

TABELA 59

♂		♀	
N.º de esternos		N.º de esternos	
1 — <i>Diferença na alt. inc. cost. man.</i>		1 — <i>Diferença na alt. inc. cost. man.</i>	
Simétricos	16 = 11,43 ± 2,71 %	Simétricos	12 = 9,09 ± 2,50 %
Dir. acima		Dir. acima	
pouco	8	pouco	5
médio	16	médio	14
muito	14	muito	13
	38 = 27,15 ± 3,75 %		32 = 24,24 ± 3,73 %
Esq. acima		Esq. acima	
pouco	14	pouco	18
médio	42	médio	43
muito	30	muito	27
	86 = 61,43 ± 4,11 %		88 = 66,67 ± 4,13 %
2 — <i>Diferenças das 2 metades do est.</i>		2 — <i>Diferenças das 2 metades do est.</i>	
Simétricos	31 = 22,14 ± 3,51 %	Simétricos	33 = 25,00 ± 3,77 %
Dir. maior		Dir. maior	
pouco	21	pouco	21
médio	16	médio	9
muito	27	muito	27
	64 = 45,71 ± 4,21 %		57 = 43,18 ± 4,31 %
Esq. maior		Esq. maior	
pouco	24	pouco	20
médio	12	médio	14
muito	14	muito	12
	50 = 35,71 ± 4,05 %		46 = 34,85 ± 4,15 %
3 — <i>Colocação das inc. cost. do corpo</i>		3 — <i>Colocação das inc. cost. do corpo</i>	
Simétricos	23 = 16,43 ± 3,13 %	Simétricos	24 = 18,18 ± 3,36 %
Dir. acima		Dir. acima	
pouco	6	pouco	11
médio	40	médio	47
muito	17	muito	20
	63 = 45,00 ± 4,20 %		78 = 59,09 ± 4,28 %
Esq. acima		Esq. acima	
pouco	10	pouco	7
médio	48	médio	33
muito	10	médio	7
	68 = 48,57 ± 4,23 %		47 = 35,61 ± 4,17 %
4 — <i>Desenvolvimento dos proc. costais</i>		4 — <i>Desenvolvimento dos proc. costais</i>	
Simétricos	136 = 97,15 ± 1,41 %	Simétricos	131 = 99,24 ± 0,75 %
Dir. maiores		Dir. maiores	
pouco	—	pouco	—
médio	2	médio	—
muito	—	muito	—
	2 = 1,43 ± 1,00 %		0
Esq. maiores		Esq. maiores	
pouco	1	pouco	—
médio	2	médio	—
muito	—	muito	1
	3 = 2,14 ± 1,22 %		1 = 0,76 ± 0,75 %

Contando simplesmente os esternos simétricos e assimétricos obtém-se :

1 — altura das incisuras cost. do manúbrio			
simétricos	$11,43 \pm 2,71^{0/0}$	no sexo	masculino
	$9,09 \pm 2,50^{0/0}$	» »	feminino
assimétricos	$88,57 \pm 2,71^{0/0}$	» »	masculino
	$90,91 \pm 2,50^{0/0}$	» »	feminino
2 — diferença entre as duas metades do esterno			
simétricos	$22,14 \pm 3,51^{0/0}$	no sexo	masculino
	$25,00 \pm 3,77^{0/0}$	» »	feminino
assimétricos	$77,86 \pm 3,51^{0/0}$	» »	masculino
	$75,00 \pm 3,77^{0/0}$	» »	feminino
3 — altura das incisuras costais no corpo			
simétricos	$16,43 \pm 3,13^{0/0}$	no sexo	masculino
	$18,18 \pm 3,36^{0/0}$	» »	feminino
assimétricos	$83,57 \pm 3,13^{0/0}$	» »	masculino
	$81,82 \pm 3,36^{0/0}$	» »	feminino
4 — desenvolvimento dos processos costais			
simétricos	$97,15 \pm 1,41^{0/0}$	no sexo	masculino
	$99,24 \pm 0,75^{0/0}$	» »	feminino
assimétricos	$2,85 \pm 1,41^{0/0}$	» »	masculino
	$0,76 \pm 0,75^{0/0}$	» »	feminino

Deve notar-se que a soma das assimetrias à esquerda mais à direita pode ser maior que o número de esternos assimétricos, pela razão apontada acima: mudança do sentido da assimetria de um ponto para outro do esterno. Assim resulta por exemplo que para o sexo masculino a soma das assimetrias dos dois lados quanto à altura das incisuras costais (critério 3) é $93,57^{0/0}$ ou sejam, 131 casos, o que perfaz com os 23 casos simétricos, ao todo 154; portanto, 14 esternos têm assimetrias diferentes conforme a região de que se trata.

Verifica-se em primeiro lugar que não existem diferenças sexuais quando se consideram os resultados gerais da assimetria

segundo qualquer dos critérios. De facto, as diferenças sexuais são inferiores ou apenas levemente maiores que os respectivos erros médios e portanto não atingem significância. Se se calcularem as diferenças sexuais segundo os dois lados direito e esquerdo nos diferentes critérios (a partir directamente da tabela 59 e não do apuramento geral), então vê-se que apenas no caso do 3.º critério (altura a que ficam as incisuras costais no corpo) há diferenças significativas entre os dois sexos. No sexo masculino os processos e incisuras costais do corpo estão colocados à direita mais acima que à esquerda em $45,00 \pm 4,20\%$ dos casos, ao passo que no sexo feminino a respectiva percentagem é de $59,09 \pm 4,28\%$ (há uma diferença de $14,09 \pm 6,00$, igual a cêrca de 2,35 vezes o seu erro-médio e que mesmo com correcção para continuidade é significativa — 2,265 vezes o seu erro-médio). O mesmo se dá para a diferença da assimetria à esquerda. Mas, como se disse acima, estas diferenças anulam-se quando se somam as assimetrias à direita com as assimetrias à esquerda e se considera simplesmente o número total de esternos assimétricos. Pode-se dizer, em conclusão e duma maneira geral, que as assimetrias do esterno são igualmente freqüentes nos dois sexos.

O número de esternos assimétricos é sensivelmente diferente conforme o critério empregado. A maior assimetria foi encontrada para o manúbrio, com o critério 1, e a menor para o desenvolvimento dos processos costais. Há também em regra diferença nas percentagens de assimetrias à direita e à esquerda: no manúbrio mais de 61% de esternos têm a incisura costal situada mais acima à esquerda, ao passo que só 27% têm a incisura direita mais acima que a esquerda. Este resultado é semelhante nos dois sexos. Segundo a diferença no desenvolvimento das duas metades do esterno cêrca de 2/3 dos esternos são assimétricos e em ambos os sexos parece haver tendência para o lado direito ser mais desenvolvido que o esquerdo, o que poderia muito bem estar relacionado com o maior desenvolvimento dos músculos do lado direito e em geral com a dextra. Mas deve notar-se, entretanto, que a diferença tanto num como noutro sexo ainda não é estatisticamente significativa.

A colocação das incisuras costais do corpo apresenta no sexo masculino aproximadamente o mesmo número de casos em que as incisuras estão mais altas à direita e em que estão mais altas à esquerda. No sexo feminino já existe uma diferença estatisticamente

significativa entre as frequências nos dois casos e pode-se afirmar que nos esternos femininos que constituem o objecto do presente trabalho mais frequentemente os processos costais no corpo estão colocados mais acima do lado direito do que do lado esquerdo. Até que ponto isto é devido a hábitos de trabalho ou ocupações diferentes nos dois sexos, ou ainda a outras causas — não se pode saber facilmente. O desenvolvimento dos processos costais é relativamente simétrico, havendo poucos esternos em que existe uma marcada assimetria.

No que respeita ao grau de assimetria, em regra a classe mais frequente é a da assimetria «medianamente desenvolvida» e em seguida a de assimetria «muito desenvolvida». Provavelmente, um certo número de esternos pouco assimétricos foram classificados como simétricos.

Acêrca das relações entre a assimetria e outros caracteres do esterno, verificou-se que não havia ligação com a idade. Agrupando os dados de determinadas maneiras parecia às vezes que poderia haver ligação, mas depois reconhecia-se que não havia certeza estatística. Por exemplo para o caso da relação entre a assimetria julgada segundo o critério 1 e a idade, encontrou-se $\chi^2 = 5,189$ com correcção, no sexo masculino, valor que para 2 graus de liberdade está abaixo do nível de significância. No sexo feminino o resultado é ainda mais nítido, pois que para 2 graus de liberdade veio $\chi^2 = 3,841$.

As causas das assimetrias do corpo humano são essencialmente de duas categorias: hereditárias e não-hereditárias. São hereditárias (25) não só as assimetrias normais dos órgãos internos (coração, estômago, etc.) mas ainda várias assimetrias exteriores parcialmente hereditárias, como remoinhos do cabelo, particularidades anatómicas das mãos, etc. Mas a maior parte das assimetrias, principalmente as que se podem classificar de assimetrias quantitativas ou métricas, são devidas a influências ambientes (entendendo-se por ambiente não só o meio físico exterior como o meio interior e do desenvolvimento embrionário). Segundo observações em gémeos monozigóticos, o meio intrauterino tem uma acção importante sobre o desenvolvimento das assimetrias (1).

(1) No trabalho L. P. Canedo de Moraes e J. A. Serra — Sobre a determinação do índice orbitário e a assimetria da órbita *Rev. Fac. Ciências Univ. Coimbra*, vol. 9, n.º 1, encontra-se tratado este mesmo assunto com mais desenvolvimento.

As assimetrias do esterno devem estar relacionadas com as que de uma maneira geral diferenciam as duas metades do corpo, principalmente com as dos braços e tronco. A assimetria do esterno é mais notória no manúbrio e na parte inferior do corpo do esterno. No manúbrio a grande maioria dos esternos têm a incisura costal à esquerda mais alta que à direita. Isto deve estar em relação com a maior freqüência do uso do braço direito predominantemente — a chamada dextra. A metade direita do corpo do esterno é também um pouco mais freqüentemente mais desenvolvida que a esquerda (em todo o caso, ainda não há nas séries portuguesas demonstração estatística desta diferença, provavelmente em virtude de as séries não serem suficientemente numerosas). Esta assimetria do corpo do esterno deve igualmente estar em relação com a dextra dominante. Já na vida embrionária e durante a ossificação do esterno há a maior das assimetrias na distribuição e desenvolvimento dos centros de ossificação do esterno (v. fig. 8 de Zimmer (26)). As assimetrias neste período de desenvolvimento dos esternos são muito provavelmente devidas ao «meio interno» que condiciona o aparecimento de centros de ossificação e o desenvolvimento destes núcleos de ossificação até darem o esterno adulto. Durante a união das esternobras e ossificação final do esterno, juntam-se a estes factores do meio interno, outras causas puramente devidas ao meio exterior e ainda o desigual desenvolvimento dos músculos e desigualdade de movimentos. Pode a profissão ter influência sobre a assimetria do esterno, mas as séries do presente trabalho são relativamente pequenas para estabelecer tais influências.

A colocação das incisuras costais do corpo do esterno mais freqüentemente acima do lado direito no sexo feminino, pode também provir de qualquer destes factores.

CONCLUSÕES

As medidas do esterno são bastante diferentes nos dois sexos, motivo por que se devem sempre comparar as várias populações considerando as diferenças sexuais. As maiores diferenças encontram-se, nas séries portuguesas, para o comprimento curvilíneo e para o comprimento rectilíneo total. No comprimento rectilíneo a diferença das médias é de cerca de 22 milímetros. Em seguida vem a diferença entre o comprimento do corpo, que é de 17,5 mil-

metros. O manúbrio é também maior no sexo masculino, mas a diferença das médias é apenas de pouco mais de 4,5 milímetros. Isto faz com que o índice que relaciona o comprimento das duas peças, manúbrio e corpo, entre si, mostre uma nítida diferença sexual (de $5,11 \pm 0,927$). Os outros índices do comprimento calculados demonstram que é principalmente ao manúbrio que se deve este resultado. Contudo, a diferença entre os índices manúbrio/corpo nos dois sexos não é tão forte como pretendem certos autores; a relação entre as médias masculina e feminina é de 1:1,10 e não de 1:1,17 (cf. Martin) e pelos histogramas da fig. 10, verifica-se que apenas em pequena parte este índice permite distinguir o sexo dos esternos.

A diferença entre o comprimento total do esterno nos dois sexos é em grande parte devida à desigualdade de estatura média. Em todo o caso, é provável que o esterno masculino seja um pouco mais longo que o feminino em relação à estatura, ou pelo menos em relação à altura do tronco, como referem alguns autores. Os números dados em diversas populações divergem bastante a este respeito. Está em preparação um estudo, nas colecções do Instituto de Antropologia de Coimbra, que contribuirá para o esclarecimento desta questão.

Não só nos comprimentos como também nas larguras, as médias são sempre maiores no sexo masculino. A diferença atinge um pouco mais de 6,5 milímetros e diz respeito à largura máxima do manúbrio. A diferença entre a mesma largura para o corpo é de cerca de 5 milímetros. Tanto no manúbrio como no corpo, a largura foi determinada intercostalmente, isto é, aproximadamente a meio das esternobras, de forma a evitar a influência de processos costais ou de inserções das costelas. As larguras máxima e mínima intercostais (para o manúbrio a largura máxima é sub-costal — cf. técnica das mensurações) foram determinadas onde se encontravam, isto é, sem preestabelecer uma esternebra fixa. Além disto, procedeu-se também à medição da largura de todos os espaços intercostais do corpo e foram calculadas as suas médias.

Da consideração dos índices da largura em relação com o sexo, resulta, em primeiro lugar, que o índice esternal, ou da largura-comprimento total, não mostra diferença sexual média. Nalgumas outras populações parece existir diferença sexual neste carácter, como por exemplo nas séries de Strauch, mas é possível que se possa atribuir tal facto e desigual composição das séries. As duas

séries portuguesas, masculina e feminina, estudadas no presente trabalho, podem-se considerar como equivalentes quanto à composição, porquanto englobam representantes de todos os distritos do país (1), embora com alguma predominância da região de Coimbra. A maior parte dos trabalhos sobre o esterno ou se referem a um só ou poucos caracteres (em regra caracteres descritivos, não-métricos) e então as séries são grandes, ou encerram poucos casos. Daí provém uma certa dificuldade de se julgarem as diferenças, dificuldade acrescida ainda pela falta, quasi sempre, dos erros estatísticos correspondentes.

O índice do manúbrio da largura/comprimento apresenta uma diferença sexual relativamente grande, significativa, ao passo que o índice correspondente para o corpo não mostra diferença segura. Igualmente, o índice de conicidade do corpo não difere de sexo para sexo. Os índices dos comprimentos são, portanto, mais próprios para uma distinção sexual.

No que diz respeito à localização das larguras, as conclusões são as seguintes: A largura mínima do manúbrio fica em regra na margem superior da articulação para o 2.º par de costelas, mas pode ficar um pouco mais acima (v. figs. 1 e 2). As larguras do corpo, tanto a máxima como a mínima, podem ficar em qualquer dos espaços intercostais. A largura máxima é em regra considerada como localizada cerca da articulação para o 4.º par de costelas. Determinada como foi dito, no meio das esternibras, apenas em pouco mais de 50% dos casos no sexo masculino e 67% no feminino é que a largura máxima do corpo ficava no espaço iv-v. Há uma diferença sexual significativa quanto a este caracter e pode-se afirmar que o esterno feminino tende a ter a largura máxima do corpo situada mais acima do que o esterno masculino. Esta conclusão é corroborada também pelo exame das frequências da colocação da largura máxima nos outros espaços intercostais. No sexo masculino ainda num número relativamente grande de casos a largura máxima está no espaço v-vi (cerca de 31%) ao passo que no feminino apenas quasi 8% apresentam esta localiza-

(1) As razões desta afirmação são as mesmas que para o caso das pelves (v. J. A. Serra — A pelve nos Portugueses — Morfologia da pelve no Homem, Rev. Fac. Ciências, Univ. Coimbra e Contr. p. o Estudo da Antrop. Portuguesa, vol. 3.º, fasc. 1.º (1938)).

ção. Há esternos em que a largura máxima se encontra simultaneamente em dois ou três espaços intercostais. Num certo número de casos (aproximadamente 2-3%) o esterno vai sempre diminuindo de largura a partir do espaço II-III, apresentando então uma forma bastante característica.

A largura mínima do corpo tem uma situação menos variável que a largura máxima; aproximadamente 73-79% dos esternos têm a largura mínima nos espaços II-III. Não há diferença sexual nítida. Semelhantemente ao que acontecia com a largura máxima, também a largura mínima pode coexistir simultaneamente em dois e três espaços intercostais.

Entre a largura máxima e o comprimento do corpo do esterno não há correlação apreciável. Alguns autores afirmam que existe uma espécie de compensação, de maneira que a uma diminuição do comprimento corresponde um aumento da largura, não resultando grande diminuição da superfície total do corpo. A falta de correlação não é a favor deste ponto de vista, que possivelmente deve ter sido derivado antes de casos individuais e não se poderá aplicar duma maneira geral.

A espessura do manúbrio e do corpo é maior no sexo masculino, correspondendo a uma maior robustez. As diferenças das médias são pequenas, mas estatisticamente significativas. Também a profundidade da incisura jugular é maior no sexo masculino, com pequena diferença de 0,6 milímetros. Na determinação da profundidade da incisura jugular é necessário considerar separadamente os casos em que a incisura é côncava, direita ou intermediária, e convexa. Os esternos masculinos apresentam uma maior percentagem de casos de bordo superior côncavo (aproximadamente 85%), do que os femininos (aprox. 78%), mas a diferença não é estatisticamente significativa. Cobb, em séries de esternos de Americanos, também encontrou pequenas diferenças sexuais nas percentagens das diferentes formas de incisura; apenas nas incisuras convexas, o sexo masculino diferia seguramente do sexo feminino, mas a diferença é contrária à que tenderiam a mostrar as séries do presente trabalho.

Verificou-se que a curvatura posterior do esterno é em média mais profunda no sexo feminino do que no masculino. A diferença é na verdade pequena (pouco mais de 1 milímetro) mas é estatisticamente significativa. Examinando os casos em que há inflexão, e que existiam unicamente nos esternos masculinos, já a diferença

se atenua e deixa de ser significativa. Isto prova que a diferença sexual reside principalmente na falta de esternos com inflexão da curvatura posterior no sexo feminino. A inflexão é causada principalmente pela espessura ao nível da articulação superior do esterno, que por sua vez estará provavelmente em relação com a maior robustez no sexo masculino.

O ângulo esternal não apresenta diferença sexual, contrariamente ao que afirmam certos autores. Deve notar-se que em muitos casos os esternos das séries portuguesas estavam separados em duas peças que foram unidas da maneira descrita na parte técnica; em todo o caso, esta circunstância não deve ter influído no resultado. O ângulo medido no vivo pode, porém, ser diferente, devido à espessura dos tecidos sobrejacentes. Os valores encontrados são cêrca de 14° nos dois sexos ($14^\circ 11'$ no sexo masculino e $14^\circ 27'$ no feminino), o que se aproxima de médias encontradas no vivo.

Verifica-se que as diferenças raciais, duma maneira geral, existem nas medidas, mas não nos índices. O comprimento do esterno é maior nas populações de estatura elevada. Parece, porém, que não diminui proporcionalmente à estatura.

A largura máxima do corpo do esterno difere pouco nas várias populações, visto tratar-se de uma medida pequena. Não se podem fazer comparações rigorosas entre séries diferentes, em virtude de as técnicas usadas não se corresponderem. Com as séries portuguesas apenas se podem comparar as suíças, e não há neste caso diferenças sensíveis. A largura parece ser relativamente maior nas populações de estatura pequena. O método de determinação desta medida com os processos costais, leva a incertezas que convém evitar; efectuando a mensuração a meio dos espaços intercostais, já não é possível haver desigualdades na técnica usada e é de desejar que sejam estudadas outras séries para diferentes populações de forma a poderem-se resolver esta e outras questões. Interessante seria também comparar os dados dos Portugueses com outras populações, no respeitante à localização das larguras máxima e mínima do corpo do esterno, mas não conheço outros trabalhos em que estes caracteres estejam estudados.

O índice do comprimento mais calculado é o do comprimento do manúbrio/comprimento do corpo. Parece não existirem diferenças raciais, pelo menos para as populações estudadas até agora. O índice oscila à volta de 50 no sexo masculino e de 55 no feminino. Os

valores para os Portugueses são muito próximos dos dos Alemães, de Stieve & Hintsche. As populações extra-europeias também têm valores concordantes, mas igualmente neste caso é de lamentar que a falta de material impeça um julgamento mais seguro.

O índice esternal, ou da largura máxima do corpo/comprimento rectilíneo total, é pouco diferente de população para população; a variação da técnica usada na determinação da largura faz-se sentir também no índice, de maneira que não se pode chegar a conclusões seguras. É possível, no entanto, que o índice tenda a ser menor nas populações de maior estatura, pelas razões já apontadas; os resultados até agora expostos não permitem um julgamento mais concreto. Evidentemente, os valores dos portugueses não se podem comparar com os de séries em que a largura máxima foi medida pela técnica exposta em Martin (16).

No índice de conicidade do corpo, tanto quanto se pode ajuizar dos dados para os Suiços e para os Portugueses, não há diferença racial. O índice é de cerca de 78 nos dois sexos e é possível que constitua uma base para o estabelecimento de tipos de esterno com precisão (por exemplo no sentido dos «tipos» de Lubosch). É interessante notar que os histogramas da fig. 14 tendem a apresentar dois vértices. Será necessária, porém, uma análise mais detalhada deste problema, que poderá vir a ser feita num ulterior trabalho.

Faltam dados de séries relativamente grandes para se poderem comparar outras medidas do esterno entre várias populações. Para o ângulo esternal parece não haver diferenças raciais.

Como ficou dito atrás, foram observados um certo número de caracteres morfológicos, alguns dos quais concorrem para dar um aspecto particular ao esterno. O estado do material esquelético não era ideal para se efectuar a observação dos ossos supraesternais, que tiveram de ser apreciados simplesmente pela existência de facetas, muitas vezes possíveis de confundir com outras particularidades do bôrdo superior do esterno. Os tubérculos supraesternais, embora melhor conservados, também muitas vezes se podem confundir com exostoses irregulares, de forma que igualmente é necessária precaução no seu estudo. Aproximadamente 4 — 5% dos esternos tinham ossos ou tubérculos supraesternais; num certo número de outros casos, a existência de tais ossículos era provável, mas duvidosa (8 — 11%). As percentagens de Cobb (4) para emigrados da Europa ou seus filhos eram aproximadas das mencionadas acima

(5 — 5,5 %). Nos Negros Americanos a incidência é menor (0,5 — 2,5 %). Outros autores mencionam números bastantes diferentes, o que deve depender do método de estudo (conforme se trata de dissecções, ou de observações de esqueletos, ou de roentgenografias) e do estado do material. Há diferença racial significativa entre os Brancos e os Negros no que respeita a êste carácter. Parece que não há diferença sexual na incidência de ossos e tubérculos supraesternais.

Em ligação com a forma do bôrdô superior do manúbrio, poder-se-iam mencionar a profundidade e a largura da incisura jugular, distribuindo-se tanto uma como outra em três categorias, o que daria lugar a nove combinações diferentes. No trabalho de Cobb, a que já se fez referência, são classificadas as incisuras de acôrdo com êste critério qualitativo, mas parece melhor fazer-se a determinação quantitativa, conforme ficou indicado atrás. Tanto qualitativa como quantitativamente se nota diferença nas percentagens de distribuição dos dois sexos. A diferença reside nas duas classes extremas, sendo os esternos médios aproximadamente na mesma percentagem (cêrca de 59 %). Outro carácter interessante é a existência e grau de desenvolvimento dos processos costais. No que respeita ao manúbrio, na maior parte dos esternos há processos costais (tipos 3, 4 e 5). Tanto num sexo como noutro, é mais freqüente o manúbrio mostrar processos costais do que o inverso, mas no sexo feminino as duas classes «sem processos costais» (tipos 1 + 2) são mais freqüentes: os tipos 1 + 2 existem no sexo masculino em $55,00 \pm 4,21\%$ dos casos ao passo que no feminino há $66,67 \pm 4,10\%$. A diferença de distribuição nos dois sexos é levemente superior ao ponto de probabilidade 5% e pode considerar-se significativa, embora com certa reserva.

Sôbre a influência que possam ter os processos costais do manúbrio na determinação da respectiva largura máxima, verificou-se pelo estatístico χ^2 que não existe ligação entre os dois caracteres, em ambos os sexos. Pode-se concluir, portanto, que na técnica usada para a determinação da largura máxima do manúbrio não influi sensivelmente o grau de desenvolvimento dos processos costais: também se pode afirmar que o desenvolvimento dos processos costais não é maior nos esternos de qualquer dos tipos, estreitos, médios, ou largos.

Para os processos costais do corpo passa-se o inverso: há ligação entre o grau de desenvolvimento dos processos costais e a largura

máxima. Os resultados são concordes nos dois sexos e mostram que a esternos com processos costais mais desenvolvidos corresponde uma maior largura média. A maneira de determinar a largura máxima não pode influir neste resultado, que deve antes ser devido a uma natural ligação entre os dois caracteres. Provavelmente, ao mesmo tempo que se dá a formação de processos costais no corpo, é alargada toda a esternebra conjuntamente, por uma intensificação dos processos de ossificação.

A ligação existente entre o desenvolvimento dos processos costais e a largura do corpo do esterno desaparece, se, em vez da largura absoluta, se considerar a largura em relação ao comprimento do corpo. O cálculo do estatístico χ^2 mostra que tal ligação ou não existe, ou é muito duvidosa. Isto demonstra que a ligação entre a largura do corpo do esterno e os processos costais não é muito estreita.

Aproximadamente em 54 0/0 dos casos no sexo masculino e 49 0/0 no feminino, há processos costais no corpo (tipos 3 + 4 + 5). No sexo masculino há uma maior incidência de processos costais, mas a diferença não é significativa. Pode-se observar nas tabelas, que os esternos femininos não apresentam nenhum caso de desenvolvimento de processos costais com grau 5. Os resultados para os Suiços (8) são aproximados dos correspondentes aos Portugueses: também cerca de metade dos esternos têm processos costais.

As margens laterais do manúbrio mostram por vezes uma chanfradura mais ou menos profunda entre as articulações para o 1.º e 2.º par de costelas. Aproximadamente $\frac{1}{4}$ dos esternos no sexo masculino e $\frac{1}{3}$ no feminino, têm incisura medianamente e muito profunda. Há tendência para no sexo feminino a margem lateral do manúbrio apresentar uma incisura mais marcada do que no sexo masculino, mas a diferença ainda não é estatisticamente significativa.

Outra questão interessante é a da soldadura das diferentes peças de que se compõe o esterno. O manúbrio une-se ao corpo, a maior parte das vezes, por intermédio de um disco cartilágneo, que pode ou não apresentar uma fenda no seu interior. Contudo, há um número de casos relativamente grande em que existe a êste nível não uma sincondrose mas uma sinostose. Nos Portugueses há um número elevado de esternos com sinostose da articulação superior; no esterno dos adultos há sinostose em cerca de 20 0/0 dos casos ($20,00 \pm 3,38$ 0/0 no sexo masculino e $19,70 \pm 3,46$ 0/0 no feminino). Vê-se que não há diferença sexual.

Noutras populações têm sido encontrados números diferentes destes. Nos Brancos da América (23) a percentagem do sexo feminino é de 26,7, ao passo que no masculino é menos de metade — 11,5⁰/₀, com uma diferença significativa. Nos Negros, também da América (23), há cêrca de 10⁰/₀ de sinostoses, tanto num sexo como no outro. Para outras séries, os resultados são diferentes e em regra há menor incidência de sinostoses do que nos Portugueses. Parece tratar-se de uma diferença racial, ou populacional, sem explicação muito aparente.

A sinostose da articulação manúbrio-corpo não apresenta ligação com a idade nos esternos adultos, mas está correlacionada com a largura do corpo do esterno (avaliada pela ligação com o índice do corpo do esterno). Combinando as duas séries portuguesas calcula-se um valor de χ^2 altamente significativo. É mais freqüente a sinostose nos esternos com maior largura relativa do corpo. Na verdade, esta circunstância pouco esclarece a causa da sinostose da articulação superior. Entre a sinostose da articulação superior e da inferior (corpo-apêndice) não existe ligação, de forma que se pode concluir que a origem deve ser diferente. Alguns autores afirmam haver correlação entre a existência de sinostose superior e a ocorrência de certos estados patológicos, como a tuberculose e o raquitismo (por exemplo Gelderen e Hyrtl, respectivamente), enquanto que outros, como Pässler (17) não encontraram qualquer relação. É prudente, portanto, não procurar interpretar os resultados para quaisquer populações com base na freqüência de certas doenças.

A articulação inferior também se apresenta muitas vezes total ou parcialmente sinostosada. Há sinostose, em maior ou menor grau, em cêrca de 46⁰/₀ dos esternos masculinos e 36⁰/₀ dos femininos. A diferença ainda não é estatisticamente significativa. Nos Suiços a percentagem de sinostoses da articulação inferior é aproximada da dos Portugueses, enquanto que noutras populações os números são diferentes. Isto é em parte dependente do método de estudo, conforme se observam os esternos depois de macerados, ou directamente no cadáver. Esta mesma causa é possível que seja também responsável pela diversidade dos resultados dos vários autores para a articulação superior.

Não há ligação entre a idade (a partir da idade adulta) e a ossificação da articulação inferior, nem entre este último caracter e o índice do corpo do esterno. Pelo contrário, para o sexo masculino existe certa correlação entre o comprimento do esterno e a

sinostose inferior, sendo esta mais freqüente nos esternos mais longos; no sexo feminino não existe esta ligação.

Nos pontos de união dos vários segmentos do esterno jôvem há primeiramente restos cartilagíneos, que depois se ossificam. Nalguns casos fica um ou mais segmentos unidos por sincondrose aos restantes, particularmente o 1.º segmento do corpo. Os casos de esternebras «livres» eram, no material das séries portuguesas, relativamente raros e em regra tratava-se de esternos de menos de 30 anos. Apenas um esterno com o 1.º segmento do corpo livre era de um homem de 49 anos (verificada a idade não só pelo registo mas também pelos outros caracteres do esqueleto, particularmente do crânio).

Nalguns casos dá-se a sinostose ao nível do 2.º par de costelas, onde habitualmente fica a articulação superior, e fica uma cartilagem entre o 1.º e o 2.º segmento do corpo, ao nível do 3.º par de costelas. Nestes esternos, o ângulo esternal parece ter o seu vértice ao nível do 3.º par de costelas e funcionalmente o manúbrio abrange os dois segmentos superiores. Apenas 2 esternos masculinos apresentavam esta interessante particularidade e o seu segmento superior (correspondente normalmente ao manúbrio) era relativamente curto, podendo talvez o englobamento da esternebra seguinte servir para compensação. Certamente a ossificação está em parte dependente do sistema de forças que se exercem sobre o esterno, sistema que resultaria diferente no caso de a peça manubrial ser pequena.

Ainda em relação com a soldadura das diferentes peças do esterno até atingir o estado adulto, merecem atenção as linhas esternais, que se encontram particularmente na parte superior do corpo. Cerca de 40% dos esternos não têm linhas esternais aparentes (a diferença sexual é pequena e insignificativa); os restantes 60% distribuem-se diferentemente nos dois sexos, apresentando os homens linhas esternais mais fortemente desenvolvidas (grau 3). A diferença é significativa e certamente provém da maior robustez e aparecimento mais evidente de cristas ósseas, apófises, etc., no sexo masculino.

É provável que haja uma certa relação entre a existência de linhas esternais aparentes e a largura do esterno, como pretendia Lubosch. Nem sempre os esternos estreitos têm linhas esternais, mas, em todo o caso, nota-se para as séries do presente trabalho uma ligação entre os dois caracteres, tanto num como noutra sexo, e mais fortemente no masculino. A esternos relativamente mais

estreitos, correspondem linhas esternais mais aparentes. É possível explicar esta relação a partir da consideração do sistema de forças que actuam na face anterior e nos bordos do esterno. Habitualmente há linhas que irradiam dos lugares de inserção das costelas; nos esternos estreitos é mais provável que essas linhas se encontrem com as do lado oposto, dando origem a uma «linha esternal». Isto mesmo está de acôrdo com a localização das linhas esternais principalmente na parte superior do corpo do esterno, tanto mais que são estes os segmentos que se soldam mais tardiamente. Ao compararem-se os dados de autores diferentes, é preciso atender a que a apreciação dêste caracter é bastante subjectiva.

Devido a anomalias dos processos normais de ossificação, ou a outras causas (por exemplo existência de feixes importantes de vasos e nervos), podem aparecer no esterno adulto perfurações maiores ou menores, tanto no corpo como no apêndice. As do corpo estão em regra aproximadamente ao nível da largura máxima. Classificando-as em três categorias, apenas um esterno feminino apresentava uma perfuração grande no corpo (estampa 7, fig. 5).

A ocorrência de perfurações é praticamente a mesma nos dois sexos, aproximadamente 5 0/0 para o corpo. Como não foram observados todos os apêndices, não se podem fazer comparações neste caso. Para outras populações os resultados são diferentes. Assim, nos Europeus em geral haverá 6,9 0/0 de esternos com perfurações do corpo, nos Amerindianos 13,3 0/0 e nas séries de Pässler chegariam a 20 0/0. É provável, portanto, que haja diferenças raciais.

A existência de perfurações no corpo do esterno está para o sexo feminino em relação com a respectiva espessura, sendo menos espessos em média os esternos com perfurações. No sexo masculino não aparece qualquer relação entre os dois caracteres.

O material das séries de esternos portugueses foi sistematicamente observado quanto à assimetria, usando para isso um critério qualitativo. A assimetria pode ser maior ou menor em todo o esterno ou só numa das suas peças, e foi descrita considerando três graus diferentes. Como era de esperar, a grande maioria dos esternos são assimétricos em grau médio. Conforme o critério usado, assim se conseguem percentagens diferentes. Duma maneira geral, a assimetria é aproximadamente a mesma nos dois sexos e o manúbrio é mais freqüentemente assimétrico que o corpo (com assimetria notória). Nota-se tendência em ambos os sexos para a metade

direita do corpo do esterno ser mais desenvolvida que a esquerda e no manúbrio a maior parte das vezes (cêrca de 61 0/0) a incisura costal esquerda está mais acima que a direita. É provável que estes resultados estejam em relação com a predominância do uso do braço direito.

A assimetria não tem relação com a idade (nos adultos) e as suas causas são em regra não-hereditárias. Já no embrião e depois durante a ossificação, existe a maior assimetria na disposição e desenvolvimento dos centros ósseos e a estas causas desenvolvimentais vêm depois juntar-se outras do meio esterno, até atingir a forma adulta.

No estudo do esterno, depara-se com dificuldades quanto às determinações raciais: as séries estudadas para populações não-europeias são pequenas e faltam os dados estatísticos para que se possam fazer juízos seguros sôbre a validade das comparações. Houve da parte de alguns anatomistas o cuidado de observar muitos esternos, mas em regra apenas estudaram caracteres não-métricos. Assim, uma das questões mais interessantes da osteologia, que é o estudo racial, ou a confrontação dos dados de diferentes populações — só muito tentativamente se pode abordar. Nos caracteres morfológicos parece que há diferenças raciais, mas também são necessárias muito mais observações. É de desejar que outros estudos se efectuem em diferentes populações, tanto mais que o esterno tem uma morfologia complicada a que se prendem muitas questões interessantes.

RESUMO

Estudam-se neste trabalho 140 esternos masculinos e 132 femininos, ao todo 272 esternos, de Portugueses, adultos, naturais da Metrópole. Foram excluídos todos os individuos provenientes das Colónias. Para cada esterno, conhecia-se a idade, o nome da pessoa e a provável causa da morte, além de outros dados sôbre o local do nascimento e a filiação.

Os ossos estavam macerados e secos. Quando as duas peças, manúbrio e corpo, estavam separadas, foram juntas com cera, o mais possivelmente de acôrdo com a posição natural da cartilagem existente no vivo.

Os esqueletos «identificados» provêm de todos os distritos de

Portugal e pode-se dizer que as médias apresentadas no presente trabalho são representativas do esterno dos Portugueses em geral.

Foram sempre tratadas as duas séries, masculina e feminina, em separado, dadas as diferenças sexuais existentes.

As medidas foram efectuadas com os instrumentos usuais da Antropologia, servindo para o ângulo esternal um goniómetro especial, de construção muito simples. Para evitar imprecisões, as medidas tomadas foram definidas e comparadas com as de outros autores. Nas várias medidas da largura, tanto do manúbrio como do corpo do esterno, procurou-se evitar a influência de processos costais ou elevações para a inserção das costelas, conforme está indicado nas figs. 1 e 2. Determinaram-se 17 diâmetros em cada esterno, sendo apenas utilizadas as peças que estavam em bom estado e que permitiam tomar todas as medidas.

Além dos caracteres métricos foram também observados caracteres morfológicos. Para êstes últimos estabeleceram-se padrões (figs. 3 a 9) que permitem um tratamento mais ou menos quantitativo dos dados.

Para cada medida, foi determinada a média, desvio-padrão e respectivos erros-médios (tabelas 1 a 14 e tabela 27). Igualmente se determinaram estes estatísticos para os 7 índices calculados (tabelas 15 a 21).

As relações entre os caracteres morfológicos e outros, como a idade ou certas medidas, ou dos caracteres morfológicos entre si, foram julgadas por intermédio do estatístico χ^2 , da maneira habitual ((6), (10)).

Da consideração dos resultados do presente estudo e da sua comparação com os respeitantes a outras populações tiram-se várias conclusões, podendo-se mencionar as seguintes:

1 — As médias das medidas respeitantes ao sexo masculino são sempre maiores, significativamente, do que as do sexo feminino. Exceptua-se o ângulo esternal, que é igual nos dois sexos.

2 — As maiores diferenças sexuais encontram-se no comprimento, particularmente no comprimento total. Uma grande parte desta diferença deriva de a estatura ser maior no sexo masculino.

3 — Os índices não mostram em regra diferenças sexuais tão nítidas. O índice esternal da largura máxima do corpo/comprimento total não tem diferença sexual, assim como o índice de conicidade do corpo (largura mínima/largura máxima). Os que têm maiores diferenças sexuais entre as médias são os índices do manúbrio

(largura máxima do manúbrio/comprimento do manúbrio) e o índice manúbrio/corpo (comprimento do manúbrio/comprimento do corpo). A relação entre as médias masculina e feminina para este último índice é 1:1,10.

4 — A largura máxima do corpo do esterno tende no sexo feminino a estar colocada mais acima do que no sexo masculino. No sexo masculino é muito mais freqüente a largura máxima estar localizada no v-vi espaço intercostal (4.º segmento do corpo) do que no sexo feminino, e as diferenças são estatisticamente significativas. A largura máxima fica situada no espaço intercostal iv-v em $50,71 \pm 4,23\%$ dos casos no sexo masculino e $67,42 \pm 4,08\%$ dos casos no feminino.

5 — A largura mínima do corpo fica localizada em regra no espaço II-III (1.º segmento do corpo) e não há diferença sexual significativa ($79,29 \pm 3,42\%$ no sexo masculino e $73,48 \pm 3,84\%$ no feminino).

6 — O bordo superior do manúbrio, ou incisura jugular, é na maior parte dos esternos côncavo. Não contando os casos em que a profundidade ou elevação são menores que 1 milímetro, há 113 esternos no sexo masculino e 92 no sexo feminino, que têm bôrdo superior côncavo. Expresso em percentagens, isto equivale respectivamente a $80,71 \pm 3,41\%$ e $69,70 \pm 3,90\%$, com uma diferença significativa ($11,01 \pm 5,18$). É de notar, porém, que nos esternos femininos as incisuras côncavas têm menor profundidade, o que faz com que um certo número deles vá ser incluído na classe dos intermediários. As incisuras jugulares convexas são mais freqüentes no sexo feminino, mas a diferença não é significativa.

7 — Foram notados ossos e tubérculos supraesternais em aproximadamente 5% dos esternos, mas o estado do material não era muito apropriado para esta observação.

8 — Os processos costais do manúbrio são mais desenvolvidos no sexo masculino do que no feminino (respectivamente 45% e 33%, com diferença no nível de significação). Não há correlação entre o desenvolvimento dos processos costais do manúbrio e a largura máxima do mesmo.

9 — O desenvolvimento dos processos costais no corpo é aproximadamente o mesmo nos dois sexos; têm processos costais $53,57 \pm 4,22\%$ dos esternos masculinos e $50,76 \pm 4,23\%$ dos femininos, com diferença sexual insignificante. Há correlação entre o desenvolvimento dos processos costais e a largura máxima

do corpo, a-pesar-de a largura máxima ter sido tomada no meio dos segmentos e não nas articulações costais. Os esternos mais largos têm processos costais mais desenvolvidos. A correlação entre o desenvolvimento dos processos costais e o índice do corpo já não é muito evidente ou parece não existir. Há, portanto, influência dos processos costais sobre a largura do corpo do esterno, ou então, a maior largura e a existência de processos costais têm causas comuns.

10 — Foi também apreciada a forma de chanfradura intercostal do manúbrio; é provável que haja relação entre a existência de processos costais desenvolvidos e de incisuras pouco profundas, no manúbrio.

11 — Quanto à ligação entre as três peças que compõem o esterno, verificou-se que a articulação superior estava sinostosada em $20,00 \pm 3,38\%$ dos esternos masculinos e $19,70 \pm 3,46\%$ dos femininos. Não há, pois, diferença sexual. Nos adultos, não há correlação entre a sinostose da articulação superior e a idade. Pelo contrário, há correlação entre o índice do corpo do esterno e a sinostose superior, ocorrendo esta sinostose mais freqüentemente nos esternos mais largos.

12 — A articulação inferior (corpo-apêndice) era total ou parcialmente ossificada em $46,43 \pm 4,21\%$ e $36,36 \pm 4,18\%$ dos esternos masculinos e femininos, respectivamente. A diferença sexual não é significativa. Tanto pelos dados do presente trabalho como pelo de outros, conclui-se que não há correlação entre esta sinostose e o índice do corpo do esterno, assim como entre a sinostose e a idade. Parece haver ligação entre a sinostose inferior e o comprimento do corpo do esterno no sexo masculino, mas não no sexo feminino.

13 — Em esternos de mais de 30 anos, apenas um exemplar (de 49 anos) tinha o 1.º segmento do corpo livre, isto é, unido por sincondroses ao manúbrio e ao 2.º segmento do corpo; os outros casos observados eram de esternos mais novos. Em 2 esternos masculinos a sincondrose manúbrio-corpo encontrava-se ao nível da articulação do 3.º par de costelas e não do 2.º par, como é habitual. Estes esternos têm o segmento superior (manubrial) relativamente curto.

14 — As linhas esternais foram apreciadas na parte superior do corpo do esterno. Os esternos sem linhas esternais aparentes são $42,14 \pm 4,17\%$ no sexo masculino e $39,39 \pm 4,26\%$ no femi-

nino. Não há diferença sexual. Se se considerar o grau de desenvolvimento das linhas esternais, verifica-se que são mais salientes no sexo masculino (diferença significativa). Há correlação entre a existência de linhas esternais e a largura do esterno (índice do corpo), sendo aquelas mais freqüentes e mais desenvolvidas nos esternos estreitos. Procura-se interpretar este facto a partir da consideração das linhas de força existentes ao nível das articulações costais: nos esternos estreitos há mais probabilidade de as linhas existentes a este nível se juntarem com as do lado oposto (linhas esternais). Também há forte ligação entre a existência de linhas esternais e de sinostose da articulação inferior.

15 — Foram observadas perfurações do corpo do esterno em cerca de 5% dos casos. No sexo feminino há ligação entre a menor espessura do corpo e a existência de perfurações. Os apêndices não puderam ser observados sistematicamente em relação a esta particularidade, tendo encontrado 4,5 e 9,3% perfurados, respectivamente nos sexos feminino e masculino.

16 — Procurou-se no presente trabalho avaliar diferenças raciais e populacionais, que porventura existissem nos caracteres métricos e morfológicos do esterno. Na maior parte dos casos, porém, não se pode chegar a conclusões muito seguras em virtude de haver poucas determinações extra-europeias e de não serem dados os erros estatísticos. As medidas do comprimento diferem bastante conforme a população, mas as diferenças são em grande parte explicáveis pela variação da estatura. As medidas da largura são mais aproximadas nas diferentes populações. É possível que haja uma espécie de compensação da superfície do esterno de população para população, não diminuindo tanto a largura como o comprimento, mas na realidade verifiquei que não há nas séries portuguesas qualquer correlação entre o comprimento e a largura do corpo do esterno. Parece, portanto, que não há, em geral, e dentro duma determinada população, uma «compensação» entre o comprimento e a largura do esterno.

17 — O ângulo esternal é o mesmo nas diferentes populações (pelo menos nos Brancos).

18 — O índice esternal dos Portugueses é praticamente o mesmo dos Suíços. Com outras populações não se podem fazer comparações em virtude de a técnica de determinação da largura máxima do corpo ser diferente. Pelos dados existentes parece, porém, que

não há diferenças raciais ou que estas são pequenas e só se poderão evidenciar em séries grandes e com técnicas uniformizadas.

19 — O índice manúbrio/corpo (comprimento do manúbrio/comprimento do corpo) é também sensivelmente o mesmo nas diferentes populações e existe sempre uma acentuada diferença sexual. Por exemplo, as médias para os Portugueses são quasi idénticas às dos Alemães de Stieve & Hintsche. Para populações extra-europeias é mais difícil o julgamento, pela escassez dos dados. Os restantes índices do esterno são também pouco diferentes de população para população e em regra as diferenças raciais são mais aparentes nas medidas do que nos índices.

20 — Há também diferenças raciais na freqüência com que aparecem determinados caracteres morfológicos. Assim, nos Negros há menor incidência de esternos de incisura jugular convexa e também há menos casos de ossos supraesternais.

21 — A freqüência de sinostoses nas articulações superior e inferior do esterno é um caracter que pode ser diferente conforme as populações. Talvez o método de observação (segundo se trata de esqueletos ou de cadáveres) possa influir no resultado, mas devem existir, mesmo assim, diferenças populacionais.

22 — Também há diferenças populacionais quanto à freqüência de perfurações do corpo do esterno. Nas séries portuguesas há cerca de 5⁰/₀ de esternos com perfurações no corpo, tanto num sexo como noutro.

Para vários outros caracteres métricos e morfológicos nada se pode dizer da distribuição racial em virtude da falta de dados comparativos.

RÉSUMÉ

On a étudié dans ce travail 272 sternums (140 masculins et 132 féminins) de Portugais, adultes. On a exclu tous les sujets dont l'ascendance n'était pas du Portugal. On connaît pour chaque sternum le nom du sujet, l'âge, la cause probable de la mort, et les données sur la naturalité et la filiation.

Les os étaient secs et macérés. On a lié au moyen de cire les deux pièces, manche et corps, toutes les fois qu'elles étaient séparées. On a veillé à ce que le conjoint restât autant que possible dans la position naturelle du cartilage sternal supérieur.

Les squelettes proviennent de tous les districts du Portugal et on peut dire que les moyennes présentées dans ce travail sont représentatives du sternum des Portugais en général.

Les deux séries, masculine et féminine, ont été étudiées séparément, à cause des différences sexuelles.

Pour les mesures ont été employés les appareils usuels de l'Anthropologie. Pour l'angle sternal on a employé un goniomètre spécial, très simple. Pour éviter des imprécisions, on a défini les mesures prises et on les a comparées avec celles d'autres auteurs. Dans les mesures de la largeur, aussi bien sur le manche que sur le corps du sternum, on a essayé d'éviter l'influence des «processus costales», sorte d'éminences pour l'insertion des côtes (v. figs. 1 et 2). On a déterminé 17 mesures sur chaque sternum et on a utilisé seulement les os dont l'état permettait la prise de toutes les mesures.

Outre les caractères métriques, on a observé des caractères morphologiques. Pour ces derniers on a établi des types ou patrons (figs. 3-9) lesquels permettent des déterminations plus ou moins quantitatives.

On a déterminé, pour chaque mesure, la moyenne arithmétique, la déviation-type et leurs erreurs moyennes (tables 1-14 et table 27). On a fait de même pour les 7 indices calculés (tables 15-21).

Les relations entre les caractères morphologiques et certaines

données, tel que l'âge ou d'autres mesures, ou bien, entre deux caractères morphologiques, ont été jugées au moyen de la statistique χ^2 , de la manière usuelle ((6), (10)).

De la considération des résultats de ce travail et de la comparaison avec d'autres populations, on peut extraire certaines conclusions, dont voici les suivantes:

1 — Excepté l'angle sternal, qui est égal pour les deux sexes, les valeurs moyennes appartenant au sexe masculin sont toujours plus grandes que celles du sexe féminin et les différences sont statistiquement significatives.

2 — On trouve les plus grandes différences sexuelles dans les mesures de la longueur, surtout dans la longueur totale. En grande partie, cette différence dérive de la plus grande stature dans le sexe masculin.

3 — Les indices ne montrent pas, en général, des différences sexuelles aussi nettes que les mesures. L'indice sternal (largeur maximum du corps/longueur total) ne montre aucune différence sexuelle, de même que l'indice de conicité du corps (largeur minimum/largeur maximum). Ce sont l'indice du manche (largeur maximum du manche/longueur du manche) et l'indice manche/corps (longueur du manche/longueur du corps) qui ont les plus grandes différences sexuelles moyennes. La relation entre la moyenne masculine et la moyenne féminine pour ce dernier indice est égale à 1:1,10.

4 — La largeur maximum du corps du sternum tend dans le sexe féminin à être située plus haut que dans le sexe masculin. Dans ce sexe, il est beaucoup plus fréquent que la largeur maximum soit localisée sur l'espace intercostal v-v₁ (le 4.^{ème} du corps), et les différences sexuelles à cet égard, sont significatives. La largeur maximum est située sur l'espace intercostal iv-v dans 50,71 ± 4,23 % des cas dans le sexe masculin, et dans 67,42 ± 4,08 % des cas dans le sexe féminin.

5 — La largeur minimum du corps est localisée, en général, sur l'espace II-III (1.^{er} segment du corps) et il n'y a pas de différence sexuelle significative (79,29 ± 3,42 % dans le sexe masculin et 73,48 ± 3,84 % dans le sexe féminin).

6 — Le bord supérieur du manche, ou «*incisura jugularis*», est dans la plupart des cas, concave. En excluant les cas où la profondeur et l'élévation n'atteignent pas 1 millimètre, il y a 113 sternums dans le sexe masculin et 92 dans le sexe féminin dont le

bord supérieur est concave. Ceci équivaut en pourcentages respectivement à $80,71 \pm 3,41\%$ et $69,70 \pm 3,90\%$, avec une différence sexuelle significative ($11,01 \pm 5,18$). On note, cependant, que dans les sternums féminins les bords concaves ont une profondeur plus petite, ce qui occasionne qu'un certain nombre d'entre eux aille se ranger dans la classe de bords intermédiaires. Les bords supérieurs convexes sont plus fréquents dans le sexe féminin, mais la différence sexuelle n'est pas significative.

7 — Il y a approximativement 5% des sternums avec des os ou tubercules suprasternaux, mais l'état de notre matériel n'était pas très propre pour cette observation.

8 — Les «processus costales» du manche sont plus développés dans le sexe masculin (45% dans ce sexe contre 33% dans le sexe féminin, avec différence dans le niveau de signification statistique). Il n'y a pas de corrélation entre le développement des processus costales du manche et la largeur maximum du manche.

9 — Le développement des «processus costales» du corps du sternum est approximativement le même dans les deux sexes. Dans le sexe masculin $53,57 \pm 4,22\%$ des sternums ont des «processus costales», tandis que dans le sexe féminin il y en a $50,76 \pm 4,23\%$; la différence est insignifiante. Il y a une corrélation entre le développement des «processus costales» et la largeur maximum du corps, bien que celle-ci ait été prise sur la partie moyenne des segments (échancrures intercostales) et non pas sur les articulations costales. Les sternums plus larges ont des «processus costales» plus développés. La corrélation entre le développement des «processus costales» et l'indice du corps n'est pas très évidente. Il y a, par conséquent, une influence des «processus costales» sur la largeur du corps du sternum, ou bien, la plus grande largeur et le développement des «processus costales» ont des causes communes.

10 — On a observé la forme de l'échancrure intercostale du manche; il est probable qu'il y ait une corrélation entre l'existence de «processus costales» bien développés et les échancrures peu profondes, dans le manche.

11 — En ce qui concerne la liaison des trois pièces dont se compose le sternum, on a vérifié que l'articulation supérieure était synostosée dans un pourcentage de $20,00 \pm 3,38\%$ des sternums masculins et $19,70 \pm 3,46\%$ des féminins, sans différence sexuelle. Chez les adultes, il n'existe pas de corrélation entre la synostose de l'articulation supérieure et l'âge. Contrairement, il y a une cor-

rélation entre l'indice du corps du sternum et la synostose supérieure; dans les sternums plus larges cette synostose est plus fréquente.

12 — L'articulation inférieure (corps-appendice)  tait totalement ou partiellement ossifiée dans $46,43 \pm 4,21\%$ et $36,36 \pm 4,18\%$ des sternums, masculins et féminins, respectivement. La différence sexuelle n'est pas significative. Aussi bien par les données de ce travail que par ceux d'autres auteurs, on peut conclure qu'il n'existe pas de corrélation entre la synostose de l'articulation inférieure et l'indice du corps du sternum, et entre la synostose et l'âge. Il est possible qu'il y ait quelque corrélation entre la synostose inférieure et la longueur du corps du sternum dans le sexe masculin (mais non pas dans le sexe féminin).

13 — Chez les sujets de plus de 30 ans, seulement un sternum (âge 49 ans) avait le premier segment du corps libre, c'est-à-dire, li e par des synchondroses au manche et au second segment du corps. Les autres cas observ es étaient des sternums plus jeunes. Deux sternums masculins avaient la synchondrose manche-corps au niveau de l'articulation pour la troisième paire de côtes et non pas au niveau de l'articulation de la seconde paire, comme d'habitude. Ces sternums ont le segment supérieur (segment du manche) un peu court.

14 — On a observ e les lignes sternales (*lineae sternales*) sur la partie supérieure du corps du sternum. Il y a $42,14 \pm 4,17\%$ des sternums masculins et $39,39 \pm 4,26\%$ des sternums féminins dans lesquels il n'existe pas de lignes sternales. D'après le degré de développement, on constate que les lignes sternales sont plus saillantes dans le sexe masculin (différence significative). Il y a une corrélation entre l'existence de lignes sternales et la largeur du sternum (indice du corps); les lignes sternales sont plus développées dans les sternums étroits. On a cherché à expliquer cette liaison au moyen des lignes de force existantes au niveau des articulations costales: dans les sternums étroits il est plus probable que les lignes se joignent à ce niveau avec celles du côté oppos e (lignes sternales). Il y a aussi une forte corrélation entre l'existence de lignes sternales et la synostose de l'articulation inférieure.

15 — On a observ e des perforations du corps dans 5% des sternums, dans les deux sexes. Chez les femmes il y a une liaison entre les épaisseurs du corps plus petites et l'existence de perforations (trous). Les appendices n'ont pas pu être observ es syst emati-

quement, et on a trouvé 4,5 et 9,3 % de sternums avec des trous, respectivement chez les femmes et chez les hommes.

16 — On a essayé dans ce travail de juger l'existence de différences raciales, ou bien, des différences entre les moyennes de chaque population, concernant les caractères métriques et morphologiques. Malheureusement, on n'a pas pu tirer de conclusions sûres parce qu'il y a très peu de déterminations chez les populations non-européennes et les auteurs souvent, ne donnent pas les erreurs statistiques. Les mesures de la longueur sont assez différentes selon la population dont il s'agit, mais les différences raciales sont dues, en grande partie, à la différence dans la stature. Les mesures de la largeur sont plus rapprochées chez les différentes populations. Il est possible qu'il y ait une sorte de compensation de la superficie du sternum dans chaque population, la largeur diminuant moins que la longueur. Mais dans la réalité j'ai vérifié que dans les séries portugaises il n'y a pas de corrélation entre la longueur et la largeur du corps du sternum. Il semble, par conséquent, qu'il n'y a pas, en général et pour chaque population, la « compensation » entre la longueur et la largeur du sternum.

17 — L'angle sternal a des moyennes semblables chez des populations différentes (au moins chez les Blancs).

18 — L'indice sternal des Portugais est pratiquement le même que celui des Suisses. On ne peut pas faire de comparaisons avec les moyennes d'autres populations parce que la technique de détermination de la largeur maximum en est différente. D'après les données existantes il semble qu'il n'y a pas de différences raciales, ou bien, que celles-ci sont petites et ne pourrout se révéler que dans des séries nombreuses et avec des techniques uniformes.

19 — L'indice manche/corps (longueur du manubrium/longueur du corps) est aussi approximativement le même chez les différentes populations et il existe toujours une forte différence sexuelle. On voit, par exemple, que les moyennes pour les Portugais sont presque identiques à celles des Allemands de Stieve & Hintsche. Pour des populations non-européennes le jugement est plus difficile à cause de l'absence de données. Le reste des indices du sternum sont aussi peu différents pour chaque population et en général les différences raciales existent plus pour les mesures que pour les indices.

20 — Il y a aussi des différences raciales dans la fréquence de certains caractères morphologiques. Par exemple, chez les Nègres

il y a une fréquence plus petite de sternums avec incisura jugularis convexe et il y a aussi, un nombre moindre de cas d'os suprasternaux.

21 — La fréquence de la synostose de l'articulation supérieure et de l'articulation inférieure peut être différente d'après la population. Probablement la méthode d'observation a une certaine influence sur les résultats (selon il s'agit de squelettes ou de cadavres), mais il doit exister, quand même, des différences raciales.

22 — Il y a aussi des différences selon la population, dans la fréquence des trous du corps du sternum. Dans les séries portugaises il y a environ 5 0/0 des sternums avec des trous dans le corps, dans les deux sexes.

Pour plusieurs autres caractères métriques et morphologiques on ne peut rien dire sur la distribution raciale à cause du manque de données comparatives.

BIBLIOGRAFIA CITADA

- 1 — ABICHT, E. — 1927 — Vergleichende Untersuchungen an australischen und europäischen Brustbeinen. *Z. Morph. Anthrop.*, 26, 405-430.
- 2 — BOENJAMIN, R. — 1930 — The shape of the javanese sternum. *Mededeelingen Dienst. Volksgesond. in Ned.-Ind.* II.
- 3 — BOROWANSKY, L. — 1931 — L'ossification et la croissance du sternum humain. *Bull. intern. Acad. Scienc. Bohême.* (cit. seg. Frey).
- 4 — COBB, W. M. — 1937 — The ossa suprasternalia in whites and negroes and the form of the superior border of the manubrium sterni. *J. Anat. Physiol.*, 71, 245-291.
- 5 — DWIGHT, M. D. — 1890 — The sternum as an index of sex, height and age. *J. Anat. Physiol.*, 24, 527 (cit. seg. Frey e Stieve & Hintsche).
- 6 — FISHER, R. A. — Statistical methods for research workers. Londres, 1932.
- 7 — FRASSETTO, F. — *Lezioni di Antropologia.* Bolonha, 1911.
- 8 — FREY, H. — 1935 — Über die Form des menschlichen Brustbeins. *Morph. Jahrb.*, 76, 516-569.
- 9 — v. GELDEREN, C. — 1924 — Zur Anatomie und Mechanik des Symphysis sternalis. *Z. Konst.-L.*, 10, 365 (cit. seg. Frey).
- 10 — GOULDEN, C. H. — *Methods of statistical analysis.* Minneapolis, Minn., 1937.
- 11 — HINTSCHE, E. — 1924 — Zur Morphologie und Anthropologie des menschlichen Brustbeins. *Anthrop. Anz.*, 1, 192-199.
- 12 — HRDLICKA, H. — 1920 — Anthropometry. *Amer. J. Phys. Anthrop.*, 3, 147-173.
- 13 — LANGE, K. H. — 1934 — Rippen und Brustbein in ihren funktionellen Verknüpfungen. *Morph. Jahrb.*, 73, 355-384.
- 14 — LUBOSCH, W. — 1922 — Formverschiedenheiten am Körper des menschlichen Brustbeins und ihr morphologischer und konstitutioneller Wert. *Morph. Jahrb.*, 51, 91-140.
- 15 — LUBOSCH, W. — 1924 — Weitere Mitteilungen über die Formverschiedenheiten am menschlichen Brustbein. *Anat. Anz.*, 58, 393-397.
- 16 — MARTIN, R. — *Lehrbuch der Anthropologie.* Jena, 1928.
- 17 — PÄSSLER, H. W. — 1931 — Zur normalen und pathologischen Anatomie und zur Pathologie des Brustbeins. *Beit. pathol. Anat. Pathol.*, 87, 659-680.
- 18 — SCHREINER, K. E. — *Zur Osteologie der Lappen.* Oslo, 1935.
- 19 — SCHULTZ, A. H. — 1930 — The skeleton of the trunk and limbs of higher primates. *Human Biol.*, 2, 303-438.
- 20 — SNEDECOR, G. W. — *Analysis of variance and covariance.* Ames, Iowa, 1934.
- 21 — STIEVE, H. e HINTSCHE, E. — 1925 — Über die Form des menschlichen Brustbeins. *Z. Morph. Anthrop.*, 23, 361-410.
- 22 — STRAUCH, M. — *Anatomische Untersuchungen über das Brustbeins des Mens-*

- chen mit besonderer Berücksichtigung der Geschlechtsverschiedenheiten. Diss. Dorpat, 1881 (cit. seg. Hintsche).
- 23 — TROTTER, M. — 1933/34 — Synostosis between manubrium and body of the sternum in whites and negroes. Amer. J. Phys. Anthrop., 18, 439-442.
- 24 — TSING, BAU KIEN — 1925 — Untersuchungen über das Brustbein des Chinesen. Z Morph. Anthrop., 23, 337-342.
- 25 — VERSCHUER, O. v. — 1930 — Zur Frage der Asymetrie des menschlichen Körpers. Z Morph. Anthrop., 27, 171-178.
- 26 — ZIMMER, E. A. — Das Brustbein und seine Gelenke. Leipzig, 1939.

MEDIDAS INDIVIDUAIS

ESTERNOS MASCULINOS

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do manúbrio	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do manúb.	Larg. mín. do manúb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do manúbrio	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
1	146	139	49	92	16	54	33	29	26	11	7	1,5	6	169
8	157	151	62	90	19	52	30	32	26	13	9	3	3	167
11	162	153	55	99	17	55	28	31	28	14	10	-0,5	7	168
21	161	158	51	107	16	50	29	34	25	19	6	1,5	7	170
24	152	142	45	100	23	56	46	28	27	12	8	0,5	12	166
28	163	152	52	103	14	53	37	32	25	17	9	1	11	166
31	166	161	40	122	16	61	45	40	30	10	5	3	5	192
34	151	142	50	94	20	61	40	32	29	15	9	1,5	11	170
35	162	155	57	100	21	49	39	47	32	13	8	0,5	6	173
37	163	157	48	111	17	54	30	34	24	13	9	4,5	4	175
38	170	167	58	110	17	59	30	36	23	14	7	-0,5	2	184
43	151	143	54	90	19	64	30	34	28	13	7	0	5	180
45	159	153	51	103	23	51	26	34	21	12	8	1	11	172
53	157	149	47	104	15	51	35	43	26	11	6	2	10	167
56	161	148	57	92	19	56	34	33	26	16	9	0	7	166
61	175	164	49	117	24	61	42	40	31	12	7	1,5	11	163
64	150	147	51	96	12	53	30	34	24	13	9	-0,5	3	171
65	175	159	59	110	24	50	31	31	27	14	10	3	22	151
68	170	161	55	108	20	55	33	33	25	10	8	3	7	176
70	160	149	44	108	21	53	45	28	25	13	9	2	12	166
71	156	149	49	102	19	52	26	29	23	11	8	3	9	166
72	161	150	47	108	20	53	33	31	24	13	7	-1	14	150
80	165	157	57	105	18	59	30	29	26	13	7	3	6	158
82	164	156	56	102	19	65	33	37	29	16	6	6	10	172
85	169	161	55	110	21	51	31	31	24	14	9	6	10	171
86	155	148	64	97	21	54	41	30	27	17	10	0,5	13	171
94	157	148	53	98	17	73	47	33	30	8	14	2	10	155
97	154	148	52	97	22	51	29	32	24	12	7	3	6	167
98	161	154	55	100	20	52	37	42	29	15	8	2,5	6	172
102	143	137	45	92	23	50	26	32	27	12	8	3	5	169
104	152	146	46	100	20	66	41	33	30	12	10	4	4	190
108	168	150	51	108	25	65	36	44	30	14	8	5	15	146
110	168	160	52	110	26	74	39	32	24	13	8	2	7	162

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do manúbrio	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do manúb.	Larg. mín. do manúb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do manúbrio	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
114	166	154	49	111	15	53	33	34	27	11	8	-1,5	11	162
116	156	145	50	101	20	57	36	35	31	13	7	3,5	13	165
118	163	153	51	104	21	54	29	31	24	14	7	3	11	160
120	156	143	53	94	25	56	31	33	27	14	8	1,5	11	157
121	175	160	61	108	27	58	32	34	31	12	9	3	19	152
122	176	166	57	111	14	54	34	31	25	15	8	1,5	8	173
124	171	164	49	117	20	48	27	27	24	13	7	1,5	7	175
127	156	146	51	101	19	58	26	31	20	12	8	5,5	12	161
128	162	144	54	99	16	54	33	47	25	16	10	3,5	16	150
132	143	136	47	89	19	54	34	28	25	10	6	5	6	172
138	148	140	46	96	16	50	39	39	32	15	8	2	9	168
139	159	153	52	103	17	55	29	28	25	13	9	-1	10	167
140	143	137	51	88	26	54	29	31	24	12	8	0,5	9	163
146	180	173	57	118	17	59	35	35	26	18	9	2	8	160
150	173	166	56	111	22	59	32	46	31	13	7	2	4	167
154	158	148	50	102	14	50	28	34	23	17	9	1,5	13	161
156	158	151	53	99	22	63	38	34	30	15	7	2,5	8	180
158	167	156	53	108	16	57	30	36	22	12	7	-1,5	14	152
162	154	146	48	99	28	54	33	52	30	14	10	3	4	165
166	148	141	49	95	18	57	27	31	20	13	8	3	10	163
168	173	163	62	106	29	52	38	50	32	11	7	-0,5	10	164
170	168	157	56	106	21	55	36	40	26	16	8	3,5	12	155
179	167	158	49	112	15	56	40	36	32	13	7	1,5	5	167
183	173	161	57	110	18	60	35	33	28	15	10	2	16	164
184	159	152	48	104	16	51	29	34	27	15	10	3,5	3	174
185	155	140	53	94	26	54	34	28	24	13	9	0	17	154
191	155	145	52	96	25	43	33	36	28	12	8	4	6	161
198	141	137	51	87	24	64	33	35	23	17	10	0	11	160
199	151	143	50	96	19	44	29	36	24	11	8	3	9	163
202	147	145	49	96	19	55	37	32	29	11	7	2,5	4	180
203	165	156	49	109	15	50	21	35	22	13	8	3	10	163
205	143	133	41	92	12	45	32	33	25	14	8	6	6	179
208	142	127	42	90	22	50	27	21	20	13	10	3,5	12	160
210	156	145	47	100	17	48	27	36	23	12	7	3	11	167
212	177	163	53	115	13	57	31	37	24	14	8	2,5	17	157
217	163	154	50	106	20	59	34	38	31	14	7	4	7	158
219	154	148	53	96	13	55	39	40	32	14	7	1,5	1	180
221	151	140	49	95	17	49	26	25	21	13	10	3	14	160
223	155	146	47	102	23	64	32	37	25	12	8	2,5	12	155
228	169	157	51	110	15	60	35	31	28	15	9	2	12	162
230	156	146	54	95	24	57	33	35	28	13	5	4	12	169
231	149	139	55	87	28	54	51	39	25	14	9	1	13	159
237	171	163	46	118	20	52	37	36	26	13	7	3	7	191
239	155	151	49	103	20	52	42	37	30	13	8	3,5	3	172
240	150	142	55	89	24	53	23	26	22	10	7	1,5	8	160
242	164	155	64	91	28	50	28	36	25	14	8	2	2	174
246	165	159	50	110	21	48	35	44	25	10	5	4	3	171

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do manúbrio	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do manúb.	Larg. mín. do manúb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do manúbrio	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
248	173	162	52	116	20	61	41	48	31	12	6	0,5	14	162
249	156	146	55	95	16	58	33	32	29	15	9	1,5	13	159
253	160	153	48	107	20	54	32	24	23	14	9	3	9	168
257	150	144	47	97	20	48	32	34	26	11	7	2	4	169
262	153	144	60	87	24	51	33	33	27	12	9	-1	9	159
263	160	154	46	109	17	61	48	36	29	15	10	3	7	175
276	145	137	46	93	16	54	39	29	26	12	9	1	10	163
280	163	157	45	114	15	52	33	32	26	12	8	2	7	171
286	162	151	50	105	19	56	31	29	24	15	8	2	10	161
287	144	133	47	90	20	47	28	31	24	12	7	1,5	13	165
288	158	151	57	96	24	52	36	36	28	13	10	2	6	172
290	156	148	58	94	21	63	34	36	31	12	9	2,5	5	163
294	159	149	51	102	22	56	33	29	25	13	8	-1	16	169
299	174	164	47	119	14	61	36	35	26	16	9	5	8	173
302	156	149	51	101	25	56	32	41	26	14	9	3,5	9	158
303	170	165	57	109	20	63	36	40	30	14	9	0	1	179
306	158	152	46	106	22	50	25	33	20	13	8	3	6	180
307	161	148	54	98	25	50	31	33	26	15	8	2,5	14	161
308	167	154	37	120	25	58	40	36	25	11	8	6	12	170
309	167	152	49	109	22	54	35	30	28	4	9	1	12	150
310	146	137	47	91	15	49	30	28	22	14	9	4	3	174
314	166	158	55	105	16	53	39	42	27	13	6	0	6	181
318	153	142	50	96	18	52	28	41	26	14	8	3	12	159
319	160	146	50	102	23	52	31	35	26	15	9	2	12	160
320	173	159	48	117	22	58	44	39	26	13	5	3	15	152
322	151	139	51	92	24	49	30	33	27	15	9	2	12	159
323	153	142	50	94	25	53	30	31	24	16	8	-2	13	165
324	146	138	46	93	20	53	28	35	25	14	8	2	1	163
325	147	140	45	97	21	53	31	34	25	14	9	3	3	168
331	159	152	62	92	15	51	28	35	23	18	10	0	9	167
336	172	164	42	123	15	55	29	32	23	15	8	4	7	168
343	153	145	52	95	17	51	29	34	24	15	9	-1,5	7	170
345	142	133	44	91	15	55	33	34	26	14	9	4	10	162
350	173	160	55	110	23	63	36	28	25	26	10	-2	13	163
353	159	149	56	97	24	63	36	50	29	13	7	3	10	166
354	157	148	53	98	18	52	31	29	27	14	8	2,5	7	169
358	159	151	51	104	19	63	32	27	24	12	9	4	11	152
359	162	154	50	106	22	53	43	30	23	11	8	3	10	164
360	147	138	48	91	24	29	28	28	25	17	9	2	6	163
363	147	135	51	88	20	54	33	44	25	15	8	1	6	171
369	159	146	54	97	16	47	29	28	22	16	10	2	15	154
374	167	158	54	106	18	48	25	29	24	16	8	-2	10	164
375	149	145	53	92	19	61	36	33	30	13	9	3	3	175
376	167	158	55	104	27	56	32	41	27	16	9	1	6	174
378	162	150	47	108	19	55	29	33	24	15	8	4	12	163
379	144	133	46	91	16	47	27	36	28	15	10	1	7	156
380	140	134	54	81	19	37	22	38	22	13	10	3	6	166

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do mandíbulo	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do mandíb.	Larg. mín. do mandíb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do mandíbulo	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
381	166	155	48	109	23	55	36	33	26	14	9	2,5	11	170
382	154	147	53	96	18	55	30	31	26	13	8	3	8	161
384	152	144	43	103	22	35	37	28	24	14	8	4	11	165
389	136	129	45	85	27	55	28	34	23	13	8	3	8	167
390	153	143	46	99	14	47	27	35	20	13	8	3	4	165
391	126	117	44	74	16	51	36	42	32	14	9	3	6	180
393	157	144	55	94	25	55	32	39	26	12	6	3	10	150
395	146	136	47	92	25	46	31	29	22	14	7	0,5	8	156
396	151	142	46	98	26	50	29	29	24	13	7	2	9	163
398	135	128	50	79	18	54	24	32	25	16	10	1	2	158
400	165	153	50	108	17	54	28	34	25	14	10	2,5	13	156
401	161	154	44	110	19	48	31	33	23	13	9	1	4	175
404	161	153	50	106	21	62	41	35	32	13	9	4	7	159

ESTERNOS FEMININOS

2	136	127	52	78	18	43	28	26	24	11	8	1,5	9	169
7	134	126	45	82	21	44	32	27	20	12	6	1	7	170
9	147	134	43	96	21	48	38	38	24	13	8	0,5	17	166
15	153	143	47	100	17	46	30	35	25	12	7	3	12	170
16	127	118	39	80	16	48	35	25	23	11	6	2,5	7	166
17	141	133	47	89	21	47	27	25	21	11	7	0,5	9	169
19	142	135	48	89	17	54	34	31	22	12	8	-0,5	7	158
23	128	120	48	76	19	49	33	27	24	11	9	3	11	158
25	152	144	47	100	22	55	32	29	24	13	7	3	14	168
27	131	121	41	85	13	46	23	17	16	12	8	2	13	162
29	133	125	43	84	23	50	44	33	29	13	7	0	10	180
30	134	125	41	85	20	50	32	31	25	12	6	2	7	166
32	149	139	53	90	15	51	34	33	23	12	6	0,5	13	167
36	136	131	43	89	18	43	28	28	21	12	7	0	7	173
41	121	113	50	65	14	49	27	27	22	12	8	0,5	9	164
42	107	102	43	60	14	45	23	26	20	10	7	4	4	171
48	144	136	48	89	31	48	45	28	27	11	7	1,5	9	169
49	157	151	48	105	25	59	36	36	27	11	8	2	7	168
52	136	127	48	82	19	51	27	49	25	10	3	3,5	12	159
54	145	134	54	85	17	41	30	36	22	12	8	1	13	160
55	142	130	49	85	21	53	42	52	31	13	7	0,5	12	167
57	135	121	47	81	12	57	30	36	30	11	7	2	6	158
58	145	136	53	87	26	42	34	33	25	10	7	0	10	167
66	146	131	52	86	15	52	29	26	22	14	9	1	17	160
69	138	130	43	89	21	43	26	30	20	11	6	0,5	11	170

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do mandíbrio	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do manúb.	Larg. mín. do manúb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do mandíbrio	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
81	134	126	49	80	16	51	41	32	27	11	7	1	8	170
89	138	128	46	85	17	49	31	25	23	12	9	-1,5	12	162
91	132	126	57	72	19	55	39	31	30	13	8	-3,5	9	173
93	152	137	52	90	24	59	37	31	28	15	8	-1	17	156
99	133	123	46	81	13	52	26	32	19	13	8	-1	8	163
106	134	125	46	83	26	56	32	48	25	10	6	2,5	11	160
107	143	135	56	80	22	46	27	22	20	10	9	2	9	173
112	150	140	45	97	23	44	42	27	23	13	8	-1,5	11	170
119	124	115	42	75	13	43	27	28	24	12	7	1	8	172
131	145	135	43	96	12	45	28	24	20	11	5	1,5	12	162
136	143	133	44	91	11	52	33	37	28	14	8	1,5	9	171
137	136	123	44	84	16	50	33	26	23	12	9	1,5	15	172
143	157	145	46	103	19	50	33	29	27	11	7	3,5	12	162
145	147	136	38	101	18	45	28	26	22	12	8	3,5	12	159
147	138	130	47	84	19	47	27	28	23	18	8	3,5	9	163
148	138	131	49	84	20	51	33	28	25	12	8	1	8	166
153	130	118	52	69	10	49	32	36	25	13	9	-1,5	11	169
155	147	136	44	96	13	49	35	29	23	11	6	0,5	13	166
160	149	142	53	90	21	50	27	27	23	11	7	2,5	6	174
161	145	131	52	87	16	52	36	32	26	13	8	4	15	156
163	119	113	42	73	27	48	25	28	20	12	6	3,5	11	160
167	132	122	46	81	24	53	27	29	19	11	7	2	15	158
172	123	124	48	78	13	56	31	33	25	11	7	1,5	6	165
173	140	131	50	85	20	50	26	32	24	15	8	1	11	167
174	119	111	40	74	17	42	24	23	21	11	8	1	8	156
175	134	125	45	82	15	52	28	35	25	14	8	2	8	165
177	125	118	43	79	19	40	24	26	19	9	7	-1,5	9	161
180	120	115	45	71	24	53	42	33	29	11	6	3,5	6	183
186	124	117	41	79	16	41	27	27	19	11	6	1	9	170
187	119	108	43	70	18	54	42	31	26	13	7	2,5	11	163
188	141	135	53	83	20	49	33	35	25	11	7	2	5	168
189	131	124	40	85	18	42	25	27	21	13	7	0,5	6	171
190	135	126	51	79	19	47	27	29	22	10	8	-1	10	164
192	140	129	43	88	25	46	36	28	23	14	10	-1	11	163
194	133	126	47	82	14	51	32	28	20	12	7	-0,5	11	168
197	145	136	44	93	16	44	25	28	19	11	6	0	7	158
200	142	133	52	84	15	48	25	30	24	14	8	1	9	165
201	130	123	48	71	12	50	32	27	23	12	8	0	7	161
206	134	125	47	80	15	43	25	25	21	13	8	2	8	170
207	142	127	49	88	16	45	27	26	21	11	7	2,5	20	156
209	137	128	44	86	19	51	38	31	26	12	9	3	10	168
215	125	118	44	75	17	48	35	28	25	12	8	1,5	8	178
222	147	140	46	95	12	46	30	33	23	11	6	3	6	167
229	151	136	52	89	14	44	25	25	22	11	9	1,5	17	158
233	152	135	53	87	12	53	35	27	24	15	9	2,5	14	158
234	134	129	44	85	20	42	25	27	19	11	7	3,5	3	177
243	143	130	48	87	20	51	25	28	21	11	7	3	15	163

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do manúbrio	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do manúb.	Larg. mín. do manúb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do manúbrio	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
244	138	128	40	90	18	47	30	31	25	12	10	0,5	7	159
247	136	128	50	82	10	44	27	28	20	10	8	-1	12	167
250	151	138	50	92	21	58	34	38	27	12	8	2,5	14	163
251	149	142	49	95	19	47	26	31	23	12	6	3	10	166
252	124	115	42	76	17	44	22	27	19	10	6	3	12	160
254	137	127	51	79	19	45	32	26	20	12	10	-3	10	169
255	133	122	42	84	21	40	23	26	19	10	6	1,5	15	163
256	136	129	51	82	19	49	31	29	23	11	7	1,5	10	166
264	116	110	46	65	10	45	30	29	22	11	6	1,5	4	169
268	158	141	48	102	24	49	30	32	24	11	7	-0,5	22	163
269	133	121	40	85	20	43	24	25	20	10	7	2	12	160
272	133	125	46	82	11	55	29	25	23	12	7	2	12	163
274	127	119	44	79	19	51	28	26	23	13	7	3	9	161
278	123	116	42	77	10	43	27	30	19	11	7	5	6	163
279	143	133	48	89	10	50	30	29	25	14	7	0,5	12	163
284	124	114	45	73	19	41	28	23	22	10	7	1,5	10	163
285	141	128	50	84	16	47	30	33	22	12	6	3	15	157
289	127	120	47	74	14	40	26	28	19	12	8	1	5	169
291	148	132	45	92	20	52	31	35	25	13	8	3	16	162
293	130	120	43	80	20	48	29	23	16	12	7	2	5	166
296	138	130	42	90	25	43	28	32	23	12	6	2	7	157
300	130	125	47	79	12	47	26	26	19	11	7	-1	5	174
304	128	119	45	76	16	49	32	33	26	12	8	3	6	171
311	136	132	58	75	19	44	23	26	17	12	7	-2	3	171
313	135	125	44	84	16	42	25	28	20	11	6	1	13	169
315	122	112	43	71	14	42	26	26	22	13	6	3	10	165
316	113	104	46	61	10	40	29	24	20	12	9	-0,5	10	165
317	142	135	48	89	51	45	31	28	22	9	6	0	10	167
321	120	114	40	74	11	40	23	23	18	12	7	1	3	172
326	133	127	42	86	28	49	25	25	24	11	9	1,5	7	168
328	139	126	43	87	20	39	32	29	21	11	7	1,5	13	163
329	123	116	37	80	20	42	26	26	20	10	7	2	7	169
330	128	119	37	87	17	39	30	28	22	10	6	2	12	161
332	119	111	52	62	11	45	21	22	19	10	8	-2	7	162
333	132	126	43	85	17	44	21	24	16	10	7	-1	8	163
335	160	142	49	99	17	50	28	31	23	15	9	2	12	162
337	119	110	45	68	15	49	28	24	22	12	8	1	11	163
338	153	143	52	94	14	50	31	25	21	13	8	2	5	170
339	137	120	47	83	19	50	26	26	21	11	7	3	18	148
341	141	131	48	84	21	47	31	26	23	12	7	3	12	163
342	122	120	41	81	11	46	26	25	18	12	8	4	8	167
344	133	127	49	80	20	42	29	34	26	14	8	0	10	170
348	143	134	41	96	20	48	27	33	23	12	7	2,5	12	156
351	137	130	44	88	17	47	35	33	23	11	5	0,5	10	173
355	132	126	57	70	20	42	35	40	27	13	8	0,5	4	167
357	134	124	43	83	23	39	25	24	19	11	7	3	8	170
361	114	109	33	76	18	39	23	30	18	10	7	2	3	176

N.º do esqueleto	Comp. curvil. total	Comp. rect. total	Comp. do manúbrio	Comp. do corpo	Larg. da incisura	Larg. máx. do ma. úb.	Larg. mín. do manúb.	Larg. máx. do corpo	Larg. mín. do corpo	Espes. do manúbrio	Espes. do corpo	Prof. da inc. jug.	Prof. da curva post.	Ângulo esternal
362	142	132	41	94	16	44	33	35	21	12	6	2,5	11	173
364	128	121	43	79	12	44	25	27	20	13	8	1	6	169
365	144	135	46	90	16	57	28	28	25	14	9	2	10	166
367	138	128	48	83	18	42	22	18	14	13	7	-1	13	157
368	137	125	47	81	12	48	27	23	22	14	9	2	10	157
371	131	122	45	79	18	49	29	29	25	12	7	2	9	176
373	139	129	46	85	20	55	23	29	19	13	9	2,5	10	165
377	137	130	46	85	21	47	29	28	22	10	7	4	6	165
383	132	122	44	80	15	47	32	22	20	14	9	3	7	158
387	126	118	45	74	18	47	37	43	34	13	10	2	2	173
388	133	125	50	77	11	54	34	32	27	15	8	3	10	164
394	133	125	45	82	16	44	28	33	25	15	9	1	6	171
402	157	144	43	102	17	54	28	30	23	14	9	1,5	15	159

Sur une classe de frontières de domaines

PAR

J. VICENTE GONÇALVES (1)

On considère ici une courbe continue C vérifiant les conditions I et II énoncées au n.º 1 et l'on démontre que cette courbe est la frontière totale d'un domaine borné. Si ce domaine est connexe, on prouve qu'il en est de même de l'ensemble de ses points intérieurs et que tout point frontière est accessible par l'intérieur; enfin, on remplace C par une autre courbe plus propre à mettre en relief la structure même du domaine aux abords de la frontière.

I — CIRCUITS

1. Soit C la courbe que décrit d'un mouvement plan continu le point $z = \pi(t)$ lorsque t croît, depuis t^0 jusqu'à $t^1 = t^0 + \omega$. Nous supposons que cette courbe est fermée et ne se réduit pas à un contour simple de Jordan.

Deux valeurs de t — dont l'une au moins intérieure à (t^0, t^1) — qui donnent la même valeur pour la fonction π sont des *valeurs homologues*; et deux intervalles (h, k) et (p, q) tels que toute valeur u du premier ait son homologue $v = \theta(u)$ dans le second, — θ étant une fonction qui croît continument depuis $\theta(h) = p$ jusqu'à $\theta(k) = q$ — seront aussi dits *homologues*.

Deux arcs dont les intervalles sont homologues — arcs homologues — coïncident donc aussi bien en situation qu'en génération.

D'une manière générale, nous représenterons par $S_{\alpha\beta}$ l'arc que

(1) Boursier de l'Instituto para a Alta Cultura.

décrit z lorsque t croît depuis $\alpha > t^0$ jusqu'à $\beta < t^1$; et nous dirons que S_{hk} est une partie de $S_{\alpha\beta}$ toutes les fois que (h, k) lui-même ou un de ses homologues n'est qu'une partie de (α, β) .

Quand α et β sont des valeurs homologues, $S_{\alpha\beta}$ s'appelle un *circuit* et se représente alors par $C_{\alpha\beta}$; l'origine $\pi(\alpha)$ de l'arc est l'*origine* du circuit.

Un circuit est *réduit* s'il ne contient pas d'autre circuit; c'est alors un contour simple de Jordan.

On dit qu'un circuit est *maximum* s'il n'est contenu dans aucun autre circuit; un circuit est *simple* lorsqu'il ne contient pas un autre circuit de même origine.

Dans cet étude on suppose essentiellement la courbe C soumise aux deux conditions suivantes:

I. *Il n'est pas d'empiètement* ⁽¹⁾ *entre deux circuits dont les origines sont distinctes.*

II. *Aucun circuit n'est limite de circuits qui s'y trouvent contenus ou dans lesquels il se trouve lui-même contenu.*

Sous cette réserve, on montrera que C est la frontière totale d'un domaine borné.

2. Il n'existe pas de suite monotone de valeurs homologues $\alpha_n \rightarrow \alpha'$, autrement (en supposant $\alpha_1 < \alpha'$) $C_{\alpha_1 \alpha'}$ serait limite de circuits $C_{\alpha_1 \alpha_n}$ qui tous sont contenus dans lui (II). L'ordre de multiplicité de chaque point z de C est donc toujours un nombre fini.

1. *S'il y a dans C un circuit maximum, tout autre circuit ou bien est maximum ou bien fait partie d'un circuit maximum.*

Soit C_{ab} un circuit maximum et soit $C_{\alpha\beta}$ un second circuit qui, lui, n'est pas maximum. Pour fixer les idées supposons $b < t^1$.

N'étant pas un circuit maximum, $C_{\alpha\beta}$ fait partie de quelque circuit $C_{\alpha_1 \beta_1}$, qui à son tour ne sera peut-être qu'une partie de

(1) Deux ensembles sont dits empiétants lorsque leur produit n'est qu'une partie de chacun.

$C_{\alpha_2 \beta_2}$, et ainsi de suite; mais il y aura là toujours un dernier circuit, donc un circuit maximum.

En effet, si cela n'était pas, on devrait avoir $\alpha_n \rightarrow t^0, \beta_n \rightarrow t^1$ (II). Examinons ce cas. On ne peut avoir $a > t^0$, autrement C_{ab} ne serait qu'une partie de $C_{\alpha_n \beta_n}$; c'est donc $a = t^0$. Or, si l'on avait $\alpha_n = t^0$ ou si α_n était une valeur homologue de t^0 , C_{ab} ne serait qu'une partie de $C_{a \beta_n}$ (pour n assez grand); et si α_n et t^0 étaient des valeurs non homologues, $C_{\alpha_n \beta_n}$ empiéterait sur C_{ab} malgré la diversité d'origines. Il ne saurait donc y avoir un nombre infini de $C_{\alpha_n \beta_n}$, ce qui prouve le théorème.

Évidemment, lorsque (t^0, t^1) est la limite de (α_n, β_n) — α_n et β_n étant des valeurs homologues — il n'est pas de circuit maximum dans C ; l'analyse précédente nous montre que c'est là le seul cas où les circuits maxima n'existent pas.

2. Dans $C_{\alpha \beta}$ seule l'origine $\pi(\alpha)$ peut correspondre à des t hors de (a, β) .

Soient a, c et x, y deux couples de valeurs homologues, x n'étant pas un homologue de a . Supposons que ces couples se séparent, par exemple — $a \quad x \quad c \quad y$. D'après I, pour que cette disposition soit possible, il faut que l'intervalle (x, y) , par exemple, ait un homologue (x_1, y_1) dans (a, c) — auquel cas c (valeur de (x, y)) aura à son tour un homologue c_1 dans (x_1, y_1) . Ainsi, aux deux couples séparés de valeurs homologues a, c et x, y se succèdent deux autres couples de valeurs homologues a_1, c_1 et x_1, y_1 ; la première disposition devient donc (dans sa possibilité) dépendante d'une autre, qui à son tour dépendra d'une troisième, et ainsi de suite. Or, nous avons vu plus haut que t n'a qu'un nombre fini d'homologues. Il arrivera donc un moment où nous serons en présence d'une disposition impossible faute de nouvelles valeurs qui soient des homologues de $t = a$ et de $t = x$. La proposition est dès lors exacte.

Il s'en suit qu'il n'y a pas d'arcs homologues et que, par conséquent, $S_{p,q}$ n'est une partie de $S_{h,k}$ que lorsque (p, q) est lui-même une partie de (h, k) .

Dans le cas où $C_{\alpha \beta}$ serait un circuit maximum, le théorème 2 admet une précision: si un point de $C_{\alpha \beta}$ correspond à $\tau > \beta$, ce sera nécessairement $\tau = t^1$ et $\alpha = t^0$. Le seul cas où deux circuits

maxima aient un point commun c'est donc celui où ces circuits correspondent à des intervalles tels que (t^0, t') et (t'', t^4) avec $t'' < t'$. En dehors de ce cas particulier, où l'origine $\pi(t^0) = x^0$ des arcs est une point multiple pour C , deux circuits maxima et dès lors leurs intervalles eux-mêmes sont tout à fait disjoints.

3. Soient P et Q les extrémités de S_{pq} et soit $\zeta = \pi(\tau)$ un point intermédiaire de cet arc, c'est-à-dire un point distinct de P et de Q .

1. ζ ne peut être limite de points n'appartenant pas à S_{pq} que s'il est l'origine d'un circuit empiétant sur S_{pq} .

En effet, quand $\zeta_n = \pi(\tau_n)$ tend vers $\zeta = \pi(\tau)$, toute limite τ' des τ_n est une valeur homologue de τ et dès lors distincte de p et de q . Si donc τ_n est en dehors de (p, q) , — auquel cas il en sera de même de τ' — il y aura empiètement entre (p, q) et (τ, τ') .

D'après I, ζ ne saurait exister si S_{pq} est lui-même un circuit.

Lorsque $C_{\alpha\beta}$ et $C_{\gamma\delta}$ ont un point commun χ qui n'est pas leur origine à tous les deux, ou bien

a) χ est l'origine d'un ces circuits

ou bien

b) χ n'en est l'origine d'aucun.

Dans le cas a), n'étant pas l'origine de $C_{\alpha\beta}$ (par ex.), χ ne saurait être un ζ pour cet arc; il en sera un donc pour $C_{\gamma\delta}$, qui dès lors n'est qu'une partie de $C_{\alpha\beta}$ (I). Dans le cas b), χ n'est un ξ ni pour $C_{\alpha\beta}$ ni pour $C_{\gamma\delta}$; tout point de son voisinage appartient donc aux deux circuits, qui ont alors une partie commune.

Il s'en suit que

2. Lorsque deux circuits à différente origine ont un point commun, l'un d'eux contient l'autre.

3. Lorsque deux circuits de même origine ont un second point commun, leur produit est également un circuit de cette origine.

En outre,

4. Si un contour simple de Jordan, exclusivement composé de points de C , possède dans un circuit simple un point autre que l'origine même de ce circuit, ses autres points s'y trouvent également.

En effet, sur un contour J il y a toujours deux chemins pour aller d'un point à un autre point, tandis qu'on ne peut sortir de $C_{\alpha\beta}$ pour aller ailleurs dans C sans passer par l'origine $\pi(\alpha)$.

4. Lorsqu'il y a dans (t^0, t^1) une infinité de couples de valeurs homologues α, β ($\alpha < \beta$), on peut en tirer une suite α_n, β_n telle que α_n tende vers quelque limite α' et que β_n tende également vers quelque limite β' . Supposons $\beta' > \alpha'$. Ces valeurs (alors homologues) n'ayant qu'un nombre fini d'homologues, les deux couples α', β' et α_n, β_n ne peuvent plus se séparer à partir d'un certain ordre (2. 2). Mais on ne peut non plus avoir

$$\alpha' < \alpha_n < \beta_n < \beta' \quad \text{ni} \quad \alpha_n < \alpha' < \beta' < \beta_n,$$

sauf, pour la première disposition, si $\alpha' = t^0$ et $\beta' = t^1$ (II). Donc, dans toute collection infinie de couples de valeurs homologues α_n, β_n la différence $\beta_n - \alpha_n$ n'a que deux limites possibles — zéro et $\omega = t^1 - t^0$. On en conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples vérifiant la condition $\frac{1}{n} < \beta - \alpha < \omega - \frac{1}{n}$ et, par conséquent,

1. Les points multiples de C forment tout au plus un ensemble dénombrable.

Lorsqu'il y a des circuits maxima (1), $\beta_n - \alpha_n$ ne saurait tendre vers ω . Donc,

2. Lorsqu'il y a des circuits maxima, il n'est qu'un nombre fini de circuits dont le diamètre dépasse tout nombre positif donné, si petit soit-il.

Soit $X = \pi(\tau)$ un point simple de C distinct de l'origine $\pi(t^0)$ des arcs et soit γ un cercle de centre X .

3. *Il existe un cercle γ' , concentrique de γ , dans lequel aucun point de C n'est l'origine d'un circuit qui rencontre γ .*

Soit r de rayon de γ et soit ρ la distance de X à l'ensemble des origines des circuits dont de diamètre dépasse $\frac{r}{2}$ (1). Prenons γ' avec un rayon plus petit que ρ et que $\frac{r}{2}$. Tout point de C dans γ' se trouve à moins de $\frac{r}{2}$ de X et, s'il arrive que ce soit l'origine d'un circuit, le diamètre de celui-ci ne dépassera $\frac{r}{2}$; un tel circuit ne saurait donc atteindre γ .

Ajoutons que

4. *Il existe à l'intérieur de γ un arc $S_{\xi\eta}$ ($\xi < \tau < \eta$) qui contient tous les circuits dont il possède l'origine.*

Prenons dans le précédent cercle γ' un arc quelconque S_{pq} ($p < \tau < q$). Cet arc répondra lui-même à la question si aucun t de (p, q) n'a d'homologue à l'extérieur de cet intervalle.

Il se peut qu'il y ait dans (p, q) des t admettant un homologue plus grand que q : s'il en est bien ainsi, soit y le premier de ces t et soit η le dernier homologue de y ; si cela n'est pas, prenons $\eta = q$. Soit de même x le plus grand t de (p, q) admettant un homologue plus petit que p et soit ξ le plus petit homologue de x ; prenons $\xi = p$ si x n'existe pas. $S_{\xi\eta}$ est l'arc cherché.

Tout d'abord, $S_{p\eta}$ est intérieur à γ , car ou bien $\eta = q$ ou bien $S_{y\eta}$ est un circuit dont l'origine se trouve dans γ' (3); même remarque pour $S_{\xi q}$. $S_{\xi\eta}$ se trouve donc à l'intérieur de γ . D'autre part, si $Z = \pi(h)$, avec $\xi < h < \eta$, est l'origine d'un circuit C_{hk} pas tout à fait compris dans $S_{\xi\eta}$, ce sera par exemple $k < \eta$, ce qui entraîne $\eta < p$; or, ceci est impossible si x n'existe pas ($\xi = p$) et est tout aussi impossible si x existe, car (ξ, x) et (h, k) ne sauraient empiéter.

5. En faisant $\pi(u + \omega) = \pi(u)$, on étend la définition de π à toute valeur réelle de t , et dès lors tout intervalle $(t', t' + \omega)$

(1) D'après ce que nous avons vu plus haut, seule l'origine des arcs peut être un point limite pour les origines de tels circuits.

peut être pris comme intervalle de C . Mais il est visible qu'en déplaçant l'origine des t on peut déranger un certain nombre de circuits. En effet, l'arc $C_{\alpha\beta}$ ne sera plus un circuit lorsqu'on aura mis cette origine entre $\alpha + p\omega$ et $\beta + p\omega$, p étant un entier quelconque.

Cela n'a pourtant rien à voir avec nos conditions I et II, car

C vérifie les conditions I et II avec toute origine des t .

Nous pouvons nous borner au cas où l'on prend la nouvelle origine τ^0 entre t^0 et $t^0 + \omega$. Soient donc C_{pq} et C_{rs} deux circuits empiétant de différente origine, (p, q) et (r, s) étant des intervalles de $(\tau^0, \tau^0 + \omega)$. Nous allons voir qu'il y a aussi dans $(t^0, t^0 + \omega)$ deux intervalles empiétant dont les circuits n'ont pas la même origine.

Regardons la suite

$$\frac{p - \omega \quad r - \omega \quad q - \omega \quad s - \omega}{\tau^0} \quad \frac{\tau^0}{p \quad r \quad q \quad s}$$

Nous voyons que $(r - \omega, s - \omega)$ empiète sur $(p - \omega, q - \omega)$ si t^1 est dans (τ^0, p) et sur $(q - \omega, p)$ si t^1 est dans (p, r) ; que $(s - \omega, r)$ empiète sur $(q - \omega, p)$ si t^0 est dans (r, q) et sur (p, q) si t^1 est dans (q, s) ; et, enfin, que (p, q) empiète sur (r, s) si t^1 est au delà de s . Or, tous ces intervalles empiétant appartiennent à (t^0, t^1) et les circuits d'un même couple n'ont jamais la même origine.

Pour ce qui en est de la condition II, il suffit de remarquer que si l'on a, par exemple,

$$\tau^0 < \tau' \longleftarrow \tau'_n < \tau''_n \longrightarrow \tau'' < \tau^0 + \omega,$$

on aura aussi, avec $\tau' < t^1 < \tau''$,

$$t^0 < \tau'' - \omega \longleftarrow \tau''_n - \omega < \tau'_n \longrightarrow \tau' < t^1,$$

ce qui est également contraire à II.

II — BASES

6. Lorsque l'intervalle (t^0, t^1) n'est pas la limite d'une suite d'intervalles (h_n, k_n) aux extrémités homologues, on y trouve toujours des intervalles (α, β) auxquels correspondent des circuits

maxima de C (2); il en est bien ainsi quand l'origine x^0 des arcs est un point multiple pour C , mais cette condition n'est nullement nécessaire. Si (t^0, t^1) est la limite de tels intervalles (h_n, k_n) , en plaçant l'origine des t entre t^0 et t^1 , nous revenons au premier cas.

Rapportons donc notre courbe à un intervalle $(a, a + \omega)$ de façon à avoir des circuits maxima et soit $(K_{\alpha\beta})$ l'ensemble de tels circuits à la seule exception de celui dont l'intervalle se termine à $a + \omega$ — pour le cas où $\pi(a)$ serait un point multiple de C . Deux $K_{\alpha\beta}$ sont dès lors tout à fait disjoints (2) et il en sera de même de leurs intervalles.

Soit (ξ) l'ensemble fermé dont ces (α, β) sont les intervalles contigus. Aucun ξ intérieur à $(a, a + \omega)$ ne possède d'homologue dans cet intervalle s'il n'est ni un α ni un β . Si a est un α , son associé β a lui-même deux homologues: $t = a$ et $t = a + \omega$; dans tous les autres cas un α n'a d'autre homologue que son associé β et vice-versa.

a et $a + \omega$ font toujours partie de (ξ) ; a seul peut s'y trouver isolé.

Dénombrons les (α, β) dans une suite $I_1, I_2, \dots, I_n (\alpha_n, \beta_n) \dots$ et posons:

$$\begin{aligned} \pi_1(t) &= \pi(t) \quad \text{hors de } I_1 \quad , \quad \pi_1(t) = \pi(\alpha_1) \quad \text{dans } I_1; \\ \pi_2(t) &= \pi_1(t) \quad \text{hors de } I_2 \quad , \quad \pi_2(t) = \pi(\alpha_2) \quad \text{dans } I_2; \end{aligned}$$

e ainsi de suite.

Si les I sont en nombre fini, la dernière fonction π_k — nous la désignerons alors par φ — sera une fonction continue dans $(a, a + \omega)$, égale à π dans (ξ) et constante sur chaque I ; et si les I sont en nombre infini, nous allons voir que π_n tend vers une fonction limite jouissant des ces mêmes propriétés.

En effet, dans tout ξ , c'est $\pi_n = \pi$; dans un t' intérieur à I_p , ce sera, pour $n > p$, $\pi_n(t') = \pi_p(t') = \pi(\alpha_p)$. $\pi_n(t)$ tend donc toujours vers une fonction limite $\varphi(t)$ qui coïncide avec π dans (ξ) et qui est constante sur chaque I . Pour la continuité, il suffit de considérer le cas où t_n tend vers un point ξ' de (ξ) . Or, dans ce cas-là, en prenant $t'_n = t_n$ lorsque t_n est un ξ et en faisant $t'_n = \alpha_m$ lorsque t_n se trouve dans I_m , t'_n tendra vers ξ' et nous aurons

$$\varphi(t'_n) = \pi(t'_n) \longrightarrow \pi(\xi') = \varphi(\xi').$$

Que la suite des I soit finie ou infinie, a et $a + \omega$ sont toujours des points ξ ; ce sera donc $\varphi(a) = \varphi(a + \omega) = \pi(a)$. Ce sont là d'ailleurs les seules valeurs de t , n'appartenant pas à un même I , qui donnent la même valeur à φ , car cette fonction ne prend que des valeurs de π sur (ξ) et parmi celles-ci il n'y a pas d'autre répétition. Bref, φ est une fonction continue dans $(a, a + \omega)$ qui est constante sur chaque I et qui vérifie la relation $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ tant que t_1 et t_2 n'appartiennent pas à un même I ni donne-t à π la valeur $\pi(a)$.

En débarrassant cette fonction de ses sections d'invariabilité ⁽¹⁾, on obtiendra donc un fonction continue dont le point représentatif décrira dans le plan un contour simple de Jordan — tout ce qui reste de notre courbe C après l'ablation des circuits constituant la famille $(K_{\alpha\beta})$. Nous représenterons cette courbe simple par Γ et nous dirons qu'elle est une base de C ; les $K_{\alpha\beta}$ seront les circuits contigus à Γ .

Γ se compose a) des origines $\pi(\alpha_n)$ et de leurs points d'accumulation; b) des arcs simples (s'il y en a) qui sont extérieurs à tous les $K_{\alpha\beta}$.

Un $K_{\alpha\beta}$ n'a sur Γ que son origine $\pi(\alpha)$; s'il est simple (1), c'est-à-dire si π ne reprend à l'intérieur de (α, β) la valeur $\pi(\alpha)$, tous ses points sont d'un même côté de Γ ; s'il n'est pas simple, il se compose d'un nombre fini de circuits simples, et il se peut alors qu'il y ait des points d'un côté et d'autre de Γ .

Nous réservons la notation A_{pq} pour les circuits simples.

Tout point de $C - \Gamma$ est un point intermédiaire dans quelque $K_{\alpha\beta}$, donc aussi dans quelque A_{pq} .

Lorsque l'origine a des t possède des homologues a_1, a_2, \dots, a_m , $C_{a a_m}$ est un $K_{\alpha\beta}$; alors Γ est en même temps la base de $C_{a_m a + \omega}$ (ce circuit lui-même, s'il est un contour simple).

Rapportons C à un autre intervalle $(a', a' + \omega)$ et soit Γ' la nouvelle base. Supposons que Γ et Γ' ne se confondent pas. Alors,

1. Γ et Γ' ont tout au plus un point commun.

⁽¹⁾ Pour cette question, voir *Quelques résultats concernant les régions simples*, in *Portugaliae Mathematica*, vol. III.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait un point χ' de Γ' à l'intérieur de Γ . Nous allons voir que tout point de Γ' , à une seule exception près, se trouve également à l'intérieur de Γ .

Soient χ_1 et χ_2 les premiers points (à partir de χ') où Γ' rencontre Γ (si rencontre il y a). À l'exception de χ_1 et χ_2 , tous les points de $\overline{\chi_1 \chi' \chi_2}$ disparaissent dans l'ablation de $K_{\alpha\beta}$. Or, χ' , par exemple, n'est pas limite de points pris hors du circuit $K_{\alpha\beta}$ où il se trouve lui-même contenu (3. 1). Donc, dans le voisinage de χ' tout point de Γ' appartient également à $K_{\alpha\beta}$ et il ne peut en être autrement des restants points de $\overline{\chi_1 \chi' \chi_2}$, car deux K ne se touchent jamais. Mais $K_{\alpha\beta}$ n'a qu'un point sur Γ — son origine $\pi(\alpha)$. C'est donc que χ_1 et χ_2 coïncident et dès lors Γ' ne peut que se réduire à $\overline{\chi_1 \chi' \chi_2}$.

Nous voyons par là que Γ' ou bien est tout à fait intérieure à Γ ou bien n'a qu'un point sur cette base.

Il ressort de cette démonstration que

2. *Tout point de C intérieur (extérieur) à Γ fait partie d'un circuit qui se trouve lui-même à l'intérieur (extérieur) de Γ .*

7. $K_{\alpha\beta}$ n'est jamais limite de circuits qui s'y trouvent contenus (II); si ce n'est pas un contour simple, $K_{\alpha\beta}$ admettra donc toujours une base dont les circuits correspondent à des intervalles appartenant à l'intervalle (α, β) .

$K_{\alpha\beta}$ étant représenté par C_i^1 , nous représenterons sa base par Γ_i^1 et nous désignerons par C_{ij}^2 ($j=1, 2, \dots$) les circuits contigus à celle-ci. Pour le cas où C_i^1 serait déjà un contour simple, nous prendrons $\Gamma_i^1 = C_i^1$.

Dans ces conditions, la base secondaire Γ_i^1 se trouve liée à Γ — base principale — par l'origine même de son circuit $C_i^1 = K_{\alpha\beta}$; c'est là d'ailleurs le seul point qui soit commun aux deux bases.

Ce qu'on vient de dire de C et C_i^1 , on le répétera d'abord à propos de C_i^1 et C_{ij}^2 , ensuite à propos de C_{ij}^2 et C_{ijk}^3 , et ainsi successivement.

En général, $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$ désignera la base du circuit $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$, lui-même contigu à la base $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$ du circuit $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$; n est le rang de $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$.

C_i^1 et C_j^1 ($i \neq j$) n'ont aucun point commun; il en sera donc

de même de deux C^n lorsqu'ils ne se confondent pas; et un C^n n'est qu'une partie d'un C^m ($m < n$) s'il y a là quelque point commun.

Il s'en suit que

1. Deux Γ^n n'ont jamais de point commun; un Γ^n touche tout au plus un Γ^m si $m < n$.

$\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$, base principale de $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$, contient l'origine $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ de cette courbe; un tel point se trouve d'ailleurs également sur la base $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$ de $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$, car $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$ est un des circuits contigus à $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$. $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ est donc un point commun aux deux bases consécutives $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$ et $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$. C'est là d'ailleurs le seul point qui leur soit commun, car $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$ n'a aucun autre point sur $C_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$. Nous dirons que $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ est la racine de $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n$.

2. Si $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^m$ et $\Gamma_{\beta_1 \dots \beta_m \dots \beta_n}^n$ ont un point commun χ , ce point est la racine même de $\Gamma_{\beta_1 \dots \beta_n}^n$ et il vient $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_m = \alpha_m$. D'ailleurs, χ est également la racine de toute base intermédiaire $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dots \beta_p}^p$.

En effet, $\Gamma_{\beta_1 \dots \beta_n}^n$, base principale de $C_{\beta_1 \dots \beta_n}^n$, qui est lui-même une partie de $C_{\beta_1 \dots \beta_m \dots \beta_p}^p$ ($p < n$), a tous ses points sur cette dernière courbe; et tout point de $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^m$ se trouve sur $C_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^m$. Donc, χ appartient aussi bien à $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^m$ qu'à $\Gamma_{\beta_1 \dots \beta_p}^p$. En faisant $p = 0$, il vient $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_m = \alpha_m$; pour $p = m + 1$, on voit que χ est la racine de $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_{m+1}}^{m+1}$; et, en général, comme point commun à $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dots \beta_{p-1}}^{p-1}$ et à $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dots \beta_p}^p$, χ est encore la racine de cette dernière base.

Dans chaque $K_{\alpha\beta}$ il ne peut y avoir qu'un nombre fini de circuits C_{pq} dont le diamètre dépasse δ (4. 2), et il n'y a qu'un nombre fini de $K_{\alpha\beta}$ qui puissent contenir effectivement un tel C_{pq} . Donc,

3. La borne supérieure du diamètre des C^n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il s'en suit que

4. *Tout point de C qui ne se trouve pas dans quelque base Γ^n ($n = 0, 1, \dots$) est limite d'une suite de ces bases.*

En effet, ne se trouvant pas sur Γ , un point x de C devra se trouver sur un certain C_i^1 ; s'il ne se trouve pas dans Γ_i^1 , on le trouvera dans quelque C_{ij}^2 , et ainsi de suite. Or, C_i^1, C_{ij}^2, \dots constituent une suite monotone dont la limite ne peut être que x (3).

5. *Tout contour simple de Jordan, exclusivement composé de points de C, coïncide avec quelque base Γ^n ($n = 0, 1, \dots$) de cette courbe.*

En effet un tel contour, s'il ne coïncide pas avec Γ , a des points qui occupent des positions intermédiaires ⁽¹⁾ dans quelque C_i^1 ; il se trouve alors tout entier dans ce même circuit (3. 4). De même, s'il ne coïncide pas avec Γ_i^1 , on le trouvera tout entier dans quelque C_{ij}^2 , et ainsi de suite. Or, cela ne peut se poursuivre indéfiniment, car le diamètre de C^n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

6. *Toute base secondaire peut être prise comme base principale.*

En effet, Γ^p est la base principale dans quelque circuit simple A_{rs} (3. 4); C étant rapportée à $(s - \omega, s)$, $C_{s-\omega, r}$ devient un circuit contigu à la nouvelle base principale Γ' , qui n'est autre que la base principale de A_{rs} (6).

7. *Si $A_{\alpha\beta}$ a des points des deux côtés de Γ^k , Γ^k est une base de $A_{\alpha\beta}$.*

Rapportons C à l'intervalle $(\alpha, \alpha + \omega)$ et soit alors A_{pq} le circuit simple dont Γ^k est une base principale (5). Dans les conditions de l'énoncé, il y aura au moins un point commun à A_{pq} et à $A_{\alpha\beta}$.

(1) Notre contour doit avoir des points qui ne sont ni des origines de circuits K ni des limites de telles origines.

De par ce seul fait, si l'on a $\pi(\alpha) \neq \pi(p)$, A_{pq} ne sera qu'une partie de $A_{\alpha\beta}$ (3. 2) et le théorème est alors vérifié (5).

Lorsqu'on a $\pi(\alpha) = \pi(p)$, comme $A_{\alpha\beta}$ et A_{pq} sont des circuits simples, ou bien (α, β) coïncide avec (p, q) , et le théorème est encore vérifié; ou bien (α, β) précède entièrement (p, q) — c'est-à-dire, $\beta < p$ — et alors tous les points de $A_{\alpha\beta}$ seront d'un même côté de Γ^k . En effet, en rapportant C à l'intervalle $(\beta - \omega, \beta)$, on peut prendre Γ^k comme base principale et dans ce cas $A_{\alpha\beta}$ n'est qu'un circuit simple dont tous les points se trouvent d'un même côté de Γ^k (6. 2).

8. Nous allons montrer maintenant que

Chaque point X de Γ^m est limite de points à la fois extérieurs aux bases qui n'entourent pas Γ^m et disjoints de l'ensemble de ces bases. On trouve de tels points aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de Γ^m .

On peut évidemment supposer que Γ^m est la base principale Γ elle-même (7. 6) et il suffira de considérer le cas où X n'est l'origine d'aucun circuit (4. 1). Nous ferons la démonstration en considérant un côté déterminé de Γ .

Si de ce côté-là on ne trouve pas des circuits voisins de X , la proposition est manifestement exacte; si l'on y en trouve, prenons-y un circuit maximum C_{pq} qui soit entièrement compris dans un petit cercle γ de centre X (4. 2) et choisissons dans C_{pq} (du côté considéré de Γ) une base Γ' qui ne soit intérieure à aucune autre base du même circuit. Soit A_{rs} un circuit simple admettant Γ' comme base principale ou secondaire. A_{rs} ne sera complètement entouré par aucune base de C_{pq} : seule une base entourant Γ pourra donc le comprendre à l'intérieur. En dehors de l'ensemble de ces bases-ci, toute base qui entoure un point ζ de A_{rs} fait alors nécessairement partie de A_{rs} (7. 6).

Cela posé, soit R une demi-droite issue de $X' = \pi(r)$ et qui traverse A_{rs} , et soit ζ' le point le plus éloigné de X' où R rencontre A_{rs} . Prenons un point Y de R au delà de ζ' , mais encore dans γ . La distance de Y aux points ζ de A_{rs} admet un minimum positif $Y\zeta^o$ plus petit que $\overline{YX'}$. Étant distinct de X' , ζ^o se trouve donc disjoint de l'ensemble des points de $C - A_{rs}$ (2. 2). Si quelque base Γ' entourait ζ^o sans entourer Γ , on devrait alors trouver

des points de A_{rs} dans toute ligne menée de ζ^0 à l'infini; or, on ne trouve de tels points ni sur le segment rectiligne $\zeta^0 Y$ ni sur la partie de R au delà de Y : donc, aucune Γ' n'entoure ζ^0 sans entourer Γ . Tout point de $\zeta^0 Y$ assez voisin de ζ^0 est dès lors à la fois extérieur aux bases qui n'entourent Γ et disjoint de l'ensemble de ces bases; et puisque ζ^0 se trouve dans γ , notre proposition est bien établie.

III — RECONSTITUTION DE C

Dans les pages qui précèdent nous avons fait comme que le démontage des pièces qui composent notre courbe C ; maintenant, en remettant ces pièces en place, nous allons voir que C est la frontière totale d'un domaine borné parfaitement déterminé.

9. Dans un ensemble de bases de C , il se peut qu'une certaine base — Γ' — se trouve à l'intérieur d'une autre; que celle-ci — Γ'' — soit à son tour intérieure à une troisième — Γ''' , et ainsi successivement; mais cette suite de bases emboîtées aboutit nécessairement à une base *libre* dans l'ensemble en question (c'est-à-dire, à une base non entourée par aucune autre base de cet ensemble), car les diamètres de Γ' , Γ'' , Γ''' — sont de plus en plus grands et nous savons qu'il n'est qu'un nombre fini de bases dont le diamètre dépasse tout nombre positif δ .

Prenons alors comme base principale de C une base — B^0 — qui soit libre dans l'ensemble \mathcal{T} de toutes les Γ^n ($n = 0, 1, 2 \dots$). Parmi les bases libres dans l'ensemble $\mathcal{T} - B^0$, soient $B_1^1, B_2^1, B_3^1 \dots$ celles qui touchent B^0 ; parmi les bases libres dans l'ensemble $\mathcal{T} - B^0 - \Sigma B_m^1$, soient $B_{i_1}^2, B_{i_2}^2 \dots$ celles qui touchent B_i^1 ; et ainsi de suite. *Aucune base Γ^n n'échappe à ce classement.*

En effet, supposons que $\Gamma' = \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1}}^{h-1}$ coïncide avec $B_{\beta_1 \dots \beta_m}$ et que $\Gamma'' = \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_h}^h$ ne se trouve parmi les bases B^0, B^1, \dots, B^{m+1} . Γ'' , qui est liée à Γ' par sa racine χ , se trouve alors entourée d'un certain nombre de bases *n'appartenant pas à l'ensemble des B^i ($i < m + 1$)*. Or, aucune de ces bases-là n'entoure Γ' ; donc, elles passent toutes par χ et dès lors, si leur nombre est j , Γ'' appartiendra à la classe des B^{m+j+1} . Comme Γ coïncide avec B^0 , on voit que tout Γ^n a une place parfaitement déterminée dans l'ensemble des B^i .

1. Pour $n > m$, c'est par sa propre racine que $B_{\beta_1 \dots \beta_n}^n$ se trouve en contact avec $B_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^m$ (si contact il y a).

Pour $n = 1$ la proposition est sans doute exacte, puisque le point commun χ se trouve nécessairement sur B^0 (7. 1 et 2) Supposons-la donc vraie pour $n = p - 1$ et démontrons-la pour $n = p$
Formons la suite

$$B^0, B^1, \dots B^i, \dots B^m \quad (B^i = B_{\alpha_1 \dots \alpha_i}^i)$$

et soit λ_i le rang de B^i en tant que base secondaire de C (B^0 étant la base principale); soit de même k le rang de $B^p = B_{\beta_1 \dots \beta_p}^p$. Dès qu'il y a un point commun à B^p et à B^m , ce sera $\lambda_m \neq k$ (7. 1). Si $\lambda_m < k$, χ est la racine de B^p (7. 2); si $\lambda_m > k$, χ est la racine de B^m et par conséquent (d'après notre hypothèse) c'est lui-même le point commun à B^m et à B^{m-1} : donc χ est commun à B^p et à B^{m-1} , d'où $\lambda_{m-1} \neq k$. Si $\lambda_{m-1} < k$, χ est la racine de B^p (7. 2); sinon χ sera commun à B^p et à B^{m-2} ; et ainsi de suite. Comme il y a au moins un λ_i plus petit que k ($\lambda_0 = 0$), on voit que χ est, en fait, la racine de B^p .

2. Dans $B_{\beta_1 \dots \beta}^n$ seule la racine $\chi_{\beta_1 \dots \beta}$ est un point limite de points pris sur des bases B^m avec $m < n$.

Supposons que $X \neq \chi_{\beta_1 \dots \beta_n}$ appartienne à $B_{\beta_1 \dots \beta_n}^n$ et soit un point limite de points x pris sur des bases B^m avec $m < n$. Il y a toujours un ordre h tel qu'on trouve un nombre infini de x sur des bases B^h mais non pas sur des bases B^{h-1} ; ces B^h sont alors en nombre fini (7. 3) et l'une d'elles touchera B^n à X .

Nous conviendrons de dire que $B_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$ est un successeur de $B_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{n-1}$ et nous étendrons cette convention aux domaines mêmes $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^n$ et $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{n-1}$ que limitent ces contours. Les Δ^1 qui sont à l'extérieur de Δ^0 , nous les prendrons comme des *domaines positifs* (ou *additifs*); ceux qui en sont à l'intérieur, nous les prendrons comme des *domaines négatifs* (*subtractifs*).

Ajoutons à Δ^0 l'ensemble P^1 de tous les Δ^1 positifs et retranchons en l'ensemble N^1 des points intérieurs aux Δ^1 négatifs. Il en résultera un ensemble fermé D^1 . En effet, N^1 est un ensemble

ouvert et tout point limite de P^1 ou bien appartient à P^1 ou bien se trouve sur B^0 (1).

Évidemment, un point frontière de D^1 , s'il n'en était déjà un pour D^0 , ne peut se trouver isolé des B^1 et fait dès lors partie d'une de ces bases (7. 2). Réciproquement, *tout point de B^0 ou d'une B^1 appartient à la frontière de D^1 .*

En effet, prenons sur $B_{x_1}^1$ un point X distinct de la racine γ_{x_1} de cette base. X est un point disjoint de l'ensemble constitué par B^0 et par les B^1 autres que $B_{x_1}^1$ (9. 2). Si donc $\Delta_{x_1}^1$ est un domaine négatif, tout voisinage de X contiendra des points à la fois intérieurs à D^0 et extérieurs à tous les D^1 , — donc des points intérieurs à D^1 , et il est clair qu'on y trouve également des points extérieurs à D^1 ; de même, $\Delta_{x_1}^1$ étant positif, tout voisinage de X contiendra des points extérieurs à D^0 et aux divers D^1 , donc extérieurs à D^1 , et l'on y trouvera aussi de points intérieurs. Dans tous les cas donc X appartient à la frontière F^1 de D^1 et y est un point limite de points intérieurs à cet ensemble.

On conclut de là qu'il en est de même de tout point de $B_{x_1}^1$ et la démonstration même fait voir que les points de B^0 vérifient également cette double condition. D^1 est dès lors un domaine.

Un B^2 n'ayant jamais plus d'un point sur F^1 , nous pouvons donc écrire :

1. D^1 est un domaine limité par l'ensemble des B^i pour $i \leq 1$ et tout Δ^2 ou bien lui est intérieur ou bien lui est extérieur.

En admettant que D^{n-1} soit un domaine limité par l'ensemble des B^i avec $i \leq n-1$ et que tout Δ^n lui soit ou bien extérieur (positif), ou bien intérieur (négatif), l'analyse précédente fait encore voir qu'il en sera exactement de même de l'ensemble D^n qu'on obtient en retranchant de D^{n-1} les Δ^n négatifs et en y ajoutant les Δ^n positifs.

10. Représentons en général par u^i tout point qui appartienne à un D^n et à tous les D^{n+i} ($i > 0$); par u'' les points

(1) Un ensemble de domaines Λ^n (n fixe) contient tout point limite qui n'a dans son voisinage que des points d'un nombre fini de ces domaines; lorsqu'un point a dans son voisinage des points d'un nombre infini de domaines Λ^n , on trouve dans ce même voisinage un nombre infini de racines de contours B^n (7. 2) et dès lors il s'agit d'un point limite de l'ensemble des B^{n-1} .

limites des u' et, enfin, par u tout point u' ou u'' . U sera l'ensemble des u .

U est un domaine et C est sa frontière.

U est un ensemble fermé, évidemment; il nous suffira donc de montrer que C est sa frontière et que tout point de C est limite de points intérieurs à U . Nous n'avons à considérer que le cas où les D^n sont en nombre infini, autrement U se confondrait avec le dernier de ces domaines.

Montrons tout d'abord que tout point frontière X de U appartient à C . Dans un petit cercle γ de centre X il y a des points v qui ne font pas partie de U et il y a aussi des points u' . Soit D^p un D^n contenant u'_o et soit D^q ($q > p$) un D^n ne contenant pas v_o ; u'_o appartiendra à D^q . Contenant des points de D^q et des points n'appartenant pas à D^q , γ contient nécessairement des points de F^q — des points de C ; x en est donc un point limite, — un point de C .

Nous avons démontré au n.º 8 que chaque point X de B^n est limite points à la fois extérieurs aux bases qui n'entourent pas B^n et disjoints de l'ensemble de ces bases, et qu'on trouve de tels points aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de B^n . Ces points-là, si on les prend à l'intérieur de B^n , sont intérieurs à tous les D^{n+i} ($i > 0$) si Δ^n est positif et n'en appartiennent à aucun si Δ^n est négatif; de même, en les prenant à l'extérieur, ces points seront intérieurs aux D^{n+i} pour $\Delta^n < 0$ et en resteraient au dehors pour $\Delta^n > 0$. Dans tous les cas, donc, X est limite de points intérieurs à U . Tout point de C étant ou bien un X ou bien un limite de points X (7. 4), notre démonstration est complètement achevée.

IV — DOMAINE INTÉRIEUREMENT CONNEXE

11. Avant d'aller plus loin, nous rappellerons ici quelques notions dont nous aurons à nous servir dans la suite.

Un point x est libre ⁽¹⁾ vis-à-vis d'un ensemble H lorsqu'on

(1) Voir *Quelques résultats concernant les régions simples in Portugaliae Mathematica*, vol. III.

peut le joindre à l'infini par une ligne continue sans point commun avec la frontière de H ; autrement, x est un point *assujéti* à H .

Un ensemble dont tous les points sont libres vis-à-vis de H est dit *entièrement libre* vis-à-vis de H ; autrement, c'est un ensemble (partiellement ou entièrement) *assujéti* à H .

Une chaîne d'ensembles est une suite d'ensembles ... $E_{\alpha-1}$, E_{α} , $E_{\alpha+1}$... qui vérifie les trois conditions suivantes :

1. Aucun ensemble n'est entièrement assujéti à un autre ensemble ;
2. Tout ensemble intermédiaire possède au moins un point aussi bien sur celui qui le précède que sur celui qui le suit ;
3. Il n'est pas de point commun à trois ensembles.

La chaîne est finie ou infinie selon que le nombre de ses ensembles est lui-même fini ou infini. Une chaîne peut être infinie dans un seul sens (vers la droite : $\alpha \rightarrow +\infty$, vers la gauche : $\alpha \rightarrow -\infty$) ou dans les deux sens.

Dans une chaîne finie ou infinie, tout ensemble non intermédiaire est un *bout propre* ; dans une chaîne infinie vers la droite (ou dans des deux sens) le bout droit est l'ensemble des points limites des suites formées avec un point de chaque ensemble E_n pour $n > 0$; on dit que c'est un *bout limite*. Même définition pour la gauche.

Toute chaîne a deux bouts ; celles qui ont au moins un bout propre sont des *chaînes ordinaires*.

Une chaîne est fermée si ses bouts ne sont pas disjoints ; elle est ouverte si elle n'est pas fermée et ne contient de chaîne fermée.

On nomme *radiation* toute collection d'ensembles continus où

- α) Aucun ensemble n'est entièrement assujéti à un autre ensemble ;
- β) Le produit de deux ensembles, lorsqu'il n'est pas vide, ou bien est un ensemble connexe ou bien se réduit à un point ;
- γ) Deux ensembles disjoints font toujours partie d'une chaîne ;
- δ) Il n'est pas de chaîne fermée.

Cela posé, revenons à notre courbe C et à ses bases B^0, B^1, B^2, \dots , mais en supposant maintenant les Δ^i ($i > 0$) tous négatifs; les B^i ($i > 0$) sont donc extérieures les unes aux autres et se trouvent toutes à l'intérieur de B^0 . Dans ces conditions,

Dans toute chaîne

$$1) \quad \dots B^p B^q B^r B^s \dots \quad (p, q, \dots > 0)$$

la condition $q < r$ entraîne $r < s$.

En effet, si l'on avait $q > r$, le point $B^p \times B^q$, qui est déjà la racine de B^q (9. 1), serait également la racine de B^r , et il y aurait alors un point commun à trois ensembles.

Il s'en suit que $q > r$ entraîne $p > q$. Si donc on a dans 1) $q < r$, les rangs r, s, t, \dots iront toujours en croissant, l'accroissement étant partout d'une unité, car deux B contiguës ont le même rang ou des rangs consécutifs (d'après notre hypothèse).

Par ailleurs le circuit $A^{\lambda n}$ dont B^n est la base principale est B^{n-1} (7. 2). Il s'en suit que $B^r B^r \dots$ est une chaîne ouverte: deux B non consécutives sont toujours disjointes et lorsqu'il y a un bout limite, ce bout est un point (4. 2) commun à tous les $A^{\lambda n}$ et ne saurait par suite appartenir à aucune B .

Si les rangs se reprennent à monter vers la gauche de B^q ($p > q$), comme $A^{\lambda p}$ et $A^{\lambda r}$ sont tout à fait disjointes (1), le bout limite de la première chaîne (s'il y en a un) ne saurait appartenir à la seconde ni en être un bout limite.

Tout ceci nous amène à la conclusion suivante:

Il n'est pas de chaîne fermée de bases B^i .

Les chaînes du type $B^h B^{h+1} \dots$ sont dites de rang h . Lorsqu'une telle chaîne est complète, c'est-à-dire ne peut être prolongée vers la droite, nous la représentons (avec son bout droit) par T^h . La racine d'une chaîne de rang h est la racine de son bout gauche.

(1) S'il y avait un point commun ce serait l'origine même de $A^{\lambda p}$ et de $A^{\lambda r}$ et il y aurait alors un point commun à B^p, B^q et B^r .

D'après ce qui précède,

Lorsque plusieurs chaînes T^1 ont la même racine, les bases qui en font partie constituent une radiation.

Toute chaîne T^1 étant comprise dans un circuit contigu à B^0 , le nombre de celles dont le diamètre dépasse δ est nécessairement fini; et dans chaque T^1 il ne peut y avoir qu'un nombre fini de chaînes T^2, T^3, \dots dont le diamètre dépasse δ . Donc

Il n'y a qu'un nombre fini de chaînes T^i ($i = 1, 2, \dots$) dont le diamètre dépasse δ .

Pour les radiations où cette condition se trouve vérifiée — appelons-les radiations R — nous avons démontré le théorème suivant:

Si l'ensemble fermé χ est entièrement libre vis-à-vis de chaque ensemble de R , on peut enfermer cette radiation à l'intérieur d'un contour simple de Jordan vis-à-vis duquel χ soit encore entièrement libre (¹).

Ajoutons qu'on peut faire cela de façon que tout point du dit contour reste à moins de ε de la radiation R , et qu'il est loisible de remplacer ce contour par une ligne polygonale simple et fermée jouissant de ces mêmes propriétés.

12. Continuons à supposer les Δ^i ($i > 0$) négatifs et soient u_1 et u_2 deux points intérieurs à U . Relions u_1 à u_2 par une ligne polygonale simple l , sans point commun avec B^0 , et soit δ_1 la distance de cette ligne à B^0 . Il n'y a qu'un nombre fini de chaînes T^1 dont le diamètre dépasse $\frac{1}{2} \delta_1$; il n'y a donc qu'un nombre fini de chaînes T^1 possédant des points sur l , et l'ensemble de toutes les autres est à une distance de l supérieure à un certain nombre δ_2 .

Soient X_1, \dots, X_p les racines distinctes des T_1 que rencontre l et soit en général R_i la radiation composée de toutes les T_1 dont X_i

(¹) *Quelques résultats concernant les régions simples in Portugaliae Mathematica, vol. III.*

est la racine. Entourons chaque X_i d'un petit cercle γ_i qui soit sans point commun aussi bien avec l qu'avec les radiations R_j ($j \neq i$), et soit $2\delta_3^i$ la distance minimale d'un point de R_i à un point de $C - C_i$ lorsque ces points sont pris tous les deux à l'extérieur de γ_i . Soit ε un nombre positif plus petit que δ_1^i, δ_2^i et tous les δ_3^i . Nous savons qu'il est possible d'entourer R_i d'un contour polygonal simple F_i de façon que tout point de F_i soit à moins de ε de quelque point de R_i et que u_1, u_2 et les γ_j ($j \neq i$) en restent à l'extérieur. Aucun point de C ne pourra se trouver sur F_i s'il est extérieur γ_i .

Tout point de l à l'intérieur de F_i fait partie d'un arc l_m^i dont seules les extrémités se trouvent sur F_i . l_m^i partage donc la région Ω_i de F_i en deux régions dont l'une — Ω_m^i — ne contient aucun point de γ_i (1). Nous pouvons dès lors remplacer l_m^i par l'arc de F_i qui limite Ω_i , — arc dont tous les points sont intérieurs à U ; et, en procédant de même avec tous les l_h^1, l_k^2, \dots (dont le nombre est fini), nous finirons par remplacer l par une ligne continue λ qui reliera u_1 à u_2 par l'intérieur de U . Nous exprimerons cela en disant que

U est un domaine intérieurement connexe.

Évidemment, on peut toujours supposer que λ est une ligne polygonale simple.

Lorsque u_1 et u_2 sont assez voisins d'un point simple de C , on peut pendre λ également voisin de ce point. Plus précisément,

Étant donné un cercle γ de centre dans un point simple $X = \pi(\tau)$, il est possible de trouver un cercle concentrique γ^0 tel que λ soit intérieure à γ si u_1 et u_2 sont pris dans γ^0 .

Nous savons déterminer à l'intérieur de γ un arc $S_{\xi\tau}$ ($\xi < \tau < \eta$) qui comprenne tout circuit dont il comprend l'origine (4. 4); et nous pouvons évidemment trouver un cercle γ^0 (de même centre X) qui soit assez petit pour que tout point de C qui s'y trouve soit un point intermédiaire de $S_{\xi\tau}$. Prenons alors dans γ_1 nos deux

(1) Nous pouvons prolonger l jusqu'à B^0 sans rencontrer aucun γ_i ; γ_i sera donc tout entier d'un même côté de l .

points u_1 et u_2 et relient-les par le segment rectiligne $k = \overline{u_1 u_2}$. Étant à l'intérieur de γ^0 , k ne rencontre C qu'en des points intermédiaires de S_{ξ_n} .

Soit alors Σ l'arc qu'on déduit de S_{ξ_n} en supprimant les circuits maxima qui s'y trouvent (ainsi qu'il a été expliqué au n.º 6) et soient P_1 et P_2 le premier et le dernier des points de k sur Σ . Que S_{ξ_n} ait ou non des points multiples, Σ appartient à quelque base B' de C , et la remarque précédente nous fait voir que P_i est le seul point commun à B' et à $k_i = \overline{u_i P_i}$.

u_1 et u_2 étant des points intérieurs de U — ensemble qui se trouve tout entier d'un même côté de B' , — il s'en suit que k_1 et k_2 se trouvent tous les deux soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de B' .

En supposant que P_1 précède P_2 sur S_{ξ_n} , soit t_1 la plus petite valeur de t à P_1 et soit t_2 la plus grande valeur de t à P_2 . Ni t_1 ni t_2 n'ont d'homologue à l'extérieur de leur intervalle et il en est de même de toute t intermédiaire, car P et Q font partie de B' . Comme $\xi < t_1 < t_2 < \eta$, l'arc S_{t_1, t_2} se trouve dès lors disjoint de $C - S_{\xi_n}$; on peut en dire autant donc de l'arc $\Sigma^0 = \widehat{PQ}$, qui est contenu dans S_{t_1, t_2} .

Cela posé, enfermons B' à l'intérieur d'un anneau polygonal ⁽¹⁾ $A(H, K)$ dont la section soit assez petite pour que les arcs de H et de K qui sont au voisinage de Σ^0 restent (comme Σ^0 lui-même) intérieurs à γ et disjoints de $C - S_{\xi_n}$. D'après ce que nous avons vu plus haut, un de ces arcs relie k_1 à k_2 et nous permet ainsi d'aller de u_1 à u_2 le long d'un chemin l à la fois intérieur à γ et sans point avec $B' + (C - S_{\xi_n})$.

S'il arrive que l rencontre C , les points de rencontre seront donc nécessairement des points intermédiaires dans des circuits maxima de S_{ξ_n} ayant un diamètre au moins égal à la distance de Σ à l . Ces circuits-là étant en nombre fini et se trouvant tous à l'intérieur de γ , nous pouvons dès lors transformer ⁽²⁾ l dans une ligne λ qui relie u_1 à u_2 par l'intérieur de U et de γ .

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'accessibilité de X (point simple) par l'intérieur de U .

⁽¹⁾ Voir *Contours de Jordan et intégrale de Cauchy in Portugaliae Mathematica*, v. 2, 166.

⁽²⁾ Comme plus haut.

Soit ⁽¹⁾ γ_n de cercle de centre X et rayon $\frac{1}{n}$ et soit γ_n^0 le cercle qui est pour γ_n ce que c'est γ^0 pour γ . Prenons dans γ_n^0 , à l'intérieur de U , une suite $u_n \rightarrow X$. À partir d'un certain ordre n_i tous les u_n seront dans $\gamma_{n_i}^0$; deux quelconques de ces points peuvent donc être rejoints par une ligne polygonale λ à la fois intérieure à γ_{n_i} et à U . Joignons alors u_1 à u_{n_1} par λ_1 à l'intérieur de U ; joignons ensuite u_{n_1} à u_{n_2} par λ_2 à l'intérieur de γ_1 et de U ; u_{n_2} à u_{n_3} par λ_3 à l'intérieur de γ_2 et de U ; et ainsi de suite. Les arcs successifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ formeront une ligne continue reliant u_1 à X par l'intérieur de U .

Nous voyons même que *tout point* u pris dans γ_n^0 peut être relié à X par un chemin intérieur à γ_n (et à U).

13. Supposons enfin que X soit un point multiple de C et soit B^i la base B^i ($i \geq 0$) de rang le plus petit qui passe par X . Soient encore B_1, B_2, \dots, B_k les bases qui touchent B^i à ce même point X .

Prenons un nombre δ plus petit que le diamètre de chaque B_i ($i \leq k$) et de X comme centre décrivons le cercle c de rayon δ . Soit \widehat{YXZ} le plus petit arc de B^i qui passe par X et vienne se terminer sur c , et soient $\widehat{XY_i}$ et $\widehat{XZ_i}$ les deux plus petits arcs de B_i qui partent de X et aboutissent également sur c . \widehat{YXZ} partage c en deux régions simples dont seule une — Δ — contient des points de B_i au voisinage de X , car U se trouve tout entier d'un même côté de B^i .

Soit σ l'arc \widehat{YZ} de c qui limite Δ . En suivant cet arc à partir de $W_0 = Y$, nous rencontrerons les rayons curvilignes $\widehat{XY_i}$, $\widehat{XZ_j}$ et \widehat{XZ} dans un certain ordre $\widehat{XW_1}, \widehat{XW_2}, \dots$, chaque rayon $\widehat{XW_{2i+1}}$ et son suivant $\widehat{XW_{2i+2}}$ appartenant à une même base B_{α_i} ($\alpha_i \leq k$) et le dernier étant $\widehat{XW_{2k+1}} = \widehat{XZ}$.

Prenons dans $\widehat{XW_i}$ un point simple v_i de C et relierons v_{2i} à v_{2i+1} par une ligne continue l_i intérieure à U . Soit H_i

⁽¹⁾ *Contours de Jordan et Intégrale de Cauchy in Portugaliae Mathematica.*

la région simple qu'entoure le contour h_i formé des trois arcs $\varphi_{2i} = \widehat{Xv_{2i}} l_i$ et $\varphi_{2i+1} = \widehat{Xv_{2i+1}}$. Prenons à l'intérieur de H_i un point ζ de C et soit S_{rs} le plus petit arc de C qui passe par ζ et se termine sur h_i . Les extrémités de cet arc ne sauraient coïncider avec X , car s'il y avait à l'intérieur de H_i un circuit d'origine X , la base B_j de ce circuit s'interposerait à B_{x_i} et à $B_{x_{i+1}}$, qui ne seraient alors deux bases consécutives. Donc, S_{rs} est un circuit enraciné à quelque point intermédiaire de φ_{2i} ou de φ_{2i+1} (6. 2). Par ailleurs, tout circuit enraciné à un point intermédiaire de φ_{2i} (par exemple) se trouve tout entier à l'intérieur de H_i , autrement il serait tout entier soit à l'intérieur de B_{x_i} ($i > 0$), soit, par rapport à B' , du côté où il n'y a pas de point de U ($i = 0$), deux hypothèses également inadmissibles.

Dès lors, par l'adjonction des circuits tels que S_{rs} l'arc φ_{2i} se transforme dans l'arc $S_{p_{2i}q_{2i}}$ de C qui se termine aux mêmes points X et u_i et qui ne contient aucun circuit d'origine X ; et les trois arcs $S_{p_{2i}q_{2i}}$, λ_i et $S_{p_{2i+1}q_{2i+1}}$ constituent une courbe $C^{(i)}$, tout à fait analogue à C , qui est la frontière totale d'un ensemble connexe et borné $U^{(i)}$ faisant partie de U . X , point simple de $C^{(i)}$, est donc accessible par l'intérieur de $U^{(i)}$ et par suite par l'intérieur de U .

En tenant compte du résultat du résultat du n.º précédent, nous pouvons dès lors conclure que

1. *Tout point de C est accessible par l'intérieur de U.*

On démontrerait de même que

2. *À la seule exception des bouts limites (12), tout point de C est accessible par l'extérieur de U.*

D'après ce qui précède,

3. *Le voisinage intérieur d'un point frontière X de multiplicité m ⁽¹⁾ est la somme des voisinages intérieurs de ce même point dans m ensembles qu'on peut supposer n'avoir d'autre point commun que X.*

(1) Dans le texte, $m = k + 1$.

Nous pouvons dès lors dire qu'un tel point a m sub-voisinages à l'intérieur de U .

14. C n'est nullement la seule courbe continue qui se confond avec l'ensemble F des points frontières de U , car U se trouve être parfaitement déterminé par l'ensemble des bases B^i ($i \geq 0$) et celles-ci n'ont rien à voir, géométriquement, avec le sens de description des circuits dont se compose C . Nous allons montrer que, parmi les courbes géométriquement équivalentes à C en tant que frontières de U , il y en a toujours une — C' [$y = \psi(t)$] — qui reflète parfaitement la structure même de l'intérieur de U au voisinage de F , car deux points quelconques de cette courbe — $\xi = \psi(\alpha)$ et $\eta = \psi(\beta)$ — peuvent être toujours rejoints par un arc pris tout entier dans le voisinage intérieur de $S'_{\alpha\beta}$. C'est pour cela qu'on peut dire qu'en décrivant C' , on parcourt F par l'intérieur de U .

Pour fixer les idées, supposons que $x = \pi(t)$, en décrivant C , se déplace le long de B^0 dans le sens direct ordinaire (en laissant D^0 à gauche).

Soit X un point multiple de C situé sur B^0 et soit $C'_{\alpha\beta}$ le circuit maximum contigu à B^0 dont X est l'origine. $C'_{\alpha\beta}$ se compose d'un certain nombre k de circuits simples

$$C_0, C_1, \dots, C_{k-1} \quad (C_i = C_{\alpha_i \alpha_{i+1}}, \alpha_0 = \alpha, \alpha_k = \beta),$$

lesquels partagent le voisinage intérieur de X dans U dans $k + 1$ sub-voisinages dont X est le seul point commun. Nous savons qu'on traverse ces sub-voisinages toujours dans le même ordre quand on suit un petit arc de cercle (de centre X) commençant à un point de B^0 en arrière de X et aboutissant à un point de B^0 pris au delà de X . Nous avons donc là un guide et pour l'ordination des bases principales B^i_1 des C_i et pour le sens de parcours sur ces bases mêmes. Nous allons voir qu'il existe une description continue de F dans laquelle les points de B^0 gardent leur ordre propre, tandis que les B^i_1 se trouvent être parcourues comme on vient de l'expliquer.

Soient

$$B^1_{p_0}, B^1_{p_1}, \dots, B^1_{p_{k-1}}$$

les successives bases B_i^1 que rencontre le petit cercle dont il a été question plus haut. Posons (pour $i = 0, 1, \dots, k-1$)

$$\omega_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad \rho_{i+1} = \rho_i + \omega_i, \quad \sigma_{i+1} = \sigma_i + \omega_{p_i} \quad (\rho_0 = \sigma_0 = 0)$$

et, en supposant

$$1) \quad \alpha + \sigma_i < t < \alpha + \sigma_{i+1},$$

soit

$$t' = \rho_{p_i} + (t - \sigma_i), \quad t'' = 2\alpha + \omega_{p_i} + \rho_{p_i} - (t - \sigma_i).$$

Prenons $\pi^1(t)$ égale à $\pi(t)$ en dehors des intervalles (α, β) et, pour les valeurs 1) de t , égale à $\pi(t')$ ou égale à $\pi(t'')$ selon que $x = \pi(t)$ décrit B_{p_i} d'un mouvement direct ou d'un mouvement rétrograde par rapport à D^1 . Je dis que $x^1 = \pi^1(t)$ décrit F^1 comme il a été convenu.

Tout d'abord, x^1 parcourt B^0 exactement comme x . Ensuite, lorsque t croît de α à β , en passant successivement par

$$(\alpha, \alpha + \sigma_1), (\alpha + \sigma_1, \alpha + \sigma_2), \dots, (\alpha + \sigma_{k-1}, \alpha + \sigma_k),$$

t' va lui-même passant par

$$(\alpha_{p_0}, \alpha_{p_0+1}), (\alpha_{p_1}, \alpha_{p_1+1}), \dots, (\alpha_{p_{k-1}}, \alpha_{p_{k-1}+1}),$$

tandis que t'' parcourt ces mêmes intervalles et dans le même ordre, mais toujours de droite à gauche; dans son mouvement le long de F^1 , x^1 parcourt donc successivement $C_{p_0}, C_{p_1}, \dots, C_{p_{k-1}}$, en décrivant les bases principales dans le sens convenu. Nous représenterons par K^1 la courbe que décrit le point $x^1 = \pi^1(t)$.

En arrivant à D^2 , nous n'avons à envisager spécialement que les B^2 . Pour celles de ces bases qui s'appuient sur $B_{p_i}^1$, notre problème est donc, dans le cadre de C_{p_i} , exactement ce qu'était le problème précédent dans le cadre de C . Dans chaque (α, β) , à l'intérieur de chaque $(\alpha + \sigma_i, \alpha + \sigma_{i+1})$, nous aurons dès lors à refaire l'ordre des intervalles des circuits ayant comme bases principales des B^2 enracinées à un même point X^1 de $B_{p_i}^1$, en disposant ces intervalles dans l'ordre même où l'on en reconte les circuits lorsqu'on abandonne F^1 un peu avant X^1 pour suivre un petit arc circulaire aboutissant au delà de ce point. Nous parviendrons par

là à transformer K^1 dans une nouvelle courbe K^2 , qui est décrite par un point déterminé $x^2 = \pi^2(t)$, la fonction π^2 ne différant de π^1 qu'à l'intérieur de quelques intervalles de circuits contigus à certaines bases B^1 . En décrivant K^2 , x^2 parcourt F^1 exactement comme le faisait x^1 et décrit les B^2 dans l'ordre et dans le sens qui ont été fixés.

En poursuivant de la sorte, nous serons amenés à une suite de courbes continues

$$K^0, K^1, K^2, \dots K^n, \dots \quad (K^0 = C),$$

toutes équivalentes à C en tant que frontières de U . Nous allons voir que ces courbes convergent vers une courbe limite.

Soit $\pi^{n+1}(t)$ la fonction qu'on déduit de $\pi^n(t)$ en transformant K^n dans K^{n+1} . En décrivant K^{n+1} , $x^{n+1} = \pi^{n+1}(t)$ parcourt donc F^n exactement comme le faisait $x^n = \pi^n(t)$. Dès lors, $\pi^{n+1}(t)$ et par suite $\pi^{n+p}(t)$ ne peuvent différer de $\pi^n(t)$ que si t appartient à quelque intervalle de circuit maximum C_{rs} contigu à une B^n . Or, d'après le procédé même de transformation de K^n dans K^{n+1} , $x^{n+1}, \dots x^{n+p}, \dots$ restent toujours dans C_{rs} . Le rang de C_{rs} étant au moins $n+1$, $|x^{n+p} - x^n|$ est un infiniment petit en même temps que $\frac{1}{n}$ et par suite $\pi^n(t)$ converge uniformément vers une fonction limite $\psi(t)$, dès lors nécessairement continue.

Soit C' la courbe que décrit $y = \psi(t)$ et soit en général S'_{pq} l'arc de C' qui correspond à l'intervalle de $t=p$ à $t=q$. Prenons sur C' deux points quelconques $\xi = \psi(\alpha)$, $\eta = \psi(\beta)$ ($\beta > \alpha$) et soit (α_0, β_0) le plus petit intervalle auquel correspond un arc se terminant à ξ et à η . Relions ξ à η par une ligne l (simple et continue) dont tous les points intermédiaires soient intérieurs à U et qui en outre aboutisse à ξ par le dernier sub-voisinage de ξ et à η par le premier sub-voisinage de η .

Soit R la région simple que limitent l et l'arc Σ qu'on déduit de $S'_{\alpha_0 \beta_0}$ en faisant l'ablation des circuits qui s'y trouvent contenus. Prenons à l'intérieur de cette région un point quelconque $\zeta = \psi(\nu)$ de C' et soit, dans le sens des t croissantes, $S'_{\nu \tau} = \widehat{\zeta X}$ le plus petit arc de C' aboutissant sur Σ . Étant donné la situation de l , X se trouve être nécessairement un point intermédiaire de Σ . Nous allons montrer que $\alpha_0 < \tau < \beta_0$.

Soit, en effet, B^i la base B^i ($i \geq 0$) de rang le plus petit à laquelle appartient X et soient $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_m$ les diverses valeurs

de t qui fixent X en tant que point de K^h ; l'arc $K_{\theta_1 \theta_m}^h$ de cette courbe qui correspond à l'intervalle (θ_1, θ_m) est donc un circuit contigu à B' .

Comme on l'a vu, c'est dans le passage de K^h à K^{h+1} qu'on change pour la dernière fois les θ_i , lesquelles deviennent alors $\tau_1 = \theta_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}, \tau_m = \theta_m$; cela se fait de telle sorte qu'en suivant un petit arc circulaire γ de centre X on rencontre d'abord les arcs $K_{\theta_1 - \varepsilon \theta_1}^{h+1}$ et $K_{\theta_1 \theta_1 + \varepsilon}^{h+1}$; ensuite, $K_{\theta_2 - \varepsilon \theta_2}^{h+1}$ et $K_{\theta_2 \theta_2 + \varepsilon}^{h+1}$; et ainsi successivement. Comme les τ_i ne changent plus, la limite t'_X de t lorsque $\psi(t)$ tend vers X le long de Σ à partir de ξ et la limite t''_X de t lorsque $\psi(t)$ tend vers X le long de Σ à partir de η seront toutes les deux des τ_i , et il en est de même de la valeur τ qui fixe X sur $\widehat{\zeta X}$. Cet arc s'interposant à $S'_{\alpha_o \nu_X}$ et à $S'_{\nu_X \beta_o}$ le long de γ , nous aurons dès lors $t'_X < \tau < t''_X$, ce qui prouve notre proposition.

En parcourant C' à partir de ζ dans le sens des t décroissantes, on trouve de même un arc $S'_{\sigma \nu} = \widehat{Y\zeta}$ ($\alpha_o < \sigma < \beta_o$) aboutissant sur Σ' , et ce sera évidemment $\sigma = \tau$. À l'intérieur de R , tout point ζ de C' appartient donc à un circuit qui fait partie de $S'_{\alpha_o \beta_o}$ et dont l'origine est un point intermédiaire de Σ .

Il est maintenant facile de montrer que $y = \psi(t)$ décrit F comme il a été convenu, en prouvant pour cela qu'on peut relier ξ à η par un arc λ à la fois intérieur à U et voisin de $S'_{\alpha_o \beta_o}$.

Prenons sur l un point ξ' voisin de ξ et un point η' voisin de η et relierons-les par l'intérieur de R au moyen d'un arc k voisin de Σ . k ne peut être rencontré que par un nombre fini de circuits de $S'_{\alpha_o \beta_o}$, tous intérieurs à R et enracinés à des points intermédiaires de Σ . En procédant comme au n.º 13, on peut donc remplacer k par une autre ligne qui relie ξ' à η' sans rencontrer F et dès lors on pourra aller de ξ à η par l'intérieur de U tout en se maintenant dans le voisinage de $S'_{\alpha_o \beta_o}$, arc contenu dans $S'_{\alpha_o \beta_o}$.

VIDA DA FACULDADE

1940-1941

Nota da Redacção

Tendo o Ex.^{mo} Reitor da Universidade de Coimbra dispensado os Directores das Faculdades, de apresentar, no ano escolar de 1940-1941, o relatório previsto pelo n.º 5.º do artigo 17.º do Estatuto de Instrução Universitária, sôbre a vida dêstes estabelecimentos científicos — a Redacção da *Revista da Faculdade de Ciências* julgou oportuno criar uma secção intitulada *Vida da Faculdade*, na qual se inserem alguns dos elementos que o Director da Faculdade de Ciências recolhera para a elaboração do seu relatório e ainda alguns documentos cuja matéria se prende com a actividade científica ou pedagógica da mesma Faculdade.

Relação do pessoal docente

(Referida a 1 de Dezembro de 1941)

1.ª SECÇÃO

1.º Grupo

Professores catedráticos

1. *Dr. João Pereira da Silva Dias* — nomeação vitalícia.
2. *Dr. José Vicente Martins Gonçalves* — nomeação vitalícia.
3. *Dr. Manuel Marques Esparteiro* — nomeação vitalícia.

Professor auxiliar

1. Vago.

Assistentes

1. *L.^{do} António Libânio Gil Judice* — nomeação por contrato válida até 15.Abr.1942, se antes desta data não regressar o titular do lugar.

É titular dêste lugar, de nomeação vitalícia, o *Dr. Luiz Beda de Sousa Tavares Neto*, actualmente professor catedrático do 2.º grupo da 2.ª secção, por contrato.

2. *L.º Luiz Guilherme Mendonça de Albuquerque* — nomeação por contrato, válida até 2.Dez.1942.

2.º Grupo

Professores catedráticos

1. *Dr. Diogo Pacheco de Amorim* — nomeação vitalícia.
2. *Dr. Manuel dos Reis* — nomeação vitalícia.
3. *Dr. Luiz Beda de Sousa Tavares Neto* — nomeação por contrato, válida até 12.Jan.1942.

Professor auxiliar

1. Vago.

Assistentes

1. *L.º Armando Rêgo Falcão* — nomeação sujeita a recondução, válida até 28.Nov.1942.

2. Vago.

É titular dêste lugar, de nomeação vitalícia o *Dr. Gumerindo Sarmiento da Costa Lôbo*, actualmente encarregado de curso do mesmo grupo, por contrato.

Encarregado de curso

Dr. Gumerindo Sarmiento da Costa Lôbo — nomeação por contrato, válida até 20.Jan.1942.

2.ª SECÇÃO

1.º Grupo

Professores catedráticos

1. *Dr. Mário Augusto da Silva* — nomeação vitalícia.
2. *Dr. João Rodrigues de Almeida Santos* — nomeação por contrato, válida até 8.Set.1942.

Professor auxiliar

1. *L.º João Soares Teixeira Lopes* — nomeação por contrato, válida até 28.Out.1942.

Assistentes

1. *L.º José Lopes Cristo* — nomeação sujeita a recondução, válida até 28.Abr.1944.

2. *L.º José Luiz Rodrigues Martins* — nomeação por contrato, válida até 9.Abr.1942.

3. Vago.

É titular dêste lugar, de nomeação vitalícia, o *Dr. João Rodrigues de Almeida Santos*, actualmente professor catedrático do mesmo grupo, por contrato.

2.º Grupo

Professorês catedráticos

1. *Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa* — nomeação vitalícia.
2. *Dr. António Jorge Andrade de Gouveia* — nomeação por contrato, válida até 27.Nov.1942.

Professor auxiliar

1. *B.º Américo Viana de Lemos* — nomeação por contrato, válida até 18.Mai.1942.

Assistentes

1. *L.º Fernando Pinto Coelho* — nomeação sujeita a recondução, válida até 18.Ago.1942.
2. *L.º Joaquim Anacoreta Correia* — nomeação por contrato, válida até 21.Mar.1942, se antes desta data não regressar o titular do lugar.

É titular dêste lugar, por nomeação vitalícia, o *Dr. António Jorge Andrade de Gouveia*, actualmente professor catedrático do mesmo grupo, por contrato.

3. *L.ª Leonor Maria da Piedade Flôres* — nomeação por contrato, válida até 2.Jun.1942, se antes desta data não regressar o titular do lugar.

É titular dêste lugar, de nomeação vitalícia, o *B.º Américo Viana de Lemos*, actualmente professor auxiliar do mesmo grupo, por contrato.

3.ª SECÇÃO

1.º Grupo

Professores catedráticos

1. *Dr. Anselmo Ferraz de Carvalho* — nomeação vitalícia.
2. *Dr. José Custódio de Moraes* — nomeação vitalícia.

Professor auxiliar

1. *B.º Miguel Marcelino Ferreira de Moura* — nomeação vitalícia.

Assistentes

1. *L.º António Duarte Guimarães* — nomeação vitalícia.
2. *Raúl Fernandes Ramalho de Miranda* — nomeação sujeita a recondução, válida até 5.Fev.1942.

2.º Grupo

Professores catedráticos

1. *Dr. Abílio Fernandes* — nomeação por contrato, válida até 24 Set.1942.
2. Vago.

Professor auxiliar

1. *L.º Artur Augusto Taborda de Morais* — nomeação por contrato, válida até 6.Abr.1943, se antes desta data não regressar o titular deste lugar.
É titular deste lugar, de nomeação vitalícia, o *Dr. Abílio Fernandes*, actualmente professor catedrático do mesmo grupo, por contrato.

Assistentes

1. *L.º José de Barros Neves* — nomeação sujeita a recondução, válida até 10.Jul.1944.
2. *L.º José Gonçalves Garcia* — nomeação por contrato, válida até 30.Nov.1942.

3.º Grupo

Professores catedráticos

1. *Dr. Eusébio Barbosa Tamagnini de Matos Encarnação* — nomeação vitalícia.
2. *Dr. João Gualberto de Barros e Cunha* — nomeação vitalícia (na disponibilidade, por ter atingido o limite de idade).

Professor auxiliar

1. *Dr. Alberto Xavier da Cunha Marques* — nomeação por contrato, válida até 26.Mar.1942.

Assistentes

1. *B.º António Armando Themido* — nomeação vitalícia.
2. *B.º João Miguel Ladeiro* — nomeação vitalícia.
3. Vago.

Encarregado de curso

Dr. José Antunes Serra — nomeação por contrato, válida até 9.Jan.1942.

Professor além do quadro

Dr. Ernst Matthes (professor ordinário da Universidade de Greifswald, Alemanha) — nomeação por contrato, válida até 31.Jul.1942.

Cadeiras anexas de desenho

Professores

1. *Anibal Rui de Brito e Cunha* — nomeação vitalícia.
2. *Fausto Gonçalves da Silva* — nomeação por contrato, válida até 21.Dez.1942.

Publicações

1. Anais do Observatório Astronómico de Coimbra — 1.^a Secção (Fenómenos Solares).
2. Anuário da Sociedade Broteriana.
3. Arquivos da Secção de Biologia e Entomologia.
4. Arquivos da Secção de Biologia e Parasitologia.
5. Boletim da Sociedade Broteriana.
6. Contribuições para o Estudo da Antropologia Portuguesa.
7. Efemérides Astronómicas.
8. Index Seminum.
9. Memórias da Sociedade Broteriana.
10. Memórias e Estudos do Museu Zoológico.
11. Memórias e Notícias do Museu Mineralógico e Geológico.
12. Observações Magnéticas do Instituto Geofísico.
13. Observações Meteorológicas do Instituto Geofísico.
14. Observações Sismológicas do Instituto Geofísico.
15. Publications du Laboratoire de Physique de l'Université de Coimbra.
16. Revista da Faculdade de Ciências.

Permuta de publicações

O estado de guerra obrigou a suspender parcialmente o serviço de permuta das publicações da Faculdade com publicações estrangeiras. Raras publicações estrangeiras chegam à Faculdade; e, com receio de extravio, guardam-se os exemplares das publicações da Faculdade, destinados ao estrangeiro, para serem remetidos ao seu destino depois da guerra.

Investigação científica

Proseguiram os trabalhos de investigação citados no Relatório do Director, relativo ao ano escolar de 1939-1940 (*Revista da Faculdade de Ciências*, vol. VIII, pp. 162-170). Dos resultados obtidos no ano escolar de 1940-1941, dão conta alguns dos estudos publicados, que em seguida se registam.

Estudos publicados

- Abílio Fernandes — *Morfologia e biologia das plantas carnívoras (1.ª parte)*. Anuário da Sociedade Broteriana, VI, Coimbra, 1940.
- — *Morfologia e biologia das plantas carnívoras (2.ª parte)*. Ibidem, VII, 1941.
- — *Estudo das raças cariológicas de Narcissus Bulbocodium L*. Boletim da Sociedade Broteriana, 2.ª, XV, Coimbra, 1941.
- Abílio Fernandes e José de Barros Neves — *Sur l'origine des formes Narcissus Bulbocodium L. à 26 chromosomes*. Boletim da Sociedade Broteriana, 2.ª, XV, Coimbra, 1941.
- Alberto Xavier da Cunha Marques — *Alguns tardígrados da Fauna portuguesa*. Memórias e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra, I, 121, Coimbra, 1941.
- Antero Frederico de Seabra — *Notas entomológicas (Saltatoria)*. Memória e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra, I, 101-A, Coimbra, 1940.
- — *Contribuições para o inventário da fauna lusitânica. Insecta. Homoptera (Cicadoideae e Fulgoroideae)*. Ibidem, 121, 1941.
- — *Contribuições para o inventário da fauna lusitânica. Insecta. Heteroptera*. Ibidem, 123, 1941.
- — *Contribuições para o inventário da fauna lusitânica. Insecta. Homoptera (Coccidae)*. Ibidem, 125, 1941.
- — *Observações sobre as espécies da fam. Cicindelidae de Portugal*. Ibidem, 126, 1941.
- António Armando Themido — *Répteis e Batráquios das Colónias Portuguesas* (Catálogo das colecções do Museu Zoológico de

- Coimbra). Memórias e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra, 1, 119, Coimbra, 1941.
- Diogo Pacheco de Amorim — *Do erro e da sua eliminação* (Discurso proferido na sessão de abertura da 1.^a Secção do Congresso de História da Actividade Científica em Portugal, Coimbra, 22 de Novembro de 1940). Biblos, xvii, Coimbra, 1941.
- — *Princípios fundamentais do marxismo*. Estudos, xviii, Coimbra, 1941.
- — *Finanças e Economia*. Colaboração semanal no jornal «Comércio do Porto».
- — *Crónicas Financeiras*. Colaboração permanente no mensário «Jornal de Fátima».
- Ernst Matthes — *Welche Zeitschriften sind für ein zoologisches Institut am wichtigsten?* Memórias e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra, 1, 122, Coimbra, 1941.
- Eusébio Barbosa Tamagnini de Matos Encarnação — *Os grupos sanguíneos dos Portugueses*. Revista da Faculdade de Ciências, viii, Coimbra, 1940.
- Helmut Helling — *Novo Catálogo dos Peixes de Portugal em colecção no Museu de Zoologia da Universidade de Coimbra*. Memórias e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra, 1, 115, Coimbra, 1940.
- João Pereira da Silva Dias — *Cenógrafos italianos em Portugal*. Estudos Italianos em Portugal, 4, Lisboa, 1941.
- José António Madeira — *Estudo comparativo dos processos de registo gráfico e de recepção acústica (extinção de sinais) na determinação da hora de recepção de um sinal horário rítmico*. (Tese apresentada ao Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, Saragoça, Dezembro de 1940). Publicações do Sindicato Nacional dos Engenheiros Geógrafos, 1, Lisboa, 1941.
- José Antunes Serra — *O esterno nos Portugueses. Caracteres métricos e morfológicos do esterno no homem*. Revista da Faculdade de Ciências, ix, Coimbra 1941.
- José Antunes Serra e Luiz Pinto Canêdo de Moraes — *Sobre a determinação do índice orbitário e a assimetria da órbita*. Revista da Faculdade de Ciências, ix, Coimbra, 1941.
- José de Barros Neves — *Vide* Abílio Fernandes.
- José Custódio de Moraes — *Mais alguns fósseis da região do Pinhal de Leiria* (introdução à classificação feita por Mr. Reginald

- Cox, Sc. D., naturalista da Secção de História Natural do Museu Britânico). *Memórias e Notícias* (Publicações do Museu Mineralógico e Geológico da Universidade de Coimbra), 10, Coimbra, 1941.
- — *O conhecimento dos ventos dos Oceanos Atlântico e Índico nos séculos XV e XVI*. Ibidem.
- José Vicente Martins Gonçalves — *Sur l'intégrale prise sur un contour variable*. *Portugaliae Mathematica*, 1, Lisboa, 1940.
- — *Sur l'inconnue du théorème des accroissements finis*. Ibidem, 11, 1941.
- — *Sur quelques théorèmes classiques*. *Revista da Faculdade de Ciências*, 1x, Coimbra, 1941.
- — *Sur la primitive des différentielles totales*. Ibidem.
- — *Sur une classe de frontières de domaines*. Ibidem.
- Julieta Louro — *A vida e a obra de Madame Curie*. *Publications du Laboratoire de Physique de l'Université de Coimbra*, 1, Coimbra, 1941.
- Luiz Beda de Sousa Tavares Neto — *Contribuição para o estudo da teoria das funções* (continuação). *Revista da Faculdade de Ciências*, 1x, Coimbra, 1941.
- — *Apontamentos de Cálculo infinitesimal* (reedição), Coimbra, 1941.
- Luiz Pinto Canêdo de Moraes — *Vide José Antunes Serra*.
- Mário Augusto da Silva — *A actividade científica dos primeiros directores do Gabinete de Física que a reforma pombalina criou em Coimbra, em 1772*. *Revista da Faculdade de Ciências*, 1x, Coimbra, 1941; *Publications du Laboratoire de Physique de l'Université de Coimbra*, 1, Coimbra, 1941.
- — *A vida e a obra de E. Branly*. *Publications du Laboratoire de Physique de l'Université de Coimbra*, 1, Coimbra, 1941.

Participação em Congressos

(Comunicações)

Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, Saragoça, 1940:

Dr. Abílio Fernandes

Dr. António Jorge Andrade de Gouveia

L.^{do} Fernando Pinto Coelho

Dr. João Rodrigues de Almeida Santos
Eng.-geógrafo José António Madeira
Dr. José Antunes Serra
L.^{do} José de Barros Neves
L.^{do} Luiz Pinto Canêdo de Moraes

Congresso de Ciências da População, Pôrto, 1940:

L.^{do} António de Queiroz Barbosa Fernandes Tomaz Lopes da Cruz
Dr. Eusébio Barbosa Tamagnini de Matos Encarnação
Dr. José Antunes Serra

Congresso de História da Actividade Científica em Portugal, Coimbra, 1940:

Dr. Anselmo Ferraz de Carvalho
Dr. Diogo Pacheco de Amorim
Dr. Eusébio Barbosa Tamagnini de Matos Encarnação
Dr. Gumersindo Sarmiento da Costa Lôbo
Dr. José Antunes Serra
Dr. José Vicente Martins Gonçalves
Dr. Mário Augusto da Silva

I Congresso Nacional de Ciências Naturais, Lisboa, 1941:

Dr. Abílio Fernandes
Dr. Alberto Xavier da Cunha Marques
Dr. Antero Frederico de Seabra
B.^{ol} António Armando Themido
Dr. Ernst Matthes
Dr. Helmut Helling
Dr. João Gualberto de Barros e Cunha
L.^{do} José de Barros Neves.

Relações com o Instituto para a Alta Cultura

Centros de Estudos, criados junto da Faculdade

Centro de Estudos de Física e Química:

1. Dr. Mário Augusto da Silva (director)
2. Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa (director)
3. Dr. João Rodrigues de Almeida Santos
4. L.^{do} Fernando Pinto Coelho.

Centro de Estudos de Ciências Naturais:

1. Dr. Eusébio Barbosa Tamagnini de Matos Encarnação (director)
2. Dr. Abílio Fernandes
3. Dr. Antero Frederico de Seabra
4. Dr. José Antunes Serra.

Estabelecimentos subsidiados

Laboratório de Física — 6.500\$00, para aquisição dum comparador.

Laboratório Químico — 12.500\$00, para aquisição de diverso material.

Instituto Botânico Dr. Júlio Henriques — 19.800\$00, para aquisição dum aparelho de micro- e macro-fotografia (Cytophot-Busch).

Museu e Laboratório Zoológico — 5.000\$00, para aquisição de diverso material.

Bolseiros

1. Dr. José Vicente Martins Gonçalves
2. Dr. João Rodrigues de Almeida Santos
3. L.^{do} Fernando Pinto Coelho
4. L.^{do} José de Barros Neves
5. Dr. Antero Frederico de Seabra
6. Dr. José Antunes Serra.

Subsídios para participação em congressos

1. Dr. João Rodrigues de Almeida Santos (Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, Saragoça, 1940)
2. L.^{do} Fernando Pinto Coelho (idem).

Outras relações externas

Secção Matemática:

Por obsequiosa interferência do Instituto Francês em Portugal (Secção de Coimbra), a Biblioteca Matemática pôde vencer as dificuldades que a guerra trouxe à aquisição de obras científicas publicadas em França.

Laboratório de Física:

A participação do Dr. João Rodrigues de Almeida Santos no Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, em Saragoça, deu-lhe ensejo de obter a colaboração do Prof. Palácios, do Instituto Nacional de Física e Química de Madrid, e Prof. Juan Cabrera, da Universidade de Saragoça, que se dedicam também ao estudo da estrutura cristalina pelos raios X.

O Laboratório de Física tem prestado assistência técnica a diversos serviços das Faculdades de Letras, Medicina e Ciências (particularmente na remodelação das instalações do Observatório Astronómico para recepção e registo de sinais horários pela T. S. F.).

O Laboratório de Física promoveu a realização das seguintes conferências: *A vida e a obra de E. Branly*, pelo Dr. Mário Augusto da Silva; e *A vida e a obra de Madame Curie*, por D. Julieta Louro.

Laboratório de Química:

Continua a colaboração com o Instituto de Antropologia desta Faculdade, com o Laboratório de Química Biológica da Faculdade de Medicina e com o Instituto de Hidrologia. Recentemente fez-se o estudo de vitaminas em bananas, em colaboração com o Grémio de Exportadores de Frutos e Produtos Hortícolas da Ilha da Madeira; e estão em curso trabalhos sobre resinas, em colaboração com a Junta Nacional dos Resinosos. Procedeu-se ainda à análise de águas minerais de diversas proveniências.

Por intermédio do Laboratório de Química a Faculdade obteve a colaboração dos Srs. I. Ribas, A. Caño e A. S. Contra, do Laboratório de Química Orgânica da Universidade de Salamanca, que publicaram na *Revista da Faculdade de Ciências*, um artigo intitulado *Estudios cualitativos sobre algunas reacciones de los sulfuros orgánicos y en especial del de etilo $\beta\beta'$ diclorado*.

O Instituto Inglês em Portugal (Secção de Coimbra) tem continuado a adquirir, por acôrdo com o Laboratório Químico, os mais importantes tratados, monografias e revistas de química, que se vão publicando em Inglaterra.

Funcionou neste Laboratório uma parte do Curso de Defesa Passiva, da Legião Portuguesa.

O Dr. António Jorge Andrade de Gouveia realizou no Curso de Férias da Escola de Farmácia de Coimbra uma lição teórica sobre *Métodos espectrofotométricos* e uma lição prática sob o título *Determinação espectrofotométrica de vitamina A em óleos de fígados de bacalhau*.

Museu e Laboratório Mineralógico e Geológico:

Continuou a fazer-se em grande escala e gratuitamente a determinação de minerais enviados por particulares ou trazidos pelos alunos.

Instituto Botânico Dr. Júlio Henriques:

O serviço de troca de plantas e sementes manteve-se aproximadamente ao nível dos anos anteriores.

O estudo da Flora de Angola, que se estava efectuando em colaboração com o Museu Britânico, paralisou completamente em consequência da guerra.

Deu-se resposta a numerosas consultas dirigidas por particulares, à cerca do nome, utilização, cultura e distribuição geográfica de plantas.

Museu e Laboratório Zoológico

Principiaram em Julho de 1940, em colaboração com a Estação Agronómica Nacional e com a Junta Nacional do Azeite, os trabalhos para o estudo e o combate do *Dacus oleae* (mosca da oliveira).

Colaboraram nas *Memórias e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra* o Prof. Dr. W. Arndt, do Museu Zoológico de Berlim, o Prof. Dr. A. de Barros Machado, da Universidade do Porto, e o distinto entomologista Padre Ramiro Neves, que ocuparam os n.ºs 116 a 118 daquela publicação, com os seguintes artigos: *Eine neuere Ausbente von Meeresschwämmen der West- und Südküste Portugals*, *Araignées nouvelles por la faune portugaise* (II) e *Notas entomológicas (Coleópteros)*.

O Dr. Alberto Xavier da Cunha Marques realizou uma conferência no Instituto de Histologia e Embriologia da Faculdade de

Medicina da Universidade de Lisboa, sôbre *Algumas questões actuais de genética fisiológica: acções fenocópicas e acções hormonais de genes.*

Instituto de Antropologia:

Em colaboração com o Museu Etnológico Dr. Leite de Vasconcelos, anexo à Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa, prosseguiu o estudo do espólio da necrópole visigótica da Silveirona (Estremoz).

Observatório Astronómico:

Mantem-se com inteira regularidade a colaboração no *Quartely Bulletin on Solar Activity*, publicado pelo Observatório Federal de Zürich sob os auspícios da União Astronómica Internacional.

Continua também a colaboração, pelas *Efemérides Astronómicas*, com algumas Juntas Autónomas de portos do continente e ilhas adjacentes, na elaboração de tabelas anuais de marés.

A permuta de espectroheliogramas com o Observatório Astronómico de Meudon (Paris) está suspensa desde meados de 1940, em consequência do estado de guerra na Europa central.

Estas mesmas dificuldades afectaram a colaboração do Dr. Gumerindo Sarmiento da Costa Lobo na Comissão de Bibliografia Astronómica Internacional, da qual é delegado para Portugal e América do Sul.

O L.^{do} José António Madeira preparou as *Efemérides Astronómicas para o ano de 1942, para uso da Artelharia.*

Instituto Geofísico:

Manteve-se o serviço de colaboração nacional e internacional de meteorologia, magnetismo terrestre e sismologia.

O problema da investigação científica em Portugal

Exposição feita pelo Prof. Dr. Eusébio Tamagnini
ao conselho escolar da Faculdade, em con-
gregação de 9 de Julho de 1940, e a seguir
levada ao conhecimento de S. Ex.^a o
Ministro da Educação Nacional

Com a autoridade proveniente do alto cargo que desempenha no Ministério da Educação Nacional, publicou o Sr. Prof. Dr. Celestino da Costa um extenso relatório sôbre o magno problema da investigação científica ⁽¹⁾. No parágrafo referente às ciências naturais diz o seguinte:

«No domínio das ciências naturais não se tem feito progressos entre nós».

Parece, desta passagem, dever inferir-se que nos outros campos científicos os progressos tem sido maiores. Todavia, na documentação publicada pelo autor, nada se encontra que justifique a inferência. Seria exacta a afirmação de que, dum modo geral, nos tempos correntes, não se tem revelado investigadores científicos de categoria internacional, mas em todos os campos e não apenas no das ciências naturais.

Mal se compreenderá pois a especificação efectuada pelo Sr. Prof. Dr. Celestino da Costa se nos limitarmos à transcrição da citada passagem. O que se pretendeu foi, porém, a pretexto da falta de naturalistas de envergadura, *contar uma história* do que sucedeu a um naturalista, com o evidente propósito de visar a Faculdade de Ciências de Coimbra.

Diz o Sr. Presidente do Instituto para a Alta Cultura (cf. págs. 15 e 16):

«Há três anos, um naturalista dum dos nossos Museus de His-

(1) A. CELESTINO DA COSTA — *O Problema da Investigação Científica em Portugal* (Relatório apresentado pelo Presidente do Instituto para a Alta Cultura, Prof. Dr. A. Celestino da Costa, e aprovado na reunião da Direcção de 16 de Julho de 1938). Coimbra, 1939.

tória Natural, supondo possível que lhe fôsem confiadas funções importantes nesse museu, solicitou e obteve, com o parecer abertamente favorável da respectiva Faculdade de Ciências, uma bôlsa para ir visitar museus e institutos zoológicos. Dessa missão se desempenhou cabalmente como consta do respectivo relatório, visitando e estudando a organização de muitos institutos e museus de vários países».

«Á volta, a mesma Faculdade, que o fizera Doutor «honoris causa» e até aí o contratara como professor, cessou de o fazer e hoje encontra-se reduzido ao mísero ordenado de naturalista (1.600\$00), de nada tendo servido, nem a sua honrada e longa carreira de naturalista, nem a sua viagem de estudo».

Fica-se perplexo com semelhante atitude. O Sr. Presidente do Instituto para a Alta Cultura foi manifestamente infeliz ao escrever estas passagens num relatório oficial.

Da história contada pelo Sr. Prof. Celestino da Costa parece dever inferir-se o seguinte:

1) Que no Museu onde trabalha o naturalista em questão, há outras funções importantes que não as de naturalista, a que o mesmo aspirava.

Ora, a não serem as de director, não sabemos quais elas sejam.

2) Que êsse naturalista supôs que uma visita a Museus e Institutos Zoológicos estrangeiros seria razão suficiente para lhe serem conferidas tais funções; isto é, *para ser nomeado director do Museu em questão, ou, por outras palavras, para ser nomeado professor da Faculdade.*

Com efeito, pelo art. 128.º do Regulamento da Faculdade de Ciências, o Museu e Laboratório Zoológico é um *Estabelecimento anexo* da Universidade de Coimbra; e o art. 130.º do mesmo regulamento diz: «Cada um dos estabelecimentos mencionados nos dois artigos anteriores será dirigido por um professor catedrático...».

3) Que a Faculdade que o fizera Doutor «honoris causa» e até aí o contratara como professor, à volta, quási como castigo, cessára de o contratar.

4) Que por êsse facto o mesmo naturalista se encontra hoje reduzido ao mísero ordenado de naturalista (1.600\$00).

Ora, que um naturalista de qualquer Museu duma Faculdade universitária aspire aos lugares docentes compreende-se perfeitamente. O que já se não compreende bem é que um naturalista

suponha que *uma simples visita a museus e institutos zoológicos seja prova suficiente para ser nomeado professor do quadro da referida Faculdade.*

O ingresso nos quadros docentes da Faculdade de Ciências faz-se normalmente por *concurso de provas públicas*, por *transferência* das Faculdades congêneres, ou por *convite*. E o § 1.º do artigo 87.º do Regulamento da Faculdade de Ciências diz:

«O provimento dos professores catedráticos por *convite*, ou por transferência, *será proposto à Faculdade por três professores catedráticos*, em relatório fundamentado, discutido em sessão de conselho escolar expressamente convocado. Para que a proposta possa ter seguimento *é necessário que seja aprovada ou subscrita por quatro quintos dos professores catedráticos em exercício*».

Não consta que tal proposta tenha sido entregue à Faculdade.

Se o naturalista supôs que a tal visita corresponderia, pura e simplesmente, ao convite a que o Regulamento se refere, enganou-se nas suas conjecturas. Nem tão pouco tal visita lhe foi sugerida pela Faculdade. Essa idéa brotou espontânea no espírito do naturalista; o parecer abertamente favorável da Faculdade é tudo quanto há de mais natural; a Faculdade só pode ter interesse e desejar que aos seus funcionários seja dada oportunidade para visitarem os estabelecimentos congêneres dos países de grande cultura científica.

A Faculdade apenas se poderia ter admirado da facilidade com que o referido naturalista alcançou o elevado subsídio pecuniário com que custeou a sua longa viagem, quando aos professores que desejam activamente participar nos congressos científicos internacionais, o Instituto para a Alta Cultura a muito custo concede verbas mais do que insuficientes.

A nota de que *à volta*, a Faculdade que o fizera Doutor «*honoris causa*» e até aí o contratara como professor, deixou de o fazer, *é exacta, mas devia ter-se acrescentado que foi o referido naturalista que em seu officio de 17 de Janeiro de 1936 rescindiu o contrato e se recusou a reger os cursos de que a Faculdade o tinha encarregado.*

Finalmente, a Faculdade não tem culpa da exigüidade dos vencimentos dos seus naturalistas que, todavia, quando procuram tais lugares, sabem perfeitamente a quanto montam os respectivos proventos.

No relatório que determinou estas considerações sugeriu ainda o Sr. Presidente do Instituto para a Alta Cultura, para resolver (!!)

a questão dos Museus de História Natural, que se reúnam os nossos poucos naturalistas num Museu Colonial Central, feito de acôrdo com o Ministério das Colónias . . . (1).

Como manifestação do *espírito universitário* que inspira o mais alto organismo português de fomento pedagógico, tal alvitre é inconcebível.

Às Faculdades de Ciências assiste o direito de fazer ouvir o seu mais veemente protesto contra a ligeireza com que se pretende diminuir o alcance da sua capacidade cultural.

Serviço de inventariação da bibliografia científica existente em Portugal

Exposição feita pelo Prof. Dr. Eusébio Tamagnini
ao conselho escolar da Faculdade, em congregação de 9 de Julho de 1940, e a seguir
levada ao conhecimento de S. Ex.^a o
Ministro da Educação Nacional

O Instituto para a Alta Cultura acaba de publicar o Relatório elaborado pelo antigo bolseiro da *Junta da Educação Nacional*, o Dr. António Monteiro, sobre o *Serviço de inventariação da bibliografia científica existente em Portugal* (2).

A pág. 7 e seguintes dessa publicação são transcritas várias passagens do *Relatório sobre as necessidades da investigação científica em Portugal*, apresentado à Junta de Educação Nacional, pelo Sr. Prof. Dr. Celestino da Costa em 6 de Março de 1930. Êsses trechos são reproduzidos com o objectivo de mostrar «as grandes deficiências bibliográficas nacionais afirmando-se a pág. 12: «Pelas transcrições atrás indicadas se verifica que, salvo no caso da Faculdade de Medicina de Lisboa e do Instituto Botânico de Coimbra, a maior parte das organizações científicas portuguesas não possuem os recursos bibliográficos necessários para a realização de trabalhos de investigação».

(1) *l. c.*, pág. 16.

(2) *Instituto para a Alta Cultura — Serviço de Inventariação da Bibliografia Científica Existente em Portugal* (Relatório). Lisboa, 1939.

Não se compreende o objectivo que o autor teve em vista quando, ao anunciar a pobreza bibliográfica franciscana dos nossos centros de estudos, regista aquelas duas excepções: a Faculdade de Medicina de Lisboa e o Instituto Botânico de Coimbra!

Se pretendeu fazer justiça aos esforços dos respectivos serviços no sentido de se equiparem convenientemente para a árdua tarefa da investigação científica, poderia ter sido um pouco mais liberal a transcrição e reproduzir também as palavras do Sr. Prof. Dr. Celestino da Costa a páginas 20 do mesmo relatório (1), sôbre o *Instituto de Antropologia de Coimbra*.

Não se justifica a omissão, e o caso é tanto mais para estranhar quanto é certo que, sendo o Instituto de Antropologia de Coimbra na bôca do Sr. Presidente do Instituto para a Alta Cultura «*caso excepcional entre os nossos laboratórios, com bibliografia bastante abundante onde se vêem muitas assinaturas e colecções completas*», é especialmente citada a Biblioteca do Instituto de Antropologia do Pôrto que, no relatório do Sr. Prof. Dr. Celestino da Costa apenas mereceu a qualificação de «razoável».

Teria assim aumentado duma unidade o número dos Institutos universitários onde não há falta de bibliografia periódica para documentação de trabalho sério de investigação científica.

De facto, na Biblioteca do Instituto de Antropologia da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, assinam-se, ou recebem-se por permuta, as seguinte revistas:

I — MORFOLOGIA, ANATOMIA E ANTROPOLOGIA

- 1) *Acta Instituti Anatomici Universitatis Helsingfors — Helsinki*, Tômoo II (1929) a Tômoo X (1938).
- 2) *American Journal of Physical Anthropology — Philadelphia*, Vol. I (1918) a Vol. XXV (1939).
- 3) *Archiv für Anthropologie — Braunschweig*, 1.^a Série: Vol. I (1866) a Vol. 28 (1903); 2.^a Série: Vol. I (1904) a Vol. 21 (1928).
- 4) *Archivio per l'Antropologia e la Etnologia — Firenze*, Vol. 3 (1673) a Vol. 68 (1938).

(1) *Junta Nacional da Educação — Relatórios, propostas e projecto de orçamento para o ano económico de 1930-31*. Lisboa, 1930.

- 5) *Arquivo de Anatomia e Antropologia — Lisboa*, Vol. I (1913-1914) a Vol. XIX (1938).
- 6) *L'Anthropologie — Paris*, Vol. I (1890) a Vol. XLIX (1939).
- 7) *Bulletin de la Société d'Anthropologie de Paris — Paris*, Tômoo I (1860) a Tômoo X, 4.^a Série (1899).
- 8) *Bulletins et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris — Paris* Tômoo I, 5.^a Série (1900) a Tômoo X, 8.^a Série (1939).
- 9) *Folia Anatomica Universitatis Conimbrigensis — Coimbra*, Vol. I (1926) a Vol. XIV (1939).
- 10) *Gegenbaurs Morphologische Jahrbuch — Leipzig*, Vol. 66 (1931) a Vol. 84 (1939).
- 11) *Institut Français d'Anthropologie — Supplément a L'anthropologie — Paris*, Tômoo I, N.º 1 (1911) a N.º 11 (1913) e Tômoo II, N.º 1 (1914).
- 12) *Journal of Anatomy and Physiology — Cambridge*, Vol. 46, 3.^a Série, Vol. VI (1912) a Vol. 50, 3.^a Série. XI (1916).
- 13) *Journal of Anatomy — Cambridge*, Vol. 51, 3.^a Série, XII (1917) a Vol. 73 (1939).
- 14) *The Journal of the Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland — London*, Vol. I (1872) a Vol. LXVII (1937).
- 15) *Meddelelser om Danmarks Antropologi udgivet af den Antropologiske Komité — Kobenhavn*, Vol. II, N.º 3 (1928), Vol. III, N.º 1 a 3 (1932).
- 16) *Mémoires de la Société d'Anthropologie de Paris — Paris*, I Série, Vol. I (1860) a Vol. 3 (1868-1872), II Série, Vol. I (1873) a Vol. 3 (1888) e III Série, Vol. I (1895).
- 17) *Mitteilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien — Wien*, Vol. 50-51 (1920) a Vol. 56-57 (1926) e Vol. 67 (1937) a Vol. 69 (1939).
- 18) *Revista del Instituto de Antropología de la Universidad Nacional de Tucumán — Tucumán*, Vol. I, N.ºs 1 a 3 (1938).

- 19) *Revista Argentina de Paleontologia y Antropologia* — Buenos-Ayres, Vol. I, N.ºs 1 a 6 (1935).
- 20) *Revue Anthropologique* — Paris, Ano I (1891) a Ano XLIX (1939).
- 21) *Revue d'Anthropologie* — Paris, I Série, N.º 1 (1872) a N.º 6 (1877), II Série, N.º 1 (1878) a N.º 8 (1885) e III Série, N.º 1 (1886) a N.º 4 (1889).
- 22) *Revue Turque d'Anthropologie* — Istanbul, N.º 8 (1929), N.º 9 (Março) e 10 (Setembro) 1930, N.º 11 Março (1931), N.ºs 13-14, Março-Setembro (1932), N.ºs 15-16, Março (1934), N.ºs 17-18, Março (1936) e N.ºs 19-22, Setembro (1939).
- 23) *Rivista di Antropologia* — Roma, Vol. I (1893) a Vol. XXXI (1935-1937).
- 24) *Sociedad Española de Antropologia, Etnografia y Prehistoria* — Madrid, Vol. I (1921) a Vol. XII (1935).
- 25) *Trabalhos da Sociedade Portuguesa de Antropologia e Etnografia* — Porto, Vol. I, Fascs. 1 a 4 (1919 a 1922) a Vol. IX, Fascs. 1 e 2 (1939).
- 26) *Verhandlungen der Gesellschaft für Physische Anthropologie* — Stuttgart, Vol. I (1926) a Vol. VIII (1937) e Vol. IX (1938).
- 27) *Zeitschrift für Morphologie und Anthropologie* — Stuttgart, Vol. I (1899) a Vol. XXXVIII (1939).

II — ETNOLOGIA E ETNOGRAFIA

- 28) *American Anthropologist* — Menasha, Wisconsin (U. S. A.), Vol. XI, (1909) a Vol. XLI (1939).
- 29) *Anales del Museo del Pueblo Español* — Madrid, Tomo I, N.ºs 1 e 2 (1935).
- 30) *Anthropological Papers of the American Museum of Natural History* — New York, Vol. X (1917), e Vols. XIV (1914) a Vol. XXXVII, (1940): Nota — Faltam Parts I a IV (inclusivé) do Vol. X, Part II do Vol. XV, Part IV do Vol. XIX, Part III do Vol. XX, Parts III e IV do Vol. XXVI, Part IV do Vol. XXVIII.

- 31) *Boletim da Agência Geral das Colónias — Lisboa*, Ano I, N.ºs 1 a 3 (1925) a Ano xv, N.º 168 (1939): Nota — Falta o N.º 140 referente ao ano XIII (1937), o N.º 166 referente ao ano xv (1939), N.ºs 169 a 174 incl. (Julho a Dezembro de 1939) e N.ºs 175 a 180 incl. (Janeiro a Junho de 1940).
- 32) *Ethnos — México*, Tomo I, N.º 5 (1925).
- 33) *Inca — Lima, Perú*, Vol. I, N.ºs 1 a 4 (1923).
- 34) *Institut Indochinois pour L'Étude de L'Homme — Hanoi*, Compte Rendu des séances de l'année 1938 e Tõmo II, Fasc. I (1939).
- 35) *L'Homme — Journal illustré des Sciences Anthropologiques — Paris*, 1.º Ano (1884) a 4.º Ano (1887).
- 36) *Man — London*, Fasc. 1-3 (1901-1903) a Fasc. 39 (1939).
- 37) *Memoirs of the American Anthropological Association — Menasha (U. S. A.)*, Vol. IV (1917) a Vol. VI (1919) e N.º 29 (1923) a N.º 53 (1940).
- 38) *O Mundo Português — Lisboa*, Vol. I (1934) a Vol. VI (1939).
- 39) *Rassenkunde und Rassengeschichte der Menschheit — Stuttgart*, Vol. I, Fasc. 1 (1937) a Fasc. 7 (1939): Nota — Falta o Fasc. 5 deste Vol.
- 40) *Revue d'Ethnographie — Paris*, Tõmo I (1882) a Tõmo VIII (1889).
- 41) *Volk und Rasse — München*, Vol. I (1926) a Vol. XIV (1939).
- 42) *Yale University Publications in Anthropology — New Haven*, N.ºs 1 a 7 (1936) a N.º 22 (1940).
- 43) *Zeitschrift für Ethnologie — Berlin*, Vol. 68, N.ºs 1 a 6 (1936) a Vol. 71, N.ºs 1 a 6 (1938) e os N.ºs 1 a 3 do Vol. 72 (1939).
- 44) *Zeitschrift für Rassenkunde — Stuttgart*, Vol. I (1925) a Vol. X, (1939).
- 45) *Zeitschrift für Rassenphysiologie — München*, Vol. 1 (1929) a Vol. 10 (1938).

III — CRIMINOLOGIA E MEDICINA LEGAL

- 46) *Archives d'Anthropologie Criminelle* — Paris, Tome xxvi (1911) a Tome 29 (1914).
- 47) *Archivio di Antropologia Criminale* — Torino, Vol. 32 (1911) a Vol. 56 (1936).
- 48) *Arquivo de Medicina Legal* — Lisboa, Vol. I (1922) a Vol. VII (1934).
- 49) *Arquivo da Repartição de Antropologia Criminal, Psicologia Experimental e Identificação Civil do Porto* — Porto, Vol. I (1931) a Vol. IV (1936).
- 50) *Boletim dos Institutos de Criminologia* — Lisboa, Vol. I (1922) a Vol. 19 (1934) e Vol. I N.º 1 a 3, 1.º e 2.º Semetres (1937-38) a N.º 4, 1.º Semestre (1939).
- 51) *Estudos do Instituto de Criminologia de Coimbra* — Coimbra, Vol. I (1935).

IV — BIOLOGIA, HEREDITARIEDADE, EUGÉNICA

- 52) *Anales del Instituto de Biología, Universidad Mexico - Mexico*, Tõmo IV (1933) a Tõmo VII (1936).
- 53) *Archives Portugaises des Sciences Biologiques* — Porto, Tomo II Fascs. I-II-III (1927-1929) a Tomo IV, Fasc. I (1935).
- 54) *Archiv für Rassen und Gesellschafts-Biologie* — München, Vol. 18, (1926) a Vol. 33 (1939).
- 55) *Arquivos da Secção de Biologia e Parasitologia* — Coimbra, Vol. I, Fasc. I a IV (1929-1930) a Vol. III (1939).
- 56) *Biologisches Zentralblatt* — Leipzig, Vol. 50 (1930) a Vol. 59 (1939).
- 57) *The Bulletin of Basic Science Research* — Cincinnati, Vol. 3, N.ºs 1 a 4 (1931) e Vol. 4, N.ºs 1 e 2 (1932).
- 58) *Eugenics Review* — London, Vol. I (1909-1910) a Vol. xxx (1939).
- 59) *Genetica* — Gravenhage, Vol. I (1919) a Vol. XXI (1939).

- 60) *Human Biology — Baltimore, (U. S. A.),* Vol. (1929) a Vol. xi (1939).
- 61) *Journal of Genetica — Cambridge,* Vol. i (1910-1911) a Vol. xxxix, (1939): Nota — Só possuímos o N.º 3 (Julho de 1931) do Vol. 24.
- 62) *Journal of Heredity — Washington,* Vol. vi (1915) a Vol. xxx (1939).
- 63) *L'Année Biologique — Paris,* Vol. i (1895) a Vol. xiii (1908).
- 64) *Société Portugaise de Biologie — Section de Coimbra — Coimbra,* Vol. i (1927-1928) e Vol. ii (1929-1930):
- 65) *Studies of the Institutum Divi Thomae — Cincinnati, Ohio (U. S. A.),* Vol. i, N.ºs 1 e 2 (Novembro de 1937) e Vol. ii, N.º 1 (Novembro de 1938).

V — MÉTODOS E ESTATÍSTICA BIOLÓGICA

- 66) *Annals of Eugenics — London,* Vol. i (1925-1926) a Vol. ix (1939).
- 67) *Biometrika — London, Cambridge,* Vol. i (1901) a Vol. xxxi (1939).
- 68) *Metron — Itália,* Vol. i, N.º 3 (1921).
- 69) *S. A. S. — Bollettino del Comitato Internazionale per l'Unificazione dei Metodi e per la Sintesi in Antropologia, Eugenica e Biologia — Bologna,* Vol. i, N.º 1 (1934) a Vol. i, N.º 8 (1939).

VI — BIBLIOGRAFIA BIOLÓGICA

- 70) *Anthropologischer Anzeiger — Stuttgart,* Vol. i (1924) a Vol. xv, (1939).
- 71) *Boletim Bibliográfico da Biblioteca da Universidade de Coimbra — Coimbra,* Vol. i (1914) a Vol. xxv (1938).
- 72) *Boletim Bibliográfico de Antropologia Americana — Mexico,* Vol. i, (Janeiro a Dezembro de 1937) a Vol. iii (Janeiro a Dezembro de 1939).

- 73) *Ethnologischer Anzeiger* — Stuttgart, Vol. II (1929-1932) a Vol. IV (1935-1937).
- 74) *Resumptio Genetica* — Gravenhage, Vol. I (1924) a Vol. XV (1939).

VII — PROGRESSOS DE GENÉTICA E HEREDITARIEDADE

- 75) *Bibliografia Genetica* — Gravenhage, Vol. I (1925) a Vol. XII (1938).
- 76) *Fortschrift de Erbpathologie Rassenhygiene und ihrer Grenzgebiete* — Leipzig, Ano I (1938) a Ano III, Fasc. 5 (1939).

VIII — PREHISTÓRIA E ARQUEOLOGIA

- 77) *American School of Prehistoric Research* — Old Lyme, Conn, (U. S. A.), N.º 12 (May, 1936), N.º 14 (May, 1938) e N.º 15 (May, 1939).
- 78) *Anuário de Prehistória Madrileña* — Madrid, Vol. I (1930) a Vol. VIII (1932).
- 79) *Arqueólogo Português* — Lisboa, Vol. I (1895) a Vol. XXIX (1933).
- 80) *Arte e Arqueologia* — Coimbra, Ano I, N.ºs 1 a 3 (1930) e Ano II, N.º 1 (1933).
- 81) *Atti e Memorie della Società Magna Grecia* — Roma, Do ano 1926 ao ano 1929.
- 82) *Eiszeit und Urgeschichte* — Leipzig, Vol. 1 (1924) a Vol. 7 (1930).

IX — CIÊNCIAS EM GERAL

- 83) *Analele Educatiei Fizice* — Bucaresti, Ano VI, N.ºs 1 a 4 (1937) a Ano VIII, N.ºs 1 a 3 (1939).
- 84) *Anales del Museo Nacional de Historia Natural Bernardino Rivadavi* — Buenos Aires, Vol. 34 (1926-1928) a Vol. 38 (1934-1936).
- 85) *Anuário do Real Colégio Militar* — Lisboa, De 1898-1900 a 1912-1914 e de 1925-1927 a 1929-1932.

- 86) *Arquivos da Escola Médico Cirúrgica de Nova-Goa -- Nova-Goa*, Série B, Fasc. 7 (1937).
- 87) *Arquivos do Instituto de Histologia e Embriologia -- Coimbra*, Vol. I (1929) a Vol. IV (1932).
- 88) *Arquivos do Instituto Português de Combustíveis -- Lisboa*, Ano de 1936.
- 89) *Arquivos do Museu Bocage -- Lisboa*, N.º 1 (1930) a N.º 9 (1938).
- 90) *Arquivos de Patologia Geral e de Anatomia Patológica -- Coimbra*, Vol. XXVII (1938) e Vol. XXVIII (1939).
- 91) *Arquivos da Universidade de Lisboa -- Lisboa*, Vol. VI (1920 e Vol. XIV (1934).
- 92) *Atlantis -- Zurich*, Vol. I (1929) a Vol. XI (1939).
- 93) *Biblos -- Coimbra*, Vol. X, N.ºs 5 a 12 (Maio a Dezembro de 1934) e Vol. XI, N.ºs 1 a 8 (Janeiro a Agosto de 1935).
- 94) *Boletim de Filologia -- Lisboa*, Tomo I, Fasc. 1 a 4 (1932-1933) a Tomo III, Fasc. 1 a 2 (1934-1935).
- 95) *Boletim do Instituto Alemão -- Coimbra*, Vol. I, N.ºs 1 a 4 (1926-28), Vol. V, Suplemento Bibliográfico (1936) e Vol. VIII, Suplemento Bibliográfico (1939).
- 96) *Boletim do Museu e Laboratório Mineralógico e Geológico da Universidade de Lisboa -- Lisboa*, 2.ª Série, N.º 5 (1936).
- 97) *Boletim da Sociedade Broteriana -- Coimbra*, Vol. I (1880) a Vol. XXV (1910) e Vol. X, II Série (1935) a Vol. XIII, II Série (1938-1939).
- 98) *Boletim de la Sociedad Amigos de las Ciencias Naturales -- Kraglievich, - Fontana, - Nueva Palmira -- Uruguay*, Tomo I, N.º 2 (Setembro de 1938).
- 99) *Bulletin du Musée Royal d'Histoire Naturelle de Belgique -- Bruxelles*, Tomo XI (1935) a Tomo XIV (1938).
- 100) *Comunicações dos Serviços Geológicos de Portugal -- Lisboa*, Tomo I (1883-1887) a Tomo XX (1838).

- 101) *Estudos Italianos em Portugal — Coimbra*, N.º 1 (1939).
- 102) *Journal of the Faculty of Science — Tokyo*, Vol. I, Part I (1925).
- 103) *L'Année Scientifique — Paris*, Ano 1 (1857) a Ano 36 (1891).
Nota: Faltam os Anos 30 e 33.
- 104) *Memórias e Estudos do Museu Zoológico da Universidade de Coimbra — Coimbra*, Série I (*Sinópse dos Hemipteros Meterópteros de Portugal*), N.º 1, Fascs. I a XVI (1924-1934). Série I, N.ºs 2 (1924) a 114 (1940). Faltam os N.ºs 1, 66 e 93. Série II, N.ºs 1 a 4 (1924-1930). Série IV, N.ºs 1 e 2 (1926-1935). Série VI (Bibliografia), N.º 1 (1931) a N.º 3 (1935).
- 105) *Memórias e Notícias (Publicações do Museu Mineralógico e Geológico da Universidade de Coimbra) — Coimbra*, N.º 1 (1921) a N.º 9 (1936).
- 106) *Notícias Farmacêuticas — Coimbra*, Ano II, (1935-1936) a Ano VI (1939-1940).
- 107) *Publicações do Instituto de Climatologia e Hidrologia da Universidade de Coimbra — Coimbra*, Vol. IV (1937) e Vol. V (1939).
- 108) *Publications du Laboratoire de Physique de l'Université de Coimbre — Coimbra*, Vol. I, N.º 2 (1939).
- 109) *Revista del Archivo de La Biblioteca Nacional de Quito-Ecuador — Quito-Ecuador*, Año I, N.º 1 (1937).
- 110) *Revista da Faculdade de Ciências — Coimbra*, Vol. I (1931) a Vol. VII (1938-1939).
- 111) *Revista da Faculdade de Direito da Universidade de Lisboa — Lisboa*, Ano II (1934):
- 112) *Revista del Museo de La Plata — Buenos Aires*, Anos de 1937 e 1938.
- 113) *Revista del Museo Nacional — Lima-Perú*, Tomo I, N.ºs 1 e 2 (1932) a Tomo VIII, N.ºs 1 e 2 (1939).
- 114) *Revista da Universidade de Coimbra — Coimbra*, Vol. I (1912) a Vol. XII (1934).

- 115) *Revista de Ciências — Lima*, Ano xxxix, N.º 422 (1937) a Ano XLII, N.º 431 (1940). Nota: Falta o N.º 425.
- 116) *A Terra — Coimbra*, N.º 1 (Outubro de 1931) a N.º 34 (Maio de 1938).
- 117) *Trabalhos da Associação de Filosofia Natural — Porto*, Vol. I, Fascs. 1.º (1934) a 3.º (1937).

Estamos muito longe de nos considerarmos satisfeitos com os recursos de que dispõe o Instituto que dirigimos; cremos porém que não se pode considerar inoportuna a reclamação que aqui deixamos expressa sobre o facto de num relatório oficial publicado por entidade especialmente encarregada de efectuar o inventário da bibliografia científica existente em Portugal, se passar em silêncio sobre a melhor biblioteca portuguesa de Antropologia, quando se citam outras que estão longe de ter importância igual.

113) *Wissenschaftliche Beiträge zur Kunde der Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 114) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 115) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 116) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 117) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 118) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 119) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.
 120) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

121) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

122) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

123) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

124) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

125) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

126) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

127) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

128) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

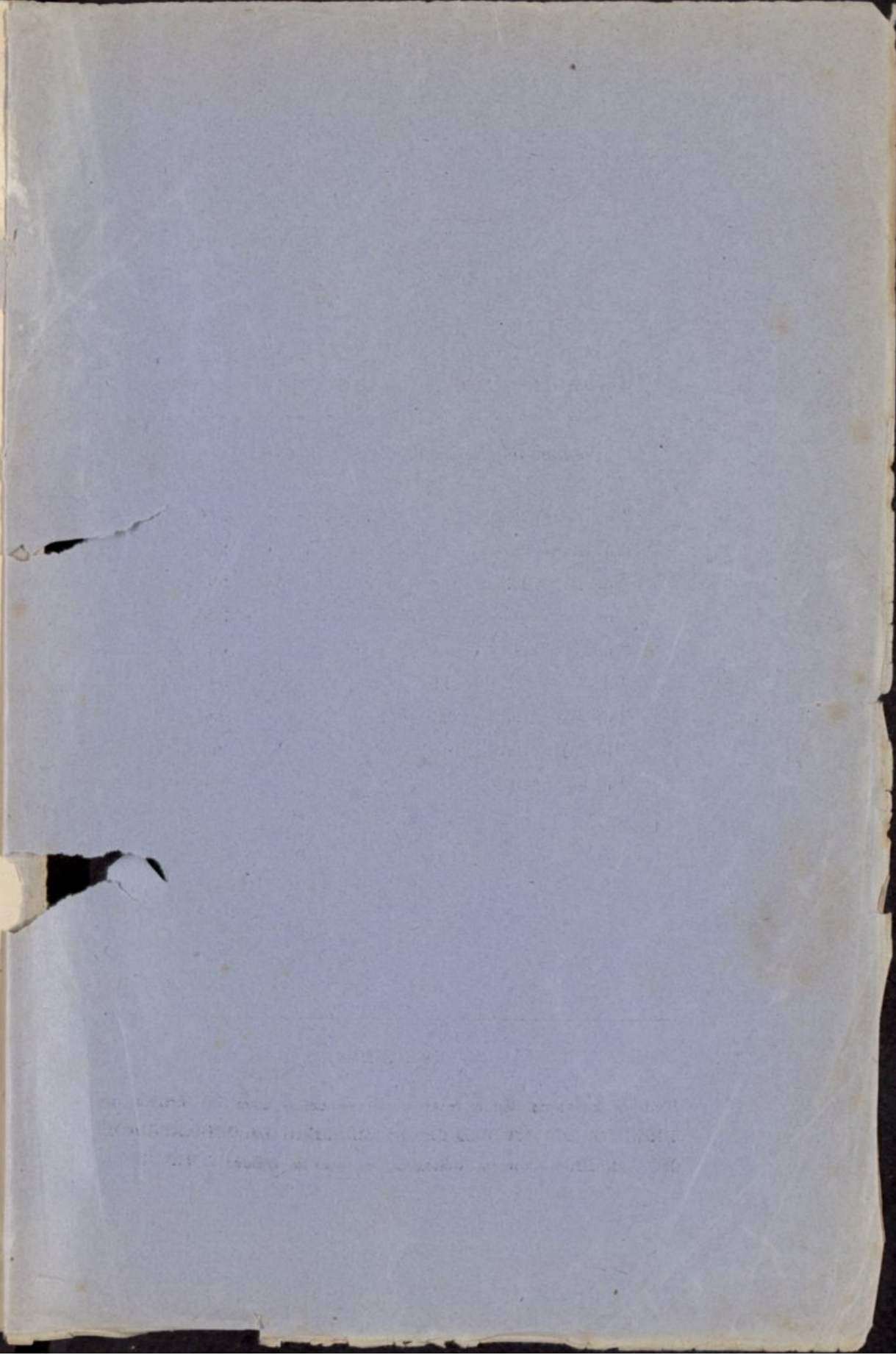
129) *Die Araber*. Leipzig, 1882. 120 S.

ÍNDICE

	Págs.
+ A actividade científica dos primeiros directores do Gabinete de Física que a reforma pombalina criou em Coimbra, em 1772. A descoberta, feita em Coimbra, da lei das acções magnéticas — MÁRIO AUGUSTO DA SILVA	5
Estúdios cualitativos sobre algunas reacciones de los sulfuros orgánicos y en especial del de etilo $\beta\beta'$ diclorado — I. RIBAS, A. CAÑO y A. S. CONTRA	17
+ Sur quelques théorèmes classiques — J. VICENTE GONÇALVES	27
+ Parecer acêrca da fiscalização e condicionamento de venda das especialidades farmacêuticas — EUSÉBIO TAMAGNINI	44
+ Determinações quantitativas de vitamina C em bananas (<i>Musa nana</i>) provenientes da Ilha da Madeira — A. J. A. DE GOUVEIA, F. PINTO COELHO e J. ANACHORETA CORREIA	49
+ Sur la primitive des différentielles totales — J. VICENTE GONÇALVES	65
+ Contribuição para o estudo da teoria das funções (continuação) — LUIZ BEDA NETO	69
? + Sôbre a determinação do índice orbitário e a assimetria da órbita — L. P. CANÊDO DE MORAIS e J. A. SERRA	96
+ O esterno nos portugueses. Caracteres métricos e morfológicos do esterno no homem — J. A. SERRA	121
+ Sur une classe de domaines — J. VICENTE GONÇALVES	245
Vida da Faculdade (1940-1941)	275

INDEX

174	A notables científicos los primeros directores de la Universidad de Chile por
	a notables personalidades en Chile en 1773. — A. de la Cruz
	de Chile en Chile, de los dos siglos siguientes. — Hugo Larraín
2	de Chile
	Estudios científicos sobre algunas ramas de la cultura chilena y su
17	especial del de Chile 2º. — I. Ruiz, A. Ochoa y A. M. Goyena
27	Estudios científicos chilenos clasificados. — I. Viera y Clavijo
	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
44	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
49	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
50	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
59	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
60	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
66	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
121	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
143	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo
170	Estudios científicos de los siglos XVIII y XIX. — I. Viera y Clavijo



Revista da Faculdade de Ciências

Volumes publicados até 31 de Dezembro de 1941:

Vol. I	(1931)	2 fascículos:	iv + 216 págs.
Vol. II	(1932)	4	» iv + 282 »
Vol. III	(1933)	4	» iv + 502 »
Vol. IV	(1934)	3	» iv + 226 »
Vol. V	(1934 e 1935)	5	» 640 »
Vol. VI	(1936 a 1938)	4	» 544 »
Vol. VII	(1938 e 1939)	2	» 454 »
Vol. VIII	(1939 e 1940)	2	» 260 »
Vol. IX	(1941)	2	» 304 »

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida ao
DIRECTOR DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE
DE COIMBRA, com a indicação de que se refere à REVISTA.