

x
José Custódio de Morais

VARIAÇÕES DE LATITUDE



COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1914

7
56
15
68

f
56
15
68

UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Biblioteca Geral

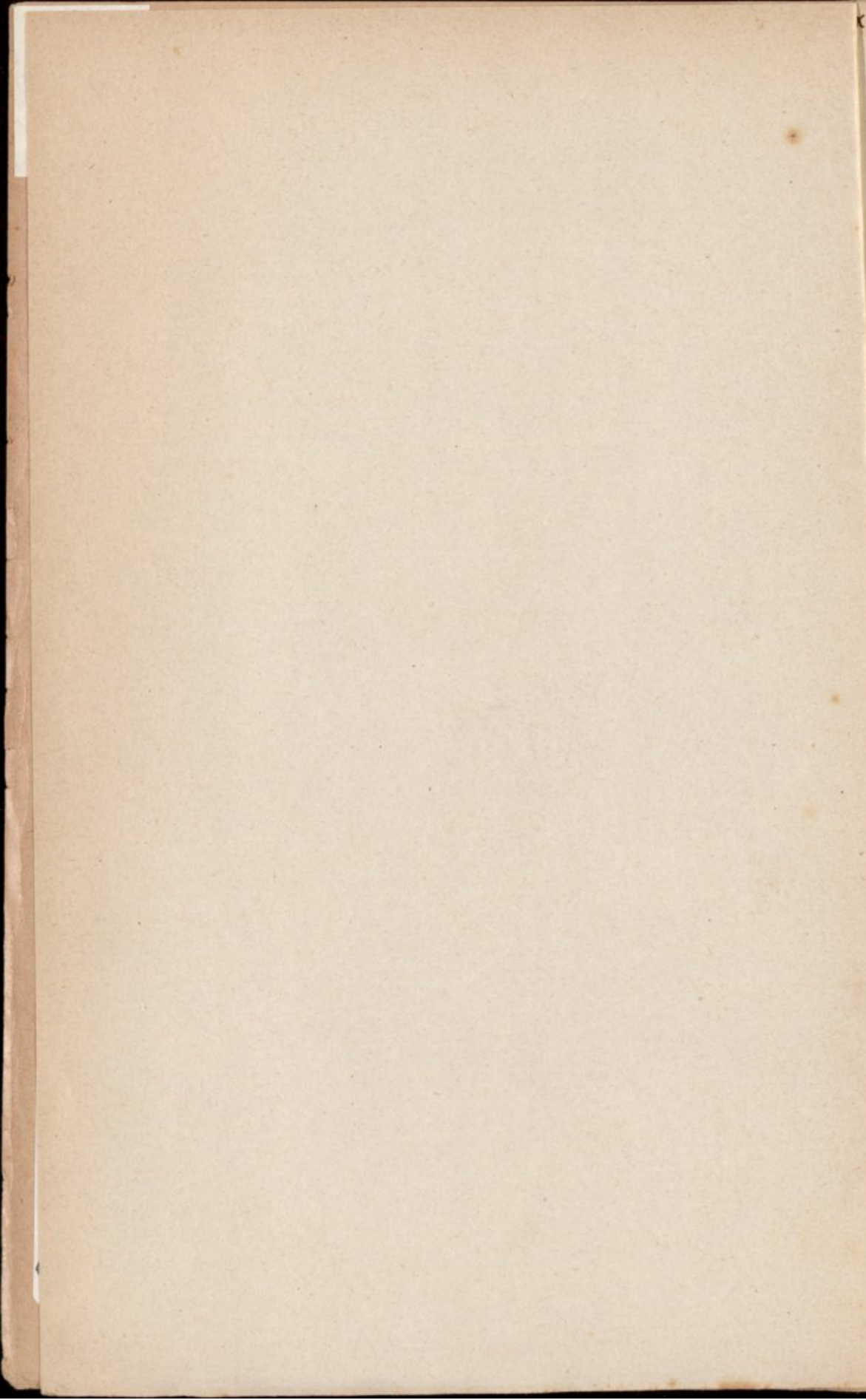


1301088402

Fov: 2-19-2

7
56
15
68

b 24305613



7
56
15
68

José Custódio de Moraes

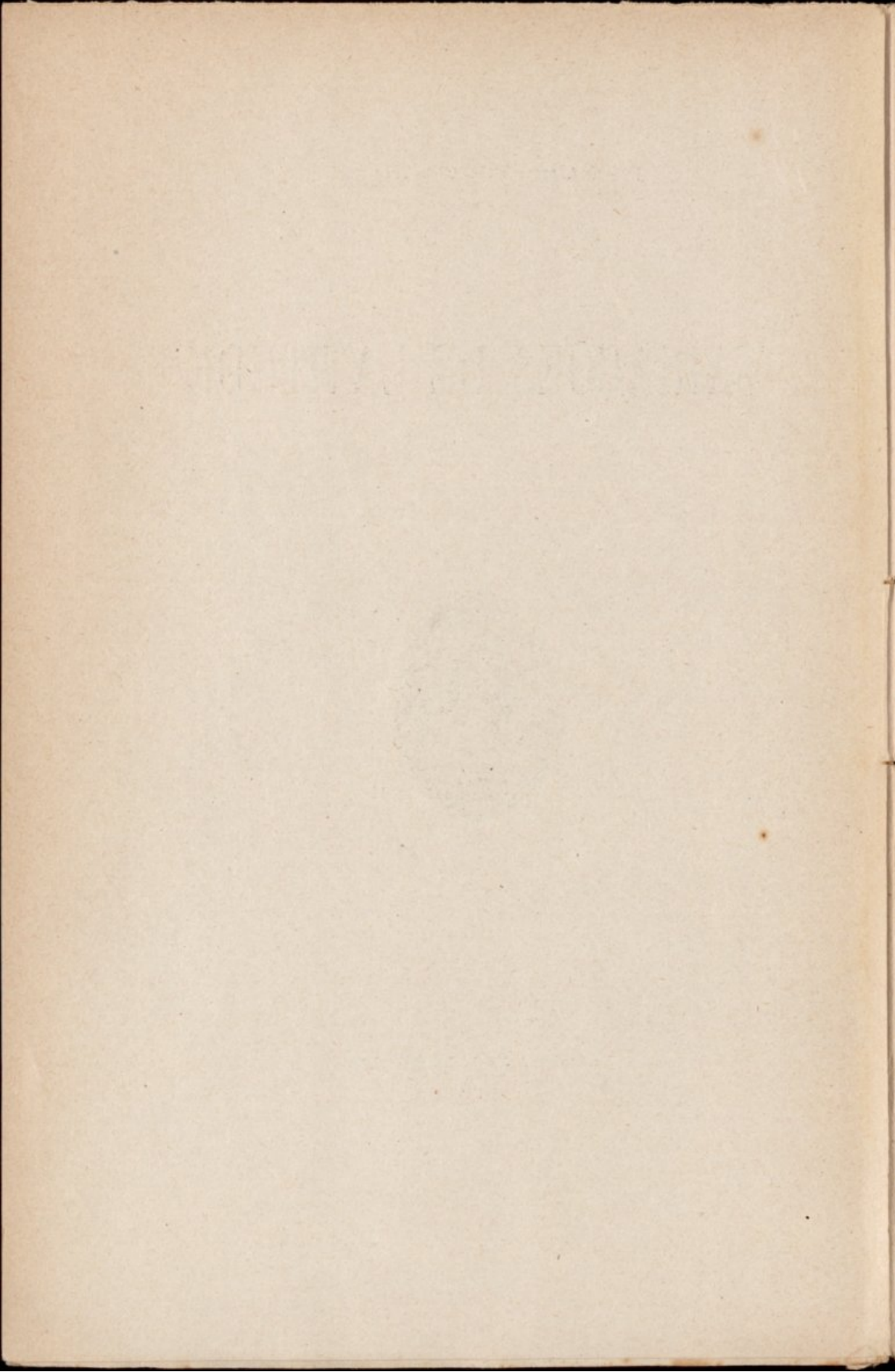
VARIAÇÕES DE LATITUDE



COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

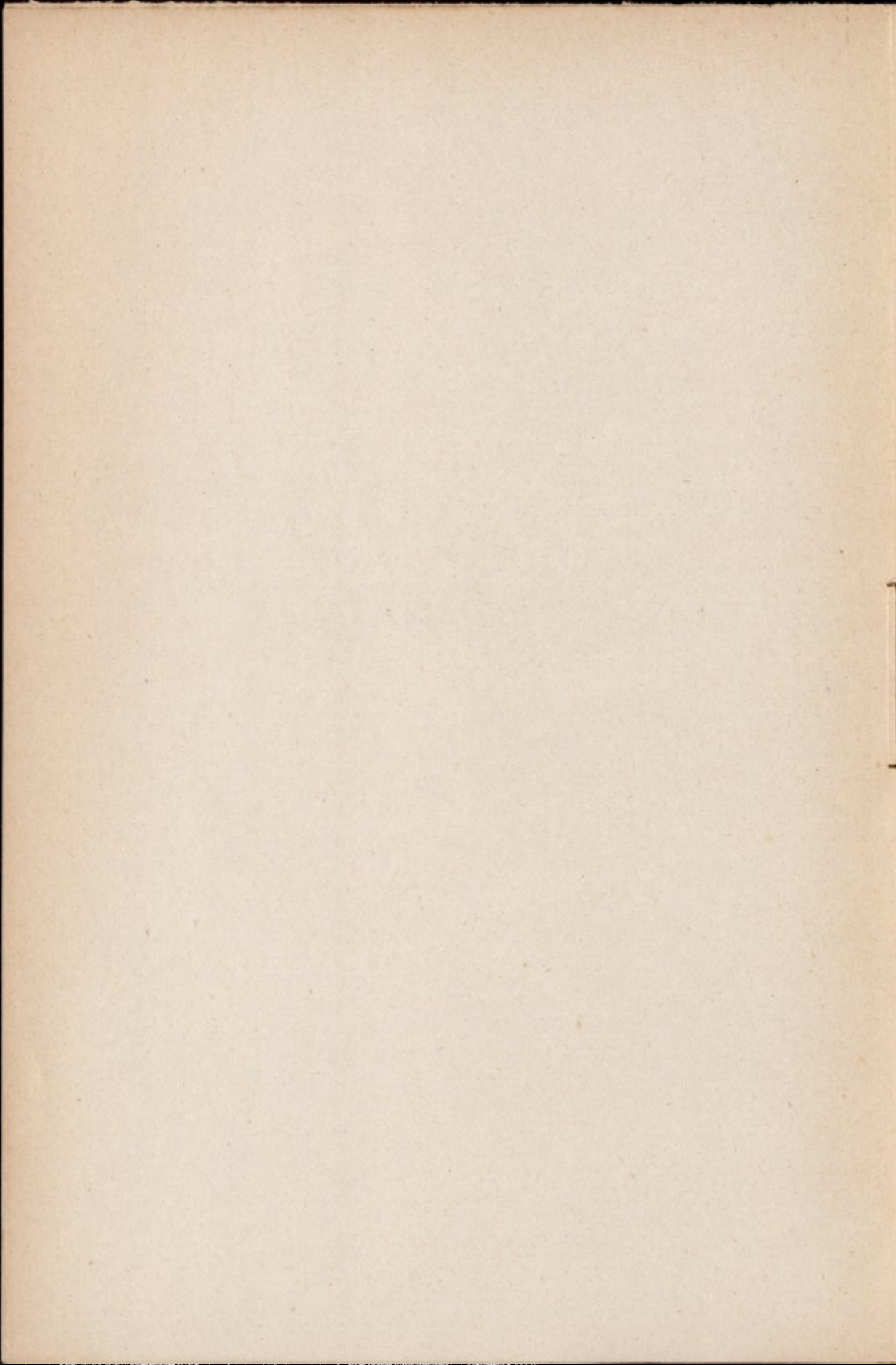
1914



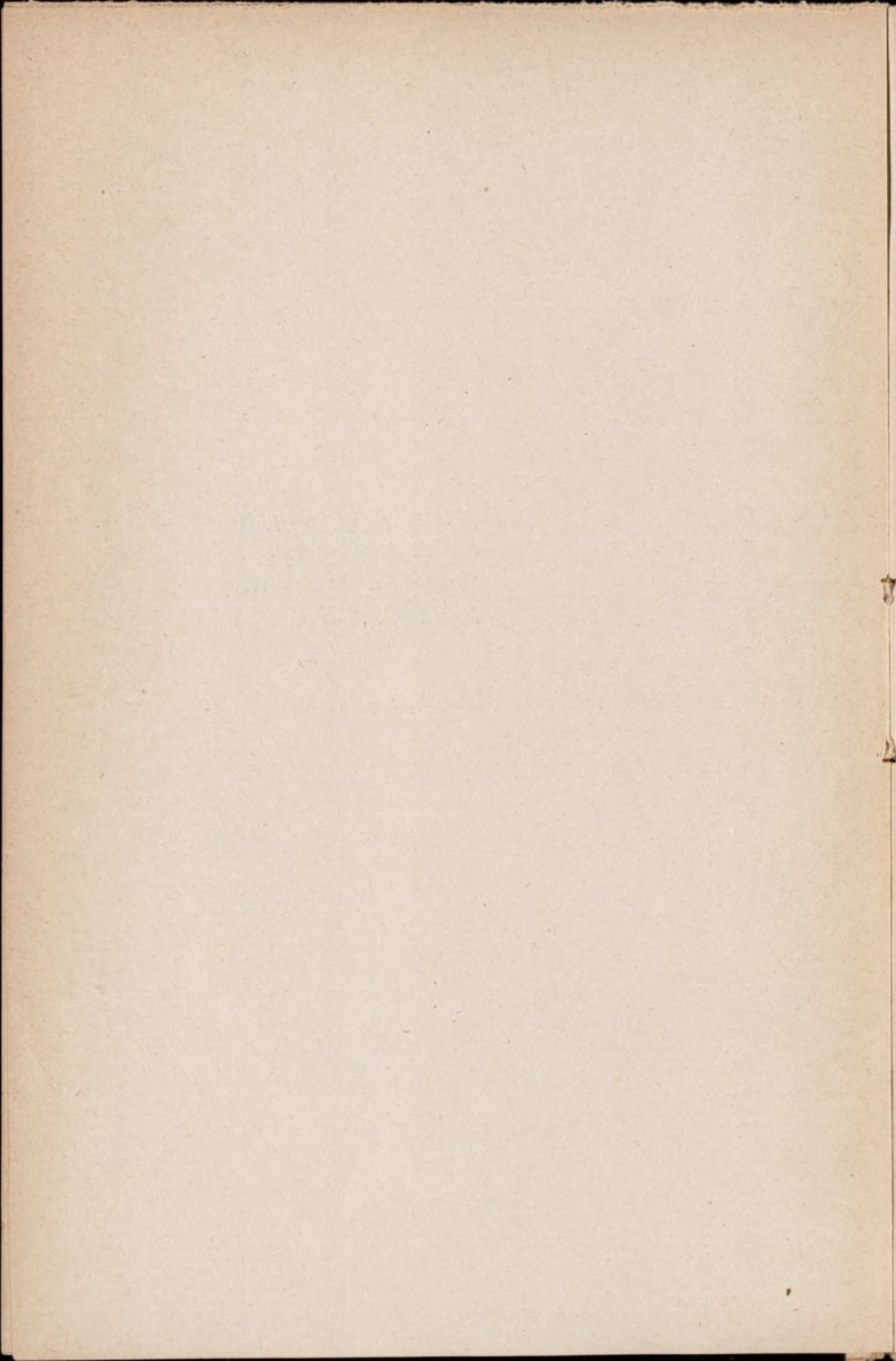
A MEUS PAIS

E

MEUS TIOS



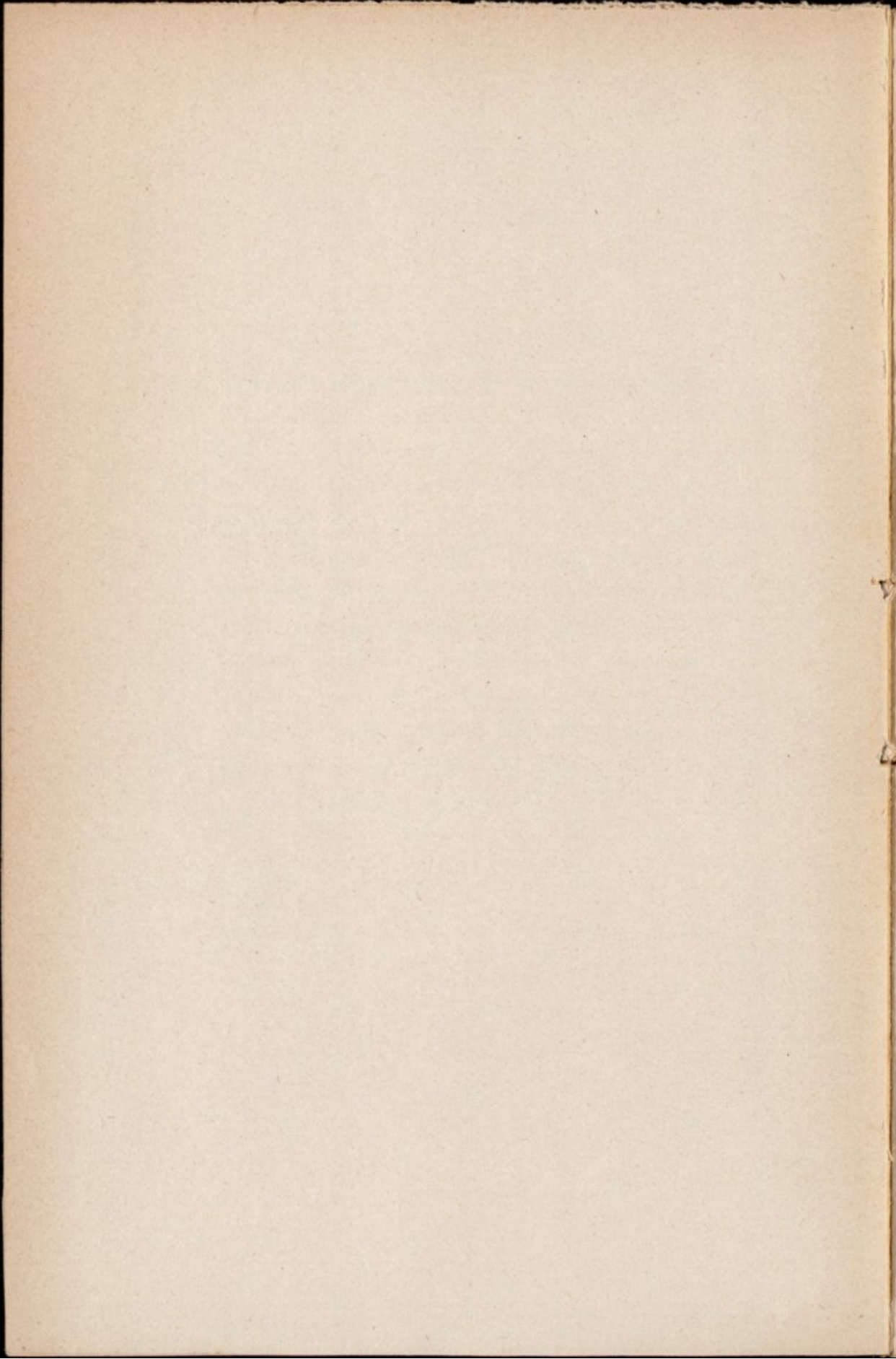
*Dissertação inaugural para o
acto de Doutoramento em
Matemática na Universi-
dade de Coimbra.*



Procuramos neste trabalho expôr debaixo dum ponto de vista uniforme as várias teorias apresentadas em diferentes publicações sobre o tão complicado problema, como é o das variações de latitude.

Na nossa exposição seguimos os trabalhos clássicos de RADAU, HELMERT, DARWIN, THOMSON e os mais modernos de KLEIN e SOMMERFELD em parte ampliados por JANNE.

No exame das observações utilizamo-nos principalmente do extenso material da Associação Geodésica Internacional, que apresenta a vantagem de ser o resultado duma série de observações sistematicamente organisadas para este estudo, e portanto incomparavelmente superior aos resultados obtidos em Observatórios isolados.



INTRODUÇÃO

Foi durante muito tempo considerado um facto indiscutivel a fixidez do polo à superficie da Terra.

Depois que MAXWEL applicou a teoria do movimento dos corpos rígidos, estudada por EULER, à rotação do Globo, tornou-se provável a existência dum movimento do polo à superficie da Terra; — provavel — pois segundo esta teoria não se demonstra que deve existir um movimento do polo à superficie dum globo rígido, mas simplesmente que elle pode existir. Tudo depende de, num dado momento, já existir por qualquer causa um desvio entre o eixo de inércia e o eixo de rotação. Se para um tal globo êstes eixos coincidissem num dado instante elles nunca mais deixariam de coincidir.

É pois preciso verificar experimentalmente se tal desvio existe.

Tinham-se já há tempo reconhecido variações, quer periódicas, quer seculares, nas observações da latitude, que como se sabe, está intimamente ligada com a posição do polo terrestre; mas, como os êrros das observações eram então muito superiores a essas variações, era ousadia concluir daí uma deslocação do polo.

Depois que tal facto se tornou indubitável, tem-se desenvolvido por toda a parte uma actividade extraordinária em tal estudo, que é um dos mais importantes em astronomia de posição, pois muitas observações estão sujeitas a graves êrros provenientes dêste facto, como por exemplo a determinação

das posições das estrelas, que exige o prévio conhecimento da latitude do lugar de observação.

É por isso de toda a conveniencia poder estabelecer fórmulas que nos dêem para um grande espaço de tempo a posição instantânea do polo da Terra.

CAPITULO I

§ 1) Equações diferenciais do movimento de rotação dum sistema de forma variável

Para estudarmos o movimento de rotação da Terra, começaremos pelo caso mais geral de a supôr de forma variável, pois nela tem lugar deslocamentos quer periódicos quer seculares (marés, movimentos da atmosphera, movimentos geológicos), e examinaremos em seguida se nos basta para a explicação dos factos observados, a consideração da Terra como um corpo rígido.

As equações que vamos estabelecer applicam-se ao movimento dum corpo em volta dum ponto fixo. Elas podem contudo ser estendidas ao movimento da Terra em volta do seu centro de gravidade, porque a força centrífuga devida ao movimento na órbita, em nada alterará as condições do movimento.

Seja um sistema de eixos rectangulares fixos x, y, z , cuja origem é o centro de gravidade O da Terra, e outro sistema de eixos móveis x_1, y_1, z_1 , com a mesma origem.

Sabe-se que, designando por p, q, r , as rotações dos eixos móveis em volta das suas posições instantâneas, e por u, v, w, u_1, v_1, w_1 , as projecções duma velocidade respectivamente sobre os eixos fixos e eixos móveis é

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} + qz_1 - ry_1, v_1 = \frac{dy_1}{dt} + rx_1 - pz_1, w_1 = \frac{dz_1}{dt} + py_1 - qx_1.$$

Sejam além disso os momentos de rotação referidos aos eixos fixos, aos eixos móveis, e os momentos da quantidade de movimento relativo, respectivamente:

$$f = \Sigma m (y w - z v),$$

$$g = \Sigma m (z u - x w),$$

$$h = \Sigma m (x v - y u)$$

$$f_1 = \Sigma m (y_1 w_1 - z_1 v_1),$$

$$g_1 = \dots\dots\dots$$

$$h_1 = \dots\dots\dots$$

$$f'_1 = \Sigma m \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right)$$

$$g'_1 = \dots\dots\dots$$

$$h'_1 = \dots\dots\dots$$

A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2).$$

Ora para cada ponto é

$$u^2 + v^2 + w^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$$

logo é

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) + f_1 p + g_1 q + h_1 r - D q r - E p r - F p q \quad (1)$$

em que A, B, C são os momentos principais de inércia

$$A = \Sigma m (z_1^2 + y_1^2), \quad B = \Sigma m (z_1^2 + x_1^2), \quad C = \Sigma m (x_1^2 + y_1^2)$$

e

$$D = \Sigma m y_1 z_1, \quad E = \Sigma m x_1 z_1 \quad F = \Sigma m x_1 y_1$$

são chamados os productos de inércia.

Introduzindo agora os ângulos de EULER φ, ψ, θ temos (TISSERAND, *Mécanique Céleste*).

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \\ q &= \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \varphi \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

As equações de LAGRANGE são

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta q'} - \frac{\delta T}{\delta q} = \frac{\delta U}{\delta q} \text{ em que } q' = \frac{dq}{dt};$$

substituindo q sucessivamente por φ, ψ, θ e q' por φ', ψ', θ' que são agora as novas variáveis independentes, e $\frac{\delta U}{dt}$ pelos momentos das forças exteriores L, M, N, e atendendo a que $T = \frac{1}{2} \Sigma m (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$ e por isso

$$\frac{\delta T}{\delta p} = \Sigma m (w_1 y_1 - z_1 v_1) = f_1, \quad \frac{\delta T}{\delta q} = g_1, \quad \frac{\delta T}{\delta r} = h_1$$

e a que

$$\frac{\delta T}{\delta \varphi'} = \frac{\delta T}{\delta r} \frac{\delta r}{\delta \varphi'}, \quad \frac{\delta T}{\delta \varphi} = \frac{\delta T}{\delta p} \frac{\delta p}{\delta \varphi} + \frac{\delta T}{\delta q} \frac{\delta q}{\delta \varphi},$$

vem por um lado

$$\frac{\delta T}{\delta \varphi'} = h_1, \quad \frac{\delta T}{\delta \varphi} = -q f_1 + p g_1$$

por outro lado atendendo ao valor de T dado por (1) vem

$$\frac{\delta T}{\delta \varphi'} = C r + h'_1 - D q - E p.$$

Procedendo do mesmo modo para as outras variáveis e comparando obtemos:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= f'_1 + A p - F q - E r \\ g_1 &= g'_1 - F p + B q - D r \\ h_1 &= h'_1 - E p - D q + C r \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

A substituição nas equações de LAGRANGE dos primeiros valores de $\frac{\delta T}{\delta \varphi'}$, $\frac{\delta T}{\delta \varphi}$, e dos outros análogos, dá-nos as equações diferenciais do movimento:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_1}{dt} + q h_1 - r g_1 &= L \\ \frac{dg_1}{dt} + r f_1 - p h_1 &= M \\ \frac{dh_1}{dt} + p g_1 - q f_1 &= N \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

Tendo assim o problema posto em equação, para o resolver seria necessário conhecer f_1, g_1, h_1, L, M, N , isto é, era preciso conhecer as coordenadas x_1, y_1, z_1 como funções do tempo, ou conhecer todos os deslocamentos que se dão na Terra.

Como isso nos é impossível, temos que nos sujeitar a hipóteses sucessivas, cujos resultados nos veem mostrar por comparação com a observação, até que ponto elas podem ser admitidas.

Como a parte móvel da Terra é muito pequena relativamente à parte invariável lembra primeiro supôr a Terra um sistema invariável.

§ 2) Sistema invariável. (Teoria Euleriana)

Neste caso não há movimentos relativos à Terra e teremos $f'_1 = g'_1 = h'_1 = 0$, e A, B, C , constantes.

Adoptemos como eixos de referência (x_1, y_1, z_1) eixos fixos na Terra e dirigidos segundo os tres eixos principais dela.

Será por isso $D = E = F = 0$ e então as equações (4) transformam-se em

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r &= L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p &= M \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q &= N \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

Estas equações juntamente com (2) dão-nos depois de integradas os movimentos da Terra, relativamente ao sistema de eixos fixos.

Conhecidos A, B, C, L, M, N , obteríamos p, q, r , que exprimem as rotações instantâneas do corpo em volta dos eixos móveis

$(x_1 y_1 z_1)$ donde depois obtemos a velocidade de rotação $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

Obtinhamos em seguida os cosenos directores do eixo instantâneo de rotação dados por $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$. Tinhamos assim a posição instantânea do eixo de rotação em relação aos eixos móveis ligados ao corpo, isto é, o movimento do eixo no interior da Terra, o que trás como consequência a variação das latitudes.

Como porêem êstes resultados nos hão de ser dados pela

observação das estrelas, precisamos de referir êste movimento a eixos fixos no espaço, para o que temos as equações (2) que nos darão φ, ψ, θ .

Para plano fixo (xy) adopta-se o plano da eclíptica duma determinada época, sendo Ox dirigido para o equinócio médio da época, e Oy a 90° dêste no solstício do verão; Oz é dirigido para o norte.

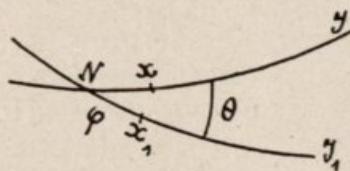


Fig. 1.

Dos outros eixos, Oz_1 é dirigido para o polo norte da Terra, e os outros dois contados no mesmo sentido dos de cima e situados, é claro, no plano do equador. Estas posições são só aproximadas pois são elas mesmo que nós vamos estudar.

Por θ designamos a obliquidade da eclíptica. O ângulo φ é contado no sentido $x_1 N$ (*fig. 1*) e representa para um observador situado no meridiano $z_1 O x_1$ o seu tempo sideral; ψ representa a precessão em longitude e é o arco xN .

Teoria dos movimentos do polo à superfície da Terra

TISSERAND (*Méc. Céleste II*) dá para coordenadas do polo instantâneo de rotação, em relação ao polo de inércia C, num plano tangente ao esferóide terrestre nesse ponto

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda \cos v + \lambda_1 \cos (L_1 - \varphi) \\ y &= \lambda \sin v + \lambda \sin (L_1 - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

em que λ, τ são constantes; $v = \frac{C-B}{A} n (t + \tau)$ em que n é a velocidade de rotação da Terra.

λ_1, L_1 são quantidades que variam muito lentamente e dependem da posição do Sol e da Lua e são dados por:

$$\left. \begin{aligned} 27 - 19 \cos 2 \odot - 9 \cos 2 \ominus + 4 \cos \Omega' &= \lambda_1 \sin L_1 \\ 19 \sin 2 \odot + 9 \sin 2 \ominus - 4 \sin \Omega' &= \lambda_1 \cos L_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

tomando para unidade de comprimento o centímetro, e sendo $\odot \ominus \Omega'$ longitudes médias da Lua, do Sol, e do nodo da órbita lunar.

Podemos representar este movimento do polo à superfície da Terra pela combinação de dois movimentos circulares, desde que desprezemos as variações de λ_1 que, como mostra (7), pode ir desde zero a 60^{cm} .

Para isso imagine-se então um movimento circular de centro C, raio λ (que as observações mostram ser em média de 15^{m}). Sobre esta circunferência move-se no sentido AI o centro doutra de raio λ_1 e tal que seja IB paralelo a CA e $\text{PIB} = L_1 - \varphi$ (*fig. 2*).

O ponto P descreve a pequena circunferência num dia

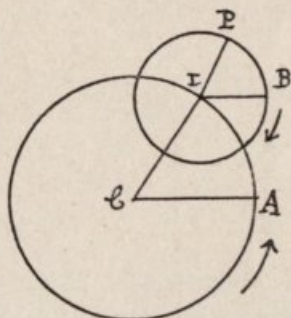


Fig. 2.

sideral. O ponto I leva a descrever a sua $\frac{2\pi}{n} \frac{A}{C-B} = 305$ dias siderais.

No movimento não perturbado obtém-se facilmente o movimento do polo à superfície da Terra.

Supondo o globo um elipsóide de revolução ($A=B$) as equações de EULER ficam:

$$\left. \begin{aligned} C \frac{dp}{dt} + \frac{C-A}{A} r q &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \frac{C-A}{A} r p &= 0 \\ C \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8).$$

Da 3.^a tira-se $r = \text{const.} = n$, e pondo $\frac{C-A}{A} n = \mu$ as duas primeiras ficam

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \mu q &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \mu p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

cujos integrais são

$$\left. \begin{aligned} p &= \delta \cos (\mu t + \tau) \\ q &= \delta \sin (\mu t + \tau) \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

Sabe-se que, para um sistema isolado, a resultante dos momentos das quantidades de movimento de todos os seus pontos, relativos a um sistema de eixos, é constante em grandeza, direcção e sentido, e terá por valor segundo a notação que usámos

$$\sqrt{f_1^2 + g_1^2 + h_1^2} = G.$$

Esta linha é perpendicular ao plano máximo das árias ou plano invariável, e por isso se lhe chama normal invariável.

A concepção de plano invariável é muito importante em Astronomia pois pode ser usado como plano de referência.

Não se conhece na natureza nenhum sistema isolado.

Desprezando as acções das estrelas sôbre o sistema solar, podemos supô-lo isolado, e então, atendendo à rotação e translação de todas as suas partes, teríamos um plano invariável que nos serviria para determinar em relação a êle o movimento de outros planos.

Como não conhecemos todos os movimentos que se dão no sistema solar, temos de o substituir por outro para o qual entram unicamente os efeitos dos movimentos de translação, abstraindo da rotação, o que se justifica atendendo às enormes distâncias dos planetas em relação às suas grandezas. É claro que tal plano já não será rigorosamente fixo por os corpos celestes não serem reduzidos a simples pontos. LAPLACE calculou a posição dêste plano e achou que o ângulo quo ele fazia com a eclíptica de 1950 era de $1^{\circ},7689$.

Para o nosso estudo entra em consideração unicamente a Terra, e êste plano não se conservará invariável no espaço em virtude da acção do Sol e da Lua, e sofrerá por isso oscilações de várias ordens, a que estão ligados os fenómenos do precessão e nutação. Nesse estudo supõem-se coincidentes a normal invariável, o eixo principal de inércia OC e o eixo instantâneo de rotação, tendo depois de se fazer a êste movimento as correções que dependem da forma da Terra, não contando com os movimentos expressos pelas fórmulas (7) que já sabemos exprimirem uma ligeira oscilação de OI em relação a OC , e serem insensíveis aos meios de observação.

Tomêmos agora, para o caso da Terra invariável e isolada no espaço, o eixo Oz dirigido pela normal invariável, e Ox , Oy no plano invariável, de fórma que por uma rotação positiva à volta de Oz , se vai de Ox a Oy .

Para eixos móveis ligados invariavelmente à Terra tomêmos

três eixos principais de inércia relativos ao seu centro de gravidade.

Com esta nova orientação de eixos, geralmente usada nos tratados de mecânica, obtemos das relações (2), substituindo ψ, θ por $-\psi, -\theta$ as expressões: (*fig. 3*).

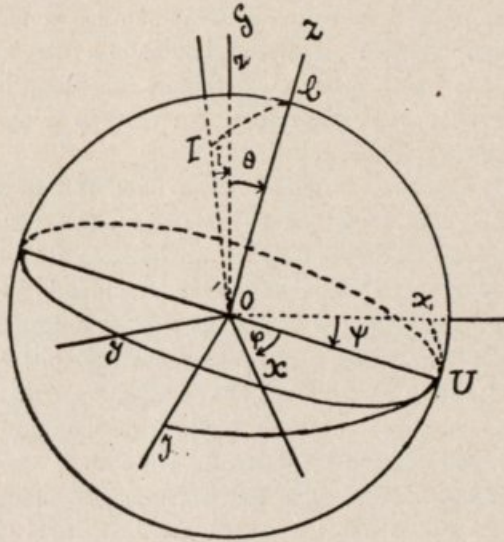


Fig. 3.

$$p = \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \theta' \cos \varphi$$

$$q = \psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \theta' \operatorname{sen} \varphi$$

$$r = \psi' \cos \theta + \varphi'$$

que, por ser

$$\cos \theta = \frac{Cr}{\sqrt{A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2}} = \frac{Cn}{G} = \text{const.} = \theta_0$$

em que G designa o momento resultante das quantidades de movimento em relação a O, se transformam em:

$$\left. \begin{aligned} p &= \psi' \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \varphi \\ q &= \psi' \operatorname{sen} \theta_0 \cos \varphi \\ n &= \psi' \cos \theta_0 + \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

Dividindo a 1.^a pela 2.^a e atendendo a (10) obtém-se

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{p}{q} = \operatorname{cotg} (\mu t + \tau).$$

donde

$$\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} - \mu t - \tau = -\mu\tau + \tau'$$

k designando um número inteiro e τ' uma nova constante.

Da 3.^a equação tira-se

$$\psi' = \frac{n - \varphi'}{\cos \theta_0} = \left(n + \frac{C - A}{A} n \right) \sec \theta_0 = \frac{C}{A} n \sec \theta_0$$

donde

$$\phi = \frac{C}{A} n \sec \theta_0 \tau + \tau''$$

sendo τ'' uma constante.

A observação tem mostrado que o ângulo $\operatorname{COG} = \theta_0$ fica inferior a $0''{,}3$; será pois $\sec \theta_0 = 1$ e $\operatorname{sen} \theta_0$ muito pequeno.

Chamando ω a velocidade de rotação é

$$p^2 + q^2 + n^2 = \omega^2, \quad n = \omega \cos \theta_0, \quad n \sec \theta_0 = \omega$$

e

$$p^2 + q^2 = \omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \text{ donde } \sqrt{p^2 + q^2} = \omega \operatorname{sen} \theta_0 < 1''{,}9 \text{ por dia sideral.}$$

Com a orientação dos eixos aqui escolhida é ω negativo, e por ser $C > A$ é $\frac{C-A}{A} > 0$ e $\mu = \frac{C-A}{A} n = \frac{C-A}{A} \omega \cos \theta_0 < 0$ ou desprezando termos de 2.^a ordem: $n = \omega = -2\pi$ por dia.

A relação $\frac{C-A}{A}$ deduzida da teoria da precessão luni-solar é $= \frac{1}{305}$, por conseguinte é

$$\mu = -\frac{2\pi}{305} \text{ por dia}$$

que introduzido no valor de φ dá

$$\varphi = \frac{2\pi}{305} + \frac{\tau}{1. \text{ dia sid.}} + \tau'$$

donde se vê que para φ aumentar de 2π bastam 305 dias siderais. Vê-se além disso que φ cresce proporcionalmente ao tempo.

Para o valor de ϕ temos

$$\phi = \frac{C}{A} \omega t + \tau'' = -\frac{306}{305} 2\pi \frac{t}{1 \text{ dia sid.}} + \tau''$$

donde se vê que para ϕ diminuir de 2π , é preciso que t aumente de $\frac{305}{306}$ do dia sideral; assim ϕ decresce proporcionalmente ao tempo e diminue de 2π aproximadamente num dia sideral.

É fácil vêr que os tres eixos OC, OI, (de rotação instantânea), OG ficam situados no mesmo plano, pois que a identidade

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{\omega} & \frac{q}{\omega} & \frac{r}{\omega} \\ \frac{Ap}{G} & \frac{Aq}{G} & \frac{Cr}{G} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

mostra que as três rectas tiradas de O, cujos cosenos directores são $\frac{p}{\omega}$... em relação a O x, O y, O z, possuem esta propriedade.

E assim o plano O I G C gira à volta de O G, ficando O I e O C de lados opostos.

Sabe-se pela observação que $\text{COG} = \theta < 0',3$, e para obtermos o valor de $\text{IOG} = i$ relativamente a θ temos

$$\begin{aligned} \frac{i}{\theta} &= \frac{\text{sen IOG}}{\text{sen GOC}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \text{IOG}}{1 - \cos^2 \text{GOC}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \left[\frac{Ap}{G} \cdot \frac{p}{\omega} + \frac{Aq}{G} \cdot \frac{q}{\omega} + \frac{Cn}{G} \cdot \frac{n}{\omega} \right]^2}{1 - \frac{C^2 n^2}{G^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(C - A)^2 n^2 (p^2 + q^2)}{A^2 (p^2 + q^2) \omega^2}} = \frac{C - A}{A} \cos \theta_0 = \frac{1}{305}. \end{aligned}$$

Pode-se pois praticamente considerar OI e OG como duas rectas coincidentes.

Mostram as equações (10) que o polo I descreve uma circunferência à volta do polo C, com o movimento uniforme e no sentido directo.

O polo G descreve à superfície do globo uma circunferência muito próxima da de I; ora o polo G é imóvel no espaço, deve pois OC mover-se com toda a Terra à volta de OG no sentido directo, e como ele executa a sua revolução $\frac{1}{306}$ do dia, antes que a Terra tenha executado a sua em volta de OI, resulta daqui o movimento de I e de G à superfície do globo.

Em resumo. — Há variações de latitude devido à fôrma da Terra com o período de 305 dias, e variações com período diário devido à acção do Sol e da Lua, como se vê nas fórmulas (6) e (7).

**Resultados das observações do movimento do polo
à superfície da Terra**

Efectuaram-se muitos trabalhos na pesquisa do período de dez meses pois que o período diário estava além dos meios de observação.

Os resultados obtidos não foram concordantes o que levou a desconfiar da existência de tal período, até que em 1890 o astrónomo americano CHANDLER, fazendo a análise dos movimentos do polo, descobriu que o caminho dêste é uma curva que não é rigorosamente fechada, mas que no entanto apresenta uma dupla periodicidade. Um dos períodos é de doze meses, e o outro de catorze.

A partir desta época vários astrónomos apresentaram fórmulas para deduzir o movimento do polo, as quais, na hipótese da existência unicamente dêstes dois períodos: um circular de 427 dias e um elíptico de 366, se podem resumir da seguinte forma

$$x = A \cos \frac{2\pi}{427} (t - \tau_1) + B \cos \frac{2\pi}{366} (t - \tau_2)$$

$$y = A \sin \frac{2\pi}{427} (t - \tau_1) + B' \sin \frac{2\pi}{366} (t - \tau_2)$$

em que A, B, B', τ_1 , τ_2 são constantes e t designa uma época determinada.

Por exemplo CHANDLER achou em 1898

$$A=0'',16, B=0'',15, B'=0'',04, \tau_1=5 \text{ out. } 1982 + \left(\frac{11}{45} \times 427\right) \text{ dias,}$$

$$\tau_2=5 \text{ outubro.}$$

escolhendo para eixos dos x a direcção 45° Long. E de Greenwich, e para eixo do y a Long. 135° E.

Se nos limitássemos a estas fórmulas julgariamos que o movimento se fazia sobre uma curva que se fechava ao fim de 7 anos (m. m. c. de 14 e 12 meses), o que é contrário à realidade, pois produzem-se outras oscilações do polo de forma que a curva se apresenta muito irregular.

Comparação da teoria com a observação e razões da diferença entre os dois resultados

Como se vê existe uma grande diferença entre estes dois resultados.

¿ Donde provirá ella?

Naturalmente da hipótese donde partimos.

Não podemos pois supor a Terra um corpo rígido, isto é, que ella se não defórma sobre a acção da sua própria rotação e que as suas partes não mudam de posição umas relativamente às outras, e enfim não podemos fazer abstracção dos fenómenos perturbadores que podem produzir-se no seu interior ou à superfície da Terra.

Devemos também notar que a teoria Euleriana não toma em conta a acção das forças exteriores, que produzem uma ligeira variação diária da latitude, e cujo coeficiente pode atingir $0',02$ o que produz um desvio máximo de $0',04$.

A hipótese dum globo perfeitamente rígido não pode pois justificar-se. Considerações de ordem cosmogónica e geológica parecem mostrar que o interior da Terra é, pelo menos em parte, fluido.

Debaixo d'este ponto de vista o problema torna-se muito mais complicado e as equações de EULER não bastam para determinar as leis do movimento.

A crusta não possui senão uma rigidez relativa e deve de-formar-se sob a acção da sua própria rotação. Os atritos do nucleo fluido sobre a crusta devem do mesmo modo introduzir perturbações.

As mudanças geológicas que invocamos para explicar certos accidentes da crusta, ou que vemos actualmente terem lugar,

tiveram e teem uma repercussão sôbre o movimento da Terra. Tais são as erupções vulcânicas, depressão ou elevação de certas regiões, etc.

Devemos também ter em conta a acção produzida pelo fenómeno das marés, pelo atrito dos mares, pelas correntes marítimas que mesmo sem alterarem a distribuição das massas podem influir na rotação da Terra.

O mesmo acontece com as perturbações atmosféricas, a fusão dos gelos polares, a formação e deslocação dos glaciares, a acção dos rios, a extinção de lagos interiores, etc.

Finalmente como causas exteriores pensou-se mesmo em invocar a acção de forças magnéticas em relação com as manchas do Sol, as quais como mostrou J. HALM (*Astronomische Nachrichten* 3619) tem um curso semelhante às variações de latitude no seu período de 11 anos.

Compreende-se que êstes fenómenos tenham influência sôbre a rotação da Terra. ¿Será porêem ela sensível? Poderão êles explicar os factos observados?

Tal é a questão que passamos a expôr.

§ 3) Sistema variável

Ao estabelecermos as equações diferenciais do movimento dum sistema variável, obtivêmos as fórmulas (3) e (4) unicamente com a consideração de dois sistemas de eixos: os de referência (móveis) x_1, y_1, z_1 , e os fixos x, y, z .

As rotações p, q, r dos eixos de referência em volta das suas posições instantâneas bastam para determinar o movimento do sistema. É porêem conveniente a introdução das rotações $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, de eixos (ξ, η, ζ) mais ou menos ligados ao sistema, em volta dos eixos de referência.

As velocidades totais segundo O $x_1, O y_1, O z_1$, são

$$u_1 = u'_1 + \omega_2 z_1 - \omega_3 y_1,$$

.....

em que u'_1 designa a projecção sobre Ox_1 da velocidade relativa que resulta dos deslocamentos $d\xi, d\eta, d\zeta$.

Então os momentos de rotação (3) tornam-se

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= f'_1 + A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3 \\ g_1 &= g'_1 - F\omega_1 + B\omega_2 - D\omega_3 \\ h_1 &= h'_1 - E\omega_1 - D\omega_2 + C\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

em que f'_1, g'_1, h'_1 , são as projecções sobre Ox_1, Oy_1, Oz_1 , do momento resultante, tomado em relação a O , das quantidades de movimento relativo dos diversos pontos do corpo, correspondente a um deslocamento $d\xi, d\eta, d\zeta$.

Escolha dos eixos móveis

Vamos vêr os diferentes modos como podemos escolher os eixos móveis.

a) No caso em que o corpo possui uma parte rígida, podemos fixar-lhe duma maneira invariável, um ou outro, ou mesmo ambos os sistemas $(x_1 y_1 z_1)$ e $(\xi \eta \zeta)$.

b) Escolhendo para eixos $(x_1 y_1 z_1)$ os eixos principais instantâneos do corpo, e para eixos $(\xi \eta \zeta)$, eixos coincidentes com os primeiros, é $p = \omega_1, q = \omega_2, r = \omega_3, D = E = F = 0$ e as equações do movimento são :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(f'_1 + Ap) + q(h'_1 + Cr) - r(g'_1 + Bq) &= L_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

Estas equações foram empregadas por VOLTERRA (*Acta Mathematica*, t. XXII), e SOMMERFELD (*Theorie des Kreisels*) para estudar o movimento dum corpo cujos momentos principais de inércia ficam constantes, existindo unicamente mo-

vimentos cíclicos, isto é, movimentos em que a massa que se desloca é substituída por outra de igual densidade.

Será então, por serem A, B, C constantes,

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_1}{dt} + A \frac{dp}{dt} + (q h_1 - r g_1) + (C - B) r q = L, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (14).$$

c) Podemos também tomar para eixos $(x_1 y_1 z_1)$ os eixos principais de inércia instantâneos, e para $(\xi \eta \zeta)$ eixos supostos fixos no corpo, com a disposição que êle tinha, tornado rígido num instante bem determinado. É êste caso que foi estudado por DARWIN (*Influences of geological changes — Phil. Tran.* 1877), que calculou os valores de f_1, g_1, h_1 relativos a mudanças geológicas na Terra, e obteve valores muito pequenos.

Pode-se pois pôr $f_1 = g_1 = h_1 = 0$, o que nos conduz aos chamados eixos médios.

Eixos médios. — É um sistêma de eixos determinados pelas condições $f_1 = g_1 = h_1 = 0$, de tal modo que se a Terra se tornasse rígida num dado instante, o movimento desses eixos no tempo dt seria o mesmo que se esses eixos fossem fixos no corpo. Por êles serem determinados pelas condições $f_1 = g_1 = h_1 = 0$ que exprimem que o momento resultante das quantidades do movimento relativo é nulo, podemos dizer que há ausência de correntes para os eixos $(\xi \eta \zeta)$ escolhidos desta maneira; isto é, produz-se o movimento de fôrma que se anulam (compensam) as correntes, e então podemos chamar-lhe eixos médios por exprimirem a rotação média do corpo variável — a qual se torna rotação actual se o corpo se torna rígido.

Como nota RADAU aquelas condições não determinam senão a rotação média sem fixar a posição dos eixos $(\xi \eta \zeta)$ em relação ao corpo. Para que esta seja completamente deter-

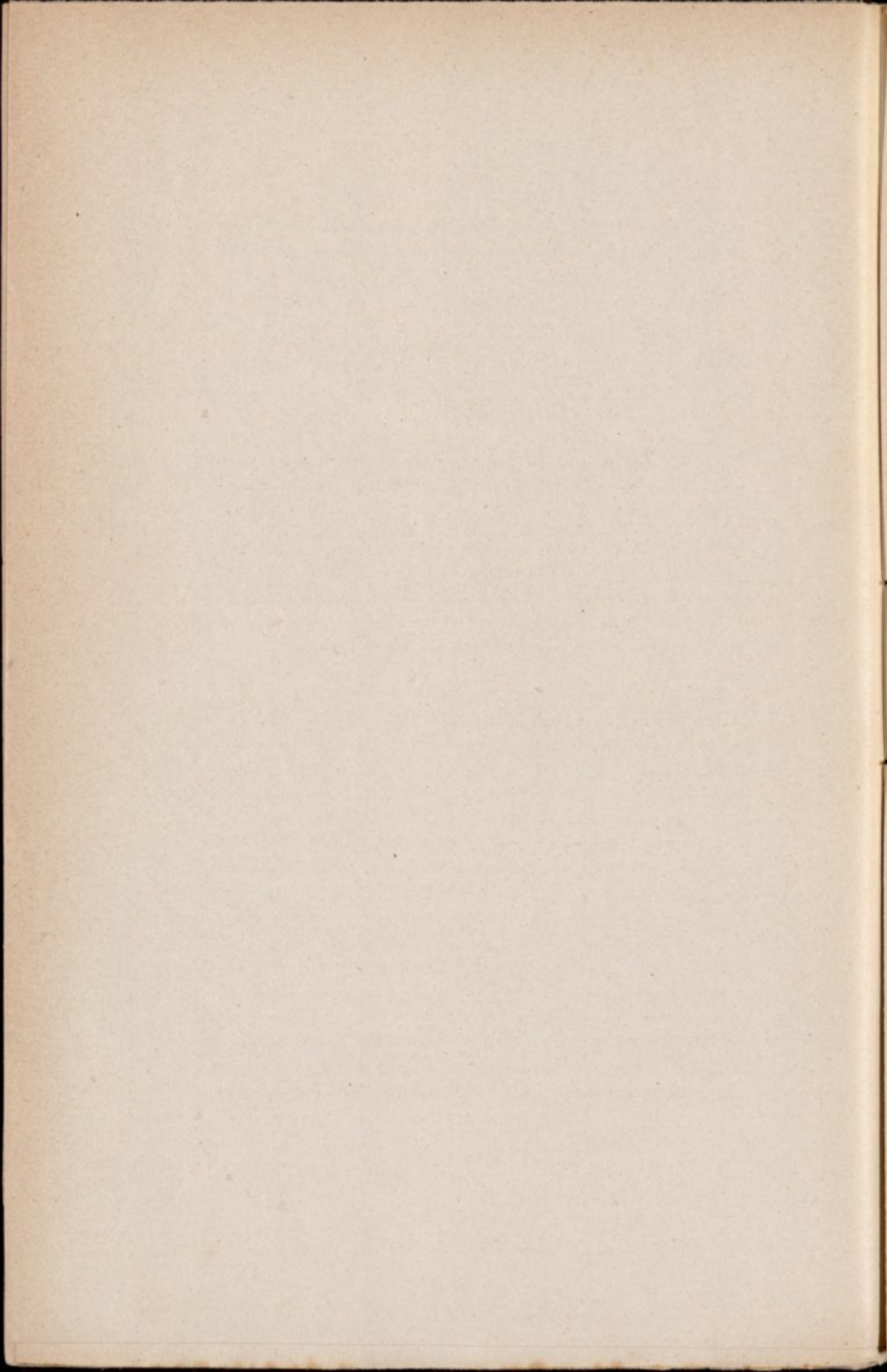
minada é necessário dar a estes eixos uma posição inicial, por exemplo fazê-los coincidir com os eixos principais no tempo $t=0$.

Então as equações diferenciais do movimento ficam

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(A \omega_1) + q C \omega_3 - r B \omega_2 &= L \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (15).$$

d) Podemos finalmente, fazendo como GYLDEN, tomar para eixos $(x_1 y_1 z_1)$ e $(\xi \eta \zeta)$ supostos coincidentes, os eixos médios a cada instante. Temos então $f'_1 = g'_1 = h'_1 = 0$, e $p = \omega_1$, $q = \omega_2$, $r = \omega_3$ e as equações diferenciais do movimento ficam:

$$\frac{dt}{dt}(Ap - Fq - Er) + q(-Ep - Dq + Cr) - r(-Fp + Bq - Dr) = L \quad (16).$$



CAPÍTULO II

Influência das deslocações das massas sobre os movimentos do polo

Podemos supor que a Terra se compõe dum esqueleto rígido com pequenas massas móveis quer na sua superfície quer no seu interior.

O momento resultante total OG das quantidades de movimento absoluto deve ser constante por não considerarmos forças exteriores.

Este momento compõe-se do momento OG' da parte rígida e do momento resultante OG'' das quantidades do movimento absoluto das pequenas massas móveis.

$$OG = OG' + OG'' = \text{Const.}$$

Tomando para eixos (x_1, y_1, z_1) os eixos principais de inércia da parte rígida cujos momentos designamos por A_0, B_0, C_0 , as projecções de OG' sobre os tres eixos são

$$f' = A_0 p \quad g' = B_0 q \quad h' = C_0 r \quad (17).$$

O momento OG'' das partes móveis tem por projecções valores que designamos por f_2, g_2, h_2 .

Designando $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$, o mesmo que A, B, C, D, E, F com a diferença de se referirem só à parte móvel, e análogamente para os momentos das quantidades de movimento

relativo f'_1, g'_1, h'_1 temos

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= f'_1 + A_1 p - F_1 q - E_1 r \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

e portanto as componentes do momento resultante total são

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= f_2 + f' = f'_1 + (A_0 + A_1) p - F_1 q - E_1 r \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (19).$$

Se o movimento é o que chamámos cíclico, então não variam os momentos e productos de inércia e estas fórmulas ficam com a forma (3), onde se vê que o momento geral OG se compõe do momento proveniente da mobilidade das partes, o qual designamos por $O\sigma (f'_1, g'_1, h'_1)$, e do momento da quantidade de movimento de transporte que designamos por OG'_1 ; é então

$$OG = O\sigma + OG'_1,$$

o que mostra que a unica influência de movimentos cíclicos é introduzir um momento de quantidade de movimento relativo $O\sigma$, e diminuir o momento da quantidade de movimento de transporte OG'_1 .

Esta influência foi chamada por KLEIN e SOMMERFELD a *influência directa*, em opposição à influência que as deslocações de massas exercem quando são alterados os momentos e productos de inércia, e à qual chamaram *influência indirecta*.

Influência directa. — Como vemos, os movimentos que exercem unicamente influência directa, são os movimentos cíclicos: por exemplo os da água que vai dos mares à atmosfera e daqui aos rios e destes novamente aos mares, os movimentos das correntes marítimas, os movimentos que se dão talvez no interior da Terra e em geral todos aqueles em que uma massa é substituída por outra de igual densidade.

Êste assunto foi estudado por VOLTERRA, que mostrou que

toda a anomalia que se nota na rotação dum corpo livre pode ser explicada por movimentos cíclicos.

Os que se dão à superfície da Terra não teem influência sensível, e os que se dão no seu interior ficam-nos fóra da observação; por isso desprezamos êstes movimentos, pois mostraremos que em geral a influência directa dum transporte de massas é desprezível em relação à indirecta.

Unicamente aqui notaremos umas fórmulas que nos são uteis mais adiante.

Suponhamos o sistema formado duma parte rígida e de certos aneis de matéria em movimento; sejam A, B, C os momentos que agora são constantes.

Sejam os eixos de referência ($x_1 y_1 z_1$) e ($\xi \eta \zeta$) (coincidentes) os eixos principais do conjunto e fixos na parte rígida.

As equações diferenciais (14) já adequadas a esta hipótese, transformam-se para $A = B$ em

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \frac{C-A}{A} r q + \frac{1}{A} \left(\frac{dJ'_1}{dt} + q h'_1 - r g'_1 \right) = 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (20).$$

Os movimentos que se dão na Terra só raramente serão cíclicos e influirão em geral nos momentos e productos de inércia.

O momento OG'_1 cujas componentes são

$$(A_0 + A_1) p - F_1 q - E_1 r \\ \dots\dots\dots$$

será também alterado; isto é, a posição do eixo instantâneo sofrerá variações, o que nos conduz à influência indirecta.

Influência indirecta. — Vejamos as fórmulas que nos dão os deslocamentos angulares dos eixos principais.

Devido ao transporte de massas, depois do intervalo dt os momentos e productos de inércia relativamente aos eixos

(x_1, y_1, z_1) que no tempo t eram principais, serão:

$$A + dA, B + dB, C + dC, dF, dE, dD,$$

uma vez que no tempo t era

$$D = E = F = 0.$$

Seja U a rotação que é preciso dar ao sistema (x_1, y_1, z_1) para o fazer coincidir com o novo sistema de eixos principais (x', y', z') .

Sejam a, b, c os cosenos dos ângulos que faz uma recta fixa Δ com os eixos na primeira posição e sejam da, db, dc as suas variações, na passagem à segunda posição.

Este movimento equivale a supor fixo o sistema de eixos e a deslocar da rotação — U a recta Δ .

Então será

$$\left. \begin{aligned} da &= U_z, b - U_y, c \\ db &= U_x, c - U_z, a \\ dc &= U_y, a - U_x, b \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

O momento de inércia tomado em relação a Δ no tempo $t + dt$ é

$$\begin{aligned} I &= (A + dA)a^2 + (B + dB)b^2 + (C + dC)c^2 - \\ &\quad - 2dDbc - 2dEca - 2dFab, \end{aligned}$$

calculado por meio dos momentos e productos de inércia tomados em relação à primeira posição dos eixos.

O mesmo momento tomado por meio dos novos momentos principais A', B', C' com desprezo de termos de segunda ordem é

$$\begin{aligned} I &= A'(a + da)^2 + B'(b + db)^2 + C'(c + dc)^2 = A'a^2 + B'b^2 + C'c^2 \\ &\quad + 2A'ada + 2B'bdb + 2C'cdc \end{aligned}$$

ou substituindo da, db, dc

$$I = A' a^2 + B' b^2 + C' c^2 - 2(C' - B') b c U_x, \\ - 2(A' - C') c a U_y - 2(B' - A') a b U_z.$$

Êstes dois valores de I devem ser identicos quaisquer que sejam a, b, c , igualando-os obtem-se, com desprezo de termos de segunda ordem

$$A' = A + dA, B' = B + dB, C' = C + dC$$

e

$$U_x = \frac{dD}{C' - B'} = \frac{dD}{(C - B) + (dC - dB)}$$

$$U_y = \frac{dE}{A' - C'} = \frac{dE}{(A - C) + (dA - dC)}$$

$$U_z = \frac{dF}{B' - A'} = \frac{dF}{(B - A) + (dB - dA)}$$

Pondo $A = B$ e desprezando $dC - dB, \dots$ e pondo $dF = 0$ porque todos os eixos situados no plano $x_1 O y_1$ são eixos principais de inércia, vem os deslocamentos angulares dos eixos principais

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \frac{dD}{C - A} \\ U_y &= -\frac{dE}{C - A} \\ U_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22).$$

Daqui se calculam os desvios sofridos pelo eixo principal de inércia da Terra dirigido para o polo norte, em consequência dum transporte de massas, uma vez que conheça dD, dE ,

As fórmulas finais apresenta-las hemos já aqui sem dar a sua demonstração (vêr TISSERAND, *M. C.*, II).

Se uma massa m está na posição cujas coordenadas geográficas são L, φ , e é transportada a outra cujas coordenadas são L', φ' , o desvio θ do eixo polar e a sua longitude ω são dados por

$$\left. \begin{aligned} \theta \operatorname{sen} \omega &= 460 \frac{m}{M} (\operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{sen} L - \operatorname{sen} 2 \varphi' \operatorname{sen} L') \\ \theta \operatorname{cos} \omega &= 460 \frac{m}{M} (\operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{cos} L - \operatorname{sen} 2 \varphi' \operatorname{cos} L') \\ \theta &= 460 \frac{m}{M} \sqrt{\operatorname{sen}^2 2 \varphi + \operatorname{sen}^2 2 \varphi' - 2 \operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{sen} 2 \varphi' \operatorname{cos}(L - L')} \end{aligned} \right\} (22).$$

**Relação entre a posição do polo de inércia C
e o polo de rotação I**

Escolhamos para eixos de referência ($x_1 y_1 z_1$) os eixos principais do conjunto a cada instante, e para eixos ($\xi \eta \zeta$) os eixos médios.

São os eixos que escolhemos na hipótese *c*) quando tratámos dos vários casos que se podem apresentar relativamente a eixos móveis.

Então as equações diferenciais do movimento são

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (A \omega_1) + q (C \omega_3) - r (B \omega_2) &= L = 0 \\ \frac{d}{dt} (B \omega_2) + r (A \omega_1) - p (C \omega_3) &= M = 0 \\ \frac{d}{dt} (C \omega_3) + p (B \omega_2) - q (A \omega_1) &= N = 0 \end{aligned} \right\} (24)$$

em que p, q, r são as componentes segundo $O x_1, O y_1, O z_1$, da rotação do sistema $(x_1 y_1 z_1)$, e $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ são as componentes, segundo os mesmos eixos, da rotação média do globo [rotação do sistema (ε, η, ξ)].

W. THOMSON em lugar de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, introduziu os cosenos directores da normal invariável, em relação aos eixos $(x_1 y_1 z_1)$

$$c_1 = \frac{A \omega_1}{G}, \quad c_2 = \frac{B \omega_2}{G}, \quad c_3 = \frac{C \omega_3}{G} \quad (25)$$

em que

$$G^2 = (A \omega_1)^2 + (B \omega_2)^2 + (C \omega_3)^2.$$

A rotação do sistema dos eixos principais instantâneos é diferente da rotação ω ; ponhamos por isso

$$p = \omega_1 + \alpha \quad q = \omega_2 + \beta \quad r = \omega_3 + \gamma \quad (26)$$

em que α, β, γ representarão as velocidades de desvio entre os eixos médios e os eixos principais, as quais resultam do movimento na Terra.

Substituindo em (24) estes valores e atendendo a (21) nas equações ficam com a forma apresentada por W. THOMSON:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d c_1}{d t} + G \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) c_2 c_3 - \gamma c_2 + \beta c_3 &= 0 \\ \frac{d c_2}{d t} + G \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) c_3 c_1 - \alpha c_3 + \gamma c_1 &= 0 \\ \frac{d c_3}{d t} + G \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) c_1 c_2 - \beta c_1 + \alpha c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27).$$

Estas tres equações não são distintas em vista da relação

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

que pode substituir a terceira, por exemplo.

Se conhecessemos $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$, integrando estas equações, teríamos todas as circunstâncias do movimento.

As causas que dão origem a estas funcções são muito complexas e não são bem conhecidas.

Apresentam-se porêem várias circunstâncias que nos tornam a questão mais fácil do que à primeira vista poderia parecer.

São elas: a fraca variação das latitudés, o pequeno desvio entre o eixo instantâneo de rotação e a normal invariável, a variação pequena e lenta de A, B, C e o pequeno valor de α, β, γ em relação a ω .

Podemos considerar c_1 e c_2 como quantidades muito pequenas, e $c_3 = 1$ nas duas primeiras equações que se transformam em

$$\left. \begin{aligned} \frac{d c_1}{d t} + \lambda_1 c_2 + \beta &= 0 \\ \frac{d c_2}{d t} - \lambda_2 c_1 - \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

em que

$$\lambda_1 = G \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) - \gamma \quad \text{e} \quad \lambda_2 = G \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) - \gamma \quad (29).$$

Desprezando quantidades de segunda ordem podemos supôr λ_1, λ_2 sensivelmente constantes, o que equívale a desprezar nêstes factores os termos de primeira ordem, visto eles serem multiplicados por c_2, c_1 que já são de primeira ordem.

Supondo pois que $A_0 = B_0$ (momentos iniciais da parte rígida), e que também

$$\frac{C - A}{A} = \frac{C_0 - A_0}{A_0}, \quad \frac{C - B}{B} = \frac{C_0 - A_0}{A_0},$$

podemos então escrever

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{C_0 - A_0}{A_0} \omega - \gamma = \nu - \gamma$$

atendendo também a que é $G = C \omega$.

As equações (28) ficam com a forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{d c_1}{d t} + (\nu - \gamma) c_2 &= -\beta \\ \frac{d c_2}{d t} - (\nu - \gamma) c_1 &= \alpha \end{aligned} \right\} (30).$$

Para integrar estas equações é preciso supormos constantes os coeficientes de c_2, c_3 , o que é realmente muito próximo da verdade. Se se trata de deslocamentos seculares serão α, β, γ muito pequenos. Se se trata de deslocamentos rápidos serão muito pequenos α, β , mas γ será ainda sensivelmente constante, pois devido à igualdade de A e B a maré originada pelo movimento do eixo de rotação à volta do eixo de inércia, obriga os eixos A, B a girarem à volta de C com uma velocidade angular que a observação tem mostrado ser sensivelmente constante.

Designando por t' o limite superior de t que não varia durante a integração e que é também o valor de t fóra do \int , obtemos para c_1 (TISSERAND, *M. C.*, II)

$$c_1 = \int \alpha \operatorname{sen} \lambda(t-t') dt - \int \beta \cos \lambda(t-t') dt + c_{1,0} \cos \lambda t - c_{2,0} \operatorname{sen} \lambda t \quad (31)$$

(e do mesmo modo para c_2 , designando por $c_{1,0}, c_{2,0}$ os valores de c_1, c_2 para $t=0$) sendo $\lambda = \nu - \gamma$.

Ou então

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \int_0^t \left(\alpha + \frac{d\beta}{\lambda dt} \right) \operatorname{sen} \lambda(t-t') dt + c_{1,0} \cos \lambda t - \left(c_{2,0} + \frac{\beta_0}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \lambda t \\ c_2 &= \int_0^t \left(\beta - \frac{d\alpha}{\lambda dt} \right) \operatorname{sen} \lambda(t-t') + c_{2,0} \cos \lambda t + \left(c_{1,0} + \frac{\alpha_0}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \lambda t \end{aligned} \right\} (32).$$

Estabelecidas assim as equações do movimento do polo instantâneo de rotação em relação ao polo de inércia, vamos passar a vêr as várias ordens de variações de que se pode compor o movimento do polo, estabelecendo a propósito de cada um as leis do movimento do polo de inércia, para assim termos o movimento do polo à superfície da Terra.

CAPITULO III

§ 1) Variações seculares

Compreendem-se neste parágrafo os efeitos produzidos por causas que atuam sempre, ou durante um espaço de tempo muito longo no mesmo sentido.

Vamos vêr com a aplicação das fórmulas (23) a importância numérica produzida por tais deslocamentos.

Erupções vulcânicas. — Admitindo que um vulcão semelhante ao Tambora (ilhas de Sonda) esteja situado a $\varphi = 45^\circ$, e espele 15 km.³ de cinza da profundidade de 5 km. numa das suas erupções, que supomos ter lugar uma vez cada ano, (hipóteses muito favoráveis), a sua acção seria o deslocamento do polo de inércia de $0'',03$ por século. Como porêem os outros vulcões estão dispostos por toda a Terra, o resultado será em média nulo.

Movimentos seculares dos continentes. — DARWIN determinou qual seria a distribuição das intumescências e abaixamentos capazes de produzir o máximo efeito sobre o polo de inércia C. Achou assim que para uma elevação de 100^m estendendo-se sobre uma área de 0,001 da Terra o desvio era de $4'',4$. O levantamento dum metro por século dum continente representando 0,025 da área da Terra, acompanhado duma depressão equivalente produziria em média $0'',01$ por ano.

Embora atualmente se observem deslocamentos desta espécie, eles estão muito longe de produzir efeitos sensíveis à observação, pois a sua ordem de grandeza é muitissimo menor.

Formação de aluviões.— Como se sabe as correntes de água vão corroendo os terrenos dos leitos e arrastando os detritos que depois depositam à entrada nos mares sobre a forma de aluviões. O mesmo se dá também com os oceanos mas num gráu 10 vezes menor, segundo LAPPARENT.

Atendendo á distribuição dos grandes cursos de água, o resultado final obtem-se somando geomêtricamente o efeito de cada um.

Á acção dos grandes rios da Sibéria opõe-se a acção do Mississipi; à acção do Volga, do Don, e do Dnieper opõe-se a acção do Nilo, do Amur, do Rio Azul, do Rio Amarelo, etc.

Unicamente o Amazonas atua isoladamente.

Para calcular a sua acção é necessário saber a quantidade de depósito anual. Ela é em média 38 para 100.000 de água, o que produz um resultado insignificante.

Segundo WATERS as correntes marinhas dispõem os detritos de forma que o hemisfério S. recebe por ano a mais que o N. 3.000 milhões de toneladas. Isto produziria sobre o polo o deslocamento de 0',015 por século.

Acção química das águas.— O ácido carbónico dissolvido nas águas actua sobre os granitos e feldspatos corroendo-os. MELLARD READE calculou que em 400 anos esta acção tiraria à Inglaterra de 1 cm. de altitude; segundo a sua opinião ela é dupla da acção mecânica das águas.

Ainda nas condições mais favoráveis estas acções são insensíveis.

Vejamos analiticamente qual seria a consequência destas acções. Supondo que elas atuam de forma a fazerem α , β , γ constantes as equações (32) dão:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + \frac{\alpha}{\lambda} &= \left(c_{1,0} + \frac{\alpha}{\lambda} \right) \cos \lambda t - \left(c_{2,0} + \frac{\beta}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \lambda t \\ c_2 + \frac{\beta}{\lambda} &= \left(c_{1,0} + \frac{\alpha}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \lambda t + \left(c_{2,0} + \frac{\beta}{\lambda} \right) \cos \lambda t \end{aligned} \right\} (33)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= k \cos(\lambda t + \tau) - \frac{\alpha}{\lambda} \\ c_2 &= k \sin(\lambda t + \tau) - \frac{\beta}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

em que k e τ são constantes.

Estas fórmulas mostram que o polo de rotação descreve uma circunferência de raio k e velocidade angular λ , à volta do ponto I_0 de coordenadas $-\frac{\alpha}{\lambda}, -\frac{\beta}{\lambda}$. Este ponto, cuja distância ao polo de inércia $C_0(t=0)$ é $\frac{1}{\lambda} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, move-se com velocidade constante ao longo dum meridiano, e como o polo de rotação I gira à volta d'ele numa circunferência que o tem por centro, descreverá I um cicloide.

O movimento de I à volta de I_0 não é outra coisa que o movimento euleriano, ou chandleriano.

Vê-se também que a velocidade angular λ fica a mesma, variando a amplitude.

¿Tem-se notado variações seculares nos movimentos do polo? Desde que a Associação Geodésica Internacional montou no paralelo 39° N. 6 estações para a observação constante da latitude em 1900, até hoje, não se notou nenhuma variação na posição média do polo, a que se podesse chamar variação secular. Se algumas oscilações houve são naturalmente de origem metereológica.

Êstes resultados são deduzidos dum número médio anual de 12.000 observações. (*Resultate des Internationalen Breiten-dienstes*, IV).

2) Variações de 14 meses de período

Como vimos o principal termo das variações de latitude apresenta, segundo as observações, um período de 14 meses, e não de 10 como nos indicava a teoria Euleriana. Vamos ver as hipóteses apresentadas para a sua explicação.

A) Para a determinação do período Euleriano supomos $A = B$.

¿Não porvirá desta hipótese a diferença entre a teoria e a observação?

WOODWARD (*Astronomical Journal* 345) estudou êste caso e viu que uma diferença entre A e B produz realmente o alongamento do período de CHANDLER.

Para o provar servimo-nos da fórmula dada pela teoria da precessão e nutação:

$$\frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C} = c = 0,0033,$$

donde

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(A + B)} - \frac{1}{C} = \frac{c}{C(1 - c)};$$

daqui se tira

$$\frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \frac{c}{C(1 - c)} - \frac{B - A}{2BC(1 - c)}$$

e também

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{C} = \frac{c}{C(1 - c)} + \frac{B - A}{2BC(1 - c)}.$$

$$\text{Ponhamos } \lambda_0 = \frac{Gc}{C(1 - c)} \text{ e } l_0 = \frac{(B - A)G}{2AC(1 - c)} \text{ ou } = \frac{(B - A)G}{2BC(1 - c)}$$

por ser $B - A$ pequeno em relação a B ou A .

Vê-se que λ_0 é a velocidade angular do ciclo euleriano, pois.

$$G = C \omega, \quad \text{logo } \lambda_0 = \frac{c \omega}{1 - c} = \frac{C - A}{A} \omega.$$

Substituindo estes valores em (29) vem:

$$\lambda_1 = \lambda_0 - (l_0 + \gamma)$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 + (l_0 + \gamma)$$

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 - (l_0 + \gamma)^2$$

em que $\lambda^2 = \lambda_1 \lambda_2$; e assim a velocidade λ é mais pequena do que a do período euleriano, donde resulta aumento do período.

Vejamos qual deveria ser a diferença $A - B$ para poder o período ser de 14 meses.

Supondo γ desprezível tira-se, $\lambda^2 = \lambda_0^2 - l_0^2$ ou $l_0^2 = \lambda_0^2 - \lambda^2 =$
 $= (2\pi)^2 \left(\frac{1}{(305)^2} - \frac{1}{(428)^2} \right),$

donde $l_0 = \frac{2\pi}{435}.$

Ora, tomando para unidade o dia é $G = C \omega = C 2\pi$, e então do valor de l_0 vem

$$B - A = \frac{1}{217} A (1 - c) \text{ ou aproximadamente } = \frac{A}{200}.$$

Ora em Geodesia toma-se em geral

$$B - A < \frac{A}{100.000}.$$

Vê-se pois que dêste facto não pode provir tal alongamento do período, embora alguma influência isto possa exercer.

Continuaremos por isso a supôr $A = B$.

B) Vejamos agora a hipótese das velocidades α , β de desvio entre os eixos principais e os eixos médios estarem ligados a λ por relações tais como

$$\alpha = -a \lambda c_1 + \alpha' \quad \beta = -a \lambda c_2 + \beta',$$

em que a é constante e α' β' são funcções do tempo.

Substituindo êstes valores em (30), e sendo $\nu - \gamma = \lambda$, vem

$$\frac{d c_1}{d t} + \lambda (1 - a) c_2 + \beta' = 0$$

$$\frac{d c_2}{d t} - \lambda (1 - a) c_1 - \alpha' = 0.$$

Desprezando α' , β' , pondo $\lambda' = \lambda (1 - a)$ e integrando vem

$$c_1 = k \cos (\lambda' t + P)$$

$$c_2 = k \operatorname{sen} (\lambda' t + P)$$

k , P sendo constantes.

Segundo a observação é $\lambda' = \frac{2 \pi}{428}$, segundo a teoria é $\lambda = \frac{2 \pi}{305}$; daqui se tira $a = \frac{2}{7}$.

Como nos mostra a observação c_1 , c_2 são menores que $1''$ e portanto a ordem de grandeza da velocidade α ou β será

$$\alpha = \frac{2}{7} \cdot \frac{2 \pi}{305} \cdot \frac{1}{206.265} = \frac{1''}{200} \text{ por dia.}$$

É fácil vêr a velocidade angular que deve ter à superfície da Terra o ar ou a água para produzir tal velocidade de desvio, isto é para produzir $f''_1 = -A \alpha$, ...

Designando por ω' a velocidade angular da atmosfera à volta dum eixo da Terra, serão os momentos de inércia desta

e da atmosfera respectivamente $\omega' \Sigma m r^2 = \omega' \frac{2}{3} M r^2 10^{-6}$ e $A = \frac{1}{3} M r^2$, em que r é o raio da Terra e M a sua massa.

Será pois $f'_1 = \frac{2}{3} M r^2 \omega' 10^{-6} = \frac{1}{3} M r^2 \alpha$ donde $\omega' = 2500'$ a que corresponde a velocidade à superfície da Terra de 80 km. por dia.

No caso do oceano cuja massa é muitíssimo maior do que a da atmosfera, a velocidade necessária para o período de CHANDLER seria ainda muito menor.

WOODWARD supõe que estes movimentos serão bastantes para a explicação de tal período.

Os movimentos dos oceanos produzidos pelo movimento do eixo instantâneo de rotação à volta do de inércia, foram postos em evidência, embora com pouca segurança, por H. G. BAKHUYZEN (*Astr. Nach.* 3261) levado pelas considerações de NEWCOMB de que o oceano se deve dispôr de forma que tenha por eixo de figura o eixo de rotação, e, como este se desloca, deve haver uma ligeira maré com o período de 14 meses. Para vêrmos a confiança que nos merece o resultado de BAKHUYZEN vejamos o processo empregado.

Para poder separar dêste efeito o das marés devidas á acção do Sol e Lua, depois de formar as médias diárias durante 40 anos, agrupou-as aos meses e obteve 456 médias mensais. Separou éstes em 14 grupos formados por números que correspondem à mesma fase do período de 14 meses. É da marcha das médias dêstes 14 grupos que elle conclue tal maré. Essas médias são:

+ 3,8, - 11,6, - 2,6, - 3,1, - 1,8, - 14,2, - 7,5,

+ 1,3, + 4,1, + 5,0, + 2,0, + 3,0, + 14,7, + 7,2,

aqui é notável a constancia do sinal embora os valores oscilem muito. O que se vê é que não há elementos para se afirmar com segurança tal maré, e no caso de ella existir não

se pode avaliar com que parte concorre para o período de 14 meses.

C) Vejamos outra explicação dada pela primeira vez por NEWCOMB em 1892 (*Monthly Notices of R. A. S.* LII).

Prende-se esta questão com a rigidez da Terra e portanto com o seu estado interior; vamos por isso vêr quais as hipóteses apresentadas sobre a sua constituição.

Para a explicação do vulcanismo supunha-se que a Terra era formada de matéria em fusão coberta duma delgada crusta sólida.

A lava e o aumento de temperatura para o interior levavam-nos a essa conclusão. Devêmos porém notar que, com o aumento da pressão, precisa de ser enorme a temperatura necessária para manter a matéria em fusão. É pois provável que a matéria esteja para o interior do globo no estado sólido.

Isto mesmo é corroborado pelo seguinte argumento de LÓRD KELVIN: se a Terra foi primitivamente fluida, a camada exterior que se solidificou pelo arrefecimento deve ter-se quebrado muitas vezes pela contração proveniente do arrefecimento, e então as partes sólidas, mais densas, devem ter-se juntado no centro.

HOPKINS foi o primeiro que estudou o problema com bases científicas, e achou que os movimentos de precessão e nutação duma camada sólida com um núcleo líquido relativamente grande, eram muito diferentes dos que a Terra apresenta.

L. KELVIN considerou uma camada elipsóidica achatada, e mostrou que se ela fosse absolutamente rígida, havia diferença entre a observação e a teoria nas nutações rápidas, mas não a haveria nas mais largas ($18\frac{1}{2}$ anos) nem na precessão. Ainda assim não se conhece nenhum material que constituísse tal camada ao mesmo tempo rígida e delgada.

Mais modernamente S. HOUË (*Philosophical Transactions*, 1895) e TH. SLOUDSKY (*Bull. da Acad. de Sc. de Moscou*, 1895) retomaram êstes trabalhos tendo em conta os progressos da Hidrodinamica.

Partem duma camada perfeitamente rígida tendo no seu interior uma cavidade elíptica e cheia de líquido homogéneo e incompressível, cujo centro e eixos principais coincidem com o centro de gravidade e os eixos principais de inércia do conjunto.

Designando por e a excentricidade do núcleo, ω a velocidade de rotação da Terra, a o semi-eixo maior da cavidade, M a massa do líquido, A_1, B_1, C_1 os momentos principais da crosta, obtiveram para a velocidade de nutação do polo à superfície da Terra as componentes

$$\lambda_1 = \omega \left[1 + \frac{e^2}{2} \left(1 + \frac{q}{2} \right) \right]$$

$$\lambda_2 = \omega \left[\frac{C_1 - A_1}{A_1} + q e^2 \right],$$

supondo a excentricidade e pequena, e sendo $q = \frac{M a^2}{5 A_1}$ que é uma quantidade positiva muito pequena quando o núcleo fluido é pequeno, e que cresce com a sua espessura.

A λ_1 corresponde um período mais curto que o dia sideral e a λ_2 um período análogo ao período euleriano.

Designando por N o número de dias siderais que mede este último período temos

$$\frac{1}{N} = \frac{C_1 - A_1}{A_1} + q e^2.$$

SLUDSKY considera inútil a discussão desta fórmula em vista das hipóteses que tem de estabelecer para a obter. HOUGH, atendendo a que a teoria da precessão dá para $\frac{C - A}{A}$ o valor $\frac{1}{305}$, referindo-se A, C à Terra inteira, conclue que N é inferior a 305, e as observações dando $N = 427$ mostram que a hipótese de fluidez interna deve ser rejeitada.

Deve-se notar que a constante de precessão de que se trata

foi calculada supondo a Terra completamente rígida, devêmos pois modificar esta constante na hipótese atual.

Para isso temos segundo SLOUDSKY

$$\frac{1}{305} = \frac{C - A}{C_1} \frac{1}{1 + q(2 + e^2)}$$

Ora $C = C_1 + \frac{2}{5} m a^2$, $A = A_1 + m \frac{a^2 + c^2}{5}$, em que a, c são os semi-eixos da cavidade.

$$\text{Será pois } \frac{C - A}{C_1} = \left(\frac{C_1 - A_1}{A_1} + q e^2 \right) \frac{A_1}{C_1}$$

Têmos de vêr se as duas equações

$$\frac{1}{427} = \frac{C_1 - A_1}{A_1} + q e^2$$

$$\frac{1}{305} = \left(\frac{C_1 - A_1}{A_1} + q e^2 \right) \frac{A_1}{C_1} \frac{1}{1 + 2q + q e^2}$$

são compatíveis.

Delas tira-se $q e^2 = \frac{8569 + 123}{8549 - 1}$; o valor e^2 é positivo se q é maior que $\frac{1}{854}$; ele não pode anular-se, isto é, o núcleo não pode ser esférico; para que ele seja muito pequeno é preciso que q seja muito grande.

Vê-se pois que a existência do período de CHANDLER se opõe à hipótese dum núcleo fluido pouco considerável, e duma excentricidade pequena. Se por exemplo a excentricidade do núcleo fosse igual à da camada sólida, a espessura desta última teria menos de 20 km. — resultado inadmissível.

Se o núcleo é muito achatado, nenhuma destas considerações é aplicável.

Admite-se hoje a hipótese do ROCHE e WIECHERT em que a Terra é formada dum núcleo metálico muito denso e duma crosta de rochas de menor densidade, sendo as duas camadas

separadas por uma terceira de consistência fluida, ou onde pelo menos existem cavernas cheias de matérias fluidas.

Partindo desta hipótese LALLEMAND (*Bul. Astronomique*, 1911) mostrou que a rigidez da Terra deduzida dos movimentos do polo, dos desvios que sofre a direcção da vertical pela atracção da Lua e Sol, da altura das marés, é em média muito próxima da do aço, o que dá uma notável confirmação à genial intuição de LORD KELVIN em 1877.

Vajamos agora como NEWCOMB explica o alongamento do período de Euler.

Supondo que por uma causa qualquer o eixo de rotação está desviado do de figura, os oceânos tendem, devido à força centrífuga, a dispôr-se de forma a terem como eixo de figura o eixo de rotação. Como o mar cobre $\frac{3}{4}$ da superfície da Terra, e a sua densidade é $\frac{1}{5}$ da desta, e os continentes opõem resistência ao movimento das águas, supõe ele que o deslocamento dos mares reduz de $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$ a primitiva distância dos dois polos.

Como o período de CHANDLER exige que esta distância se reduza a $\frac{2}{7}$, attribue ele os $\frac{3}{14}$ restantes à elasticidade da Terra.

É fácil vêr como esta aproximação dos polos trás como consequência o aumento de período.

O polo instantâneo I move-se à volta do novo polo P' em 305 dias, e como êste fica sempre no plano dos outros dois eixos, e entre eles, segue-se que o movimento de I à volta de P é mais longo do que à volta de P', na relação de P'R : P R. Esta relação é de 305:427 ou 5:7 e portanto o polo P desloca-se $\frac{2}{7}$ da distância dos dois como acima dissémos.

Vêmos que ao passo que WOODWARD dá muito maior importância ás velocidades α , β , γ produzidas pelo deslocamento dos mares, a ponto de dizer que a acção devida à distorsão da Terra deve ser insignificante, NEWCOMB attribue a esta ultima uma acção tripla da primeira. Embora a explicação de

NEWCOMB seja aceite nas suas linhas gerais, ele admite para a explicação da parte que é devida à influência da elasticidade certas proposições que HOUG (*Phil. Trans.* 1897) mostrou serem em parte falsas, embora a sua influência seja pequena. Nêste estudo mostra ele também que as variações de latitude observadas se opõem à existência dum núcleo da Terra fluido. Uma vez que a questão se complica devido ao facto da Terra não ser homogénea, e da consideração das águas, KLEIN e SOMMERFELD resolvem o caso pela introdução da *rigidez efectiva*, querendo com isto designar uma rigidez que teria um corpo homogéneo que se comportasse do mesmo modo que a Terra, sem nada dizer do seu estado interior, pois só por ousadas extrapolações podemos concluir alguma coisa; — ousadas porque já nos estreitos limites de pressão e temperatura dos laboratórios se apresentam certos pontos críticos, em que a matéria muda continuamente de estado.

Admite-se hoje a explicação devida à elasticidade da Terra, a qual passamos a expôr:

A teoria da elasticidade fornece-nos as seguintes proposições (KLEIN e SOMMERFELD, *Theorie des Kreisels* III):

a) Uma massa fluida, homogénea e incompressível, toma debaixo da influência da gravitação mútua das suas partes, uma forma esférica de raio R. Sendo posta em rotação com a velocidade ω , ela adquire, para pequena velocidade, a forma dum elipsoide de rotação cuja ellipticidade ε_1 é dada por

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 R}{G} \quad (35)$$

em que G é a aceleração da gravidade à sua superfície.

Aplicando à Terra, em metros e segundos temos

$$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60}$$

$$R = \frac{2}{\pi} 10^7, \quad g = 9,81 \quad \text{donde } \varepsilon_1 = \frac{1}{231} \quad (\text{Devida a CLAIRAUT}).$$

b) Uma esfera elástica e homogénea com a densidade ρ e com a velocidade ω , suposta incompressível, toma análogamente a elipticidade

$$\varepsilon_2 = \frac{15}{38} \frac{\rho \omega^2 R^3}{E} \quad (36),$$

sendo E o modulo de elasticidade da sua substância.

No caso da Terra seria em unidades C. G. S $\rho = 5,5$ e $R = \frac{2}{\pi} 10^9$.

Atribuindo-lhe a rigidez do aço é $E = 2,2.981.109$, donde

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{465} \quad (37).$$

Não tomamos aqui em consideração a gravitação. (Devida a LORD KELVIN).

c) Seja uma esfera de material elástico e sujeito à rotação ω ; consideremos também a gravitação mutua das suas partes.

O elipsoide é agora menos achatado pois há a resistência da sua rigidez e a da gravitação.

A elipticidade é agora dada por

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \quad (38)$$

em que ε_1 e ε_2 se calculam pelas fórmulas (35), (36).

Aplicando à Terra, devêmos notar que supomos que a sua actual elipticidade é a mesma que ela tinha primitivamente quando estava no estado fluido, onde só havia a considerar a mutua gravitação das suas partes, não entrando a elasticidade.

Esta hipótese é admissível pois a solidificação devia ter-se dado pela parte exterior ficando assim com a sua forma natural

As forças elásticas não apareceriam senão se a velocidade

de rotação do globo se alterasse; se por exemplo ela diminuísse, a força centrífuga não equilibraria a atractiva e o elipsoide tenderia a tomar a forma esférica, a qual era contrariada pelas forças elásticas que tendiam a dar-lhe a forma primitiva.

A ellipticidade ε_1 que a Terra tinha em movimento, reduzir-se hia a um valor menor duma quantidade $\varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon$.

d) Demonstra-se que este valor ε' é igual ao valor que chamámos ε_3 , e portanto será $\varepsilon_1 - \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$
 donde

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

É esta a ellipticidade que a Terra tomaria se parasse.

e) A duração da nutação livre do eixo de um elipsoide de revolução, de substância deformável, calcula-se, não pela ellipticidade enquanto girante ($\varepsilon + \varepsilon'$), mas pela ellipticidade da sua forma antes da rotação, e a qual ele tomará depois de ela findar.

A nutação é assim independente da elasticidade do material, e é igual à de um elipsoide absolutamente rígido, cuja ellipticidade é a mesma que a do elipsoide considerado, quando em repouso:

$$\frac{\text{Período de nutação}}{\text{Período de rotação}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

No caso especial da Terra, devido ao facto apontado de supôrmos que ela se solidificou já em rotação, e que portanto o seu estado actual é o estado natural, livre de qualquer tensão, contrariamente ao que succede a um corpo rígido posto em rotação, que ficará num estado de tensão devido ás suas propriedades elásticas, a ellipticidade que ela (Terra) tomaria se parasse é a que deve ser tomada na applicação da ultima proposição.

O período da nutação livre é pois $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} = \frac{1}{\varepsilon_1} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)$.

Se consideramos a Terra absolutamente rígida ($\varepsilon_2 = 0$) o seu periodo de nutação seria $\frac{1}{\varepsilon_1} = 231$.

Ora o periodo euleriano não é 231 mas 305 dias. Há pois uma diferença que deve provir de que a ellipticidade da Terra é diferente daquela que calculámos pela fórmula (35), que foi deduzida partindo da hipótese duma distribuição homogénea das massas da Terra. Isto porém pouco nos prejudica, pois aproveitamos daqui unicamente o factor $1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ pelo qual tem de ser multiplicado o periodo de nutação da Terra rígida, e que nós tomamos aqui igual ao de EULER.

Atribuindo á Terra o modulo de elasticidade do aço, esse factor é $1 + \frac{231}{435} = 1,5$. O periodo de nutação seria $10 \times 1,5 = 15$ meses, e como a observação nos dá 14, segue-se que $1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1,4$, donde $\varepsilon_2 = \frac{1}{578}$.

Segundo (36) é ε_2 inversamente proporcional ao modulo E, e segundo (37) é, para o caso de aço, $\varepsilon_2 = \frac{1}{465}$.

Daqui se vê que o modulo de elasticidade da Terra é $\frac{578}{475} = 1,2$ vezes o do aço.

Em resumo: para explicar o periodo de CHANDLER devemos considerar a Terra em média um pouco mais rija do que o aço, ou o seu modulo de elasticidade um pouco maior.

O valor teorico acima apresentado de $\frac{1}{\varepsilon_1}$ não toma, como dissemos, em consideração a desigual distribuição das massas no interior da Terra. Ele é unicamente um limite superior para a ellipticidade da Terra, cuja densidade média é muito maior do que a superficial.

RADAU, CALLANDRAU, POINCARÉ e WIECHERT estudaram a lei do aumento de densidade para o interior da Terra; segundo a hipótese deste ultimo, a densidade varia por saltos e podem-se assim calcular as dimensões das várias camadas, o que nos conduz depois ao cálculo de ellipticidade que pode

realmente chegar a ter o valor $\frac{1}{305}$. É por essa razão que há pouco adotamos esse valor e não $\frac{1}{231}$.

Êstes resultados ficam portanto unicamente aproximados, mas não estarão muito longe da verdade, pois uma das suas conseqüências — a rigidez da Terra — tem sido confirmada por outros trabalhos, como os efectuados por LORD KELVIN, DARWIN e ultimamente (1907) por SCHWEYDER e LALLEMAND.

§ 3) Variações de periodo anual

O facto dum periodo ser anual lembra logo attribuir-lhe origem metereológica, pois os fenómenos desta ordem teem em geral periodo anual.

Em 1890 J. LAMP. (*Astro. Nach.*) attribuiu-o às correntes marítimas.

As correntes equatoriais que se deslocam de oriente para occidente transformam-se, ao encontrarem os continentes, em duas contracorrentes, uma para o Norte no sentido dos ponteiros dum relógio, outra para o Sul em sentido inverso.

As correntes voltando sôbre si mesmas devem ter como conseqüência uma elevação do nível da água na parte central do movimento circular. Ora é sabido que em julho as correntes se deslocam um pouco para o Norte, e em janeiro para o Sul.

Isto tráz como conseqüência que durante o verão há no hemisfério N. mais água do que no inverno.

Devido à grande diferença de extensão do Atlântico e do Pacífico, prepondera a acção dêste, e, para explicar uma deslocação do polo de rotação de $0',5$, bastaria que fosse levada de 30° S. para 30° N. a massa de 2.500 km.^3 de água, para o que seria sufficiente uma diferença de nível de $0^m,1$ na área considerada.

Êstes resultados são porêem pouco precisos, além de que

tem grande influência sobre o nível do mar a pressão atmosférica que sobre ele atua.

Vamos por isso vêr o trabalho de SPITALER (*Die Ursache der Breitschwankungen* — Wien 1897) sobre a distribuição da pressão.

É sabido que em geral sobre os continentes o máximo de pressão tem lugar nos meses frios e o mínimo nos quentes, ao passo que o inverso se dá sobre os mares.

Como o hemisfério N. tem grande extensão de terra firme, acontece que em janeiro o excesso de pressão sobre os continentes é maior do que o defeito dela sobre os mares. Há portanto nessa época um excesso de ar que depois se desloca para S.

Para calcular as variações do peso da atmosfera, serviu-se SPITALER de cartas isobáricas dos dois meses janeiro e julho onde a diferença de pressão é maior, e uniu por um traço todos os pontos em que tal diferença era igual, obtendo assim curvas fechadas que se dispunham à volta de pontos de máxima pressão. Supondo todo esse excesso concentrado no centro de pressão achou os seguintes resultados:

Excesso de p. em janeiro

Long.W	Lat.	pêso em km. ³ de mercúrio
270°	45° (Ásia Central)	902
110°	45° (Am. do N.)	108
		1010

Excesso de p. em julho

230°	20° (Austrália)	186
335°	25° (Áfr. do S.)	204
50°	25° (Am. do S.)	120
	Pacífico N.	120
	Atlantico N.	104
		734

Os 1000 km.³ concentrados nos continentes do N. espa-

lham-se durante os primeiros seis meses do ano pelos oceanos do N. e pelos continentes do S. Como em julho só aparecem 736 km^3 há uma diferença de 274 que se espalha pelas regiões polares, sobre a Polinésia, mas a maior parte a 60° de latitude S.

SPITALER fazendo algumas hipóteses prováveis sobre o caminho que seguem estas massas de ar à superfície da Terra, e por meio das fórmulas (23), achou que o polo de inercia se desloca

$$\left. \begin{array}{l} \text{em janeiro } 0'',055 \text{ para } 100^\circ \text{ W. de Gr.} \\ \text{em julho } 0'',041 \text{ para } 68^\circ \text{ E. de Gr.} \end{array} \right\} (42)$$

ficando assim em semimeridianos opostos. Para abril e outubro não faz o cálculo, mas supõe que se deslocará no meridiano $0^\circ 180^\circ$, com menores desvios e seguindo durante o ano em sentido inverso da rotação da Terra.

Vejamos como podem estes deslocamentos influir na posição do polo de rotação.

Depois que RADAU descobriu o chamado *princípio da multiplicação*, segundo o qual uma deslocação de período anual no eixo de inercia produz no eixo de rotação uma deslocação de amplitude tripla da daquêle eixo, atribuiu-se muito maior importância a tais movimentos, pois tornou-se facilmente explicável o período anual.

Tomemos como eixos de referência $(x_1 y_1 z_1)$ e $(\xi \eta \zeta)$ (coincidentes) os eixos principais de inercia no tempo t_0 .

É então

$$p = \omega_1, \quad q = \omega_2, \quad r = \omega_3$$

$$A = A_0 + A_1,$$

... ..

em que A_0 se refere à parte rígida e A_1 à móvel.

As equações diferenciais do movimento ficam

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dt} [f'_1 + (A_0 + A_1)p - F_1 q - E_1 r] + \\ & + q [h'_1 - E_1 p - D_1 q + (C_0 + C_1)r] - \\ & - r [g'_1 - F_1 p + (A_0 + B_1)q - D_1 r] = 0. \end{aligned} \right\} (43)$$

Desprezando termos de segunda ordem obtemos:

$$\left. \begin{aligned} & A_0 \frac{dp}{dt} + (C_0 - A_0)r q + \frac{df'_1}{dt} + q h'_1 - r g'_1 + \\ & + D_1 r^2 - E_1 \frac{dr}{dt} - r \frac{dE_1}{dt} = 0 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (44)$$

pois supomos $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, p, q$ de primeira ordem.

Podemos pôr nestas duas primeiras equações $r = n$ pois, como êle só aí entra multiplicado por quantidades de primeira ordem, os termos desprezados serão de segunda ordem; temos então

$$\left. \begin{aligned} & A_0 \frac{dp}{dt} + (C_0 - A_0)n q + \frac{df'_1}{dt} - n g'_1 + D_1 n^2 - \frac{dE_1}{dt} n = 0 \\ & A_0 \frac{dq}{dt} - (C_0 - A_0)n p + \frac{dg'_1}{dt} + n f'_1 - E_1 n^2 - \frac{dD_1}{dt} n = 0. \end{aligned} \right\} (45)$$

Comparando com a fórmula (20) vê-se que está aqui representada tanto a influência directa como a indirecta.

Começaremos por supôr que o transporte de massas não produz variações nos momentos e produtos de inercia; então anulam-se os dois últimos termos de cada uma destas equações.

Pondo, nesta hipótese,

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{df'_1}{dt} + n g'_1 \\ Q &= -\frac{dg'_1}{dt} - n f'_1 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

multiplicando a segunda de (45) por i e somando com a primeira obtemos a equação complexa

$$\frac{A_0 d(p + iq)}{dt} = (C_0 - A_0) i n (p + iq) + P + iQ. \quad (47)$$

Os movimentos que se dão na Terra são em geral periódicos e podemos por isso desenvolver $P + iQ$ segundo uma série de FOURIER, de que aqui aproveitamos só o primeiro termo.

Temos então

$$P + iQ = a e^{-i\mu t} + a' e^{-i\mu t}$$

em que a , a' são constantes e μ designa o período.

O integral geral de (47) será

$$p + iq = b e^{i\mu t} + b' e^{-i\mu t} + c e^{i\mu t} \quad (48)$$

em que c é a constante de integração e

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{C_0 - A_0}{A_0} n \\ b &= \frac{a}{i\mu A_0 - i n (C_0 - A_0)} = \frac{ia}{A_0} \frac{1}{v - \mu} \\ b' &= \frac{a'}{-i\mu A_0 - i n (C_0 - A_0)} = \frac{ia'}{A_0} \frac{1}{\mu + v} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Em (48) os termos em μ representam uma oscilação forçada

pelos deslocamentos de massas, e o termo em v representa uma oscilação livre, isto é, que não depende do deslocamento das massas.

Suponhamos um movimento de massas do período muito longo ($\mu = 0$); designando o valor correspondente de b por b_0 vem

$$b_0 = \frac{i a}{\Lambda_0} \frac{1}{v}$$

e

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{1 - \frac{\mu}{v}}$$

Tratando-se por exemplo dum deslocamento de período anual e adoptando o período de CHANDLER é $\frac{\mu}{v} = \frac{14}{12}$ e $\frac{b}{b_0} = 6$, o que mostra que, devido à circunstância do período anual ser próximo do período de CHANDLER, uma deslocação de massas do período anual produz um desvio seis vezes maior do que no caso em que a deslocação se dêsse num tempo muito longo.

Se o movimento é muito rápido será $\frac{\mu}{v}$ grande e $\frac{b}{b_0}$ pequeno.

Por exemplo, nos casos das marés é $\frac{\mu}{v} = 840$ e $\frac{b}{b_0} = \frac{1}{840}$.

Conclue-se daqui que a Terra cede tanto melhor à influência dum movimento que se produz sobre si, quanto mais próximo o período dêsse movimento está do período de CHANDLER, ou do da sua nutação livre.

É um fenómeno análogo aos fenómenos de ressonância.

Passando agora ao caso mais geral temos de atender tanto à influência directa como à indirecta.

Nêste caso, das equações (45) obtemos ainda (47), com a diferença que agora é

$$P = -\frac{df'_1}{dt} + n g'_1 - D_1 n^2 + \frac{dE_1}{dt} n$$

$$Q = \dots\dots\dots$$

Do mesmo modo se nota agora o fenómeno de resonância, se o movimento das massas é periódico.

Vamos vêr que basta tomarmos em consideração a influência indirecta pois a directa é insignificante.

Esta última é representada por $n D_1$, $n E_1$ e a primeira por f'_1, g'_1, h'_1 .

Suponhamos, como SOMMERFELD, que a massa que se desloca oscila em volta da sua posição inicial e média x_0, y_0, z_0 no período $\frac{2\pi}{\mu}$, e que as suas coordenadas se podem exprimir da seguinte forma:

$$x_1 = x_0 + a \operatorname{sen} \mu t$$

$$y_1 = y_0 + b \operatorname{sen} \mu t$$

$$z_1 = z_0.$$

Então é

$$D_1 = m y_1 z_1 = m z_0 b \operatorname{sen} \mu t$$

$$E_1 = m z_1 x_1 = m z_0 a \operatorname{sen} \mu t$$

$$f'_1 = m (y_1 z'_1 - z_1 y'_1) = -m z_0 b \mu \cos \mu t$$

$$g'_1 = m (z_1 x'_1 - x_1 z'_1) = m z_0 a \mu \cos \mu t,$$

e portanto

$$\frac{f'_1}{n E_1} \equiv -\frac{\mu}{n} \frac{b}{a} \frac{\cos \mu t}{\operatorname{sen} \mu t}; \quad \frac{g'_1}{n D_1} = \frac{\mu}{n} \frac{a}{b} \frac{\cos \mu t}{\operatorname{sen} \mu t}.$$

Quanto às amplitudes a, b supômo-las da mesma ordem de grandeza. Então serão estas relações da ordem de grandeza de $\frac{\mu}{n}$; ora como os fenómenos que teem maior influência são aqueles cujo período se aproxima do período de CHANDLER,

vê-se que para estes ainda será insignificante a influência directa pois vale $\frac{1}{428}$ da indirecta.

Do mesmo modo se vê que isto tem lugar para movimentos expressos por uma lei mais geral do que a contida nas fórmulas acima expostas.

Podemos pois daqui em diante considerar sómente a influência indirecta e as equações (45) ficam :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \nu q + \frac{1}{A_0} \left(D_1 n^2 - \frac{dE_1}{dt} n \right) &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \nu p - \frac{1}{A_0} \left(E_1 n^2 + \frac{dD_1}{dt} n \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Vê-se que $\frac{dE_1}{dt}$, $\frac{dD_1}{dt}$ são muito pequenas em relação a nD_1 , nE_1 , como por exemplo no caso há pouco considerado, e podemos portanto desprezar a relação daquelas quantidades para com nD_1 , nE_1 ; então estas equações ficam

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \nu q + \frac{n^2}{A_0} D_1 &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \nu p - \frac{n^2}{A_0} E_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Ora $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$ são as coordenadas do polo de rotação I (uv) em relação a uma posição fixa C_0 do polo de inercia C (xy).

Então nas fórmulas (22) substituindo Ux_1 por $-y$ e Uy_1 por x , dD por D_1 , dE por E_1 , e supondo $C - A = C_0 - A_0$, obtem-se :

$$x = -\frac{E_1}{C_0 - A_0} \quad y = -\frac{D_1}{C_0 - A_0}.$$

Substituindo em (51) vem

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\nu v - \frac{n}{A_0} [-(C_0 - A_0)y] = -\nu(v - y) \\ \frac{dv}{dt} &= \nu u + \frac{n}{A_0} [-(C_0 - A_0)x] = \nu(u - x) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

HELMERT (A. N. 3014) serviu-se destas equações para mostrar duma maneira geral a influência que tem no movimento do I, o movimento de C. RADAU supõe que o movimento de C era uma linha recta, ao passo que HELMERT o supõe elíptico, isto é, supõe

$$x = a \cos(mt + n)$$

$$y = b \operatorname{sen}(mt + n)$$

que substituídos em (52) dão para movimento do I em relação a eixos fixos na Terra

$$\left. \begin{aligned} u &= S \cos(\nu t + \tau) + \frac{\nu^2 a + \nu m b}{\nu^2 - m^2} \cos(mt + n) \\ v &= S \operatorname{sen}(\nu t + \tau) + \frac{\nu^2 b + \nu m a}{\nu^2 - m^2} \operatorname{sen}(mt + n) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

O que mostra que este movimento se compõe do movimento circular euleriano (ou chandleriano) à volta dum ponto I_0 cujas coordenadas são expressas pelos segundos termos dos segundos membros, e o qual tem um movimento elíptico.

Para applicarmos ao caso de um fenómeno anual basta fazer $\gamma = 0$, logo

$$\mu = \nu = \frac{\omega}{305}, m = \frac{\omega}{366} = \frac{5}{6} \nu$$

e as coordenadas de I_0 são

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 6 \frac{6a + 5b}{11} \cos(mt + n) \\ y_0 &= 6 \frac{6b + 5a}{11} \sin(mt + n). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Para o caso de RADAU basta fazer $b = 0$ e então

$$x_0 = 3,3 a \cos(mt + n)$$

$$y_0 = 2,7 a \sin(mt + n).$$

Onde se vê que uma deslocação

$$a \cos(mt + n)$$

no eixo de inercia, produz no eixo de rotação uma deslocação que se pode tornar tripla da daquele.

Neste caso o polo médio I_0 encontra-se sempre do mesmo lado que o polo de inercia. Este caso está representado na *fig. 4*, onde marcámos com algarismos as posições correspondentes dos dois polos.

Se tomarmos em conta a elasticidade da Terra então é

$$m = \frac{7}{6} \nu$$

o que dá

$$x_0 = -2,8 a \cos(mt + n)$$

$$y_0 = -3,2 a \sin(mt + n).$$

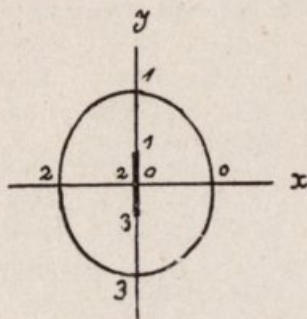


Fig. 4.

Neste caso o polo I_0 encontra-se do lado oposto do polo C , como se vê na *fig. 5*.

Como nota HELMERT a multiplicação pode atingir 6 para o que basta supôr o movimento de C circular, isto é $a = b$; então é

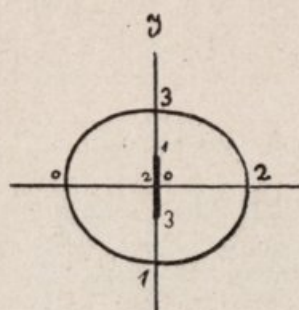


Fig. 5.

$$x_0 = \pm 6a \cos(mt + n)$$

$$y_0 = \pm 6a \sin(mt + n)$$

tomando o sinal + para o período de EULER e - para o de CHANDLER.

Nestes casos o movimento de I_0 é também circular e do mesmo sentido, apresentando a mesma fase ou a fase oposta conforme se

toma o período de EULER ou de CHANDLER.

Para aplicarmos ao caso das deslocações atmosféricas estudadas por SPITALER não podemos traçar a elipse do polo de inércia e em seguida a do de rotação porque os seus resultados não são suficientemente precisos.

Podemos porém proceder em ordem inversa, e, fazendo como GRABOWSKI, obter as expressões que dão as coordenadas do polo de inércia em função das do de rotação.

São elas

$$x = \left(A - \frac{m}{v} B \right) \cos(mt + n)$$

$$y = \left(B - \frac{m}{v} A \right) \sin(mt + n)$$

em que A e B são os semi-eixos da elipse do polo de rotação, que, segundo os resultados dos anos de 1890-99, tem os valores

$$A = 0',104 \quad B = 0',044$$

sendo o eixo maior dirigido para 19° E. de GREENWICH e girando o polo no sentido da rotação da Terra.

Com estes elementos obtemos

$$x = 0'',055 \cos(mt + n)$$

$$y = -0,077 \sin(mt + n)$$

o que mostra que a elipse de C é descrita em sentido inverso da rotação da Terra.

Vêm-se na *fig. 6* estas duas elipses (a de rotação é mais alongada), onde se nota que há concordância quanto à ordem de grandeza e sentido da rotação. A diferença pode ser atribuída ao incompleto conhecimento da deslocação do ar, ou ao movimento das águas, ou mesmo até ao facto das observações da pressão e latitude se não referirem aos mesmos anos.

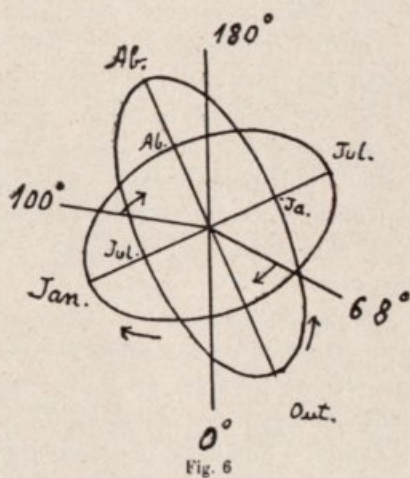


Fig. 6

§ 4) Variações de curto período

Além destas principais oscilações encontram-se ainda outras de muito menor importância e que só mais modernamente foram reconhecidas, depois do extenso material das estações internacionais do paralelo 39° N.

SCHUMANN (*Numerische Untersuchung über Polhöhen-schwankung*) estudando os resultados dessas observações notou que nas de CARLOFORTE, devido talvez à amenidade do seu clima, se apresenta com muita regularidade uma variação com o período dependente de $\sin 2C$.

Há na redução dos lugares médios aos lugares aparentes

das estrelas um termo que tem o mesmo período que êste; é o termo $g' \cos(G' + \alpha)$; mas como êste termo se toma em consideração na determinação das posições médias das estrelas, não pode ser devido a êle que se nota tal período, tanto mais que a amplitude é um pouco diferente.

A razão deve talvez estar no desvio que sofre a vertical do lugar com a atracção da Lua, a qual varia com a posição desta. Adiante veremos êste assunto.

Outro período descoberto por SCHUMANN nas observações feitas por STRUVE no I Vertical foi o período diário.

A amplitude dêste parece chegar a atingir às vezes $0',1$.

Não deve estranhar que se não notasse há mais tempo tal período pois pelos métodos usados em Potsdam nas reduções das observações do Serviço Internacional, parte-se da hipótese que não existe tal variação e só se tomam as médias mensais.

O mesmo acontece em qualquer determinação da latitude, pois não nos contentamos com uma única observação, mas efectuamos pelo menos alguns dias delas, o que trás como consequência o desaparecimento da variação diária.

O que é notável é a precisão das observações de STRUVE, o que nos vem mostrar que o seu método (I Vertical) também é excelente para os trabalhos dêste género.

Tais variações não fôram confirmadas pelos astrônomos japoneses KIMURA e NAKANO que estabeleceram um serviço de latitudes de forma a observarem cada noite 4 grupos de estrelas, não só para estudar as variações diárias, como para confrontar com as observações do Serviço Internacional (A. N. 4040). Os resultados a que chegaram foi que, dentro dos limites da observação, não aparece nenhuma variação diária da latitude, nem diferença entre os seus resultados e os do Serviço Internacional.

Diz SCHUMANN que se tal aconteceu é porque as observações fôram feitas durante um curto espaço de tempo (um ano), e porque os métodos de redução não são próprios para separar as variações diárias.

A existirem tais variações fica em parte arruinado o edificio tão pacientemente construido de: caminho do polo, fórmulas de interpolação, variações de latitude etc., pois tudo isto pode não ser mais do que um resultado das variações diárias com os programas das observações. É por isso conveniente poder aproveitar as observações cada uma por si, evitando as médias que tudo podem alterar. Contra isso há os erros duma observação isolada que são muito superiores à grandeza que se procura.

Temos por isso de esperar mais tempo até esclarecer por completo esta questão.

Há um fenómeno de período diário que talvez possa explicar uma variação de latitude d'este género. É o fenómeno das marés, cuja influencia nos movimentos do polo passamos a expôr segundo RADAU.

Influência das marés

Duma maneira grosseira podemos imaginar que o fenómeno consiste no movimento à volta da Terra de duas protuberâncias aquosas dirigidas na direcção da linha Terra-Lua.

A posição destas massas de água influirá na posição do eixo de inercia, e faz parte dum problema já tratado a propósito do principio da multiplicação.

Convem aqui estudá-lo de novo referindo-o não a eixos fixos no globo, mas aos eixos móveis usados para a dedução das equações (30) de THOMSON.

Suponhamos que o polo C se desloca da sua posição média C_0 duma quantidade variável $c = c_0 \sin mt$ em que m representa o movimento médio diário da Lua (ou do Sol).

Tomemos para Ox_1 um eixo situado no plano meridiano da Lua; α que designa a velocidade com que Oz_1 gira à volta de Ox_1 é igual a γc , e $\beta = -\frac{dc}{dt}$; γ é aproximadamente igual à velocidade (ω) de rotação da Terra ou antes $\gamma = -\frac{30}{31} \omega$.

A substituição destes valores nas equações (30) dá, depois

da integração feita os valores

$$c_1 - c = - \frac{\nu(\nu - \gamma)}{(\nu - \gamma)^2 - m^2} c_0 \operatorname{sen} m t$$

$$c_2 = + \frac{\nu m}{(\nu - \gamma)^2 - m^2} c_0 \operatorname{cos} m t$$

que exprimem as cordenadas de I_0 em relação a C_0 . Atendendo ao valôr de γ , e a que $m = \frac{\omega}{27}$ e $\nu = \frac{\omega}{305}$ ou $\frac{\omega}{428}$, vê-se que $c_1 - c$ e c_2 são da ordem de $\frac{c_0}{300}$, isto é, o polo I_0 coincidirá sempre com o ponto fixo C_0 , tomando em conta unicamente a acção das marés, que pode pois ser desprezada.

§ 5) Acções perturbadoras

Nota-se que o movimento do polo deduzido das observações apresenta certas irregularidades que a teoria não permite prever. Vamos por isso vêr como podem influir nesse movimento algumas acções ainda não estudadas, tais como o atrito das marés lunares, das marés devidas ao movimento do eixo de rotação, a acção da viscosidade do globo, acção dos tremores de terra.

a) O atrito das marés (lunares e solares) à superficie da Terra. Como é sabido as protuberancias produzidas nos oceânos pela acção da Lua acompanham-na no seu movimento.

Duma maneira grosseira podemos imaginar que as marés desempenham o papel de dois travões applicados à Terra, e somos assim levados ao estudo da influéncia dum atrito constante sôbre um movimento de rotação.

A acção destes travões será produzir um binário que se opõe ao de rotação da Terra.

Se a Lua estivesse sempre no equador o eixo do binário coincidiria com o de rotação da Terra e a sua grandeza seria proporcional a esta rotação.

Costuma-se geralmente admitir que esse momento é proporcional à velocidade de rotação, (KEIN e SOMMERFELD).

Decompondo esse momento segundo os tres eixos principais, as suas componentes serão $-\lambda p$, $-\lambda q$, $-\lambda r$ em que λ é uma constante.

Para estabelecer as equações do movimento basta nas equações de EULER introduzir os momentos λp , ... e então fica

$$A \frac{dp}{dt} = (A - C) q r - \lambda p$$

$$A \frac{dq}{dt} = (C - A) r p - \lambda q$$

$$C \frac{dr}{dt} = -\lambda r$$

Desta ultima equação se vê que a rotação r deriva da sua rotação r_0 , correspondente a $t=0$, segundo a lei:

$$r = r_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} \quad (55).$$

Para integrar estas equações, façamos como KLEIN multiplicando a primeira por 1 e a segunda por i e somando:

$$\frac{A d(p + iq)}{dt} = (C - A) i r (p + iq) - \lambda (p + iq) \quad (56)$$

dividindo por $p + iq$ e introduzindo o valor de r vem

$$\frac{d}{dt} \log (p + iq) = \frac{C - A}{A} i r_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} - \frac{\lambda}{A},$$

integrando vem

$$\log(p + iq) = -\frac{\lambda t}{A} - \frac{C-A}{A} \frac{C}{\lambda} i r_0 e^{-\frac{\lambda t}{C}} + \text{const.}$$

Designando por p_0, q_0 os valores iniciais de p, q podemos pôr

$$p + iq = (p_0 + iq_0) e^{-\frac{\lambda t}{A} + \frac{C-A}{A} \frac{C}{\lambda} i r_0 \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{C}}\right)} \quad (57).$$

Daqui se vê que o valor absoluto de $p + iq$, isto é, o comprimento do componente equatorial do vector de rotação, decresce segundo uma lei análoga à da rotação r .

Temos então

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} e^{-\frac{\lambda t}{A}} \quad (58).$$

Designando por α o ângulo que a dita componente faz com a sua posição inicial, temos

$$\frac{p + iq}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{p_0 + iq_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}} e^{i\alpha}.$$

Deduz-se então de (57) para α o valor

$$\alpha = \frac{C-A}{A} \frac{C}{\lambda} r_0 \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{C}}\right) \quad (59).$$

Vêmos pois que p, q, r tendem para zéro, isto é, a Terra tende a parar, atingindo o repouso sómente ao fim de um tempo infinito.

O número de voltas que o vector da rotação dá à volta do eixo de figura é finito e é igual a

$$\frac{\alpha_\infty}{2\pi} = \frac{C-A}{A} \frac{C}{\lambda} \frac{r_0}{2\pi},$$

isto é, é inversamente proporcional ao factor λ .

É interessante vêr como varia o ângulo β que o eixo de rotação faz com o eixo principal de inércia.

De (51) e (54) tira-se

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{r_0} e^{-\lambda t \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{c}\right)}$$

ou, introduzindo o ângulo β_0 correspondente à origem do tempo,

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_0 e^{-\lambda t \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{c}\right)}; \quad (60)$$

no caso da Terra é $C > A$ e portanto o eixo de rotação tende para o eixo de figura, descrevendo no corpo uma espiral centripeta.

¿ Poder-se há assim explicar aquelas irregulares espirais descritas pelo polo? É fácil de vêr que não, pois esta acção é despresível.

Como β e β_0 são pequenos, podemos pôr

$$\frac{\beta}{\beta_0} = e^{-\lambda t \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{c}\right)} = e^{-\frac{\lambda t}{c} \varepsilon} \text{ em que } \varepsilon = \frac{1}{300}.$$

Por outro lado é $\frac{r}{r_0} = e^{-\frac{\lambda t}{c}}$. Da combinação das duas se tira:

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^\varepsilon.$$

Vê-se aqui que para o atrito das marés reduzir o ângulo β a metade do seu valor inicial β_0 , a rotação r_0 é reduzida a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-90}$ e a Terra estaria há muito tempo parada, antes que o ângulo β se reduzisse a metade.

Não podemos pois para a explicação das variações seculares do eixo de rotação, atribuir ao atrito das águas influência alguma.

b) Temos ainda a considerar o atrito devido à forma que os oceânos vão tomando em consequência do movimento do eixo de rotação.

SOMMERFELD demonstra dum modo análogo que este atrito deixa invariável a velocidade do movimento da nutação livre, e unicamente tende a fazer aproximar o eixo de rotação do eixo de inércia, como no caso anterior.

Há nos dois casos um factor λ que nos é desconhecido, e que se não pode avaliar, já porque a maré de que estamos tratando é ainda pouco conhecida, já porque a forma dos continentes nos modifica bastante as condições teóricas que estudámos.

c) *A acção da fluidez do globo.*

Em todas as hipóteses geofísicas se admite que a Terra, pelo menos em parte, se apresenta como um corpo um pouco fluido ou plástico; por conseguinte o seu eixo de inércia tende a aproximar-se do eixo de rotação.

Esta adaptação exige uma quantidade de energia que é transformada em calor e dissipada.

Mostra-se duma maneira simples como estas perdas de energia mecânica tendem a aproximar os dois eixos, qualquer que seja a sua origem, abrangendo portanto todos os atritos que se dão na Terra e que não são devidos a forças exteriores.

d) *Acção dos tremores de Terra.*

Para estudarmos este caso basta considerarmos que α , β nas equações (35) não diferem de zero senão durante um intervalo de tempo muito pequeno, e podemos pôr $t=0$ debaixo do \int o que dá

$$c_1 = -\int \alpha \operatorname{sen} \lambda t' dt - \int \beta \cos \lambda t' dt + c_{1,0} \cos \lambda t + c_{2,0} \operatorname{sen} \lambda t$$

ou então

$$c_1 = (c_{1,0} - \int \beta dt) \cos \lambda t - (c_{2,0} + \int \alpha dt) \operatorname{sen} \lambda t$$

e

$$c_2 = (c_{1,0} - \int \beta dt) \operatorname{sen} \lambda t + (c_{2,0} + \int \alpha dt) \operatorname{cos} \lambda t,$$

tendo o fenómeno lugar na origem do tempo os valores $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ passam a ser

$$c'_1 = c_{1,0} - \int \beta dt \quad c'_2 = c_{2,0} + \int \alpha dt,$$

e aquelas equações ficam

$$c_1 = c'_1 \operatorname{cos} \lambda t - c'_2 \operatorname{sen} \lambda t$$

$$c_2 = c'_1 \operatorname{sen} \lambda t - c'_2 \operatorname{cos} \lambda t$$

e que mostra que a amplitude mudou bruscamente e o período ficou o mesmo.

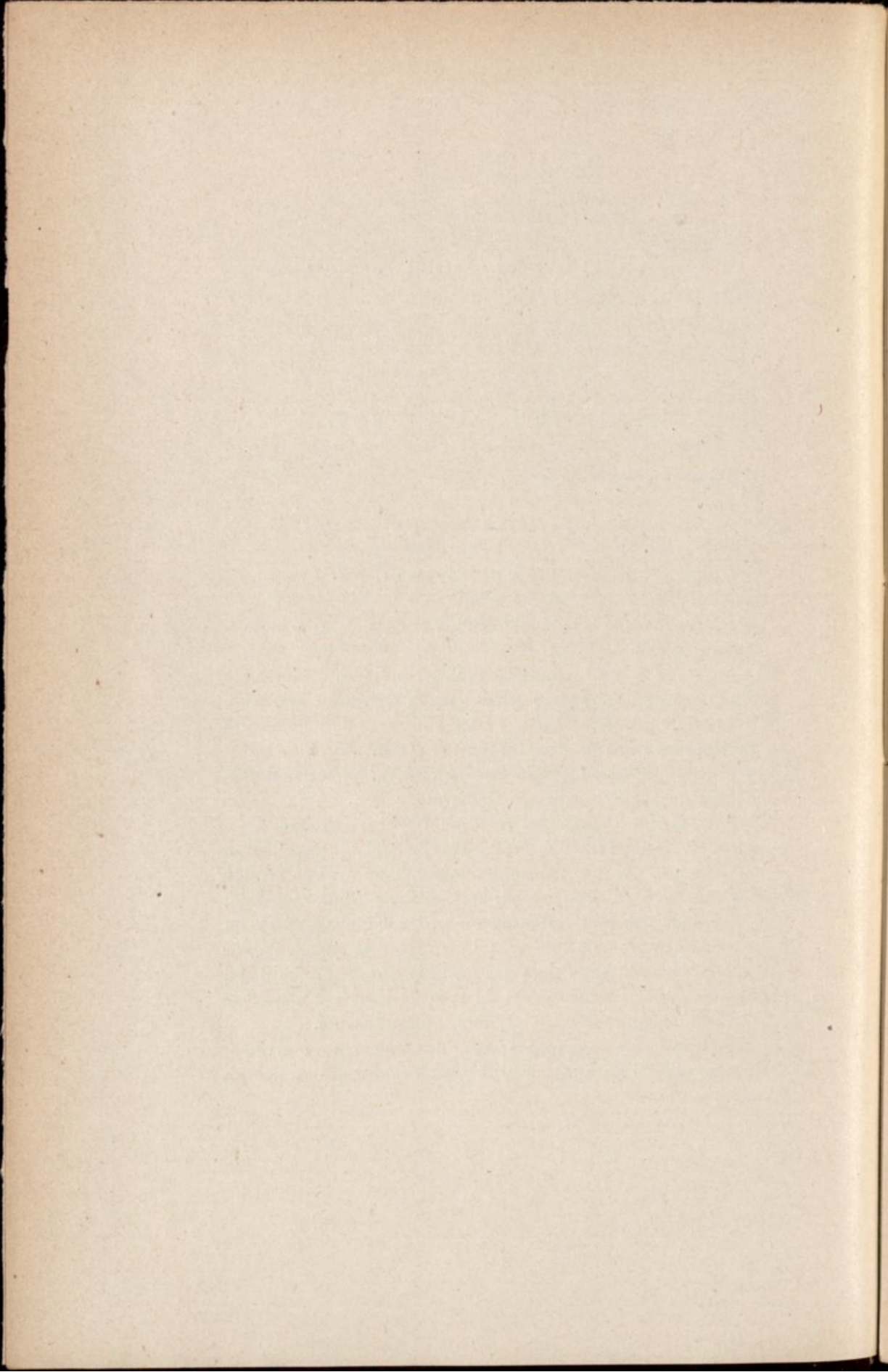
Para vêr o valor numérico destes resultados é necessário comparar as observações feitas antes e depois do fenómeno.

Foi o que fizeram MILNE e CANCANI que notaram um certo paralelismo entre as duas ordens de fenómenos. Esse paralelismo foi contestado e procurou-se resolver a questão depois do grande abalo de terra da California.

Para isso a «*Coast and Geodetic Survey*» executou a revisão da triangulação do local abalado e notou que numa área de 320 km. por 24 km. se deram deslocamentos no sentido vertical de 6 m. e no sentido horisontal de 1^m,2, o máximo.

Supondo que êste deslocamento se deu em toda a extensão, e até a uma profundidade de 100 km., que é já muito superior aquela admitida pelos geólogos modernos, o efeito que daqui resulta para o deslocamento do polo de inércia à superfície da Terra é de $282^m \times 10^{-6}$, isto é, insignificante.

Podemos pois desprezar a acção dos tremores de terra enquanto eles tiverem a ordem de grandeza dos que se dão em nossos dias.



CAPÍTULO IV

Desvios da vertical

Como se sabe só são acessíveis à observação os movimentos relativos.

A latitude dum lugar sendo o complemento do ângulo que faz a vertical com o eixo de rotação, variará não só com a deslocação dêste, mas também com os desvios que sofre a vertical.

O centro da Lua (ou do Sol) estando a distâncias diferentes dos vários pontos da Terra, não os atráe com a mesma intensidade; os mais próximos são os mais atraídos, vindo em segundo lugar aqueles que estão situados à distância média, e por ultimos os mais afastados.

Daqui resulta que a Terra, se fosse fluida, se alongaria no sentido da linha Terra — Lua e no sentido oposto.

O fenómeno não se passa com esta simplicidade nos oceânos pois surgem muitas acções perturbadoras, como a resistência do fundo dos mares, a disposição dos continentes, a profundidade das águas etc.

Considerando porêem a Terra em conjunto, podemos supôr que as superficies de nível se alongam, donde resulta uma oscilação na vertical, que é normal a estas superficies.

Se a Terra fosse absolutamente rígida, o caminho descrito pela extremidade do fio de prumo sôbre um plano horizontal fixo à Terra, representaria (abstraindo de pequenas causas perturbadoras) o desvio sofrido pela vertical, com o qual en-

trariamos em conta na variação da latitude observada, para termos o caminho do polo.

Se a Terra fosse fluida, cederia à acção do Sol ou da Lua e a extremidade de fio de prumo não se deslocaria em relação à superfície da Terra nesse ponto, embora se deslocasse no espaço.

Como sabemos pelo período de CHANDLER a Terra não se comporta como um corpo rígido, o que é confirmado por estudos doutra ordem, como são os dos pendulos horizontais empregados na observação dos desvios da vertical.

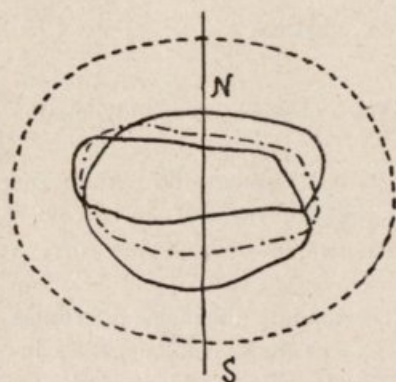


Fig. 7

Estes desvios começaram por ser observados por d'ABBADIE em 1837, e pelos irmãos DARWIN em 1879. Só depois de vinte anos de trabalho, e sobretudo depois das observações de HECKER começadas em Potsdam em 1902, se chegou a resultados positivos.

O aparelho montado à superfície da Terra apresentava oscilações diárias

muito fortes devido ao calor solar, e foi por isso passado para um profundo pôço onde estas variações se tornaram insignificantes.

HECKER conseguiu separar tanto o efeito calorífico como atractivo do Sol, do efeito atractivo da Lua, e obteve para movimento diário da vertical resultados análogos aos contidos na (fig. 7).

Como se vê, a onda observada (—) ou a onda média semidiurna observada (—.—) são menores do que a onda semidiurna (—) calculada na hipótese da Terra rígida, o que prova que ela se comporta como um corpo um pouco flexível, e cuja rigidez fosse pouco maior do que a do aço.

Os desvios obtidos a partir duma posição média não chegam a atingir $0'',01$ ao passo que os calculados podem chegar a $0'',02$.

Uma vez que se traça o caminho do polo até às milésimas de segundo, parece que deviam ser tomados em conta estas variações. Como porém são de período muito curto elas desaparecerão nas médias, pois o caminho do polo é deduzido das médias mensais da latitude.

A fórmula que nos dá o desvio teórico γ da vertical é

$$\gamma \cos \alpha = 3 \operatorname{sen} \xi \cos \xi \cos A \frac{M'}{M} \frac{R_m^3}{\Delta^3}$$

em que α é o azimuth do plano em que a normal se desvia, ξ a distância zenital do astro perturbador de massa M' , Δ a sua distância à Terra cujo raio médio e massa são R_m , M .

Vê-se que o maior valor do desvio tem lugar para $\delta = 0$ (δ declinação) e

$$t = 0^h, \quad t = 12^h.$$

Os mínimos tem lugar quando a Lua está a 6^h ou 18^h de ângulo horário, e tem forte declinação.

Os máximos e mínimos absolutos tem lugar quando a Lua, além das condições indicadas, se encontra mais próxima da Terra.

Para $t = 6^h$ ou 18^h e $\delta = 0$ o desvio é nulo, e o valor da latitude é então o normal.

J. BOCCARDI applicou esta fórmula às suas observações de estrelas feitas em Pino Torinese (Itália), agrupando as observações por revoluções siderais da Lua e comparando os valores diários com a média aritmética notou: 1) que há uma clara concordância de sinais entre os desvios calculados e os desvios observados; 2) que os desvios observados são muito mais fortes que os calculados.

Vê-se assim que, ao passo que os desvios da vertical observados nos subterrâneos pelo método dos pendulos horizontais são inferiores aos calculados, os deduzidos das observações de estrelas são-lhes superiores.

A razão deve estar ou nas condições do local, pois, como

notou HECKER, estes desvios são maiores onde é grande a diferença entre a latitude observada e a deduzida geodesicamente por comparação com pontos geodésicos de primeira ordem, ou nas condições atmosféricas, ou nas variações da latitude, pois que estes resultados foram obtidos na hipótese dela se conservar constante durante um mês, o que não será muito provável.

Os trabalhos desta ordem não são ainda bastantes para poder separar os efeitos das diferentes causas.

O mais conveniente seria montar no mesmo local um óculo para a observação de estrelas e um sistema de pendulos para os desvios da vertical.

Descontando às variações de altura do polo, o que é devido aos desvios da vertical no espaço (o que é diferente dos desvios observados) obtemos as variações de latitude devidas unicamente ao movimento do polo.

CAPÍTULO V

O termo em z ou de Kimura

ALBRECHT na dedução do caminho do polo usou um sistema de eixos tais que Oz passa na posição média do polo, Ox é dirigido para o meridiano de Greenwich, Oy a 90° para W.

As coordenadas x, y do polo \mathcal{P} são deduzidas das variações de latitude pela fórmula

$$\varphi - \varphi_0 = x \cos \lambda + y \sin \lambda$$

em que λ é a longitude W. do lugar, φ, φ_0 respectivamente as latitudes instantânea e média.

Esta forma é admissível atendendo ao pequeno valor do $\varphi - \varphi_0$; comete-se em todo o caso um erro, que é representado por HK na *fig. 8* e cujo valor é

$$HK = 90^\circ - \varphi - \arccos \frac{\sin \varphi}{\cos (y \cos \lambda - x \sin \lambda)}$$

como se vê do triângulo OPH. Este valor é muito pequeno pois atinge

$$0'',001 \text{ para } \varphi = \begin{cases} 60^\circ \\ 39^\circ \end{cases} \text{ quando } y \cos \lambda - x \sin \lambda = \begin{cases} 15'' \\ 22'',5 \end{cases}$$

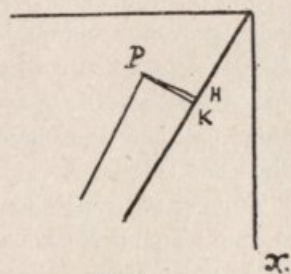


Fig. 8.

Servindo-se destas fórmulas, calcula pelo método dos menores quadrados as coordenadas x , y .

O astrónomo japonês KIMURA em 1904 notou que os resíduos das observações apresentavam certas periodicidades, e suspeitou que este facto fôsse devido a uma causa tal como a variação da direcção do fio de prumo. Calculou por isso as coordenadas do polo instantâneo na hipótese

$$\varphi - \varphi_0 = z + x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda$$

em que z é variável com o tempo mas independente da longitude dos lugares de observação, e achou que o erro de cada observação baixava assim (no caso por êle estudado) de $\pm 0'',034$ a $\pm 0'',025$, tornando-se muito maior a concordância do resultado calculado com o observado.

Supõe z constante para todos os observatorios cujos trabalhos aproveitou, os quais se não afastam muito da latitude de 42° N; achou que esse termo apresenta uma oscilação anual de $+0'',04$ a $-0'',04$ variando com os anos e tendo os valores nulos próximo dos equinócios, e os máximos e mínimos próximo dos solstícios.

Tudo se passa pois como se todos os observatorios fôsem ao mesmo tempo deslocados para N e para S no período dum ano.

De então para cá sempre se tem usado esta fórmula no estudo dos movimentos do polo e a concordância tem sempre sido maior (*Resultate Internat. Breitendienten*) do que sem esse termo.

Para podermos ajuizar da maneira como são obtidos estes resultados, e para a compreensão das hipóteses apresentadas para a explicação de tão inesperado termo, temos de nos referir ao método adoptado nas observações de latitude.

Serviço internacional das latitudes. — Em 1892 a Associação Geodésica Internacional voltou as suas atenções para os trabalhos de latitude, mas só em 1898 se organizou na Conferência de Stuttgart um sistema de observações contínuas, em

seis estações distribuídas sobre o mesmo paralelo, o de $39^{\circ} 8'$ N. Essas estações, em que se observa em circunstâncias idênticas estão distribuídas da seguinte forma:

Misusawa (Japão)	$\lambda = -141^{\circ} 8'$
Tschardjui (Ásia Central)	$- 63^{\circ} 29'$
Carloforte (Italia)	$- 8^{\circ} 19'$
Gaithersburg (America oriental)	$+ 77^{\circ} 12'$
Cincinnati (America central)	$+ 84^{\circ} 25'$
Ukiah (America ocidental)	$+ 123^{\circ} 13'$

A latitude é determinada pelo método de HORREBOW-TALCOTT, e as estrelas escolhidas formam doze grupos; cada um destes grupos compreende seis pares de estrelas culminando a menos de 24° do zenite e dois pares a 60° do zenite a fim de constatar as variações de refração.

Durante um ano devem-se pois observar duma maneira contínua, setenta e dois pares de latitude. Cada grupo de seis pares abrangendo duas horas de tempo sideral pode ser observado durante dois meses, um mês com o grupo precedente e outro com o seguinte; assim por exemplo o grupo II é observado com o grupo I ($I_2 II_1$) e depois com o grupo III ($II_2 III_1$).

Sucedem-se então os grupos na ordem seguinte:

Novembro	$I_2 II_1$
Dezembro	$II_2 III_1$
.....	

Para atenuar a influência dos erros de declinação os seis pares dum grupo são reduzidos, por correções apropriadas, a um só par ideal ou médio. Resta ligar em seguida, por um processo análogo, os doze pares médios obtidos.

Chega-se a isso, formando as diferenças $I_2 - II_1, \dots$ que são atribuídas aos erros das declinações, supondo que a latitude não varia no intervalo que separa os dois grupos

numa mesma tarde. A soma destas diferenças, continuadas até ao ponto de partida deveria anular-se. Na verdade ela não se anula e há sempre um resíduo de algumas decimas de segundo e que constitue um erro a que podemos chamar erro de terminação (*fermeture* dos franceses e *Schlussfehler* dos alemães). Este resíduo, que varia duma estação para outra, varia também com o tempo e segundo o grupo tomado como ponto de partida (*Resultate II*).

ALBRECHT no vol. I do *Resultate* atribuiu este resíduo ao erro da constante de aberração que ele elevou de $20'',470$ a $20'',512$, um número tal que reduzia a zero esse erro.

Notando porém nos volumes seguintes que esta correcção era insufficiente para explicar os erros de terminação continuou a usar o valór $20'',47$, reservando-se de o corrigir depois de mais tempo de observações, tanto mais que os resultados no hemisfério Sul exigiam para a mesma compensação, que essa constante fôsse diminuida.

Tomou-se por isso o partido de distribuir esses erros igualmente por todos os grupos, e obtem-se depois a correcção de cada grupo à média dos grupos, a qual junta com a correcção de cada par à média do seu grupo dá a correcção de cada par à média dos seus grupos ou a um grupo médio que significa um sistema médio de declinações.

É só depois destas reduções que se pode procurar deduzir os valôres de x , y , z .

Com os valôres x , y traçamos a espiral que descreve o polo (*fig. 9*) e cuja amplitude decresce lentamente desde 1904, e mais lentamente do que se esperava. Com efeito em 1907.0 ela não voltou à dimensão que tinha em 1900.0 o que prova que os dois períodos de 14 e 12 meses, cujo m. m. c. é 84 meses ou 7 anos, não bastam para explicar o movimento do polo; estamos mais perto da verdade elevando como KIMURA de 14 a 14,5 meses o período de CHANDLER.

O aparecimento do termo em z levou a Associação Geodesica a instalar mais duas estações no hemisfério S à latitude de $31^{\circ} 55'$ (Bayswatter na Australia e Oncativo na República

Argentina) a fim de se vêr se realmente aparece também o termo em z , e sobretudo para vêr se, quando os observatórios

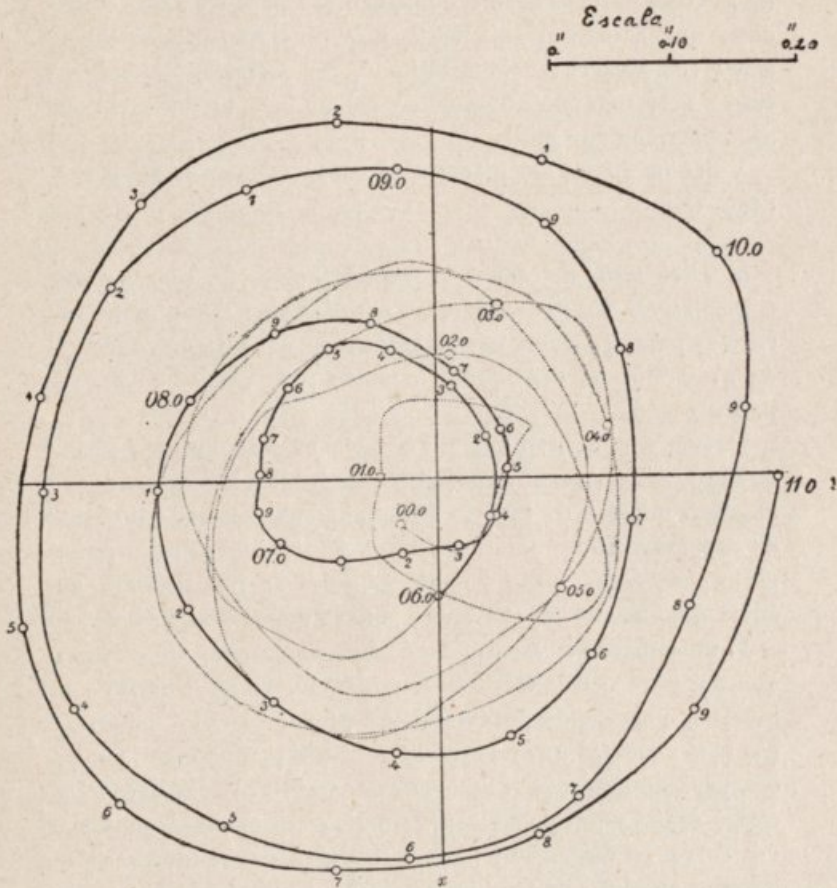


Fig. 9.

Caminho do polo à superfície da Terra de 1900.0 a 1911.0

do N estão, em conjunto, mais próximos do polo N, os do S se afastam ou aproximam do polo S.

Os resultados mostraram que há concordância com as observações do N do primeiro modo, isto é, z tem o mesmo sinal desde que suponhamos latitude S negativa ou tem para o mesmo

tempo, sinal trocado ao do N contendo ambos as latitudes positivas. Tudo se passa, para as latitudes, como se o centro de gravidade fôsse deslocado para o N e para o S, sem querer dizer que a origem seja essa, pois para isso precisamos de saber como varia z com a latitude. Se realmente a causa é essa z será máximo no equador e diminua à medida que nos aproximamos dos polos.

Vejamos agora as hipóteses apresentadas para a explicação d'este termo.

a) *Deslocação do centro de gravidade do polo.* Esta hipótese é admissível em vista da fusão e solidificação dos gélos nas regiões polares. Basta para a amplitude de $0',04$ que o centro de gravidade se desloque 1,5 metro para cada lado da sua posição média.

Devemos para isso supôr que pela pressão do gêlo se não deforma a Terra nas regiões polares, e que se fundem anualmente 3 milhões de km^3 de gêlo, isto é uma camada de 1 km de espessura sôbre uma região com 9° de raio. O calor necessário para a sua fusão é muito superior ao que a Terra nos envia anualmente, o que torna impossível esta explicação.

É mesmo desnecessário fazer este raciocínio, se notarmos que z é para o hemisfério N negativo no verão e positivo no inverno, pois se desprezarmos os termos em x, y a fórmula $\varphi - \varphi_0 = z$ mostra que no inverno será $\varphi > \varphi_0$ e no verão $\varphi < \varphi_0$; ora para as latitudes N aumentarem no inverno era necessário que o zenite se deslocasse para o N, ou o centro de atracção da Terra se deslocasse para o S. Como é exactamente no inverno que há sôbre o hemisfério N o grande peso de gêlo que fará deslocar o centro de gravidade para a N, vê-se que esta explicação não tem razão de ser, e mostra até que sem a fusão dos gélos o valôr de z seria maior do que é.

Embora se possa pôr de parte esta causa do deslocamento do centro de gravidade, deve notar-se que não fica regeitada a hipótese do deslocamento do centro de gravidade, pois pode êle ser produzido por fenómenos interiores que nos são desconhecidos.

V. CERULLI (*Rivista di Astronomia* 1912 VI) considera este deslocamento como a causa do termo de Kimura, que ele quer seja substituído pela fórmula $z \cos \varphi$, e chega até a atribuir ao deslocamento do centro de gravidade os termos em x e y do movimento do polo, ou pelo menos uma fracção destes termos. A ideia não é original pois já BAKHUYZEM em 1904 (*Astron. Nach.*) comparando as observações de LEIDE com as internacionais diz: «pode-se fazer a observação de que não seja permitido, para a redução das observações de LEIDE, usar os valores de x , y tirados das estações internacionais.

Se uma parte das variações de latitude $x \cos \lambda + y \sin \lambda$ não depende de uma oscilação do eixo de inércia mas do movimento do centro de gravidade, então serão x e y funcções da latitude».

Nota CERULLI que os fenómenos geológicos quer bruscos, quer lentos devem ter como consequência uma deslocação do centro de gravidade do glóbo. Ora é pouco provável que essa deslocação se dê exactamente no sentido do eixo de rotação.

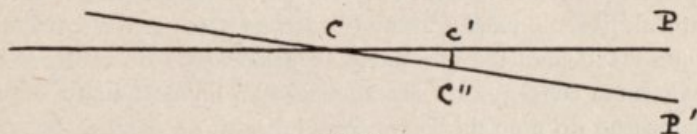


Fig. 10.

A componente dessa deslocação no sentido do eixo atribue ele o termo em z , e à componente perpendicular a esta atribue os outros termos em x , y .

A estabilidade do equilíbrio impõe ao centro de gravidade de não se afastar do eixo, mas isto não impede que ele sofra uma pequena deslocação; a consequência será a Terra deslocar-se de forma que o novo centro cáia sobre o eixo que se não desloca, em virtude da lei da inércia (desprezando as acções exteriores).

Assim, se o eixo primitivo era Pc , (*fig. 10*) e o centro c passou para c' , a Terra conduzindo consigo c' transportou-o,

girando à volta de c , ao eixo Pc no ponto c'' , e o resultado foi o polo deslocar-se à superfície da Terra.

Sendo PP' as duas posições do polo da Terra, dos triângulos $PP'c$ e $cc'c''$ tira-se

$$cc' = z \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}$$

em que $z = cc''$. Exprimindo tudo em metros e sendo $z = 1^m$ é

$$cc' = \frac{1}{600} \text{ de milímetro.}$$

Basta êste insignificante deslocamento para poder explicar toda a deslocação do polo.

É muito provável que uma parte das deslocações do polo seja devida a esse efeito; só depois de se determinar com bastante rigor a rigidez média da Terra por processos diferentes do período CHANDLER, e depois de se justificar a hipótese de que a fôrma atual da Terra se encontra no estado natural, livre de tensão, se pode vêr que parte se deve atribuir à sua elasticidade, e que parte às deslocações do centro.

CERULLI consegue tornar admissível a hipótese duma longa deslocação do polo da Terra, que há muito é necessária para a Geologia, e que DARWIN tinha mostrado ser impossível pelas deslocações geológicas, ainda as mais favoráveis; basta para explicar um deslocamento de 20° , que a componente do desvio do centro de gravidade normal ao eixo fosse $\frac{1}{3}$ da outra componente, em lugar de $\frac{1}{600.000}$ como atualmente precisa de ser segundo a hipótese exposta.

b) Outra explicação do termo em z consiste em considerá-lo não como uma variação simultânea da latitude de todos os observatórios dum hemisfério no mesmo sentido, mas como *uma resultante dum movimento do polo à superfície da Terra com o método de observação.*

Um movimento do polo em volta da sua posição média com um período de 24 horas não influirá nos termos em x e y , mas pode influir no termo em z . Se este movimento vai no mesmo sentido que o Sol, deve-se obter uma latitude sempre maior ou sempre menor em todos os pontos em que se observa à mesma hora, conforme a fase do movimento a que corresponde o tempo de observação. Se esse movimento é em sentido inverso, dois pontos situados a 180° ou 90° de diferença de longitude observarão respectivamente a mesma e a oposta fase.

Vê-se assim que o termo em z pode ser devido a um movimento que tenha muito aproximadamente 24 horas de período.

Suponhamos que o período era de 24 horas de tempo sideral; então a culminação de cada estrela tem lugar sempre na mesma fase, e todas as observações da mesma estrela serão de igual modo influenciadas. A latitude não variará, e tudo se passa como se houvesse um erro na sua declinação.

Suponhamos agora o período de 24 horas médias. Para uma estrela que é observada durante todo o ano, haverá uma variação anual da latitude. No Serviço Internacional não se observam sempre as mesmas estrelas, mas usa-se o chamado método de *cadeia*, de forma que em cada noite se observam dois grupos de estrelas, cada um deles durante duas horas seguidas, e de maneira que um grupo é durante um mês observado juntamente com o grupo antecedente, e durante o outro mês juntamente com o grupo seguinte. Se no verão começa uma nova combinação a ser observada entre as 11 e as 15 horas médias, passado um mês elle é observado entre as 9 e 13 horas. No inverno fazem-se as observações das 9 ás 13 e das 7 ás 11 horas.

Se a latitude tem um máximo, por exemplo à tarde, à mesma hora média, cada grupo é observado primeiro com uma latitude menor e depois com uma maior; como consequência disto, a latitude observada durante todo o ano mostrará um aumento contínuo, que, no caso das observações da

mesma combinação de grupos se fazerem sempre à mesma hora, viria incluído no chamado erro de terminação, e não produziria o termo em z .

Não se dá o mesmo se as observações no inverno se efectuam mais cedo que no verão, como acontece no Serviço Internacional.

Na hipótese do máximo às 6 horas de tarde, deve-se notar nas observações do verão um maior aumento da latitude, do que nas observações de inverno, e resultaria além do erro de terminação um pequeno termo de período anual. Para todavia explicar o termo em z de KIMURA no Serviço Internacional, devia a amplitude (max.-min.) do período diário atingir $0'',30$ (para o máximo às 7 horas da tarde) e o erro de terminação seria $1'',5$; ora este erro não excede $0'',6$ e pode-se portanto dizer que tal hipótese é insuficiente.

Há ainda um terceiro caso estudado por BONSDORF (*Mitteilungen der Nikolai-Hauptsternwarte zu Pulkowo*, III, 33), em que esse termo se poderia explicar por uma variação de período $24^h3^m,9$ médias, supondo que a máxima latitude a 21 de dezembro coincide com a meia noite, e se apresenta portanto cada dia $3^m,9$ mais tarde, e que a meia amplitude atinge $0'',024$.

Para mostrar como um período com tais condições pode explicar o termo em z , calcula BONSDORF as épocas médias em que cada grupo é observado quer com o seguinte quer com o anterior. Calcula em seguida para as mesmas épocas a hora a que se dá a máxima latitude.

Forma depois as diferenças entre estas horas obtidas e a hora média a que se observa cada grupo nas duas épocas.

Debaixo das hipóteses aqui consideradas, obtem depois de quanto variou a latitude nestes intervalos de horas, e nota-se que estes resultados concordam com os valores de z dados no vol. III do *Resultate*.

Ultimamente fez este astrónomo o estudo das observações que há anos se realizam em Pulkova da estrela δ Cassiopeiae, e viu que não há razão para a existência de tal oscilação

diária, pois esta estrela apresenta além dos termos em x e y , o termo em z com o período anual, e não um período semestral cujos máximos deviam cair a 16 de março e 16 de novembro, como deveria acontecer nesta hipótese.

c) Pode acontecer ainda que a causa esteja no cálculo da *posição das estrelas*. ALBRECHT notou que os valores de z de 1902.0 a 1904.9 mostram tendência duma variação no sentido positivo, o que se poderia atribuir a um erro nos movimentos próprios das estrelas. Supondo que estas se desviam em média por ano $+0',016$, obtem-se valores que concordam com os valores de z para este período.

FELIX BISKE (*A. N.* 4182) atribue antes esta propriedade a erros periódicos nas declinações das estrelas, os quais não podem ser eliminados pelo método usado na redução do Serviço Internacional, que, como se sabe, parte da hipótese que a declinação das estrelas não variou da passagem dum grupo para o outro.

Ora, devido ao facto de os pontos nulos da curva de z estarem próximos do equinócio e os máximo e mínimo nos solstícios, podemos supôr que o equador sofre uma pequena oscilação, de forma que no inverno e no verão tem uma maior inclinação relativamente à eclíptica, isto proveniente de erros nos coeficientes da nutação solar.

Estas variações de inclinação do equador, e portanto variações de declinação das estrelas, não são importantes em dois grupos seguintes, mas são-no em grupos separados por seis meses de observação; estes erros da declinação fazem assim aparecer o termo em z .

Partindo desta hipótese e diferenciando a expressão da nutação solar em declinação segundo os seus coeficientes, obtem-se, por comparação com os valores de z , equações de condição que nos dão para correções desses coeficientes valores que chegam a atingir $0',02$.

Segundo esta explicação fica o termo em z dependente do tempo a que se faz a observação duma determinada estrela,

e também da sua ascensão recta podem-se então explicar os desvios observados entre os valores de z para LEIDE, e os valores do Serviço Internacional, pela diferença que há entre os programas de observação. Foi essa a demonstração que fez FELIX BISKE.

Nota-se porém que os valores máximos e mínimos de z obtidos para os anos de 1906.3 a 1908.6 tanto no hemisfério N como no S, se afastam perto de três meses dos obtidos para os anos 1902.0 a 1905.0.

Ainda ha a notar um termo dependente da longitude do nodo da Lua que poderia produzir variações a longo periodo, e assim explicar esta deslocação. Essas variações porém não seriam tão importantes.

Esta maneira de explicar o termo em z não se pode aceitar definitivamente sem vêr para um grande espaço de tempo como se comportam os seus valores e sem vêr se é permitido alterar os coeficientes da nutação de grandezas de tal ordem. Todas estas grandezas estão imediatamente ligadas, e não podemos variar uma delas sem afectar todas as outras.

É por isso necessário um grande número de observações, e combinar depois os resultados segundo os seus pesos para poder obter os valores mais prováveis de todos estas constantes.

d) Influência da perturbação do Sol e da Lua.

Quando fizemos o estudo dos movimentos do polo à superficie da Terra, na hipótese da rigidez, desprezamos termos provenientes da acção do Sol e da Lua, e que agora vamos vêr explicarem já $\frac{1}{3}$ do fenómeno de KIMURA.

OPPOLZER (*Traité de la Determination des Orbites*, pág. 154) apresenta as fórmulas que exprimem a variação de latitude, tomando em consideração a acção do Sol e da Lua.

O 1.º termo é

$$0',009 \text{ sen } \theta,$$

em que θ é o tempo sideral; podemos por isso pôr aproxima-

damente $\Theta = \odot + t$ sendo t o tempo médio. No Serviço Internacional é aproximadamente

$$t = 11^{\text{h}} = 165^{\circ},$$

e a variação de latitude será

$$0'',009 \text{ sen } (\odot + 165) = 0'',009 \text{ cos } (\odot - 285)$$

cuja fase concorda com a do termo em z , e cuja amplitude é $\frac{1}{4}$ da desse termo.

O 2.º termo é

$$-0'',006 \text{ sen } (\Theta - 2 \text{ C}) = 0'',006 \text{ sen } (2 \text{ C} - \odot - t),$$

o qual apresenta um período de meio mês, e foi pôsto em evidência por SCHUMANN nas observações de CARLOFORTE, embora por enquanto com pouca segurança.

O 3.º termo é

$$\begin{aligned} & -0'',003 \text{ sen } (\Theta - 2 \odot) = \\ & = +0'',003 \text{ sen } (\odot - t) = 0'',003 \text{ cos } (\odot - 255^{\circ}) \end{aligned}$$

que somado com o primeiro dá

$$0'',012 \text{ cos } (\odot - 278^{\circ})$$

o que representa aproximadamente $\frac{1}{3}$ do termo de KIMURA, segundo os resultados de 1900.0 a 1906.0.

e) *Influência da paralelaxe e da refração anuais.*

A parte do termo em z não explicável por termos estudados no caso antecedente, pode-se explicar pela acção da paralelaxe anual.

CHANDLER (*A. J.*, 530) calculou qual devia ser a para-

laxe média necessária para a explicação do fenómeno de KIMURA e achou o valor $0'',13$. Ora como as estrêlas usadas são em geral de sexta grandeza, que segundo os trabalhos de KAPTEYN tem uma paralelaxe média de $0'',02$, êste resultado é inadmissivel ainda mesmo que os resultados de KAPTEYN, que são fundados sôbre medidas relativas, tivessem de ser elevados.

Êstes trabalhos foram depois retomados por COURVOISIER que chegou aos mesmos resultados.

Podia-se admitir esta paralelaxe aparentemente tão elevada, supondo que existe à volta do Sol, e estendendo-se ainda para além da órbita da Terra, um meio capaz de refractar a luz que a atravessa. Esta hipótese foi proposta por COURVOISIER, à qual êle deu o nome de *refracção anual*.

O fenómeno chamado luz zodiacal é um bom argumento a seu favôr.

Quanto à forma que devemos attribuir a esse meio, notemos que o mais conveniente seria supô-lo achatado e portanto de maior densidade na direcção da eclíptica.

Numa primeira aproximação simplifica-se muito êste estudo supondo-o esférico, como faz COURVOISIER, desempenhando o ponto do Ceu opôsto ao Sol, o papel do zenite na refracção atmosférica.

No estudo das observações das estrelas o fenómeno apparece-nos combinado com a paralelaxe, o que complica um pouco.

Combinando porém convenientemente as estrelas é possível separar os dois efeitos.

O que é interessante é que se explica dêste modo não só o termo em z mas também um facto até então inexplicável, o qual é uma paralelaxe negativa.

Examinando por exemplo as observações da Polar êle obtêm:

$$+0'',10 = 2 \times (\text{refracção-paralelaxe})$$

em ascensão recta, donde se vê que se a refracção fôsse nula viria uma paralelaxe negativa.

Representando por R_α a refração à distância $180 - \alpha$ do Sol, obteve por exemplo:

$$R_{70} + R_{110} - 2\pi = +0',10$$

$$2R_{90} - 2\pi = -0',06,$$

em que π é a paralelaxe; isto mostra que deve ser:

$$R_{70} + R_{110} > 2R_{90},$$

donde se vê que R_{70} será ainda desprezível.

COURVOISIER tendo obtido estes resultados em 1905 tratou de estudar uma grande massa de observações feitas sobre α Tauri, α Leonis, Polar, α Orionis, β Aurigae etc., em vários Observatórios. Estudou igualmente as observações de Venus na proximidade do Sol que são uma excelente verificação da existência do tal meio refractivo, pois devido ao seu intenso brilho pode-se acompanhar até muito próximo do Sol (até 10°), quer na passagem inferior, quer na superior, o que permite comparar as observações nos dois casos, e vêr a diferença que apresenta a ascensão recta na passagem superior da ascensão recta calculada nas efemérides. Venus tem ainda a grande vantagem de ter uma paralelaxe conhecida, podendo assim separar completamente o efeito da refração.

Como resultados de todas estas observações, algumas já feitas em 1910, apresenta COURVOISIER uma fórmula empírica que representa muito bem a refração r para a distância g da estrela ao ponto oposto ao Sol; é ela

$$r = \sigma \left(1 - \sqrt{\cos \frac{g}{2}} \right)$$

em que σ é uma constante com o valor $0',541 \pm 0',018$.

Este valor r atinge para 6° de distância do Sol, $0',44$ e a 90° é $0',10$.

Ora, como vimos, a paralelaxe média das estrelas do Serviço Internacional é, segundo KAPTEIN, $0'',02$ que junta com a refração a 90° , que é pouco mais ou menos a distância a que se observa, dá $0'',13$ que foi o valor considerado por CHANDLER como necessário para a explicação do termo em z .

Se porém fôrmos aplicar estes valores à dedução de algumas propriedades físicas do gaz hipotético, obtemos resultados que estão em contradição com a experiência, se admitimos as leis físicas que se passam à superfície da Terra.

Assim FINLAY FREUNDLICH calculou que a pressão que este meio exercia sobre a superfície da Terra era de 46 atmosferas por cm^2 , o que traria como consequência que o comprimento do ano ao fim de um século teria a menos de 3,24 dias; a massa desse gaz seria superior à do Sol; emfim resultados absolutamente inadmissíveis.

¿ Poder-se hão então attribuir aqueles desvios observados a erros instrumentais ou pessoais? COURVOISIER faz a sua análise e conclue que não, pois as observações, algumas já de 1910, são feitas com todo o rigôr de forma a não permitir tais erros.

f) Influência da refração atmosférica.

COURVOISIER mostra que os desvios observados, não podem ter por causa a refração atmosférica, pois para uma refração de $0'',3$ a 45° de distância do Sol, devia-se produzir na atmosfera, suposta homogênea, um inchamento de 60 km. de altura, o que produziria uma diferença de pressão superior às atualmente observadas.

Sem querermos saber se estes desvios tem a mesma origem do termo em z , o que é facto é que este último se pode explicar pelas anomalias na refração atmosférica.

Influências de carácter local não são prováveis pois o valor de z é o mesmo para as seis estações internacionais, as quais estão montadas em planícies e longe dos povoados que poderiam pelo aquecimento do ar perturbar a atmosfera.

Há pois unicamente a recear influências de carácter geral.

Deve então suceder que as camadas de igual densidade se não dispõem sempre normais à vertical do lugar, mas teem oscilação anual.

Tais deslocações podem ter por causa a atracção do Sol e da Lua (análogamente aos mares), como realmente se verificou em 15 anos de observações feitas em Batavia que mostram uma oscilação da pressão atmosférica seguindo muito regularmente o curso da Lua.

Os máximos davam-se uma hora depois da Lua passar o meridiano superior e inferior, e eram respectivamente $0^{\text{mm}},055$ e $0^{\text{mm}},063$; os mínimos seis horas depois dos máximos e com os valores $0^{\text{mm}},052$ e $0^{\text{mm}},060$ (*Encyclopedia Britanica*, *Meteorology*).

Devido porém ao facto do movimento da Lua ser muito rápido, estas influências devem muito provavelmente compensar-se e não terão período anual.

Outra causa que pode produzir uma deformação periódica da atmosfera é o calor solar, pois como é sabido há oscilações diárias da pressão, muito regulares, e é fácil de vêr que uma pequena diferença de pressão entre o inverno e o verão, e atendendo também a que de verão as observações se fazem mais tarde, pode explicar uma variação da direcção dos raios da luz de $0',04$.

Há a entrar em conta com a temperatura do ar nas camadas superiores e com a pressão, do que pouco se sabe, pois os resultados dos balões sondas são ainda insignificantes.

Para poder estudar as anomalias de refração estabeleceu-se no Serviço Internacional um conjunto de pares de estrelas que culminam a 60° do zenite; notando-se nas observações feitas desde 1900 até 1905 que não havia nenhum desvio sistemático entre estes pares e os zenitais, foi resolvido pô-los de parte nos anos seguintes.

Notemos porém que o que estes resultados mostraram é que não há diferença sistemática entre os dois sistemas de pares, mas nada sabemos se haveria ou não uma causa que perturbasse do mesmo modo os dois sistemas de pares.

O facto de que em algumas estações de latitude os valores deduzidos se afastam sistematicamente durante longos períodos das latitudes deduzidas das médias, pode ter como origem anomalias desta espécie.

Parece pois que a origem mais provável, pelo menos duma parte do termo em z , seja a refração atmosférica devida ao calor do Sol, que apresentará assim irregularidades de refração com um período de um ano. Isto não é muito de admirar pois já se conhecem irregularidades de período dum segundo que causam a incerteza da bissecção da estrêla pelo fio do micrómetro, e irregularidades dum minuto como mostrou FRANK SCHLESINGER (*Publications of the Allegheny Obs.*) por meio de fotografias tomadas tanto a baixa altitude, como no Monte Wilson, a 1:800 metros.

Poderemos talvez explicar a deslocação dos pontos máximos, mínimos e nulos de z nos anos 1906 a 1908 relativamente aos anos de 1900 a 1906 por variação nas condições atmosféricas desses anos.

Dissemos que o valor teórico do erro de terminação devia ser zero. Isto teria lugar se tivéssemos uma expressão da forma

$$(a - b) + (b - c) + (c - d) + \dots + (n - a).$$

Tal não acontece no nosso caso, pois I_1 e I_2 não são iguais, já pelos erros accidentais de observação, já pelos erros sistematicos devidos às declinações, já por se não observarem os mesmos pares igual número de vezes durante as duas epochas em que se observa cada grupo.

Não terá pois lugar a relação

$$(I_2 - II_1) + (II_2 - III_1) + \dots + (XII_2 - I_1) = 0.$$

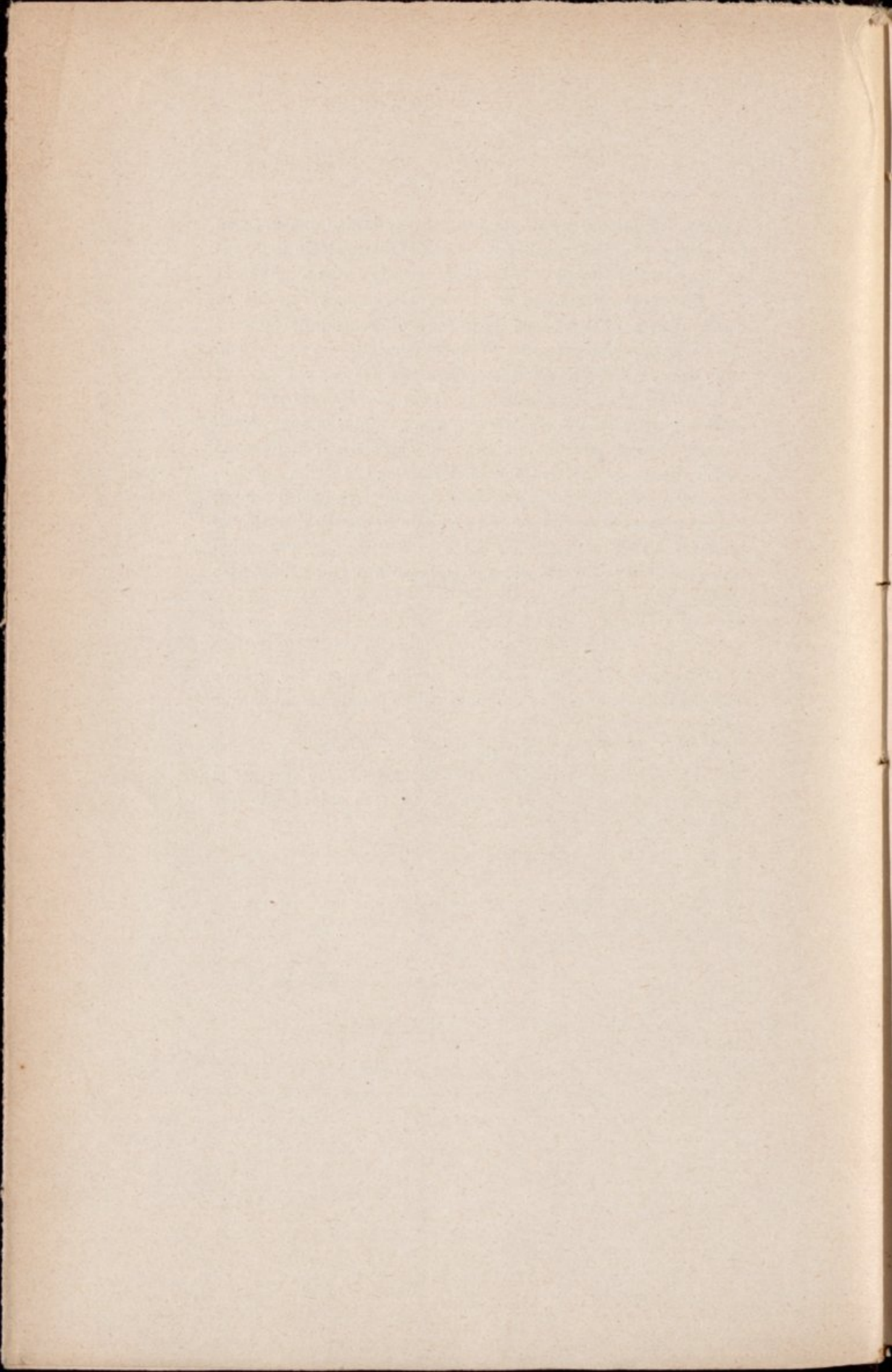
Tendo z o período de um ano podemos objectar que elle pode provir da maneira de distribuir os erros de terminação.

Para o resolver, temos de fazer o estudo das observações de modo a obter os resultados de cada Observatório independentemente dos dos outros. Conhecer-se hia assim a influência das diferenças de posição dos Observatórios, e vêr-se hia ao mesmo tempo qual a razão de grande diferença que aparece nas reduções dum grupo ao precedente relativas a um mesmo ano, para as diversas estações (*Resultate* III e IV).

Outro processo de redução indicado por FAVARO (A. N. 4665) consiste em distribuir ano por ano e estação por estação os erros de terminação de modo a obter a curva de cada ano independente da dos outros. Evitar-se hia assim a desconhecida influência da variabilidade de tais erros com o tempo, processo este que se justifica pelo facto de que realmente são bastante fortes as diferenças entre as reduções de um grupo ao precedente, para uma mesma estação e para os diferentes anos.

O termo de KIMURA pode ser devido a uma tão grande variedade de causas que é impossível no estado actual chegar a conclusões definitivas.

Atribuimos à refração atmosférica o que não pode ser explicado por nenhuma das outras hipóteses. Não fica assim demonstrado que esteja aí a sua causa, mas unicamente que esta hipótese é a mais provável.



CAPÍTULO VI

Valores numéricos dos termos do movimento do polo

Exposta a questão da variação das latitudes, podemos agora responder à seguinte pergunta:

¿Poder-se há estabelecer uma fórmula pela qual possamos deduzir a latitude dum lugar a cada instante, quando se conhece a sua latitude num instante determinado?

O extenso material acumulado há uns anos para cá tem-nos mostrado que o movimento do polo apresenta irregularidades que a teoria não prevê, e que portanto nos é impossível deduzir com rigor a posição do polo numa época dada.

Só a observação constante das latitudes nos pode fornecer dados suficientes para conhecer a cada instante a sua posição.

As primeiras fórmulas completas apresentadas para o movimento do polo são devidas a CHANDLER, que ao procurar descobrir nas observações o período de EULER, notou que os resultados divergiam bastante do que era de esperar, e procurou então, pondo de parte qualquer teoria, deduzir unicamente das observações o movimento do polo.

Outras fórmulas foram depois apresentadas por BAKHUYZEN e outros, as quais se não afastam muito das primeiras.

Notando que o movimento observado do polo se ia afastando do movimento dado pelas suas fórmulas empíricas, CHANDLER efectuou a revisão dos seus elementos (*A. J.* 446) e obteve os resultados abaixo expostos, em que se designa por $+x$,

$+y$ o que ALBRECHT designa por $+y, -x$, de fôrma que as variações de latitude se exprimem por

$$\Delta \varphi = x \operatorname{sen} \lambda - y \operatorname{cos} \lambda + z$$

ao passo que usando os mesmos eixos que ALBRECHT, temos

$$\Delta \varphi = x \operatorname{cos} \lambda + y \operatorname{sen} \lambda + z.$$

As fórmulas dadas por CHANDLER são:

$$x = r_1 \operatorname{sen} (t - T_1) \theta + 0'',10 \operatorname{sen} (\odot - 308^\circ)$$

$$y = r_1 \operatorname{cos} (t - T_1) \theta + 0'',11 \operatorname{cos} (\odot - 3^\circ)$$

em que

$$T_1 = 2412646 + 427,0 E - 0,08 E^2$$

$$\theta = 0^\circ,843 + 0^\circ,000316 E$$

$$r_1 = 0'',125 + 0'',05 \operatorname{sen} (2414363 - t).0^\circ,015,$$

em que E designa um número inteiro de períodos de 14 meses, e t a data juliana ($2412464 = 1893.0$).

CHANDLER mostrou mais tarde (em 1902) que, para a elipse de período anual que é representada pelos segundos termos dos segundos membros, a linha dos ápsides gira de E. para W. de 6° por ano, no sentido contrário ao do polo de rotação. Mostrou além disso que o período variava pouco e diferia do ano de alguns dias a mais ou a menos. Introduziu ainda um novo termo tendo um coeficiente $0'',09$ e um período de 436 dias.

Mais modernamente KIMURA (*A. N.* 4344) fez o estudo do movimento do polo de 1890.0 até 1908.5 e notou que o período de 14 meses, tendo sido de 436 dias em 1893,

aumentou gradualmente até 1897 em que atingiu o máximo valor: 442 dias.

Decrescendo de novo atingiu em 1907 o valor de 427 dias.

Quanto à amplitude, as suas variações teem seguido uma marcha regular, sendo simétrica em relação a 1899.5 em que atingiu um mínimo $0'',250$.

Apresenta dois máximos secundários da mesma altura ($0'',237$) no fim dos anos 1896 e 1902 e três mínimos em 1804.5, 1899.5, 1905.0.

Quanto ao *termo anual* é ele bem representado entre 1893.8 e 1899.8 por

$$x_2 = +0'',011 \text{ sen } \odot - 0'',096 \text{ cos } \odot + 0'',005$$

$$y_2 = +0'',051 \text{ sen } \odot + 0'',004 \text{ cos } \odot + 0'',008$$

e entre 1900.0 e 1907.0 por

$$x_2 = +0'',008 \text{ sen } \odot - 0'',064 \text{ cos } \odot + 0'',011$$

$$y_2 = +0'',056 \text{ sen } \odot - 0'',006 \text{ cos } \odot + 0'',030.$$

As diferenças entre os resultados das observações e os valores calculados por estas fórmulas só excepcionalmente atingem $0'',009$, o que mostra a grande precisão das observações do Serviço Internacional.

A comparação dos resultados das duas épocas mostra que todos os elementos, excepto a amplitude de x , se tem conservado os mesmos. KIMURA supõe que isso provem da sobreposição de algum outro termo variável dependente da latitude, com o actual movimento anual, porque na primeira época quasi todas as estações que contribuíram com largo pêso para a determinação de x , estão situadas mais ao N. que as Internacionais, emquanto que aquelas que deram maior pêso para y , estão à mesma latitude.

Quanto ao termo em z obtem KIMURA as seguintes fórmulas que o representam satisfatoriamente:

Data	z
1894.1	$-0'',026 \cos (\odot - 126^\circ)$
1898.4	$- 037 \cos (\odot - 121)$
1902.0	$- 042 \cos (\odot - 91)$
1906.0	$- 052 \cos (\odot - 68)$

as quais mostram que ele muda muito lentamente, especialmente na fase.

Julga KIMURA que a análise exacta dum movimento tão complicado como das variações de latitude, será um assunto difícil emquanto não houver uma sistemática e contínua série de boas observações que abranjam o espaço de um século.

Para conhecer actualmente as variações de latitude num dado lugar, ou para reduzir as observações à posição média do polo, servimo-nos dum relatório publicado anualmente no jornal «*Astronomische Nachrichten*» onde ALBRECHT apresenta os valores provisórios das cordenadas do polo instantâneo para o ano anterior, juntamente com tabelas para a redução de latitudes, longitudes e azimutes, à posição média do polo.

CAPITULO VII

O método de observação

Propondo-nos fazer no Observatório de Coimbra o estudo das variações de latitude, vamos vêr qual o método de observação que preferimos adoptar.

O método das medidas das *distâncias zenitais circummeridianas* foi o primeiro usado para a determinação da latitude. Não é ele hoje considerado o mais rigoroso para estudos dêste género, pois são inumeras as causas de êrro quer provenientes do instrumento, quer da atmosfera, quer do observador.

Estas medidas repousam em parte sôbre as observações da distância zenital da Polar, e em parte sôbre a distância zenital das estrelas situadas ao Sul, pois consegue-se dêste modo, (aproveitando estrelas á mesma distância zenital que a Polar) que a influênciã do êrro de inclinação do eixo seja a menor possível, ficando assim o resultado independente do modo como esta inclinação varia com a distância zenital, libertando-se ao mesmo tempo o resultado das anomalias de refração.

Êste processo não serve senão para latitudes médias, pois nem podemos observar estrelas muito baixas, que viriam affectadas dos êrros da refração, nem estrelas muito próximo do zenite, em que teria grande influênciã um êrro no tempo.

A Polar que é muito vantajosa para a determinação da latitude, em vista de ser bem conhecido o seu movimento, apresenta porém o inconveniente de, para a nossa latitude,

ter ainda grande distância zenital, e ter de ser observada alternadamente durante dia e noite, o que pode influir bastante nos resultados. Com ela podemos obter cada dia uma única determinação de latitude, o que nos fornece pouco material para o estudo da sua variação.

Ainda um grande inconveniente d'este método são os erros da gradação, pois precisamos de utilizar uma grande extensão do círculo graduado.

Tratando de estudar as variações da latitude bastam-nos os processos das medidas relativas, deixando o Circular Meridiano unicamente para as medidas absolutas.

Instrumento de passagens no I Vertical. — Êste método oferece relativamente às medidas no meridiano a vantagem de as observações não serem afectadas por erros na gradação do círculo e na imperfeição dos aparelhos micrométricos, exigindo por outro lado a aplicação de um bom relógio e um bom nível ligado ao eixo horizontal.

Não é em tão alto gráu influenciado pelos erros sistemáticos como o método das distâncias zenitais; não está porém livre de erros desta espécie, os quais proveem quer da falta de estabilidade do instrumento, quer da incerteza na avaliação do valor angular das divisões do nível, quer da irregularidade na marcha do relógio.

Um erro no nível aparece quasi por completo no resultado final. O mesmo acontece com um erro na avaliação da distância dos fios.

Quanto à escolha das estrelas devem-se preferir aquelas que culminam muito próximo do zenite já para evitar as influências das mudanças no estado do relógio e do instrumento, já para economia de tempo, já para corrigir a incerteza nas constantes instrumentais.

O método de STRUVE apresenta como se sabe a enorme vantagem de eliminar quasi por completo todos os erros instrumentais.

É ele hoje empregado em Pulkova, onde se observa δ Cas-

sipeiae, assim como no novo Observatório de Pino Torinese, que apresenta a grande vantagem de passarem pelo seu zenite quatro estrelas brilhantes, de forma que uma observação completa de qualquer delas não vai além de 52 minutos.

Foi por isso este Observatório escolhido para, sob a direcção de BOCCARDI, estudar as variações da latitude pela observação destas estrelas, pois devido à sua disposição no Céu há um meio de separar o que é devido a variações de latitude do que é devido a erros nas nutações, visto que se o polo se aproxima duma estrela afastar-se há doutra.

Mostra a experiência que o instrumento conserva mais facilmente o azimute do que a inclinação que varia duma fracção de 1" durante uma observação, o que em parte se corrige lendo constantemente o nível e tomando a média de todas as leituras. Atendendo à duração da observação, às variações de inclinação e ao número de fios, compreende-se que os valores da latitude obtidos com os diferentes fios possam diferir de grandes fracções de 1"; todavia o erro médio é em geral de $\pm 0'',10$, e observando por exemplo em 14 fios o erro médio duma observação de latitude fica de $0'',024$. Este erro é porém illusório pois há outras causas cuja influencia é superior a esta.

O que é facto é que são inevitáveis estas ligeiras trepidações do instrumento seguidas de variações de azimute e inclinação, as quais não são notadas nem com o colimador nem com a mira. O olho não pode apreciar variações de azimute de algumas décimas de segundo, e todavia elas influem no valor da latitude.

Se pelo método de STRUVE se eliminam os erros dos intervalos dos fios, de colimação, e de azimute — uma vez que este não varie durante a observação — não se pode eliminar o erro de inclinação, que constitue por isso o seu ponto fraco. Há sempre a contar com a inércia da bolha, com as variações no valor angular com a temperatura, com o erro de leitura que pode atingir 0,1 a 0,2 da divisão o que produz um erro de $0'',1$ a $0'',2$.

Outro erro muito para recear é o proveniente da equação pessoal. No método de STRUVE torna-se ele de pequeno efeito, por se observar simétricamente nos mesmos fios.

Devido porém ao facto das passagens da estrela se fazerem obliquamente nos fios horizontais, pode aparecer um erro conforme a estrela sobe ou desce no campo. Se por exemplo se avaliam com antecedência as passagens quando a imagem sobe (passagem E., ocular ao S.), e com atraso quando desce (passagem W., ocular ao S.), teremos um ângulo horário mais forte do que deveria ser, donde resultará aumento na latitude. Para evitar este erro basta começar uma tarde com ocular ao S. e outra com ocular ao N., como se faz em PULKOVA.

Calcula Boccardi que o erro médio de cada uma das suas observações não excede $\pm 0',14$. Como o valor da latitude para uma décima do ano repousa sobre 15 a 20 observações, será o erro provável desse valor da latitude inferior a $\pm 0',03$, o que é já bastante rigoroso.

O método de HORREBOW-TALCOTT ou das medidas de diferenças de distâncias zenitais.

De todos os métodos para a avaliação da latitude é o método das medidas micrométricas de diferenças de distâncias zenitais das estrelas, aquele que, com o mínimo trabalho de cálculo, e com o mais alto grau de precisão dos resultados, nos permite obter a latitude quasi completamente livre de erros sistemáticos.

O resultado fica independente dos erros na gradação do círculo, no tempo, e o que é mais importante, nas anomalias da refração, devido ao facto de unicamente termos a considerar refrações diferenciais que se podem obter com grande segurança.

Devemos porém notar que este método parte da hipótese, que a refração é a mesma ao S. e ao N. do zenite, a igual distância, o que equivale a admitir que as camadas de igual densidade são normais á vertical, pelo menos na proximidade do meridiano.

Parece pouco provável que tal aconteça devido às diferenças de temperatura, e à atracção que a Lua e o Sol exercem sobre a atmosfera, análogamente às marés oceanicas.

Vimos até que parece fundar-se neste facto a existência do termo de Kimura nas variações de latitude.

Um erro que influe em toda a sua importância no valor da latitude é o erro da média das declinações das duas estrelas, razão porque se devem escolher aquelas cuja posição seja bem conhecida.

Como as estrelas nestas condições são poucas, pois a sua declinação está em geral afectada de erros, entre os quais estão os que proveem da incerteza da latitude do lugar de observação, prefere-se hoje usar estrelas de menor grandeza, cujas posições não são tão bem determinadas, compensando pela observação dum grande número delas, a incerteza da sua posição, e evitando além disso, devido ao seu fraco brilho, a incerteza da coincidência do fio com a estrela.

Um dos erros mais importantes a recear é o que provem das declinações das estrelas adoptadas. Comparando os valores desses erros dados pelo Catálogo, com os valores deduzidas das observações, podemos avaliar da importância dos erros accidentais.

Vejamos os *erros provenientes do observador*, os quais proveem da coincidência do fio com a estrela, da leitura do nível e do micrómetro.

Mostra a experiência que o primeiro é dos mais importantes.

Para o tornar mínimo julgamos preferível substituir as tres ou quatro coincidências usadas, por uma só, evitando também o erro proveniente da pressa com que se faz a coincidência, e o trabalho da redução ao meridiano, e erros cuja origem esteja no movimento do micrómetro.

Na leitura das divisões do micrómetro e do nível pode-se cometer em cada uma o erro provável de $\pm 0,1$ de divisão. Correspondendo em volta do parafuso a $60''$ e uma divisão do nível a $1''$, teríamos os erros $\pm 0'',04$ e $\pm 0'',05$ na latitude deduzida duma só observação.

Estes erros são pequenos mas não desprezíveis, pois o erro total provável duma simples observação, proveniente de todas as fontes é muitas vezes menor que $\pm 0',30$ e às vezes que $\pm 0',20$.

Um erro que pode ter grande importância é o que provem da força aplicada pelo observador ao micrómetro, na direcção longitudinal do tubo. Uma deslocação de $0^{\text{mm}},006$ no recticulo produziria num óculo de 120^{cm} de distância focal uma influência de $1''$ na posição da estrela.

Entre os *erros instrumentais* são mais importantes aqueles que tem origem 1) na inclinação do fio do micrómetro, 2) no valor da divisão do nível, 3) na inclinação do eixo horizontal, 4) no azimute, 5) na colimação, 6) na instabilidade das posições relativas das diferentes partes do instrumento, 7) nas irregularidades do passo do parafuso, 8) no valor usado para esse passo.

A causa 1) introduz um erro constante e deve por isso ser vigiada de perto a causa; a causa 2) é tanto menor quanto menor for a correcção do nível, e devem-se dispôr as coisas de forma que as correcções positivas e negativas se compensem.

As causas 3) 4) 5) produzem erros que podem facilmente ser eliminados por completo.

A causa 6) pode ter grande influência, sobretudo proveniente das variações de temperatura causadas pelo observador ou pela luz que ilumina o campo.

A influência 7) não é muito para recear em vista do cuidado com que actualmente se fazem os parafusos micrométricos, e do meio que temos de os estudar por meio das estrelas circumpolares.

Quanto ao método usado para a determinação do valor médio do passo do parafuso preferimos deduzi-lo das próprias observações de latitude, e não das observações das circumpolares como se faz no Serviço Internacional.

Para resolver a questão levantada entre o método de STRUVE e de HORREBOW-TALCOTT fizeram-se em Pulkova observações

simultâneas de estrelas pelos dois métodos e S. KOSTINSKY (*Mitteilungen der Nicolai Hauptsternwarte zu Pulkowo* II, 17) depois duma extensa discussão das observações chega ao seguinte resultado:

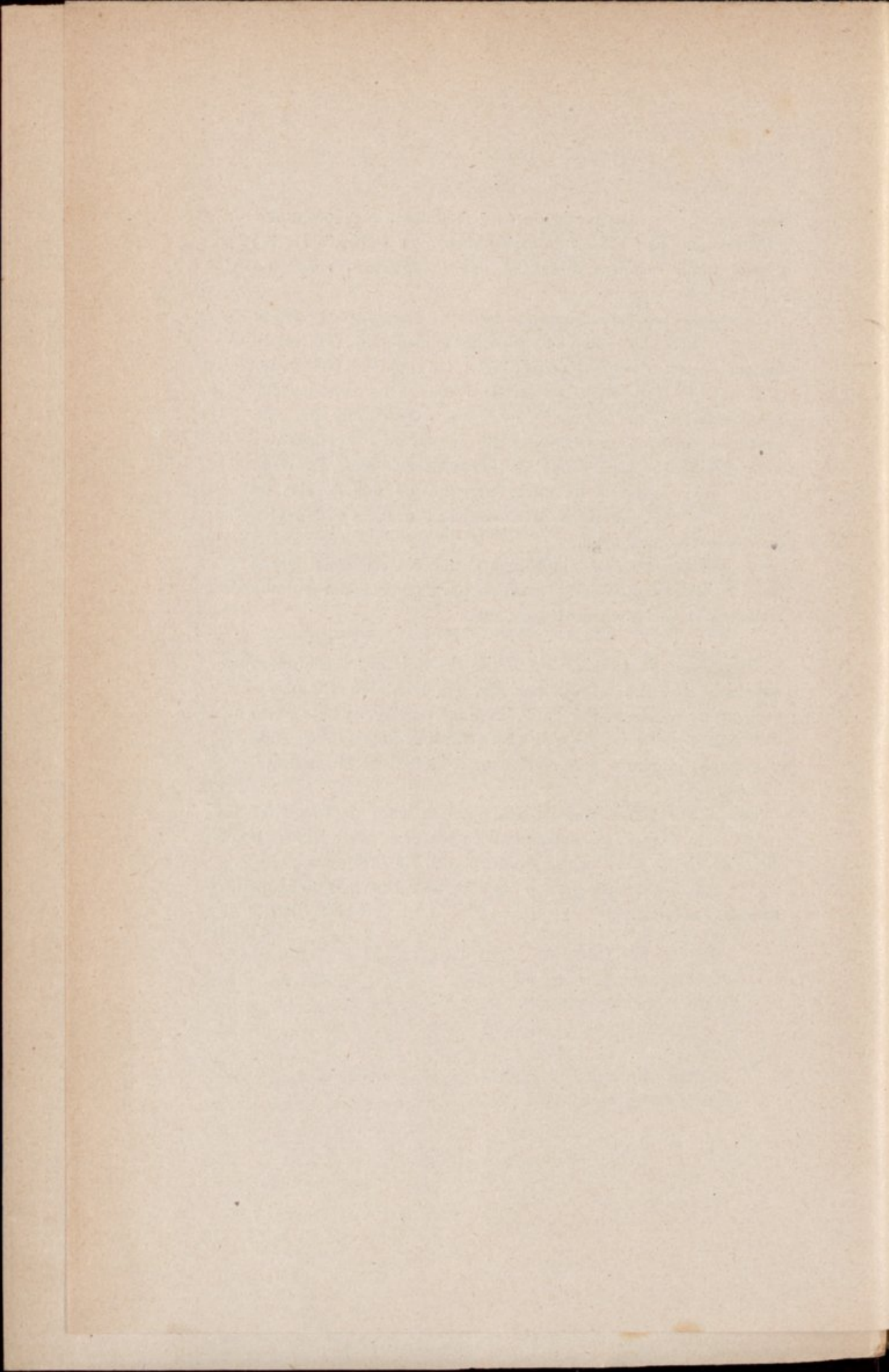
1) Quanto aos erros *fortuitos* tanto as observações por um método, como pelo outro são igualmente afectadas. Todavia o método do óculo zenital excede o outro em rapidez e facilidade.

2) Quanto aos erros *sistemáticos* ambos os métodos são igualmente sujeitos a eles. Tem-se hoje a opinião de que uma parte dos desvios observados pelo método do I Vertical tem uma significação real, e não são erros sistemáticos. Proveem talvez das oscilações de curto período, ou dos desvios da vertical ou das condições atmosféricas; o mais provável é provirem das três origens.

A questão não está ainda bem esclarecida, e mais alguns anos de observações serão precisos para poder separar o que é devido a cada uma destas causas.

Não passando próximo do zenite de Coimbra um número suficiente de estrelas cuja posição seja bem determinada, e cujo intervalo de tempo entre as duas passagens seja curto de fórma e evitar o perigo do Céu se nublar antes da segunda passagem, julgamos preferível usar o método de HORREBOW-TALCOTT.

Por não estar o instrumento em condições de funcionar como óculo zenital, foi encarregado o seu construtor REPSOLD de o munir de uma ocular com rotação de 90° para poder servir indistintamente para o método de STRUVE e de HORREBOW-TALCOTT.



INDICE

	Pág
INTRODUÇÃO	1
CAPITULO I. — Equações diferenciais do movimento de rotação dum sistema de forma variável	3
Sistema invariável	7
Sistema variável	18
CAPITULO II. — Influência das deslocações das massas sobre os movimentos do polo	23
CAPITULO III. — Variações seculares	33
Variações de 14 meses de período	36
Variações de período anual	48
Variações de curto período	59
Acções perturbadoras	62
CAPITULO IV. — Desvios da vertical	69
CAPITULO V. — O termo em z ou de KIMURA	73
CAPITULO VI. — Valores numéricos dos termos do movimento do polo	93
CAPITULO VII. — O método de observação	97

