

Sala 5  
Gab. —  
Est. 56  
Tab. 19  
N.º 64

Sala 5  
Gab. —  
Est. 56  
Tab. 19  
N.º 64



UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Biblioteca Geral



1301088171

b 17055406

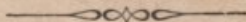


# A VISCOSIDADE DOS LIQUIDOS

POR

BERNARDO AYRES

Doutor em Philosophia



COIMBRA  
IMPRESA DA UNIVERSIDADE  
1892

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 101

CHICAGO  
UNIVERSITY OF CHICAGO  
1902

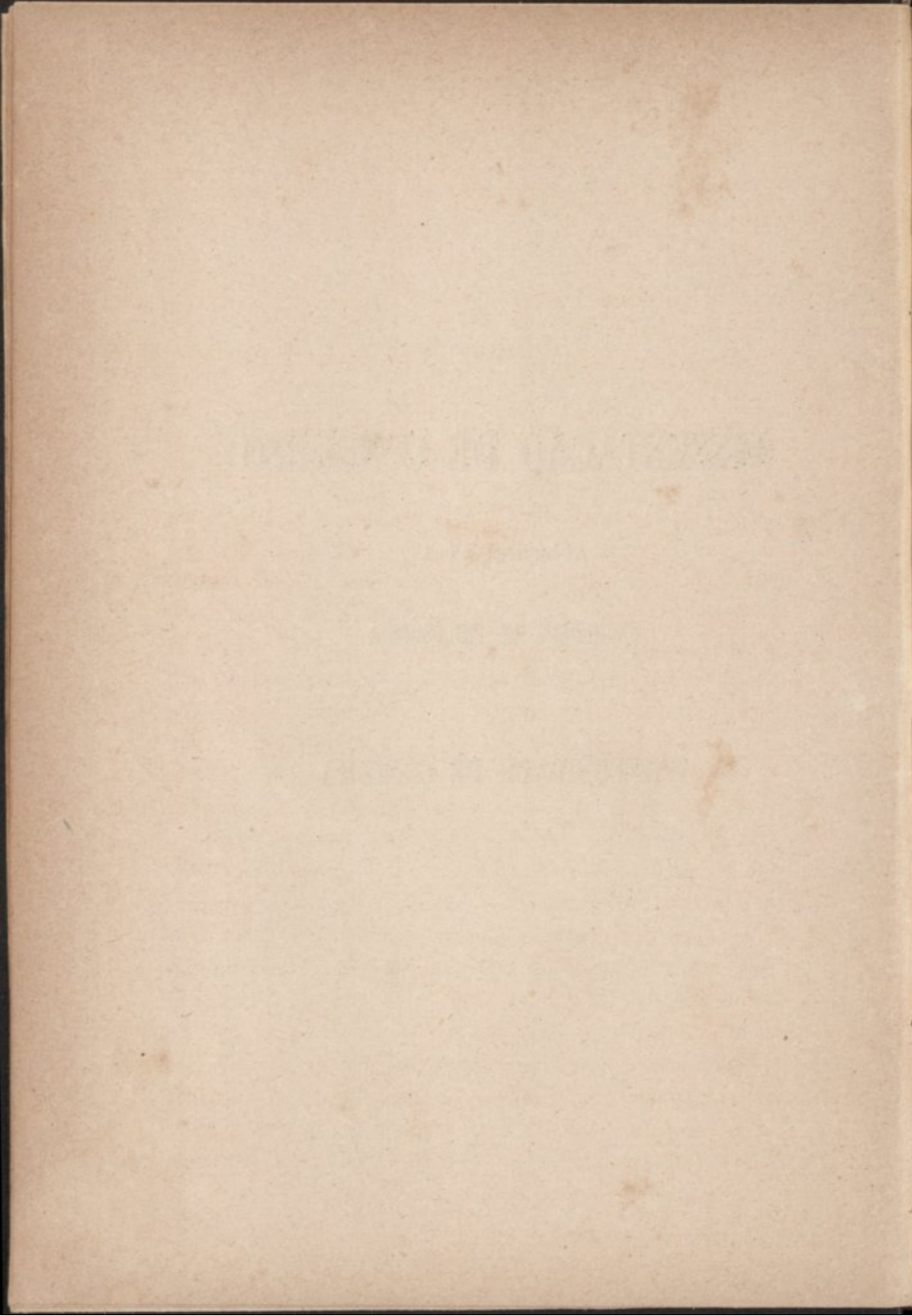
DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

APRESENTADA Á

FACULDADE DE PHILOSOPHIA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA





## Considerações theoreticas

1. Considere-se no interior de um corpo qualquer, solido ou fluido ou na superficie de separação dos dois, um elemento de superficie infinitamente pequeno  $d\sigma$ , atravessado pela recta que une duas moleculas  $m, m'$ . Entre estas duas moleculas desenvolvem-se, conforme a distancia, forças attractivas ou repulsivas  $p$  eguaes e oppostas, dirigidas segundo a recta  $mm'$ . As acções das moleculas situadas de um lado da face sobre as do lado opposto, transportadas parallelamente ao seu centro de gravidade e cujas direcções a atravessam, têm uma resultante  $p d\sigma$  a que se dá o nome de *acção molecular* sobre aquelle lado da face, sendo  $p$  a acção sobre  $d\sigma$  referida á unidade de superficie. Quando esta acção é attractiva, isto é, uma *tensão* ou *tracção*, o coefficiente  $p$  considera-se positivo; quando é repulsiva, isto é, uma *pressão*, como nos fluidos, o valor de  $p$  considera-se negativo.

D'esta definição deduz-se immediatamente que as acções exercidas sobre os dois lados da mesma face são eguaes e directamente oppostas.

Além d'isso, a resultante das acções exercidas sobre as faces de um elemento polyedrico qualquer, consideradas todas do lado exterior ou interior, é identica á resultante das acções exercidas pelas moleculas exteriores sobre as interiores ou d'estas sobre aquellas. Com effeito, se as acções moleculares comprehendem

tambem as acções de moléculas exteriores sobre outras exteriores, segundo linhas que atravessam duas faces, como essas acções entram ao mesmo tempo nas de uma e de outra face, destroem-se duas a duas quando se compõem para obter a resultante geral das acções sobre as faces. Restam, pois, sómente as acções das moléculas exteriores sobre as interiores, ou reciprocamente.

Esta propriedade permite considerar as acções moleculares sómente sobre superficies e referil-as á unidade de superficie e não á unidade de massa.

**2.** Em hydrostatica suppõem-se os liquidos *fluidos perfectos*, isto é, systemas de moléculas sem ligação lateral umas com as outras, cuja distribuição em volta de qualquer ponto é symetrica em relação a todas as direcções. A resultante das acções exercidas pela massa liquida sobre cada elemento plano é normal e a pressão exercida n'elle transmite-se integralmente a todos os outros.

D'esta hypothese deduz-se, entre outras consequencias, que a superficie livre de um liquido, sujeito á acção da gravidade, é um plano horizontal, o que é confirmado pela experiencia. Effectivamente todos os liquidos, ainda os mais espessos, comtanto que sejam homogeneos e não contenham particulas solidas, podem exigir um espaço de tempo consideravel para tomar a posição de equilibrio, mas a sua superficie torna-se sempre horizontal. Obermayer collocava no fundo de um canal um fragmento de cortiça por baixo de um bocado de pez e na parte superior uma pedra: no fim de alguns dias o pez moldava o canal, a superficie livre era plana e horizontal, ao mesmo tempo que a pedra se encontrava no fundo e a cortiça á superficie. O equilibrio do systema tinha-se, pois, estabelecido segundo as leis ordinarias da hydrostatica.

Estas observações levam a considerar os líquidos em repouso absolutamente desprovidos de rigidez, visto esta não poder existir sem componente tangencial. A generalidade das propriedades da materia tinha todavia levado os physicos a attribuirem aos líquidos uma certa rigidez, o que só foi directamente posto em evidencia pelas experiencias recentes de Schwedoff.

Nos líquidos em movimento, a existencia da componente tangencial é demonstrada por numerosas observações. Citaremos as experiencias de Joule para a determinação do equivalente mecanico do calor. Joule fazia girar n'um calorimetro de agua uma roda de palhetas metallicas, movel em volta de um eixo. Se as acções tangenciaes aos elementos líquidos não existissem, o liquido arrastado pelas palhetas formaria uma bainha que escorregaria sem attrito sobre o liquido ambiente; o trabalho motor seria portanto o mesmo, quer as palhetas mergulhassem no liquido, quer no ar. Esta propriedade dos líquidos em movimento, das forças moleculares não serem normaes ao elemento de superficie em que se exercem, tem o nome de *viscosidade* ou *attrito interno* por ter o mesmo effeito que o attrito nos corpos solidos, embora se não annulle com a velocidade.

**3.** Imaginemos no interior de um corpo qualquer um tetraedro elementar (Fig. 4) cujas moleculas, em repouso, não estão sujeitas senão ás acções das moleculas visinhas. Para que um tal elemento fique em equilibrio é evidentemente necessario que a acção molecular sobre o lado exterior de uma das faces, A, por exemplo, seja egual e directamente opposta á resultante das exercidas sobre o lado exterior das faces B, C, D, ou, egual e do mesmo sentido que a resultante das acções sobre o lado interior d'estas faces. Ora, o lado exterior da face A tem os lados interiores das faces B, C, D para projecções, rectangulares ou obliquas, sobre

os seus planos respectivos; e como a acção varia continuamente podem, com erro de um infinitamente pequeno de ordem superior, substituir-se as acções exercidas em A, B, C, D pelas exercidas sobre as quatro faces eguaes e parallelas, com o centro de gravidade commum coincidindo com o do elemento.

Esta conclusão subsiste se o corpo está sujeito á acção da gravidade ou de outras forças não reciprocas. Como estas forças actuam proporcionalmente á massa, se o elemento considerado é infinitamente pequeno, os seus valores são de terceira ordem, e essas acções são de segunda ordem. As forças exteriores não têm, pois, influencia sensivel no equilibrio de translação do tetraedro considerado.

O mesmo raciocinio mostraria que a condição de equilibrio do tetraedro é independente da força de inercia, por ser em valor absoluto o producto da massa pela acceleração.

*Logo a acção molecular sobre um elemento plano situado no interior de um corpo qualquer, em repouso ou em movimento, é a resultante das acções que se exercem nas suas projecções sobre tres planos quaesquer que passam pelo seu centro de gravidade.*

4. Sejam A e A' (Fig. 2) duas faces correspondentes a dois lados oppostos da base de um prisma recto elementar de base rhomboidal, sujeito apenas ás acções interiores; B e B' as outras duas. Suppondo as acções moleculares sobre as faces applicadas aos seus centros de figura, o equilibrio de translação do prisma exige que essas acções sejam duas a duas eguaes e parallelas.

Para exprimir o equilibrio de rotação em volta do eixo OO' do prisma, decomponham-se as acções que se exercem sobre as quatro faces lateraes A e A', B e B': 1º segundo parallelas ao eixo de rotação OO'; 2º segundo as linhas AA', BB' que unem os centros das faces A e A', B e B'; 3º segundo per-

pendiculares  $Aa$ ,  $A'a'$ ,  $Bb$ ,  $B'b'$  a estas linhas e parallelas aos planos das bases  $O$  e  $O'$ . O momento das primeiras componentes em relação ao eixo  $OO'$  é evidentemente nullo; as segundas, e ainda as acções sobre as bases, intersectam  $OO'$  e portanto o seu momento é tambem nullo. Das outras quatro componentes, cada uma d'ellas é perpendicular á face adjacente áquella em que se exerce. As componentes  $Aa$ ,  $A'a'$  são eguaes e tendem a fazer girar o elemento no mesmo sentido, de sorte que o seu momento é duplo do relativo á pressão  $Aa$ ; o momento das outras duas componentes é tambem duplo do relativo a uma d'ellas; além d'isso, os seus braços de alavanca são eguaes.

Esta conclusão subsiste ainda quando sobre o systema actuaem forças extranhas á acção reciproca das moleculas, como a gravidade e a força de inercia, porque estas forças são de terceira ordem, como o volume do elemento; os productos pelos seus braços de alavanca sommados dão um infinitamente pequeno de quarta ordem que se pode desprezar em relação ao momento das acções moleculares que é de terceira ordem.

Logo, *imaginando no interior de um corpo dois elementos de superficie com a mesma area e o mesmo centro, a acção molecular sobre a primeira, decomposta normalmente á segunda, é igual á componente da pressão sobre a segunda na direcção normal á primeira.* Este principio, chamado da *reciprocidade*, é devido a Cauchy.

5. Designemos por  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$ ;  $p_{yx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{yz}$ ;  $p_{zx}$ ,  $p_{zy}$ ,  $p_{zz}$  as componentes, segundo os  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , das acções moleculares n'um dado ponto por unidade de superficie de tres planos perpendiculares aos eixos coordenados com o mesmo centro de gravidade, indicando o primeiro indice o plano em que a pressão se exerce pela sua normal e o segundo o sentido da decomposição.

O theorema precedente mostra que as componentes tangenciaes são eguaes duas a duas,

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy},$$

o que reduz as componentes da acção molecular a seis distinctas.

Além d'isso, designando por  $n$  a normal a um elemento de superficie, a unidade de superficie tomada em volta do pé da normal tem por projecções sobre os planos coordenados os valores  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$ ,  $\cos(n, z)$ . Empregando a mesma notação, teremos (n.º 3)

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z), \\ p_{ny} &= p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z), \\ p_{nz} &= p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z). \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

A componente, segundo uma direcção qualquer  $s$ , da acção sobre a unidade de superficie da face cuja normal é  $n$ , tem por expressão

$$p_{ns} = p_{nx} \cos(s, x) + p_{ny} \cos(s, y) + p_{nz} \cos(s, z).$$

Substituindo  $p_{nx}$ ,  $p_{ny}$ ,  $p_{nz}$  pelos seus valores dados por (1), vem

$$\begin{aligned} p_{ns} &= p_{xx} \cos(n, x) \cos(s, x) + p_{yy} \cos(n, y) \cos(s, y) \\ &+ p_{zz} \cos(n, z) \cos(s, z) + p_{yz} [\cos(n, y) \cos(s, z) + \cos(n, z) \cos(s, y)] \\ &+ p_{yx} [\cos(n, z) \cos(s, n) + \cos(n, x) \cos(s, z)] \\ &+ p_{xy} [\cos(n, x) \cos(s, y) + \cos(n, y) \cos(s, x)]. \end{aligned}$$

Para ter a componente da acção normal á face basta mudar

s em  $n$  n'esta formula, o que dá

$$\left. \begin{aligned}
 p_{nn} &= p_{xx} \cos^2(n, x) + p_{yy} \cos^2(n, y) + p_{zz} \cos^2(n, z) \\
 &+ 2p_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z) + 2p_{zx} \cos(n, z) \cos(n, x) \\
 &+ 2p_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y)
 \end{aligned} \right\} \dots (2).$$

6. Pondo successivamente em vez de  $n$  e  $s$  as direcções  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  de tres novos eixos rectangulares ou obliquos, obtêm-se as formulas

$$\left. \begin{aligned}
 p_{x'x'} &= p_{xx} \cos^2(x, x') + p_{yy} \cos^2(y, x') + p_{zz} \cos^2(z, x') \\
 &+ 2p_{yz} \cos(y, x') \cos(z, x') + 2p_{zx} \cos(z, x') \cos(x, x') \\
 &+ 2p_{xy} \cos(x, x') \cos(y, x'), \\
 p_{y'y'} &= p_{xx} \cos^2(x, y') + p_{yy} \cos^2(y, y') + p_{zz} \cos^2(z, y') \\
 &+ 2p_{yz} \cos(y, y') \cos(z, y') + 2p_{yx} \cos(y, y') \cos(x, y') \\
 &+ 2p_{xy} \cos(x, y') \cos(y, y'), \\
 p_{z'z'} &= p_{xx} \cos^2(x, z') + p_{yy} \cos^2(y, z') + p_{zz} \cos^2(z, z') \\
 &+ 2p_{yz} \cos(y, z') \cos(z, z') + 2p_{zx} \cos(z, z') \cos(x, z') \\
 &+ 2p_{xz} \cos(x, z') \cos(y, z'), \\
 p_{y'z'} &= p_{xx} \cos(x, y') \cos(x, z') + p_{yy} \cos(y, y') \cos(y, z') \\
 &+ p_{zz} \cos(z, y') \cos(z, z') \\
 &+ p_{yz} [\cos(y, y') \cos(z, z') + \cos(y, z') \cos(z, z')] \\
 &+ p_{zx} [\cos(z, y') \cos(x, z') + \cos(z, z') \cos(x, y')] \\
 &+ p_{xy} [\cos(x, y') \cos(y, z') + \cos(x, z') \cos(y, y')], \\
 p_{z'x'} &= p_{xx} \cos(x, z') \cos(x, x') + p_{yy} \cos(y, z') \cos(y, x') \\
 &+ p_{zz} \cos(z, z') \cos(z, x') \\
 &+ p_{yz} [\cos(y, z') \cos(z, x') + \cos(y, x') \cos(z, x')] \\
 &+ p_{zx} [\cos(z, z') \cos(x, x') + \cos(z, z') \cos(x, z')] \\
 &+ p_{xy} [\cos(x, z') \cos(y, x') + \cos(x, x') \cos(y, z')], \\
 p_{x'y'} &= p_{xx} \cos(x, x') \cos(x, y') + p_{yy} \cos(y, x') \cos(y, y') \\
 &+ p_{zz} \cos(z, x') \cos(z, y') \\
 &+ p_{yz} [\cos(y, x') \cos(z, y') + \cos(y, y') \cos(z, z')] \\
 &+ p_{zx} [\cos(z, y') \cos(x, y') + \cos(z, y') \cos(x, y')] \\
 &+ p_{xy} [\cos(x, x') \cos(y, y') + \cos(x, y') \cos(y, x')].
 \end{aligned} \right\} \dots (3).$$

Se os novos eixos são também rectangulares, deduz-se d'estas equações

$$p_{x'y'} + p_{y'y'} + p_{z'z'} = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}.$$

A somma das componentes normaes da acção molecular sobre tres planos rectangulares é, pois, constante em cada ponto.

Se o eixo dos  $z'$  é paralelo ao dos  $z$ , tem-se

$$\cos(z, z') = 1, \quad \cos(x, z') = \cos(y, z') = \cos(z, x') = \cos(z, y') = 0,$$

$$\cos(x, x') = \cos(y, y'), \quad \cos(y, x') = -\cos(x, y') = \sin(x, x'),$$

o que dá

$$p_{x'y'} = \frac{1}{2} (p_{yy} - p_{xx}) \sin 2(x, x') + p_{xy} \cos 2(x, x'),$$

e se  $(x, x') = 45^\circ$ , vem

$$p_{x'y'} = \frac{1}{2} (p_{yy} - p_{xx}).$$

*Logo, n'um corpo qualquer, a differença das acções moleculares normaes sobre dois planos perpendiculares, é igual ao dobro da acção tangencial sobre o plano bissector, tomada perpendicularmente á intersecção commum.*

7. Tome-se sobre a normal  $Mn$  ao elemento de superficie, em que se exerce a acção, um comprimento  $Mn = r = \sqrt{\pm \frac{1}{p_{nn}}}$ , conforme  $p_{nn}$  é positivo ou negativo, a partir do pé  $M$  cujas coordenadas designaremos por  $x, y, z$ ; e sejam  $x', y', z'$  as coorde-



nadas da extremidade  $n$ , referidas aos eixos  $Mx'$ ,  $My'$ ,  $Mz'$  tirados pelo pé  $M$ , parallelamente aos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Teremos

$$\cos(n, x) = \frac{x'}{r} = \pm x' \sqrt{p_{nn}},$$

$$\cos(n, y) = \frac{y'}{r} = \pm y' \sqrt{p_{nn}},$$

$$\cos(n, z) = \frac{z'}{r} = \pm z' \sqrt{p_{nn}}.$$

Substituindo estes valores em (2), vem

$$p_{xx}x'^2 + p_{yy}y'^2 + p_{zz}z'^2 + 2p_{yz}y'z' + 2p_{zx}z'x' + 2p_{xy}x'y' = \pm 1 \dots (4)$$

equação que representa uma ou duas superficies do segundo grau cujo centro é o ponto  $M$ . Se o primeiro membro se conserva sempre positivo ou negativo para todos os systemas de valores das coordenadas  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  da extremidade do raio  $r$ , a equação (4) representa um ellipsoide, porque os raios vectores  $r$  são reaes em todos os sentidos. Mas se, para certos systemas d'esses valores, o primeiro membro é positivo e para outros negativo, a equação representa duas superficies que evidentemente não são ellipsoides, porque  $r$  tem um só valor real em cada direcção. A equação representa dois hyperboloides conjugados, porque fazendo  $z' = 0$ , por exemplo, obtem-se para equação da curva de intersecção pelo plano  $x'y'$ ,

$$p_{yy} \left( \frac{y'}{x'} \right)^2 + 2p_{xy} \frac{y'}{x'} + p_{xx} = \pm \frac{1}{x'^2}$$

que representa duas hyperboles. Fazendo  $x' = \infty$ , o segundo membro annulla-se e os dois valores de  $\frac{y'}{x'}$  são eguaes, isto é, as duas hyperboles têm as mesmas asymptotas.

Logo o *logar geometrico das extremidades das normaes a todos os elementos planos tirados por um ponto qualquer de um corpo, quando a partir d'elle se marcam comprimentos proporcionaes ás raizes quadradas dos valores numericos das componentes  $p_{nn}$  das pressões ou tensões, é um ellipsoide quando todas as componentes são positivas ou negativas. O ellipsoide transforma-se em dois hyperboloides conjugados quando em certas faces se exerce uma pressão e n'outras uma tracção.*

Se os eixos principaes  $x_1, y_1, z_1$  do solido coincidem com os eixos coordenados primitivos, os termos rectangulares annullam-se

$$p_{y_1 z_1} = 0, \quad p_{z_1 x_1} = 0, \quad p_{x_1 y_1} = 0.$$

Logo em todo o ponto de um corpo ha tres planos perpendiculares a que as pressões ou tensões são normaes; todas as outras são symetricas em volta d'ellas. Estas tres acções moleculares chamam-se *principaes*.

As acções moleculares principaes obtêm-se pelo calculo que dá os eixos de uma superficie de segundo grau. Seja  $\pi$  uma d'estas acções, normal ao plano em que se exerce. Se  $a, b, c$  são os cosenos directores da normal ao plano,  $a\pi, b\pi, c\pi$  são as projecções de  $\pi$ ; segundo as formulas (4), teremos

$$a(p_{xx} - \pi) + bp_{xy} + cp_{xz} = 0,$$

$$ap_{xy} + b(p_{yy} - \pi) + cp_{yz} = 0,$$

$$ap_{xz} + bp_{yz} + c(p_{zz} - \pi) = 0,$$

d'onde

$$\begin{vmatrix} p_{xx} - \pi & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} - \pi & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} - \pi \end{vmatrix} = 0$$

equação do terceiro grau cujas raizes, reais, representam as acções principaes em grandeza e signal.

Se duas acções principaes são eguaes, todas as acções exercidas no ponto considerado e perpendiculares á terceira são eguaes áquellas e normaes ao plano em que se exercem. Se as tres raizes d'esta equação são eguaes, todas as acções exercidas no ponto considerado são eguaes entre si e normaes ao plano sobre que actuam, como acontece nos fluidos em repouso.

**S.** Considere-se no interior de um corpo o parallelipedo elemental fixo  $dx dy dz$  (Fig. 3), cujas arestas são parallelas aos eixos coordenados; sejam X, Y, Z as componentes por unidade de massa das forças exteriores, no ponto A;  $\rho$  a densidade n'esse ponto.

As duas faces oppostas A, A', de superficie  $da$ , estão respectivamente sujeitas ás acções parallelas ao eixo dos  $x$ ,  $d\bar{a} \cdot p_{xx}$ ,

$-da \left( p_{xx} + \frac{dp_{xx}}{dx} dx \right)$  cuja resultante é

$$- dx dy dz \frac{dp_{xx}}{dx}.$$

Os dois pares de faces  $db$ ,  $dc$ , dão ainda segundo o mesmo eixo as componentes

$$- dx dy dz \frac{dp_{yx}}{dy}, \quad - dx dy dz \frac{dp_{zx}}{dz},$$

que junctas á precedente fazem equilibrio a  $\rho X dx dy dz$ .

Fazendo o mesmo para os outros eixos, obtém-se as equações

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} + \rho X = 0,$$

$$\frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} + \rho Y = 0,$$

$$\frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} + \rho Z = 0,$$

que exprimem as condições de equilibrio do parallelipedo elementar, pois que o estabelecimento das tres equações relativas aos momentos levar-nos-hia a ver que as componentes tangenciaes são eguaes duas a duas.

Para tornar estas equações applicaveis aos fluidos em movimento, basta junctar as forças de inercia ás exteriores. Designando por  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  as componentes da acceleração no tempo  $t$  da materia que occupa o elemento de volume considerado, vem

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} + \rho (X - u') &= 0, \\ \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} + \rho (Y - v') &= 0, \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} + \rho (Z - w') &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (5).$$

9. Designemos agora por  $u$ ,  $v$ ,  $w$  as componentes da velocidade segundo os eixos coordenados. Durante o tempo infini-

tamente pequeno  $dt$ , penetra pela face A do paralelepipedo elementar um volume de fluido cuja massa é

$$\rho u dy dz dt,$$

e sai pela face opposta a massa

$$\left[ \rho u + \frac{d(\rho u)}{dx} dx \right] dy dz dt.$$

O augmento da massa fluida contida no paralelepipedo durante o tempo  $dt$  será portanto,

$$- \frac{d(\rho u)}{dx} dx dy dz dt.$$

Fazendo um calculo analogo para os outros dois pares de faces e sommando, obtem-se o augmento total da massa durante o tempo  $dt$

$$- \left[ \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} \right] dx dy dz dt,$$

contanto que o movimento do fluido não deixe nenhum espaço vazio no interior do volume considerado.

Por outro lado, a massa fluida contida no paralelepipedo, no tempo  $t$ , é

$$\rho dx dy dz$$

e no tempo  $t + dt$

$$\left( \rho + \frac{d\rho}{dt} dt \right) dx dy dz.$$

Subtraindo e igualando a diferença á expressão precedente, obtem-se a *equação de continuidade ou da conservação dos volumes fluidos*,

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ou

$$\left( \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} \right) + \rho \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0.$$

Ora, considerando momentaneamente  $x, y, z$  como as coordenadas de uma molecula qualquer no seu movimento, o primeiro parenthesis é a derivada total em relação a  $t$  da densidade  $\rho$ , tomada ao longo da trajectoria. Se o fluido é incompressivel, a densidade da molecula conserva-se constante e teremos as equações

$$\frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} = 0 \dots\dots\dots (7),$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \dots\dots\dots (8).$$

Se o liquido é homogeneo, além de incompressivel, a equação de continuidade converte-se nas duas

$$\rho = \text{const.} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \dots\dots\dots (9).$$

Nos gazes a densidade é variavel e a sua equação de continuidade é portanto (6); mas, se o phenomeno é isothermico,

entre a pressão  $p$  e a densidade  $\rho$  existe a relação

$$p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho, \dots \dots \dots (10),$$

sendo  $p_0$  e  $\rho_0$  a pressão e a densidade a  $0^0$ .

Quando a temperatura varia e o calor se conserva constante, isto é, se o phenomeno é adiabatico, esta relação é substituida por

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \dots \dots \dots (10'),$$

em que  $\gamma$  é a relação,  $\frac{C}{C_1} = 1,41$ , entre os valores especificos a pressão e volume constantes.

**10.** Considere-se no interior do fluido, a partir do ponto  $M(x, y, z)$ , uma recta material muito pequena  $\lambda$ , na direcção da velocidade. Sejam  $(x+h, y+k, z+l)$  as coordenadas da extremidade  $M'$  da recta  $\lambda$ .

Desprezando os quadrados e os termos rectangulares de  $h, k, l$ , as componentes de velocidade  $u', v', w'$ , no ponto  $M'$ , serão

$$\left. \begin{aligned} u' &= u + h \frac{du}{dx} + k \frac{du}{dy} + l \frac{du}{dz}, \\ v' &= v + h \frac{dv}{dx} + k \frac{dv}{dy} + l \frac{dv}{dz}, \\ w' &= w + h \frac{dw}{dx} + k \frac{dw}{dy} + l \frac{dw}{dz}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11).$$

A extremidade  $M'$  da recta  $\lambda$  afasta-se assim durante o tempo

$dt$  da outra  $M$  com uma velocidade cujas componentes são  $u' - u$ ,  $v' - v$ ,  $w' - w$ . Projectando-as sobre a recta  $\lambda$ , o augmento  $d$  da velocidade no ponto  $M'$  será

$$d = (u' - u) \frac{h}{\lambda} + (v' - v) \frac{k}{\lambda} + (w' - w) \frac{l}{\lambda}.$$

Substituindo  $u' - u$ ,  $v' - v$ ,  $w' - w$  pelos seus valores e pondo  $h = \lambda \cos \alpha$ ,  $k = \lambda \cos \beta$ ,  $l = \lambda \cos \gamma$ , sendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  os cosenos directores da recta  $\lambda$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{\lambda} &= \frac{du}{dx} \cos^2 \alpha + \frac{dv}{dy} \cos^2 \beta + \frac{dw}{dz} \cos^2 \gamma + \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \cos \beta \cos \gamma \\ &+ \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \cos \alpha \cos \gamma + \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \cos \alpha \cos \beta \dots (12). \end{aligned}$$

Como, durante o tempo infinitamente pequeno, a velocidade se pode considerar constante, o augmento da linha  $\lambda$  durante este tempo ou a sua *dilatação* tem por componentes  $(u' - u) dt$ ,  $(v' - v) dt$ ,  $(w' - w) dt$  e por isso  $d$  tem o nome de *velocidade de dilatação*. O segundo membro de (12) dá a velocidade de dilatação por unidade de comprimento.

11. Appliquemos a formula precedente a cada uma das arestas  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  do parallelepipedo elementar. Em relação a cada aresta, um dos cosenos é então igual á unidade e os outros nullos, de modo que as tres velocidades de dilatação de  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  são

$$d_x = \frac{du}{dx} dx, \quad d_y = \frac{dv}{dy} dy, \quad d_z = \frac{dw}{dz} dz;$$



as derivadas  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dw}{dz}$  são, pois, as velocidades de dilatação linear segundo os tres eixos coordenados.

Procuremos agora a variação dos angulos do paralelepipedo. Estes angulos, primitivamente rectos, tomam durante o tempo  $dt$  valores que designaremos por

$$\frac{\pi}{2} - g_{yz}, \quad \frac{\pi}{2} - g_{xz}, \quad \frac{\pi}{2} - g_{xy}.$$

Fazendo  $k=l=0$  nas formulas (9) obtêm-se os augmentos das coordenadas da extremidade da aresta  $dx$

$$\frac{du}{dx} dxdt, \quad \frac{dv}{dx} dxdt, \quad \frac{dw}{dx} dxdt;$$

as projecções da aresta  $dx$  tornam-se

$$\left(1 + \frac{du}{dx} dt\right) dx, \quad \frac{dv}{dx} dxdt, \quad \frac{dw}{dx} dxdt,$$

e os cosenos dos angulos d'esta aresta com os eixos são então

$$1 + \frac{du}{dx} dt, \quad \frac{dv}{dx} dt, \quad \frac{dw}{dx} dt.$$

Do mesmo modo se veria que os cosenos directores da aresta  $dy$  no fim do tempo  $dt$  são

$$\frac{du}{dy} dt, \quad 1 + \frac{dv}{dy} dt, \quad \frac{dw}{dy} dt.$$

O coseno do terceiro angulo do parallelepipedo formado pelas duas direcções precedentes será

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - g_{xy}\right) = \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) dt.$$

Ora, como  $g_{xy}$  é muito pequeno, pode substituir-se o arco pelo seno, o que dá

$$g_{xy} = \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) dt.$$

Na theoria da elasticidade dos corpos solidos as variações  $g_{xy}$ ,  $g_{xz}$ ,  $g_{yz}$  dos angulos do parallelepipedo são as componentes de *escorregamento*; os quocientes d'esses valores pelo tempo correspondente, quando a deformação se effectuar durante um intervallo de tempo infinitamente pequeno, dão as *velocidades de escorregamento*.

As tres componentes da velocidade de escorregamento são, substituindo  $g$  por  $\gamma$ ,

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \quad \gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \dots (13).$$

**12.** Considere-se outro systema de eixos rectangulares  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  e culculemos as velocidades de dilatação segundo estas direcções pela formula (10) applicada a cada uma d'ellas

$$\left. \begin{aligned} d_{x'} &= d_x \cos^2(x, x') + d_y \cos^2(y, y') + d_z \cos^2(z, z') \\ &+ \gamma_{yz} \cos(y, x') \cos(z, x') + \gamma_{xz} \cos(x, x') \cos(z, x') \\ &+ \gamma_{xy} \cos(x, x') \cos(y, x'), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Além d'isso, as equações (13) dão, usando das formulas de transformação de coordenadas

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{y'z'} &= 2d_x \cos(x, y') \cos(x, z') + 2d_y \cos(y, y') \cos(y, z) \\ &+ 2d_z \cos(z, y') \cos(z, z') + \gamma_{yz} [\cos(y, y') \cos(z, z') \\ &+ \cos(y, z') \cos(z, y')] + \gamma_{xz} [\cos(z, y') \cos(x, z') + \cos(z, z') \cos(z, y')] \\ &+ \gamma_{xy} [\cos(x, y') \cos(y, z') + \cos(x, z') \cos(y, y')], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (14').$$

D'estas formulas e das quatro analogas omitidas, deduz-se

$$d_{x'} + d_{y'} + d_{z'} = d_x + d_y + d_z.$$

Assim, a somma das tres componentes rectangulares da velocidade de dilatação é constante em cada ponto.

Se o eixo dos  $z'$  coincide com o dos  $z$ , tem-se

$$\gamma_{x'y'} = (d_y - d_x) \operatorname{sen} 2(x, x') + \gamma_{xy} \cos 2(x, x'),$$

que para  $(x, x') = 45^\circ$ , dá

$$\gamma_{x'y'} = d_y - d_x.$$

*Logo, a differença das velocidades de dilatação linear nas direcções normaes a duas faces rectangulares, é igual á velocidade de escorregamento n'uma face e n'uma direcção que divide o angulo em duas partes eguaes.*

**13.** Marquemos em todas as direcções a partir de um ponto

$M(x, y, z)$  um comprimento  $r = \sqrt{\pm \frac{1}{d}}$ , sendo o signal escolhido de modo que  $r$  seja sempre real.

Por um raciocinio semelhante ao do numero 8 se vê que *as extremidades d'essas linhas formam um ellipsoide se ha dilatações em todos os sentidos; dois hyperboloides conjugados se ha dilatação em certos sentidos e condensação n'outros*. N'este caso, as direcções em que não ha uma nem outra formam o cone asymptotico commum a que Lamé chama *cone de escorregamento* na theoria da elasticidade dos corpos solidos.

As velocidades de dilatação distribuem-se symmetricamente em torno dos seus eixos principaes. Tomando-os para eixos coordenados, teremos

$$y_{y'z'} = 0, \quad y_{x'z'} = 0, \quad y_{x'y'} = 0.$$

Assim, *em todo o ponto de um fluido em movimento podem tirar-se tres rectas segundo as quaes as velocidades de escorregamento são nullas quando se consideram duas a duas, ou cujos tres angulos rectos conservam o seu valor na nova posição*. Estas tres dilatações chamam-se *principaes*.

Designando por  $s$  uma d'estas tres velocidades de dilatação principaes, por  $a, b, c$  os cosenos directores e por  $d_x, d_y, d_z$  as dilatações lineares segundo os eixos dos  $x, y, z$  teremos as tres equações

$$(d_x - s)a + \frac{1}{2} \gamma_{xy} b + \frac{1}{2} \gamma_{xz} c = 0,$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} a + (d_y - s)b + \frac{1}{2} \gamma_{yz} c = 0,$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xz} a + \frac{1}{2} \gamma_{yz} b + (d_z - s)c = 0,$$

d'onde

$$\begin{vmatrix} d_x - s & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & d_y - s & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & d_z - s \end{vmatrix} = 0,$$

equação do terceiro grau cujas raízes, reais, representam as velocidades principais de dilatação ou contracção, segundo são positivas ou negativas.

**14.** Nos fluidos em repouso admite-se que as componentes tangenciaes da acção molecular são nullas. Por analogia supponhamos que não ha componente tangencial da acção molecular nas direcções em que não ha escorregamento, ou que o attrito e o escorregamento são ao mesmo tempo nullos.

Approximando as formulas precedentes das formulas (3), correspondentes á acção molecular, e suppondo que o eixo dos  $z'$  coincide com o dos  $z$ , tem-se

$$p_{y'z'} = p_{zy} \cos(y, y') + p_{xz} \cos(x, y')$$

$$\gamma_{y'z'} = \frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'} = \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \cos(y, y') + \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dx}{dz} \right) \cos(x, y'),$$

e se o eixo dos  $x'$  se confunde com o dos  $x$ ,

$$p_{y'z'} = -(p_{yz} - p_{zz}) \cos(y, y') \cos(z, y') + p_{yz} [\cos^2(y, y') - \cos^2(z, z')],$$

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'} &= -2 \left( \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) \cos(y, y') \cos(z, y') \\ &+ \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) [\cos^2(y, y') - \cos^2(x, y')]. \end{aligned}$$

Tome-se agora, no primeiro caso,  $y'$  na direcção em que a componente  $p_{z'y'}$  da acção sobre a face  $x'y'$  é nulla. Segundo a hypothese que fizemos, será então  $\gamma_{y'z'} = 0$ , e teremos

$$p_{zy} \cos(y, y') + p_{zx} \cos(x, y') = 0,$$

$$\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \cos(y, y') + \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \cos(x, y') = 0.$$

Eliminando os cosenos, vem

$$\frac{p_{zy}}{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}} = \frac{p_{zx}}{\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}}.$$

Tomando, no segundo caso,  $y'$  na direcção em que a componente  $p_{y'z'}$  segundo esta direcção, da acção sobre a face  $x'y'$  é nulla, virá

$$\frac{p_{yy} - p_{zz}}{2\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)} = \frac{p_{yz}}{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}}.$$

Permutando os eixos, teremos para cada ponto as relações constantes

$$\begin{aligned} \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)} &= \frac{p_{zz} - p_{xx}}{2\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right)} = \frac{p_{yy} - p_{zz}}{2\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)} = \frac{p_{yz}}{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}} \\ &= \frac{p_{zx}}{\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}} = \frac{p_{xy}}{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}} = \epsilon \dots \dots \dots (15). \end{aligned}$$

Logo, em qualquer ponto de um fluido em movimento, a relação entre a diferença de duas acções moleculares normaes quaesquer, rectangulares entre si, e a das velocidades de dilatação correspondentes, é constante e igual ao dobro da que existe entre as acções tangenciaes e as velocidades de escorregamento que lhe correspondem.

De (15) tira-se

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\varepsilon \frac{du}{dx}, p_{yy} = -p + 2\varepsilon \frac{dv}{dy}, p_{zz} = -p + 2\varepsilon \frac{dw}{dz}, \\ p_{yz} &= \varepsilon \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy} \right), p_{xz} = \varepsilon \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), p_{xy} = \varepsilon \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \end{aligned} \right\} (16)$$

sendo

$$p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) - \frac{2\varepsilon}{3} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

ou, attendendo a (9),

$$p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Este coefficiente  $p$  representa não a *pressão hydrostatica*, mas a que se exerceria no ponto  $x, y, z$  do fluido, se as moleculas perdessem instantaneamente a sua velocidade. Este terço da somma das tres acções moleculares normaes, constante para todos os systemas de eixos orthogonaes, é a parte das que subsistiriam se o attrito não fosse nullo; o seu valor é função não só da acção da gravidade, como a pressão hydrostatica, mas ainda das forças de inercia. É este valor de  $p$  que designaremos pelo nome de *pressão*.

Substituindo em (5) os valores de  $p_{xx} \dots$ , dados por (15) teremos as tres equações, *indefinidas*, do movimento em qualquer ponto do interior do corpo,

$$\left. \begin{aligned} \rho (X - u') - \frac{dp}{dx} + \varepsilon \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) &= 0, \\ \rho (Y - v') - \frac{dp}{dy} + \varepsilon \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) &= 0, \\ \rho (Z - w') - \frac{dp}{dz} + \varepsilon \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

que são as equações de Navier.

Estas equações juncas a (7) e (8) ou sómente a (9), conforme a densidade é variavel ou constante, e integradas determinam em qualquer ponto de um liquido as variaveis desconhecidas  $\rho$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  em funcção das variaveis independentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ . Nos gazes a equação de continuidade é (6), mas a quinta variavel é determinada pela relação (10) ou (10') entre a pressão e a densidade.

Se o escoamento do gaz tem logar sob a influencia de pressões muito pequenas relativamente á media das supportadas em todos os sentidos, as moleculas conservam-se sensivelmente incompressiveis e a condição de continuidade é expressa pelas equações (7) e (8). Neste caso o coefficiente  $\varepsilon$  é sufficientemente pequeno para que se possa desprezar o segundo termo de  $p$ , e portanto as equações do movimento são ainda (17).

Se a viscosidade do fluido é extremamente pequena, teremos sensivelmente

$$p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0,$$

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p,$$



e as equações de Navier reduzem-se a

$$\rho (X - u') = \frac{dp}{dx},$$

$$\rho (Y - v') = \frac{dp}{dy},$$

$$\rho (Z - w') = \frac{dp}{dz}$$

que são as equações da hydrodynamica racional em que se continua a suppôr, como em hydrostatica, que as acções moleculares são normaes, e onde as accelerações  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  estão substituidas pelos seus valores.

**15.** Occupemo'-nos agora das equações, *definidas*, a satisfazer em contacto com as paredes e á superficie do fluido.

Quando os liquidos molham os solidos, ha, como adiante veremos, adherencia completa das moleculas liquidas em contacto e, por isso, basta igualar a zero as componentes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  da velocidade d'essas moleculas quando a parede está em repouso, ou ás componentes das velocidades dos pontos da parede a que estão fixas as moleculas liquidas, quando esta está em movimento.

Quandos os liquidos não molham os solidos em contacto, a adhesão é ainda completa para alguns, como o mercurio no vidro, a agua em tubos de paraffina; se, porém, a velocidade das moleculas em contacto com as paredes não é nulla, basta igualar  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ás componentes d'essa velocidade em relação á da parede, ou á resultante d'esta e da velocidade da parede, segundo esta está em repouso ou em movimento.

Á superficie livre admite-se que o liquido não soffre attrito

consideravel da atmosphera ambiente. As tres condições obtêm-se exprimindo que são nullas as componentes tangenciaes da força exercida pelo liquido sobre a superficie, e que a componente normal faz equilibrio á pressão atmospherica.

Esta igualdade das acções moleculares de um e outro lado da camada superficial não se realiza todavia completamente nos liquidos, quando esta tem uma curvatura consideravel. A experiencia mostra, com effeito, que a camada considerada é a séde de uma força apreciavel, a *tensão superficial*, que introduz pequenas perturbações cujo estudo constitue a theoria da capillaridade.

**16.** Considere-se em cada ponto: 1° os tres elementos lineares  $dr$ ,  $r d\theta$ ,  $dz$ , sendo o primeiro segundo o raio  $r$  tirado perpendicularmente ao eixo dos  $z$ , o terceiro paralelo a este eixo e o segundo n'uma direcção  $t$  normal aos outros dois; 2° as tres componentes da velocidade, parallelas a estas direcções, que designaremos respectivamente por  $a$ ,  $V$ ,  $w$ ; 3° as componentes, segundo estas direcções, das acções exercidas sobre a unidade de superficie dos elementos planos que lhe são normaes: designaremos segundo a notação empregada por  $p_{rr}$ ,  $p_{rt}$ ,  $p_{rz}$  as componentes relativas ao elemento de superficie normal a  $dr$ ;  $p_{tt}$ ,  $p_{tr}$ ,  $p_{tz}$  as relativas ao elemento normal a  $r d\theta$ ; por  $p_{zt}$ ,  $p_{zr}$ ,  $p_{zz}$  as relativas ao elemento normal a  $dz$ .

Seja em coordenadas rectangulares o plano dos  $zx$  tirado pelo eixo dos  $z$  e por um ponto qualquer  $M(r, \theta, z)$ , sendo por consequencia, o eixo dos  $y$  uma parallela ao eixo dos  $t$  ou ao arco elementar  $r d\theta$ . N'este plano, as componentes da acção molecular  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ ,  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$ ,  $p_{yz}$  e as da velocidade  $u$ ,  $v$ ,  $w$  relativas ás coordenadas rectangulares, confundem-se com  $p_{rr}$ ,  $p_{tt}$ ,  $p_{rt}$ ,  $p_{zt}$ ,  $p_{tr}$ ,  $p_{rz}$ ,  $a$ ,  $V$ ,  $w$ , e as derivadas em relação a  $x$  e a  $z$  de uma

função qualquer, com as derivadas da mesma função em relação a  $r$  e a  $z$ . Além d'isso, como as derivadas em relação a  $y$  são agora tomadas ao longo do arco  $r d\theta$ , para a transformação d'estas basta usar da fórmula  $\frac{d}{dy} = \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}$ .

Posto isto, procuremos as expressões das antigas acções  $p_{xx} \dots$ , em função das actuaes  $p_{rr} \dots$ , nos pontos muito proximos do plano dos  $zx$ , quando  $y$  tem um valor infinitamente pequeno  $r(\theta' - \theta)$ . N'estes pontos, as componentes  $p_{tt} \dots, p_{rt} \dots$ , são as relativas a um systema de eixos rectangulares que se deduziria do primeiro por uma rotação infinitamente pequena  $\theta' - \theta$  d'estes em volta do eixo dos  $z$ . Ora, despresando os infinitamente pequenos de ordem superior á primeira, teremos

$$\cos(x, x') = \cos(y, y') = \cos(z, z') = 1$$

$$\cos(x', z) = \cos(y', z) = \cos(x, z') = \cos(y, z') = 0$$

$$\cos(x', y) = -\cos(x, y') = \theta' - \theta$$

e as equações (3) dão n'este caso

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= p_{rt} + (p_{rr} - p_{tt})(\theta' - \theta) \\ p_{yz} &= p_{zt} + p_{rz}(\theta' - \theta) \\ p_{yy} &= p_{tt} + 2p_{rt}(\theta' - \theta). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

Além d'isso,

$$x = x' - y'(\theta' - \theta),$$

$$y = y' + x'(\theta' - \theta)$$

d'onde

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = a - V(\theta' - \theta), \\ v &= \frac{dy}{dt} = V + a(\theta' - \theta), \\ w &= w \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Estas formulas mostram que se  $\theta$  varia de  $d\theta = \theta' - \theta$  ou  $y$  de  $rd\theta$ , sem que  $x$ ,  $r$ ,  $z$  variem sensivelmente, ter-se-ha com um erro de ordem superior

$$\begin{aligned} \frac{dp_{xy}}{dy} &= \frac{1}{r} \frac{dp_{rt}}{d\theta} + \frac{p_{rr} - p_{tt}}{r}, & \frac{dp_{yz}}{dy} &= \frac{1}{r} \frac{dp_{zt}}{d\theta} + \frac{p_{rz}}{r} \\ \frac{dp_{yy}}{dy} &= \frac{1}{r} \frac{dp_{tt}}{d\theta} + 2 \frac{p_{rt}}{r}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{r} \frac{da}{d\theta} - \frac{V}{r}, & \frac{dv}{dy} &= \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} + \frac{a}{r}, & \frac{dw}{dy} &= \frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta}. \end{aligned}$$

Substituindo nas equações (17)  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  pelos seus valores, podemos, por meio das relações precedentes e do que dissemos para a transformação das derivadas em relação a  $x$  e a  $z$  de uma função, tornar os seus primeiros membros unicamente funções de  $pu \dots$ , das velocidades  $a$ ,  $V$ ,  $w$  e das variaveis independentes  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ ,  $t$ .

Suppondo o eixo dos  $z$  vertical, dirigido de cima para baixo, e as forças exteriores reduzidas á acção da gravidade, de modo que

$$X = Y = 0, \quad Z = g,$$

teremos as equações indefinidas

$$\begin{aligned}
 & \frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dp_{rt}}{d\theta} + \frac{dp_{rz}}{dz} + \frac{p_{rr} - p_{tt}}{r} \\
 & = \rho \left( \frac{da}{dt} - \frac{V^2}{r} + a \frac{da}{dr} + \frac{V}{r} \frac{da}{d\theta} + w \frac{da}{dz} \right), \\
 & \frac{dp_{tr}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dp_{tt}}{d\theta} + \frac{dp_{tz}}{dz} + \frac{2}{r} p_{rt} \\
 & = \rho \left( \frac{dV}{dt} + \frac{aV}{r} + a \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \frac{dV}{d\theta} + w \frac{dV}{dz} \right), \\
 & \frac{dp_{zr}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dp_{zt}}{d\theta} + \frac{dp_{zz}}{dz} + \frac{1}{r} p_{rz} + g = \rho \left( \frac{dw}{dt} + a \frac{dw}{dr} + \frac{V}{r} \frac{dw}{d\theta} \right. \\
 & \quad \left. + w \frac{dw}{dz} \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Resta determinar as componentes das acções moleculares segundo as novas direcções.

As componentes  $p_{xx}$ ,  $p_{xz}$ ,  $p_{zz}$  são respectivamente identicas a  $p_{rr}$ ,  $p_{rz}$ ,  $p_{zz}$  referidas aos novos eixos; substituindo n'ellas e nas tres componentes  $p_{yy}$ ,  $p_{yz}$ ,  $p_{xy}$  que entram nas equações (18),  $u$  e  $v$  pelos seus valores dados por (19), obtem-se

$$\begin{aligned}
 & p_{rr} = -p + 2\varepsilon \frac{da}{dr}, \quad p_{tt} = -p + 2\varepsilon \left( \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} + \frac{a}{r} \right), \\
 & p_{zz} = -p + 2\varepsilon \frac{dw}{dz}, \\
 & p_{tz} = \varepsilon \left( \frac{dV}{dz} + \frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} \right), \quad p_{rz} = \varepsilon \left( \frac{dw}{dr} + \frac{da}{dz} \right), \\
 & p_{rt} = \varepsilon \left( r \frac{d}{dr} \frac{V}{r} + \frac{1}{r} \frac{da}{d\theta} \right),
 \end{aligned} \tag{21}$$

valores que, substituídos nas equações precedentes, dão as equações de Navier em coordenadas cylindricas, n'este caso particular.

A equação (9) torna-se

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{dV}{d\theta} + \frac{d(ra)}{dr} \right] + \frac{d(rw)}{dz} = 0 \dots \dots \dots (22).$$

**17.** As equações precedentes simplificam-se notavelmente quando o movimento é identico em todos os planos tirados pelo eixo dos  $z$ . N'este caso, tem-se

$$\frac{da}{d\theta} = 0, \quad \frac{dV}{d\theta} = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0;$$

e a equação (22) torna-se

$$\frac{da}{dr} + \frac{a}{r} + \frac{dw}{dr} = 0 \dots \dots \dots (23).$$

Além d'isso, os valores de  $\frac{dp}{dr}$ ,  $\frac{dp}{d\theta}$ ,  $\frac{dp}{dz}$  dados por (20) são então independentes de  $\theta$ , isto é,  $\frac{dp}{d\theta}$  é independente de  $\theta$ ,  $r$ ,  $z$  e portanto uma simples funcção,  $-\rho f(t)$ , do tempo. Se o liquido é um fluido perfeito, ou  $\varepsilon = 0$ , o primeiro membro da segunda equação de (20), depois de multiplicada por  $\frac{r}{\rho}$  torna-se em  $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\theta}$  ou  $f(t)$ . Teremos portanto

$$f(t) = \frac{d(rV)}{dt} + a \frac{d(rV)}{dr} + \frac{V}{r} \frac{d(rV)}{d\theta} + w \frac{d(rV)}{dz}.$$

Ora, o segundo membro é a derivada total de  $rV$ , tomada ao longo da trajetória de uma molecula, isto é, da derivada que se obtém fazendo variar  $t$  de  $dt$ ,  $r$  de  $adr$ ,  $\theta$  de  $\frac{V}{r} dt$ ,  $z$  de  $w dt$ .

Multiplicando por  $dt$  e designando por  $r_0$ ,  $V_0$  os valores de  $r$ ,  $V$  relativos á molecula considerada no instante  $t=0$ , vem

$$rV = r_0 V_0 + \int_0^t f(t) dt.$$

Se  $\frac{dp}{d\theta}$  ou  $f(t)$  é nulla, esta equação exprime que o *princípio da conservação das areas* é applicavel, em relação a um eixo vertical, ao movimento das moleculas de um fluido perfeito, se a pressão é em cada instante identica em todos os pontos de uma circumferencia qualquer descripta no plano normal ao eixo e com o centro no ponto de intersecção d'este com o plano considerado. Este resultado era facil de prever, por ser cada molecula apenas sollicitada por uma força que passa constantemente pelo eixo. Notando que  $\frac{V}{r} = \omega$ , velocidade angular, a equação precedente torna-se

$$r^2 \omega = r^2 \omega_0.$$

Logo, *na hypothese considerada, a velocidade angular de uma molecula varia em razão inversa do quadrado da distancia ao eixo.*

Suppondo  $\varepsilon$  differente de zero e  $\frac{dp}{d\theta} = 0$ , as equações (20)

tornam-se, attendendo a (23),

$$\left. \begin{aligned} -\rho \left( \frac{da}{dt} + a \frac{da}{dr} + w \frac{da}{dz} - r\omega^2 \right) - \frac{dp}{dr} + \varepsilon \left( \frac{d^2a}{dr^2} + \frac{d^2a}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - \frac{a}{r^2} \right) &= 0, \\ -\rho r \left( \frac{d\omega}{dt} + a \frac{d\omega}{dr} + w \frac{d\omega}{dz} - 2 \frac{a}{r} \omega \right) + \varepsilon \left( r \frac{d^2\omega}{dr^2} + r \frac{d^2\omega}{dz^2} + 3 \frac{d\omega}{dr} \right) &= 0, \\ \rho \left( g - \frac{dw}{dt} - a \frac{dw}{dr} - w \frac{dw}{dz} \right) - \frac{dp}{dz} + \varepsilon \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} (24)$$

**18.** Os principios que nos levaram ás formulas (16) não implicam a constancia do coeſiciente de proporcionalidade  $\varepsilon$  quando se passa de um ponto para outro. No que vamos dizer supponhamos, porém, este coeſiciente constante.

Imagine-se uma camada fluida comprehendida entre o plano horizontal  $x y$  e um plano paralelo situado á distancia  $h$  e animado de velocidade constante parallela ao eixo dos  $x$ ; supponhamos, além d'isso, as forças exteriores reduzidas á acção da gravidade. Teremos nas equações de Navier

$$X = Y = 0, \quad Z = -g,$$

e por causa da symetria

$$v = w = 0.$$

A equação de continuidade (9), reduz-se a

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

Ora, como o movimento do plano é constante, o do fluido ar-



rastado torna-se permanente passado um certo tempo e a partir d'esse instante  $\frac{du}{dt} = 0$  e portanto  $u'$  é nulla.

Suppondo, além d'isso, que o movimento do fluido é simplesmente devido ao do plano movel, teremos

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

As formulas (16) dão

$$p_{yz} = p_{xy} = 0, \quad p_{xz} = -\epsilon \frac{du}{dz},$$

e as equações de Navier tornam-se

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{dp}{dz} = -g.$$

As duas ultimas equações mostram que a pressão, em cada secção normal ao eixo dos  $x$ , varia segundo o principio fundamental da hydrostatica.

A terceira integrada, suppondo que a adhesão do liquido aos planos considerados é completa, ou

$$u = 0, \text{ para } z = 0; \quad u = V \text{ para } z = h,$$

dá

$$u = \frac{V}{h} z, \text{ e portanto } p_{xz} = -\epsilon \frac{V}{h}$$

que é o valor da acção molecular tangencial sobre um elemento plano de superficie igual á unidade e parallelo ao plano dos  $xy$ .

Ora  $p_{xx}$ , que representa em valor absoluto a força que seria preciso applicar á unidade de superficie de um dos planos considerados para lhe conservar uma velocidade constante em relação ao outro, torna-se igual a  $\epsilon$ , se  $V = 1$ ,  $h = 1$ .

Imaginando, pois, na massa liquida dois planos parallellos á unidade de distancia, moveis um em relação ao outro, o coefficiente  $\epsilon$ , supposto constante, é igual á força necessaria por unidade de superficie para conservar a um dos planos uma velocidade relativa igual á unidade. A esta quantidade dá-se o nome de *coefficiente de viscosidade* ou de *atrito interno*.

## Verificações experimentaes

### Experiencias com os tubos

**19.** As equações de Navier concordam perfeitamente com a experiencia quando os tubos de escoamento dos liquidos são de calibre muito pequeno, e a carga por unidade de comprimento não excede certos limites. Mas o coefficiente de viscosidade  $\epsilon$  assim deduzido é muito pequeno e, se  $u, v, w$  fossem ainda funções continuas das coordenadas no escoamento em tubos de canalisação, nos canaes descobertos e ainda nos tubos de pequeno diametro quando a carga é superior a um certo limite, seriam precisas variações consideraveis de velocidade no sentido transversal aos filetes para que o attrito fizesse equilibrio á componente da gravidade no sentido do eixo do canal. Ora, ainda que no principio se estabelecessem semelhantes velocidades, a menor resistencia opposta ao movimento pelas irregularidades da parede ou por qualquer outra causa seria sufficiente para desviar os filetes fluidos, dando logar á producção de forças vivas transversaes e a resistencias especiaes superiores ás resultantes do verdadeiro attrito.

Estes movimentos intestinos tornam-se sobretudo intensos quando a differença de velocidade entre os filetes contiguos é consideravel, originando-se então movimentos turbilhonares que possuem uma resistencia propria e se propagam no interior do fluido, durante um certo tempo, transformando-se uma parte da força viva do fluido em calor e moderando a intensidade da corrente. Examinando o que se passa em volta dos corpos mergulhados n'uma corrente, observam-se, com effeito, quando a velocidade não é muito pequena, turbilhões mais ou menos persistentes destacarem-se do corpo e propagarem-se atravez da massa fluida.

É evidente que a producção d'essas resistencias deve diminuir com a secção do tubo e annular-se quando esta decresce indefinidamente, porque, tornando-se os desvios das moleculas das suas trajetorias regulares cada vez menores, as resistencias extranhas á viscosidade, desenvolvidas no seio do liquido, decrescem indefinidamente e as velocidades terminarão por variar continuamente da parede para o eixo. É assim que nos tubos capillares, para certos valores da carga, o escoamento é regulado pelas leis de Navier em que  $\epsilon$  é supposto constante. Nos tubos de canalisação, e mais geralmente quando o contorno molhado é consideravel, a resistencia interna deve, pois, depender não só das velocidades relativas dos filetes, mas ainda das absolutas, como o pretendia Bazin, e a influencia do contorno deve ter influencia sobre a viscosidade apparente, como Darcy o tinha concluido das suas experiencias.

Kleitz e Levy pretendem que as velocidades são ainda funcções continuas das coordenadas quando o contorno molhado é qualquer, dependendo a acção dynamica de duas moleculas, como o pretendia Navier, apenas da sua velocidade relativa. A insufficiencia das equações de Navier resultaria da ausencia n'aquella

expressão das potencias superiores das primeiras derivadas da velocidade, segundo Kleitz, ou das derivadas de ordem superior, como o suppõe Levy. Estas hypotheses tornam-se inadmissiveis, se attendermos a que os termos complementares têm valores maiores nos casos do escoamento em tubos capillares, onde é impossivel admittil-os, do que nos movimentos das aguas correntes.

O regimen permanente não pôde, pois, rigorosamente estabelecer-se senão nos tubos capillares; nos outros casos, as velocidades das moleculas longe de apresentarem o mesmo valor em cada ponto, variam com o tempo, mas estas variações são *periodicas*.

Numerosas observações demonstram esta periodicidade. As oscillações que se observam nos jactos de agua variam periodicamente, ainda mesmo que sejam alimentados por vastos reservatorios. Nas correntes estabelecidas nas condições de regimen permanente, a alavanca de hydrodinometro de Boileau executa um duplo systema de oscillações tanto mais rapidas quanto mais consideravel for a velocidade do liquido. O ruido das quedas de agua quando não ha causas perturbadoras, como a agitação da atmosphaera, eleva-se e abaixa regularmente. Igual periodicidade se observa nos rios, tendo então o nome de *pulso*. Tomando em grandeza e direcção a media das velocidades em cada ponto durante esse periodo, obtêm-se valores que variam continuamente com as coordenadas e a que se dá o nome de *velocidades medias locaes*.

**20.** Os principios em que se funda a deducção das equações (17) são ainda verdadeiros quando o movimento da massa fluida é affecto das irregularidades de que acabamos de tratar, comtanto que  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p_{xx}$  . . . , representem as velocidades e as

acções medias locaes, em volta das quaes oscillam as velocidades e as acções reaes em cada ponto e em cada instante.

Com effeito, as relações de cinematica (14), (14') suppõem apenas que as direcções e grandezas das velocidades de translação dos elementos fluidos variam continuamente, e esta continuidade manifesta-se ainda nas velocidades medias locaes, pelo menos quando se exceptuar os casos de movimentos turbilhonares muito intensos produzidos pelo augmento rapido das secções molhadas <sup>1)</sup>. As relações de estatica expressas pelas equações (3) baseiam-se sobre o equilibrio das acções moleculares exercidas sobre as faces de um elemento de volume considerado no interior de um meio qualquer. Ora, dando aos elementos de volume considerados dimensões finitas que os tornem capazes de conter alguns turbilhões e tomando a media das acções durante o periodo indicado, poderemos estabelecer entre as acções medias o mesmo equilibrio que entre as acções que se exercem instantaneamente sobre faces infinitamente pequenas. Em todas as correntes que não são muito tumultuosas, em que as velocidades medias locaes variam com uma certa regularidade, existem, pois, em cada ponto e em cada instante, as relações (15) entre as derivadas d'estas velocidades e as componentes da pressão media local. Por outro lado, multiplicando as equações (5) por  $\frac{dt}{\tau}$ , sendo  $\tau$  o periodo do movimento do liquido, e integrando-as entre  $t$  e  $t + \tau$ , teriamos tres equações da mesma fórma entre as acções moleculares e as accelerações medias locaes.

D'este modo, para estabelecer as equações differenciaes indefinidas do movimento mais geral dos fluidos, basta determinar os valores do coefficiente  $\epsilon$  em cada ponto.

---

<sup>1)</sup> Comptes rendus t. LVIII, p. 727; 1864.

Este coefficiente depende da agitação turbilhonar e não tem significação physica precisa, sendo em cada ponto funcção da velocidade media, da fôrma e grandeza do contorno molhado, e do grau de polido da superficie. Occupar-nos-emos portanto sómente do escoamento em tubos capillares.

**21.** Considere-se um tubo cylindrico indefinido de base circular cujo eixo faz o angulo  $\alpha$  com o horizonte; tome-se este eixo para eixo dos  $x$  e a parte inferior da normal no plano vertical para eixo dos  $z$  positivos. Suppondo as trajetorias das moleculas parallelas ao eixo do tubo, ter-se-á

$$v = w = 0,$$

e a equação de continuidade reduz-se a  $\frac{du}{dx} = 0$ .

Se o liquido se move sollicitado unicamente pela acção da gravidade, tem-se

$$X = g \sin \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = g \cos \alpha$$

e se o regimen é permanente

$$u' = 0,$$

o que reduz as equações (17) a

$$\rho g \sin \alpha - \frac{dp}{dx} + \varepsilon \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0, \quad -\frac{dp}{dy} = 0, \quad \rho g \cos \alpha - \frac{dp}{dz} = 0.$$

Integrando esta ultima equação, virá

$$p = \pi + \rho g z \cos \alpha,$$

na qual  $\pi$  é a pressão n'um ponto do eixo do tubo ou em qualquer outro da horizontal tirada por elle, como o mostra a segunda equação. Em cada secção normal a pressão está, pois, submetida á lei fundamental de hydrostatica.

Substituindo  $p$  na primeira equação, vem

$$\rho g \operatorname{sen} \alpha - \frac{d\pi}{dx} + \varepsilon \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0.$$

Ora, como  $u$  é independente de  $x$  e  $\pi$  é sómente funcção d'esta variavel, esta equação dá

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = -A \dots \dots \dots (1)$$

sendo  $A$  uma constante. Tem-se então

$$\rho g \operatorname{sen} \alpha - \frac{d\pi}{dx} = A \varepsilon,$$

d'onde

$$\pi_0 - (\pi - \rho g l \operatorname{sen} \alpha) = A \varepsilon l,$$

sendo respectivamente  $\pi_0$  e  $\pi$  os valores que toma  $\pi$  quando  $x=0$ ,  $x=l$ .

O primeiro membro é a differença de carga entre as duas secções distantes de  $l$ ; designando-a por  $C$ , vem

$$C = A \varepsilon l.$$

Posto isto, integremos (1), pondo

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \operatorname{sen} \theta,$$

sendo  $\theta$  o angulo formado pelo raio vector com a horizontal em



cada secção. Esta equação torna-se

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + Ar = 0.$$

Integrando, temos

$$r \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} Ar^2 = 0$$

em que não é precisa a constante, porque o primeiro membro annulla-se quando é  $r=0$ .

Uma segunda integração dá

$$u = -\frac{1}{4} Ar^2 + C.$$

Para determinar a constante supponhamos, como Navier, que as moléculas fluidas escorregam ao longo da parede do tubo e seja  $u_1$  a sua velocidade; ter-se-á

$$u = \frac{1}{2} A(R^2 - r^2) + u_1.$$

Ora, se  $E$  é o *coefficiente de attrito exterior*, isto é, a relação constante entre o attrito por unidade de superficie da parede e a velocidade respectiva, considerando este elemento de superficie normal ao eixo dos  $y$  e notando que então  $\theta = 0$ , teremos

$$u_1 = -\frac{\varepsilon}{E} \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \frac{A \varepsilon R}{E}.$$

Logo

$$u = \frac{C}{4\varepsilon l} (R^2 - r^2) + \frac{1}{2} \frac{CR}{\varepsilon E},$$

e a despesa será

$$q = 2\pi \int_0^R ur dr = \frac{\pi R^4 C}{8\epsilon l} \left(1 + \frac{4\epsilon}{RC}\right) \dots \dots \dots (2).$$

Como esta formula foi deduzida suppondo as velocidades em cada ponto do liquido parallelas ao eixo do tubo, C não representa a differença de carga entre as duas extremidades, porque não só esta condição se não realiza n'estes pontos, mas o attrito que o liquido experimenta á entrada e sahida do tubo produz uma certa perda de carga. O movimento só é o mesmo que se o tubo fosse indefinido a uma certa distancia das extremidades. Designando por  $l_1 - \lambda$  a distancia de duas secções entre as quaes esta condição é realisada, sendo  $l_1$  o comprimento do tubo, por  $C_1 - \gamma$  a differença de carga correspondente, a formula (2) dá

$$q = \frac{\pi R^4}{8\epsilon} \frac{C_1 - \gamma}{l_1 - \lambda} \left(1 + \frac{4\epsilon}{RC}\right) \dots \dots \dots (3)$$

**22.** Poiseuille, com o fim puramente physiologico de determinar o movimento do sangue nos vasos capillares, procurou experimentalmente as leis que regulam o escoamento da agua em tubos de vidro de diametros comprehendidos entre 0<sup>mm</sup>,65 e 0<sup>mm</sup>,015.

A experiencia consistia em fazer escoar sob pressão constante, regulada por um reservatorio de ar comprimido, uma quantidade determinada de agua. O tubo capillar durante o escoamento estava collocado horizontalmente e em communicação com um tubo capillar vertical no qual está soldada uma esphera, comprehendida entre dois traços de *reparo* situados de um e outro lado á distancia de 2<sup>cm</sup>,2 da esphera. O tubo capital, a esphera e um thermometro estavam mergulhados n'um vaso de

vidro cheio de agua. Para tornar a temperatura mais constante, Poiseuille collocava o vaso de vidro n'uma tina cheia de agua á mesma temperatura. Por meio de uma luneta installada horizontalmente determinava-se o tempo decorrido entre a passagem do nivel pelo reparo superior e pelo inferior, tomando nota da pressão e da temperatura n'estes dois instantes. O diametro dos tubos era avaliado com um microscopio munido de uma camara clara. A pressão variava até oito atmospheras.

Designando por  $Q$  o debito avaliado em milligrammas, por  $H$  a pressão em millímetros de mercurio a  $0^\circ$ , por  $D$  o diametro do tubo em millímetros e por  $L$  o seu comprimento, as experiencias da primeira serie são representadas pela formula

$$Q = k \frac{HD^4}{L} \dots\dots\dots (4),$$

em que  $k$  é um coefficiente constante relativamente a cada liquido, se a sua temperatura não varia. Por meio de uma serie de experiencias feitas a temperaturas successivamente crescentes de cinco em cinco graus, desde a temperatura de gelo em fusão até  $45^\circ$ , Poiseuille determinou, em relação á agua, a formula empirica

$$k = 1836,724 (1 + 0,0336793t + 0,0002209936t^2) \dots (5)$$

sendo  $t$  a temperatura em graus centigrados.

Esta formula mostra que a velocidade de escoamento varia muito rapidamente com a temperatura, sendo a  $45^\circ$  duas vezes e meia maior do que a  $5^\circ$ .

Como a formula (4) se refere ás experiencias da primeira serie em que os tubos eram muito compridos e a velocidade de escoamento

mento pouco consideravel, podemos em (3) suppor nullos  $\gamma$  e  $\lambda$ . As formulas (3) e (4) tornam-se então comparaveis, fazendo  $E = \infty$ , isto é, suppondo que a velocidade de escorregamento ao longo das paredes se torna nulla <sup>1)</sup>.

Identificando então as duas expressões (3) e (4), vem

$$\varepsilon = \frac{\pi}{128k}.$$

Na formula (5) é  $k_0 = 1836^{\text{mmc}},721$ , sendo a unidade do tempo o segundo, a unidade de comprimento o millimetro, a unidade de pressão a de um millimetro de mercurio. Tomando as unidades CGS e notando que a pressão de um millimetro de mercurio sobre um centimetro quadrado é igual a  $1^{\text{sr}},359$  ou, sensivelmente,  $359 \times 981 = 1333$  dynes, ter-se-á

$$k_0 = \frac{1836,724}{1333} = 1^{\text{cc}},3777,$$

o que dá

$$\varepsilon_0 = 0,01782.$$

A uma temperatura qualquer  $t$ , tem-se

$$\varepsilon = \frac{0,01782}{1 + 0,0336793t + 0,0002209936t^2} \dots \dots (6)$$

Se  $t = 10^0$ , esta formula dá

$$\varepsilon = 0,013092.$$

A segunda serie de experiencias não está de accordo com a theoria de Navier. A lei das pressões e a dos comprimentos só

<sup>1)</sup> E. Mathieu C. rendus, t. LVII, pag. 320.

se manifestam quando o comprimento é superior e a pressão inferior a certos limites.

**23.** Para operar em condições variadas de pressão e com tubos de comprimentos quaesquer, Couette elimina  $\lambda$  e  $\gamma$ , fazendo escoar o liquido atravez de dois tubos de comprimentos diferentes  $l_1$  e  $l_2$ , mas da mesma substancia e do mesmo diametro. Regulando as diferenças de carga  $C_1$  e  $C_2$  de modo que o debito seja egual nos dois tubos e subtrahindo a  $l_1$  e  $l_2$  um comprimento commum  $\lambda$  tal que o movimento nas regiões medias restantes dos tubos seja identico ao que teria logar n'um tubo indefinido, as quantidades  $\gamma$  a subtrahir a  $C_1$  e  $C_2$  são evidentemente eguaes, porque  $\gamma$  só pode depender dos valores  $R$ ,  $\varepsilon$ ,  $g$ ,  $\lambda$  e da densidade  $\rho$  do liquido, que são eguaes nos dois tubos. Teremos portanto

$$q = \frac{\pi R_4}{8\varepsilon} \frac{C_1 - \gamma}{l_1 - \lambda} = \frac{\pi R_4}{8\varepsilon} \frac{C_2 - \gamma}{l_2 - \lambda},$$

d'onde

$$q = \frac{\pi R_4}{8\varepsilon} \frac{C_1 - C_2}{l_1 - l_2} \dots \dots \dots (7).$$

**24.** Couette dispõe os dois tubos entre tres reservatorios, communicando um dos extremos com um vaso de Mariotte cheio de agua ordinaria e tendo o outro um orificio destinado á sahida do liquido.

Cada reservatorio communica por um tubo de chumbo recurvado em angulo recto com um manometro formado de tres tubos do mesmo metal em communicação na parte inferior. Cada tubo manometrico é munido de uma torneira de tres vias que permite: 1.º estabelecer a communicação com os reservatorios; 2.º estabelecer a communicação com os ramos de vidro verticaes abertos que estão em seguida aos tubos inferiores; 3.º inter-

romper a comunicação dos reservatórios com os manômetros, afim de immobilisar as columnas e permittir avaliar as diferenças de nivel com todas as precauções, por meio do cathetometro; 4.º expulsar as bolhas de ar que possam existir nos tubos de chumbo ou no manometro inferior. Este contém mercurio e serve para as grandes diferenças de carga; para as pequenas serve o manometro de agua formado pelos tubos verticaes collocados por cima das torneiras.

As variações da carga obtêm-se por meio de um reservatorio de ar comprimido em comunicação com o vaso de Mariotte. A temperatura é dada por um thermometro mergulhado no primeiro reservatorio. O debito  $q$  pode fazer-se variar, modificando a pressão no reservatorio, ou abrindo mais ou menos a torneira collocada entre o vaso de Mariotte e o primeiro reservatorio. Determina-se recebendo o liquido que sai do terceiro reservatorio n'um vaso tarado e pesando-o em seguida.

Couette fez duas series de experiencias. Na primeira os comprimentos dos tubos eram respectivamente  $l_1 = 15^{\text{cm}}, 848$ ,  $l_2 = 5^{\text{cm}}, 272$  e o raio  $R = 0^{\text{cm}}, 04998$ . Os resultados acham-se indicados na tabella seguinte cuja primeira linha indica a ordem das experiencias:

N.º	$t$	$q$	.	°10
1....	10,7	0,1854	0,01293	0,01318
2....	10,7	0,9911	1286	1311
3....	10,2	1,227	1287	1294
4....	8,9	1,344	1332	1310
5....	10,9	1,748	1282	1314
6....	11,1	1,880	1294	1334
7....	11,3	2,064	1303	1351
8....	9,1	2,313	1416	1381
9....	11,5	2,337	1584	1652
10....	11,7	2,730	2277	2386

em que  $t$  é a temperatura da agua,  $\epsilon_{10}$  o valor que teria  $\epsilon$  á temperatura de  $10^\circ$  segundo a formula (6).

Este coefficiente nas cinco primeiras experiencias conserva-se sensivelmente constante e o seu valor medio 0,01309 é o dado pelas experiencias de Poiseuille, embora n'estas se empregasse agua distillada. Nas duas seguintes  $\epsilon_{10}$  augmenta pouco, mas nas seguintes cresce rapidamente.

Na segunda serie os comprimentos dos tubos eram  $l_1 = 22^{\text{cm}}, 616$ ,  $l_2 = 7^{\text{cm}}, 248$  e o seu raio  $R = 0^{\text{cm}}, 09036$ . Os resultados acham-se indicados natabella seguinte:

N.º	$t$	$q$	$\epsilon$	$\epsilon_{12}$
8....	11,4	2,059	1302	1281
3....	13,9	2,307	1225	1289
5....	13,4	3,052	1248	1296
4....	13,2	3,148	1248	1289
2....	13,9	3,628	1418	1492
6....	13,5	3,771	1283	1336
1....	13,7	5,210	2472	2487
9....	11,5	5,808	2677	2661
10....	11,7	8,022	3315	3306
11....	11,4	9,655	3775	3781
12....	11,7	11,089	4198	4199

Nas quatro experiencias (8, 3, 5, 4) o valor de  $\epsilon_{12}$  conserva-se sensivelmente constante, embora o debito variasse na proporção de 2 para 3; as duas experiencias seguintes dão resultados discordantes. Logo, porém, que o debito se torna superior a um certo limite (1, 9, 10, 11, 12), o coefficiente  $\epsilon$ , cresce regularmente com o debito, segundo a equação:

$$\epsilon = 0,00969 + 0,002913q.$$

**25.** O escoamento dos líquidos effectua-se, pois, segundo dois regimens distinctos, entre os quaes ha um intervallo em que se produz ora um, ora outro. O primeiro regimen é conforme ás equações de Navier; o segundo, pelo contrario, não está de accordo com essas equações e, quando se lhes applica, os valores de  $\epsilon$  obtidos crescem com a velocidade do escoamento segundo uma funcção linear.

Estes dois regimens podem observar-se pela experiencia seguinte. Um grande cylindro de vidro fixo a um suporte de zinco é munido de uma tubuladura lateral a que está fixo um tubo de vidro de 0<sup>cm</sup>, 25 de diametro e de 27<sup>cm</sup>, 8 de comprimento. Quando o reservatorio está cheio, a veia liquida é turva e a sua amplitude diminue gradualmente. Logo, porém, que o nivel desce abaixo de uma certa altura (quasi 75<sup>cm</sup>) a veia experimenta sobresaltos cada vez maiores, durante os quaes se torna liza e se eleva acima da sua posição habitual. Quando a carga se aproxima de 50<sup>cm</sup>, as oscillações são proximamente isochronas e de igual amplitude, sendo a veia liza acima da sua posição media e turva abaixo. Continuando a baixar o nivel, a veia torna-se liza, experimentando cada vez menos sobresaltos durante os quaes turva, até desaparecerem completamente quando a carga se torna inferior a 35<sup>cm</sup>.

Em todas as experiencias a que são applicaveis as leis de Poiseuille o debito é inferior ao debito limite inferior das oscillações, sendo superior no caso contrario; a veia liza corresponde, pois, ao primeiro regimen, a veia turva ao segundo, e no intervallo estes dois regimens alternam-se.

A disposição do orificio de escoamento tem uma influencia consideravel sobre o regimen. Se a agua se escoar por um tubo largo terminado por uma embocadura longa e affilada, o debito limite inferior das oscillações é maior do que se o tubo é do



mesmo diametro e de secção quadrada; quando se turva, o phenomeno tem lugar lentamente e sem oscillações. Com o mercurio é quasi sempre impossivel obter a veia liza, empregando-se um tubo de secção quadrada; se, porém, o orificio é envasado, manifestam-se os dois regimens e as oscillações na passagem de um para o outro, sendo essas mudanças de regimen mais nitidas do que empregando a agua.

O segundo regimen é o mais frequente e o que se realisa tambem nos tubos de canalisação, nos canaes descobertos e nos rios quando se estabelece o regimen permanente. De accordo com as ideias expostas, este segundo regimen é caracterizado pela formação de movimentos tumultuosos e turbilhonares no seio do liquido, como o mostrou Osborne Reynolds injectando um filete liquido corado no centro da veia liquida: a côr conserva-se regularmente na parte central durante o primeiro regimen; mas, logo que a pressão attinge um certo valor, a coloração espalha-se por toda a veia em turbilhões. Deve, porém, notar-se que o coefficiente de attrito não é em geral funcção linear do debito.

**26.** A adhesão completa do liquido ás paredes dos solidos em contacto é claramente demonstrada pelas experiencias precedentes.

O coefficiente de attrito obtido pelo methodo das oscillações de Coulomb e pelo do cylindro girante de Couette, de que adiante fallaremos, bem como a despeza no methodo de Poiseuille são independentes da natureza do solido em contacto com o liquido.

Couette verificou este resultado, fazendo escoar agua em tubos de lata, de cobre e de paraffina que obtinha por moldagem em volta de um fio metallico. A lei subsiste n'este ultimo caso, embora o liquido não molhe o tubo, como já se tinha notado

nas experiencias de Syn Koch e Warburg sobre o escoamento do mercurio em tubos de vidro.

Quando os solidos são molhados, a adhesão do liquido ás paredes comprehende-se perfeitamente e demonstra-se por experiencias directas. Duclaux mostrou que o alcool corado, contido no reservatorio de um thermometro, atravessa uma camada de alcool incolor sobreposto quando se aquece o reservatorio. O alcool incolor fórma uma especie de bainha dentro da qual o alcool corado se allonga em fórma de cone arredondado na parte superior. As moleculas liquidas em contacto com a parede conservam-se fixas e as da região media são as unicas a elevar-se. A difficuldade que ha em seccar, por meios mecanicos, um solido molhado, a ruptura inevitavel, produzida quando se separa um liquido do solido, de que Taylor e Gay-Lussac se serviam para determinar a viscosidade, mostram bem que a adhesão entre um fluido e um solido molhado é incomparavelmente superior á de duas camadas fluidas contiguas.

É suppondo á bainha liquida, immobilizada por adhesão sobre as paredes molhadas, uma espessura sensivel (proximamente meia millesima de millimetro nos liquidos pouco viscosos e á temperatura ordinaria), variavel com a carga, a natureza e a temperatura das substancias em contacto, que Duclaux explica as anomalias relativas ás leis de Poiseuille apresentadas pelos tubos muito capillares, assim como a impermeabilidade abaixo de certas pressões e com certos liquidos atravez de membranas de poros muito estreitos.

**27.** O coefficiente de attrito  $\epsilon$  de um liquido que se esco, segundo o primeiro regimen, n'um tubo circular indefinido de raio  $R$ , sob a influencia da differença de carga  $C$ , avaliada entre duas secções rectas á distancia  $l$  uma da outra e com o

debito  $q$ , é dado pela formula

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 C}{8 l q} \dots \dots \dots (8).$$

Mas, se o comprimento do tubo é  $l$  e  $C$  a differença de carga entre os reservatorios de entrada e de sahida do liquido, esta formula é apenas approximada, não sendo applicavel senão nos casos em que o comprimento do tubo é muito consideravel.

Seja  $S$  (Fig. 4) uma superficie qualquer, sujeita á condição de intersectar todos os filetes liquidos que entram no tubo a uma distancia tal que a velocidade em todos os seus pontos seja sensivelmente nulla, e  $MN$  a primeira secção recta do tubo a partir da qual o movimento do liquido é identico ao que teria logar no mesmo tubo, se fosse indefinido. Designe-se por  $p_0$  a pressão n'um ponto  $P$  de  $S$  e por  $p_0 - \gamma'$  a pressão n'um ponto  $P'$  da secção  $MN$  no mesmo plano horizontal.

Posto isto, considere-se o filete  $AB$  cujas intersecções com as superficies  $S$  e  $MN$  são respectivamente  $dS$  e  $ds$ , e applique-se-lhe o principio das forças vivas, suppondo estabelecido o regimen permanente. No fim do tempo infinitamente pequeno  $dt$ , este filete occupará a posição  $A'B'$ , e como a força viva da parte  $A'B$  se conserva constante, a variação de força viva do filete será o excesso da força viva de  $BB'$  sobre a de  $AA'$ .

Se  $\rho$  é a densidade do liquido,  $u_0$  a velocidade em  $A$ ,  $u$  a velocidade em  $B$ , parallelá ao eixo do tubo, a variação da força viva será

$$\rho u ds dt (u^2 - u_0^2),$$

ou, desprezando  $u_0^2$  que é muito pequeno em relação a  $u^2$ ,

$$\rho u^3 ds dt.$$

\*

Suppondo as acções lateraes eguaes e directamente oppostas, resta avaliar o trabalho motor, durante o tempo  $dt$ , da acção da gravidade e das acções exercidas sobre as secções extremas do filete, e o trabalho resistente do attrito.

Seja  $\Omega$  o trabalho total do attrito, durante a unidade de tempo, na região comprehendida entre S e MN; o trabalho produzido, durante a modificação do filete considerado, será

$$d\Omega dt.$$

Por outro lado, como o liquido está sensivelmente em repouso em S, designando por  $z$  a altura do elemento A acima do plano horizontal PP', a pressão sobre o elemento  $dS$  será

$$(p_0 - \rho gz) dS$$

e o trabalho, designando por  $\alpha$  o angulo formado pela normal com a direcção de  $u_0$ ,

$$(p_0 - \rho gz) u_0 \cos \alpha dS dt.$$

Ora

$$u_0 \cos \alpha dS = u ds.$$

Portanto o trabalho será

$$(p_0 - \rho gz) u ds dt.$$

O trabalho da pressão sobre o elemento  $ds$  será

$$-(p_0 - \gamma' - \rho gz) u ds dt,$$

e o da gravidade obtem-se multiplicando o peso total do elemento de volume AA' pelo deslocamento vertical do seu centro de gravidade, o que dá

$$\rho g u (z - z') ds dt.$$

Sommando todas estas expressões do trabalho e egualando a somma á força viva, teremos a equação

$$\frac{\rho}{2} u^3 ds = \gamma' u ds - d\Omega,$$

d'onde

$$\frac{\rho}{2} \sum_{MN} u^3 ds = \gamma' \sum_{MN} u ds - \Omega.$$

Ora

$$\sum_{MN} u ds = q;$$

logo

$$\frac{\rho}{2} \sum_{MN} u^3 ds = \gamma' q - \Omega \dots \dots \dots (9).$$

Para achar a expressão de  $\Omega$  considere-se o tubo indefinido e designe-se por  $\lambda'$  a distancia de duas secções entre as quaes, durante a unidade de tempo e com o debito  $q$ , o trabalho do attrito seria igual a  $\Omega$ . Designando por  $C'$  a differença de carga correspondente, teremos

$$C' = \frac{8 \epsilon \lambda' q}{\pi R^4}$$

e

$$C' q = \frac{8 \epsilon \lambda' q^2}{\pi R^4}.$$

Ora  $C'q$  é o trabalho motor, e como a variação de força viva do liquido primitivamente comprehendido entre as duas secções

é nulla, será

$$\Omega = \frac{8\varepsilon\lambda'q^2}{\pi R^4}.$$

**28.** Até uma certa distancia do tubo no reservatorio de sahida, a veia liquida conserva uma fôrma sensivelmente cylindrica, como se observa corando o liquido no reservatorio que alimenta o escoamento. A pressão n'esta região é sensivelmente a mesma no interior e no exterior da veia, porque, sendo diferente, os filetes seriam convergentes, como acontece nas regiões seguintes. A communicacão lateral do movimento da veia ao liquido immovel do reservatorio de sahida é portanto insignificante, de modo que a distribuiçã das pressões n'uma secção feita na veia e no liquido ambiente está sujeita ao principio fundamental da hydrostatica. Com effeito, este principio applica-se separadamente ás duas partes da secção: á exterior á veia, porque o liquido está em repouso; á secção da veia, porque (n.º 21) os seus filetes são rectilineos, paralelos e animados de velocidades uniformes.

Além d'isso, entre a secção MN e o orificio de sahida, o liquido move-se como n'um tubo indefinido. Designando por  $\lambda''$  o comprimento do tubo correspondente á differença de carga que existe entre o orificio de sahida e a secção *mn* em que se determina a altura piezometrica do reservatorio de sahida, a expressã d'essa carga será

$$\frac{8\varepsilon\lambda''q}{\pi R^4},$$

e a differença da carga entre as secções MN e *mn*

$$C - \gamma' - \frac{8\varepsilon\lambda''q}{\pi R^4} = C - \gamma,$$

pondo

$$\gamma = \gamma' + \frac{8\epsilon\lambda''q}{\pi R^4}.$$

Substituindo  $\gamma'$  e  $\Omega$  em (9), vem

$$\frac{\rho}{2} S_{MN} u^3 ds = \gamma q - \frac{8\epsilon(\lambda' + \lambda'')q^2}{\pi^2 R^4} \dots \dots \dots (10).$$

Ora, designando por  $\lambda$  a distancia da secção MN á entrada do tubo e por  $l$  o seu comprimento,

$$u = \frac{(C - \gamma)(R^2 - r^2)}{4(l - \lambda)\epsilon}.$$

Substituindo e integrando uma vez ao longo da coroa  $2\pi r dr$ , teremos

$$\frac{\rho}{2} S_{MN} u^3 ds = \frac{\pi\rho(C - \gamma)^3}{8\epsilon^3(l - \gamma)^3} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi\rho(C - \gamma)^3 R^{12}}{512\epsilon^3(l - \lambda)^3}.$$

Mas

$$C - \gamma = \frac{8\epsilon(l - \lambda)q}{\pi R^4},$$

logo

$$\frac{\rho}{2} S_{MN} u^3 ds = \frac{\rho q^3}{\pi^2 R^4},$$

o que converte (10) em

$$\begin{aligned} \frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4} &= \gamma - \frac{8\varepsilon(\lambda' + \lambda'')q}{\pi R^4} \\ &= C - (C - \gamma) - \frac{8\varepsilon(\lambda' + \lambda'')q}{\pi R^2} \\ &= C - \frac{8\varepsilon[l + (\lambda' + \lambda'' - \lambda)]q}{\pi R^4} = C - \frac{8\varepsilon(l + \Delta)q}{\pi R^4}, \end{aligned}$$

pondo

$$\Delta = \lambda' + \lambda'' - \lambda.$$

Logo

$$\varepsilon = \frac{\pi R^4 \left( C - \frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4} \right)}{8(l + \Delta)q}$$

que difere de (8) por dois termos correctivos. O primeiro  $\frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4}$  é a despesa de carga á entrada do tubo para commu-  
nicar ao liquido a sua velocidade de escoamento; o segundo  $\Delta$   
é o alongamento do tubo, correspondente ao attrito exercido nas  
extremidades.

**29.** Sejam  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  os valores approximados de  $\varepsilon$  que se obtêm  
desprezando as duas correcções ou só a segunda

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi R^4 C}{8lq}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\pi R^4 \left( C - \frac{\rho q^2}{\pi^2 R^4} \right)}{8lq};$$



teremos as relações

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{\rho g}{8\pi l},$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon \frac{l}{l + \Delta} \dots \dots \dots (11).$$

Os resultados d'esta correcção encontram-se na tabella seguinte, em que  $\varepsilon_1$  indica o valor d'este coefficiente dado por Poiseuille:

P	T	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
$2,475$ <sup>cm</sup>	3829	0,01383	0,01367
5,000	1924	1404	1363
9,934	994	1442	1363
14,862	682	1479	1464
19,301	537	1512	1366
38,789	291	1651	1382
77,379	165	1863	1388

A constancia dos valores de  $\varepsilon_2$  superior á de  $\varepsilon_1$  mostra bem a exactidão da correcção indicada. O seu valor medio é

$$\varepsilon_2 = 0,01363.$$

A tabella seguinte dá o mesmo resultado:

P	T	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
$2,466$ <sup>cm</sup>	8646 <sup>s</sup>	0,01332	0,01328
4,952	4355	1349	1339
9,823	2194	1347	1332
15,823	1455	1347	1324
19,426	1116	1355	1325
38,800	581	1384	1325
77,516	298	1443	1330

Os valores de  $\varepsilon_2$  conservam-se sensivelmente constantes. O seu valor medio é

$$\varepsilon'_2 = 0,01329.$$

Substituindo estes dois valores em (11), obtêm-se as equações

$$\Delta = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon} l = \frac{\varepsilon'_2 - \varepsilon}{\varepsilon} l',$$

d'onde

$$\varepsilon = \frac{l\varepsilon_2 - l'\varepsilon'_2}{l - l'} = 0,01303,$$

valor inferior ao dado por Poiseuille, como era de prever.

#### Experiencias com os cylindros

**30.** Considere-se o espaço comprehendido entre dois cylindros indefinidos concentricos, um fixo e o outro animado de um movimento de rotação uniforme em volta do eixo, e supponhamos o liquido n'elle contido dividido em camadas perpendiculares ao eixo, de espessura infinitamente pequena e animadas de movimento identico ao que teriam se fossem solidas.

Segundo as notações do numero 16, teremos

$$a = 0, w = 0, \frac{d\omega}{dz} = 0,$$

e as equações (24) tornam-se

$$\frac{dp}{dz} = \rho g, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{d\omega}{dr} \right), \quad \frac{dp}{dr} = \rho r \omega^2.$$

Multiplicando a primeira por  $dz$ , a terceira por  $dr$  e somando, vem uma equação que integrada a partir de um certo valor  $r_0$  de  $r$ , designando por  $p_0$  a pressão atmospherica e introduzindo uma função arbitraria  $\psi(t)$ , reductivel a uma constante quando o movimento se torna permanente, dá

$$p = p_0 - \rho g \psi(t) + \rho g z + \rho \int_{r_0}^r r \omega^2 dr.$$

A segunda equação dá em cada instante a aceleração angular  $\frac{d\omega}{dt}$  de todos os pontos situados no interior da massa fluida. Ora, se o movimento do cylindro é constante, o do fluido torna-se permanente depois de um certo tempo, reduzindo-se então essa equação a

$$\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^3 \frac{d\omega}{dr} \right) = 0,$$

que integrada dá

$$\omega = A + \frac{B}{r^2}.$$

Para determinar as constantes A, B, supponhamos nullo o escorregamento do fluido ao longo das paredes; designando por  $R_0$  e  $R_1$  os raios dos cylindros interior e exterior, por  $\Omega$  a velocidade angular d'este ultimo, teremos

$$\omega = 0 \quad \text{para} \quad r = R_0$$

$$\omega = \Omega \quad \text{para} \quad r = R_1$$

e a equação precedente torna-se

$$\omega = \Omega \frac{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r^2}}{\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_1^2}} \dots \dots \dots (1).$$

Posto isto, consideremos no interior do fluido os elementos de volume que têm por arestas  $rd\theta$ ,  $dr$ ,  $dz$ . As componentes normaes  $p_{tt}$ ,  $p_{rr}$ ,  $p_{zz}$  das acções exercidas sobre as faces do elemento considerado reduzem-se a  $p$ , enquanto as componentes tangenciaes  $p_{rz}$ ,  $p_{zr}$  são nullas, reduzindo-se o valor do attrito sobre o elemento de superficie vertical paralelo á parede do cylindro a

$$p_{rt} = \varepsilon r \frac{d\omega}{dr} d\sigma.$$

O valor do attrito sobre a unidade de superficie do cylindro interior será portanto

$$\varepsilon R_0 \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_{r=R_0} = \frac{2\Omega R_0 R_1^2 \varepsilon}{R_0 (R_1^2 - R_0^2)}.$$

Ora, como o cylindro é indefinido, o attrito é proporcional á superficie; o seu valor n'uma camada de altura  $h$  d'esse cylindro será

$$\frac{4\pi\Omega R_1^2 R_0 h \varepsilon}{R_1^2 - R_0^2},$$

e o seu momento  $M$  em relação ao eixo do cylindro

$$M = \frac{4\pi\Omega R_1^2 R_0^2 h \varepsilon}{R_1^2 - R_0^2} \dots \dots \dots (2),$$

expressão symetrica em relação a  $R_0$  e  $R_1$ , mostrando que o momento do attrito é egual nos dois cylindros, condição necessaria para a uniformidade do movimento.

A proporcionalidade do momento  $M$  em relação a  $\varepsilon$  tem ainda logar quando os cylindros deixam de ser conaxiaes.

Com effeito, supponhamos (Fig. 5) os eixos parallelos e seja a sua distancia  $OO' = ma$ . sendo  $a = R_1 - R_0$  e portanto  $m \ll 1$ .

Considere-se a camada liquida de altura  $h$  comprehendida entre os dois cylindros e dois meridianos do cylindro interior que façam entre si o angulo infinitamente pequeno  $d\theta$ . O attrito do liquido sobre a porção correspondente de parede do cylindro interior pode evidentemente calcular-se suppondo o liquido comprehendido entre dois planos parallelos á distancia  $MM'$ , um fixo e o outro animado da velocidade  $\Omega R_1$ . O seu valor será portanto

$$\varepsilon h R_0 d\theta \frac{\Omega R_1}{MM'},$$

e portanto, o momento total sobre o cylindro interior é

$$M = \varepsilon \Omega h R_0^2 R_1 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{MM'}.$$

Ora, a inspecção do triangulo  $O'OM$  dá

$$(R_0 + a)^2 = (R_0 + MM')^2 + m^2 a^2 - 2(R_0 + MM') ma \cos \theta;$$

desprezando os termos da ordem de  $\left(\frac{a}{R_0}\right)^2$ , o que é permitido por ser  $a$  sempre muito pequeno em relação a  $R_0$ , ter-se-á

$$MM' = a(1 + m \cos \theta),$$

valor que substituído na igualdade precedente, dá

$$M = \frac{\epsilon \Omega h R_0^2 R_1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + m \cos \theta} = \frac{2\pi \epsilon h \Omega h R_0^2 R_1}{a \sqrt{1 - m^2}}.$$

Esta formula mostra que o momento  $M$  é minimo se os cylindros são conaxiaes; se esta condição se não realisa, o coeficiente  $\epsilon$  é ainda proporcional a  $M$ , mas o seu valor assim determinado é affecto de um erro por excesso igual a  $\frac{m^2}{2}$ .

Se os eixos dos cylindros são inclinados, dividindo o liquido em camadas de espessura infinitamente pequena por planos perpendiculares ao eixo do cylindro interior, pode applicar-se a formula precedente a cada uma d'ellas. Teremos então

$$M = \frac{2\pi \epsilon \Omega R_0^2 R_1}{a} \int_{z_0}^{z_0+h} \frac{dz}{\sqrt{1 - m^2}},$$

formula que leva ás mesmas conclusões.

**31.** No segundo membro da equação precedente todas as quantidades se podem medir, e portanto, para determinar o valor de  $\epsilon$  basta conhecer  $M$ . Esta determinação foi feita por Couette <sup>1)</sup>, empregando, de accordo com a analyse, dois cylindros

<sup>1)</sup> Para a descripção mais completa d'estas experiencias, vej. *Ann. de chim. et physique*, 6.ª serie, t. XXI, p. 43.

conaxiaes, sendo o interior extremamente movel em volta do eixo, mas fixo relativamente aos deslocamentos lateraes, por ser o seu equilibrio instavel em relação a esses deslocamentos. A fim de se poder considerar a sua superficie indefinida, prolonga-se o cylindro interior de um e outro lado por meio de anneis de guarda do mesmo diametro, cuidadosamente polidos exteriormente. A cada annel está soldado um disco, sendo o inferior completo para obstar á propagação do movimento impresso ao liquido pelo fundo do cylindro exterior. Este, de altura superior á do cylindro interior, está animado de um movimento de rotação uniforme, impresso por um motor Gramme. O attrito do liquido sobre o cylindro movel tende a fazel-o girar em volta do eixo; conserva-se, porém, na sua posição por meio da torsão do fio a que está suspenso ou collocando pesos nos dois pratos suspensos por fios enrolados n'uma roldana de ebonite que gira com o eixo do aparelho, passando depois cada um d'elles n'uma roldana de Atwood. Os pesos suspensos nos dois fios tendem ambos a fazer girar o cylindro em sentido inverso do movimento do liquido. Convem que estes pesos sejam pouco mais ou menos eguaes nos dois pratos para evitar as pressões lateraes sobre o eixo de rotação. Sobre um registrador Marey inscrevem-se electricamente as voltas.

Para se poder comparar as experiencias em que o attrito é equilibrado pela torsão do fio com aquellas em que se empregam pesos, mede-se a torsão equivalente ao peso de um gramma. Designando, de um modo geral, por  $P$  o peso que é preciso collocar nos pratos dos fios da roldana para fazer equilibrio ao attrito e por  $r$  o raio da roldana de ebonite, teremos

$$M = Pr \dots \dots \dots (3).$$

Além d'isso, se  $N$  é o numero de voltas do cylindro girante por

minuto, a sua velocidade angular será

$$\Omega = \frac{2\pi N}{60}.$$

Identificando (2) com (3) e substituindo  $\Omega$  pelo seu valor, virá

$$\frac{P}{N} = \frac{2\pi^2 R_1^2 R_0^2 h \varepsilon}{15(R_1^2 - R_0^2) r} = \text{const.}$$

**32.** As experiencias feitas com o cylindro girante levam aos resultados já deduzidos das experiencias com os tubos. É o que mostra a tabella seguinte, em que  $N$  designa o numero de voltas;  $T$  o angulo do torsão;  $P = T \times 0,01544$  o peso equivalente a essa torsão;  $t$  a temperatura da agua:

N. <sup>o</sup>	N	T	P	$\frac{P}{N}$	$t$
1....	11,91	162,3	2,506	0,2104	16,7
2....	22,04	166,9	2,577	0,2140	16,7
3....	19,14	263,0	4,061	0,2121	61,7
4....	19,64	273,4	4,221	0,2149	16,7
5....	29,48	405,5	6,261	0,2123	16,7
6....	28,84	401,8	6,204	0,2151	16,7
7....	36,69	552,5	8,840	0,2443	12,8
8....	35,84	544,0	8,399	0,2344	13,0
9....	51,88	787,4	12,16	0,2344	13,1
10....	52,38	792,2	12,23	0,2335	13,3
11....	54,85	805,2	12,43	0,2266	14,7
12....	59,53	1207,3	18,64	0,3532	14,7
13....	58,80	1125,9	17,38	0,2956	14,7
14....	61,75	1427,9	22,05	0,3570	14,9
15....	60,66	1382,4	21,34	0,3519	15,0
16....	10,27	.....	2,26	0,2201	16,5



N. <sup>o</sup>	N	T	P	$\frac{P}{N}$	t
17....	8,71	.....	1,84	0,2113	10,5
18....	22,86	.....	4,93	0,2157	16,6
19....	23,08	.....	4,99	0,2133	16,7
20....	94,75	.....	57,16	0,6033	16,9
21....	94,63	.....	56,94	0,6018	17,1
22....	127,05	.....	100,36	0,7899	16,8
23....	127,27	.....	100,80	0,7920	16,9
24....	44,02	.....	9,68	0,2199	16,0
25....	50,76	.....	11,14	0,2194	16,1
26....	54,07	.....	11,90	0,2201	16,2
27....	55,69	.....	12,06	0,2166	16,3
28....	59,26	.....	20,23	0,3413	15,7
29....	59,14	.....	20,25	0,3425	16,8
30....	72,73	.....	34,25	0,4709	16,8
31 ...	71,56	.....	33,67	0,4704	16,9
32. . .	359,75	.....	620,0	1,723	17,4
33....	358,4	.....	619,7	1,729	17,6
34....	431,8	.....	854,9	1,980	16,6
35....	345,9	.....	866,6	1,988	16,9
36....	453,3	.....	956,3	2,160	16,9

Para tornar estes resultados comparaveis, é evidentemente necessario corrigil-os das diferenças de temperatura que modificam ao mesmo tempo o coefficiente de attrito do liquido, o coefficiente de torsão do fio e as dimensões do apparatus. Esta ultima variação altera o factor

$$\frac{R_1^2 R_0^2 h}{R_1^2 - R_0^2}$$

que entra no valor de  $\frac{P}{N}$ . Ora, fazendo  $\lambda = 0,0000188$ , coefficiente de dilatação linear do latão de que eram feitos os cylindros, o factor relativo a esta ultima correcção  $(1 + \lambda \theta)^3$  é muito proximo da unidade quando as diferenças  $\theta$  de temperatura são

inferiores a 4°, como nas experiencias da tabella precedente. A correcção relativa á variação do coefficiente de torsão do fio torna-se inutil, se as experiencias são feitas só com pesos. Resta, pois, sómente fazer as correcções relativas á variação do coefficiente de viscosidade do fluido pela formula de Poiseuille, o que dá

$$\left(\frac{P}{N}\right)_\theta = \left(\frac{P}{N}\right)_t \frac{1 + at + bt^2}{1 + a\theta + b\theta^2}$$

Fazendo esta correcção, a tabella precedente dá:

N	t	$\left(\frac{P}{N}\right)_t$	$\left(\frac{P}{N}\right)_\theta$
8,71	16,5	0,2113	0,2102
10,27	16,5	2201	2190
11,91	16,7	2104	2104
12,04	16,7	2140	2140
19,14	16,7	2121	2121
19,64	16,7	2149	2149
22,86	16,6	2157	2151
23,08	16,7	2133	2133
28,84	16,7	2151	2151
29,48	16,7	2123	2123
35,84	13,0	2344	2129
36,19	12,8	2443	2206
44,02	16,0	2199	2160
50,76	16,1	2194	2160
51,88	13,1	2344	2134
52,38	13,3	2335	2138
54,07	16,2	2201	2173
54,85	14,7	2266	2153
55,69	16,3	2166	2144
58,80	14,7	2956	2809
59,16	16,8	3423	3431
59,26	16,7	3413	3413
59,53	14,7	3132	2975

Os resultados confirmam as conclusões já tiradas das experiências com os tubos. A relação  $\left(\frac{P}{N}\right)_0$  é sensivelmente constante enquanto é  $N < 56$ , variando apenas entre 0,2102 quando  $N = 8,71$  e 0,2206 quando  $N = 36,49$ ; o seu valor medio é

$$\frac{P}{N} = 0,21506.$$

Entre  $N = 56$  e  $N = 127$ , a relação  $\frac{P}{N}$  varia irregularmente; mas além e até  $N = 453$ , limite das experiencias, suppondo ainda applicaveis as equações de Navier, a relação  $\frac{P}{N}$  cresce regularmente e os pontos figurativos, que até  $N = 56$  formam uma parallela ao eixo das abscissas  $N$ , dispõem-se agora n'uma recta inclinada sobre o mesmo eixo, cuja equação é

$$\frac{P}{N} = 0,3260 + 0,0038832N,$$

sendo a temperatura media das experiencias  $16^{\circ},7$ .

Os dois regimens manifestam-se assim claramente. O primeiro, conforme ao integral considerado das equações de Navier, tem logar quando a velocidade do liquido é inferior a um certo limite. O segundo não é conforme a esse integral e quando se lhe applica a mesma formula, os valores de  $\frac{P}{N}$  ou  $\epsilon$  crescem com a velocidade media do liquido. Entre os limites dos dois regimens existe um intervallo em que o movimento do liquido se manifesta irregularmente, sendo então os valores de  $\frac{P}{N}$  repre-

sentados por uma curva com a concavidade voltada para o eixo dos N.

É evidente que os valores de  $\epsilon$  deduzidos d'estas experiencias, enquanto seguem as equações de Navier, deveriam concordar com os já deduzidos das experiencias com os tubos. Ora o valor

$$\frac{P}{N} = 0,21506 \text{ dá para coeeficiente de attrito da agua a } 16^{\circ},7$$

$$\epsilon = 0,01255,$$

superior a  $\epsilon = 0,01096$ , valor obtido nas experiencias de Poiseuille. Este erro por excesso é devido á falta de coincidencia dos eixos dos dois cylindros e á insufficiencia dos anneis de guarda para evitar o attrito da agua nos bordos e no interior do cylindro suspenso. Couette observou, com effeito, que o erro apresentava valores notavelmente differentes em tres series de experiencias, antes de cada uma das quaes o apparelho tinha sido novamente montado.

#### Methodo de Coulomb

**33.** Considere-se um solido de revolução mergulhado n'um fluido indefinido, girando em volta do seu eixo bastante lentamente para que os effeitos da força centrifuga sejam despreziveis e sollicitado pelo momento  $-A\lambda$ , proporcional á elongação angular  $\lambda$ . Seja

$$\lambda = \varphi(t)$$

a equação do movimento do solido.

Se o fluido não recebe outro movimento, além do que lhe é

communicado pelo solido, cada uma das suas moleculas executará tambem oscillações girantes com um certo atrazo  $y$  e uma certa redução  $x$  da amplitude, sendo o movimento do liquido identico em todos os meridianos. Designando por  $\psi$  a elongação angular relativa a qualquer molecula fluida, será

$$\psi = x \varphi(t - y).$$

Como o solido não pode ter outro movimento senão o de rotação em volta do eixo, designando por  $I$  o seu momento de inercia e por  $M$  o do attrito do fluido á superficie, em virtude do principio de d'Alembert, será

$$-A\lambda + M - I \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Posto isto, determinemos a expressão do attrito do liquido em qualquer ponto do solido. Fazendo coincidir o eixo dos  $z$  com o do solido, ter-se-á em coordenadas cylindricas

$$a = w = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$p_{tr} = \varepsilon r \frac{d\omega}{dr}, \quad p_{rz} = 0, \quad p_{tz} = \varepsilon r \frac{d\omega}{dz},$$

sendo estas duas componentes dirigidas segundo o eixo de rotação e o raio  $r$ . Designando por  $\alpha$  o angulo formado pela normal n'um ponto da superficie do solido com o eixo dos  $z$ , o attrito n'esse ponto será

$$p_{t\alpha} = \varepsilon r \left( \frac{d\omega}{dr} \text{sen } \alpha + \frac{d\omega}{dz} \text{cos } \alpha \right).$$

Tome-se agora como variáveis independentes a distancia  $u = MN$  (Fig. 6) de qualquer ponto do liquido à superficie do solido e o arco  $s = AN$  contado, sobre a meridiana respectiva, do polo A até ao pé N da normal MN. Teremos então

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{d\omega}{dr} \frac{dr}{du} + \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{du}.$$

Ora

$$\frac{dr}{du} = \text{sen } \alpha, \quad \frac{dz}{du} = \text{cos } \alpha;$$

logo

$$p_{t_z} = \epsilon r \frac{d\omega}{du}.$$

O attrito exercido sobre a zona de raio  $r_0$  e de largura  $ds$  será, pois, dado pela expressão

$$2\pi r_0^2 \epsilon \left( \frac{d\omega}{du} \right)_{u=0} ds,$$

e o seu momento

$$dM = 2\pi r_0^3 \epsilon \left( \frac{d\omega}{du} \right)_{u=0} ds.$$

Ora

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = x\varphi', \quad \frac{d\omega}{du} = \frac{dx}{du} \varphi' - x \frac{d\varphi'}{du} \varphi'',$$

e suppondo que a adherencia do liquido ao solido é completa, teremos  $x = 1$ ,  $y = 0$ , para  $u = 0$ ; portanto

$$\left( \frac{d\omega}{du} \right)_{u=0} = \frac{d\lambda}{dt} \left( \frac{dx}{du} \right)_{u=0} - \frac{d^2\lambda}{dt^2} \left( \frac{dy}{du} \right)_{u=0}$$

Substituindo este valor na expressão de  $dM$ , integrando ao longo de metade da meridiana e pondo

$$B = -2\pi\varepsilon \int_0^3 r_0^3 \left( \frac{dx}{du} \right)_{u=0} ds \dots \dots \dots (2),$$

$$C = 2\pi\varepsilon \int_0^3 r_0^3 \left( \frac{dy}{du} \right)_{u=0} ds \dots \dots \dots (3),$$

vem

$$M = -B \frac{d\lambda}{dt} - C \frac{d^2\lambda}{dt^2},$$

o que converte (1) em

$$(I + C) \frac{d^2\lambda}{dt^2} + B \frac{d\lambda}{dt} + A\lambda = 0 \dots \dots \dots (4)$$

O atrito do fluido tem, pois, por effeito augmentar o momento de inercia do solido da quantidade  $C$  e introduzir uma resistencia  $-B \frac{d\lambda}{dt}$  proporcional á velocidade angular.

**3.1.** Para determinar a fôrma da funcção  $\varphi$  basta integrar esta equação. Este integral pode escrever-se debaixo da fôrma

$$\lambda = e^{-\mu t} \left( P \cos 2\pi \frac{t}{T} + Q \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} \right),$$

em que só duas das constantes  $\mu$ ,  $T$ ,  $P$ ,  $Q$  são arbitrárias. Para determinar as outras duas, temos

$$\lambda = 0, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \text{se } t = 0,$$

o que dá

$$P = \lambda_0, \quad Q = \frac{\lambda_0 \mu T}{2\pi}.$$

Logo

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\mu t} \left( \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\mu T}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} \right) \dots \dots (5),$$

e portanto

$$\psi = x \lambda_0 e^{-\mu t} \left( \cos 2\pi \frac{t-y}{T} + \frac{\mu T}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t-y}{T} \right) \dots \dots (6),$$

equações do movimento pendular cujas oscillações são *isochronas* e as amplitudes,  $\lambda_0 e^{-\mu t}$  e  $x \lambda_0 e^{-\mu t}$ , decrescem em *progressão geometrica*.

A diferença dos logarithmos naturaes das amplitudes de duas oscillações simples consecutivas do solido, isto é, o seu *decremento logarithmico* é constante e tem por valor

$$\begin{aligned} \delta &= \log \left[ \lambda_0 e^{-\mu n} \frac{T}{2} \right] - \log \left[ \lambda_0 e^{-\mu(n-1)} \frac{T}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu T \log e = \frac{\log A_1 - \log A_n}{n-1} \dots \dots (7), \end{aligned}$$

sendo  $A_1, A_n$  as amplitudes de duas oscillações separadas por  $n$  outras.

Substituindo na equação (4) os valores de  $\lambda, \frac{d\lambda}{dt}, \frac{d^2\lambda}{dt^2}$  tirados de (5) e igualando separadamente a zero os coefficients do seno e do coseno para que (4) seja satisfeita, qualquer que seja o valor



de  $t$ , ter-se-á

$$B = \frac{2A\mu}{k^2} \dots \dots \dots (8),$$

$$C = \frac{A}{k^2} - I \dots \dots \dots (9),$$

sendo

$$k = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} + \mu^2}.$$

Todas as quantidades que entram nos segundos membros d'estas equações se podem determinar experimentalmente, e portanto para determinar  $\mu$  bastaria substituir B ou C em (2) ou (3) e fazer as integrações indicadas. Na practica, porém, é preferivel empregar a equação (8), porque a differença das duas quantidades que dão C em (9) é da ordem de grandeza dos erros que as affectam.

**35.** Coulomb empregava um aparelho constituido por dois discos horizontaes, reunidos por uma haste vertical e suspensos por um fio de torsão. O disco inferior e alguns centimetros da haste mergulhavam no fluido a estudar. O limbo dividido do disco superior e um indice fixo permittiam medir as amplitudes das oscillações do solido. Observando a duração de um numero sufficientemente grande de oscillações e dividindo este tempo pelo numero d'ellas, obtem-se o valor do periodo T. Medindo as amplitudes de duas oscillações quaesquer um grande numero de vezes e tomando a media dos decrescimentos logarithmicos assim achados, obtem-se o valor de  $\delta$  correspondente á disposição experimental actual. A formula (7) dá então

$$\mu = \frac{2\delta}{T \log e}$$

e o movimento do solido fica assim determinado, bem como os valores de B e C dados por (8), (9).

**36.** Para determinar o coefficiente  $\varepsilon$  resta calcular os valores de  $\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=0}$ ,  $\left(\frac{dy}{du}\right)_{u=0}$  que entram nos integraes de B e C. As duas funcções desconhecidas  $x$ ,  $y$  que entram na equação (6) dependem evidentemente em cada ponto do modo de propagação do movimento que o solido imprime ao fluido. Supponhamos que o movimento d'este ultimo é conforme ás equações de Navier. Estas equações reduzem-se a

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{3}{r} \frac{d\omega}{dr} - \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$\rho r \omega^2 - \frac{dp}{dr} = 0, \quad \rho g - \frac{dp}{dt} = 0.$$

Ora, como não temos senão a attender ao movimento do liquido, basta introduzir na primeira as condições expressas por (6). Substitua-se n'ella as derivadas de  $\omega = \frac{d\psi}{dt} = x\psi'(t-y)$  tiradas d'esta ultima e ponha-se

$$a = \frac{d^2x}{dr^2} + \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{3}{r} \frac{dx}{dr},$$

$$-b = 2 \left( \frac{dx}{dr} \frac{dy}{dr} + \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} \right) + x \left( \frac{d^2y}{dr^2} + \frac{d^2y}{dz^2} \right) + 3 \frac{x}{r} \frac{dy}{dr} + \frac{\rho}{\varepsilon} x,$$

$$c = x \left[ \left( \frac{dy}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right];$$

teremos

$$a\varphi' + b\varphi'' + c\varphi''' = 0.$$

Substituindo n'esta equação os valores de  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$  e igualando separadamente a zero os coefficients do seno e do coseno, teremos as condições

$$a = k^2 c \dots \dots \dots (10)$$

$$b = 2\mu c \dots \dots \dots (11)$$

**37.** Para integrar as equações (10) e (11) tome-se como variaveis independentes as coordenadas  $s$  e  $u$ , indicadas precedentemente. Ter-se-á

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dr} + \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dr},$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dz} + \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dz}.$$

Designa-se agora por  $\alpha$  o angulo que a normal á superficie, tirada pelo ponto M, faz com o eixo dos  $z$  e por R o raio de curvatura da meridiana no pé N da normal; dando a  $r$  e a  $z$  os augmentos infinitesimos  $dr$ ,  $dz$  e desprezando os infinitamente pequenos de ordem superior á primeira, será

$$\frac{du}{dr} = \text{sen } \alpha, \quad \frac{du}{dz} = \text{cos } \alpha,$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{R}{R+u} \frac{MP'}{MM'} = \frac{R \text{ cos } \alpha}{R+u},$$

$$\frac{ds}{dz} = \frac{-R}{R+u} \frac{MP''}{MM''} = \frac{-R \operatorname{sen} \alpha}{R+u},$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{R+u} \frac{MP'}{MM'} = \frac{\cos \alpha}{R+u},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{-1}{R+u} \frac{MP''}{MM''} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{R+u}.$$

Logo

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dx}{du} \operatorname{sen} \alpha + \frac{dx}{ds} \frac{R \cos \alpha}{R+u},$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{du} \cos \alpha - \frac{dx}{ds} \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{R+u}.$$

Desenvolvendo  $\frac{dx}{ds}$  pela formula de Maclaurin, segundo as potencias crescentes de  $u$ , e notando que o primeiro termo é nullo, por ser  $x=1$ , para  $u=0$ , vem

$$\frac{dx}{ds} = \left( \frac{d^2x}{ds du} \right)_{u=0} u + \left( \frac{d^3x}{ds du^2} \right)_{u=0} \frac{u^2}{1.2} + \dots$$

e portanto

$$\frac{dx}{ds} \frac{R \cos \alpha}{R+u} = u \cos \alpha \left( \frac{d^2x}{ds du} \right)_{u=0} + a'u^2 + \dots$$

$$\frac{dx}{ds} \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{R+u} = u \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{d^2x}{ds du} \right)_{u=0} a'1u^2 + \dots$$

Substituindo estes valores, vem

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dx}{du} \operatorname{sen} \alpha + u \cos \alpha \left( \frac{d^2x}{ds du} \right)_{u=0} + a'u^2 + \dots$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{du} \cos \alpha - u \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{d^2x}{ds du} \right)_{u=0} + a''u^2 + \dots$$

Derivando

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dr^2} &= \left( \frac{d^2x}{du^2} \frac{du}{dr} + \frac{d^2x}{du ds} \frac{ds}{dr} \right) \operatorname{sen} \alpha + \frac{dx}{du} \frac{d\alpha}{dr} \cos \alpha \\ &+ \left( \frac{d^2x}{ds du} \right)_{u=0} \frac{du}{dr} \cos \alpha + A_1 u + B_1 u^2 + \dots \\ &= \frac{d^2x}{du^2} \operatorname{sen}^2 \alpha + \left[ \frac{d^2x}{duds} + \left( \frac{d^2x}{duds} \right)_{u=0} \right] \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{dx}{du} \frac{\cos^2 \alpha}{R} \\ &+ A'_1 u + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &= \frac{d^2x}{du^2} \cos^2 \alpha - \left[ \frac{d^2x}{duds} + \left( \frac{d^2x}{duds} \right)_{u=0} \right] \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ &+ \frac{dx}{du} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{R} + A'_2 u + \dots \end{aligned}$$

Calculando analogamente as derivadas de  $y$  que entram nos valores de  $b$ ,  $c$ , pondo  $\frac{1}{h} = \frac{1}{R} + \frac{3 \operatorname{sen} \alpha}{r_0}$  e notando que  $r = r_0 + u \operatorname{sen} \alpha$ , teremos

$$a = \frac{d^2x}{du^2} + \frac{1}{h} \frac{dx}{du} + a_1 u + \dots$$

$$-b = 2 \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} + x \left( \frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{h} \frac{dy}{du} + \frac{\rho}{\varepsilon} \right) + a_2 u + \dots$$

$$c = x \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + a_3 u + \dots$$

Substituindo estes valores nas equações (10) e (11), vem

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{1}{h} \frac{dx}{du} - k^2 x \left( \frac{dy}{du} \right)^2 = U, \dots \dots \dots (12)$$

$$2 \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} + x \left( \frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{h} \frac{dy}{du} + \frac{\rho}{\varepsilon} \right) + 2\mu x \left( \frac{dy}{du} \right)^2 = V, \dots \dots (13)$$

designando por U, V duas funções de  $u$  ordenadas segundo as potencias crescentes d'esta variavel e sem termo independente.

**38.** Como as quantidades  $\left( \frac{dx}{du} \right)_{u=0}$ ,  $\left( \frac{dy}{du} \right)_{u=0}$  são os valores das derivadas de  $x$ ,  $y$  correspondentes ás moléculas liquidas em contacto com a bainha que envolve o solido, basta determinar os valores d'estas variaveis relativos ás moléculas em que a variavel independente  $u$  é infinitamente pequena, e portanto as funções U, V. Teremos, pois, sensivelmente as equações

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{1}{h} \frac{dx}{du} - k^2 x \left( \frac{dy}{du} \right)^2 = 0,$$

$$2 \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} + x \left( \frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{h} \frac{dy}{du} + \frac{\rho}{\varepsilon} \right) + 2\mu x \left( \frac{dy}{du} \right)^2 = 0,$$

que admitem a solução particular

$$x = e^{-mu}, \quad y = nu.$$

A amplitude das oscillações diminúe portanto em progressão geometrica e o atrazo augmenta em progressão arithmetica, quando a distancia da molecula considerada ao disco augmenta em progressão arithmetica.

Ter-se-á, pois,

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=0} = -m, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_{u=0} = n,$$

e portanto

$$B = 2\pi \varepsilon \int r_0^3 m ds, \quad C = 2\pi \varepsilon \int r_0^3 n ds,$$

sendo  $m$  e  $n$  definidos pelas equações

$$m^2 - \frac{m}{h} = k^2 n^2 \dots \dots \dots (14),$$

$$2mn - \frac{n}{h} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 2\mu n^2 \dots \dots \dots (15).$$

Se a meridiana do solido satisfaz á equação

$$\frac{1}{h} = \text{const.},$$

os valores de  $m$ ,  $n$  são tambem constantes. Eliminando-os de

(12), (13), teremos as equações

$$B^2 - \frac{2\pi\epsilon S}{h} B = k^2 C^2, \dots \dots \dots (16)$$

$$BC - \frac{\pi\epsilon SC}{h} - 2\pi\epsilon \rho S = \mu C^2 \dots \dots \dots (17)$$

que nos serviriam para determinar, além do coefficiente  $\epsilon$ , qualquer das outras quantidades que n'ellas entram  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $I$ ,  $T$ , se as duas constantes  $B$ ,  $C$  fossem susceptíveis de determinação experimental rigorosa. E se  $\epsilon$  fosse conhecido, poder-se-ia determinar as duas constantes  $\mu$ ,  $T$  que entram em (5). Como, porém, a determinação de  $C$  por meio de (9) não merece confiança, as equações (16), (17) não podem determinar senão uma incognita. Eliminando entre ellas  $C$ , virá uma equação do terceiro grau em  $\epsilon$  que nos pode servir para determinar este coefficiente.

**39.** A equação precedente só se applica quando o solido oscillante tem uma fôrma particular e mergulha completamente no fluido. Quando a meridiana tem uma fôrma qualquer,  $\frac{1}{h}$  é geralmente variavel e o calculo dos integraes torna-se muito difficil.

Supponhamos, porém, que os raios de curvatura da meridiana do solido oscillante e geralmente as suas dimensões transversaes são grandes, e o seu movimento sufficientemente lento para que o do liquido se annulle a pequena distancia. Como  $\frac{1}{m}$  representa a distancia da molecula em que a reduçção da amplitude é  $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,718}$  á superficie do solido,  $\frac{1}{h}$  será muito pequeno



em relação a  $m$ . Extrahindo a raiz quadrada aos dois membros de (14), teremos com uma certa approximação

$$m = \frac{1}{2h} + kn,$$

e, substituindo este valor em (15),

$$n = \sqrt{\frac{\rho}{2\varepsilon(k-\mu)}}.$$

Logo

$$B = \pi \int \left[ \frac{\varepsilon r_0^3}{h} + k r_0^3 \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{k-\mu}} \right] ds,$$

$$C = \pi \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{k-\mu}} \int r_0^3 ds,$$

ou

$$B = \pi k S \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{k-\mu}} + \pi \varepsilon S' \dots \dots \dots (18),$$

$$C = \pi S \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{k-\mu}} \dots \dots \dots (19),$$

pondo

$$S = \int r_0^3 ds, \quad S' = \int \frac{r_0^3}{h} ds,$$

40. Considere-se agora o fluido limitado por uma superficie de revolução coaxial com o corpo oscillante. Os integraes precedentes, suppondo que o fluido é indefinido, não convêm evidentemente a este caso, porque a exponencial  $x = e^{-mu}$  a distancias finitas tem sempre valores diferentes de zero, unico que

convem às moléculas líquidas em contacto com o sólido exterior, pelo menos em geral.

Mas em qualquer ponto do fluido será evidentemente

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u).$$

Desenvolvendo pela fórmula de Maclaurin, vem

$$x = 1 + au + bu^2 + \dots, \quad y = a'u + b'u^2 + \dots,$$

d'onde

$$\frac{dx}{du} = a + 2bu + \dots, \quad \frac{dy}{du} = a' + 2b'u + \dots,$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = 2b + \dots, \quad \frac{d^2y}{du^2} = 2b' + \dots$$

Substituindo em (12), (13) e fazendo  $u$  infinitamente pequeno, ter-se-á

$$2b + \frac{a}{h} - k^2 a'^2 = 0,$$

$$2aa' + 2b' + \frac{a'}{h} + \frac{\rho}{\epsilon} + 2\mu a'^2 = 0.$$

Supponhamos agora que os comprimentos  $p$  interceptados pela superfície interna do corpo exterior sobre as normaes á do corpo oscillante são sufficientemente pequenos para que se possam desprezar os termos de ordem superior á segunda. Na superfície interna do sólido exterior será

$$1 + ap + bp^2 = 0.$$

D'esta equação e da primeira das precedentes tira-se

$$a = -\frac{h(2 + p^2 k^2 a'^2)}{p(2h - p)}$$

ou, desprezando no denominador d'esta expressão  $p$  em relação a  $2h$ ;

$$a = -\frac{1}{p} - \frac{pk^2 a'^2}{2}.$$

Resta só uma equação entre  $a'$  e  $b'$ ; admittindo, porém, que a superfície exterior não tem influencia sobre a propagação do movimento na visinhança immediata do solido, teremos como no caso de um fluido indefinido

$$a' = \sqrt{\frac{\rho}{2\varepsilon(k - \mu)}},$$

e portanto

$$a = -\frac{1}{p} - \frac{pk^2 \rho}{4\varepsilon(k - \mu)};$$

logo

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=0} = a, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_{u=0} = a',$$

Será, pois, n'esta hypothese

$$B = 2\pi\varepsilon \int \frac{r_0^3}{p} ds + \frac{\pi}{2} \int \frac{k^2 \rho}{k - \mu} \int pr_0^3 ds,$$

$$C = \pi \sqrt{\frac{2\rho\varepsilon}{k - \mu}} \times \int r_0^3 p ds,$$

\*

ou,

$$B = 2\pi\epsilon P' + \frac{\pi}{2} \frac{k^2\rho}{k-\mu} P \dots\dots\dots (20)$$

$$C = \pi S \sqrt{\frac{2\rho\epsilon}{k-\mu}} \dots\dots\dots (21)$$

pondo

$$P = \int pr_0^3 ds \dots\dots\dots (22)$$

$$P' = \int \frac{r_0^3}{p} ds \dots\dots\dots (23).$$

41. As formulas precedentes suppõem que toda a parte oscillante mergulha no fluido a estudar, como acontece nos gazes, e a meridiana ao longo da qual se tomam os integraes S, S', P, P' é uma curva continua. Nos apparatus empregados, porém, o corpo oscillante está suspenso por um ou mais fios e geralmente só uma parte mergulha no fluido. É preciso, pois, generalisar essas formulas, tornando-as applicaveis ao caso em que a parte oscillante mergulha em fluidos sobrepostos e a meridiana é uma curva discontinua.

Imaginemos então parallelos taes que cada uma das partes da meridiana comprehendida entre elles seja continua e não esteja em contacto senão com um só fluido. É evidente que as formulas precedentes são applicaveis a cada uma d'ellas em toda a sua espessura, excepto á superficie de separação; mas se os parallelos considerados são sufficientemente affastados, essa influencia perturbadora torna-se insensivel. Suppondo o indefinido liquido em contacto com algumas zonas e o que banha as outras limitado por superficies conaxiaes muito proximas do solido oscil-

lante, será

$$B = \pi (\Sigma S' \varepsilon + 2 \Sigma P' \varepsilon) + \frac{\pi k}{\sqrt{k-\mu}} \Sigma S \sqrt{2\rho\varepsilon} + \frac{\pi k^2}{2(k-\mu)} \Sigma P \rho \dots (24)$$

$$C = \frac{\pi}{\sqrt{k-\mu}} \Sigma S \sqrt{2\rho\varepsilon} \dots \dots \dots (25).$$

**42.** Para que os segundos membros de (24), (25) fossem os valores dos coeficientes B e C dados por (8) e (9), seria preciso que o fio de suspensão fosse perfeitamente elastico e os supports não participassem do seu movimento.

A torsão de um fio, e em geral qualquer deformação, ainda que comprehendida nos limites da elasticidade, não attinge o seu valor definitivo senão lentamente; reciprocamente, supprimindo as forças extranhas, o corpo não volta ao seu estado primitivo senão depois de um certo tempo, variavel com a deformação e a sua duração. Kohlrausch, a quem se devem interessantes estudos sobre este assumpto, verificou que se um fio experimenta torsões successivas n'um e n'outro sentido, o atrazo final é a somma dos atrazos correspondentes a cada uma d'ellas.

O. E. Mayer attribue este atrazo a forças moleculares de resistencia devidas ao deslocamento das moléculas do solido, analogas ás que constituem a viscosidade dos fluidos. E com effeito, se o fio não fosse sollicitado senão pelo conjugado de torsão, a equação differencial do movimento do solido, obtida fazendo em (3)  $B = C = 0$ , seria

$$I \frac{d^2\lambda}{dt^2} + A\lambda = 0,$$

equação differencial do movimento do pendulo simples. As oscil-

lações seriam isochronas e da mesma amplitude. Se, porém, durante o movimento se desenvolvem resistencias proporcionaes á velocidade angular actual, as oscillações, como vimos, são ainda isochronas, mas as amplitudes decrescem em progressão geometrica. Coulomb verificou o isochronismo das oscillações de torsão no ar, e Weber e Gauss a constancia do decrescimento logarithmico das amplitudes, quando estas são extremamente pequenas <sup>1)</sup>. Durante o movimento desenvolve-se, pois, a resistencia enunciada, que é impossivel attribuir sómente ao effeito do ar. Os coefficients B, C dependem portanto não só do attrito exercido pelos fluidos sobre a parte oscillante do apparatus, mas ainda da elasticidade residual do fio de suspensão.

A communicação do movimento do fio aos supportes tem tambem por effeito augmentar o valor d'esses coefficients.

**43.** Designemos por  $B_1$  o coefficiente tótal de resistencia dado por (8), por B o seu valor relativo á zona principal mergulhada no fluido a estudar, por  $\beta$  a parte relativa ás partes oscillantes accessorias mergulhadas no ar (fio, disco superior e parte da haste, no apparatus de Coulomb) e aos supportes, por  $\beta_0$  a parte resultante do attrito interno do fio. Será

$$B_1 = B + \beta + \beta_0.$$

Mergulhando agora o apparatus n'um fluido de viscosidade conhecida, teremos analogamente

$$B'_1 = B' + \beta' + \beta'_0$$

---

\*) Cornu et Baille, *Comptes rendus*, t. LXXXVI; 1878.

Ora, se nas duas experiencias o valor da torsão e a sua duração têm valores pouco differentes, será sensivelmente  $\beta_0 = \beta'_0$ . Subtrahindo ordenadamente as duas equações precedentes, vem

$$B_1 - B'_1 = B - B' + \beta - \beta',$$

ou, dispondo as experiencias de modo que  $\beta, \beta'$  sejam muito pequenos e portanto  $\beta - \beta'$ ,

$$B = B_1 + B' - B'_1 \dots \dots \dots (24)$$

**44.** No apparelho de Coulomb o raio do disco inferior, de lata, é de 9<sup>cm</sup>,75. Depois de feita a primeira experiencia, mergulhando o disco inferior e uma parte da haste no liquido a estudar, supprime-se este e mergulha-se novamente até á mesma altura. O coefficiente  $B'$  é então nullo e se desprezarmos a parte de  $B'_1$  resultante do attrito do fluido sobre a zona da haste abraçada pelo disco na primeira experiencia, a equação (24) torna-se

$$B = B_1 - B'_1.$$

Com duas experiencias d'este genero, empregando a agua á temperatura de 10° a 16° e sendo o coefficiente de elasticidade de torsão do fio

$$A = 1756 \text{ C. G. S.},$$

Coulomb <sup>1)</sup> obteve na primeira experiencia: 1.° sendo o angulo de torsão inicial de 192<sup>gr</sup>, depois de 10 oscillações era de 52<sup>gr</sup>,3, o que dá, suppondo ainda constante o decrescimento logarithmico,

$$\delta' = \frac{\log 192 - \log 52,3}{10} = 0,0565;$$

---

<sup>1)</sup> Coulomb, *Mémoires de l'Institut*, t. III, p. 268; 1801.

2.º sendo o angulo inicial  $13^{\text{er}},8$ , o seu valor depois de 10 oscillações era de  $3^{\text{er}},3$ , e portanto

$$\delta'' = \frac{\log 13,8 - \log 3,3}{10} = 0,0571.$$

A media d'estes valores é

$$\delta_1 = 0,0568.$$

Supprimindo o disco inferior e mergulhando novamente até á mesma altura, obteve por um processo analogo

$$\delta_0 = 0,0058.$$

Além d'isso,

$$S = \frac{a^4}{4} = 0,005393, \quad S' = 0$$

$$T_1 = 48^{\text{s}},5, \quad T_0 = 45^{\text{s}},5$$

$$\mu_1 = 0,005393, \quad \mu_0 = 0,00059$$

$$k_1^2 = 0,01681, \quad k_0^2 = 0,01907$$

$$B_1 = 1126,7, \quad B'_1 = 108,6$$

d'onde

$$B = B_1 - B'_1 = 1018,1.$$

Substituindo este valor em (18), vem

$$\varepsilon = 0,01905$$



valor notavelmente maior do que

$$\epsilon_{10} = 0,01309,$$

dado pelo methodo de Poiseuille.

**45.** O. E. Mayer e Maxwell modificaram o aparelho de Coulomb, fazendo oscillar um disco de vidro entre dois discos fixos paralelos ao primeiro, situados de um e outro lado a uma distancia igual e muito pequena. Para evitar as variações da elasticidade e viscosidade do fio de torsão, a suspensão adoptada é bifilar. Com esta disposição não se pode empregar senão oscillações de pequena amplitude, por causa da tensão dos fios. As amplitudes medem-se então pelo methodo de Poggendorff, visando com uma luneta de eixo normal a um espelho plano, invariavelmente ligado ao disco, o deslocamento da imagem de uma divisão da regua dividida em millímetros.

Mayer determinava successivamente os decrescimentos logarithmicos,  $\delta_1$  e  $\delta_0$ , relativos á agua e ao ar, e substitua  $\delta$  pela differença  $\delta_1 - \delta_0$  na formula que daria  $\epsilon$  se não houvesse outra resistencia, além da que provém da zona principal <sup>1)</sup>. Empregando quatro discos differentes e a agua á temperatura de 15°,5, obteve para valores de  $\epsilon$

$$0,01394; \quad 0,01394; \quad 0,01322; \quad 0,01314.$$

Como o valor de  $\delta$ , correspondente ás partes accessorias do aparelho, varia com a duração das oscillações,  $\delta_1 - \delta_0$  não é a parte de  $\delta$  devida á zona principal.

---

<sup>1)</sup> Violle, *Physique moléculaire*, t. 1, p. 761.

As formulas (20) e (21) tornar-se-iam, designando por  $a$  o raio do disco e por  $p$  a sua distancia a qualquer dos discos fixos,

$$P = pS, P' = \frac{S}{p}$$

sendo

$$S = \frac{a^4}{4}.$$

Logo

$$B = \frac{\pi a^4}{p} \varepsilon + \frac{\pi a^4 p k^2 \rho}{4 \sqrt{k - \mu}}.$$

As experiencias de Pietrowski que consistem em fazer oscillar uma esphera successivamente cheia de ar e agua, sendo portanto os valores de  $\varepsilon$  calculados pelo processo indicado no numero 38, dão, empregando agua distillada á temperatura  $21^{\circ},7$

$$\varepsilon = 0,01238,$$

em vez de

$$\varepsilon = 0,00698.$$

Os valores de  $\varepsilon$  determinaos pelo methodo das oscillações, qualquer que seja a disposição experimental empregada, concordam entre si e differem notavelmente dos deduzidos das experiencias com os tubos capillares; os seus valores estão geralmente na relação de 1,16 para 1.

Esta divergencia não pode attribuir-se a erros experimentaes do methodo das oscillações. É verdade que as formulas deduzidas para o calculo de  $\varepsilon$  supõem nullo o effeito da força centrifuga, o que não deverá realizar-se nas experiencias de Coulomb,

originando-se então correntes que, seguindo do eixo para a periphéria do disco, onde a velocidade é maior, augmentarão a resistencia offerecida pelo meio ao movimento; e, por outro lado, a constancia do decrescimento logarithmico das amplitudes só tem logar quando estas são extremamente pequenas. Mas estas causas de erro tornam-se insensíveis nas experiencias de Mayer, além de que a segunda inconveniente tambem se dá na determinação do coefficiente B pela equação (8).

A differença observada tambem não pode ser devida ao attrito do liquido sobre o bordo do disco que é reduzido a uma simples lamina. Por outro lado, os valores desprezados no decurso da exposição da theoria não são sufficientes para explicar o facto observado, porque o valor deduzido pela analyse bastante rigorosa das experiencias de Pietrowski não é menor do que os apresentados pelos outros observadores.

A causa é identica á que torna variaveis os valores de  $\epsilon$  deduzidos das experiencias com os tubos, quando a velocidade do liquido é consideravel. A variação da velocidade do solido oscilante, principalmente a sua annullação nas posições extremas, é muito favoravel á producção de movimentos turbilhonares, caracteristicos do segundo regimen, e este realisar-se-á quasi desde o principio do movimento. É talvez devido á mesma causa o excesso de  $\epsilon$  quando se determina o valor d'este coefficiente pelo emprego do cylindro girante cuja velocidade está longe de ser uniforme. N'este caso, as correntes liquidas devidas á força centrifuga deverão tambem augmentar o valor de  $\epsilon$ .

O methodo das oscillações não deve, pois, ser adoptado para a determinação do coefficiente de attrito dos liquidos pouco viscosos, em que o segundo regimen se produz facilmente; além d'isso, tem o inconveniente de ser mais complicado do que o do escoamento em tubos capillares.

A tabella seguinte contém os coeficientes de viscosidade de diferentes liquidos ;

Methodo de Poiseuille

Liquidos	$t$	$\varepsilon$	Observadores
Agua	0	0,01782	} Poiseuille.
"	10	0,01309	
"	10	0,01303	
Mercurio	17,2	0,01602	Warburg.
Alcool methylico	10	0,00694	} Reilstab.
" ethylico	10	0,01540	
" propylico	10	0,01993	
" butylico	10	0,03794	
Glycerina	2,8	42,18	} Schöttner.
"	26,5	4,944	
Agua e 94 por cento de glycerina	8,5	7,444	
" 80,31 "	8,5	1,022	
" 64,05 "	8,5	0,2223	
" 49,79 "	8,5	0,0926	} Obermayer.
Pez	7	$2,206 \cdot 10^8$	
Storax	15	$1,34 \cdot 10^{10}$	

Cylindro girante

Agua	16,7	0,012 55	Couette.
------	------	----------	----------

Methodo de Coulomb

Agua	10	0,01545	} Mayer.
"	15,5	0,01356	
"	21	0,01237	Pietrowski.
"	13	0,01905	Couette.
"	24,5	0,01402	Helmholtz.

# INDICE

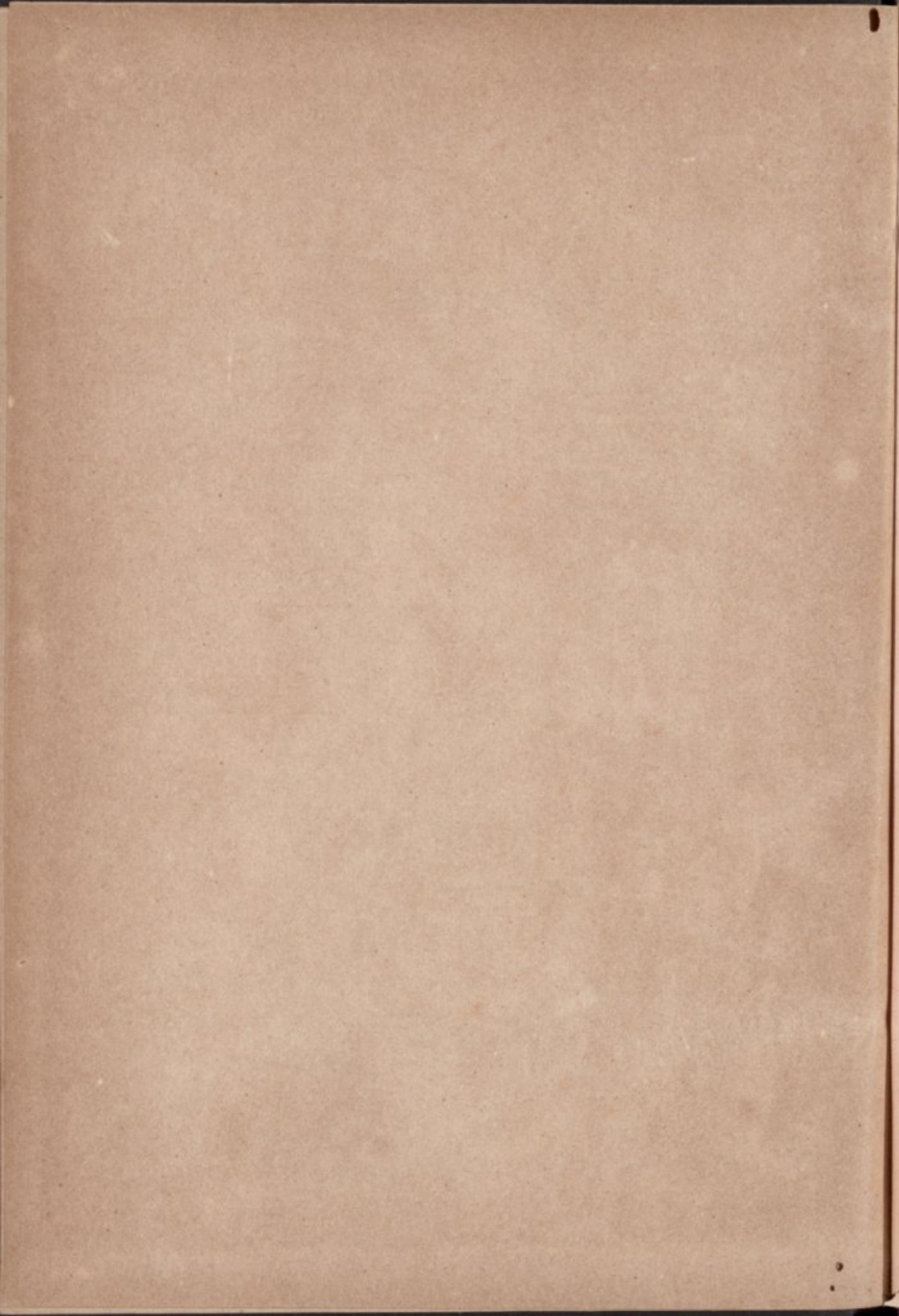
---

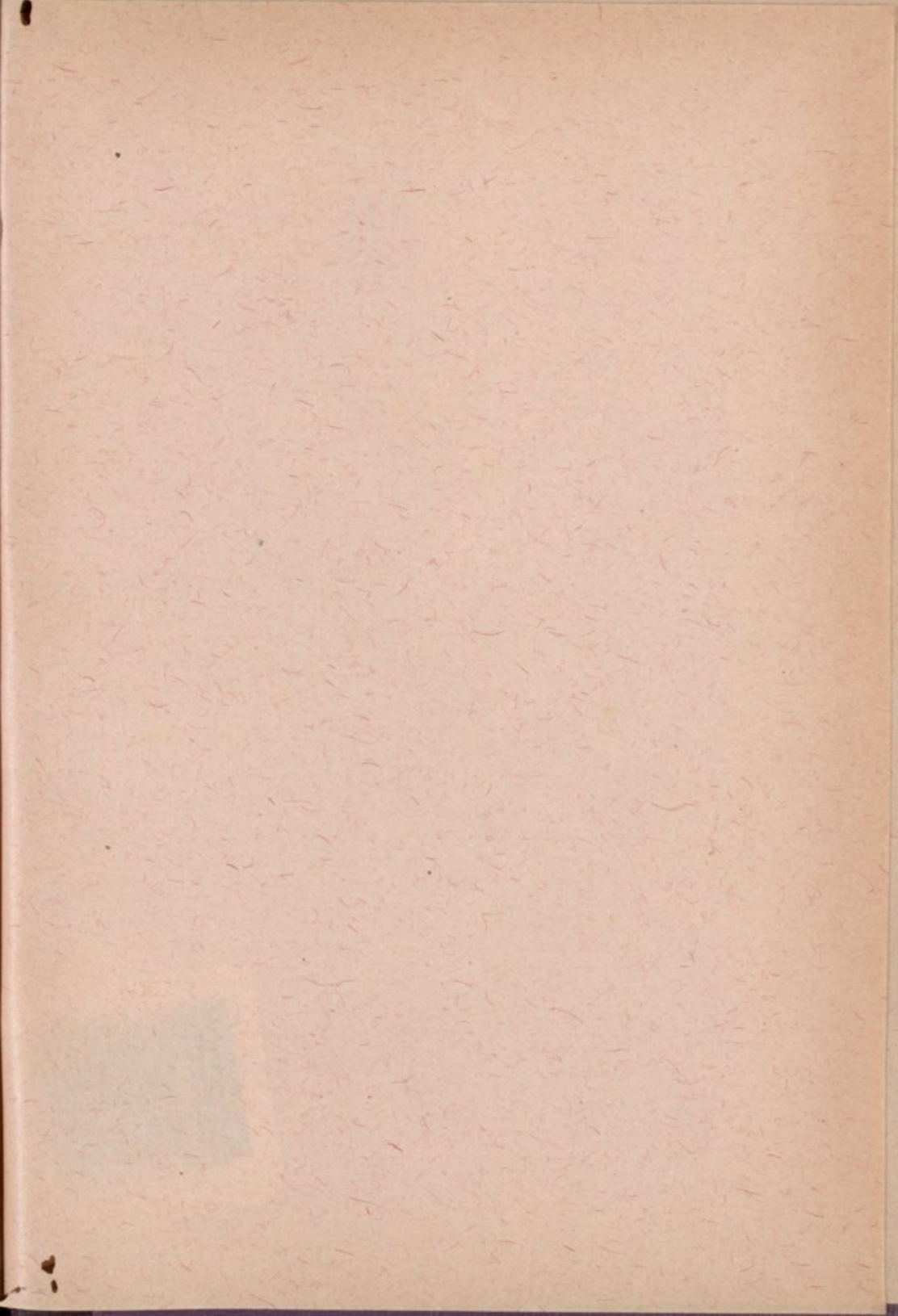
	Pag.
Considerações theoricas.....	1
Verificações experimentaes:	
Experiencias com os tubos .....	35
Experiencias com os cylindros.....	58
Methodo de Coulomb.....	68

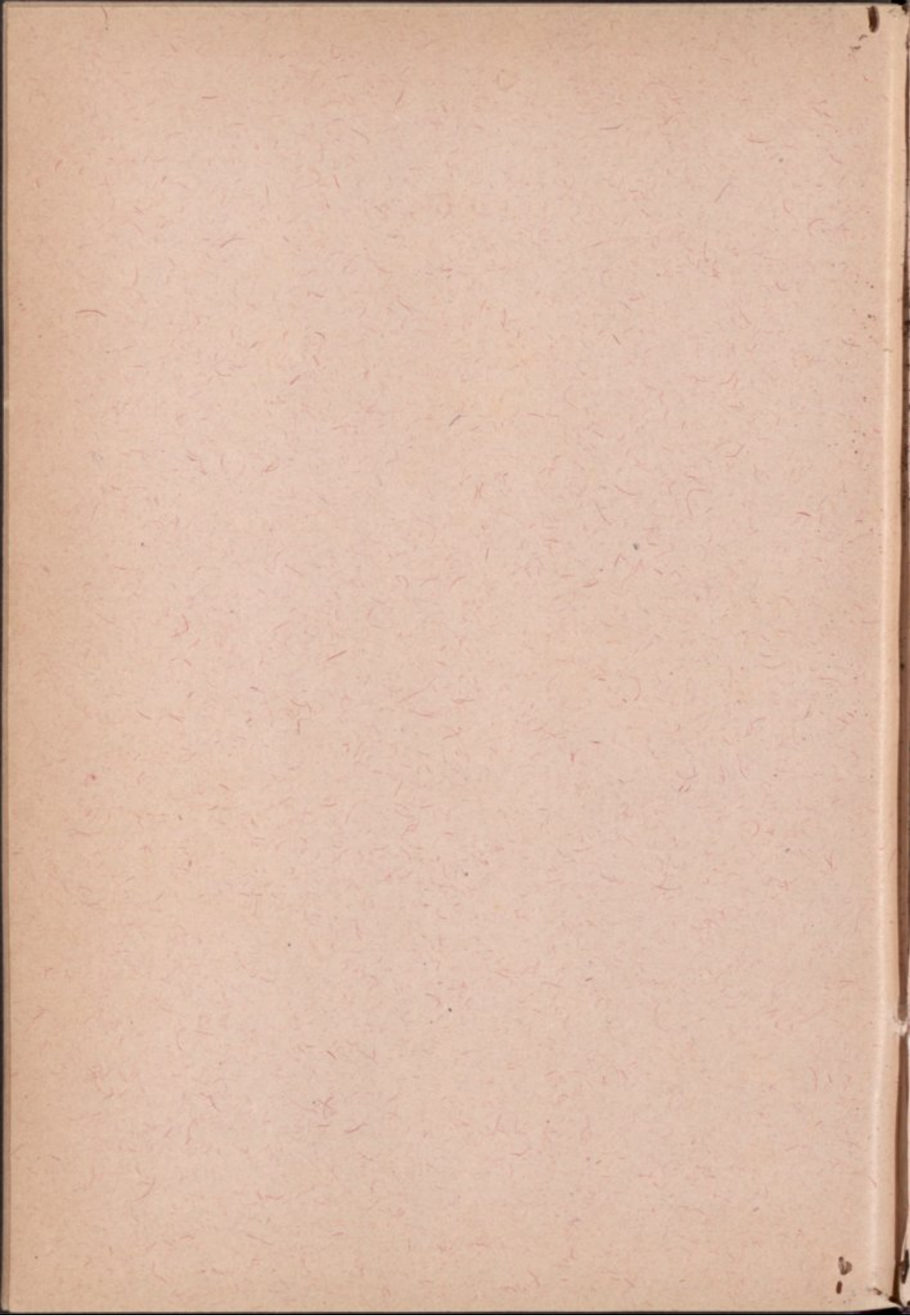
---

## ERRATAS

Pag.	Linh.	Erros	Emendas
17	7	(9)	(11)
18	9	<i>escarregamento</i>	<i>escorregamento</i>
"	18	(10)	(12)
23	19	atrito não fosse	atrito fosse
27	11	despresando	desprezando
"	14	$z'$	$z$
48	5	lhes	lhe
"	30	afilada	aflada
62	20	complecta	completa



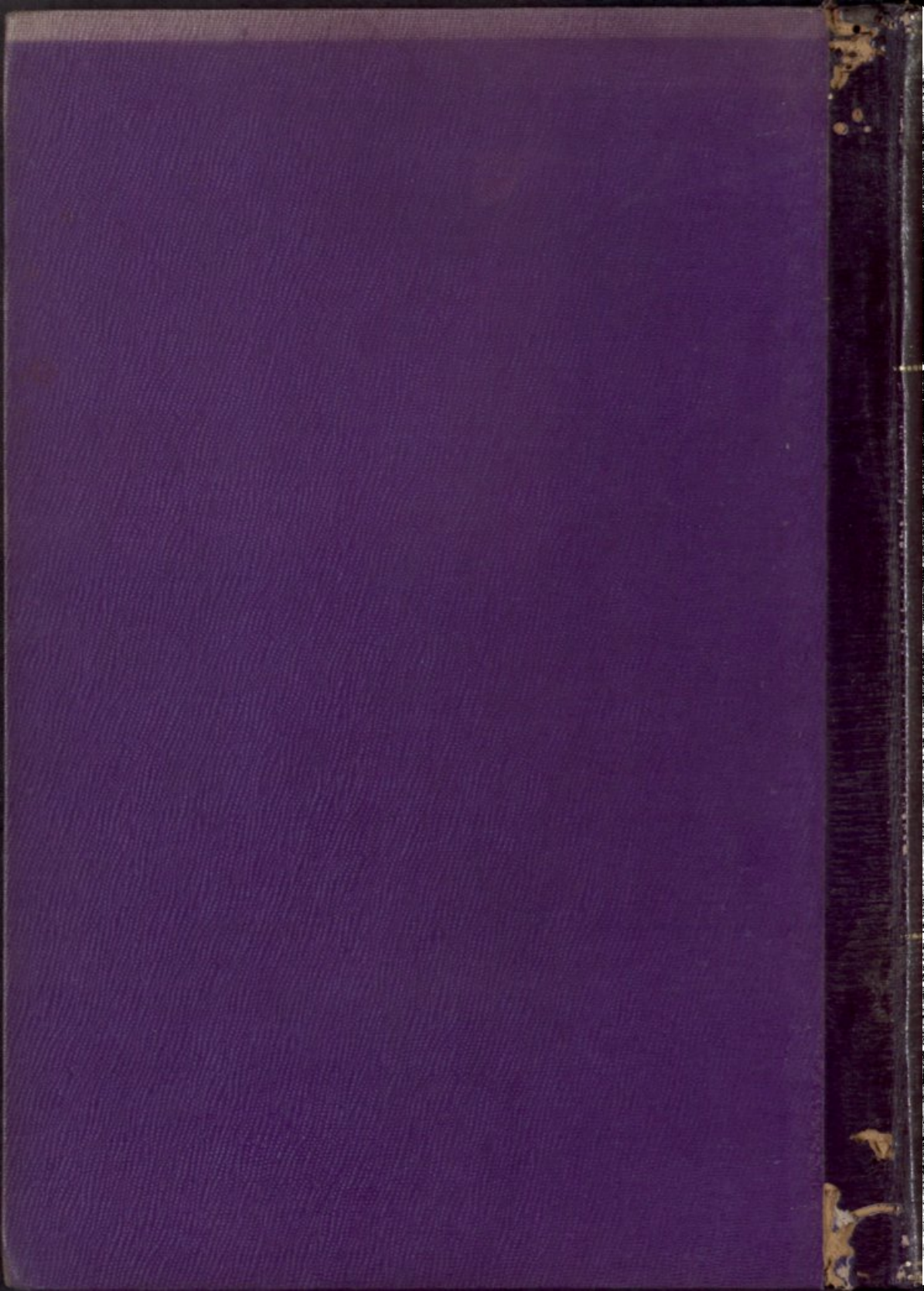








60984 81800



THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARY  
1800 S. LARAMIE AVE. CHICAGO, ILL. 60607  
TEL: 773-936-3000 FAX: 773-936-3001  
WWW.CHICAGO.LIBRARY.EDU