

MATÉMATICA

DE COIMBRA

Est. ~~G~~
Tab. ~~18~~
N.º ~~13~~

BIBLIOTECA MATEMÁTICA
MSC RJ
13
FCT
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

M.

Por

Francisco, L.-B.

51 N 10

51 N 271

SINX

$$\sin^2 d = 1 - (\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c)$$

$$\sin^2 d = (1 - \cos^2 a) (1 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

$$\sin^2 d = 1 - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c$$

$$\frac{\sin d}{\sin a} = \sqrt{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}$$

$$\frac{\sin d}{\sin a} = \sin d \quad \frac{\sin d}{\sin a} = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

$$\cos d = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos a$$

$$\cos A \cos C = -\sin B \sin C \quad \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin d}$$

$$\cos d = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

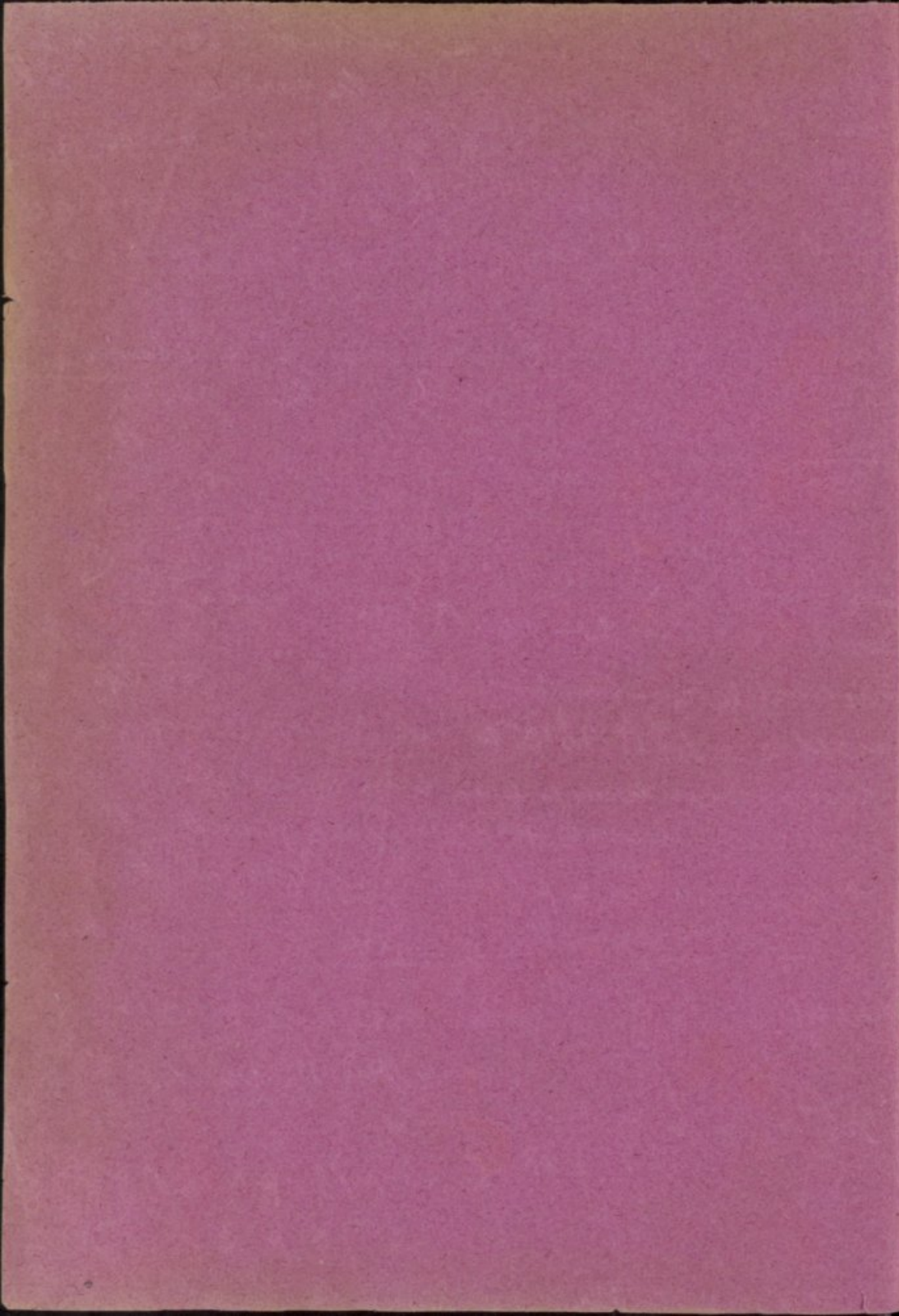
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos B$$

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \frac{\sin a \sin B \sin c \cos d}{\sin d}$$

$$\cos a (1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos c \cos B + \frac{\sin a \sin B \sin c \cos d}{\sin d}$$

$$\sin a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cos d$$

$$\cos B \cos c = -\sin B \cos d + \sin a \cos a$$



CURSO COMPLETO

DE

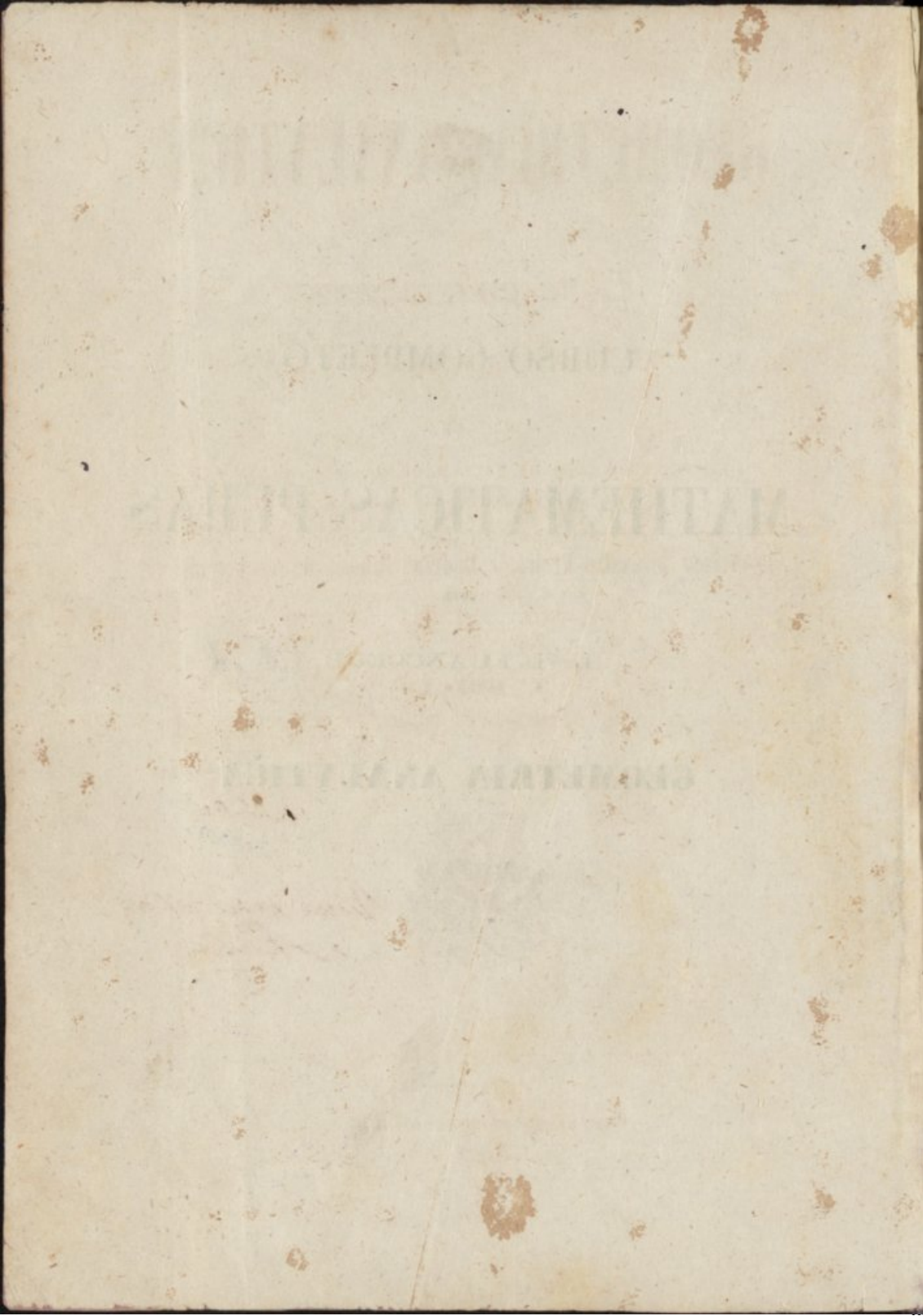
MATHEMATICAS PURAS

POR

L.-B. FRANCOEUR

(1855)

GEOMETRIA ANALYTICA



K25

GEOMETRIA ANALYTICA

POR

L.—B. FRANCOEUR

NOVAMENTE TRADUZIDA, CORRECTA E AUGMENTADA

PELOS

LENTES JUBILADOS DA FACULDADE DE MATHEMATICA
NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Francisco de Castro Freire, e Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto

3.^ª EDIÇÃO



*Para uso do
Aula*

COIMBRA
IMPRESA DA UNIVERSIDADE
1871



N.º de Reg. 3086

ADVERTENCIA

Nas edições antecedentes a *Geometria Analytica* achava-se repartida pelos 2.º e 3.º volumes, e intercalada no primeiro d'elles com outras partes do curso de mathematicas puras, cujo ensino passou mais tarde para os lyceus.

Esta ultima circumstancia levou-nos, na presente edição, a reunir em um volume toda a *Geometria Analytica*, com exclusão d'aquellas partes, para commodidade do ensino, e para que os alumnos só tenham que munir-se em cada anno dos volumes cujas materias devem estudar.

Parece-nos que a mesma circumstancia tornará uteis para este fim, nas citações da *Algebra Elementar*, da *Geometria Synthetica*, e da *Trigonometria Rectilinea*, as tabellas de correspondencia entre os numeros citados e os analogos dos compendios respectivos, que se addicionarão.

GEOMETRIA ANALYTICA

PRIMEIRA SECÇÃO

APPLICAÇÃO DA ALGEBRA Á GEOMETRIA ELEMENTAR

Problemas sobre as linhas

1. Viète e Descartes conceberam a idéa de applicar a Algebra ás questões geometricas; e esta idéa foi depois a origem das mais transcendentés descobertas em todos os ramos das Mathematicas.

Introduzindo nas formulas analyticas as grandezas geometricas, submettem-se estas grandezas ás combinações da Algebra, por meio das quaes se conseguem facilmente resultados que se obteriam com difficuldade pela simples Geometria. Porque, se a Geometria tem a vantagem de nunca perder de vista o objecto principal, mostrando claramente a cadêa de proposições que prende os primeiros axiomas ás suas ultimas consequencias, a Algebra tem as da riqueza e concisão da linguagem, e do espirito de investigação com que procede.

Na verdade estas reflexões levam naturalmente a preferir na Geometria elementar os methodos directos, que, não se fundando senão em principios directamente ligados com as conclusões que se têm em vista, permitem, por assim dizer, isolar cada theorema, e imprimir-lhe o cunho d'uma verdade tão clara como o axioma de que é deduzida. Mas, ao passo que as questões se complicam, este methodo, que se chama *Synthese*, vai perdendo o character de evidencia, que é a sua melhor qualidade;

e a *Analyse* ganha vantagem pela fecundidade dos seus recursos, e pela elegancia dos artificios, com que generalisa os resultados e simplifica os processos (*).

Os problemas seguintes confirmarão estas verdades.

2. Medir a distancia $AD = x$ (fig. 1) do ponto A a um ponto inaccessible D.

Tomando no alinhamento AD um ponto accessivel C, forme-se o triangulo arbitrario ABC, e meçam-se os lados $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (**). Depois tome-se em BC um ponto qualquer E, d'onde se veja D na direção DEF; e meçam-se $AF = d$, $EC = g$.

Posto isto, se imaginarmos EG parallela a AB, teremos as equações

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{CG} = \frac{AB}{EG}, \quad \frac{DA}{AF} = \frac{DG}{EG},$$

que, pondo as letras que representam as linhas, e attendendo a ser

$$DG = DA - AG = DA - (AC - CG) = x - b + CG,$$

dão

$$CG = \frac{bg}{a}, \quad EG = \frac{cg}{a}, \quad \frac{x - b + \frac{bg}{a}}{d} = \frac{\frac{cg}{a}}{a};$$

por conseguinte

$$x = bd \frac{g - a}{cg - ad},$$

que, no caso de ser $BF = AF$, ou $c = 2d$.

se torna em

$$x = b \frac{g - a}{2g - a}.$$

(*) Sobre a comparação da *Analyse* com a *Synthese* podem tambem consultar-se os nn. 13, 14, 15, da *Nota sobre as propriedades das linhas trigonometricas* do sr. Sebastião Corvo d'Andrade, lente de mathematica na Universidade.

(**) Sempre que designarmos por A, B, C, os angulos d'um triangulo, chamaremos a, b, c, os lados oppostos.

Emfim, substituindo na expressão de x os valores numericos das linhas a, b, c , isto é, a razão d'estas linhas com a sua unidade, e practi-cando as operações indicadas, teremos o valor numerico da incognita.

3. *Achar a relação entre os lados a, b, c , do triangulo ABC (fig. 2) inscripto no circulo do raio R .*

Sendo BD o diametro, o quadrilatero $ABCD$ (Geom. n.º 88) e os triangulos rectangulos BCD, BAD , dão

$$2Rb = c \cdot CD + a \cdot AD, \quad CD = \sqrt{4R^2 - a^2}, \quad AD = \sqrt{4R^2 - c^2};$$

logo
$$2Rb = c\sqrt{4R^2 - a^2} + a\sqrt{4R^2 - c^2} \dots \dots \dots (a);$$

equação, que resolve o problema proposto, e dá uma das quatro quanti-dades a, b, c, R , quando se conhecem as outras tres.

I. *Dadas as cordas c, a , de dois arcos AB, BC , tira-se da equação (a) o valor da corda b do arco ABC igual á somma de AB e BC .*

Se os arcos dados são eguaes, é $a = c$, e a equação (a), que se reduz

então a
$$Rb = a\sqrt{4R^2 - a^2},$$

dá a corda b d'um arco, quando se conhece a corda a da metade do mesmo arco.

II. *Achar o raio R do circulo circumscripto ao triangulo ABC (fig. 2).*

Quadrando a equação (a), fica só um radical; depois transpondo os termos racionais, e quadrando, desaparece este radical, e tira-se

$$R = \frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

Decompondo em factores a differença dos quadrados que está debaixo do radical, reduz-se esta differença a

$$(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2), \text{ ou } [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2];$$

e decompondo do mesmo modo cada um d'estes ultimos factores, dá-se

a R a fórmula, accommodada ao uso dos logarithmos,

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(c+b-a)}},$$

ou

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

sendo o perimetro $2p = a + b + c$.

III. *Achar a area z d'um triangulo, conhecidos os tres lados a, b, c.*
 Abaixando a perpendicular BD (fig. 3). temos (Geom. n.º 69),

$$AD = x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \quad BD = \sqrt{c^2 - x^2};$$

e substituindo na expressão da area, $z = \frac{1}{2} b \cdot BD$, resulta

$$z = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

O raio do circulo circumscripto (II) é pois $R = \frac{abc}{4z}$.

IV. *Achar o raio r do circulo inscripto em um triangulo dado.*

As areas dos triangulos AOB, AOC, BOC, (fig. 4) são $\frac{1}{2} cr$, $\frac{1}{2} br$, $\frac{1}{2} ar$;

e a sua somma é $z = \frac{1}{2} (a + b + c) r = pr$;

logo $r = \frac{z}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

V. *Achar a area d'um quadrilatero ABCD (fig. 5).*

Tire-se a diagonal $AC = b$, que dividirá o quadrilatero em dois triangulos ABC, ADC. Tomando esta diagonal por base commum dos dois

triangulos, e chamando h, h' , as alturas d'elles, a area procurada será

$$\frac{1}{2} b (h + h').$$

Ou tambem: abaixem-se as perpendiculares DE, CF, a AB (fig. 6), e

sejam $AB = a, AE = b, BF = b', DE = h, CF = h'$.

Como o quadrilatero se compõe dos triangulos ADE, FCB; e do trapézio EDCF, teremos

$$ABCD = \frac{1}{2} bh + \frac{1}{2} b'h' + \frac{1}{2} (a - b - b') (h + h'),$$

ou $ABCD = \frac{1}{2} (a - b) h' + (a - b') h.$

Quando uma das perpendiculares, DE, ou CF, cair fóra do quadrilatero (fig. 7), AE, ou BF, terá posição contraria á que suppõe a fig. 6; e para lhe applicar a formula precedente será necessario mudar b em $-b$, ou b' em $-b'$.

VI. Dado o triangulo ABC, levantar uma perpendicular EF sobre a base AC, de modo que a area do triangulo AEF tenha com a de ABC a razão conhecida $m : n$ (fig. 8).

Chamando b e x as bases AC e AE, h e y as alturas BD e EF, dos triangulos ABC e AEF, e fazendo $AD = k$, a condição do problema relativa á razão das areas, e a similitude dos triangulos AEF e ABD, dão

$$\frac{\frac{1}{2} xy}{\frac{1}{2} bh} = \frac{m}{n}, \quad \frac{y}{x} = \frac{h}{k}.$$

Eliminando pois y , resulta $x = \sqrt{\frac{bkm}{n}}.$

Se fosse $x > k$, o ponto E estaria em H, da outra parte de D, e o triangulo AF'H não se conteria em ABC. Este caso tem lugar quando é

$$bm > kn, \text{ ou } \frac{m}{n} > \left(\frac{k}{b} = \frac{AD}{AC} \right).$$

4. Conhecendo o lado $AB = a$ d'um polygono regular inscripto no circulo de raio R , achar o lado $AC = x$ do polygono regular inscripto de dobrado numero de lados (fig. 9).

Tirando OC perpendicular a AB , e chamando z o raio OI do circulo inscripto, temos

$$x^2 = 2R(R - z), \quad z^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

Por exemplo $a = R$, lado do hexagono regular inscripto, dá $x = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ para lado do duodecagono inscripto; $a = R/\sqrt{3}$, lado do triangulo equilatero inscripto, dá $R = 3$ para lado do hexagono inscripto; etc.

Tambem se pode calcular o lado $EF = y$ do polygono regular circumscripto semelhante ao inscripto, cujo lado $AB = a$ se conhece. Porque os

triangulos semelhantes AOI , EOC , dão $\frac{z}{R} = \frac{a}{y}$; e conseguintemente y determina-se pelas duas equações

$$z^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2, \quad y = \frac{aR}{z}.$$

Por exemplo $a = R/\sqrt{2}$, lado do quadrado inscripto, dá $y = 2R$ para lado do circumscripto; $a = R/\sqrt{3}$, lado do triangulo equilatero inscripto, dá $y = 2R/\sqrt{3}$ para lado do circumscripto, etc.

5. D'estas formulas facilmente se deduz a razão approximada π do diametro para a circumferencia, ou a semicircumferencia cujo raio é 1.

Para isso, suppondo $R = 1$ nas equações precedentes, o que as torna

$$\text{em} \quad z = \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}, \quad x = \sqrt{2 - 2z}, \quad y = \frac{a}{z},$$

e partindo d'um polygono conhecido, por exemplo do hexagono cujo lado é $a = 1$, acharemos pela primeira e pela segunda equação o lado x do duodecagono inscripto

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517638;$$

depois com $a = 0,517638$ acharemos o lado do polygono inscripto de 24

lados $x = 0.26105238$; e assim por diante. Por quatro operações d'estas obteremos o lado do polygono inscripto de 96 lados, $x = 0.065438166$; e tomando-o por a na primeira e na terceira equação, acharemos o lado y do polygono semelhante circumscripto. Emfim, multiplicando por 48 os lados d'estes polygonos, inscripto e circumscripto, teremos os seus semiperimetros 3,1410 e 3,1427, entre os quaes π está comprehendido: d'onde resultam $\pi = 3,14$, aproveitando somente as decimaes communs.

Como os perimetros dos polygonos se approximam tanto mais da circumferencia, e indefinidamente, quanto maior é o numero dos seus lados, caminharemos indefinidamente para o verdadeiro valor de π augmentando esse numero. Em geral, calculado o lado a de um polygono regular

inscripto de n lados, e o lado $y = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}}$ do circumscripto semelhante, os semiperimetros d'estes dois polygonos serão

$$\frac{1}{2}na, \frac{\frac{1}{2}na}{\sqrt{(1 + \frac{1}{2}a)(1 - \frac{1}{2}a)}};$$

e π ficará comprehendido entre elles, approximando-se tanto mais de ambos quanto maior for n .

D'este modo se forma a tabella seguinte:

NUMERO DE LADOS	SEMIPERIMETROS	
	Inscripto	Circumscripto
96.....	3,1310319.....	3,1427146
192.....	3,1414524.....	3,1418730
384.....	3,1415576.....	3,1416630
768.....	3,1415839.....	3,1416101
1536.....	3,1415905.....	3,1415970
3072.....	3,1415921.....	3,1415937
6144.....	3,1415925.....	3,1415929
12288.....	3,1415926.....	3,1415927

E continuando assim, obter-se-ha o numero dado na Geometria

$$\pi = 3,1415926535897932.$$

Construções geometricas

6. A arte de resolver os problemas de Geometria consiste em os tractar como se estivessem resolvidos; raciocinar nesta hypothese sobre as propriedades da figura, investigando a sua relação com algumas já conhecidas que lhe sejam analogas; e, achada assim a lei que estabelece as relações entre as diferentes partes do systema, concluir d'ellas as expressões das incognitas. Mas estes processos mal se podem sujeitar a regras geraes, devendo principalmente o exercicio e a sagacidade do geometra indicar-lhe o caminho que mais convem seguir nos casos particulares.

Com o auxilio da Algebra, escolhendo acertadamente as incognitas, conseguem-se muitas vezes soluções mais elegantes; conhece-se o numero d'ellas com mais promptidão e clareza; e ajuiza-se mais facilmente da possibilidade ou impossibilidade, determinação ou indeterminação, do problema. Para isso, imaginada a figura como se o problema estivesse resolvido, designam-se por letras as diversas linhas que a compõem; depois com os principios sabidos reduzem-se a equações as condições da questão, ou as propriedades da figura essencialmente connexas com essas condições; e finalmente acham-se pelo calculo as expressões das incognitas.

Se as linhas da figura, representadas pelas letras, são dadas em numeros, as incognitas determinam-se numericamente pelas operações arithmeticas que as suas expressões indicam; mas se aquellas linhas não forem dadas em numeros, e conservarem a fórma de continuidade, assignar-se-ha a grandeza das incognitas por meio de processos geometricos, que serão tanto mais elegantes, quanto for mais simples a figura que os representar.

A esta ultima operação dá-se o nome de *construção geometrica* do valor da incognita.

7. Do calculo algebrico applicado aos problemas geometricos só podem ser elementos as razões das linhas umas com as outras; de modo que uma linha A entra nelle como tendo certa razão com outra linha B, que

se pode tomar por unidade: e então $\frac{A}{B}$ representa um numero abstracto, ao qual é permitido substituir a razão $a:b$ d'outras grandezas, com tanto que seja $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Mas qualquer combinação dos elementos $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \dots$

por multiplicação, divisão, redução ao mesmo denominador, etc., dá resultados numericos; e por isso, se uma expressão se compõe de termos não abstractos, estes termos devem ser *homogeneos*, isto é, *ter o mesmo numero de factores*, para que se reduzam todos a numeros, quando forem divididos pela mesma potencia conveniente da unidade. Logo, quando as letras a, b, c, \dots que entram numa formula, designam linhas, os termos devem ser homogeneos: não o sendo explicitamente, alguma linha r se tomou por unidade; e deverá por isso introduzir-se nos diversos termos o factor r e as potencias de r necessarias para restabelecer a homogeneidade (*).

Assim, daremos ás expressões $\frac{2a^4c + ab^3 - d}{b^4 + a^4 - c}, \frac{a - b}{1 + ab}, \sqrt{\left(\frac{1 \pm a}{2}\right)},$

a forma $\frac{2a^4c + ab^3r - dr^4}{b^4 + a^4r - cr^4}, \frac{ar^2 - br^2}{r^2 + ab}, \sqrt{\left(\frac{r^2 \pm ar}{2}\right)},$

para que representem linhas.

Com effeito da ultima, por exemplo, $x = \sqrt{\left(\frac{1 \pm a}{2}\right)},$

resulta $2x^2 = 1 \pm a,$

(*) Uma equação entre quantidades da mesma ou diferente especie não terá logar se não quando poder converter-se em uma relação entre numeros abstractos; de sorte que esta equação subsista, ainda que se mudem as unidades, a que estão referidas as diferentes especies de quantidades que nella entram.

Assim, se a equação tiver logar entre quantidades todas da mesma especie, deverá reduzir-se a uma relação entre numeros abstractos, quando se dividirem todos os seus termos por uma potencia da unidade de grau igual á ordem do termo mais elevado; e por conseguinte deverão todos os termos ser da mesma ordem.

Se na equação entrarem d'uma especie somente duas quantidades l e l' , será necessario que, resolvendo-a em ordem a uma d'estas quantidades, a outra entre em todos os termos da sua expressão, isto é, que uma d'estas quantidades seja igual á outra multiplicada por um factor independente da especie d'ellas, ou $l = Al'$, sendo A composto de quantidades todas de especie diferente de l e l' . (Vej. Mec. de Poisson n.º 23).

que, pela restituição das potencias convenientes de r , se torna em

$$2x^2 = r^2 \pm ar, \text{ ou } x = \sqrt{\left(\frac{r^2 \pm ar}{2}\right)}.$$

Depois de restabelecida a homogeneidade da expressão, pode tomar-se por unidade outra qualquer linha diferente de r .

O grau d'um polygono homogeneo avalia-se pelo numero de factores de qualquer dos seus termos; o d'uma fracção, pela differença entre os graus do numerador e do denominador; e o d'um radical pelo quociente, que se acha dividindo pelo expoente da raiz o grau da expressão que o radical affecta.

Assim os graus de $a^3b^2 + abc^3, \frac{ab^2 - cde}{a + c}, \sqrt[5]{\frac{a^8b^4 + cd^5e^6}{c^2 + d^2}},$

são respectivamente $3 + 2 = 5, 3 - 1 = 2, \frac{12 - 2}{5} = 2.$

Logo: para que uma linha seja representada por uma fracção, deve cada termo do numerador ter mais um factor do que cada termo do denominador; e para que seja representada por um radical, deve o expoente do radical ser igual ao grau da expressão que elle affecta.

As expressões lineares, ou d'uma dimensão, constroem-se por linhas; as de duas dimensões constroem-se por superficies; e as de tres dimensões constroem-se por volumes: tendo antes o cuidado de as tornar homogeneas, se o não forem, pela introduccão de potencias convenientes da linha r , que se tomou por unidade, como factores dos seus termos.

8. Uma fracção linear monomia tem sempre alguma das formas seguintes:

$$x = \frac{ab}{c}, \quad x = \frac{abc}{de}, \quad \dots \quad x = \frac{a_1 \cdot a_2 \dots a_m}{b_1 \cdot b_2 \dots b_{m-1}}.$$

1.º Para construir $x = \frac{ab}{c}$, toma-se uma quarta proporcional a c, a, b , ou applicam-se os theoremas da Geom. n.ºs 72 e 75.

2.º Para construir $x = \frac{abc}{de}$, toma-se primeiro a quarta proporcional, $k = \frac{ab}{d}$, a d, a, b ; e depois a quarta proporcional, $x = \frac{kc}{e}$, a e, c, k .

3.º Para construir $x = \frac{abcd}{efg}$, constroem-se successivamente as tres quartas proporcioaes, $k = \frac{ab}{e}$, $l = \frac{kc}{f}$, $x = \frac{ld}{g}$.

E similhantemente para maior numero de factores.

9. A fracção polynomia $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$

decompõe-se em tres, cujos termos são monomios, escrevendo

$$x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm};$$

e, construida separadamente cada uma d'estas fracções, ajunctam-se as linhas que representam as duas primeiras, e subtrahc-se da somma a linha que representa a ultima.

Mas em $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ é mais simples escrever $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$,

e construir a quarta proporcional a $c, a+b, a-b$.

10. Reduzem-se ao caso precedente as fracções, cujo denominador é polynomio, egualando este denominador a um monomio do mesmo grau,

do qual se tomam arbitrariamente todos os factores, excepto um y , que se construe como acabamos de ensinar.

Por exemplo em
$$x = \frac{abc + def}{ab + cd}$$

faremos
$$ab + cd = ay,$$

e construiremos successivamente as expressões

$$y = \frac{ab + cd}{a} = b + \frac{cd}{a}, \quad x = \frac{abc + def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}.$$

Similhantermente em
$$x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$$

faremos
$$q^2i - klq + cmd = q^2y,$$

e teremos de construir successivamente as expressões

$$y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}, \quad x = \frac{abc^2}{q^2y} + \frac{qh}{y} - \frac{m^3p}{q^2y}.$$

A escolha dos factores da incognita y não é indifferente para a simplicidade das construcções. Assim, para construir $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$, as hypotheses $m = \frac{ab}{c}$, $abc + c^3 = c^2y$, dão

$$m = \frac{ab}{c}, \quad y = m + c, \quad x = \frac{m(c - m)}{y}.$$

11. As construcções de radicaes reduzem-se todas ás das expressões

$$\sqrt{ab} \text{ e } \sqrt{a^2 \pm b^2}.$$

\sqrt{ab} é uma meia proporcional entre a e b , que se pode construir pelo n.º 73 da Geom., ou pelos theoremas dos n.ºs 74 e 75.

Para construir $\sqrt{a^2 + b^2}$, que é a hypotenusa d'um triangulo rectangulo cujos cathetos são a e b , tomam-se $AB = a$ e $AC = b$ sobre os lados do angulo recto BAC (fig. 10), e a hypotenusa é $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Para construir $\sqrt{a^2 - b^2}$, catheto do triangulo rectangulo do qual é b o outro catheto e a a hypotenusa, toma-se $AB = b$ sobre um lado do angulo recto BAC ; e descreve-se do ponto B com o raio a um circulo, cuja intersecção C com AC dará $AC = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ou sobre $BC = a$ como diametro descreve-se um circulo; e de B como centro, e com o raio b , outro circulo, cuja intersecção A com o primeiro determinará a corda $AC = \sqrt{a^2 - b^2}$.

12. Para construir uma expressão affecta de radical quadrado, podemos equalal-a a \sqrt{ay} , sendo a arbitraria; depois construir a expressão de y tirada d'essa equação; e finalmente construir \sqrt{ay} do modo que fica ensinado.

Assim a construcção de $x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}}$ reduz-se ás das expressões

$$y = \frac{ab^2 + cd^2}{a(b + c)}, \quad x = \sqrt{ay},$$

que se fazem como se disse nos n.ºs 10 e 11.

Mas com alguns artificios simplificam-se muitas vezes estas construcções. Fazendo por exemplo $bd = ay$, a construcção de $x = \sqrt{ac + bd}$, reduz-se ás das expressões

$$y = \frac{bd}{a}, \quad x = \sqrt{a(c + y)}.$$

(Vej. tambem no n.º 14, V. a construcção de $\sqrt{\frac{nk^2}{m}}$, etc.)

13. Outras vezes é mais vantajoso reduzir a construção das expressões radicaes ás de $\sqrt{a^2 \pm b^2}$. Por exemplo a construção de $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$ reduz-se ás de $y = \sqrt{bc}$, $x = \sqrt{a^2 \pm y^2}$.

Para construir $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \dots$ faremos o seguinte:

Com os cathetos $AB = a$, $BC = b$ (fig. 11) construiremos a hypotenusa $y = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$; com os cathetos $AC = y$, $CD = c$, construiremos a hypotenusa $y' = AD = \sqrt{y^2 + c^2}$; e assim por diante, até chegar á ultima hypotenusa $AF = x$.

Para construir $x = \sqrt{ac - fg + mq + rd}$,

faremos $y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$, $x = \sqrt{ay}$;

ou tambem

$y = \sqrt{ac}$, $z = \sqrt{fg}$, $n = \sqrt{mq}$, $t = \sqrt{rd}$, $y' = \sqrt{y^2 + n^2 + t^2}$, $x = \sqrt{y'^2 - z^2}$.

Para construir $x = \sqrt{\left(a^2 - f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}\right)}$,

faremos $y = f \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{ab + cd}}$, $x = \sqrt{a^2 - y^2}$,

cuja construção se pode ainda reduzir ás de

$$z = \sqrt{c^2 + d^2}, t = \sqrt{ab + cd}, y = \frac{fz}{t}, x = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

14. Appliquemos estes principios a alguns problemas.

I. Dividir a recta AC (fig. 12) em duas partes AB e BC, que tenham entre si a razão dada m:n.

Chamando x e y as duas partes AB e BC da recta $AC = a$, as condições do problema dão

$$y = a - x, \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}; \text{ e logo } x = \frac{am}{m+n}.$$

Para construir este valor, tomemos na linha indefinida CE as partes $CD = m$, $DE = n$, no caso de serem m e n linhas; ou tomemos $CD = mr$, $DE = nr$, no caso de serem m e n numeros, e r uma unidade linear arbitraria: depois tiremos AE, e por D a parallela BD. Será $x = AB$.

II. *Tirar pelo ponto A (fig. 13) uma recta AI tal, que a parte d'ella IK, comprehendida entre as duas parallelas dadas BC, DE, tenha um comprimento determinado c.*

Sobre DE abaixe-se de A a perpendicular AG, e façam-se $AG = a$, $FG = b$, $GI = x$.

Os triangulos AKF, AGI, dão $\frac{AI}{AG} = \frac{IK}{FG}$, $AI^2 = AG^2 + GI^2$,

ou, em virtude da condição do problema,

$$\frac{AI}{a} = \frac{c}{b}, \quad AI^2 = a^2 + x^2; \text{ e logo } x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{c^2 - b^2};$$

por onde se vê, que o problema só é possível, quando $b < c$, ou $FG < IK$.

Para construir x , descreva-se do centro F, e com o raio c , o arco HH' ; e tire-se depois AI parallela a FH. Será

$$GH = \sqrt{c^2 - b^2}, \text{ e } a:b::IG:HG;$$

por conseguinte $IG = \frac{a}{b} \sqrt{c^2 - b^2} = x$.

Ha outra solução GI' , a qual é tambem indicada pelo duplo signal de x .

III. *Por dous pontos dados A, B, (fig. 14) fazer passar uma circumferencia que seja tangente á recta dada DD'.*

Como tres pontos determinam um circulo, basta achar o ponto de contacto D. Produza-se a recta AB até encontrar em C a recta dada; e divida-se AB em duas partes eguaes no ponto I. Fazendo $CI = a$, $BI = b$, $CD = x$, a condição de tangencia dá

$$x^2 = CA \cdot CB = (a - b)(a + b); \text{ e logo } x = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Para construir este valor, descreva-se sobre CI como diametro a circumferencia CEI, e tire-se a corda $EI = b = AI$. Será $CE = \sqrt{a^2 - b^2} = x$; e tomando $CD = CE$, teremos o ponto de contacto D.

Ha outra solução em D' dada pelo valor negativo de x .

IV. Dadas as parallelas AE, BF (fig. 15), e a perpendicular a ambas AB: tirar uma secante EF tal, que a metade AC de AB seja meia proporcional entre os segmentos AE e BF.

Pondo $AC = a$, $AE = x$, $BF = y$, a condição dá $a^2 = xy$; por conseguinte o problema é indeterminado, e admite uma infinidade de soluções (Alg. elem. n.º 125). Entre os diversos modos de as obter, o que se segue é muito elegante.

Supponhamos que a perpendicular a AB levantada em C encontra a secante procurada EF num ponto D, e que por este se tira H' perpendicular a CD: os dous triangulos rectangulos EDI, FDI', serão eguaes, por serem $ID = I'D$, $EDI = FDI'$; e por conseguinte será $AE = AI - EI$, $BF = AI + EI$, ou, pondo $CD = r$,

$$x = r - EI, \quad y = r + EI, \quad x + y = 2r.$$

Eliminando pois y entre esta ultima equação e $xy = a^2$, teremos

$$x^2 - 2rx + a^2 = 0, \text{ ou } x = r \pm \sqrt{r^2 - a^2},$$

sendo r arbitraria.

Para construir este valor, que só pode ser real quando se tomar o ponto D de modo que seja $r > a$ ou $CD > AC$, descreveremos do centro D com o raio r um circulo, cujas intersecções com AE' e BF darão

$$EI = \sqrt{ED^2 - DI^2} = \sqrt{r^2 - a^2} = I'F;$$

e os pontos E e F satisfarão ao problema, assim como E' e F'.

Cada centro D dá assim duas soluções EF, E'F'.

V. *Pelo ponto dado A (fig. 16) tirar uma corda BAD, cujos segmentos BA, AD, estejam entre si na razão dada m : n.*

Tire-se o diametro HAG; e sejam $CH = r$, $CA = b$, $AD = x$.

Pelas propriedades das cordas, é $HA \cdot AG = BA \cdot AD$,

ou
$$(r - b)(r + b) = BA \cdot x;$$

e pela condição do problema é
$$\frac{BA}{x} = \frac{m}{n}.$$

Eliminando pois BA entre estas equações, e pondo $\sqrt{r^2 - b^2} = k$, resulta

$$\frac{m}{n} x^2 = k^2, \text{ ou } x = k \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{k}{m} \sqrt{mn},$$

que facilmente se construirá por uma meia proporcional \sqrt{mn} entre m e n , e depois por uma quarta proporcional a m, k, \sqrt{mn} . Mas é preferivel o processo seguinte.

Sobre uma linha indefinida (fig. 17) tomem-se DF, EF, taes que tenham entre si a razão dada $m : n$; depois descreva-se sobre o diametro DE o semicirculo DAE, e no ponto F levante-se FA perpendicular a DE. Tirando as linhas AD, AE, é (Geom. n.º 74)

$$\frac{AD^2}{AE^2} = \frac{DF}{FE} = \frac{m}{n}; \text{ e por conseguinte } x = k \cdot \frac{AE}{AD}.$$

Tomando pois sobre AD, produzida se for necessario, a parte $AB = k$, e tirando BC paralela a DE, o ponto C resolverá o problema, e será $x = AC$.

VI. *Dado um polygono, construir outro semelhante, cuja superficie tenha com a do primeiro a razão dada m : n.*

Seja A um lado do polygono dado, e x o seu homologo desconhecido. As condições da similhaça dos polygonos, e da razão das superficies, dão

$$\text{superf. do 1.º} : \text{superf. do 2.º} :: A^2 : x^2 :: m : n;$$

logo
$$\frac{A^2}{x^2} = \frac{m}{n}, x = A\sqrt{\frac{n}{m}},$$

expressão que se ensinou a construir no problema precedente. Resta pois construir sobre x , homologa a A , uma figura semelhante á proposta.

A mesma construcção é applicavel aos circulos.

VII. *Achar duas linhas, cuja razão seja a mesma que a de duas figuras semelhantes dadas* $ABC\dots, abc\dots$, (fig. 18).

Tomem-se sobre os lados do angulo recto DAE (fig. 17) as partes AB, AC , que sejam eguaes a duas linhas homologas das figuras propostas, ou que tenham entre si a mesma razão que a d'ellas; e abaixe-se sobre a hypotenusa BC a perpendicular AG . Será

$$\frac{BG}{CG} = \frac{x}{y},$$

chamando x, y , as linhas procuradas.

Se as figuras são dous parallelogrammos, que têm B e b por bases, e H e h por alturas, a equação

$$\frac{x}{y} = \frac{BH}{bh},$$

mostra que, se uma das linhas x, y , é dada, a outra se pode construir por duas quartas proporçionaes; e que, se nenhuma d'ellas é dada, o problema se torna indeterminado. E neste caso, se tomarmos para x uma das linhas B, H , ou para y uma das linhas b, h , a construcção se fará por uma só quarta proporcional; reduzindo-se a questão a construir sobre uma base dada, ou com uma altura dada, um parallelogrammo equivalente a outro dado.

VIII. *Dadas as duas figuras* P, Q , *achar uma terceira* X , *que seja semelhante a* P *e equivalente a* Q .

Seja A um lado de P , e chamemos x o seu homologo de X . As duas condições dão

$$\frac{P}{X} = \frac{A^2}{x^2}, X = Q; \text{ e logo } x = A\sqrt{\frac{Q}{P}}.$$

Construindo dous quadrados M^2 e N^2 equivalentes a P e Q (Geom. n.º 103) ou dous quadrados cuja razão seja a mesma que a de P para Q (VI, fig. 17), a expressão de x reduz-se a

$$x = A \cdot \frac{N}{M},$$

que é uma quarta proporcional a M , A , N .

IX. Construir \sqrt{m} .

Poder-se-hia tomar uma meia proporcional entre m e 1 ; mas é mais simples o processo do n.º 11.

Tomando $AB = 2$, $BC = 1$, nos lados do angulo recto ABC (fig. 11), será a hypotenusa $AC = \sqrt{5}$; levantando CD perpendicular a AC , e tomando $CD = 1$, será a hypotenusa $AD = \sqrt{6}$; e assim por diante, de sorte que $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... serão as diagonaes que por esta construção se vão tirando do ponto A . Se tivéssemos começado por tomar $AB = 1$, $BC = 1$, construiríamos assim os lados $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ do quadrado e do triangulo equilatero inscripto no circulo de raio 1 ; e continuando teríamos as raizes quadradas de todos os numeros inteiros consecutivos.

15. A equação do 2.º grau $x^2 + px = q$,

suppõe (n.º 7) que se tomou por unidade uma linha r . Restituindo-a pois no termo q , e fazendo $m^2 = qr$, fica

$$x^2 + px = m^2, \quad x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}.$$

Os processos até aqui expostos bastariam para construir estas raizes; mas são mais elegantes os seguintes.

1.º Se p e q são negativos, tomando os valores absolutos, será

$$x^2 - px = -m^2, \quad \text{ou } x(p - x) = m^2;$$

isto é, m meia proporcional entre x e $p - x$.

Sobre o diametro $AB = p$ (fig. 19) descreva-se o semicirculo AEB ; levante-se em A a perpendicular AD , e tome-se nella $AD = m$; e finalmente tire-se DEE' parallela a AB , e das suas intersecções E , E' , com o

circulo abaixem-se as perpendiculares EF, E'F', que determinarão as duas raizes $x=AF$, $x=AF'$.

2.º Se p é negativo, e q positivo, temos

$$x^2 - px = m^2, \text{ ou } x(x - p) = m^2,$$

isto é, m meia proporcional entre x e $x - p$.

Com o raio $AD = \frac{1}{2}p$ (fig. 20) descreva-se o semicirculo FAE; no ponto A tire-se a tangente, e tome-se nella $AC = m$; e finalmente tire-se a secante CEF. Esta secante determina as duas raizes $x=CF$, $x=-CE$; por que temos

$$m^2 = CE \cdot CF = CF(CF - p) = CE(CE + p) = -CE(-CE - p).$$

3.º Se p é positivo, tendo q qualquer dos signaes \pm , temos

$$x^2 + px = \pm m^2, \text{ ou } x(x + p) = \pm m^2.$$

A construcção é a mesma que a dos casos precedentes; mas as raizes mudam de signal: por que, substituindo $-x$ em logar de x , esta equação se reduz á d'um d'aquelles dous casos.

EXEMPLOS

X. *Tirar pelo ponto A* (fig. 16) *uma corda BD, cujo comprimento seja c.*

Conservando a notação do problema V, a propriedade das cordas e a condição do problema dão $r^2 - b^2 = k^2 = x \cdot BA$, $BA + x = c$;

e por consequente $k^2 = cx - x^2$, que está no caso 1.º

XI. *Dividir uma recta em media e extrema razão.*

Isto é, dividir AC (fig. 20) em dous segmentos AB, BC, taes que seja $BC = AB \cdot AC$.

Fazendo $AC = a$, $BC = x$, temos

$$x^2 = a(a - x). \quad x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$$

Com os lados $AC = a$, $AD = \frac{1}{2}a$, construa-se o triangulo rectangulo

ADC; será $x = -\frac{1}{2}a \pm CD$: depois com o centro D e com o raio AD descreva-se o semicirculo EAF; será $x = CE$: e finalmente sobre a recta dada tome-se $CB = CE$. Será B o ponto de divisão procurado, que dá a raiz correspondente ao signal superior da expressão de x (vej. Geom. n.º 76, IX).

A segunda raiz, correspondente ao signal inferior, não convém á questão. Para a interpretar (*Alg. elem.* n.º 114), mudaremos x em $-x$ na equação do problema, o que dará

$$x^2 = a(a+x), \quad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \frac{1}{2}a \pm CD;$$

isto é, $x = CF = CB'$, tomando CB' no prolongamento de AC.

Ambas as soluções satisfazem a um problema mais geral, cujo enunciado é o seguinte:

Achar na direcção da recta AC um ponto B ou B', cuja distancia ao ponto C seja meia proporcional entre a distancia ao ponto A e a recta AC.

16. As formulas de duas dimensões, constroem-se reduzindo-as a productos BH, cujos factores são a base e a altura de rectangulos de superficie igual ás expressões propostas.

Assim
$$x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)},$$

fazendo
$$a^2 - b^2 = B^2, \quad cd = H^2,$$

reduz-se ao rectangulo $x = BH$.

Se quizermos que a área procurada seja um parallelogrammo, ou um triangulo, etc., o problema admittirá uma infinidade de soluções, ainda que sejam dadas a base e a altura: por que estas duas linhas não determinam a figura, excepto se, alem d'ellas, for dada outra condição, por exemplo um angulo, a relação dos lados, etc.

A superficie do circulo, que se avalia pelo producto da semicircumferencia pelo raio, equival á de um triangulo que tem por base o diametro

e por altura a semicircumferencia rectificada. Assim, para o raio $R = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ será proxivamente $\frac{22}{7}a\sqrt{\frac{m}{n}}$ a semicircumferencia h ; e construindo um

triangulo com a base $2R$, com a altura h , e com um angulo arbitrario, a sua área equivalerá á do circulo.

17. As formulas de *tres dimensões* constroem-se reduzindo-as a productos ABC de tres factores, e formando parallelipipedos com as arestas A, B, C. Tambem se podem construir por meio de cubos (o que constitue a *cubatura* dos corpos), de tetraedros, de cylindros, etc.

Dos signaes das quantidades na Algebra applicada á Geometria

18. Quando duas figuras só differem uma da outra na grandeza das suas partes, e estas têm a mesma disposição em ambas, as figuras dizem-se *directas*: e se as quantidades $a, b, c, \dots x$, que compõem a primeira, estão ligadas por uma equação $X=0$, esta equação tem igualmente logar para a segunda. Porem se as duas figuras differem ainda pela disposição de algumas das suas partes, de modo que x , por exemplo, que é $b - a$ na primeira, se torne $a - b$ na segunda, as figuras dizem-se *indirectas* (*); e a equação $X=0$, que neste caso tem logar para uma d'ellas, pode carecer d'algumas modificações para se tornar applicavel á outra; o que vamos examinar.

Considerando nos triangulos ABC (fig. 21, e 8) os lados e angulos cuja disposição é a mesma em ambos, qualquer propriedade, derivada da natureza da figura, que estabelecer uma relação entre estas partes, será applicavel a um e outro. Attendamos porem ao segmento CD formado pela perpendicular BD á base; e chamemos x, a, b, c , este segmento, e os lados BC, AC, AB, do triangulo. Teremos

$$BD^2 = c^2 - AD^2 = a^2 - x^2, \text{ ou } c^2 = a^2 - x^2 + AD^2 \dots \dots (1),$$

equação applicavel a ambas as figuras. Mas se em logar de AD substituirmos as suas expressões

$$AC + CD = b + x \text{ (fig. 21), } AC - CD = b - x \text{ (fig. 8),}$$

(*) Carnot, auctor d'esta theoria que desenvolveu na sua excellente *Geometria de Posição*, chama *correlativas directas* as figuras directas, e *correlativas inversas* as figuras indirectas.

resultarão as duas equações

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx \text{ (fig. 21)}, c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \text{ (fig. 8)} \dots (2),$$

cada uma das quaes só é applicavel directamente a uma das figuras; e as figuras são indirectas, por que x é $AD - b$ na primeira, e $b - AD$ na segunda.

Por onde se vê que a substituição do valor de AD converteu a formula (1), applicavel a ambas as figuras, nas duas (2), cada uma das quaes só é applicavel a uma d'ellas; mas de modo que qualquer das formulas (2) se torna na outra pela mudança de x em $-x$.

19. Em geral, se as quantidades a, b, c, \dots, x , que compõem duas figuras indirectas, estão ligadas numa d'ellas pela equação $X = 0$, e na outra pela equação $X' = 0$, ha pelo menos uma linha que, sendo na primeira figura a somma $b + x$ de duas quantidades, é na segunda figura a differença $b - x$ das mesmas quantidades. Mas se em logar das expressões $b + x$ e $b - x$, das quaes provém a dissimilhança entre aquellas equações, substituírmos a , a equação resultante $Y = 0$, convirá ás duas figuras, podendo reproduzir $X = 0$, ou $X' = 0$, conforme se substituir nella $b + x$ ou $b - x$ em logar de a : e como estas quantidades só differem entre si no signal de x , segue-se que X se tornará em X' , e reciprocamente, pela mudança de x em $-x$. O mesmo diríamos d'outras quantidades indirectas, se as houvesse.

Para reconhecer estas quantidades observemos que, fazendo variar os pontos da segunda figura até a tornar directa com a primeira, a quantidade b passará de $> a$ a $< a$; e se esta mudança se faz pela lei de continuidade, ha necessariamente uma posição intermedia na qual é $b = a$, ou $x = 0$. Por exemplo, se o ponto C (fig. 21) se mover na direcção CD até passar para a esquerda de D , e tornar a figura directa com a fig. 8, x ou CD irá diminuindo, tornar-se-ha nulla na passagem por D , e mudará de signal depois d'esta passagem.

Mas se o ter x differente signal nas duas equações provém de ser

$$x = \frac{k}{a - b} \text{ na 1.ª fig., e } x = \frac{k}{b - a} \text{ na 2.ª fig.:$$

então, fazendo variar b para se tornar de $< a$ em $> a$, haverá um valor

intermedio $b = a$ que fará $x = \frac{k}{0} = \infty$.

Assim as quantidades indirectas não se podem tornar directas pelo movimento continuo das partes de uma, sem que neste movimento aquellas partes passem por zero, ou pelo infinito. Logo:

Para transformar a equação $X = 0$, que tem logar entre as linhas a, b, c...x, d'uma figura, na equação $X' = 0$, que convem a outra figura indirecta com a primeira, basta mudar o signal das quantidades indirectas. E reconhecem-se as quantidades, que podem ser indirectas, fazendo mover as linhas de uma das figuras para a tornar directa com a outra, e vendo quaes são aquellás que neste movimento passam por zero ou pelo infinito.

Mas este character não pertence exclusivamente ás linhas indirectas; e por isso, verificado elle, é necessario ainda applicar ás duas figuras algum theorema conhecido, e comparar as relações que este theorema estabelece entre as quantidades, para distinguir aquellas que têm signaes contrarios. Assim, tendo conhecido na fig. 8 que pelo movimento continuo do ponto C a linha x , ou CD, passa por zero, tiraremos das duas figuras os valores de x ,

$$x = AD - AC \text{ (fig. 21), e } x = AC - AD \text{ (fig. 20);}$$

e por que achâmos estes dous valores com signaes contrarios, concluiremos que x é indirecta.

20. Façamos uma applicação d'esta theoria, para lhe dar toda a clareza.

Tirada no triangulo ABC (fig. 22) a recta DF por um ponto dado D, procuremos a razão α entre as superficies dos triangulos AEF, ABC.

Tirando DI parallela a AC, e fazendo

$$AB = c, AC = b, BC = a, AI = d, DI = f, AF = x,$$

temos (Geom. n.º 111) $\alpha = \frac{AE \cdot AF}{AB \cdot AC}$

que, por ser $AE = \frac{fx}{x+d}$ em virtude da similhaça dos triangulos FAE,

FID, dá $fx^2 = bcx(x+d) \dots \dots \dots (A).$

1.º A equação (A) suppõe D collocado no angulo IAC; e por isso deve ser modificada, quando não tem logar esta hypothese.

2.º Se D está em D' no angulo CAB, façamos mover D para D'. Então AI irá diminuindo, depois passará por zero, e finalmente tornar-se-ha em AI'; sem que, durante este movimento, as linhas *a, b, c, f*, se tornem nullas nem infinitas. Logo somente AI pode ser indirecta; e depois vê-se que é com effeito indirecta, por ser

$$AI = BI - AB, AI' = AB - BI'.$$

Assim a equação (A) applica-se ao ponto D', mudando *d* em $-d$; e fica

$$fx^2 = bcx(x - d) \dots \dots \dots (A').$$

3.º Se D' está em D'' no angulo C'AB, movamos D' para D''. Então D'I' diminuirá, depois passará por zero, e finalmente tornar-se-ha em D''I''; sem que neste intervallo as quantidades *a, b, c, d*, se tornem zero nem infinitas: e de mais temos

$$I'D' = AC - CK, I''D'' = CK'' = AC.$$

Logo D'I' é indirecta; e por isso, mudando o signal de *f*, tornar-se-ha

$$(A') \text{ em } fx^2 = bcx(d - x) \dots \dots \dots (A'').$$

Este caso, comparado com o primeiro, apresenta duas indirectas *d* e *f*. A linha IF tambem é indirecta; mas, como não entra na equação, é inutil consideral-a.

Se a recta DF cortar o angulo F'AE' (fig. 22): fazendo girar DF até lhe dar a posição DE', ver-se-ha que neste movimento AF se torna AF', depois de passar por zero; e que é preciso mudar *x* em $-x$ na equação (A) para a applicar a este caso, o que converte aquella equação na precedente (A'').

4. Finalmente, se o ponto está em D''', no angulo IAC'; vêr-se-ha, por um raciocinio similhante, que AI é indirecta com AI''', e que, mudando *d* em $-d$ na equação (A''), resulta a equação accommodada a este caso

$$fx^2 = -bcx(d + x) \dots \dots \dots (A''').$$

Podíamos tractar directamente cada um d'estes casos, e chegar assim ás equações correspondentes: mas o fim da theoria, que fica exposta, é dispensar desse trabalho, mostrando que uma das equações comprehende todas as outras, as quaes se deduzem d'ella pela simples mudança d'alguns signaes.

Pode assim uma equação satisfazer a muitos casos; e para discriminar as circumstancias particulares de cada um d'elles basta interpretar bem a linguagem algebraica (*).

21. Como qualquer equação deve dar o valor d'uma das letras que nella entrã, pode acontecer que seja esta letra aquella sobre a qual tem de recahir a mudança do signal para tornar a solução applicavel á figura proposta; e neste caso o valor da letra dado pela equação será um resultado negativo $x = -k$, cuja significação facilmente se comprehende.

Com effeito, para obter a equação $X = 0$, era preciso suppôr o problema resolvido, e construir uma figura conforme com o estado hypothetico dos seus dados e incognitas (n.º 6): consequentemente a solução negativa indica que a figura não é perfeitamente adequada á questão proposta; e que formando esta figura, e tomando-a por base dos raciocinios, se introduziram condições contradictorias. Mudando x em $-x$, a equação assim modificada $X' = 0$ pertencerá a uma figura indirecta, á qual, e não á supposta, convém a solução $x = k$.

Logo fazendo mover os pontos da figura supposta, que deu a solução

(*) Para exemplo d'esta interpretação, resolvamos a equação (A) em ordem a x ; o que dará

$$x = \frac{abc}{2f} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{4f^2} + \frac{abcd}{f}}$$

e discutamos esta formula nos differentes casos que no texto se consideram.

No 1.º (eq. A) uma das raizes é positiva e a outra negativa: donde se segue que por D se pode tirar uma recta que separe a mesma área AEF, ou cortando os lados do angulo ABC, ou os lados do angulo C'AI. O que tambem mostra a inspecção das fig. 22. e 22 bis.

No 2.º (eq. A') ambas as raizes são positivas; e por consequente ha dous modos de cortar por D' os lados do angulo CAB para sepear a mesma área. O que é igualmente visivel na fig. 22.

No 3.º (eq. A'') as raizes têm differente signal; e por isso pode sepear-se a área por D'', ou cortando os lados de CAB, ou os de C'AI; como se vê na fig. 22.

No 4.º (eq. A''') são negativas as duas raizes; consequentemente podem cortar-se de dous modos por D''' os lados do angulo IAC', para sepear a área AEF. O que também é evidente na fig. 22.

negativa, de modo que algumas linhas passem por zero ou pelo infinito, até chegar a outra figura á qual seja applicavel a equação $X'=0$, a solução $x=k$ pertencerá a esta segunda figura. Foi assim que no problema XI do n.º 15 se fez mover o ponto B para a direita, de modo que BC, ou x , passasse por zero, até chegar a B; e se viu que a equação $X'=0$, ou $x^2=(a+x)a$, era applicavel a esta posição.

Appliquemos estas considerações a alguns exemplos.

1. *Pelo ponto dado D (fig. 22), exterior ao triangulo ABC, tirar a recta DF de modo que a razão dos triangulos AEF, ABC, seja α .*

Suppondo o ponto D no angulo AIC, achou-se a equação A (n.º 20), que dá uma solução positiva e outra negativa. A primeira d'estas soluções determina o ponto F (fig. 22); e a segunda determina o ponto F' (fig. 22 bis), quando DF' corta o angulo F'A'E: o que se segue da interpretação que temos dado á mudança de x em $-x$ (*).

A este problema reduz-se o seguinte:

Tirar pelo ponto D uma recta DF que separe do espaço angular indefinido CAB o triangulo AEF equivalente ao quadrado conhecido q^2 .

Com effeito completando o triangulo ABC por uma recta BC tal que (Geom. n.º 102) seja a sua área $r^2 > q^2$, ou $= q^2$, é dada a razão $\alpha = \frac{q^2}{r^2}$ dos dous triangulos AEF, ABC (**).

(*) Os problemas seguintes são da mesma especie.

Cortar d'um triangulo ABC outro AEF, que tenha com ABC a razão conhecida $m:n$:

1.º *Por uma recta tirada do vertice B, ou d'um ponto F da base (vej. Geom. n.ºs 102 e 111, II).*

2.º *Por uma parallela á base (vej. n.º 14, VI).*

3.º *Por uma perpendicular EF á base (fig. 8) (vej. n.º 3, VI).*

(**) Tirando pelo ponto dado uma recta TT' que separe d'um polygono dado AB'DEF (fig. 23) a superficie equivalente a t^2 , e produzindo, até se encontrarem em M, os lados AB, FE, cortados por aquella recta: será conhecida a área AMF = A da parte exterior ao polygono contido no angulo que formam aquelles lados: e TMT' = $t^2 + A$ será a área total separada do mesmo angulo. Por conseguinte a questão de cortar no polygono a área t^2 reduz-se á de cortar a área $t^2 + A$ no angulo formado pelos dous lados produzidos.

É necessario ter o cuidado de combinar os lados dous a dous, a fim de obter as soluções todas, e excluir aquellas nas quaes a secante corta o prolongamento de um dos lados e não esse lado.

Em lugar da área t^2 podia dar-se a razão $m:n$ da parte cortada para o polygono total: o que vem a ser o mesmo.

H. Sendo dada a corda AD (fig. 24), tirar pela extremidade O do diametro, que lhe é perpendicular, a recta OE tal que a parte d'ella FE, comprehendida entre a corda e o arco, tenha uma grandeza conhecida m.

Sejam $AB = a$, $OB = b$, $EF = m$, $FO = x$.

Pela propriedade das cordas temos

$$FE \cdot OF = FD \cdot AF, \text{ ou } mx = (a - BF)(a + BF) = a^2 - BF^2;$$

e por que é $BF^2 = x^2 - b^2$, resulta

$$mx = a^2 + b^2 - x^2, \text{ ou } x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{4}m^2}.$$

A solução correspondente ao signal superior é positiva, e de construção facil.

Em quanto á solução correspondente ao signal inferior: se mudarmos x em $-x$, teremos

$$mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF^2 - a^2;$$

o que suppõe $BF > a$ ou BD . Ora fazendo girar OF em torno O, anniquilar-se-hão EF e DF na passagem do ponto E por D, e tornar-se-hão depois em E'F' e DF'; sem que neste intervallo passe por zero ou pelo infinito alguma das rectas a , b , x . E por que, alem d'isso, temos

$$FD = AD - AF, F'D = AF' - AD.$$

segue-se que F'D é indirecta com FD; bem como o é F'E' com FE, por ser $F'E' = \frac{AF' \cdot F'D}{F'O}$ (*). Para achar pois a solução que convem a F'O, é

necessario mudar na equação m em $-m$, ou x em $-x$.

Assim o problema admite duas soluções á direita de BO (e consequentemente duas á esquerda) correspondentes uma á raiz positiva e outra á raiz negativa (**). Poderia com tudo acontecer que a questão pro-

(*) O memo se vê por ser $FE = OE - OF$, $F'E' = OF' - OE'$.

(**) Este exemplo mostra que o numero das soluções d'uma questão não é

posta não admittisse soluções indirectas; como teria por exemplo logar na actual, se ella exigisse que OE fosse uma corda do circulo; por que então as soluções negativas lhes seriam estranhas, como se viu no n.º 15.

III. Achar o segmento espherico GADI (fig. 25), cujo volume é igual ao da pyramide conica CDIG, que com o mesmo segmento fórma o sector CDAG.

Vimos (na Gem. n.ºs 156 e 159) que, chamando h a flecha AI e k a semicorda DI, é

$$\text{sect. CDAG} = \frac{2}{3} \pi r^2 h, \text{ pyram. CDGI} = \frac{1}{3} \text{CI} \cdot \pi \text{DI}^2 = \frac{1}{3} (r - h) \pi k^2;$$

$$\text{logo} \quad \text{segm. GADI} = \frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} (r - h) \pi k^2;$$

$$\text{e, pela condição do problema,} \quad \frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} (r - h) \pi k^2 = \frac{1}{3} (r - h) \pi k^2,$$

que, simplificando, e attendendo a que (Geom. n.º 73) é $k^2 = (2r - h)h$,

$$\text{se reduz a} \quad k^2 - 3rh + r^2 = 0, \text{ ou } h = \frac{1}{2} r (3 \pm \sqrt{5}).$$

A solução correspondente ao signal + não serve neste problema, por que deve ser $h < 2r$ (*).

22. Fallaremos aqui d'uma especie de problemas que tem relação com a theoria exposta.

Quando se tracta de determinar a posição de qualquer ponto B sobre uma linha fixa BC (fig. 26), toma-se nella arbitrariamente um ponto fixo A para *origem*; e referindo a este ponto todos os outros, determina-se B pela sua distancia $AB = x$ á origem A.

sempre igual ao grau da equação. Para que nenhuma solução se omita, é necessario variar a figura, e comparal-a com as suas indirectas, deixando sempre os dados fixos.

(*) A solução correspondente ao signal — construe-se facilmente, inscrevendo no circulo descripto sobre o diametro $\frac{1}{2} r$ uma corda igual a r que passe por uma das extremidades do diametro; e tomando neste, a partir da outra extremidade, uma parte igual á corda suplementar da primeira, isto é, á que lhe é perpendicular. A incognita será então igual á differença entre o diametro e esta parte.

Ambas as soluções satisfazem ao problema cujo enunciado é o seguinte:

Dividida uma linha $3r$ em tres partes iguaes, dividil-a em duas desiguaes, x e $3r - x$, de modo que o quadrado r^2 feito sobre uma das partes iguaes seja equivalente ao rectangulo $(3r - x) x$ comprehendido pelas desiguaes.

Posto isto, se a equação $X=0$, que exprime as condições do problema, admitir uma solução negativa $x=-a$, advirta-se que, segundo a theoria exposta nos numeros precedentes, a solução $x=a$ pôde accommodar-se á questão de que se tracta, com tanto que x se faça indirecta. Ora se imaginarmos que o ponto B se move na direcção BC, este ponto passará por A, onde será $AB=0$, e depois continuará a dirigir-se para B' á esquerda de A; e como na primeira posição era $AB=CB-CA$, e na segunda é $AB'=CA-CB'$, segue-se que a linha AB é indirecta com AB. Por tanto, se o enunciado do problema não restringir a posição do ponto B a ficar necessariamente á direita de A, é claro que, tomando $AB'=a$ para a esquerda, o ponto B' satisfará á questão.

A solução negativa indica alem d'isto um erro, que se commetteu em suppor o ponto B á direita de A; posição contradictoria com o estado da questão respectiva, por se deduzir a equação $X=0$ d'uma figura indirecta com aquella que se devia fazer. E é justamente este erro que se corrige quando se muda B para B'.

23. Concluamos pois que:

Todas as vezes que o problema tiver por fim determinar sobre uma linha fixa a distancia d'um ponto desconhecido á origem, deveremos supprimir os signaes das soluções negativas, e tomar os seus valores em sentido opposto áquelle que se lhes suppoz quando se formou a equação.

Foi isto o que se fez ne n.º 14, II, onde se tomou GI' opposta a GI (fig. 13); e no n.º 14 III, onde se tomou CD'=CD (fig. 14), para achar um novo ponto de contacto D' do circulo com a recta DD'; etc. No problema seguinte melhor se conhecerá a importancia d'estas reflexões.

Determinar sobre a linha AC (fig. 26) um ponto B', cujas distancias a A e C formem o producto conhecido m^2 .

Fazendo $AC=a$, $B'C=x$, temos $B'C \cdot AB' = x(a-x) = m^2$;

$$\text{logo} \quad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - m^2},$$

soluções que facilmente se constroem (n.º 15).

Se $m > \frac{1}{2}a$, torna-se x imaginario; mas nem por isso devemos concluir que a questão seja absurda, por que o erro pode provir de se ter supposto o ponto B' numa posição que lhe não conviesse na hypothese actual.

Para tirar a duvida, supponhamos agora B' posto em B, no prolongamento de AC. Formando a equação correspondentemente, e fazendo $BC=x$,

teremos $BC \cdot AB = x(x - a) = m^2,$

cujas raizes $x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + m^2},$

são ambas reaes, e de construcção facil.

Por tanto:

1.º Se o enunciado da questão exige que o ponto procurado esteja no prolongamento de AC, a questão não é absurda, e tem sempre duas soluções, uma positiva em B, e outra negativa em E (sendo $EC = AB$).

2.º Se o enunciado exige que o ponto procurado esteja entre A e C, a questão é absurda quando $m > \frac{1}{2} a$. Por onde se vê, que o maior rectangulo, que se pode fazer com as duas partes de AC, é o quadrado da sua metade (*Alg. Elem.* n.º 104, III).

Mas cumpre notar principalmente, que o absurdo indicado pelo symbolo imaginario resulta d'um erro de posição do ponto B, analogo áquelle do qual procedem d'ordinario as soluções negativas: o que dá muita luz á theoria precedente.

3.º Finalmente, se a questão não restringe a posição do ponto que se procura, admite duas soluções, ou quatro, conforme é $m > \frac{1}{2} a$, ou $m < \frac{1}{2} a$.

Neste ultimo caso não é só a Algebra que dá o numero das soluções; ou antes, a Algebra dá só os resultados correspondentes ás condições que se traduziram analyticamente. Em eguaes circumstancias está o problema II. do n.º 21.

24. Do que fica exposto resultam duas conclusões geraes, que se devem ter muito em vista nos problemas de Geometria.

1.º *Uma equação é verdadeira tão somente para a figura da qual foi deduzida; e para a applicar a outra figura, indirecta com aquella, é necessario mudar os signaes d'algumas das letras que representam as partes da mesma figura.*

2.º *Se o valor da incognita x sae negativo, a equação que deu este valor, é defeituosa em quanto se applica á figura directá; e por isso deve mudar-se a disposição das partes desta figura, para a fazer directá, e tornar positivo o valor de x. Por exemplo, se x se conta sobre uma linha fixa, deve tomar-se em sentido opposto áquelle em que primeiro se tomou.*

SEGUNDA SECÇÃO

LOGARES GEOMETRICOS

Noções preliminares

25. Para determinar a posição d'um ponto M (fig. 27) sobre um plano, costuma empregar-se o processo seguinte.

Tomadas neste plano duas rectas indefinidas Ax , Ay , imaginem-se $MQ = x$, $MP = y$, tiradas por M parallelamente a ellas. O systema das linhas x e y determina a posição do ponto M: por que, tomando sobre as rectas fixas Ax , Ay , as partes $AP = x$, $AQ = y$, e tirando as parallelas MQ , MP , o ponto desconhecido, que deve achar-se simultaneamente em ambas estas parallelas, é a sua intersecção M.

O ponto M está na linha Ax , quando é $y = 0$; está na linha Ay , quando é $x = 0$; e coincide com o ponto A, quando são $x = 0$ e $y = 0$.

As linhas $AP = x$ chamam-se *abscissas*, e Ax o *eixo das abscissas*; as linhas $AQ = y$ chamam-se *ordenadas*, e Ay o *eixo das ordenadas*; Ax e Ay são os *eixos coordenados*; e A é a *origem* das coordenadas.

Como nada indica *a priori* se x se deve tomar de A para P, se de A para P'; nem se y se deve tomar de A para Q, se de A para Q'; os quatro pontos M, N, N', M', collocados nos espaços angulares yAx , yAx' , $y'Ax'$, $y'Ax$, satisfazem igualmente aos valores absolutos das coordenadas; e fica indeterminada a posição do ponto M, em quanto outros caracteres a não fixarem. Para evitar esta difficuldade emprega-se a distincção seguinte, conforme com o que se disse no n.º 22.

Supponhamos que os x positivos se contam sobre Ax , á direita de yy' ; e que os y positivos se contam sobre Ay , acima de xx' : então con-

tam-se os x negativos sobre Ax' , á esquerda de yy' ; e os y negativos sobre Ay' , abaixo de xx' . Teremos pois os seguintes signaes das coordenadas, que determinam os pontos correspondentes:

PONTOS	SIGNAES DAS COORDENADAS
M, em $y Ax$	x e y positivos
N, em $y Ax'$	x negat., y posit.
N', em $y' Ax'$	x negat., y negat.
M', em $y' Ax$	x posit., y negat.

Mas quando os x positivos, ou os y positivos, se contarem d'outro modo, sempre o eixo yy' estremará os x positivos dos x negativos, e o eixo xx' estremará os y positivos dos y negativos.

As mais das vezes toma-se recto o angulo yAx ; e x e y são respectivamente as distancias de M aos eixos yy' e xx' : o que simplifica as formulas, e facilita as construcções, como teremos occasião de conhecer.

26. Chama-se equação d'uma linha BMZ (fig. 28) a expressão analytica da relação que tem logar entre as coordenadas x e y de cada um dos seus pontos.

Se imaginarmos que a ordenada MP se move parallelamente a si mesma, conservando-se o seu ponto P no eixo Ax , e que durante este movimento as grandezas da ordenada e da abscissa variam de modo que *satisfaçam* sempre á equação proposta em x , e y , a extremidade M de MP descreverá a linha correspondente. Esta linha é o *logar geometrico da equação*.

Dando diversos valores a uma das coordenadas x ou y , e calculando os correspondentes da outra por meio da equação proposta, a serie dos valores

$$x = a, a', a'', \dots y = b, b', b'', \dots$$

determinará os pontos da linha, cujas coordenadas são respectivamente a e b , a' e b' , a'' e b'' , ..., e que designaremos por (a, b) , (a', b') , (a'', b'') ...

Assim a equação proposta entre duas incognitas fará conhecer uma infinidade de pontos, cujo systema constituirá a linha; e poderemos servir-nos d'este processo para determinar a figura da linha, e as particularidades, que o seu curso apresentar, como teremos occasião de conhecer.

Por exemplo: $y = AQ$ (fig. 27) é a equação da recta MN parallelá ao eixo Ax ; e $y = 0$ é a equação d'este eixo; $x = AP$ é a equação da recta MM' parallelá ao eixo Ay ; e $x = 0$ é a equação d'este eixo.

I. EQUAÇÕES DA LINHA RECTA E DO CIRCULO

Da linha recta

27. 1.º Supponhamos que a recta AN (fig. 29) passa pela origem. Abaixando de quaesquer pontos d'ella D, N,... as ordenadas DC, NP.....,

será sempre
$$\frac{DC}{AC} = \frac{NP}{AP} \dots = a;$$

chamando *a* a razão constante da ordenada com a abscissa.

A equação da recta AN é pois $y = ax \dots \dots \dots (1).$

Se é recto o angulo yAx das coordenadas, temos $PN = AP \operatorname{tang} A$; e *a* designa então a tangente trigonometrica do angulo que a recta faz com o eixo dos *x*. Em quanto o angulo NAP é agudo, *a* é positiva, e cresce com elle; mas quando este angulo é obtuso, como acontece em AN', *a* é negativa e $= -\operatorname{tang} N'AE$: com effeito é claro que neste segundo caso as abscissas positivas correspondem a ordenadas negativas, e reciprocamente.

Se não é recto o angulo yAx , o triangulo NAP dá

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \text{NAP}}{\operatorname{sen} \text{ANP}} = \frac{\operatorname{sen} \text{NAx}}{\operatorname{sen} \text{NAy}} = a;$$

e então *a* representa a razão dos senos dos angulos que a recta faz com os eixos coordenados. Em quanto ao signal: *a* será positiva ou negativa, conforme tiver a recta a posição AN, ou a posição AN'.

2.º Supponhamos que a recta BM não passa pela origem; e seja $AB = b$ a ordenada na origem. Tirando AN parallela a BM, a equação (1) de AN dá $PN = ax$; e como é $y = AB + NP$, a equação da recta BM

será $y = ax + b \dots \dots \dots (2)$.

Se esta recta tiver a posição B'M', será b negativa.

28. Para uma dada recta as quantidades x e y são *variáveis*, e a e b são *constantes*; mas se a recta tomar diversas posições, a e b também variarão. Por conseguinte a equação (2) pertence a todas as rectas; e estas distinguem-se umas das outras pelos valores de a e b .

Para construir esta equação, tome-se $AB = b$, e tire-se EM de modo que seja respectivamente $\text{tang BEA} = a$, ou $\frac{\text{sen BEA}}{\text{sen EBA}} = a$, segundo forem as coordenadas rectangulares, ou obliquas. Será EBM a recta pedida, logar geometrico da equação (2).

Tambem se pode construir esta linha determinando dous dos seus pontos. Por exemplo, fazendo $x = 0$, acha-se a ordenada na origem $y = b = AB$ do ponto B, onde a recta corta o eixo dos y ; fazendo $y = 0$, acha-se a abscissa $x = -\frac{b}{a} = AE$ do ponto E, onde a recta corta o eixo dos x : e estes pontos B(0, b) e E($-\frac{b}{a}$, 0) determinam a recta pedida EB.

Se a recta passasse pela origem: applicando á equação (1) este ultimo processo, B e E coincidiriam no ponto A; mas fazendo por exemplo $x = 1 = AC$, viria $y = a = CD$, e os pontos A(0, 0) e D(1, a) determinariam a recta AD.

29. Porque, fazendo $a = -\frac{B}{A}$ e $b = -\frac{C}{A}$, a equação geral do pri-

meiro gráu entre duas variáveis $Ay + Bx + C = 0$,

toma a forma (2), o seu logar geometrico é a linha recta, que sabemos construir.

Para vêr como pela equação d'uma recta se determina a sua posição, pode servir de exercicio a construeção dos logares geometricos das equações seguintes:

$$2x + y = 2, \quad y = -3 + x, \quad y = -x - 1.$$

30. *Achar a equação d'uma recta que passa por dous pontos dados.*

Sejam (x', y') e (x'', y'') os dous pontos dados. Por que a recta passa por (x', y') , as coordenadas d'este ponto devem satisfazer á equação (2), e por isso teremos $y = ax + b$, $y' = ax' + b$, que dão

$$y - y' = a(x - x') \dots \dots \dots (3):$$

E por que a mesma recta deve passar por (x'', y'') , a equação (3) dará

$$y'' - y' = a(x'' - x'), \text{ ou } a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

A equação procurada é pois $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \dots \dots (4).$

A equação (3) é a de todas as rectas, que têm o ponto commum (x', y') ; e estas distinguem-se umas das outras pelos valores de a , isto é, pelas suas direcções.

31. *Achar o angulo que fazem entre si duas rectas dadas.*

Sejam $y = ax + b$, $y = a'x + b'$,

as suas equações. Chamando α e α' os angulos CBx e EBx (fig. 30), que estas rectas BC , e DC ou a sua parallela BE , fazem com o eixo Ax ; e V o angulo pedido: teremos $V = \alpha - \alpha'$, $\text{tang } \alpha = a$, $\text{tang } \alpha' = a'$,

e por conseguinte $\text{tang } V = \frac{a - a'}{1 + aa'} \dots \dots \dots (5).$

Se $a = a'$, é $V = 0$, e as rectas são parallelas; o que por outra parte é evidente.

Se $aa' + 1 = 0$, é $\text{tang } V = \infty$, $V = 90^\circ$, e as rectas são perpendiculares.

Por tanto as condições necessarias para que duas rectas sejam pa-

rallelas, ou perpendiculares, são respectivamente

$$a = a' \dots (6), \quad aa' + 1 = 0 \dots (7). \quad (*)$$

Por um ponto dado tirar uma recta que seja paralela, ou perpendicular, a outra recta dada, ou que faça com ella um angulo dado.

Sejam $y = ax + b, y = a'x + b',$

a equação da recta dada; e a da recta pedida, na qual são desconhecidas a' e b' .

Em primeiro logar, como a recta pedida deve passar pelo ponto dado

$(x', y'),$ é $y - y' = a'(x - x').$

Depois:

1.º Se esta recta deve ser paralela á recta dada, $a = a',$

é $y - y' = a(x - x') \dots \dots \dots (8).$

(*) Se as coordenadas forem obliquas, e fizerem entre si o angulo θ , será

$$a = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\theta - \alpha)}, \quad a' = \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } (\theta - \alpha')},$$

ou $a \text{ sen } \theta \cos \alpha - a \cos \theta \text{ sen } \alpha = \text{sen } \alpha, \quad a' \text{ sen } \theta \cos \alpha' - a' \cos \theta \text{ sen } \alpha' = \text{sen } \alpha';$

das quaes, dividindo respectivamente por $\cos \alpha$ e $\cos \alpha',$

sê tiram $\text{tang } \alpha = \frac{a \text{ sen } \theta}{1 + a \cos \theta}, \quad \text{tang } \alpha' = \frac{a' \text{ sen } \theta}{1 + a' \cos \theta},$

que dão $\text{tang } V = \frac{(a - a') \text{ sen } \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos \theta} \dots \dots \dots (5).$

Então as condições do parallelismo, e da perpendicularidade, são respectivamente $a = a' \dots \dots (6), \quad 1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0 \dots \dots \dots (7).$

2.º Se deve ser perpendicular à recta dada, ou $aa' + 1 = 0$,

é
$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \dots \dots \dots (9).$$

3.º Se deve fazer com a recta dada um angulo cuja tangente seja m ,

ou
$$m = \frac{a - a'}{1 + aa'}, \text{ que dá } a' = \frac{a - m}{1 + ma};$$

é
$$y - y' = \frac{a - m}{1 + am}(x - x') \dots \dots \dots (10).$$

Por exemplo: se é $m = 1$, a equação da recta, que faz com a dada um angulo de 45° , e passa pelo ponto (x', y') ,

é
$$y - y' = \frac{a - 1}{a + 1}(x - x').$$

32. Achar a intersecção de duas rectas dadas.

Sejam $y = ax + b, y = a'x + b'$,

as suas equações. A cada valor commum de x corresponderão em geral duas coordenadas diferentes, uma para a primeira recta, outra para a segunda; mas no ponto de intersecção ambas as coordenadas serão as mesmas para uma e outra recta. Eliminando pois x e y entre as duas equações, teremos as coordenadas da intersecção (*)

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}, y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

(*) Em geral, se eliminarmos x e y entre as equações de duas linhas quaesquer, teremos as coordenadas dos seus pontos de intersecção.

Por exemplo, se na equação d'uma curva fizermos $y = 0$, ou $x = 0$, teremos respectivamente os pontos onde ella corta o eixo dos x , ou o eixo dos y .

33. Achar a distancia entre dous pontos dados.

Sejam (x', y') e (x'', y'') estes dous pontos M e N (fig. 31); e $\delta = MN$ a distancia pedida. Tirando MR e NR paralelas aos eixos, é

$$\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{NR}^2, \overline{MR} = \overline{AQ} - \overline{AP} = x'' - x', \overline{NR} = \overline{NQ} - \overline{MP} = y'' - y':$$

$$\text{logo } (*) \quad \delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \dots \dots \dots (11).$$

Se M se confundisse com A, a distancia á origem

$$\text{seria} \quad \delta = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Se os pontos estivessem na recta, cuja equação é $y = ax + b$,

as suas coordenadas deveriam satisfazer a esta equação: e por isso teriamos

$$y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b,$$

que, substituidos em (11), dariam $\delta = (x'' - x') \sqrt{1 + a^2}$.

34. Achar a distancia d'um ponto dado a uma recta dada.

Sejam $y = ax + b$, (x', y') ,

a equação da recta dada BC (fig. 32), e o ponto dado M ou M'.

1.º Deve abaixar-se de M a perpendicular MN sobre BC. A equação d'esta perpendicular é a (9).

2.º Depois deve determinar-se a intersecção N d'estas rectas. Para isso elimina-se x e y entre as suas equações, e vem

$$x = x' + \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad y = y' - \frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

(*) Se o angulo das coordenadas for θ , a distancia será

$$\delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y') \cos \theta} \dots \dots \dots (11).$$

3.º Em fim deve medir-se a distancia MN. A sua expressão é

$$\delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

que, em virtude dos valores precedentes, se reduz a (*)

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

35. Em geral os problemas relativos á linha recta são de duas especies.

1.º Se, dada uma recta, se procura o ponto d'ella que satisfaz a certa condição, a e b são conhecidos na equação $y = ax + b$; e traduzindo analyticamente a condição proposta, forma-se outra equação. Por tanto a eliminação entre estas duas equações dará as coordenadas x e y .

Se houvesse muitas rectas e muitas condições dadas, seguir-se-hia um processo analogo.

2.º Se se procura a posição, que deve ter uma recta para satisfazer

(*) Se chamarmos α o angulo que a recta BC faz com o eixo dos x , e θ o angulo das coordenadas, é

$$MN = (MP - RP) \cos M,$$

ou

$$\delta = (y' - ax' - b) \cos M = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + \tan^2 M}}.$$

E teremos assim muito facilmente:

1.º No caso das coordenadas rectangulares,

$$\tan M = \tan \alpha = a, \quad \delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

2.º No caso das coordenadas obliquas, (n.º 31 [r]),

$$\cos M = \sin(\theta - \alpha) = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{a\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}},$$

$$\delta = \frac{(y' - ax' - b) \sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}.$$

Será necessario dar ao radical aquelle dos signaes \pm que fizer δ positivo: e por isso usar-se-ha de \pm , conforme for $y' >$ ou $<$ $ax' + b$, isto é, conforme estiver o ponto M acima ou abaixo de R.

a certas condições, a e b são desconhecidos em $y = ax + b$; e o problema consiste em os determinar. Neste caso a traducção analytica das condições propostas dará as equações entre as quaes se devem eliminar a e b : mas d'estas equações não podem ser distinctas mais de duas; salvo se a sua formação introduz novas incognitas (*Alg. el. n.º 125, 2.º CASO*).

36. Appliquemos estes principios a alguns exemplos.

I. *Dividir em duas partes eguaes o angulo formado por duas rectas.*

Sejam

$$y = ax, y = bx,$$

as equações das rectas dadas AB e AC (fig. 33) referidas aos eixos rectangulares Ax, Ay, tirados pelo vertice A.

Representando por

$$y = kx$$

a recta procurada, tracta-se de determinar k , sendo conhecidos a e b .

Por serem $\text{tang DAB} = \frac{a-k}{1+ak}$, $\text{tang DAC} = \frac{k-b}{1+bk}$, a condição do

problema, $\text{DAC} = \text{DAB}$, dá $k^2 - \frac{2(ab-1)}{a+b}k - 1 = 0$,

cujas raizes k' , k'' , se devem substituir por k em $y = kx$.

E por que é (*Alg. el. n.º 145, 3.º*) $k'k'' = -1$, ou $k'k'' + 1 = 0$,

as rectas AD, AE, correspondentes a estas raizes, fazem entre si um angulo recto [n.º 31, eq. (7)], e dividem respectivamente em duas partes eguaes o angulo BAC e o seu supplemento.

Se os dous eixos não passassem por A, e fossem x' , y' , as coordenadas d'este ponto: a equação da recta pedida seria

$$y - y' = k(x - x'),$$

sendo ainda k dada pela mesma equação do segundo grau.

Se uma das rectas, por exemplo AC, fosse o eixo dos x , seria b nullo,

e a equação do segundo grau se reduziria a $k^2 + \frac{2k}{a} = 1$.

II. *Dadas duas rectas AB e Ax (fig. 34), achar um ponto D (x', y'), tal que, tirando por elle uma parallela DC a Ax, a parte interceptada CD seja igual a AC.*

Tomando A para origem, e Ax para eixo dos x, sejam: AI = m a abscissa do ponto C; y = ax a equação da recta dada AB; e y = kx a da recta AD.

Segundo as condições do problema, deve ser CD parallela a Ax, e DC = AC; e devem estar C na recta AB, e D na recta AD: isto é, devem ter logar as equações

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{DE}^2, \quad AC = CD = AE - AI, \quad y' = am, \quad y' = kx';$$

ou
$$m^2 + y'^2 = (x' - m)^2, \quad y' = am, \quad y' = kx';$$

ou, em fim,
$$y'^2 = x'^2 - 2mx', \quad y' = am, \quad y' = kx'.$$

Eliminando y' e m, desaparece x', e fica a equação

$$ak^2 + 2k = a,$$

que, por ser a do problema precedente, mostra que a recta AD divide em duas partes eguaes o angulo BAE: e todos os pontos d'esta recta satisfazem ao problema, que tem assim uma infinidade de soluções.

III. *Achar as equações das perpendiculares abaixadas dos tres vertices de um triangulo dado sobre os lados oppostos; e mostrar que estas perpendiculares se cortam no mesmo ponto.*

Seja ABC (fig. 35) o triangulo dado. Tomando A para vertice, e AC para eixo dos x: as equações respectivas de AB [que passa por A (0, 0) e por B (x', y')]; e de BC [que passa por B e por C (b, 0)] são

$$y = \frac{y'}{x'} x, \quad y = \frac{y'}{x' - b} (x - b).$$

As equações respectivas, de CE que passa por C, e de AF que passa por A, são da forma $y = A(x - b), y = Bx.$

E para que CE e AF sejam respectivamente perpendiculares a AB e BC,

devem ser $A \frac{y'}{x'} + 1 = 0$, $B \frac{y'}{x' - b} + 1 = 0$.

Substituindo pois os valores de A e B, tirados das duas ultimas equações, nas duas precedentes, resultarão as equações das perpendiculares CE e AF,

$$y = -\frac{x'}{y'}(x - b), \quad y = -\frac{x' - b}{y'}x.$$

Eliminando y entre estas duas equações para ter a abscissa da intersecção de CE com AF, acha-se $x' = x$, que é a equação da terceira perpendicular BD: logo a intersecção O de CE e AF está sobre BD, e por conseguinte estas tres perpendiculares concorrem nella.

Descrevendo sobre AC como diametro a circumferencia AEFB, tirando pelas intersecções F e E as rectas AF e CE, e finalmente tirando BD pelo ponto de concurso O, obtem-se as tres perpendiculares; o que dá a solução graphica do problema (*).

(*) Com effeito multiplicando entre si as equações de AB e de CE, ou as de BC e de AF, acha-se

$$y^2 = bx - x^2,$$

que é, como veremos, a equação d'aquella circumferencia; de sorte que, em

logar dos systemas $y = \frac{y'}{x'}x$, $y = -\frac{x'}{y'}(x - b)$,

e $y = \frac{y'}{x' - b}(x - b)$, $y = -\frac{x' - b}{y'}x$,

podem substituir-se respectivamente $y = \frac{y'}{x'}x$, $y^2 = bx - x^2$,

e $y = \frac{y'}{x' - b}(x - b)$, $y^2 = bx - x^2$;

isto é, em logar de determinar os pontos E e F pelas intersecções de AB com CE, e de BC com EF, podem determinar-se pelas intersecções de AB e BC com a circumferencia.

IV. *Descrever um circulo tangente aos tres lados de um triangulo dado.*

As perpendiculares OD, OF, OE (fig. 4), abaixadas do centro O sobre os tres lados do triangulo ABC, devem, pela condição de tangencia, ser eguaes entre si e ao raio. Tomando pois AB para eixo dos x , e A para origem; e chamando (α, β) e (x', y') os pontos O e C: a equação de AC será $y = \frac{y'}{x'} x$; e os valores das perpendiculares OE, OF

(n.º 34) serão
$$OE = \frac{\beta - \frac{y'}{x'} \alpha}{\sqrt{1 + \frac{y'^2}{x'^2}}} = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\pm c}, \quad OF = \beta;$$

tendo logar o signal \pm , conforme estiver o ponto O (α, β) acima ou abaixo de AC.

A condição $OE = OF$, ou $\alpha y' = \beta (x' \mp c)$,

deixa indeterminada uma das coordenadas α ou β , em quanto não se combinar com a outra condição $OD = OF$.

Por tanto ha uma infinidade de pontos equidistantes de AB e AC, todos collocados sobre duas rectas, cujas equações são

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x = \frac{y'}{x' \mp c}.$$

isto é, sobre duas rectas, que passam pelo vertice A, e que fazem com

AB angulos dados pelas suas tangentes $\frac{y'}{x' - c}$ e $\frac{y'}{x' + c}$. E por que o pro-

ducto d'estas tangentes é $\frac{y'^2}{x'^2 - c^2} = \frac{c^2 - x'^2}{x'^2 - c^2} = -1$, as duas rectas cor-

tam-se perpendicularmente; de sorte que basta procurar a posição de uma d'ellas AO, para ter a da outra.

Ora de $\text{tang BAC} = \text{tang A} = \frac{y'}{x'}$ resulta

$$\cos A = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'}{c}, \quad \text{tang } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{c - x'}{c + x'}} = \frac{y'}{c + x'}$$

consequentemente será $OAB = \frac{1}{2} BAC$; o que por outra parte já sabemos (Geom. n.º 57, I).

Tirando pois a recta OA e a perpendicular a ella, de modo que dividam em duas partes eguaes o angulo BAC e o seu supplemento, o centro procurado estará sobre uma d'estas duas rectas. Fazendo o mesmo relativamente aos angulos B e C, teremos seis rectas que, encontrando-se duas e duas, darão quatro pontos para centros dos circulos tangentes. Mas só um d'estes circulos fica inscripto no triangulo; os outros tocam exteriormente os seus lados.

Poderíamos sujeitar as perpendiculares OE, OF, OD, ás condições de terem entre si razões dadas, e procurar o ponto O; o que resolveria um problema, que comprehende o precedente.

V. *Pelo ponto M (fig. 36) tirar uma recta NQ que separe do angulo NBx o triangulo NBQ equivalente a uma superficie dada.*

Tomando Bx e By para eixos: são dados $\text{tang NBx} = a$, e $M(\alpha, \beta)$; e é BQ = z a incognita.

As equações de NQ, que passa por Q (z, 0) e (x, y), e de NB, são respectivamente

$$y = \frac{\beta}{\alpha - z}(x - z), \quad y = ax;$$

e eliminando x entre ellas, vem a ordenada da intersecção N,

$$y = \frac{\beta az}{\beta - \alpha z + az} = ND.$$

Esta expressão simplifica-se tirando AM parallela a BN, e fazendo AB = m; por que a equação de MA, $y - \beta = a(x - \alpha)$, que no ponto A (m, 0)

dá $\beta = ax - am$, a reduz a $y = \frac{\beta z}{z - m}$.

Posto isto, qualquer que seja a area dada, sempre será possível transformal-a num rectangulo βk , de base k e altura β ; e a condição do problema será

$$\beta k = \frac{1}{2} zy = \frac{\beta z^2}{2(z - m)},$$

ou
$$z^2 - 2kz + 2km = 0;$$

o que dá duas soluções, que facilmente se podem construir (n.º 15).

Os problemas seguintes podem servir de exercicio.

VI. Dadas as equações de duas rectas, e tomadas sobre estas as partes eguaes AB e AC (fig. 33), calcular a grandeza da metade BD da corda BC; e concluir d'ella o angulo BAC. A formula deve dar o mesmo resultado que a (5) do n.º 31.

VII. Com os mesmos dados achar as equações da corda BC, e da sua perpendicular AD. A direcção d'estas rectas deve ser a mesma que no problema I.

VIII. Mostrar que as perpendiculares DO, FO, EO, (fig. 37), levantadas no meio dos lados do triangulo ABC, concorrem no mesmo ponto O. E mais geralmente que, tiradas quaesquer parallelas DF ao lado AC, as perpendiculares DO, FO, levantadas sobre os lados AB, BC, nas intersecções d'elles com DF, se cortam em pontos O situados na mesma recta, que passa pelo vertice B.

IX. Achar as equações das rectas CD, AF, BE, (fig. 37), tiradas dos vertices do triangulo ABC para o meio dos lados oppostos; e provar que ellas concorrem no mesmo ponto G, cuja distancia BG a cada vertice é $\frac{2}{3}$ da total BE. E mais geralmente provar que, seudo D, F, as intersecções dos lados AB, BC, com qualquer parallela DF a AC, a qual corta estes lados proporcionalmente, os pontos de intersecção G das rectas AF, CD, estão sobre a recta BE tirada de B para o meio E de AC.

Consulte-se o *Recueil des propositions* de Mr. Puissant.

Do circulo

37. Sejam α, β , as coordenadas do centro C (fig. 38), e R o raio do circulo: teremos (n.º 39)

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \dots \dots \dots (1).$$

Se o centro for a origem, teremos $\alpha = 0, \beta = 0$, e

$$R^2 = x^2 + y^2 \dots \dots \dots (2).$$

Se as coordenadas x, y , fizem entre si um angulo γ , teremos (n.º 33 [*]), quando o centro é o ponto (α, β) ,

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta) \cos \gamma \dots \dots (3);$$

e, quando o centro é a origem,

$$R^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma.$$

Mostremos num exemplo simples o partido, que se pode tirar da equação d'uma curva para conhecer a sua figura e as suas propriedades, discutindo a equação (2).

38. De serem $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}, x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$,

segue-se, que a cada abscissa correspondem duas ordenadas eguaes e de signaes contrarios, e a cada ordenada correspondem duas abscissas eguaes e de signaes contrarios. Por isso a curva é symetrica relativamente a qualquer dos eixos, isto é, cortada por elles em duas partes eguaes e semelhantes, que se confundiriam se fizessemos girar uma d'ellas em torno do eixo até que o seu plano coincidisse com o da outra.

Quanto mais cresce x , mais y decresce, até que $x = \pm R$ dá $y = 0$; por onde se vê que a curva se aproxima do eixo dos x até o encontrar em A e O; mas não se estende além d'estes pontos, por que $x > \pm R$ daria y imaginario. Do mesmo modo não se estende além dos pontos B e D, onde encontra o eixo dos y .

D'estas noções resulta, que a curva é symetrica relativamente a todos os diametros, fechada, e d'um só ramo.

A equação das rectas que passam por O ($-R, 0$), e a das rectas que passam por A ($R, 0$), são

$$y = a(x + R), y = a'(x - R),$$

das quaes, eliminando y ou x , resultam as coordenadas da intersecção M,

$$x = \frac{a + a'}{a' - a}R, y = \frac{2aa'}{a' - a}R.$$

Estas coordenadas devem satisfazer á equação (2), para que o ponto M esteja na circumferencia: substituindo-as pois naquella equação, resulta

$$aa'(1 + aa') = 0.$$

Tal é a condição necessaria para que as cordas, que passam pelas extremidades do diametro, se cortem sobre a circumferencia. E por que esta condição dá as equações

$$a = 0, \text{ ou } a' = 0, \text{ ou } 1 + aa' = 0,$$

das quaes as duas primeiras são as do diametro (o que é evidente), e a terceira exprime a perpendicularidade de duas rectas: segue-se que fica satisfeita a condição referida, ou que a intersecção M é um ponto da circumferencia, quando as cordas se cortam perpendicularmente.

A equação $y^2 = R^2 - x^2 = (R + x)(R - x) = OP \cdot AP$

mostra que a ordenada MP é meia proporcional entre os segmentos OP e AP.

A equação $AM = \sqrt{(R - x)^2 + y^2} = \sqrt{2R(R - x)} = \sqrt{AO \cdot AP}$

mostra que a corda é meia proporcional entre o diametro AO e o segmento AP.

39. Para achar as intersecções d'uma recta MN (fig. 39) com um circulo NKI, é necessario eliminar x e y entre as suas respectivas equações

$$y = ax + b, y^2 + x^2 = R^2:$$

o que dá
$$x = -\frac{ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2};$$

ou
$$x = -\frac{a\delta \pm \sqrt{R^2 - \delta^2}}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = -\frac{-\delta \pm a\sqrt{R^2 - \delta^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

fazendo $\delta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} =$ distancia da recta ao centro do circulo (n.º 34) (*).

A natureza do radical offerece tres casos:

1.º Se o radical é imaginario, ou $\delta > R$, a recta não encontra a circumferencia.

2.º Se o radical é real, ou $\delta < R$, a recta corta a circumferencia em dous pontos. E como o eixo dos x se pode tomar paralelo á secante MN, será nesta hypothese $a = 0$, e ficará $x = \pm \sqrt{R^2 - b^2}$, que, por ter os signaes \pm e valores eguaes, mostrá que a perpendicular abaixada do centro sobre a corda divide esta em duas partes eguaes.

3.º Finalmente, se o radical é nullo, ou $\delta = R$, a recta encontra a circumferencia num só ponto, ou é tangente. E neste caso, se chamarmos x', y' , as coordenadas do ponto T de contacto, teremos

$$x' = \frac{-ab}{1+a^2}, \quad y' = ax' + b,$$

(*) Chamando (α, β) um ponto da recta MN, é $y - \beta = a(x - \alpha);$

e as distancias D de (α, β) ás intersecções da recta com o circulo são

$$D = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \sqrt{1+a^2} \cdot (x-\alpha) = \frac{(1+a^2)\alpha + a\beta \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

E os dous valores D', D'' , de D dão $D'D'' = \frac{[(1+a^2)\alpha + a\beta]^2 - R^2(1+a^2) + b^2}{1+a^2},$

ou
$$D'D'' = \alpha^2 + (a\alpha + b)^2 - R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

É o que tambem se pode obter muito facilmente, usando das coordenadas polares, como se verá adiante.

que dão
$$a = -\frac{x'}{y'}, b = \frac{x'^2 + y'^2}{y'} = \frac{R^2}{y'}$$

Mas a equação $y = a'x$ do raio CT, que passa pelo ponto de contacto T (x', y'), dá $a' = \frac{y'}{x'}$: logo é $aa' = -1$; ou o raio perpendicular á tangente.

Substituindo em $y = ax + b$ os valores precedentes de a e b , resultará a equação da tangente á circumferencia num ponto (x', y')

$$yy' + xx' = R^2 \dots \dots \dots (4)$$

Para tirar d'um ponto exterior M (α, β) uma tangente á circumferencia, é necessario determinar o ponto T (x', y') de contacto. Ora as coordenadas d'este ponto devem satisfazer ás equações do circulo e da tangente; e as coordenadas de M devem satisfazer á equação da tangente:

logo
$$x'^2 + y'^2 = R^2, \beta y' + \alpha x' = R^2 \dots \dots \dots (5)$$

Como a eliminação entre as equações (5) daria equações do 2.º grau em x' ou y' , ha dous pontos de contacto T, T', e por conseguinte duas tangentes MT, MT', tiradas do ponto M. Mas, em vez de fazer a eliminação, notemos que, por satisfazerem as coordenadas x', y' , dos dous

pontos de contacto T, T', á equação
$$\beta y + \alpha x = R^2,$$

esta equação é a da corda TT'; por conseguinte a sua construcção determinarâ os pontos de contacto, T, T', e as tangentes MT, MT'.

Fazendo nesta equação $y = 0$, resulta a abscissa $CB = \frac{R^2}{\alpha}$ do ponto

B onde a corda TT' corta o eixo dos x : e como esta abscissa sahe independente de $\beta = PM$, segue-se que, se o ponto M se mover sobre a recta PM, as tangentes mudarão de direcção, girando a corda TT' em torno do ponto fixo B.

Tambem se pode dar ao calculo uma fórma tal, que nos conduza ao processo geometrico do n.º 59, II da Geom. Tomemos para isso a differença das equações (5)

$$y^2 - \beta y + x^2 - \alpha x = 0, \text{ ou } (y - \frac{1}{2}\beta)^2 + (x - \frac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2.$$

Como as coordenadas dos pontos de contacto T, T', devem satisfazer a esta equação, o circulo, a que ella pertence, ha de passar por esses pontos.

Para descrever este circulo, cujo centro é $(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, e cujo raio é $\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2}$, tomemos Cp = $\frac{1}{2}$ CP = $\frac{1}{2}\alpha$, e pm = $\frac{1}{2}$ MP = $\frac{1}{2}\beta$: será m o centro, e Cm o raio, com os quaes descrevendo a circumferencia acharemos os pontos T, T'.

40. Sejam C, C' (fig. 40) os centros de dous circulos, C a origem das abscissas contadas sobre CC', e CC' = a. Eliminando x, y, entre as equações d'estes dous circulos,

$$x^2 + y^2 = R^2, (x - a)^2 + y^2 = R'^2,$$

teremos as coordenadas da sua intersecção,

$$x = \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a}, y = \pm \frac{\sqrt{4a^2R^2 - (a^2 + R^2 - R'^2)^2}}{2a};$$

e como a cada valor de x correspondem dous valores de y eguaes, e de signaes contrarios, segue-se que a linha dos centros CC' é perpendicular ao meio da corda MN.

D'estas equações facilmente resultam as condições que devem verificar-se, no caso de se cortarem, ou tocarem, os circulos (Geom. n.º 49). Com effeito o radical, transformado como na pag. 3, torna-se em

$$\sqrt{(a + R + R')(a + R - R')(R + R' - a)(R' - R + a)}.$$

Ora, suppondo R = ou > R', os dous primeiros factores são positivos. Em quanto aos outros dous:

1.º Se ambos têm o mesmo signal, não podem ser negativos, por serem incompativeis as desigualdades $R + R' < a$ e $R - R' > a$: logo, para que seja real o radical, são necessarias as condições $R + R' > a$, $R - R' < a$; e então as circumferencias cortam-se em dous pontos.

2.º Se um d'elles é nullo, $a = R + R'$, ou $a = R - R'$, resulta $y = 0$, $x = R$; e os circulos tem um só ponto commum na linha dos centros: é o caso do contacto.

3.º Em fim, se têm signaes contrarios, isto é,

$$a > R + R' \text{ e } a > R - R', \text{ ou } a < R - R' \text{ e } a < R + R',$$

as raizes são imaginarias; e como em ambos estes systemas de condições a primeira envolve a segunda, os circulos não se encontram quando é $a > R + R'$, ou quando é $a < R - R'$.

41. Tambem se podem resolver os problemas seguintes:

I. Dado um circulo e uma recta, tirar outra recta que seja parallela á primeira, e tangente ao circulo.

II. Tirar uma tangente commum a dous circulos dados.

III. Descrever uma circumferencia, que seja tangente a outra circumferencia, e a duas rectas dadas.

O centro está sobre a recta que divide ao meio o angulo das rectas dadas.

Transformação das coordenadas

42. Algumas vezes é tão composta a equação d'uma curva, que difficilmente se deduzem d'ella as suas propriedades; mas esta complicação pode depender da posição dos eixos, a que está referida a curva. Por exemplo, qualquer das equações

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2, \quad y^2 = 2Rx - x^2, \quad y^2 + x^2 = R^2,$$

pertence ao circulo; mas a ultima é mais simples, por ser o centro a origem das coordenadas.

Convém pois, para simplificação dos calculos, que se saiba transformar a equação d'uma curva, referida a certos eixos, em outra referida a novos eixos.

43. 1.º Dados os eixos coordenados Ax , Ay , (fig. 41), passar para outros $A'x'$, $A'y'$, parallelos a elles.

Chamando $AB = a$, $A'B = b$, as coordenadas da nova origem A' referidas á primitiva; $AP = x$, $MP = y$, as coordenadas primitivas do ponto

M; e $A'C = x$, $MC = y'$, as novas coordenadas do mesmo ponto: é

$$AP = BP + AB, MP = MC + CP,$$

ou
$$x = x' + a, y = y' + b \dots \dots \dots (1).$$

44. 2.º *Dados os eixos rectangulares Ax, Ay, (fig. 42), passar para outros Ax', Ay', com direcções quaesquer, e com a mesma origem.*

Chamando (xx') e (xy') os angulos xAx' e xAy' , que determinam a posição dos novos eixos: é, para qualquer ponto M,

$$AP = x, MP = y, \text{ e } AL = x', ML = y';$$

e tracta-se de exprimir x e y em x' e y' , e nos angulos (xx') e (xy') .

Ora temos (*)
$$AP = AK + LI, MP = LK + IM;$$

e os triangulos rectangulos AKL, LIM dão

$$AK = x' \cos (xx'), KL = x' \sin (xx'), LI = y' \cos (xy'), MI = y' \sin (xy');$$

logo

$$x = x' \cos (xx') + y' \cos (xy'), y = x' \sin (xx') + y' \sin (xy') \dots (2).$$

Se os novos eixos forem tambem rectangulares (fig. 43), teremos $(xy') = 90 + (xx')$; e as equações precedentes serão (**)

$$x = x' \cos (xx') - y' \sin (xx'), y = x' \sin (xx') + y' \cos (xx') \dots (2').$$

45. 2.º *Dados os eixos Ax, Ay, (fig. 42), com quaesquer direcções,*

(.) Por onde se vê que a abscissa x é a projecção da porção polygona ALM sobre o eixo dos x .

(**) O mesmo se conclue directamente dos triangulos AKL, LIM; por ser

$$AK = x' \cos (xx'), KL = x' \sin (xx'), LI = y' \sin (xx'), MI = y' \cos (xx'),$$

$$x = AK - LI, y = KL + MI.$$

passar para outros Ax' , Ay' , tambem com quaesquer direcções, e com a mesma origem.

Os triangulos obliquangulos ALK, LIM dão

$$AK = AL \cdot \frac{\text{sen ALK}}{\text{sen AKL}} = \frac{x' \text{ sen } (x'y)}{\text{sen } (xy)}, \quad KL = \frac{x' \text{ sen } (xx')}{\text{sen } (xy)},$$

$$LI = \frac{y' \text{ sen } (yy')}{\text{sen } (xy)}, \quad MI = \frac{y' \text{ sen } (xy')}{\text{sen } (xy)};$$

logo

$$x = \frac{x' \text{ sen } (x'y) + y' \text{ sen } (yy')}{\text{sen } (xy)}, \quad y = \frac{x' \text{ sen } (xx') + y' \text{ sen } (xy')}{\text{sen } (xy)} \dots (3).$$

Se os eixos primitivos forem obliquos, e os novos rectangulares (fig. 43),

teremos $(x'y') = 90^\circ$, ou $(x'y) = 90^\circ - (yy')$, $(xy') = 90^\circ + (xx')$;

o que mudará as formulas precedentes em

$$x = \frac{x' \text{ sen } (x'y) + y' \text{ cos } (x'y)}{\text{sen } (xy)}, \quad y = \frac{x' \text{ sen } (xx') + y' \text{ cos } (xx')}{\text{sen } (xy)} \dots (3').$$

46. Finalmente, querendo mudar tanto a origem como as direcções dos eixos, faremos successivamente a passagem por meio da equação (1), e d'aquella das equações (2), (2'), (3), (3'), que pertencer ao caso de que se tracta.

47. Se os eixos não estiverem collocados como suppõe as figuras (42 e 43), modificar-se-hão os signaes dos senos e dos cosenos, conforme o que se disse no n.º 19 a respeito das quantidades indirectas, comparando a disposição dos eixos naquellas figuras com a que deve ter logar. Por exemplo, se o eixo Ax' estiver abaixo de Ax , faremos $\text{sen } (xx')$ negativo e $\text{cos } (xx')$ positivo.

No entretanto é mais breve, e menos sujeito a erro, deduzir as formulas directamente da figura que se considera, reproduzindo nella as operações precedentes.

Coordenadas polares

48. Até aqui determinámos a posição d'um ponto sobre um plano por meio das suas distancias a dous eixos; mas ha muitos outros modos de fixar aquella posição, cada um dos quaes dá um novo systema de coordenadas (Vej. a *Geometr. de Pos.* de Carnot. pag. 423).

O mais conhecido d'estes systemas é o das *coordenadas polares*.

Para determinar com estas coordenadas a posição de qualquer ponto M (fig. 45), é necessario conhecer a sua distancia $AM = r$ a um ponto fixo A, e o angulo $MAP = \theta$ formado por AM com uma linha fixa Ax dada de posição. O ponto A chama-se o *foco*; AM o *raio vector*, e DAP o *angulo vector*, do ponto M.

A equação polar d'uma linha é a relação que tem lugar entre as coordenadas polares r e θ , para qualquer dos seus pontos. Se o raio AM girar em torno da origem A; e se neste movimento fizermos variar a sua grandeza, de modo que os valores correspondentes r e θ satisfaçam constantemente á equação polar: a extremidade M descreverá a curva MN, logar geometrico d'aquella equação.

49. Sendo $AP = x$, $MP = y$; o triangulo MAP dá

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, x^2 + y^2 = r^2 \dots \dots \dots (1).$$

Por tanto, se quizermos passar d'um systema de coordenadas rectangulares x, y , para o das polares r, θ , usaremos das equações (1); e se quizermos passar d'um systema de coordenadas obliquas para o das polares, transformaremos primeiro a equação em coordenadas rectangulares [n.º 43 e 45, eq. (3')], referidas á origem A, e ao eixo Ax desde o qual se contam os angulos θ ; e depois applicaremos as formulas (1) a esta equação assim transformada.

Reciprocamente: se tivermos a equação polar d'uma curva, e quizermos traduzil-a em coordenadas rectangulares, bastará substituir nella as expressões de r e θ , tiradas das formulas (1) pela eliminação: e se quizermos passar depois para as coordenadas obliquas, e para outra origem, usaremos das expressões (1) do n.º 43, e (2) do n.º 44.

50. Tomemos por exemplo a equação (1) do n.º 37, pertencente ao circulo cujo centro C (fig. 44) tem as coordenadas rectangulares α e β .

As expressões (1) transformam esta equação em

$$r^2 - 2r(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \dots \dots (2).$$

Donde se tiram os seguintes resultados:

1.º A cada angulo θ correspondem dous valores, AM e AN, de r ; valores imaginarios, quando θ é tal que AM não encontra a circumferencia.

2.º O producto das raizes, r' e r'' , é (Alg. el. n.º 145, 3.º)

$$r'r'' = AM \cdot AN = \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

Como esta expressão não depende de θ , segue-se que é constante o producto AM . AN de dous raios vectores, correspondentes á mesma secante: e, segundo for o ponto A interior ou exterior ao circulo, assim recahiremos nos theoremas da Geometr. n.ºs 72 ou 75.

3.º Façamos $AC = m$, $CAM = \varphi$, $CAs = i$;

o que dá $\theta = \varphi + i$, $\alpha = m \cos i$, $\beta = m \sin i$.

A somma das raizes AM, AN, será (Alg. el. n.º 145, 3.º)

$$r' + r'' = 2(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) = 2m \cos(\theta - i) = 2m \cos \varphi;$$

equação facil de construir, quando se pede uma das quantidades m , φ , $r' + r''$, sendo dadas as outras duas.

4.º Para que AM seja tangente, é necessario que as raizes r' , r'' , sejam eguaes, ou a equação (2) um quadrado perfeito, e por conseguinte

$$(Alg. el. n.º 146) \quad 4(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0,$$

ou $\pm R = m \sin(\theta - i) = m \sin \varphi.$

Este valor de R é lado d'um triangulo rectangulo, no qual m é a hypotenusa, e φ o angulo opposto a R: ora no triangulo ACT temos $AC = m$, $TAC = \varphi$, $CT = R$; logo este triangulo é rectangulo em T, e por isso a tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto.

Demais, por serem eguaes as raizes, temos

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = (m + R)(m - R) = AB \cdot AI = AM \cdot AN;$$

logo a tangente é meia proporcional entre a secante e a parte exterior da mesma secante.

5.º A differença das raizes, ou a corda $MN = k$, é

$$k = 2\sqrt{R^2 - (\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \operatorname{cos} \theta)^2} = 2\sqrt{R^2 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi};$$

logo
$$m \operatorname{sen} \varphi = \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}k^2}.$$

Ora, se em qualquer parte d'um circulo (fig. 46) tirarmos a corda $mn = k$, e abaixarmos do centro sobre ella a perpendicular Co , teremos $Co = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}k^2} = m \operatorname{sen} \varphi$; logo descrevendo um circulo do centro C , com o raio Co , e tirando-lhe por A a tangente AF , será

$$m \operatorname{sen} \varphi = CF = AC \operatorname{sen} FAC = m \operatorname{sen} FAC,$$

e por isso $\varphi = FAC$, $MN = k$. D'onde resulta que, para tirar pelo ponto A uma corda MN que tenha um dado comprimento k , basta tomar uma corda $mn = k$, descrever o circulo Fo com o raio igual á perpendicular Co , e tirar por A as tangentes AF ao mesmo circulo, as quaes determinarão as cordas pedidas $MN = k$. Mas o problema só é possível, quando o ponto A fica exterior ao circulo Fo .

6.º Se tomarmos para eixo dos x a recta AB (fig. 44), que passa pelo pólo e pelo centro, teremos $\beta = 0$; e se o pólo estiver na circumferencia, em I , teremos tambem $\alpha = R$: o que reduzirá a equação (2) a

$$r^2 - 2rR \operatorname{cos} \theta = 0.$$

Logo $r = 2R \operatorname{cos} \theta$ é o comprimento da corda k , que faz com o diametro o angulo θ . E como imaginando um segundo circulo (fig. 40') de raio R' , e tangente ao primeiro no mesmo pólo, a sua corda é similhantemente $k' = 2R' \operatorname{cos} \theta$; resulta

$$k : k' :: R : R'.$$

Por onde se vê, que as cordas tiradas, debaixo do mesmo angulo, pelo ponto de contacto de duas circumferencias que se tocam interior ou exteriormente, estão entre si como os raios.

II. SECÇÕES CONICAS

Da ellipse

51. Chama-se *Ellipse* a curva ABO (fig. 47), na qual as distancias de cada um dos seus pontos a dous fixos F, F', fazem uma somma constante

$$z + z' = AO = 2a.$$

As distancias FM, F'M, são *raios vectores* da ellipse; e F, F', são os *fócos*.

Para achar a equação da ellipse, ponhamos a origem das coordenadas rectangulares no meio C de FF', e tomemos esta linha para eixo dos x: o que deve simplificar a equação, por sabermos já, pela definição da curva, que esta ha de ser symetrica relativamente áquelle eixo.

Fazendo CP = x, MP = y, e FC = c, os triangulos rectangulos FMP, F'MP, dão

$$z^2 = y^2 + (x - c)^2, \quad z'^2 = y^2 + (x + c)^2, \quad z + z' = 2a.$$

E como a differença das duas primeiras é

$$z'^2 - z^2 = (z + z')(z' - z) = 2a(z' - z) = 4cx,$$

serão

$$FM = z = a - \frac{cx}{a}, \quad F'M = z' = a + \frac{cx}{a} \dots \dots \dots (1);$$

o que substituído nas expressões de z^2 , ou de z'^2 , dá

$$a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2 \dots \dots \dots (2).$$

Se fizermos $x=0$, teremos a ordenada inicial $BC = \sqrt{a^2 - c^2} = b$; e eliminando c por meio d'ella, a equação (2) tornar-se-ha em

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \dots \dots \dots (3),$$

que é a equação da ellipse referida ao centro e aos eixos.

52. A equação (3) dá
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Como a cada abscissa x correspondem dous valores eguaes de y , a curva é symetrica relativamente ao eixo AO (fig. 48); e como $+x$ e $-x$ dão o mesmo valor para y , a curva é symetrica relativamente a BD. Por onde se vê que, se a figura se dobrasse por AO ou por BD, as suas partes se sobreporiam, e coincidiriam perfeitamente.

$x > \pm a$ dá y imaginario; e $y > \pm b$ dá x imaginario. Por onde se vê que a curva é fechada; $BC = b$ a sua maxima ordenada; e $CO = a$ a sua maxima abscissa. AO e BD são o eixo maior e o eixo menor; A e O os vertices; C o centro; $FC = c$ a excentricidade.

A Ellipse é pois uma curva fechada, na qual a somma dos dous raios vectores de qualquer dos seus pontos é sempre egual ao eixo maior.

53. Duas ordenadas y, y' , da ellipse, correspondentes ás abscissas x, x' ,

dão
$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - x'^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{(a+x')(a-x')} = \frac{AP \cdot PO}{AP' \cdot P'O'}$$

isto é, os quadrados das ordenadas proporcionaes aos productos das distancias dos pés d'ellas aos dous vertices.

Se mudarmos respectivamente x e y em y e x , a equação (3) tornar-se-ha em

$$b^2 y^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2;$$

conservando assim a mesma fórma, quer se tome AO, quer BD, para eixo dos x .

54. A equação do circulo ANO, descripto do centro C com o raio a ,

dá
$$Y = \sqrt{a^2 - x^2} = PN;$$

logo
$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Por tanto a razão entre as ordenadas do circulo e da ellipse, correspondentes à mesma abscissa, é constante e igual à razão dos eixos: e por ser $y < Y$, vê-se que o circulo descripto com o raio a comprehende a ellipse. Similhantermente se veria que o circulo descripto com o raio b é sempre comprehendido pela ellipse.

A ultima equação indica um meio muito simples de descrever a ellipse. Traçados os eixos AO, BD, e descriptas com os raios b e a as duas circumferencias, inscripta e circumscripta, tire-se um raio qualquer CN; e depois pelos pontos Q e N, onde este raio corta as circumferencias, tirem-se QM e NP parallelas aos eixos: o ponto M pertencerá á ellipse;

por que
$$\frac{PM}{PN} = \frac{CQ}{CN}, \text{ ou } \frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}, \text{ dá } PM = Y \cdot \frac{b}{a} = \acute{y}.$$

55. Da definição da ellipse tambem resulta outro processo para descrever esta curva.

Traçados os dous eixos AO e BC (fig. 47), descreva-se do centro B, com o raio CO, um arco de circulo: os pontos F, F', onde o circulo cortar AO, serão os fôcos; por que é $CF = \sqrt{a^2 - b^2} = c$. Depois, do centro F com o raio equal a uma parte qualquer OK de OA, que não seja $> OF'$ nem $< OF$, e do centro F' com o raio equal ao resto AK, descrevam-se dous arcos de circulo: os pontos M, onde elles se encontrarem, pertencerão á ellipse, por ser $FM + F'M = AO$. E do mesmo modo, se dos centros F' e F com aquelles raios OK e AK descrevermos arcos, as suas intersecções serão pontos da ellipse. Assim os arcos descriptos respectivamente dos centros F e F' com os raios OK e AK, e dos mesmos centros com os raios AK e OK, darão quatro pontos da ellipse.

Quando as dimensões da ellipse são grandes, prendem-se nos fôcos F, F', as pontas de um cordel ou fio, do comprimento AO; e conservando o fio distendido por meio de um ponteiro, este no seu movimento descreve a curva.

56. Quanto mais se afastam um do outro os dous fôcos, mais diminue a razão $\frac{b}{a}$, e mais se achata a ellipse: pelo contrario, quanto mais se

approximam os fôcos, mais ella se parece com o circulo; e torna-se nelle quando os fôcos coincidem, como se vê fazendo $c=0$ na equação (2). Por tanto o circulo pode considerar-se como uma ellipse, cujos fôcos coincidem, ou cujos eixos são eguaes.

As equações (1) mostram que *os raios vectores do ellipse são racionais e lineares relativamente á abscissa x.*

$x = \pm a$, e $x = 0$, dão respectivamente o maximo, minimo, e medio raio vector da ellipse, $z = a \pm c$, $z = a$; e por isso O é o ponto mais proximo do fôco F da ellipse, A o mais remoto, e B o que fica na media distancia.

Chama-se *parametro o dobro da ordenada que passa pelo fôco.*

$$\text{E como } x = c = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \text{ dá } 2y = p = \pm 2 \frac{b^2}{a} = \frac{(2b)^2}{2a},$$

o parametro é uma terceira proporcional aos eixos maior e menor.

57. Mudando x em $x - a$ na equação (3), vem a equação da ellipse referida aos eixos e ao vertice,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2), \text{ ou } y^2 = \frac{p}{2a} (2ax - x^2) \dots \dots (4).$$

58. Para referir a ellipse ás coordenadas polares, tomando um dos fôcos F para pólo e FO para eixo, basta mudar x em $x_1 + c$ na expressão (1) de z , e depois x , em $z \cos \theta$; o que dá a equação polar da ellipse,

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \text{ ou } z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + e \cos \theta} \dots \dots (5);$$

sendo z e θ o raio vector FM e o angulo vector MFO, e e a razão $\frac{c}{a}$ da excentricidade para o semi-eixo maior.

Para transportar a origem ao outro fóco F' , contando ainda θ no mesmo sentido desde $F'O$, bastará mudar e em $-e$ (*).

Da hyperbole

59. Chama-se *hyperbole* a curva na qual é constante a differença das distancias de cada um dos seus pontos M (fig. 49) a dous pontos fixos F, F' .

Tomando para origem o meio C de FF' , e discorrendo como no n.º 51,

(*) Se contarmos os angulos $MFE = v$ desde uma recta FE que faça com o eixo o angulo $\bar{\omega}$, será $\theta = v - \bar{\omega}$; e a equação polar da ellipse terá a fórma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v - \bar{\omega})}$$

Se chamarmos (fig. 57) QCO o angulo u , teremos, em virtude da equação (1)

e do triangulo QCP,
$$r = a - \frac{ex}{a} = a - ex = a(1 - e \cos u).$$

Egualando os dous ultimos valores de r , tira-se $\cos u = \frac{e + \cos(v - \bar{\omega})}{1 + e \cos(v - \bar{\omega})}$,

e por conseguinte
$$\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} = \frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{1 - \cos(v - \bar{\omega})}{1 + \cos(v - \bar{\omega})}$$

ou
$$\text{tang } \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \cdot \text{tang } \frac{1}{2} (v - \bar{\omega}),$$

que estabelece a relação entre os angulos $v - \bar{\omega}$ e u .

acharemos

$$z'^2 - z^2 = 2a(z' + z) = 4cx, \quad z = \frac{cx}{a} - a, \quad z' = \frac{cx}{a} + a \dots (1),$$

que, substituindo em $z^2 = y^2 + (x - c)^2$, e fazendo $c^2 = a^2 + b^2$, dão

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \dots \dots \dots (2).$$

Esta equação dá $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$;

logo:

- 1.º A hyperbole é symetrica relativamente aos eixos FF' e Cy.
- 2.º Quanto mais cresce x , positiva ou negativamente, desde $x = \pm a$, mais y augmenta; e quanto mais cresce y , desde $y = 0$, mais x augmenta.
- 3.º Como $x = \pm a$ dá y nullo, e $x < \pm a$ dá y imaginario, a curva corta o eixo dos x nos vertices A e O, e não existe entre elles.

Por tanto a hyperbole tem dous ramos oppostos por suas convexidades, abertos, e que se extendem indefinidamente, um á direita e outro á esquerda da origem, desde os pontos O e A.

O ponto C é o centro da hyperbole; F, F', os focos; e AO = 2a o primeiro eixo. O segundo eixo 2b é o dobro da ordenada central $y = b' - 1$, que corresponde a $x = 0$, depois de tornada real: mas esta linha não é, como era na ellipse, uma das dimensões da curva.

60. As ordenadas y, y' , (fig. 50), que correspondem ás abscissas x, x' , dão como no n.º 53,

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2} = \frac{(x+a)(x-a)}{(x'+a)(x'-a)} = \frac{OP \cdot AP}{OP' \cdot AP'};$$

logo tambem nesta curva são os quadrados das ordenadas proporcionaes aos productos das distancias dos pés d'ellas aos dous vertices.

Quando $a = b$, é $y^2 = x^2 - a^2$, e a hyperbole chama-se equilatera.

Mudando x em y , e y em x , isto é, contando os x sobre CD, e os y sobre CP, a equação da hyperbola referida ao centro e ao segundo eixo é

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2,$$

cuja fórmula é a mesma que a (2) da referida ao primeiro eixo, menos em quanto ao signal do segundo membro. V. fig. 74.

61. O *parametro*, ou dobro da ordenada que passa pelo fóco, é, como na ellipse, $p = \frac{2b^2}{a}$.

Mudando x em $x + a$, transporta-se a origem ao vertice A, e a equação (2) transforma-se em

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2), \quad \text{ou } y^2 = \frac{p}{2a} (2ax + x^2) \dots \dots (2).$$

Similhantermente, mudando x em $x - a$, transporta-se a origem ao vertice O, e a equação (2) transforma-se em

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - 2ax), \quad \text{ou } y^2 = \frac{p}{2a} (x^2 - 2ax).$$

62. A ellipse ABOD (fig. 50), descripta com os eixos $2a$ e $2b$ da hyperbole, fica entre os dous vertices; alonga-se no sentido dos x , ou dos y , conforme é $a >$ ou $< b$; e torna-se em um circulo, quando a hyperbole é equilatera. Esta ellipse e a hyperbole tem propriedades analogas, que podem vêr-se na *Geométrie de Position* de Carnot (pag. 143).

63. Da definição da hyperbole resulta um meio de descrever por pontos esta curva.

Traçados os eixos FF' e Cy (fig. 49), e marcados os fócos F e F', descreva-se do centro F', com qualquer raio k que não seja $< F'A$, um arco de circulo; e do centro F, com o raio $k - AO$, outro arco: as intersecções M d'estes arcos pertencerão á curva, por ser $F'M - FM = AO = 2a$. E similhantermente, descrevendo dous arcos, um do centro F' com o raio $k - AO$, outro do centro F com o raio k , as intersecções d'elles pertencerão á curva. Por conseguinte teremos tantas vezes quatro pontos da curva, quantos forem os valores differentes que dermos a k .

As equações (1) mostram, que os raios vectores da hyperbole são racionaes e lineares em relação á abscissa.

64. Fazendo $AFM = \theta$, $c = ae$, e reproduzindo os calculos do n.º 58,

teremos a equação polar da hyperbole referida ao fóco F (fig. 49),

$$z = \frac{c^2 - a^2}{a + c \cos \theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}.$$

65. Comparando as equações da ellipse e da hyperbole referidas aos dous eixos, vê-se que uma d'ellas se transforma na outra pela mudança de b em $b\sqrt{-1}$; e comparando as suas equações polares, vê-se que uma d'ellas se transforma na outra pela mudança de a em $-a$: artificios estes de calculo, que podem servir para converter as formulas relativas a uma d'estas curvas nas que convém á outra.

Da parabola

66. A parabola é uma curva, na qual as distancias dos seus pontos M a um fixo F (fig. 52) são respectivamente eguaes ás distancias dos mesmos pontos M a uma linha QQ', cuja posição é dada, e que se chama *directriz*.

Tomando para eixo dos x a recta DF tirada por F perpendicularmente a QQ', para origem das coordenadas o meio A de FD $= \frac{1}{2}p$, e para eixo dos y a recta AB paralela a QQ', é A visivelmente um ponto da curva. E como a definição da parabola, e o triangulo FMP, dão

$$MF = MQ = z = \frac{1}{4}p + x, \quad z^2 = y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2,$$

eliminando z , resulta a equação da parabola

$$y^2 = px \dots \dots \dots (1).$$

Por onde se vê que esta curva só é symetrica relativamente ao eixo dos x .

O parametro p é uma terceira proportional ás abscissas e ordenadas; e por que $x = \frac{1}{4}p = AF$ (fig. 52) dá $y = \pm \frac{1}{2}p$, vê-se que tambem na parabola o parametro é o dobro da ordenada que passa pelo fóco.

Da natureza d'esta curva resulta, que a ellipse se muda em parabola, quando o eixo maior se torna infinito.

Para dous pontos (x, y) e (x', y') da curva, temos $\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'}$;

isto é, os quadrados das ordenadas proporcionaes ás abscissas correspondentes.

67. Se tomarmos $AB=p$ (fig. 51), e com qualquer raio $KB=\frac{1}{2}(p+x)$ descrevermos um circulo: nos pontos C, onde este circulo cortar a perpendicular AC, será $AC^2=px=y$; por conseguinte, tirando CM paralela a AB, a sua intersecção com PM será um ponto da curva. Fazendo variar o raio KB, acharemos tantos pontos da curva quantos quizermos.

A equação $z = \frac{1}{4}p + x$,

que resulta immediatamente da definição da parábola, mostra que os raios vectores são racionais e lineares em relação ás abscissas correspondentes; e dá outro meio de descrever esta curva.

Com effeito, tomemos (fig. 52) $AD=AF=\frac{1}{4}p$; e do ponto F como centro, e com o raio $DP=\frac{1}{4}p+x$, descrevamos um circulo: os pontos M, onde este circulo encontrar a perpendicular PM, pertencerão á curva, por ser $MF=\frac{1}{4}p+x=z$.

68. Para transportar a origem ao fóco, e introduzir o angulo vector

$AFM = \theta$, façamos $x = \frac{1}{4}p + x', x' = -z \cos \theta$:

a equação $z = \frac{1}{4}p + x$ transformar-se-ha na polar

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos \theta} \dots \dots \dots (2).$$

Comparando esta equação (2) com a (5) do n.º 58, vê-se que da equação polar da ellipse se deduz a da parábola fazendo naquella $e=1$, $a = \infty$.

Das secções do cone

69. Quando qualquer plano OA (fig. 53) corta um cone recto da base circular IDB, a curva de intersecção AMO chama-se *secção conica*: e logo se verá que esta curva é alguma d'aquellas, de que ultimamente tractámos com a mesma denominação.

Fazendo passar pelo eixo BK um plano DBI que seja perpendicular ao plano secante (e que será perpendicular á base Geom. n.º 119), a intersecção d'estes planos será a recta AO, que se chama *eixo da secção conica*, e que é a projecção do eixo do cone sobre o plano secante. E tirando por um ponto P do eixo da secção conica um plano paralelo á base DI, as intersecções d'este plano com o plano DBI, com o cone, e com o plano secante, serão respectivamente a recta FG, o circulo FMG, e a recta PM, a qual, por ser perpendicular a FG e a AO, será uma ordenada commum das duas curvas.

Posto isto, sejam $AP = x$, $PM = y$: e procuremos uma relação entre estas coordenadas e os dados do problema, que são os angulos $DBI = \beta$ e $BAO = \alpha$, e a recta $AB = c$.

Os triangulos ABO, AFP, POG, BHF, dão

$$\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)} = \frac{AO}{c}, \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } F} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{FP}{x}, \quad \frac{\text{sen } O}{\text{sen } G} = \frac{\text{sen } (\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{PG}{AO - x};$$

logo

$$AO = \frac{c \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)}, \quad FP = \frac{x \text{ sen } \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta}, \quad PG = \frac{\text{sen } (\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2} \beta} \cdot \left(\frac{c \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)} - x \right);$$

e, em virtude d'estes valores, a propriedade fundamental do circulo FMG, $y^2 = FP \cdot PG$, dá a equação da curva

$$y^2 = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} [cx \text{ sen } \beta - x^2 \text{ sen } (\alpha + \beta)]. \dots \dots \dots (A).$$

70. Para deduzir da equação (A) as equações de todas as secções cônicas, basta dar diferentes valores a α e c , isto é, dar ao plano secante diferentes inclinações sobre o eixo, e collocar-o a diferentes distancias do vertice do cone. Então:

1.º Quando $\alpha + \beta = 180^\circ$, o plano secante é paralelo á generatriz BI (fig. 54); a curva prolonga-se ao infinito; e a equação (A) torna-se na da parábola (*)

$$y^2 = \frac{\text{sen}^2 \beta}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} cx = 4c \text{sen}^2 \frac{1}{2} \beta \cdot x = px \dots \dots \dots (B).$$

2.º Quando $\alpha + \beta < 180^\circ$, o plano secante encontra todas as geratrizes da mesma parte do vertice; a curva é fechada; e a equação conserva a forma (A).

3.º Quando $\alpha + \beta > 180^\circ$, o plano secante encontra os dous ramos do cone d'uma e d'outra parte do vertice; a curva tem dous ramos NAN' e LO'Q (fig. 53), que se prolongam ao infinito, e cujas curvaturas são oppostas; e, chamando $\text{sen}(\alpha + \beta)$ o valor absoluto do seno do arco $(\alpha + \beta)$, a equação (A) torna-se em

$$y^2 = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} [cx \text{sen} \beta + x^2 \text{sen}(\alpha + \beta)] \dots \dots \dots (C).$$

Nos dous ultimos casos, se chamarmos $2a$ a distancia AO, ou AO', dos dous vertices da curva, e k a expressão $\frac{\text{sen} \alpha \text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta}$, teremos

$$2a = \frac{c \text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}, \quad k = \frac{\text{sen} \alpha \text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \dots \dots \dots (D),$$

(*) Podem tambem repetir-se na figura 54 os raciocinios precedentes.

Para $\alpha + \beta = 180^\circ$ o valor de FP torna-se em $FP = \frac{x \text{sen} \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta}$;

AL paralela a FG fecha o triangulo ABL, no qual é

$$\frac{\text{sen} \beta}{\text{sen BAL}} = \frac{\text{sen} \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{AL}{BL} = \frac{PG}{c};$$

e os valores de FP e PG substituidos em $y^2 = FP \cdot PG$ dão a equação (B).

que transformam as equações (A) e (C) nas da *ellipse* e da *hyperbole* referidas ao vértice (n.ºs 57 e 61),

$$y^2 = k(2ax \mp x^2) \dots \dots \dots (A')$$

Fazendo $x = a$ na equação (A), e chamando b a ordenada central correspondente; e fazendo $x = -a$ na equação (C), e chamando $b\sqrt{-1}$ a ordenada central correspondente: teremos em ambas $k = \frac{b^2}{a^2}$.

Por tanto a equação geral das secções cónicas, referida ao vertice, é

$$y^2 = mx + nx^2,$$

e pertence	}	à parabola	conforme é	}	$n = 0,$	$m = p$
		à ellipse			$n = -\frac{b^2}{a^2},$	$m = \frac{2b^2}{a}$
		à hyperbole			$n = \frac{b^2}{a^2},$	$m = \frac{2b^2}{a}$

71. O que fica exposto tem logar, ainda que se façam variar c e β , ou a distancia AB e as dimensões do cone: mas não se pode fazer $\beta = 0$, ou $\beta = 180^\circ$, e c finito; por que nesse caso não existiria cone. Quando for $c = 0$, o plano secante passará pelo vertice do cone: e a intersecção será este ponto, quando for $\alpha + \beta < 180^\circ$; será uma aresta, e o plano será tangente ao cone, quando for $\alpha + \beta = 180^\circ$; constará de duas retas, que passam pelo vertice do cone, quando for $\alpha + \beta > 180^\circ$.

Os mesmos resultados se deduzem da equação (A), fazendo nella $c = 0$; por que esta hypothese a torna em:

$y^2 + kx^2 = 0,$	e por conseguinte	$y = 0$	e	$x = 0,$	quando $\alpha + \beta > 180^\circ$
$y = 0$					quando $\alpha + \beta = 180^\circ$
$y = \pm x\sqrt{k}$					quando $\alpha + \beta < 180^\circ.$

Por tanto, quando c for nullo, a equação (A) pertencerá sempre a

alguma das tres secções, ponto, recta, ou duas rectas, que passam pelo vertice; e quando c não for nullo, a equação pertencerá á *ellipse*, á *hyperbole*, ou á *parabola*, conformé for *negativo*, *positivo*, ou *nullo*, o coefficiente de x^2 .

Estas especies formam o quadro seguinte:

c não igual a zero, e	{	$\alpha + \beta < 180^\circ$	Ellipse
		$\alpha + \beta = 180^\circ$	Parabola
		$\alpha + \beta > 180^\circ$	Hyperbole
c igual a zero, e	{	$\alpha + \beta < 180^\circ$	Um ponto (vertice)
		$\alpha + \beta = 180^\circ$	Uma recta (aresta de contacto)
		$\alpha + \beta > 180^\circ$	[Duas rectas que se cortam (arestas de secção)].

72. Dada a equação d'uma ellipse, d'uma hyperbole, ou d'uma parabola, referidas ao vertice; e um cone: é facil achar o logar da curva proposta sobre o cone, isto é, achar a posição que deveria ter o plano secante para que a secção fosse identica á mesma curva proposta.

Com effeito no caso da ellipse, ou da hyperbole (fig. 53), conhecem-se a , k , β ; e tracta-se de achar c , e o angulo α . Para isso a segunda das equações (D), ou

$$\begin{aligned} 2k \cos^2 \frac{1}{2} \beta &= 2 \sin^2 \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \\ &= (1 - \cos 2\alpha) \cos \beta + \sin 2\alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

que tem a fórma $b = n \sin 2\alpha + l \cos 2\alpha$,

dá α pelo systema das equações

$$\text{tang } \varphi = \frac{l}{n}, \quad \text{sen } (\varphi + 2\alpha) = \frac{b \cos \varphi}{n};$$

e depois a primeira das mesmas equações (D) dá c .

No caso de ser a equação dada a da parábola (fig. 54), $y^2 = px$, teremos (eq. B) $p = 4c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \beta$, que faz conhecer c ; e é $\alpha = 180^\circ - \beta$ (*).

(*) Se o cone não fosse recto, e tirássemos o plano IBD (fig. 53) de modo que passasse pelo eixo e pela perpendicular KI , abaixada do centro K da base sobre a intersecção RV do plano d'ella com o secante; conservando o resto da construcção: as ordenadas MP seriam perpendiculares a GF , por serem respectivamente paralelas estas linhas a RV e IK , como intersecções dos planos parallelos IND e GMF com AMO e com BID ; mas não seriam necessariamente perpendiculares a AO . Chamando γ o angulo BDI , que não é agora $90^\circ - \frac{1}{2} \beta$; e repetindo o que se disse no n.º 59, só com a modificação de serem $F = \gamma$, $G = \beta + \gamma$; acharemos

$$AO = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}, \quad FP = \frac{x \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}, \quad PG = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)} \cdot \left(\frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} - x \right);$$

$$e \quad y^2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\beta + \gamma)} [cx \operatorname{sen} \beta - x^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)],$$

que adiante veremos ser a equação d'uma secção conica, ainda que as coordenadas sejam obliquas; e que se reduz a (A) no caso de ser $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2} \beta$, ou de ser recto o cone.

1.º Se a secção é parallela á base, ou $\alpha = \gamma$, a equação torna-se na d'um circulo

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

2.º Se $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, a equação toma tambem a fórmula

$$y^2 = 2ax - x^2;$$

mas só pertence ao circulo no caso de serem as ordenadas PM perpendiculares a AO , isto é, no caso de ser tambem RV perpendicular a AO ou perpendicular ao plano ABI . E neste caso a secção circular chama-se *anti-parallela*.

3.º Se o cone se torna num cylindro, é $\beta = 0$; mas como tambem é $c = \infty$, demos á equação a fórmula

$$y^2 = k(2ax - x^2), \quad \text{sendo } k = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\beta + \gamma)},$$

como no n.º 70. Esta equação tornar-se-ha em

$$y^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \gamma} (2ax - x^2),$$

que já vimos ser a d'uma ellipse, no caso de serem rectangulares as coordenadas x e y ; e que tambem o é, como adiante veremos, no caso de serem as coordenadas obliquas.

Methodo das tangentes

73. Por dous pontos M e Q d'uma curva BMQ (fig. 55) tiremos a secante SMQ. Se, conservando M fixo, fizermos variar successivamente a posição de Q, a secante mudará successivamente de inclinação a respeito d'uma linha dada; e tornar-se-ha na tangente MT, quando o ponto Q coincidir com M. A tangente pode assim definir-se: *uma secante, cujos pontos de intersecção com a curva coincidem um com o outro.*

Como $y - y' = A(x - x') \dots \dots \dots (1)$

é a equação de todas as rectas que passam pelo ponto M (x', y'), basta, para determinar a tangente MT, assignar a $A = \text{tang T}$ o valor correspondente á inclinação d'esta recta sobre o eixo dos x . É o que vamos fazer.

Chamando $h = MR$ e $k = QR$ as differenças das abscissas e das ordenadas dos pontos M e Q, serão $x' + h$ e $y' + k$ as coordenadas de Q;

e será $\frac{k}{h} = \text{tang S}$ a tangente do angulo QMR, a qual se pode achar substituindo $x' + h$ e $y' + k$ em logar de x' e y' na equação da curva, e

tirando da transformada o valor de $\frac{k}{h}$. Mas este valor de $\text{tang S} = \frac{k}{h}$, ti-

rado da equação da curva, ha de ter a fórmula $\text{tang S} = p + \beta$; designando p os termos independentes das quantidades h e k , e β os termos compostos d'estas quantidades, os quaes decrescerão indefinidamente á medida que ellas forem mais pequenas: e por outra parte é claro que tang S se aproxima indefinidamente de tang T , á medida que o ponto Q se aproxima de M; de sorte que, se fizermos $\text{tang S} = A + \alpha$, poderá α ser tão pequena quanto se quizer. D'onde resulta (*Alg. el. n.º 120*), que a equação

$$\text{tang S} = A + \alpha = p + \beta$$

se decomporá em duas, uma das quaes $A = p$ determinará A; sendo

assim A o limite de $p + \beta$, isto é, o valor em que se torna $p + \beta$ quando β é nullo. Por tanto:

A é o valor da razão $\frac{k}{h}$, quando nella se supõem nullos h e k . E para achar este valor, basta: substituir $x' + h$ e $y' + k$ na equação da curva; tirar da transformada a expressão de $\frac{k}{h}$; e fazer $h = 0$ e $k = 0$ nesta expressão.

74. A recta definida MN , perpendicular á tangente no ponto de contacto, chama-se *normal*. As condições de ser perpendicular á tangente, cuja equação é (1), e de passar pelo ponto M , dão (n.º 31) a equação da normal

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x') \dots \dots \dots (2).$$

Tambem se chamam *tangente*, e *normal*, as partes MT , e MN , das linhas indefinidas, que têm os mesmos nomes, interceptas entre o ponto de contacto e o eixo dos x . E chamam-se *sub-tangente*, e *sub-normal*, as partes TP , e PN , interceptas no eixo dos x entre a tangente e a ordenada, e entre a normal e a ordenada.

Fazendo $y = 0$ nas equações (1) e (2), resultam os valores correspondentes de x

$$AT = x' - \frac{y'}{A}, \quad AN = x' + Ay',$$

logo:

subtangente	$TP = \frac{y'}{A}$	} (3).
subnormal	$PN = Ay'$		
tangente	$MT = y' \sqrt{1 + \frac{1}{A^2}}$		
normal	$MN = y' \sqrt{1 + A^2}$		

Aplicações

75. *Parabola.* Mudando x' em $x' + h$, e y' em $y' + k$, na equação $y'^2 = 2px'$ d'esta curva; tirando o valor de $\frac{k}{h}$; e fazendo nelle $h = 0$, e $k = 0$: teremos

primeiro
$$y'^2 = 2px', (y' + k)^2 = 2p(x' + h);$$

depois
$$2ky' + k^2 = 2ph, \frac{k}{h} = \text{tang } S = \frac{2p}{2y' + k};$$

e finalmente
$$A = \text{tang } T = \frac{p}{y'}.$$

E as equações (1), (2), (3), darão:

equações	$\left\{ \begin{array}{l} \text{da tangente indefinida} \\ \text{da normal indefinida} \end{array} \right.$	$yy' = p(x + x'),$
		$(y - y')p + (x - x')y' = 0,$
valores	$\left\{ \begin{array}{l} \text{da subtangente} \\ \text{da subnormal} \\ \text{da tangente} \\ \text{da normal} \end{array} \right.$	$TP = 2x',$
		$PN = p,$
		$MT = \sqrt{2x'(2x' + p)},$
		$MN = \sqrt{p(2x' + p)}.$

Por tanto: *na parabola a subtangente é o dobro da abscissa; e a subnormal é igual ao semiparametro, ou ao dobro da distancia do vertice ao foco.* Assim o vertice A fica sempre entre os pés T e P da tangente e da ordenada, e equidistante d'elles.

76. Procuremos o angulo $TMF = V$, que o raio vector faz com a tan-

gente. Como este raio passa por M (x', y') e F ($\frac{1}{2}p, 0$), a tangente do angulo que elle faz com o eixo dos x (n.º 30) é $A' = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p}$; e para determinar V, temos (n.º 31) as equações

$$A = \frac{p}{y'}, \quad A' = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p}, \quad \text{tang V} = \frac{A' - A}{1 + AA'};$$

as quaes, attendendo a $y'^2 = 2px'$, e supprimindo o factor commum $x' + \frac{1}{2}p$, dão

$$\text{tang V} = \frac{y'^2 + \frac{1}{2}p^2 - px'}{\frac{1}{2}py' + x'y'} = \frac{p}{y'}, \quad \text{ou tang V} = A = \text{tang T}.$$

Por conseguinte o triangulo TMF é isosceles, e $FM = FT$; o que indica um novo modo de tirar a tangente MT.

Resulta tambem d'esta propriedade:

1.º Que, se os raios luminosos ou sonoros SM, parallellos ao eixo d'uma parabola reflectora, a encontrassem em quaesquer pontos M, dirigir-se-iam depois ao foco, onde iriam reunir-se.

2.º Que a tangente MT divide o angulo QMF em duas partes eguaes, e cah perpendicularmente no meio de FQ.

77. Para seguir a tangente nas differentes posições, que ella vai tomando ao passo que se faz variar o ponto de contacto M (x', y'), examinemos os valores correspondentes da inclinação T, e da ordenada inicial Ai, dados pelas equações

$$\text{tang T} = \frac{p}{y'}, \quad Ai = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2}y'.$$

E facilmente veremos que:

1.º No vertice A, onde x' e y' são nulos, é $\text{tang T} = \infty$, e $Ai = 0$; de sorte que a tangente se confunde com o eixo dos y .

2.º Á medida que o ponto M se afasta de A, x' e y' crescem; por conseguinte cresce Ai, e diminue o angulo T.

Como tang T pode passar por todos os valores, desde 0 até ∞ , segue-se que ha sempre uma tangente parallelas a qualquer recta dada: mas

quanto menor se torna o angulo T , mais se afastam do vertice A o ponto de contacto M e o pé T , até que para a tangente parallelá ao eixo ficam M e T a distancias infinitas de A . O ponto M , correspondente a uma inclinação dada T da tangente, é determinado pelas coordenadas

$$y' = \frac{p}{\operatorname{tang} T}, \quad x' = \frac{p}{2 \operatorname{tang}^2 T}.$$

Por exemplo $T = 45^\circ$ dá $y' = p$, $x' = \frac{p}{2}$; e por isso na parabola o ponto, cuja tangente faz com o eixo um angulo de 45° , é aquelle cuja ordenada passa pelo foco.

78. Quando não é dado o ponto de contacto $M(x', y')$, mas tão sómente certas condições, a que deve satisfazer a tangente, a equação $yy' = p(x + x')$ pode servir para determinar esta recta. Por exemplo, se a tangente deve passar por um ponto $I(\alpha, \beta)$, a equação $\beta y' = p(\alpha + x')$, combinada com $y'^2 = 2px'$, dará dous valores de x' e y' , e por conseguinte dous pontos de contacto, e duas tangentes.

Como as coordenadas dos dous pontos de contacto satisfazem á equação $\beta y = p(\alpha + x)$, esta equação é a da corda que os une. E como $y = 0$ dá a abscissa da intersecção d'aquella corda com o eixo, $x = -\alpha$, independente de β , segue-se que esta intersecção é commum a todas as cordas para as quaes a abscissa de I é a mesma. Assim, quando o ponto I descreve uma parallelá aos y , variam as duas tangentes, os dous pontos de contacto, e a corda que os une; mas a intersecção d'esta com o eixo fica sempre a mesma: de sorte que a corda gira em torno da intersecção, a qual fica á direita ou á esquerda do vertice A , segundo I está á esquerda ou á direita do mesmo vertice.

Como a tangente procurada IM deve ser perpendicular ao meio de QF , as distancias de I aos pontos Q e F , devem ser eguaes: logo, se do centro I , com o raio IF , se descrever um circulo, a circumferencia d'elle cortará a directriz no ponto Q ; e tirando por Q a recta QM parallelá aos x , a intersecção M d'esta recta com a curva determinará o ponto de contacto M , e a tangente IM . E por que o problema sempre é possível, e ha duas intersecções, e duas tangentes que passam por I , com tanto que I seja exterior á curva, segue-se que neste caso existe necessariamente o ponto Q , e ha duas soluções.

79. *Ellipse*. Mudando respectivamente x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$, na equação da ellipse, e procedendo como no n.º 75, temos

$$\text{primeiro} \quad a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2, \quad a^2 (y'+k)^2 + b^2 (x'+h)^2 = a^2 b^2;$$

$$\text{depois} \quad ka^2 (2y'+k) + hb^2 (2x'+h) = 0, \quad \frac{k}{h} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x'+h}{2y'+k};$$

$$\text{e finalmente} \quad \text{tang T} = A = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}.$$

E as equações (1), (2), (3) darão:

$$\text{equações} \left\{ \begin{array}{l} \text{da tangente indefinida} \quad a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2 \\ \text{da normal indefinida} \quad y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x') \end{array} \right.$$

$$\text{valores} \left\{ \begin{array}{l} \text{da subtangente} \quad TP = \frac{a^2 - x'^2}{x'} \\ \text{da subnormal} \quad PN = \frac{b^2 x'}{a^2} \\ \text{da tangente MT} \quad MT = y' \sqrt{1 + \frac{a^4 y'^2}{b^4 x'^2}} \\ \text{da normal} \quad MP = y' \sqrt{1 + \frac{b^4 x'^2}{a^4 y'^2}} \end{array} \right.$$

Logo:

1.º O valor de A fica o mesmo, quando x' e y' mudam ambos de sinal; e por isso as tangentes em M e M' (fig. 57) são paralelas.

2.º Fazendo $y=0$ na equação da tangente, resulta

$$CT = x = \frac{a^2}{x'};$$

e, por ser $a > x'$, é $CT > a$.

Como CT é independente de b , segue-se que, em todas as ellipses descriptas sobre o mesmo eixo AO, as tangentes nos pontos M, Q, que têm a abscissa commum CP = x , encontram o eixo no mesmo ponto T. D'onde resulta um meio facil de tirar tangentes á ellipse, quando se sabem tirar tangentes ao circulo.

3.º Fazendo $y=0$ na equação da normal, resulta

$$CN = x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x';$$

e por isso M e N ficam do mesmo lado relativamente a Cy (fig. 56).

80. Se pelos pontos O (+ a , 0) e A (- a , 0) tirarmos quaesquer rectas ON e AN (fig. 57), as suas equações terão a fórma

$$y = \alpha(x - a), \quad y = \alpha'(x + a);$$

e as cordenadas da sua intersecção serão

$$x = a \cdot \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad y = \frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

Se o ponto N está sobre a ellipse, as cordas AN e ON chamam-se *supplementares*. Para isso é necessario que os valores precedentes de x e y satisfaçam á equação $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; o que dá

$$a^2\alpha^2\alpha'^2 + b^2\alpha\alpha' = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha\alpha'(a^2\alpha\alpha' + b^2) = 0.$$

Por tanto as cordas são supplementares, ou quando é nulla uma das quan-

tidades α, α' , (o que é evidente), ou quando é $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$.

O signal — mostra que α e α' têm signaes contrarios, isto é; que, se NAO é agudo, NOx deve ser obtuso. Na verdade, descrevendo sobre o eixo maior um circulo, vê-se que, por ser recto o angulo AN'O, é obtuso ANO, e com mais razão NOx.

Uma construcção semelhante feita sobre o eixo menor mostra, que as

cordas supplementares tiradas pelas extremidades d'elle fazem um angulo agudo.

Seja θ o angulo N das cordas supplementares. Attendendo á equação

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{é} \quad \text{tang } \theta = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{a^2\alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)}$$

1.º Se $a = b$, é $\theta = \infty$; e por isso as cordas supplementares do circulo cortam-se perpendicularmente, como é sabido.

2.º Se $a > b$, α e $\text{tang } \theta$ têm o mesmo signal; e os angulos NOx e ANO são ambos obtusos.

3.º Se $a < b$, α e $\text{tang } \theta$ têm signaes contrarios; e o angulo ANO é agudo.

4.º Se a e b crescem proporcionalmente, o angulo θ não varia. Logo: *se nas ellipses semelhantes, isto é, nas ellipses cujos eixos são proporcionaes, duas cordas forem parallelas entre si, as supplementares tambem o serão.*

Se θ é dado, da equação $a^2\alpha^2 - (a^2 - b^2)\alpha \text{ tang } \theta + b^2 = 0$,

tira-se
$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2) \text{ tang } \theta \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \text{ tang}^2 \theta - 4a^2b^2}}{2a^2};$$

por conseguinte ha dous systemas de cordas supplementares, que fazem um angulo dado; e os dous valores de α têm o mesmo signal.

Para construir estas cordas, basta descrever sobre AO um segmento de circulo em que possa existir o angulo dado (Geom. n.º 59, IV), e pelas intersecções d'este segmento com a ellipse tirar cordas para O e A.

Os dous valores de α são eguaes, quando $(a^2 - b^2)^2 \text{ tang}^2 \theta = 4a^2b^2$;

donde resultam
$$\text{tang } \theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}, \quad \alpha = \frac{b}{a},$$

que pertencem á extremidade do eixo menor. E como esta solução, que separa as raizes reaes das imaginarias (Alg. el. n.º 147, 2.º), corresponde ao maior dos valores de θ que dão α real, vê-se que: *as cordas supplementares, que concorrem na extremidade do eixo menor, se cortam fazendo o maior angulo obtuso.*

Seguindo os valores de $\text{tang } \theta$ desde $\alpha = \infty$ até $\alpha = \frac{b}{a}$, e desde $\alpha = \frac{b}{a}$ até $\alpha = 0$, vê-se: que o angulo N é recto, quando AN cabe sobre AO; que depois se torna obtuso quando AN gira em torno de A, e vai crescendo até que as cordas se cortem em B; e finalmente que, alem de B, torna a diminuir, e passa pelos mesmos valores, em ordem inversa, que tinha desde O até B.

81. Seja $y = A'x$ a equação de qualquer recta CM, que passa pelo centro C (fig. 57). Se a recta passar tambem por M (x', y'),

teremos

$$y' = A'x', \quad A' = \frac{y'}{x'};$$

e como, para a tangente em M, é

$$A = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'},$$

resulta

$$AA' = -\frac{b^2}{a^2} = \alpha\alpha'.$$

Por onde se vê, que $A' = \alpha'$ dá $A = \alpha$, isto é, que, se tirarmos a recta CM pelo centro e pelo ponto de contacto M, e a corda AN paralela a esta recta, a corda suplementar NO será paralela á tangente MT. O que dá um novo meio, e simples, de tirar uma tangente á ellipse.

82. Façamos variar o ponto de contacto M (x', y'), e sigamos a tangente nas suas differentes posições.

1.º Em O ($a, 0$) é $x = a$ a equação da tangente, ou esta recta paralela ao eixo dos y .

2.º Á medida que o ponto M se afasta de O, até B, x' diminue e y' cresce: logo o valor absoluto de $A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ diminue desde ∞ até 0, e $CT = \frac{a^2}{x'}$ cresce. O ponto T vai-se pois afastando desde O até o infinito, em quanto o angulo MTC vai diminuindo desde 90° até 0.

3.º Em B (0, b) a equação da tangente é $y = b$, e esta recta é parallela ao eixo dos x .

4.º Desde B até A cresce o valor negativo de x' e diminue y' : logo A cresce desde 0 até ∞ , e a inclinação da tangente cresce desde 0 até 90º.

Por tanto não ha inclinação alguma que não possam tomar as tangentes da ellipse. Estes resultados verificam-se respectivamente nos outros dous quadrantes da curva.

Se quizermos o ponto de contacto da ellipse com uma tangente cuja inclinação é dada, será conhecido A, e eliminaremos x' e y' por meio das equações

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \quad Aa^2y' + b^2x' = 0.$$

Muitos outros problemas se podem resolver a respeito das tangentes, tractando-os por uma analyse semelhante.

Tirada por um ponto M (fig. 56) a tangente á ellipse, produzamol-a até encontrar em H e K as tangentes aos dous vertices O e A; e procuremos os segmentos OH e AK. Para isto basta fazer $x = \pm a$ na equação $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$ da tangente; e tirar os valores correspondentes de y , que serão os segmentos pedidos. Acharemos assim

$$OH = b^2 \cdot \frac{a - x'}{ay'}, \quad AK = b^2 \cdot \frac{(a + x')}{ay'}.$$

Como o producto d'estes dous valores é b^2 : segue-se, que o rectangulo, formado com os dous segmentos que a tangente a qualquer ponto da ellipse separa das tangentes ás extremidades do eixo maior, é constantemente igual ao quadrado do eixo menor. Adiante veremos que este theorema é extensivo a duas quaesquer tangentes parallelas AK e OH; com tanto que, em logar do quadrado do eixo menor b , se tome o do semi-diametro Cy parallelo áquellas tangentes.

83. Sejam $FMT = V$ e $F'MT = V'$ as inclinações dos raios vectores sobre a tangente (fig. 56); e $CF = c$ a excentricidade.

A equação

$$y = A'(x - c),$$

das rectas que passam por $(c, 0)$, dá $A' = \frac{y'}{x' - c}$, para a inclinação do raio vector que passa por M; e como a inclinação da tangente dá $A = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$, resulta, attendendo a $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\text{tang } V = \frac{A - A'}{1 + AA'} = \frac{b^2}{cy'}$$

Se mudarmos c em $-c$, teremos para $\text{tang } V'$ um valor igual, e de signal contrario, a $\text{tang } V$: por conseguinte os angulos V e V' são supplementos um do outro, e é

$$F'MI = 180^\circ - F'MT = FMT.$$

Por onde se vê que: *os raios vectores da ellipse, tirados para o ponto de contacto, são igualmente inclinados sobre a tangente, e sobre a normal.* Assim os raios luminosos ou sonoros $F'M$, que partindo do fóco F' encontrassem uma ellipse reflectora, dirigir-se-iam por MF para o outro fóco F .

Prolongando $F'M$, vê-se que a tangente MT , e a normal MN , dividem respectivamente em duas partes eguaes os angulos FMG e $F'MF$. Esta propriedade pode servir para tirar em qualquer ponto M da ellipse uma tangente, ou uma normal: para o que se formará um triangulo isosceles, cujo angulo no vertice seja respectivamente FMG ou $F'MF$, e se abaixará de M uma perpendicular sobre a base desse triangulo.

84. Para tirar uma tangente por um ponto exterior I é necessario determinar o ponto de contacto M . Ora, por que deve ser I equidistante de F e G , estará G no circulo descripto do centro I com o raio IF ; e por que deve ser $F'G = F'M + MF = AO$, estará G no circulo descripto de F' com o raio AO : logo a intersecção dos dous circulos determinará G , e conseguintemente o ponto de contacto M onde a recta $F'G$ encontra a ellipse. E como o problema sempre é possivel, quando o ponto I é exterior á ellipse; segue-se que neste caso sempre os dous circulos

devem encontrar-se. E encontram-se com effeito (n.º 40), por que temos

$$2a + IF = MF' + MF + IF > FF' + IF > IF', IF' + IF > 2a;$$

$$IF' + MF' = IF' + 2a - MF > IM > IF - FM, \text{ ou } IF' + 2a > IF:$$

e ha duas tangentes, que correspondem aos dous pontos de secção.

Se quizessemos tractar este problema analyticamente, reflectiriamos, como no n.º 78, que, por deverem as coordenadas ϵ e β do ponto exterior K (fig. 98) satisfazer ás equações da tangente, e por dever o ponto M (x' , y') estar na tangente e na ellipse, bastaria eliminar x' e y' entre as equações d'estas linhas,

$$a^2\beta y' + b^2\epsilon x' = a^2b^2, \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Como a eliminação daria uma equação do 2.º gráu em x' ou y' , segue-se que pelo ponto exterior K se podem tirar duas tangentes.

E como

$$a^2\beta y + b^2\epsilon x = a^2b^2,$$

é a equação da recta MN, que une os dous pontos de contacto, por lhe satisfazerem as coordenadas d'estes pontos: vê-se que a construcção d'aquella recta deve dar os pontos de contacto, e as tangentes (*).

De que $y = 0$ dá $x = \frac{a^2}{\epsilon}$ independente de b e β , segue-se que CE

é constante, quaesquer que sejam o eixo menor $2b$ e a ordenada do ponto K, com tanto que a abscissa d'este ponto e o eixo maior $2a$ fiquem os mesmos. Logo, se o ponto K se mover sobre BB' parallelamente aos y , as tangentes e as cordas variarão, mas o ponto E ficará o mesmo: e como ainda não mudará quando variar o eixo menor, será o mesmo

(*) A fig. (98) não suppõe as coordenadas rectangulares.

para a ellipse que para o circulo descripto sobre o diametro $2a$. Este ponto E, correspondente á abscissa $\frac{a^2}{\varepsilon}$, estará dentro ou fóra da ellipse, segundo for $a < \text{ou} > \varepsilon$, isto é, segundo for exterior á curva a recta BB' , ou a cortar.

85. *Hyperbole.* Para evitar o trabalho de reproduzir todos os calculos que se fizeram relativamente á ellipse, bastará que nos resultados obtidos para esta curva mudemos b em $b\sqrt{-1}$ (n.º 65): o que dará

$$\text{tang T} = A = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$$

e depois

$$\text{equações} \left\{ \begin{array}{l} \text{da tang} \quad a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2 \\ \text{da norm.} \quad y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \end{array} \right.$$

$$\text{valores} \left\{ \begin{array}{l} \text{da subt.} \quad \text{PT} = \frac{x'^2 - a^2}{x'} \\ \text{da subn.} \quad \text{PN} = \frac{b^2x'}{a^2} \\ \text{da tang.} \quad \text{MT} = y' \sqrt{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{y'^2}{x'^2}} \\ \text{da norm.} \quad \text{MN} = y' \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{x'^2}{y'^2}} \end{array} \right.$$

Logo:

1.º A tangente no ponto M (x', y') (fig. 49) é parallela á tangente no ponto M' ($-x', -y'$).

2.º Fazendo $y = 0$ na equação da tangente, acha-se $\text{CT} = \frac{a^2}{x'}$. E

como o signal de CT é o mesmo que o de x' ; e é $CT < a$, por ser $x' > a$: segue-se que os pontos M e T ficam do mesmo lado eixo do Cy , e que T fica entre o centro C e o vertice A .

3.º Para duas cordas supplementares AN e ON (fig. 58), cujas equações são

$$y = \alpha(x - a), \quad y = \alpha'(x + a),$$

é

$$\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2};$$

logo os dous angulos, que estas cordas fazem com o eixo, são ambos agudos, ou ambos obtusos. E por que, chamando $N(x', y')$ o ponto da curva commum ás duas cordas, o valor de α tirado da equação de AN

é

$$\alpha = \frac{y'}{x' - a};$$

e a abscissa x' é ou negativa, ou positiva e $> a$: vê-se que, para o ramo superior que fica á direita de Cy , e para o inferior que fica á esquerda, os angulos feitos pelas cordas supplementares com o eixo dos x são agudos; e para o ramo superior que fica á esquerda de Cy , e para o inferior que fica á direita, aquelles angulos são obtusos.

Chamando A' a tangente do angulo que o raio CM faz com o eixo dos x , é

$$AA' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Por onde se vê, que é applicavel á hyperbole o processo indicado no n.º 81 para tirar tangentes á ellipse. Tira-se para o ponto de contacto M o raio CM ; depois a corda ON parallelamente a CM , e a sua supplementar AN ; e finalmente a recta MT parallelamente a esta corda supplementar.

Para o angulo θ das duas cordas supplementares, é

$$\text{tang } \theta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)},$$

sendo α a maior das tangentes trigonometricas α e α' ; e como é $\alpha > \frac{b}{a}$,

ou $a\alpha > b$, segue-se que $\text{tang } \theta$ é positivo, e o angulo θ agudo (*).

Se os eixos a e b variarem proporcionalmente, θ ficará constante.

Para ter α , quando se conhece θ , é necessario resolver a equação do 2.º grau

$$a^2\alpha^2 - \alpha(a^2 + b^2) \text{ tang } \theta = b^2,$$

cujas raizes são reaes, e de signaes contrarios; e por isso α não tem aqui limites, como tinha na ellipse. Podem construir-se as duas raizes descrevendo sobre AO um segmento de circulo, em que possa existir o angulo dado θ que devem fazer as cordas supplementares; e tirando rectas, de cada uma das intersecções do circulo com a hyperbole, para os dous vertices.

À medida que α diminue, isto é, que AN se abate sobre Ax, tambem diminue θ , e passa por todos os valores desde 90º até 0.

(*) A symetria da curva basta para estender esta conclusão aos outros quadrantes; mas podemos fazel-o directamente, tomando sempre

$$\alpha = \frac{y}{x-a} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}.$$

Por que temos:

$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ e } 2.^\circ \text{ quadrante} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} 1.^\circ \text{ para } (+x, +y) \\ 2.^\circ \text{ para } (-x, +y) \end{array} \right.$	$\text{tang } \theta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)}$ α positivo; $\alpha > \frac{b}{a}$, ou $a\alpha > b$ α negativo; $\alpha < \frac{b}{a}$, ou $a\alpha < b$
$\left. \begin{array}{l} 3.^\circ \text{ e } 4.^\circ \text{ quadrante} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} 1.^\circ \text{ para } (-x, -y) \\ 2.^\circ \text{ para } (+x, -y) \end{array} \right.$	$\text{tang } \theta = \frac{b^2 - a^2\alpha^2}{\alpha(a^2 - b^2)}$ α positivo; $\alpha < \frac{b}{a}$, ou $a\alpha < b$ α negativo; $\alpha > \frac{b}{a}$, ou $a\alpha > b$.

4.º Os angulos feitos pelos dous raios vectores com a tangente têm a mesma tangente trigonometrica $\text{tang } V = \frac{b^2}{cy'} (*)$; consequentemente, para

tirar a tangente á hyperbole em um dos seus pontos M basta dividir em duas partes eguaes o angulo F'MF dos raios vectores desse ponto, isto é, tomar $MG = MF$, e abaixar MT perpendicular a GF.

Querendo tirar uma tangente por um ponto dado I exterior á curva, descreveremos do centro I, com o raio IF, o circulo FG; e do centro F' com o raio F'G = F'M - FM = AO, outro circulo: depois tiraremos para a intersecção G d'estes dous circulos a recta F'G, cuja intersecção com a hyperbole será o ponto de contacto M; e finalmente abaixaremos MT perpendicular a GF.

Podem tambem applicar-se convenientemente á hyperbole as outras propriedades que foram expostas no n.º 84.

86. Sigamos a tangente nas diversas posições que toma quando varia o ponto de contacto M (fig. 59). Para isso examinemos as suas intersecções T com o eixo, por meio das equações

$$A = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{\pm b}{a \sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}}, \quad CT = \frac{a^2}{x'}$$

1.º No vertice A (a, 0) é $A = \infty$, $CT = a$; por conseguinte a tangente DD' é parallelá aos y. E com effeito a equação d'ella reduz-se então a $x = a$.

2.º Á medida que o ponto M se afasta do vertice, x cresce; e A, e CT, diminuem sem chegarem a ser nullos: isto é, descrece a inclinação, sem que chegue a aniquilar-se; e o pé T approxima-se de C, sem que chegue a coincidir com elle.

(.) Com effeito temos

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x'^2 - a^2), \quad A = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}, \quad A' = \frac{y'}{x' - c},$$

que dão

$$\text{tang } V = \frac{A' - A}{1 + AA'} = \frac{b^2}{cy'}$$

3.º Como $x' = \infty$ dá 1 para limite do radical, os limites de A e CT são, respectivamente, $A = \pm \frac{b}{a}$ e $CT = 0$; por tanto, a inclinação da tangente, e o ponto T, approximam-se indefinidamente de $\text{ang} \left(\text{tang} = \pm \frac{b}{a} \right)$, e de C, sem chegarem a tocar estes limites.

A symetria da curva torna desnecessario um exame semelhante nas outras partes d'ella.

Para construir as expressões $A = \pm \frac{b}{a}$, $CT = 0$, levantemos a ordenada $AD = AD' = b$; as rectas CD e CD' determinarão os angulos DCA e D'CA, cujas tangentes são $+\frac{b}{a}$ e $-\frac{b}{a}$. *Estas rectas encontram a curva no infinito, e são os limites das suas tangentes.* Assim os dous ramos da curva ficam um dentro do espaço angular QCC', e outro dentro do seu verticalmente opposto; espaços comprehendidos pelas rectas CQ e CQ', cujas equações são $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Porque a tangente faz assim com o primeiro eixo o angulo comprehendido entre DCA e 90° , não se pode tirar uma tangente parallelá a uma recta CI, que passa por C, senão quando CI está no angulo QCH. O que differe do que a este respeito acontece na ellipse, e se expoz no n.º 82.

Mas a propriedade demonstrada no fim n.º 82 dá-se tambem na hyperbole.

Das asymptotas da hyperbole

87. *Quando duas linhas de ramos infinitos são taes que uma se aproxima indefinidamente da outra, sem chegar a tocá-la, a primeira d'estas linhas chama-se asymptota da outra.*

Por tanto: *se duas linhas forem taes que aos valores successivos communs d'uma das coordenadas correspondam valores da outra coordenada,*

cuja differença chegue a ser menor que qualquer quantidade assignavel, sem que aniquile, uma d'estas linhas será asymptota da outra.

Como na equação da hyperbole

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{bx}{a} \left(1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} - \dots \right)$$

todos os termos, desde o segundo inclusivamente, decrescem indefinidamente á medida que x cresce; vê-se que a equação $Y = \pm \frac{b}{a}x$ pertence

a duas rectas CQ, CQ' (fig. 59), para as quaes a differença $MQ = Y - y$ entre as suas ordenadas e as correspondentes da curva pode ser tão pequena quanto se quizer. Logo estas rectas, limites das tangentes, são asymptotas da hyperbole (*).

88. Procuremos as intersecções da hyperbole com uma recta.

Eliminando y entre as equações da recta e da hyperbole,

$$y = kx + l, \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

resulta $(a^2k^2 - b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 + b^2) = 0$.

(*) Com effeito é

$$y = \pm \frac{bx}{a} \pm \frac{bx}{a} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} - 1 \right) = \pm \frac{bx}{a} \mp \frac{b}{ax} \cdot \frac{a^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1 \right)};$$

e por conseguinte a differença $Y - y = \pm \frac{b}{ax} \cdot \frac{a^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1 \right)}$

tende indefinidamente para zero, quando x tende para o infinito.

Em geral procederemos como se segue.

Para que uma recta

$$y = cx + d,$$

seja asymptota não parallela aos y , é necessario que á equação da curva se possa

Se $a^2k^2 = b^2$, esta equação tornar-se-ha do 1.º grau; e teremos

$$k = \pm \frac{b}{a}, \quad x = -\frac{l^2 + b^2}{2kl}, \quad y = kx + l:$$

por onde se vê, que uma recta paralela ás asymptotas corta a curva em um só ponto. A outra intersecção fica a uma distancia infinita.

Se, alem de $a^2k^2 = b^2$, for $l = 0$; será $x = \infty$, e ambas as inter-

dar a fórmula $y = cx + d + V$, sendo d uma quantidade finita ou nulla, e V uma quantidade que diminue indefinidamente quando x cresce.

Ora esta equação dá
$$c = \frac{y}{x} - \frac{d + V}{x}, \quad d = (y - cx) - V;$$

que, pela natureza das quantidades d e V , se devem reduzir a $c = \frac{y}{x}$, $d = y - cx$,

quando $x = \pm \infty$. Logo: para achar as asymptotas rectilíneas não paralelas aos

y , devemos tirar da equação da curva o valor de $\frac{y}{x}$, e fazer nelle $x = \pm \infty$,

o que dará c ; e depois fazer $x = \pm \infty$ nos valores correspondentes de $y - cx$, o que dará d . Para as asymptotas não paralelas aos x , repetiremos o mesmo, mudando x em y , e y em x .

No nosso exemplo é
$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

que, para $x = \pm \infty$, dá
$$c = \pm \frac{b}{a}:$$

e depois
$$y - cx = \pm \frac{bx}{a} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} - 1 \right) = \mp \frac{b}{ax} \cdot \frac{a^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1 \right)},$$

que, para $x = \pm \infty$, dá $d = 0$.

Assim ha duas asymptotas, uma commum ás partes superior do ramo á direita de Cy e inferior do ramo á esquerda de Cy , e outra commum ás outras duas partes. (Vej. *Geom. Anal.* de Fourcy).

secções serão no infinito. O que deve com effeito acontecer, por que neste caso a recta é asymptota.

Se não for $a^2k^2 = b^2$, a equação será do 2.º grau, e dará

$$x = -\frac{a^2kl \pm ab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}}{a^2k^2 - b^2}, \quad y = -\frac{b^2l \pm abk\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}}{a^2k^2 - b^2};$$

nos quaes se devem tomar ou ambos os signaes superiores, ou ambos os inferiores, por isso que estes signaes provém da mesma origem.

Para que a recta corte a hyperbole, é necessario que x e y sejam reaes. Consideremos separadamente os tres casos de:

$$1.^\circ a^2k^2 = l^2 + b^2, \quad 2.^\circ a^2k^2 < l^2 + b^2, \quad 3.^\circ a^2k^2 > l^2 + b^2.$$

1.º CASO. São eguaes entre si os dous valores de cada uma das coordenadas, e o 1.º membro da equação do 2.º grau é um quadrado perfeito; por conseguinte os dous pontos de secção coincidem, e a recta é tangente. D'onde resulta um meio de tirar uma tangente á hyperbole por qualquer ponto exterior $I(\epsilon, \beta)$ (fig. 49): por que, devendo I pertencer á tangente, a combinação das equações

$$\beta = k\epsilon + l, \quad a^2k^2 = l^2 + b^2,$$

dará k e l , e determinará assim esta recta.

2.º CASO. Cada uma das coordenadas tem dous valores: e por conseguinte ha duas intersecções da recta com a hyperbole.

$$\text{Fazendo} \quad l^2 + b^2 - a^2k^2 = \gamma^2,$$

$$\text{teremos} \quad x = -a \cdot \frac{akl \pm b\gamma}{l^2 - \gamma^2}.$$

Se a recta passar pelo centro, será $l = 0$; e teremos

$$k = \frac{\sqrt{b^2 - \gamma^2}}{a} < \frac{b}{a}, \quad x = \pm \frac{ab}{\gamma}, \quad y = \pm \frac{kab}{\gamma}.$$

Por tanto qualquer recta MM' , que passa pelo centro C , e está no angulo das asymptotas, corta a hyperbole em dous pontos M, M' , cujas abscissas, ordenadas, e distancias ao centro, são respectivamente eguaes e de signaes contrarios.

3.º CASO. As expressões das coordenadas são imaginarias; e por isso a recta não encontra a curva.

Se $l=0$, a recta passa pelo centro: e, como é $ak > b$, esta recta está no angulo QCH (fig. 59), e é paralela a duas tangentes; em quanto que as rectas, que estão no angulo QCQ' , cortam a curva, e não são paralelas a tangente alguma (n.º 86).

89. Reportemos a curva ás asymptotas Cb', Cb (fig. 60). Tirando MP paralela a Cb , seja $CP = x'$, $PM = y'$; e façamos $2m = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como é $\text{tang } xCb = \text{tang } \omega = \frac{b}{a}$;

serão $\cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{2m}$, $\text{sen } \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{2m}$.

Por meio d'estas expressões, as formulas geraes de transformação das coordenadas [n.º 44, (2)], nas quaes é $(xx') = -\omega$, $(xy') = \omega$, tornam-se em

$$x = \frac{a}{2m} (x' + y'), \quad y = \frac{b}{2m} (y' - x');$$

e transformam a equação da hyperbole referida ao centro e aos eixos,

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

na referida ás asymptotas $x'y' = m^2$.

Fazendo $y = 0$ na expressão de y , resulta $y' = x'$, ou $CD = DA$; por conseguinte $CBAD$ é um losango: e a equação da hyperbole referida ás asymptotas dá $x' = m = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = CD$.

A quantidade m chama-se *potencia da hyperbole*. Se a hyperbole é equilateral, $CBAD$ é um quadrado $= m^2 = \frac{1}{2} a^2$.

De $x'y' = m^2$ resulta, que x' cresce, quando y' diminue; e reciprocamente: o que deve com effeito acontecer, por serem asymptotas os eixos coordenados.

Quando se conhece a potencia m^2 da hyperbole, e o angulo 2ω das asymptotas, determinam os semi-eixos da curva as equações

$$a = 2m \cos \omega, \quad b = 2m \sin \omega.$$

Estes semi-eixos são as diagonaes do losango CABD; porque $DL = CD \sin \omega$, e $CL = CD \cos \omega$, dão $BD = b$ e $CA = a$.

Se multiplicarmos por $\sin 2\omega$ os dous membros da equação $x'y' = m^2$, virá

$$x'y' \sin 2\omega = 2m^2 \sin \omega \cos \omega = \frac{1}{2} ab,$$

cujo 1.º membro exprime a area do parallelogrammo comprehendido pelas coordenadas x', y' . Logo: *qualquer que seja o ponto M da curva, o parallelogrammo CPMQ é constantemente metade do rectangulo dos semi-eixos.*

90. Uma transformação semelhante á do n.º precedente daria a equação da tangente referida ás asymptotas: mas tambem se pode applicar directamente o calculo do n.º 73 (nota da pag. 96).

A equação é $y = y' = A(x - x')$,

sendo $A = \frac{\sin STH'}{\sin TSO}$. Mudando pois x' e y' em $x' + h$ e $y' + k$ na equação da curva, teremos

$$x'y' = m^2, \quad (x' + h)(y' + k) = m^2, \quad \frac{k}{h} = -\frac{y' + k}{x'};$$

e fazendo $k = 0$ neste valor de $\frac{k}{h}$, que pertence á secante, virá o que pertence á tangente, $A = -\frac{y'}{x'}$. Portanto a equação da tangente é

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x'), \quad \text{ou } x'y + y'x = 2m^2.$$

Fazendo $y=0$ ou $x=0$ nesta equação, acharemos respectivamente os pontos T ou S, onde a tangente encontra as asymptotas; o que dá

$$CT = \frac{2m^2}{y'} = 2x', \quad CS = \frac{2m^2}{x'} = 2y'.$$

Assim, tomando a abscissa CP ou a ordenada MP = CQ do ponto M, e depois PT = CP ou QS = CQ, determinaremos a tangente TMS.

De CP = PT, e CQ = QS, resulta que é MT = MS, e que são equivalentes os quatro triangulos TMP, CMP, CMQ, SMQ.

A area CST = $\frac{1}{2}$ CT . CS sen $2\omega = 2x'y'$ sen $2\omega = ab$ é constante para todos os pontos da curva, e equal ao rectangulo dos semi-eixos.

91. Seja

$$y = Kx + L$$

a equação d'uma secante qualquer bb' referida ás asymptotas. Fazendo $y=0$, ou $x=0$, resultam respectivamente as distancias á origem das intersecções d'esta recta com as asymptotas,

$$Cb' = -\frac{L}{K}, \quad Cb = L.$$

Para ter as intersecções da secante com a hyperbole, eliminemos y entre

as suas equações: virá a equação do 2.º grau

$$Kx^2 + Lx = m^2,$$

cujas raizes x' e x'' dão (Alg. el. n.º 145)

$$x' + x'' = -\frac{L}{K}, \quad x'x'' = -\frac{m^2}{K}.$$

Logo:

1.º $Ca' = aN = Cb' = Ca' + a'b'$, ou $aN = a'b'$; por conseguinte são eguaes os triangulos Nab e N'a'b', e é $bN = b'N'$.

Assim: as partes de qualquer secante, comprehendidas entre a hyperbole e as asymptotas, são eguaes entre si. Por onde se vê que, se for dado um ponto N da hyperbole, e as duas asymptotas; tirando rectas bb' por este ponto, e tomando nellas as partes $b'N' = bN$, acharemos assim tantos pontos N' da curva quantos quizermos.

2.º Os triangulos abN , $bN'O$, dão

$$Nb = x' \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b}, \quad N'b = Nb' = x'' \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b};$$

e por conseguinte

$$Nb \cdot Nb' = x'x'' \frac{\text{sen}^2 a}{\text{sen}^2 b} = \frac{m^2 \cdot \text{sen}^2 a}{K \cdot \text{sen}^2 b}.$$

Como este producto é independente de L , isto é, da posição do ponto b , vê-se que: *para todas as parallelas a bb' , e por isso também para a tangente parallelas SM , o rectangulo das partes da secante, comprehendidas entre as asymptotas e um dos pontos da curva, é constante e equal ao quadrado da metade da tangente.*

Nota ao numero 73

O processo indicado no n.º 73 para achar A applica-se, qualquer que seja o angulo das coordenadas, sendo A a razão dos senos dos angulos que a tangente fórma com ellas. Reparando neste processo, vê-se que a mudança de x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$ transforma a equação $a=0$ em $a+bh+ck+dhk+eh^2+fk^2\dots=0$ que, em virtude da primeira, se reduz a $bh+ck+dhk+eh^2+fk^2\dots=0$,

e dá

$$\frac{k}{h} = -\frac{b+eh+\dots}{c+dh+fk\dots}.$$

E por que fazer h e k nullos nesta expressão, para achar $A = -\frac{b}{c}$, equival

a desprezar os termos que têm por coefficients d, e, f, \dots , provenientes dos da 2.ª ordem da transformada, segue-se que o processo indicado para ter A se reduz a:

1.º Mudar x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$ na proposta; 2.º fazer as desenvolvções necessarias para obter separadamente os termos da 1.ª ordem em h e k ; 3.º equalar

a zero a somma d'estes termos; 4.º tirar d'esta ultima equação o valor de $\frac{k}{h} = A$.

Por exemplo a equação $y^2+2xy=2y+x$,

dá

$$2yk+2xk+2yh=2k+h, \quad \frac{k}{h} = A = \frac{-y+\frac{1}{2}}{y+x-1}.$$

Para a equação geral das secções conicas (n.º 70) $y^2 = mx + nx^2$,

temos
$$2yk = ml^2 + 2nhx, \quad A = \frac{m + 2nx}{2y};$$

e a equação da tangente é
$$y - y' = \frac{m + 2nx'}{2y'}(x - x').$$

Quando a tangente é paralela aos x , o y correspondente ao ponto de contacto é maior ou menor que os vizinhos, segundo fica o ramo da curva todo abaixo ou todo acima da tangente; e quando a tangente é paralela aos y , o x correspondente é maior ou menor que os vizinhos, segundo fica o ramo da curva todo á esquerda, ou todo á direita da tangente. Assim a eliminação entre a equação da curva e uma das duas $A=0$, ou $A=\infty$, poderá dar respectivamente os *maximos* ou *minimos* valores de y , ou os *maximos* ou *minimos* valores de x . O que determinará os limites da curva no sentido de cada um dos eixos.

Para reconhecer se um valor b de y correspondente a $x=a$, é maximo ou minimo, substituiremos $a \pm \delta$ em logar de x ; e se para δ indefinidamente pequeno forem os valores correspondentes de y todos maiores ou todos menores que b , será b um minimo ou um maximo. Similhantermente se reconhece se um valor de x é maximo ou minimo.

Por exemplo
$$y^2 - xy + \frac{1}{2}x' - x + \frac{1}{2} = 0$$

dá
$$A = \frac{y - x + 1}{2y - x}.$$

Eliminando pois entre a proposta e $y - x + 1 = 0$, acharemos os systems

$$x = 1, y = 0; \quad x = 3, y = 2;$$

e por que para $x = 1 \pm \delta$ e $x = 3 \pm \delta$ são $y > 0$ e $y < 2$, as ordenadas 0 e 2 são a minima e maxima; e a curva fica comprehendida, no sentido dos y , entre as tangentes nos pontos (1, 0) e (3, 2), que são parallelas aos x . Do mesmo modo a eliminação entre a proposta e $2y - x = 0$ mostra que as tangentes nos pontos $(2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ e $(2 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ dão os limites da curva no sentido dos x (vej. fig. 79).

Para achar as intersecções d'uma curva do 2.º grau com uma recta, eliminaremos as coordenadas entre a equação $y = \alpha x + \beta$ da recta e a da curva: e

chegaremos a uma equação do 2.º grau
$$ax^2 + bx + c = 0,$$

cujas raizes
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

no caso de serem reaes, darão os pontos de intersecção.

No caso de ser $b^2=4ac$, isto é, de ser o 1.º membro da equação do segundo grau um quadrado perfeito, as raízes são eguaes; e a recta é tangente á curva. Com effeito, se fizéssemos variar α e β de modo que b^2-4ac fosse diminuindo, os pontos de intersecção ir-se-iam approximando; e coincidiriam quando fosse $b^2-4ac=0$; por tanto esta equação exprime a relação que deve ligar α com β para que a recta seja tangente; deixando ainda arbitraria uma d'estas constantes, que se poderá determinar por novas condições. A abscissa do ponto de contacto é $x = -\frac{b}{2a}$.

Por exemplo a eliminação de y entre as equações

$$3y = 4x + 2, \quad y^2 - 2xy + 2x^2 + 4x - 5y + 4 = 0,$$

dá $x^2 - 2x + 1 = 0 = (x - 1)^2$;

e assim a recta toca a curva no ponto (1, 2).

Por tanto, se fazendo $y=0$ na equação d'uma curva, acharmos $(x-x')^2=0$, devemos concluir que a curva toca o eixo dos x no ponto $(x', 0)$. (Vej. fig. 79 e 68).

Do centro e dos diametros

92. Chama-se centro de uma curva o ponto que divide em duas partes eguaes todas as cordas que por elle passam.

Se o ponto C (fig. 61 e 62) for a origem das coordenadas, e tirarmos MP, M'P' parallelas aos y ; os triangulos CPM, e CP'M' mostram que serão $CP = CP'$ e $MP = M'P'$, quando for $CM = CM'$, e reciprocamente; e isto qualquer que seja o angulo $yC\alpha$ das coordenadas. As ordenadas e abscissas são pois eguaes, e de signaes contrarios, quando a sua origem é ao mesmo tempo centro da curva; e reciprocamente. Logo:

Para que o centro d'uma curva seja a origem das coordenadas, é necessario, e basta, que a sua equação fique a mesma quando nella se mudar x em $-x$ e y em $-y$.

Assim para que a equação geral do 2.º grau

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \dots \dots \dots (1)$$

se possa reduzir a outra referida ao centro como origem, é necessario que se façam desaparecer os termos lineares em x e y .

Transportemos a origem a um ponto (a, b) , e conservemos as novas coordenadas paralelas ás primitivas; mudando x em $x' + a$, e y em $y' + b$. A equação (1) tornar-se-ha em

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + D'y' + E'x' + Q = 0,$$

sendo $D' = 2Ab_1 + Ba_1 + D, E' = 2Ca_1 + Bb_1 + E,$

$$Q = Ab_1^2 + Ba_1b_1 + Ca_1^2 + Db_1 + Ea_1 + F.$$

Para que a transformada não tenha os termos $E'x'$ e $D'y'$, é necessario que as coordenadas a_1, b_1 satisfaçam ás condições

$$2Ca_1 + Bb_1 + E = 0, 2Ab_1 + Ba_1 + D = 0 \dots \dots \dots (2);$$

o que dá $a_1 = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, b_1 = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$

e reduz a transformada a

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \dots \dots \dots (3),$$

no caso de ser possível este calculo.

1.º Se o denominador $B^2 - 4AC$ não é nullo, as coordenadas a_1 e b_1 têm um systema de valores finitos, ou nulos; e só um, por que são dadas por equações lineares. Por tanto neste caso a curva tem centro.

2.º Se é $B^2 - 4AC = 0$, sem que sejam nulos os numeradores de a_1 e b_1 , as expressões d'estas coordenadas tornam-se infinitas; e a curva não tem centro (*).

3.º Se, além de $B^2 - 4AC = 0$, é nullo um dos numeradores de a_1 ou

(*) O processo de eliminação, que dá as expressões de a_1 e b_1 , supõe que não são nulos B e A, nem B e C. Se for $B = 0$ e $A = 0$, ou $B = 0$ e $C = 0$, as equações (2) não podem ser satisfeitas se não por $b_1 = \infty$, ou $a_1 = \infty$. É e que acontece na equação $y^2 = 2px$, que pertence á parábola.

b'' , o outro tambem o é; e a linha tem uma infinidade de centros. Com effeito neste caso as equações (2) não são distinctas (*).

Em geral, se a_i e b_i representam coordenadas variaveis, as equações (2) pertencem a duas rectas, cuja intersecção dá o centro. Estas rectas serão parallelas, quando não existir centro; e coincidirão, quando existir uma infinidade de centros.

93. Chama-se *diametro da curva a linha que divide em duas partes eguaes todas as cordas parallelas a uma recta.*

Quando duas rectas são reciprocamente diametros, uma a respeito da outra, chamam-se *diametros conjugados*. Por exemplo, os eixos da ellipse e, os da hyperbole, são diametros conjugados.

Para achar a equação de qualquer diametro d'uma curva do 2.º grau, eliminemos y entre a equação (1) d'esta curva e a equação $y = ax + b$, d'uma recta. Resultará

$$(Aa^2 + Ba + C)x^2 + (2Aab + Bb + Da + E)x + Ab^2 + Db + F = 0.$$

Como a semi-somma das raizes d'esta equação é a abscissa x' do meio da corda, teremos (*Alg. el. n.º 145*),

$$x' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2Aab + Bb + Da + E}{Aa^2 + Ba + C}.$$

Se fizermos variar b , conservando a constante, obteremos assim as

(*) Se for, por exemplo, $B^2 = 4AC$, e $2AE = BD$: eliminando C e E entre estas equações e a proposta (1), resultará

$$(2Ay + Bx + D)^2 - (D^2 - 4AF) = 0,$$

que se decompõe nas duas lineares

$$2Ay + Bx + D + \sqrt{D^2 - 4AF} = 0, \quad 2Ay + Bx + D - \sqrt{D^2 - 4AF} = 0.$$

Por conseguinte a equação proposta é a de duas rectas parallelas.

As equações (2) reduzem-se então a uma só $2Ab_1 + Ba_1 + D = 0$,

pertencente a uma recta parallelas áquellas, e equidistante d'ellas. O que concorda com o que já sabemos pela Geometria (n.º 67, 4.º).

abscissas x' dos meios d'uma serie de cordas paralelas. Mas se eliminarmos b por meio da expressão $b = y' - ax'$, teremos a equação

$$a(Bx' + 2Ay' + D) + 2Cx' + By' + E = 0 \dots \dots \dots (3),$$

que, por convir a todas estas cordas, é a equação do diametro que as divide ao meio. Logo:

1.º Os diametros das curvas do 2.º grau são linhas rectas. E determinam-se pela equação (3), quando é dada a ou a direcção das cordas.

2.º Para cada direcção das cordas ha um diametro correspondente.

3.º Havendo centro, os diametros passam todos por elle; por satisfazerem á equação (3) as coordenadas d'este ponto (n.º 92), qualquer que seja a .

Mas não havendo centro, que é o caso da parabola, a condição respectiva $B^2 - 4AC = 0$ dará, pela eliminação de C entre ella e (3),

$$y' = -\frac{B}{2A} x' - \frac{aD + E}{2Aa + B}.$$

E por que nesta expressão o coeﬃciente de x' é independente de a , segue-se que todos os diametros da parabola são paralelos entre si. A direcção d'elles é dada pela tangente $-\frac{B}{2A}$ do angulo que fazem com os x .

Como um eixo da curva é um diametro perpendicular ás cordas, que divide ao meio: a condição de perpendicularidade [n.º 31, (7)] applicada ás equações da corda e do diametro, que no caso da parabola são

$$y = ax + b, \quad y = -\frac{B}{2A} x - \frac{aD + E}{2Aa + B},$$

dá

$$-\frac{B}{2A} a + 1 = 0, \quad \text{ou} \quad a = \frac{2A}{B}.$$

E no caso da ellipse ou da hyperbole, a mesma condição applicada ás equações

$$y = ax + b, y = -\frac{Ba + 2C}{2Aa + B}x - \frac{aD + E}{2Aa + B}$$

dá $Ba^2 + 2a(C - A) = B$, ou $a = \frac{A - C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}$.

valores ambos reaes.

94. Para que o eixo das abscissas x seja um diametro a respeito das cordas parallelas ao eixo das ordenadas y , é necessario que a cada abscissa correspondam valores da ordenada eguaes dous a dous, e de signaes contrarios; e por isso, nas equações do 2.º grau, é necessario que y tenha a fórmula $y = \pm \sqrt{K}$, sendo K composto de quantidades constantes e de x . Ora, fazendo o calculo a respeito da equação (1), vê-se que esta condição só pode verificar-se quando faltam os termos Bxy e Dy . Do mesmo modo, para que o eixo das ordenadas seja um diametro em relação ao das abscissas, é necessario que a equação da curva não contenha Bxy nem Ex .

Logo, para que os dous eixos dos x e dos y sejam diametros conjugados, é necessario que falem á equação os termos Bxy , Dy , Ex , isto é, que ella tenha a fórmula

$$Ay^2 + Dx^2 = Q \dots \dots \dots (4).$$

A origem deve pois ser o centro da curva; e assim a ellipse e a hyperbole podem ter diametros conjugados, mas não os tem a parabola.

1.º Sendo BB' um diametro da ellipse ou da hyperbole (fig. 61 e 63), as tangentes HK e IG em B e B' são parallelas entre si (n.ºs 79 e 85), e ao diametro conjugado Cy ; por que todas as cordas parallelas a este diametro são divididas por BB' em duas partes eguaes, e as suas extremidades vão-se approximando uma da outra á medida que se avizinham de B , onde por fim se reúnem (*). Logo: para que a curva esteja refe-

(*) Com effeito o calculo indicado na pag 96 applicado á equação (4),

dá $\frac{k}{h} = -\frac{Dx'}{Ay'}$,

rida aos diametros conjugados, deve o eixo Cy das ordenadas ser paralelo á tangente tirada no ponto B ou B' onde o eixo Cx das abscissas corta a curva.

2.º Qualquer corda CB, que passa pelo centro C, é um diametro que tem o seu conjugado paralelo á tangente em B; por que a equação da curva referida a este systema de eixos tem necessariamente a fórma (4) (*). Por tanto: *na ellipse e na hyperbole ha uma infinidade de diametros conjugados.*

3.º Sendo AO (fig. 57 e 58) o primeiro eixo da ellipse ou da hyperbole, ha sempre duas cordas supplementares AN e ON paralelas aos diametros conjugados (n.ºs 81 e 85). A equação $a^2\alpha x' \pm b^2 = 0$,

que na extremidade do eixo B, onde é $y' = 0$, se torna em $\frac{k}{h} = \infty$; isto é, a tangente em B é parallela a Cy.

O mesmo se pode mostrar da maneira seguinte:

Eliminando y entro $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ e $y = \alpha x + \beta$, e tomando a semi-somma dos dous valores de x, vem a abscissa do meio de cada corda, $x = -\frac{\alpha\beta a^2}{b^2 + a^2\alpha^2}$; e eliminando $\beta = y - \alpha x$, vem a equação dos meios de todas as cordas paralelas a $y = \alpha x$, isto é, a equação do diametro BB', $y = -\frac{b}{a^2\alpha}x = \alpha'x$. Logo $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$; e por isso a tangente na extremidade B do diametro, é parallela ás cordas (n.ºs 81 e 85).
 (*) Com effeito o mesmo calculo da pag. 96 applicado á equação

$$Ay'^2 + B'x'y' + Cx'^2 + Q = 0,$$

dá
$$\frac{k}{h} = -\frac{By' + 2Cx'}{Bx' + 2Ay'}$$

e por que, suppondo a tangente em B parallela a Cy, deve ser $\frac{k}{h} = \infty$ para $y' = 0$, resulta $B = 0$; o que reduz á fórma (4) a equação precedente.

Isto mesmo se vê do modo seguinte:

Chamando A a tangente trigonometrica do angulo que a tangente em B faz com CB, é (n.º 81) $A\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$; e por isso, fazendo $A = \alpha$, será, segundo a nota precedente, CB o diametro conjugado do que é parallelo á tangente em B.

que (n.ºs 80 e 85) tem lugar para a inclinação de duas cordas sobre o eixo AO, convém pois igualmente á d'estes diametros; conservando elles direcções parallelas em todas as ellipses e hyperboles cujos eixos a e b têm a mesma razão.

4.º Subemos assim: *determinar os diametros conjugados, que fazem entre si um angulo dado θ* ; por que este problema já foi resolvido para as cordas supplementares (n.º 80). O angulo θ tem um limite, e só pode ser recto para os eixos; excepto no circulo, onde todos os diametros conjugados são rectangulares.

O problema reduz-se a formar sobre o eixo AO, e com o angulo opposto dado $N = \theta$, um triangulo ANO. Para isso descrever-se-ha sobre AO um segmento de circulo, em que possa existir o angulo dado: as intersecções d'este segmento com a curva darão os pontos N, as cordas supplementares, e os diametros conjugados parallelos a estas cordas.

5.º Se o diametro conjugado Cy tambem corta a curva, o que tem lugar na ellipse (fig. 61), ver-se-ha do mesmo modo que as rectas GH e IK, tangentes em D' e D, são parallelas ao 1.º diametro BB'. O parallelogrammo GHIK diz-se *circumscripto* á curva.

Mas na hyperbole (fig. 63) só o 1.º diametro BB' corta a curva; por que o outro DD' fica fóra do angulo das asymptotas.

95. Sejam (fig. 61) $BB' = 2a'$ e $DD' = 2b'$ os diametros conjugados d'uma ellipse. Referindo a elles a curva, devem $y = 0$ dar $x = a'$, e $x = 0$ dar $y = b'$: introduzindo pois estas condições na equação (4),

teremos $Ba'^2 = Q$, $Ab'^2 = Q$, ou $B = \frac{Q}{a'^2}$, $A = \frac{Q}{b'^2}$,

que a transformam na da ellipse referida aos eixos conjugados

$$a'y^2 + b'x^2 = a'b' \dots \dots \dots (5).$$

96. Seja do mesmo modo (fig. 63) $BB' = 2a'$ o primeiro diametro da hyperbole, e $DD' = 2b'$ o seu segundo diametro que não encontra a curva, isto é, o dobro da ordenada $b'\sqrt{-1}$ correspondentes a $x = 0$, depois de tornada real. Devem $y = 0$ dar $x = a'$, e $x = 0$ dar $y = b'\sqrt{-1}$; e

estas condições introduzidas na equação (4) dão

$$Ba'^2 = Q, -Ab'^2 = Q, \text{ ou } B = \frac{Q}{a'^2}, A = -\frac{Q}{b'^2},$$

que a transformam na da hyperbole referida aos diametros conjugados,

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \dots\dots\dots(6).$$

As tangentes $GI = HK = 2b'$ parallelas a DD' determinam o parallelogrammo $GHIK$ *inscripto* na hyperbole.

Como as equações (5) e (6) se podem deduzir uma da outra pondo $b'\sqrt{-1}$ em lugar de b' , o mesmo acontecerá aos resultados dos calculos feitos a respeito d'uma d'ellas; e por isso é escusado repetil-os para a hyperbole.

97. Se na equação da ellipse mudarmos x em y e y em x , esta equação conservará a mesma fórma; e por isso todas as construcções feitas sobre um dos diametros serão applicaveis ao outro. Mas na hyperbole, se contarmos x sobre o segundo diametro, a equação será

$$b'^2y^2 - a'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

98. Como as equações da ellipse e da hyperbole conservam a mesma fórma, ou se refiram aos eixos, ou aos diametros; é inutil reproduzir os calculos, que já se effectuaram a respeito dos eixos; e podem aproveitar-se os resultados que para elles se deduziram. Assim:

1.º Os quadrados das ordenadas (fig. 61 e 63) são proporcionaes aos productos das distancias PB e PB' dos pés P ás extremidades B e B' do diametro.

2.º As equações de duas ellipses, uma das quaes é referida aos eixos $2a'$ e $2b'$, e a outra a diametros da mesma grandeza, são identicas; e por isso a cada abscissa corresponde uma ordenada da mesma grandeza em ambas as curvas, mas differentemente inclinada. Logo, para descrever uma ellipse, quando se dão os diametros conjugados BB' e DD' (fig. 62), levantaremos KCK' perpendicular a BB' , e tomaremos nella as partes $CK = CK' = CD$; depois, pela propriedade dos focos, ou por outro meio, descreveremos sobre os eixos BB' e KK' a ellipse $BKB'K'$; e finalmente inclinaremos cada ordenada NP de modo que tome a direcção

MP paralela ao segundo diametro DD'; o que dará cada ponto correspondente M da ellipse procurada. No caso de ser $b' = a'$, é BKB'K' um circulo.

Esta construcção applica-se similhantemente á hyperbole; e adiante veremos que tambem é applicavel á parabola.

3.º Para a inclinação d'uma tangente num ponto qualquer (x', y') , e para a equação d'esta recta, temos:

$$\text{na ellipse} \quad A = -\frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x'}{y'}, \quad a'^2 y y' + b'^2 x x' = a'^2 b'^2;$$

$$\text{na hyperbole} \quad A = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x'}{y'}, \quad a'^2 y y' - b'^2 x x' = -a'^2 b'^2;$$

devendo entender-se que A não designa aqui, como designava para os eixos, a tangente trigonometrica do angulo que aquella recta faz com o eixo das abscissas, mas sim a razão dos senos dos angulos que faz com os diametros conjugados.

4.º Nesta mesma intelligencia vêr-se-ha que tem aqui applicação, assim o calculo feito no n.º 80 para as cordas supplementares, como o processo, que d'elle deduzimos, para tirar uma tangente. Tirando pois (fig. 64) do centro C para o ponto de contacto M a recta CM, e por B' a corda paralela B'N, a tangente TM será paralela á corda supplementar BN.

Quando é dada a ellipse e o ponto M de contacto, facilmente se determina a tangente: por que, tirando duas quaesquer cordas paralelas, e dividindo ao meio a corda que as corta em duas partes eguaes, acha-se o centro C; e depois applica-se a construcção precedente.

5.º D'um ponto K exterior á ellipse (fig. 98), tomado sobre a recta dada BB', tiremos as tangentes KM e KN; e tiremos o diametro DD', e o seu conjugado CA. Reproduzindo a analyse do n.º 84, teremos a equação, $a'^2 \beta y + b'^2 \varepsilon x = a'^2 b'^2$, da corda MN que une os pontos de contacto; equação por meio da qual poderíamos construir esta corda, achar os pontos de contacto M e N, e tirar as tangentes. Ora $y = 0$ dá $x = \frac{a'^2}{\varepsilon}$, in-

dependente de β e b' : logo, em quanto o ponto K se mover sobre BB',

a corda MN e as tangentes variarão, mas o ponto E ficará fixo; e este ponto será commum para todas as ellipses que tiverem o mesmo primeiro diametro $2a'$.

6.º Tambem é visivel que a propriedade demonstrada no fim do n.º 82 subsiste ainda quando a ellipse se reporta aos diametros conjugados; ficando assim justificado o que dissemos nesse logar, relativamente áquella propriedade, sobre poderem ser OH e AK (fig. 56) duas quaesquer tangentes parallelas.

Todas estas construcções se applicam egualmente á hyperbole.

99. Para achar as relações que têm logar entre os semi-eixos, a e b , e os semi-diametros conjugados, a' e b' , tomemos as duas equações referidas a estas duas especies de eixos; e procuremos reduzir uma á outra por meio de transformações de coordenadas.

Transformações das coordenadas

100. *Ellipse.* Comecemos pela ellipse, cuja equação referida aos seus eixos CA e CM (fig. 61) é

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Para mudar as coordenadas rectangulares, x e y , em outras obliquas, x' e y' , contadas sobre diametros conjugados CB e CD, que façam com CA os angulos α e β , substituamos nesta equação, em logar de x e y , as expressões [n.º 44 (2)]

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta:$$

teremos

$$\left\{ \begin{aligned} (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x'^2 + (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta) y'^2 \\ + 2(a^2 \sin \alpha \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cos \beta) x'y' \end{aligned} \right\} = a^2b^2.$$

Mas, para que estes novos eixos sejam diametros conjugados, é necessario

que a transformada tenha a fórma

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2:$$

logo o coefficiente de $x'y'$ deve ser nullo,

isto é,
$$a^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + b^2 \cos \alpha \cos \beta = 0 \dots \dots \dots (7),$$

ou,
$$a^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta + b^2 = 0.$$

Esta equação é a mesma que tem logar para as cordas supplementares (n.º 80); o que concorda com o que se disse no n.º 94 sobre as direções d'estas cordas, das tangentes, e dos diametros conjugados.

Para determinar os semi-diametros conjugados a' e b' , é necessario fazer respectivamente nullos y' ou x' ; o que dá

$$(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) a'^2 = a^2 b^2, (a^2 \operatorname{sen}^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta) b'^2 = a^2 b^2 \dots (8):$$

ou, substituindo $1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$ e $1 - \operatorname{sen}^2 \beta$ em logar de $\cos^2 \alpha$ e $\cos^2 \beta$,

$$a'^2 (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \alpha = b^2 (a^2 - a'^2), b'^2 (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \beta = b^2 (a^2 - b'^2);$$

ou, substituindo $1 - \cos^2 \alpha$ e $1 - \cos^2 \beta$ em logar de $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\operatorname{sen}^2 \beta$,

$$a'^2 (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha = a^2 (a'^2 - b^2), b'^2 (a^2 - b^2) \cos^2 \beta = a^2 (b'^2 - b^2).$$

Transpondo o 2.º termo da equação (7), elevando ao quadrado, e substituindo os valores de $\operatorname{sen}^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha$, $\operatorname{sen}^2 \beta$, $\cos^2 \beta$, tirados das quatro ultimas equações, resulta

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2), \text{ ou } a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2),$$

que, sendo dividida por $a^2 - b^2$, dá

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \dots \dots \dots (9).$$

Logo: a somma dos quadrados de dous quaesquer diametros conjugados da ellipse é constante, e equal á somma dos quadrados dos eixos.

Se multiplicarmos as equações (8) uma pela outra, resultará

$$a^4 b^4 = a'^2 b'^2 [a^4 \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta + b^4 \text{cos}^2 \alpha \text{cos}^2 \beta + a^2 b^2 (\text{sen}^2 \alpha \text{cos}^2 \beta + \text{sen}^2 \beta \text{cos}^2 \alpha)],$$

ou, em virtude do quadrado de (7), e dividindo por $a^2 b^2$,

$$a^2 b^2 = a'^2 b'^2 (\text{sen } \beta \text{cos } \alpha - \text{sen } \alpha \text{cos } \beta)^2 = a'^2 b'^2 \text{sen}^2 (\beta - \alpha).$$

Temos pois $ab = a'b' \text{sen } (\beta - \alpha) = a'b' \text{sen } \theta \dots \dots \dots (10),$

chamando θ o angulo $\beta - \alpha$ dos diametros conjugados. E como $a'b' \text{sen } \theta$ é a superficie do parallelogrammo CDBK (fig. 61), segue-se que: *quaesquer que sejam as direcções dos diametros conjugados, a área do parallelogrammo GK circumscripto á ellipse é constante, e equal á do rectangulo dos eixos.*

Assim as tres equações (7) e (8), que exprimiam as condições da questão, reduzem-se a estas:

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \dots \dots \dots (9)$$

$$ab = a'b' \text{sen } (\beta - \alpha) \dots \dots \dots (10)$$

$$a^2 \text{tang } \alpha \text{tang } \beta + b^2 = 0 \dots \dots \dots (11).$$

Se eliminassemos a e b por meio de duas d'ellas, a terceira reduzir-se-ia a (*)

$$0 = a'^2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha + b'^2 \text{sen } \beta \text{cos } \beta, \text{ ou } 0 = a'^2 \text{sen } 2\alpha + b'^2 \text{sen } 2\beta \dots \dots (12).$$

No caso de serem dados os diametros $2a'$ e $2b'$, com o angulo que

(*) Como a passagem dos diametros conjugados para os eixos se faz pelas formulas

$$x' = \frac{x \text{sen } \beta - y \text{cos } \beta}{\text{sen } (\beta - \alpha)}, \quad y' = \frac{y \text{cos } \alpha - x \text{sen } \alpha}{\text{sen } (\beta - \alpha)};$$

comparando estas expressões com as de x e y do n.º 100, vê-se que: para fazer esta passagem podemos aproveitar os calculos d'aquelle numero substituindo nos

comprehendem, $\beta - \alpha = \theta$: desenvolvendo $\text{sen } 2\beta = \text{sen}(2\alpha + 2\theta)$, dividindo por $\text{cos } 2\alpha$, e resolvendo em ordem a $\text{tang } 2\alpha$,

$$\text{a equação (12) dá} \quad \text{tang } 2\alpha = -\frac{b'^2 \text{sen } 2\theta}{a'^2 + b'^2 \text{cos } 2\theta},$$

que determina a direcção dos mesmos eixos.

Para ter a posição dos diâmetros conjugados eguaes, faremos $a' = b'$;

o que torna a equação (12) em $\text{sen } 2\alpha = -\text{sen } 2\beta$,

e mostra que estes diâmetros têm a mesma inclinação sobre o eixo maior;

resultados d'elles: a' e b' , em logar de a e b ; $\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$ e $-\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$, em logar de $\text{cos } \alpha$ e $\text{sen } \alpha$; $-\frac{\text{cos } \beta}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$ e $\frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$ em logar de $\text{cos } \beta$ e $\text{sen } \beta$. O que feito na equação (7) dá immediatamente:

$$-\frac{a'^2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha}{\text{sen}^2(\beta - \alpha)} - \frac{b'^2 \text{sen } \beta \text{cos } \beta}{\text{sen}^2(\beta - \alpha)} = 0, \text{ ou a equação (12).}$$

Mas se quizermos effectuar a eliminação, como se indica no texto, por exemplo, eliminando a^2 e b^2 entre (9) e (11), e substituindo no quadrado de (10), acharemos:

$$(a'^2 + b'^2)^2 \text{tang } \alpha \text{tang } \beta + a'^2 b'^2 (1 - \text{tang } \alpha \text{tang } \beta)^2 \text{sen}^2(\alpha - \beta) = 0,$$

que dá

$$(a'^2 + b'^2)^2 \text{sen } 2\alpha \text{sen } 2\beta + 4a'^2 b'^2 \text{cos}^2(\alpha + \beta) \text{sen}^2(\alpha - \beta) = 0,$$

ou

$$(a'^2 + b'^2)^2 \text{sen } 2\alpha \text{sen } 2\beta + a'^2 b'^2 (\text{sen } 2\alpha - \text{sen } 2\beta)^2 = 0,$$

ou

$$(a'^2 \text{sen } 2\alpha + b'^2 \text{sen } 2\beta) (a'^2 \text{sen } 2\beta + b'^2 \text{sen } 2\alpha) = 0.$$

A apparição dos dous factores analogos procede de se ter elevado (10) ao quadrado, e entrar por isso $\text{sen}(\alpha - \beta)$ só na segunda potencia; porque as equações (9) e (11) e o quadrado de (10) ficam as mesmas quando se muda α em β e β em α . Mas, combinando cada um d'estes factores egualado a zero com as equações (8), acha-se que só o primeiro reproduz a equação (11).

ficando um d'uma parte do eixo menor, e outro da outra parte do mesmo eixo (*).

A mesma hypothese torna a equação (11) em

$$-a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + b^2 = 0, \text{ ou } \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{b}{a} = \frac{BC}{AC} \text{ (fig. 57).}$$

Por onde se vê que: *os diâmetros conjugados eguaes da ellipse são parallelos ás cordas supplementares que ligam as extremidades dos eixos; e por conseguinte (n.º 80) são tambem os que fazem um com o outro o maior angulo obtuso.*

Seja (fig. 57) CM um d'estes diâmetros. Attendendo á equação (9), o triangulo CPM dá

$$x^2 + y^2 = a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Eliminando y^2 entre esta equação e $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, resulta $x^2 = \frac{1}{2} a^2$; e por que este valor é independente de b , segue-se que: *as extremidades dos diâmetros conjugados eguaes de todas as ellipses descriptas sobre o eixo maior 2a têm a mesma abscissa $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$.*

101. Para determinar a posição dos diâmetros conjugados, que fazem entre si o angulo θ , temos (n.º 80) a equação

$$a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha - (a^2 - b^2) \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \theta + b^2 = 0 \dots \dots (13).$$

As cinco equações (9), (10), (11), (12), (13), que equivalem tão sómente

(*) A equação $\operatorname{sen} 2\alpha = -\operatorname{sen} 2\beta$

dá $2\alpha = 180^\circ + 2\beta$, ou $2\alpha = 360^\circ - 2\beta$.

Da primeira tira-se $\alpha = 90^\circ + \beta$, $\operatorname{tang} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tang} \beta}$,

que, em virtude de (11), dá $a = b$; o que só tem logar no circulo.

Da segunda tira-se $\alpha = 180^\circ - \beta$, que é o que serve.

a quatro distinctas, entre as sete quantidades $a, b, a', b', \alpha, \beta, \theta$, dão quatro d'estas quantidades, quando se conhecem as outras tres.

Por exemplo, querendo determinar os eixos, quando são dados, em grandeza e direcção, os diâmetros conjugados: conhecem-se a', b', θ ; e procuram-se a, b, α . Ora as equações (9) e (10) dão

$$(a \pm b)^2 = a'^2 + b'^2 \pm 2a'b' \operatorname{sen} \theta;$$

logo construindo dous triangulos; um com os lados a', b' , e o angulo comprehendido $90^\circ + \theta$; outro com os lados a', b' , e o angulo comprehendido $90^\circ - \theta$; os terceiros lados serão respectivamente $a + b$ e $a - b$.

102. Transformemos a equação da ellipse referida aos eixos,

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2,$$

em outra referida a novos eixos rectangulares, por meio das equações

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha, \quad y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha;$$

sendo α o angulo (xx') . Virá:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 x'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2a^2 x' y' \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + a^2 y'^2 \cos^2 \alpha \\ + b^2 x'^2 \cos^2 \alpha - 2b^2 x' y' \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + b^2 y'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \end{array} \right\} = a^2 b^2.$$

Fazendo $y' = 0, x' = 0$, resultam

$$A^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}, \quad B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha};$$

nas quaes A e B são as distancias do centro aos dous pontos onde os eixos x', y' , encontram a curva. Estas equações dão

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2};$$

e por que esta egualdade é independente de α , segue-se que: *quaesquer*

distancias rectangulares A e B do centro á ellipse satisfazem á relação $A^{-2} + B^{-2} = \text{constante}$.

103. *Hyperbole.* Para achar os resultados relativos á hyperbole, basta mudar b em $b\sqrt{-1}$ e b' em $b'\sqrt{-1}$ nos relativos á ellipse. Teremos assim as equações

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \quad a'b' \sin \theta = ab,$$

$$a'^2 \sin 2\alpha = b'^2 \sin 2\beta, \quad \text{ou } a^2 \tan \alpha \tan \beta = b^2,$$

$$a^2 \tan^2 \alpha - (a^2 + b^2) \tan \alpha \tan \theta = b^2,$$

cujo uso é o mesmo que o das correspondentes da ellipse. Por onde se vê: 1.º que na hyperbole a differença dos quadrados dos diâmetros conjugados é igual á differença dos quadrados dos eixos: 2.º que o parallelogrammo inscripto na hyperbole é constante e equal ao rectangulo dos eixos.

Como $a' = b'$ dá $a = b$; e reciprocamente: a hyperbole equilatera é a unica que tem os diâmetros conjugados eguaes; e nella todos o são dous e dous.

A mesma hypothese dá $\tan \alpha \tan \beta = 1$, ou $\tan \alpha = \cot \beta$.

Assim, sendo CA o primeiro eixo da hyperbole equilatera (fig. 60); e CM, Cy', dous diâmetros conjugados eguaes: temos

$$\tan MCA = \cot y'CA = \tan y'Cy, \text{ isto é, } x'Cx = y'Cy.$$

Ora a asymptota CS faz com CA o angulo $SCx = 45^\circ = SCy$: logo $SCx' = SCy'$, e por consequente: a asymptota da hyperbole equilatera divide ao meio os angulos de todos os diâmetros conjugados.

104. De ser (n.º 90) $CMS = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}SM \cdot CM \sin \theta = \frac{1}{2}a' \cdot SM \sin \theta$, e (n.º precedente) $ab = a'b' \sin \theta$, resulta $SM = b'$.

Por tanto: o conjugado de qualquer diâmetro 2CM é equal e parallelo a ST.

As diagonaes HI e GK do parallelogrammo inscripto (fig. 63) são asymptotas.

Se na equação $a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$ fizermos o calculo do (n.º 87),

acharemos a equação $y = \pm \frac{b'}{a'}x$ das asymptotas reportadas aos diâ-

tros conjugados: d'onde podem deduzir-se novamente diversos theoremas. Assim $x' = a' = CM$ (fig. 60) dá $y = b' = MS = MT$: o ponto M divide ST em duas partes eguaes; e as extremidades S, T, dos diametros conjugados determinam as asymptotas.

A cada abscissa correspondem duas ordenadas eguaes e oppostas. Assim, quando Cy' é parallela á tangente ST, Cx' divide ao meio bb' e NN' ; logo $bN = b'N'$: e como ST pode ter qualquer direcção, vê-se que a todas as cordas pertence esta propriedade.

105. Um calculo similhante ao do n.º 102 dá

$$A^{-2} + B^{-2} = a^{-2} - b^{-2} = \text{const} :$$

mas aqui é necessario, para conceber o que exprime B, imaginar que se descreve entre as asymptotas da hyperbole proposta outra hyperbole conjugada, da qual b seja o primeiro eixo e a o segundo (vej. fig. 70) (*).

106. *Parabola.* Como a parabola não tem diametros conjugados, re- portemol-a aos seus diametros simples.

Transportemos a origem das coordenadas a um ponto (a, b) ; e mudemos a direcção dos eixos, referindo a curva a outros que façam com o eixo primitivo dos x os angulos $(xx') = \alpha$ e $(xy') = \beta$; isto é, substituíamos em $y^2 - 2px = 0$ as expressões (n.º 44)

$$x = a + cx' + c'y', \quad y = b + sx' + s'y',$$

sendo $c = \cos \alpha$, $c' = \cos \beta$, $s = \sin \alpha$, $s' = \sin \beta$:
teremos

$$b^2 - 2pa + 2x'(bs - pc) + 2y'(bs' - pc') + 2ss'x'y' + s^2x'^2 + s'^2y'^2 = 0.$$

(*) As expressões de A^2 e B^2 (n.º 102), mudando b em $b/\sqrt{-1}$,

$$\text{são} \quad A^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}, \quad B^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Como o eixo CE' faz com o primeiro eixo CA' da hyperbole conjugada o mesmo angulo α , que fará o eixo CE com o primeiro eixo CA da hyperbole proposta, é claro que, para ter o ponto onde CE' encontra a conjugada, basta mudar a em b , e reciprocamente, na expressão de A^2 ; o que dá

$$A'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha} = -B^2.$$

Por tanto

$$CE' = A' = B/\sqrt{-1}.$$

Para que o eixo dos x' seja diametro a respeito dos y' , é necessario que desapareçam os termos em $x'y'$ e y' ; ou $ss' = 0$, $bs' - pc' = 0$.

Da primeira d'estas condições resulta $s = 0$, $c = 1$:

a segunda,
$$p = b \frac{s'}{c'} = b \tan \beta = b \tan (xy'),$$

dá, para cada valor de b , o angulo (xy') que determina a direcção de y' ; ficando a e b arbitrarías. Logo: só as parallelas MS ao eixo Ax são diametros, e todas o são (fig. 52).

A equação transformada é $s'^2 y'^2 - 2px' + b^2 - 2pa = 0$.

Em fim, se tomarmos por (a, b) um ponto da curva, será $b^2 - 2pa = 0$; e a ultima equação, fazendo $\frac{p}{s'^2} = p'$, se reduzirá a $y'^2 = 2p'x'$.

Por ser (n.º 75) $\tan tMS = \frac{p}{b} = \tan (xy')$,

a tangente MT na origem M é o eixo dos y' . A expressão $2p'$ é o que se chama *parametro do diametro MS*; e por que é

$$s' = \sin (xy') = \frac{p}{\sqrt{p^2 + b^2}} = \sqrt{\left(\frac{p}{p + 2a}\right)},$$

fica (n.º 66) $2p' = \frac{2p}{s'^2} = 2(p + 2a) = 4MF$.

Logo: o *parametro de um diametro é o quadruplo da distancia da origem ao fóco.*

Por meio das equações $b \tan \theta = p$, $p + 2a = p'$, $b^2 = 2pa$,

podemos, salvas as excepções analyticas, achar tres das quantidades p , p' , a , b , θ , quando se conhecem as outras duas; e construir a curva, cuja equação é $y'^2 = 2p'x'$.

107. De terem as equações referidas aos eixos a mesma fórmula que as referidas aos diâmetros conjugados, segue-se que:

1.º A construção dada para a ellipse (n.º 98) é applicavel á parabola, quando se conhece um diâmetro e o seu parametro $2p'$.

2.º A equação da tangente em qualquer ponto (x', y') é

$$yy' = p'(x + x');$$

sendo $\frac{p'}{y'}$ a razão dos senos dos angulos que faz com os eixos coordenados. No caso de ter de passar a tangente por um ponto exterior, subsistem ainda a construção e as propriedades expostas no n.º 78.

3.º A subtangente é o dobro da abscissa: e por isso, conhecido um diâmetro, facilmente se tirará a tangente em um ponto dado.

Para determinar um diâmetro, o eixo, o vertice, etc., d'uma parabola MAN' (fig. 52): traçaremos duas cordas parallelas quaesquer, e dividil-as-hemas ambas em duas partes eguaes por uma recta, que será um diâmetro MS ; depois tiraremos a corda MM' perpendicular a MS , dividil-a-hemos ao meio em P , e conduziremos por este ponto uma parallela a MS , o que dará o eixo AN , e o vertice A .

Como o parametro $2p'$ é uma terceira proporcional, $2p' = \frac{y'^2}{x'}$, a qual-quer abscissa e á ordenada correspondente: segue-se que, se conhecermos a direcção d'uma tangente Mt relativamente ao diâmetro MS , e um ponto da parabola, facilmente descreveremos esta curva; por que as coordenadas (x', y') do ponto dado farão conhecer o parametro $2p' = \frac{y'^2}{x'}$ do diâmetro MS , e depois teremos na equação $y^2 = 2p'x$ o que é necessario para a construcção.

Discussão das equações do segundo grau

108. Passemos a construir a equação geral do segundo grau entre duas indeterminadas,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \dots\dots\dots (a),$$

na qual são dados, em grandeza e signal, os coefficients A, B, Supporemos as coordenadas rectangulares; por que sempre é possível reduzi-las a esse estado por transformações convenientes [n.º 45 (3')], sem alterar o grau da equação.

Sendo muitos differentes as fórmulas e as propriedades das curvas, segundo ellas têm ou não têm centro, distinguiremos os tres casos de ser $B^2 - 4AC$ nullo, positivo ou negativo.

$$1.º \text{ CASO. } B^2 - 4AC = m = 0.$$

109. Os tres primeiros termos de (a) são o quadrado de $y\sqrt{A} + x\sqrt{C}$. Neste caso a curva MDM' (fig. 66) não tem centro.

Ax e Ay são os eixos. Para referir a curva a outros Ax' e Ay' também rectangulares, de modo que a sua equação tenha a fórmula

$$ay'^2 + dy' + cx' + F = 0 \dots\dots\dots (b),$$

é necessario que, substituindo nesta equação as expressões [n.º 44 (2')]

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta, \quad x' = y \sin \theta + x \cos \theta, \dots\dots\dots (c),$$

que transformam um systema rectangular de coordenadas em outro também rectangular, a transformada se possa tornar identica a (a), isto é, que se possam fazer eguaes respectivamente os coefficients das mesmas

potencias de x e y . Substituindo pois (c) em (b) , e comparando termo a termo o resultado com (a) , teremos

$$a \cos^2 \theta = A, \quad a \sin^2 \theta = C \dots \dots \dots (1)$$

$$-2a \sin \theta \cos \theta = B \dots \dots \dots (2)$$

$$d \cos \theta + e \sin \theta = D, \quad e \cos \theta - d \sin \theta = E \dots \dots \dots (3).$$

Como ha cinco equações com quatro incognitas, a, d, e, θ , não será possível em geral o calculo precedente, excepto se alguma d'estas equações se contiver nas outras. É o que actualmente se verifica; por que a condição $B^2 - 4AC = 0$ faz que seja a equação (2) um resultado das equações (1): e assim as equações (1) e (2), equivalentes a duas distinctas, determinarão a e θ ; e depois as (3) determinarão d e e . Com effeito, sommadas as duas primeiras, acha-se

$$a = A + C,$$

depois $\sin \theta = \sqrt{\frac{C}{a}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{A}{a}}, \quad \text{tang } \theta = \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad \text{sen } 2\theta = -\frac{B}{a};$

e em fim as equações (3), ou $d = D \cos \theta - E \sin \theta, \quad e = D \sin \theta + E \cos \theta,$

dão $d = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{a}}, \quad e = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{a}} \dots \dots \dots (4).$

Em virtude da condição $m = 0$, são A e C positivos, $\frac{C}{a} < 1, \quad \frac{A}{a} < 1,$
 $\frac{B^2}{a^2} \left(= \frac{4AC}{(A-C)^2 + 4AC} \right) < 1,$ e por isso a, θ, d, e reaes; consequentemente sempre se póde reduzir a proposta (a) a (b) por transformação de coordenadas.

Se um dos coefficients A ou C fosse nullo: como então $m = 0$ daria tambem $B = 0$, não seria necessaria a transformação, por isso que a proposta teria já a fórma (b) .

Se A e C fossem ambos nulos, a equação (a) não teria os tres primeiros termos, e seria do primeiro grau.

Por tanto, quando se dêr uma equação na qual for $m = 0$, poderemos logo escrever a transformada (b), determinando os coefficients pelas formulas precedentes, e construindo o novo eixo Ax' (fig. 66) por meio do

valor de θ determinado pelas equações $\text{tang } \theta = \sqrt{\frac{C}{A}}$, $\text{sen } 2\theta = -\frac{B}{A+C}$.

Segundo for B negativo ou positivo, assim será $\theta < 90^\circ$ ou $\theta > 90^\circ$, isto é, assim ficará o eixo Ax' abaixo ou acima de Ax (*). Donde resulta o signal do radical que entra nas equações (4), suppondo sempre \sqrt{a} positivo.

Seja, por exemplo, $2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 - y - 2x + 5 = 0$.

Multiplicando por 2, para tornar A e C quadrados, teremos

$$A = 4, B = -4, C = 1, D = -2, E = -4, F = +10.$$

Por conseguinte $a = 5$, $\text{tang } \theta = \frac{1}{2}$, $\text{sen } 2\theta = \frac{1}{5}$;

e depois $d = 0$, $e = -2\sqrt{5}$,

tomando os radicaes positivos, por ser $\text{sen } 2\theta$ positivo.

Logo $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0$,

é a transformada (b), que se deve construir, depois de ter determinado o eixo dos x' . Para determinar este eixo pela equação $\text{tang } xAx' = \frac{1}{2}$, basta levantar sobre qualquer parte AE do eixo dos x a perpendicular $Ei = \frac{1}{2}AE$, e tirar Ai (fig. 66).

(*) Sendo 2θ o menor valor do angulo cujo seno é $-\frac{B}{A+C}$, os outros valores são $2\theta + n \cdot 360^\circ$; por conseguinte o angulo dos eixos dos x e x' é $\theta + n \cdot 180^\circ$, que dá para Ax' a mesma direcção que dá θ .

110. Reduzida em geral a proposta á fórma (b) por meio do calculo precedente, vejamos o modo de construir a curva, a que pertence esta equação, com os eixos rectangulares Ax' , Ay' (fig. 66).

Se transportarmos a origem A a um ponto (h, k) , isto é, se mudarmos x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$, a equação (b) transformar-se-ha em

$$ay'^2 + (2ak + d)y' + ex' + ak^2 + dk + eh + F = 0.$$

Determinemos h e k de sorte que se desvançam o termo em y' e o termo constante; isto é, façamos

$$2ak + d = 0, \quad ak^2 + dk + eh + F = 0.$$

A segunda d'estas equações mostra que a nova origem, assim determinada, é um ponto da curva; e a eliminação entre ambas dá as coordenadas d'este ponto

$$k = -\frac{d}{2a}, \quad h = \frac{d^2 - 4aF}{4ae} = \frac{ak^2 - F}{e} \dots \dots \dots (7).$$

Estes valores reduzem a transformada a $ay'^2 + ex' = 0$,

a qual, sendo comparada com $y'^2 = 2px'$, mostra que a curva é uma parábola, referida ao seu eixo, e aberta para os x' positivos ou para os negativos, conforme é negativo ou positivo o coefficiente e (*).

Por exemplo, na equação $2y^2 + 5y - 4x = \frac{7}{4}$

acha-se $k = -\frac{5}{4}$, $h = -1$. Tomando pois (fig. 67) $AB = -1$, $BC = -\frac{5}{4}$, transporta-se a origem de A a C, e transforma-se a equação na $y' = 2x'$ da parábola, que tem o vertice em C, e cujo parametro é 2.

(*) Se (b) fosse a proposta, e os eixos não fossem rectangulares, não seria necessario reduzil-os a este estado, e as equações (7) se applicariam immediatamente para transportar a origem. A parábola seria então referida a um diametro, como no n.º 106, e construir-se-ia com a mesma facilidade que se estivesse referida ao eixo.

Do mesmo modo a equação $y^2 - 2y + x = 0$

dá $AB = BC = 1$ (fig. 68) para transportar a origem de A a C; e transforma-se na equação $y'^2 = -x'$, d'uma parábola, cujo parâmetro é 1, aberta no sentido dos x' negativos.

Em fim no exemplo do numero precedente, e para a equação já reduzida aos eixos Ax' , Ay' (fig. 66), acha-se $h = AM' = \sqrt{5}$, $k = 0$; e a transformada $y'^2 = 2x' \sqrt{\frac{1}{5}}$ é a equação d'uma parábola, que tem o vertice em M' , e cujo parâmetro é $2\sqrt{\frac{1}{5}}$.

111. Ha um caso, em que não pode executar-se o calculo precedente, que é o de ser $e = 0$. Com effeito h desaparece então das equações, e fica arbitrario, de sorte que ha duas equações para a determinação de k . Usando somente da primeira $2ak + d = 0$, a primeira transformada do n.º precedente reduz-se a

$$4a^2y'^2 = d^2 - 4aF,$$

sendo a nova origem qualquer ponto da recta paralela aos x , cuja equação é $y' = k$. Então:

1.º Se $d^2 - 4aF > 0$: os dous valores de y' são reaes, e pertencem a duas rectas paralelas ao eixo dos x' , e equidistantes d'elle. Neste caso está a equação $y'^2 + 4y' + 3 = 0$.

2.º Se $d^2 - 4aF = 0$: vem $y' = 0$, equação do eixo dos x' . Tal é a equação $y'^2 + 4y' + 4 = 0$.

3.º Se $d^2 - 4aF < 0$: os valores de y' são imaginarios; e por conseguinte a proposta, que neste caso se pode reduzir á fórma $y'^2 + n^2 = 0$, não representa linha alguma. É o que acontece com a equação $y'^2 + 4y' + 5 = 0$.

No caso de $e = 0$ a equação (b) torna-se em $ay'^2 + dy' + F = 0$, á qual se pode dar a fórma

$$(2ay' + d)^2 = d^2 - 4aF;$$

e vê-se tambem que, segundo é $d^2 - 4aF >$, $=$, ou < 0 , assim esta equação representa duas paralelas ao eixo dos x' , uma paralela ao mesmo eixo, ou nada.

Similhantermente a equação (a) tem neste caso a fórmula (*)

$$(ky + lx + c)^2 + Q = 0;$$

e representa duas rectas parallelas, uma recta, ou nada, segundo é $Q <, =,$ ou > 0 .

112. Fica por tanto demonstrado que: *no caso de $m = 0$, a equação do segundo grau pertence a uma parabola.* Exceptuando os casos particulares, em que pode representar *uma recta, duas rectas parallelas, ou nada.*

Se em logar da transformada (b), quizermos usar de

$$cx^2 + dy + ex + F = 0,$$

teremos os mesmos resultados, mudando só as letras e as denominações dos eixos; por que uma d'estas equações reduz-se á fórmula da outra mudando y em x e x em y : ou transportaremos a origem do mesmo modo fazendo calculos analogos aos precedentes. Assim, para a equação $x^2 + 3y = 2x - 1$, tomando $AC = 1 = h$ (fig. 69), e mudando a origem de A para C, resulta a transformada $x'^2 + 3y' = 0$, pertencente a uma parabola, que tem o vertice em C e o eixo dirigido por y' , cujo parametro é 3, e que é aberta no sentido dos y' negativos.

Applicando o que fica dito, acha-se que:

1.º $x^2 - 6x + 10 = 0$ não representa linha alguma.

2.º $x^2 - 6x + 9 = 0$ é a equação d'uma parallela aos y , que se reduz á fórmula $x = 3$.

3.º $x^2 - 6x + 7 = 0$ pertence a duas parallelas aos y .

$$(*) \quad B = \pm 2\sqrt{AC} \text{ dá} \quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 = (y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C})^2,$$

e (pag. 118) $e = 0$ dá $E\sqrt{A} \pm D\sqrt{C} = 0$;

o que transforma (a) em $\left(y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C} + \frac{D}{2\sqrt{A}}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} = 0$;

pertencendo o signal superior a B positivo, e o inferior a B negativo.

O mesmo se vê resolvendo (a) em ordem a y , e attendendo a que

$$B^2 - 4AC = 0, e = 0, \text{ dão } B^2 - 4AC = 0, BD - 2AE = 0.$$

2.º CASO. $B^2 - 4AC = m$ negativo.

113. A proposta não pode reduzir-se á fórma (b), e a curva tem um centro, ao qual transportaremos primeiramente a origem, fazendo o calculo do n.º 92, e reduzindo assim a proposta á forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \dots\dots\dots (f).$$

Para desembaraçar (f) do termo xy , isto é, para a reduzir á fórma

$$qy'^2 + px'^2 + Q = 0 \dots\dots\dots (g),$$

substituíamos em (g) as expressões (c) de y' e x' , e comparemos o resultado, termo a termo, com (f). Teremos:

$$(1) \dots q \cos^2 \theta + p \sin^2 \theta = A,$$

$$(2) \dots q \sin^2 \theta + p \cos^2 \theta = C,$$

$$(3) \dots 2(p - q) \sin \theta \cos \theta = B;$$

equações, que, pela eliminação, devem dar θ, p, q .

Para eliminar commodamente, tiremos d'ellas

$$A + C = p + q, \quad B^2 - 4AC = m = -4pq.$$

As incognitas p e q (*Alg. el.* n.º 147) são as raizes, ambas reaes,

da equação do 2.º grau $z^2 - (A + C)z - \frac{1}{4}m = 0 \dots\dots\dots (i).$

Para determinar a inclinação θ de x' sobre x , as equações (1) e (2) dão

$$A - C = (q - p)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (q - p) \cos 2\theta;$$

da qual e de (3) se tiram

$$\cos 2\theta = \frac{A - C}{q - p}, \quad \sin 2\theta = -\frac{B}{q - p}, \quad \text{tang } 2\theta = \frac{-B}{A - C}.$$

..

O signal de $\tan 2\theta$ mostrará se 2θ é $>$ ou $<$ 90° ; mas, em todo o caso, poderá tomar-se $\theta < 90^\circ$, e o eixo dos x' acima do eixo dos x , dando a $p - q$ o signal de B, para que $\sin 2\theta$ seja positivo. E assim; tomar-se-ha por q a maior ou a menor das raizes de (i), segundo for B negativo ou positivo (*).

Seja, por exemplo, a equação $5y^2 + 2xy + 5x^2 + 2y - 2x = \frac{3}{2}$.

As coordenadas do centro (n.º 92) são $h = \frac{1}{4}$, $k = -\frac{1}{4}$; e transportando a origem a este ponto, vem a transformada $5y'^2 + 2x'y' + 5x'^2 = 2$.

A equação (i) dará pois $z^2 - 10z + 24 = 0$, $z = 5 \pm 1$;

e como B é positivo, teremos $p = 5 + 1 = 6$, $q = 5 - 1 = 4$,

e $4y'^2 + 6x'^2 = 2$.

Para determinar a direcção dos eixos, temos $\tan 2\theta = \infty$, $2\theta = 90^\circ$; consequentemente Ax' , collocado acima de Ax , faz com elle o angulo $xAx' = 45^\circ$.

114. Por ser m negativo, e consequentemente

$$\sqrt{B^2 + (A - C)^2} = \sqrt{(A + C)^2 + m} < A + C,$$

vê-se que as duas raizes de (i) têm ambas o mesmo signal que $A + C$. Podemos pois na discussão da equação (g) fazer p e q positivos, e examinar os diversos casos que apresentam a grandeza e o signal de Q.

(*) Sendo 2θ o menor valor do angulo cuja tangente é $\frac{-B}{A-C}$, os outros valores serão $2\theta + n.180^\circ$; por consequente o angulo dos eixos dos x e x' será (fig. 66) $\theta + n.90^\circ$. Este angulo dá para o eixo dos x' a direcção Ax' , tomando n par; ou a sua perpendicular, tomando n impar: e como, em virtude da expressão de $\sin 2\theta$, estes dous valores correspondem a signaes diferentes de $p - q$, isto é, á troca das raizes de (i), ou á dos nomes dos eixos, vê-se que é indifferente usar d'um ou d'outro; com tanto que no primeiro se tomem q e p de modo que $p - q$ tenha o signal de B, e no segundo se faça o contrario.

1.º Se $Q=0$: a proposta não pode subsistir, sem que sejam $x'=0$ e $y'=0$, e por isso pertence a *um ponto*, que é a origem a que ella está referida.

Neste caso está a equação
$$y^2 - 4xy + 5x^2 + 2x + 1 = 0,$$

que, transportando a origem ao centro $(-1, -2)$, se transforma em

$$y^2 - 4xy + 5x^2 = 0;$$

depois dá $z = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $\text{tang } 2\theta = -1$, $2\theta = 135^\circ$;

e finalmente $(3 + 2\sqrt{2})y'^2 + (3 - 2\sqrt{2})x'^2 = 0$.

2.º Se $Q > 0$: a proposta é absurda, e por isso não representa coisa alguma. Como acontece no exemplo do caso precedente pondo, em lugar do ultimo termo 1, um numero > 1 .

3.º Se $Q < 0$: a transformada C tem a fórma $qy'^2 + px'^2 = Q$.

Para ter as intersecções da curva com os eixos, faremos successiva-

mente $y'=0$, $x'=0$; o que dará $a = \sqrt{\frac{Q}{p}}$, $b = \sqrt{\frac{Q}{q}}$;

por conseguinte
$$p = \frac{Q}{a^2}, q = \frac{Q}{b^2},$$

e
$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2,$$

equação da ellipse, cujos eixos são $2a$ e $2b$, referida ao centro.

Por exemplo, se na proposta do caso 1.º mudarmos o ultimo termo $+ 1$ em $- 1$, teremos ainda o mesmo centro $(-1, -2)$, e acharemos a transformada $y^2 - 4xy + 5x^2 = 2$; depois os mesmos valores de z e θ ;

e finalmente a equação $(3 + 2\sqrt{2})y'^2 + (3 - 2\sqrt{2})x'^2 = 2,$

pertencente a uma ellipse, cujos eixos são $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}} = \sqrt{8(3 \pm 2\sqrt{2})}$.

Assim: as equações

$$2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 20 = 0, \quad 4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0,$$

não representam linha alguma. A primeira dá o centro $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, e a transformada $2y'^2 + 3x'^2 + \frac{3}{4} = 0$; a segunda dá o centro $(\frac{3}{4}, 0)$ e a transformada $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{7}{8} = 0$.

A equação $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$

pertence ao ponto $(+1, -1)$.

A equação $\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$

dá o centro $(2, 0)$; e depois a transformada $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$, pertencente a uma ellipse, cujos eixos são $2a = 2\sqrt{3}$ e $2b = 2\sqrt{6}$. Tomaremos pois (fig. 73) $AC = 2$, e depois $CE = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$; e com estes semi-eixos descreveremos a ellipse DFEO.

A equação $y^2 + 2x^2 - 2y = 0$

pertence a uma ellipse, tangente ao eixo dos x , cujo centro é o ponto $(1, 0)$ do eixo dos y , e cujos eixos são $2a = 2$ e $2b = 2\sqrt{2}$.

115. Por tanto a equação do segundo grau pertence á ellipse, quando m é negativo; mas ha dous casos particulares, um dos quaes dá *um ponto*, e outro não dá cousa alguma. Os valores de z têm o mesmo signal; e devem tornar-se eguaes no caso do circulo.

3.º CASO. $B^2 - 4AC = m$ positivo.

116. Todos os calculos do n.º 113 têm aqui applicação; de sorte que se faz a mesma transformação, e se obtem as mesmas expressões de θ e z . Mas, por ser m positivo, é $\sqrt{B^2 + (A - C)^2} > A + C$, e os dous valores, p e q , de z têm signaes contrarios. Fazendo pois que tenha sem-

pre q o signal $+$ (*), a equação (g) é da fórma

$$qy'^2 - px'^2 + Q = 0 \dots\dots\dots (l);$$

e temos que examinar os casos de ser Q nullo, positivo, e negativo.

1.º Se $Q = 0$; a proposta dá $y' = \pm x' \sqrt{\frac{p}{q}}$; equação de duas rectas

CD, CE (fig. 70) que se cortam na nova origem C, e cujo angulo DCE é dividido ao meio pelo eixo Cx' .

Por exemplo, a equação $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$

dá o centro $(0, -1)$, e a transformada $y^2 - 6xy + x^2 = 0$;

depois $z^2 - 2z = 8, z = 1 \pm 3,$

e por conseguinte $q = 1 + 3 = 4, p = 1 - 3 = -2, \theta = 45^\circ;$

e finalmente a nova transformada $y' = \pm x' \sqrt{\frac{1}{2}}$ (vej. fig. 70).

2.º Se $Q > 0$: fazendo successivamente $x' = 0$ e $y' = 0,$

acha-se $y' = \sqrt{\frac{Q}{q}} \cdot \sqrt{-1} = b\sqrt{-1}, x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a,$

e $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2,$

equação d'uma hyperbole, cujos primeiro e segundo eixos são $2a$ e $2b.$

Assim, substituindo no exemplo do caso precedente $+5$ em logar do ultimo termo $+1,$ teremos ainda o mesmo centro, e os mesmos valores de z e θ ; depois acharemos a transformada $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = -1$; e finalmente os semi-eixos $a = \sqrt{2}, b = 1.$

(*) Facilmente se vê, como na nota da pag. 124, que deveremos, no caso de tomar n par em $\theta^\circ + n. 90,$ usar para q da raiz positiva ou da negativa, segundo for B negativo ou positivo: e o contrario quando se tomar n impar. Ou, o que é o mesmo, se tomarmos sempre por q a raiz positiva, usaremos de n par ou impar, segundo for B negativo ou positivo.

3.º Se Q é negativo: a equação (1) tem a fórmula $qy'^2 - px'^2 = Q$; e um calculo semelhante ao precedente, ou a simples mudança de x em y e y em x , mostra que a curva é uma hyperbole, cujos primeiro e segundo eixos são respectivamente $2b$ e $2a$.

Assim, mudando o ultimo termo $+1$ em -3 , no mesmo exemplo, teremos o mesmo centro, e os mesmos z e θ ; depois a transformada $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = +1$; e finalmente o primeiro semi-eixo $b = 1$, e o segundo $a = \sqrt{2}$.

117. *Exemplos.* A equação $y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$ dá o centro $C(\frac{1}{2}, -2)$ (fig. 70); e a transformada $y' = \pm 2x'$, pertencente ás rectas CD e CE , que passam respectivamente pelos pontos $(0, 0)$ e $(+1, 2)$, e pelos pontos $(0, 0)$ e $(-1, 2)$.

A equação $2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{2} = 0$ dá o centro $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, e a transformada $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{3}{4}$, pertencente a uma hyperbole. Tiraremos pois (fig. 74) $AB = BC = \frac{1}{2}$; e tomando sobre Cx' e Cy' os semi-eixos $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, descreveremos com elles esta hyperbole.

A equação $y^2 - 2x^2 - 2y + 9 = 0$ dá o centro $(0, 1)$; e depois $y'^2 - 2x'^2 + 8 = 0$, pertencente a uma hyperbole, cujos semi-eixos são $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$.

A equação $3y^2 - 2x^2 + 2x + 3y = \frac{1}{2}$ dá o centro (fig. 75) $C(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; e depois a transformada $3y'^2 - 2x'^2 = \frac{3}{4}$, pertencente a uma hyperbole cujos primeiro e segundo semi-eixos são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, e que só differe da hyperbole da fig. 74 no modo como está collocada.

118. Tiremos as rectas CD e CD' (fig. 71), de modo que seja

$$\text{tg DCA} = \text{tg D'CA} = \sqrt{\frac{p}{q}}, \text{ e por isso } \text{tg DCA}' = \text{tg D'CO}' = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

1.º Se Q é positivo: CD e CD' são asymptotas de todas as hyperboles taes como MAN , LOI , que se podem obter suppondo a Q diferentes valores desde zero até infinito. Mas á medida que for crescendo Q , os vertices A , O , se irão afastando, e a curva se abrirá cada vez mais; por

crescerem os semi-eixos $AC = \sqrt{\frac{Q}{p}}$, e $AD = \sqrt{\frac{Q}{q}}$.

2.º Se $Q = 0$: a equação (1) pertence ás asymptotas.

3.º Em fim, se Q é negativo: a proposta pertence a todas as hyper-

boles $MA'N'$, $L'O'I'$ que se podem descrever no outro angulo das mesmas asymptotas, suppondo a Q diferentes valores desde zero até infinito negativo. Mas, á medida que for crescendo o valor absoluto de Q , os vertices A' , O' , se irão afastando, e a curva se abrirá cada vez mais; por crescerem os semi-eixos $CA' = \sqrt{\frac{-Q}{q}}$, e $A'D' = \sqrt{\frac{-Q}{p}}$.

119. Por tanto a equação geral do segundo grau pertence á hyperbole, quando m é positivo; com excepção d'um caso, em que dá duas rectas que se cortam.

As raizes de (i) têm signaes diferentes; e quando os seus valores absolutos são eguaes, o que suppõe $A = -C$, a hyperbole é equilatera.

Quando A e C têm signaes differentes, m é sempre positivo, e a proposta pertence a uma hyperbole, quaesquer que sejam os valores de A , B , C , . . . O mesmo tem logar se na proposta falta um dos quadrados x^2 , y^2 , ou ambos.

Nestes diversos casos o processo do calculo é sempre o mesmo; mas como no ultimo se torna muito simples, expol-o-hemos aqui.

Seja a equação $Bxy + Dy + Ex + F = 0$.

Transportando a origem ao centro, e fazendo $Q = DE - BF$,

teremos $k = -\frac{E}{B}$, $h = -\frac{D}{B}$, $x'y' = \frac{Q}{B}$.

Assim a proposta é a equação d'uma hyperbole referida a eixos parallelos ás asymptotas. Esta hyperbole será MAN , LOI (fig. 71) comprehendida nos angulos DCD' , ECE' , se Q for positivo; será $MA'N'$, $L'O'I'$, comprehendida nos angulos ECD , $E'CD'$, se Q for negativo; e reduzir-se-ha ás asymptotas DCE' , $D'CE$, se Q for nullo. Quando os eixos são rectangulares, a hyperbole é equilatera (n.º 89).

Seja, por exemplo, a equação $xy - 2x + y + m = 4$ referida aos eixos Ax , Ay (fig. 72). Tirando pelo centro $C(-1, 2)$ as rectas Cx' e Cy' parallelas a Ax e Ay : serão Cx' , Cy' , as asymptotas, e $x'y' = 2 - m$ a equação da hyperbole reportada a ellas. Esta hyperbole será (MN, OP) , se $m < 2$; $(M'N', O'P')$, se $m > 2$; e reduzir-se-ha ás asymptotas (Cx', Cy') , se $m = 2$.

120. Nos casos de $m < 0$ e $m > 0$, quando a proposta não tem o termo xy , o calculo necessario para a discussão é muito simples, e reduz-se a transportar a origem ao centro. Nem é preciso transformar as coordenadas em rectangulares, quando forem obliquas; porque nesse caso virá a equação referida aos diametros conjugados, em lugar de o ser aos eixos.

Seja a proposta $Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$.

As coordenadas do centro são $h = -\frac{E}{2C}$, $k = -\frac{D}{2A}$;

e transportando a elle a origem, resulta $Ay'^2 + Cx'^2 + Q = 0$:

sendo $Q = Ak^2 + Ch^2 + Dk + Eh + F = \frac{1}{2}(Dk + Eh) + F = F - \frac{AE^2 + CD^2}{4AC}$.

EXEMPLOS:

A equação $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$ pertence ao ponto $(-1, +1)$.

As equações $2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 2 = 0$, e $4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$ não representam linha alguma. Procurando o centro na primeira, acha-se $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o que a transforma em $2y'^2 + 3x'^2 + \frac{3}{4} = 0$; e procurando-o na segunda, acha-se $(\frac{1}{4}, 0)$, e a transformada $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{7}{8} = 0$.

$\frac{1}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$ dá $h = 2$, $k = 0$; e a transformada $\frac{1}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$, a qual pertence a uma ellipse, cujos semi-eixos são $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$. Para a construir, tomaremos $AC = 2$ (fig. 73); depois $DC = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$; e sobre estas linhas descreveremos a ellipse DFEO. Se as coordenadas fossem obliquas, as linhas DC, CO, representariam semi-diametros conjugados.

$y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$, transportada a origem de A a C (fig. 70) por meio dos valores $AB = \frac{2}{2}$ e $BC = -2$, torna-se em $y' = \pm 2x'$, pertencente a duas rectas, para construir as quaes bastará tomar $y' = 2$, $x' = \pm 1$, e tirar CD e CE.

$2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{4} = 0$ tem o centro $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, e dá a transformada $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{3}{4}$. Para construir esta equação, que pertence a uma hyperbole, tomaremos $AB = -\frac{1}{2}$, $BC = \frac{1}{2}$ (fig. 74), e descreve-

remos, com os semi-eixos $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, a hyperbole pedida. No caso das coordenadas obliquangulas, a e b serão semi-diametros conjugados.

$y^2 - 2x^2 - 2y + 9 = 0$ dá $k = 1$, $h = 0$; e depois $y'^2 - 2x'^2 + 8 = 0$, a qual pertence a uma hyperbole, cujos semi-eixos, ou semi-diametros conjugados, são $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$.

$3y^2 - 2x^2 + 2x + 3y = \frac{1}{2}$ dá $AB = h = \frac{1}{2}$ (fig. 75), $BC = k = -\frac{1}{2}$; e depois a transformada $3y'^2 - 2x'^2 = \frac{1}{2}$, a qual pertence á hyperbole, cujos semi-eixos são $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$, e só differe da curva da fig. 74 no modo como está collocada.

$y^2 + 2x^2 - 2y = 0$ pertence a uma ellipse, tangente ao eixo dos x , que tem o centro no ponto $(0, 1)$ do eixo dos y , e cujas dimensões são $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $b = 1$.

121. D'esta discussão resulta o quadro seguinte:

Proposta $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$:

1.º Caso. $B^2 - 4AC = 0$:

transformada $ay'^2 + dy' + ex' + F = 0$,

{	e	= 0, e ² d ² - 4aF	> 0 Parabola
			= 0 Duas parallelas a x'
			< 0 Uma parallela a x'
			 Nada.

2.º Caso. $B^2 - 4AC < 0$;

transformada $qy'^2 + px'^2 + Q = 0$,

Q {	= 0 Ponto
	> 0 Nada
	< 0 Ellipse

3.º Caso. $B^2 - 4AC > 0$:

transformada $qy'^2 - px'^2 + Q = 0$,

Q {	= 0 Duas rectas que se cortam
	> 0 Hyperbole
	< 0 Hyperbole

Comparando este quadro como o da pag. 71, vê-se que: a equação do 2.º grau representa um secção cônica; exceptuando os casos em que pertence a duas parallelas, ou a nada.

Examinando nestes dous quadros a relação que ha entre os caracteres que determinam a ellipse, a hyperbole, e a parabola, e aquelles que determinam o ponto, duas rectas que se cortam, e uma recta: vê-se, que se pode considerar a recta como uma especie de parabola, cujo parametro é nullo; o ponto como uma especie de ellipse, cujos eixos são nullos; e duas rectas, que se cortam, como uma especie de hyperbole, cujos eixos são nullos: e que tambem o ponto, a recta, e as duas rectas que se cortam, podem considerar-se como secções feitas pelo vertice do cone parallelamente ás que, não sendo feitas pelo vertice, dão respectivamente a ellipse, a parabola, e a hyperbole.

122. Para ter grandeza e a direcção dos eixos principaes, isto é, dos diametros que dividem ao meio as cordas que lhes são perpendiculares, podemos usar do processo seguinte.

Supponhamos a equação já referida a eixos rectangulares, e ao centro,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \dots \dots \dots (1).$$

A tangente á curva, no ponto onde a corta um eixo principal, deve ser perpendicular a este eixo; e se um circulo, descripto do centro A, tocar a curva no mesmo ponto, a tangente será tambem commum a elle, e perpendicular ao seu raio. Logo a questão reduz-se a achar um circulo, que toque a curva nos pontos onde a corta o eixo principal.

Concebamos pois que do centro A, com um raio r , se descreve um circulo (fig. 77.): a sua equação será $x^2 + y^2 = r^2$. Para achar os pontos de secção d'este circulo com a curva (que em geral são quatro), imaginemos tirada pela origem A para um d'elles a recta AK, cuja equação terá a fórmula $y = Mx$: se entre esta equação, a do circulo, e a proposta (1), eliminarmos x e y ,

resultará $(Ar^2 + Q)M^2 + Br^2M + Cr^2 + Q = 0 \dots \dots \dots (2),$

cujas raizes $M = \frac{-Br^2 \pm \sqrt{B^2r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q)}}{2(Ar^2 + Q)},$

dando as tangentes da inclinação das rectas AK sobre o eixo dos x , fa-

rão conhecer as intersecções procuradas. E porque M tem dous valores, os quatro pontos de secção estão dous e dous sobre a mesma recta, isto é, são as extremidades de dous diametros da curva.

Quando as raizes são reaes e deseguaes, os pontos de intersecção são distinctos, e o circulo corta a curva.

Quando as raizes são imaginarias, o circulo não corta a curva. O que depende de ser r muito grande ou muito pequeno.

Quando as raizes são reaes e eguaes, os pontos de secção coincidem dous a dous, e o circulo é tangente á curva. Como este é o caso em que a recta é o eixo principal, devemos procurar os valores de r que lhe correspondem.

Para que as raizes sejam eguaes, devem ser

$$B^2r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = 0, \quad M = -\frac{Br^2}{2(Ar^2 + Q)} \dots (3),$$

que, fazendo $A - C = A\alpha$, dão $r^2 = -\frac{2QM}{2AM + B}$, $M^2 - 2\alpha M = 1$,

e por conseguinte $M = \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2}$.

Para construir esta expressão, tome-se sobre o eixo Ax a parte $AD=1$; depois levante-se em D a ordenada $DI=\alpha$; e finalmente do centro I , com o raio AI , descreva-se o circulo KAK' . As intersecções K, K' , d'este circulo com DI produzida darão as rectas AK, AK' , que serão as direcções dos eixos principaes, por serem os valores de M

$$\text{tang KAD} = \frac{DI + AI}{AD} = \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2},$$

$$\text{tang CAD} = -\text{tang K'AD} = \frac{DI - AI}{AD} = \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Esta construcção dá as rectas AK, AK' rectangulares; e assim deve acontecer, por ser -1 o producto dos dous valores de M .

Os valores de M substituídos na expressão de r^2 fazem conhecer os do raio r , que são os dos semi-eixos. A substituição dá (*)

$$r^2 = \frac{2Q(A + C \pm \sqrt{B^2 - 4AC + (A + C)^2})}{B^2 - 4AC} \dots \dots \dots (4).$$

Quando $B^2 - 4AC = m$ é negativo, o radical de (4) é $< A + C$: por conseguinte os dous valores de r^2 são ambos positivos; ou ambos negativos; ou ambos nulos, se $Q = 0$. No primeiro caso a proposta representa *uma ellipse*; no segundo *nada*; e no terceiro *um ponto* (n.º 121).

Quando $B^2 - 4AC = m$ é positivo, o radical é $> A + C$: por conseguinte os dous valores de r^2 são um positivo, outro negativo; ou ambos nulos, se $Q = 0$. No primeiro caso a proposta representa *uma hyperbole*,

(*) Como pode haver alguma dificuldade em fazer o calculo indicado, damos aqui o seu desinvolvimento.

Se em
$$r^2 = -\frac{2QM}{2AM + B} = -\frac{2Q}{2A + \frac{B}{MB}}$$

substituírmos
$$M = \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2} = \frac{1}{B} \left(A - C \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2} \right),$$

teremos

$$\begin{aligned} r^2 &= -\frac{2Q}{2A + \frac{B}{A - C \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}}} = -\frac{2Q}{2A + \frac{B^2[A - C \mp \sqrt{B^2 + (A - C)^2}]}{(A - C)^2 - B^2 - (A - C)^2}} \\ &= -\frac{2Q}{A + C \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}} = -\frac{2Q[A + C \mp \sqrt{B^2 + (A - C)^2}]}{(A + C)^2 - B^2 - (A - C)^2}, \end{aligned}$$

isto é,
$$r^2 = \frac{2Q(A + C \mp \sqrt{B^2 - 4AC + (A + C)^2})}{B^2 - 4AC}.$$

Achar-se-ia mais facilmente o mesmo resultado, resolvendo a equação

$$B^2 r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = (B^2 - 4AC)r^4 - 4Q(A + C)r^2 - 4Q^2 = 0.$$

cujos semi-eixos são os dous valores de r (mudando em $+$ o signal — do valor negativo de r^2); no segundo duas rectas AK, AK' (n.º 121).

Por exemplo, na equação $y^2 - 2xy + 2x^2 = 2$, é $\alpha = \frac{1}{4}$;

e acha-se $M = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$, $AI = \sqrt{\frac{5}{4}}$;

o que dá o circulo KAK' , e as direcções AK, AK' , dos dous eixos. Depois $r^2 = 3 \pm \sqrt{5}$ dá os dous valores de r , ou a grandeza d'estes eixos.

Pode tambem servir para exercicio a equação já tractada no n.º 116

$$y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0.$$

O mesmo methodo se applica no caso de fazerem coordenadas qualquer angulo. Eliminando x e y entre a equação proposta, a da recta $y = Mx$,

e a do circulo, que é então $x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma = r^2$,

resulta $(Ar^2 + Q)M^2 + (Br^2 + 2Q \cos \gamma)M + Cr^2 + Q = 0$,

$$M = \frac{-(Br^2 + 2Q \cos \gamma) \pm \sqrt{(Br^2 + 2Q \cos \gamma)^2 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q)}}{2(Ar^2 + Q)}.$$

A condição de egualdade das raizes dá o radical nullo, ou

$$(B^2 - 4AC)r^4 - 4Qr^2(A + C - B \cos \gamma) - 4Q^2 \sin^2 \gamma = 0 \dots (5);$$

e fica $M = -\frac{Br^2 + 2Q \cos \gamma}{2(Ar^2 + Q)}$,

da qual tirando a expressão de r^2 , e substituindo-a em (5), resultará uma equação em M , que dará os valores de M ; e com estes valores construir-se-ha a equação $y = Mx$.

Outro modo de discussão

123. Para melhor conhecer a natureza, a forma e os limites, das linhas compreendidas na equação (a), resolvamos esta equação em ordem a uma das variáveis, por exemplo em ordem a y .

Teremos
$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A} \sqrt{mx^2 + nx + p} \dots \dots \dots (1),$$

sendo
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{B}{2A}, \beta = -\frac{D}{2A}, m = B^2 - 4AC, \\ n = 2(BD - A2E), p = D^2 - 4AF. \end{array} \right.$$

Em quanto o radical de (1) for real, a cada valor de x corresponderão dous pontos da curva; quando o radical for imaginario, não existirão estes dous pontos; e quando o radical for nullo, os dous pontos coincidirão. Assim os limites da curva dependem da extensão, fóra da qual o radical se torna imaginario. Ora já vimos (*Alg. El.* n.º 147, 9.º) que se pode tomar x tão grande, positiva ou negativamente, $x = -v$ ou $x = +v'$, que o signal do trinomio $mx^2 + nx + p$ seja o do seu primeiro termo (*) mx^2 . Logo:

1.º Se m for negativo, o radical será imaginario para todos os valores de x desde $x = -\infty$ até $x = -v$, e desde $x = v'$ até $x = \infty$; o que

(*) Sem resolver a equação $x^2 + px + q = 0$, vê-se que:

1.º Se for p negativo, e o seu valor absoluto maior que o de q ; ou p negativo

e q positivo: fazendo $x = p + i$, teremos $x^2 - px \pm q = i^2 + ip \pm q$, que, para $i = 1$ e $i > 1$, é positivo.

2.º Se for q negativo, e o seu valor absoluto maior que o de p ; ou q negativo, e p positivo: fazendo $x = q + i$, teremos

$$x^2 \pm px - q = q(q \pm p + i - 1) + i(q \pm p) + i^2,$$

que, para $i = 1$ e $i > 1$, é positivo.

Logo: se tomarmos por x o valor absoluto do maior coefficiente negativo, mais

dá dous limites, um para o lado dos x negativos, e outro para o lado dos x positivos, fóra dos quaes não pode haver curva.

2.º Se m é positivo, o radical será real desde $x = -\infty$ até $x = -v$, e desde $x = v'$ até $x = \infty$; o que dá dous limites, fóra dos quaes a curva se estende até o infinito.

3.º Se m for nullo, o radical se reduzirá a $\sqrt{nx+p}$, que, sendo n negativo, será real para $x < -\frac{p}{n}$, e imaginario para $x > -\frac{p}{n}$; e o contrario, sendo n positivo; de sorte que a curva será illimitada somente d'um dos lados, dos x positivos ou dos x negativos.

Por tanto a natureza das curvas, de que tractámos, depende do signal de $m = B^2 - 4AC$; e na discussão, em que procurarmos conhecer a fórma d'ellas, e os mais estreitos limites que as terminam, temos de considerar os tres casos de $m <, >, \text{ ou } = 0$.

124. Para ter o logar geometrico da equação (1), construiremos a recta BN (fig. 76 e 78), cuja equação é $y = \alpha x + \beta \dots \dots \dots (2)$;

e depois, para cada abscissa $AP = x'$, ajunctaremos e tiraremos á ordenada PN da recta a grandeza $MN = M'N = \frac{1}{2A} \sqrt{mx^2 + nx + p}$: o que dará as ordenadas PM e PM', que determina a equação (1). Por onde se vê que o ponto N é o meio da corda MM': e como se pode dizer o mesmo dos outros pontos da recta BN, segue-se que esta recta é um diametro da curva (n.º 93).

Acham-se as intersecções D, D', da curva com o diametro, procurando

uma unidade, será este numero um limite, alem do qual o trinomio $m \left(x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m} \right)$ tem o signal de mx^2 .

Mudando x em $-x$, acha-se do mesmo modo o limite, áquem do qual o trinomio tem o signal de mx^2 . Este limite será o mesmo que o precedente, no caso de ser $\frac{p}{m}$ negativo e $> \frac{n}{m}$.

os pontos em que têm logar simultaneamente as equações (1) e (2);

o que dá $mx^2 + nx + p = 0 \dots\dots\dots (3).$

Ora a equação (3) reduz o primeiro membro da proposta ao quadrado de $y - \alpha x - \beta$: logo as intersecções das ordenadas, correspondentes a cada raiz de (3), com a curva reúnem-se duas a duas nos pontos D e D'; e por conseguinte as ordenadas ED, ED', são tangentes á mesma curva.

Passemos agora á analyse da equação (1), considerando os tres casos, que resultam da natureza de m .

1.º CASO: m negativo.

Curvas limitadas em todos os sentidos

125. 1.º Se forem reaes as raizes da equação (3). Designando-as por a e b , e tomando $AE = a$, $AE' = b$ (fig. 76), teremos as ordenadas tangentes ED, E'D'. E como (*Alg. El.* n.º 147, 9.º) o trinomio $mx^2 + nx + p$ só tem o signal contrario ao de mx^2 , quando x está entre a e b ; de sorte que só entre estes limites é real a expressão (1): segue-se, que a curva fica comprehendida entre os limites EF, E'F'. Do mesmo modo, resolvendo (a) em ordem a x , acharíamos os limites parallellos ás abscissas, entre os quaes a curva fica comprehendida. Esta curva é pois fechada, e por isso *uma ellipse*.

Como os pontos E, E', são dados pelas raizes da equação (3), que têm a fórmula $x = h \pm \sqrt{f}$; tomando $AK = h$, e $KE = KE' = \sqrt{f}$, serão AE, AE', estas raizes. Por tanto C é o meio do diametro DD', ou o centro da ellipse. E para achar o diametro conjugado com DD' basta

substituir $x = h$ em $\frac{1}{2\Delta} \sqrt{mx^2 + nx + p}$; o que dará

$$CO' = \frac{1}{2\Delta} \sqrt{mh^2 + nh + p}.$$

Conhecendo assim dous diametros conjugados, será facil descrever a curva.

Por exemplo a equação $3y^2 - 6xy + 9x^2 - 2y - 6x + \frac{1}{3} = 0$

dá
$$y = x + \frac{1}{3} \pm \sqrt{-2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}.$$

Tomando (fig. 76) $AB = \frac{1}{3}$, $AA' = -\frac{1}{3}$, teremos a recta $A'BD$, cuja equação é $y = x + \frac{1}{3}$. Depois a equação $-2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ dará $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$, e por conseguinte $AK = \frac{2}{3}$, $KE = KE' = \frac{1}{3}$, que farão conhecer os limites EF , $E'F'$, os pontos D , D' , e o centro C . Finalmente fazendo $x = \frac{2}{3}$ no radical, teremos o semi-diametro $CO' = \sqrt{\frac{2}{9}}$. E com os diametros DD' e OO' facilmente se descreverá a ellipse (n.º 98).

A maxima e a minima ordenada (pag. 97) são $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Similhantermente a equação $y^2 - yx + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ dá a ellipse $DOD'O'$ (fig. 80), para a qual são $AK = 2$, $EK = E'K = \sqrt{2}$, $CK = 1$, $CO = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

O valor $y = 0$ dá $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$: e por isso a curva é tangente a Ax no ponto $I (1, 0)$. A maxima e a minima ordenadas são 2 e 0.

Deve haver nas construcções todo o cuidado relativamente aos signaes. Assim para

$$4y^2 + 8xy + 8x^2 + 12x + 8y + 1 = 0$$

temos
$$y = -x - 1 \pm \sqrt{-x^2 - x + \frac{3}{4}}.$$

Construiremos pois o diametro DD' (fig. 81), cuja equação é $y = -x - 1$; e acharemos as raizes de $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$, que são $x = -\frac{1}{2} \pm 1$; depois tomaremos $AK = -\frac{1}{2}$, e $KE = KE' = 1$, para ter os limites tangentes da ellipse, ED , e $E'D'$, e o centro C ; e em fim acharemos o semi-diametro $CO = \sqrt{-(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = 1$.

2.º Se forem eguaes as raizes da equação (3). Teremos $b = a$; e a equação (1) será

$$y = ax + \beta \pm \frac{1}{2A} (x - a) \sqrt{m};$$

valor que só pode ser real, quando for $x = a$. Logo neste caso temos um ponto $(a, \alpha a + \beta)$.

E com effeito neste caso a proposta reduz-se a

$$(y - \alpha x - \beta)^2 - (x - a)^2 \frac{m}{4A^2} = 0,$$

que só poderá subsistir quando forem nullos os seus dous termos.

Por exemplo, a equação $y^2 - xy + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$ dá o ponto $(1, \frac{1}{2})$. A equação $x^2 + y^2 = 0$ dá a origem $(0, 0)$.

3.º *Se forem imaginarias as raizes da equação (3)*. O signal do trinomio $mx^2 + nx + p$ será sempre o de mx^2 (*Alg. el. n.º 147, 9.º*); por conseguinte o radical de (1) será imaginario, e a proposta não representará cousa alguma.

E com effeito podemos escrever a proposta debaixo da fórma

$$4A^2 (y - \alpha x - \beta)^2 = (mx^2 + nx + p);$$

que neste caso não pode subsistir, por ser negativo o segundo membro.

A equação $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 4 = 0$ está neste caso.

126. Para que a equação (a) seja a do circulo,

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = y^2 + x^2 - 2y_i y - 2x_i x + y_i^2 + x_i^2 = r^2,$$

é necessario que sejam $\frac{C}{A} = 1$, e $B = 0$, e que x_i e y_i satisfaçam ás condições

$$2y_i = -\frac{D}{A}, \quad 2x_i = -\frac{E}{A}, \quad y_i^2 + x_i^2 - r^2 = \frac{F}{A};$$

de sorte que determinam o circulo as coordenadas do centro, e o raio,

$$y_i = -\frac{D}{2A}, \quad x_i = -\frac{E}{2A}, \quad r = \frac{\sqrt{E^2 + D^2 - 4AF}}{2A}.$$

Por tanto, sendo rectangulares as coordenadas: *para que a equação do 2.º grau pertença ao circulo, é necessario que lhe falte o termo em xy , e que sejam eguaes os coefficients de x^2 e y^2 .*

Quando se derem estas condições, a equação pertencerá ao circulo: exceptuando os casos de ser $\sqrt{E^2 + D^2 - 4AF}$ nullo ou imaginario; no primeiro dos quaes pertence a um ponto, e no segundo não ha curva.

Por exemplo, a equação $2y^2 + 2x^2 - 4y - 4x + 1 = 0$ pertence ao circulo cujo centro é (1, 1) e cujo raio é $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Quando as coordenadas forem obliquas, discorrer-se-ha do mesmo modo, comparando a equação (a) com a (3) do n.º 37.

2.º Caso: m positivo

Curvas illimitadas em todos os sentidos

127. *Se as raizes da equação (3) são reaes e desiguaes. Os seus valores $a = AE$, $b = AE'$ (fig. 78) dão as tangentes ED, E'D'. E como o trinomio $mx^2 + px + q$ só tem o signal de mx^2 , quando x não está comprehendido entre a e b ; segue-se que entre $x = AE$, e $x = AE'$, não ha curva, e que fóra d'estes limites a curva se estende ao infinito d'uma e outra parte de EF, E'F'. Do mesmo modo, resolvendo a equação (a) em ordem a x , se verá que a curva se estende ao infinito, para um e outro lado de duas rectas parallelas ao eixo dos x . Assim a curva é uma hyperbole.*

Para ter o diametro conjugado de DD', podemos substituir, como no

n.º 125, $x = h$ em $\frac{1}{2A}\sqrt{mx^2 + nx + p}$; e tornar o resultado real.

Depois acham-se as asymptotas (n.º 104); mas daremos adiante um meio mais simples de conseguir o mesmo fim.

Por exemplo, da equação $y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 8x - 3 = 0$

tira-se $y = x + 1 \pm \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$.

Construindo pois o diametro BN (fig. 78), cuja equação é $y = x + 1$; resolvendo a equação $2x^2 - 6x + 4 = 0$, que dá as raizes $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$;

tomando depois $AK = \frac{1}{2}$, $EK = E'K = \frac{1}{2}$, que determinam os limites EF, E'F', tangentes em D, D'; e achando $\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1}$: construiremos com os diametros conjugados DD' e $2\sqrt{\frac{1}{2}}$ a hyperbole (MM', QQ'), que se estende desde $x = -\infty$ até $x = 1$, e desde $x = 2$ até $x = \infty$. Tomando D'F' = D'H = $\sqrt{\frac{1}{2}}$, DF = DG = $\sqrt{\frac{1}{2}}$, forma-se o parallelogrammo inscripto FGHF', cujas diagonaes GF', FH, são as asymptotas.

2.º Se as raizes da equação (3) são reaes e eguaes. A equação (1) é

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A} (x - a) \sqrt{m};$$

a qual pertence a duas rectas, que se cortam no ponto $(a, \alpha a + \beta)$ da recta $y = \alpha x + \beta$, e que passam respectivamente pelos pontos:

$$(a, \alpha a + \beta), (0, \beta - \frac{a}{2A} \sqrt{m}); (a, \alpha a + \beta), (0, \beta + \frac{a}{2A} \sqrt{m}).$$

Com effeito no caso, de que se tracta, a proposta tem a fórmula

$$(y - \alpha x - \beta)^2 - \frac{m}{4A^2} (x - a)^2 = 0,$$

que se decompõe em dous factores lineares a respeito de x e y ; e por isso cada um d'estes dous factores egualado a zero dá uma recta.

Por exemplo, a equação $4y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = 0$

dá $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3x^2 - 6x + 3} = x - \frac{1}{2} \pm (x - 1) \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Temos pois duas rectas EN, E'N, que passam ambas pelo ponto N $(1, \frac{1}{2})$ da recta BN (fig. 83), cuja equação é $y = x - \frac{1}{2}$; e uma das quaes é cortada pelo eixo dos y no ponto E $(0, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3})$, e a outra no ponto E' $(0, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3})$.

3.º Se as raizes da equação (1) são imaginarias. A curva não corta o diametro BN (fig. 82): mas como o signal de $mx^2 + nx + p$ é então sempre o de mx^2 , a todas as abscissas correspondem ordenadas (1) reaes. Por tanto a curva estende-se ao infinito, para uma e outra parte de BN, e é uma hyperbole disposta como se vê na figura.

Se fizéssemos desaparecer o segundo termo de $mx^2 + nx + p$, pondo $x = x' + h = x' - \frac{n}{2m}$, a equação (1) daria

$$y = ax + \beta \pm \frac{1}{2A} \sqrt{mx'^2 + p - \frac{n^2}{4m}}$$

de sorte que a $+x'$ e a $-x'$ corresponderiam valores eguaes, $y - ax - \beta$ das ordenadas da curva, contadas dos pontos E e E' de BN: por conseguinte

o ponto C ($h, ah + \beta$) é o centro; e a recta $CD = \frac{1}{2A} \sqrt{mh^2 + nh + p}$ é

um semi-diametro.

As raizes de $mx^2 + nx + p = 0$, que são da fórmula $x = h \pm \sqrt{-f}$, sendo postas debaixo de fórmula real, darão as abscissas $AO = h + \sqrt{f}$, e $AO' = h - \sqrt{f}$ das extremidades do diametro conjugado EE'.

As rectas FH, GI, tiradas por D e D' parallelamente a BN, e as rectas FG, IH, tiradas por E e E' parallelamente a DD', determinam o parallelogrammo FGIH, cujas diagonaes FI, GH, são asymptotas.

Por exemplo, da equação $y^2 + 2xy - 2y - x = 0$

tira-se $y = -x + 1 \pm \sqrt{x^2 - x + 1}$.

A equação do diametro BN é $y = -x + 1$; e como as raizes de $x^2 - x + 1 = 0$ são imaginarias, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3}$, este diametro não corta a hyperbole (fig. 82): mas, porque $x^2 - x + 1$ é sempre positivo, y é sempre real; $AK = \frac{1}{2}$, e $KO = KO' = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ dão o centro C, e o semi-diametro EE'; e $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ é o semi-diametro CD'.

A equação $y^2 - 2xy - 3x^2 \pm 4k^2 = 0$,

da qual se tira $y = x \pm 2\sqrt{x^2 \mp k^2}$,

pode servir de exemplo aos tres casos, que temos considerado, segundo se usar do signal superior de k^2 , ou do inferior, ou for $k=0$.

Construindo o diametro BN (fig. 84), cuja equação é $y=x$: se usarmos do signal inferior, as raizes de $x^2+k^2=0$, serão imaginarias; (0, 0) será o centro C; $CO=2k$ o 1.º semi-diametro, $CE=CE'=k$ o segundo; e as asymptotas serão HF, IG.

Quanto mais k diminuir, tanto mais a curva se approximarà do centro, e das asymptotas, que não mudarão. E quando for $k=0$, a equação tornar-se-ha na d'estas rectas.

Em fim, se usarmos do signal superior, a hyperbole ficará no outro angulo, GCH e FCI, das asymptotas; e afastar-se-ha d'ellas ao passo que augmentar k .

128. Quando A é nullo, pode resolver-se a equação (a) em ordem a y , para que tenham logar os calculos dos n.ºs 123 e 124; o que é o mesmo que mudar as denominações dos eixos, y em x e x em y .

Por exemplo, da equação $x^2 - 2xy + 2x - 3y + c = 0$

tira-se $x = y - 1 \pm \sqrt{y^2 + y - c + 1}$.

A recta DD' (fig. 85), que tem por equação $x = y - 1$, é um diametro, porque divide ao meio as cordas parallelas aos x .

Depois $y^2 + y - c + 1 = 0$ dá $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{c - \frac{3}{4}}$.

No caso de $c > \frac{3}{4}$, estas raizes serão reaes; $AK = \frac{1}{2}$, $KE = KE' = \sqrt{c - \frac{3}{4}}$, determinarão os pontos D, D', onde a hyperbole (MD, M'D') corta o diametro DD'; e $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - c + 1} = \sqrt{c - \frac{3}{4}}$. $\sqrt{-1}$ dará o diametro conjugado, $2\sqrt{c - \frac{3}{4}}$, de DD': e os diametros determinarão as asymptotas F'G, FH, uma das quaes é parallelas aos y . No caso de $c = \frac{3}{4}$, a equação será a das asymptotas. Finalmente, no caso de $c < \frac{3}{4}$, a equação pertencerá a uma hyperbole que tem as mesmas asymptotas, mas comprehendida nos outros dous angulos FCF', GCH.

129. Dando ao radical da expressão (1) a fórma

$$\sqrt{m \left(x^2 + \frac{nx}{m} + \frac{p}{m} \right)} = \sqrt{m \left[\left(x + \frac{n}{2m} \right)^2 - \left(\frac{n^2}{4m^2} - \frac{p}{m} \right) \right]} = \sqrt{m} \sqrt{z^2 - l};$$

transforma-se (1) em $y = ax + \beta \pm \sqrt{\frac{m}{4A^2} \cdot z \left(1 - \frac{l}{2z^2} + \frac{l^2}{8z^4} \dots\right)}$;

e porque os termos que estão dentro do parenthesis, excepto o primeiro, decrescem indefinidamente á medida que z cresce, a equação das asymptotas (n.º 81) é (*) $y = ax + \beta \pm \frac{z\sqrt{m}}{2A} = ax + \beta \pm \frac{2mx + n}{4A\sqrt{m}} \dots (3)$.

Logo: para ter as equações das asymptotas, basta completar o quadrado debaixo do radical da equação (1), depois de ter desprezado nelle os termos constantes (**).

(*) Se usarmos do processo exposto na nota do n.º 87, teremos

$$\frac{y}{x} = a + \frac{\beta}{x} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{m + \frac{n}{x} + \frac{p}{x^2}}, \text{ o que, fazendo } x = \infty, \text{ dá } c = a \pm \frac{\sqrt{m}}{2A},$$

e depois

$$y - cx = \beta \pm \frac{1}{2A} \left(\sqrt{mx^2 + nx + p} - \sqrt{mx^2} \right) = \beta \pm \frac{1}{2A} \cdot \frac{nx + p}{\sqrt{mx^2 + nx + p} + \sqrt{mx^2}},$$

ou
$$y - cx = \beta \pm \frac{1}{2A} \cdot \frac{n + \frac{p}{x}}{\sqrt{m + \frac{n}{x} + \frac{p}{x^2}} + \sqrt{m}},$$

que, fazendo $x = \infty$, dá $d = \beta \pm \frac{n}{2A \cdot 2\sqrt{m}}$: logo as equações das asymptotas, não paralelas aos y , são

$$y = cx + d = ax + \beta \pm \frac{x\sqrt{m} + \frac{n}{2\sqrt{m}}}{2A} = ax + \beta \pm \frac{2mx + n}{4A\sqrt{m}}.$$

(**) Como é na parábola $m = 0$, e na ellipse m negativo, vê se que, por ser infinita a expressão (3) na primeira, e imaginaria na segunda, estas curvas não têm asymptotas.

Para construir as asymptotas, dadas pela equação (3), basta determinar a sua intersecção $\left(-\frac{n}{2m}, \beta - \frac{\alpha n}{2m}\right)$; e os pontos onde ellas cortam o eixo dos y , $\left(0, \beta + \frac{n}{4A\sqrt{m}}\right)$, $\left(0, \beta - \frac{n}{4A\sqrt{m}}\right)$, os quaes distam da intersecção d'aquelle eixo com o diametro, um para baixo e outro para cima, a quantidade $\frac{n}{4A\sqrt{m}}$.

Por exemplo, na equação (pag. 142) $y = x + 1 \pm \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$, desprezando o termo constante 4 debaixo do radical, e completando o quadrado com a addição de $\frac{9}{2}$, fica debaixo d'elle $2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$; e a equação

das asymptotas (fig. 78) é $Y = x + 1 \pm \left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2}$.

Assim $AK = \frac{3}{2}$, $KC = \frac{3}{2}$, $Bi = Bi' = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$, darão as asymptotas Ci, Ci' .

Desprezando k^2 na equação (pag. 144) $y = x \pm 2\sqrt{x^2 + k^2}$,

vem logo as equações das asymptotas $y = x \pm 2x$.

130. A discussão da equação geral torna-se muito facil, quando lhe falta um dos quadrados. Com effeito, resolvendo em ordem a y a equação

$$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

vem $y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D} = hx + k + \frac{l}{Bx + D}$,

chamando h, k, l , os coefficients constantes, que a divisão dá.

Quanto maior for x , tanto mais pequena será a fracção $\frac{l}{Bx + D}$, e caminhará para o limite 0; conseguintemente a recta $F'G$ (fig. 85), cuja equação é $y = hx + k$, é uma asymptota da curva.

Quanto mais x se approximar do limite $x = -\frac{D}{B}$, tanto mais y se approximar do limite ∞ ; por conseguinte a recta FC, parallela aos y , cuja equação é $x = -\frac{D}{B}$, é outra asymptota (*).

Quando faltar o quadrado de x , acharemos os mesmos resultados, mudando x em y e y em x .

Por tanto: *se na equação falta o quadrado d'alguma das coordenadas, uma das asymptotas é parallela a essa coordenada.* Este theorema tem logar, qualquer que seja o angulo das coordenadas.

Por exemplo, a equação $x^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = 0$,

resolvida em ordem a y , dá $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 3} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x + 3}$.

Construindo pois as rectas, cujas equações são $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, teremos as asymptotas IH, F'G (fig. 85), a primeira das quaes é parallela aos y . O resto da construcção é facil (n.º 91).

Do mesmo modo a equação $2y^2 + 3xy - 8y - 3x + 1 = 0$

dá $x = -\frac{2y^2 - 8y + 1}{3y - 3} = -\frac{2}{3}y + 2 + \frac{5}{3y - 3}$;

(*) Se resolvessemos a proposta em ordem a x , achariamos

$$x = -\frac{By + E}{2C} \pm \sqrt{\frac{(By + E)^2}{4C^2} - \frac{Dy + F}{C}}$$

o que daria, pelo processo antecedente, as equações das asymptotas

$$x = -\frac{By + E}{2C} \pm \frac{B}{2C} \left(y + \frac{BE - 2CD}{B^2} \right);$$

isto é, $x = -\frac{D}{B}$, $y = -\frac{C}{B}x + \frac{DC - EB}{B^2} = hx + k$.

e as rectas GH, FI (fig. 82), cujas equações são $y = 1$, $x = -\frac{1}{2}y + 2$, são as asymptotas, a primeira das quaes é paralela aos x .

131. No caso de faltarem ambos os quadrados, a equação

$$xy + Dy + Ex + F = 0$$

dá
$$y = -\frac{Ex + F}{x + D} = -E + \frac{DE - F}{x + D};$$

por conseguinte as duas asymptotas são as rectas paralelas aos eixos, que têm por equações $y = -E$, $x = -D$.

Se se transportasse a origem ao centro, a hyperbole ficaria logo reportada ás asymptotas; porque a equação tomaria a fórma $xy = m^2$.

3.º Caso: $m = 0$

Curvas illimitadas num sentido sómente

132. $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ é um quadrado. Quando é nullo A ou C, e não B, sempre tem lugar este character.

1.º Se n não é nullo. Para construir a equação (1), cujo radical se reduz então a $\sqrt{nx + p}$, descrevamos o diametro BN (fig. 66), a que pertence a equação $y = \alpha x + \beta$. A ordenada tangente EF, e a intersecção D do diametro com a curva, correspondem á abscissa dada pela equação

$$nx + p = 0, \quad x = -\frac{p}{n} = a; \quad \text{e a parte } \frac{1}{2A}\sqrt{nx + p} = \frac{1}{2A}\sqrt{n(x - a)},$$

que se deve accrescentar ou tirar ás ordenadas de BN para dar as ordenadas (1) da curva, será real sómente para $x > a$, quando for n positivo; ou para $x < a$, quando for n negativo. Por tanto a concavidade da curva ficará voltada para os x positivos, como M'DM, quando for n positivo; e para os x negativos, como ODM', quando for n negativo. A curva, extendendo-se ao infinito d'um lado sómente, é uma *parabola*.

Com as coordenadas DN, MN, d'um ponto M da curva determinar-

se-ha o parametro $2p' = \frac{MN^2}{DN}$, e descrever-se-ha depois facilmente a mesma curva (n.º 107).

Por exemplo, a equação $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y - x + 5 = 0$

dá $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{2x - 4}$.

Tomando pois (fig. 66) $AE = \frac{4}{2} = 2$, determina-se a ordenada limite $ED = 2$; depois tomando $AB = 1$, determina-se o diametro BN ; e fi-

nalmente com o parametro $2p' = \frac{MN^2}{DN}$ descreve-se a parabola MDM' , com a concavidade voltada para os x positivos.

A equação $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y + 3x - 3 = 0$

dá $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{-2x + 4}$;

por conseguinte o mesmo diametro, mas a concavidade da parabola $M'DO$ voltada para os x negativos.

2.º *Se n é nullo.* A equação (1) torna-se em

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A} \sqrt{p},$$

e então:

Se p é positivo: temos duas rectas parallelas $DE, D'E'$ (fig. 86), e equidistantes de BN , cuja equação é $y = \alpha x + \beta$. Por exemplo, a equação $(y + x)^2 - 2y - 2x - 1 = 0$ dá $y = -x + 1 \pm \sqrt{2}$: por conseguinte $AB = AN = 1$ determinam o diametro BN ; e depois as partes $BD = BD' = \sqrt{2} = BN$, determinam os pontos D, D' , pelos quaes passam as rectas pedidas parallellas a BN .

Como qualquer ponto G da recta BN divide em duas partes eguaes todas as rectas, interceptas entre as duas parallellas, que por elle passam; pode considerar-se BN como o logar de uma infinidade de centros (n.º 99).

Se p é nullo: temos uma recta BN . O que tem logar, por exemplo,

na equação $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = 0$.

Se p é negativo: y é imaginario; e não ha linha alguma. Como acontece na equação

$$(y+x)^2 - 2y - 2x + 2 = 0.$$

Com effeito, no caso de serem nullos m e n , pode dar-se á proposta a fórma $(y - \alpha x - \beta)^2 - \frac{p}{4A^2} = 0$; e esta: decompõe-se em dous factores lineares, e por consequente dá duas rectas, $y - \alpha x - \beta + \frac{1}{2A}\sqrt{p} = 0$, $y - \alpha x - \beta - \frac{1}{2A}\sqrt{p} = 0$, no caso de ser p positivo; dá duas rectas parallelas, que coincidem, $y - \alpha x - \beta = 0$, no caso de ser p nullo; e exprime uma condição, a que não pode satisfazer-se, no caso de ser p negativo.

A equação $(y+x)^2 - 2y - 2x + 1 = k$

pode ser exemplo para os tres casos, segundo o valor e o signal de k .

Com effeito esta equação dá $y = -x + 1 \pm \sqrt{k}$, que se construirá, tomando $AB = AN = 1$, depois $BD = BD' = \sqrt{k}$; e tirando por D, D' , parallelas a BN . Estas parallelas são distinctas, em quanto k é positivo, e tanto mais proximas quanto menor é k , coincidem, quando k é nullo; e não existem, nem a equação representa linha alguma, quando k é negativo.

133. Da analyse precedente dos casos de m negativo, positivo, ou nullo resulta que: no primeiro a equação pertence a uma curva fechada, e representa uma *ellipse*, um *circulo*, um *ponto*, ou *nada*; no segundo pertence a uma curva aberta em dous sentidos, e representa uma *hyperbole*, ou *duas rectas que se cortam*; no terceiro pertence a uma curva aberta num sentido, e representa uma *parabola*, *duas rectas parallelas*, *uma recta*, ou *nada*. O que é conforme com o quadro da pagina 131.

134. Reciprocamente: se quizermos formar uma equação que exprima alguma das circumstancias relativas á natureza e configuração da curva; determinaremos as constantes α, β, m, \dots e a natureza do radical, de modo que sejam satisfeitas as respectivos condições. Assim, para que a curva seja uma *ellipse*, faremos m negativo, e n e p taes que as raizes de $mx^2 + nx + p = 0$ sejam reaes; para que seja uma *hyperbole*, tomaremos m positivo, e n e p taes que as raizes da mesma equação sejam imaginarias, ou reaes, segundo quizermos que a curva não corte, ou corte o diametro; etc.

Supponhamos, por exemplo, que na hyperbole pontuada da fig. 84: C é o centro; o diametro BN faz com os x um angulo de 45° ; a abscissa da ordenada tangente e limite da curva é $CE = 1$; e o diametro conjugado CO é $\sqrt{2}$. Teremos, para satisfazer ás primeiras condições, $y = x \pm \sqrt{m(x^2 - 1)}$, contando as abscissas de C; e como devemos fazer $x = 0$ para achar o diametro, o que dá $x = \pm \sqrt{m} \cdot \sqrt{-1}$, será pela ultima condição $CO = \sqrt{m} = \sqrt{2}$.

Por tanto a equação é $y^2 - 2xy - x^2 = -2$.

Para formar uma equação que represente um ponto, uma ou duas rectas, ou nada, podemos proceder do mesmo modo; mas é mais simples o seguinte:

Sendo L e M expressões da fórmula $L = ky + lx + g$, $M = k'y + l'x + g'$, temos:

1.º Para um ponto, $L^2 + M^2 = 0$ (pag. 140).

2.º Para uma recta, $L^2 = 0$ (pag. 150).

3.º Para duas rectas, $LM = 0$ (pag. 142); e demais $\frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}$, se estas duas rectas são parallelas (pag. 149).

4.º Para que a equação não represente logar geometrico possivel, $L^2 + M^2 < 0$ (pag. 140).

135. Discutida a equação (1) na hypothese de serem as coordenadas rectangulares, proponhamo-nos construil-a reportando a curva a um sistema de diametros, sem recorrer á theoria exposta no n.º 108.

Sem mudar a origem das coordenadas, nem o eixo dos y , tomemos o dos x' parallello ao diametro cuja equação é $y = ax + \beta$. Temos então:

$$\text{tang}(xx') = \alpha, \cos(xx') = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = k, \text{sen}(xx') = k\alpha, (xy') = 90^\circ;$$

o que substituido nas formulas (2) do n.º 44 dá $x = kx'$, $y = \alpha kx' + y'$,

e transforma (1) em
$$y' = \beta \pm \frac{1}{2A} \sqrt{mk^2 x'^2 + nkx' + p}.$$

1.º Se a curva tem centro: transportando a elle a origem das coordenadas, deve a equação tomar uma fórmula tal que a dous quaesquer valores eguaes, e de signaes contrarios, da abscissa correspondam dous valores eguaes, e de signaes contrarios, da ordenada. Deve pois elimi-

nar-se a parte β , e o termo em x' , da expressão de y' , fazendo $y' = y'' + \beta$,
 $x' = x'' - \frac{n}{2mk}$, que transformam a equação precedente em

$$y'' = \pm \frac{1}{2A} \sqrt{mk^2 x''^2 - \frac{n^2}{4m} + p}.$$

As coordenadas x'' , y'' , são referidas ao centro que, relativamente aos eixos dos x' e y' é $(-\frac{n}{2km}, \beta)$, e relativamente aos eixos primitivos dos x e y é $(-\frac{n}{2m}, -\frac{\alpha n}{2m} + \beta)$.

Reduzida assim a equação aos diâmetros conjugados, é facil a sua construcção (n.º 98, 2.º).

Por exemplo a equação

$$y = x + 1 \pm \sqrt{-2x^2 + 6x - 4}$$

dá $m = -2$, $\alpha = 1$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\beta = 1$, e a transformada $y''^2 + x''^2 = \frac{1}{2}$.
 E assim, traçado o diâmetro BN (fig. 76), cuja equação é $y = x + 1$, e transportada a origem ao centro C, restará descrever a ellipse, cujos semi-diâmetros são $CO = CD = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

2.º Se a curva não tem centro: é $m = 0$, e o radical reduz-se a $\sqrt{nkx' + p}$. Transportaremos pois a origem ao ponto onde o diâmetro corta a curva, fazendo desaparecer os termos constantes β e p , isto é,

fazendo $y' = y'' + \beta$, $x' = x'' - \frac{p}{nk}$; e teremos a equação da parábola

$y''^2 = nkx''$; sendo: eixo dos x'' o diâmetro que tinha por equação $y = \alpha x + \beta$; o eixo dos y'' paralelo ao dos y ; e origem o ponto, onde a curva corta o diâmetro. Com o que facilmente se descreverá a curva (n.º 107, 1.º).

Por exemplo, a equação

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{2x - 4}$$

dá $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $y''^2 = 4x''\sqrt{\frac{1}{2}}$; e dá a parábola MDM' (fig. 66), sendo BN o diâmetro que tem por equação $y = \frac{1}{2}x + 1$.

V. PROBLEMAS DE ANALYSE GEOMETRICA

Da geração das curvas

336. I. Se duas rectas AM e BM (fig. 87) gyraem á roda dos pontos A e B, de modo que se cortem sempre perpendicularmente; achar a curva que neste movimento descreve a sua intersecção M.

Tomemos o meio C de AB para origem das coordenadas, e seja $AC = CB = r$. Como as rectas generatrizes AM e BM devem passar por A $(-r, 0)$ e B $(+r, 0)$, e ser perpendiculares uma á outra, teremos as equações

$$y = a(x + r), \quad y = a'(x - r) \dots (1), \quad aa' + 1 = 0 \dots (2).$$

Quando dermos a a qualquer valor, e a a' o correspondente $a' = -\frac{1}{a}$,

tirado de (2), as equações (1) serão as das generatrizes na posição relativa a esse valor; e os valores de x e y , dados pela eliminação entre as equações (1), determinarão o ponto em que as generatrizes se cortam nessa posição. Logo, se entre (1) e (2) eliminarmos a e a' , a equação resultante em x e y , sendo independente da posição particular das generatrizes, pertencerá a todas as intersecções M, isto é, será a equação da curva.

Eliminando, pela substituição em (2) das expressões de a e a' tiradas de (1), vem

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Por tanto a curva, de que se tracta, é um circulo descripto sobre o diametro AB.

II. Se, generalizando o problema antecedente, quizermos que as duas generatrizes AM e BM (fig. 88) façam um angulo, cuja tangente é t : as

equações respectivas serão

$$y = a(x + r), y = a'(x - r), \text{ e } t = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

A eliminação de a a a' entre ellas dá a equação da curva pedida

$$(x^2 + y^2 - r^2) t = 2ry;$$

cuja discussão mostrará que a curva é um circulo, com o centro em O

$$\left(0, \frac{r}{t}\right), \text{ e de raio } OB = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{t^2}}.$$

Em geral sempre se pode considerar uma curva como gerada pela intersecção contínua de duas linhas dadas, rectas ou curvas, cuja posição e fórma dependem de constantes, ou *parametros*, que variam com ellas, segundo leis conhecidas, isto é, de modo que satisfaçam sempre a relações dadas entre as mesmas constantes.

Com effeito, se $M = 0$ e $N = 0$ forem as equações d'estas geratrizes; e se as variações da sua fórma, devidas á variação dos parametros, que supomos serem dous, forem sujeitas á condição $P = 0$: é claro que a eliminação dos dous parametros entre as equações $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, dará uma resultante em x , y , a qual, sendo independente d'elles, será a equação da curva procurada.

Se os parametros forem tres, e duas as equações de condição $P = 0$, $Q = 0$; a eliminação d'elles entre $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, dará ainda a equação em x , y , da curva.

Em geral: se o numero total das equações das geratrizes e das de condição for igual ao dos parametros mais um, a eliminação d'estes dará a equação d'uma curva. Se o numero total das equações for igual ao dos parametros, ou menor: eliminando tantos d'estes quantas são as equações menos uma, ficará uma equação em x , y , que ainda conterá alguns parametros arbitrarios, e que por isso representará um numero indeterminado de linhas. Se o numero total das equações for igual ao dos parametros mais dous: eliminando estes, ficarão duas equações em x e y , que darão um numero determinado de pontos. Em fim, se o numero total das equações for maior que o dos parametros mais dous: eliminados estes, e x e y , ficarão equações de condição; e o problema será absurdo, se

estas equações não se verificarem; ou, verificando-se ellas, não serão distinctas as propostas.

III. *Dadas duas rectas DN e Dx (fig. 89), e em uma d'ellas o ponto fixo A: achar a curva, que tem a propriedade de ser a distancia MA, de cada um dos seus pontos a A, equal á parte PN que as rectas dadas interceptam na perpendicular indefinida abaixada de M sobre Dx.*

É claro que os pontos M são as intersecções dos circulos, descriptos com os raios AM, com as perpendiculares PN; e que pelas condições do problema deve ser $AM = PN = DP \text{ tang NDA}$. Chamando pois $AM = \alpha$, $AP = \beta$, os parametros variaveis; $AD = p$, $\text{tang NDA} = t$, as constantes fixas; e tomando A para origem das coordenadas rectangulares, e APx , Aey , para eixos; teremos as equações das geratrizes, e a equação de condição,

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \quad x = \beta \dots \dots (1), \quad \alpha = (p + \beta)t \dots \dots (2).$$

E substituindo em (2) as expressões de α e β tiradas de (1), acharemos a equação da curva

$$y^2 + x^2(1 - t^2) - 2t^2px - t^2p^2 = 0.$$

1.º Se $t = 1$, ou $E'DA = 45^\circ$: a equação reduz-se a $y^2 = 2px + p^2$, pertencente á parabola E'S, cujo foco é a origem A, e cujo vertice é S $(-\frac{1}{2}p, 0)$.

2.º Se $t < 1$, ou $NDA < 45^\circ$; a equação pertence a uma ellipse, cujos semi-eixos são $a = \frac{pt}{1 - t^2}$, $b = \frac{pt}{\sqrt{1 - t^2}}$, e cujo centro é C $(\frac{pt^2}{1 - t^2}, 0)$.

Esta ellipse torna-se em um circulo no caso de ser $t = 0$, isto é, de ser DN paralela a AD: e com effeito $PN = AM = AF$ é então constante (*).

3.º Em fim se $t > 1$, ou $IDA > 45^\circ$; a curva é uma hyperbole, cujos primeiro e segundo semi-eixos são $\frac{pt}{t^2 - 1}$ e $\frac{pt}{\sqrt{t^2 - 1}}$.

Esta propriedade poderia fornecer um meio de descrever as tres cur-

(*) Neste caso t é nullo e p infinito; mas como $AE = pt$ é agora AF, temos $t = 0$ e $a = b = AF$, e C $(0, 0)$ coincide com A.

vas. Ellas tocam a recta dada, que não contem o ponto fixo A, na sua intersecção com Ay.

IV. Se uma recta AB (fig. 90) de comprimento dado se mover no angulo dado ACB, de modo que as extremidades A e B se conservem constantemente sobre as rectas AC e CB: achar a curva, que, neste movimento, descreverá um dos pontos M de AB.

Tomando AC e BC para eixos coordenados, os dados do problema são $\cos ACB = c$, $MB = a$, $MA = b$. A curva pode considerar-se como gerada pelo movimento das rectas AB, PM, cujas equações são

$$y = ax + \beta, \quad x = \gamma,$$

isto é, como o logar geometrico das intersecções M (γ , $a\gamma + \beta$) d'estas rectas.

Fazendo $PB = z$, o triangulo PMB e o parallelismo das rectas AC e PM dão

$$a^2 = z^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2cz(\alpha\gamma + \beta), \quad bz = a\gamma (*).$$

Substituindo pois nas duas ultimas equações as expressões $a\gamma + \beta = y$,

$\gamma = x$, resultantes das primeiras, vem $bz = ax$, $a^2 = z^2 + y^2 - 2cyz$;

(*) Ainda que pareça que temos quatro equações e quatro incognitas z , α , β , γ ; com tudo z , que só foi introduzida por commodidade do calculo, fica determinada pelas outras α , β , γ . Com effeito, pondo $y = 0$ na equação de AB,

resulta $CB = -\frac{\beta}{\alpha}$; e consequentemente $z = CB - CP = -\frac{\beta}{\alpha} - \gamma$.

As equações que exprimiriam directamente as condições de serem MA e MB constantes, isto é, de serem constantes as distancias entre os pontos A (0, β), e

B $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$, e o ponto M (γ , $a\gamma + \beta$), seriam (n.º 33):

$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2 \gamma^2 - 2\alpha\gamma^2 c, \quad a^2 = \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2\left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)(\alpha\gamma + \beta)c,$$

entre as quaes e as das generatrizes se deveriam eliminar α , β , γ .

e a eliminação de z entre estas dá a equação pedida

$$a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2 - 2abcxy,$$

a qual pertence a uma ellipse, cujo centro é C (n.º 92).

Quando o angulo ACB é recto, simplifica-se muito o calculo. A equação reduz-se a $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$, que pertence a uma ellipse referida ao centro e aos eixos $2a$, $2b$. O que indica um meio muito facil de descrever a ellipse,

Tiram-se duas rectas perpendiculares indefinidas Cx , Cy ; marcam-se sobre uma regua duas partes $AM = b$, $BM = a$, eguaes aos semi-eixos; e move-se esta regua sobre o angulo yCx , de modo que os pontos A e B se conservem constantemente sobre Cx e Cy . Neste movimento a ponta d'um lapis, que se tiver fixado em M, descreverá a ellipse.

Se o ponto M estiver no prolongamento de AB, em M', a mesma analyse dará um resultado, que só diffirirá do precedente no signal do ultimo termo — $2abcxy$. Por isso, se forem então Cx e Cy rectangulares, AB será a differença, e não a somma, dos semi-eixos $BM' = a$, $AM' = b$; e a construcção precedente será a mesma.

V. *Abaixada do fóco F' d'uma ellipse (fig. 56) a perpendicular sobre cada tangente; achar a curva formada pelas intersecções I das tangentes e das suas perpendiculares.*

As equações da tangente em um ponto M (x' , y'), e de qualquer recta que passa pelo fóco F' ($-\alpha$, 0), são respectivamente

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2, \quad y = \beta(x + \alpha);$$

e como a condição de perpendicularidade dá $1 - \frac{b^2x'\beta}{a^2y'} = 0$, as equações

das generatrizes são $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, $b^2x'y = a^2y'(x + \alpha)$.

O ponto (x' , y') deve sempre pertencer á ellipse; o que dá a equação de condição $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$.

Substituindo na terceira d'estas equações as expressões de x' e y' ti-

radas das duas primeiras, a pedida será

$$b^2 y^2 + a^2 (x + \alpha)^2 = [y^2 + x(x + \alpha)]^2;$$

ou pondo (n.º 51) $a^2 - \alpha^2$ em logar de b^2 , desinvolvendo, e decompondo em factores,

$$(y^2 + x^2 - a^2) [y^2 + (x + \alpha)^2] = 0.$$

O segundo factor é evidentemente extranho ao problema; porque dá $y = 0$, $x = -\alpha$, que são as coordenadas do fóco. O primeiro dá

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

que é a equação d'um circulo circumscripto á ellipse dada: este é pois a curva procurada.

1.º Por não entrar b na equação, o circulo inscripto na hyperbole resolve o mesmo problema a respeito d'esta curva (n.º 65).

2.º Este circulo é o mesmo para todas as ellipses descriptas sobre o eixo maior; e quando $b = a$, confunde-se com o circulo então proposto.

3.º Por ser a equação independente de α , o circulo é o mesmo, quer se abaixem as perpendiculares do fóco F' , quer do fóco F .

Para a parabola teremos de eliminar entre

$$yy' = p(x + x'), \quad py = -y'(x - \frac{1}{2}p), \quad y'^2 = 2px';$$

o que dá

$$x[4y^2 + (2x - p)^2] = 0.$$

O segundo factor não serve, porque dá as coordenadas $y = 0$, $x = \frac{1}{2}p$, do fóco. O primeiro dá $x = 0$; por conseguinte o eixo dos y é o logar dos pés i das perpendiculares abaixadas do fóco sobre as tangentes (fig. 52, e pag. 76).

VI. Dada a parabola NAK (fig. 91): achar a curva formada pelos pontos M, onde se cortam as tangentes MN, MK, que fazem entre si um angulo dado.

Seja $2p$ o parametro da parabola dada, e t a tangente do angulo dado. As equações das duas generatrizes tangentes nos pontos (x', y') e (x'', y'') são

$$yy' = p(x + x'), \quad yy'' = p(x + x'');$$

e as condições de ser t a tangente do angulo constante KMN das geratrizes, e de pertencerem os pontos (x', y') e (x'', y'') á parabola, dão

$$t = \frac{p(y'' - y')}{y'y'' + p^2}, \quad y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px''.$$

Para eliminar commodamente entre estas cinco equações os quatro parametros variaveis x', y', x'', y'' , substituamos nas tres primeiras as expressões de x' e x'' tiradas das duas ultimas: ficam

$$y'^2 - 2yy' + 2px = 0, \quad y''^2 - 2yy'' + 2px = 0, \quad t = \frac{p(y'' - y')}{y'y'' + p^2};$$

e porque as duas primeiras d'estas são identicas, haverá nellas só duas raizes y', y'' , e teremos

$$y'y'' = 2px, \quad y' = y \pm \sqrt{y^2 - 2px}, \quad y'' = y \mp \sqrt{y^2 - 2px},$$

que substituidos na ultima darão em fim a equação pedida

$$y^2 - t^2x^2 - px(2 + t^2) - \frac{1}{4}t^2p^2 = 0.$$

Esta equação pertence a uma hyperbole: e como não entra nella t senão elevado ao quadrado, vê-se que um dos ramos é descripto pelo vertice M' do angulo obtuso $K'M'N$, e o outro pelo vertice M do supplemento KMN . A determinação do centro C , e dos eixos, não tem difficuldade.

Se o angulo dado M fosse recto, isto é, se fosse $t = \infty$: teriamos $2x + p = 0$; por onde se vê que, se de cada ponto da directriz tirarmos duas tangentes á parabola, ellas farão sempre entre si um angulo recto.

VII. Algumas vezes o enunciado do problema não exprime o modo de geração da curva; mas dá immediatamente a equação que o resolve, ou a definição de que ella é consequencia. Para ver um exemplo d'esta circumstancia, que não merece que d'ella nos occupemos se não de passagem, resolvamos a questão seguinte:

Achar a curva da qual cada uma das ordenadas é meia proporcional entre as de duas rectas dadas, correspondentes á mesma abscissa.

Sejam $y = ax + b$, $y = a'x + b'$,

as equações das rectas dadas. A da curva pedida será

$$y^2 = (ax + b)(a'x + b'), \text{ ou } y^2 - aa'x^2 - (a'b + ab')x = bb'.$$

1.º Se uma das rectas, por exemplo a segunda, for parallela ao eixo dos x , será $a' = 0$, e a equação se reduzirá a $y^2 = ab'x + bb'$,

pertencente a uma parabola, que facilmente se descreve. E se ambas as rectas forem parallelas ao mesmo eixo, serão $a = 0$, $a' = 0$; e por conseguinte $y^2 = bb'$, que dará duas rectas parallelas, ou uma recta, ou nada, segundo forem os dous factores b e b' do mesmo signal, ou um d'elles igual a zero, ou um positivo e outro negativo.

Se em logar das rectas dadas tomarmos parallelas a ellas, cujas ordenadas correspondentes sejam eguaes e oppostas ás das mesmas rectas, isto é, se tomarmos a , a' , b , b' , com signaes contrarios, a equação ficará a mesma mudando x em $-x$, de sorte que teremos uma curva igual, e em sentido opposto, á primeira.

2.º Se a e a' tiverem signaes contrarios, a equação pertencerá a uma ellipse; e particularmente a um circulo, quando for $aa' = -1$, isto é, quando as rectas dadas se cortarem perpendicularmente. A equação poderá tambem dar um ponto, ou nada.

3.º Em fim, se a e a' tiverem o mesmo signal, a equação dará uma hyperbole; e quando for $a = a'$, uma das asymptotas (n.º 87)

$$y = \pm \left(ax + \frac{b + b'}{2} \right)$$

será parallela ás rectas dadas. A equação tambem pode dar duas rectas que se cortam.

Nos dous ultimos casos, abstrahindo dos signaes das coordenadas, acha-se uma ellipse e uma hyperbole, descriptas sobre os mesmos eixos, como se vê na fig. 65.

Estes problemas podem variar-se muito. Acha-se grande numero d'elles no *Recueil de diverses propositions de Géométrie* de M. PUISSANT. Ajunctaremos ainda alguns.

VIII. Se fizermos gyrar dous angulos de 45° , BAC, BDC (fig. 92), em torno dos vertices fixos A e D, da maneira que a intersecção dos lados AB, DB, esteja constantemente sobre a recta BE paralela a AD; qual será a curva descripta pela intersecção C dos outros dous lados AC, DC?

Ainda se pode generalizar este problema, dando qualquer outra grandeza aos angulos moveis, e qualquer outra direcção á recta BE.

IX. Seja M um ponto (fig. 93) tal que as distancias AM e BM a dous pontos fixos A e B estejam entre si numa razão dada: qual será a curva, em cujos pontos se verifica sempre esta propriedade?

Qual será o ponto d'esta curva, no qual AM lhe é tangente?

Em fim, quaes serão os pontos M, cujas distancias a tres fixos A, B, D, têm entre si razões conhecidas?

X. Dado um circulo e uma recta, qual é o logar geometrico de todos os centros dos circulos tangentes a estas duas linhas? O mesmo problema tambem se pode propor a respeito de dous circulos dados.

XI. Se fizermos mover um angulo recto, de modo que os seus lados sejam sempre tangentes a uma ellipse ou a uma hyperbole dada, qual será a curva descripta pelo vertice? (fig. 91).

Em logar do angulo recto pode tomar-se qualquer outro, do mesmo modo que no problema VI.

XII. Se duas rectas AF, CD (fig. 37) gyrarem em torno dos vertices A e C do triangulo ABC, de modo que os pontos D e F, onde ellas cortam os lados AB e BC, sejam sempre equidistantes da base AC: qual será a curva descripta pela sua intersecção G? (vej. n.º 36, VIII).

Problemas que passam do segundo grau

133. Já vimos (n.º 15) o modo de construir as raizes das equações do segundo grau. O exemplo seguinte mostrará o que se deve fazer, quando a questão, que se pretende resolver, conduz a equações de graus superiores ao segundo.

Seja a equação $x^4 - 2pqx + p^2rx + p^2m^2 = 0$.

Se fizermos $x^2 = py$, teremos, em logar da proposta, as duas

$$x^2 = py, \quad y^2 - qy + rx + m^2 = 0,$$

de cuja combinação ella resulta. Por tanto, se construirmos as duas parabolae, a que pertencem estas equações, os pontos, onde ellas se cortarem, terão por abscissas as raizes da proposta.

As raizes serão todas quatro reaes, quando as curvas se cortarem em quatro pontos; duas reaes e duas imaginarias, quando as curvas se cortarem em dous pontos; e todas imaginarias, quando as curvas não se cortarem. Se houvesse raizes eguaes, as curvas tocar-se-iam, etc.

Como a decomposição da proposta se pode fazer de muitos modos, convirá quasi sempre escolhel-a tal que uma das curvas seja o circulo; por ser esta a linha que mais facilmente se descreve.

Assim, fazendo $xy = mp$, a proposta será a resultante das duas

$$xy = pm, \quad x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq.$$

Para a construir por meio d'ellas: tirados os eixos rectangulares Ax e Ay (fig. 94), descrever-se-ha a hyperbole entre as asymptotas, cuja

equação é $xy = pm$; tomando $AC = \frac{pr}{2m}$, descrever-se-ha um circulo

com o centro C , e com o raio $\sqrt{pq + \frac{p^2 r^2}{4m^2}}$; e dos pontos M, M', N, N' , onde este circulo cortar a hyperbole, abaixar-se-hão as ordenadas $MP, M'P', NQ, N'Q'$. As raizes procuradas serão as abscissas correspondentes AP, AP', AQ, AQ' , as quaes, na figura, são duas positivas e duas negativas. Poderia acontecer que só existissem duas intersecções, ou nenhuma.

Do mesmo modo, para $x^4 - p^2 x^2 + p^2 qx + p^3 r = 0$,

faremos a decomposição nas duas $x^2 = py, \quad y^2 - py + qx + pr = 0$,

ou $x^2 = py, \quad y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0$,

pertencentes a uma parabola, e a um circulo, que facilmente se descrevem.

Para $x^3 \pm a^2 x - a^2 q = 0$

convem multiplicar por x , e fazer $x^2 = ay$, o que dá

$$x^2 = ay, y^2 \pm ay - qx = 0:$$

isto é, $x^2 = ay$; e $y^2 + x^2 = qx$, ou $y^2 + x^2 = 2ay + qx$,

conforme se usa do signal inferior, ou do superior, do segundo termo da proposta. A primeira d'estas tres equações pertence a uma parábola, e qualquer das outras a um circulo. As abscissas das intersecções das duas curvas serão as raizes; mas d'estas deverá excluir-se uma $x = 0$, que se introduziu, quando se multiplicou a proposta por x .

Um calculo semelhante feito em $x^3 - 3a^2x = 2a^3$ dá

$$x^2 = ay, y^2 + x^2 = 4ay + 2ax,$$

pertencentes a uma parábola MA (fig. 95), cujo parametro é a ; e a um circulo CAM, cujos centro e raio são C ($a, 2a$) e $AC = a\sqrt{5}$: a abscissa da intersecção M d'estas curvas é $x = AP$, unica raiz real da proposta.

Pela mesma construcção se pode achar $\sqrt[3]{a}$.

134. Achar duas meias proporçoes x e y entre duas rectas dadas a e b .

Temos $\div a:x:y:b$; isto é, $x^2 = ay, y^2 = bx$.

Por conseguinte resolvem o problema as duas parabolas, que têm o mesmo vertice (0, 0), os parametros a e b , e cujos eixos são o dos y e dos x .

Mas sommando as duas equações, torna-se a construcção mais simples, por se empregar, em logar das duas parabolas, uma só com o circulo

$$y^2 + x^2 - ay - bx = 0.$$

Teremos assim as mesmas linhas da figura 95, sendo $BC = \frac{1}{2}a$, e $AB = \frac{1}{2}b$.

A eliminação de y dá $x^3 = a^2b$; que para $b = 2a$ se torna na $x^3 = 2a^3$, pela qual se resolve o famoso problema da *duplicação do cubo*.

E mais geralmente, para $b = \frac{m}{n}a$, fica $x^3 = \frac{m}{n}a^3$ a qual ensina a for-

mar um cubo x^3 que tenha para outro dado a^3 a razão $m:n$.

Em geral as construcções podem variar-se de muitos modos; por que multiplicando por quantidades indeterminadas, e sommando, as equações

de duas curvas de cuja combinação resulta a equação proposta, podem obter-se muitas outras curvas proprias para a resolução do mesmo problema.

135. Mas pode acontecer que uma questão, que se propõe como determinada, o não seja na realidade (vej. n.º 36, II); ou tambem que se facilite a sua resolução, quando ella é determinada, fazendo-a depender d'outra questão que o não seja. A propria analyse indica estas modificações: como se vê nos exemplos seguintes.

I. *Dados dous pontos A e B (fig. 96), achar um terceiro ponto M tal que, tirando AM e MB, o angulo MAB seja metade de MBA.*

Chamando a , a' as tangentes dos angulos MAB, MBA, dos quaes o segundo deve ser o dobro do primeiro; fazendo $AB = m$; e tomando AB e a sua perpendicular em A para eixos dos x e dos y : as equações das rectas AM e MB, e a da condição do problema, são

$$y = ax, \quad y = -a'(x - m), \quad a' = \frac{2a}{1 - a^2},$$

Eliminando a e a' entre estas equações, resolve o problema a equação

$$y^2 - 3x^2 + 2mx = 0.$$

Vê-se pois que a questão é indeterminada, e que lhe satisfazem todos os pontos da hyperbole, a que pertence esta equação. Dividindo AB em tres partes eguaes nos pontos C e D, isto é, tomando $AC = CD = DB = \frac{1}{3}m$: C será o centro da curva; A e D serão os vertices; e as asymptotas CG e BH farão com AB angulos de 60° , isto é, angulos cuja tangente é $\sqrt{3}$: e com estes dados facilmente se descreverá a hyperbole MD.

O problema da *triseccão do angulo* consiste em dividir em tres partes eguaes um angulo AKB, ou o arco AEB que lhe serve de medida; isto é, em achar neste arco um ponto E tal que seja $EKA = 2EKB$. Por consequente é claro que, fazendo sobre a corda AB a construcção precedente, e descrevendo a hyperbole MD, a intersecção E d'esta curva com o arco AEB resolve o problema, isto é, dá o arco $EB = \frac{1}{3}AEB$, ou o angulo $EKB = \frac{1}{3}AKB$.

Se não for o arco AB circular, mas elliptico, ou outro qualquer, este processo servirá igualmente para determinar um ponto E do arco dado de modo que os arcos AE e EB sejam vistos das extremidades B e A

por angulos, um duplo do outro. E assim o problema da trisecção do angulo é um caso de precedente.

II. *Tirar uma recta DD' (fig. 97) tal que a somma das perpendiculares MD, M'D', abaixadas sobre ella de dous pontos dados M, M', seja igual a uma grandeza dada m.*

Seja $y = ax + b$

a equação da recta procurada. As distancias dos pontos $M(x', y')$ e $M'(x'', y'')$ a esta recta serão (n.º 34)

$$MD = \frac{ax' - y' + b}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad M'D' = \frac{ax'' - y'' + b}{\sqrt{1 + a^2}};$$

e consequentemente a condição do problema, $MD + M'D' = m$, dá

$$ax' - y' + b + ax'' - y'' + b = m\sqrt{1 + a^2} \dots \dots \dots (1),$$

que pela eliminação de b , reduz a equação da recta a

$$y - \frac{1}{2}(y' + y'') = a[x - \frac{1}{2}(x' + x'')] + \frac{1}{2}m\sqrt{1 + a^2},$$

ou, transportando a origem ao meio C de MM' [$\frac{1}{2}(x' + x'')$, $\frac{1}{2}(y' + y'')$],

$$y = ax + \frac{1}{2}m\sqrt{1 + a^2} \dots \dots \dots (2).$$

O valor de a fica arbitrario, e o problema é indeterminado. Para qualquer valor de a , a ordenada inicial CB é $\frac{1}{2}m\sqrt{1 + a^2}$; e consequentemente a distancia $FC = \frac{1}{2}m$: o que indica a construcção geometrica seguinte. Do meio C de MM' como centro, e com o raio $\frac{1}{2}m$, descreva-se um circulo: as suas tangentes satisfarão todas ao problema; o que por outra parte é evidente, attendendo á propriedade conhecida do trapezio $MDD'M'$.

Se a mesma questão se propuzesse a respeito de tres pontos, M, M', M'' , bastaria ajunctar $ax''' - y''' + b$ ao primeiro membro da equação

(1). E geralmente para n pontos seria necessario ajunctar $n - 2$ expressões semelhantes ao primeiro membro da equação (1), e substituir $\frac{m}{n}$ em logar de $\frac{1}{2}m$ no segundo membro da equação (2). Por onde se vê que a somma das n perpendiculares é m , quando DD' é tangente ao circulo descripto do centro $C \left(\frac{1}{n}(x' + x'' \dots + x^{(n)}), \frac{1}{n}(y' + y'' \dots + y^{(n)}) \right)$ com o raio $\frac{m}{n}$.

III. *Dadas duas rectas AP, AD (fig. 98), achar num ponto M tal que as perpendiculares MP, MD, tenham entre si uma razão dada $n : m$.*

Tomando AP para eixo dos x . A para origem, e sendo $y = ax$ a equação de AD, será pela condição dada,

$$\frac{MD}{MP} = \frac{y' - ax'}{y' \sqrt{1 + a^2}} = \frac{m}{n}$$

Satisfazem pois ao problema os pontos da recta AM, cuja equação é

$$y' = \frac{an}{n - m \sqrt{1 + a^2}} x'$$

Fazendo $MP = n$, será $MD = m$. Por tanto se tirarmos $AB = n$, $AC = m$, perpendiculares na origem ás rectas dadas AP, AD, e depois BM, CM, parallelas ás mesmas rectas, será M um dos pontos procurados, e AM a recta que os contém todos.

Se quizessemos que os pontos, de que se tracta, pertencessem a uma curva MN, é claro que elles seriam as intersecções M, N, da curva com a recta AM.

Para os pontos M' situados abaixo de AP tomaremos $\sqrt{1 + a^2}$ negativo (n.º 34), e $AC' = m$ em sentido opposto a AC: então AM' será a recta tirada de A para a intersecção de BM com C'I.

IV. *Tirando por cada ponto K d'uma recta dada BB' (fig. 99) duas*

tangentes KM, KN, á ellipse dada CMN, e a corda MN, que passa pelos pontos de contacto: achar a curva, que é o logar das intersecções consecutivas d'estas cordas MN.

Reportando a curva ao diametro Cy parallelo a BB', e ao seu conjugado Cx: a equação da corda MN, que juncta os pontos de contacto das tangentes tiradas por K (α, β), é (n.º 84) $\alpha^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$; similhantemente a corda mn, que juncta os pontos de contacto das tangentes tiradas por outro ponto (α, β') de BB', é $a^2\beta'y + b^2\alpha x = a^2b^2$; e eliminando x e y entre estas duas equações, teremos a intersecção das cordas MN e mn.

Eliminando pois x , resultará $a^2y(\beta' - \beta) = 0$; isto é, $y = 0$, $x = \frac{a^2}{\alpha}$.

Por onde se vê que todas as cordas se cortam sobre o diametro Cx em um só ponto $(\frac{a^2}{\alpha}, 0)$.

A mesma propriedade tem logar na hyperbole e na parabola.

136. Os principios expostos bastam algumas vezes para discutir as equações de graus superiores ao segundo. Seja por exemplo

$$y^2 - x^3 + (a - b)x^2 + abx = 0,$$

que dá

$$y = \pm \sqrt{x(x - a)(x + b)}.$$

A curva (fig. 107) é symmetrica relativamente ao eixo dos x , que ella corta nos pontos A (0, 0), C ($a, 0$), B ($-b, 0$). Desde $x = 0$ até $x = a$, y é imaginario; desde $x = a$ até $x = \infty$, cresce indefinidamente; desde $x = 0$ até $x = -b$, é real; e desde $x = -b$ até $x = -\infty$, é imaginario. Por tanto a curva tem um ramo infinito desde $x = a$ até $x = \infty$; não tem ramo algum desde $x = 0$ até $x = a$; tem uma parte fechada desde $x = 0$ até $x = -b$; e não tem parte alguma desde $x = -b$ até $x = -\infty$.

Se $a = 0$, vem $y = \pm x\sqrt{x + b}$; e a folha AB toca em C o ramo infinito.

Se $b = 0$, vem $y = \pm x\sqrt{x - a}$; e a folha AB reduz-se a um ponto A isolado do ramo infinito CM.

Seja a equação $y^2 - x^2 y^2 = 1$,

que dá $y = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ou $x = \pm \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$.

A curva é symmetrica relativamente aos dous eixos. A $\pm x > 1$ e $x = \pm 1$ correspondem respectivamente y imaginario e y infinito; por conseguinte a curva fica entre duas asymptotas parallelas aos y , collocadas ás distancias $+1$ e -1 da origem. Emfim $\pm x < 1$ dá y real. Por tanto a curva compõe-se de dous ramos infinitos, separados por um intervallo como na fig. 82, mas comprehendidos entre as parallelas, $x = \pm 1$, aos y .

Finalmente a equação $x^2 y^2 + y^4 - y^2 - x^3 - x y^2 + x = 0$

decompõe-se nas duas $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y^2 - x = 0$;

a primeira das quaes pertence a um circulo descripto da origem C com o raio 1; e a outra pertence a uma parabola MAM' (fig. 51), cujo parametro é 1.

De algumas outras curvas

Conchoide de Nicomedes. Dado o ponto B (fig. 101), a posição da recta ACx, e o raio do circulo QM: se uma recta BM e o circulo QM se moverem de modo, que o centro do circulo percorra a recta ACx, e a recta BM passe constantemente por este centro e pelo ponto fixo B; a curva resultante das intersecções successivas da recta com a circumferencia do circulo será a *Conchoide*.

Abaixando de B sobre Ax a perpendicular BAy, e tomando Ax e Ay para eixos: sejam as quantidades fixas AB = b, CM = AD = a; e a quantidade variavel AC = α . As equações da recta BM, que passa por B (0, -b) e C (α , 0), e do circulo MQ, que tem o centro C e o raio a, são:

$$xy = b(x - \alpha), \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = a^2.$$

Eliminando pois entre ellas a arbitraria α , resultará a equação da curva

$$x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(y + b)^2.$$

Esta curva compõe-se de dous ramos infinitos, um superior, e outro inferior a Ax , que é a sua asymptota; e a maior distancia entre estes dous ramos é DD' , correspondente aos pontos onde BM é perpendicular a Ax . Quando é $AB < a$, ha um nó, ou *ponto multiplo*, em D' (fig. 101); e quando é $AB = a$, o nó desvanece-se, e reduz-se a um *ponto de reversão*.

Cissoide de Diocles. Dado o circulo AFB (fig. 102), e a tangente BD ; façamos girar uma recta AD em torno de A ; e, em cada uma das suas posições, tomemos a parte AM igual á parte FD intercepta entre o circulo e a tangente BD . O logar geometrico dos pontos M será a *Cissoide*.

Considerando os pontos M como intersecções das rectas AD com os circulos descriptos do ponto A com os raios AM ; suppondo a origem em A ; e fazendo o raio do circulo dado $CB = a$, e o do circulo variavel $AM = R$: as equações d'estes circulos e da recta AD , e a equação de condição $AM = FD$, ou $AP = EB$, serão

$$y^2 = 2ax - x^2, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad y = Ax, \quad \frac{R}{\sqrt{1 + A^2}} = \frac{2aA^2}{1 + A^2},$$

por serem AP e AE as abscissas das intersecções dos dous circulos com a recta AD , e ser $BE = AB - AE = 2a - AE$.

Eliminando pois os parametros A e R entre as tres equações, do circulo de raio AM , da recta AD , e de condição, teremos a equação da curva

$$y^2(2a - x) = x^3.$$

1.º a curva está comprehendida entre Ay e BD ; porque a abscisa x não pôde ser negativa, nem $> 2a$: 2.º é symmetrica relativamente a AB : 3.º passa pela origem A , que é um *ponto de reversão*; 4.º os pontos H, H' , onde a curva corta o circulo dado, estão a 90° de A e B ; porque a eliminação entre as equações d'estas linhas dá $y = \pm x$, e por conseguinte $x = a, y = \pm a$: 5.º a recta BD é asymptota; porque $x = 2a$ dá $y = \infty$.

Logarithmica. Nesta curva OBM (fig. 103) as abscissas AP são loga-

rithmos das ordenadas correspondentes MP. A sua equação é pois

$$x = \log. y, \text{ ou } y = ax,$$

sendo a a base dos logarithmos (*Alg. El.* n.º 153).

É facil mostrar que: 1.º a curva tem um só ramo, o qual se estende indefinidamente d'uma e d'outra parte da origem A; 2.º a ordenada inicial é $AB = 1$; 3.º fazendo $AE = AB = 1$, vem $EF = a = \text{base}$; 4.º se é $a > 1$, a parte BM da curva, correspondente aos x positivos, afasta-se continuamente de Ax , e a outra parte FO aproxima-se indefinidamente de AQ, sendo QAx a asymptota; mas se é $a < 1$, acontece o contrario: 5.º tomando abscissas successivas que estejam em progressão arithmetica, as ordenadas correspondentes estarão em progressão geometrica. As differentes especies de *logarithmicas* distinguem-se pelo valor da base a .

Curva dos senos. As ordenadas d'esta curva são senos das abscissas (fig. 108). A sua equação é $y = \text{sen } x$. Cada abscissa x é uma recta igual ao arco de circulo, cujo seno é a ordenada y , e cujo raio é r . Como o seno é nullo, quando o arco é $0, \pm \pi r, \pm 2\pi r, \dots \pm n\pi r$; vê-se que, tomando desde a origem A as partes $AB = BC \dots = AB' = B'C' \dots = \pi r$, a curva cortará o eixo dos x nos pontos A, B, C, ... B', C', ... Desde $x = 0$ até $x = \frac{1}{2}\pi r$ os senos crescem até o maximo $EF = r$; e d'ahi até $x = \pi r$ diminuem, reproduzindo-se por ordem inversa: por onde se vê que a porção AFB da curva é symmetrica em relação a FE. Desde $x = \pi r$ até $x = 2\pi r$, repetem-se os mesmos valores dos senos, mas negativos; e por isso a parte BDC da curva é igual á primeira AFB, mas disposta para o outro lado do eixo. A curva compor-se-ha pois de partes eguaes consecutivas, dispostas alternadamente uma para cima do eixo, outra para baixo; sendo as primeiras comprehendidas entre abscissas $x = +2nr\pi$ e $x = +(2n+1)r\pi$, ou entre $x = -(2n+1)r\pi$ e $x = -(2n+2)r\pi$; e as segundas entre $x = (2n+1)r\pi$ e $x = (2n+2)r\pi$, ou entre $x = -2nr\pi$ e $x = -(2n+1)r\pi$: de sorte que, dando a n differentes valores, o curso da curva continúa assim indefinidamente.

As curvas dos senos só differem entre si por causa do raio r .

Quadratrix de Dinostrato. Supponhamos que, em quanto o raio CA, partindo da posição CA (fig. 104), gira em torno do ponto C, o ponto A se move sobre este raio de modo que, em qualquer das suas posições M, seja

sempre $\frac{AP}{AC} = \frac{\text{arc. } ab}{\text{arc. } ac}$. O logar geometrico dos pontos M será a *Quadratrix*.

Considerando o ponto M como intersecção das rectas CM, MP; e fazendo $ab = \theta$, $CP = \alpha$, $CA = a$: as equações de CM e PM, e a equação

de condição $\frac{AP}{AC} = \frac{\text{arc. } ab}{\text{arc. } ac}$, são

$$y = x \text{ tang } \theta, \quad x = \alpha, \quad \frac{a - \alpha}{a} = \frac{\theta}{\frac{1}{2}\pi}$$

Eliminando pois x e θ entre estas equações, resultará a procurada

$$y = x \text{ tang } \left(\frac{\frac{\pi}{2}(a - x)}{a} \right), \text{ ou } y = x \cot \frac{\pi x}{2a}$$

Logo: 1.º a curva é symmetrica relativamente ao eixo Cy ; 2.º para $\pm x > a$ e $< 2a$, e em geral para $\pm x > (2n + 1)a$ e $< (2n + 2)a$, é y negativo; e em $x = (2n + 1)a$ a curva corta o eixo dos x : 3.º a $\pm x = 2a$, e em geral a $\pm x = 2na$, correspondem as asymptotas $QN, Q'N', \dots$; e $x = 0$ dá $y = 0 \times \infty$, expressão singular da ordenada CD cujo valor adiante procuraremos (*).

(*) Viu-se na Trigonometria que a razão do arco para a tangente tem a uni-

dade por limite; por tanto o limite de $y = x \cot \frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi x}{2a}}{\text{tang } \frac{\pi x}{2a}}$, isto é, o seu

valor correspondente a $\frac{\pi x}{2a} = 0$, ou a $x = 0$, é $CD = \frac{2a}{\pi}$ (*Alg. Elem.* n.º 120).

O mesmo se concluirá da expressão

$$\cot z = \frac{1}{\text{tang } z} = \frac{1}{z + \frac{1}{3}z^3 + \dots} = \frac{1}{z} (1 - \frac{1}{3}z^2 + \dots) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z + \dots;$$

que, pondo $z = \frac{\pi x}{2a}$, dá a y a fórmula $y = \frac{2a}{\pi} - \frac{1}{3} \frac{\pi x^2}{2a} + \dots$

..

Dinostrato, inventor d'esta curva, chamou-lhe *quadratriz*, pela utilidade, que lhe suppunha, para resolver o problema da quadratura do circulo.

Cycloide. Se um circulo DM (fig. 109) rolar sobre a recta AB, o ponto d'elle, que em A toca AB, elevar-se-ha acima d'esta recta, tomando differentes posições M; chegará a F; e depois descerá até B, onde tocará de novo AB, tendo descripto a *Cycloide* AMFB. Os pontos do circulo, que successivamente tocarem AB, darão arcos $MD = AD$; e a recta AB será igual á circumferencia inteira.

Passada uma revolução completa, o ponto B descreverá outra curva igual á primeira; e assim por diante. Em F será $EF = 2r$, correspondente a $AD =$ semicircumferencia, a maxima ordenada; e a curva será symmetrica relativamente a EF. A descripção successiva dará em A e B pontos de reversão.

Tomemos A para origem, AB para eixo; e façamos $AP = x$, $PM = QD = y$, $PD = MQ = z$. Como MQ é seno de MD no circulo MC, e ordenada do mesmo circulo correspondente á abscissa y; e pela propriedade fundamental da curva é $MD = AD = AP + PD = AP + MQ$: te-

remos as equações $z = \text{sen}(x + z)$, $z^2 = 2ry - y^2$.

Transportando a origem a F, e fazendo $FS = x$, $SM = y$, $FK = u$,

teremos $FS = PE = MN = AE - AD + MQ = FK + KN$;

isto é $x = u + \text{sen } u = \text{arc}(\text{sen } z) + z$,

ou $z = \text{sen}(x - z)$.

Os trabalhos de *Fermat*, *Descartes*, *Roberval*, *Pascal*, *Huyghens*. . . fizeram celebre esta curva, que tem propriedade geometricas e mecanicas singulares, das quaes em outro logar nos occuparemos.

Tambem se podia procurar a curva descripta por um ponto de circulo, que não estivesse na circumferencia; o que daria outra especie de cycloide. Poder-se-hia tambem dar ao circulo, além do movimento de rotação, um de translação, no mesmo sentido, ou no opposto; e dahi resultaria a cycloide *alongada*, ou *a incurtada*. Emfim, poder-se-hia fazer mover a circumferencia sobre outra curva; e teriamos uma curva do genero d'aquellas que se chamam *Epicycloides*. Mas contentar-nos-hemos com indicar estes objectos.

137. *Spiral de Conon ou de Archimedes.* Chamam-se *Spiraes* as curvas, que são cortadas numa infinidade de pontos por qualquer das linhas que passam por um ponto fixo ou pólo. As espiraes formam um genero de curvas, em cuja definição entra, por assim dizer, necessariamente a idéa de coordenadas polares. Tal é a de *Conon*, chamada *Spiral de Archimedes*, por ser este celebre geometra o primeiro que descobriu as suas propriedades.

Para a definir, imaginemos que a recta AI (fig. 105), partindo da posição AC, gira em torno do ponto A, em quanto o ponto movel M, partindo de A, percorre a recta AI. Procuremos a equação da curva descripta por M, suppondo: que M está em A, quando AI coincide com AC; que, concluida uma revolução de AC, fica em C; e finalmente que os espaços $AM = r$, corridos por M, são proporcionaes aos angulos $IAC = \theta$ descriptos por AI.

Como o angulo 2π deve corresponder a $AC = a$, a equação será

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\theta}{r}, \text{ ou } 2\pi r = \theta a.$$

A curva passa pelos pontos A, C, ;

e os angulos $\theta = 0, \theta = 2\pi, \theta = 4\pi, \dots, \theta = 2k\pi$

dão $r = 0, r = a, r = 2a, \dots, r = ka;$

de maneira que para o angulo $2k\pi + \theta$, teremos $r = ka + \frac{a\theta}{2\pi}$. Assim,

a cada revolução, o raio vector recebe o augmento a .

Spiral hyperbolica. Tiradas duas rectas perpendiculares AC, CD (fig. 106), e separada em uma d'ellas a grandeza dada $CD = a$, faça-se mover o ponto P sobre a outra AC, e tome-se sempre a parte $PM = a$ nos arcos descriptos com os raios CP: a curva será o logar geometrico dos pontos M.

Chamando r o raio vector CM; e θ o angulo PCM, ou o arco gh , descripto á distancia 1, que lhe serve de medida; a equação polar de curva

é

$$a = r^\theta.$$

A analogia d'esta equação com a da hyperbole entre as asymptotas fez que se dêsse á curva o nome de *spiral hyperbolica*.

Fazendo $\theta = 0, \theta = \pi, \theta = 2\pi, \dots \theta = \infty,$

vem $r = \infty, r = \frac{a}{\pi}, r = \frac{a}{2\pi}, \dots r = 0.$

Tirando MN parallela a CD, é

$$CD - MN = a - r \operatorname{sen} \theta = a \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \right),$$

cujo limite é 0, por ser 1 o de $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}.$

Logo a curva faz circumvoluções continuas em volta do pólo C, approximando-se indefinidamente d'elle sem o tocar; e ED é asymptota.

Spiral logarithmica. A sua equação polar é $\theta = \log r$, ou $r = a^\theta.$

Fazendo $\theta = -\infty \dots -2\alpha, -\alpha, 0, +\alpha, +2\alpha, \dots +\infty,$

vem $r = 0, \dots a, a, a, a, \dots \infty.$

Logo a curva faz circumvoluções continuas em volta do pólo, e aproxima-se d'elle indefinidamente, sem o tocar.

Spiral parabolica. A sua equação é $r = a \pm \sqrt{p\theta},$

isto é, $r - a$ meia proporcional entre p e $\theta.$ A discussão d'esta equação facilmente mostrará a fórma da curva.

DA INTERPOLAÇÃO

138. Ainda que ha uma infinidade de curvas, que passam por um dado numero de pontos F, G, M, Z, . . . (fig. 28); com tudo, entre aquellas, que se podem escolher para os ligar, costuma preferir-se, como mais simples, a que pertence á equação da fórma

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots,$$

e que se chama *parabolica* pela sua semelhança com a *parabola*.

Formula de Lagrange. Tomados dous eixos dos x e y , tracta-se de determinar os coefficients A, B, C, . . . de modo que as coordenadas de cada um dos pontos dados (α_0, a_0) , (α_1, a_1) , (α_2, a_2) , . . ., pelos quaes deve passar a curva, satisfaçam á equação precedente, isto é, de modo que ás raizes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, . . . correspondam respectivamente as funcções a_0, a_1, a_2 , . . .

Para conseguir isto, basta fazer $y = A_0a_0 + A_1a_1 + A_2a_2 + A_na_n + \dots$, escolhendo expressões taes de A_0, A_1, A_2 , . . . que $x = \alpha_n$ aniquile todos os coefficients excepto A_n , e reduza este á unidade.

Ora é claro que á primeira d'estas condições satisfaz o producto

$$(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n+1}) \dots,$$

em que não entra $x - \alpha_n$; e que depois satisfaz á segunda este producto dividido pelo valor que toma quando se faz $x = \alpha_n$, isto é, pelo producto

$$(\alpha_n - \alpha_0)(\alpha_n - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dots$$

Satisfará pois ao problema a expressão

$$y = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n + \dots;$$

sendo

$$A_0 = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2) \dots}, \dots, A_n = \frac{(x - \alpha_0) \dots (x - \alpha_{n-1}) \dots}{(\alpha_n - \alpha_0) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \dots}, \dots$$

Formula de Laplace. Nas formulas de interpolação mais usadas substituem-se em lugar de a_1, a_2, \dots as suas expressões nas diferenças 1.^{as}, 2.^{as}, ...

Seja, por exemplo, $y = A + Bx + Cx^2.$

As equações de condição são

$$a_0 = A + B\alpha_0 + C\alpha_0^2, \quad a_1 = A + B\alpha_1 + C\alpha_1^2, \quad a_2 = A + B\alpha_2 + C\alpha_2^2,$$

das quaes se tiram

$$y - a_0 = B(x - \alpha_0) + C(x - \alpha_0)(x + \alpha_0),$$

$$\frac{a_1 - a_0}{\alpha_1 - \alpha_0} = \delta_0 = B + C(\alpha_1 + \alpha_0), \quad \frac{a_2 - a_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \delta_1 = B + C(\alpha_2 + \alpha_1),$$

$$\frac{\delta_1 - \delta_0}{\alpha_2 - \alpha_0} = \delta_0^2 = C;$$

e substituindo na primeira d'estas as expressões de B e C dadas pela segunda e pela quarta, resulta

$$y = a_0 + (x - \alpha_0) \delta_0 + (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \delta_0^2.$$

Tomando maior numero de termos, virá, em geral, o systema seguinte

$$\frac{a_1 - a_0}{\alpha_1 - \alpha_0} = \delta_0, \quad \frac{a_2 - a_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \delta_1, \quad \frac{a_3 - a_2}{\alpha_3 - \alpha_2} = \delta_2 \dots$$

$$\frac{\delta_1 - \delta_0}{\alpha_2 - \alpha_0} = \delta_0^2, \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{\alpha_3 - \alpha_1} = \delta_1^2 \dots$$

$$\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2}{\alpha_3 - \alpha_0} = \delta_0^3, \dots$$

e

$$y = a_0 + (x - \alpha_0)\delta_0 + (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)\delta_0^2 + (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\delta_0^3 + \dots$$

São estas as fórmulas que as mais das vezes se empregam.

139. Quando quizermos desenhar a configuração d'um terreno, marcarmos um numero sufficiente de pontos nos logares onde a curva offerer sinuosidades mais notaveis; mediremos as suas coordenadas (α_0, a_0) , (α_1, a_1) ,; e faremos passar por cada serie d'estes pontos curvas parabolicas determinadas pelo methodo exposto.

Poderemos assim achar, entre pontos isolados F, G, M, Z, outros que estejam sujeitos á mesma lei: e em geral, quando muitas quantidades tiverem entre si certas relações, poderemos determinar uma lei da qual derivem essas relações, e que sirva para conhecer approximadamente as circumstancias intermedias. Nisto consiste o *methodo de interpolação*, que frequentemente se applica aos phenomenos naturaes.

Os mesmos raciocinios servem para fazer passar uma curva de natureza dada por uma serie de pontos. Para isso deve em geral a equação da curva ter tantas constantes arbitrarías, quanto são os pontos dados.

Por exemplo, tendo a equação mais geral do circulo,

$$(x - h^2) + (y - k^2) = r^2,$$

tão somente tres constantes arbitrarías, não podemos sujeital-o a passar por mais de tres pontos quaesquer (α, a) , (β, b) , (γ, c) ; e as constantes

k, h, r , serão determinadas pelas equações

$$(a-k)^2 + (\alpha-h)^2 = r^2, (b-k)^2 + (\beta-h)^2 = r^2, (c-k)^2 + (\gamma-h)^2 = r^2.$$

Se o circulo devesse ter um raio dado, só poderia sujeitar-se a passar por dous pontos quaesquer; e se devesse satisfazer a mais outra condição, só poderia sujeitar-se a passar por um ponto. Em geral podemos fazer passar uma secção conica por cinco pontos; porque a equação geral das curvas do 2.º grau, desembaraçada do coeſiciente do primeiro termo, tem cinco arbitrarías (*).

(*) A equação mais geral d'uma curva da ordem m é

$$y^m + (ax + b)y^{m-1} + (a^2x^2 + b^2x + c)y^{m-2} \dots + kx^m + lx^{m-1} \dots + px + q = 0.$$

Desde o termo em y^{m-1} o numero dos parametros vae crescendo de termo para termo, segundo uma progressão arithmetica, da qual é 1 a razão, 2 o primeiro termo, $m+1$ o ultimo, e m o numero dos termos; logo o numero total dos

parametros é

$$s = \frac{m(m+3)}{2}.$$

Tal é o maior numero de parametros que pode ter uma curva da ordem m ; e por conseguinse o maior numero de pontos pelos quaes se pode, em geral, obrigar-a a passar.*

Assim as secções conicas podem em geral fazer-se passar por cinco pontos, por ser nellas $m=2, s=5$; e as linhas rectas podem fazer-se passar por dous pontos, por ser nellas $m=1, s=2$.

D'este modo, quando se quizer uma curva de certa ordem, que satisfaça a condições dadas, podemos conhecer, em quanto ao numero dos parametros, se o problema é determinado, indeterminado, ou impossivel.

NOTAS

Sobre o numero 31

As condições de serem paralelas, de coincidirem, ou de serem perpendiculares, duas rectas $y = ax + b$, $y = a'x + b'$,

podem deduzir-se facilmente da expressão da distancia d'um ponto $(x' y')$ a uma d'ellas

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Com effeito, se o ponto (x', y') deve estar na outra recta $y = a'x + b'$, a sua distancia á primeira é, substituindo na expressão precedente,

$$\delta = \frac{(a' - a)x' + b' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Ora:

1.º Se as rectas são paralelas, δ deve ser constante; e por isso independente de x' . Por tanto $a' - a = 0$ é a condição de parallelismo.

2.º Se as rectas coincidem, deve ser, além da condição precedente, $\delta = 0$, e consequentemente $b' - b = 0$. Por tanto, para que as duas rectas coincidam, devem verificar-se as condições $a = a'$, $b = b'$.

3.º Se as rectas são perpendiculares, deve a expressão da distancia de um ponto de uma $y = a'x + b'$, á intersecção d'ella com a outra, $y = ax + b$, coincidir com δ . Mas as coordenadas da intersecção são

$$x_1 = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y_1 = \frac{a'b - ab'}{a' - a};$$

e a distancia d'ella a um ponto (x', y') de $y = a'x + b'$ é

$$\sqrt{(x' - x_1)^2 + (a'x' + b' - y_1)^2} = \frac{[(a' - a)x' + b' - b]\sqrt{1 + a'^2}}{a' - a};$$

logo, comparando com δ , será
$$\frac{\sqrt{1 + a'^2}}{a' - a} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

que dá
$$aa' + 1 = 0.$$

Cumpre advertir que a distancia δ se deduz facilmente da propriedade de ser um minimo. Porque a distancia de (x', y') a um ponto (x, y) da recta dá

$$(x - x')^2 + (ax + b - y')^2 = \delta^2;$$

e da condição do minimo tira-se

$$x = \frac{ay' + x' - ab}{1 + a^2},$$

que substituida na expressão precedente dá

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Sobre o numero 38

Procuremos o angulo V , que fazem entre si duas cordas, quer passem pelas extremidades d'um diametro, quer não passem, isto é, o angulo V , que tem o vertice na circumferencia, e insiste em um dado arco, igual ou não igual a 180° .

Tomando para eixo dos x o diametro paralelo á corda d'esse arco, e para origem o centro, sejam $(-x', y')$, (x', y') , (α, β) , os extremos da

corda e o vertice do angulo. As tangentes dos angulos, que fazem os lados de V com o eixo dos x , são

$$a = \frac{\beta - y'}{\alpha + x'}, \quad a' = \frac{\beta - y'}{\alpha - x'};$$

por conseguinte é

$$\text{tang } V = \frac{a' - a}{1 + aa'} = \frac{2x'(\beta - y')}{\alpha^2 - x'^2 + (\beta - y')^2},$$

ou, pôr serem

$$x'^2 = R^2 - y'^2, \quad \alpha^2 + \beta = R^2,$$

$$\text{tang } V = -\frac{x'}{y'}.$$

Como esta expressão é independente de α e β , vê-se que os angulos existentes no mesmo segmento do circulo são eguaes. Mas chamando θ o angulo no centro, que tem por base o arco em que insiste V , é

$$\text{tag} \left(\frac{360^\circ - \theta}{2} \right) = \frac{x'}{y'}, \quad \text{ou } \text{tang } \frac{1}{2} \theta = -\frac{x'}{y'};$$

logo

$$V = \frac{1}{2} \theta.$$

Por onde se vê que os angulos, que têm o vertice na circumferencia, são a metade dos que têm o vertice no centro e insistem no mesmo arco.

Sobre o numero 56

A propriedade de serem racionais relativamente á abscissa as distancias aos pontos da ellipse pertence exclusivamente aos focos.

Com effeito sejam: (x', y') um ponto tomado no plano da ellipse, cujas distancias aos pontos d'esta curva devem ser funcções racionais de x ;

(x, y) um ponto da ellipse; e δ a distancia d'estes dous pontos. Teremos

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

que dão

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \mp 2 \frac{b}{a} y' \sqrt{a^2 - x^2} + y'^2.$$

Ora δ^2 , e com mais razão δ , não pode ser racional, senão quando for nullo o termo que tem radical; logo

$$y' = 0, \quad \delta^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xx' + x'^2 + b^2;$$

por onde se vê que o ponto procurado (x', y') está no eixo dos x . E para que esta expressão de δ^2 seja um quadrado, é necessario (*Alg. El.* n.º 146) que

$$\text{seja} \quad 4x'^2 = 4\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(x'^2 + b^2); \text{ ou } x' = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

Assim os pontos $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ do eixo maior são os unicos que têm a propriedade de que se tracta.

Fazendo a substituição, resulta

$$\delta = \pm \left(x \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{x^2 + b^2}\right) = \pm \left(\frac{cx}{a} \pm a\right).$$

Como a é o maior valor de x , e c é uma fracção: para que δ seja positivo, deve usar-se do signal — fóra do parenthesis; e as distancias aos dous focos $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, são respectivamente

$$\delta = a - \frac{cx}{a}, \quad \delta = a + \frac{cx}{a}.$$

(Vej. *Geom. Anal.* de Fourcy n.º 307 e 308, e 2.ª ed. do *Cours de Math. Pur.* de Francoeur, n.º 397).

Numero 80 (no fim)

A equação
$$\text{tang } \theta = \frac{a^2 \alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)} = \frac{a^2 \alpha + \frac{b^2}{\alpha}}{a^2 - b^2}.$$

mostra que:

1.º Para α infinito, é tang θ infinita.

2.º Mudando α em $\alpha + \delta$, a diferença entre as tangentes de θ cor-

respondentes será
$$\frac{\delta (a^2 \alpha - b^2 + a^2 \alpha \delta)}{\alpha (\alpha + \delta) (a^2 - b^2)}.$$

E suppondo δ infinitesima, esta diferença será positiva desde $\alpha = \infty$ até $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$; e depois negativa desde $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ até $\alpha = 0$.

5.º Para α nullo, é tang θ infinita.

Numero 85 (fim de 3.º)

A equação
$$\text{tang } \theta = \frac{\frac{y'}{x' - a} - \frac{y'}{x' + a}}{1 + \frac{y'^2}{x'^2 - a^2}} = \pm \frac{2a^2 b}{(a^2 + b^2) \sqrt{x'^2 - a^2}}$$

mostra que:

1.º Para $x' = a$ é $\text{tang } \theta = \infty$.

2.º Ao passo que x' cresce, tang θ diminue.

3.º Para $x' = \infty$ é tang θ nulla.

Numero 107

Como a hypothese $B^2 - 4AC = 0$ reduz (a) a

$$(y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C})^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

vê-se immediatamente que, fazendo $y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C} = y'\sqrt{a}$, e attendendo às formulas de transformação de coordenadas rectangulares,

$$y' = y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta, \quad x' = y \operatorname{sen} \theta + x \cos \theta,$$

ou $y = y' \cos \theta + x' \operatorname{sen} \theta, \quad x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta,$

a equação se transforma em outra (b), sem termos em x'^2 e $x'y'$, na qual

são $d = D \cos \theta - E \operatorname{sen} \theta, \quad e = D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta,$ ou (3),

com tanto que se façam

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{A}{a}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \mp \sqrt{\frac{C}{a}}.$$

GEOMETRIA ANALYTICA

NO ESPAÇO

I. TRIGONOMETRIA ESFERICA

Noções fundamentais

140. Se tres planos MON, NOP, MOP, (fig. 1), passando pelo centro de uma esphera, determinarem um angulo triedro O, da sua intersecção com a superficie da esphera resultarão circulos maximos, cujos arcos CA, CB, AB formarão sobre ella um *triangulo espherico* ABC. Os angulos planos do triedro O terão por medida respectiva os lados ou arcos d'este triangulo, isto é, NOP a AB, MON a AC, MOP a BC. O angulo C do triangulo tem por medida o angulo que no ponto C formam as duas tangentes aos arcos contiguos AC e BC; e a inclinação d'estas tangentes, situadas nos planos d'estes arcos, é tambem a medida do angulo diedro formado por estes mesmos planos, isto é, da inclinação da face NOM sobre POM. Por conseguinte, *os angulos planos do triedro O são medidos pelos lados do triangulo espherico ABC, e as inclinações das faces são os angulos do triangulo.*

Os problemas em que se pedem as partes desconhecidas de um triangulo espherico por meio das que são dadas, são exactamente os mesmos que se apresentam, quando, conhecidos alguns elementos de um triedro, se pedem os outros. *Nos triangulos esphericos ha seis elementos a considerar,*

os tres angulos A, B, C, e os tres lados oppostos a, b, c; ou, por outras palavras, os tres angulos planos a, b, c, e os tres angulos diedros oppostos A, B, C, do triedro de que se tracta.

A Trigonometria espherica tem por objecto o conhecimento de todas as seis partes de um triangulo espherico, sendo dadas as que bastam para determinar as outras.

Posto isto, se de um ponto O dirigirmos raios visuaes para tres pontos distantes M, N, P, situados no espaço, para tres estrellas por exemplo, estas linhas serão as arestas de um triedro O, cujos elementos constituintes serão os mesmos do triangulo espherico ABC, formado pelos arcos dos circulos maximos que unem os pontos em que estas arestas vão atravessar a superficie de uma esphera de raio arbitrario, cujo centro O se suppõe o ponto de partida dos raios visuaes.

D'estes principios deduzem-se os theoremas seguintes:

1.º Como qualquer angulo plano de um triedro é sempre menor que dous rectos, será sempre cada um dos lados do triangulo espherico $< 180^\circ$. Qualquer angulo será tambem sempre menor que dous rectos.

Se no processo dos calculos encontrarmos um angulo, ou um lado de um triangulo, que tenha por valor um arco $> 180^\circ$, devemos rejeitar essa solução, ou então substituir o supplemento do mesmo angulo ou arco: e os cos., e sen., tang., etc., nunca poderão pertencer a um arco maior que a semicircumferencia.

2.º Como a somma dos angulos planos de qualquer angulo polyedro é sempre $< 360^\circ$ (Geom.), será a somma dos tres lados de um triangulo espherico sempre $< 360^\circ$.

3.º Dous triangulos esphericos serão eguaes, quando os tres angulos, ou os tres lados, ou dous lados e o angulo comprehendido, ou dous angulos e o lado adjacente, forem respectivamente eguaes cada um a cada um. Tanto estes theoremas, como os dous seguintes, demonstrem-se do mesmo modo que os correspondentes nos triangulos rectilineos.

4.º O arco abaixado perpendicularmente do vertice de um triangulo espherico isosceles sobre a sua base, divide ao meio esta base, e o angulo do vertice; os angulos eguaes ficam oppostos aos lados eguaes, e reciprocamente.

5.º Nos triangulos esphericos o maior angulo fica sempre opposto ao maior lado, o medio ao medio, e o menor ao menor.

6.º Qualquer lado é sempre menor que a somma dos outros dous, e maior que a sua differença: porque a somma de dous angulos planos de um triangulo triedro excede sempre o terceiro, e por conseguinte $a < b + c$,

e $b < a + c$, ou $a > b - c$. Consequentemente, a semisomma dos tres lados de um triangulo excede sempre um lado qualquer: por que de $b + c > a$ tira-se $b + c + a > 2a$, ou $\frac{b + c + a}{2} > a$.

141. Se de um ponto O (fig. 2) tomado dentro do angulo triedro S, abaixarmos as perpendiculares OP, OQ, OR, sobre as faces ASB, ASC, ASB, estas perpendiculares determinarão um novo angulo triedro, cujos angulos planos serão supplementos dos angulos diedros do angulo solido S, e cujos angulos diedros serão supplementos dos angulos planos do mesmo angulo solido.

Com effeito:

1.º Os angulos planos do novo angulo triedro POQ, POR, QOR, formados pelas perpendiculares OP, OQ, OR, são supplementos dos angulos diedros formados segundo as rectas SA, SB, SC: por quanto sendo a face POQ perpendicular ás faces ASB, ASC do triedro S (*Geom.*), tambem o será a intersecção d'ellas (*Geom.*), ou á aresta SA; e determinará, pela sua intersecção com as duas faces, o angulo rectilineo que serve de medida ao angulo diedro formado segundo AS (*Geom.*). D'esta intersecção resulta um quadrilatero com dous angulos rectos em P e Q; e por conseguinte o angulo POQ será supplemento do angulo diedro segundo AS. O mesmo se demonstra a respeito dos outros angulos planos QOR, POR.

2.º Pela mesma razão, como já fica demonstrado que as arestas SA, SB, SC são perpendiculares ás faces do angulo solido O, concluiremos: que os angulos planos de S são supplementos dos angulos diedros de O, ou, reciprocamente, que os angulos diedros de O são os supplementos dos angulos planos de S.

Por causa d'estas propriedades, os angulos triedros S e O dizem-se *supplementares*. Estes triedros determinam dous triangulos esphericos taes, que os angulos de um são supplementos dos lados do outro, e reciprocamente. Logo: dada um triangulo espherico ABC com os angulos A, B, C, e lados a, b, c , é sempre possivel construir outro A'B'C', cujos angulos A', B', C', e lados a', b', c' , tenham com os do primeiro as relações seguintes:

$$a' = 180^\circ - A, \quad b' = 180^\circ - B, \quad c' = 180^\circ - C \dots \dots \dots (1),$$

$$A' = 180^\circ - a, \quad B' = 180^\circ - b, \quad C' = 180^\circ - c \dots \dots \dots (2).$$

O triangulo assim construido chama-se *polar* ou *supplementar* do 1.º

Sommando as tres equações (1) temos

$$A + B + C = 6 \text{ rectos} - (a' + b' + c');$$

e como já se viu que é $a' + b' + c' < 4$ rectos (n.º 140, 2.º), vê-se que $A + B + C > 2$ rectos. Mas por outra parte, como qualquer dos angulos esphericos é sempre < 2 rectos, temos $A + B + C < 6$ rectos. Logo, a *somma dos angulos de qualquer triangulo espherico fica sempre comprehendida entre dous ou seis angulos rectos.*

As equações (1) e (2) são de muita utilidade, porque reduzem a tres os seis problemas da trigonometria espherica, que consistem em achar tres dos seis elementos de um triangulo, conhecidos os outros tres. Se, por ex., soubermos achar os tres angulos A, B, C , por meio dos tres lados conhecidos a, b, c , podemos reciprocamente, dados os tres angulos A, B, C , achar um lado a , substituindo ao triangulo o seu suplementar $A'B'C'$, cujos lados são conhecidos pelas equações (1); e tendo achado um dos angulos A' , a equação (2) dará o lado proposto $a = 180^\circ - A'$. De maneira, que sabendo resolver um triangulo no caso de serem dados os tres lados, fica tambem resolvido para o caso de serem conhecidos os tres angulos; e assim nos outros casos. Adiante se verá isto mais explicitamente.

142. Se o triedro O (fig. 3) for cortado por um plano pmn perpendicular a uma aresta OA , em um ponto m tal que seja $Om = 1$, teremos

$$mn = \text{tang } c, \quad On = \text{sec } c, \quad mp = \text{tang } b, \quad Op = \text{sec } b.$$

Mas pela propriedade dos triangulos rectilineos (*Trigonom. rect.*) é

$$np^2 = mn^2 + pm^2 - 2mn \cdot pm \cdot \cos A,$$

$$np^2 = nO^2 + pO^2 - 2nO \cdot pO \cdot \cos a.$$

Subtrahindo a 1.ª da 2.ª, temos, em virtude de serem os triangulos nmO , pmO , rectangulos em m , e de ser $Om = 1$,

$$0 = 1 + 1 - 2 \text{ sec } c \cdot \text{sec } b \cdot \cos a + 2 \text{ tang } c \cdot \text{tang } b \cdot \cos A,$$

e, substituindo $\frac{1}{\cos}$ pela sec., e $\frac{\text{sen}}{\cos}$ pela tang.,

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos c \cdot \cos b} + \frac{\text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A}{\cos c \cdot \cos b}.$$

D'aqui se deduz a equação fundamental

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A \dots \dots \dots (3).$$

Para os angulos b e c obteremos, pelo mesmo theor, formulas similhantes, e reunindo-as todas tres, teremos

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \text{sen } a \text{ sen } c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \cos C. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Estas equações, cada uma das quaes exprime uma relação entre os tres lados e um angulo, encerram implicitamente toda a Trigonometria espherica, visto que por ellas, sendo dadas tres das seis partes que entram no triangulo espherico, se podem calcular as tres restantes. Como porém seja conveniente, nos diversos casos, ter formulas que dêem immediatamente a incognita da questão, por isso passámos a deduzir estas das formulas precedentes, combinando-as convenientemente. (Nota 1.^a).

1.^o Temos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c},$$

logo

$$1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c} \right)^2;$$

reduzindo o 2.^o membro ao mesmo denominador, e substituindo depois

sen² por $1 - \cos^2$ no numerador, vem

$$\text{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\text{sen}^2 b \cdot \text{sen}^2 c}.$$

Extrahindo a raiz quadrada, e dividindo ambos os membros por $\text{sen } a$, o 2.º membro torna-se numa *expressão symetrica* relativamente a a, b, c , isto é, numa expressão tal, que permanece a mesma quando quaesquer d'estas letras se mudam reciprocamente umas nas outras. Designando

esta expressão por M , temos $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = M$. Mudando nesta equação A e a

em B e b , e em C e c , como M persiste constante, deduz-se

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c} \dots \dots \dots (\text{H}).$$

2.º Applicando á equação (3) a propriedade do triangulo supplementar (equações 1 e 2), isto é, mudando a em $180^\circ - A$, e A em $180^\circ - a$, etc. teremos

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{sen } C \cos a \dots \dots \dots (4).$$

E reunindo esta com as duas que se obtém similhantemente, teremos

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{sen } C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \text{sen } A \text{sen } C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \text{sen } A \text{sen } B \cos c. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (\text{III}).$$

3.º A fim de eliminar b da equação (3), substitua-se por $\cos b$ o seu valor (I), e $\frac{\text{sen } B \text{sen } a}{\text{sen } A}$ por $\text{sen } b$; e virá

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \text{sen } a \text{sen } c \cos c \cos B + \frac{\text{sen } a \cdot \text{sen } c \cdot \text{sen } B \cdot \cos A}{\text{sen } A};$$

porém $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$: logo, dividindo tudo por $\sin a \sin c$, será

$$\sin c \cot a = \cos c \cos B + \sin B \cot A \dots \dots \dots (5).$$

Esta equação dá *uma relação entre dous lados e dous angulos, sendo um dos angulos comprehendido por, esses lados, e o outro opposto a qualquer d'elles*. Fazendo todas as combinações possiveis, deduzem-se mais cinco equações similhantes, que reunidas á antecedente, podem escrever-se

$$\left. \begin{aligned} \cos B \cos c &= -\sin B \cot A + \sin c \cot a, \\ \cos A \cos b &= -\sin A \cot C + \sin b \cot c, \\ \cos C \cos a &= -\sin C \cot B + \sin a \cot b, \\ \cos B \cos a &= -\sin B \cot C + \sin a \cot c, \\ \cos A \cos c &= -\sin A \cot B + \sin c \cot b, \\ \cos C \cos b &= -\sin C \cot A + \sin b \cot a, \end{aligned} \right\} \dots \dots (IV).$$

Os quatro grupos de formulas (I), (II), (III), (IV), offerecem evidentemente todas as combinações que é possível fazer *com tres quantidades conhecidas e uma incognita*, das seis que formam os elementos do triangulo espherico; e bastará nas differentes questões escolher d'entre as quinze equações aquella que convém, e tornal-a depois propria para o calculo por logarithmos. Os tres primeiros tem os seguintes enunciados, faceis de conservar na memoria:

(I.) *O coseno de um lado qualquer de um triangulo espherico é igual á somma do producto dos cosenos dos outros dous lados, mais o producto dos senos d'esses mesmos lados multiplicado pelo coseno do angulo opposto ao primeiro lado.*

(II.) *Nos triangulos esphericos os senos dos angulos são proporcionaes aos senos dos lados oppostos.*

(III.) *O coseno de um angulo é igual á somma algebrica do producto dos cosenos dos outros dous angulos, mais o producto dos senos d'esses mesmos angulos multiplicado pelo coseno do lado opposto ao primeiro angulo, devendo dar-se o signal negativo ao producto em que entram só angulos. Este enunciado, prescindindo dos signaes, é o mesmo que o das*

formulas (I) mudando lado em angulo, e angulo em lado. A primeira consoante n que entra na palavra *angulo*, e que é ao mesmo tempo a inicial de *negativo*, servirá para recordar que no 2.º membro se deve dar o *signal negativo* ao *producto em que entram só angulos*.

Para reter na memoria o enunciado das formulas (IV), que exprimem, como já dissemos, a relação entres *dous lados, o angulo comprehendido e um opposto*, empregaremos o meio mnemonico lembrado por Delambre, *Astr. T. I, cap. X, Trig. mnem. n.º 191* e seguintes, e que consiste em considerar as *quatro partes* do triangulo todas contiguas, sendo então *duas d'ellas medias, e duas extremas*; as *medias* um lado e um angulo, e as *extremas* outro lado e outro angulo. Reflectindo então nas seis formulas, vê-se que se podem traduzir pela maneira seguinte:

(IV.) *O producto dos cosenos das partes medias é equal á somma dos productos dos senos das mesmas partes multiplicados pelas cotangentes das extremas, lado com lado, e angulo com angulo*: sendo o producto em que entram *lados* positivo, e o producto em que entram *angulos* negativo. Para nos recordarmos dos signaes faremos a mesma observação que a respeito das formulas (III) (*).

Triangulos esphericos rectangulos

143. Designemos o angulo recto por A , e a hypotenusa por a (fig. 4); e pondo $A = 90^\circ$ nas 1.^{as} equações de (I) e (II), na 1.^a e 2.^a de (III), na 1.^a e 5.^a de (IV), teremos

$$\cos a = \cos b \cos c \dots\dots\dots (m),$$

$$\sin b = \sin a \sin B \dots\dots\dots (n),$$

$$\cos a = \cot B \cot C \dots\dots\dots (p),$$

$$\cos B = \sin C \cos b \dots\dots\dots (q),$$

$$\tan c = \tan a \cos B \dots\dots\dots (r),$$

$$\cot B = \cot b \sin c \dots\dots\dots (s).$$

(*) Delambre, no logar citado, menciona tambem a seguinte transformação notavel das formulas (IV), que lhe foi suggerida pelo nosso mestre o sr. Manuel

Estas seis equações, accommodadas ao calculo logarithmico, bastam para resolver em qualquer triangulo rectangulo o problema seguinte: *Dados dos dos cinco elementos a, b, c, B e C, achar os outros tres.* Assim a questão vem a depender de uma equação entre tres elementos, dos quaes um só é a incognita. Designando sempre por A o angulo recto, buscaremos aquella das seis equações que comprehende os tres elementos da questão; será necessario porém mudar algumas vezes o logar das letras B e C na figura.

Assim entrando

a hypotenusa	um angulo B	e dous angulos B, C, ... empregue-se a equação . . . (p),
		e o lado . . . { opposto b (n),
a		adjacente c (r),
		dous lados b, c (m),
um lado b do angulo recto e os angulos B, C (q),		
dous lados b, c do angulo recto e um angulo B (s).		

O celebre inventor dos logarithmos, reflectindo sobre a organização das formulas precedentes, conseguiu encerrar-as em duas regras mui facéis de decorar, e vem a ser:

o coseno da parte *Media* = ao producto { dos senos das partes *Separadas*
 { das cotang. das partes *Conjunctas*.

Para se applicarem estas regras deve advertir-se:

1.º Que Neper não considera no triangulo rectangulo senão cinco partes, excluindo o angulo recto, que não entra explicitamente na solução, como vimos acima. Contando d'esta fórma, e entrando em qualquer questão sempre tres partes, duas *dadas*, e uma *pedida*: é facil de ver, que

Pedro de Mello, lente nesta Universidade. Dividindo por sen B sen c a 1.ª d'aquellas fórmulas, acha-se

$$\cot B \cot c = \frac{\cot a}{\sen B} - \frac{\cot A}{\sen c};$$

o assim das outras. Podem pois enunciar-se da maneira seguinte, simples e facil de decorar-se: *O producto das cot. das partes medias é igual á somma das cot. d's extremas divididas pelos senos das medias, lado com angulo e angulo com lado; devendo dar-se o signal negativo á cot. em que entra angulo.*

uma das tres será equidistante das outra duas, ou *media* entre ellas, ficando-lhe as outras duas: ou contiguas, em cujo caso se chamam *conjunctas*; ou igualmente *separadas* por outras partes que não entram na questão, visto que, ao todo, não são senão cinco. É isto o que Neper entende por *partes medias*, *partes conjunctas*, e *partes separadas*. A primeira cousa que se deve fazer, é distinguir na figura quaes ellas são, o que é facil.

2.º Que em logar dos lados, que formam o angulo recto, se ha de tomar o seu complemento, isto é, tomar d'elles o seno, o coseno ou a tangente, quando pelas regras se houvesse de tomar o coseno, o seno ou a cotangente.

Estas regras têm a vantagem de se tomarem facilmente de memoria pela *symetria de linguagem*, por assim dizer, com que se exprimem em portuguez, correspondendo *senos* ás partes *separadas* e *cotangentes* ás *conjunctas*.

144. A respeito das formulas precedentes faremos ainda as seguintes observações.

1.º Da equação (*m*) conclue-se, que o *coseno da hypotenusa é equal ao producto dos cosenos dos outros dous lados*; e por conseguinte, que um dos tres lados é $<$ ou $>$ 90° , conforme forem os outros dous lados da mesma ou diferente especie, isto é, conforme forem conjunctamente ou $<$ ou $>$ 90° , ou conforme for um d'elles $<$ e o outro $>$ 90° ; porque os cosenos dos arcos $>$ 90° são negativos.

2.º A equação (*p*) faz ver que, se compararmos a hypotenusa com os dous angulos adjacentes B e C, um d'estes tres arcos é $>$ ou $<$ 90° , segundo forem os outros dous arcos da mesma ou diferente especie. [ou]

3.º As equações (*q* ou *s*) mostram que qualquer dos angulos B e C é sempre da mesma especie que o lado opposto.

4.º Vê-se tambem pela equação (*r*) que a hypotenusa e um dos lados são da mesma especie, quando o angulo comprehendido é $<$ 90° , e de diferente especie quando este angulo é $>$ 90° .

5.º Finalmente se o lado *b* do angulo recto fer $= 90^\circ$; será $\cos b = 0$, e [pelas equações (*m*) e (*q*)] $\cos a = 0$, $\cos B = 0$: d'onde se conclue que neste caso os lados CA, CB serão cada um de 90° e perpendiculares sobre AB; o triangulo será isosceles *birectangulo*; e C toma o nome de *pólo* do arco AB (fig. 4), em consequencia de ficar á distancia de 90° de todos os pontos d'este arco.

145. Posto que estas formulas resolvem todos os casos dos triangulos rectangulos, cumpre todavia notar que os valores das incognitas não se

obterão com precisão, quando os arcos, sendo muito pequenos, vierem expressos em cosenos; ou quando, sendo vizinhos de 90° , forem dados por senos.

Para obviar a este inconveniente, recorreremos aos artificios seguintes.

$$1.^\circ \text{ Temos (Trigonom. rect.) } \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x};$$

e por isso, se for pedida a hypotenusa a sendo conhecidos B e C , a equação (p) torna-se em

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos B \cos C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = - \frac{\cos(B+C)}{\cos(B-C)} \dots \dots \dots (6);$$

equação onde se vê, que a *somma dos dous angulos* B e C é $> 90^\circ$, por que o $2.^\circ$ membro, que tem o signal $-$, deve ser positivo.

$2.^\circ$ Do mesmo modo, se procurarmos um lado b do angulo recto conhecidos os angulos B e C , temos pela equação (q) $\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$, e fazendo $z = 90^\circ - B$, que dá $\cos B = \operatorname{sen} z$, e $\cos b = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C}$; teremos (pela equação citada e pela *Trigonom. rect.*)

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b = \frac{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (C - z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (C + z)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \sqrt{(\operatorname{tang} [\frac{1}{2} (B - C) + 45^\circ] \operatorname{tang} [\frac{1}{2} (B + C) - 45^\circ])} \dots (7).$$

$3.^\circ$ Conhecida a hypotenusa a e um lado c , se quizermos achar o

angulo adjacente B, teremos pela equação (r)

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \operatorname{tang} c \cot a}{1 + \operatorname{tang} c \cot a} = \frac{\cos c \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \cos a}{\cos c \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} c \cos a},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}(a-c)}{\operatorname{sen}(a+c)} \right]}. \dots \dots \dots (8).$$

Para que esta expressão se não torne imaginaria, é necessario que $a - c$ e $a + c$ tenham o mesmo signal; por conseguinte sendo $a + c > 180^\circ$, deve ser a hypothenusa $a < c$. Logo se o triangulo tiver angulos obtusos, não será a hypotheusa o maior lado. É isto com effeito o que se torna evidente na figura 8.

4.º A equação (m) dá $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$,

logo $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} c = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b) \dots \dots \dots (9).$

5.º Finalmente se for pedido um lado b , conhecidos o angulo opposto B e a hypothenusa a , em vez de empregar a equação (n) quando b for vizinho de 90° , tome-se

$$b = 90^\circ - 2z, \operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B;$$

o que reduz a equação (n) a $\cos 2z = \operatorname{tang} x$, ou

$$\operatorname{tang}^2 z = \frac{1 - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} x} = \operatorname{tang} (45^\circ - x);$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tang} (45^\circ - \frac{1}{2} b) = \sqrt{\operatorname{tang} (45^\circ - x)} \dots \dots \dots (10).$$

Calcula-se o arco x por meio da equação $\operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, e a ultima dará o valor de b .

Apresentamos na tabella seguinte os cinco elementos constituintes de

um triangulo espherico rectangulo, a fim de poder servir de exercicio para a applicação numerica das formulas, tomando á escolha dous d'estes elementos, e calculando por meio d'elles os tres restantes.

Triangulo rectangulo de prova

ELEMENTOS	LOG. SEN.	LOG. COSEN.	LOG. TANG.
$a = 71^{\circ}24'30''$	$\bar{1}.9767235$	$\bar{1}.5035475 +$	$0.4731759 +$
$b = 140.52.40$	$\bar{1}.8000134$	$\bar{1}.8897507 -$	$\bar{1}.9102626 -$
$c = 114.15.54$	$\bar{1}.9598303$	$\bar{1}.6137969 -$	$0.3460333 -$
$B = 138.15.45$	$\bar{1}.8232909$	$\bar{1}.8728568 -$	$\bar{1}.9504341 -$
$C = 105.52.39$	$\bar{1}.9831068$	$\bar{1}.4370867 -$	$0.5460201 -$

O signal — posto á direita de muitos d'estes logarithmos serve para indicar que o factor correspondente é negativo; e não deve confundir-se com os signaes — collocados á esquerda dos log., que, como é sabido, indicam que devem ser subtrahidos, como acontece nas divisões. Conforme for par ou impar o numero dos factores negativos de uma formula, assim o producto terá o signal + ou —, circumstancias que deve haver cuidado em notar; porque, por ex., $\text{tang } a$ dá para a um arco $< 90^{\circ}$, quando esta tangente é positiva, e o supplemento d'este valor quando a tangente é negativa.

Triangulos esphericos obliquangulos

146. Percorramos todos os casos que podem apresentar-se (fig. 4).

1.º CASO. *Dados os tres lados a, b, c , achar o angulo A ?*

A 1.ª das equações (1) dá, substituindo nella $1 - 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} A$ por $\cos A$:

$$\cos a = \cos (b - c) - 2 \text{sen } b \text{sen } c \text{sen}^2 \frac{1}{2} A, \dots \dots (11),$$

$$\text{ou } 2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \cos (b - c) - \cos a,$$

ou, (*Trigonom.*) (*)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a + b - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a + c - b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Esta equação, accommodada ao calculo logarithmico, dá o valor do angulo A. Póde tornar-se mais symetrica, fazendo

$$2p = a + b + c,$$

que dá

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} (p - b) \cdot \operatorname{sen} (p - c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \dots \dots \dots (12).$$

Se na 1.^a das equações (I) substituíssemos $2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 1$ em logar de $\cos A$, acharíamos identicamente

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} (p - a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \dots \dots \dots (13).$$

Finalmente, dividindo a 1.^a d'estas equações pela 2.^a, temos

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} (p - b) \operatorname{sen} (p - c)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen} (p - a)} \dots \dots \dots (14).$$

Qualquer d'estas equações resolve a questão.

2.^o CASO. *Dados os tres angulos A, B, C, achar o lado a?*

Da propriedade do triangulo supplementar (pag. 187) applicada ás equações precedentes, pela substituição dos valores (1) e (2), e fazendo

$$2P = A + B + C,$$

(*) Como o 1.^o membro é essencialmente positivo, bem como $\operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen} c$ (porque b e c são $< 180^\circ$), vê-se a necessidade de ser ao mesmo tempo $c < b + a$, e $c > b - a$, por isso que as relações contrarias são visivelmente absurdas; e recahe-se assim no theorema 6.^o do n.^o 140.

resulta
$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos P \cos (P - A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

$$\operatorname{cos}^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos (P - B) \cos (P - C)}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos P \cos (P - A)}{\cos (P - B) \cos (P - C)}.$$

3.º CASO. Dados dous lados a e b , e o angulo comprehendido C , achar o terceiro lado?

Pode lançar-se mão da ultima das equações (I) debaixo da forma seguinte

$$\operatorname{cos} c = \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b (1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{cos} C).$$

Ou então, fazendo na mesma equação,

$$\operatorname{cos} C = 2 \operatorname{cos}^2 \frac{1}{2} C - 1, \operatorname{cos} c = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c,$$

vem

$$\begin{aligned} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c &= \operatorname{cos} (a + b) + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{cos}^2 \frac{1}{2} C \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (a + b) + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{cos}^2 \frac{1}{2} C. \end{aligned}$$

Tomando um arco v tal, que dê $\operatorname{sen} v = \operatorname{cos} \frac{1}{2} C \sqrt{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$, teremos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (a + b) - \operatorname{sen}^2 v,$$

ou, (*Trigonom. rect.*),

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a + b + 2v) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a + b - 2v),$$

equação mais accommodada ao calculo logarithmico, e da qual se deduzem facilmente, por simples permutações, as correspondentes nos outros lados.

4.º CASO. Dados dous angulos A e B , e o lado adjacente c , achar o terceiro angulo C ?

A 3.^a das equações (III) dá

$$\cos C = \cos A \cos B (\text{tang } A \text{ tang } B \cos c - 1).$$

Podemos também substituir os valores (1) e (2) nas formulas precedentes, e teremos

$$\text{sen } v = \text{sen } \frac{1}{2} c \sqrt{\text{sen } A \text{ sen } B},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} C = \text{sen } \frac{1}{2} (A + B + 2v) \text{sen } \frac{1}{2} (A + B - 2v).$$

5.^o CASO. *Conhecidas tres das quatro partes, dous lados e os angulos oppostos, achar a quarta?*

Deve empregar-se a *regra dos quatro senos*, equação (II).

147. Excepto o caso de serem conhecidos os tres lados ou os tres angulos de um triangulo, todo o problema de trigonometria espherica comprehende entre as partes dadas um angulo e um lado adjacente, além de um terceiro elemento: no que vamos expor, designaremos sempre este angulo por A , e o lado por b .

Abaixe-se de um dos angulos C (fig. 5) um arco CD perpendicular sobre o lado c . Este lado ficará cortado em dous segmentos φ e φ' , e o angulo C em dous angulos θ e θ' , isto é,

$$c = \varphi + \varphi', \quad D = \theta + \theta'.$$

Cumpra porém advertir: *que uma d'estas partes será negativa nas diferentes equações, se o arco perpendicular cair fóra do triangulo, o que se dá quando um dos angulos A da base é agudo e o outro B é obtuso: e que serão todas as partes positivas, quando o arco cair dentro do triangulo, isto é, quando os dous angulos dados forem da mesma especie.*

Com effeito, se nos dous triangulos ACD , BCD , tirarmos os valores do arco perpendicular CD , por meio da equação (e), acharemos

$$\text{tang } CD = \text{tang } A \text{ sen } \varphi = \text{tang } B \text{ sen } \varphi'.$$

Sendo A e B da mesma especie, as suas tangentes terão o mesmo signal, e por conseguinte $\text{sen } \varphi$ e $\text{sen } \varphi'$ estarão no mesmo caso. Se A e B forem porém de especie diferentes, $\text{sen } \varphi$ e $\text{sen } \varphi'$ devem ter signaes contra-

rios; então o arco perpendicular CD cairá fóra do triangulo, e somente um dos segmentos φ e φ' será negativo.

148. Vê-se na fig. 5 que o triangulo ABC se decompõe em dous ACD, BCD que podemos resolver separadamente, achando assim os elementos desconhecidos por meio dos que são dados. Este processo leva-nos a equações simples, ás quaes facilmente se applica o calculo por logarithmos, como passámos a mostrar.

Resolvem-se primeiro os triangulos ACD, BCD, para d'elles deduzir uma das partes φ ou θ , do lado c ou do angulo C, suppondo conhecidos o angulo A e o lado adjacentes b . Applicando as equações (r e p), deduzem-se as equações (a e a'). Applicando depois em cada um d'estes triangulos as equações (m , q , s , r), e eliminando o arco perpendicular CD em cada systema de duas analogas, obtem-se as equações (c , c' , d , d').

$$\text{Tang } \varphi = \text{tang } b \cos A \dots (a); \quad \cot \theta = \cos b \text{ tang } A \dots (a')$$

$$c = \varphi + \varphi' \dots (b); \quad C = \theta + \theta' \dots (b')$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \dots (c); \quad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \dots (c')$$

$$\frac{\text{tang } A}{\text{tang } B} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \dots (d); \quad \frac{\text{tanga}}{\text{tang } b} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \dots (d')$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \dots (e).$$

Passámos a ver os casos que podem apresentar-se, e a maneira de os resolver por meio d'estas equações.

Além das partes dadas A e b, ha mais um 3.º elemento.

1.º Se for conhecido c (dous lados b e c , e o angulo comprehendido A) a equação (a) dá φ ; (b) dá φ' , podendo estes arcos ter o signal negativo; (c) dá (a); (d) dá B; e finalmente (e) dá C, cuja especie se determinará pelo que fica dito no n.º 147.

2.º Se for conhecido C (dous angulos A e C e o lado adjacente b) a

equação (a') dá θ ; (b') dá θ' , que pode ser negativo; (c') dá B ; (d') dá a ; (e) dá c , cuja especie é conhecida.

3.º Se for conhecido a (dous lados a e b , e o angulo opposto A) a equação (a) dá φ ; (c) dá φ' ; (b) dá c ; (d e e) dão B e C . Ou então (a') dá θ ; (d') dá θ' ; (b') dá C ; (c' e e) dão B e c .

Neste caso o problema offerece geralmente duas soluções; porque se calcularmos φ' ou θ' por meio do coseno, o arco apparece com os dous signaes \pm ; c e C tem por conseguinte dous valores, excepto se tivermos de rejeitar algum, como negativo ou $> 180^\circ$. As equações (c' e d) dão φ' e θ' por meio dos seus senos, d'onde resultam dous valores para C e c .

4.º Se for conhecido B (dous angulos A e B , e o lado opposto b) a equação (a') dá θ ; (c') dá θ' ; (b') dá C ; (d' e e) dão a e c . Ou então (a) dá φ ; (d) dá φ' ; (b) dá c ; (c e e) dão a e c .

Tambem neste caso ha duas soluções, porque φ' e θ' sendo dados em senos, o arco tem dous valores supplementares; e por tanto c na equação (b), e a na equação (d'), apparecem com dous valores: o mesmo acontece com a e C nas equações (c e b'); etc.

Os quatro casos que analysámos, resolvem-se, como acabamos de ver, por qualquer dos dous systemas das oito equações, um formado das equações sem accento, e outro das accentuadas. Sendo commum a ambos a equação (e) (*).

149. D'estas equações deduzem-se as seguintes consequencias importantes (fig. 5):

1.º A equação (e) dá

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\cos \varphi + \cos \varphi'}$$

e, em virtude das relações achadas na *Trigon. rect.*, e por ser $c = \varphi + \varphi'$, temos

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) \cot \frac{1}{2}c. \dots (15).$$

(*) Querendo resolver um triangulo espherico, conhecidos dous lados e um angulo, ou dous angulos e um lado, abaixa-se de um dos vertices um arco perpendicular sobre o lado opposto, a fim de formar dous triangulos rectangulos, um dos quaes, além do angulo recto, tenha duas partes conhecidas. Está claro, que este arco não deve partir do angulo dado no 1.º caso, nem cair no lado conhecido no 2.º Resolva-se este triangulo rectangulo, e calculem-se os dous

$$\frac{1}{2}(a+b) = c$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = c$$

$$\frac{1}{2}(a-b) = d$$

$$\frac{a}{2} = c - \frac{b}{2}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = d$$

$$\frac{a}{2} = c - \frac{b}{2}$$

Conhecidos os tres lados a, b, c de um triangulo, podemos por meio d'esta equação conhecer a semidiferença dos segmentos φ e φ' , e consequentemente os mesmos segmentos, por ser $\frac{1}{2}c$ a sua semisomma: e depois resolvendo os triangulos rectangulos ACD, BCD, obtem-se os angulos A e B, pela formula

$$\cos A = \tan \varphi \cot b, \quad \cos B = \tan \varphi' \cot a. \dots \dots (16).$$

2.º A equação (d) dá do mesmo modo (*Trigonom. rect.*):

$$\frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi}{\sin \varphi' + \sin \varphi} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}$$

$$\tan \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} \tan \frac{1}{2}c. \dots \dots (17).$$

Conhecidos dous angulos A e B, e o lado adjacente c, por meio d'esta equação obteremos φ e φ' , e depois determinar-se-hão a e b por meio das equações (16).

3.º A equação (c') dá, practicando da mesma maneira,

$$\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta) = \tan \frac{1}{2}(A + B) \cdot \tan \frac{1}{2}(A - B) \tan \frac{1}{2}C. \dots (18).$$

Conhecidos os tres angulos A, B, C; obteremos por meio d'estas equações θ e θ' ; e obteremos depois os lados a e b, resolvendo os triangulos ACD e BCD, que dão

$$\cos b = \cot \theta \cot A, \quad \cos a = \cot \theta' \cot B. \dots \dots (19).$$

segmentos da base φ e φ' , ou os dos angulos do vertice θ e θ' . As equações (c), (c'), (d), (d') podem enunciar-se da maneira seguinte:

1.º Os cos. dos dous lados do angulo, d'onde parte o arco perpendicular, estão entre si como os cos. dos segmentos respectivos da base; as cot. d'estes lados estão como as cot. respectivas dos segmentos do angulo no vertice.

2.º As cot. dos dous angulos na base estão como os senos respectivos dos segmentos da base; os cos. d'estes angulos estão como os senos dos segmentos respectivos do angulo no vertice.

4.º Finalmente pela equação (*d'*) teremos tambem

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\theta' - \theta) = \frac{\operatorname{sen} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C \dots \dots \dots (20).$$

Conhecidos dous lados *a*, *b*, e o angulo comprehendido *C*, obteremos θ e θ' , e depois *A* e *B* pelas equações (19).

150. As equações que acabamos de deduzir, servem tambem para demonstrar os theoremas conhecidos pelo nome de *analogias de Neper*. Igualando os valores (15) e (17) de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi)$ teremos, por ser $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b) \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B) \cos \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} c \dots (21).$$

Mas pela equação (*e*) temos
$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B};$$

logo (*Trigonom. rect.*)
$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B)}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação (21) por esta ultima equação, todos os termos que não desaparecem pela divisão, ficam no quadrado; e extrahindo a raiz, vem

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a - b) &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} c (*) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

resultando a 2.ª d'estas equações da divisão da equação (21) pela 1.ª

(*) Como $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} (A - B)$ é uma quantidade positiva, é necessario que $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b)$ e $\cos \frac{1}{2} (A + B)$ tenham o mesmo signal; d'onde se conclue que a *semisomma de dous angulos quaesquer é sempre da mesma especie que a semisomma dos dous lados oppostos; e reciprocamente.*

Egualando os valores (18 e 20) de $\text{tang } \frac{1}{2}(\theta' - \theta)$, e operando da mesma maneira sobre a equação resultante; ou, o que val o mesmo, mudando nas equações precedentes os angulos A e B nos supplementos dos lados a e b, e reciprocamente, e depois $\text{tang } \frac{1}{2}c$ em $\text{cot } \frac{1}{2}C$; obteremos

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2}(A - B) &= \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(a - b)}{\text{sen } \frac{1}{2}(a + b)} \text{cot } \frac{1}{2}C, \\ \text{tang } \frac{1}{2}(A + B) &= \frac{\text{cos } \frac{1}{2}(a - b)}{\text{cos } \frac{1}{2}(a + b)} \text{cot } \frac{1}{2}C. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23).$$

São estas as chamadas *analogias de Neper*: e servem principalmente para achar dous lados a e b de um triangulo, conhecido o 3.º lado c, e os angulos adjacentes A e B (equações 22); ou para achar dous angulos A e B, conhecidos os dous lados oppostos a e b, e o angulo comprehendido C (equações 23).

151. *Triangulos isosceles*. Sejam C e B os dous angulos eguaes de um triangulo isosceles (fig. 6); b e c os dous lados eguaes; A o angulo do vertice, e a a base. O arco perpendicular, tirado do vertice para o meio da base, dá dous triangulos symetricos rectangulos, os quaes oferecem as seguintes relações formadas das combinações 3 a 3 dos quatro unicos elementos A, B, a, b, do triangulo isosceles. Assim, por meio d'estas relações, dados dous dos quatro elementos de um triangulo espherico isosceles, o angulo A do vertice, a base a, um dos lados eguaes b, e um dos angulos eguaes B, podemos sempre achar os outros dous

$$\text{sen } \frac{1}{2}a = \text{sen } \frac{1}{2}A \text{ sen } b \dots\dots\dots(n)$$

$$\text{cos } b = \text{cot } B \text{ cot } \frac{1}{2}A \dots\dots\dots(p)$$

$$\text{tang } \frac{1}{2}a = \text{tang } b \text{ cos } B \dots\dots\dots(r)$$

$$\text{cos } \frac{1}{2}A = \text{cos } \frac{1}{2}a \text{ sen } B \dots\dots\dots(q).$$

Problemas que offerecem duas soluções

152. Continuaremos a considerar os triangulos esfericos como resultando da secção de uma esfera por tres planos que passam pelo centro O. A fig. 8 tem por base o circulo KMK' , e representa um hemispherio separado por um d'estes planos; os outros dous planos dão as semicircumferencias $AC\alpha$, BCB''' , que na figura se representam em perspectiva, e tem por intersecção o raio CO. Os planos das tres circumferencias determinam o triangulo esferico ABC. Os arcos CA, $C\alpha$ são supplementares; e o angulo A mede a inclinação do plano $AC\alpha$ sobre a base KK' .

Se pelo raio CO tirarmos o plano MCm , perpendicularmente a esta base KK' , e tomarmos depois $MA' = MA$, de uma e outra parte d'este plano MCm , obteremos um segundo plano $A'C\alpha'$ symetrico com $AC\alpha$, que dará

$$m\alpha = m\alpha', AC = A'C, C\alpha = C\alpha', A = A' = \alpha = \alpha'.$$

Fazendo girar o plano $AC\alpha$ em volta do raio CO, a fim de tomar todas as posições CK, CB, Cf. . . , este plano será perpendicular á base quando coincidir com MCm ; e além d'isto, em qualquer das suas posições formar-se-á com a base dous angulos supplementares, para um e para outro lado do plano. Os arcos CB, CA, Cf. . . , crescem á medida que se desviam do arco perpendicular $CM = \psi$, que é o mais pequeno de todos, até ao arco perpendicular opposto Cm , que é o maior. Isto mesmo se vê resolvendo qualquer dos triangulos, ACM por ex.; porque fazendo $CA = b$, temos

$$\cos ACM = \cot b \operatorname{tang} \psi,$$

expressão na qual é $\operatorname{tang} \psi$ uma quantidade constante.

Quando o angulo ACM chega a 90° , como acontece com o arco CK, cujo plano é perpendicular a MCm , temos $\cot b = 0$, e o arco $CK = 90^\circ$. Se o plano continúa depois a girar para $C\alpha'$, $\cos ACM$ torna-se negativo, e cresce com $\cot b$; de maneira que o arco $C\alpha'$ continua a augmentar. Tudo é symetrico dos dous lados do plano MCm , de maneira que os arcos e as inclinações serão eguaes, dous a dous para os arcos eguaes $MA = MA'$, isto é, será $CA = CA'$, e o angulo $A = A'$.

Girando por esta fórma, o plano secante começa por tornar-se cada vez mais obliquo sobre a base KMK' , tornando-se CB , CA , CK ; porque do triangulo rectangulo resulta ainda

$$\text{sen } \psi = \text{sen } b \text{ sen } A, \dots \dots \dots (24)$$

equação, cujo primeiro membro é constante, e na qual $\text{sen } b$ vai primeiramente crescendo, como acaba de dizer-se, e por conseguinte $\text{sen } A$ decrescendo ao mesmo tempo. Porém logo que o lado b chega a 90° , torna-se então CB em $CK=90^\circ=MK$; e depois $\text{sen } b$, diminuindo, faz com que $\text{sen } A$ aumente, e com que o angulo A , agudo para a base, tendo chegado ao seu menor valor no ponto K , comece a crescer. Este ponto K é o pólo da semicircumferencia MCm , e o angulo K tem por medida o arco $CM=\psi=K$; ou, do outro lado do plano secante o arco $Cm=180-\psi$.

Vê-se pois que todos os arcos que partem de C (fig. 8), e passam por um ponto qualquer da base do semicirculo KMK' são $< 90^\circ$, entre tanto que os outros que passam por KmK' são $> 90^\circ$; e é $CK=CK'=90^\circ$. Além d'isto $CM=\psi$, e $Cm=180-\psi$, valores de ψ resultantes da equação (24), são os limites da grandeza dos arcos CA . Quanto mais um arco se aproxima de CM , mais pequeno é; e quanto mais se aproxima de Cm , pelo contrario tanto maior se torna.

A inclinação dos planos sobre a base, sendo de 90° em MCm , diminue quando toma as posições CB , CA , até CK , onde se torna $K=\psi$; cresce depois até m , tornando-se outra vez de 90° em Cm . O angulo é agudo do lado de CM , e obtuso do lado de Cm , sendo estes ultimos angulos supplementos respectivos dos primeiros. Todos estes angulos obtusos são $< 180-\psi$.

Posto isto, com facilidade se reconhecerá, se num triangulo BCA ou $B'CA$, ou arco CM perpendicular sobre a base AB , cae dentro ou fóra d'este triangulo, e verificar-se-hão os corollarios deduzidos no n.º 144, relativos á grandeza dos lados e dos angulos dos triangulos rectangulos.

Os problemas que offerecem duas soluções, aos quaes se costuma dar o nome de *casos duvidosos*, são aquelles, em que entram, nos dados, um angulo e um lado opposto, o que acontece nos problemas 3.º e 4.º do n.º 148.

153. 1.º Caso. Sendo dados dous lados a e b e o angulo opposto A . Corte-se o hemispherio KMK' , (fig. 8) por um plano $AC\alpha$ que passe pelo centro O , e que tenha com a base uma inclinação igual ao angulo A ; e tome-se depois $AC=b$. Será C o vertice do triangulo, o qual deve

ser fechado por um arco $CB = a$, de grandeza dada. Percorramos os diferentes casos.

1.º *Supponhamos que é o angulo $A < 90^\circ$.* O lado a que fecha o triangulo deverá então cair no espaço $\alpha A'MA$; por que, se assim não fosse, e caísse como Cf, Ca', \dots então os triangulos $CAf, CA\alpha', \dots$ teriam, em vez do angulo agudo A , outro que seria o seu supplemento, do outro lado do plano αCA . Os arcos, taes como CB e CB' , são eguaes dous a dous, e tem a mesma inclinação sobre a base, quando passam por pontos B e B' equidistantes de M . Tomemos $MA' = MA, MB' = MB$, os arcos serão $CB' = CA = b, CB = a$.

a) Consideremos primeiro o caso em que é o lado $b < 90^\circ$, por ex. $b = CA$.

Se é o lado $a < b$, a cae no angulo $A'CA$, como CB e CB' , e temos dous triangulos BCA e $B'CA$, em que entram os tres elementos A, b, a , isto é, temos duas soluções. Neste caso um dos angulos B da base é obtuso, e o outro B' é agudo.

Se é o lado $a = ou > b$, o arco a cae como Cf' , e o triangulo ACf' é o unico que reune os tres elementos dados, visto que o arco Cf symetrico com Cf' , fica excluido, por estar para o outro lado do plano αCA . Por tanto ha só uma solução. O angulo B do triangulo ACf' é agudo em f' , hem como b .

b) Consideremos em segundo logar o caso em que é o lado $b > 90^\circ$, por ex. $b = Cz$.

Se é a somma dos lados $a + b < 180^\circ$, isto é, se o lado a cae no espaço $\alpha CA'$, como CB ou CB' , ha duas soluções $BC\alpha$ e $B'C\alpha$. O angulo B da base d'estes triangulos é agudo num, obtuso noutro.

Se é a somma dos lados $a + b = ou > 180^\circ$, isto é, se o lado a cae no espaço $A'C\alpha$, como Cf' , ha só uma solução $f'C\alpha$; f' e b são obtusos.

2.º *Supponhamos agora que é o angulo $A > 90^\circ$.* Neste caso o lado a que fecha o triangulo, partindo de C , deve estar para outro lado do plano αCA , e cair como Cf, CB'', \dots

a') Consideremos tambem em primeiro logar o caso em que é o lado $b < 90^\circ$, por ex. $b = CA$.

Se é a somma dos lados $a + b > 180^\circ$, isto é, se o lado a cae no espaço $\alpha' C\alpha$, como CB'' ou CB''' , ha duas soluções, taes como ACB'' e ACB''' . Um dos dous angulos da base, B'' e B''' , é agudo, o outro obtuso.

Se é a somma dos lados $a + b = ou < 180^\circ$, isto é, se o lado a cae no espaço $AC\alpha'$, como CK , ha só uma solução ACK . O angulo K da base é agudo como b .

b') Consideremos em segundo logar o caso em que é o lado $b > 90^\circ$, por ex. $b = C\alpha$.

Se é o lado $a > b$, a cae no espaço $\alpha C\alpha'$, como CB'' e CB''' , e ha duas soluções taes como $\alpha CB''$ e $\alpha CB'''$. O angulo da base B''' é agudo; o angulo B'' obtuso.

Se é o lado $a =$ ou $< b$, a cae, como CK , no espaço $\alpha'CA$, e ha só uma solução possível $KC\alpha$. O angulo K da base é obtuso com b .

Na seguinte tabella apresentâmos em resumo os differentes caracteres, que indicam a existencia de duas ou de uma só solução.

$$\text{Se } A < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} b < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a < b \dots \dots \dots \text{duas soluções} \\ a \left\{ \begin{array}{l} = b \dots \dots \dots \text{uma solução} \\ > b \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ \\ b > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a + b < 180^\circ \dots \dots \text{duas soluções} \\ a + b \left\{ \begin{array}{l} = 180^\circ \dots \dots \text{uma solução} \\ > 180^\circ \dots \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{Se } A > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} b < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a + b > 180^\circ \dots \dots \text{duas soluções} \\ a + b \left\{ \begin{array}{l} = 180^\circ \dots \dots \text{uma solução} \\ < 180^\circ \dots \dots \end{array} \right. \\ \\ b > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a > b \dots \dots \dots \text{duas soluções} \\ a \left\{ \begin{array}{l} = b \dots \dots \dots \text{uma solução} \\ < b \dots \dots \dots \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Viu-se pela analyse precedente, que, no caso de uma só solução, B e b são da mesma especie. Mas sabemos (n.º 147) que a perpendicular abaixada do vertice C sobre a base c , cae dentro ou fóra do triângulo (o que tambem se reconhece na fig. 8), conforme os angulos A e B da base são de semelhante ou diferente especie; por conseguinte nas equações $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, *empregar-se-ha o signal + quando os arcos A e b forem da mesma especie, e — no caso contrario, o que indicará qual das soluções, que dá o calculo n.º 148, 3.º, se deve adoptar.*

Cumpre notar que o valor do lado a está entre os limites CM e Cm , isto é, entre ψ e $180^\circ - \psi$, como se deduz não só da equação (24), mas tambem da impossibilidade de construir o triângulo, quando a está fóra d'estes limites. Vê-se tambem na figura que no caso de A e a não serem

da mesma especie, e de não estar o lado a comprehendido entre os limites b e $180^\circ - b$, não ha triangulo possivel.

154. 2.º CASO. Sendo dados dous angulos A e B , como um lado opposto a .

Sem ser necessario discutir as differentes circumstancias na figura, este caso se reduzirá ao precedente pela consideração do triangulo suplementar $A'B'C'$ (n.º 141), no qual são conhecidos os lados $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$, e o angulo $A' = 180^\circ - a$. E podemos servir-nos da tabella de cima, mudando os angulos nos lados oppostos, e reciprocamente.

Como neste caso B e b são da mesma especie quando ha só uma solução, vê-se, raciocinando como no caso precedente, que: nas equações $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, se deve empregar o signal $+$ quando os arcos B e a forem da mesma especie, e o signal $-$ no outro caso; o que indicará qual das duas soluções, que dá o calculo n.º 148, 4.º, se deve adoptar ou rejeitar.

O angulo A deve tambem neste caso ficar comprehendido entre os valores supplementares de ψ dados pela equação (24).

Não ha triangulo possivel, quando A e a não forem da mesma especie, e não estiver A entre os limites B e $180^\circ - B$.

155. Sendo o triangulo rectangulo, e CM ou Cm um dos lados, se for dado um angulo e o lado opposto, haverá duas soluções, que em certos casos poderão reduzir-se a uma só.

1.º Dada a hypotenusa a e um lado b , achar o angulo opposto B ? A equação (n) que resolve este caso, dá B expresso em senos, os quaes correspondem a dous arcos supplementares.

Dada a hypotenusa a e o angulo B , achar o lado opposto b ? A mesma equação (n) dá dous arcos supplementares para o lado opposto b .

Com tudo, em ambos estes dous casos não ha senão uma solução possivel, porque os dous arcos CA ou CA' , que fecham o triangulo CMA ou CMA' , são symetricos; e por isso devem B e b ser da mesma especie, o que faz desaparecer a indecisão.

2.º Se forem dados um lado b do angulo recto e o angulo opposto B , a terceira parte pedida admittirá dous valores. Porque, ou se pede a hypotenusa a , e a equação (n) dá $\text{sen } a$; ou se pede o terceiro lado c , e a equação (s) dá $\text{sen } c$; ou finalmente se pede o angulo C adjacente ao lado conhecido, e emprega-se a equação (q), que dá $\text{sen } C$. Vê-se pois que a incognita admittre dous valores supplementares para o arco correspondente a cada um d'estes senos.

156 Passemos a fazer algumas applicações numericas.

I. Sejam $a = 133^\circ 19'$, $b = 57^\circ 28'$, $A = 45^\circ 23'$. O triangulo é impossivel, porque a não está entre $57^\circ 28'$, e o seu supplemento $122^\circ 32'$; e porque além d'isso não são A e a da mesma especie.

II. Outro tanto acontecerá se for $B = 120^\circ$, $A = 51^\circ$, $a = 101^\circ$; porque tambem A não está entre 120° e o seu supplemento 60° ; e porque A e a não são da mesma especie.

III. Se for $b = 40^\circ 0' 10''$, $a = 50^\circ 10' 30''$, $A = 42^\circ 15' 14''$, haverá uma unica soluçào, porque $A < 90^\circ$, $b < 90^\circ$, $a > b$. B é $< 90^\circ$; e porque A e b são da mesma especie, devemos tomar $c = \varphi + \varphi'$. O calculo das equaçõs (a , c e b) n.º 148 dá

$$\begin{array}{lll} \text{tang } b \dots \overline{1.9238563} & \text{cos } a \dots \overline{1.8064817} & \varphi = 31^\circ 50' 46'' \\ \text{cos } A \dots \overline{1.8693330} & \text{cos } \varphi \dots \overline{1.9291471} & \varphi' = 44.44.50 \\ \text{tang } \varphi \dots \overline{1.7931893} & - \text{cos } b \dots \overline{1.8842363} & c = 76.35.36 \\ & \text{cos } \varphi' \dots \overline{1.8513925} & \end{array}$$

Para achar o angulo C do vertice, as equaçõs (a' , d' e b') dão

$$\begin{array}{lll} \text{cos } b \dots \overline{1.8842363} & \text{tang } b \dots \overline{1.9238563} & \theta = 55^\circ 9' 59'' \\ \text{tang } A \dots \overline{1.9583058} & \text{cot } a \dots \overline{1.9211182} & \theta' = 66.26.21 \\ \text{cot } \theta \dots \overline{1.8425421} & \text{cos } \theta \dots \overline{1.7567851} & C = 121.36.20 \\ & \text{cos } \theta' \dots \overline{1.6017596} & \end{array}$$

Finalmente a regra dos quatro senos (II) dá $B = 34^\circ 15' 3''$.

IV. Se for $A = 42^\circ 15' 14''$, $B = 121^\circ 36' 20''$, $a = 50^\circ 10' 30''$, teremos duas soluçõs, por ser $a < 90^\circ$, $B > 90^\circ$, $A + B < 180$; e por serem B e a de diferente especie, tomaremos nos valores de c e C o signal $-$. As equaçõs (a' , c' e C) conduzem-nos às seguintes operaçõs.

$\cos a \dots \overline{1.8064817}$	$\cos A \dots \overline{1.8693330}$	$\sin a \dots \overline{1.8853636}$
$\text{tang } B \dots \overline{0.2108864}$	$\text{sen } \theta \dots \overline{1.8406262}$	$\text{sen } B \dots \overline{1.9302745}$
$\text{cot } \theta \dots \overline{0.0173681}$	$\text{cos } B \dots \overline{1.7193880}$	$\text{sen } A \dots \overline{1.8276379}$
$\theta = \overline{43^{\circ}51'16''}$	$\text{sen } \theta' \dots \overline{1.9905712}$	$+$ $\text{sen } b \dots \overline{1.9880002}$
$\theta' = \overline{78.6.19}$	ou $\dots \overline{101^{\circ}53'41''}$	$b = \overline{76^{\circ}35'36''}$
$C = \overline{34.15.3}$	ou $\overline{C} = \overline{581.2.25}$	ou $= \overline{173.24.24}$
$\text{tang } a \dots \overline{0.0788818}$	$\text{cot } A \dots \overline{0.0416956}$	
$\text{cos } B \dots \overline{1.7193874}$	$\text{tang } B \dots \overline{0.2108873}$	
$\text{tang } \varphi \dots \overline{1.7982692}$	$\text{sen } \varphi \dots \overline{1.7259905}$	
$\varphi = \overline{32^{\circ}8'50''}$	$\text{sen } \varphi' \dots \overline{1.9785734}$	$+$
$\varphi' = \overline{72.9.0}$	ou $\dots \overline{107^{\circ}51'0''}$	
$c = \overline{40.0.10}$	ou $\dots \overline{c} = \overline{75.42.10}$	

Uma d'estas duas soluções reproduz o triangulo precedente, e vem a ser $f'CA'$ (fig. 8); a outra fCA' .

Conhecendo os tres lados, achar um angulo?

$a = \overline{76^{\circ}35'36''}$	$\text{sen} \dots \overline{1.9880008}$	os outros elementos do
$b = \overline{50.10.30}$	$\text{sen} \dots \overline{1.8853636}$	triangulo são:
$c = \overline{40.0.10}$		
$2p = \overline{166.46.16}$	$\text{sen} \dots \overline{1.8733644}$	$A = \overline{121^{\circ}36'19''8}$
$p = \overline{83.23.8}$		$B = \overline{42.15.13,7}$
$p - a = \overline{6.47.32}$	$\text{sen} \dots \overline{1.0728716}$	$C = \overline{34.15.2,8}$
$p - b = \overline{33.12.38}$	$\text{sen} \dots \overline{1.7385565}$	$\psi = \overline{40.51.3,0}$
	$\text{sen}^2 \dots \overline{2.9380637}$	$\varphi, \varphi', \theta, \theta',$ são dados
$\frac{1}{2}C = \overline{27.7.31,4}$	$\text{sen} \dots \overline{1.4690318}$	acima; o triangulo será
$C = \overline{34.15.2,8}$		aqui o mesmo.

Concluiremos a trigonometria espherica, apresentando todos os elementos d'um triangulo espherico. Escolhendo á vontade tres d'estes elementos para servirem de dados, calcular-se-hão para exercicio os outros tres restantes (Nota 2.ª)

ARCOS	Log. sen.	Log. cos.	Log. tang.
A = 121° 36' 10" 81	$\overline{1.9302747}$	$\overline{1.7193874}$ —	0.2108873 —
B = 42.15.13,66	$\overline{1.8276379}$	$\overline{1.8693336}$	$\overline{1.9583043}$
C = 34.15. 2,76	$\overline{1.7503664}$	$\overline{1.9172860}$	$\overline{1.8330804}$
a = 76.35.36,0	$\overline{1.9880008}$	$\overline{1.3652279}$	0.6227729
b = 50.10.30,0	$\overline{1.8853636}$	$\overline{1.8064817}$	0.0788816
c = 40. 0.10,0	$\overline{1.8080026}$	$\overline{1.8842463}$	$\overline{1.9238564}$
φ = — 32. 8.50,0	$\overline{1.7259905}$ —	$\overline{1.9277212}$	$\overline{1.7982693}$ —
φ' = 72. 9. 0,0	$\overline{1.9785741}$	$\overline{1.4864674}$	0.4921067
θ = — 43.51.16,2	$\overline{1.8406263}$ —	$\overline{1.8579964}$	$\overline{1.9826249}$ —
θ' = 78. 6.19,0	$\overline{1.9905733}$	$\overline{1.3141076}$	0.6764656
A respeito do arco perpendicular será			
ψ = 40.51. 3,0	$\overline{1.8156388}$	$\overline{1.9368787}$	$\overline{1.8787602}$

II. SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO

Princípios geraes

157. Para exprimir analyticamente a posição no espaço de um ponto M (fig. 9), imaginem-se tres planos fixos zAx , xAy , zAy , taes que se cortem todos no mesmo ponto A, e tenham dous a dous por intersecção os eixos Ax , Ay , Az , que para mais facilidade suppremos por ora rectangulares. Marque-se depois a distancia PM, ou $z=c$, d'este ponto á sua projecção P sobre um d'estes planos; e tambem esta projecção por

meio das coordenadas AN, AS do ponto P, ou $x = a$, $y = b$. As quantidades dadas, ou as *coordenadas* a , b , c , são as distancias MO, MR, MP, do ponto M aos tres planos, e são tambem as arestas que determinam o paralelepido ON.

Reflectindo que, além do angulo triedro $zAxy$, os outros planos coordenados formam mais sete triedros, reconhecer-se-ha que a posição do ponto M no espaço não fica determinada pelas coordenadas a , b , c , em quanto não introduzirmos as noções sobre os signaes (n.º 25). Para as applicar a este caso convencionou-se: que se considerassem negativos os z correspondentes aos pontos que ficassem abaixo do plano xAy , produzido indefinidamente: que se considerassem negativos os x correspondentes aos pontos que ficassem para a esquerda do plano zAy , do lado x' : e finalmente que se considerassem tambem negativos os y correspondentes aos pontos que ficassem por traz do plano zAx .

158. Succede muitas vezes que em uma questão tudo é semelhante a respeito dos tres eixos x , y , z . Havendo então uma equação $X = 0$, relativa ao eixo dos x , haverá uma semelhante $Y = 0$, correspondente ao eixo dos y , e uma terceira $Z = 0$ relativa ao eixo dos z . Ora neste caso, as duas ultimas equações $Y = 0$ e $Z = 0$ podem deduzir-se de $X = 0$ por simples mudança de letras. As permutações devem fazer-se pela seguinte maneira.

Poremos em X todas as quantidades relativas ao eixo dos x em logar das quantidades analogas correspondentes ao eixo dos y ; depois estas em logar das que correspondem ao eixo z ; e finalmente estas ultimas quantidades em logar das primeiras que correspondiam ao eixo dos x . Por esta permutação *em gyro*, deduziremos Z de X ; por uma segunda permutação da mesma natureza effectuada sobre Z , obteremos Y ; e por uma terceira analoga, effectuada sobre Y , recairemos em X .

Supponhamos que temos as tres equações semelhantes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, relativas aos tres eixos e nas quaes além de x , y e z entram os tres angulos α , β , γ , que correspondem respectivamente a estas tres coordenadas.

Assentaremos em uma linha, mas separadamente, as tres coordenadas e os tres angulos; depois por baixo noutra linha, tambem separadamente, mas dispostas por ordem differente, as mesmas seis quantidades, pela fórma seguinte

$$x, y, z, \quad \alpha, \beta, \gamma,$$

$$z, x, y, \quad \gamma, \alpha, \beta.$$

724

Feito isto substituiremos, na 1.^a equação $X=0$, cada uma das quantidades da linha superior pela quantidade correspondente da linha inferior; e com esta permutação obteremos a 3.^a equação $Z=0$. Poremos de novo nesta ultima, as quantidades da linha inferior em lugar das que lhe correspondem na linha superior, e virá a 2.^a equação $Y=0$; e operando similhantemente sobre essa equação, recairemos na 1.^a $X=0$, d'onde partiremos.

E com effeito, cada uma d'estas operações equival a uma mudança nos eixos das coordenadas, pela qual se fazem primeiramente girar os eixos dos x e dos y no seu plano, por tal modo que o eixo dos x positivos vem cair sobre o eixo dos y positivos, e este sobre o eixo dos x negativos. Faz-se depois girar este eixo dos y positivos assim deslocado, e o eixo dos z positivos, de maneira que o primeiro vem cair sobre o eixo dos z positivos, e este ultimo sobre o eixo primitivo dos x positivos; d'onde resulta que a final cada um dos eixos das coordenadas positivas vem occupar o lugar de um dos outros eixos das coordenadas positivas. É por isso que as equações relativas aos tres eixos coordenados se deduzem uma das outras por simples permutações de letras, sem ser necessario bulir nos signaes; o que não aconteceria, se simultaneamente se não permutassem pela maneira indicada as tres coordenadas, e as quantidades que respectivamente lhes correspondem.

159. Se for dada uma equação entre as tres coordenadas, tal como $f(x, y, z) = 0$, esta equação será indeterminada. Se dermos a duas d'estas variaveis quaesquer valores, $x = a = AN$, $y = b = PN$ (fig. 9), da equação proposta resultará para z , pelo menos, uma raiz $z = c$. Se esta for real, levantaremos do ponto P sobre o plano yAx a perpendicular $PM = c$, e d'este modo o ponto M do espaço ficará determinado. Dando outros valores ás arbitrarías x e y , isto é, tomando, como se quizer, diferentes pontos P sobre o plano xAy , deduziremos da equação os valores correspondentes de z , que determinarão outros tantos pontos do espaço. Todos estes pontos assim achados estarão sobre uma superficie, que será o *logar* de todos elles, quando os imaginarmos unidos por lei de continuidade. Esta superficie será, por exemplo, um cône, um cylindro, uma esphera; e assim $f(x, y, z) = 0$ será a *equação da superficie*, porque distingue os seus postos de todos outros do espaço.

Se z tiver muitos valores reaes, a superficie terá muitos ramos (*);

(*) Não havendo em portuguez palavra propria, que exprima o mesmo que a palavra *nappe* adoptada pelos geometras francezes, assentámos que a expressão *ramos da superficie* podia exprimir a idéa de que se tracta, estando de mais a mais em analogia com outra já adoptada de *ramos de curva*.

e se for imaginario, a perpendicular indefinida levantada em P sobre o plano xy não encontrará a superficie.

Se depois de havermos assignado um valor a y , tal como $y = b = AS$, fizermos variar x , a ordenada $PM = z$ mover-se-ha na direcção SP parallelamente ao plano xz , e as variações correspondentes, por que passar, serão determinadas pela equação $f(x, b, z) = 0$, que será por conseguinte a da intersecção da superficie pelo plano SM parallelamente aos xz . Pela mesma razão fazendo $x = a = AN$, ou $z = c = AT$, teremos as intersecções da superficie pelos planos MN, ou OR, parallelamente aos yz ou aos xy .

Fica assim evidente: que $z = 0$ é a equação do plano xy ; $z = c$ a de um plano que lhe é parallelamente á distancia c ; $x = 0$ a equação do plano yz ; $x = a$ a do plano parallelamente á distancia a ; etc.

Do triangulo rectangulo AMP resulta $z^2 + AP^2 = AM^2$; e como APN dá $AP^2 = x^2 + y^2$, será, fazendo $AM = R$,

$$(1) \dots \dots x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Logo: 1.º a distancia de um ponto á origem das coordenadas é igual á raiz da somma dos quadrados das tres coordenadas do mesmo ponto: 2.º se x , y e z forem variaveis, esta equação caracterizará todos os pontos do espaço, cuja distancia R á origem é a mesma; e será por conseguinte a equação da esphera, que tem o raio R, e o centro na origem das coordenadas.

Sejam (fig. 10) n e m as projecções sobre o plano xy dos dous pontos N (x, y, z) e M (x', y', z'); mn será a projecção da linha $MN = R$, e teremos (n.º 33)

$$mn^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Além d'isso a linha MP parallelamente a mn , formando o triangulo MNP rectangulo em P, dá

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = mn^2; \text{ e como } PN = Nn - Mm = z - z', \text{ será}$$

$$(2) \dots \dots (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2,$$

sendo R a distancia entre os pontos (x, y, z) e (x', y', z') (*). Se considerarmos x, y, z como variaveis, esta equação será a de uma esphera de raio R , cujo centro está situado no ponto $M(x', y', z')$.

160. Imaginemos a superficie de um cylindro recto tendo por base uma curva qualquer sobre o plano xy , dada pela sua equação $f(x, y) = 0$. A perpendicular indefinida z , levantada em qualquer ponto d'esta curva sobre o plano xy , é uma geratriz d'este solido; e por conseguinte qualquer valor que se dê a z , sempre a extremidade d'esta perpendicular estará sobre a superficie do cylindro.

Por conseguinte: a equação da superficie de um cylindro recto é a da sua base, ou $f(x, y) = 0$.

Quando a geratriz do cylindro recto for perpendicular ao plano dos xz , a equação d'esta superficie será a da base traçada naquelle plano.

Por um raciocinio identico se prova, que a equação de um plano, perpendicular a um dos planos coordenados, é a mesma que a do seu traço sobre este plano, isto é, a da linha de intersecção dos dous planos. Assim, se for $AB = \alpha$ (fig. 6) a $a = \text{tang CBI}$, a equação $x' = az + \alpha$, que é a da linha BC existente no plano zAx , será tambem a do plano $FEBC$, perpendicular a zAx , e que passa por BC .

161. Sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações de duas quaesquer superficies, e vejamos o que resulta da sua combinação.

Ficando neste caso arbitraria só uma das variaveis, z por ex., este systema de equações representará a serie de pontos communs a ambas as superficies, ou por outras palavras a curva resultante da sua intersecção.

162. Assim, recapitulando, vê-se: que um ponto fica determinado por tres equações entre as suas tres coordenadas, x, y e z ; uma superficie por uma só equação entre as tres coordenadas variaveis dos seus differentes pontos; e uma curva por duas equações, que vem a ser as das duas superficies, que na sua intersecção determinam esta linha.

Como por uma linha dada podem passar infinitas superficies, é claro que uma curva no espaço pode ser dada por uma infinidade d'equações.

(*) Como mB, nC (fig. 10) parallelas a Ay , dão $BC = x - x' =$ a projecção de MN sobre o eixo dos x , vê-se que o comprimento de uma linha no espaço é a raiz da somma dos quadrados das suas projecções sobre os tres eixos.

Temos tambem $MP = MN \cos NMP$; logo a projecção $mn = MN$ é o producto da linha projectada pelo coseno da inclinação; e, reciprocamente, um linha no espaço é o quociente da sua projecção sobre um plano, dividida pelo coseno do angulo que a linha faz com o mesmo plano. Estes theoremas extendem-se tambem ás áreas planas situadas no espaço, como veremos adiante.

Eliminando z entre $M=0$ e $N=0$, obtem-se uma equação $P=0$ entre x e y . Esta equação é a de um cylindro recto, cuja intersecção com qualquer das duas superficies é a curva de que se tracta: e tambem é a equação da projecção da mesma curva sobre xy . Se em vez de z , eliminarmos y , vê-se do mesmo modo que a equação resultante $Q=0$, é a de um cylindro recto, ou a da projecção da curva sobre o plano xz . Assim $P=0$, $Q=0$, são as equações de dous cylindros, que podemos substituir ás superficies dadas; e são tambem as equações das projecções da curva, e as da mesma curva. D'onde se segue, que *podemos tomar por equações de uma curva as equações das suas projecções sobre dous planos coordenados.*

163. Appliquemos estes principios á linha recta. Podemos tomar para as duas equações as de dous planos quaesquer, que conttenham a mesma recta; convirá porém preferir as que appresentam resultados mais simples. Assim $x=0$, $y=0$, que são as equações dos planos yz e xz , são as equações do eixo dos z ; $x=0$, $z=0$, são as do eixo dos y ; e $y=0$, $z=0$, são as do eixo dos x . Do mesmo modo se vê, que $x=\alpha$, $y=\beta$, são as equações de uma recta PM (fig. 9) paralela aos z , e cujo pé P , ou intersecção com o plano xy , tem por coordenadas $x=\alpha$, $y=\beta$. E assim a respeito dos outros eixos.

Dada uma recta qualquer EF no espaço (fig. 11 a), tiremos por ella um plano $FEBC$ perpendicular ao plano xz ; BC será a sua projecção sobre este plano. Do mesmo modo acharemos a projecção HG de EF sobre o plano yz . As equações d'estas projecções, ou dos planos projectantes, ou

$$(3) \dots\dots\dots x = az + \alpha, y = bz + \beta,$$

são as da recta EF .

É facil de ver, que α e β são as coordenadas AB e AG do ponto E , onde a recta EF encontra o plano xy ; e que a e b são as tangentes dos angulos formados pelas projecções BC e HG da mesma recta com o eixo AZ . Eliminando z , obtem-se a equação da projecção sobre o plano xy ,

$$(4) \dots\dots\dots ay = bx + a\beta - bz.$$

164. Se a recta EF (fig. 11) passar por um ponto $F(x', y', z')$, as

projecções C e H d'este ponto estarão situadas sobre as da recta; logo as equações da mesma recta serão

$$(5) \dots\dots\dots x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Se a recta passar por um segundo ponto $(x'', y'' z'')$, obteremos outras duas equações semelhantes, por meio das quaes e das precedentes se determinarão os valores de a e b , que são $a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}$, $b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}$.

Se a recta passar pela origem A, as equações serão

$$(6) \dots\dots\dots x = az, \quad y = bz.$$

Sabe-se pela *Geometria*, que as projecções de duas rectas paralelas sobre um mesmo plano, são paralelas; logo as equações d'estas rectas devem ter os mesmos coefficients a e b para z , e differir unicamente nos valores das constantes α e β .

165. Se forem dadas as equações de duas rectas

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta; \quad x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta',$$

e eliminarmos entre ellas as coordenadas variaveis x, y, z , virá uma equação

$$(7) \dots\dots\dots (\alpha - \alpha') (b - b') = (\beta - \beta') (a - a'),$$

a qual, sendo independente das mesmas variaveis, é a *condição necessaria para que as mesmas rectas se encontrem*. Se ella não for satisfeita, as linhas não se cortarão; e se o for, o ponto da intersecção terá por coordenadas

$$z = \frac{\alpha - \alpha'}{a' - a} = \frac{\beta - \beta'}{b' - b}, \quad x = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a}, \quad y = \frac{b'\beta - b\beta'}{b' - b}.$$

Se as rectas forem paralelas, será então $a = a'$, $b = b'$, e os valores das coordenadas sairão infinitos, o que indica que as mesmas rectas se não podem encontrar.

Equações do plano, do cylindro, do cône, etc.

166. As condições pelas quaes se determina a natureza de qualquer superficie, reduzem-se sempre, em ultima analyse, á lei da sua geração, a qual consiste em que um curva *generatriz*, de fórma constante ou variavel, se move de certa maneira ao longo de uma ou muitas linhas dadas, que se chamam *directizes*, e gera assim a superficie de que se tracta. Para achar a equação da superficie gerada emprega-se um raciocinio semelhante ao do n.º 136; do que passamos a dar alguns exemplos, começando pelo plano.

Um plano DC (fig. 12) pode considerar-se gerado por uma recta EF, que, conservando-se sempre parallela a uma direcção determinada, é obrigada a mover-se sobre uma recta fixa. Supponhamos pois, que a *generatriz* EF, ficando sempre parallela á intersecção BC do plano DC com o plano dos xz , é obrigada, em qualquer das suas posições, a encontrar sempre a intersecção BD do mesmo plano DC com o plano dos yz , a qual é neste caso a *directiz*. Para achar a equação do plano é necessario exprimir analyticamente estas duas condições.

As duas secções BC e BD encontrando-se em B no eixo dos z , tem por equações, fazendo $AB = C$,

$$\begin{aligned} BC \dots\dots\dots y = 0, & \quad z = Ax + C, \\ BD \dots\dots\dots x = 0, & \quad z = By + C \dots\dots\dots (1). \end{aligned}$$

Como a linha EF, em qualquer das suas posições, deve ser sempre parallela a BC, o plano projectante EHIF será parallelo a xz , e HI a Ax. A projecção de EF sobre o plano xz tambem será parallela a BC. Assim as equações de EF serão

$$y = \alpha, \quad z = Ax + \beta \dots\dots\dots (2).$$

Eliminando x, y, z entre estas ultimas equações, e as equações (1) da *directriz*, obtem-se a equação

$$\beta = Bx + C \dots\dots\dots (3)$$

a qual, pelo que fica dicto (n.º 165), é a *equação de condição para que a geratriz tenha, em todas as suas posições, um ponto commum com a directriz fixa.*

Se dermos pois a α e β valores que satisfaçam á ultima equação (3), e os substituirmos em (2), estas serão as de geratriz em uma das suas posições. Se nas equações (2) substituirmos o valor (3) de β , estas equações serão as de uma geratriz qualquer, cuja posição dependerá do valor arbitrario que se der a α . E finalmente, se entre as equações (2) e (3) eliminarmos α e β , a equação resultante

$$z = Ax + By + C, \dots \dots \dots (4)$$

sendo independente d'aquellas quantidades, será a do plano; por isso que então x , y , z representam as coordenadas de uma geratriz qualquer, de que o plano é o *logar geometrico.*

Da analyse da equação do plano se vê: 1.º que C representa a coordenada z inicial, ou AB : 2.º que A e B representam as tangentes dos angulos, que fazem com os eixos dos x e dos z os traços BC e BD do plano sobre os dos xz e dos yz : 3.º que se fizermos variar C sómente, o plano se moverá parallelamente, por isso que os traços successivos se conservam parallelos.

Conclue-se tambem do que fica exposto:

1.º Que toda a equação do 1.º grau a tres variaveis é a de um plano, porque pode sempre reduzir-se á fórmula (4).

2.º Que duas equações quaesquer do 1.º grau a tres variaveis, são as de uma linha recta, resultante da intersecção dos planos representados por aquellas equações.

3.º Que, sendo dada a equação do plano, obteremos as equações dos seus traços com os planos dos xz , yz e xy , fazendo nella respectivamente $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, que são as equações dos mesmos planos. Assim $Ax + By + C = 0$ é a equação do traço do plano com o dos xy .

Podíamos ter considerado o plano gerado por uma recta qualquer no espaço obrigada a mover-se sobre outras duas, que poderiam ser os traços do mesmo plano com dous dos planos coordenados. Este calculo, um pouco mais complicado, e que propomos para exercicio, conduziria aos mesmos resultados.

167. Por um raciocinio identico acharemos a equação do *Cylindro*, o qual pode considerar-se gerado por uma recta qualquer, que, conser-

vando-se *paralela a si mesma, é obrigada no seu movimento a encontrar sempre uma curva dada no espaço.*

Sejam

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \dots \dots \dots (a)$$

as equações d'uma recta *paralela á generatriz, nas quaes a e b se supõe conhecidas, e α e β dependentes da posição da recta. Sejam tambem $M = 0, N = 0$ as equações da directriz. A condição para que esta curva seja encontrada sempre pela generatriz é expressa (n.º 165) pela equação $\beta = F\alpha$, resultante da eliminação de x, y, z , entre as quatro equações d'estas linhas.*

Se nas equações (a) substituirmos $F\alpha$ por β , estas duas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor de α .

Se depois eliminarmos d'ellas a quantidade α , obteremos uma relação entre x, y e z , que terá logar para qualquer generatriz, e que será por conseguinte a equação pedida.

Logo, para achar a equação de uma superficie cylindrica, devemos eliminar x, y e z entre as equações (a) e as duas $M = 0, N = 0$ da curva directriz; depois na equação resultante $\beta = F\alpha$, substituir $x - az$ por α , e $y - bz$ por β . A equação do *cylindro* será pois da fórma

$$y - bz = F(x - az); \dots \dots \dots (4)$$

dependendo a fórma da funcção F da natureza da directriz.

Se por ex., a base for um circulo de raio r , traçado no plano xy , e collocado como na fig. 14, com o diametro AE sobre o eixo dos x , e a origem em A : as equações d'esta base, que se pode tomar por directriz, serão

$$y^2 + x^2 = 2rx, \quad z = 0;$$

entre as quaes e as equações (a) se eliminarmos x, y, z , virá a equação de condição $\beta^2 + \alpha^2 = 2r\alpha$ (*).

(*) Isto é evidente, reflectindo, que α e β são as coordenadas do pé da generatriz. A mesma consideração se fará a respeito do cone.

Poder-se-ha achar a equação do plano, considerando-o como um cylindro cuja base é uma recta.

Logo

$$(y - bz)^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az) \dots \dots \dots (5)$$

é a equação do *cylindro obliquo de base circular*. As quantidades a e b serão determinadas pela direcção do eixo.

Se o eixo estiver no plano xz , será $b = 0$, e a equação precedente tornar-se-ha em

$$y^2 + (z - az)^2 = 2r(x - az).$$

Finalmente, se o centro do circulo estiver na origem A , substituir-se-ha por r^2 o 2.º membro de (5).

168. Sejam $M = 0, N = 0 \dots \dots \dots (a)$

as equações da directriz de *uma superficie conica*, qualquer cujo vertice S tem por coordenadas a, b, c .

A generatriz d'esta superficie é obrigada a passar pelo vertice e a encontrar sempre no seu movimento a directriz.

A 1.ª condição é expressa (n.º 164) pela equação

$$x - a = \alpha(z - c), y - b = \beta(z - c) \dots \dots \dots (a'')$$

A 2.ª é expressa, (n.º 165) pela equação $\beta = F\alpha$, resultante da eliminação de x, y, z , entre as equações (a') e (a'').

Eliminando depois β e α por meio das equações (a'') virá a equação do *cóne*

$$\frac{y - b}{z - c} = F \left(\frac{x - a}{z - c} \right) \dots \dots \dots (6)$$

na qual a fórmula de F dependerá tambem da natureza da directriz, e será determinada quando esta o for.

Se, por ex. a base for o circulo AE (fig. 14), que podemos tomar por directriz, as suas equações (a'), suppondo a origem na extremidade A do diametro, e este coincidindo com o eixo dos x , serão

$$z = 0, y^2 + x^2 = 2rx;$$

e a equação $\beta = F\alpha$ será neste caso

$$(a - \alpha c)^2 + (b - \beta c)^2 = 2r(a - \alpha c):$$

d'onde se reduz

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 2r(z - c) \cdot (az - cx),$$

a qual será a equação do cône oblíquo de base circular.

Se quisermos que o eixo SC esteja no plano xz , como na fig. 14, faremos $b = 0$, e virá

$$c^2(x^2 + y^2) + 2c(r - a)xz + a(a - 2r)z^2 + 2acrz - 2c^2rx = 0.$$

Se o cône é recto, poremos $a = r$. Mas neste caso é mais simples tomar o eixo dos z para o eixo do cône, e acha-se então para equação d'esta superficie assim disposta,

$$c^2(x^2 + y^2) = r^2(z - c)^2, \text{ ou } x^2 + y^2 = m^2(z - c)^2, \dots\dots (7)$$

designando por m a tangente $\frac{r}{c}$ do angulo formado pelo eixo e pela geratriz.

Se o circulo da base não fosse traçado no plano xy , mas em outro inclinado sobre este, e perpendicular aos xz , seria necessario, designando por A a tangente do angulo que a base fizesse com o plano xy , substituir por (a') as equações

$$z = Ax, x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

169. As superficies de revolução podem considerar-se geradas pelo movimento de um circulo BDC (fig. 15), o qual sendo perpendicular a um eixo Az , conserva sempre o centro I sobre este eixo, e cujo raio IC vai continuamente variando, de modo que o circulo corta sempre uma dada directriz CAB .

Como o circulo genitor deve ficar constantemente paralelo ao plano dos xy , as suas equações serão as do seu plano e do seu cylindro projectante, ou, fazendo $AI = \beta$, e o raio $IC = \alpha$,

$$z = \beta, x^2 + y^2 = \alpha^2 \dots\dots\dots (b).$$

Para que este circulo encontre sempre a directriz, cujas equações designaremos por

$$M = 0, N = 0 \dots\dots\dots (b'),$$

é necessario, segundo temos visto, que tenha logar a equação de condição $F(\alpha, \beta) = 0$, resultante da eliminação de x, y, z , entre (b) e (b') .

Se depois eliminarmos α e β entre esta equação e as equações (b) , obteremos a equação pèdida da superficie de revolução, que será de fórmula

$$z = F(x^2 + y^2) \dots\dots\dots (8)$$

e na qual a função F dependerá ainda da natureza da curva directriz.

I. Se a directriz é um circulo existente no plano xz e com o centro na origem, as equações (b') serão neste caso

$$y = 0, x^2 + z^2 = r^2;$$

e a equação de condição tornar-se-ha em $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, o que aliás é evidente. Substituindo nella os valores de α e β deduzidos de (b) , virá a equação da esphera, já achada (n.º 159)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots\dots\dots (9).$$

II. Se a directriz é uma parabola BAC com o vertice na origem das coordenadas, existente no plano xz e situada como na fig. 15, as equações da directriz serão

$$y = 0, x^2 = 2pz,$$

d'onde se deduz $\alpha^2 = 2p\beta$; e por fim

$$x^2 + y^2 = 2pz, \dots\dots\dots (10)$$

que é a equação do paraboloide de revolução em volta do eixo dos z .

III. Se as directrizes forem *ellipses* ou *hyperboles*, com o centro na origem das coordenadas, acharemos pela mesma maneira que as equações dos *ellipsoides* e *hyperboloides* de revolução, cujos 1.ºs eixos coincidem com os dos z , são

$$A^2(x^2 + y^2) \pm B^2z^2 = \pm A^2B^2, \dots\dots\dots (11)$$

sendo os signaes superiores relativos ao ellipsoide, e os inferiores ao hyperboloide.

IV. Se a directriz é uma recta, as suas equações serão

$$x = az + A, y = bz + B,$$

das quaes resulta a equação de condição

$$(a\beta + A)^2 + (b\beta + B)^2 = z^2.$$

Eliminando α e β , virá por fim a equação da superficie de revolução

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)z^2 + 2(Aa + Bb)z + A^2 + B^2.$$

Fazendo $x = 0$, acha-se (n.º 121) que a intersecção pelo plano yz é uma hyperbole, e como x e y entram sempre debaixo da fórma $x^2 + y^2$, z será função de $x^2 + y^2$, e por conseguinte a *superficie gerada é um hyperboloide de revolução*.

Com tudo, se a recta directriz cortar o eixo dos z , as suas equações serão satisfeitas fazendo $x = y = 0$, e $z = c$, d'onde resulta $A = -ac$, $B = -bc$. Temos pois

$$(a^2 + b^2)(z - c)^2 = x^2 + y^2 \dots \dots \dots (12)$$

a qual é a *equação do cône recto* (n.º 168).

Querendo a equação de uma superficie de revolução em volta de um eixo com uma direcção qualquer, será necessario ou recorrer a uma transformação de coordenadas, ou tractar directamente o problema de um modo analogo ao que temos seguido.

Problemas sobre o plano e a linha recta

170. Cumpre advertir aqui, como no n.º 35, que a respeito das superficies se podem apresentar dous generos de problemas. Ou se tracta de determinar os pontos de uma dada superficie que gozam de certas propriedades, ou então de assignar á superficie uma posição ou

dimensões taes, que por meio d'ellas se satisfaça a certas condições. No 1.º caso x , y e z são as incognitas; no 2.º é necessario determinar algumas das constantes de modo que sejam satisfeitas as condições do problema. Estas condições devem, em todos os casos, estabelecer tantas equações distinctas quantas são as incognitas, aliás o problema seria indeterminado ou absurdo. Passemos a applicar ao plano estas considerações geraes.

171. *Achar as projecções da intersecção de dous planos.*

Sejam as equações d'estes planos

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C'.$$

Eliminando successivamente entre estas equações as variaveis z , x , y , obteremos as equações seguintes das projecções da intersecção sobre os planos

$$(1) \begin{cases} \text{dos } xy \dots (A - A')x + (B - B')y + C - C' = 0 \\ \text{dos } yz \dots (A' - A)z + (AB' - A'B)y + AC' - A'C = 0, \\ \text{dos } xz \dots (B' - B)z + (A'B - AB')x + BC' - B'C = 0. \end{cases}$$

172. *Fazer passar um plano por um, dous ou tres pontos dados.*

Seja a equação do plano $z = Ax + By + C$.

O plano ficará determinado, ou quando A , B , C forem conhecidos, ou quando se poderem estabelecer entre estas quantidades tres equações, por meio das quaes se determinem os seus valores.

Se quizermos que o plano passe pelo ponto dado (x', y', z') , a sua equação tornar-se-ha em $z' = Ax' + By' + C$. Subtrahindo pois esta ultima equação da primeira, teremos a equação do plano que passa pelo ponto dado,

$$(2) \dots \dots \dots z - z' = A(x - x') + B(y - y').$$

Se quizermos, que passe por um segundo ponto (x'', y'', z'') , teremos $z'' = Ax'' + By'' + C$; e como nos falta ainda uma equação para podermos determinar as tres constantes arbitrarías, podemos sujeitar o plano a passar ainda por um terceiro ponto, ou a satisfazer a outra condição.

Mas se quizessemos por ex., que o plano além de passar pelo ponto (x', y', z') , fosse paralelo a um plano determinado $z = A'x + B'y + C'$

teríamos a equação (2), e as equações

$$A = A', B = B'.$$

173. *Achar as condições para que uma recta e um plano coincidam, ou sejam paralelos.*

Sejam as equações do plano e da recta

$$z = Ax + By + C,$$

$$x = az + \alpha, y = bz + \beta.$$

Substituindo na 1.^a os valores de x e y , tirados das duas ultimas, teremos

$$z(Aa + Bb - 1) + A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Se a recta e o plano tivessem um só ponto commum, o valor de z tirado d'esta equação seria o de uma das coordenadas d'este ponto.

Para que a recta porém coincida com o plano, é necessario que esta ultima equação subsista qualquer que seja o valor de z ; e por conseguinte as equações de *condição de coincidência* serão

$$(3) \dots\dots\dots Aa + Bb = 1, A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Para exprimir que a recta é sómente paralela ao plano, basta introduzir a condição de que, se transportarmos parallelamente a si mesmo tanto a recta como o plano até á origem, ali hão-de coincidir. Mas para que este transporte tenha logar é necessario suppor nullos nas equações precedentes α , β e C ; logo a *condição de parallelismo* reduz-se á equação

$$(4) \dots\dots\dots Aa + Bb - 1 = 0.$$

174. *Exprimir que uma recta é perpendicular a um plano.*

Se projectarmos a recta sobre o plano dos xy , o plano projectante será perpendicular ao plano dado e ao dos xy ; estes dous ultimos terão pois por intersecção uma perpendicular ao plano projectante, e por conseguinte á projecção da recta sobre o plano dos xy . Logo, quando uma linha for perpendicular a um plano, os traços d'este plano e as projecções da recta sobre os planos coordenados farão respectivamente angulos rectos.

Posto isto, servindo-nos das mesmas equações do plano e da linha recta do n.º precedente, as equações dos traços do plano sobre xz e yz , serão

$$z = Ax + C, \quad z = By + C$$

ou

$$x = \frac{1}{A} z - \frac{C}{A}, \quad y = \frac{1}{B} z - \frac{C}{B};$$

e as condições de perpendicularidade d'estes traços com as projecções da recta, darão (n.º 31, equação 7)

$$(5) \dots \dots \dots A + a = 0, \quad B + b = 0.$$

Estas equações determinam duas das constantes do plano, ou da recta que lhe é perpendicular. As outras constantes devem ser dadas, ou sujeitas a outras condições.

175. Querendo tirar um plano perpendicular á recta dada, a equação do plano será pelo n.º precedente,

$$(6) \dots \dots \dots z + ax + by = C.$$

Se designarmos por α e β as coordenadas do ponto onde a recta encontra o plano xy , uma esphera, cujo centro esteja neste ponto, terá por equação (n.º 159)

$$(7) \dots \dots \dots (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2.$$

As equações (6) e (7) são pois as de um circulo cujo plano é perpendicular á recta dada. O raio d'este circulo e a sua posição absoluta dependem de r e de C .

Sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações de uma curva. Para que esta encontre o circulo de que acabámos de tractar, é necessario que possam coexistir as quatro equações precedentes. Eliminando entre ellas as variaveis x , y e z , vem uma equação de condição $r = F(C)$, na qual repondo por r e C os seus valores tirados de (7) e (6), vem a equação

$$(8) \dots \dots \dots \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2} = F(z + ax + by),$$

que é a da superfície gerada pela revolução da curva dada em volta da recta.

176. Se pelo contrario quizermos tirar uma recta que seja perpendicular a um plano dado, e que passe por um dado ponto (x', y', z') , teremos (n.º 174) para determiná-la as seguintes equações

$$(9) \dots\dots\dots x - x' + A(z - z') = 0, \quad y - y' + B(z - z') = 0.$$

Por meio d'estas duas equações é facil achar a distancia do ponto ao plano; por quanto pondo

$$L = C - z' + Ax' + By';$$

dando á equação do plano a fórma

$$(a) \dots\dots\dots z - z' = A(x - x') + B(y - y') + L;$$

e eliminando depois as coordenadas x , y e z do pé da perpendicular, entre as equações (9) e (a): resulta finalmente

$$z - z' = \frac{L}{1 + A^2 + B^2}, \quad x - x' = \frac{-AL}{1 + A^2 + B^2}, \quad y - y' = \frac{-BL}{1 + A^2 + B^2}.$$

A distancia entre o ponto (x', y', z') e o pé da perpendicular (x, y, z) , ou por outras palavras, a distancia do ponto ao plano, será pois (n.º 159)

$$(10) \dots\dots\dots \delta = \frac{L}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} (*).$$

(*) Se o ponto pertencer a uma recta $(x = ax + \alpha, y = bz + \beta)$, será

$$\delta = \frac{(\Lambda\alpha + B\beta - 1)z + \Lambda\alpha + B\beta + C}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}.$$

Para que a recta seja parallela ao plano, é necessario que δ seja constante ou

$$\Lambda\alpha - B\beta - 1 = 0.$$

177. *Achar a distancia de um ponto a uma recta.* Servindo-nos das mesmas equações da recta do n.º 173, o plano perpendicular, tirado pelo ponto dado (x', y', z') , tem por equação

$$(a') \dots \dots \dots a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

Eliminando x, y e z entre a equação (a') e as duas da recta, obteremos os seguintes valores das coordenadas do ponto de encontro da recta com o plano perpendicular,

$$x = \frac{aM}{1 + a^2 + b^2} + \alpha, \quad y = \frac{bM}{1 + a^2 + b^2} + \beta, \quad z = \frac{M}{1 + a^2 + b^2},$$

sendo

$$M = a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'.$$

E por conseguinte concluiremos tambem (n.º 159), que a distancia P entre os pontos (x', y', z') , (x, y, z) , ou por outras palavras, que a distancia P do ponto á recta, é dada pela equação

$$(11) \dots \dots \dots P^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + z'^2 - \frac{M^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

178. *Achar o angulo A formado por duas rectas.* Como pode acontecer que as rectas dadas, sendo produzidas, se não encontrem, deve entender-se, que se pede o angulo comprehendido entre duas rectas tiradas por um mesmo ponto parallelamente ás linhas dadas.

Sejam pois as equações das parallelas ás rectas dadas, tiradas pela origem,

$$(b) \dots \dots \dots x = az, \quad y = bz; \quad (b') \dots \dots \dots x = a'z, \quad y = b'z;$$

tractâmos de achar A em funcção de a, b, a', b' .

E para que coincida com elle, é necessario, além d'isso que seja $\delta = 0$, ou

$$A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Por esta consideração podiam tambem determinar-se as condições pedidas no n.º 173.

Para isso imagine-se primeiro uma esfera, cujo centro coincida com a origem das coordenadas, e cujo raio seja a unidade. Obteremos as coordenadas do ponto em que ella corta a recta dada pelas equações (b), substituindo os valores de x e y , tirados das mesmas equações da esfera, que é

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

e acha-se $(a^2 + b^2 + 1)z^2 = 1$, da qual se deduz z , e depois x e y por meio das mesmas equações (b). Para obter depois as coordenadas z' , x' , y' do ponto, em que a mesma esfera corta a recta dada pelas equações (b'), basta evidentemente mudar nos valores precedentes a e b em a' e b' .

Teremos assim

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + a^2}}, \quad x = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad x' = \frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}, \quad y' = \frac{b'}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

A distancia D , entre os pontos determinados por estes dous systemas de coordenadas, será dada pela equação

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = 2 - 2(xx' + yy' + zz'),$$

por ser

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Figurando agora no espaço o triangulo isosceles, cujos tres lados são 1, 1 e D , o angulo pedido A será opposto ao lado D ; e por consequente será (*Trigonom. rect.*)

$$(12) \dots \dots \dots \cos A = 1 - \frac{1}{2} D^2 = xx' + yy' + zz'$$

$$= \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

D'esta ultima equação deduz-se, pela relação conhecida $\text{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$,

$$(13) \dots \text{sen} A = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}};$$

e facilmente se obteria depois o valor de tang A.

1.º Para deduzir os angulos X, Y, Z, que uma recta faz com os eixos dos x, y e z, basta substituir nas equações precedentes, em lugar de a' e b', os seus valores correspondentes a cada um d'estes eixos. Querendo achar, por ex., o angulo que uma recta faz com o eixo dos z, cuja posição é determinada pelas equações $x = 0, y = 0$, teremos em virtude das equações (b'), $a' = 0, b' = 0$. Introduzindo estes valores na formula (12) do n.º precedente, resulta

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

E notando que o systema das equações (b) do mesmo n.º pode ser substituido pelo systema equivalente

$$y = \frac{b}{a}x; \quad z = \frac{1}{a}x, \quad x = \frac{a}{b}y, \quad z = \frac{1}{b}y;$$

acham-se por simples permutações, mudando a e b em $\frac{b}{a}$ e $\frac{1}{a}$ para x, e a e b em $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{b}$ para y, os valores de cos X e de cos Y.

Por este modo acharemos que os angulos, que uma recta qualquer no espaço faz com os tres eixos coordenados, são determinados pelas equações seguintes:

$$(14) \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos X = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \\ \cos Y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \\ \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}. \end{array} \right.$$

2.º As equações (14) são também os valores dos senos dos ângulos que a recta faz com os planos dos yz , xz e xy ; pois que estes ângulos são visivelmente complementos de X , Y e Z .

3.º Sommando os quadrados das equações (14), vem a relação

$$(15) \dots \dots \dots \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

As equações (14) e (15) fazem ver, que podemos sempre tirar no espaço uma recta, que forme com dous dos eixos coordenados, os dos x e dos y por ex., ângulos arbitrarios X e Y ; porém o terceiro Z fica então determinado.

4.º Tomemos um comprimento qualquer MN (fig. 33) sobre uma recta no espaço, que fez os ângulos X , Y e Z com os eixos coordenados, e projectemos o mesmo comprimento sobre os x e os y .

As projecções serão

$$BC = MN \cdot \cos X, \text{ e } MN \cos Y.$$

Porém mn , ou MP , é a projecção de MN sobre o plano xy , e por conseguinte é $mn = MN \sin Z$. Projectando de novo mn sobre os x e os y , as projecções serão

$$BC = mn \cos \theta, \text{ e } mn \sin \theta,$$

sendo θ o ângulo que mn faz com os x . Substituindo depois nestas equações por mn o seu valor precedente, vem

$$BC = MN \sin Z \cos \theta, \text{ e } MN \sin Z \sin \theta.$$

Egualando finalmente os dous valores das mesmas projecções, resulta

$$(16) \dots \dots \dots \cos X = \sin Z \cos \theta, \cos Y = \sin Z \sin \theta.$$

Assim, em vez de determinar a direcção de uma linha no espaço por meio dos tres ângulos X , Y , Z , que ella faz com os tres eixos: basta que seja dado o ângulo que ella faz com a sua projecção sobre o plano dos xy (que é o complemento do ângulo Z); e o ângulo θ que esta projecção faz com o eixo dos X ; e reciprocamente.

Sommando os quadrados das duas equações (16), vem

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = \sin^2 Z = 1 - \cos^2 Z, \quad (19)$$

relação que já tínhamos obtido (3.º).

5.º Sommando os valores dos productos $\cos X \cos X'$, $\cos Y \cos Y'$, $\cos Z \cos Z'$, dados pelas formulas, e comparando a somma com a equação, (12) acha-se a relação

$$(17) \dots \dots \cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z',$$

por meio da qual se exprime o valor do angulo, que fazem duas rectas no espaço, em função do angulo que cada uma d'ellas faz com os tres eixos.

6.º Se as duas rectas forem perpendiculares, será $\cos A = 0$, e esta condição será expressa por qualquer das relações seguintes

$$(18) \dots \dots \dots 1 + aa' + bb' = 0,$$

$$(19) \dots \dots \dots \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0.$$

179. Achar o angulo θ de dous planos, dados pelas suas equações

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C'.$$

Se da origem abaixarmos perpendiculares sobre os dous planos, o angulo feito por estas linhas será igual ao dos planos. Sendo pois

$$x = az, \quad y = bz, \quad x = a'z, \quad y = b'z,$$

as equações de duas rectas que passam pela origem, para que estas rectas sejam respectivamente perpendiculares aos dous planos, é necessario que sejam (n.º 174)

$$A + a = 0, \quad B + b = 0; \quad A' + a' = 0, \quad B' + b' = 0. \quad (20)$$

Logo as equações das perpendiculares serão

$$x + Az = 0, \quad y + Bz = 0, \quad x + A'z = 0, \quad y + B'z = 0; \quad (21)$$

e o coseno do angulo d'estas rectas, que é o dos dous planos, será (n.º 178)

$$(20) \dots \dots \cos \theta = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{1 + A^2 + B^2} \sqrt{1 + A'^2 + B'^2}}$$

1.º Se fizermos tomar ao 2.º plano a situação dos yx , a sua equação tornar-se-ha em $z=0$; é necessario por tanto, que na equação (20) se faça $A'=B'=C'=0$, a fim de obtermos o angulo V que um plano faz com o dos xy . Por meio de simples permutações, como no n.º 178, obteremos os angulos T e U , que o mesmo plano faz com os xz , e yz . Por conseguinte

$$(21) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos U = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \\ \cos T = \frac{B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \\ \cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}. \end{array} \right.$$

D'estas equações deduzem-se as relações

$$(22) \dots \dots \dots \cos^2 T + \cos^2 U + \cos^2 V = 1,$$

$$(23) \dots \dots \dots \cos \theta = \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V'.$$

A ultima dá-nos o angulo dos dous planos em funcção dos angulos que cada um d'elles faz respectivamente com os tres planos coordenados.

2.º Se os dous planos forem perpendiculares, será $\cos \theta = 0$, e esta condição será expressa por qualquer das duas relações seguintes:

$$(24) \dots \dots \dots 1 + AA' + BB' = 0,$$

$$(25) \dots \dots \dots \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V' = 0.$$

180. Achar o angulo γ de uma recta e de um plano.

Sejam $z = Ax + By + C$, e $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, as equações do plano e da recta. O angulo pedido é igual ao que a recta faz com a sua projecção sobre o plano (*Geometr.*); consequentemente, se de um ponto da recta abaixarmos uma perpendicular sobre o mesmo plano, o angulo d'estas duas linhas será complemento do angulo η .

Tiremos pois pela origem uma recta qualquer $x = a'z$, $y = b'z$; para que ella seja perpendicular ao plano, é necessario (n.º 174), que seja $a' = -A$, $b' = -B$. O coseno do angulo que ella fórma com a linha dada, sendo igual a $\text{sen } \eta$, teremos (n.º 178)

$$(26) \dots \text{sen } \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

D'aqui facilmente se conclue, como no n.º 179, que os angulos que a recta fórma com os planos coordenados yz , xz e xy , tem por senos respectivos

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

o que concorda com o que já vimos (n.º 178, 2.º).

181. Se a recta for *paralella* ao plano, sendo então $\text{sen } \eta = 0$, esta condição será expressa pela relação

$$(27) \dots 1 - Aa - Bb = 0.$$

Transformação de coordenadas

182. *Passar de um systema de coordenadas para outro de coordenadas parallelas ás primeiras com a origem em um ponto differente* (α, β, γ).

Veremos pois um raciocinio similhante ao que empregámos no n.º 43, que deve fazer-se

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

É necessario advertir ainda, que ás coordenadas da nova origem α, β, γ devem dar-se os valores e os signaes convenientes á sua posição. Por exemplo, se a origem estiver no plano dos xy , será $\gamma = 0$; se estiver no eixo dos z negativos, α e β serão nullos, e γ será negativo.

183. *Mudar a direcção dos eixos.* Imaginem-se (fig. 16) tres novos eixos Ax', Ay', Az' ; e supponhamos os eixos primitivos rectangulares, e estes novos eixos com uma direcção dada arbitrariamente. Tome-se um ponto qualquer e tirem-se as suas coordenadas x', y' e z' . Se depois projectarmos successivamente estas coordenadas sobre os tres eixos primitivos dos x , dos y e dos z ; cada uma das coordenadas x, y e z será, á similitude do que se viu no n.º 44, a somma das tres projecções sobre o eixo respectivo.

Designa-se por (xx') o angulo $x'Ax$ formado pelo eixo dos x' e dos x ; por (yy') o angulo $y'Ay'$; . . . etc.: teremos

$$(A) \dots \dots \dots \begin{cases} x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x), \\ y = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y), \\ z = x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z). \end{cases}$$

Como supuzemos os eixos primitivos rectangulares, os angulos precedentes não são inteiramente arbitrarios, por isso que devem satisfazer (n.º 178, 3.º) ás relações

$$(B) \dots \dots \dots \begin{cases} \cos^2(x'x) + \cos^2(x'y) + \cos^2(x'z) = 1, \\ \cos^2(y'x) + \cos^2(y'y) + \cos^2(y'z) = 1, \\ \cos^2(z'x) + \cos^2(z'y) + \cos^2(z'z) = 1. \end{cases}$$

Fazendo, para simplificar,

$$S = \cos(x'x) \cos(y'x) + \cos(x'y) \cos(y'y) + \cos(x'z) \cos(y'z),$$

$$T = \cos(x'x) \cos(z'x) + \cos(x'y) \cos(z'y) + \cos(x'z) \cos(z'z),$$

$$U = \cos(y'x) \cos(z'x) + \cos(y'y) \cos(z'y) + \cos(y'z) \cos(z'z),$$

teremos para exprimir os angulos que os novos eixos fazem entre si (n.º 178, 5.º) as equações

$$(C) \dots \dots \cos(x'y') = S, \cos(x'z') = T, \cos(y'z') = U.$$

Se as novas coordenadas forem rectangulares, teremos

$$(D) \dots \dots \dots S = 0, T = 0, U = 0.$$

As equações (A), (B), (C), (D) contêm os nove angulos que os eixos x' , y' , z' fazem com os x , y , z . Se quizermos sómente mudar de um systema de coordenadas rectangulares para outro de coordenadas de direcção obliqua, teremos apenas seis angulos arbitrarios, porque as equações (B) determinam tres.

E se, além d'isto, quizermos, que o segundo systema seja tambem rectangular, as equações (D), que exprimem esta condição, deixarão unicamente tres angulos arbitrarios.

Com effeito o eixo dos x' faz com os x , y , z tres angulos, dous dos quaes são arbitrarios, e o terceiro vem a ser determinado pela 1.ª das equações (B): o eixo dos y' estaria no mesmo caso se não fosse sujeito a ser perpendicular aos x' ; esta condição porém não deixa realmente mais que uma arbitraria: e como o eixo dos z' , perpendicular ao plano $x'y'$, vem a ser determinado com os dados antecedentes, são por fim sómente tres as quantidades arbitrarias.

Os valores de x' , y' , z' , deduzidos de (A) serviriam para transformar um systema de coordenadas obliquas n'outro rectangular. E por meio das mesmas formulas (A), passando d'este ultimo systema para outro obliquo, conseguiriamos transformar um systema obliquo n'outro tambem obliquo.

Na resolução d'este problema supuzemos que a origem das coordenadas se conservou a mesma; se quizermos porém que esta mude tambem, passaremos, primeiro que tudo, pelo modo indicado no n.º precedente, para um systema de eixos parallellos aos primeiros e que passe pela nova origem.

184. Para passar de um systema rectangular para outro systema tambem rectangular, em vez de nos servirmos das formulas precedentes, que para a resolução do problema nos conduzem a uma eliminação as mais das vezes trabalhosa, podemos servir-nos das formulas seguintes, devidas

a Euler, por meio das quaes se exprimem immediatamente as nove constantes em funcção de outras tres escolhidas da maneira seguinte:

Tome-se um plano $CAy'x'$ (fig. 16) com a inclinação θ sobre o plano xAy ; e seja AC a intersecção d'estes planos, e $CAx = \psi$ o angulo, que AC faz com Ax . No plano CAy' determinado por θ e ψ , tracemos dous eixos rectangulares Ax' , Ay' ; e seja $CAx' = \varphi$ o angulo que o primeiro faz como o traço AC . Por este meio os novos eixos vem a ser determinados pelos angulos θ , ψ e φ , que, dão a inclinação do plano $x'y'$ sobre o plano xy , bem como a direcção do traço AC , e a de Ax' neste plano $x'y'$ assim determinado. O eixo y' fórma, neste plano, com Ax' o angulo $x'Ay'$ de 90° ; e o eixo z' fica determinado pela condição de ser perpendicular a este mesmo plano.

Tracta-se pois, a fim de transformar os eixos, de exprimir os nove angulos $(x'x)$, $(y'x)$, . . . , que entram em (A), em funcção d'estas tres constantes θ , ψ e φ .

As rectas Ax , Ax' e AC formam um triedro, no qual se conhecem além dos dous angulos planos φ e ψ , o angulo diedro θ comprehendido por elles. Applicando a este caso a formula (3, pag. 189); e fazendo

$$c = (x'x), C = \theta. a = \psi, b = \varphi,$$

teremos

$$\cos(x'x) = \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta.$$

Operando analogamente, a respeito do angulo xAy' , sobre o triedro formado por AC e pelos eixos x e y' (fig. 17); determinaremos $\cos(y'x)$, advertindo que neste caso os angulos planos são $(y'x)$, $CAy' = 90^\circ + \varphi$, $CAx = \psi$. Para obter $\cos(x'y)$ empregaremos o triedro $x'ACy$, considerando os angulos planos $(x'y)$, $CAy = 90^\circ + \psi$, e $CAx' = \varphi$. Finalmente para $\cos(y'y)$, tomaremos o triedro $y'ACy$, e os angulos planos $(y'y)$, $CAy' = 90^\circ + \psi$, e $CAy = 90^\circ + \varphi$.

Em resultado acharemos

$$\cos(y'x) = -\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta,$$

$$\cos(x'y) = -\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\cos(y'y) = \sin \psi \sin \varphi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta.$$

Consideremos agora o triedro $z'Ax'C$ (fig. 18). O eixo Az' faz com AC um angulo recto, assim como com o plano CAy' ; e o angulo formado pelos planos xy e $z'AC$ é de $90^\circ + \theta$, suppondo o plano CAy' situado para a parte superior do plano xy . Fazendo pois na equação (3) de pag. 189

$$c = (z'x), C = 90^\circ + \theta, a = 90^\circ, b = \psi,$$

teremos $\cos(z'x) = -\text{sen } \psi \text{ sen } \theta.$

Do mesmo modo o triedro $z'ACy$ (fig. 19), pondo $\psi + 90^\circ$ por ψ , dá

$$\cos(z'y) = -\cos \psi \text{ sen } \theta.$$

Finalmente, sendo o angulo zAC tambem recto, e o angulo diedro $zACx' = 90^\circ - \theta$, teremos no triedro $zACx'$ (fig. 20),

$$\cos(x'z) = \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta,$$

d'onde $\cos(y'z) = \cos \varphi \text{ sen } \theta;$

e $\cos(z'z) = \cos \theta.$

Temos assim determinado em funcção de θ, φ e ψ os nove coefficients de (A), os quaes, substituidos nas mesmas formulas, dão

$$(E) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x = x' (\cos \theta \text{ sen } \varphi \text{ sen } \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\ \quad + y' (\cos \theta \cos \varphi \text{ sen } \psi - \text{sen } \varphi \cos \psi) \\ \quad + z' \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi; \\ y = x' (\cos \theta \text{ sen } \varphi \cos \psi - \cos \varphi \text{ sen } \psi) \\ \quad + y' (\cos \theta \cos \varphi \cos \psi + \text{sen } \varphi \text{ sen } \psi) \\ \quad + z' \text{ sen } \theta \cos \psi; \\ z = -x' \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi - y' \text{ sen } \theta \cos \varphi + z' \cos \theta. \end{array} \right.$$

As equações de condição (B) e (D) são também satisfeitas pelos valores precedentes, como facilmente se pode verificar.

Coordenadas polares no espaço

185. A posição de um ponto no espaço ficará também determinada, como no n.º 48, quando se conhecer o seu *raio vector* ou a sua distancia a um ponto fixo, e os angulos que esta recta fórma com os eixos coordenados.

Sejam X, Y e Z estes angulos, e seja ρ o raio vector, ou a distancia da origem das coordenadas ao ponto (x, y, z) que se quer determinar. Teremos (pag. 217 (*))

$$(F) \dots \dots \dots x = \rho \cos X, \quad y = \rho \cos Y, \quad z = \rho \cos Z,$$

formulas por meio das quaes se pode *passar de um systema rectangular para outro polar*, ou *vice versa*, advertindo que os angulos X, Y, Z, estão ligados pela relação já obtida, n.º 178 (15),

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Em vez dos angulos X, Y e Z emprega-se muitas vezes, como já dissemos no n.º 188, 4.º, o angulo formado pelo raio vector com a sua projecção no plano dos xy ; e o angulo θ , que esta projecção faz com o eixo positivo dos x . Para esta transformação podemos servir-nos das formulas (16) do mesmo n.º, advertindo que o angulo Z, que entra nellas, se deve mudar em $90^\circ - \varphi$. Assim, sendo

$$\cos X = \cos \varphi \cos \theta, \quad \cos Y = \cos \varphi \sin \theta, \quad \cos Z = \sin \varphi,$$

teremos, substituindo em (F),

$$(G) \dots \dots x = \rho \cos \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \sin \varphi.$$

Das intersecções planas

186. Quando da intersecção de duas superficies resulta uma curva plana, é mais commodo, para achar as suas propriedades, referil-a a coordenadas tomadas no plano DOC (fig. 21) da curva, o qual é determinado pelo angulo θ que fórma com o plano xy , e pelo angulo ψ que a intersecção OC d'estes planos faz com Ox . Tomemos esta linha OC para eixo dos x' ; e para eixo dos y' a perpendicular OA, abaixada sobre OC, no plano secante DOC.

Como a questão se reduz a obter em x' e y' a equação da curva, resultante da intersecção das superficies; é claro que, feita a transformação (A), para referir uma d'estas superficies aos eixos x' , y' , z' , bastará depois fazer $z'=0$, e ter-se-ha a sua intersecção com o plano $x'Oy'$. Porém, neste caso tão simples, será melhor fazer $z'=0$ nas equações (A), e procurar directamente os valores de $\cos(x'x)$, $\cos(y'x)$

Assim no triedro AOCB, em que são conhecidos os angulos planos $a = \psi$, $b = 90^\circ$, e o angulo diedro $C = \theta$ comprehendido por estes lados: temos

$$\cos(y'x) = \text{sen } \psi \cos \theta, \quad \cos(y'y) = -\cos \psi \cos \theta.$$

Além d'isto

$$(x'x) = \psi, \quad (x'y) = 90^\circ - \psi, \quad (x'z) = 90^\circ.$$

Finalmente o plano $x'Oy'$, que supomos estar para a parte de cima do plano dos xy , faz com Oz o angulo $(y'z) = 90^\circ - \theta$. Dão pois as equações (A)

$$(H) \dots \dots \dots \begin{cases} x = x' \cos \psi + y' \text{sen } \psi \cos \theta, \\ y = x' \text{sen } \psi - y' \cos \psi \cos \theta, \\ z = y' \text{sen } \theta. \end{cases}$$

Obteriamos estes mesmos resultados servindo-nos das equações do n.º 184.

187. Appliquemos as equações (H) ao cônc obliquo de base circular. O plano zAx (fig. 14) perpendicular ao plano secante AB, e que passa pelo eixo SC, será o dos (xz) : a secção AB d'estes dous planos, ou o

eixo da curva, corta esta no vertice A, que tomaremos para origem das coordenadas: o plano xAy , paralelo á base circular do cône, será o dos xy ; e da sua intersecção com o cône resultará um círculo AE, de raio r , que poderemos considerar como a curva *directriz* (n.º 168). Por esta fórma, tendo o cône por coordenadas do vertice $(a, 0, c)$, o eixo no plano xz , e a base no plano xy , a sua equação será, como no n.º citado,

$$c^2(x^2 + y^2) + 2c(r - a)xz + a(a - 2r)z^2 + 2acrz - 2c^2rx = 0.$$

E como o plano AB perpendicular aos xz corta o plano xy pelo eixo Ay , deveremos pôr $\psi = 90^\circ$ nas equações (H); d'onde resultará.

$$(1) \dots\dots\dots x = y' \cos \theta, \quad y = x', \quad z = y' \sin \theta$$

$$(2) \dots\dots\dots y'^2 [c^2 \cos^2 \theta + 2c(r - a) \sin \theta \cos \theta + (a^2 - 2ar) \sin^2 \theta]$$

$$+ c^2 x'^2 + 2c y' (a \sin \theta - c \cos \theta) = 0.$$

Tal é a equação da curva, que pode representar todas as secções do cône obliquo (excepto as paralelas á base) fazendo variar a , c , r e θ ; os x' são contados sobre Ay , os y' sobre AB. A discussão d'esta equação não envolve difficuldades (n.º 120), e acham-se em resultado curvas da mesma especie das secções do cône recto.

Querendo que a secção seja um círculo, é necessario tornar eguaes, os coefficients de x'^2 e y'^2 (n.º 115); logo

$$(c^2 + 2ar - a^2) \tan^2 \theta = 2c(r - a) \tan \theta.$$

Tomando a primeira raiz $\tan \theta = 0$, recairemos na equação da base AE do cône.

Querendo interpretar o outro valor de $\tan \theta$, temos

$$\tan \text{SAD} = \frac{\text{SD}}{\text{AD}} = \frac{c}{a}, \quad \tan \text{SAB} = \tan (\text{SAD} - \theta) = \frac{c - a \tan \theta}{a + c \tan \theta}.$$

Substituindo por $\tan \theta$ a segunda raiz, vem, feitas as reduções,

$$\tan \text{SAB} = \frac{c^3 + a^2 c}{2a^2 r - a^3 + 2c^2 r - ac^2} = \frac{c}{2r - a} = \frac{\text{SD}}{\text{DE}},$$

ou $\text{tang SAB} = - \text{tang SED} = \text{tang SEA}.$

Por tanto ainda neste caso a secção será um circulo, quando os angulos SAB, SEA, formados com as geratrizes oppostas, forem eguaes.

O plano secante yAB comparado com o circulo AE da base, é ao que se chama *secção subcontraria*.

Para obter as secções planas do cône recto, basta fazer $a = r$ na equação (2), do que resulta

$$(3) \dots y'^2 (c^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) + c^2 x'^2 + 2cry' (r \sin \theta - c \cos \theta) = 0;$$

equação que se reduz á do n.º 69.

Finalmente vê-se na equação (3), que da egualdade dos dous factores de y'^2 e x'^2 não pode resultar mais do que um valor para θ , $\sin \theta = 0$; e com effeito, neste caso, a secção subcontraria coincide com a base.

188. O cylindro obliquo de base circular, situada como a do cône de que acabámos de tractar, e cujo eixo se acha tambem no plano dos xz , tem por equação (n.º 167)

$$(4) \dots \dots \dots y^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az).$$

Introduzindo nella os valores (1), o que equivál a suppor o plano secante perpendicular aos xz , vem

$$(5) \dots y'^2 (\cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - 2a \sin \theta \cos \theta) + x'^2 = 2ry' (\cos \theta - a \sin \theta).$$

A secção é uma ellipse, que se reduz ao circulo: ou quando $\sin \theta = 0$, o que dá a base do cylindro; ou quando $(a^2 - 1) \text{ tang } \theta = 2a$, ou

$$\text{tang } \theta = \frac{2a}{a^2 - 1} = - \text{tang } 2\alpha,$$

sendo α o angulo que o eixo do cylindro faz com eixo dos z . Logo este 2.º valor de θ é o supplemento de 2α .

Superfícies da segunda ordem

189. A equação mais geral do 2.º grau entre tres variaveis tem a fórma

$$(1) \dots ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz = k,$$

e as *superfícies* que representa, chamam-se *de segunda ordem* em virtude do grau da equação. Para *discutir* esta, isto é, para determinar a natureza e posição das superficies que representa, convem simplificar-a transformando as coordenadas, de modo que desapareçam os termos em xy , xz e yz . Para isso, passaremos primeiro dos eixos primitivos, que sempre podemos suppor rectangulares, por outros obliquos por meio das formulas (A) da pag. 238, sujeitando depois os nove angulos que nellas entram ás tres condições (B), d'onde resultarão por fim seis arbitrarías, de que podemos dispor á vontade. Se egualarmos a zero os termos em que entram $x'y'$, $x'z'$ e $y'z'$, reduziremos as seis arbitrarías a tres. E se quizermos além d'isso que a direcção dos novos eixos seja tambem rectangular, condição que é expressa pelas tres relações (D), ficará o problema determinado, por que estas relações determinarão as tres arbitrarías que nos restavam.

Este calculo simplifica-se pelo processo seguinte. Sejam $x = \alpha z$, $y = \beta z$, as equações do eixo dos x' . Fazendo, por abbreviar,

$$l = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}},$$

acharemos (pag. 233)

$$\cos(x'x) = l\alpha, \quad \cos(x'y) = l\beta, \quad \cos(x'z) = l;$$

e fazendo hypotheses analogas para as equações $x = \alpha'z$, $y = \beta'z$, do eixo dos y' , e para a do eixo dos z' : virá

$$\cos(y'x) = l'\alpha', \quad \cos(y'y) = l'\beta', \quad \cos(y'z) = l';$$

$$\cos(z'x) = l''\alpha'', \quad \cos(z'y) = l''\beta'', \quad \cos(z'z) = l'.$$

As equações (A), por meio das quaes se faz a transformação, tornam-se em

$$(2) \dots \dots \dots \begin{cases} x = l\alpha x' + l'\alpha' y' + l''\alpha'' z', \\ y = l\beta x' + l'\beta' y' + l''\beta'' z', \\ z = l x' + l' y' + l' z'. \end{cases}$$

Assim os nove angulos do problema são substituidos pelas seis incognitas $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, por isso que as equações (B) se reduzem por este modo a uma identidade.

Substituamos pois estes valores de x, y e z na equação geral do 2.º grau, e egualemos a zero os coefficients de $x'y', x'z',$ e $y'z'$. Virá

$$(3) \dots \begin{cases} (\alpha x + d\beta + e) \alpha' + (d\alpha + b\beta + f) \beta + e\alpha + f\beta + c = 0 \dots x'y', \\ (\alpha x + d\beta + e) \alpha'' + (d\alpha + b\beta + f) \beta'' + e\alpha + f\beta + c = 0 \dots x'z', \\ (\alpha x'' + d\beta'' + e) \alpha' + (d\alpha'' + b\beta'' + f) \beta' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0 \dots y'z'. \end{cases}$$

Em consequencia da symetria do calculo qualquer d'estas equações se pode obter sem ser necessario fazer as substituições por inteiro. E achada uma, podem deduzir-se d'ella as outras duas por simples permutações.

Eliminando α' e β' entre a 1.ª e as equações $x = \alpha'z, y = \beta'z,$ do eixo dos y' , resulta a seguinte equação, que é a de um plano,

$$(4) \dots (\alpha x + d\beta + e) x + (d\alpha + b\beta + f) y + (e x + f\beta + c) z = 0.$$

Ora a 1.ª das equações (3) é a condição do desvanecimento do termo com $x'y'$; e por isso, em quanto attendermos só a esta condição, podemos dar a $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, os valores que quizermos, com tanto que satisfaçam áquella equação. Assim a equação (4), que d'ella resultou pela substituição das expressões de α' e β' tiradas das equações do eixo dos y' , envolve ainda a mesma condição; e por consequente, se traçarmos o eixo dos y' no plano determinado pela mesma equação (4), não entrará na equação (1), depois de transformada, o termo em $x'y'$.

Pelo mesmo theor, eliminando α'' e β'' da 2.ª equação por meio das equações $x = \alpha''z, y = \alpha''z,$ do eixo dos z' , determinaremos um plano tal, que se tomarmos para eixo dos z' qualquer recta nelle traçada, ap-

parecerá a transformada sem o termo em $x'z'$. Attenta porém a fórmula das duas 1.^{as} equações, vê-se logo que este segundo plano é o mesmo que o primeiro; e por conseguinte, se traçarmos nelle os eixos dos z' e dos y' como quizermos, o plano resultante será o dos $y'z'$, e a transformada não terá termos em $x'y'$ nem em $x'z'$. Como a direcção d'estes eixos no plano é arbitraria, podemos conseguir este fim com uma infinidade de systemas. Em todos os casos porém, resultando na transformada um valor de x' da fórmula

$$x' = \frac{-\frac{1}{2}(gx + h\beta + i)}{l(ax^2 + b\beta^2 + c + 2d\alpha\beta + 2ex + 2f\beta)} \pm f(y', z'),$$

equação que representa as coordenadas das extremidades das cordas parallelas; o valor

$$x' = \frac{-\frac{1}{2}(gx + h\beta + i)}{l(ax^2 + b\beta^2 + c + 2d\alpha\beta + 2ex + 2f\beta)}$$

é evidentemente a equação de um plano, o qual corta todas as parallelas ao eixo dos x em duas partes eguaes, e que se chama por isso *diame-tral*. Dando-lhe a fórmula seguinte

$$(ax + d\beta + e)lx' + (dx + b\beta + f)l\beta x' + (ex + f\beta + c)lx' + \frac{1}{2}(gx + h\beta + i) = 0;$$

e substituindo nesta expressão por lx' , $l\beta x'$, lx' , os seus valores tirados das equações (2), vem

$$\begin{aligned} 0 = & (ax + d\beta + e)x + (dx + b\beta + f)y + (ex + f\beta + c)z + \frac{1}{2}(gx + h\beta + i) \\ & - ly' [(ax + d\beta + e)\alpha' + (dx + b\beta + f)\beta' + ex + f\beta + c] \\ & - l''z' [(ax + d\beta + e)\alpha'' + (dx + b\beta + f)\beta'' + ex + f\beta + c]; \end{aligned}$$

ou, em virtude das duas primeiras equações (3),

$$(5) \dots 0 = (ax + d\beta + e)x + (dx + b\beta + f)y + (ex + f\beta + c)z + \frac{1}{2}(gx + h\beta + i).$$

Debaixo d'esta nova fórmula, vê-se facilmente n.º 172, que o plano diame-

tral é paralelo ao plano representado pela equação (4), isto é, ao plano dos $(y'z')$ que faz desaparecer em (1) os termos em $x'y'$ e $x'z'$. (*)

Finalmente, se quizermos ainda que desapareça, o termo em $y'z'$, é necessario determinar α' e β' por meio da 3.^a das equações (2); por onde se vê que ha uma infinidade d'eixos obliquos por meio dos quaes podem ser satisfeitas as condições pedidas. (5)

190. Querendo porém que os x' , y' e z' , sejam rectangulares, deverá o eixo dos x' ser perpendicular ao plano dos $y'z'$, cuja equação já achamos; ora sendo $x = \alpha z$, $y = \beta z$, as equações do eixo dos x' : a condição de perpendicularidade ao plano (4) será expressa (n.º 174) pelas equações

$$(6) \dots \dots \dots \alpha z + d\beta + e = (e\alpha + f\beta + c)\alpha,$$

$$(7) \dots \dots \dots d\alpha + b\beta + f = (e\alpha + f\beta + c)\beta.$$

Eliminando α , entre estas equações acharemos (**)

$$(8) \dots [(a - b)fe + (f^2 - e^2)d]\beta^3 \\ + [(a - b)(c - b)e + (2d^2 - f^2 - e^2)e + (2c - a - b)fd]\beta^2 \\ + [(c - a)(c - b)d + (2e^2 - f^2 - d^2)d + (2b - a - c)fe]\beta \\ + (a - c)fd + (f^2 - d^2)e = 0.$$

(*) Veja-se *Anal. appl., de Leroy*, (2.º edit.) n.º 105; e *Compl. de Geomet. descript. de Sousa Pinto*, n.º 39.

(**) A equação (7). e a divisão de (6) por (7), dão

$$\alpha = \frac{f\beta^2 + c\beta - b\beta - f}{d - e\beta}, \quad \frac{\alpha z + d\beta + e}{d\alpha + b\beta + f} = \frac{\alpha}{\beta};$$

das quaes se tira

$$\frac{f\beta^2 + c\beta - b\beta - f}{d\beta - e\beta^2} = \frac{af\beta^2 + ac\beta - ab\beta - af + d^2\beta + de - de\beta^2 - e^2\beta}{df\beta^2 + cd\beta - be\beta^2 - ef\beta}$$

Esta equação do 3.º grau dá para β ao menos uma raiz real; a equação (7) dá depois outra para α .

Deste modo fica o eixo dos x' determinado de maneira que vem a ser perpendicular ao plano $z'y'$; e se desembaraça a equação dos termos em $x'z'$ e $x'y'$. Resta traçar neste plano $y'z'$ eixos rectangulares taes, que façam desaparecer o termo $y'z'$; é porém evidente que se pode determinar do mesmo modo um plano dos $x'z'$, ao qual seja perpendicular o eixo dos y' e que faça desaparecer os termos em que entram $x'y'$ e $z'y'$. Mas como as condições pelas quaes se exprime que o eixo dos y' é perpendicular a este plano, são expressas também pelas equações (6) e (7), deverá a mesma equação (8) do 3.º grau dar outra raiz β' , que satisfaça a estas condições. O mesmo succede com o eixo dos z' .

Logo as tres raizes da equação (8) são reaes, e são os valores de β , β' , β'' . Os valores α , α' , α'' , vem depois a deduzir-se das equações (7).

Consequentemente: *em geral ha sempre um systema unico d'eixos rectangulares, que desembaraça a equação (1) dos termos $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$; e este systema determina-se pelo processo do calculo que acabâmos de expor.*

A este systema dá-se o nome de *Eixos principaes de figura*.

191. Analysemos os casos particulares que podem apresentar-se na resolução da equação (8).

1.º Se a equação não tiver o 1.º termo, isto é, se for

$$(a - b)fe + (f^2 - e^2)d = 0:$$

sabemos que nesse caso uma das raizes β é infinita, bem como α , como se vê da equação (7) que se reduz a $ea + f\beta = 0$. Os angulos correspondentes são rectos; um dos eixos, o dos x' por ex., acha-se no plano xy ,

ou

$$\begin{aligned} 0 &= \beta^4 (df^2 - bef + aef - de^2) \\ &+ \beta^3 (cdf - ef^2 + cdf - bce - bdf + b^2e - afd + d^2e + ace - abe + d^2e - e^3) \\ &+ \beta^2 (c^2d - cef - bcd + bef - df^2 + bef - acd + abd - d^3 + de^2 - aef + de^2) \\ &+ \beta(-cdf + ef^2 + adf - d^2e). \end{aligned}$$

Dividindo esta última equação por β , e reduzindo, vem facilmente a equação do texto.

e obtem-se a sua equação eliminando α e β por meio das equações $x = \alpha z$, $y = \beta z$, d'onde resulta $ex + fy = 0$. As direcções dos y' e z' vem a ser dadas pela equação em β , reduzida no 2.º grau.

2.º Se, além do 1.º coefficiente, tambem o 2.º for nullo: tirando o valor de b da primeira d'estas duas equações de condição, e substituindo-o na segunda, esta se reduzirá ao ultimo termo da equação (8)

$$(a - c)fd + (f^2 - d^2)e = 0.$$

E como o coefficiente de β na equação (8) se deduz do de β^2 , mudando b em c , e d em e , e o mesmo acontece a respeito do 1.º e ultimo termo da mesma equação: segue-se que neste caso a equação (8) é uma identidade. Os systemas d'eixos que desembaraçam a equação dos termos em x' , y' e z' são então em numero infinito.

Eliminando as quantidades a e b das equações (6) e (7) por meio das duas equações de condição, acha-se que ellas são o producto de $f\alpha - d$, e de $(\beta - d)$ pelo factor commum $edx + fd\beta + fe$. Estes factores são por tanto nullos; e eliminando α e β acha-se

$$fx = dz, ey = dz, edx + fdy + fez = 0. \quad (8')$$

As duas 1.ªs são as equações d'um dos eixos; a 3.ª é de um plano que lhe fica perpendicular, e no qual estão traçados os outros dous eixos com direcções arbitrarías. Da intersecção d'este plano com a superficie resulta uma curva, na qual todos os eixos rectangulares são principaes, e que por conseguinte é um circulo, unica das curvas do 2.º grau que goza d'esta propriedade. Nesse caso a superficie é de revolução em volta do eixo, cuja equação acabámos de achar; e como facilmente se reconhece transportando a origem ao centro do circulo. (V. *Annales de Math.*, t. II).

192. A equação (1), desembaraçada dos tres productos, toma a fórma

$$(9) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 + nx^2 + qx + q'y + q''z = h.$$

Se nenhum dos coefficientes k , m e n for nullo, pode esta equação ficar ainda desembaraçada dos termos da 1.ª dimensão, pelo processo do n.º 182, que equival a uma mudança de origem das coordenadas, e tomar a fórma ainda mais simples

$$(10) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 + nx^2 = h.$$

Se um d'estes coefficients for nullo, n por exemplo, podemos desembaraçar, pelo mesmo processo, a equação (9) do termo constante h e das 1.^{as} potencias de y e z ; ficando assim a equação reduzida á fórma

$$(11) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 = hx.$$

Finalmente se dous dos mesmos coefficients forem nullos, m e n por ex., a equação (9) poderá reduzir-se á fórma

$$(12) \dots \dots \dots kz^2 + py + qx = h.$$

Mas se neste caso, ainda p e q forem nullos, a equação (12) será evidentemente um caso particular da equação (10); e se o não forem, será um caso particular da equação (11). Com effeito fazendo $z = 0$, a equação (12), torna-se em

$$py + qx = h;$$

por conseguinte a intersecção da superficie com o plano dos xy é uma recta. Se tomarmos esta linha para eixo dos y , a equação não soffrerá alteração no termo kz^2 ; mas será forçoso que os termos restantes $-py - qx + h$ se reduzam a $k'x$, porque a hypothese $z = 0$ deve dar $x = 0$. A equação da superficie reduzir-se-ha então á fórma $kz^2 = k'x$, que é evidentemente um caso particular de (11).

Podemos pois concluir que todas as superficies da 2.^a ordem são incluídas nas duas equações,

$$(10) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 + nx^2 = h,$$

$$(11) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 = hx.$$

Se pela origem das coordenadas conduzirmos uma recta qualquer

$$x = az, y = a'z,$$

e combinarmos a sua equação com (10), vêr-se-ha que os pontos em que a recta encontra a superficie tem as suas coordenadas respectivamente eguaes e de signaes contrarios: d'onde se conclue, que a origem das mesmas coordenadas divide ao meio todas as cordas tiradas por este ponto;

ou, por outras palavras, que *esta origem é o centro das superficies representadas pela equação (10)*.

Procedendo do mesmo modo com a equação (11), vê-se que os valores de z não saem eguaes, em virtude do termo em que entra a variavel no 1.º grau; e que por conseguinte *as superficies representadas por esta equação são destituídas de centro*.

Assim podemos dividir as superficies de 2.ª ordem em dous generos:

1.º Superficies dotadas de centro, comprehendidas na equação (10);

2.º Superficies destituídas de centro, comprehendidas na equação (11).

Além d'isto cumpre notar, que a equação (10) mostra, pelo que se disse no n.º 189, que os tres planos coordenados das superficies, que representa, são *diametraes*. O plano diametral que é perpendicular ás cordas diz-se *plano diametral principal*, ou simplesmente *plano principal*. Tres planos diametraes dizem-se *conjugados*, quando as coordenadas, que cada um divide ao meio, são parallelas á intersecção commum dos outros dous planos. Em quanto á equação (11), vê-se, que só os planos dos yx e xz são diametraes. Estes dous planos chamam-se tambem *conjugados*, porque as cordas, que cada um d'elles corta ao meio, são parallelas ao outro.

Posto isto, passemos a discutir especialmente cada uma das equações (10) e (11).

1.º GENERO

SUPERFICIES COM CENTRO

193. Se na equação (10) supuzermos n sempre positivo, as combinações de signaes que admittem os outros tres coefficients k , m e h podem reduzir-se ás tres seguintes, que dão origem a tres especies de superficies dotadas do centro:

$$kz^2 + my^2 + nx = h \dots \dots \text{ELLIPSOIDE.}$$

$$-kz^2 + my^2 + nx^2 = h \dots \dots \text{HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO.}$$

$$-kz^2 + my^2 + nx^2 = -h \dots \dots \text{HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS.}$$

Não figurámos os casos em que m é negativo, por isso que se reduziriam aos dous ultimos de cima por uma simples inversão nos eixos.

194. ELLIPSOIDE. Consideremos em 1.º logar a equação,

$$(a) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 + nx^2 = h.$$

Como supponmos k , m e n positivos, tambem h o será; aliás a equação seria absurda e nada representaria.

Se h for nullo, a equação partir-se-ha nas tres $x=0$, $y=0$, $z=0$, e a superficie reduzir-se-ha a um ponto.

Sendo h positivo, que é propriamente o caso, de que nos occupâmos, e fazendo separadamente x , y ou z nullos, ver-se-hia, que das intersecções dos tres planos coordenados com a superficie resultam ellipses.

Da secção feita por qualquer plano, paralelo aos coordenados, resultam tambem ellipses, como se veria facilmente, suppondo separadamente cada uma das coordenadas igual a uma constante.

O mesmo seria facil demonstrar a respeito de qualquer secção plana (n.º 186).

É por tudo isto que se deu a esta superficie o nome de *Ellipsoide*.

Os comprimentos A , B , C dos tres eixos principaes, obtem-se buscando as secções da superficie pelos eixos dos x , y e z , que dão

$$kC^2 = h, \quad mB^2 = h, \quad nA^2 = h.$$

Eliminando k , m e n da equação (a), vem

$$(13) \dots \frac{z^2}{C^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1, \text{ ou } A^2B^2z^2 + A^2C^2y^2 + B^2C^2x^2 = A^2B^2C^2,$$

a qual é a equação do *ellipsoide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes*. Esta superficie pode imaginar-se gerada por uma ellipse traçada no plano xy , a qual se move parallelamente a si mesma, e de maneira que os seus dous eixos vão variando de grandeza, sendo a curva obrigada ainda a correr ao longo de outra ellipse traçada no plano xz .

Se duas das quantidades A , B , C , forem eguaes, o *ellipsoide* será de *revolução*. E se for $A=B=C$ a superficie tornar-se-ha em uma *esphera*.

195. HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO. Consideremos em 2.º lugar a equação

$$(b) \dots\dots\dots - kz^2 + my^2 + nx^2 = h.$$

Se $h = 0$, a equação resultante é a de *cône*, que será a respeito do hyperboloide, o mesmo que são *assymptotas* relativamente á hyperbole. (n.º 87).

Se h não for nullo, fazendo separadamente x e y nullo, reconhece-se que das intersecções dos planos dos yz e xz com a superficie resultam hyperboles, nas quaes o eixo dos z é o 2.º eixo.

Suppondo z igual a uma constante, vê-se que as secções parallelas ao plano dos xy são ellipses reaes semelhantes, cujas dimensões augmentam com o valor numerico da cõstante.

E por isso se deu a esta superficie o nome de *Hyperboloide de um só ramo*.

Os comprimentos $A, B, C\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes obtem-se como no n.º precedente, e a equação do hyperboloide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes terá a mesma fórmula que a equação (13), unicamente com a mudança de C^2 em $-C^2$.

196. HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS. Consideremos em 3.º e ultimo lugar a equação

$$(c) \dots\dots\dots - kz^2 + my^2 + nx^2 = -h.$$

Se $h = 0$, a equação resultante será tambem a de um *cône assymptotico* d'este hyperboloide de 2.ª especie.

Quando h não é nullo, reconhece-se como no caso precedente, que das intersecções dos planos dos yz e dos xz com a superficie resultam hyperboles nas quaes o eixo dos z é o primeiro eixo.

Suppondo z igual a uma constante, $z = \pm l$, a equação (c) torna-se

em
$$\frac{m}{h} y^2 + \frac{n}{h} x^2 = \frac{k}{h} l^2 - 1;$$

e mostra que as secções paralelas aos xy são ellipses semelhantes, que crescem indefinidamente com a grandeza absolutã de l ; porém que se tornam imaginarias quando $l^2 < \frac{h}{k}$. D'onde resulta que este hyperboloide

tem *dous ramos* não contiguos, indefinidos cada um no seu sentido, porém separados por um intervallo em que não ha superficie. E por isso se lhe deu o nome de *Hyperboloide de dous ramos*.

Os comprimentos $A, B\sqrt{-1}, C\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes determinam-se como nos n.ºs precedentes, e a equação do hyperboloide de dous ramos, referida ao centro e aos seus tres diametros, terá a mesma fórma da equação (13), só com a mudança de B^2 e C^2 em $-B^2$ e $-C^2$.

197. As equações (a), (b), (c), que acabámos de discutir, podem offerecer ainda outras variedades de superficies, suppondo nullos um ou alguns dos coefficients k, m, n, h . Representarão *cylindros de base elliptica* ou *hyperbolica*, quando forem da fórma

$$kz^2 + my^2 = h, \text{ ou } kx^2 - my^2 = h;$$

e um systema de *dous planos* que se cortam, ou que são parallelos, quando se reduzirem a

$$kx^2 - my^2 = 0, \text{ ou } kx^2 = h.$$

Como estes casos não exigem discussão especial, contentar-nos-hemos com indicá-los.

2.º GENERO

SUPERFICIES SEM CENTRO

198. Se na equação (11) fizermos com que hx seja sempre positivo, conservando-se no 2.º membro, não poderão ser negativos ambos os termos do 1.º, porque a equação seria então absurda. Assim esta apenas admite as duas combinações seguintes de signaes, que dão origem a duas

especies de superficies destituidas de centro:

$$kz^2 + my^2 = hx \dots \dots \text{PARABOLOIDE ELLIPTICO.}$$

$$-kz^2 + my^2 = hx \dots \dots \text{PARABOLOIDE HYPERBOLICO.}$$

Se em lugar de k , suppozessesemos m negativo, tirariamos as mesmas consequencias, considerando invertido o eixo dos z no dos y .

199. PARABOLOIDE ELLIPTICO. Consideremos primeiro a superficie comprehendida na equação

$$(d) \dots \dots \dots kz^2 + my^2 = hx.$$

Fazendo separadamente z e y eguaes a zero, ver-se-ha que as secções feitas pelos planos xy e zx são parabolos. Se egualarmos estas mesmas coordenadas a quantidades constantes, concluir-se-ha que das secções parallelas áquelles planos resultam tambem parabolos.

Fazendo $x = 0$, vê-se que a secção feita pelo plano zx determina a origem das coordenadas, porque a equação (d) parte-se então nas duas $z = 0$, $y = 0$. Fazendo x egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas a este ultimo plano são ellipses.

É por isto que a superficie representada pela equação (d) se deu o nome de *Paraboloide elliptico*.

Como x negativo dá resultados imaginarios, segue-se que a superficie fica toda do lado dos x positivos. Se m for zero, e a equação se reduzir a

$$kz^2 = hx,$$

que, segundo vimos (n.º 192), é uma transformação da equação (11); teremos então uma *superficie cylindrica de base parabolica*.

Os mais casos particulares que offerece a equação (d) comprehendem-se noutros já discutidos.

200. PARABOLOIDE HYPERBOLICO. Discutindo pelo mesmo theor a equação

$$(e) \dots \dots \dots -kz^2 + my^2 = hx,$$

vê-se: que a secção feita pelo plano yz é uma parábola que fica para o lado dos x positivos; a do plano xz é uma parábola que fica para o lado dos x negativos; e a secção do plano yz representa duas rectas.

Todas as secções paralelas ao plano xy são parábolas eguaes á principal, mas collocadas successivamente em differentes posições. O mesmo diremos das secções paralelas ao plano xz . Finalmente as secções paralelas ao plano zy produzem hyperboles.

Por isso a estas superficies se deu o nome de *Paraboloides hyperbolicos*.

101. Quando nos dous casos precedentes é $h=0$, a equação tem a fórma $a^2z^2 \pm b^2y^2=0$, conforme os signaes de k e m . Em um dos casos é $z=0$, $y=0$, e a superficie reduz-se ao eixo dos x . No outro, a equação, á qual se pode dar a fórma $(az+by)(az-by)=0$, indica que podemos tornar nullo qualquer dos dous factores; e a superficie reduz-se a um systema de dous planos que se interceptam segundo o eixo dos x .

NOTAS

Nota 1.ª (pag. 18ª)

A construção empregada para demonstrar o theorema fundamental (3) (fig. 22) deixa de ser a mesma quando não são menores de 90° os lados b' e c' ; porque se um d'estes lados é $> 90^\circ$, a secante respectiva não encontra a tangente, mas sim o seu prolongamento; e se um dos mesmos lados é $= 90^\circ$, a secante respectiva é paralela á tangente.

No entretanto, sem fazermos a construção, pode mostrar-se que, ainda nos casos mencionados, tem logar o theorema (3).

I. Se $b' < 90^\circ$; a construção dá, como dissemos, no triangulo ABC a formula (3).

II. Se $b' < 90^\circ$, $c' > 90^\circ$; produzam-se BA e BC até completar em B' o fuso espherico BB'. No triangulo B'AC, serão:

$$B'A = 180^\circ - c', \quad B'AC = 180^\circ - a, \quad B'C = 180^\circ - a';$$

e a formula (3) que tem logar para o angulo B'AC d'este triangulo, dá

$$\cos B'AC = \frac{\cos B'C - \cos AB' \cos AC}{\sin AB' \sin AC},$$

ou (3).

III. Se $b' > 90^\circ$, $c' > 90^\circ$; o triangulo B'AC, relativamente ao angulo B'AC, está no caso precedente (II); e por isso ainda tem logar a mesma demonstração.

Ou tambem, produzindo os lados BA e AC até encontrarem em B' e C' o arco BC produzido, será no triangulo C'AB':

$$B'AC' = a, \quad AB' = 180^\circ - c', \quad AC' = 180^\circ - b', \quad C'B' = a';$$

e applicando-lhe o theorema, virá a formula (3).

IV. Se $b' = 90^\circ$, $c' = 90^\circ$, a formula (3) dá

$$\left. \begin{array}{l} \text{para o angulo } a, \\ \text{para os angulos } b \text{ ou } c, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos a = \cos a', \quad a = a' \\ \cos b = 0, \quad b = 90^\circ; \quad \cos c = 0, \quad c = 90^\circ \end{array}$$

o que concorda com as propriedades conhecidas dos polos.

V. Se é sómente $c' = 90^\circ$: produza-se, ou corte-se AC, até que seja $AD = 90^\circ$.

1.º Se não é $BD = 90^\circ$; o theorema será applicavel ao angulo D no triangulo CBD; e dará

$$\cos D = \frac{\cos a' - \cos B \cos CD}{\sin BD \sin CD},$$

que, por ser $\cos D = 0$, se reduz a

$$\cos a' = \cos BD \cos CD = \cos a \sin b':$$

e como a formula (3) applicada ao angulo a no triangulo ABC dá tam-

bem $\cos a = \frac{\cos a'}{\sin b'}$, ou $\cos a' = \cos a \sin b'$, segue-se que aquella formula

é ainda verdadeira neste caso.

2.º Se é $BD = 90^\circ$; como tambem é $AB = 90^\circ$, será B pólo de AC, e consequentemente $a' = 90^\circ$; logo (IV) o theorema é ainda verdadeiro no caso de que se tracta.

(Vejam-se os *Apontamentos de Trigon. Esph.*, que se encontram tambem no vol. 3.º do jornal de Coimbra o *Instituto*).

Nota 2.ª (pag. 212)

1. No triangulo ABC (fig. 23) produzam-se os seus lados, até se encontrarem dous a dous, e formarem os tres fusos esfericos A, A', B, B', C, C'. O circulo ACA'C'A será a base do hemispherio ACBA'C'; e este compor-se-ha dos triangulos m, n, p, q .

Chamando pois $S = 2\pi r^2$ a superficie do hemispherio, e observando que, por serem

$$AB' = 180^\circ - AB = A'B, \quad CB' = 190^\circ - CB = BC', \quad B = B',$$

são eguaes os triangulos $AB'C$, $A'BC'$: teremos

$$\begin{aligned} S &= m + n + p + q = m + n + m + p + m + q - 2m \\ &= AA' + BB' + CC' - 2m. \end{aligned}$$

E como os fusos esfericos são proporcionaes aos seus angulos, isto é,

$$AA' = \frac{a}{180^\circ} \cdot S, \quad BB' = \frac{b}{180^\circ} \cdot S, \quad CC' = \frac{c}{180^\circ} \cdot S,$$

teremos
$$AA' + BB' + CC' = \frac{a + b + c}{180^\circ} \cdot S,$$

e conseguintemente

$$m = \frac{a + b + c - 180^\circ}{360^\circ} \cdot S.$$

Se quizermos tomar por unidade de superficie a superficie do triangulo trirectangulo, que é a quarta parte do hemispherio, e por unidade d'angulo o angulo recto, a expressão de m tomará a fórma

$$m = a + b + c - 2.$$

2. A superficie do triangulo vem assim expressa nos seus tres angulos: mas quando os angulos não forem dados, poderemos exprimir-os nas partes que forem dadas, e substituir depois essas expressões na da superficie, ou d'uma funcção trigonometrica d'ella.

Por exemplo, se forem dados os lados a' e c' com o angulo compre-

hendido b : tomando o triangulo trirectangulo por unidade de superficie, e o angulo recto por unidade d'angulo, teremos

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{1}{2}m\right) &= -\operatorname{tang}\left(\frac{a+c}{2} + \frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2} - 1}; \end{aligned}$$

ou, em virtude da ultima analogia de Neper, e fazendo $\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}=t$,

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{1}{2}m\right) &= \frac{\cot\frac{b}{2}\cos\frac{a'-c'}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}\cos\frac{a'+c'}{2}}{\cos\frac{a'-c'}{2} - \cos\frac{a'+c'}{2}} \\ &= \frac{\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{c'}{2} + \operatorname{sen}\frac{a'}{2}\operatorname{sen}\frac{c'}{2}\left(\cos^2\frac{b}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\operatorname{sen}\frac{c'}{2} \times \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}} \\ &= \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}\cos b}{\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}\operatorname{sen}b} = \frac{1 + t\cos b}{t\operatorname{sen}b}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo em fim $\frac{1}{2}m$ em serie ordenada segundo as potencias de t , serã

$$\frac{1}{2}m = t\operatorname{sen}b - \frac{1}{2}t^2\operatorname{sen}2b \dots$$

ou, se desprezarmos as quantidades da quarta ordem relativamente a a' e c' ,

$$m = \frac{1}{2} a' c' \operatorname{sen} b.$$

E porque é da segunda ordem a diferença entre os senos do angulo b do triangulo espherico, e do angulo correspondente do triangulo rectilíneo, que tem os mesmos lados que o espherico, vê-se que, desprezando os termos da quarta ordem, a superficie do triangulo espherico é igual á do rectilíneo.

3. Chamando r o raio da esphera, e exprimindo as linhas trigonometricas do segundo membro da equação (3) nos comprimentos dos arcos respectivos, facilmente se mostra (*Trigon. de Legendre, appendice § V*) que os angulos a, b, c , d'um triangulo espherico de lados muito pequenos têm, desprezando os termos da quarta ordem, com os correspondentes a', b', c' , do triangulo rectilíneo, cujos lados são tambem a', b', c' , as seguintes relações

$$a = a' + \frac{1}{3} \frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}, \quad b = b' + \frac{1}{3} \frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}, \quad c = c' + \frac{1}{3} \frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''},$$

sendo m a superficie do triangulo rectilíneo, que segundo o n.º precedente é igual á do espherico.

O que reduz a resolução do triangulo espherico proposto á do triangulo rectilíneo, cujos lados são a', b', c' , e cujos angulos são a, b, c .

O numero de segundos $\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}$ é o *excesso espherico*, que se reparte assim igualmente pelos tres angulos do triangulo.

4. Suppondo o raio da esphera infinito, e os comprimentos dos arcos finitos, ou suas graduações infinitesimas, o triangulo espherico torna-se rectilíneo; e por isso podemos, fazendo aquellas hypotheses, passar dos theoremas da trigonometria espherica para os correspondentes da trigonometria rectilínea.

Quando nos theoremas da trigonometria espherica entra mais de um lado, passando d'elles para os triangulos rectilíneos, podem apparecer razões entre as graduações dos lados; e porque estas razões podem ter um

limite de grandeza finita, quando se tornam infinitesimas as gradações entre as quaes ellas têm logar, pode apparecer um theorema correspondente da trigonometria rectilinea na qual entrem lados. Mas quando nos theoremas da trigonometria espherica entra só um lado, a hypothese de ser este infinitesimo necessariamente o faz desaparecer; e o theorema reduz-se para a trigonometria rectilinea a uma relação entre angulos.

Assim, nestas hypotheses, a formula (3)

$$\cos a = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'} = \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' + 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} b' - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c' - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c'}{\sin b' \sin c'}$$

dá

$$\cos a = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}$$

E proseguindo, pelo mesmo modo, achariamos que os quatro theoremas fundamentaes de trigonometria espherica, e as quatro analogias de Neper, correspondem aos quatro theoremas principaes da trigonometria rectilinea. (Vejam-se os já citados *Apontamentos de Trigon. Espher.*).

ADDITAMENTO AO N.º 49

Equação polar da linha recta

A equação da linha recta $y = ax + b$,

fazendo $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$,

e pondo $a = \cot i$, $-b \operatorname{sen} i = c$,

transforma-se na polar $r \cos(\theta + i) = c$.

i é o angulo que a recta faz com o eixo dos y .

1.º $\theta + i = 90$ dá $r = \infty$. A direcção do raio vector faz então um angulo infinitesimo com a da recta. E para angulos θ menores que $90 - i$ o raio vector encontra a recta na direcção opposta.

2.º $\theta = 90$ dá $r = -\frac{c}{\operatorname{sen} i} = b$, correspondente ao ponto onde a recta corta o eixo dos y .

3.º $\theta = 180$ dá $r = -\frac{c}{\cos i} = \frac{b}{a}$, correspondente ao ponto onde a recta corta o eixo dos x .

4.º $\theta = 180 - i$ corresponde ao minimo valor $r = b \operatorname{sen} i$, que é a perpendicular abaixada da origem sobre a recta.

ADDITIONALMENTO AO N. 43

Exposições gerais de livros raros

A Exposição de livros raros

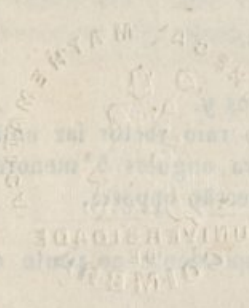
1. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

2. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

3. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

4. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

5. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.



6. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

7. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

8. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

9. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

10. A Exposição de livros raros é destinada a expor os livros raros que pertencem a bibliotecas particulares e a bibliotecas de instituições de ensino e de pesquisa.

TABOA DAS MATERIAS

GEOMETRIA ANALYTICA PLANA

PRIMEIRA SECÇÃO

APPLICAÇÃO DA ALGEBRA Á GEOMETRIA ELEMENTAR

	pag.
<i>Problemas sobre as linhas</i>	1
<i>Construcções geometricas</i>	8
<i>Dos signaes das quantidades na Algebra applicada á Geometria</i>	22

SEGUNDA SECÇÃO

LOGARES GEOMETRICOS

<i>Noções preliminares</i>	33
----------------------------------	----

I. LINHA RECTA E CIRCULO

<i>Da linha recta</i>	35
<i>Do circulo</i>	48
<i>Transformação das coordenadas</i>	53
<i>Coordenadas polares</i>	56

II. SECÇÕES CONICAS

<i>Da ellipse</i>	59
<i>Da hyperbole</i>	63
<i>Da parabola</i>	66

	pag.
<i>Das secções do cone</i>	68
<i>Methodo das tangentes</i>	73
<i>Applicações</i>	75
<i>Das asymptotas da hyperbole</i>	89
<i>Nota ao numero 73</i>	96
<i>Do centro e dos diametros</i>	98
<i>Transformações de coordenadas</i>	107
<i>Discussão das equações do segundo grau</i>	117
<i>Resultado da discussão</i>	131
<i>Outro modo de discussão</i>	136

III. PROBLEMAS DE ANALYSE GEOMETRICA

<i>Da geração das curvas</i>	153
<i>Problemas que passam do segundo grau</i>	161
<i>De algumas outras curvas</i>	168
<i>Da interpolação</i>	175

NOTAS

<i>Sobre o n.º 31</i>	179
<i>Sobre o n.º 38</i>	180
<i>Sobre o n.º 56</i>	181
<i>N.º 80 (no fim)</i>	183
<i>N.º 85 (no fim de 3.º)</i>	»
<i>N.º 109</i>	184
<i>N.º 49</i>	265

II. SECÇÕES CONICAS

<i>Da ellipse</i>	29
<i>Da hyperbole</i>	63
<i>Da parabolâ</i>	88

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO

I. TRIGONOMETRIA ESFERICA

	pag.
<i>Noções fundamentaes</i>	185
<i>Triangulos esfericos rectangulos</i>	192
<i>Triangulos esfericos obliquangulos</i>	197
<i>Problemas que offerecem duas soluções</i>	206

II. SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO

<i>Principios geraes</i>	213
<i>Equações do plano, do cylindro, do cone, etc.</i>	220
<i>Problemas sobre o plano e a linha recta</i>	226
<i>Transformação de coordenadas</i>	237
<i>Coordenadas polares no espaço</i>	242
<i>Das intersecções planas</i>	243
<i>Superficies de segunda ordem</i>	246

NOTAS

<i>Nota 1.^a (pag. 189)</i>	259
<i>Nota 2.^a (pag. 212)</i>	260

GEOMETRÍA ANALÍTICA NO ESPACIO

I. GEOMETRÍA ANALÍTICA NO ESPACIO

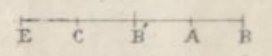
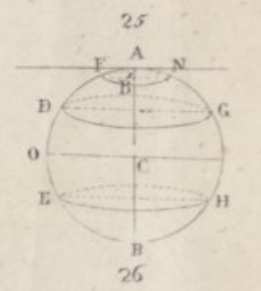
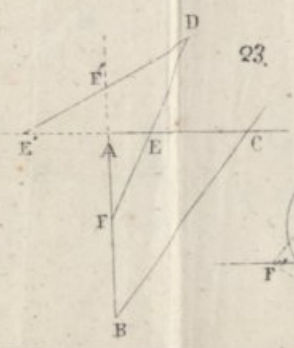
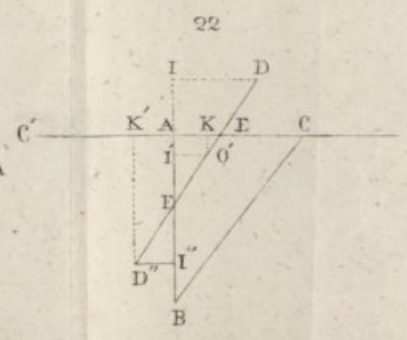
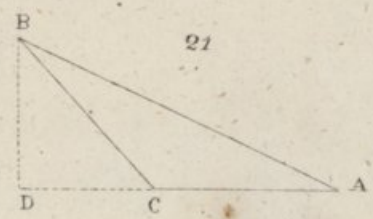
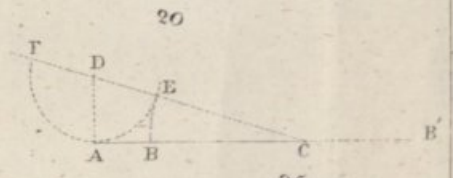
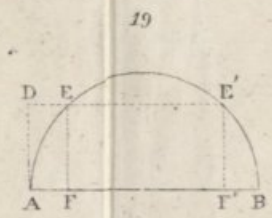
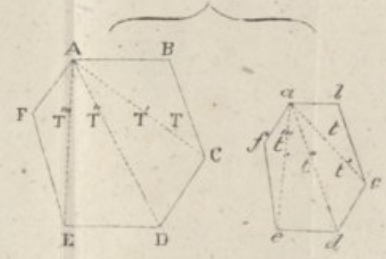
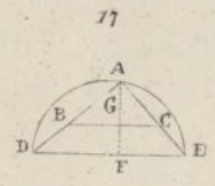
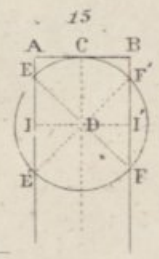
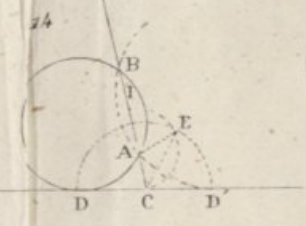
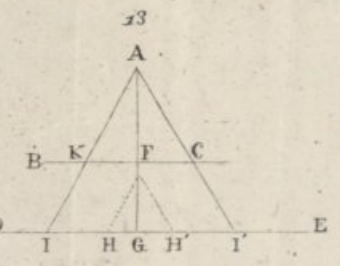
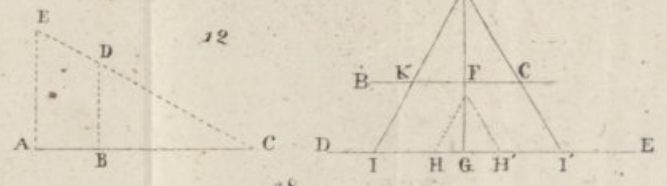
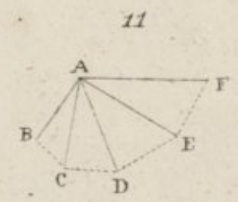
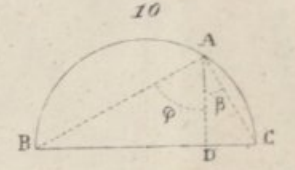
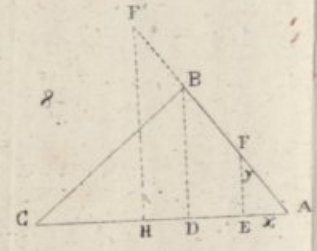
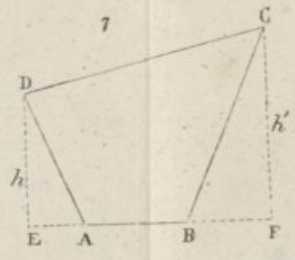
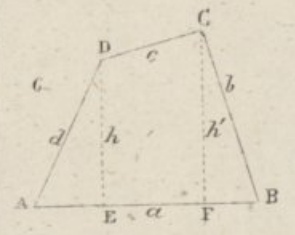
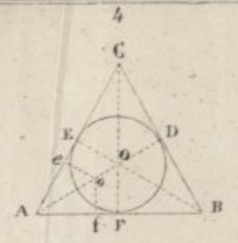
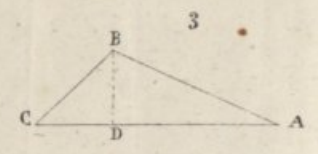
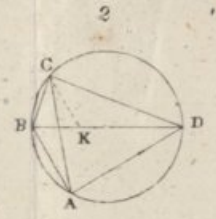
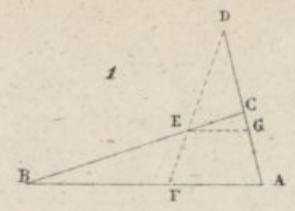
187	El plano en el espacio
193	El plano en el espacio
197	El plano en el espacio
208	El plano en el espacio

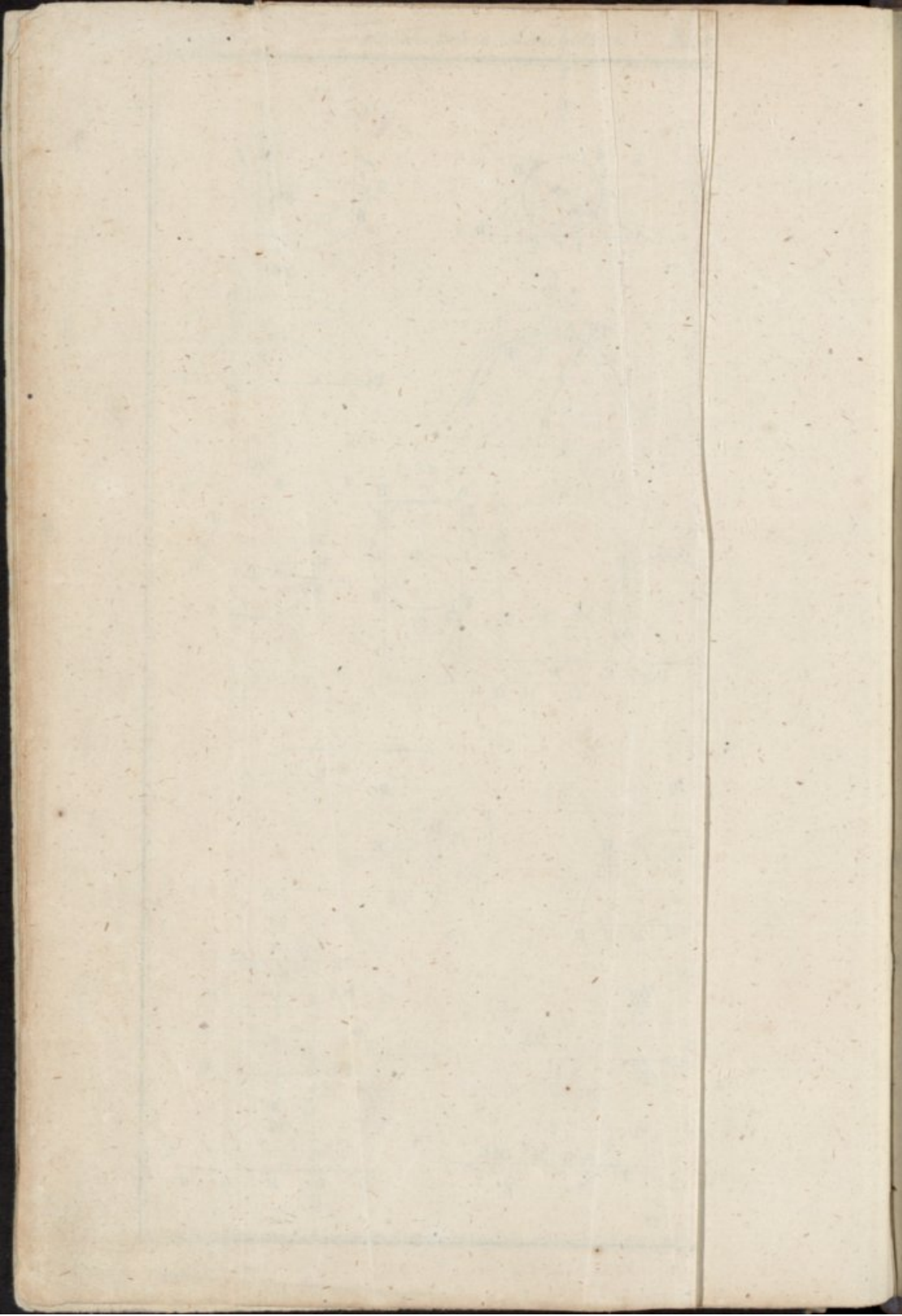
II. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO

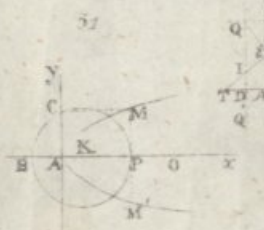
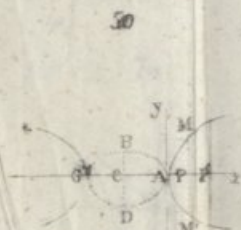
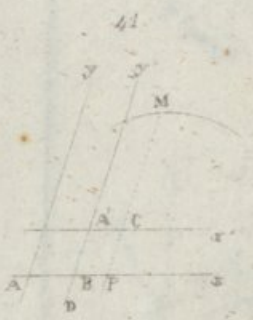
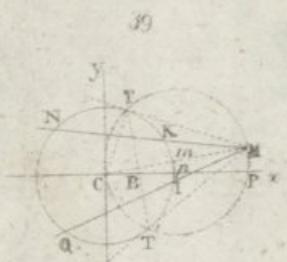
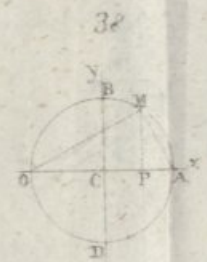
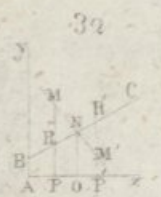
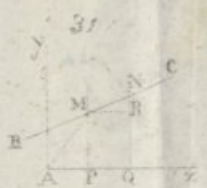
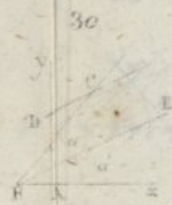
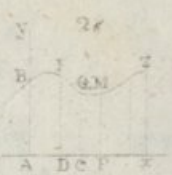
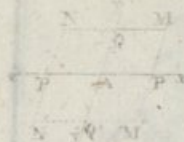
213	El punto en el espacio
220	El punto en el espacio
226	El punto en el espacio
237	El punto en el espacio
242	El punto en el espacio
243	El punto en el espacio
246	El punto en el espacio

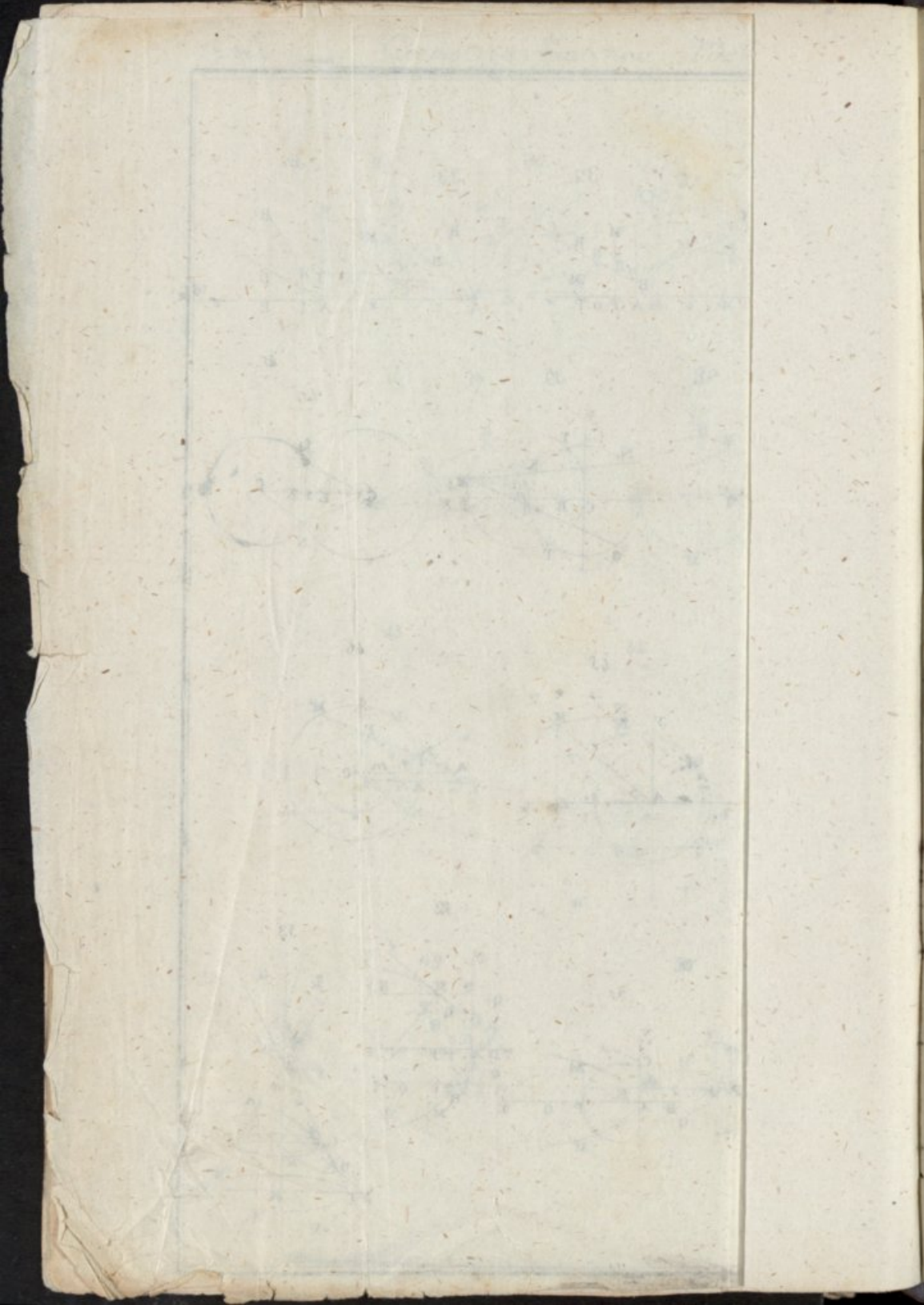
NOTAS

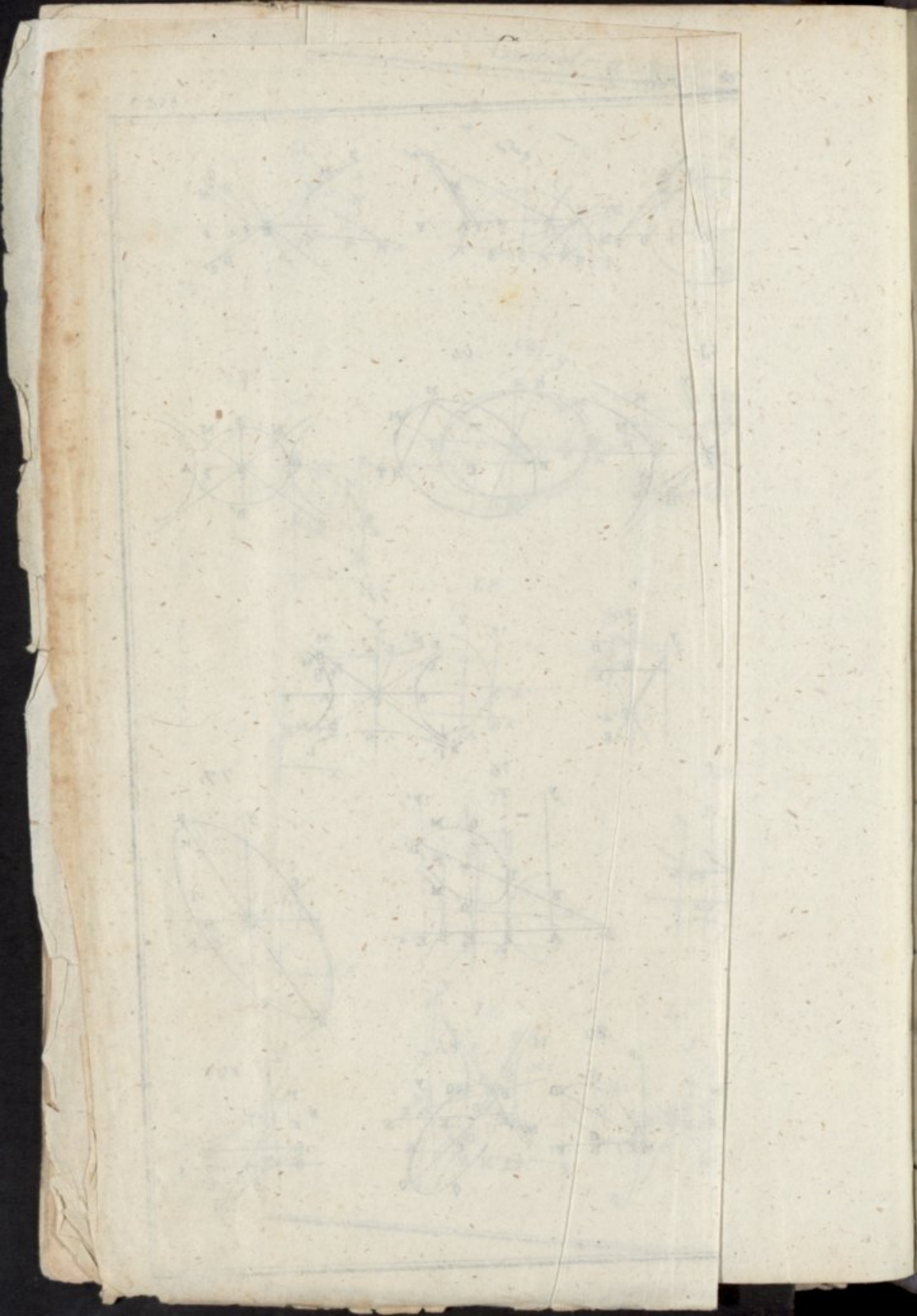
252	Nota 1 (págs. 180)
260	Nota 2 (págs. 213)

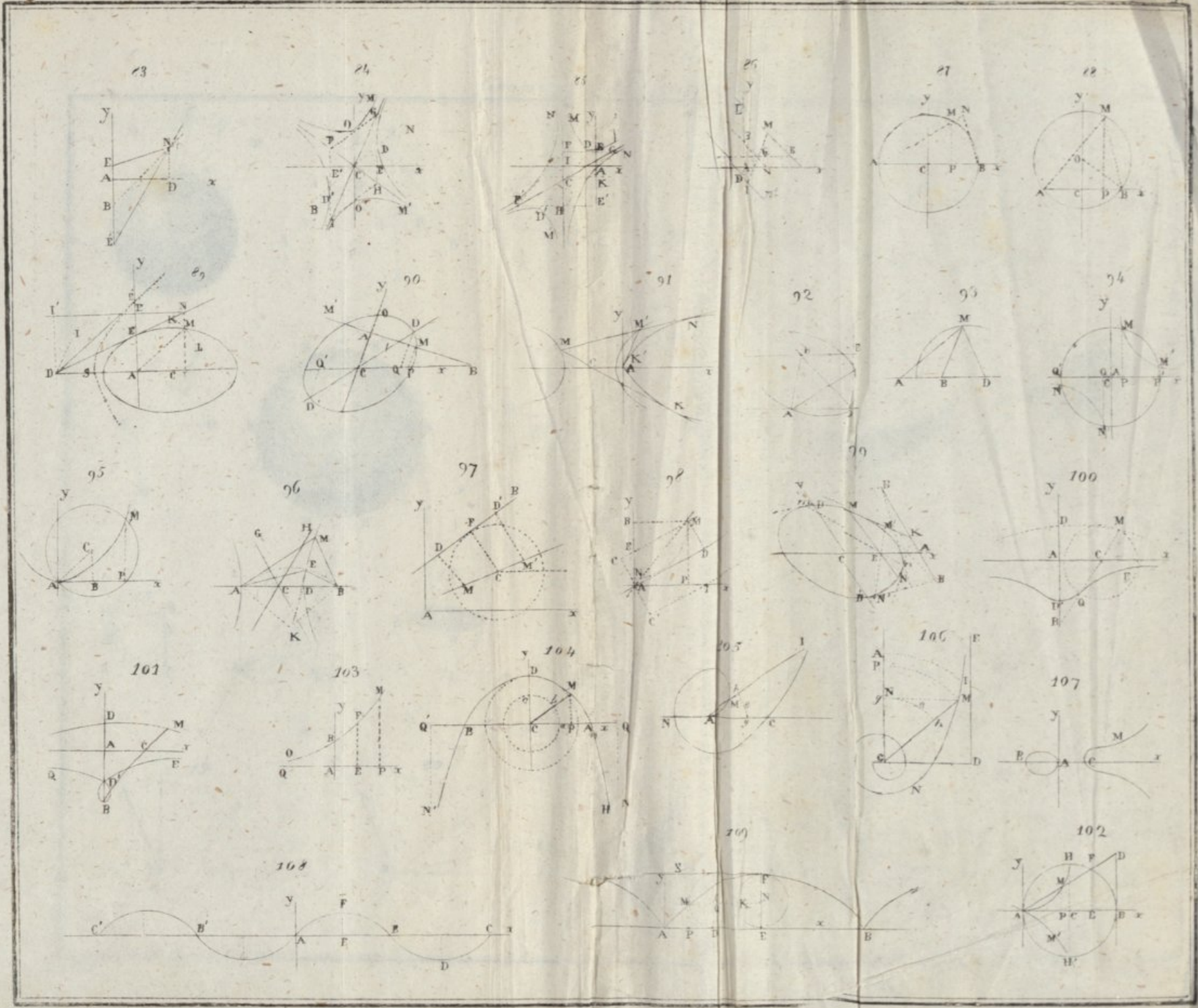




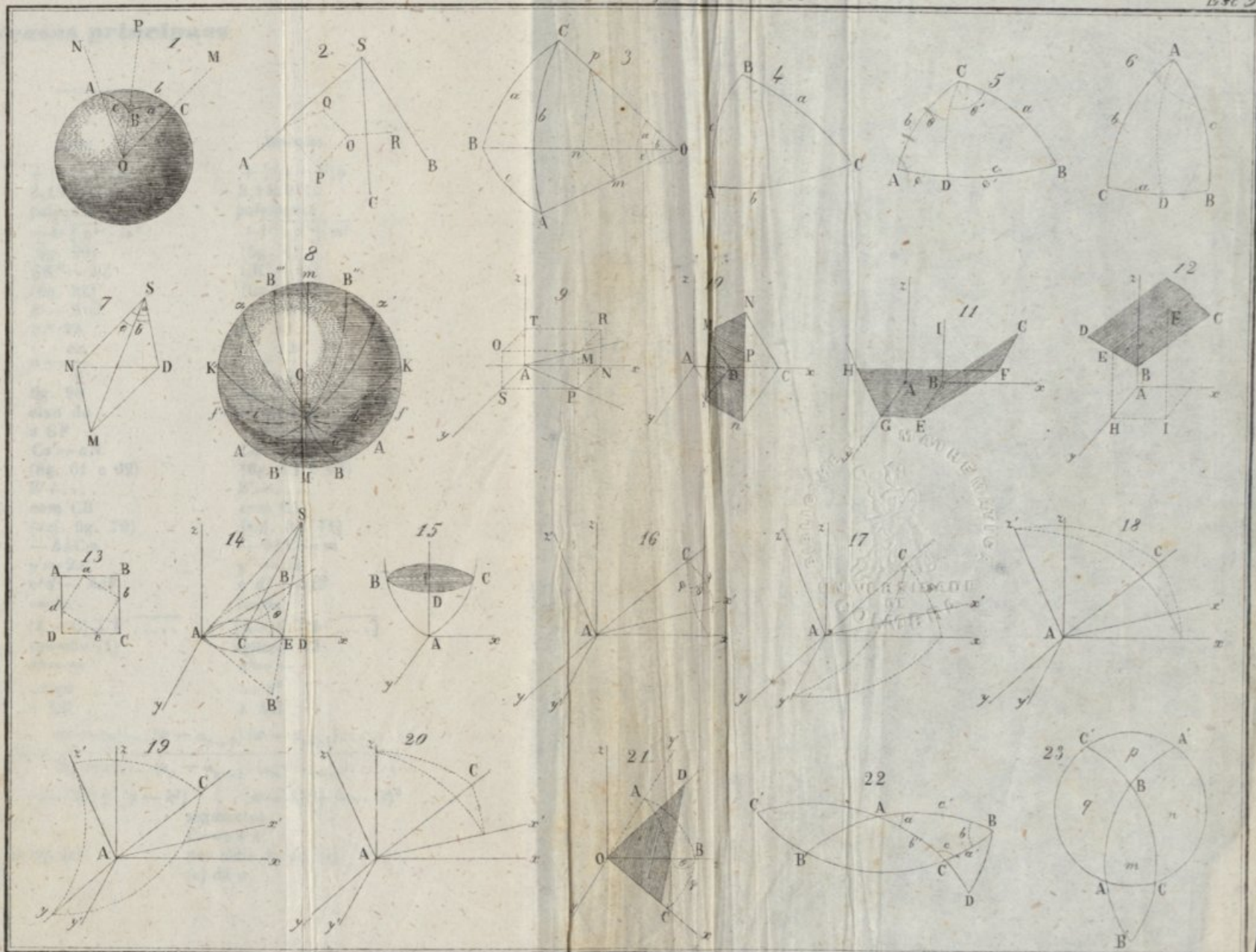


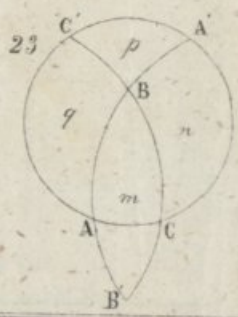
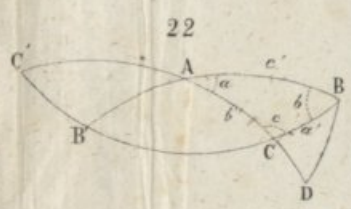
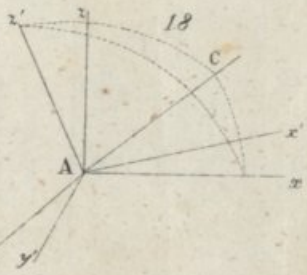
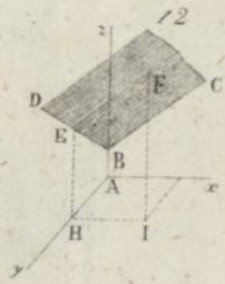
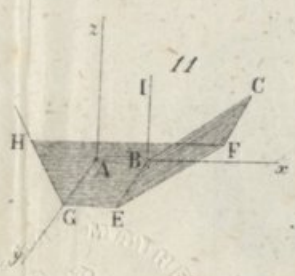
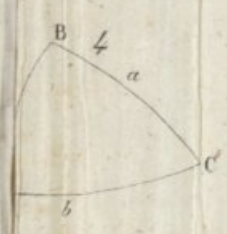








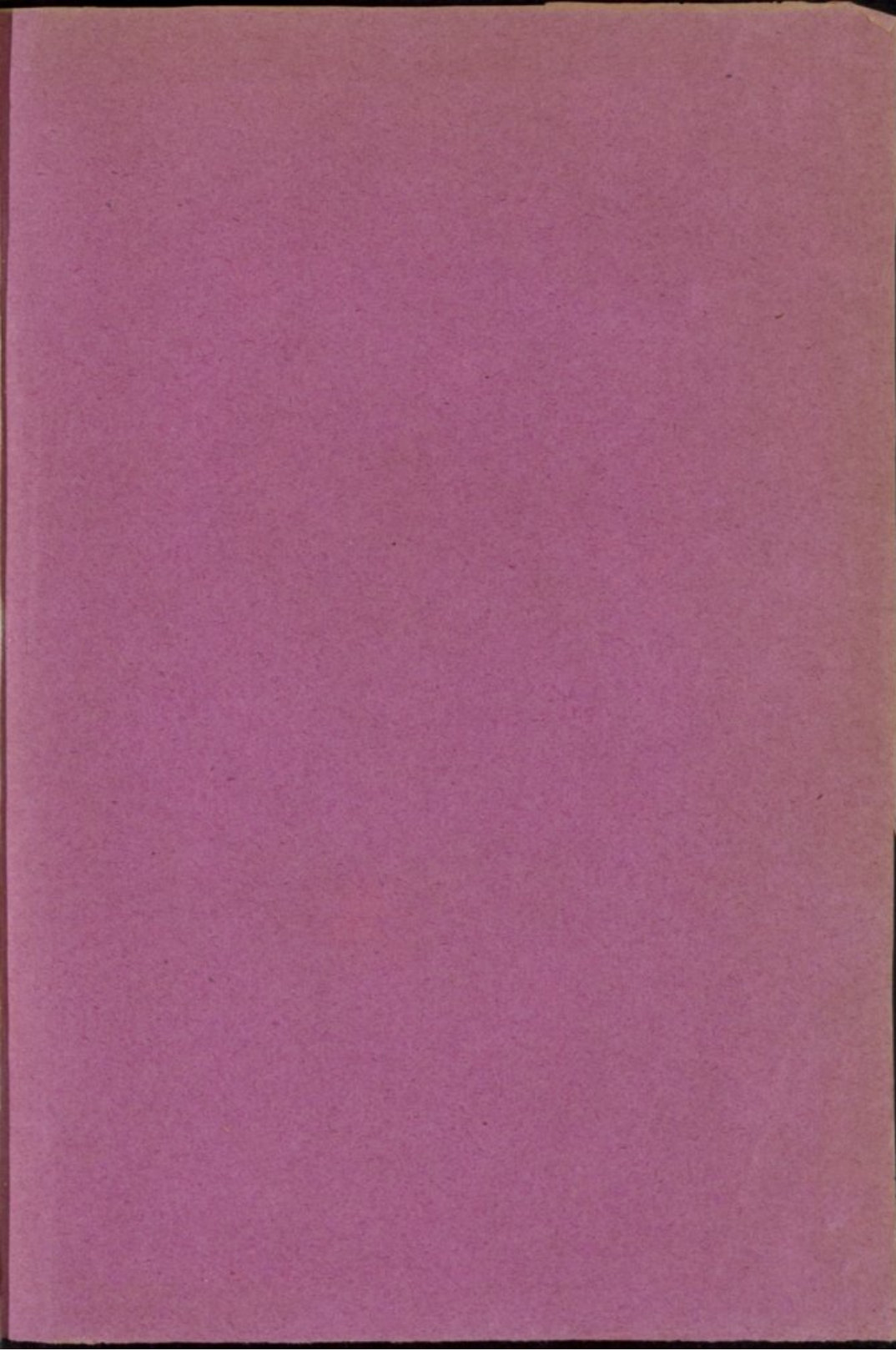


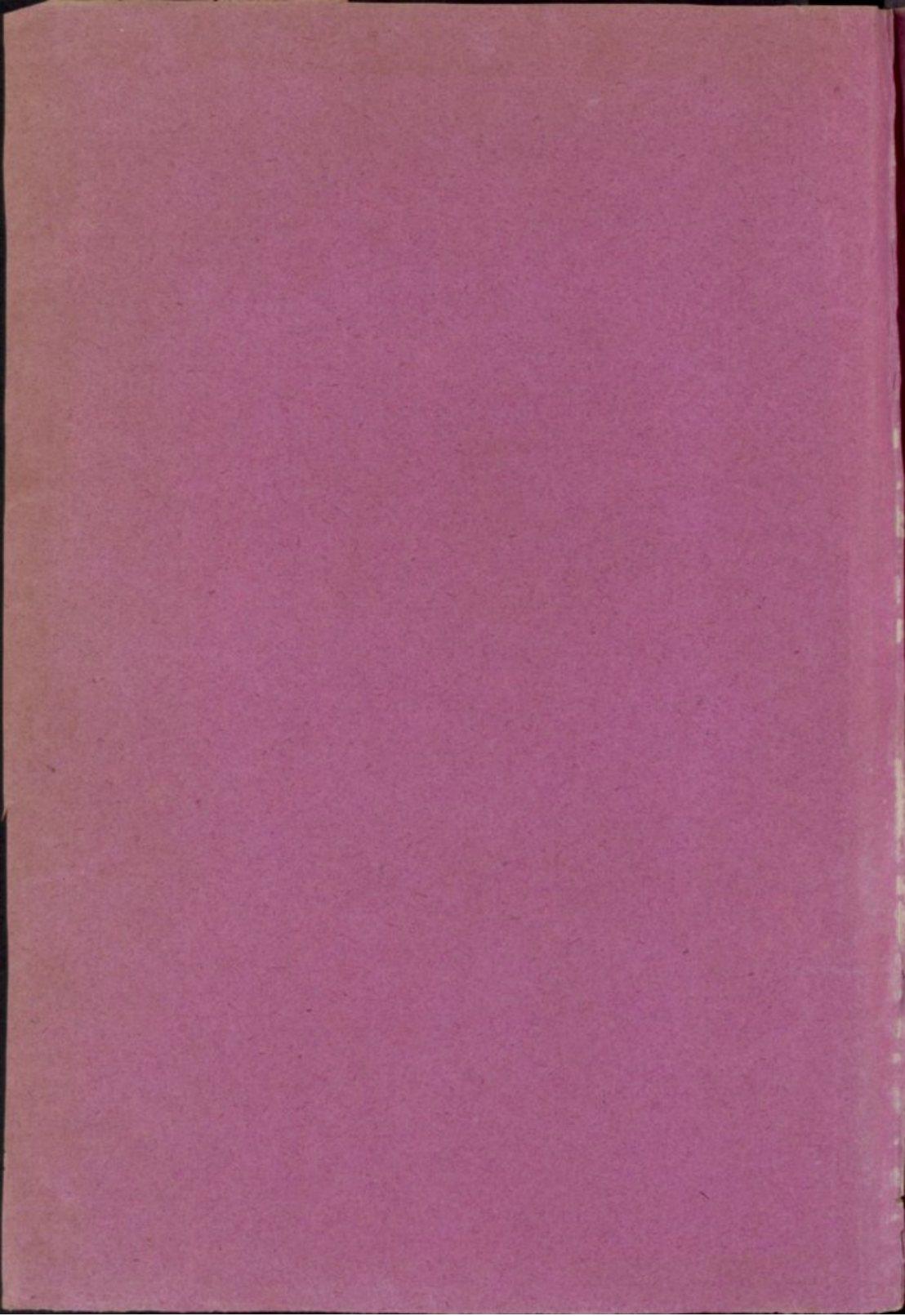


Erratas principaes

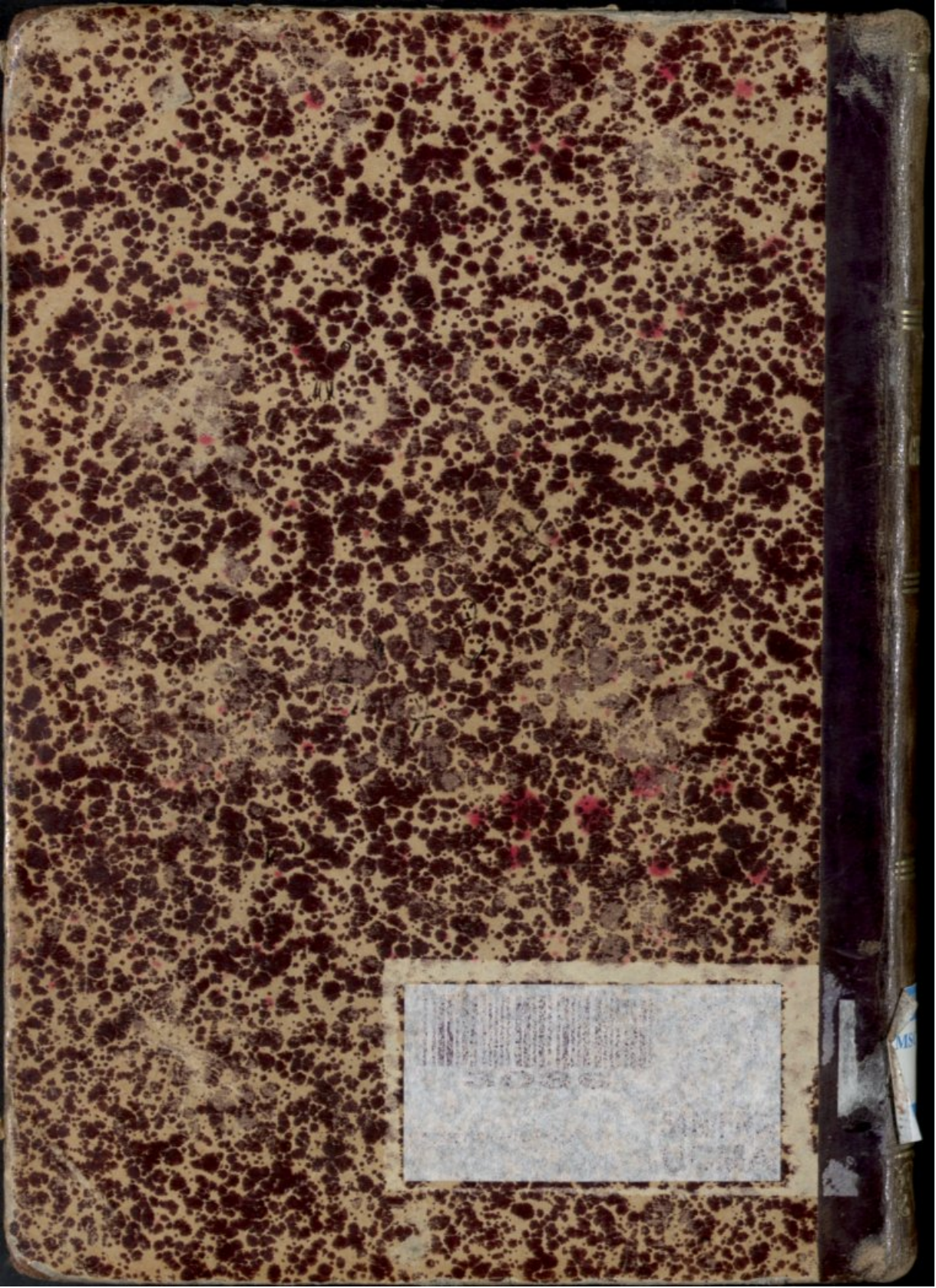
Paginas	Linhas	Erros	Emendas
5	9	$+(a - b')h$	$+\frac{1}{2}(a - b')h$
7	21	3,1310319	3,1410319
10	6	poligono	polynomio
19	21	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}p^2 + m^2}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}$
24	19	(fig. 20)	(fig. 8)
25	16	$CK'' = AC$	$CK' = AC$
"	22	(fig. 22)	(fig. 23)
29	14	$k^2 = 3rh$	$h^2 = 3rh$
48	4	n.º 39	n.º 33
63	15	$a - \frac{ex}{a}$	$a - \frac{cx}{a}$
84	8	fig. 98	fig. 99
86	3	eixo do	do eixo dos
88	6	a GF	a GF (fig. 49)
95	21	$Ca' = aN$	$Ca' + aN$
98	20	(fig. 61 e 62)	(fig. 61 e 63)
99	6	$E' + \dots$	$E' = \dots$
103	penultima	com CB	com CA
114	14	(vej. fig. 70)	(vej. fig. 71)
117	11	$-4ACm$	$-4AC = m$
120	21	$y' = 2x'$	$y'^2 = 2x'$
131	20	$e^2 d^2 = 4aF$	$e d^2 = 4aF$
133	15	$= Ax$	$= Bx$
134	3 sub.	$(A + C) \mp \sqrt{\dots}$	$[A + C \mp \sqrt{\dots}]$
143	2	equação (1)	equação (3)
153	12	$a' = -$	$a' = -$
170	3	$= ax$	$= a^x$
172	12	a AD	a AE
176	leia-se:	$A_n = \frac{(x - \alpha_0) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n+1}) \dots}{(\alpha_n - \alpha_0) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dots}$	
177	antepenultima	$(x - h^2) + (y - k^2)$	$(x - h)^2 + (y - k)^2$
200	17	segmentas	segmentos
"	19	$D = \theta + \theta'$	$C = \theta + \theta'$
"	26	por meio da eq. (e)	por meio da eq. (s)
201	25	(c) dá (a)	(c) dá a

Paginas	Linhas	Erros	Emendas
204	12	$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang } \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A+A)}$	$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang } \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}$
207	13	CM = 180 = ψ	Cm = 180 = ψ
"	28	ou arco CM	o arco CM
208	11	CB' = CA = b	CA' = CA = b
215	35	seus postos	seus pontos
217	18	(fig. 6)	(fig. 11)
"	36	mn = MN	mn = MP
"	37	um linha	uma linha
220	5	um curva	uma curva
223	11 (a)	... (a')
230	19	(x = ax + a,	(x = az + a,
234	"	(fig. 33)	(fig. 10)
240	24	cos (yx')	cos (y'x)
242	18	n.º 188. 4.º,	n.º 178. 4.º,
247	28	y = a''z	y = $\beta''z$
248	15	ao eixo dos x	ao eixo dos x'
251	13	x', y', z'	x'y', x'z', y'z'
"	16	(a β - d)	(e β - d)
257	14	pelo plano zx	pelo plano zy
258	2	pelo plano yz	pelo plano zy









MS
A small, rectangular, light-colored label is affixed near the bottom center of the cover. The text on the label is extremely faint and illegible, appearing to be a library or archival stamp. The label is surrounded by a thin, light-colored border.

GEOMETRIA

BIBLIOTECA MATE

MSC RJ

4

13

FCT

UNIVERSIDADE DE CO

