Por

Francoeur, L.-B.

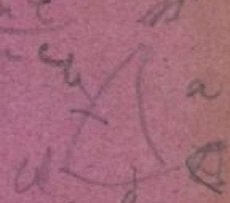
$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} \right)$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a - \cancel{\cos^2 b \cos^2 c} + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\cancel{\quad} \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = M \qquad \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$



$\alpha' \; B' \; C'$

$\alpha \; B \; C$

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos \alpha'$$

$$\cos \alpha = \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

$$\cancel{\cos B \cos C} = - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} \qquad \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\cos \alpha = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$$

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c \cos B + \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\cos a (1-\cos^2 c) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c \cos B + \frac{\cancel{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} \operatorname{sen} B \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \cot \alpha$$

$$\cos B \cos c = - \operatorname{sen} B \cot \alpha + \operatorname{sen} c \cot a$$

CURSO COMPLETO

DE

MATHEMATICAS PURAS

POR

L.-B. FRANCOEUR

GEOMETRIA ANALYTICA

GEOMÈTRIA ANALYTICA

POR

L.—B. FRANCOEUR

NOVAMENTE TRADUZIDA, CORRECTA E AUGMENTADA

PELOS

LENTES JUBILADOS DA FACULDADE DE MATHEMATICA
NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Francisco de Castro Freire, e Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto

3.ª EDIÇÃO

Da Faculdade

Para uso das Aulas

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1871

ADVERTENCIA

Nas edições antecedentes a *Geometria Analytica* achava-se repartida pelos 2.° e 3.° volumes, e intercalada no primeiro d'elles com outras partes do curso de mathematicas puras, cujo ensino passou mais tarde para os lyceus.

Esta ultima circumstancia levou-nos, na presente edição, a reunir em um volume toda a *Geometria Analytica*, com exclusão d'aquellas partes, para commodidade do ensino, e para que os alumnos só tenham que munir-se em cada anno dos volumes cujas materias devem estudar.

Parece-nos que a mesma circumstancia tornará uteis para este fim, nas citações da *Algebra Elementar*, da *Geometria Synthetica*, e da *Trigonometria Rectilinea*, as tabellas de correspondencia entre os numeros citados e os analogos dos compendios respectivos, que se addicionarão.

GEOMETRIA ANALYTICA

PRIMEIRA SECÇÃO

APPLICAÇÃO DA ALGEBRA Á GEOMETRIA ELEMENTAR

Problemas sobre as linhas

1. Viete e Descartes conceberam a idéa de applicar a Algebra ás questões geometricas; e esta idéa foi depois a origem das mais transcendentes descobertas em todos os ramos das Mathematicas.

Introduzindo nas formulas analyticas as grandezas geometricas, submettem-se estas grandezas ás combinações da Algebra, por meio das quaes se conseguem facilmente resultados que se obteriam com difficuldade pela simples Geometria. Porque, se a Geometria tem a vantagem de nunca perder de vista o objecto principal, mostrando claramente a cadêa de proposições que prende os primeiros axiomas ás suas ultimas consequencias, a Algebra tem as da riqueza e concisão da linguagem, e do espirito de investigação com que procede.

Na verdade estas reflexões levam naturalmente a preferir na Geometria elementar os methodos directos, que, não se fundando senão em principios directamente ligados com as conclusões que se têm em vista, permittem, por assim dizer, isolar cada theorema, e imprimir-lhe o cunho d'uma verdade tão clara como o axioma de que é deduzida. Mas, ao passo que as questões se complicam, este methodo, que se chama *Synthese,* vai perdendo o caracter de evidencia, que é a sua melhor qualidade;

e a *Analyse* ganha vantagem pela fecundidade dos seus recursos, e pela elegancia dos artificios, com que generalisa os resultados e simplifica os processos (*).

Os problemas seguintes confirmarão estas verdades.

2. *Medir a distancia* $AD = x$ (fig. 1) *do ponto* A *a um ponto inaccessivel* D.

Tomando no alinhamento AD um ponto accessivel C, forme-se o triangulo arbitrario ABC, e meçam-se os lados $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (**). Depois tome-se em BC um ponto qualquer E, d'onde se veja D na direcção DEF; e meçam-se $AF = d$, $EC = g$.

Posto isto, se imaginarmos EG parallela a AB, teremos as equações

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{CG} = \frac{AB}{EG}, \frac{DA}{AF} = \frac{DG}{EG},$$

que, pondo as letras que representam as linhas, e attendendo a ser

$$DG = DA - AG = DA - (AC - CG) = x - b + CG,$$

dão $$CG = \frac{bg}{a}, \; EG = \frac{cg}{a}, \; \frac{x}{d} = \frac{x - b + \frac{bg}{a}}{\frac{cg}{a}};$$

por conseguinte $$x = bd\,\frac{g - a}{cg - ad},$$

que, no caso de ser $$BF = AF, \text{ ou } c = 2d,$$

se torna em $$x = b\,\frac{g - a}{2g - a}.$$

(*) Sobre a comparação da *Analyse* com a *Synthese* podem tambem consultar-se os nn. 13, 14, 15, da *Nota sobre as propriedades das linhas trigonometricas* do sr. Sebastião Corvo d'Andrade, lente de mathematica na Universidade.

(**) Sempre que designarmos por A, B, C, os angulos d'um triangulo, chamaremos a, b, c, os lados oppostos.

Emfim, substituindo na expressão de x os valores numericos das linhas a, b, c, isto é, a razão d'estas linhas com a sua unidade, e practicando as operações indicadas, teremos o valor numerico da incognita.

3. *Achar a relação entre os lados* a, b, c, *do triangulo* ABC (fig. 2) *inscripto no circulo do raio* R.

Sendo BD o diametro, o quadrilatero ABCD (Geom. n.º 88) e os triangulos rectangulos BCD, BAD, dão

$$2Rb = c\,.\,CD + a\,.\,AD,\ CD = \sqrt{4R^2 - a^2},\ AD = \sqrt{4R^2 - c^2};$$

logo $$2Rb = c\sqrt{4R^2 - a^2} + a\sqrt{4R^2 - c^2}\ldots\ldots\ldots(a);$$

equação, que resolve o problema proposto, e dá uma das quatro quantidades a, b, c, R, quando se conhecem as outras tres.

I. *Dadas as cordas* c, a, *de dois arcos* AB, BC, *tira-se da equação* (a) *o valor da corda* b *do arco* ABC *egual á somma de* AB *e* BC.

Se os arcos dados são eguaes, é $a = c$, e a equação (a), que se reduz então a $$Rb = a\sqrt{4R^2 - a^2},$$

dá a corda b d'um arco, quando se conhece a corda a da metade do mesmo arco.

II. *Achar o raio* R *do circulo circumscripto ao triangulo* ABC (fig. 2).

Quadrando a equação (a), fica só um radical; depois transpondo os termos racionaes, e quadrando, desapparece este radical, e tira-se

$$R = \frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

Decompondo em factores a differença dos quadrados que está debaixo do radical, reduz-se esta differença a

$$(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac + b^2 - a^2 - c^2),\ \text{ou}\ [(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2];$$

e decompondo do mesmo modo cada um d'estes ultimos factores, dá-se a R a fórma, accommodada ao uso dos logarithmos,

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(c+b-a)}},$$

ou
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

sendo o perimetro $2p = a + b + c$.

III. *Achar a area* z *d'um triangulo, conhecidos os tres lados* a, b, c.

Abaixando a perpendicular BD (fig. 3), temos (Geom. n.º 69),

$$AD = x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \quad BD = \sqrt{c^2 - x^2};$$

e substituindo na expressão da area, $z = \frac{1}{2} b.$ BD, resulta

$$z = \tfrac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

O raio do circulo circumscripto (II) é pois $R = \dfrac{abc}{4z}$.

IV. *Achar o raio* r *do circulo inscripto em um triangulo dado.*

As areas dos triangulos AOB, AOC, BOC, (fig. 4) são $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}ar$;

e a sua somma é
$$z = \tfrac{1}{2}(a + b + c)\,r = pr;$$

logo
$$r = \frac{z}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

V. *Achar a area d'um quadrilatero* ABCD (fig. 5).

Tire-se a diagonal $AC = b$, que dividirá o quadrilatero em dois triangulos ABC, ADC. Tomando esta diagonal por base commum dos dois triangulos, e chamando h, h', as alturas d'elles, a area procurada será

$$\tfrac{1}{2} b (h + h').$$

Ou tambem: abaixem-se as perpendiculares DE, CF, a AB (fig. 6), e

sejam $\quad AB = a,\ AE = b,\ BF = b',\ DE = h,\ CF = h'.$

Como o quadrilatero se compõe dos triangulos ADE, FCB, e do trapezio EDCF, teremos

$$ABCD = \tfrac{1}{2} bh + \tfrac{1}{2} b'h' + \tfrac{1}{2} (a - b - b')(h + h'),$$

ou
$$ABCD = \tfrac{1}{2} (a - b) h' + (a - b') h.$$

Quando uma das perpendiculares, DE, ou CF, cair fóra do quadrilatero (fig. 7), AE, ou BF, terá posição contraria á que suppõe a fig. 6; e para lhe applicar a formula precedente será necessario mudar b em $-b$, ou b' em $-b'$.

VI. *Dado o triangulo* ABC, *levantar uma perpendicular* EF *sobre a base* AC, *de modo que a area do triangulo* AEF *tenha com a de* ABC *a razão conhecida* m : n (fig. 8).

Chamando b e x as bases AC e AE, h e y as alturas BD e EF, dos triangulos ABC e AEF, e fazendo $AD = k$, a condição do problema relativa á razão das areas, e a similhança dos triangulos AEF e ABD, dão

$$\frac{\tfrac{1}{2} xy}{\tfrac{1}{2} bh} = \frac{m}{n},\quad \frac{y}{x} = \frac{h}{k}.$$

Eliminando pois y, resulta $\qquad x = \sqrt{\frac{bkm}{n}}.$

Se fosse $x > k$, o ponto E estaria em H, da outra parte de D, e o triangulo AF'H não se conteria em ABC. Este caso tem logar quando é

$$bm > kn, \text{ ou } \frac{m}{n} > \left(\frac{k}{b} = \frac{AD}{AC}\right).$$

4. *Conhecendo o lado* AB $=$ a *d'um polygono regular inscripto no circulo de raio* R, *achar o lado* AC $=$ x *do polygono regular inscripto de dobrado numero de lados* (fig. 9).

Tirando OC perpendicular á AB, e chamando z o raio OI do circulo inscripto, temos

$$x^2 = 2R(R - z),\ z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Por exemplo $a = R$, lado do hexagono regular inscripto, dá $x = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ para lado do duodecagono inscripto; $a = R\sqrt{3}$, lado do triangulo equilatero inscripto, dá $R = 3$ para lado do hexagono inscripto; etc.

Tambem se pode calcular o lado EF $= y$ do polygono regular circumscripto similhante ao inscripto, cujo lado AB $= a$ se conhece. Porque os triangulos similhantes AOI, EOC, dão $\frac{z}{R} = \frac{a}{y}$; e conseguintemente y determina-se pelas duas equações

$$z^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}a^2,\quad y = \frac{aR}{z}.$$

Por exemplo $a = R\sqrt{2}$, lado do quadrado inscripto, dá $y = 2R$ para lado do circumscripto; $a = R\sqrt{3}$, lado do triangulo equilatero inscripto, dá $y = 2R\sqrt{3}$ para lado do circumscripto, etc.

5. D'estas formulas facilmente se deduz a razão approximada π do diametro para a circumferencia, ou a semicircumferencia cujo raio é *1*.

Para isso, suppondo R $= 1$ nas equações precedentes, o que as torna

em $$z = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2},\ x = \sqrt{2 - 2z},\ y = \frac{a}{z},$$

e partindo d'um polygono conhecido, por exemplo do hexagono cujo lado é $a = 1$, acharemos pela primeira e pela segunda equação o lado x do duodecagono inscripto

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638;$$

depois com $a = 0{,}517638$ acharemos o lado do polygono inscripto de 24 lados $x = 0,26105238$; e assim por diante. Por quatro operações d'estas obteremos o lado do polygono inscripto de 96 lados, $x = 0,065438166$; e tomando-o por a na primeira e na terceira equação, acharemos o lado y do polygono similhante circumscripto. Emfim, multiplicando por 48 os lados d'estes polygonos, inscripto e circumscripto, teremos os seus semiperimetros 3,1410 e 3,1427, entre os quaes π está comprehendido: d'onde resultam $\pi = 3,14$, aproveitando somente as decimaes communs.

Como os perimetros dos polygonos se approximam tanto mais da circumferencia, e indefinidamente, quanto maior é o numero dos seus lados, caminharemos indefinidamente para o verdadeiro valor de π augmentando esse numero. Em geral, calculado o lado a de um polygono regular inscripto de n lados, e o lado $y = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}}$ do circumscripto similhante, os semiperimetros d'estes dois polygonos serão

$$\tfrac{1}{2}na,\quad \frac{\tfrac{1}{2}na}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}a)(1-\frac{1}{2}a)}};$$

e π ficará comprehendido entre elles, approximando-se tanto mais de ambos quanto maior for n.

D'este modo se forma a tabella seguinte:

NUMERO DE LADOS	SEMIPERIMETROS	
	Inscripto	Circumscripto
96	3,1310319	3,1427146
192	3,1414524	3,1418730
384	3,1415576	3,1416630
768	3,1415839	3,1416101
1536	3,1415905	3,1415970
3072	3,1415921	3,1415937
6144	3,1415925	3,1415929
12288	3,1415926	3,1415927

E continuando assim, obter-se-ha o numero dado na Geometria

$$\pi = 3,1415926535897932.$$

Construcções geometricas

6. A arte de resolver os problemas de Geometria consiste em os tractar como se estivessem resolvidos; raciocinar nesta hypothese sobre as propriedades da figura, investigando a sua relação com algumas já conhecidas que lhe sejam analogas; e, achada assim a lei que estabelece as relações entre as differentes partes do systema, concluir d'ellas as expressões das incognitas. Mas estes processos mal se podem sujeitar a regras geraes, devendo principalmente o exercicio e a sagacidade do geometra indicar-lhe o caminho que mais convem seguir nos casos particulares.

Com o auxilio da Algebra, escolhendo acertadamente as incognitas, conseguem-se muitas vezes soluções mais elegantes; conhece-se o numero d'ellas com mais promptidão e clareza; e ajuiza-se mais facilmente da possibilidade ou impossibilidade, determinação ou indeterminação, do problema. Para isso, imaginada a figura como se o problema estivesse resolvido, designam-se por letras as diversas linhas que a compõem; depois com os principios sabidos reduzem-se a equações as condições da questão, ou as propriedades da figura essencialmente connexas com essas condições; e finalmente acham-se pelo calculo as expressões das incognitas.

Se as linhas da figura, representadas pelas letras, são dadas em numeros, as incognitas determinam-se numericamente pelas operações arithmeticas que as suas expressões indicam; mas se aquellas linhas não forem dadas em numeros, e conservarem a fórma de continuidade, assignar-se-ha a grandeza das incognitas por meio de processos geometricos, que serão tanto mais elegantes, quanto for mais simples a figura que os representar.

A esta ultima operação dá-se o nome de *construcção geometrica* do valor da incognita.

7. Do calculo algebrico applicado aos problemas geometricos só podem ser elementos as razões das linhas umas com as outras; de modo que uma linha A entra nelle como tendo certa razão com outra linha B, que se pode tomar por unidade: e então $\frac{A}{B}$ representa um numero abstracto, ao qual é permittido substituir a razão $a:b$ d'outras grandezas, com tanto que seja $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Mas qualquer combinação dos elementos $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots$

por multiplicação, divisão, reducção ao mesmo denominador, etc., dá resultados numericos; e por isso, se uma expressão se compõe de termos não abstractos, estes termos devem ser *homogeneos*, isto é, *ter o mesmo numero de factores*, para que se reduzam todos a numeros, quando forem divididos pela mesma potencia conveniente da unidade. Logo, quando as letras $a, b, c, \ldots$ que entram numa formula, designam linhas, os termos devem ser homogeneos: não o sendo explicitamente, alguma linha r se tomou por unidade; e deverá por isso introduzir-se nos diversos termos o factor r e as potencias de r necessarias para restabelecer a homogeneidade (*).

Assim, daremos ás expressões $\dfrac{2a^4c+ab^3-d}{b^4+a^3-c},\ \dfrac{a-b}{1+ab},\ \sqrt{\left(\dfrac{1\pm a}{2}\right)},$

a forma $$\frac{2a^4c+ab^3r-dr^4}{b^4+a^3r-cr^3},\ \frac{ar^2-br^2}{r^2+ab},\ \sqrt{\left(\frac{r^2\pm ar}{2}\right)},$$

para que representem linhas.

Com effeito da ultima, por exemplo, $x=\sqrt{\left(\dfrac{1\pm a}{2}\right)},$

resulta $$2x^2=1\pm a,$$

(*) Uma equação entre quantidades da mesma ou differente especie não terá logar se não quando poder converter-se em uma relação entre numeros abstractos; de sorte que esta equação subsista, ainda que se mudem as unidades, a que estão referidas as differentes especies de quantidades que nella entram.

Assim, se a equação tiver logar entre quantidades todas da mesma especie, deverá reduzir-se a uma relação entre numeros abstractos, quando se dividirem todos os seus termos por uma potencia da unidade de grau egual á ordem do termo mais elevado; e por conseguinte deverão todos os termos ser da mesma ordem.

Se na equação entrarem d'uma especie somente duas quantidades l e l', será necessario que, resolvendo-a em ordem a uma d'estas quantidades, a outra entre em todos os termos da sua expressão, isto é, que uma d'estas quantidades seja egual á outra multiplicada por um factor independente da especie d'ellas, ou $l=\mathrm{A}l'$, sendo A composto de quantidades todas de especie differente de l e l'. (Vej. Mec. de Poisson n.° 23).

que, pela restituição das potencias convenientes de r, se torna em

$$2x^2 = r^2 \pm ar, \text{ ou } x = \sqrt{\left(\frac{r^2 \pm ar}{2}\right)}.$$

Depois de restabelecida a homogeneidade da expressão, pode tomar-se por unidade outra qualquer linha differente de r.

O grau d'um polygono homogeneo avalia-se pelo numero de factores de qualquer dos seus termos; o d'uma fracção, pela differença entre os graus do numerador e do denominador; e o d'um radical pelo quociente, que se acha dividindo pelo expoente da raiz o grau da expressão que o radical affecta.

Assim os graus de $\quad a^3b^2 + abc^3, \ \dfrac{ab^2 - cde}{a+c}, \ \sqrt[5]{\dfrac{a^8b^4 + cd^5e^6}{c^2+d^2}},$

são respectivamente $\quad 3+2=5, \ 3-1=2, \ \dfrac{12-2}{5}=2.$

Logo: para que uma linha seja representada por uma fracção, deve cada termo do numerador ter mais um factor do que cada termo do denominador; e para que seja representada por um radical, deve o expoente do radical ser egual ao grau da expressão que elle affecta.

As expressões lineares, ou d'uma dimensão, construem-se por linhas; as de duas dimensões construem-se por superficies; e as de tres dimensões construem-se por volumes: tendo antes o cuidado de as tornar homogeneas, se o não forem, pela introducção de potencias convenientes da linha r, que se tomou por unidade, como factores dos seus termos.

8. Uma fracção linear monomia tem sempre alguma das formas seguintes:

$$x = \frac{ab}{c}, \ x = \frac{abc}{de}, \ldots \ x = \frac{a_1 \cdot a_2 \ldots a^m}{b_1 \cdot b_2 \ldots b_{m-1}}.$$

1.° Para construir $x = \frac{ab}{c}$, toma-se uma quarta proporcional a c, a, b, ou applicam-se os theoremas da Geom. n.os 72 e 75.

2.° Para construir $x = \frac{abc}{de}$, toma-se primeiro a quarta proporcional, $k = \frac{ab}{d}$, a d, a, b; e depois a quarta proporcional, $x = \frac{kc}{e}$, a e, c, k.

3.° Para construir $x = \frac{abcd}{efg}$, construem-se successivamente as tres quartas proporcionaes, $k = \frac{ab}{e}$, $l = \frac{kc}{f}$, $x = \frac{ld}{g}$.

E similhantemente para maior numero de factores.

9. A fracção polynomia $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$

decompõe-se em tres, cujos termos são monomios, escrevendo

$$x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm};$$

e, construida separadamente cada uma d'estas fracções, ajunctam-se as linhas que representam as duas primeiras, e subtrahe-se da somma a linha que representa a ultima.

Mas em $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ é mais simples escrever $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, e construir a quarta proporcional a c, $a + b$, $a - b$.

10. Reduzem-se ao caso precedente as fracções, cujo denominador é polynomio, egualando este denominador a um monomio do mesmo grau,

do qual se tomam arbitrariamente todos os factores, excepto um y, que se construe como acabamos de ensinar.

Por exemplo em
$$x = \frac{abc + dcf}{ab + cd}$$
faremos
$$ab + cd = ay,$$
e construiremos successivamente as expressões
$$y = \frac{ab + cd}{a} = b + \frac{cd}{a},\ x = \frac{abc + def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}.$$

Similhantemente em
$$x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$$
faremos
$$q^2i - klq + cmd = q^2y,$$
e teremos de construir successivamente as expressões
$$y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2},\ x = \frac{abc^2}{q^2y} + \frac{qh}{y} - \frac{m^3p}{q^2y}.$$

A escolha dos factores da incognita y não é indifferente para a simplicidade das construcções. Assim, para construir $x = \frac{abc^2 - a^2b^3}{abc + c^3}$, as hypotheses $m = \frac{ab}{c}$, $abc + c^3 = c^2y$, dão
$$m = \frac{ab}{c},\ y = m + c,\ x = \frac{m(c - m)}{y}.$$

11. As construcções de radicaes reduzem-se todas ás das expressões

$$\sqrt{ab} \text{ e } \sqrt{a^2 \pm b^2}.$$

$\sqrt{ab}$ é uma meia proporcional entre a e b, que se pode construir pelo n.° 73 da Geom., ou pelos theoremas dos n.os 74 e 75.

Para construir $\sqrt{a^2+b^2}$, que é a hypothenusa d'um triangulo rectangulo cujos cathetos são a e b, tomam-se $AB=a$ e $AC=b$ sobre os lados do angulo recto BAC (fig. 10), e a hypothenusa é $BC=\sqrt{a^2+b^2}$.

Para construir $\sqrt{a^2-b^2}$, catheto do triangulo rectangulo do qual é b o outro catheto e a a hypothenusa, toma-se $AB=b$ sobre um lado do angulo recto BAC; e descreve-se do ponto B com o raio a um circulo, cuja intersecção C com AC dará $AC=\sqrt{a^2-b^2}$. Ou sobre $BC=a$ como diametro descreve-se um circulo; e de B como centro, e com o raio b, outro circulo. cuja intersecção A com o primeiro determinará a corda $AC=\sqrt{a^2-b^2}$.

12. Para construir uma expresão affecta de radical quadrado, podemos egualal-a a $\sqrt{ay}$, sendo a arbitraria; depois construir a expressão de y tirada d'essa equação; e finalmente construir $\sqrt{ay}$ do modo que fica ensinado.

Assim a construcção de $x=\sqrt{\dfrac{ab^2+cd^2}{b+c}}$ reduz-se ás das expressões

$$y=\frac{ab^2+cd^2}{a(b+c)},\ x=\sqrt{ay},$$

que se fazem como se disse nos n.os 10 e 11.

Mas com alguns artificios simplificam-se muitas vezes estas construcções. Fazendo por exemplo $bd=ay$, a construcção de $x=\sqrt{ac+bd}$, reduz-se ás das expressões

$$y=\frac{bd}{a},\ x=\sqrt{a(c+y)}.$$

(Vej. tambem no n.° 14, V. a construcção de $\sqrt{\dfrac{nk^2}{m}}$, etc.)

13. Outras vezes é mais vantajoso reduzir a construcção das expressões radicaes ás de $\sqrt{a^2 \pm b^2}$. Por exemplo a construcção de $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$ reduz-se ás de $y = \sqrt{bc}$, $x = \sqrt{a^2 \pm y^2}$.

Para construir $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots}$ faremos o seguinte:

Com os cathetos $AB = a$, $BC = b$ (fig. 11) construiremos a hypothenusa $y = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$; com os cathetos $AC = y$, $CD = c$, construiremos a hypothenusa $y' = AD = \sqrt{y^2 + c^2}$; e assim por diante, até chegar á ultima hypothenusa $AF = x$.

Para construir $$x = \sqrt{ac - fg + mq + rd},$$

faremos $$y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}, \quad x = \sqrt{ay};$$

ou tambem

$$y = \sqrt{ac},\ z = \sqrt{fg},\ n = \sqrt{mq},\ t = \sqrt{rd},\ y' = \sqrt{y^2 + n^2 + t^2},\ x = \sqrt{y'^2 - z^2}.$$

Para construir $$x = \sqrt{\left(a^2 - f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}\right)},$$

faremos $$y = f\sqrt{\frac{c^2 + d^2}{ab + cd}}, \quad x = \sqrt{a^2 - y^2},$$

cuja construcção se pode ainda reduzir ás de

$$z = \sqrt{c^2 + d^2},\ t = \sqrt{ab + cd},\ y = \frac{fz}{t},\ x = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

14. Appliquemos estes principios a alguns problemas.

I. *Dividir a recta* AC (fig. 12) *em duas partes* AB *e* BC, *que tenham entre si a razão dada* m:n.

Chamando x e y as duas partes AB e BC da recta $AC = a$, as condições do problema dão

$$y = a - x,\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n};\ \text{e logo}\ x = \frac{am}{m+n}.$$

Para construir este valor, tomemos na linha indefinida CE as partes $CD = m$, $DE = n$, no caso de serem m e n linhas; ou tomemos $CD = mr$, $DE = nr$, no caso de serem m e n numeros, e r uma unidade linear arbitraria: depois tiremos AE, e por D a parallela BD. Será $x = AB$.

II. *Tirar pelo ponto* A (fig. 13) *uma recta* AI *tal, que a parte d'ella* IK, *comprehendida entre as duas parallelas dadas* BC, DE, *tenha um comprimento determinado* c.

Sobre DE abaixe-se de A a perpendicular AG, e façam-se $AG = a$, $FG = b$, $GI = x$.

Os triangulos AKF, AGI, dão $\dfrac{AI}{AG} = \dfrac{IK}{FG}$, $AI^2 = AG^2 + GI^2$,

ou, em virtude da condição do problema,

$$\frac{AI}{a} = \frac{c}{b},\ AI^2 = a^2 + x^2;\ \text{e logo}\ x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{c^2 - b^2}:$$

por onde se vê, que o problema só é possivel, quando $b < c$, ou $FG < IK$.

Para construir x, descreva-se do centro F, e com o raio c, o arco HH'; e tire-se depois AI parallela a FH. Será

$$GH = \sqrt{c^2 - b^2},\ \text{e}\ a:b::IG:HG;$$

por conseguinte $\qquad IG = \dfrac{a}{b}\sqrt{c^2 - b^2} = x.$

Ha outra solução GI', a qual é tambem indicada pelo duplo signal de x.

III. *Por dous pontos dados* A, B, (fig. 14) *fazer passar uma circumferencia que seja tangente á recta dada* DD'.

Como tres pontos determinam um circulo, basta achar o ponto de contacto D. Produza-se a recta AB até encontrar em C a recta dada; e divida-se AB em duas partes eguaes no ponto I. Fazendo $CI = a$, $BI = b$, $CD = x$, a condição de tangencia dá

$$x^2 = CA \cdot CB = (a - b)(a + b): \text{ e logo } x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Para construir este valor, descreva-se sobre CI como diametro a circumferencia CEI, e tire-se a corda $EI = b = AI$. Será $CE = \sqrt{a^2 - b^2} = x$; e tomando $CD = CE$, teremos o ponto de contacto D.

Ha outra solução em D′ dada pelo valor negativo de x.

IV. *Dadas as parallelas* AE, BF (fig. 15), *e a perpendicular a ambas* AB: *tirar uma secante* EF *tal, que a metade* AC *de* AB *seja meia proporcional entre os segmentos* AE *e* BF.

Pondo $AC = a$, $AE = x$, $BF = y$, a condição dá $a^2 = xy$; por conseguinte o problema é indeterminado, e admitte uma infinidade de soluções (*Alg. elem.* n.º 125). Entre os diversos modos de as obter, o que se segue é muito elegante.

Supponhamos que a perpendicular a AB levantada em C encontra a secante procurada EF num ponto D, e que por este se tira II′ perpendicular a CD: os dous triangulos rectangulos EDI, FDI′, serão eguaes, por serem $ID = I'D$, $EDI = FDI'$; e por conseguinte será $AE = AI - EI$, $BF = AI + EI$, ou, pondo $CD = r$,

$$x = r - EI, \quad y = r + EI, \quad x + y = 2r.$$

Eliminando pois y entre esta ultima equação e $xy = a^2$, teremos

$$x^2 - 2rx + a^2 = 0, \quad \text{ou } x = r \pm \sqrt{r^2 - a^2},$$

sendo r arbitraria.

Para construir este valor, que só pode ser real quando se tomar o ponto D de modo que seja $r > a$ ou $CD > AC$, descreveremos do centro D com o raio r um circulo, cujas intersecções com AE′ e BF darão

$$EI = \sqrt{ED^2 - DI^2} = \sqrt{r^2 - a^2} = I'F;$$

e os pontos E e F satisfarão ao problema, assim como E′ e F′.

Cada centro D dá assim duas soluções EF, E'F'.

V. *Pelo ponto dado* A (fig. 16) *tirar uma corda* BAD, *cujos segmentos* BA, AD, *estejam entre si na razão dada* m : n.

Tire-se o diametro HAG; e sejam $CH = r$, $CA = b$, $AD = x$.

Pelas propriedades das cordas, é $HA \cdot AG = BA \cdot AD$,

ou
$$(r - b)(r + b) = BA \cdot x;$$

e pela condição do problema é
$$\frac{BA}{x} = \frac{m}{n}.$$

Eliminando pois BA entre estas equações, e pondo $\sqrt{r^2 - b^2} = k$, resulta

$$\frac{m}{n} x^2 = k^2, \text{ ou } x = k\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{k}{m}\sqrt{mn},$$

que facilmente se construirá por uma meia proporcional $\sqrt{mn}$ entre m e n, e depois por uma quarta proporcional a m, k, $\sqrt{mn}$. Mas é preferivel o processo seguinte.

Sobre uma linha indefinida (fig. 17) tomem-se DF, EF, taes que tenham entre si a razão dada $m : n$; depois descreva-se sobre o diametro DE o semicirculo DAE, e no ponto F levante-se FA perpendicular a DE. Tirando as linhas AD, AE, é (Geom. n.° 74)

$$\frac{AD^2}{AE^2} = \frac{DF}{FE} = \frac{m}{n}; \text{ e por conseguinte } x = k \cdot \frac{AE}{AD}.$$

Tomando pois sobre AD, produzida se for necessario, a parte $AB = k$, e tirando BC parallela a DE, o ponto C resolverá o problema, e será $x = AC$.

VI. *Dado um polygono, construir outro similhante, cuja superficie tenha com a do primeiro a razão dada* m : n.

Seja A um lado do polygono dado, e x o seu homologo desconhecido. As condições da similhança dos polygonos, e da razão das superficies, dão

$$\text{superf. do } 1.^\circ : \text{superf. do } 2.^\circ :: A^2 : x^2 :: m : n;$$

logo $$\frac{A^2}{x^2}=\frac{m}{n},\ x=A\sqrt{\frac{n}{m}},$$

expressão que se ensinou a construir no problema precedente. Resta pois construir sobre x, homologo a A, uma figura similhante á proposta.

A mesma construcção é applicavel aos circulos.

VII. *Achar duas linhas, cuja razão seja a mesma que a de duas figuras similhantes dadas* ABC..., abc..., (fig. 18).

Tomem-se sobre os lados do angulo recto DAE (fig. 17) as partes AB, AC, que sejam eguaes a duas linhas homologas das figuras propostas, ou que tenham entre si a mesma razão que a d'ellas; e abaixe-se sobre a hypothenusa BC a perpendicular AG. Será

$$\frac{BG}{CG}=\frac{x}{y},$$

chamando x, y, as linhas procuradas.

Se as figuras são dous parallelogrammos, que têm B e b por bases, e H e h por alturas, a equação

$$\frac{x}{y}=\frac{BH}{bh},$$

mostra que, se uma das linhas x, y, é dada, a outra se pode construir por duas quartas proporcionaes; e que, se nenhuma d'ellas é dada, o problema se torna indeterminado. E neste caso, se tomarmos para x uma das linhas B, H, ou para y uma das linhas b, h, a construcção se fará por uma só quarta proporcional; reduzindo-se a questão a construir sobre uma base dada, ou com uma altura dada, um parallelogrammo equivalente a outro dado.

VIII. *Dadas as duas figuras* P, Q, *achar uma terceira* X, *que seja similhante a* P *e equivalente a* Q.

Seja A um lado de P, e chamemos x o seu homologo de X. As duas condições dão

$$\frac{P}{X}=\frac{A^2}{x^2},\ X=Q;\quad \text{e logo } x=A\sqrt{\frac{Q}{P}}.$$

Construindo dous quadrados M^2 e N^2 equivalentes a P e Q (Geom. n.º 103) ou dous quadrados cuja razão seja a mesma que a de P para Q (VI, fig. 17), a expressão de x reduz-se a

$$x = A \cdot \frac{N}{M},$$

que é uma quarta proporcional a M, A, N.

IX. *Construir* $\sqrt{m}$.

Poder-se-hia tomar uma meia proporcional entre m e 1; mas é mais simples o processo do n.º 11.

Tomando $AB = 2$, $BC = 1$, nos lados do angulo recto ABC (fig. 11), será a hypothenusa $AC = \sqrt{5}$; levantando CD perpendicular a AC, e tomando $CD = 1$, será a hypothenusa $AD = \sqrt{6}$; e assim por diante, de sorte que $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$,... serão as diagonaes que por esta construcção se vão tirando do ponto A. Se tivessemos começado por tomar $AB = 1$, $BC = 1$, construiriamos assim os lados $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ do quadrado e do triangulo equilatero inscripto no circulo de raio 1; e continuando teriamos as raizes quadradas de todos os numeros inteiros consecutivos.

15. A equação do 2.º grau $\qquad x^2 + px = q,$

suppõe (n.º 7) que se tomou por unidade uma linha r. Restituindo-a pois no termo q, e fazendo $m^2 = qr$, fica

$$x^2 + px = m^2,\ x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + m^2}.$$

Os processos até aqui expostos bastariam para construir estas raizes; mas são mais elegantes os seguintes.

1.º Se p e q são negativos, tomando os valores absolutos, será

$$x^2 - px = -m^2, \text{ ou } x\,(p - x) = m^2;$$

isto é, m meia proporcional entre x e $p - x$.

Sobre o diametro $AB = p$ (fig. 19) descreva-se o semicirculo AEB; levante-se em A a perpendicular AD, e tome-se nella $AD = m$; e finalmente tire-se DEE′ parallela a AB, e das suas intersecções E, E′, com o circulo abaixem-se as perpendiculares EF, E'F', que determinarão as duas raizes $x = AF$, $x = AF'$.

2.° Se p é negativo, e q positivo, temos

$$x^2 - px = m^2, \text{ ou } x\,(x-p) = m^2,$$

isto é, m meia proporcional entre x e $x - p$.

Com o raio $AD = \frac{1}{2}p$ (fig. 20) descreva-se o semicirculo FAE; no ponto A tire-se a tangente, e tome-se nella $AC = m$; e finalmente tire-se a secante CEF. Esta secante determina as duas raizes $x = CF$, $x = -CE$; por que temos

$$m^2 = CE \, . \, CF = CF\,(CF - p) = CE\,(CE + p) = -CE\,(-CE - p).$$

3.° Se p é positivo, tendo q qualquer dos signaes $\pm$, temos

$$x^2 + px = \pm m^2, \text{ ou } x\,(x+p) = \pm m^2.$$

A construcção é a mesma que a dos casos precedentes; mas as raizes mudam de signal: por que, substituindo $-x$ em logar de x, esta equação se reduz á d'um d'aquelles dous casos.

EXEMPLOS

X. *Tirar pelo ponto* A (fig. 16) *uma corda* BD, *cujo comprimento seja* c.

Conservando a notação do problema V, a propriedade das cordas e a condição do problema dão $\quad r^2 - b^2 - k^2 = x \, . \, BA, \; BA + x = c;$

e por conseguinte $k^2 = cx - x^2$, que está no caso 1.°

XI. *Dividir uma recta em media e extrema razão.*

Isto é, dividir AC (fig. 20) em dous segmentos AB, BC, taes que seja $BC^2 = AB \, . \, AC$.

Fazendo $AC = a$, $BC = x$, temos

$$x^2 = a\,(a - x), \quad x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2}$$

Com os lados $AC = a$, $AD = \frac{1}{2}a$, construa-se o triangulo rectangulo

ADC; será $x = -\frac{1}{2}a \pm CD$: depois com o centro D e com o raio AD descreva-se o semicirculo EAF; será $x = CE$: e finalmente sobre a recta dada tome-se $CB = CE$. Será B o ponto de divisão procurado, que dá a raiz correspondente ao signal superior da expressão de x (vej. Geom. n.° 76, IX).

A segunda raiz, correspondente ao signal inferier, não convém á questão. Para a interpretar (*Alg. elem.* n.° 114), mudaremos x em $-x$ na equação do problema, o que dará

$$x^2 = a(a+x),\ x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2} = \tfrac{1}{2}a \pm CD;$$

isto é, $x = CF = CB'$, tomando CB' no prolongamento de AC.

Ambas as soluções satisfazem a um problema mais geral, cujo enunciado é o seguinte:

Achar na direcção da recta AC *um ponto* B *ou* B', *cuja distancia ao ponto* C *seja meia proporcional entre a distancia ao ponto* A *e a recta* AC.

16. As formulas de *duas dimensões*, construem-se reduzindo-as a productos BH, cujos factores são a base e a altura de rectangulos de superficie egual ás expressões propostas.

Assim $$x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)},$$

fazendo $$a^2 - b^2 = B^2,\ cd = H^2,$$

reduz-se ao rectangulo $x = BH$.

Se quizermos que a área procurada seja um parallelogrammo, ou um triangulo, etc., o problema admittirá uma infinidade de soluções, ainda que sejam dadas a base e a altura: por que estas duas linhas não determinam a figura, excepto se, alem d'ellas, for dada outra condição, por exemplo um angulo, a relação dos lados, etc.

A superficie do circulo, que se avalia pelo producto da semicircumferencia pelo raio, equival á de um triangulo que tem por base o diametro e por altura a semicircumferencia rectificada. Assim, para o raio $R = a\sqrt{\frac{m}{n}}$ será proximamente $\frac{22}{7}a\sqrt{\frac{m}{n}}$ a semicircumferencia h; e construindo um triangulo com a base $2R$, com a altura h, e com um angulo arbitrario, a sua área equivalerá á do circulo.

17. As formulas de *tres dimensões* construem-se reduzindo-as a productos ABC de tres factores, e formando parallelipipedos com as arestas A, B, C. Tambem se podem construir por meio de cubos (o que constitue a *cubatura* dos corpos), de tetraedros, de cylindros, etc.

Dos signaes das quantidades na Algebra applicada á Geometria

18. Quando duas figuras só differèm uma da outra na grandeza das suas partes, e estas têm a mesma disposição em ambas, as figuras dizem-se *directas:* e se as quantidades $a, b, c, \ldots x$, que compõem a primeira, estão ligadas por uma equação $X=0$, esta equação tem egualmente logar para a segunda. Porem se as duas figuras differem ainda pela disposição de algumas das suas partes, de modo que x, por exemplo, que é $b-a$ na primeira, se torne $a-b$ na segunda, as figuras dizem-se *indirectas* (*); e a equação $X=0$, que neste caso tem logar para uma d'ellas, pode carecer d'algumas modificações para se tornar applicavel á outra; o que vamos examinar.

Considerando nos triangulos ABC (fig. 21, e 8) os lados e angulos cuja disposição é a mesma em ambos, qualquer propriedade, derivada da natureza da figura, que estabelecer uma relação entre estas partes, será applicavel a um e outro. Attendamos porem ao segmento CD formado pela perpendicular BD á base; e chamemos x, a, b, c, este segmento, e os lados BC, AC, AB, do triangulo. Teremos

$$BD^2=c^2-AD^2=a^2-x^2, \text{ ou } c^2=a^2-x^2+AD^2 \ldots\ldots (1),$$

equação applicavel a ambas as figuras. Mas se em logar de AD substituirmos as suas expressões

$$AC+CD=b+x \text{ (fig. 21)}, \quad AC-CD=b-x \text{ (fig. 8)},$$

(*) Carnot, auctor d'esta theoria que desenvolveu na sua excellente *Geometria de Posição*, chama *correlativas directas* as figuras directas, e *correlativas inversas* as figuras indirectas.

resultarão as duas equações

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx \text{ (fig. 21)}, \; c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \text{ (fig. 8)} \ldots\ldots (2),$$

cada uma das quaes só é applicavel directamente a uma das figuras; e as figuras são indirectas, por que x é AD $- b$ na primeira, e $b -$ AD na segunda.

Por onde se vê que a substituição do valor de AD converteu a formula (1), applicavel a ambas as figuras, nas duas (2), cada uma das quaes só é applicavel a uma d'ellas; mas de modo que qualquer das formulas (2) se torna na outra pela mudança de x em $-x$.

19. Em geral, se as quantidades a, b, c,...x, que compõem duas figuras indirectas, estão ligadas numa d'ellas pela equação $X = 0$, e na outra pela equação $X' = 0$, ha pelo menos uma linha que, sendo na primeira figura a somma $b + x$ de duas quantidades, é na segunda figura a differença $b - x$ das mesmas quantidades. Mas se em logar das expressões $b + x$ e $b - x$, das quaes provém a dissimilhança entre aquellas equações, substituirmos a, a equação resultante $Y = 0$, convirá ás duas figuras, podendo reproduzir $X = 0$, ou $X' = 0$, conforme se substituir nella $b + x$ ou $b - x$ em logar de a: e como estas quantidades só differem entre si no signal de x, segue-se que X se tornará em X', e reciprocamente, pela mudança de x em $-x$. O mesmo diriamos d'outras quantidades indirectas, se as houvesse.

Para reconhecer estas quantidades observemos que, fazendo variar os pontos da segunda figura até a tornar directa com a primeira, a quantidade b passará de $> a$ a $< a$; e se esta mudança se faz pela lei de continuidade, ha necessariamente uma posição intermedia na qual é $b = a$, ou $x = 0$. Por exemplo, se o ponto C (fig. 21) se mover na direcção CD até passar para a esquerda de D, e tornar a figura directa com a fig. 8, x ou CD irá diminuindo, tornar-se-ha nulla na passagem por D, e mudará de signal depois d'esta passagem.

Mas se o ter x differente signal nas duas equações provém de ser

$$x = \frac{k}{a - b} \text{ na 1.ª fig., e } x = \frac{k}{b - a} \text{ na 2.ª fig.:}$$

então, fazendo variar b para se tornar de $< a$ em $> a$, haverá um valor intermedio $b = a$ que fará $x = \frac{k}{o} = \infty$.

Assim as quantidades indirectas não se podem tornar directas pelo movimento continuo das partes de uma, sem que neste movimento aquellas partes passem por zero, ou pelo infinito. Logo:

Para transformar a equação $X=0$, *que tem logar entre as linhas* a, b, c,....x, *d'uma figura, na equação* $X'=0$, *que convem a outra figura indirecta com a primeira, basta mudar o signal das quantidades indirectas. E reconhecem-se as quantidades, que podem ser indirectas, fazendo mover as linhas de uma das figuras para a tornar directa com a outra, e vendo quaes são aquellas que neste movimento passam por zero ou pelo infinito.*

Mas este caracter não pertence exclusivamente ás linhas indirectas; e por isso, verificado elle, é necessario ainda applicar ás duas figuras algum theorema conhecido, e comparar as relações que este theorema estabelece entre as quantidades, para distinguir aquellas que têm signaes contrarios. Assim, tendo conhecido na fig. 8 que pelo movimento continuo do ponto C a linha x, ou CD, passa por zero, tiraremos das duas figuras os valores de x,

$$x=AD-AC \text{ (fig. 21), e } x=AC-AD \text{ (fig. 20);}$$

e por que achâmos estes dous valores com signaes contrarios, concluiremos que x é indirecta.

20. Façamos uma applicação d'esta theoria, para lhe dar toda a clareza.

Tirada no triangulo ABC (fig. 22) a recta DF por um ponto dado D, procuremos a razão α entre as superficies dos triangulos AEF, ABC.

Tirando DI parallela a AC, e fazendo

$$AB=c,\ AC=b,\ BC=a,\ AI=d,\ DI=f,\ AF=x,$$

temos (Geom. n.º 111) $\alpha=\dfrac{AE.AF}{AB.AC}$,

que, por ser $AE=\dfrac{fx}{x+d}$ em virtude da similhança dos triangulos FAE, FID, dá

$$fx^2=bc\alpha(x+d)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(A)}.$$

1.º A equação (A) suppõe D collocado no angulo IAC; e por isso deve ser modificada, quando não tem logar esta hypothese.

2.º Se D está em D′ no angulo CAB, façamos mover D para D′. Então AI irá diminuindo, depois passará por zero, e finalmente tornar-se-ha em AI′; sem que, durante este movimento, as linhas a, b, c, f, se tornem nullas nem infinitas. Logo somente AI pode ser indirecta: e depois vê-se que é com effeito indirecta, por ser

$$AI = BI - AB, \quad AI' = AB - BI'.$$

Assim a equação (A) applica-se ao ponto D′, mudando d em $-d$; e fica

$$fx^2 = bc\alpha\,(x-d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A').$$

3.º Se D′ está em D″ no angulo C′AB, movamos D′ para D″. Então D′I′ diminuirá, depois passará por zero, e finalmente tornar-se-ha em D″I″; sem que neste intervallo as quantidades a, b, c, d, se tornem zero nem infinitas: e de mais temos

$$I'D' = AC - CK, \quad I''D'' = CK'' = AC.$$

Logo D′I′ é indirecta; e por isso, mudando o signal de f, tornar-se-ha

(A′) em $$fx^2 = bc\alpha\,(d-x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A'').$$

Este caso, comparado com o primeiro, apresenta duas indirectas d e f. A linha I′F tambem é indirecta; mas, como não entra na equação, é inutil consideral-a.

Se a recta DF cortar o angulo F′AE′ (fig. 22): fazendo girar DF até lhe dar a posição DE′, ver-se-ha que neste movimento AF se torna AF′, depois de passar por zero; e que é preciso mudar x em $-x$ na equação (A) para a applicar a este caso, o que converte aquella equação na precedente (A″).

4. Finalmente, se o ponto está em D‴, no angulo IAC′; vêr-se-ha, por um raciocinio similhante, que AI é indirecta com AI″, e que, mudando d em $-d$ na equação (A″), resulta a equação accommodada a este caso

$$fx^2 = -bc\alpha\,(d+x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A''').$$

Podiamos tractar directamente cada um d'estes casos, e chegar assim ás equações correspondentes: mas o fim da theoria, que fica exposta, é dispensar desse trabalho, mostrando que uma das equações comprehende todas as outras, as quaes se deduzem d'ella pela simples mudança d'alguns signaes.

Pode assim uma equação satisfazer a muitos casos; e para discriminar as circumstancias particulares de cada um d'elles basta interpretar bem a linguagem algebrica (*).

21. Como qualquer equação deve dar o valor d'uma das letras que nella entrám, pode acontecer que seja esta letra aquella sobre a qual tem de recahir a mudança do signal para tornar a solução applicavel á figura proposta; e neste caso o valor da letra dado pela equação será um resultado negativo $x = -k$, cuja significação facilmente se comprehende.

Com effeito, para obter a equação $X = 0$, era preciso suppôr o problema resolvido, e construir uma figura conforme com o estado hypothetico dos seus dados e incognitas (n.º 6): conseguintemente a solução negativa indica que a figura não é perfeitamente adequada á questão proposta; e que formando esta figura, e tomando-a por base dos raciocinios, se introduziram condições contradictorias. Mudando x em $-x$, a equação assim modificada $X' = 0$ pertencerá a uma figura indirecta, á qual, e não á supposta, convém a solução $x = k$.

Logo fazendo mover os pontos da figura supposta, que deu a solução

---

(*) Para exemplo d'esta interpretação, resolvamos a equação (A) em ordem a x; o que dará

$$x = \frac{abc}{2f} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{4f^2} + \frac{abcd}{f}};$$

e discútamos esta formula nos differentes casos que no texto se consideram.

No 1.º (eq. A) uma das raizes é positiva e a outra negativa: donde se segue que por D se pode tirar uma recta que separe a mesma área AEF, ou cortando os lados do angulo ABC, ou os lados do angulo C'AI. O que tambem mostra a inspecção das fig. 22. e 22 bis.

No 2.º (eq. A') ambas as raizes são positivas; e por conseguinte ha dous modos de cortar por D' os lados do angulo CAB para separar a mesma área. O que é egualmente visivel na fig. 22.

No 3.º (eq. A'') as raizes têm differente signal; e por isso pode separar-se a área por D'', ou cortando os lados de CAB, ou os de C'AI; como se vê na fig. 22.

No 4.º (eq. A''') são negativas as duas raizes; conseguintemente podem cortar-se de dous modos por D''' os lados do angulo IAC', para separar a área AEF. O que tambem é evidente na fig. 22.

negativa, de modo que algumas linhas passem por zero ou pelo infinito, até chegar a outra figura á qual seja applicavel a equação $X'=0$, a solução $x=k$ pertencerá a esta segunda figura. Foi assim que no problema XI do n.° 15 se fez mover o ponto B para a direita, de modo que BC, ou x, passasse por zero, até chegar a B'; e se viu que a equação $X'=0$, ou $x^2=(a+x)a$, era applicavel a esta posição.

Appliquemos estas considerações a alguns exemplos.

I. *Pelo ponto dado* D (fig. 22), *exterior ao triangulo* ABC, *tirar a recta* DF *de modo que a razão dos triangulos* AEF, ABC, *seja* α.

Suppondo o ponto D no angulo AIC, achou-se a equação A) (n.° 20), que dá uma solução positiva e outra negativa. A primeira d'estas soluções determina o ponto F (fig. 22); e a segunda determina o ponto F' (fig. 22 bis), quando DF' corta o angulo F'A'E: o que se segue da interpretação que temos dado á mudança de x em $-x$ (*).

A este problema reduz-se o seguinte:

Tirar pelo ponto D *uma recta* DF *que separe do espaço angular indefinido* CAB *o triangulo* AEF *equivalente ao quadrado conhecido* q^2.

Com effeito completando o triangulo ABC por uma recta BC tal que (Geom. n.° 102) seja a sua área $r^2 > q^2$, ou $=q^2$, é dada a razão $\alpha=\frac{q^2}{r^2}$ dos dous triangulos AEF, ABC (**).

(*) Os problemas seguintes são da mesma especie.

Cortar d'um triangulo ABC *outro* AEF, *que tenha com* ABC *a razão conhecida* m : n :

1.° *Por uma recta tirada do vertice* B, *ou d'um ponto* F *da base* (vej. Geom. n.os 102 e 111, II).

2.° *Por uma parallela á base* (vej. n.° 14, VI).

3.° *Por uma perpendicular* EF *á base* (fig. 8) (vej. n.° 3, VI).

(**) Tirando pelo ponto dado uma recta TT' que separe d'um polygono dado AB DEF (fig. 23) a superficie equivalente a t^2, e produzindo, até se encontrarem em M, os lados AB, FE, cortados por aquella recta: será conhecida a área AMF = A da parte exterior ao polygono contido no angulo que formam aquelles lados: e $TMT'=t^2+A$ será a área total separada do mesmo angulo. Por conseguinte a questão de cortar no polygono a área t^2 reduz-se á de cortar a área t^2+A no angulo formado pelos dous lados produzidos.

É necessario ter o cuidado de combinar os lados dous a dous, a fim de obter as soluções todas, e excluir aquellas nas quaes a secante corta o prolongamento de um dos lados e não esse lado.

Em logar da área t^2 podia dar-se a razão $m:n$ da parte cortada para o polygono total: o que vem a ser o mesmo.

II. *Sendo dada a corda* AD (fig. 24), *tirar pela extremidade* O *do diametro, que lhe é perpendicular, a recta* OE *tal que a parte d'ella* FE, *comprehendida entre a corda e o arco, tenha uma grandeza conhecida* m.

Sejam $AB = a,\ OB = b,\ EF = m,\ FO = x.$

Pela propriedade das cordas temos

$$FE \,.\, OF = FD \,.\, AF, \text{ ou } mx = (a - BF)(a + BF) = a^2 - BF^2;$$

e por que é $BF^2 = x^2 - b^2$, resulta

$$mx = a^2 + b^2 - x^2, \text{ ou } x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{a^2 + b^2 + \tfrac{1}{4}m^2}.$$

A solução correspondente ao signal superior é positiva, e de construcção facil.

Em quanto á solução correspondente ao signal inferior: se mudarmos x em $-x$, teremos $mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF^2 - a^2;$

o que suppõe $BF > a$ ou BD. Ora fazendo girar OF em torno O, anniquilar-se-hão EF e DF na passagem do ponto E por D, e tornar-se-hão depois em E'F' e DF'; sem que neste intervallo passe por zero ou pelo infinito alguma das rectas $a,\ b,\ x$. E por que, alem d'isso, temos

$$FD = AD - AF,\ F'D = AF' - AD.$$

segue-se que F'D é indirecta com FD; bem como o é F'E' com FE, por ser $F'E' = \dfrac{AF' . F'D}{F'O}$ (*). Para achar pois a solução que convem a F'O, é necessario mudar na equação m em $-m$, ou x em $-x$.

Assim o problema admitte duas soluções á direita de BO (e conseguintemente duas á esquerda) correspondentes uma á raiz positiva e outra á raiz negativa (**). Poderia com tudo acontecer que a questão pro-

(*) O memo se vê por ser $FE = OE - OF,\ F'E' = OF' - OE'$.

(**) Este exemplo mostra que o numero das soluções d'uma questão não é posta não admittisse soluções indirectas; como teria por exemplo logar na actual, se ella exigisse que OE fosse uma corda do circulo; por que então as soluções negativas lhes seriam estranhas, como se viu no n.º 15.

III. *Achar o segmento espherico* GADI (fig. 25), *cujo volume é egual ao da pyramide conica* CDIG, *que com o mesmo segmento fórma o sector* CDAG.

Vimos (na Gem. n.os 156 e 159) que, chamando h a flecha AI e k a semicorda DI, é

$$\text{sect. CDAG} = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h, \quad \text{pyram. CDGI} = \tfrac{1}{3}\,\text{CI}\,.\,\pi\text{DI}^2 = \tfrac{1}{3}(r-h)\pi k^2;$$

logo $$\text{segm. GADI} = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}(r-h)\pi k^2;$$

e, pela condição do problema, $$\tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}(r-h)\pi k^2 = \tfrac{1}{3}(r-h)\pi k^2,$$

que, simplificando, e attendendo a que (Geom. n.º 73) é $k^2 = (2r-h)h$,

se reduz a $$h^2 - 3rh + r^2 = 0, \text{ ou } h = \tfrac{1}{2}r\,(3 \pm \sqrt{5}).$$

A solução correspondente ao signal + não serve neste problema, por que deve ser $h < 2r$ (*).

22. Fallaremos aqui d'uma especie de problemas que tem relação com a theoria exposta.

Quando se tracta de determinar a posição de qualquer ponto B sobre uma linha fixa BC (fig. 26), toma-se nella arbitrariamente um ponto fixo A para *origem*; e referindo a este ponto todos os outros, determina-se B pela sua distancia $AB = x$ á origem A.

---

sempre egual ao grau da equação. Para que nenhuma solução se omitta, é necessario variar a figura, e comparal-a com as suas indirectas, deixando sempre os dados fixos.

(*) A solução correspondente ao signal — construe-se facilmente, inscrevendo no circulo descripto sobre o diametro $\tfrac{3}{2}r$ uma corda egual a r que passe por uma das extremidades do diametro; e tomando neste, a partir da outra extremidade, uma parte egual á corda supplementar da primeira, isto é, á que lhe é perpendicular. A incognita será então egual á differença entre o diametro e esta parte.

Ambas as soluções satisfazem ao problema cujo enunciado é o seguinte: *Dividida uma linha* 3r *em tres partes eguaes, dividil-a em duas deseguaes,* x *e* 3r — x, *de modo que o quadrado* r² *feito sobre uma das partes eguaes seja equivalente ao rectangulo* (3r — x) x *comprehendido pelas deseguaes.*

Posto isto, se a equação $X=0$, que exprime as condições do problema, admittir uma solução negativa $x=-a$, advirta-se que, segundo a theoria exposta nos numeros precedentes, a solução $x=a$ póde accommodar-se á questão de que se tracta, com tanto que x se faça indirecta. Ora se imaginarmos que o ponto B se move na direcção BC, este ponto passará por A, onde será $AB=0$, e depois continuará a dirigir-se para B′ á esquerda de A; e como na primeira posição era $AB=CB-CA$, e na segunda é $AB'=CA-CB'$, segue-se que a linha AB é indirecta com AB. Por tanto, se o enunciado do problema não restringir a posição do ponto B a ficar necessariamente á direita de A, é claro que, tomando $AB'=a$ para a esquerda, o ponto B′ satisfará á questão.

A solução negativa indica alem d'isto um erro, que se commetteu em suppor o ponto B á direita de A; posição contradictoria com o estado da questão respectiva, por se deduzir a equação $X=0$ d'uma figura indirecta com aquella que se devia fazer. E é justamente este erro que se corrige quando se muda B para B′.

23. Concluamos pois que:

Todas as vezes que o problema tiver por fim determinar sobre uma linha fixa a distancia d'um ponto desconhecido á origem, deveremos supprimir os signaes das soluções negativas, e tomar os seus valores em sentido opposto áquelle que se lhes suppoz quando se formou a equação.

Foi isto o que se fez no n.º 14, II, onde se tomou GI′ opposta a GI (fig. 13); e no n.º 14 III, onde se tomou $CD'=CD$ (fig. 14), para achar um novo ponto de contacto D′ do circulo com a recta DD′; etc. No problema seguinte melhor se conhecerá a importancia d'estas reflexões.

Determinar sobre a linha AC (fig. 26) *um ponto* B′, *cujas distancias a* A *e* C *formem o producto conhecido* m^2.

Fazendo $AC=a$, $B'C=x$, temos $B'C \cdot AB'=x(a-x)=m^2$;

logo $$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-m^2},$$

soluções que facilmente se construem (n.º 15).

Se $m>\frac{1}{2}a$, torna-se x imaginario; mas nem por isso devemos concluir que a questão seja absurda, por que o erro pode provir de se ter supposto o ponto B′ numa posição que lhe não conviesse na hypothese actual.

Para tirar a duvida, supponhamos agora B′ posto em B, no prolongamento de AC. Formando a equação correspondente, e fazendo $BC=x$, teremos $$BC.AB = x(x-a) = m^2,$$

cujas raizes $$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + m^2},$$

são ambas reaes, e de construcção facil.

Por tanto:

1.° Se o enunciado da questão exige que o ponto procurado esteja no prolongamento de AC, a questão não é absurda, e tem sempre duas soluções, uma positiva em B, e outra negativa em E (sendo EC = AB).

2.° Se o enunciado exige que o ponto procurado esteja entre A e C, a questão é absurda quando $m > \frac{1}{2}a$. Por onde se vê, que o maior rectangulo, que se pode fazer com as duas partes de AC, é o quadrado da sua metade (*Alg. Elem.* n.° 104, III).

Mas cumpre notar principalmente, que o absurdo indicado pelo symbolo imaginario resulta d'um erro de posição do ponto B, analogo áquelle do qual procedem d'ordinario as soluções negativas: o que dá muita luz á theoria precedente.

3.° Finalmente, se a questão não restringe a posição do ponto que se procura, admitte duas soluções, ou quatro, conforme é $m > \frac{1}{2}a$, ou $m < \frac{1}{2}a$.

Neste ultimo caso não é só a Algebra que dá o numero das soluções; ou antes, a Algebra dá só os resultados correspondentes ás condições que se traduziram analyticamente. Em eguaes circumstancias está o problema II. do n.° 21.

24. Do que fica exposto resultam duas conclusões geraes, que se devem ter muito em vista nos problemas de Geometria.

1.° *Uma equação é verdadeira tão somente para a figura da qual foi deduzida; e para a applicar a outra figura, indirecta com aquella, é necessario mudar os signaes d'algumas das letras que representam as partes da mesma figura.*

2.° *Se o valor da incognita* x *sáe negativo, a equação que deu este valor, é defeituosa em quanto se applica á figura directa; e por isso deve mudar-se a disposição das partes desta figura, para a fazer directa, e tornar positivo o valor de* x. *Por exemplo, se* x *se conta sobre uma linha fixa, deve tomar-se em sentido opposto áquelle em que primeiro se tomou.*

triangulos [illegible] $BC \cdot AB = a \cdot x = a \cdot [illegible]$

cujas raizes $x = [illegible]$

são ambas reaes, e de construcção facil.

Por tanto:

1.° Se o enunciado da questão exige que o ponto procurado esteja no prolongamento de AC, a questão não é absurda, e tem sempre duas soluções, uma positiva em B, e outra negativa em B' [illegible].

2.° Se o enunciado exige que o ponto procurado esteja entre A e C, a questão é absurda quando $[illegible] < 4$. Por onde se vê qual o maior rectangulo, que se póde fazer com as duas partes de AC, e a construcção da sua metade (*Alg. Elem.* n.° 194, II).

Mas cumpre notar principalmente, que o absurdo indicado pelo symbolo imaginario resulta aqui unicamente da posição do ponto B, em virtude da qual produzem o ordinario as soluções [illegible] o que da mesma fórma á theoria precedente.

3.° Finalmente, se a questão não restringe a posição do ponto que se procura, admitte duas soluções, ou quatro, conforme $[illegible] > \frac{1}{4}a$, ou $[illegible] < \frac{1}{4}a$.

Neste ultimo caso não é só a Algebra que dá o numero das soluções; ou antes, a Algebra dá só os resultados correspondentes ás condições que se traduziram analyticamente. Em eguaes circumstancias está o problema II, do n.° 21.

24. Do que fica exposto resultam duas conclusões geraes, que se devem ter muito em vista nos problemas de Geometria.

1.° Uma equação é perfeitamente conveniente para a figura da qual foi deduzida; e para a applicar a outra figura, análoga com aquella, é necessario mudar os signaes d'algumas das [illegible] que representam as partes da mesma figura.

2.° Se o valor da incognita vem negativo, a equação que deu este valor, é defeituosa em quanto se applica á figura directa; e por isso deve mudar-se a disposição das partes desta figura, para a fazer directa, e tornar positivo o valor de x. Por exemplo, se x se tomou sempre contado para [illegible] tornar-se em sentido opposto; a questão [illegible].

SEGUNDA SECÇÃO

LOGARES GEOMETRICOS

Noções preliminares

25. Para determinar a posição d'um ponto M (fig. 27) sobre um plano, costuma empregar-se o processo seguinte.

Tomadas neste plano duas rectas indefinidas Ax, Ay, imaginem-se $MQ=x$, $MP=y$, tiradas por M parallelamente a ellas. O systema das linhas x e y determina a posição do ponto M: por que, tomando sobre as rectas fixas Ax, Ay, as partes $AP=x$, $AQ=y$, e tirando as parallelas MQ, MP, o ponto desconhecido, que deve achar-se simultaneamente em ambas estas parallelas, é a sua intersecção M.

O ponto M está na linha Ax, quando é $y=0$; está na linha Ay, quando é $x=0$; e coincide com o ponto A, quando são $x=0$ e $y=0$.

As linhas $AP=x$ chamam-se *abscissas*, e Ax o *eixo das abscissas;* as linhas $AQ=y$ chamam-se *ordenadas*, e Ay o *eixo das ordenadas;* Ax e Ay são os *eixos coordenados;* e A é a *origem* das coordenadas.

Como nada indica *a priori* se x se deve tomar de A para P, se de A para P'; nem se y se deve tomar de A para Q, se de A para Q'; os quatro pontos M, N, N', M', collocados nos espaços angulares yAx, yAx', $y'Ax'$, $y'Ax$, satisfazem egualmente aos valores absolutos das coordenadas; e fica indeterminada a posição do ponto M, em quanto outros caracteres a não fixarem. Para evitar esta difficuldade emprega-se a distincção seguinte, conforme com o que se disse no n.º 22.

Supponhamos que os x positivos se contam sobre Ax, á direita de yy'; e que os y positivos se contam sobre Ay, acima de xx': então contam-se os x negativos sobre Ax', á esquerda de yy'; e os y negativos sobre Ay', abaixo de xx'. Teremos pois os seguintes signaes das coordenadas, que determinam os pontos correspondentes:

PONTOS	SIGNAES DAS COORDENADAS
M, em y Ax	x e y positivos
N, em y Ax'	x negat., y posit.
N', em y' Ax'	x negat., y negat.
M', em y' Ax	x posit., y negat.

Mas quando os x positivos, ou os y positivos, se contarem d'outro modo, sempre o eixo yy' estremará os x positivos dos x negativos, e o eixo xx' estremará os y positivos dos y negativos.

As mais das vezes toma-se recto o angulo yAx; e x e y são respectivamente as distancias de M aos eixos yy' e xx': o que simplifica as formulas, e facilita as construcções, como teremos occasião de conhecer.

26. *Chama-se equação d'uma linha* BMZ (fig. 28) *a expressão analytica da relação que tem logar entre as coordenadas* x *e* y *de cada um dos seus pontos.*

Se imaginarmos que a ordenada MP se move parallelamente a si mesma, conservando-se o seu ponto P no eixo Ax, e que durante este movimento as grandezas da ordenada e da abscissa variam de modo que *satisfaçam* sempre á equação proposta em x, e y, a extremidade M de MP descreverá a linha correspondente. Esta linha é o *logar geometrico da equação.*

Dando diversos valores a uma das coordenadas x ou y, e calculando os correspondentes da outra por meio da equação proposta, a serie dos valores

$$x = a,\ a',\ a'', \ldots .\ y = b,\ b',\ b'', \ldots .$$

determinará os pontos da linha, cujas coordenadas são respectivamente a e b, a' e b', a'' e b'',...., e que designaremos por (a, b), (a', b'), (a'', b'')...

Assim a equação proposta entre duas incognitas fará conhecer uma infinidade de pontos, cujo systema constituirá a linha; e poderemos servir-nos d'este processo para determinar a figura da linha, e as particularidades, que o seu curso apresentar, como teremos occasião de conhecer.

Por exemplo: $y = $ AQ (fig. 27) é a equação da recta MN parallella ao eixo Ax; e $y = 0$ é a equação d'este eixo; $x = $ AP é a equação da recta MM' parallela ao eixo Ay; e $x = 0$ é a equação d'este eixo.

I. EQUAÇÕES DA LINHA RECTA E DO CIRCULO

Da linha recta

27. 1.° Supponhamos que a recta AN (fig. 29) passa pela origem. Abaixando de quaesquer pontos d'ella D, N,... as ordenadas DC, NP...., será sempre

$$\frac{DC}{AC}=\frac{NP}{AP}\ldots=a;$$

chamando *a a razão constante da ordenada com a abscissa.*

A equação da recta AN é pois $y=ax$................(1).

Se é recto o angulo yAx das coordenadas, temos PN = AP tang A; e *a* designa então *a tangente trigonometrica do angulo que a recta faz com o eixo dos* x. Em quanto o angulo NAP é agudo, *a* é positiva, e cresce com elle; mas quando este angulo é obtuso, como acontece em AN′, *a* é negativa e = — tang N′AE: com effeito é claro que neste segundo caso as abscissas positivas correspondem a ordenadas negativas, e reciprocamente.

Se não é recto o angulo yAx, o triangulo NAP dá

$$\frac{y}{x}=\frac{\text{sen NAP}}{\text{sen ANP}}=\frac{\text{sen NA}x}{\text{sen NA}y}=a;$$

e então *a* representa *a razão dos senos dos angulos que a recta faz com os eixos coordenados.* Em quanto ao signal: *a* será positiva ou negativa, conforme tiver a recta a posição AN, ou a posição AN′.

2.° Supponhamos que a recta BM não passa pela origem; e seja AB = b a ordenada na origem. Tirando AN parallela a BM, a equação (1) de AN dá PN = ax; e como é y = AB + NP, a equação da recta BM será $$y = ax + b \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Se esta recta tiver a posição B′M′, será b negativa.

28. Para uma dada recta as quantidades x e y são *variaveis*, e a e b são *constantes;* mas se a recta tomar diversas posições, a e b tambem variarão. Por conseguinte a equação (2) pertence a todas as rectas; e estas distinguem-se umas das outras pelos valores de a e b.

Para construir esta equação, tome-se $AB = b$, e tire-se EM de modo que seja respectivamente $\text{tang } BEA = a$, ou $\dfrac{\text{sen } BEA}{\text{sen } EBA} = a$, segundo forem as coordenadas rectangulares, ou obliquas. Será EBM a recta pedida, logar geometrico da equação (2).

Tambem se pode construir esta linha determinando dous dos seus pontos. Por exemplo, fazendo $x = 0$, acha-se a ordenada na origem $y = b = AB$ do ponto B, onde a recta corta o eixo dos y; fazendo $y = 0$, acha-se a abscissa $x = -\dfrac{b}{a} = AE$ do ponto E, onde a recta corta o eixo dos x: e estes pontos $B(0, b)$ e $E\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ determinam a recta pedida EB.

Se a recta passasse pela origem: applicando á equação (1) este ultimo processo, B e E coincidiriam no ponto A; mas fazendo por exemplo $x = 1 = AC$, viria $y = a = CD$, e os pontos $A(0, 0)$ e $D(1, a)$ determinariam a recta AD.

29. Porque, fazendo $a = -\dfrac{B}{A}$ e $b = -\dfrac{C}{A}$, a equação geral do primeiro gráu entre duas variaveis $$Ay + Bx + C = 0,$$

toma a forma (2), o seu logar geometrico é a linha recta, que sabemos construir.

Para vêr como pela equação d'uma recta se determina a sua posição, pode servir de exercicio a construcção dos logares geometricos das equações seguintes:

$$2x + y = 2,\ y = -3 + x,\ y = -x - 1.$$

30. *Achar a equação d'uma recta que passa por dous pontos dados.*

Sejam (x', y') e (x'', y'') os dous pontos dados. Por que a recta passa por (x', y'), as coordenadas d'este ponto devem satisfazer á equação (2), e por isso teremos $y = ax + b$, $y' = ax' + b$, que dão

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3);$$

E por que a mesma recta deve passar por (x'', y''), a equação (3) dará

$$y'' - y' = a(x'' - x'), \text{ ou } a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

A equação procurada é pois $$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots\ldots (4).$$

A equação (3) é a de todas as rectas, que têm o ponto commum (x', y'); e estas distinguem-se umas das outras pelos valores de a, isto é, pelas suas direcções.

31. *Achar o angulo que fazem entre si duas rectas dadas.*

Sejam $$y = ax + b,\ y = a'x + b',$$

as suas equações. Chamando α e α' os angulos CBx e EBx (fig. 30), que estas rectas BC, e DC ou a sua parallela BE, fazem com o eixo Ax; e V o angulo pedido: teremos $V = \alpha - \alpha'$, $\tang \alpha = a$, $\tang \alpha' = a'$,

e por conseguinte $$\tang V = \frac{a - a'}{1 + aa'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Se $a = a'$, é $V = 0$, e as rectas são parallelas; o que por outra parte é evidente.

Se $aa' + 1 = 0$, é $\tang V = \infty$, $V = 90°$, e as rectas são perpendiculares.

Por tanto as condições necessarias para que duas rectas sejam parallelas, ou perpendiculares, são respectivamente

$$a = a' \ldots (6), \quad aa' + 1 = 0 \ldots (7). \; (*).$$

Por um ponto dado tirar uma recta que seja parallela, ou perpendicular, a outra recta dada, ou que faça com ella um angulo dado.

Sejam $$y = ax + b, \; y = a'x + b',$$

a equação da recta dada; e a da recta pedida, na qual são desconhecidas a' e b'.

Em primeiro logar, como a recta pedida deve passar pelo ponto dado

(x', y'), é $$y - y' = a'(x - x').$$

Depois:

1.º Se esta recta deve ser parallela á recta dada, $a = a'$,

é $$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

(*) Se as coordenadas forem obliquas, e fizerem entre si o angulo θ, será

$$a = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}, \quad a' = \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha')},$$

ou $\quad a \operatorname{sen} \theta \cos \alpha - a \cos \theta \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha, \quad a' \operatorname{sen} \theta \cos \alpha' - a' \cos \theta \operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sen} \alpha'$;

das quaes, dividindo respectivamente por $\cos \alpha$ e $\cos \alpha'$,

se tiram $$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{1 + a \cos \theta}, \quad \operatorname{tang} \alpha' = \frac{a' \operatorname{sen} \theta}{1 + a' \cos \theta},$$

que dão $$\operatorname{tang} V = \frac{(a - a') \operatorname{sen} \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos \theta} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Então as condições do parallelismo, e da perpendicularidade, são respectivamente $$a = a' \ldots\ldots (6), \quad 1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0 \ldots\ldots\ldots (7).$$

2.° Se deve ser perpendicular á recta dada, ou $aa' + 1 = 0$,

é
$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9).$$

3.° Se deve fazer com a recta dada um angulo cuja tangente seja m,

ou
$$m = \frac{a - a'}{1 + aa'}, \text{ que dá } a' = \frac{a - m}{1 + ma};$$

é
$$y - y' = \frac{a - m}{1 + am}(x - x') \dots\dots\dots\dots\dots (10).$$

Por exemplo: se é $m = 1$, a equação da recta, que faz com a dada um angulo de 45°, e passa pelo ponto (x', y'),

é
$$y - y' = \frac{a - 1}{a + 1}(x - x').$$

32. *Achar a intersecção de duas rectas dadas.*

Sejam
$$y = ax + b,\ y = a'x + b',$$

as suas equações. A cada valor commum de x corresponderão em geral duas coordenadas differentes, uma para a primeira recta, outra para a segunda; mas no ponto de intersecção ambas as coordenadas serão as mesmas para uma e outra recta. Eliminando pois x e y entre as duas equações, teremos as coordenadas da intersecção (*)

$$x = \frac{b' - b}{a - a'},\ y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

(*) Em geral, se eliminarmos x e y entre as equações de duas linhas quaesquer, teremos as coordenadas dos seus pontos de intersecção.

Por exemplo, se na equação d'uma curva fizermos $y = 0$, ou $x = 0$, teremos respectivamente os pontos onde ella corta o eixo dos x, ou o eixo dos y.

33. *Achar a distancia entre dous pontos dados.*

Sejam (x', y') e $x'', y'')$ estes dous pontos M e N (fig. 31); e $\delta = MN$ a distancia pedida. Tirando MR e NR parallelas aos eixos, é

$$\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{NR}^2,\ \overline{MR} = \overline{AQ} - \overline{AP} = x'' - x',\ \overline{NR} = \overline{NQ} - \overline{MP} = y'' - y':$$

logo (*) $$\delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Se M se confundisse com A, a distancia á origem

seria $$\delta = \sqrt{x''^2 + y''^2}.$$

Se os pontos estivessem na recta, cuja equação é $\quad y = ax + b,$

as suas coordenadas deveriam satisfazer a esta equação: e por isso teriamos

$$y' = ax' + b,\ y'' = ax'' + b,$$

que, substituidos em (11), dariam $\quad \delta = (x'' - x')\sqrt{1 + a^2}.$

34. *Achar a distancia d'um ponto dado a uma recta dada.*

Sejam $$y = ax + b,\ (x', y').$$

a equação da recta dada BC (fig. 32), e o ponto dado M ou M'.

1.° Deve abaixar-se de M a perpendicular MN sobre BC. A equação d'esta perpendicular é a (9).

2.° Depois deve determinar-se a intersecção N d'estas rectas. Para isso elimina-se x e y entre as suas equações, e vem

$$x = x' + \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2},\ y = y' - \frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

(*) Se o angulo das coordenadas for θ, a distancia será

$$\delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y')\cos\theta} \ldots\ldots (11).$$

3.° Em fim deve medir-se a distancia MN. A sua expressão é

$$\delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

que, em virtude dos valores precedentes, se reduz a (*)

$$\delta=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

35. Em geral os problemas relativos á linha recta são de duas especies.

1.° Se, dada uma recta, se procura o ponto d'ella que satisfaz a certa condição, a e b são conhecidos na equação $y=ax+b$; e traduzindo analyticamente a condição proposta, forma-se outra equação. Por tanto a eliminação entre estas duas equações dará as coordenadas x e y.

Se houvesse muitas rectas e muitas condições dadas, seguir-se-hia um processo analogo.

2.° Se se procura a posição, que deve ter uma recta para satisfazer

---

(*) Se chamarmos α o angulo que a recta BC faz com o eixo dos x, e θ o angulo das coordenadas, é

$$MN=(MP-RP)\cos M,$$

ou

$$\delta=(y'-ax'-b)\cos M=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+\tan^2 M}}.$$

E teremos assim muito facilmente:

1.° No caso das coordenadas rectangulares,

$$\tan M=\tan\alpha=a,\quad \delta=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

2.° No caso das coordenadas obliquas, (n.° 31 [*]),

$$\cos M=\operatorname{sen}(\theta-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{1}{a\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}},$$

$$\delta=\frac{(y'-ax'-b)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}.$$

Será necessario dar ao radical aquelle dos signaes $\pm$ que fizer δ positivo: e por isso usar-se-ha de $\pm$, conforme for $y'>$ ou $<ax'+b$, isto é, conforme estiver o ponto M acima ou abaixo de R.

a certas condições, a e b são desconhecidos em $y = ax + b$; e o problema consiste em os determinar. Neste caso a traducção analytica das condições propostas dará as equações entre as quaes se devem eliminar a e b: mas d'estas equações não podem ser distinctas mais de duas; salvo se a sua formação introduz novas incognitas (*Alg. el.* n.° 125, 2.° Caso).

36. Appliquemos estes principios a alguns exemplos.

I. *Dividir em duas partes eguaes o angulo formado por duas rectas.*

Sejam $$y = ax,\ y = bx,$$

as equações das rectas dadas AB e AC (fig. 33) referidas aos eixos rectangulares Ax, Ay, tirados pelo vertice A.

Representando por $$y = kx$$

a recta procurada, tracta-se de determinar k, sendo conhecidos a e b.

Por serem $\operatorname{tang} \mathrm{DAB} = \dfrac{a-k}{1+ak}$, $\operatorname{tang} \mathrm{DAC} = \dfrac{k-b}{1+bk}$, a condição do problema, DAC = DAC, dá $$k^2 - \frac{2(ab-1)}{a+b}k - 1 = 0,$$

cujas raizes k', k'', se devem substituir por k em $y = kx$.

E por que é (*Alg. el.* n.° 145, 3.°) $k'k'' = -1$, ou $k'k'' + 1 = 0$,

as rectas AD, AE, correspondentes a estas raizes, fazem entre si um angulo recto [n.° 31, eq. (7)], e dividem respectivamente em duas partes eguaes o angulo BAC e o seu supplemento.

Se os dous eixos não passassem por A, e fossem x', y', as coordenadas d'este ponto: a equação da recta pedida seria
$$y - y' = k(x - x'),$$
sendo ainda k dada pela mesma equação do segundo grau.

Se uma das rectas, por exemplo AC, fosse o eixo dos x, seria b nullo, e a equação do segundo grau se reduziria a $$k^2 + \frac{2k}{a} = 1.$$

II. *Dadas duas rectas* AB *e* Ax (fig. 34), *achar um ponto* D (x', y'), *tal que, tirando por elle uma parallela* DC *a* Ax, *a parte interceptada* CD *sejá egual a* AC.

Tomando A para origem, e Ax para eixo dos x, sejam: $AI = m$ a abscissa do ponto C; $y = ax$ a equação da recta dada AB; e $y = kx$ a da recta AD.

Segundo as condições do problema, deve ser CD parallela a Ax, e $DC = AC$; e devem estar C na recta AB, e D na recta AD: isto é, devem ter logar as equações

$$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{DE}^2,\ AC = CD = AE - AI,\ y' = am,\ y' = kx';$$

ou $$m^2 + y'^2 = (x' - m)^2,\ y' = am,\ y' = kx';$$

ou, em fim, $$y'^2 = x'^2 - 2mx',\ y' = am,\ y' = kx'.$$

Eliminando y' e m, desapparece x', e fica a equação

$$ak^2 + 2k = a,$$

que, por ser a do problema precedente, mostra que a recta AD divide em duas partes eguaes o angulo BAE: e todos os pontos d'esta recta satisfazem ao problema, que tem assim uma infinidade de soluções.

III. *Achar as equações das perpendiculares abaixadas dos tres vertices de um triangulo dado sobre os lados oppostos; e mostrar que estas perpendiculares se cortam no mesmo ponto.*

Seja ABC (fig. 35) o triangulo dado. Tomando A para vertice, e AC para eixo dos x: as equações respectivas de AB [que passa por A (0, 0) e por B (x', y')], e de BC [que passa por B e por C $(b, 0)$] são

$$y = \frac{y'}{x'}\,x, \quad y = \frac{y'}{x' - b}(x - b).$$

As equações respectivas, de CE que passa por C, e de AF que passa por A, são da forma $$y = A(x - b),\ y = Bx.$$

E para que CE e AF sejam respectivamente perpendiculares a AB e BC, devem ser $$A\frac{y'}{x'}+1=0,\ B\frac{y'}{x'-b}+1=0.$$

Substituindo pois os valores de A e B, tirados das duas ultimas equações, nas duas precedentes, resultarão as equações das perpendiculares CE e AF,

$$y=-\frac{x'}{y'}(x-b),\ y=-\frac{x'-b}{y'}x.$$

Eliminando y entre estas duas equações para ter a abscissa da intersecção de CE com AF, acha-se $x'=x$, que é a equação da terceira perpendicular BD: logo a intersecção O de CE e AF está sobre BD, e por conseguinte estas tres perpendiculares concorrem nella.

Descrevendo sobre AC como diametro a circumferencia AEFC, tirando pelas intersecções F e E as rectas AF e CE, e finalmente tirando BD pelo ponto de concurso O, obtem-se as tres perpendiculares; o que dá a solução graphica do problema (*).

(*) Com effeito multiplicando entre si as equações de AB e de CE, ou as de BC e de AF, acha-se $y^2=bx-x^2$,

que é, como veremos, a equação d'aquella circumferencia; de sorte que, em logar dos systemas $y=\frac{y'}{x'}x,\ y=-\frac{x'}{y'}(x-b),$

e $$y=\frac{y'}{x'-b}(x-b),\ y=-\frac{x'-b}{y'}x,$$

podem substituir-se respectivamente $y=\frac{y'}{x'}x,\ y^2=bx-x^2,$

e $$y=\frac{y'}{x'-b}(x-b),\ y^2=bx-x^2;$$

isto é, em logar de determinar os pontos E e F pelas intersecções de AB com CE, e de BC com EF, podem determinar-se pelas intersecções de AB e BC com a circumferencia.

IV. *Descrever um circulo tangente aos tres lados de um triangulo dado.*

As perpendiculares OD, OF, OE (fig. 4), abaixadas do centro O sobre os tres lados do triangulo ABC, devem, pela condição de tangencia, ser eguaes entre si e ao raio. Tomando pois AB para eixo dos x, e A para origem; e chamando (α, β) e (x', y') os pontos O e C: a equação de AC será $y=\frac{y'}{x'}x$; e os valores das perpendiculares OE, OF (n.° 34) serão

$$OE=\frac{\beta-\frac{y'}{x'}\alpha}{\sqrt{1+\frac{y'^2}{x'^2}}}=\frac{\beta x'-\alpha y'}{\pm c},\ OF=\beta;$$

tendo logar o signal $\pm$, conforme estiver o ponto O (α, β) acima ou abaixo de AC.

A condição $\quad OE=OF$, ou $\alpha y'=\beta(x'\mp c)$,

deixa indeterminada uma das coordenadas α ou β, em quanto não se combinar com a outra condição OD = OF.

Por tanto ha uma infinidade de pontos equidistantes de AB e AC, todos collocados sobre duas rectas, cujas equações são

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x=\frac{y'}{x'\mp c},$$

isto é, sobre duas rectas, que passam pelo vertice A, e que fazem com AB angulos dados pelas suas tangentes $\frac{y'}{x'-c}$ e $\frac{y'}{x'+c}$. E por que o producto d'estas tangentes é $\frac{y'^2}{x'^2-c^2}=\frac{c^2-x'^2}{x'^2-c^2}=-1$, as duas rectas cortam-se perpendicularmente; de sorte que basta procurar a posição de uma d'ellas AO, para ter a da outra.

Ora de tang $BAC = \text{tang}\, A = \frac{y'}{x'}$ resulta

$$\cos A = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{x'}{c},\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{c-x'}{c+x'}\right)} = \frac{y'}{c+x'};$$

conseguintemente será $OAB = \frac{1}{2}BAC$; o que por outra parte já sabiamos (Geom. n.° 57, I).

Tirando pois a recta OA e a perpendicular a ella, de modo que dividam em duas partes eguaes o angulo BAC e o seu supplemento, o centro procurado estará sobre uma d'estas duas rectas. Fazendo o mesmo relativamente aos angulos B e C, teremos seis rectas que, encontrando-se duas e duas, darão quatro pontos para centros dos circulos tangentes. Mas só um d'estes circulos fica inscripto no triangulo; os outros tocam exteriormente os seus lados.

Poderiamos sujeitar as perpendiculares OE, OF, OD, ás condições de terem entre si razões dadas, e procurar o ponto O; o que resolveria um problema, que comprehende o precedente.

V. *Pelo ponto* M (fig. 36) *tirar uma recta* NQ *que separe do angulo* NBx *o triangulo* NBQ *equivalente a uma superficie dada.*

Tomando Bx e By para eixos: são dados tang $NBx = a$, e $M(\alpha, \beta)$; e é $BQ = z$ a incognita.

As equações de NQ, que passa por $Q(z, 0)$ e (α, β), e de NB, são respectivamente

$$y = \frac{\beta}{\alpha - z}(x - z),\ y = ax;$$

e eliminando x entre ellas, vem a ordenada da intersecção N,

$$y = \frac{\beta a z}{\beta - a\alpha + az} = ND.$$

Esta expressão simplifica-se tirando AM parallela a BN, e fazendo $AB = m$; por que a equação de MA, $y - \beta = a(x - \alpha)$, que no ponto $A(m, 0)$

dá $\beta = a\alpha - am$, a reduz a $\quad y = \dfrac{\beta z}{z-m}.$

Posto isto, qualquer que seja a area dada, sempre será possivel transformal-a num rectangulo βk, de base k e altura β; e a condição do problema será

$$\beta k = \tfrac{1}{2} zy = \frac{\beta z^2}{2(z-m)},$$

ou

$$z^2 - 2kz + 2km = 0;$$

o que dá duas soluções, que facilmente se podem construir (n.º 15).

Os problemas seguintes podem servir de exercicio.

VI. Dadas as equações de duas rectas, e tomadas sobre estas as partes eguaes AB e AC (fig. 33), calcular a grandeza da metade BD da corda BC; e concluir d'ella o angulo BAC. A formula deve dar o mesmo resultado que a (5) do n.º 31.

VII. Com os mesmos dados achar as equações da corda BC, e da sua perpendicular AD. A direcção d'estas rectas deve ser a mesma que no problema I.

VIII. Mostrar que as perpendiculares DO, FO, EO, (fig. 37), levantadas no meio dos lados do triangulo ABC, concorrem no mesmo ponto O. E mais geralmente que, tiradas quaesquer parallelas DF ao lado AC, as perpendiculares DO, FO, levantadas sobre os lados AB, BC, nas intersecções d'elles com DF, se cortam em pontos O situados na mesma recta, que passa pelo vertice B.

IX. Achar as equações das rectas CD, AF, BE, (fig. 37), tiradas dos vertices do triangulo ABC para o meio dos lados oppostos; e provar que ellas concorrem no mesmo ponto G, cuja distancia BG a cada vertice é $\frac{2}{3}$ da total BE. E mais geralmente provar que, sendo D, F, as intersecções dos lados AB, BC, com qualquer parallela DF a AC, a qual corta estes lados proporcionalmente, os pontos de intersecção G das rectas AF, CD, estão sobre a recta BE tirada de B para o meio E de AC.

Consulte-se o *Recueil des propositions* de Mr. *Puissant*.

Do circulo

37. Sejam α, β, as coordenadas do centro C (fig. 38), e R o raio do circulo: teremos (n.º 39)

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Se o centro for a origem, teremos $\alpha = 0$, $\beta = 0$, e

$$R^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se as coordenadas x, y, fizem entre si um angulo γ, teremos (n.º 33 [*]), quando o centro é o ponto (α, β),

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\gamma \ldots\ldots (3);$$

e, quando o centro é a origem,

$$R^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma.$$

Mostremos num exemplo simples o partido, que se pode tirar da equação d'uma curva para conhecer a sua figura e as suas propriedades, discutindo a equação (2).

38. De serem $\quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$,

segue-se, que a cada abscissa correspondem duas ordenadas eguaes e de signaes contrarios, e a cada ordenada correspondem duas abscissas eguaes e de signaes contrarios. Por isso a curva é symetrica relativamente a qualquer dos eixos, isto é, cortada por elles em duas partes eguaes e semelhantes, que se confundiriam se fizessemos girar uma d'ellas em torno do eixo até que o seu plano coincidisse com o da outra.

Quanto mais cresce x, mais y decresce, até que $x = \pm R$ dá $y = 0$; por onde se vê que a curva se approxima do eixo dos x até o encontrar em A e O; mas não se extende além d'estes pontos, por que $x > \pm R$ daria y imaginario. Do mesmo modo não se extende além dos pontos B e D, onde encontra o eixo dos y.

D'estas noções resulta, que a curva é symetrica relativamente a todos os diametros, fechada, e d'um só ramo.

A equação das rectas que passam por O $(-R, 0)$, e a das rectas que passam por A $(R, 0)$, são $y=a(x+R)$, $y=a'(x-R)$,

das quaes, eliminando y ou x, resultam as coordenadas da intersecção M,

$$x=\frac{a+a'}{a'-a}R,\ y=\frac{2aa'}{a'-a}R.$$

Estas coordenadas devem satisfazer á equação (2), para que o ponto M esteja na circumferencia: substituindo-as pois naquella equação, resulta

$$aa'(1+aa')=0.$$

Tal é a condição necessaria para que as cordas, que passam pelas extremidades do diametro, se cortem sobre a circumferencia. E por que esta condição dá as equações $a=0$, ou $a'=0$, ou $1+aa'=0$,

das quaes as duas primeiras são as do diametro (o que é evidente), e a terceira exprime a perpendicularidade de duas rectas: segue-se que fica satisfeita a condição referida, ou que a intersecção M é um ponto da circumferencia, quando as cordas se cortam perpendicularmente.

A equação $y^2=R^2-x^2=(R+x)(R-x)=OP.AP$

mostra que a ordenada MP é meia proporcional entre os segmentos OP e AP.

A equação $AM=\sqrt{(R-x)^2+y^2}=\sqrt{2R(R-x)}=\sqrt{AO.AP}$

mostra que a corda é meia proporcional entre o diametro AO e o segmento AP.

39. Para achar as intersecções d'uma recta MN (fig. 39) com um circulo NKI, é necessario eliminar x e y entre as suas respectivas equações

$$y=ax+b,\ y^2+x^2=R^2:$$

o que dá $$x = -\frac{ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2};$$

ou $$x = -\frac{a\delta \pm \sqrt{R^2 - \delta^2}}{\sqrt{1+a^2}},\ y = -\frac{-\delta \pm a\sqrt{R^2-\delta^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

fazendo $\delta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}$ = distancia da recta ao centro do circulo (n.º 34) (*).

A natureza do radical offerece tres casos:

1.º Se o radical é imaginario, ou $\delta > R$, a recta não encontra a circumferencia.

2.º Se o radical é real, ou $\delta < R$, a recta corta a circumferencia em dous pontos. E como o eixo dos x se pode tomar parallelo á secante MN, será nesta hypothese $a = 0$, e ficará $x = \pm \sqrt{R^2 - b^2}$, que, por ter os signaes $\pm$ e valores eguaes, mostra que a perpendicular abaixada do centro sobre a corda divide esta em duas partes eguaes.

3.º Finalmente, se o radical é nullo, ou $\delta = R$, a recta encontra a circumferencia num só ponto, ou é tangente. E neste caso, se chamarmos x', y', as coordenadas do ponto T de contacto, teremos

$$x' = \frac{-ab}{1+a^2},\ y' = ax' + b,$$

(*) Chamando (α, β) um ponto da recta MN, é $$y - \beta = a(x - \alpha);$$

e as distancias D de (α, β) ás intersecções da recta com o circulo são

$$D = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \sqrt{1+a^2}\,.\,(x-\alpha) = \frac{(1+a^2)\alpha + ab \pm \sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

E os dous valores D′, D″, de D dão $$D'D'' = \frac{[(1+a^2)\alpha + ab]^2 - R^2(1+a^2) + b^2}{1+a^2},$$

ou $$D'D'' = \alpha^2 + (\alpha a + b)^2 - R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

É o que tambem se pode obter muito facilmente, usando das coordenadas polares, como se verá adiante.

que dão $$a=-\frac{x'}{y'},\ b=\frac{x'^2+y'^2}{y'}=\frac{R^2}{y'}.$$

Mas a equação $y=a'x$ do raio CT, que passa pelo ponto de contacto T (x', y'), dá $a'=\frac{y'}{x'}$: logo é $aa'=-1$; ou o raio perpendicular á tangente.

Substituindo em $y=ax+b$ os valores precedentes de a e b, resultará a equação da tangente á circumferencia num ponto (x', y')

$$yy'+xx'=R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Para tirar d'um ponto exterior M (α, β) uma tangente á circumferencia, é necessario determinar o ponto T (x', y') de contacto. Ora as coordenadas d'este ponto devem satisfazer ás equações do circulo e da tangente; e as coordenadas de M devem satisfazer á equação da tangente:

logo $$x'^2+y'^2=R^2,\ \beta y'+\alpha x'=R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Como a eliminação entre as equações (5) daria equações do 2.° grau em x' ou y', ha dous pontos de contacto T, T', e por conseguinte duas tangentes MT, MT', tiradas do ponto M. Mas, em vez de fazer a eliminação, notemos que, por satisfazerem as coordenadas x', y', dos dous pontos de contacto T, T', á equação $$\beta y+\alpha x=R^2,$$ esta equação é a da corda TT'; por conseguinte a sua construcção determinará os pontos de contacto, T, T', e as tangentes MT, MT'.

Fazendo nesta equação $y=0$, resulta a abscissa $CB=\frac{R^2}{\alpha}$ do ponto B onde a corda TT' corta o eixo dos x: e como esta abscissa sahe independente de $\beta=PM$, segue-se que, se o ponto M se mover sobre a recta PM, as tangentes mudarão de direcção, girando a corda TT' em torno do ponto fixo B.

Tambem se pode dar ao calculo uma fórma tal, que nos conduza ao processo geometrico do n.º 59, II da Geom. Tomemos para isso a differença das equações (5)

$$y^2-\beta y+x^2-\alpha x=0, \text{ ou } (y-\tfrac{1}{2}\beta)^2+(x-\tfrac{1}{2}\alpha)^2=\tfrac{1}{4}\alpha^2+\tfrac{1}{4}\beta^2.$$

Como as coordenadas dos pontos de contacto T, T′, devem satisfazer a esta equação, o circulo, a que ella pertence, ha de passar por esses pontos.

Para descrever este circulo, cujo centro é $(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, e cujo raio é $\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}\beta^2}$, tomemos $Cp=\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}\alpha$, e $pm=\frac{1}{2}MP=\frac{1}{2}\beta$: será m o centro, e Cm o raio, com os quaes descrevendo a circumferencia acharemos os pontos T, T′.

40. Sejam C, C′ (fig. 40) os centros de dous circulos, C a origem das abscissas contadas sobre CC′, e $CC'=a$. Eliminando x, y, entre as equações d'estes dous circulos, $x^2+y^2=R^2, (x-a)^2+y^2=R'^2$, teremos as coordenadas da sua intersecção,

$$x=\frac{a^2+R^2-R'^2}{2a},\ y=\pm\frac{\sqrt{4a^2R^2-(a^2+R^2-R'^2)^2}}{2a};$$

e como a cada valor de x correspondem dous valores de y eguaes, e de signaes contrarios, segue-se que a linha dos centros CC′ é perpendicular ao meio da corda MN.

D'estas equações facilmente resultam as condições que devem verificar-se, no caso de se cortarem, ou tocarem, os circulos (Geom. n.º 49). Com effeito o radical, transformado como na pag. 3, torna-se em

$$\sqrt{(a+R+R')(a+R-R')(R+R'-a)(R'-R+a)}.$$

Ora, suppondo $R=$ ou $>R'$, os dous primeiros factores são positivos. Em quanto aos outros dous:

1.º Se ambos têm o mesmo signal, não podem ser negativos, por serem incompativeis as deseguaIdades $R+R'<a$ e $R-R'>a$: logo, para que seja real o radical, são necessarias as condições $R+R'>a$, $R-R'<a$; e então as circumferencias cortam-se em dous pontos.

2.° Se um d'elles é nullo, $a = R + R'$, ou $a = R - R'$, resulta $y = 0$, $x = R$; e os circulos tem um só ponto commum na linha dos centros: é o caso do contacto.

3.° Em fim, se têm signaes contrarios, isto é,

$$a > R + R' \text{ e } a > R - R', \text{ ou } a < R - R' \text{ e } a < R + R',$$

as raizes são imaginarias; e como em ambos estes systemas de condições a primeira involve a segunda, os circulos não se encontram quando é $a > R + R'$, ou quando é $a < R - R'$.

41. Tambem se podem resolver os problemas seguintes:

I. Dado um circulo e uma recta, tirar outra recta que seja parallela á primeira, e tangente ao circulo.

II. Tirar uma tangente commum a dous circulos dados.

III. Descrever uma circumferencia, que seja tangente a outra circumferencia, e a duas rectas dadas.

O centro está sobre a recta que divide ao meio o angulo das rectas dadas.

Transformação das coordenadas

42. Algumas vezes é tão composta a equação d'uma curva, que difficilmente se deduzem d'ella as suas propriedades; mas esta complicação pode depender da posição dos eixos, a que está referida a curva. Por exemplo, qualquer das equações

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2, \ y^2 = 2Rx - x^2, \ y^2 + x^2 = R^2,$$

pertence ao circulo; mas a ultima é mais simples, por ser o centro a origem das coordenadas.

Convém pois, para simplificação dos calculos, que se saiba transformar a equação d'uma curva, referida a certos eixos, em outra referida a novos eixos.

43. 1.° *Dados os eixos coordenados* Ax, Ay, (fig. 41), *passar para outros* A'x', A'y', *parallelos a elles.*

Chamando $AB = a$, $A'B = b$, as coordenadas da nova origem A' referidas á primitiva; $AP = x$, $MP = y$, as coordenadas primitivas do ponto

M; e $A'C = x$, $MC = y'$, as novas coordenadas do mesmo ponto: é

$$AP = BP + AB, \quad MP = MC + CP,$$

ou

$$x = x' + a, \quad y = y' + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

44. 2.° *Dados os eixos rectangulares* Ax, Ay, (fig. 42), *passar para outros* Ax′, Ay′, *com direcções quaesquer, e com a mesma origem.*

Chamando (xx') e (xy') os angulos xAx' e xAy', que determinam a posição dos novos eixos: é, para qualquer ponto M,

$$AP = x, \quad MP = y, \text{ e } AL = x', \quad ML = y';$$

e tracta-se de exprimir x e y em x' e y', e nos angulos (xx') e (xy').

Ora temos (*) $\quad AP = AK + LI, \quad MP = LK + IM;$

e os triangulos rectangulos AKL, LIM dão

$$AK = x' \cos(xx'), \; KL = x' \operatorname{sen}(xx'), \; LI = y' \cos(xy'), \; MI = y' \operatorname{sen}(xy');$$

logo

$$x = x' \cos(xx') + y' \cos(xy'), \quad y = x' \operatorname{sen}(xx') + y' \operatorname{sen}(xy') \ldots (2).$$

Se os novos eixos forem tambem rectangulares (fig. 43), teremos $(xy') = 90 + (xx')$; e as equações precedentes serão (**)

$$x = x' \cos(xx') - y' \operatorname{sen}(xx'), \quad y = x' \operatorname{sen}(xx') + y' \cos(xx') \ldots (2').$$

45. 2.° *Dados os eixos* Ax, Ay, (fig. 42), *com quaesquer direcções,*

(*) Por onde se vê que a abscissa x é a projecção da porção polygona ALM sobre o eixo dos x.

(**) O mesmo se conclue directamente dos triangulos AKL, LIM; por ser

$$AK = x' \cos(xx'), \; KL = x' \operatorname{sen}(xx'), \; LI = y' \operatorname{sen}(xx'), \; MI = y' \cos(xx'),$$

$$x = AK - LI, \quad y = KL + MI.$$

passar para outros Ax′, Ay′, *tambem com quaesquer direcções, e com a mesma origem.*

Os triangulos obliquangulos ALK, LIM dão

$$\mathrm{AK}=\mathrm{AL}.\frac{\text{sen ALK}}{\text{sen AKL}}=\frac{x'\,\text{sen}\,(x'y)}{\text{sen}\,(xy)},\ \mathrm{KL}=\frac{x'\,\text{sen}\,(xx')}{\text{sen}\,(xy)},$$

$$\mathrm{LI}=\frac{y'\,\text{sen}\,(yy')}{\text{sen}\,(xy)},\ \mathrm{MI}=\frac{y'\,\text{sen}\,(xy')}{\text{sen}\,(xy)};$$

logo

$$x=\frac{x'\,\text{sen}\,(x'y)+y'\,\text{sen}\,(yy')}{\text{sen}\,(xy)},\ y=\frac{x'\,\text{sen}\,(xx')+y'\,\text{sen}\,(xy')}{\text{sen}\,(xy)}\ldots(3).$$

Se os eixos primitivos forem obliquos, e os novos rectangulares (fig. 43),

teremos $(x'y')=90^\circ$, ou $(x'y)=90^\circ-(yy')$, $(xy')=90^\circ+(x'x)$;

o que mudará as formulas precedentes em

$$x=\frac{x'\,\text{sen}\,(x'y)+y'\cos\,(x'y)}{\text{sen}\,(xy)},\ y=\frac{x'\,\text{sen}\,(xx')+y'\cos\,(xx')}{\text{sen}\,(xy)}\ldots(3').$$

46. Finalmente, querendo mudar tanto a origem como as direcções dos eixos, faremos successivamente a passagem por meio da equação (1), e d'aquella das equações (2), (2′), (3), (3′), que pertencer ao caso de que se tracta.

47. Se os eixos não estiverem collocados como suppõe as figuras (42 e 43), modificar-se-hão os signaes dos senos e dos cosenos, conforme o que se disse no n.º 19 a respeito das quantidades indirectas, comparando a disposição dos eixos naquellas figuras com a que deve ter logar. Por exemplo, se o eixo Ax' estiver abaixo de Ax, faremos sen (xx') negativo e cos (xx') positivo.

No entretanto é mais breve, e menos sujeito a erro, deduzir as formulas directamente da figura que se considera, reproduzindo nella as operações precedentes.

Coordenadas polares

48. Até aqui determinámos a posição d'um ponto sobre um plano por meio das suas distancias a dous eixos; mas ha muitos outros modos de fixar aquella posição, cada um dos quaes dá um novo systema de coordenadas (Vej. a *Geometr. de Pos.* de Carnot. pag. 423).

O mais conhecido d'estes systemas é o das *coordenadas polares*.

Para determinar com estas coordenadas a posição de qualquer ponto M (fig. 45), é necessario conhecer a sua distancia $AM = r$ a um ponto fixo A, e o angulo $MAP = \theta$ formado por AM com uma linha fixa Ax dada de posição. O ponto A chama-se o *foco;* AM o *raio vector,* e DAP o *angulo vector*, do ponto M.

A equação polar d'uma linha é a relação que tem logar entre as coordenadas polares r e θ, para qualquer dos seus pontos. Se o raio AM girar em torno da origem A; e se neste movimento fizermos variar a sua grandeza, de modo que os valores correspondentes r e θ satisfaçam constantemente á equação polar: a extremidade M descreverá a curva MN, logar geometrico d'aquella equação.

49. Sendo $AP = x$, $MP = y$; o triangulo MAP dá

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Por tanto, se quizermos passar d'um systema de coordenadas rectangulares x, y, para o das polares r, θ, usaremos das equações (1); e se quizermos passar d'um systema de coordenadas obliquas para o das polares, transformaremos primeiro a equação em coordenadas rectangulares [n.^os 43 e 45, eq. (3')], referidas á origem A, e ao eixo Ax desde o qual se contam os angulos θ; e depois applicaremos as formulas (1) a esta equação assim transformada.

Reciprocamente: se tivermos a equação polar d'uma curva, e quizermos traduzil-a em coordenadas rectangulares, bastará substituir nella as expressões de r e θ, tiradas das formulas (1) pela eliminação: e se quizermos passar depois para as coordenadas obliquas, e para outra origem, usaremos das expressões (1) do n.° 43, e (2) do n.° 44.

50. Tomemos por exemplo a equação (1) do n.° 37, pertencente ao circulo cujo centro C (fig. 44) tem as coordenadas rectangulares α e β.

As expressões (1) transformam esta equação em

$$r^2 - 2r(\alpha\cos\theta + \beta\operatorname{sen}\theta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Donde se tiram os seguintes resultados:

1.° A cada angulo θ correspondem dous valores, AM e AN, de r; valores imaginarios, quando θ é tal que AM não encontra a circumferencia.

2.° O producto das raizes, r' e r'', é (*Alg. el.* n.° 145, 3.°)

$$r'r'' = AM \cdot AN = \alpha^2 + \beta^2 - R^2.$$

Como esta expressão não depende de θ, segue-se que é constante o producto AM . AN de dous raios vectores, correspondentes á mesma secante: e, segundo for o ponto A interior ou exterior ao circulo, assim recahiremos nos theoremas da Geometr. n.os 72 ou 75.

3.° Façamos $\quad AC = m,\ CAM = \varphi,\ CAx = i;$

o que dá $\quad \theta = \varphi + i,\ \alpha = m\cos i,\ \beta = m\operatorname{sen} i.$

A somma das raizes AM, AN, será (*Alg. el.* n.° 145, 3.°)

$$r' + r'' = 2(\alpha\cos\theta + \beta\operatorname{sen}\theta) = 2m\cos(\theta - i) = 2m\cos\varphi;$$

equação facil de construir, quando se pede uma das quantidades m, φ, $r' + r''$, sendo dadas as outras duas.

4.° Para que AM seja tangente, é necessario que as raizes r', r'', sejam eguaes, ou a equação (2) um quadrado perfeito, e por conseguinte

(*Alg. el.* n.° 146) $\quad 4(\alpha\cos\theta + \beta\operatorname{sen}\theta)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0,$

ou $\quad \pm R = m\operatorname{sen}(\theta - i) = m\operatorname{sen}\varphi.$

Este valor de R é lado d'um triangulo rectangulo, no qual m é a hypothenusa, e φ o angulo opposto a R: ora no triangulo ACT temos $AC = m$, $TAC = \varphi$, $CT = R$; logo este triangulo é rectangulo em T, e por isso a tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto.

Demais, por serem eguaes as raizes, temos

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = (m+R)(m-R) = AB.AI = AM.AN;$$

logo a tangente é meia proporcional entre a secante e a parte exterior da mesma secante.

5.º A differença das raizes, ou a corda $MN = k$, é

$$k = 2\sqrt{R^2 - (\alpha \operatorname{sen} \theta - \beta \cos \theta)^2} = 2\sqrt{R^2 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi};$$

logo $$m \operatorname{sen} \varphi = \pm\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2}.$$

Ora, se em qualquer parte d'um circulo (fig. 46) tirarmos a corda $mn = k$, e abaixarmos do centro sobre ella a perpendicular Co, teremos $Co = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}k^2} = m \operatorname{sen} \varphi$; logo descrevendo um circulo do centro C, com o raio Co, e tirando-lhe por A a tangente AF, será

$$m \operatorname{sen} \varphi = CF = AC \operatorname{sen} FAC = m \operatorname{sen} FAC,$$

e por isso $\varphi = FAC$, $MN = k$. D'onde resulta que, *para tirar pelo ponto A uma corda* MN *que tenha um dado comprimento* k, basta tomar uma corda $mn = k$, descrever o circulo Fo com o raio egual á perpendicular Co, e tirar por A as tangentes AF ao mesmo circulo, as quaes determinarão as cordas pedidas $MN = k$. Mas o problema só é possivel, quando o ponto A fica exterior ao circulo Fo.

6.º Se tomarmos para eixo dos x a recta AB (fig. 44), que passa pelo pólo e pelo centro, teremos $\beta = 0$; e se o pólo estiver na circumferencia, em I, teremos tambem $\alpha = R$: o que reduzirá a equação (2) a

$$r^2 - 2rR \cos \theta = 0.$$

Logo $r = 2R \cos \theta$ é o comprimento da corda k, que faz com o diametro o angulo θ. E como imaginando um segundo circulo (fig. 40′) de raio R′, e tangente ao primeiro no mesmo pólo, a sua corda é similhantemente $k' = 2R' \cos \theta$; resulta $$k : k' :: R : R'.$$

Por onde se vê, que *as cordas tiradas, debaixo do mesmo angulo, pelo ponto de contacto de duas circumferencias que se tocam interior ou exteriormente, estão entre si como os raios.*

II. SECÇÕES CONICAS

Da ellipse

51. Chama-se *Ellipse* a curva ABO (fig. 47), na qual as distancias de cada um dos seus pontos a dous fixos F, F′, fazem uma somma constante

$$z + z' = AO = 2a.$$

As distancias FM, F′M, são *raios vectores* da ellipse; e F, F′, são os *fócos*.

Para achar a equação da ellipse, ponhamos a origem das coordenadas rectangulares no meio C de FF′, e tomemos esta linha para eixo dos x: o que deve simplificar a equação, por sabermos já, pela definição da curva, que esta ha de ser symetrica relativamente áquelle eixo.

Fazendo $CP = x$, $MP = y$, e $FC = c$, os triangulos rectangulos FMP, F′MP, dão

$$z^2 = y^2 + (x - c)^2,\quad z'^2 = y^2 + (x + c)^2,\quad z + z' = 2a.$$

E como a differença das duas primeiras é

$$z'^2 - z^2 = (z + z')(z' - z) = 2a(z' - z) = 4cx,$$

serão $$FM = z = a - \frac{cx}{a},\quad F'M = z' = a + \frac{cx}{a} \ldots\ldots\ldots (1);$$

o que substituido nas expressões de z^2, ou de z'^2, dá

$$a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}=y^2+x^2+c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se fizermos $x=0$, teremos a ordenada inicial $BC=\sqrt{a^2-c^2}=b$; e eliminando c por meio d'ella, a equação (2) tornar-se-ha em

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

que é a equação da ellipse referida ao centro e aos eixos.

52. A equação (3) dá $$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Como a cada abscissa x correspondem dous valores eguaes de y, a curva é symetrica relativamente ao eixo AO (fig. 48); e como $+x$ e $-x$ dão o mesmo valor para y, a curva é symetrica relativamente a BD. Por onde se vê que, se a figura se dobrasse por AO ou por BD, as suas partes se sobreporiam, e coincidiriam perfeitamente.

$x > \pm a$ dá y imaginario; e $y > \pm b$ dá x imaginario. Por onde se vê que a curva é fechada; $BC=b$ a sua maxima ordenada; e $CO=a$ a sua maxima abscissa. AO e BD são *o eixo maior e o eixo menor;* A e O *os vertices;* C *o centro;* FC$=$c *a excentricidade.*

A Ellipse é pois uma curva fechada, na qual a somma dos dous raios vectores de qualquer dos seus pontos é sempre egual ao eixo maior.

53. Duas ordenadas y, y', da ellipse, correspondentes ás abscissas x, x',

dão $$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2-x'^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x')(a-x')}=\frac{AP\,.\,PO}{AP'.\,P'O},$$

isto é, *os quadrados das ordenadas proporcionaes aos productos das distancias dos pés d'ellas aos dous vertices.*

Se mudarmos respectivamente x e y em y e x, a equação (3) tornar-se-ha

em $$b^2y^2+a^2x^2=a^2b^2;$$

conservando assim a mesma fórma, quer se tome AO, quer BD, para eixo dos x.

54. A equação do circulo ANO, descripto do centro C com o raio a,

dá $$Y=\sqrt{a^2-x^2}=PN;$$

logo $$\frac{y}{Y}=\frac{b}{a}.$$

Por tanto a razão entre as ordenadas do circulo e da ellipse, correspondentes á mesma abscissa, é constante e egual á razão dos eixos: e por ser $y<Y$, vê-se que o circulo descripto com o raio a comprehende a ellipse. Similhantemente se veria que o circulo descripto com o raio b é sempre comprehendido pela ellipse.

A ultima equação indica um meio muito simples de descrever a ellipse. Traçados os eixos AO, BD, e descriptas com os raios b e a as duas circumferencias, inscripta e circumscripta, tire-se um raio qualquer CN; e depois pelos pontos Q e N, onde este raio corta as circumferencias, tirem-se QM e NP parallelas aos eixos: o ponto M pertencerá á ellipse;

por que $$\frac{PM}{PN}=\frac{CQ}{CN},\ \text{ou}\ \frac{PM}{Y}=\frac{b}{a},\ \text{dá}\quad PM=Y\,.\,\frac{b}{a}=y.$$

55. Da definição da ellipse tambem resulta outro processo para descrever esta curva.

Traçados os dous eixos AO e BC (fig. 47), descreva-se do centro B, com o raio CO, um arco de circulo: os pontos F, F′, onde o circulo cortar AO, serão os fócos; por que é $CF=\sqrt{a^2-b^2}=c$. Depois, do centro F com o raio egual a uma parte qualquer OK de OA, que não seja $>OF'$ nem $<OF$, e do centro F′ com o raio egual ao resto AK, descrevam-se dous arcos de circulo: os pontos M, onde elles se encontrarem, pertencerão á ellipse, por ser $FM+F'M=AO$. E do mesmo modo, se dos centros F′ e F com aquelles raios OK e AK descrevermos arcos, as suas intersecções serão pontos da ellipse. Assim os arcos descriptos respectivamente dos centros F e F′ com os raios OK e AK, e dos mesmos centros com os rais AK e OK, darão quatro pontos da ellipse.

Quando as dimensões da ellipse são grandes, prendem-se nos fócos F, F', as pontas de um cordel ou fio, do comprimento AO; e conservando o fio distendido por meio de um ponteiro, este no seu movimento descreve a curva.

56. Quanto mais se afastam um do outro os dous fócos, mais diminue a razão $\frac{b}{a}$, e mais se achata a ellipse: pelo contrario, quanto mais se approximam os fócos, mais ella se parece com o circulo; e torna-se nelle quando os fócos coincidem, como se vê fazendo $c=0$ na equação (2). Por tanto o circulo pode considerar-se como uma ellipse, cujos fócos coincidem, ou cujos eixos são eguaes.

As equações (1) mostram que *os raios vectores do ellipse são racionaes e lineares relativamente á abscissa* x.

$x=\pm a$, e $x=0$, dão respectivamente o maximo, minimo, e medio raio vector da ellipse, $z=a\pm c$, $z=a$; e por isso O é o ponto mais proximo do fóco F da ellipse, A o mais remoto, e B o que fica na media distancia.

Chama-se *parametro o dobro da ordenada que passa pelo fóco.*

E como $x=c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$ dá $2y=p=\pm 2\frac{b^2}{a}=\frac{(2b)^2}{2a}$,

o parametro é uma terceira proporcional aos eixos maior e menor.

57. Mudando x em $x-a$ na equação (3), vem a equação da ellipse referida aos eixos e ao vertice,

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2),\quad \text{ou } y^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2)\ldots\ldots\ldots(4).$$

58. Para referir a ellipse ás coordenadas polares, tomando um dos fócos F para pólo e FO para eixo, basta mudar x em x_i+c na expressão (1) de z, e depois x_i em $z\cos\theta$; o que dá a equação polar da ellipse,

$$z=\frac{a^2-c^2}{a+c\cos\theta}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},\text{ ou }\quad z=\frac{\frac{1}{2}p}{1+e\cos\theta}\ldots(5);$$

sendo z e θ o raio vector FM e o angulo vector MFO, e e a razão $\frac{c}{a}$ da excentricidade para o semi-eixo maior.

Para transportar a origem ao outro fóco F′, contando ainda θ no mesmo sentido desde F′O, bastará mudar e em $-e$ (*).

Da hyperbole

59. Chama-se *hyperbole* a curva na qual é constante a differença das distancias de cada um dos seus pontos M (fig. 49) a dous pontos fixos F, F′.

Tomando para origem o meio C de FF′, e discorrendo como no n.° 51,

---

(*) Se contarmos os angulos MFE $= v$ desde uma recta FE que faça com o eixo o angulo ϖ, será $\theta = v - \varpi$; e a equação polar da ellipse terá a fórma

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}.$$

Se chamarmos (fig. 57) QCO o angulo u, teremos, em virtude da equação (1) e do triangulo QCP,

$$r = a - \frac{ex}{a} = a - ex = a(1 - e\cos u).$$

Egualando os dous ultimos valores de r, tira-se $\cos u = \frac{e+\cos(v-\varpi)}{1+e\cos(v-\varpi)}$,

e por conseguinte
$$\frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1-e}{1+e} \cdot \frac{1-\cos(v-\varpi)}{1+\cos(v-\varpi)},$$

ou
$$\tang \tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \tang \tfrac{1}{2}(v-\varpi),$$

que estabelece a relação entre os angulos $v - \varpi$ e u.

acharemos

$$z'^2 - z^2 = 2a(z'+z) = 4cx,\ z = \frac{cx}{a} - a,\ z' = \frac{cx}{a} + a \ldots (1),$$

que, substituindo em $z^2 = y^2 + (x-c)^2$, e fazendo $c^2 = a^2 + b^2$, dão

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Esta equação dá $\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2};$

logo:

1.° A hyperbole é symetrica relativamente aos eixos FF′ e Cy.

2.° Quanto mais cresce x, positiva ou negativamente, desde $x = \pm a$, mais y augmenta; e quanto mais cresce y, desde $y = 0$, mais x augmenta.

3.° Como $x = \pm a$ dá y nullo, e $x < \pm a$ dá y imaginario, a curva corta o eixo dos x nos vertices A e O, e não existe entre elles.

Por tanto a hyperbole tem dous ramos oppostos por suas convexidades, abertos, e que se extendem indefinidamente, um á direita e outro á esquerda da origem, desde os pontos O e A.

O ponto C é o *centro* da hyperbole; F, F′, os *fócos;* e AO $= 2a$ o *primeiro eixo. O segundo eixo* 2b *é o dobro da ordenada central* $y = b\sqrt{-1}$, *que corresponde a* $x = 0$, *depois de tornada real:* mas esta linha não é, como era na ellipse, uma das dimensões da curva.

60. As ordenadas y, y', (fig. 50), que correspondem ás abscissas x, x', dão como no n.° 53,

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2} = \frac{(x+a)(x-a)}{(x'+a)(x'-a)} = \frac{\text{OP . AP}}{\text{OP}' . \text{AP}'};$$

logo tambem *nesta curva são os quadrados das ordenadas proporcionaes aos productos das distancias dos pés d'ellas aos dous vertices.*

Quando $a = b$, é $y^2 = x^2 - a^2$, e a hyperbole chama-se *equilatera.*

Mudando x em y, e y em x, isto é, contando os x sobre CD, e os y sobre CP, a equação da hyperbola referida ao centro e ao segundo eixo é

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2,$$

cuja fórma é a mesma que a (2) da referida ao primeiro eixo, menos em quanto ao signal do segundo membro. V. fig. 74.

61. O *parametro*, ou dobro da ordenada que passa pelo fóco, é, como na ellipse, $p = \frac{2b^2}{a}$.

Mudando x em $x + a$, transporta-se a origem ao vertice A, e a equação (2) transforma-se em

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2), \quad \text{ou } y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + x^2) \ldots\ldots (2).$$

Similhantemente, mudando x em $x - a$, transporta-se a origem ao vertice O, e a equação (2) transforma-se em

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax), \quad \text{ou } y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - 2ax).$$

62. A ellipse ABOD (fig. 50), descripta com os eixos $2a$ e $2b$ da hyperbole, fica entre os dous vertices; alonga-se no sentido dos x, ou dos y, conforme é $a >$ ou $< b$; e torna-se em um circulo, quando a hyperbole é equilatera. Esta ellipse e a hyperbole tem propriedades analogas, que podem vêr-se na *Géométrie de Position* de Carnot (pag. 143).

63. Da definição da hyperbole resulta um meio de descrever por pontos esta curva.

Traçados os eixos FF′ e Cy (fig. 49), e marcados os fócos F e F′, descreva-se do centro F′, com qualquer raio k que não seja < F′A, um arco de circulo; e do centro F, com o raio k — AO, outro arco: as intersecções M d'estes arcos pertencerão á curva, por ser F′M — FM = AO = $2a$. E similhantemente, descrevendo dous arcos, um do centro F′ com o raio k — AO, outro do centro F com o raio k, as intersecções d'elles pertencerão á curva. Por conseguinte teremos tantas vezes quatro pontos da curva, quantos forem os valores differentes que dermos a k.

As equações (1) mostram, que *os raios vectores da hyperbole são racionaes e lineares em relação á abscissa.*

64. Fazendo AFM $= \theta$, $c = ae$, e reproduzindo os calculos do n.º 58,

teremos a equação polar da hyperbole referida ao fóco F (fig. 49),

$$z = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\theta}.$$

65. Comparando as equações da ellipse e da hyperbole referidas aos dous eixos, vê-se que uma d'ellas se transforma na outra pela mudança de b em $b\sqrt{-1}$; e comparando as suas equações polares, vê-se que uma d'ellas se transforma na outra pela mudança de a em $-a$: artificios estes de calculo, que podem servir para converter as formulas relativas a uma d'estas curvas nas que convém á outra.

Da parabola

66. A parabola é uma curva, na qual as distancias dos seus pontos M a um fixo F (fig. 52) são respectivamente eguaes ás distancias dos mesmos pontos M a uma linha QQ', cuja posição é dada, e que se chama *directriz*.

Tomando para eixo dos x a recta DF tirada por F perpendicularmente a QQ', para origem das coordenadas o meio A de $FD = \frac{1}{2}p$, e para eixo dos y a recta AB parallela a QQ', é A visivelmente um ponto da curva. E como a definição da parabola, e o triangulo FMP, dão

$$MF = MQ = z = \tfrac{1}{4}p + x, \quad z^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{4}p)^2,$$

eliminando z, resulta a equação da parabola

$$y^2 = px \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Por onde se vê que esta curva só é symetrica relativamente ao eixo dos x.

O parametro p é uma terceira proporcional ás abscissas e ordenadas; e por que $x = \frac{1}{4}p = AF$ (fig. 52) dá $y = \pm\frac{1}{2}p$, vê-se que tambem na parabola o parametro é o dobro da ordenada que passa pelo fóco.

Da natureza d'esta curva resulta, que *a ellipse se muda em parabola, quando o eixo maior se torna infinito.*

Para dous pontos (x, y) e (x', y') da curva, temos $\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'}$;

isto é, *os quadrados das ordenadas proporcionaes ás abscissas correspondentes.*

67. Se tomarmos $AB = p$ (fig. 51), e com qualquer raio $KB = \frac{1}{2}(p + x)$ descrevermos um circulo: nos pontos C, onde este circulo cortar a perpendicular AC, será $AC^2 = px = y$; por conseguinte, tirando CM parallela a AB, a sua intersecção com PM será um ponto da curva. Fazendo variar o raio KB, acharemos tantos pontos da curva quantos quizermos.

A equação $z = \frac{1}{4}p + x$,

que resulta immediatamente da definição da parabola, mostra que *os raios vectores são racionaes e lineares em relação ás abscissas correspondentes;* e dá outro meio de descrever esta curva.

Com effeito, tomemos (fig. 52) $AD = AF = \frac{1}{4}p$; e do ponto F como centro, e com o raio $DP = \frac{1}{4}p + x$, descrevamos um circulo: os pontos M, onde este circulo encontrar a perpendicular PM, pertencerão á curva, por ser $MF = \frac{1}{4}p + x = z$.

68. Para transportar a origem ao fóco, e introduzir o angulo vector

$AFM = \theta$, façamos $x = \frac{1}{4}p + x'$, $x' = -z\cos\theta$:

a equação $z = \frac{1}{4}p + x$ transformar-se-ha na polar

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Comparando esta equação (2) com a (5) do n.º 58, vê-se que da equação polar da ellipse se deduz a da parabola fazendo naquella $e = 1$, $a = \infty$.

Das secções do cone

69. Quando qualquer plano OA (fig. 53) corta um cone recto da base circular IDB, a curva de intersecção AMO chama-se *secção conica:* e logo se verá que esta curva é alguma d'aquellas, de que ultimamente tractámos com a mesma denominação.

Fazendo passar pelo eixo BK um plano DBI que seja perpendicular ao plano secante (e que será perpendicular á base Geom. n.º 119), a intersecção d'estes planos será a recta AO, que se chama *eixo da secção conica,* e que é a projecção do eixo do cone sobre o plano secante. E tirando por um ponto P do eixo da secção conica um plano parallelo á base DI, as intersecções d'este plano com o plano DBI, com o cone, e com o plano secante, serão respectivamente a recta FG, o circulo FMG, e a recta PM, a qual, por ser perpendicular a FG e a AO, será uma ordenada commum das duas curvas.

Posto isto, sejam $AP = x$, $PM = y$: e procuremos uma relação entre estas coordenadas e os dados do problema, que são os angulos $DBI = \beta$ e $BAO = \alpha$, e a recta $AB = c$.

Os triangulos ABO, AFP, POG, BHF, dão

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{AO}{c},\ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}F} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{FP}{x},\ \frac{\operatorname{sen}O}{\operatorname{sen}G} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{PG}{AO - x}:$$

logo

$$AO = \frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)},\ FP = \frac{x\operatorname{sen}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta},\ PG = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta}.\left(\frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta} - x\right);$$

e, em virtude d'estes valores, a propriedade fundamental do circulo FMG, $y^2 = FP \,.\, PG$, dá a equação da curva

$$y^2 = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\left[cx\operatorname{sen}\beta - x^2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]\ldots\ldots\ldots\ldots(A).$$

70. Para deduzir da equação (A) as equações de todas as secções conicas, basta dar differentes valores a α e c, isto é, dar ao plano secante differentes inclinações sobre o eixo, e collocal-o a differentes distancias do vertice do cone. Então:

1.° Quando $\alpha+\beta=180°$, o plano secante é parallelo á generatriz BI (fig. 54); a curva prolonga-se ao infinito; e a equação (A) torna-se na da parabola (*)

$$y^2=\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\,cx=4c\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\beta\,.\,x=px\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mathrm{B}).$$

2.° Quando $\alpha+\beta<180°$, o plano secante encontra todas as generatrizes da mesma parte do vertice; a curva é fechada; e a equação conserva a forma (A).

3.° Quando $\alpha+\beta>180°$, o plano secante encontra os dous ramos do cone d'uma e d'outra parte do vertice; a curva tem dous ramos NAN' e LO'Q (fig. 53), que se prolongam ao infinito, e cujas curvaturas são oppostas; e, chamando sen $(\alpha+\beta)$ o valor absoluto do seno do arco $(\alpha+\beta)$, a equação (A) torna-se em

$$y^2=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\left[cx\operatorname{sen}\beta+x^2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mathrm{C}).$$

Nos dous ultimos casos, se chamarmos $2a$ a distancia AO, ou AO', dos dous vertices da curva, e k a expressão $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}$, teremos

$$2a=\frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)},\;k=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mathrm{D}),$$

(*) Podem tambem repetir-se na figura 54 os raciocinios precedentes.

Para $\alpha+\beta=180°$ o valor de FP torna-se em $\quad \mathrm{FP}=\dfrac{x\operatorname{sen}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}$;

AL parallela a FG fecha o triangulo ABL, no qual é

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\mathrm{BAL}}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}=\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{BL}}=\frac{\mathrm{PG}}{c};$$

e os valores de FP e PG substituidos em $y^2=\mathrm{FP}\,.\,\mathrm{PG}$ dão a equação (B).

que transformam as equações (A) e (C) nas da *ellipse* e da *hyperbole* referidas ao vertice (n.os 57 e 61),

$$y^2 = k(2ax \mp x^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A').$$

Fazendo $x = a$ na equação (A), e chamando b a ordenada central correspondente; e fazendo $x = -a$ na equação (C), e chamando $b\sqrt{-1}$ a ordenada central correspondente: teremos em ambas $k = \frac{b^2}{a^2}$.

Por tanto a equação geral das secções conicas, referida ao vertice, é

$$y^2 = mx + nx^2,$$

$$\text{e pertence}\begin{cases}\text{á parabola}\\ \text{á ellipse}\\ \text{á hyperbole}\end{cases}\text{conforme é}\begin{cases}n = 0, & m = p\\ n = -\frac{b^2}{a^2}, & m = \frac{2b^2}{a}\\ n = \frac{b^2}{a^2}, & m = \frac{2b^2}{a}\end{cases}$$

71. O que fica exposto tem logar, ainda que se façam variar c e β, ou a distancia AB e as dimensões do cone: mas não se pode fazer $\beta = 0$, ou $\beta = 180°$, e c finito; por que nesse caso não existiria cone. Quando for $c = 0$, o plano secante passará pelo vertice do cone: e a intersecção será este ponto, quando for $\alpha + \beta < 180°$; será uma aresta, e o plano será tangente ao cone, quando for $\alpha + \beta = 180°$; constará de duas rectas, que passam pelo vertice do cone, quando for $\alpha + \beta > 180°$.

Os mesmos resultados se deduzem da equação (A), fazendo nella $c = 0$; por que esta hypothese a torna em:

$y^2 + kx^2 = 0$, e por conseguinte $y = 0$ e $x = 0$, quando $\alpha + \beta > 180°$

$y = 0$ quando $\alpha + \beta = 180°$

$y = \pm x\sqrt{k}$ quando $\alpha + \beta > 180°$.

Por tanto, quando c for nullo, a equação (A) pertencerá sempre a alguma das tres secções, ponto, recta, ou duas rectas, que passam pelo vertice; e quando c não for nullo, a equação pertencerá á *ellipse*, á *hyperbole*, ou á *parabola*, conforme for *negativo*, *positivo*, ou *nullo*, o coefficiente de x^2.

Estas especies formam o quadro seguinte:

$$c \text{ não egual a zero, e } \begin{cases} \alpha+\beta < 180^\circ & \text{Ellipse} \\ \alpha+\beta = 180^\circ & \text{Parabola} \\ \alpha+\beta > 180^\circ & \text{Hyperbole} \end{cases}$$

$$c \text{ egual a zero, e } \begin{cases} \alpha+\beta < 180^\circ & \text{Um ponto (vertice)} \\ \alpha+\beta = 180^\circ & \text{Uma recta (aresta de contacto)} \\ \alpha+\beta > 180^\circ & \text{[Duas rectas que se cortam (arestas de secção)].} \end{cases}$$

72. Dada a equação d'uma ellipse, d'uma hyperbole, ou d'uma parabola, referidas ao vertice; e um cone: é facil achar o logar da curva proposta sobre o cone, isto é, achar a posição que deveria ter o plano secante para que a secção fosse identica á mesma curva proposta.

Com effeito no caso da ellipse, ou da hyperbole (fig. 53), conhecem-se a, k, β; e tracta-se de achar c, e o angulo α. Para isso a segunda das equações (D), ou

$$2k\cos^2\tfrac{1}{2}\beta = 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\cos\beta + 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$= (1-\cos 2\alpha)\cos\beta + \mathrm{sen}\,2\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,$$

que tem a fórma $\qquad b = n\,\mathrm{sen}\,2\alpha + l\cos 2\alpha,$

dá α pelo systema das equações

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{l}{n},\ \mathrm{sen}\,(\varphi + 2\alpha) = \frac{b\cos\varphi}{n};$$

e depois a primeira das mesmas equações (D) dá c.

No caso de ser a equação dada a da parabola (fig. 54), $y^2 = px$, teremos (eq. B) $p = 4c \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\beta$, que faz conhecer c; e é $\alpha = 180° - \beta$ (*).

(*) Se o cone não fosse recto, e tirassemos o plano IBD (fig. 53) de modo que passasse pelo eixo e pela perpendicular KI, abaixada do centro K da base sobre a intersecção RV do plano d'ella com o secante; conservando o resto da construcção: as ordenadas MP seriam perpendiculares a GF, por serem respectivamente parallelas estas linhas a RV e IK, como intersecções dos planos parallelos IND e GMF com AMO e com BID; mas não seriam necessariamente perpendiculares a AO. Chamando γ o angulo BDI, que não é agora $90° - \frac{1}{2}\beta$; e repetindo o que se disse no n.º 59, só com a modificação de serem $F = \gamma$, $G = \beta + \gamma$; acharemos

$$AO = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}, \quad FP = \frac{x \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}, \quad PG = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)} \cdot \left(\frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} - x\right);$$

e

$$y^2 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\beta + \gamma)} [cx \operatorname{sen} \beta - x^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)],$$

que adiante veremos ser a equação d'uma secção conica, ainda que as coordenadas sejam obliquas; e que se reduz a (A) no caso de ser $\gamma = 90° - \frac{1}{2}\beta$, ou de ser recto o cone.

1.º Se a secção é parallela á base, ou $\alpha = \gamma$, a equação torna-se na d'um circulo

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

2.º Se $\alpha = I = 180° - (\beta + \gamma)$, a equação toma tambem a fórma

$$y^2 = 2ax - x^2;$$

mas só pertence ao circulo no caso de serem as ordenadas PM perpendiculares a AO, isto é, no caso de ser tambem RV perpendicular a AO ou perpendicular ao plano ABI. E neste caso a secção circular chama-se *anti-parallela*.

3.º Se o cone se torna num cylindro, é $\beta = 0$; mas como tambem é $c = \infty$, demos á equação a fórma

$$y^2 = k(2ax - x^2), \text{ sendo } k = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\beta + \gamma)},$$

como no n.º 70. Esta equação tornar-se-ha em $y^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \gamma}(2ax - x^2)$,

que já vimos ser a d'uma ellipse, no caso de serem rectangulares as coordenadas x e y; e que tambem o é, como adiante veremos, no caso de serem as coordenadas obliquas.

Methodo das tangentes

73. Por dous pontos M e Q d'uma curva BMQ (fig. 55) tiremos a secante SMQ. Se, conservando M fixo, fizermos variar successivamente a posição de Q, a secante mudará successivamente de inclinação a respeito d'uma linha dada; e tornar-se-ha na tangente MT, quando o ponto Q coincidir com M. A tangente pode assim definir-se: *uma secante, cujos pontos de intersecção com a curva coincidem um com o outro.*

Como $$y-y'=\mathrm{A}\,(x-x') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

é a equação de todas as rectas que passam pelo ponto M (x', y'), basta, para determinar a tangente MT, assignar a $\mathrm{A}=\mathrm{tang}\ \mathrm{T}$ o valor correspondente á inclinação d'esta recta sobre o eixo dos x. É o que vamos fazer.

Chamando $h=\mathrm{MR}$ e $k=\mathrm{QR}$ as differenças das abscissas e das ordenadas dos pontos M e Q, serão $x'+h$ e $y'+k$ as coordenadas de Q; e será $\frac{k}{h}=\mathrm{tang}\ \mathrm{S}$ a tangente do angulo QMR, a qual se pode achar substituindo $x'+h$ e $y'+k$ em logar de x' e y' na equação da curva, e tirando da transformada o valor de $\frac{k}{h}$. Mas este valor de $\mathrm{tang}\ \mathrm{S}=\frac{k}{h}$, tirado da equação da curva, ha de ter a fórma $\mathrm{tang}\,\mathrm{S}=p+\beta$; designando p os termos independentes das quantidades h e k, e β os termos compostos d'estas quantidades, os quaes decrescerão indefinidamente á medida que ellas forem mais pequenas: e por outra parte é claro que tang S se aproxima indefinidamente de tang T, á medida que o ponto Q se aproxima de M; de sorte que, se fizermos $\mathrm{tang}\ \mathrm{S}=\mathrm{A}+\alpha$, poderá α ser tão pequena quanto se quizer. D'onde resulta (*Alg. el.* n.º 120), que a equação

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{S}=\mathrm{A}+\alpha=p+\beta$$

se decomporá em duas, uma das quaes $\mathrm{A}=p$ determinará A; sendo assim A o limite de $p+\beta$, isto é, o valor em que se torna $p+\beta$ quando β é nullo. Por tanto:

A é o valor da razão $\frac{k}{h}$, quando nella se suppõem nullos h *e* k. *E para achar este valor, basta: substituir* x'+ h *e* y'+ k *na equação da curva; tirar da transformada a expressão de $\frac{k}{h}$; e fazer* h = 0 e k = 0 *nesta expressão.*

74. A recta definida MN, perpendicular á tangente no ponto de contacto, chama-se *normal*. As condições de ser perpendicular á tangente, cuja equação é (1), e de passar pelo ponto M, dão (n.° 31) a equação da normal

$$y-y'=-\frac{1}{A}(x-x') \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Tambem se chamam *tangente*, e *normal*, as partes MT, e MN, das linhas indefinidas, que têm os mesmos nomes, interceptas entre o ponto de contacto e o eixo dos x. E chamam-se *sub-tangente*, e *sub-normal*, as partes TP, e PN, interceptas no eixo dos x entre a tangente e a ordenada, e entre a normal e a ordenada.

Fazendo $y=0$ nas equações (1) e (2), resultam os valores correspondentes de x

$$AT=x'-\frac{y'}{A},\ AN=x'+Ay',$$

logo:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{subtangente} & TP=\dfrac{y'}{A}\\ \text{subnormal} & PN=Ay'\\ \text{tangente} & MT=y'\sqrt{1+\dfrac{1}{A^2}}\\ \text{normal} & MN=y'\sqrt{1+A^2}\end{array}\right\}\dots\dots\dots (3).$$

Applicações

75. *Parabola.* Mudando x' em $x'+h$, e y' em $y'+k$, na equação $y^2=2px$ d'esta curva; tirando o valor de $\frac{k}{h}$; e fazendo nelle $h=0$, e $k=0$: teremos

primeiro $$y'^2=2px',\ (y'+k)^2=2p(x'+h);$$

depois $$2ky'+k^2=2ph,\ \frac{k}{h}=\text{tang}\,S=\frac{2p}{2y'+k};$$

e finalmente $$A=\text{tang}\,T=\frac{p}{y'}.$$

E as equações (1), (2), (3), darão:

$$\text{equações}\left\{\begin{array}{ll}\text{da tangente indefinida} & yy'=p(x+x'),\\ \text{da normal indefinida} & (y-y')p+(x-x')y'=0,\end{array}\right.$$

$$\text{valores}\left\{\begin{array}{ll}\text{da subtangente} & TP=2x',\\ \text{da subnormal} & PN=p,\\ \text{da tangente} & MT=\sqrt{2x'(2x'+p)},\\ \text{da normal} & MN=\sqrt{p(2x'+p)}.\end{array}\right.$$

Por tanto: *na parabola a subtangente é o dobro da abscissa; e a subnormal é egual ao semiparametro, ou ao dobro da distancia do vertice ao foco.* Assim o vertice A fica sempre entre os pés T e P da tangente e da ordenada, e equidistante d'elles.

76. Procuremos o angulo TMF$=$V, que o raio vector faz com a tan-

gente. Como este raio passa por M (x', y') e F$(\frac{1}{2}p, 0)$, a tangente do angulo que elle faz com o eixo dos x (n.° 30) é $A' = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p}$: e para determinar V, temos (n.° 31) as equações

$$A = \frac{p}{y'},\ A' = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p},\ \text{tang}\,V = \frac{A' - A}{1 + AA'};$$

as quaes, attendendo a $y'^2 = 2px'$, e supprimindo o factor commum $x' + \frac{1}{2}p$, dão

$$\text{tang}\,V = \frac{y'^2 + \frac{1}{2}p^2 - px'}{\frac{1}{2}py' + x'y'} = \frac{p}{y'},\ \text{ou tang}\,V = A = \text{tang}\,T.$$

Por conseguinte o triangulo TMF é isosceles, e FM = FT; o que indica um novo modo de tirar a tangente MT.

Resulta tambem d'esta propriedade:

1.° Que, *se os raios luminosos ou sonoros* SM, *parallelos ao eixo d'uma parabola reflectora, a encontrassem em quaesquer pontos* M, *dirigir-se-iam depois ao foco, onde iriam reunir-se.*

2.° Que a tangente MT divide o angulo QMF em duas partes eguaes, e cahe perpendicularmente no meio de FQ.

77. Para seguir a tangente nas differentes posições, que ella vai tomando ao passo que se faz variar o ponto de contacto M (x', y'), examinemos os valores correspondentes da inclinação T, e da ordenada inicial Ai, dados pelas equações

$$\text{tang}\,T = \frac{p}{y'},\ Ai = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2}y'.$$

E facilmente veremos que:

1.° No vertice A, onde x' e y' são nullos, é tang T $= \infty$, e A$i = 0$; de sorte que a tangente se confunde com o eixo dos y.

2.° Á medida que o ponto M se afasta de A, x' e y' crescem; por conseguinte cresce Ai, e diminue o angulo T.

Como tang T pode passar por todos os valores, desde 0 até ∞, segue-se que ha sempre uma tangente parallela a qualquer recta dada: mas quanto menor se torna o angulo T, mais se afastam do vertice A o ponto de contacto M e o pé T, até que para a tangente parallela ao eixo ficam M e T a distancias infinitas de A. O ponto M, correspondente a uma inclinação dada T da tangente, é determinado pelas coordenadas

$$y' = \frac{p}{\operatorname{tang} T}, \quad x' = \frac{p}{2 \operatorname{tang}^2 T}.$$

Por exemplo $T = 45°$ dá $y' = p$, $x' = \frac{p}{2}$; e por isso na parabola o ponto, cuja tangente faz com o eixo um angulo de 45°, é aquelle cuja ordenada passa pelo foco.

78. Quando não é dado o ponto de contacto M (x', y'), mas tão sómente certas condições, a que deve satisfazer a tangente, a equação $yy' = p(x + x')$ pode servir para determinar esta recta. Por exemplo, se a tangente deve passar por um ponto I (α, β), a equação $\beta y' = p(\alpha + x')$, combinada com $y'^2 = 2px'$, dará dous valores de x' e y', e por conseguinte dous pontos de contacto, e duas tangentes.

Como as coordenadas dos dous pontos de contacto satisfazem á equação $\beta y = p(\alpha + x)$, esta equação é a da corda que os une. E como $y = 0$ dá a abscissa da intersecção d'aquella corda com o eixo, $x = -\alpha$, independente de β, segue-se que esta intersecção é commum a todas as cordas para as quaes a abscissa de I é a mesma. Assim, quando o ponto I descreve uma parallela aos y, variam as duas tangentes, os dous pontos de contacto, e a corda que os une; mas a intersecção d'esta com o eixo fica sempre a mesma: de sorte que a corda gira em torno da intersecção, a qual fica á direita ou á esquerda do vertice A, segundo I está á esquerda ou á direita do mesmo vertice.

Como a tangente procurada IM deve ser perpendicular ao meio de QF, as distancias de I aos pontos Q e F, devem ser eguaes: logo, se do centro I, com o raio IF, se descrever um circulo, a circumferencia d'elle cortará a directriz no ponto Q; e tirando por Q a recta QM parallela aos x, a intersecção M d'esta recta com a curva determinará o ponto de contacto M, e a tangente IM. E por que o problema sempre é possivel, e ha duas intersecções, e duas tangentes que passam por I, com tanto que I seja exterior á curva, segue-se que neste caso existe necessariamente o ponto Q, e ha duas soluções.

79. *Ellipse*. Mudando respectivamente x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$, na equação da ellipse, e procedendo como no n.º 75, temos

primeiro $\quad a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,\ a^2(y'+k)^2+b^2(x'+h)^2=a^2b^2;$

depois $\quad ka^2(2y'+k)+hb^2(2x'+h)=0,\ \dfrac{k}{h}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{2x'+h}{2y'+k};$

e finalmente $\quad \operatorname{tang} T = A = -\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x'}{y'}.$

E as equações (1), (2), (3) darão:

equações
- da tangente indefinida $\quad a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$
- da normal indefinida $\quad y-y'=\dfrac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$

valores
- da subtangente $\quad TP=\dfrac{a^2-x'^2}{x'}$
- da subnormal $\quad PN=\dfrac{b^2x'}{a^2}$
- da tangente MT $\quad MT=y'\sqrt{1+\dfrac{a^4y'^2}{b^4x'^2}}$
- da normal $\quad MP=y'\sqrt{1+\dfrac{b^4x'^2}{a^4y'^2}}$

Logo:

1.º O valor de A fica o mesmo, quando x' e y' mudam ambos de signal; e por isso as tangentes em M e M' (fig. 57) são parallelas.

2.º Fazendo $y=0$ na equação da tangente, resulta

$$CT=x=\frac{a^2}{x'};$$

e, por ser $a>x'$, é $CT>a$.

Como CT é independente de b, segue-se que, em todas as ellipses descriptas sobre o mesmo eixo AO, as tangentes nos pontos M, Q,.... que têm a abscissa commum $CP = x$, encontram o eixo no mesmo ponto T. D'onde resulta um meio facil de tirar tangentes á ellipse, quando se sabem tirar tangentes ao circulo.

3.° Fazendo $y = 0$ na equação da normal, resulta

$$CN = x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x';$$

e por isso M e N ficam do mesmo lado relativamente a Cy (fig. 56).

80. Se pelos pontos $O(+a, 0)$ e $A(-a, 0)$ tirarmos quaesquer rectas ON e AN (fig. 57), as suas equações terão a fórma

$$y = \alpha(x - a), \ y = \alpha'(x + a);$$

e as cordenadas da sua intersecção serão

$$x = a \cdot \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha - \alpha'}, \ y = \frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

Se o ponto N está sobre a ellipse, as cordas AN e ON chamam-se *supplementares*. Para isso é necessario que os valores precedentes de x e y satisfaçam á equação $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; o que dá

$$a^2\alpha^2\alpha'^2 + b^2\alpha\alpha' = 0, \text{ ou } \alpha\alpha'(a^2\alpha\alpha' + b^2) = 0.$$

Por tanto as cordas são supplementares, ou quando é nulla uma das quantidades α, α', (o que é evidente), ou quando é $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$.

O signal — mostra que α e α' têm signaes contrarios, isto é, que, se NAO é agudo, NOx deve ser obtuso. Na verdade, descrevendo sobre o eixo maior um circulo, vê-se que, por ser recto o angulo AN'O, é obtuso ANO, e com mais razão NOx.

Uma construcção similhante feita sobre o eixo menor mostra, que as cordas supplementares tiradas pelas extremidades d'elle fazem um angulo agudo.

Seja θ o angulo N das cordas supplementares. Attendendo á equação

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ é } \qquad \tang \theta = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{a^2\alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)}.$$

1.° Se $a = b$, é $\theta = \infty$; e por isso as cordas supplementares do circulo cortam-se perpendicularmente, como é sabido.

2.° Se $a > b$, α e tang θ têm o mesmo signal; e os angulos NOx e ANO são ambos obtusos.

3.° Se $a < b$, α e tang θ têm signaes contrarios; e o angulo ANO é agudo.

4.° Se a e b crescem proporcionalmente, o angulo θ não varia. Logo: *se nas ellipses similhantes, isto é, nas ellipses cujos eixos são proporcionaes, duas cordas forem parallelas entre si, as supplementares tambem o serão.*

Se θ é dado, da equação $\qquad a^2\alpha^2 - (a^2 - b^2)\,\alpha \tang \theta + b^2 = 0,$

tira-se $\qquad \alpha = \dfrac{(a^2 - b^2)\tang \theta \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 \tang^2 \theta - 4a^2b^2}}{2a^2}$:

por conseguinte ha dous systemas de cordas supplementares, que fazem um angulo dado; e os dous valores de α têm o mesmo signal.

Para construir estas cordas, basta descrever sobre AO um segmento de circulo em que possa existir o angulo dado (Geom. n.° 59, IV), e pelas intersecções d'este segmento com a ellipse tirar cordas para O e A.

Os dous valores de α são eguaes, quando $(a^2 - b^2)^2 \tang^2 \theta = 4a^2b^2$;

donde resultam $\qquad \tang \theta = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}, \quad \alpha = \dfrac{b}{a},$

que pertencem á extremidade do eixo menor. E como esta solução, que separa as raizes reaes das imaginarias (*Alg. el.* n.° **147, 2.°**), corresponde ao maior dos valores de θ que dão α real, vê-se que: *as cordas supplementares, que concorrem na extremidade do eixo menor, se cortam fazendo o maior angulo obtuso.*

Seguindo os valores de tang θ desde $\alpha = \infty$ até $\alpha = \frac{b}{a}$, e desde $\alpha = \frac{b}{a}$ até $\alpha = 0$, vê-se: que o angulo N é recto, quando AN cabe sobre AO; que depois se torna obtuso quando AN gira em torno de A, e vai crescendo até que as cordas se cortem em B; e finalmente que, alem de B, torna a diminuir, e passa pelos mesmos valores, em ordem inversa, que tinha desde O até B.

81. Seja $y = A'x$ a equação de qualquer recta CM, que passa pelo centro C (fig. 57). Se a recta passar tambem por M (x', y'),

teremos
$$y' = A'x',\ A' = \frac{y'}{x'};$$

e como, para a tangente em M, é
$$A = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'},$$

resulta
$$AA' = -\frac{b^2}{a^2} = \alpha\alpha'.$$

Por onde se vê, que $A' = \alpha'$ dá $A = \alpha$, isto é, que, se tirarmos a recta CM pelo centro e pelo ponto de contacto M, e a corda AN parallela a esta recta, a corda supplementar NO será parallela á tangente MT. O que dá um novo meio, e simples, de tirar uma tangente á ellipse.

82. Façamos variar o ponto de contacto M (x', y'), e sigamos a tangente nas suas differentes posições.

1.° Em O $(a, 0)$ é $x = a$ a equação da tangente, ou esta recta parallela ao eixo dos y.

2.° Á medida que o ponto M se afasta de O, até B, x' diminue e y' cresce: logo o valor absoluto de $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$ diminue desde ∞ até 0, e $CT = \frac{a^2}{x'}$ cresce. O ponto T vai-se pois afastando desde O até o infinito, em quanto o angulo MTC vai diminuindo desde 90° até 0.

3.° Em B $(0, b)$ a equação da tangente é $y=b$, e esta recta é parallela ao eixo dos x.

4.° Desde B até A cresce o valor negativo de x' e diminue y': logo A cresce desde 0 até ∞, e a inclinação da tangente cresce desde 0 até 90°.

Por tanto não ha inclinação alguma que não possam tomar as tangentes da ellipse. Estes resultados verificam-se respectivamente nos outros dous quadrantes da curva.

Se quizermos o ponto de contacto da ellipse com uma tangente cuja inclinação é dada, será conhecido A, e eliminaremos x' e y' por meio das equações

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,\ \mathrm{A}a^2y'+b^2x'=0.$$

Muitos outros problemas se podem resolver a respeito das tangentes, tractando-os por uma analyse similhante.

Tirada por um ponto M (fig. 56) a tangente á ellipse, produzamol-a até encontrar em H e K as tangentes aos dous vertices O e A; e procuremos os segmentos OH e AK. Para isto basta fazer $x=\pm a$ na equação $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$ da tangente; e tirar os valores correspondentes de y, que serão os segmentos pedidos. Acharemos assim

$$\mathrm{OH}=b^2.\frac{a-x'}{ay'},\ \mathrm{AK}=b^2.\frac{(a+x')}{ay'}.$$

Como o producto d'estes dous valores é b^2: segue-se, que o rectangulo, formado com os dous segmentos que a tangente a qualquer ponto da ellipse separa das tangentes ás extremidades do eixo maior, é constantemente egual ao quadrado do eixo menor. Adiante veremos que este theorema é extensivo a duas quaesquer tangentes parallelas AK e OH; com tanto que, em logar do quadrado do eixo menor b, se tome o do semi-diametro Cy parallelo áquellas tangentes.

83. Sejam FMT $=$V e F'MT $=$V' as inclinações dos raios vectores sobre a tangente (fig. 56); e CF $=c$ a excentricidade.

A equação $y=\mathrm{A}'(x-c)$,

das rectas que passam por $(c, 0)$, dá $A' = \frac{y'}{x'-c}$, para a inclinação do raio vector que passa por M; e como a inclinação da tangente dá $A = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$, resulta, attendendo a $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\operatorname{tang} V = \frac{A - A'}{1 + AA'} = \frac{b^2}{cy'}.$$

Se mudarmos c em $-c$, teremos para tang V' um valor egual, e de signal contrario, a tang V: por conseguinte os angulos V e V' são supplementos um do outro, e é

$$F'MI = 180^\circ - F'MT = FMT.$$

Por onde se vê que: *os rais vectores da ellipse, tirados para o ponto de contacto, são egualmente inclinados sobre a tangente, e sobre a normal.* Assim os raios luminosos ou sonoros F'M, que partindo do fóco F' encontrassem uma ellipse reflectora, dirigir-se-iam por MF para o outro fóco F.

Prolongando F'M, vê-se que a tangente MT, e a normal MN, dividem respectivamente em duas partes eguaes os angulos FMG e F'MF. Esta propriedade pode servir para tirar em qualquer ponto M da ellipse uma tangente, ou uma normal: para o que se formará um triangulo isosceles, cujo angulo no vertice seja respectivamente FMG ou F'MF, e se abaixará de M uma perpendicular sobre a base desse triangulo.

84. Para tirar uma tangente por um ponto exterior I é necessario determinar o ponto de contacto M. Ora, por que deve ser I equidistante de F e G, estará G no circulo descripto do centro I com o raio IF; e por que deve ser F'G = F'M + MF = AO, estará G no circulo descripto de F' com o raio AO: logo a intersecção dos dous circulos determinará G, e conseguintemente o ponto de contacto M onde a recta F'G encontra a ellipse. E como o problema sempre é possivel, quando o ponto I é exterior á ellipse; segue-se que neste caso sempre os dous circulos

devem encontrar-se. E encontram-se com effeito (n.º 40), por que temos

$$2a + \mathrm{IF} = \mathrm{MF'} + \mathrm{MF} + \mathrm{IF} > \mathrm{FF'} + \mathrm{IF} > \mathrm{IF'},\ \mathrm{IF'} + \mathrm{IF} > 2a\,;$$

$$\mathrm{IF'} + \mathrm{MF'} = \mathrm{IF'} + 2a - \mathrm{MF} > \mathrm{IM} > \mathrm{IF} - \mathrm{FM},\ \text{ou}\ \mathrm{IF'} + 2a > \mathrm{IF}:$$

e ha duas tangentes, que correspondem aos dous pontos de secção.

Se quizessemos tractar este problema analyticamente, reflectiriamos, como no n.º 78, que, por deverem as coordenadas ε e β do ponto exterior K (fig. 98) satisfazer ás equações da tangente, e por dever o ponto M (x', y') estar na tangente e na ellipse, bastaria eliminar x' e y' entre as equações d'estas linhas,

$$a^2\beta y' + b^2\varepsilon x' = a^2b^2,\quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Como a eliminação daria uma equação do 2.º gráu em x' ou y', segue-se que pelo ponto exterior K se podem tirar duas tangentes.

E como $$a^2\beta y + b^2\varepsilon x = a^2b^2,$$

é a equação da recta MN, que une os dous pontos de contacto, por lhe satisfazerem as coordenadas d'estes pontos: vê-se que a construcção d'aquella recta deve dar os pontos de contacto, e as tangentes (*).

De que $y = 0$ dá $x = \dfrac{a^2}{\varepsilon}$ independente de b e β, segue-se que CE é constante, quaesquer que sejam o eixo menor $2b$ e a ordenada do ponto K, com tanto que a abscissa d'este ponto e o eixo maior $2a$ fiquem os mesmos. Logo, se o ponto K se mover sobre BB' parallelamente aos y, as tangentes e as cordas variarão, mas o ponto E ficará o mesmo: e como ainda não mudará quando variar o eixo menor, será o mesmo

(*) A fig. (98) não suppõe as coordenadas rectangulares.

para a ellipse que para o circulo descripto sobre o diametro $2a$. Este ponto E, correspondente á abscissa $\frac{a^2}{\varepsilon}$, estará dentro ou fóra da ellipse, segundo for $a <$ ou $> \varepsilon$, isto é, segundo for exterior á curva a recta BB', ou a cortar.

85. *Hyperbole.* Para evitar o trabalho de reproduzir todos os calculos que se fizeram relativamente á ellipse, bastará que nos resultados obtidos para esta curva mudemos b em $b\sqrt{-1}$ (n.º 65): o que dará

$$\operatorname{tang} T = A = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} :$$

e depois

$$\text{equações} \begin{cases} \text{da tang} & a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2 \\ \text{da norm.} & y - y' = -\dfrac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \end{cases}$$

$$\text{valores} \begin{cases} \text{da subt.} & PT = \dfrac{x'^2 - a^2}{x'} \\ \text{da subn.} & PN = \dfrac{b^2x'}{a^2} \\ \text{da tang.} & MT = y'\sqrt{1 + \dfrac{a^4}{b^4} \cdot \dfrac{y'^2}{x'^2}} \\ \text{da norm.} & MN = y'\sqrt{1 + \dfrac{b^4}{a^4} \cdot \dfrac{x'^2}{y'^2}}. \end{cases}$$

Logo:

1.º A tangente no ponto M (x', y') (fig. 49) é parallela á tangente no ponto M' $(-x', -y')$.

2.º Fazendo $y = 0$ na equação da tangente, acha-se $CT = \frac{a^2}{x'}$. E como o signal de CT é o mesmo que o de x'; e é CT $< a$, por ser $x' > a$: segue-se que os pontos M e T ficam do mesmo lado eixo do Cy, e que T fica entre o centro C e o vertice A.

3.° Para duas cordas supplementares AN e ON (fig. 58), cujas equações são
$$y = \alpha(x - a),\ y = \alpha'(x + a),$$
é
$$\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2};$$

logo os dous angulos, que estas cordas fazem com o eixo, são ambos agudos, ou ambos obtusos. E por que, chamando N(x', y') o ponto da curva commum ás duas cordas, o valor de α tirado da equação de AN

é
$$\alpha = \frac{y'}{x' - a};$$

e a abscissa x' é ou negativa, ou positiva e $> a$: vê-se que, para o ramo superior que fica á direita de Cy, e para o inferior que fica á esquerda, os angulos feitos pelas cordas supplementares com o eixo dos x são agudos; e para o ramo superior que fica á esquerda de Cy, e para o inferior que fica á direita, aquelles angulos são obtusos.

Chamando A$'$ a tangente do angulo que o raio CM faz com o eixo dos x, é
$$AA' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Por onde se vê, que é applicavel á hyperbole o processo indicado no n.° 81 para tirar tangentes á ellipse. Tira-se para o ponto de contacto M o raio CM; depois a corda ON parallela a CM, e a sua supplementar AN; e finalmente a recta MT parallela a esta corda supplementar.

Para o angulo θ das duas cordas supplementares, é
$$\tang\theta = \frac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2 + b^2)},$$

sendo α a maior das tangentes trigonometricas α e α'; e como é $\alpha > \frac{b}{a}$, ou $a\alpha > b$, segue-se que tang θ é positivo, e o angulo θ agudo (*).

Se os eixos a e b variarem proporcionalmente, θ ficará constante.

Para ter α, quando se conhece θ, é necessario resolver a equação do 2.° grau

$$a^2\alpha^2 - \alpha(a^2 + b^2) \operatorname{tang}\theta = b^2,$$

cujas raizes são reaes, e de signaes contrarios; e por isso α não tem aqui limites, como tinha na ellipse. Podem construir-se as duas raizes descrevendo sobre AO um segmento de circulo, em que possa existir o angulo dado θ que devem fazer as cordas supplementares; e tirando rectas, de cada uma das intersecções do circulo com a hyperbole, para os dous vertices.

Á medida que α diminue, isto é, que AN se abate sobre Ax, tambem diminue θ, e passa por todos os valores desde 90° até 0.

(*) A symetria da curva basta para extender esta conclusão aos outros quadrantes; mas podemos fazel-o directamente, tomando sempre

$$\alpha = \frac{y}{x-a} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}.$$

Por que temos:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{1. e 2.° quadrante} & \operatorname{tang}\theta = \dfrac{a^2\alpha^2 - b^2}{\alpha(a^2+b^2)} \\ \text{e} \left\{\begin{array}{l} \text{1.° para } (+x, +y) \\ \text{2.° para } (-x, +y) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \alpha \text{ positivo; } \alpha > \dfrac{b}{a}, \text{ ou } a\alpha > b \\ \alpha \text{ negativo; } \alpha < \dfrac{b}{a}, \text{ ou } a\alpha < b \end{array} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{3.° e 4.° quadrante} & \operatorname{tang}\theta = \dfrac{b^2 - a^2\alpha^2}{\alpha(a^2+b^2)} \\ \text{e} \left\{\begin{array}{l} \text{1.° para } (-x, -y) \\ \text{2.° para } (+x, -y) \end{array}\right. & \begin{array}{l} \alpha \text{ positivo; } \alpha < \dfrac{b}{a}, \text{ ou } a\alpha < b \\ \alpha \text{ negativo; } \alpha > \dfrac{b}{a}, \text{ ou } a\alpha > b. \end{array} \end{array}\right.$$

4.° Os angulos feitos pelos dous raios vectores com a tangente têm a mesma tangente trigonometrica tang $V = \frac{b^2}{cy'}$ (*); conseguintemente, para tirar a tangente á hyperbole em um dos seus pontos M basta dividir em duas partes eguaes o angulo F'MF dos raios vectores desse ponto, isto é, tomar MG = MF, e abaixar MT perpendicular a GF.

Querendo tirar uma tangente por um ponto dado I exterior á curva, descreveremos do centro I, com o raio IF, o circulo FG; e do centro F' com o raio F'G = F'M — FM = AO, outro circulo: depois tiraremos para a intersecção G d'estes dous circulos a recta F'G, cuja intersecção com a hyperbole será o ponto de contacto M; e finalmente abaixaremos MT perpendicular a GF.

Podem tambem applicar-se convenientemente á hyperbole as outras propriedades que foram expostas no n.° 84.

86. Sigamos a tangente nas diversas posições que toma quando varia o ponto de contacto M (fig. 59). Para isso examinemos as suas intersecções T com o eixo, por meio das equações

$$A = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{\pm b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}},\ CT = \frac{a^2}{x'}.$$

1.° No vertice A $(a, 0)$ é $A = \infty$, $CT = a$; por conseguinte a tangente DD' é parallela aos y. E com effeito a equação d'ella reduz-se então a $x = a$.

2.° Á medida que o ponto M se afasta do vertice, x cresce; e A, e CT, diminuem sem chegarem a ser nullos: isto é, descresce a inclinação, sem que chegue a aniquilar-se; e o pé T approxima-se de C, sem que chegue a coincidir com elle.

(*) Com effeito temos

$$c^2 = a^2 + b^2,\ y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(x'^2 - a^2),\ A = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'}{y'},\ A' = \frac{y'}{x' - c},$$

que dão $$\text{tang } V = \frac{A' - A}{1 + AA'} = \frac{b^2}{cy'}.$$

3.° Como $x'=\infty$ dá 1 para limite do radical, os limites de A e CT são, respectivamente, $A=\pm\frac{b}{a}$ e $CT=0$; por tanto, a inclinação da tangente, e o ponto T, approximam-se indefinidamente de ang $\left(\text{tang}=\pm\frac{b}{a}\right)$, e de C, sem chegarem a tocar estes limites.

A symetria da curva torna desnecessario um exame similhante nas outras partes d'ella.

Para construir as expressões $A=\pm\frac{b}{a}$, $CT=0$, levantemos a ordenada $AD=AD'=b$; as rectas CD e CD' determinarão os angulos DCA e D'CA, cujas tangentes são $+\frac{b}{a}$ e $-\frac{b}{a}$. *Estas rectas encontram a curva no infinito, e são os limites das suas tangentes.* Assim os dous ramos da curva ficam um dentro do espaço angular QCQ', e outro dentro do seu verticalmente opposto; espaços comprehendidos pelas rectas CQ e CQ', cujas equações são $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Porque a tangente faz assim com o primeiro eixo o angulo comprehendido entre DCA e 90°, não se pode tirar uma tangente parallela a uma recta CI, que passa por C, senão quando CI está no angulo QCH. O que differe do que a este respeito acontece na ellipse, e se expoz no n.° 82.

Mas a propriedade demonstrada no fim n.° 82 dá-se tambem na hyperbole.

Das asymptotas da hyperbole

87. *Quando duas linhas de ramos infinitos são taes que uma se approxima indefinidamente da outra, sem chegar a tocal-a, a primeira d'estas linhas chama-se asymptota da outra.*

Por tanto: *se duas linhas forem taes que aos valores successivos communs d'uma das coordenadas correspondam valores da outra coordenada,* *cuja differença chegue a ser menor que qualquer quantidade assignavel, sem que aniquile, uma d'estas linhas será asymptota da outra.*

Como na equação da hyperbole

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{bx}{a}\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} - \ldots\right)$$

todos os termos, desde o segundo inclusivamente, decrescem indefinidamente á medida que x cresce; vê-se que a equação $Y = \pm \frac{b}{a} x$ pertence a duas rectas CQ, CQ' (fig. 59), para as quaes a differença $MQ = Y - y$ entre as suas ordenadas e as correspondentes da curva pode ser tão pequena quanto se quizer. Logo estas rectas, limites das tangentes, são asymptotas da hyperbole (*).

88. Procuremos as intersecções da hyperbole com uma recta.

Eliminando y entre as equações da recta e da hyperbole,

$$y = kx + l, \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

resulta $$(a^2k^2 - b^2)\,x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 + b^2) = 0.$$

(*) Com effeito é

$$y = \pm\frac{bx}{a} \pm \frac{bx}{a}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} - 1\right) = \pm\frac{bx}{a} \mp \frac{b}{ax} \cdot \frac{a^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1\right)};$$

e por conseguinte a differença $$Y - y = \pm \frac{b}{ax} \cdot \frac{a^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} + 1\right)}$$

tende indefinidamente para zero, quando x tende para o infinito.

Em geral procederemos como se segue.

Para que uma recta $$y = cx + d,$$

seja asymptota não parallela aos y, é necessario que á equação da curva se possa

Se $a^2k^2=b^2$, esta equação tornar-se-ha do 1.º grau; e teremos

$$k=\pm\frac{b}{a},\ x=-\frac{l^2+b^2}{2kl},\ y=kx+l:$$

por onde se vê, que uma recta parallela ás asymptotas corta a curva em um só ponto. A outra intersecção fica a uma distancia infinita.

Se, alem de $a^2k^2=b^2$, for $l=0$; será $x=\infty$, e ambas as inter-

---

dar a fórma $y=cx+d+V$, sendo d uma quantidade finita ou nulla, e V uma quantidade que diminue indefinidamente quando x cresce.

Ora esta equação dá $$c=\frac{y}{x}-\frac{d+V}{x},\ d=(y-cx)-V;$$

que, pela natureza das quantidades d e V, se devem reduzir a $c=\frac{y}{x}$, $d=y-cx$, quando $x=\pm\infty$. Logo: para achar as asymptotas rectilineas não parallelas aos y, devemos tirar da equação da curva o valor de $\frac{y}{x}$, e fazer nelle $x=\pm\infty$, o que dará c; e depois fazer $x=\pm\infty$ nos valores correspondentes de $y-cx$, o que dará d. Para as asymptotas não parallelas aos x, repetiremos o mesmo, mudando x em y, e y em x.

No nosso exemplo é $$\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}},$$

que, para $x=\pm\infty$, dá $$c=\pm\frac{b}{a}:$$

e depois $$y-cx=\pm\frac{bx}{a}\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}-1\right)=\mp\frac{b}{ax}\cdot\frac{a^2}{\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}+1\right)},$$

que, para $x=\pm\infty$, dá $d=0$.

Assim ha duas asymptotas, uma commum ás partes superior do ramo á direita de Cy e inferior do ramo á esquerda de Cy, e outra commum ás outras duas partes. (Vej. *Geom. Anal.* de Fourcy).

secções serão no infinito. O que deve com effeito acontecer, por que neste caso a recta é asymptota.

Se não for $a^2k^2=b^2$, a equação será do 2.º grau, e dará

$$x=-\frac{a^2kl\pm ab\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2}}{a^2k^2-b^2},\ y=-\frac{b^2l\pm abk\sqrt{l^2+b^2-a_2k_2}}{a^2k^2-b^2};$$

nos quaes se devem tomar ou ambos os signaes superiores, ou ambos os inferiores, por isso que estes signaes provém da mesma origem.

Para que a recta corte a hyperbole, é necessario que x e y sejam reaes. Consideremos separadamente os tres casos de:

$$1.^\circ\ a^2k^2=l^2+b^2,\quad 2.^\circ\ a^2k^2<l^2+b^2,\quad 3.^\circ\ a^2k^2>l^2+b^2.$$

1.º Caso. São eguaes entre si os dous valores de cada uma das coordenadas, e o 1.º membro da equação do 2.º grau é um quadrado perfeito; por conseguinte os dous pontos de secção coincidem, e a recta é tangente. D'onde resulta um meio de tirar uma tangente á hyperbole por qualquer ponto exterior I (ε, β) (fig. 49): por que, devendo I pertencer á tangente, a combinação das equações

$$\beta=k\varepsilon+l,\ a^2k^2=l^2+b^2,$$

dará k e l, e determinará assim esta recta.

2.º Caso. Cada uma das coordenadas tem dous valores: e por conseguinte ha duas intersecções da recta com a hyperbole.

Fazendo $$l^2+b^2-a^2k^2=\gamma^2,$$

teremos $$x=-a.\frac{akl\pm b\gamma}{l^2-\gamma^2}.$$

Se a recta passar pelo centro, será $l=0$; e teremos

$$k=\frac{\sqrt{b^2-\gamma^2}}{a}<\frac{b}{a},\ x=\pm\frac{ab}{\gamma},\ y=\pm\frac{kab}{\gamma}.$$

Por tanto qualquer recta MM′, que passa pelo centro C, e está no angulo das asymptotas, corta a hyperbole em dous pontos M, M′, cujas abscissas, ordenadas, e distancias ao centro, são respectivamente eguaes e de signaes contrarios.

3.° Caso. As expressões das coordenadas são imaginarias; e por isso a recta não encontra a curva.

Se $l=0$, a recta passa pelo centro: e, como é $ak>b$, esta recta está no angulo QCH (fig. 59), e é parallela a duas tangentes; em quanto que as rectas, que estão no angulo QCQ′, cortam a curva, e não são parallelas a tangente alguma (n.° 86).

89. Reportemos a curva ás asymptotas Cb', Cb (fig. 60). Tirando MP parallela a Cb, seja $CP=x'$, $PM=y'$; e façamos $2m=\sqrt{a^2+b^2}$.

Como é $$\operatorname{tang} xCb=\operatorname{tang}\omega=\frac{b}{a};$$

serão $$\cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+^2b}}=\frac{a}{2m},\ \operatorname{sen}\omega=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{2m}.$$

Por meio d'estas expressões, as formulas geraes de transformação das coordenadas [n.° 44, (2)], nas quaes é $(xx')=-\omega$, $(xy')=\omega$, tornam-se em

$$x=\frac{a}{2m}(x'+y'),\ y=\frac{b}{2m}(y'-x');$$

e transformam a equação da hyperbole referida ao centro e aos eixos,

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

na referida ás asymptotas $$x'y'=m^2.$$

Fazendo $y=0$ na expressão de y, resulta $y'=x'$, ou CD = DA; por conseguinte CBAD é um losango: e a equação da hyperbole referida ás asymptotas dá $x'=m=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}=CD$.

A quantidade m chama-se *potencia da hyperbole*. Se a hyperbole é equilatera, CBAD é um quadrado $=m^2=\frac{1}{2}a^2$.

De $x'y'=m^2$ resulta, que x' cresce, quando y' diminue; e reciprocamente: o que deve com effeito acontecer, por serem asymptotas os eixos coordenados.

Quando se conhece a potencia m^2 da hyperbole, e o angulo 2ω das asymptotas, determinam os semi-eixos da curva as equações

$$a=2m\cos\omega,\ b=2m\,\mathrm{sen}\,\omega.$$

Estes semi-eixos são as diagonaes do losango CABD; porque $\mathrm{DL}=\mathrm{CD}\,\mathrm{sen}\,\omega$, e $\mathrm{CL}=\mathrm{CD}\cos\omega$, dão $\mathrm{BD}=b$ e $\mathrm{CA}=a$.

Se multiplicarmos por sen 2ω os dous membros da equação $x'y'=m^2$, virá

$$x'y'\,\mathrm{sen}\,2\omega=2m^2\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega=\tfrac{1}{2}ab,$$

cujo 1.° membro exprime a area do parallelogrammo comprehendido pelas coordenadas x', y'. Logo: *qualquer que seja o ponto* M *da curva, o parallelogrammo* CPMQ *é constantemente metade do rectangulo dos semi-eixos.*

90. Uma transformação similhante á do n.° precedente daria a equação da tangente referida ás asymptotas: mas tambem se pode applicar directamente o calculo do n.° 73 (nota da pag. 96).

A equação é $$y-y'=\mathrm{A}(x-x'),$$

sendo $\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{sen\,STH'}}{\mathrm{sen\,TSO}}$. Mudando pois x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$ na equação da curva, teremos

$$x'y'=m^2,\ (x'+h)(y'+k)=m^2,\ \frac{k}{h}=-\frac{y'+k}{x'};$$

e fazendo $k=0$ neste valor de $\dfrac{k}{h}$, que pertence á secante, virá o que pertence á tangente, $\mathrm{A}=-\dfrac{y'}{x'}$. Portanto a equação da tangente é

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x'),\qquad \text{ou } x'y+y'x=2m^2.$$

Fazendo $y=0$ ou $x=0$ nesta equação, acharemos respectivamente os pontos T ou S, onde a tangente encontra as asymptotas; o que dá

$$\mathrm{CT}=\frac{2m^2}{y'}=2x',\ \mathrm{CS}=\frac{2m^2}{x'}=2y'.$$

Assim, tomando a abscissa CP ou a ordenada MP $=$ CQ do ponto M, e depois PT $=$ CP ou QS $=$ CQ, determinaremos a tangente TMS.

De CP $=$ PT, e CQ $=$ QS, resulta que é MT $=$ MS, e que são equivalentes os quatro triangulos TMP, CMP, CMQ, SMQ.

A area $\mathrm{CST}=\frac{1}{2}\mathrm{CT}\,.\,\mathrm{CS}\operatorname{sen}2\omega=2x'y'\operatorname{sen}2\omega=ab$ *é constante para todos os pontos da curva, e egual ao rectangulo dos semi-eixos.*

91. Seja $$y=\mathrm{K}x+\mathrm{L}$$

a equação d'uma secante qualquer bb' referida ás asymptotas. Fazendo $y=0$, ou $x=0$, resultam respectivamente as distancias á origem das intersecções d'esta recta com as asymptotas,

$$\mathrm{C}b'=-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{K}},\ \mathrm{C}b=\mathrm{L}.$$

Para ter as intersecções da secante com a hyperbole, eliminemos y entre as suas equações: virá a equação do 2.º grau $$\mathrm{K}x^2+\mathrm{L}x=m^2,$$ cujas raizes x' e x'' dão (*Alg. el.* n.º 145)

$$x'+x''=-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{K}},\ x'x''=-\frac{m^2}{\mathrm{K}}.$$

Logo:

1.º $\mathrm{C}a'=a\mathrm{N}=\mathrm{C}b'=\mathrm{C}a'+a'b'$, ou $a\mathrm{N}=a'b'$; por conseguinte são eguaes os triangulos Nab e N$'a'b'$, e é $b\mathrm{N}=b'\mathrm{N}'$.

Assim: *as partes de qualquer secante, comprehendidas entre a hyperbole e as asymptotas, são eguaes entre si.* Por onde se vê que, se for dado um ponto N da hyperbole, e as duas asymptotas; tirando rectas bb' por este ponto, e tomando nellas as partes $b'\mathrm{N}'=b\mathrm{N}$, acharemos assim tantos pontos N$'$ da curva quantos quizermos.

2.° Os triangulos abN, $bN'O$, dão

$$Nb = x'\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b},\ N'b = Nb' = x''\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b};$$

e por conseguinte $$Nb\,.\,Nb' = x'x''\frac{\text{sen}^2 a}{\text{sen}^2 b} = -\frac{m^2}{K}\cdot\frac{\text{sen}^2 a}{\text{sen}^2 b}.$$

Como este producto é independente de L, isto é, da posição do ponto b, vê-se que: *para todas as parallelas a* bb', *e por isso tambem para a tangente parallela* SM, *o rectangulo das partes da secante, comprehendidas entre as asymptotas e um dos pontos da curva, é constante e egual ao quadrado da metade da tangente.*

Nota ao numero 73

O processo indicado no n.° 73 para achar A applica-se, qualquer que seja o angulo das coordenadas, sendo A a razão dos senos dos angulos que a tangente fórma com ellas. Reparando neste processo, vê-se que a mudança de x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$ transforma a equação $a=0$ em $a+bh+ck+dhk+eh^2+fk^2\ldots=0$ que, em virtude da primeira, se reduz a $bh+ck+dhk+eh^2+fk^2\ldots=0$,

e dá $$\frac{k}{h} = -\frac{b+eh+\ldots.}{c+dh+fk\ldots.}.$$

E por que fazer h e k nullos nesta expressão, para achar $A = -\frac{b}{c}$, equival a desprezar os termos que têm por coefficientes $d, e, f\ldots$, provenientes dos da 2.ª ordem da transformada, segue-se que o processo indicado para ter A se reduz a:

1.° *Mudar* x' *e* y' *em* x'+h *e* y'+k *na proposta;* 2.° *fazer as desenvoluções necessarias para obter separadamente os termos da* 1.ª *ordem em* h *e* k; 3.° *egualar a zero a somma d'estes termos;* 4.° *tirar d'esta ultima equação o valor de* $\frac{k}{h}=$ A.

Por exemplo a equação $$y^2+2xy=2y+x,$$

dá $$2yk+2xk+2yh=2k+h,\ \frac{k}{h}=A=\frac{-y+\frac{1}{2}}{y+x-1}.$$

Para a equação geral das secções conicas (n.° 70) $y^2 = mx + nx^2$,

temos $$2yk = mh + 2nhx,\ A = \frac{m + 2nx}{2y};$$

e a equação da tangente é $$y - y' = \frac{m + 2nx'}{2y'}(x - x').$$

Quando a tangente é parallela aos x, o y correspondente ao ponto de contacto é maior ou menor que os vizinhos, segundo fica o ramo da curva todo abaixo ou todo acima da tangente; e quando a tangente é parallela aos y, o x correspondente é maior ou menor que os vizinhos, segundo fica o ramo da curva todo á esquerda, ou todo á direita da tangente. Assim a eliminação entre a equação da curva e uma das duas $A = 0$, ou $A = \infty$, poderá dar respectivamente os *maximos* ou *minimos* valores de y, ou os *maximos* ou *minimos* valores de x. O que determinará os limites da curva no sentido de cada um dos eixos.

Para reconhecer se um valor b de y correspondente a $x = a$, é maximo ou minimo, substituiremos $a \pm \delta$ em logar de x; e se para δ indefinidamente pequeno forem os valores correspondentes de y todos maiores ou todos menores que b, será b um minimo ou um maximo. Similhantemente se reconhece se um valor de x é maximo ou minimo.

Por exemplo $$y^2 - xy + \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} = 0$$

dá $$A = \frac{y - x + 1}{2y - x}.$$

Eliminando pois entre a proposta e $y - x + 1 = 0$, acharemos os systemas

$$x = 1,\ y = 0;\ x = 3,\ y = 2:$$

e por que para $x = 1 \pm \delta$ e $x = 3 \pm \delta$ são $y > 0$ e $y < 2$, as ordenadas 0 e 2 são a minima e maxima; e a curva fica comprehendida, no sentido dos y, entre as tangentes nos pontos (1, 0) e (3, 2), que são parallelas aos x. Do mesmo modo a eliminação entre a proposta e $2y - x = 0$ mostra que as tangentes nos pontos $(2 + \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ e $(2 - \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ dão os limites da curva no sentido dos x (vej. fig. 79).

Para achar as intersecções d'uma curva do 2.° grau com uma recta, eliminaremos as coordenadas entre a equação $y = \alpha x + \beta$ da recta e a da curva: e

chegaremos a uma equação do 2.° gráu $$ax^2 + bx + c = 0,$$

cujas raizes $$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

no caso de serem reaes, darão os pontos de intersecção.

No caso de ser $b^2 = 4ac$, isto é, de ser o 1.º membro da equação do segundo grau um quadrado perfeito, as raizes são eguaes; e a recta é tangente á curva. Com effeito, se fizessemos variar α e β de modo que $b^2 - 4ac$ fosse diminuindo, os pontos de intersecção ir-se-iam approximando; e coincidiriam quando fosse $b^2 - 4ac = 0$: por tanto esta equação exprime a relação que deve ligar α com β para que a recta seja tangente; deixando ainda arbitraria uma d'estas constantes, que se poderá determinar por novas condições. A abscissa do ponto de contacto é $x = -\frac{b}{2a}$.

Por exemplo a eliminação de y entre as equações

$$3y = 4x + 2,\quad y^2 - 2xy + 2x^2 + 4x - 5y + 4 = 0,$$

dá

$$x^2 - 2x + 1 = 0 = (x-1)^2;$$

e assim a recta toca a curva no ponto (1, 2).

Por tanto, se fazendo $y = 0$ na equação d'uma curva, acharmos $(x - x')^2 = 0$, devemos concluir que a curva toca o eixo dos x no ponto $(x', 0)$. (Vej. fig. 79 e 68).

Do centro e dos diametros

92. *Chama-se centro de uma curva o ponto que divide em duas partes eguaes todas as cordas que por elle passam.*

Se o ponto C (fig. 61 e 62) for a origem das coordenadas, e tirarmos MP, M'P' parallelas aos y; os triangulos CPM, e CP'M' mostram que serão CP = CP' e MP = M'P', quando for CM = CM', e reciprocamente; e isto qualquer que seja o angulo yCx das coordenadas. As ordenadas e abscissas são pois eguaes, e de signaes contrarios, quando a sua origem é ao mesmo tempo centro da curva; e reciprocamente. Logo:

Para que o centro d'uma curva seja a origem das coordenadas, é necessario, e basta, que a sua equação fique a mesma quando nella se mudar x *em* — x *e* y *em* — y.

Assim para que a equação geral do 2.º grau

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

se possa reduzir a outra referida ao centro como origem, é necessario que se façam desapparecer os termos lineares em x e y.

Transportemos a origem a um ponto $(a_{,}, b_{,})$, e conservemos as novas coordenadas parallelas ás primitivas; mudando x em $x'+a_{,}$ e y em $y'+b_{,}$. A equação (1) tornar-se-ha em

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + D'y' + E'x' + Q = 0,$$

sendo $$D' = 2Ab_{,} + Ba_{,} + D,\ E' + 2Ca_{,} + Bb_{,} + E,$$

$$Q = Ab_{,}^2 + Ba_{,}b_{,} + Ca_{,}^2 + Db_{,} + Ea_{,} + F.$$

Para que a transformada não tenha os termos Ex' e Dy', é necessario que as coordenadas $a_{,}$, $b_{,}$, satisfaçãm ás condições

$$2Ca_{,} + Bb_{,} + E = 0,\ 2Ab_{,} + Ba_{,} + D = 0 \ldots\ldots\ldots (2);$$

o que dá $$a_{,} = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC},\ b_{,} = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

e reduz a transformada a

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

no caso de ser possivel este calculo.

1.° Se o denominador $B^2 - 4AC$ não é nullo, as coordenadas $a_{,}$ e $b_{,}$ têm um systema de valores finitos, ou nullos; e só um, por que são dadas por equações lineares. Por tanto neste caso a curva tem centro.

2.° Se é $B^2 - 4AC = 0$, sem que sejam nullos os numeradores de $a_{,}$ e $b_{,}$, as expressões d'estas coordenadas tornam-se infinitas; e a curva não tem centro (*).

3.° Se, além de $B^2 - 4AC = 0$, é nullo um dos numeradores de $a_{,}$ ou

---

(*) O processo de eliminação, que dá as expressões de $a_{,}$ e $b_{,}$, suppõe que não são nullos B e A, nem B e C. Se for $B = 0$ e $A = 0$, ou $B = 0$ e $C = 0$, as equações (2) não podem ser satisfeitas se não por $b_{,} = \infty$, ou $a_{,} = \infty$. É o que acontece na equação $y^2 = 2px$, que pertence á parabola.

$b_{\prime}$, o outro tambem o é; e a linha tem uma infinidade de centros. Com effeito neste caso as equações (2) não são distinctas (*).

Em geral, se $a_{\prime}$ e $b_{\prime}$ representam coordenadas variaveis, as equações (2) pertencem a duas rectas, cuja intersecção dá o centro. Estas rectas serão parallelas, quando não existir centro; e coincidirão, quando existir uma infinidade de centros.

93. *Chama-se diametro da curva a linha que divide em duas partes eguaes todas as cordas parallelas a uma recta.*

Quando duas rectas são reciprocamente diametros, uma a respeito da outra, chamam-se *diametros conjugados*. Por exemplo, os eixos da ellipse e, os da hyperbole, são diametros conjugados.

Para achar a equação de qualquer diametro d'uma curva do 2.º grau, eliminemos y entre a equação (1) d'esta curva e a equação $y=ax+b$, d'uma recta. Resultará

$$(Aa^2+Ba+C)\,x^2+(2Aab+Bb+Da+E)\,x+Ab^2+Db+F=0.$$

Como a semi-somma das raizes d'esta equação é a abscissa x' do meio da corda, teremos (*Alg. el.* n.º 145),

$$x'=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2Aab+Bb+Da+E}{Aa^2+Ba+C}.$$

Se fizermos variar b, conservando a constante, obteremos assim as

---

(*) Se for, por exemplo, $B^2=4AC$, e $2AE=BD$: eliminando C e E entre estas equações e a proposta (1), resultará

$$(2Ay+Bx+D)^2-(D^2-4AF)=0,$$

que se decompõe nas duas lineares

$$2Ay+Bx+D+\sqrt{D^2-4AF}=0,\quad 2Ay+Bx+D-\sqrt{D^2-4AF}=0.$$

Por conseguinte a equação proposta é a de duas rectas parallelas.

As equações (2) reduzem-se então a uma só $\qquad 2Ab_{\prime}+Ba_{\prime}+D=0,$

pertencente a uma recta parallela áquellas, e equidistante d'ellas. O que concorda com o que já sabemos pela Geometria (n.º 67, 4.º).

abscissas x' dos meios d'uma serie de cordas parallelas. Mas se eliminarmos b por meio da expressão $b=y'-ax'$, teremos a equação

$$a(Bx'+2Ay'+D)+2Cx'+By'+E=0\ldots\ldots\ldots(3),$$

que, por convir a todas estas cordas, é a equação do diametro que as divide ao meio. Logo:

1.° Os diametros das curvas do 2.° grau são linhas rectas. E determinam-se pela equação (3), quando é dada a ou a direcção das cordas.

2.° Para cada direcção das cordas ha um diametro correspondente.

3.° Havendo centro, os diametros passam todos por elle; por satisfazerem á equação (3) as coordenadas d'este ponto (n.° 92), qualquer que seja a.

Mas não havendo centro, que é o caso da parabola, a condição respectiva $B^2-4AC=0$ dará, pela eliminação de C entre ella e (3),

$$y'=-\frac{B}{2A}x'-\frac{aD+E}{2Aa+B}.$$

E por que nesta expressão o coefficiente de x' é independente de a, segue-se que todos os diametros da parabola são parallelos entre si. A direcção d'elles é dada pela tangente $-\frac{B}{2A}$ do angulo que fazem com os x.

Como um eixo da curva é um diametro perpendicular ás cordas, que divide ao meio: a condição de perpendicularidade [n.° 31, (7)] applicada ás equações da corda e do diametro, que no caso da parabola são

$$y=ax+b,\ y=-\frac{B}{2A}x-\frac{aD+E}{2Aa+B},$$

dá

$$-\frac{B}{2A}a+1=0,\ \text{ou}\ a=\frac{2A}{B}.$$

E no caso da ellipse ou da hyperbole, a mesma condição applicada ás equações

$$y = ax + b,\ y = -\frac{Ba + 2C}{2Aa + B}x - \frac{aD + E}{2Aa + B},$$

dá $$Ba^2 + 2a(C - A) = B, \text{ ou } a = \frac{A - C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B},$$

valores ambos reaes.

94. Para que o eixo das abscissas x seja um diametro a respeito das cordas parallelas ao eixo das ordenadas y, é necessario que a cada abscissa correspondam valores da ordenada eguaes dous a dous, e de signaes contrarios; e por isso, nas equações do 2.° grau, é necessario que y tenha a fórma $y = \pm\sqrt{K}$, sendo K composto de quantidades constantes e de x. Ora, fazendo o calculo a respeito da equação (1), vê-se que esta condição só pode verificar-se quando faltam os termos Bxy e Dy. Do mesmo modo, para que o eixo das ordenadas seja um diametro em relação ao das abscissas, é necessario que a equação da curva não contenha Bxy nem Ex.

Logo, para que os dous eixos dos x e dos y sejam diametros conjugados, é necessario que faltem á equação os termos Bxy, Dy, Ex, isto é, que ella tenha a fórma

$$Ay^2 + Dx^2 = Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

A origem deve pois ser o centro da curva; e assim a ellipse e a hyperbole podem ter diametros conjugados, mas não os tem a parabola.

1.° Sendo BB′ um diametro da ellipse ou da hyperbole (fig. 61 e 63), as tangentes HK e IG em B e B′ são parallelas entre si (n.^{os} 79 e 85), e ao diametro conjugado Cy; por que todas as cordas parallelas a este diametro são divididas por BB′ em duas partes eguaes, e as suas extremidades vão-se approximando uma da outra á medida que se avizinham de B, onde por fim se reunem (*). Logo: *para que a curva esteja refe-*

(*) Com effeito o calculo indicado na pag 96 applicado á equação (4),

dá $$\frac{k}{h} = -\frac{Dx'}{Ay'},$$