar pequenos fragmentos de sólidos, adaptando-se a êste gargalo uma rôlha perfeitamente esmerilada, que faz corpo com um termómetro, graduado de 0° a 30°. Na parte superior do frasco está implantado um pequeno tubo capilar com um traço de referência, encimado por um pequeno reservatório cilíndrico, de capacidade cêrca de 2 cm^3, fechado por uma rôlha.

O que êste frasco, ou *picnómetro*, tem de especial é êste reservatório suplementar, com o qual podemos determinar a densidade de um sólido que não pode ser pesado no ar, segundo a técnica ordinária [1].

---

[1] *Elementos de Física Geral*, por F. J. Sousa Gomes e Álvaro R. Machado, 3.ª ed., pág. 153. — *Instruções para trabalhos no Laboratório de Física da Universidade do Pôrto* por Álvaro R. Machado. Art. *Determinação da densidade dos sólidos pelo método do frasco.*

Se se conhece a densidade dum líquido (petróleo, essência de terebentina, álcool, etc.) que não tenha acção de qualquer espécie sôbre o sólido, a técnica apropriada é a seguinte:

1.° Enche-se o frasco até ao traço de referência, enxuga-se o reservatório suprajacente ao tubo capilar, bem como a parte superior dêste, com auxílio de aparas e pequenos rolos de papel de filtro; limpa-se exteriormente.

Depois de ter tomado a temperatura do ambiente, coloca-se num prato da balança de precisão, juntamente com massas marcadas m', fazendo tara t no outro prato. Temos assim uma primeira igualdade

$$t = f + m' + l.$$

2.° Introduz-se no frasco o fragmento do sólido, sem perder porção alguma de líquido. Êste, quando se introduzir a rôlha com termómetro, sobe pelo tubo lateral e fica contido no reservatório suprajacente.

Se pequenas bôlhas de ar ficarem aderentes ao corpo, tiram-se tocando-as com um arame fino.

Deixando ficar a mesma tara t, modificam-se as massas colocadas ao lado do frasco para m'', de modo a restabelecer o equilíbrio da balança. Temos a segunda igualdade:

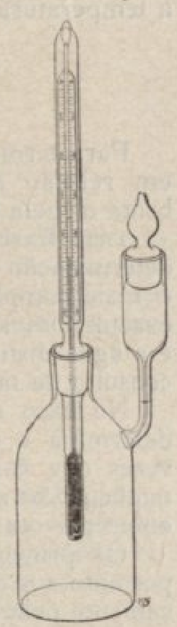

Fig. 1

$$t = f + l + m'' + c.$$

3.° Com auxílio duma pequena pipeta e de papel de filtro, tira-se todo o líquido l_1, que está acima do traço de referência no tubo capilar e reservatório, que representa um volume de líquido igual ao volume do corpo.

Conservando ainda a tara primitiva, modificam-se as massas colocadas ao lado do frasco de modo a de novo restabelecer o equilíbrio da balança. Temos agora a igualdade:

$$t = f + l' + m''' + c.$$

Da primeira e da segunda igualdade tira-se a massa do corpo

$$c = m' - m''.$$

Da segunda e da terceira igualdade tira-se a massa l_1 do líquido saído da segunda para a terceira pesagem, de volume igual ao do corpo sólido introduzindo

$$l_1 = l - l' = m''' - m''.$$

A densidade do sólido em relação ao líquido empregado, à temperatura da experiência, será

$$d' = \frac{c}{l_1} = \frac{m' - m''}{m''' - m''}.$$

Para termos a densidade do sólido à mesma temperatura em relação à água a 4° C. basta multiplicar a densidade bruta d' pela densidade d'' do líquido conhecido (1).

Este frasco e o *modus faciendi* exposto pode aplicar-se à determinação corrente da densidade dum corpo sólido. Não é mais complicado na sua execução e conduz a resultados exactos. Neste caso, o líquido em que o corpo se mergulha é a água distilada, cuja densidade d'' se conhece por simples consulta de tabelas.

No caso especial dos sólidos se alterarem pelo ar, que determina o uso da modificação aqui proposta, sucede por vezes que êsses corpos, por exemplo os metais alcalinos, também são atacáveis pela água e portanto há necessidade de empregar outros líquidos para os banhar, como o petróleo.

Os princípios de técnica, que vamos expor, aplicam-se portanto aos casos especiais em que o corpo é atacável quìmicamente pela água ou se dissolve nela.

Suponhamos que a densidade do líquido auxiliar empregada não se conhece com rigor nas condições das experiências e há necessidade de a determinar na ocasião. Pode fazer-se isto simultâneamente pelo método do frasco com economia de pesagens; bastam duas mais:

Toma-se uma tara t suficientemente grande para fazer equilíbrio ao frasco vazio, limpo e sêco e a uma massa m' gr., sendo em geral êste número m' cêrca do dôbro da capacidade do frasco em cm^3.

Faz-se outra pesagem com o frasco cheio de água a $t°$, até ao traço de referência, e sêco no resto, como no caso geral; sejam m'' as massas marcadas necessárias para estabelecer o equilíbrio.

Em seguida despeja-se a água do frasco e passa-se inter-

(1) *Elementos de Física Geral*, por F. J. Sousa Gomes e Álvaro R. Machado, 3.ª ed., pág. 152.

namente com o líquido em que o corpo sólido vai ser mergulhado; enche-se com êste, como no caso anteriormente exposto, e fazem-se seguidamente as três operações.

As cinco pesagens, que ao todo se fazem correspondem às cinco igualdades

$$t=f+m_0$$
$$t=f+m_1+a$$
$$t=f+m'+l$$
$$t=f+m''+l+c$$
$$t=f+m'''+l'+c.$$

Da primeira e da segunda e da primeira e da terceira tiram-se respectivamente a massa da água $a=m_0-m_1$ e a massa do líquido $l=m_0-m_1$, que enchem o frasco até ao traço de referência. Portanto, a densidade bruta do líquido à temperatura da experiência será

$$d'=\frac{l}{a}=\frac{m_0-m'}{m_0-m_1}.$$

A densidade bruta de d' do sólido em relação ao líquido, à temperatura da experiência, será calculada com os resultados da experiência como atrás, tendo as grandezas a mesma representação literal.

Faz se a correcção pelo processo geral indicado.

Assim ficamos com um método geral, cuja precisão só resta limitada na maneira de colocar a rôlha no frasco nas operações sucessivas.

NOTA SÔBRE A CRIOSCOPIA
DAS ÁGUAS MINERO-MEDICINAIS PORTUGUESAS

POR

RAUL LUPI NOGUEIRA

Professor na Faculdade de Farmácia da Universidade de Lisboa

As águas minerais portuguesas não estão, que me conste, salvo uma ou outra, estudadas sob o ponto de vista do seu índice crioscópico.

Essa constante físico-química tem indubitàvelmente, sua importância quer sob o ponto de vista físico-químico, quer sob o ponto de vista crenoterápico. Qualquer contribuïção para o seu estudo, embora modesta, é pois bemvinda, ainda quando se trate apenas dum trabalho inicial que sirva de ponto de partida para outros de maior tômo.

O estudo da crioscopia de uma água mineral não deve ser feito apenas na água engarrafada, mais ou menos recente, mas na origem, na nascente, e, ainda, será certamente interessante determinar as variações do índice crioscópico nas diversas épocas do ano e no decorrer dos anos.

Por agora, e como trabalho inicial, ocupei-me apenas de determinações dos pontos de congelação das águas minerais portuguesas e também de algumas espanholas.

Fiz primeiro, para cada água, uma série de determinações usando um *crioscópio de Beckmann*. O resfriamento era obtido com uma mistura de gêlo, sal e água gelada. No espaço anular entre o tubo largo que mergulha na mistura frigorífica e o tubo-laboratório, deitei álcool a 90°, em quantidade tal que o seu nível fôsse sensìvelmente igual ao da água a ensaiar, contida no tubo-laboratório. Regulava também a quantidade da mistura refrigerante de forma que o seu nível não divergisse muito do do álcool e da água. O volume de água introduzido no tubo-laboratório era sempre de 25 c. c. Empreguei um termómetro graduado em centésimos de grau entre -3° e $+2^{\circ}$, termómetro bem calibrado que verifiquei cuidadosamente. Com um óculo de Galileu podia apreciar fàcilmente $^1/_5$ de centésimo de grau.

A água era agitada com um agitador, de fio de prata platinado. Todos os dias determinava o ponto de congelação da água redestilada. Os tubos-laboratório, agitador e termómetro eram lavados meticulosamente com água destilada ordinária, depois com água redestilada e, várias vezes, com a água a ensaiar.

A água redestilada que empreguei era obtida, redestilando em aparelho de vidro de Iena, a água destilada (satisfazendo aos ensaios da *Ph. P.*, do *Codex 1908* e da *Ph. G.*, ed. v) em presença do permanganato de potássio alcalinizado e do alumen.

Fazia seguidamente, para cada água, uma série de dez determinações com o *crioscópio Lupi e Athayde* (ver *Revista de química pura e applicada*, II série, II ano, 1917) porque com êste aparelho se obtém um arrefecimento muito lento, reduzindo-se ao mínimo a sôbre-fusão.

Empregava o mesmo volume de água 25 c. c. e o mesmo agitador em hélice.

As divergências entre os números obtidos pelos dois processos eram pequenas; menores eram ainda as diferenças entre os dez números obtidos com o crioscópio de evaporação de éter sucedendo-me freqüentemente obter oito e nove números perfeitamente concordantes.

Repetia depois estes ensaios, com as águas diluídas a 1 : 2 com água redestilada.

Fiz tôdas as correcções e calculei as médias dos números corrigidos. No mapa n.º 1 estão reünidas: as médias das dez determinações com as águas não diluídas, Δ; as médias também de dez determinações com as águas diluídas a 1 : 2, Δ'; e, na última coluna, os valores de $^1/_2\ \Delta$.

Confrontando os valores de Δ' com os de $^1/_2\ \Delta$ vê-se que aqueles pouco diferem dêstes (excepção feita das águas de Rubinat, Carabaña e La Margarita) o que me leva a crer que os electrólitos em solução estão fortemente dissociados.

Quanto às águas de Rubinat, Carabaña e La Margarita, tôdas de muito elevada mineralização, como os valores de Δ' divergiam muito dos de $^1/_2\ \Delta$, fiz com elas uma nova série de determinações diluindo-as a 1 : 2, a 1 : 4 e a 1 : 8. Os valores obtidos estão reünidos no mapa n.º 2. Por êle se verifica que o grau de dissociação destas águas é bastante baixo, sendo necessário diluí-las a 1 : 4 para que, com uma nova diluïção, a 1 : 8, o novo abaixamento do ponto de congelação seja sensìvelmente igual a metade do anterior.

*

No mapa n.º 3 encontram-se os pontos de congelação, a mineralização total e a mineralização fixa das diversas águas.

Da comparação do conjunto dêstes números resulta não haver paralelismo entre o grau crioscópico e a mineralização, quer se considere a mineralização fixa quer a mineralização total.

Não é isso para admirar, antes é de prever, tendo em consideração as leis que regem as propriedades coligativas das soluções.

Porém, nas águas que tenham uma constituïção análoga é de crer que êsse paralelismo exista.

Consideremos as águas de Vidago, Vidago n.º 2, Salus, Sabroso, Areal, tôdas da mesma região e de composição qualitativa semelhante:

Vidago. . . .	—0°,328	MT = 8,77512	MF = 7,19506
Salus.	—0°,272	MT = 7,846245	MF = 5,719-45
Vidago n.º 2 .	—0°,202	MT = 6,06949	MF = 4,51660
Sabroso . . .	—0°,176	MT = 5,664552	MF = 3,313931
Areal.	—0°,148	MT = 5,6081	MF = 4,0801.

Uma simples vista de olhos sôbre estes números mostra que ao acréscimo da mineralização, corresponde o acréscimo do abaixamènto do ponto de congelação. Não há, porém, proporcionalidade, como é fácil de verificar.

*

Outro ponto sôbre que incidiu a minha atenção foi a influência do anidrido carbónico livre e outros gases em solução sôbre o índice crioscópico das águas.

Para estudar essa influência fiz as seguintes experiências:

a) Agitei a água de Vidago, enèrgicamente, durante uma hora e determinei o seu ponto de congelação. Repeti esta experiência com as águas de Vidago n.º 2, de Sabroso, do Areal, das Pedras Salgadas (nascente Penedo), de Melgaço e águas Romanas.

b) Fiz passar durante três horas uma corrente de ar na água de Vidago; repeti a operação com as outras águas acima mencionadas; determinei os pontos de congelacão.

c) Aqueci a água de Vidago até ao início da ebulição; sujeitei as outras águas ao mesmo tratamento; determinei os pontos de congelação.

As três experiências conduziram-me a resultados sensìvelvelmente iguais para cada uma das águas.

Se no ponto de congelação destas águas depois de agitadas, adicionarmos a quota parte atribuível ao anidrido carbónico livre, a soma resultante pouco difere do índice crioscópico da água não agitada.

Tem, pois, o anidrido carbónico, e os outros gases em solução, uma influência notável, dependente da sua proporção, no valor da constante físico-química que estamos estudando.

O mapa n.º 4 compreende os resultados obtidos; o seu exame confirma o que acabo de dizer.

*

É necessário fazer o estudo comparativo do índice crioscópico e das outras constantes físicas das águas, nomeadamente, da resistividade.

Também será interessante comparar o grau crioscópico das águas e o de solutos artificiais de composição análoga.

Dêstes assuntos tenciono ocupar-me no decurso do próximo ano lectivo, e, logo que me seja possível, e na medida do que me fôr possível, procurarei estudar o índice crioscópico das águas na origem, bem como as suas variações com o tempo, estação, etc.

Lisboa, 16 de Junho de 1921.

MAPA N.º 1

Designação das águas	Ponto de congelação da água não diluída Δ	Ponto de congelação da água diluída a $^1/_2$ Δ'	Valor de $^1/_2$ Δ
Foz da Certã	$-0°,007$	$-0°,004$	$-0°,0035$
Luso	$-0°,010$	$-0°,005$	$-0°,005$
Caldas Santas	$-0°,010$	$-0°,005$	$-0°,005$
Casais	$-0°,016$	$-0°,008$	$-0°,008$
Caldas da Felgueira	$-0°,017$	$-0°,008$	$-0°,0085$
S. Vicente (Entre-os-Rios)	$-0°,022$	$-0°,010$	$-0°,011$
Vizela (Nascente do Médico)	$-0°,022$	$-0°,012$	$-0°,011$
Vizela (Nascente do Rio)	$-0°,028$	$-0°,016$	$-0°,014$

Designação das águas	Ponto de congelação da água não diluída Δ	Ponto de congelação da água diluída a $^1/_2$ Δ'	Valor de $^1/_2$ Δ
Vizela	$-0°,030$	$-0°,018$	$-0°,015$
Curia	$-0°,043$	$-0°,022$	$-0°,0215$
Bem-Saúde	$-0°,112$	$-0°,058$	$-0°,056$
Pedras Salgadas	$-0°,112$	$-0°,056$	$-0°,056$
Lombadas	$-0°,121$	$-0°,063$	$-0°,060$
Caldas da Raínha	$-0°,138$	$-0°,071$	$-0°,069$
Melgaço	$-0°,140$	$-0°,072$	$-0°,070$
Mondariz	$-0°,146$	$-0°,072$	$-0°,073$
Charnixe	$-0°,148$	$-0°,082$	$-0°,074$
Areal (região de Vidago)	$-0°,148$	$-0°,076$	$-0°.074$
Romanas (região de Pedras Salgadas)	$-0°,150$	$-0°,078$	$-0°,075$
Pedras Salgadas (G.de Alcalina)	$-0°,172$	$-0°,092$	$-0°,086$
Sabroso (Vidago)	$-0°,176$	$-0°,090$	$-0°,088$
Cucos	$-0°,182$	$-0°,097$	$-0°,091$
Verin (Fuente Nueva)	$-0°,184$	$-0°,097$	$-0°,092$
Santa Marta	$-0°,198$	$-0°,100$	$-0°,099$
Vidago N.° 2	$-0°,202$	$-0°,106$	$-0°,101$
Salus	$-0°,272$	$-0°,140$	$-0°,136$
Vidago N.° 1	$-0°,328$	$-0°,170$	$-0°,164$
Mouchão da Póvoa	$-0°,708$	$-0°,366$	$-0°,354$
Rubinat	$-1°,296$	$-0°,868$	$-0°,648$
Carabaña	$-1°,436$	$-0°,998$	$-0°,718$
La Margarita em Loeche	$-1°,820$	$-1°,140$	$-0°,910$

MAPA N.° 2

Designação	Ponto de congelação
Água de Rubinat pura	$-1°,296$
» » » diluída a 1:2	$-0°,868$
» » » » 1:4	$-0°,452$
» » » » 1:8	$-0°,225$
Agua de Carabaña pura	$-1°,436$
» » » diluída a 1:2	$-0°,998$
» » » » 1:4	$-0°,527$
» » » » 1:8	$-0°,264$
Agua de La Margarita em Loeches pura	$-1°,820$
» » » » » » diluída a 1:2	$-1°,140$
» » » » » » » 1:4	$-0°,608$
» » » » » » » 1:8	$-0°,312$

MAPA N.º 3

Designação das águas	Δ	Mineralização	
		Total gr.	Fixa gr.
Foz da Certã	−0°,007	0,2097	0,2097
Luso	−0°,010	—	0,04732
Caldas Santas	−0°,010	0,2845	0,2845
Caldelas	−0°,010	0,100836	0,100286
Casais	−0°,016	1,0718	1,0718
Caldas da Felgueira	−0°,017	0,32048	0,28959
S. Vicente (Entre-os-Rios)	−0°,022	—	0,4566
Vizela (Nascente do Médico)	−0°,022	0,32234	—
Vizela	−0°,030	0,34390	—
Barreiro (Beira Alta)	−0°,024	0,1492	0,1471
Curia	−0°,043	2,4478	2,4478
Bem-saúde	−0°,112	3,50543	2,11724
Pedras Salgadas (Penedo)	−0°,112	4,743612	2,736242
Lombadas	−0°,121	3,0372	0,2022
Melgaço	−0°,140	1,78045	0,70135
Mondariz	−0°,146	3,956	2,973
Charnixe	−0°,148	2,8544	2,7126
Areal	−0°,148	5,6081	4,0801
Romanas	−0°,150	5,969241	3,692790
Pedras Salgadas (G.de Alcalina)	−0°,172	5,647245	3,506665
Sabroso	−0°,176	5,664552	3,313931
Cucos	−0°,182	—	3,2582
Verin (Fuente Nueva)	−0°,184	4,66707	3,30107
Santa Marta	−0°,198	3,900784	3,799984
Vidago N.º 2	−0°,202	6,06949	4,51660
Salus	−0°,272	7,846245	5,719745
Vidago	−0°,328	8,77512	7,19506
Mouchão da Póvoa	−0°,708	14,92	14,26
Rubinat	−1°,296	103,814	103,814
Carabaña	−1°,436	106,082	106,082

MAPA N.º 4

Designação das águas	Ponto de congelação da água depois de agitada Δa	Quantidade de CO^2 livre por litro Gr.	Abaixamento do ponto de congelação atribuível ao CO^2 livre δ	$\Delta a + \delta$	Ponto de congelação da água não agitada Δ	Diferença entre Δ e $\Delta a + \delta$
Vidago N.º 1	—0°,262	1,58006	—0°,067	—0°,329	—0°,328	—0°,001
Vidago N.º 2	—0°,152	1,55289	—0°,065	—0°,217	—0°,202	—0°,015
Sabroso	—0°,090	2,31393	—0°,097	—0°,187	—0°,176	—0°,011
Areal	—0°,096	1,528	—0°,064	—0°,160	—0°,148	—0°,012
Pedras Salgadas (Penedo)	—0°,050	2,00737	—0°,084	—0°,134	—0°,112	—0°,022
Romanas	—0°,068	2,27645	—0°,096	—0°,164	—0°,150	—0°,014
Melgaço	—0°,099	1,07915	—0°,042	—0°,141	—0°,140	—0°,002

DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS
DESTINADAS A CALCULAR A ENERGIA CALORÍFICA DE UM CARVÃO, BASEADAS NOS RESULTADOS DA SUA ANÁLISE

POR

A. J. DE BRITO E CUNHA

São muitas as energias de que o homem pode dispor tais como: hulha branca, verde e preta, correntes de rios e marés, energia solar sob diversas formas: emanações, eléctricas e caloríficas; além destas ainda temos aplicáveis a casos especiais, ar líquido, gáses naturais comprimidos e combustíveis, energias radio-activas e as plantas.

Algumas destas energias já entram em competência com a energia química e calorífica do carvão, tais como a hulha branca e verde, gases naturais sub-pressão, etc., de que se faz emprêgo corrente; outras tentam entrar em competência tendo já demonstrado pràticamente qual o seu valor tais como: marés, correntes dos rios, calor solar, calor perdido em diversos fabricos, calor cedido na liquefacção do vapor; outras ainda não se têm podido aproveitar pràticamente, mas já têm provado o seu valor em qualidade e quantidade tais como, emanações solares, diferenças de potencial a diversas alturas da atmosfera, raios ultra-violeta e infra-rubros, produzindo reacções químicas inversas e que podemos aproveitar como energias em elementos de pilhas secundárias, acumuladores carregados pelo sol, emanações radio-activas cuja enorme energia é bem conhecida e virá sem dúvida um dia a ser bem aproveitada.

A maior parte das minas de carvão já descem a uma profundidade de 1.000 a 1.300 metros, donde é necessário elevar grandes massas e transportar para os locais do seu consumo de forma tal que possam competir com as outras energias correntemente empregadas.

Daqui resultam varios problemas já em via de solução prática, tais como:

a) Transformação do carvão em electricidade de alta tensão no fundo das minas;

b) Gazeificação do carvão no fundo das minas aproveitando o coque resultante, e transformação em energia na parte superior.

Outras minas fornecem carvão de qualidades inferiores, tais como hulhas betuminosas, lenhites e turfas que se pretendem aproveitar, quer modificando as grelhas e câmaras de combustão dos geradores, quer fabricando briquetes com antracite pulverizada para lhes aumentar o poder calorífico.

Por outro lado é indispensável evitar por tôdas as formas possíveis os desperdícios de carvão, devido às combustões imperfeitas que encarecem o combustível, causando alterações no ar nas grandes cidades e centros industriais, tornando-o impróprio para a respiração dos animais e plantas deteriorando todos os objectos e produzindo nevoeiros que chegam às vezes a ser opacos e que privam localidades enormes dos benéficos efeitos da luz solar.

Pelo que fica exposto se verifica que em breve deveremos ter todo o carvão reduzido a briquetes com tipos especiais convenientes que se venderão segundo a sua energia calorífica e que serão aplicados cada qual ao seu tipo de fornos, fornalhas, fogões e fogareiros, etc., de forma a não produzirem fumo.

Sabemos que em conseqüência das providências tomadas em Liverpool, Manchester, Widnes e S.t Helens se nota uma grande diferença na limpidez da atmosfera e diminuïção de nevoeiros.

É também indispensável nas fábricas verificar constantemente se, pelas chaminés, juntamente com os produtos de combustão, escapam combustíveis; determinar qual a energia calorífica empregada, qual a quantidade de água produzida; sem estas determinações constantes é impossível manter um coeficiente fabril proveitoso e portanto produzir económicamente.

Daqui resulta a necessidade das determinações constantes da energia calorífica no comércio e na indústria e portanto a conveniência da sua obtenção por processos simples e rápidos.

Os métodos geralmente adoptados nos laboratórios para os ensaios de combustíveis são:

a) Análise elementar dos seus componentes;

b) Análise imediata para a determinacão da humidade, mistura de substâncias orgânicas voláteis, carbono fixo, e resíduos minerais.

Mr. Dulong adoptou uma fórmula empírica para a determinação indirecta do poder calorífico dos combustíveis baseada na análise elementar; designando por P o poder calorífico dum combustível composto de carbono, hidrogénio, oxigénio e azoto será

$$P = 81{,}40\,\mathrm{C} + 345{,}00\left(\mathrm{H} - \frac{\mathrm{O} + \mathrm{Az} - 1}{8}\right)$$

ou mais simplesmente

$$P = 124{,}525\,\mathrm{C} + 388{,}125\,\mathrm{H} - 4269.$$

Os srs. Scheurer-Kestner, Bunte, Stohmann, Alexéeff e Mahler provaram que as fórmulas acima apresentadas se afastam muitas vezes dos resultados obtidos directamente e que é impossível obter uma fórmula geral exacta em todos os casos.

Mr. Dulong baseou a sua fórmula empírica na análise elementar a qual além de ser demorada e delicada, tem o inconveniente de decompor os compostos orgânicos, existentes no combustível, nos seus elementos e portanto o de lhes alterar o poder calorífico, em proporção do calor de formação dos diversos compostos, necessitando por isso um termo de correcção relativo a cada uma das substâncias decompostas, o que complicava muito o problema.

É provàvelmente essa a causa em virtude da qual os químicos acima mencionados julgaram impossível obter uma fórmula exacta em todos os casos.

Vejamos agora se baseando-nos em análises imediatas do carvão, poderemos obter uma fórmula suficientemente aproximada de modo a satisfazer as exigências industriais.

Designemos por V as substâncias voláteis contidas numa amostra dum combustível,

Por C o seu carbono fixo,

Por h a sua humidade,

Por r os resíduos minerais restantes,

Por E a energia calorífica total de combustão,

Por E', E'', E''', ..., as energias caloríficas dos seus componentes, teremos, segundo a análise:

$$V + C + h + r = 100$$

e conforme Berthelot [1],

$$\begin{aligned} E &= E' + E'' + E''' + \dots \\ &= f(V) + f(C) + f(h) + f(r) + \dots \end{aligned}$$

(1) *Traité practique de calorimétrie chimique*, 2.ème et 5.ème sections.

mas como

$$f(h) \quad \text{e} \quad f(r)$$

não produzem calor e antes pelo contrário o absorvem, estas funções tornam-se negativas.

Suponhamos agora o combustível cuja energia pretendemos determinar reduzido a compostos puros de substâncias voláteis, ou de carbono fixo, ficando portanto as suas análises reduzidas a

$$V = 100 \quad \text{ou} \quad C = 100$$

mas como podemos admitir que estas funções sejam o mais simples possível sem êrro apreciável, isto é:

$$E' = f(V) = a\,V$$
$$E'' = f(C) = b\,C$$
$$E''' = -f(h, r) = -c\,(h + r).$$

Sendo a e b coeficientes adequáveis e c a quantidade de calor absorvido proporcional ao calor específico e à temperatura, atendendo a que a energia calorífica de combustão do carbono puro é igual a 8.140 cal., teremos, no presente caso:

$$a = \frac{E'}{100} \quad \text{e} \quad b = \frac{E''}{100} = 81{,}40.$$

Ora o combustível primitivo não sendo mais do que um aglomerado de substâncias puras definidas na análise, teremos, substituindo os valores de a e b:

$$E = \frac{E'\,V + 8140\,C}{V + C + h + r} - c\,(h + r).$$

Mas como o calor total absorvido pela humidade, para se elevar de 15 a 100° e para passar de 100° líquido a 100° vapor, é de 0,623 cal.-grama, poderemos separar os dois últimos termos ficando esta fórmula reduzida a

$$\text{(1)} \qquad E = \frac{E'\,V + 8140\,C}{V + C + h + r} - 623\,h - c\,r.$$

Idênticamente, servindo-nos da análise elementar, chegaremos à equação seguinte:

$$(2) \qquad E = \frac{34500\,H + 8140\,C}{H + C + O + Az + h + r} - 623\,h - c\,r.$$

Pelo que fica expôsto se vê que, com a equação (1) ràpidamente poderemos determinar a energia calorífica de qualquer combustível, que, distilado a baixas temperaturas, produza substâncias volateis V com a energia calorífica E', e o calor absorvido c pelas cinzas r.

Se determinarmos directamente a energia calorífica P de um combustível isento de água e cinzas e se depois juntarmos a êsse mesmo combustível, em variadas proporções, água e cinzas, determinando directamente a energia calorífica P' do novo composto, teremos:

$$P = P' + 623\,h + c\,r$$

donde

$$c = \frac{P - P' - 623\,h}{r}.$$

Ora podem dar-se três casos:

$$P \gtreqless P' + 623\,h$$

isto é

$$c = \pm\frac{n}{r} \qquad \text{ou} \qquad c = \frac{0}{r}.$$

No primeiro caso

$$P > P' + 623\,h$$

será

$$c = \frac{n}{r}$$

êste é o caso geral em que fica determinado um valor positivo maior ou menor.

No segundo caso

$$P < P' + 623\,h$$

será

$$c = -\frac{n}{r},$$

essencialmente negativo, o que significa que o calor c em vez de ser absorvido, é emitido, isto é, que junto com as cinzas se encontra um combustível capaz de emitir calor, o que só se pode admitir por lapso analítico ou por troca de energias caloríficas.

No terceiro caso

$$P = P' + 623\,h$$

será

$$c\,r = 0$$

duas hipóteses se podem dar:

$$h > 0 \quad \text{ou} \quad h = 0,$$

na primeira destas hipóteses será

$$c = \frac{0}{r},$$

quantidade infinitamente pequena, ou

$$c = \frac{0}{0}$$

no caso especial de ser

$$r = 0;$$

na segunda destas hipóteses será

$$P = P'$$

e portanto, também

$$r = 0$$

por não haver absorpção de energias caloríficas, logo

$$c = \frac{0}{0},$$

quantidade indeterminada que indica não haver humidade nem cinzas que possam absorver calor.

Presentemente o comércio do carvão é muito irregular ficando a maior parte das vezes prejudicado o comprador por ignorar a energia calorífica do combustível que adquire, dando-lhe resultados muito diversos daqueles com que êle conta ou calcula.

Por outro lado não convém a país algum esgotar as suas minas de antracite ficando com hulhas betuminosas ou lenhites, as quais não têm aplicação em todos os casos.

Também não convém aos donos das minas perder o carvão pulverizado ou reduzido a pequenos fragmentos.

Não convém a consumidor algum empregar carvões com energia calorífica superior à que necessita, por isso que à tendência dos fogueiros é sempre para consumir demasiado, supondo-o indispensável, o que dá em resultado prejudicar a atmosfera da localidade e a dos vizinhos, desperdiçar inùtilmente energias, deteriorar chaminés e prejudicar a algibeira do industrial ou a do consumidor.

Examinando 29 análises de diversos combustíveis, chegamos a obter uma média de 12000 calorias para E' e de 200 para c; é claro que estas médias devem ser modificadas por um exame mais extenso e classificando os combustíveis.

Se, como acima dissémos, reduzirmos todo o carvão, fornecido pelas minas, a briquetes, com tipos especiais, distinguíveis pelo aspecto, dimensões, forma, etc., e determinarmos a energia calorífica E' das substâncias voláteis distilando de 500 a 900° em cada tipo, teremos, fazendo-lhe a análise imediata, e aplicando-lhe a fórmula (1), a energia calorífica E, de cada tipo, o que permitirá que o comércio se faça estabelecendo preços por cal.-tonelada ou qualquer outra idêntica unidade.

É indispensável economizar o mais possível o carvão, não só porque o seu consumo tende a aumentar extraordinàriamente com o aumento da população e as modernas exigências scientíficas e industriais, mas também porque já estão muito explorados os jazigos conhecidos, dos quais se calcula limitada a existência a uns 100 anos, apenas, ignorando-se por emquanto até que ponto poderemos contar com os novos jazigos, descobertos ou a descobrir, de carvão ou petróleo.

Por isso todo o carvão deve ser reduzido a briquetes nas minas, aproveitando do melhor modo as substâncias voláteis, valorizando os carvões baixos, evitando desperdícios dos carvões elevados e dos refugos, reduzindo-os a tipos especiais, com especial aplicação e vendendo-os por preços proporcionais às suas energias caloríficas.

Compete aos laboratórios de investigação scientífica adiantar os trabalhos para o aproveitamento das energias ainda não econòmicamente utilizadas e descobrir a forma prática de empregar aquelas cuja existência se conhece, ignorando-se contudo a maneira do seu aproveitamento.

Propomos que o Congresso Luso-Espanhol se manifeste a favor duma organização mineira em Portugal, desenvolvendo a exploração dos quatro jazigos de carvão que possuímos, regulamentando a sua estracção de forma patriótica com vista nos interêsses gerais e independente de interêsses particulares.

Esta organização poderia basear-se nos princípios seguintes:

1.º — Federação geral de todos os jazigos;
2.º — Produção do gás no fundo das minas aproveitando o coque e transformando aquele em movimento ou luz nas proximidades das mesmas;
3.º — Transformação do carvão em energia eléctrica de alta tensão no fundo das minas;
4.º — Fabricação de aglomerados com tipos especiais de diversas energias caloríficas, vendendo-os por preços proporcionais à unidade de aquecimento.

Seria êste o início duma nova era de interêsses industriais que para nós representariam uma verdadeira riqueza, servindo de base a muitas outras.

Lisboa, 26 de Junho de 1921.

ANOMALIAS OBSERVADAS
NA PRODUÇÃO DA EMANAÇÃO DOS MINÉRIOS RADÍFEROS DE PORTUGAL

POR

GIOVANNI COSTANZO

Professor ordinário de Radioactividade do Instituto Superior Técnico

M.me Curie no seu *Tratado de Radioactividade* (1) escreve: «J'ai observé pour certaines solutions radifères une décroissance progressive du débit d'émanation; dans d'autres cas le débit semble avoir éprouvé une faible augmentation». Observações da mesma natureza foram feitas por Hahn e Meitner com relação a um recrudescimento da actividade do rádio depois da sua dissolução (2).

Na minha prática de análises de minérios portugueses, doseando o rádio pelo método da emanação (3), tive a oportunidade de observar algumas singularidades análogas, que não podia atribuir a erros de observação pois as medidas eram cuidadosas, não podendo admitir-se afastamentos da ordem daqueles que eu obtive. Comuniquei estas minhas observações ao sr. Clair Scal, preparador no Laboratório de Química na Sorbonne e então director da fábrica de rádio da Société Urane & Radium, no Barracão (Guarda), e com minha agradável surpresa ouvi dêle que o mesmo observara êle, assim como o sr. Lançon, seu ajudante. Foi então que iniciámos um estudo conjuntamente, do qual nos foi possível estabelecer que «os resultados das variações observadas variam consideràvelmente com o método empregado para obter a solução radífera utilizada para a dosagem e com as quantidades dos reagentes empregados, bastando mesmo pequenas diferenças nestes para obter afastamentos notáveis».

Exponho nesta nota alguns dos resultados mais claramente

(1) M.me Curie, *Traité de Radioactivité*, Paris, 1912, t. II, pág. 386.
(2) O. Hahnu. L. Meitner, *Phys. Zeitschr.*, x, 1909, pág. 697.
(3) M.me Curie, *Le Radium*, 1910.

apurados que nós obtivemos empregando uma mesma amostra de minério da região da Guarda. Um estudo mais detalhado, sôbre o minério da mina de Urgeriça (Nelas), estou levando a têrmo com a colaboração do meu assistente no Laboratório oficial de Radioactividade, engenheiro Pio Leite. Os resultado. s obtidos até esta data não contradizem os que eu tinha obtido no minério da Guarda.

No trabalho feito de colaboração com o sr. Scal, tomámos 5 quilogramas de minério que foi pulverizado e misturado de forma a dar uma amostra homogénea. Analisámos o seu teor em urânio, obtendo 0,87 % de U.

Nas tabelas seguintes os resultados das dosagens do rádio são expressas em miligramas de rádio-metal por tonelada de minério. As durações da acumulação da emanacão eram compreendidas entre as 24 e as 48 horas. Observa-se que *a quantidade de emanação desenvolvida varia em função da idade da solução sôbre a qual se experimenta.*

Empregámos como aparelhos de medida, os do tipo Laborde e Chaneveau, graduados e aferidos por meio duma solução-padrão de rádio.

Primeiro ensaio

Uma toma de ensaio foi atacada a quente pelo ácido clorídrico diluído. O líquido claro foi submetido a análise.

	Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias:	1	9,17
	12	3,78
	26	2,16
	30	2,78
	60	3,21
	90	3,24

Segundo ensaio

Uma toma de ensaio igual à precedente foi atacada por uma solução de carbonato de sódio a ferver durante algumas horas. Depois de lavagens até não ter a reacção dos sulfatos, foi o resíduo atacado pelo ácido clorídrico diluído. O líquido filtrado foi analizado.

	Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias:	3	29,18
	8	21,60
	15	25,86
	60	27,26

Terceiro ensaio

Foi neste ensaio feito o mesmo ataque que no precedente, com a diferença que as quantidades de reagentes empregados foram bastante menos em pêso sôbre a mesma toma de ensaio.

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 1	16,16
5	10,60
10	9,70
21	13,48
30	19,36
40	19,53

Neste ensaio observa-se o mesmo andamento do precedente, mas a descida é relativamente mais forte, ao passo que o valor máximo obtido depois da descida atinge um valor superior ao valor inicial. Como se vê o ataque não foi completo.

Quarto ensaio

O ataque foi o mesmo dos dois ensaios precedentes, mas desta vez os reagentes foram empregados em grande excesso. Neste caso o fenómeno tem um andamento muito diferente, como se pode vêr pelos resultados seguintes:

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 1	23,20
10	25,35
25	16,72
37	11,33
65	9,87

Neste ensaio a descida que observámos imediata nos outros, é precedida duma subida muito sensível apresentando-se o mínimo muito mais tarde. O ataque apresenta-se completo como no ensaio n.º 2.

Quinto ensaio

100 gramas de minério mixto; proveniente em máxima parte da mina de Urgeriça, foram atacados durante duas horas a quente, pelo ácido sulfúrico concentrado e a solução foi deixada em contacto com o reagente durante 24 horas. Decantado depois o líquido claro e lavado abundantemente o inso-

lúvel, a solução obtida foi dividida em duas partes: uma parte *A)* na qual foi, por repetidas vezes, adicionado cloreto de bário para arrastar com a precipitação o rádio que por ventura existisse na solução; uma parte *B)* que foi submetida directamente à dosagem. Os resultados foram os seguintes:

Solução *A)*

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 4	0,71
6	0,10
10	0,12

Solução *B)*

Idade da solução	mgr. de Ra elemento por tonelada
Dias: 4	0,18
6	1,18
9	1,18

Nas seis determinações a curva da radioactivadade induzida indicou tratar-se de emanação de rádio.

Como se vê, neste ensaio o ácido sulfúrico dissolveu algum rádio, e o bário não arrastou todo o rádio que estava em solução. Observam-se na solução *A)* as variações que desaparecem na solução *B)*.

Variações, e tão irregulares, não podem ser explicadas pela coexistência nas soluções experimentadas de elementos pertencentes às duas famílias do Tório e do Actínio.

Ocorre-nos estarmos em presença duma emanação diferente das três emanações até hoje conhecidas. ¿Existe uma nova família de substâncias radioactivas aos elementos da qual são devidos os fenómenos observados?

A existência dum novo elemento, pai duma quarta emanação a qual tenha uma vida relativamente longa, seria talvez a maneira de explicar alguns dos fenómenos observados.

O facto de obter variações tão consideráveis conforme os métodos de ataque demonstra que nenhum dos métodos empregados nas nossas experiências dava o ataque e a solução completa do suposto novo elemento, o qual evidentemente não segue as reacções do Rádio. Êste elemento seria um produto sólido, activo ou não, o qual directamente ou indirectamente daria origem a uma emanação activa.

Neste ano, como disse, recomecei o trabalho do estudo e da separação dêste hipotético elemento. Os métodos empregados são os mais cuidadosos e as causas de erros acidentais são evitadas o mais possível. Os resultados obtidos confirmam as variações já observadas com o sr. Scal. Para maior exactidão, em cada medida foi feita a comparação com uma solução padrão que eu mesmo tenho preparado, prévia dosagem pelos raios gama. Esta solução, que foi preparada tomando como ponto de partida rádio extraído de minério português, deu logar ela mesmo a oscilações ligeiras mas sensìvelmente análogas às observadas nas soluções do minério.

Lisboa, Laboratório de Radioactividade
do Instituto Superior Técnico, Junho de 1921.

NOTA

Ao receber as provas de imprensa destas notas experimentais, estou de posse de alguns elementos, tirados dos estudos, que, como disse, tinha em andamento, e que me orientam talvez mais exactamente com relação às causas das anomalias observadas.

De facto, abandonando as soluções experimentais em repouso durante bastante tempo nos recipientes empregados para a acumulação da emanação, estas apresentaram notáveis alterações na sua composição física: quási tôdas tornavam-se mais ou menos turvas e algumas até depositaram nas paredes dos recipientes tenuíssimas camadas sólidas.

Evidentemente se estas precipitações são, como de resto é provável, radíferas, podem muito bem explicar as diminuïções observadas nas quantidades de emanação, pois pela passagem duma parte de rádio ao estado sólido, tem que diminuir o *emanating power* da solução.

A causa destas precipitações lentas deve procurar-se seja na continuação de precedentes reacções ainda não acabadas, seja uma vagarosa e nova reacção determinada pelas paredes dos recipientes não completamente inatacáveis. Talvez não deixe de ter alguma influência o ácido carbónico que juntamente com o ar atravessa a solução durante as operações de medida, que pode precipitar algum rádio no estado de carbonato; talvez esta é a causa das variações observadas na actividade da solução padrão.

Mais difícil é dar uma explicação do fenómeno do aumento da emanação que resulta dos tres primeiros ensaios. ¿Podem-se admitir para isto, reacções inversas?

Não excluindo então nos fenómenos enunciados a possibilidade da intervenção dum novo elemento radioactivo pai duma nova emanação, uma conclusão certa parece-me poder tirar dêste trabalho e é a seguinte: «Para efectuar a dosagem do rádio contido nos minérios pelo método da emanação, não é conveniente empregar soluções radíferas que contenham, além do rádio, outros elementos. O melhor é, depois de obtida a solução radífera do minério, separar nela, por precipitações múltiplas, o sulfato de bário radífero. Este, depois será transformado, pelas vias ordinárias, em sal solúvel e submetido às medidas. Desta forma tôdas as comparações serão feitas sôbre soluções completamente semelhantes, eliminando, senão tôdas, algumas das causas em êrro.»

As experiências enumeradas, que aliás representam apenas as mais características das muitas efectuadas, demonstram a dificuldade que se encontra em dissolver e separar completamente o rádio, para a dosagem, nos minérios. O ataque que eu aconselho, como o mais seguro, é o alcalino: atacar o minério pelo carbonato de sódio, filtrar, lavar ate completa eliminação dos sulfatos solúveis, atacar o resíduo do filtro pelo ácido clrorídrico e lavar. Repetir o ataque sôbre o insolúvel e juntar as duas soluções. Do líquido obtido separar-se há o rádio juntando ácido sulfúrico e por repetidas vezes cloreto de bário.

Lisboa, Laboratório de Radioactividade,
do Instituto Superior Técnico, Agôsto de 1924.

A PETROGRAFIA DO CÉU

CONTRIBUIÇÃO ESPECTROGRÁFICA PARA O ESTUDO DOS METEORITES PORTUGUESES

PELO

Dr. A. PEREIRA-FORJAZ
Professor da Universidade de Lisboa

A espectroscopia dos meteorites foi brilhantemente iniciada por Norman Lockyer, um dos fundadores da Astronomia física. Os processos técnicos utilizados pelo conhecido sábio inglês, falecido em 1920, encontram-se descritos, quer em notas apresentadas à Royal Society (1) quer na sua esplêndida Memória *The Meteorite Hypothesis*. Como é natural, êsses processos, remontando ao fim do último século, acham-se hoje antiquados.

Em 1895 o mestre da espectroscopia francesa contemporânea, Conde de Gramont, a pedido do distinto cristalógrafo Friedel, aplicou pela primeira vez a um meteorite do *Cañon Diablo* o seu novo e fecundo processo de análise espectral, por meio de sais fundidos (2); caracterizou assim, com nitidez, o níquel e o fósforo, numa observação pouco minuciosa. Como possuímos um fragmento de ferro meteorítico, que fazia parte da colecção particular do falecido naturalista Jacinto Pedro Gomes, fragmento colhido em Ponte do Lima (Minho), achámos de interêsse scientífico aplicar a êsse exemplar a espectrografia, pelo processo de Gramont, fazendo uso da instalação descrita promenorizadamente numa nossa Memória anterior (3), introduzindo-lhe ligeiras modificações técnicas, que a experiência nos foi aconselhando.

---

(1) *Roy. Soc. Proc.*, vol. XXX, 1879, pág. 27.
(2) Thèse presentée à la Faculté des Sciences de Paris, Série A, n.º de ordem 850, pág. 198.
(3) *Arquivos da Universidade de Lisboa*, vol. III, 1916. Citada por De Gramont em *Comptes-Rendus*, t. CLXVI, 1918, depois do seu extracto ter sido apresentado à Academia Francesa por Armand Gautier, *C.-R.*, t. CLIV, 1917.

*
* *

O estudo dos minerais precipitados dos espaços cósmicos sôbre a crusta terrestre, atraiu, desde a mais remota antiguidade, a atenção dos povos orientais.

Papiros chineses fazem passageira menção às *pedras caídas do céu* alguns séculos antes da nossa era. Como era lógico, a superstição imiscuiu-se no assunto e não era raro encontrar o nome duma divindade ligada ao aparecimento dos meteorites: *Egalabalo*, entre os fenícios; *Jupiter Ammon*, na Líbia. Para os frígios, à *Mãe dos deuses* se deveria atribuir a visita dêsses corpos celestes.

As primeiras análises destas estranhas ocorrências mineralógicas devem-se a Howard, a Bournon e ao famoso Vauquelin.

Vauquelin utilizou nos seus estudos os meteorites recolhidos em 1798, na Índia.

Hoje encontra-se patente, no Museu de Paris, uma colecção de meteorites, de variadas origens, iniciada pelos esforços do conhecido geólogo Daubrée.

Admite-se correntemente a hipótese de Chladni para explicar a queda dos meteorites na litosfera: minúsculos corpos planetários, fragmentos de planetas, constituídos pelo choque ou pela explosão determinada por altas pressões internas, sofrem atracção newtoniana suficientemente intensa, dentro duma determinada zona de acção e são projectados na terra.

A hipótese Laplace-Smith-Poisson, em que se atribúi os meteorites a dejecções de vulcões lunares, tem menor número de partidários.

Recordemos também que alguns fenómenos meteorológicos, de incontestável interêsse, têm sido relacionados com estes minerais exógenos; segundo a hipótese Mayer-Waterston-Thomson a luz zodiacal seria proveniente duma corrente de meteorites (1).

*
* *

Por um estudo analítico sumário reconhecemos que o meteorite português de Ponte de Lima (Minho) era constituído

(1) Veja-se, entre outras publicações: Daubrée, *C.-R.*, t. LXII, págs. 300, 309, 680, 1866.
Daubrée, *Bulletin de la Soc. Geol. de France*, 2.ª sér., t. XXIII, pág. 391.
Stanislas Meunier, *Revue des Cours Scientifiques de la France et de l'étranger*, n.º 19, de 6 de Abril de 1867, 4.º ano, etc.

principalmente por ferro. Como é sabido o espectro do ferro contém numerosíssimas riscas; era de presumir, pelos resultados atingidos pelos anteriores experimentadores, que ao lado do ferro se encontrassem vestígios doutros elementos. Resolvemos, por conseqüência:

1) Não fazer uso dos prismas de quartzo e de quartzo e fluorite, limitando-nos a empregar o *crown uviol*.

2) Fotografar na mesma chapa, sucessivamente:

a) CO^3Li^2 + *sal de ferro;*

b) CO^3Li^2 + *meteorite;*

c) *Liga de Edder.*

Desta maneira poderíamos fàcilmente eliminar, ao comparador ou ao microscópio munido de ocular micrométrica, as riscas provenientes das impurezas do carbonato de lítio, utilizado como fundente e as que diziam respeito ao ferro; convém indicar que pela técnica utilizada só raramente aparecem riscas de metalóides, que são eliminadas pela self-indução [1]. Só fizemos, portanto, medições, relativas às riscas do espectro intermediário não comuns com o espectro obtido pela dissociação do sal de ferro no carbonato de lítio. Nos cálculos utilizámos a fórmula de interpolação de Hartmann $\lambda = \lambda_0 - \frac{C}{S - S}$; simplificámos êsse fastidioso trabalho empregando sempre logaritmos e substituindo o cálculo de C pelo cálculo de log. C. Dividimos os nossos *clichés* em quatro regiões, para cada uma das quais se fez o cálculo das três constantes.

Utilizamos na identificação das riscas o último comunicado de Gramont [2] na Academia Francesa, sôbre riscas últimas.

Resumimos no seguinte quadro os resultados obtidos:

λ_1	λ_2	λ_3	s_1	s_2	s_3	λ_0	log. C	s_0
5894	6103	6657	0,0	21,5	51,0	5074,4	4,93701	105,73
5545	5676	6022	0,0	29,1	73,0	4905,4	5,03360	170,25
5045	5372	5545	0,0	30,8	102,0	5693,3	4,29271	— 30,27
3740	3995,3	4246,0	6,0	41,2	101	5304,5	5,51922	—211,26

(1) Vid. *Spectres d'étincelles*, par G.-A. Hemsalech, Paris, 1901.

(2) *C.-R.*. t. CLXXI, n.º 23, Dezembro de 1920, pág. 1166.

Conhecendo estas constantes passámos a fazer o cálculo dos comprimentos de onda das riscas desconhecidas; eliminámos, sistemàticamente, as riscas do ferro. Os resultados estão expressos nas quatro tabelas seguintes:

TABELA I

Análise espectroscópica dum meteorite de Ponte de Lima (Minho)

Aparêlho de medição: *Microscópio de Zeiss, modelo grande, com objectiva de Leitz.*

I a (div. 10) tubo de tiragem em 150cc e ocular micrométrica de Leitz 2.

Ótica: vidro.

Leituras S feitas com o microscópio	Comprimentos de onda calculados com a fórmula de Hartmann e Angströms	Elementos a que são atribuídas as riscas observadas	Comprimentos de onda teóricos
0,0	—	Zinco (Edder)	5894
11,5	—	Zinco (Edder)	6022
21,5	—	Zinco (Edder)	6103
39,0	6371,2	Estrôncio	6380
49,8	66221,9	—	—
51,0	—	Chumbo	6657

TABELA II

Leituras S	Comprimentos de onda, λ, calculados	Elementos a que são atribuídas as riscas	Comprimentos de onda teórica
0,0	—	Chumbo (Edder)	5545
23,5	—	Chumbo (Edder)	5608
29,1	—	Ar	5676
36,0	5709,9	Magnésio	5711,6
38,0	5722,1	Alumínio	5723,5
49,8	5802,0	Potássio	5802,0
73,0	—	Zinco (Edder)	6022