

183  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

---

REVISTA  
DA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS

---

VOL. VI—N.º 2



COIMBRA  
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA

1937

A  
9  
13  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50

INSTITUTO DE CIÊNCIAS

REVISTA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. VII - N. 2



COMISSÃO

EDITORA DA REVISTA

1977

# A Pigmentação dos Portugueses

## CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Dentre os chamados *caracteres descritivos* revestem importância especial, quanto à análise etnológica das *raças brancas*, os que se referem à pigmentação, isto é, a *côr da pele, do cabelo e dos olhos*.

De facto, embora duma maneira geral o aspecto cromático das diferentes partes do corpo varie consideravelmente em tôdas as raças humanas, é particularmente entre os representantes das raças europeias que essas variações atingem valor diagnóstico especial, como se reconhece pela consideração sistemática que se lhes dá em todos os modernos esquemas propostos para a sua classificação.

### I

## MATERIAL

Os indivíduos que forneceram os dados para êste trabalho são os mesmos que serviram para os estudos que efectuamos relativamente ao *índice cefálico, estatura e índice facial superior*. (1)

---

(1) *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*. Vol. II, pág. 100 e seg.; Vol. III, pág. 243 e seg.

Por insuficiência de registo tiveram de ser eliminados 57 indivíduos; ficamos assim apenas com 11601 observações. (1)

## II

## TÉCNICA SOMASTOSCÓPICA

Na recolha dos dados adoptou-se a prática corrente em estudos d'êste género, utilizando as escalas cromáticas de VON LUSCHAN, de E. FISCHER e de K. SALLER.

a) *Côr da pele.* — São bem conhecidas as enormes dificuldades que há na determinação rigorosa d'êste importante carácter étnico.

Essas dificuldades resultam, em parte, da extraordinária variabilidade do carácter. A *côr da pele* pode apresentar, e na realidade apresenta, uma gradação cromática tão extensa que se torna muito difficil determinar com rigor o tom exacto que se deve attribuir à *côr da pele* de qualquer indivíduo.

Em primeiro lugar, a *côr da pele* não se apresenta uniforme em todo o corpo, de modo que é sempre indispensável indicar com precisão qual a região a que nos reportamos, quando attribuímos a qualquer indivíduo uma certa *côr de pele*.

Por outro lado, a *côr da pele* varia também fortemente

(1) Os indivíduos eliminados distribuem-se pelos diferentes distritos da seguinte forma:

Aveiro . . . . .	1
Bragança . . . . .	1
Coimbra . . . . .	44
Guarda . . . . .	1
Lisboa . . . . .	2
Portalegre . . . . .	1
Porto . . . . .	2
Santarem . . . . .	1
Setubal . . . . .	1
Viana do Castelo . . . . .	1
Vizeu . . . . .	2
	57

pela acção dos *factores do ambiente* — calor, luz, humidade, etc., — e está ainda na dependência das *condições gerais metabólicas* (1).

Tôdas estas causas contribuem para complicar o estudo do carácter e tornam muito difficil a obtenção de dados com valor comparativo apreciável.

Neste estudo, limitamo-nos, para a classificação dos tons cromáticos da pele, ao emprêgo da escala de VON LUSCHAN, embora se conheçam outros métodos mais rigorosos (2).

As deficiências desta escala são bem conhecidas mas julgamo-la preferível, num estudo preliminar, à escala de Broca, porque os seus termos se apresentam mais uniformes e não variam com a exposição à luz.

Também é sabido que a escala de VON LUSCHAN, embora obvie a êste inconveniente, apresenta outros defeitos, tais como a complicação resultante da reflexão da luz na superfície irregular dos vidros usados, e, em certos casos, mostra-se insufficiente, pois há muitos tons de pele que não se podem fazer corresponder com rigor apreciável a qualquer dos seus termos. É o que succede com a *côr branca pálida*, relativamente freqüente entre nós, que somente por aproximação se pode representar pelos termos 7-9 da citada escala.

As nossas observações referem-se sempre à *face interna do antebraço*, pouco mais ou menos a meio da distância entre as articulações do pulso e do cotovelo.

Consideramos três classes para a *côr da pele*:

- 1) *rosada*, que corresponde ao terceiro termo da escala;
- 2) *branca pálida*, que se aproxima sensivelmente dos termos 7-9 da escala;
- 3) *trigueira*, que comprehende os tons escuros e coincide sensivelmente, na maior parte dos casos, com os termos 10-15 da escala.

(1) VON LUSCHAN — *Lehrbuch der Anthropologie*, 1.ª edição, pág. 184.

(2) BLACKWOOD, Beatrice — *Racial differences in Skin-colour as recorded by the colour-top. The Journal of the Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, Vol. LX, 1930, pág. 137.

Uma divisão mais minuciosa seria illusória, em vista da deficiência do método empregado e da extrema variabilidade do carácter.

Por conseguinte os resultados dos nossos estudos devem ser considerados como primeira aproximação no sentido de investigar se, dum modo geral, existe qualquer diferença na distribuição geográfica da côr da pele dos portugueses, e, na hipótese afirmativa, em que sentido se manifesta.

b) *Côr do cabelo.* — A pigmentação do cabelo foi apreciada em referência à *escala cromática de E. FISCHER* (1).

Agrupamos as nossas observações em quatro classes:

- 1) *cabelhos ruivos*, em correspondência com os termos 1-3 da escala;
- 2) *cabelos loiros*, que incluem todos os tons correspondentes aos termos 9-26;
- 3) *cabelos castanhos*, que correspondem aos termos 6-8 da escala;
- 4) *cabelos escuros*, (castanho-escuro e preto), equivalentes aos termos 4-5 e 27.

Como porém os cabelos ruivos se apresentam numa percentagem insignificante — apenas 20 casos (0.17%) muito irregularmente distribuídos — na elaboração estatística dos dados, resolvemos incluí-los na classe dos loiros, reduzindo assim as categorias de cabelos a três: *loiros*, *castanhos* e *escuros*.

A escala de FISCHER é muito prática e cómoda e permite uma apreciação suficientemente exacta da côr do cabelo. Conhecem-se todavia outros métodos mais rigorosos que não são porém de emprêgo cómodo em estudos desta natureza (2).

c) *Côr dos olhos.* — A côr dos olhos foi determinada em referência à escala de K. SALLER (3); para o tratamento

(1) Cf. VON LUSCHAN, op. cit., pág. 187.

(2) Cf. por exemplo, J. GRAY — *A new instrument for determining the colour the Hair, Eyes and Skin.* — *Man.* — Vol. VII, 1908, n.º 27.

(3) K. SALLER — *Leitfaden der Anthropologie*, 1930, pág. 55.

estatístico das observações formamos, porém, apenas três classes:

- 1) *olhos claros*, onde incluímos todos os tons do azul correspondentes aos termos  $S_1$  a  $S_{10}$  da escala;
- 2) *olhos médios*. Foram assim classificados todos os olhos de pigmentação mixta, correspondentes aos termos de  $M_1$  a  $M_{22}$  da escala; isto é, os olhos esverdeados, ou azulados, onde é possível reconhecer também a existência de pigmento castanho em maior ou menor quantidade.
- 3) *olhos escuros*, que correspondem aos termos  $P_1$ - $P_8$ , nos quais o estroma da íris se apresenta uniformemente impregnado por pigmento castanho, mais ou menos escuro, a que se pode sobrepor outro pigmento mais claro, acastanhado, com variável distribuição. Compreendem os chamados olhos pretos e castanhos de diferentes tons e aspectos.

### III

#### PROBLEMAS ESTUDADOS

Na análise fenotípica duma população qualquer temos a considerar variados problemas para cuja resolução é indispensável utilizar métodos especiais.

As raças humanas distinguem-se umas das outras pela associação de determinados complexos, ou grupos, de caracteres hereditários, de variabilidade determinada, que se estabeleceram e fixaram, dentro da espécie, em *ambientes geográficos* especiais, pela acção dos *processos selectivos* naturais.

E, assim, a cada grupo de influências selectivas deve corresponder um determinado complexo hereditário, uma determinada raça; e o número das raças humanas reconhecíveis deve ser dependente da natureza, multiplicidade e modos de acção dos distintos *ambientes selectivos* <sup>(1)</sup>.

Por outro lado, o número das raças humanas reconhecíveis

---

(1) WALTER SCHEIDT — *Allgemeine Rassenkunde*, pág. 328.

deverá ser tanto maior quanto menos numeroso fôr o complexo hereditário admitido para as caracterizar; não obstante, este número tem um limite superior, pois são muito pouco os caracteres hereditários que, por si mesmos, se podem considerar objecto de selecção suficientemente forte.

O processo hereditário do complexo característico de qualquer raça pode revestir duas modalidades: a) ou o complexo se herda como todo orgânico, em virtude dos caracteres respectivos se encontrarem fixamente *acoplados* entre si; b) ou esses caracteres são independentes, e a sua associação no mesmo indivíduo resulta do jôgo das *combinações fortuitas dos genes* no momento da fecundação. Geralmente, estas duas possibilidades realizam-se simultâneamente.

Por outro lado, os fenómenos de *disjunção* e *dominância* que acompanham o processo da *mestiçagem*, conjugados com a influência notável de certos produtos do *metabolismo* (secreções internas), podem exercer influência sobre a *directão do processo selectivo*.

E, como estes processos selectivos não atingem, por igual, todos os indivíduos duma determinada população, e por isso não obrigam necessariamente a desaparecer aquêles que não possuem o complexo hereditário, ou só em parte o possuem, compreende-se bem como, em qualquer população, se devem sempre encontrar *indivíduos de raça duvidosa*.

Além disso, entre os caracteres que formam o complexo hereditário característico de qualquer raça, podem existir *graus de correlação* variáveis; muitos dos caracteres podem ser *poligénicos*, ou mesmo *polimeros*. Por estes motivos se verifica que a maior parte dos caracteres étnicos são *caracteres quantitativos*, cuja expressão fenotípica não manifesta qualquer alternativa, mas antes se traduz por *séries de variação*, com *médias e dispersões* mais ou menos típicas (1).

Por tudo quanto se sabe sobre o processo hereditário, pode afirmar-se que *as raças não constituem unidades genéticas*; abaixo da espécie, a única entidade reconhecível e identificável é o *biótipo*, isto é, o conjunto de todos os indivíduos, homo- ou heterozigóticos, que possuem o mesmo *genótipo*.

---

(1) K. SALLER — *Leitfaden der Anthropologie*, pág. 134.

De modo que as sub-categorias sistemáticas da espécie são apenas conjuntos de biótipos mais ou menos numerosos que, — por considerações um tanto arbitrárias, determinadas por certos pontos de vista — se associam para constituir as unidades étnicas — as raças.

E, assim, aos representantes duma raça não se pode, geralmente, atribuir unidade e pureza genéticas no âmbito do complexo formado por todos os seus caracteres distintivos.

Os representantes de qualquer raça são antes *biótipos parciais*, e a homogeneidade das raças e as áreas da sua distribuição geográfica são consequentemente parciais e relativas.

O problema da análise étnica duma população, é sempre um problema delicado e difficil, não obstante os maravilhosos progressos realizados nos últimos anos no campo da genética. E as difficuldades redobram quando nos reportamos a populações humanas para as quais nos está naturalmente vedado o campo fecundo da experimentação. A análise da constituição genética das populações humanas não se pode portanto abordar senão por métodos indirectos, tais como o *estatístico* e o *genealógico*.

A organização dos arquivos indispensáveis para a elaboração dos estudos genealógicos é porém dispendiosa e demorada, como facilmente se comprehende, e por isso os antropólogos teem sido forçados a proceder à destrinça étnica por meio da análise metódica de *estatísticas de massas* mais ou menos consideráveis das populações humanas.

Estas estatísticas, como é obvio, fornecem-nos os dados característicos da *composição fenotípica* das populações, mas é possível a partir dêsse conhecimento formular juízos, mais ou menos seguros, acerca da correspondente *constituição genotípica*.

Nêste estudo propomo-nos fazer a análise fenotípica dos portuguezes no que se refere à pigmentação — côr da pele, do cabelo e dos olhos — numa primeira aproximação, preocupando-me apenas com o estudo da distribuição local das diferentes classes de cada um dos três caracteres considerados.

Deixaremos para trabalhos sub-seqüentes o estudo das *inter-relações* correspondentes, e a *interpretação étnica* dos resultados a que chegarmos.

Limitamos, assim, neste momento a nossa atenção aos problemas seguintes:

- A) Posição dos portugueses, quanto ao complexo dos caracteres estudados, no quadro geral das populações europeias. — Este problema envolve a análise da distribuição dos indivíduos estudados, e a comparação dessa distribuição com as que são características das outras populações europeias, particularmente das que ocupam áreas geográficas confinantes.
- B) Grau de heterogeneidade geográfica da população portuguesa. — Seja qual for a constituição da população estudada, no que respeita às frequências com que nela se encontram representadas as várias classes dos caracteres considerados, pode suceder que essa população se ache, ou não, uniformemente distribuída pela área geográfica que povôa.

Para a resolução deste problema torna-se evidentemente indispensável dividir o país em regiões mais pequenas, isto é, dividir a população geral estudada, em grupos regionais, e apreciar a maneira como, em cada um desses grupos, se manifestam os caracteres considerados.

Por falta duma divisão aceitável em regiões naturais, adoptamos o *distrito administrativo* como unidade de área geográfica e associamos, por sua vez, os distritos em *provincias*, segundo a orientação seguida noutros estudos já realizados neste Instituto <sup>(1)</sup>.

O reconhecimento da uniformidade, ou falta de uniformidade, de distribuição de qualquer carácter na área geográfica ocupada por uma população obriga ao estudo das diferenças encontradas nas diferentes sub-divisões geográficas, e tal estudo inclui três questões:

- 1) *Diferenças locais relativas*. Primeiramente torna-se necessário apreciar, para as diferentes classes de cada

---

(1) Cfr. *Revista da Universidade de Coimbra*, Vol. iv, pág. 588. Dr. J. G. DE BARROS E CUNHA, *O índice facial superior nos portugueses*.

carácter, separadamente consideradas, qual a *significação estatística das diferenças* encontradas.

Para que a população estudada se possa considerar uniformemente distribuída por toda a área geográfica que ocupa, é evidentemente indispensável que essas diferenças sejam *estatisticamente insignificativas*, isto é, que se possam atribuir a *flutuações devidas ao acaso*.

- 2) *Grao de segregação das classes*. No caso da população não ser homogénea, isto é, de serem significativas as diferenças locais respeitantes às classes de quaisquer caracteres, tem ainda interesse o conhecimento do grao relativo da sua segregação.

Isto é, considerando colectivamente para cada uma das classes as frequências encontradas nos diferentes grupos locais, e em que medida relativa se afasta cada uma delas do que seria de esperar na hipótese da distribuição uniforme?

Poderemos assim obter valiosos elementos de informação sobre o sentido e intensidade com que os diferentes factores da evolução estão contribuindo para a diferenciação populacional.

- 3) *Semelhança dos grupos locais com a população geral*.

O problema da distribuição uniforme, ou não uniforme, de qualquer carácter numa população, na área geográfica que habita, não se pode considerar resolvido pela simples apreciação das diferenças locais respeitantes a cada uma das classes, separadamente consideradas, em que se repartem os seus caracteres. Pode, de facto, um grupo local, quando se considera uma determinada classe dum dos seus caracteres, diferir significativamente da população geral, mas *quando se consideram simultaneamente todas as classes desse carácter*, pode ainda o grupo local ser considerado amostra fortuita da população geral.

Esta circunstância obriga-nos por isso a determinar, para cada carácter — côr da pele, do cabelo e dos olhos — e para todas as classes de cada um deles, colectivamente consideradas, o *grao de divergência* dos grupos locais a respeito da população geral.

## Problema A)

Posição dos portugueses no quadro geral  
das populações europeias

**I — Métodos estatísticos.** — Os caracteres estudados — cor da pele, do cabelo e dos olhos — fazem parte, como é sabido, do complexo morfológico que correntemente se utiliza para a classificação etnológica das populações europeias.

Não nos interessa, neste momento, a discussão do problema referente ao número e diagnose das raças humanas europeias distintas. As considerações anteriormente feitas mostram bem como a questão é espinhosa, e como o âmbito geográfico e populacional de qualquer raça se pode, até certo ponto, alargar ou restringir consoante a maneira como constituirmos o complexo morfológico que serve para a definir.

As populações da Europa são muito mestiçadas e faltam-nos ainda muitos dados para podermos apreciar com segurança os elementos distintos, e os biótipos fundamentais, que constituem o seu substracto.

Por estas razões preferimos uma classificação em poucos termos, menos aparatosa, certamente, mas muito mais segura e flexível.

As dificuldades quanto à técnica somatológica relativa à pigmentação, a que já nos referimos, cfr. pág. 121, e a diversidade dos esquemas de classificação empregados pelos vários antropólogos que se tem ocupado destes estudos, limitam consideravelmente as possibilidades de comparações rigorosas com outros resultados conhecidos.

Por conseguinte, o emprego de métodos estatísticos muito delicados não está naturalmente indicado, pois nos conduziria necessariamente a conclusões erróneas.

Por estes motivos teremos que nos contentar com resultados mais ou menos aproximados e comparações mais ou menos grosseiras.

Para este efeito são portanto suficientes a análise das percentagens das distribuições, nas populações gerais respectivas, das diferentes classes de cada carácter e, quando

possível, a expressão das diferenças encontradas em função dos seus desvios padrões.

**II — Características pigmentares dos portugueses. A população considerada em globo. — 1) Cór da pele. —** No conjunto da população estudada, a cór da pele distribui-se pelas três classes consideradas pela forma indicada na Tabela I:

TABELA I

Pele	Rosada	Branca pálida	Trigueira	Totais
N.º de Obs.	1098	5231	5272	11601
%	9.47	45.09	45.44	100.00

As *peles rosadas*, características das populações nórdicas, acham-se representadas numa percentagem relativamente pequena (9.47 %), ao passo que as *peles pálidas* e as *trigueiras* se encontram em maioria considerável, e em proporções quasi iguais, 45.09 e 45.44 %, respectivamente.

2) **Cór do cabelo. —** A população observada, reparte-se pelas quatro classes, conforme se vê na Tabela II:

TABELA II

Cabelos	Ruivos	Loiros	Castanhos	Negros	Totais
N.º de obs.	20	240	7927	3414	11601
%	.17	2.07	68.33	29.43	100.00

A grande maioria apresenta portanto *cabelos escuros* (castanhos ou negros).

Se reunirmos num só grupo os cabelos ruivos e os loiros, e num outro grupo os castanhos e os negros, vê-se que a população se reparte muito desigualmente; ao passo que os cabelos

claros se acham representados por 2.24%, os cabelos escuros atingem 97.76% dos indivíduos observados.

3) **Côr dos olhos.** — No conjunto dos indivíduos observados, as três classes consideradas para a côr dos olhos reparam-se como mostra a Tabela III:

TABELA III

Olhos	Claros	Médios	Escuros	Totais
N.º de obs.	827	1755	9019	11601
%	7.13	15.13	77.74	100

Como se vê, na população portuguesa existe predomínio absoluto dos olhos escuros sobre as duas outras classes; há cêrca de 3.5 vezes mais indivíduos com olhos escuros do que com olhos médios e claros.

**III — Os portugueses representantes típicos da raça mediterrânica.** — Quando se consideram as populações europeias, dum ponto de vista escolhido de harmonia com as considerações expostas, reconhece-se facilmente que o complexo morfológico constituído pela *pigmentação* — côr da pele, do cabelo e dos olhos — *índice cefálico horisontal*, *índice facial superior* e *estatura*, permite reconhecer a existência de três grupos populacionais suficientemente bem delimitados geogràficamente, onde predominam outros tantos tipos étnicos distintos:

- 1) *o grupo nórdico*, de pigmentação clara, estatura elevada, dolicocefalo e leptorósopo;
- 2) *o grupo alpino*, moreno, de pequena estatura, braquicefalo e cameprósopo;
- 3) *o grupo mediterrânico*, moreno, mas dolicocefalo e leptorósopo e de baixa estatura.

Os estudos feitos quanto à estatura, índice cefálico e índice facial, mostram bem que é com as populações

mediterrânicas que nos interessa especialmente comparar os portugueses <sup>(1)</sup>.

O presente estudo confirma os resultados anteriores: *Os portugueses*, considerados em conjunto, *são*, predominantemente, *morenos, dilococéfalos, leptoprósopos e de baixa estatura*, isto é, na sua grande maioria, possuem o complexo morfológico que se admite como típico da *raça mediterrânica*.

#### Problema B)

### Grau de heterogeneidade geográfica duma população.

**I — Diferenças locais relativas.** — Das considerações expostas sobre o conceito de raça, resulta evidente que a análise etnológica dum população qualquer não se pode convenientemente fazer pelas simples considerações dos valores médios e variabilidades dos diferentes caracteres escolhidos numa amostra fortuita, ainda que suficientemente numerosa, dessa população, nem pelas percentagens dos casos incluídos nas diferentes classes que podemos formar com os valores observados de cada carácter.

Os processos selectivos que entram em jôgo na formação das raças atingem intensidades diferentes por virtude de circunstâncias particulares, umas resultantes das próprias acções do ambiente geográfico — factores biológicos, geológicos e climatéricos — e outras que refletem a acção das forças étnicas sociais.

A análise global dum população que ocupa uma área geográfica extensa, com características variáveis de região para região, onde se intercruzaram e mestiçaram elementos étnicos diversos cujo ambiente social é distinto, não nos pode dar elementos seguros sobre a existência, ou não existência, de variedades locais, mais ou menos dis-

---

(1) Cf. *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*, Vol. II e III.

tintas, nem esclarecer sobre o sentido e a intensidade com que os processos selectivos actuam.

Numa palavra, o simples estudo das médias, variabilidades e percentagens do diferentes caracteres não nos permite apreciar devidamente o grau relativo de homogeneidade, ou heterogeneidade, étnica de tal população.

a) *Métodos estatísticos.* — Para a resolução do problema torna-se indispensável dividir a população em grupos locais, determinar a composição destes grupos, a respeito dos caracteres considerados, e estabelecer o valor estatístico das diferenças encontradas, relativamente ao que seria de esperar, na hipótese da distribuição uniforme.

Só assim se poderá averiguar se existe, ou não existe, segregação geográfica, isto é, se alguns dos grupos locais apresentam composições diferentes da correspondente à população geral.

Para a constituição dos grupos locais adoptamos como se disse a divisão em *distritos administrativos*; simplesmente, *quanto às províncias*, reunimos os distritos do Porto, Braga e Viana-do-Castelo, reconstituindo assim a antiga província do *Entre-Douro e Minho*, e com os distritos de Aveiro e Coimbra formamos outra divisão, a que chamamos *Beira litoral*, semelhantemente ao que fizemos em estudos anteriores. As razões que nos determinaram a seguir este método já foram por nós suficientemente esclarecidas (1).

Quando se trata de caracteres que variam quantitativamente, isto é, cujos valores é possível ordenar numa escala crescente ou decrescente, a comparação entre os grupos locais e a população geral realiza-se facilmente pela consideração das diferenças entre os valores médios desses caracteres, expressos nos respectivos desvios padrões.

Mas quando se trata de caracteres qualitativos, que apenas podemos agrupar em classes, ou categorias, insusceptíveis de se

---

(1) *Revista da Universidade de Coimbra*, vol. iv, pág. 588.

ordenarem em série crescente ou decrescente, então as médias perdem a significação, e tudo quanto se pode fazer consiste em comparar individual ou colectivamente as frequências das classes, sem nos importarmos com o facto de as não podermos ordenar segundo uma escala graduada.

Os métodos convenientes para esta comparação já foram por nós expostos noutros trabalhos <sup>(1)</sup> e consistem em dividir, para cada grupo local — distrito ou provincia — as diferenças ( $y'' - y'$ ) entre as frequências teóricas ( $y'$ ) e as observadas ( $y''$ ), respeitantes às classes de cada carácter, pelo desvio padrão,

$$\sqrt{npq (N - n) / (N - 1)}$$

correspondente à distribuição das suas frequências em  $m$  amostras fortuitas de grandeza  $n$  extraídas da população geral, que supomos igual a  $N$  <sup>(2)</sup>.

Se  $n$  (número de indivíduos de cada grupo local), embora grande, fôr uma pequena fracção de  $N$  (número de indivíduos da população geral) e se  $p$  (probabilidade de um indivíduo qualquer, tomado ao acaso, pertencer à classe considerada) não fôr muito pequeno, a distribuição das frequências (para  $m$  amostras fortuitas, de grandeza  $n$ , da população geral) aproxima-se suficientemente da *curva normal* para podermos, com o auxílio duma táboa de valores do integral das probabilidades, calcular as probabilidades de, noutras amostras fortuitas da mesma população, encontrarmos diferenças iguais ou maiores que as actualmente observadas. Como se sabe, no caso das distribuições normais, 99.7% das observações ficam compreendidas no intervalo limitado pelas ordenadas levantadas nos pontos correspondentes a  $\pm 3\sigma$ , e, por conseguinte, quando as diferenças observadas, relativamente ao que seria de esperar no caso da distribuição normal, forem superiores a 3.5 vezes o respectivo desvio padrão, podemos, com muita probabilidade, considerá-las estatisticamente significativas.

(1) DR. EUSÉBIO TAMAGNINI. — *A côr do cabelo e dos olhos nos estudantes das escolas primárias portuguesas*. — *Revista da Universidade de Coimbra*. — Vol. IV, pág. 589.

(2) K. PEARSON — *On the curves which are most suitable for describing the frequency of random samples of a population*. — *Biometrika*. — Vol. V, pág. 172.

TOCHER <sup>(1)</sup> chamou *diferença local relativa* dum grupo local qualquer ( $n$ ) duma população geral ao valor da expressão

$$y''_s - y'_s / \sqrt{npq(N-n)/(N-1)},$$

onde  $y''_s - y'_s$  representa a diferença entre a frequência observada  $y''_s$  e a frequência teórica  $y'_s$ , relativa a qualquer das classes ( $s$ ) do carácter, no grupo local considerado;

$\sqrt{npq(N-n)/(N-1)}$  é o desvio padrão ( $\sigma$ ) da distribuição dessas diferenças, na hipótese de serem fortuitas;

$N$ , o número de indivíduos que constituem a população geral;

$n$ , o número de indivíduos do grupo local;

$p$ , a probabilidade dum indivíduo qualquer, extraído ao acaso da população geral, pertencer à classe  $s$  — por conseguinte,  $p = y''_s/N$ , onde ( $y''_s$ ) é a frequência observada da classe  $s$  na população geral;

$q$ , a probabilidade do mesmo indivíduo não pertencer à citada classe, isto é,  $q = (1 - p)$ .

TOCHER propôs para o estudo de distribuição geográfica das diferenças locais relativas, um esquema de classificação e uma nomenclatura, conforme consta da Tabela IV.

Nesta ordem de ideias podemos igualmente estabelecer uma nomenclatura adequada para exprimir as relações encontradas entre os grupos locais e a população geral, quando se consideram simultaneamente os seus diferentes caracteres.

Assim: um grupo local diz-se *macromérico*, quando para todos, ou para a maior parte dos seus caracteres, as diferenças locais relativas são *significativamente positivas*; *mesomérico*, quando essas diferenças são estatisticamente insignificativas; e, finalmente, *micromérico* quando tais diferenças forem *negativamente significativas*.

Um grupo local, cujos caracteres sejam em parte macrometrópicos e em parte micrometrópicos, diz-se *mictomérico*, quer

(1) J. F. TOCHER — *The anthropometric characteristics of the inmates of Asylums in Scotland*, *Biometrika*, Vol. v, pág. 317.

haja, ou não haja, caracteres em que esse grupo se apresente mesométrico (1).

- b) *Valores encontrados para as diferenças locais relativas.*  
— *Diferenças individuais das classes.*

- 1) *Côr da pele.* — A repartição geográfica da côr da pele e os valores das respectivas diferenças locais encontram-se

TABELA IV

A freqüência local ( $y''_s$ ), comparada com a correspondente à população geral ( $y'_s$ ), é:	Nomenclatura	Classes	Amplitude das classes em função de $\sqrt{npq(N-n)/(N-1)}$
Muito menor	Micrométrica	-4	< -3.5
Provavelmente menor	Micrométr. (provável)	-3	de -2.5 a -3.5
Menor, não significativa	Mesométrica	-2	de -1.5 a -2.5
Ligeiramente menor	Mesométrica	-1	de -0.5 a -1.5
Insignificante	Mesométrica	0	de -0.5 a +0.5
Ligeiramente maior	Mesométrica	1	de +0.5 a +2.5
Maior, não significativa	Mesométrica	2	de +1.5 a +2.5
Provavelmente maior	Macrométr. (provável)	3	de +2.5 a +3.5
Muito maior	Macrométrica	4	> +3.5

resumidos nas Tabelas V e VI e gráficamente representados nos Mapas I a VI.

A significação estatística das diferenças locais relativas foi determinada em referência à classificação proposta por Tocher (cf. Tabela IV).

- a) *Pele rosada.* — Tabelas V e VI. Mapas I e IV.

Esta côr da pele apresenta-se, no conjunto da popula-

(1) *J. F. Tocher.* — *Biometrika*, vol. vi, pág. 350, propõe uma terminologia ligeiramente diferente. Chama *isométricos* aos grupos cujas diferenças locais relativas, para todos, ou para a maior parte dos caracteres, são estatisticamente insignificativas. Preferimos, por uma razão de uniformidade, a designação de *mesométricos*, que é também mais conforme com a realidade e significação literal do termo.

TABELA V  
Côr da pele — Províncias

Províncias	Número de observações				Valores percentuais				D. l. r.			Classes		
	Ros.	Pál.	Trig.	Totais	Ros.	Pál.	Trig.	Totais	Ros.	Pál.	Trig.	Ros.	Pál.	Trig.
Algarve	131	150	290	571	22.94	26.27	50.79	100.00	+ 11.28	- 9.27	+ 2.63	+ 4	- 4	+ 3
Alentejo	442	344	774	1560	28.33	22.05	49.62	100.00	+ 27.36	- 19.66	+ 3.56	+ 4	- 4	+ 4
Extremadura	133	567	510	1210	10.99	46.86	42.15	100.00	+ 1.92	+ 1.31	- 2.43	+ 2	+ 1	- 2
Beira Baixa	138	404	352	894	15.44	45.19	39.37	100.00	+ 6.35	+ 0.06	- 3.80	+ 4	0	- 4
Beira Alta	66	495	319	880	7.50	56.25	36.25	100.00	- 2.07	+ 6.92	- 5.70	- 2	+ 4	- 4
Beira Litoral	128	1346	1607	3081	4.15	43.69	52.16	100.00	- 11.74	- 1.83	+ 8.73	- 4	- 2	+ 4
Traz-os-Montes	24	950	595	1569	1.53	60.55	37.92	100.00	- 11.54	+ 13.24	- 6.44	- 4	+ 4	- 4
Entre Douro e Minho	36	975	825	1836	1.96	53.10	44.93	99.99	- 11.97	+ 7.52	- 0.48	- 4	+ 4	- 0
Totais	1098	5231	5272	11601	9.47	45.09	45.44	100.00						

TABELA VI  
Côr da pele — Distritos

Distritos	Número de observações				Valores percentuais				D. I. r.			Classes		
	Ros.	Pál.	Trig.	Totais	Ros.	Pál.	Trig.	Totais	Ros.	Pál.	Trig.	Ros.	Pál.	Trig.
Aveiro	40	259	211	510	7.84	50.78	41.37	99.99	- 1.28	+ 2.64	- 1.89	- 1	+ 3	- 2
Beja	117	87	311	515	22.72	16.89	60.39	100.00	+ 10.51	- 13.15	+ 6.96	+ 4	- 4	+ 4
Braga	12	254	208	474	2.53	53.59	43.88	100.00	- 5.26	+ 3.80	- 0.70	- 4	+ 4	- 1
Bragança	10	343	275	628	1.59	54.02	43.79	100.00	- 6.93	+ 4.93	- 0.86	- 4	+ 4	- 1
Castelo Branco	99	168	206	473	20.93	35.52	43.55	100.00	+ 8.70	- 4.27	- 0.84	+ 4	- 4	- 1
Coimbra	88	1087	1396	2571	3.42	42.28	54.30	100.00	- 11.86	- 3.25	+ 10.22	- 4	- 3	+ 4
Evora	172	112	217	501	34.33	22.36	43.31	100.00	+ 19.44	- 10.46	- 0.98	+ 4	- 4	- 1
Faro	131	150	290	571	22.94	26.27	50.79	100.00	+ 11.28	- 9.27	+ 2.63	+ 4	- 4	+ 3
Guarda	39	236	146	421	9.26	56.06	34.68	100.00	- 0.14	+ 4.61	- 4.52	0	+ 4	- 4
Leiria	43	228	198	469	9.17	48.61	42.22	100.00	- 0.22	+ 1.57	- 1.43	0	+ 2	- 1
Lisboa	23	90	77	190	12.11	47.37	40.53	100.01	+ 1.25	+ 0.64	- 1.37	+ 1	+ 1	- 1
Portalegre	153	145	246	544	28.13	26.65	45.22	100.00	+ 15.23	- 8.85	- 0.11	+ 4	- 4	0
Porto	13	490	399	902	1.44	54.32	44.24	100.00	- 8.57	+ 5.80	- 0.77	- 4	+ 4	- 1
Santarem	52	226	184	462	11.26	48.92	39.83	100.01	+ 1.34	+ 1.69	- 2.47	+ 1	+ 2	- 2
Setúbal	15	23	51	89	16.85	25.84	57.30	99.99	+ 2.39	- 3.66	+ 2.26	+ 2	- 4	+ 2
Viana do Castelo	11	231	218	460	2.39	50.22	47.39	100.00	- 5.29	+ 2.15	+ 0.86	- 4	+ 2	+ 1
Vila Real	14	607	320	941	1.49	64.51	34.01	100.01	- 8.72	+ 12.49	- 10.38	- 4	+ 4	- 4
Vizeu	66	495	319	880	7.50	56.25	36.25	100.00	- 2.07	+ 6.92	- 5.70	- 2	+ 4	- 4
Totais	1098	5231	5272	11601	9.47	45.09	45.44	100.00						

ção estudada, numa percentagem relativamente pequena (9.47%), mas a sua frequência varia entre limites muito largos; é mínima (1.53%) em Traz-os-Montes e máxima no Alentejo (28.33%), donde resulta uma amplitude de oscilação igual a 26,80%.

Quando se consideram os distritos, vê-se que o mínimo de frequência corresponde ao Porto (1.44%) e o máximo a Évora (34.33%). A amplitude da oscilação aparece-nos pois ligeiramente maior (32.89%), o que é natural.

Considerando as diferenças locais relativas, o Mapa I mostra claramente que as *provincias macrometrópicas*, isto é, com excesso significativo de peles rosadas, são o Algarve, o Alentejo e a Beira Baixa. Na Extremadura nota-se também excesso de peles rosadas, que todavia não é nitidamente significativo.

Pelo contrário, a Beira Litoral, o Entre-Douro-e-Minho e Traz-os-Montes são claramente *micrometrópicas*, isto é, manifestam falta significativa de peles rosadas. Na Beira Alta também as peles rosadas se encontram em falta, que todavia não se pode considerar significativa (*d.l.r.* = -2.07).

O mapa IV, relativo aos *distritos*, confirma sensivelmente estes resultados.

Vê-se, além disso, que o carácter macrometrópico da Beira Baixa se deve atribuir ao distrito de Castelo Branco, pois o da Guarda é neutral (*d.l.r.* = -0.14) e manifesta tendência para falta de peles rosadas.

Por outro lado, o carácter micrometrópico da Beira Litoral é principalmente devido ao distrito de Coimbra, pois no de Aveiro, embora haja falta de peles rosadas, tal falta se não pode considerar significativa (*d.l.r.* = -1.28).

O excesso de peles claras que notamos na Extremadura é principalmente atribuível ao distrito de Setúbal — que assim tende a aproximar-se das condições dominantes no Alentejo —, pois no distrito de Santarém a diferença local é muito pequena (+1.34) e no distrito de Leiria — que é neutral — há falta de peles rosadas.

b) *Pele branca-pálida*. — Tabelas V e VI. Mapas II e V.

A pele branca-pálida apresenta-se na população geral com uma percentagem relativamente elevada (45.09 ‰) e a amplitude de *variação provincial* é de 38.50 ‰. O mínimo corresponde ao Alentejo (22.05 ‰) e o máximo a Traz-os-Montes (60.55 ‰).

Quando se consideram os *valores distritais* vê-se que a oscilação é um pouco maior (47.62 ‰). O mínimo corresponde ao distrito de Beja (16.89 ‰) e o máximo ao de Vila Real (64.51 ‰). A pele branca-pálida apresenta-se assim mais variável na sua distribuição do que a pele rosada.

O Mapa II mostra que o Entre-Douro-e-Minho, Traz-os-Montes e a Beira Alta são macrometrópicas, isto é, manifestam excesso significativo de peles pálidas. Pelo contrário, o Algarve e o Alentejo são distintamente micrometrópicos.

A Beira Litoral e a Extremadura são mesometrópicas; mas ao passo que na primeira destas províncias há falta de peles pálidas, na Extremadura há excesso.

A Beira Baixa é neutral, com excesso insignificante desta classe de cor de pele (*d.l.r.* = +.06).

O Mapa V, relativo aos distritos, permite precisar melhor o carácter desta distribuição.

Duma maneira geral são confirmados os resultados correspondentes ao mapa provincial mas, não obstante, verificam-se algumas alterações importantes.

Assim, vê-se que o carácter neutral da Beira Baixa é aparente, e resulta duma compensação entre os distritos da Guarda, que é nitidamente macrometrópico, e, por esse facto, concorda com Traz-os-Montes e a Beira Alta — e o distrito de Castelo Branco, distintamente micrometrópico — que continua para o norte as condições dominantes em todo o Alentejo.

Por outro lado vê-se que a falta de peles pálidas, revelada na Beira Litoral, é exclusivamente devida ao distrito de Coimbra, pois o distrito de Aveiro é significativamente macrometrópico (*d.l.r.* = +2.64) e concorda com os distritos limítrofes.

Finalmente, quanto á Extremadura, verifica-se que o

distrito de Setúbal se destaca claramente dos restantes distritos da província, e, pelo seu carácter micrometrópico (*d.l.r.* = - 3.66), concorda com o Alentejo.

Nos restantes distritos extremenos, o excesso de peles pálidas é pequeno e não se pode considerar significativo.

c) *Pele trigueira*. — Tabelas V e VI. Mapas III e VI.

As peles trigueiras apresentam-se na população geral na percentagem de 45.44%, ligeiramente maior que a correspondente à pele branca-pálida.

A oscilação dos valores percentuais relativos às *províncias* é de 15.91%; o mínimo corresponde à Beira Alta (36.25%) e o máximo à Beira Litoral (52.16%).

A consideração dos valores referentes aos *distritos* mostra porém que a variação deste carácter tem amplitude maior (26.38%); o mínimo corresponde ao distrito de Vila Real (34.01%) e o máximo ao de Beja (60.39%).

Em todo o caso a variabilidade é menor do que a correspondente à pele branca-pálida.

Vê-se claramente que as províncias macrometrópicas, são o Alentejo e o Algarve, que contrastam fortemente com a Beira Baixa, Beira Alta e Traz-os-Montes, onde há falta significativa de peles trigueiras.

Na Extremadura, as peles trigueiras também se encontram em excesso, embora não significativo; e a Beira Litoral é caracteristicamente macrometrópica e contrasta fortemente com as regiões vizinhas. O Entre-Douro-e-Minho apresenta-se neutral.

O Mapa VI precisa melhor esta distribuição. Verifica-se, com efeito, que o carácter macrometrópico do Alentejo é exclusivamente devido ao distrito de Beja, pois no de Évora há uma ligeira falta de peles trigueiras, e o de Portalegre é neutral. O distrito de Setúbal afasta-se da restante província pelo excesso relativamente grande (*d.l.r.* = + 2.26) de peles trigueiras.

O carácter macrometrópico da Beira Litoral é devida ao distrito de Coimbra, pois no de Aveiro há falta, embora não significativa, de peles trigueiras (*d.l.r.* = - 1.89).

No Entre-Douro-e-Minho dá-se uma certa compensação entre os distritos de Viana do Castelo, onde se nota ligeiro excesso

de peles trigueiras, e os restantes distritos que tendem aproximar-se das condições dominantes em Traz-os-Montes.

Em resumo, quanto à cor da pele, a população portuguesa tende a diferenciar-se:

a) A norte da linha divisória dos distritos de Coimbra e Castelo Branco, por excesso significativo de pele branca-pálida e falta de peles rosadas e trigueiras. Apenas no distrito de Viana do Castelo se nota certo excesso de peles trigueiras que todavia não é significativo.

b) As peles rosadas encontram-se em excesso significativo nos distritos de Castelo Branco e Setúbal, em todo o Alentejo e no Algarve, conjugadas com falta de peles brancas-pálidas; mas ao passo que em Faro, Beja e Setúbal há também excesso significativo de peles trigueiras, nos restantes distritos há falta desta classe de peles.

c) O distrito de Coimbra manifesta uma posição singular: excesso significativo de peles trigueiras e falta igualmente significativa de peles rosadas e pálidas.

d) Na Extremadura as condições são indicisas, embora as peles claras e as pálidas se encontrem em excesso e faltem as trigueiras.

## 2) Cor do cabelo. — Tabelas VII e VIII; Mapas VII-XII.

No estudo da distribuição das diferenças locais incluímos os cabelos ruivos na mesma classe que os loiros. De facto os cabelos ruivos apresentam-se numa proporção tão fraca (0.17%), e tão irregularmente distribuídos, que a sua consideração como classes distintas se não justifica (cf. Tabela II, a pág. 129).

### a) Cabelo loiro. — Tabelas VII e VIII; Mapas VII e X.

O cabelo loiro encontra-se representado na nossa população numa proporção muito pequena (2.24%). Todavia a sua distribuição não é uniforme. A amplitude da variação provincial é de 2.45%; o mínimo corresponde a Traz-os-Montes (1.02%) e o máximo à Beira Baixa (3.47%); considerando porém a variação distrital das percentagens vê-se que a variabilidade deste carácter é maior (4.65%). Com efeito o mínimo

TABELA VII  
Côr do cabelo — Provincias

Provincias	Número de observações				Valores percentuais				D. l. r.				Classes		
	Loiro e ruivo	Cast.	Preto	Totais	Loiro e ruivo	Cast.	Preto	Totais	Loiro e ruivo	Cast.	Preto	Preto	Loiro e ruivo	Cast.	Preto
Algarve	15	473	83	571	2.63	82.84	14.54	100.01	+	.64	+ 7.64	- 8.05	+ 1	+ 4	- 4
Alentejo	40	1171	349	1560	2.56	75.06	22.37	99.99	+	.93	+ 6.15	- 6.57	+ 1	+ 4	- 4
Extremadura	39	790	381	1210	3.22	65.29	31.49	100.00	+	2.65	- 2.40	+ 1.66	+ 3	- 2	+ 2
Beira Baixa	31	665	198	894	3.47	74.38	22.15	100.00	+	2.58	+ 4.05	- 4.97	+ 3	+ 4	- 4
Beira Alta	17	644	219	880	1.93	73.18	24.89	100.00	-	.65	+ 3.22	- 3.07	- 1	+ 3	- 3
Beira Litoral	48	1972	1061	3081	1.56	64.01	34.44	100.01	-	2.99	- 6.02	+ 7.12	- 3	- 4	+ 4
Traz-os-Montes	16	1154	399	1569	1.02	73.55	25.43	100.00	-	3.52	+ 4.78	- 3.74	- 4	+ 4	- 4
Entre Douro e Minho	54	1058	724	1836	2.94	57.63	39.43	100.00	+	2.21	- 10.75	+ 10.26	- 2	- 4	+ 4
Totais	260	7927	3414	11601	2.24	68.33	29.43	100.00							

TABELA VIII

## Côr do cabelo — Distritos

Distritos	Número de observações				Valores percentuais				D. I. R.			Classes		
	loiro e ruivo	Cast.	Preto	Totais	Loiro e ruivo	Cast.	Preto	Totais	Loiro e ruivo	Cast.	Preto	Loiro e ruivo	Cast	Preto
Aveiro	8	350	152	510	1.57	68.63	29.80	100.00	- 1.05	+ 0.15	+ 0.19	- 1	0	0
Beja	16	385	114	515	3.11	74.76	22.14	100.01	+ 1.36	+ 3.21	- 3.71	+ 1	+ 3	- 4
Braga	8	270	196	474	1.69	56.96	41.35	100.00	- 0.83	- 5.43	+ 5.82	- 1	- 4	+ 4
Bragança	4	444	180	628	.64	70.70	28.66	100.00	- 2.79	+ 1.31	- 0.43	- 3	+ 1	0
Castelo Branco	25	351	97	473	5.29	74.21	20.51	100.01	+ 4.57	+ 2.81	- 4.35	+ 4	+ 3	- 4
Coimbra	40	1622	909	2571	1.56	63.09	35.36	100.01	- 2.66	- 6.48	+ 12.35	- 3	- 4	+ 4
Evora	9	402	90	501	1.80	80.24	17.96	100.00	- 0.69	+ 5.86	- 5.76	- 1	+ 4	- 4
Faro	15	473	83	571	2.63	82.84	14.54	100.01	+ 0.64	+ 7.64	- 8.01	+ 1	+ 4	- 4
Guarda	6	314	101	421	1.43	74.58	23.99	100.00	- 1.15	+ 2.81	- 2.49	- 1	+ 3	- 2
Leiria	14	311	144	469	2.99	66.31	30.70	100.00	+ 1.11	- 0.96	+ 0.62	+ 1	- 1	+ 1
Lisboa	4	124	62	190	2.11	65.26	32.63	100.00	- 0.13	- 0.92	+ 0.98	0	- 1	+ 1
Portalegre	15	384	145	544	2.76	70.59	26.65	100.00	+ 0.83	+ 1.16	- 1.45	+ 1	+ 1	- 1
Porto	33	555	314	902	3.66	61.53	34.81	100.00	+ 2.99	- 4.57	+ 3.63	+ 3	- 4	+ 4
Santarem	19	286	157	462	4.11	61.90	33.98	99.99	+ 2.77	- 3.03	+ 2.19	+ 3	- 3	+ 2
Setúbal	2	69	18	89	2.25	77.53	20.22	100.00	.00	+ 1.87	- 1.91	0	+ 2	- 2
Viana do Castelo	13	233	214	460	2.83	50.65	46.52	100.00	+ 0.86	- 8.31	+ 8.21	+ 1	- 4	+ 4
Vila Real	12	710	219	941	1.28	75.45	23.27	100.00	- 2.09	+ 4.90	- 4.32	- 2	+ 4	- 4
Vizeu	17	644	219	880	1.93	73.18	24.89	100.00	- 0.65	+ 3.22	- 3.07	- 1	+ 3	- 3
<b>Totais</b>	260	7927	3414	11601	2.24	68.33	29.43	100.00						

corresponde ao distrito de Bragança (0.64%) e o máximo ao de Castelo Branco (5.29).

O exame da Tabela VII e do Mapa VII mostra claramente que as províncias macrometrópicas, isto é, com excesso significativo de cabelo loiro, são a Beira Baixa ( $d.l.r = +2.58$ ) e a Extremadura (+2.65); pelo contrário, Traz-os-Montes (-3.52) e a Beira Litoral (-2.99) são micrometrópicas.

O Algarve, o Alentejo e o Entre-Douro-e-Minho manifestam também certo excesso de cabelo loiro, que é mais notável na última destas províncias (+2.25).

A Beira Alta é mesometrópica, mas manifesta falta, embora não significativa, de cabelos loiros (-.65); estabelece assim uma certa continuidade geográfica com a Beira Litoral e Traz-os-Montes.

A análise da Tabela VIII e do Mapa X, referentes aos distritos, vai precisar melhor estes factos.

Assim, o carácter macrometrópico da Beira Baixa é exclusivamente devido ao distrito de Castelo Branco (+4.57), pois o da Guarda (-1.15) manifesta, pelo contrário, falta, embora não significativa, de cabelos loiros; e o excesso significativo destes cabelos, na província da Extremadura, é principalmente devido ao distrito de Santarém (+2.77), pois no de Leiria (+1.11) tal excesso não é significativo, e os distritos de Lisboa (-.13) e Setúbal (0.00) são neutrais.

Em Traz-os-Montes, é especialmente ao distrito de Bragança (-2.79) que devemos atribuir o seu carácter micrometrópico, embora no distrito de Vila Real (-1.03) também se encontre falta considerável desta classe de cabelos.

No sul do País as diferenças são insignificativas, quer num sentido quer no outro. Nota-se todavia uma certa concordância entre os distritos de Faro (+0.64) e Beja (+1.36), onde se verifica ligeiro excesso de cabelos loiros; e o distrito de Portalegre (+0.83) fornece indicações que são harmónicas com as referentes aos distritos de Santarém e Castelo Branco.

Ao noroeste, no Entre-Douro-e-Minho, as relações são mais complexas; ao passo que o distrito de Braga (-.83) tende a concordar com o de Vila Real — falta de cabelos loiros — no distrito do Porto (+2.99) há excesso significativo destes cabelos e em Viana do Castelo (+.86) também, embora em menor escala.

b) *Cabelo castanho.* — Tabelas VII e VIII; Mapas VIII e XI.

Na população geral esta classe de cabelos é representada pela percentagem de 68.33%. A amplitude de variação provincial é de 25.21%; o mínimo corresponde ao Entre-Douro-e-Minho (57.63%) e o máximo ao Algarve (82.84%).

A amplitude de variação distrital (32.19%) é um pouco maior; o mínimo está em Viana do Castelo (50.65%) e o máximo corresponde ao distrito de Faro.

As províncias do litoral, ao norte do Tejo, acusam falta sensível de cabelos castanhos, que é estatisticamente significativa para a Beira Litoral (−6.02) e Entre-Douro-e-Minho (−10.75). As restantes províncias são claramente macrometrópicas.

O confronto com os valores distritais das diferenças locais relativas confirma sensivelmente estes resultados. Apenas o distrito de Setúbal (+1.87) se destaca da restante Extremadura para se pôr em concordância com o Alentejo, e o distrito de Aveiro (+0.15) se manifesta neutral, com excesso insignificativo de cabelos castanhos.

c) *Cabelo preto.* — Tabelas VII e VIII; Mapas IX e XII.

O cabelo preto está representado na população geral pela percentagem de 29.43%; menos de metade do valor correspondente ao cabelo castanho. Contudo a amplitude de variação provincial (24.89%) atinge sensivelmente o valor registado para o cabelo castanho. O mínimo corresponde ao Algarve (14.54%) e o máximo ao Entre-Douro-e-Minho (39.43%).

O mesmo se reconhece comparando os valores correspondentes à variação distrital; a amplitude dessa variação atinge o valor de 31.98%, com o mínimo em Faro (14.54%) e o máximo em Viana do Castelo (46.52%).

Os factos respeitantes à distribuição das diferenças relativas a esta classe de cabelos são, por assim dizer, a contrapartida do que se verifica com o cabelo castanho. Com ligeiras excepções se pode afirmar que onde faltam os cabelos castanhos estão em excesso os pretos, e reciprocamente.

Assim, nas províncias litorais, ao norte do Tejo, há excesso de cabelos pretos, que é significativo para a Beira Litoral (+ 7.12) e Entre-Douro-e-Minho (+ 10.26). As restantes províncias são micrometrópicas.

Os distritos de Setúbal (— 1.91) e de Aveiro (+ 0.19) distinguem-se respectivamente das províncias da Extremadura e Beira Litoral. Setúbal manifesta concordância com o Alentejo, e Aveiro aparece neutral, com excesso insignificante de cabelos pretos.

Em Traz-os-Montes, Bragança (— .43) é neutral, mas os cabelos pretos faltam.

Em resumo quanto à cor do cabelo: **Os cabelos loiros encontram-se em excesso em toda a região situada ao sul da linha que constitui o limite setentrional dos distritos de Leiria e Castelo Branco**, particularmente neste último distrito e no de Santarém, e nos distritos do Porto e Viana do-Castelo.

**Os cabelos castanhos predominam caracteristicamente, na parte meridional do país, ao sul do Tejo, e nas regiões montanhosas das Beiras (Alta e Baixa) e Traz-os-Montes, ao longo da fronteira espanhola.**

**Os cabelos pretos caracterizam por sua vez toda a região litoral ao norte do Tejo**, com particular intensidade no Entre-Douro-e-Minho e nos distritos de Coimbra e Santarém.

### 3) **Côr dos olhos.** — Tabelas IX e X; Mapas XIII-XVIII.

#### a) *Côr dos olhos.* — Tabelas IX e X; Mapas XIII e XVI.

Esta classe de olhos, na população geral, é representada pela percentagem 7.13%. Além disso a distribuição do carácter é muito variável.

A amplitude da *variação provincial* da sua frequência é de 10.61%; o mínimo corresponde ao Alentejo (1.86%) e o máximo ao Entre-Douro-e-Minho (12.47%).

Esta variabilidade manifesta-se um pouco maior (12.16%) quando se consideram os valores referentes aos *distritos*; o mínimo corresponde a Portalegre (1.10%), e o máximo a Viana do Castelo (13.26%).

Quanto às diferenças locais relativas: as províncias da Beira Litoral (+ 2.40), Beira Alta (+ 0.99), Traz-os-Montes (+ 2.44) e

TABELA IX  
Côr dos olhos — Provincias

Provincias	Número de observações			Valores percentuais			D. I. r.			Classes			
	Azuis	Médios	Escuros	Totais	Azuis	Médios	Escuros	Azuis	Médios	Escuros	Azuis	Médios	Escuros
Algarve	13	75	483	571	2.28	13.13	84.59	100.00	- 4.62	- 1.36	+ 4.03	- 1	+ 4
Alentejo	29	187	1344	1560	1.86	11.99	86.15	100.00	- 8.69	- 3.72	+ 8.58	- 4	+ 4
Extremadura	51	195	964	1210	4.21	16.12	79.67	100.00	- 4.16	+ 1.01	+ 1.70	+ 1	+ 2
Beira Baixa	51	142	701	894	5.70	15.88	78.41	99.99	- 1.72	+ 0.66	+ 0.50	+ 1	0
Beira Alta	70	130	680	880	7.95	14.77	77.27	99.99	+ 0.99	- 0.31	- 0.35	+ 1	0
Beira Litoral	249	520	2312	3081	8.08	16.88	75.04	100.00	+ 2.40	+ 3.16	- 4.21	+ 2	- 4
Traz-os-Montes	135	248	1186	1569	8.60	15.81	75.59	100.00	+ 2.44	+ 0.81	- 2.21	+ 2	- 2
Entre Douro e Minho	229	248	1349	1836	12.47	14.05	73.47	99.99	+ 9.70	- 1.40	- 4.79	+ 4	- 4
Totais	827	1755	9019	11601	7.13	15.13	77.74	99.99					

TABELA X  
Côr dos olhos — Distritos

Distritos	Número de observações				Valores percentuais				D. I. r.			Classes			
	Azuis	Médios	Escuros	Totais	Azuis	Médios	Escuros	Totais	Azuis	Médios	Escuros	Azuis	Médios	Escuros	
Aveiro	37	70	403	510	7.25	13.73	79.02	100.00	+ 0.11	- 0.90	+ 0.71	0	- 1	+ 1	
Beja	14	58	443	515	2.72	11.26	86.02	100.00	- 3.87	- 2.50	+ 4.62	- 4	- 3	+ 4	
Braga	52	66	356	474	10.97	13.92	75.11	100.00	+ 3.32	- 0.75	- 4.49	+ 3	- 1	- 1	
Bragança	51	104	473	628	8.12	16.56	75.32	100.00	+ 0.99	+ 1.03	- 1.50	+ 1	+ 1	- 2	
Castelo Branco	22	67	384	473	4.65	14.16	81.18	99.99	- 2.14	- 0.60	+ 1.84	- 2	- 1	+ 2	
Coimbra	212	450	1909	2571	8.25	17.50	74.25	100.00	+ 2.50	+ 3.81	- 4.82	+ 3	+ 4	- 4	
Evora	9	55	437	501	1.80	10.98	87.23	100.01	- 4.74	- 2.65	+ 5.22	- 4	- 3	+ 4	
Faro	13	75	483	571	2.28	13.13	84.59	100.00	- 4.62	- 1.36	+ 4.03	- 4	- 1	+ 4	
Guarda	29	75	317	421	6.89	17.81	75.30	100.00	- 0.20	+ 1.57	- 1.23	0	+ 2	- 1	
Leiria	18	70	381	469	3.84	14.93	81.24	100.01	- 2.83	- 0.13	+ 1.86	- 3	0	+ 2	
Lisboa	10	25	155	190	5.26	13.16	81.58	100.00	- 1.01	- 0.76	+ 1.28	- 1	- 1	+ 1	
Portalegre	6	74	464	544	1.10	13.60	85.29	99.99	- 5.59	- 1.02	+ 4.34	- 4	- 1	+ 4	
Porto	116	119	667	902	12.86	13.19	73.95	100.00	+ 6.97	- 1.69	- 2.85	+ 4	- 2	- 3	
Santarém	20	89	353	462	4.33	19.26	76.41	100.00	- 2.39	+ 2.53	- 0.70	- 2	+ 3	- 1	
Setúbal	3	11	75	89	3.37	12.36	84.27	100.00	- 1.38	- 0.73	+ 1.49	- 1	- 1	+ 1	
Viana do Castelo	61	73	326	460	13.26	15.87	70.87	100.00	+ 5.22	+ 0.45	- 3.62	+ 4	0	- 4	
Vila Real	84	144	713	941	8.93	15.30	75.77	100.00	+ 2.24	+ 0.16	- 1.52	+ 2	0	- 2	
Vizeu	70	130	680	880	7.95	14.77	77.27	99.99	+ 0.99	- 0.31	- 0.35	+ 1	0	0	
Totais	827	1755	9019	11601	7.13	15.13	77.74	99.99							

Entre-Douro-e-Minho (+ 9.70), manifestam excesso, mas apenas a última é nitidamente macrometrópica, embora na Beira Litoral e Traz-os-Montes o excesso de olhos azuis também seja grande.

Nas restantes províncias há falta sensível de olhos azuis, sendo nitidamente micrometrópicos o Algarve (— 4.62), o Alentejo (— 8.69) e a Extremadura (— 4.16).

A análise dos *valores distritais* das diferenças mostra porém que, embora os olhos azuis se encontrem em excesso nas províncias do norte, apenas os distritos do Porto (+ 6.97), Braga (+ 3.32) e Viana do Castelo (+ 5.22) são macrometrópicos. O excesso de olhos azuis é também significativo no distrito de Coimbra (+ 2.50).

Faro e os distritos alentejanos são micrometrópicos; e dos restantes distritos, embora todos manifestem falta desta classe de olhos, apenas no de Leiria (— 2.83) essa falta é significativa.

b) *Olhos médios.* — Tabelas IX e X; Mapas XIV e XVII.

Na população geral, esta classe de olhos está representada na percentagem de 15.13, sensivelmente o dôbro do valor numérico correspondente aos olhos azuis, mas, a oscilação dos valores percentuais é sensivelmente menor. A província com percentagem mínima é o Alentejo (11.99 %) e o máximo correspondente à Beira Litoral (16.88 %).

A comparação com os valores correspondentes aos distritos não altera sensivelmente estes resultados: o mínimo encontra-se no distrito de Évora (10.98 %), e o máximo no de Santarém (19.26 %). A posição particular da Beira Litoral é devida ao distrito de Coimbra, onde a percentagem dos olhos médios atinge o valor de 17.50.

A amplitude da variação distrital dos valores percentuais relativos aos olhos médios apresenta-se pois um pouco maior que a provincial, o que não é de estranhar.

O exame dos valores das diferenças locais relativas mostra-nos porém que muitas destas variações não tem significação estatística.

Com efeito apenas a Beira Litoral se apresenta macrometró-

pica (+ 3.16), e o Alentejo (- 3.72) se caracteriza significativamente em sentido oposto, quer dizer, é micrometrópico.

Para as demais províncias, as diferenças são muito pequenas, não tem significação estatística. Devemos porém observar que o Entre-Douro-e-Minho se distingue nitidamente da região confinante, pois a sua diferença local, embora se não possa considerar significativa, é de sinal contrário; por outras palavras, no Entre-Douro-e-Minho, as tendências são para falta de olhos médios.

Quanto aos distritos verifica-se que o carácter macrometrópico da Beira Litoral é devido a Coimbra (+ 3.81), pois o distrito de Aveiro (- 0.90) se aproxima das condições dominantes no Entre-Douro-e-Minho onde o distrito do Porto (- 1.69) é talvez significativamente micrometrópico.

O excesso de olhos médios, que determina o carácter mesometrópico da Extremadura, é exclusivamente devido ao distrito de Santarém (+ 2.53), pois o distrito de Leiria é neutral (- 0.13) e os de Lisboa (- 0.76) e Setúbal (- 0.73) tendem para as condições dominantes no Alentejo.

O carácter micrometrópico do Alentejo é devido especialmente aos distritos de Beja (- 2.50) e Évora (- 2.65). No distrito de Portalegre (- 1.02) ainda há falta, não significativa, de olhos médios, pelo que se aproxima do de Castelo Branco (- 0.60).

c) *Olhos escuros.* — Tabelas IX e X; Mapas XV e XVIII.

Mais de três quartas partes (77.47 %) dos indivíduos observados têm olhos escuros.

O Entre-Douro-e-Minho é a província onde esta classe de olhos atinge a percentagem mínima (73.47 %); o máximo de freqüência regista-se no Alentejo (86.15 %). A oscilação das freqüências é pois bastante pequena (12.68 %).

Para os distritos, o mínimo de freqüência regista-se em Viana do Castelo (70.87 %) e o máximo em Évora (87.23 %); resultados que confirmam os relativos à distribuição provincial, com ligeiro aumento da amplitude da variação (16.36 %), como é natural.

O exame dos valores das diferenças locais relativas mostra que os olhos escuros caracterizam as províncias da Extremadura

(+ 1.70), Alentejo (+ 8.58) e Algarve (+ 4.03). A Beira Litoral (- 4.21), o Entre-Douro-e-Minho (- 4.79) e Traz-os-Montes (- 2.21), apresentam-se com falta manifesta desta classe de olhos.

A Beira Alta e a Beira Baixa são neutrais, aproximando-se por isso das condições características da população geral.

O carácter micrometrópico da Beira litoral é exclusivamente devido ao distrito de Coimbra (- 4.82) pois no de Aveiro (+ 0.71) há um ligeiro excesso não significativo de olhos escuros.

No Entre-Douro-e-Minho é o distrito de Viana aquêle onde mais se nota a falta de olhos escuros (- 3.62); Braga (- 1.491) aproxima-se das condições dominantes em Traz-os-Montes.

Na Beira Baixa, o distrito de Castelo Branco (+ 1.84) tende a aproximar-se do de Portalegre (+ 4.34), e a Guarda (- 1.23) manifesta-se em sentido contrário, aproximando-se das condições dominantes em Traz-os-Montes.

Na Extremadura, o distrito de Santarém (- 0.70) destaca-se dos restantes, pois nêle se revela certa falta de olhos escuros que, todavia, se não pode considerar significativa.

Em resumo, quanto à côr dos olhos:

*A população ao norte dos distritos de Leiria e Castelo Branco caracteriza-se pelo excesso relativo de olhos azuis, que é sobretudo significativa em Coimbra, Porto e Viana do Castelo.*

*Os olhos médios caracterizam ainda a população desta zona setentrional na região fronteiriça, e o seu excesso vai-se acentuando desde Bragança até Coimbra, onde atinge o máximo. Santarém ocupa uma posição um tanto excepcional cujas relações com Coimbra se podem todavia facilmente compreender.*

*Os olhos pretos caracterizam a zona meridional do País desde os limites setentrionais dos distritos de Leiria e Castelo Branco, e encontram-se em excesso particularmente significativo no Alentejo e no Algarve.*

## II — Grau de segregação das classes. Constantes interlocais.

— A análise dos valores das diferenças locais relativas permite apreciar a homogeneidade ou heterogeneidade da população duma dada área geográfica, relativamente aos seus caracteres distintivos, ou às classes em que se repartem êsses caracteres.

No caso de se encontrarem diferenças significativas,

será ainda interessante averiguar o *grau de segregação das classes*, ou dos caracteres respectivos, porque tal conhecimento pode dar-nos indicações do valor para a resolução dalgumas questões importantes relativas ao sentido e à intensidade com que as forças selectivas, quer *iodiogénicas*, quer *paracínéticas*, estão contribuindo para a diferenciação fenotípica da população.

O problema é fácil de resolver, e a forma da sua solução é a mesma quer se trate dum conjunto qualquer de caracteres quantitativos, quer consideremos as diferentes classes em que se repartem os indivíduos observados relativamente a qualquer carácter qualitativo.

a) *Método estatístico*. — Quando uma população qualquer se divide num certo número de grupos locais e determinamos os valores das diferenças locais relativas, manifestadas por êsses grupos nos diferentes caracteres estudados, ou nas categorias em que classificamos as várias modalidades admitidas para qualquer carácter, obtemos para cada grupo local, a respeito de cada um dêsses caracteres, ou categorias, um número que pode ter, ou não ter, significação estatística.

Mas se qualquer carácter, ou categoria, se encontra uniformemente distribuido por tóda a área geográfica que a população geral ocupa, isto é, se os grupos locais se podem, a tal respeito, considerar *amostras fortuitas de população geral*, então os valores encontrados para as frequências de cada um dêsses caracteres, ou categorias, no conjunto dos grupos locais, devem apresentar uma distribuição que corresponde à *curva normal*, cuja equação é

$$y = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

onde  $q$  representa o número dos grupos locais e  $x$  os valores das diferenças encontradas.

Mas como as diferenças locais relativas não são mais do que as diferenças realmente observadas divididas

pelo respectivo desvio padrão, é evidente que, no caso da distribuição uniforme, o seu valor médio ( $h$ ) deverá ser igual a 0 e o desvio padrão respectivo ( $s$ ) deve ser igual à unidade, dentro dos limites dos erros prováveis.

As igualdades

$$h = 0 \pm \frac{67449}{\sqrt{q}},$$

e

$$s = 1 \pm \frac{67449}{\sqrt{2q}},$$

onde  $q$  representa o número dos grupos locais, permitem determinar duas grandezas  $h$  e  $s - 1$ , a que *Tocher* deu o nome de *constantes interlocais*, que servem para apreciar o grau de segregação das classes, isto é, o seu afastamento relativo da hipótese da distribuição uniforme.

*Tocher* <sup>(1)</sup> propôs o esquema seguinte (Tabela XI) para a classificação dos valores das constantes interlocais:

TABELA XI

A divergência da uniformidade é	A constante interlocal está compreendida
Significativa	entre 0 e 1.0
Muito significativa	> 1.0 e 2.0
Altamente significativa	> 2.0 e 3.0
Excessivamente grande	> 3.00

b) *Constantes interlocais da população portuguesa.* — O estudo feito das diferenças locais relativas provou, quanto à pigmentação — côr da pele, do cabelo e dos olhos —, que a população portuguesa se não distribue

(1) Cf. *Biometrika*, Vol. VII, pág. 177.

uniformemente por tãda a área geográfica envolvida, isto é, que não se pode considerar homogeneia.

Verificou-se, em muitos casos, que tais diferenças eram significativas e, por êsse facto, provavam haver *segregação geográfica*.

Resta agora averiguar qual o grau dessa segregação. É o problema a que nos referimos a pag. 127.

Como então dissemos torna-se indispensável o estudo da forma da distribuição das diferenças locais relativas para cada uma das classes, colectivamente consideradas, e a sua comparação com a correspondente à hipótese da distribuição uniforme.

Os valores das constantes ( $h$ ) e ( $s - 1$ ), para os distritos, constam da Tabela XII.

TABELA XII  
Constantes interlocais

Côr	$h$	$s - 1$	$\frac{s - 1}{E_{s-1}}$
Pele rosada	+ 1.099 $\pm$ .159	7.532 $\pm$ .112	67.25
Pele pàlida	- .309 $\pm$ .159	5.676 $\pm$ .112	50.68
Pele trigueira	- .505 $\pm$ .159	3.338 $\pm$ .112	29.80
Cabelo loiro	+ .172 $\pm$ .159	.895 $\pm$ .112	7.99
Cabelo castanho	+ .291 $\pm$ .159	3.286 $\pm$ .112	29.33
Cabelo preto	- .081 $\pm$ .159	3.965 $\pm$ .112	35.40
Olhos azuis	- .357 $\pm$ .159	2.408 $\pm$ .112	21.50
Olhos médios	- .214 $\pm$ .159	.595 $\pm$ .112	5.31
Olhos escuros	+ .406 $\pm$ .159	1.841 $\pm$ .112	16.44

Verifica-se que, em todos os casos, essas constantes excedem várias vezes os seus erros prováveis, o que prova a segregação efectiva das diferentes classes dos caracteres estudados, como aliás já se tinha notado ao considerarmos as diferenças individuais das classes.

Apenas os olhos médios e o cabelo loiro manifestam uma certa tendência para a distribuição uniforme, mas ainda nestes casos os desvios são superiores a 5 e a 7 vezes os respectivos erros prováveis. (Gráficos I e II).

Mas quando se comparam estes valores com os referentes às outras classes reconhecem-se diferenças consideráveis.

Particularmente, as côres da pele, o cabelo escuro e o castanho, e os olhos azuis, provam indubitavelmente que os processos selectivos tem efectuado uma indiscutível diferenciação da população portuguesa em sentidos diversos consoante as regiões consideradas.

*Distribuição das diferenças locais relativas.*

*Cabelo loiro - Distritos.*

$$y = \frac{11}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

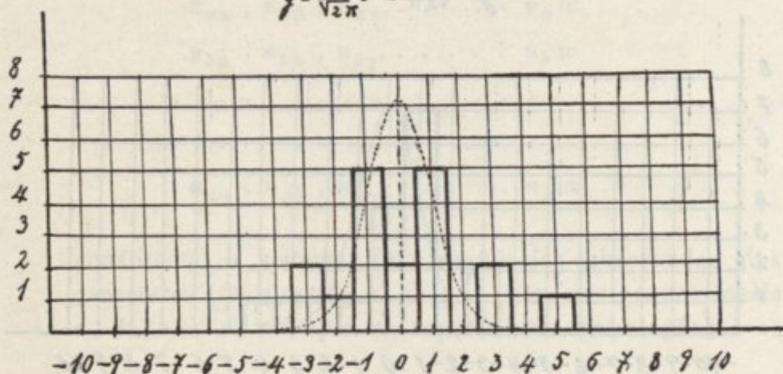


Gráfico I

**III) Semelhança entre as populações locais e a população geral.** — Quando um carácter se reparte em várias classes,

como por exemplo a cor da pele, do cabelo e dos olhos, pode suceder que os diferentes grupos locais — províncias, distritos, etc. — apresentem diferenças significativas numa ou em várias dessas classes, relativamente ao que se observa na população geral.

Mas, compreende-se facilmente que um ou mais grupos locais apresentem diferenças significativas na distribuição dum ou mais classes de qualquer carácter e, contudo, ainda se possam considerar *amostras fortuitas* da população geral, quando se considerarem colectivamente todas as classes em que o carácter se repartiu.

Para resolvermos este problema precisamos por isso de comparar, para cada grupo local, o conjunto das frequências observadas, das várias classes do carácter em consideração, com o conjunto das frequências das mesmas classes que são características da população geral.

Num estudo anterior <sup>(1)</sup> tivemos ocasião de expor os métodos estatísticos utilizáveis para tal fim. Esses métodos devem-se ao eminente estatístico de Londres

*Distribuição das diferenças locais relativas.*

*Olhos médios - Distritos.*

$$y = \frac{18}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

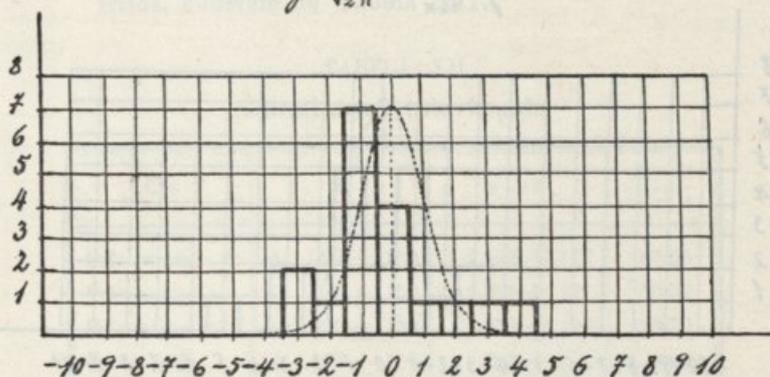


Gráfico II

Professor KARL PEARSON, e acham-se desenvolvidamente expostos em várias publicações <sup>(2)</sup>.

Julgamos porém prestar um serviço aos estatísticos portugueses aproveitando a oportunidade para tratarmos do assunto mais desenvolvidamente do que então fizemos.

- a) *Método de contingência quadrada.* — Uma primeira forma de resolução consiste em determinar a probabilidade de

<sup>(1)</sup> *Revista da Universidade de Coimbra.* — Vol. iv, pág. 613.

<sup>(2)</sup> K. PEARSON — *Mathematical Contribution to the theory of Evolution XIII. On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation.* — Dulau & C.<sup>o</sup>, Londres. *Philosophical Magazine.* — Vol. 1, pág. 157 e seg.

ocorrência casual, nas diferentes áreas geográficas locais, de diferenças, na frequência das classes, tão grandes ou maiores do que as realmente observadas <sup>(1)</sup>. O que equivale a comparar as frequências observadas, em cada região, com os seus valores mais prováveis, isto é, com os valores teóricos que se encontrariam se a população geral se distribuisse uniformemente por todo o país.

Desta forma comparam-se, para cada localidade, as frequências observadas das classes do carácter, consideradas em conjunto, com as frequências proporcionais das classes correspondentes da população geral.

O Prof. KARL PEARSON demonstrou que, se

$$\begin{array}{ccccccc} n_{ax} & , & n_{a\beta} & , & n_{a\gamma} & , & \dots & n_{aw} \\ n_{bx} & , & n_{b\beta} & , & n_{b\gamma} & , & \dots & n_{bw} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ n_{zx} & , & n_{z\beta} & , & n_{z\gamma} & , & \dots & n_{zw} \end{array}$$

constituem o sistema das frequências observadas dos caracteres (ou classes)  $\alpha, \beta, \gamma, \dots w$ , nos grupos locais  $a, b, c \dots z$ , em que se reparte uma população; e se

$$\begin{array}{ccccccc} n'_{ax} & , & n'_{a\beta} & , & n'_{a\gamma} & , & \dots & n'_{aw} \\ n'_{bx} & , & n'_{b\beta} & , & n'_{b\gamma} & , & \dots & n'_{bw} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ n'_{zx} & , & n'_{z\beta} & , & n'_{z\gamma} & , & \dots & n'_{zw} \end{array}$$

constituem um sistema de frequências teóricas conhecidas *à priori*; a probabilidade  $P$  de, numa outra observação,

(1) J. F. TOCHER — *The anthropometric characteristics of the inmates of Asylums in Scotland* — *Biometrika*, Vol. v, pág. 298.

*Pigmentation survey of School-children in Scotland* — *Biometrika*, Vol. vi, pág. 129.

encontrarmos um sistema de frequências que se desvie mais do primeiro que o sistema das frequências teóricas, é função da grandeza

$$\chi^2 = \sum \left[ \frac{(n_{c\gamma} - n'_{c\gamma})^2}{n'_{c\gamma}} \right],$$

para todos os valores de  $c$ , de  $a$  até  $z$ , isto é, para todos os grupos, e para todos os valores de  $\gamma$ , de  $\alpha$  até  $w$ , isto é, para todas as classes <sup>(1)</sup>.

O coeficiente  $\chi^2$ , a que PEARSON chama *contingência quadrada*, não é mais do que a soma — para todas as classes de cada grupo local e para todos os grupos — dos cocientes que se obtém dividindo pelas frequências teóricas os quadrados das diferenças entre essas frequências e as observadas.

Como facilmente se compreende, visto se elevarem ao quadrado as diferenças ( $n_{c\gamma} - n'_{c\gamma}$ ) entre as frequências observadas e as teóricas, o valor de  $\chi^2$  aumenta com a grandeza dessas diferenças, quer sejam positivas, quer sejam negativas, e será igual a zero se as duas distribuições dos valores comparados forem exactamente iguais.

Mas é também evidente que, ainda mesmo quando considerarmos duas amostras diferentes duma população homogénea, o valor de  $\chi^2$  raras vezes será zero, pois devemos ter em conta as diferenças resultantes dos erros fortuitos.

Por isso, para com segurança apreciarmos a significação estatística de qualquer valor de  $\chi^2$ , é indispensável

<sup>(1)</sup> As frequências teóricas  $n'_{c\gamma}$  das classes de qualquer carácter dum grupo local calculam-se facilmente na hipótese da distribuição uniforme.

Com efeito, se representarmos por  $N$  a grandeza da população geral (número dos indivíduos) por  $n_\gamma$  a frequência observada da classe  $\gamma$  nessa população; e se  $n_c$  representar o número dos indivíduos que constituem o grupo local  $c$ , a frequência teórica, ( $n'_{c\gamma}$ ), da classe  $\gamma$  no referido grupo local será, evidentemente:

$$n'_{c\gamma} = \frac{n_c \cdot n_\gamma}{N}.$$

conhecer a forma da distribuição a-fim-de determinarmos a probabilidade da sua ocorrência numa amostra fortuita da população geral.

A distribuição fortuita dos valores de  $\chi^2$  é dada pela expressão (1)

$$df = k \chi^{n'-1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \chi^2} d\chi,$$

onde  $df$  representa o elemento de frequência compreendido entre as ordenadas levantadas nos pontos  $\chi$  e  $\chi + d\chi$ ;  $k$  é uma constante e  $n'$  o número de *graus de liberdade* (2).

(1) Esta demonstração foi pela primeira vez efectuada por KARL PEARSON — *Philosophical Magazine*, Vol. 1, págs. 157-175, 1900.

(2) O conceito de *grau de liberdade* não fácil de apresentar em termos gerais, mas é possível dar dêle, mesmo elementarmente, uma justificação cabal.

Primeiramente, os valores dos erros fortuitos que affectam as parcelas integrantes da expressão de  $\chi^2$ , em qualquer distribuição experimental, são todos positivos, e, por conseguinte, quando maior fôr o número dos grupos em que se divide a população geral tanto maior será o valor de  $\chi^2$  por virtude dessas variações fortuitas. Na expressão analítica da distribuição dos valores de  $\chi^2$  deve, portanto, ter-se em conta este facto, o que se realiza pela introdução do expoente  $n'$ .

Em segundo logar, quando se pretende ajustar uma distribuição teórica aos dados da observação, é prática corrente igualar algumas das constantes da equação teórica aos valores experimentais correspondentes. Por conseguinte, quando pretendermos averiguar se os dados experimentais se ajustam suficientemente bem a uma determinada distribuição teórica, devemos evidentemente entrar em linha de conta com a medida em que os fizemos já corresponder. Exemplificando:

Suponhamos que a uma distribuição experimental, constituida por  $n'$  grupos, se ajusta uma curva teórica definida por uma equação com  $n'$  constantes tôdas calculadas a partir dos dados da observação; é evidente que as duas distribuições coincidem exactamente, e o valor de  $\chi^2$  será zero, por não haver a considerar erros fortuitos.

Cada constante da equação da curva teórica que se determina a partir dos dados de observação corresponde, sob o ponto de vista do valor de  $\chi^2$ , ao efeito de reduzir duma unidade o número dos grupos da distribuição, e os graus de liberdade podem, por conseguinte, considerar-se em número igual ao dos grupos independentes que efectivamente contribuem para o valor de  $\chi^2$ .

No nosso caso, calculamos sempre as frequências teóricas das diferentes classes dos vários caracteres supondo que o número total dos individuos de cada grupo local era o mesmo, tanto na distribuição teórica (hipótese duma população geral uniforme), como na realmente observada; determinamos assim uma constante da distribuição teórica a partir dos dados da observação, e reduzimos concomitantemente de uma unidade os graus de liberdade. Cf. L. H. TIPPETT — *The methods of Statistics*, pág. 62.

E a probabilidade de, numa distribuição fortuita, encontrarmos um valor de  $\chi^2$  igual ou maior que um determinado valor  $\chi_1^2$ , é dada pela expressão

$$P = \frac{\int_{\chi_1}^{\infty} \chi^{n'-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi}{\int_0^{\infty} \chi^{n'-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi} \quad (1)$$

O valor numérico de  $\chi^2$  fornece assim um *critério da precisão* com que as frequências observadas se ajustam às teóricamente mais prováveis. Com efeito, se o valor de  $P$  for grande, as probabilidades são favoráveis à hipótese de se poder considerar o grupo respectivo como amostra fortuita da população geral; se, pelo contrário, o valor de  $P$  for pequeno, as probabilidades são em sentido oposto, isto é, o grupo local diverge significativamente da população geral.

Conhecidos portanto os valores das contingências quadradas correspondentes aos vários grupos locais, em que repartimos a população geral, podemos facilmente apreciar a medida em cada um desses grupos se afasta da hipótese da distribuição uniforme, isto é podemos apreciar o *grau de heterogeneidade* dessa população (1).

O valor de  $P$ , dado pela equação (1), pode desenvolver-se em série (2), e toma então as expressões

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left( \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^3}{1.3} + \frac{\chi^5}{1.3.5} + \dots + \frac{\chi^{n-3}}{1.3.5 \dots (n-3)} \right),$$

quando  $n$  é par; e

$$P = e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \left( 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{2.4} + \dots + \frac{\chi^{n-3}}{2.4 \dots (n-3)} \right),$$

quando  $n$  é ímpar; onde  $n$  é sempre igual ao número de graus de liberdade acrescido duma unidade.

(1) *Biometrika*, Vol. XII, pág. 224.

(2) Cf. K. PEARSON — *Philosophical Magazine*, Vol. I, págs. 157-175.

Para a determinação dos valores de  $P$  dispomos porém de táboas que facilitam consideravelmente o trabalho de cálculo. Estas táboas dão os valores de  $P$  para todos os valores de  $n$  a partir de 3 até 30 (1).

Quando porém um grupo local, a respeito de qualquer carácter, se divide apenas em *duas classes alternativas*, é evidente que não nos podemos servir destas táboas. Mas, neste caso ( $n = 2$ ;  $n' = 1$ ), o grau de ajustamento entre as freqüências teóricas e as observadas pode calcular-se facilmente com o auxílio das táboas publicadas por G. UDN YULE (2).

*Valores de log. P; sua distribuição na população portuguesa.* — Calculados os valores de  $\chi^2$  determinamos os valores de *log. P*, com o auxílio das Táboas PEARSON, para a côr da pele, do cabelo e dos olhos (*Provincias e Distritos*).

Tomando o valor  $P = ,05$ , ou *log. P* =  $\bar{2}.70$ , como representativo do *limite da significância* (3), é evidente que todos os valores de  $\chi^2$  superiores a 3.76 são indicativos de divergência real entre a população geral e o grupo local respectivo. Os resultados estão registados nas Tabelas XIII e XIV.

Construimos também uma escala dos valores de *log. P*, com intervalos de 2 unidades, que nos permitiu representar graficamente estes resultados e apreciar rapidamente o grau de divergência relativa dos diferentes grupos locais — Mapas XIX·XXIV.

a) *Côr da pele.* — Tabelas XIII e XIV; Mapas XIX e XX.

Todas as províncias divergem significativamente; apenas a Extremadura (*log. P* =  $\bar{2}.54$ ) parece aproximar-se da população geral.

A divergência máxima corresponde ao Alentejo (*log. P* =  $\bar{1}69.40$ ); a divergência mínima corresponde, comõ dissemos, à Extremadura.

(1) Cf. PALIN ELDERTON — *Tables for testing de «goodness of fit» of theory to observation*, *Biometrika*, Vol. I, pág. 155; e KARL PEARSON — *Tables for Statisticians and Biometricians*, pág. 31 e 26. *Cambridge University Press*.

(2) *On the Application of the  $\chi^2$  method to association and contingency tables*. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. LXXXV, Part. I, pág. 95. *London*.

(3) FISHER — *Statistical methods for Research Workers*, pág. 82.

TABELA XIII  
 Províncias — Divergências na cor da pele, do cabelo e dos olhos

Províncias	Pele		Cabelo		Olhos	
	<i>Log. P</i>	$C_b$	<i>Log. P</i>	$C_b$	<i>Log. P</i>	$C_b$
Algarve	35.68	.119 ± .008	14.75	.074 ± .005	6.83	.046 ± .004
Alentejo	169.40	.268 ± .007	9.86	.061 ± .006	19.51	.092 ± .004
Extremadura	2.54	.025 ± .006	2.15	.029 ± .007	4.59	.039 ± .005
Beira Baixa	9.11	.062 ± .007	6.04	.050 ± .006	1.37	.017 ± .006
Beira Alta	10.39	.064 ± .006	3.86	.030 ± .006	1.80	.009 ± .007
Beira Litoral	27.14	.120 ± .005	9.07	.069 ± .006	3.17	.039 ± .006
Trás-os-Montes	45.04	.142 ± .005	6.55	.050 ± .006	2.66	.025 ± .007
Entre-Douro e-Minho	30.58	.117 ± .004	22.88	.069 ± .007	18.79	.090 ± .008

TABELA XIV  
Distritos — Divergências na cor da pele, do cabelo e dos olhos

Distritos	Pele		Cabelo		Olhos	
	Log. P	$C_b$	Log. P	$C_b$	Log. P	$C_b$
Aveiro	2.65	.025 ± .006	1.77	.010 ± .005	1.84	.008 ± .006
Beja	46.03	.137 ± .006	4.94	.036 ± .006	6.86	.046 ± .005
Braga	7.07	.053 ± .004	8.94	.054 ± .007	3.69	.031 ± .008
Bragança	12.24	.070 ± .001	2.30	.027 ± .004	1.53	.014 ± .007
Castelo Branco	17.57	.082 ± .008	8.46	.056 ± .008	2.90	.021 ± .005
Coimbra	33.14	.127 ± .005	11.92	.072 ± .006	4.07	.045 ± .007
Évora	81.31	.183 ± .009	8.79	.055 ± .005	7.16	.053 ± .005
Faro	35.68	.119 ± .008	14.75	.074 ± .005	6.83	.046 ± .004
Guarda	5.23	.044 ± .006	2.29	.027 ± .006	1.50	.015 ± .007
Leiria	1.49	.015 ± .006	1.61	.012 ± .007	2.30	.027 ± .005
Lisboa	1.43	.015 ± .007	1.80	.009 ± .006	1.63	.013 ± .006
Portalegre	53.63	.146 ± .009	1.48	.015 ± .006	8.84	.054 ± .003
Porto	18.91	.085 ± .004	6.99	.046 ± .007	10.13	.065 ± .008
Santarém	2.61	.021 ± .006	3.13	.035 ± .008	3.75	.031 ± .006
Setúbal	4.70	.036 ± .006	1.22	.018 ± .006	1.43	.015 ± .005
Viana do Castelo	6.05	.050 ± .004	15.36	.078 ± .007	6.69	.049 ± .008
Vila Real	37.30	.125 ± .005	5.00	.046 ± .006	2.98	.021 ± .007
Vizeu	10.39	.064 ± .006	3.86	.030 ± .006	1.80	.009 ± .007

As divergências do Algarve ( $\log. P = \overline{35.68}$ ), Alentejo ( $\log. P = \overline{169.40}$ ), Extremadura ( $\log. P = \overline{2.54}$ ) e Beira Baixa ( $\log. P = \overline{9.11}$ ) são devidas ao excesso de peles rosadas [Tabela V — *d. l. r.*: Algarve, + 11.28; Alentejo, + 27.36; Extremadura, + 1.92; Beira Baixa, + 6.35]; enquanto que as da Beira Alta ( $\log. P = \overline{10.39}$ ), Traz-os-Montes ( $\log. P = \overline{45.04}$ ) e Entre-Douro-e-Minho ( $\log. P = \overline{30.58}$ ) são de atribuir ao excesso de peles brancas-pálidas [Tabela V — *d. l. r.*: Beira Alta, + 6.92; Traz-os-Montes, + 13.24; Entre-Douro-e-Minho, + 7.52]. Mas no Algarve e no Alentejo há também excesso significativo de peles trigueiras [Tabela V — *d. l. r.*: + 2.63 e + 3.56, respectivamente] que não se regista nas restantes províncias citadas.

A Beira Litoral ( $\log. P = \overline{27.14}$ ) diverge exclusivamente por excesso de peles trigueiras.

Todos os distritos, com excepção dos de Leiria ( $\log. P = \overline{1.49}$ ) e Lisboa ( $\log. P = \overline{1.43}$ ), divergem significativamente da população geral. A divergência máxima é manifestada pelo distrito de Évora ( $\log. P = \overline{84.34}$ ) e a mínima pelo de Leiria.

Nos distritos ao sul dos da Guarda e Coimbra as divergências são devidas ao excesso de peles rosadas [Tabela VI — *d. l. r.*: Castelo Branco, + 8.70; Portalegre, + 15.23; Setúbal, + 2.39]; Beja, + 10.51; Évora, + 19.44; Faro, + 11.28], mas nas divergências dos distritos de Setúbal ( $\log. P = \overline{4.70}$ ), Beja ( $\log. P = \overline{46.03}$ ) e Faro ( $\log. P = \overline{35.68}$ ) também influe o excesso de peles trigueiras [Tabela VI — *d. l. r.*: Setúbal, + 2.26; Beja, + 6.96; Faro, + 2.63] que faltam na restante região considerada.

Ao norte dos distritos de Castelo Branco e Coimbra, todos os distritos divergem significativamente [ $\log. P$ : Aveiro,  $\overline{2.65}$ ; Vizeu,  $\overline{10.39}$ ; Guarda,  $\overline{5.23}$ ; Bragança,  $\overline{12.24}$ ; Vila Real,  $\overline{37.30}$ ; Porto,  $\overline{18.91}$ ; Braga,  $\overline{7.07}$ ; Viana do Castelo,  $\overline{6.05}$ ]; por excesso de peles brancas-pálidas [Tabela VI — *d. l. r.*: Aveiro + 2.64; Vizeu, + 6.92; Guarda, + 4.61; Bragança, + 4.93; Vila Real, + 12.49; Porto, + 5.80; Braga, + 3.80], com excepção do distrito de Viana do Castelo onde há também excesso ligeiro de peles trigueiras [*d. l. r.*: + 2.25 e + .86, respectivamente].

O distrito de Coimbra manifesta uma posição singular: diverge

significativamente ( $\log. P = 33.14$ ) por excesso de peles trigueiras ( $d. l. r. = + 10.22$ ), mas distingue-se dos de Aveiro e Vizeu, onde há excesso de peles pálidas ( $d. l. r. + 2.64$  e  $+ 6.92$ , respectivamente).

b) Côr do cabelo. — Tabelas XIII e XIV; Mapas XXI e XXII.

Tôdas as províncias divergem significativamente. A divergência é máxima ( $\log. P = 22.88$ ) no *Entre-Douro-e-Minho* e no *Algarve* ( $\log. P = 14.75$ ), devendo o facto attribuir-se, quanto à primeira destas províncias, ao excesso de cabelos pretos (Tabela VII —  $d. l. r. = + 10.26$ ) ao passo que no *Algarve* são os cabelos castanhos que se encontram em excesso ( $d. l. r. = + 7.64$ ).

A divergência das restantes províncias, com excepção da *Extremadura* e da *Beira Litoral*, é devida ao excesso significativo de cabelos castanhos [Tabela VII —  $d. l. r.$ : Alentejo,  $+ 6.15$ ; *Beira Baixa*,  $+ 4.05$ ; *Beira Alta*,  $+ 3.22$ ; *Traz-os-Montes*,  $+ 4.78$ ].

A *Extremadura* diverge relativamente pouco ( $\log. P = 2.54$ ), e a sua divergência é devida ao excesso de cabelos loiros e pretos [Tabela VII —  $d. l. r.$ :  $+ 2.65$  e  $+ 1.66$ , respectivamente.

A divergência da *Beira Litoral* ( $\log. P = 27.14$ ) é devida ao excesso de cabelos pretos ( $d. l. r. + 7.12$ ).

Apenas os distritos de Aveiro ( $\log. P = 1.77$ ), Leiria ( $\log. P = 1.64$ ), Lisboa ( $\log. P = 1.80$ ), Portalegre ( $\log. P = 1.48$ ) e Setúbal ( $\log. P = 1.22$ ), se podem razoavelmente considerar não divergentes da população geral.

A divergência máxima encontra-se no distrito de Viana do Castelo ( $\log. P = 15.36$ ) e a mínima no de Lisboa.

Ao sul do Tejo as divergências são devidas ao excesso de cabelo castanho [Tabela VIII —  $d. l. r.$ : Portalegre:  $+ 1.16$ ; Setúbal,  $+ 1.87$ ; Beja,  $+ 3.21$ ; Évora,  $+ 5.86$ ; Faro,  $+ 7.64$ ].

Os distritos da *Beira Baixa*, *Beira Alta* e *Traz-os-Montes* divergem também por excesso de cabelo castanho [Tabela VIII —  $d. l. r.$ : Castelo Branco,  $+ 2.81$ ; Guarda,  $+ 2.81$ ; Vizeu,  $+ 3.22$ ; Vila Real,  $+ 4.90$ ; Bragança,  $+ 1.31$ ]; mas ao passo que o distrito de Castelo Branco se liga com os situados ao sul do Tejo,

por excesso de cabelo loiro [*d. l. r.* + 4.57], tais cabelos faltam nos restantes distritos da região <sup>(1)</sup>.

*Os distritos da Beira Litoral e do Entre-Douro-e-Minho divergem por excesso de cabelo preto* [Tabela VIII — *d. l. r.* = Coimbra, + 12.35; Aveiro, + 0.19; Porto, + 3.69; Braga, + 5.82; Viana do Castelo, + 8.21], mas nesta última provincia, contrariamente ao que tem logar na Beira Litoral, há também excesso de cabelos loiros [Tabela VIII — Porto, + 2.99; Viana do Castelo, + 0.86] <sup>(2)</sup>.

c) **Côr dos olhos** — Tabelas XIII e XIV; Mapas XXIII e XXIV.

Tôdas as provincias, com excepção da Beira Baixa e Beira Alta, divergem significativamente. O máximo da divergência (Classe VI), corresponde ao Alentejo (*log. P* = 19.51) e ao Entre-Douro-e-Minho (*log. P* = 18.79).

*As divergências da Extremadura, Alentejo e Algarve devem atribuir-se a excesso significativo de olhos escuros.* Na Extremadura há um certo excesso de olhos médios, que não é significativo (*d. l. r.* = + 1.01), atribuível ao distrito de Santarém (*d. l. r.* = + 2.53), pois o distrito de Leiria é neutral (*d. l. r.* = - .13), e os de Lisboa (*d. l. r.* = - .76) e Setúbal (*d. l. r.* = - .73) concordam com as condições dominantes no Alentejo (falta de olhos médios).

*Nas provincias do norte — Beira Litoral, Entre-Douro-e-Minho e Traz-os-Montes — as divergências são, pelo contrário, devidas a excesso de olhos azuis e médios.* A falta de olhos médios que se nota no Entre-Douro-e-Minho (Tabela IX), talvez não seja significativa (*d. l. r.* = - 1.40); deve atribuir-se aos distritos do Porto (*d. l. r.* = - 1.69) e Braga (*d. l. r.* = - .75), pois no de Viana do Castelo há um ligeiro exesso destes olhos (*d. l. r.* = + .45).

A Beira Baixa não diverge significativamente (*log. P* =

<sup>(1)</sup> Os cabelos loiros faltam no distrito de Évora, mas o facto não se pode considerar significativo (*d. l. r.* = - 0.69); no distrito de Setúbal a diferença relativa aos cabelos loiros é nula e por isso insignificativa.

<sup>(2)</sup> A falta de cabelos loiros manifestada no distrito de Braga não tem significação estatística (*d. l. r.* = - 0.83).

=  $\bar{1.37}$ ), mas ao passo que o distrito de Castelo Branco acompanha a região que lhe fica ao sul — excesso de olhos escuros e falta de olhos azuis e médios —, o distrito da Guarda aproxima-se das condições existentes nos distritos de Coimbra, Vila Real e Bragança — excesso de olhos médios e azuis e falta de olhos escuros (Tabela X). A falta de olhos azuis registada no distrito da Guarda não tem significação (*d. l. r.* = - .20).

A Beira Alta também não se pode considerar divergente (*log. P* =  $\bar{1.80}$ ), mas pelo excesso de olhos azuis liga a Beira Litoral — Distrito de Coimbra (*d. l. r.* = + 2.50) — com o Entre-Douro-e-Minho e Traz-os-Montes.

b) *Método do coeficiente de divergência.* — Os valores da contingência quadrada permitem, como vimos, determinar o grau de heterogeneidade duma população comparando os valores das frequências observadas das diferentes classes de cada carácter com as respectivas frequências teóricas, na hipótese da distribuição uniforme dessa população. Desta maneira, compara-se cada grupo local com a totalidade da população observada.

Mas podemos ainda determinar o grau de heterogeneidade duma população, dividida em vários grupos locais, por outro método que consiste em comparar cada grupo local, não com a população total observada, mas com o resto que fica depois de eliminado o grupo local que se considera.

Para êste efeito imaginou PEARSON um coeficiente, a que deu o nome de *coeficiente de heterogeneidade ou divergência*, que se baseia igualmente na noção de contingência, e é muito útil e cómodo para a resolução dêste e doutros problemas <sup>(1)</sup>. Vejamos como se obtém êsse coeficiente.

Sejam  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, w$  uma série de caracteres, ou classes distintas do mesmo carácter, duma população constituída por  $N$  indivíduos, e  $a, b, c, \dots, z$ , os grupos locais em que se acha repartida

(<sup>1</sup>) K. PEARSON. — *On a coefficient of class heterogeneity or divergency.* *Biometrika.* Vol. v, pág. 198.

Construa-se uma *táboa* de forma tal que as colunas correspondam aos caracteres, ou classes alternativas consideradas, e as linhas aos grupos locais.

Táboa de contingência

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	.....	$w$	Totais
$a$	$n_{a\alpha}$	$n_{a\beta}$	$n_{a\gamma}$	.....	$n_{aw}$	$n_a$
$b$	$n_{b\alpha}$	$n_{b\beta}$	$n_{b\gamma}$	.....	$n_{bw}$	$n_b$
$c$	$n_{c\alpha}$	$n_{c\beta}$	$n_{c\gamma}$	.....	$n_{cw}$	$n_c$
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$z$	$n_{z\alpha}$	$n_{z\beta}$	$n_{z\gamma}$	.....	$n_{zw}$	$n_z$
Totais	$n_\alpha$	$n_\beta$	$n_\gamma$	.....	$n_w$	$N$

Reserve-se a última coluna para as freqüências totais dos grupos e a última linha para as freqüências observadas dos diferentes caracteres, ou classes, da população geral.

Inscrevam-se, finalmente, nos cruzamentos das linhas com as colunas, as freqüências observadas dos caracteres nos grupos locais respectivos.

Numa táboa assim constituída, a que PEARSON deu o nome de *Táboa de contingência*, o número  $n_{c\gamma}$ , por exemplo, representa a freqüência observada do carácter  $\gamma$  no grupo  $c$ .

As freqüências totais, correspondentes aos diversos grupos  $a, b, c, \dots, z$ , são respectivamente  $n_a, n_b, n_c, \dots, n_z$ ; as freqüências dos diferentes caracteres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, w$ , na população geral, são semelhantemente representadas pelos números  $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, \dots, n_w$ .

É evidente que, na hipótese da distribuição uniforme da

população geral, a frequência teórica do carácter  $\gamma$  no grupo  $c$  será

$$\frac{n_c \cdot n_\gamma}{N},$$

e, por conseguinte, a contribuição do locus  $n_{c\gamma}$  para a contingência quadrada da táboa, será

$$\frac{\left(n_{c\gamma} - \frac{n_c \cdot n_\gamma}{N}\right)^2}{\frac{n_c \cdot n_\gamma}{N}}.$$

PEARSON chamou *contingência quadrada média* duma táboa de contingência ao valor da expressão

$$\varphi^2 = \frac{1}{N} \sum_{c\gamma} \left[ \frac{\left(n_{c\gamma} - \frac{n_c \cdot n_\gamma}{N}\right)^2}{\frac{n_c \cdot n_\gamma}{N}} \right], \quad (2)$$

para todos os valores de  $c$  e de  $\gamma$ , isto é, ao cociente da divisão por  $N$  da soma das contingências quadradas de todos os *loci* constituintes da táboa, separadamente considerados.

E deu o nome de *coeficiente de heterogeneidade* ou *divergência* da população geral à expressão

$$C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}}. \quad (3)$$

É evidente que, se cada um dos grupos locais fôr uma amostra fortuita da população geral, o coeficiente de heterogeneidade terá valor nulo, dentro dos limites dos erros prováveis, pois a contingência quadrada média ( $\varphi^2$ ) da táboa será igual a zero, por serem igualmente nulas as contribuições relativas a cada um desses grupos. E, quanto maior fôr o valor de  $C$  tanto menos se poderão considerar os grupos locais como amostras fortuitas da

população geral, isto é, tanto mais heterogénea se pode considerar a sua distribuição geográfica.

O cômputo do valor de  $C$ , e do seu êrro provável, é um tanto laborioso e aparentemente complicado. Por estes motivos pareceu-nos interessante exemplificar o *modus operandi* para o caso da distribuição provincial da cor da pele.

*Cálculo de C. Cor da pele — Províncias* — Suponhamos que a população se divide em ( $n=8$ ) grupos locais e que o carácter, em cada um desses grupos, se reparte em ( $p=3$ ) classes.

Começa-se por construir uma *tábua de contingência* com  $n+3$  linhas e  $p+4$  colunas. (Tabela XV).

A primeira coluna da esquerda reserva-se para a inscrição dos grupos locais, e as  $n$  seguintes servem para registo dos valores correspondentes às freqüências de cada uma das classes do carácter.

Como para cada grupo local, em referência a cada classe do carácter, se tem de registar oito valores, devem intervalar-se as linhas entrando em consideração com êste facto.

A cada grupo local, e a cada classe do carácter, corresponde assim uma casa — um *locus* da táboa, e o primeiro número que se inscreve em cada *locus* é a freqüência observada da respectiva classe no grupo local em questão.

No nosso exemplo, os *primeiros constituintes* de cada *locus* são as freqüências registadas nas primeiras três colunas à esquerda da Tabela V, pág. 136.

A soma, para cada linha, destes primeiros constituintes vem a ser o número total dos indivíduos observados no respectivo grupo local, e inscreve-se no lugar correspondente da coluna designada por *Totais*  $n_c$ .

As somas, por colunas, dos primeiros constituintes são as freqüências das classes na população geral, e são inscritas nos logares correspondentes da linha designada por *Totais*  $n_\gamma$ .

As somas dos *Totais*  $n_\gamma$  e  $n_c$  devem ser iguais entre si e ao número  $N$  dos indivíduos observados. No nosso caso  $N=11,601$ , número que se inscreve no *locus* correspondente ao cruzamento da coluna dos *Totais*  $n_c$  com a linha dos *Totais*  $n_\gamma$ . Neste *locus*, imediatamente por debaixo de  $N$ , inscreve-se o seu recíproco  $1/N$ ; no nosso caso igual a  $.861995/10^4$ .

TABELA XV

## Cômputo do coeficiente de contingência - Cór da pele

Provincias	Rosada	Pálida	Trigueira	Totais $n_c$	$N \varphi_c^2$ & $\varphi_c^2$	$N^2 \varphi_c^4$ & $N^2 \varphi_c^4 / n_c$
Algarve	131	150	290	571		
	54.6434	257.4696	259.4878	$n_c / N = .049220$		
	+ 76.9566	- 107.4696	+ 30.5122	$N \varphi_{c\gamma}$	$N \varphi_c^2 = 158.0309$	$24973.7654 = N^2 \varphi_c^4$
	109.5845	44.8586	3.5878	$N^2 \varphi_{c\gamma}$	$\varphi_c^2 = .013622$	$43.7369 = N^2 \varphi_c^4 / n_c$
	14.1948	4.9622	1.1752	$N \varphi_{c\gamma}^2 \cdot \varphi_c^2$		
	2.4240	.5826	1.1176	$N n_{c\gamma} / n_c \cdot n_{\gamma}$		
	265.6328	26.1346	4.0097	$N^2 \varphi_{c\gamma}^2 n_{c\gamma} / n_c \cdot n_{\gamma}$		295.7771 *
34.4082	2.8910	1.3134	$N^2 \varphi_{c\gamma}^2 \cdot \varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_{\gamma}$		38.6126 **	
Alentejo	442	344	774	1560		
	147.6493	703.4196	708.9311	.134471		
	+ 294.3507	- 359.4196	+ 65.0689		776.4274	602838.8863
	586.8117	1836.4340	59.7233		.066928	386.4352
	69.7424	24.3803	5.7741			
	2.9936	.4890	1.0918			
	1756.6795	89.8016	6.5206			1853.0017
208.7808	11.9220	6.3042			227.0070	
Extremadura	133	567	510	1210		
	114.5229	545.6011	549.8749	.104301		
	+ 18.4771	+ 21.3989	- 39.8749		6.7120	45.0509
	2.9811	.8393	2.8916		.000579	.0372
	.6033	.2100	.0500			
	1.1613	1.0392	.9275			
	3.4620	.8722	2.6820			7.0162
.7006	.2192	.0464			.9662	
Beira Baixa	138	404	352	894		
	84.6144	403.1135	406.2709	.077062		
	+ 53.3856	+ .8865	- 54.2709		40.9341	1675.6005
	33.6825	.0019	7.2497		.003528	1.8743
	3.6764	1.2852	.3044			
	1.6309	1.0022	.8664			
	54.9328	.0019	6.2811			61.2158
5.9958	1.2880	.2637			7.5475	
Beira Alta	66	495	319	880		
	83.2894	396.8008	399.9128	.075856		
	- 17.2894	+ 98.1992	- 80.9128		44.2619	1959.1158
	3.5890	24.3021	16.3708		.003815	2.2263
	3.9754	1.3897	.3291			
	.7924	1.2475	.7977			
	2.8439	30.3169	13.0590			46.2198
3.1501	1.7337	.2625			5.1463	
Beira Litoral	128	1346	1607	3081		
	291.6074	1389.2537	1400.1430	.265581		
	- 163.6074	- 43.2537	+ 206.8570		123.7002	15301.7395
	91.7925	1.3467	30.5610		.010663	4.9665
	11.1114	3.8843	.9199			
	.4389	.9689	1.1477			
	40.2877	1.3048	35.0749			76.6674
4.8768	3.7635	1.0558			9.6961	
Traz-os-Montes	24	950	595	1569		
	148.5011	707.4778	713.0222	.135247		
	- 124.5011	+ 242.5222	- 118.0222		207.0516	42870.3651
	104.3799	83.1362	19.5355		.01784	27.3234
	18.5985	6.5016	1.5398			
	.1616	1.3428	.8345			
	16.8678	111.6353	16.3024			144.8055
3.0055	8.7303	1.2850			13.0208	
Entre Douro e Minho	36	975	825	1836		
	173.7719	827.8708	834.3573	.158262		
	- 137.7719	+ 147.1292	- 9.3573		135.4827	18355.5620
	109.2300	26.1478	.1049		.011679	9.9976
	12.1701	4.2544	1.0076			
	.2072	1.1777	.9888			
	22.6325	30.7943	.1037			53.5305
2.5216	5.0104	.9963			8.5283	
Totais $n_{\gamma}$	1098	5231	5272	11601 = N $1/N = .861995/10^4$		$1/N \sum (N^2 \varphi_c^4 / n_c)$ = .041082
$N \varphi_{\gamma}^2$	1042.0512	364.2760	86.2736	$1/N \sum (N^2 \varphi_{\gamma}^4 / n_{\gamma})$	$N \varphi^2 = 1492.6008$	C = .337676
$N^2 \varphi_{\gamma}^4$	1085870.2866	132697.0042	7443.1341	= .087562	$\varphi^2 = .1287$	
$N^2 \varphi_{\gamma}^4 / n_{\gamma}$	988.9529	25.3674	1.4118			

\*  $\sum_{\gamma} N^2 \varphi_{c\gamma}^2 n_{c\gamma} / n_c \cdot n_{\gamma}$

\*\*  $\sum_{\gamma} N^2 \varphi_{c\gamma}^2 \cdot \varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_{\gamma}$

Cálculo do coeficiente de contingência

Categorias	Categorias		Categorias	
	1	2	3	4
C1	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C2	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C3	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C4	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C5	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C6	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C7	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C8	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C9	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
C10	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100
	100	100	100	100

Isto feito, procede-se ao cálculo da seguinte forma:

Coloca-se o número  $1/N$  no *calculador* e multiplicam-se sucessivamente por êle os números inscritos na coluna dos *Totais*  $n_c$ , o que dá os resultados  $n_c/N$ , que se registam imediatamente por debaixo dos *Totais*  $n_c$  correspondentes.

Estes números ( $n_c/N$ ) são postos sucessivamente no *calculador* e cada um deles multiplicado pela série dos *Totais*  $n_\gamma$ , o que dá os resultados  $n_c \cdot n_\gamma/N$ , que se registam como *segundos constituintes* de cada *locus*. Os números ( $n_c \cdot n_\gamma/N$ ) não são mais do que as *freqüências teóricas* das classes nos diferentes grupos locais, isto é, as freqüências que se observariam em cada classe se a população geral se achasse uniformemente distribuída por todo o país. A diferença, com o respectivo sinal, entre o primeiro e o segundo constituintes de cada *locus*, regista-se como *terceiro constituinte* e representa a contribuição ( $N \cdot \psi_{\gamma c}$ ) dêsse *locus* para a contingência da táboa.

O quadrado dêste número — extraído das *Táboas de Barlow*, por exemplo — dividido pelo segundo constituinte, é registado como *quarto constituinte* de cada *locus*, e mais não é do que  $N$  vezes a contribuição dêsse *locus* para a contingência quadrada média da Táboa, isto é, ( $N\varphi_{\gamma c}^2$ ) (cf. pág. 169).

A soma, por linhas, dos quartos constituintes dá  $N\varphi_c^2$ , e por colunas,  $N\varphi_\gamma^2$ , que são registadas na coluna e na linha que se seguem às dos *Totais*  $n_c$  e  $n_\gamma$ , respectivamente.

Somando separadamente estas coluna e linha, obtem-se

$$S_c(N \cdot \varphi_c^2) = S_\gamma(N \cdot \varphi_\gamma^2) = 1492.6008,$$

ou  $N\varphi^2$ , valor registado no *locus* correspondente ao seu cruzamento.

Entrando com êste valor na expressão (3) do coeficiente de contingência (cf. pág. 169), obtem-se

$$C = \sqrt{\varphi^2 / (1 + \varphi^2)} = .338.$$

*Erro provável de C.* — A significação estatística do coeficiente de divergência, como a de qualquer outro coeficiente estatístico, está na dependência do respectivo erro provável.

PEARSON demonstrou que o erro provável de coeficiente de divergência é

$$\sum_c = .67449 (1 - C^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sigma_\varphi = .67449 \times \sigma_\varphi / (1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

onde  $\sigma_\varphi$  é o desvio padrão da distribuição fortuita dos valores da contingência (1). No caso de não haver contingência,  $\sigma_\varphi = 1/\sqrt{N}$ , e o erro provável de  $C$  é igual a  $\pm .67449/\sqrt{N}$ .

Portanto, quando o coeficiente da divergência exceder mais do que três vezes este valor, podemos considerar contingentes as grandezas em discussão.

Para o nosso exemplo, na hipótese de não haver contingência, o erro provável de  $C$  seria igual  $\pm .000058$ . De facto  $C$  é maior que 5800 vezes este valor, e, por isso, tal hipótese não é de admitir.

A determinação do valor do erro provável de  $C$ , no caso de haver contingência, envolve como se vê o conhecimento do valor de  $\sigma_\varphi$ , que é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \varphi^2 \sigma_\varphi^2 = & \sum_{c\gamma} \left( \frac{\varphi_{c\gamma}^2}{n_c \cdot n_\gamma} \frac{n_c \gamma}{n_c \cdot n_\gamma} \right) + \frac{1}{2} \sum_{c\gamma} \left( \frac{\varphi_c^2 \cdot \varphi_\gamma^2}{n_c \cdot n_\gamma} \frac{n_c \gamma}{n_c \cdot n_\gamma} \right) \\ & - \frac{3}{4} \sum_c \left( \frac{\varphi_c^4}{n_c} \right) - \frac{3}{4} \sum_\gamma \left( \frac{\varphi_\gamma^4}{n_\gamma} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

para todos os valores de  $c$  e  $\gamma$ .

O cômputo procede da seguinte maneira:

Elevem-se ao quadrado os valores  $N\varphi_c^2$  e  $N\varphi_\gamma^2$  inscritos nas penúltimas coluna e linha da Tabela XV; obtém-se assim os valores  $N^2\varphi_c^4$  e  $N^2\varphi_\gamma^4$  que se inscrevem nos logares respectivos da última coluna e da última linha da referida Tabela.

Dividam-se sucessivamente os valores  $N^2\varphi_c^4$  pelos Totais  $n_c$  correspondentes à linha respectiva e inscrevam-se os cocientes

(1) JOHN BLAKEMANN and KARL PEARSON — *On the probable error of mean-square contingency*. *Biometrika*, Vol. v, pág. 194.

$N^2 \varphi_c^4 / n_c$  imediatamente por debaixo dos valores  $N^2 \varphi_c^4$  correspondentes. Proceda-se análogamente com os valores  $N^2 \varphi_\gamma^4$  dividindo-os pelos Totais  $n_\gamma$  correspondentes às colunas, e inscrevam-se os cocientes por debaixo dos respectivos valores  $N^2 \varphi_\gamma^4$ .

A soma destes cocientes, em relação às linhas, dá

$$\sum N^2 \varphi_c^4 / n_c = 476.5974.$$

Dividindo este número por  $N$ , ou multiplicando-o pelo recíproco de  $N$ , temos

$$\frac{1}{N} \sum N^2 \varphi_c^4 / n_c = N \sum \varphi_c^4 / n_c = .041082,$$

que se inscreve na Tabela XV no último *locus* correspondente à linha dos Totais  $n_\gamma$ .

Por conseguinte

$$\sum \varphi_c^4 / n_c = 1/N (.041082). \quad (a)$$

A soma dos cocientes  $N^2 \varphi_\gamma^4 / n_\gamma$ , correspondentes às colunas, dá

$$\sum N^2 \varphi_\gamma^4 / n_\gamma = 1015.7321.$$

Dividindo este número por  $N$ , obtém-se semelhantemente

$$\frac{1}{N} \sum N^2 \varphi_\gamma^4 / n_\gamma = .087556,$$

que se inscreve na Tabela XV no último *locus* da coluna dos Totais  $n_c$ .

Por conseguinte

$$\sum \varphi_\gamma^4 / n_\gamma = 1/N (.087556). \quad (b)$$

Dividam-se em seguida por  $N$ , os números  $N \varphi_c^2$  ou, melhor, multipliquem-se pelo recíproco de  $N$ ; os cocientes  $\varphi_c^2$  são os

valores inscritos na coluna ( $N\varphi_c^2$  &  $\varphi_c^2$ ) imediatamente por debaixo dos valores de  $N\varphi_c^2$ .

Ponham-se, sucessivamente, estes valores  $\varphi_c^2$  no *calculador* e multipliquem-se pela linha dos valores  $N\varphi_\gamma^2$ . Os resultados constituem os *quintos constituintes* inscritos nos *loci* correspondentes da Tabela XV.

Divida-se cada um dos primeiros constituintes ( $n_{c\gamma}$ ) de cada *locus* pelo segundo ( $n_c \cdot n_\gamma / N$ ), os cocientes são os *sextos constituintes* de cada *locus*, isto é, os valores de  $Nn_{c\gamma} / (n_c \cdot n_\gamma)$ .

O *sétimo constituinte* de cada *locus* é o resultado da multiplicação do sexto pelo quarto, ou  $N^2\varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / (n_c \cdot n_\gamma)$ ; e o *oitavo*, isto é,  $N^2\varphi_\gamma^2 \cdot \varphi_c^2 \cdot n_{c\gamma} / (n_c \cdot n_\gamma)$ , obtém-se multiplicando o sexto pelo quinto.

As somas, para cada linha, dos sétimos e oitavos constituintes de cada *locus*, inscrevem-se como terceiros e quartos constituintes dos *loci* correspondentes da coluna ( $N^2\varphi_c^4$  &  $N^2\varphi_c^4/n_c$ ).

A soma dos terceiros constituintes da referida coluna ( $N^2\varphi_c^4$  &  $N^2\varphi_c^4/n_c$ ), para tôdas as linhas, dá

$$\sum_{c\gamma} N^2 \varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma = 2538.2340.$$

Dividindo por  $N$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{c\gamma} N^2 \varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma &= N \sum_{c\gamma} \varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma \\ &= .218795; \end{aligned}$$

e, portanto

$$\sum_{c\gamma} \varphi_{c\gamma}^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma = \frac{1}{N} (.218795). \quad (c)$$

Procedendo análogamente com os quartos constituintes da coluna ( $N^2\varphi_c^4$  &  $N^2\varphi_c^4/n_c$ ), temos

$$\sum_{c\gamma} N^2 \varphi_c^2 \cdot \varphi_\gamma^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma = 310.5248;$$

ou

$$\frac{1}{N} \sum_{c\gamma} N^2 \varphi_c^2 \cdot \varphi_\gamma^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma = N \sum_{c\gamma} \varphi_c^2 \cdot \varphi_\gamma^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma$$

$$= .026767$$

e, por conseguinte

$$\sum_{c\gamma} \varphi_c^2 \cdot \varphi_\gamma^2 \cdot n_{c\gamma} / n_c \cdot n_\gamma = \frac{1}{N} (.026767). \quad (d)$$

Substituindo os valores (*a*, *b*, *c* e *d*), na expressão (5)

$$\varphi^2 \sigma_\varphi^2 = \frac{1}{N} \left[ .218795 + .013385 - \frac{3}{4} (.041082 + .087556) \right]$$

$$= \frac{1}{N} (.1357);$$

ou

$$N \varphi^2 \cdot \sigma_\varphi^2 = .1357.$$

Pondo, em vez de  $N \varphi^2$  o seu valor temos

$$\sigma_\varphi^2 = (.1357) / 1492.6008$$

$$= .00009092;$$

e, portanto

$$\sigma_\varphi = .009535.$$

Substituindo os valores de  $\varphi^2$  e  $\sigma_\varphi$ , na expressão (4) temos

$$\sum_c = .67449 \times \sigma_\varphi / (1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}} = .00536,$$

que mostra ser o coeficiente de contingência 63 vezes maior que o seu erro provável <sup>(1)</sup>. Na Tabela XVI estão registados os valores de *C* e seus erros prováveis, para as províncias e distritos.

*Coefficientes de divergência local.* — A táboa de contingência

(1) O erro provável de  $\varphi^2$  é dado pela expressão  $\sum_{\varphi^2} = .67449 \times 2 \varphi \cdot \sigma_\varphi$   
Cfr. *Biometrika*, vol. v, pág. 196, nota.

permite, como vimos, calcular um coeficiente cujo valor dá idéia da *heterogeneidade geográfica* duma população repartida por certo número de grupos locais.

Por intermédio d'êste coeficiente podemos facilmente comparar entre si, a respeito dos mesmos caracteres, quaisquer populações diferentes quando se achem, aproximadamente, repartidas no mesmo número de grupos locais.

O coeficiente *C* pode por isso chamar-se *coeficiente de heterogeneidade inter-racial*.

Mas não basta saber que uma determinada população é geograficamente heterogénia, muito interessante será dispormos também de critérios, simples e cómodos, que permitam apreciar com segurança o grau de divergência que os seus diferentes grupos locais manifestam; isto é, seria muito conveniente dispormos dum *coeficiente de divergência*, ou *heterogeneidade inter-local*.

TABELA XVI

Valores de *C* e respectivos erros prováveis

	Pele	Cabelo	Olhos
Províncias	.338 ± .005	.161 ± .006	.139 ± .005
Distritos	.356 ± .005	.179 ± .006	.146 ± .006

Êste problema já foi abordado pela consideração dos valores de  $\chi^2$ , que nos permitem graduar a divergência dos grupos locais por meio dos valores de *log. P*.

PEARSON <sup>(1)</sup> apresentou ainda outro método de solução do problema.

Suponhamos, por exemplo, que se queria calcular o coeficiente de divergência dum grupo local *b*, qualquer, relativamente à população geral.

(1) *Biometrika*, vol. v, pág. 198. — *On a coefficient of class heterogeneity or divergency.*

Construa-se uma táboa condensada de contingência, onde às frequências observadas das diferentes classes do carácter em estudo se opõem as correspondentes ao resto da população.

Táboa de contingencia

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	. . . . .	$w$	Totais
$b$	$n_{ba}$	$n_{b\beta}$	$n_{b\gamma}$	. . . . .	$n_{bw}$	$n_b$
Resto	$n_\alpha - n_{ba}$	$n_\beta - n_{b\beta}$	$n_\gamma - n_{b\gamma}$	. . . . .	$n_w - n_{bw}$	$N - n_b$
Totais	$n_\alpha$	$n_\beta$	$n_\gamma$	. . . . .	$n_w$	$N$

Representando por  $\chi_b^2$  a contingência quadrada média desta táboa, mostra-se fácilmente que o seu valor é dado pela expressão

$$\chi_b^2 = \frac{1}{N - n_b} \sum_{\alpha}^w \left[ \frac{\left( n_{b\alpha} - \frac{n_\alpha \cdot n_b}{N} \right)^2}{\frac{n_\alpha \cdot n_b}{N}} \right],$$

para tôdas as classes do carácter, de  $\alpha$  a  $w$ .

Por outro lado, a expressão da contingência quadrada média da população geral (2) mostra que a parte com que o grupo local  $b$  contribue para o seu valor é

$$\varphi_b^2 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha}^w \left[ \frac{\left( n_{b\alpha} - \frac{n_\alpha \cdot n_b}{N} \right)^2}{\frac{n_\alpha \cdot n_b}{N}} \right],$$

e, por conseguinte, será

$$\chi_b^2 = \frac{N}{N - n_b} \varphi_b^2. \quad (6)$$

Representando por  $C_b$  o coeficiente de divergência local correspondente ao grupo  $b$ , temos análogamente

$$C_b = \sqrt{\frac{\chi_b^2}{1 + \chi_b^2}} = \sqrt{\frac{\varphi_b^2}{1 - \frac{n_b}{N} + \varphi_b^2}}. \quad (7)$$

Como as contingências quadradas médias  $\varphi_a^2, \varphi_b^2, \dots$ , respeitantes aos grupos locais  $a, b, \dots$ , se determinam ao calcularmos a contingência quadrada média  $\varphi^2$  da táboa de contingência completa — que é igual à sua soma —, entrando com os valores correspondentes na expressão anterior (7), determinam-se facilmente os coeficientes de divergência dos diversos grupos locais, cujos valores  $C_a, C_b, \dots$  medem a divergência relativa dos grupos locais.

Se tivermos previamente determinado o coeficiente de heterogeneidade  $C$ , da população geral, é fácil de verificar não ser necessário qualquer trabalho aritmético suplementar para obtermos os valores ( $C_b$ ) dos coeficientes de divergência local.

Com efeito, os valores de  $\varphi_b^2$  que entram na expressão (7), mais não são do que os segundos constituintes da coluna ( $N\varphi_c^2$  &  $\varphi_c^2$ ) da Tabela XV que serviu para o cálculo do coeficiente de heterogeneidade da população geral.

A significação estatística dos coeficientes de divergência não se pode apreciar independentemente da consideração dos seus erros prováveis.

Se um determinado grupo local  $b$  fôr uma amostra fortuita da população geral, é evidente que  $\varphi_b^2$  será nulo, e, por conseguinte  $C_b$  deve ser igualmente nulo.

Mas, por virtude da própria flutuação das séries, podemos numa distribuição fortuita encontrar valores de  $C_b$  que não sejam nulos, sem que todavia a sua significação estatística se possa claramente definir pela simples consideração do seu valor absoluto.

A distribuição fortuita dos valores de qualquer coeficiente estatístico tem, no caso da variação normal, como se sabe, uma amplitude sensivelmente igual a  $\pm 3$  vezes o seu desvio padrão, e, por conseguinte, as probabilidades de divergência real não se

poderão considerar grandes a menos que a diferença entre  $C_b$  e zero não seja igual a várias vezes o seu erro provável.

A expressão do erro provável dos coeficientes  $C_b$  é dada pela expressão

$$\sum_{C_b} = .67449 (1 - C_b^2)^{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_{\%b}, \quad (8)$$

que envolve o conhecimento dos valores de  $\sigma_{\%b}$ , isto é, do desvio padrão das distribuições dos valores da contingência quadrada média desses grupos.

Para a sua determinação, deduziu PEARSON <sup>(1)</sup> a seguinte fórmula:

$$\sigma_{\%b}^2 = \frac{1}{N} \left[ \left( \nu_b + \frac{N^2 \tau_b^2}{N \varphi_b^2} (1 - \nu_b) \right) \left( 1 + \frac{1}{2} (1 + \nu_b) \varphi_b^2 \right) - \frac{3}{4} \left( \frac{1 + \nu_b^3}{\nu_b} \varphi_b^2 + (1 + \nu_b) \frac{N^2 w_b^4}{N \varphi_b^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Nesta expressão,  $\nu_b = n_b / (N - n_b)$ , e  $\varphi_b^2$  é a contribuição do grupo  $b$  para o coeficiente de contingência quadrada média da população geral, que foi determinada quando se calculou esse coeficiente;  $N^2 \tau_b^2$  foi determinado quando se calculou o erro provável de  $C$  — é igual à soma, para cada grupo local, dos sétimos termos de cada locus da tábua de contingência, isto é,

$$N^2 \tau_b^2 = \sum_x^w N^2 \varphi_{bx}^2 \cdot n_{bx} / n_b \cdot n_x.$$

A única grandeza que se torna indispensável calcular é  $w_b^4$ , que é dada pela expressão

$$w_b^4 = \sum_x^w \left( \frac{\varphi_{bx}^4}{n_x} \right) = \frac{1}{N^2} \sum_x^w \left( \frac{(N \varphi_{bx}^2)^2}{n_x} \right). \quad (10)$$

O seu cômputo pode fazer-se da seguinte maneira:

Construa-se a Tabela XVII, onde, como primeiros constituintes de cada locus, se inscrevem os valores dos quadrados de

(1) Cf. *Biometrika*, Vol. v, pág. 202.

$N\varphi_{b\alpha}^2$ , isto é, dos quadrados dos quartos constituintes de cada locus da Tabela XV que serviu para o cálculo do coeficiente de contingência.

Na última linha desta tabela inscrevam-se os totais  $n_{\alpha}$  cor-

TEBELA XVII

Cômputo dos erros prováveis de  $C_b$ 

Províncias	Rosada	Pálida	Trigueira	$N^2 w_b^4$
Algarve	12008.7626	2012.2940	12.8723	11.3241
	10.9370	.3847	.0024	
Alentejo	344348.3233	33724.8984	35.6684	320.0691
	313.6152	6.4471	.0068	
Extremadura	8.8870	.7044	8.3614	.0098
	.0081	.0001	.0016	
Beira Baixa	1134.5108	00.0000	52.5582	1.0433
	1.0333		.0100	
Beira Alta	12.8809	590.5921	268.0031	.1754
	.0117	.1129	.0508	
Beira Litoral	8425.8631	1.8136	933.9747	7.8514
	7.6739	.0003	.1772	
Traz-os-Montes	10895.1635	6911.6278	381.6358	11.3165
	9.9228	1.3213	.0724	
Entre Douro e Minho	11931.1929	683.6552	.0110	10.9970
	10.8663	.1307	.0000	
Totais $n_{\alpha}$	.9107468/10 <sup>3</sup>	.1911680/10 <sup>3</sup>	.1896813/10 <sup>3</sup>	
	1098	5231	5272	

respondentes a cada uma das classes do carácter considerado, e, imediatamente por cima dêles, os seus recíprocos.

Coloquem-se estes recíprocos, sucessivamente, no *calculador* e multipliquem-se pelos primeiros números registados em cada

locus da coluna respectiva. Os resultados inscrevam-se como segundos constituintes de cada locus.

A soma, para cada linha, destes segundos constituintes dá o valor  $N^2 w_b^4$  de cada grupo local, e increve-se na última coluna à direita.

Entrando com os valores conhecidos de  $v_b$ ,  $\varphi_b^2$  e  $w_b^4$  na fórmula (9), e efectuando as operações indicadas, calculam-se facilmente os valores de  $\sigma_{\chi_b}$ , e pela expressão (8), os erros prováveis dos coeficientes  $C_b$  para os diversos grupos locais.

Na Tabela XVIII estão registados todos os elementos necessários para o cálculo e os valores obtidos para os erros prováveis dos coeficientes  $C_b$  relativos à distribuição da cor da pele nas províncias.

*Análise dos valores de coeficientes de divergência local dos portugueses.*

a) *Côr da pele.*—Os coeficientes de contingência para a cor da pele tem os seguintes valores (Tabela XVI).

$$C = .338 \pm .005 \text{ (províncias);}$$

e

$$C = .356 \pm .005 \text{ (distritos).}$$

Em ambas as distribuições o coeficiente da contingência é muito superior a 3 vezes o respectivo erro provável; a população deve por isso considerar-se heterogénia, como aliás já se tinha reconhecido pelo emprêgo do método de  $\chi^2$ . (cf. pág. 156).

Nas Tabelas XIII e XIV estão registados os valores do coeficiente de divergência,  $C_b$ , e respectivos erros prováveis, para as províncias e distritos.

No Gráfico III estão representadas, para os distritos, as relações encontradas entre os valores de  $C_b$  e  $\log. P$ ; vê-se claramente que todos os valores de  $C_b > .0235$  são indicativos de divergências reais.

Estes resultados confirmam as conclusões a que se tinha chegado pelo emprêgo da contingência quadrada.

TABELA XVIII

Provincias	$n_b$	$v_b$	$1 + v_b^3$	$\varphi_b^2$	$N_{\varphi_b}^2$	$N_{\tau_b}^2$	$N_{w_b}^4$	$\sigma_{\%b}$	$C_b$	$E_{C_b}$
Algarve	571	.051768	1.000139	.013622	158.0309	295.7771	11.3241	.01169	.1189	.0077
Alentejo	1560	.155363	1.003750	.066928	776.4274	1853.0017	320.0691	.01165	.2679	.0070
Extremadura	1210	.116447	1.001579	.000579	6.7120	7.0162	.0098	.00945	.0254	.0064
Beira Baixa	894	.083497	1.000582	.003528	40.9341	61.2158	1.0433	.01100	.0617	.0074
Beira Alta	880	.082082	1.000553	.003815	44.2619	46.2198	.1754	.00931	.0641	.0062
Beira Litoral	3081	.361620	1.047289	.010663	123.7002	76.6674	7.8514	.00763	.1196	.0051
Traz-os-Montes	1569	.156400	1.003826	.017848	207.0516	144.8055	11.3165	.00731	.1422	.0048
Entre Douro e Minho	1836	.188081	1.006647	.011679	135.4827	53.5305	10.9970	.00582	.1170	.0038

Pode pois afirmar-se que a população portuguesa, quanto à cor da pele, tende a diferenciar-se da seguinte forma (Mapa XXV):

- 1) a norte dos distritos de Setúbal, Evora, Portalegre e Castelo-Branco, — com excepção do distrito de Coimbra — por *excesso de peles brancas-pálidas*;

*Cor da pele - Distritos*

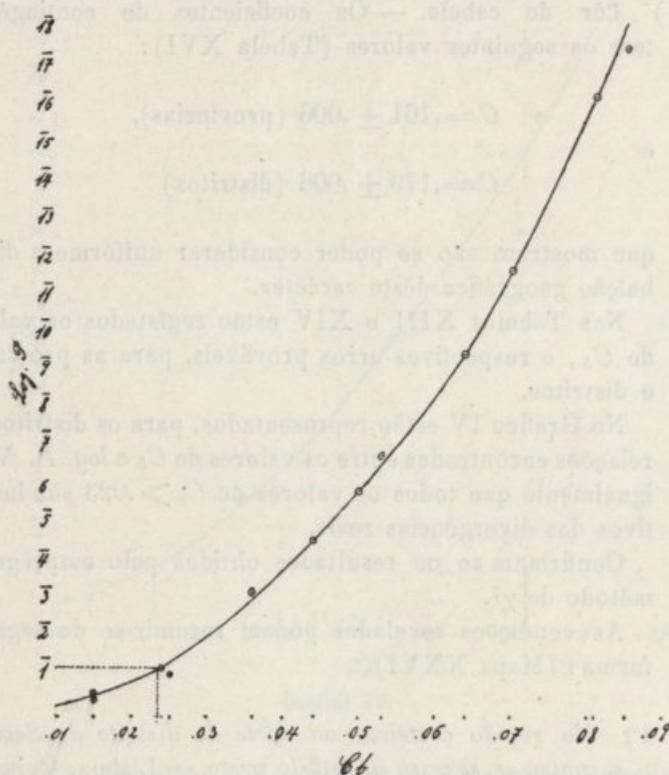


Gráfico III

- 2) a sul dos distritos da Guarda, Coimbra e Leiria, por *excesso de peles rosadas*;
- 3) na região litoral, ao norte, no distrito de Viana-do-Castelo, e a sul de Coimbra, com excepção do distrito de Lisboa, ao longo de toda a zona costeira, por *excesso de peles trigueiras*.

4) Quanto à cor da pele, a região litoral, ao sul de Coimbra, apresenta-se mais complicada que o resto do país. As peles trigueiras, em excesso, associam-se com excesso de peles-pálidas, no distrito de Leiria; com excesso de peles rosadas nos distritos de Setúbal, Beja e Faro. Mas nos distritos de Santarém e Lisboa encontra-se um excesso simultâneo de peles rosadas e pálidas combinado com falta de peles trigueiras.

b) **Côr do cabelo.** — Os coeficientes de contingência tem os seguintes valores (Tabela XVI):

$$C = .161 \pm .006 \text{ (provincias),}$$

e

$$C = .179 \pm .006 \text{ (distritos)}$$

que mostram não se poder considerar uniforme a distribuição geográfica deste carácter.

Nas Tabelas XIII e XIV estão registados os valores de  $C_b$ , e respectivos erros prováveis, para as províncias e distritos.

No Gráfico IV estão representados, para os distritos, as relações encontradas entre os valores de  $C_b$  e  $\log. P$ . Vê-se igualmente que todos os valores de  $C_b > .023$  são indicativos das divergências reais.

Confirmam-se os resultados obtidos pelo emprêgo do método de  $\chi^2$ .

As condições reveladas podem resumir-se da seguinte forma: (Mapa XXVI).

- 1) *Na região costeira, ao norte do distrito de Setúbal, encontra-se excesso de cabelo preto, — Lisboa, Coimbra, Braga — que pode também andar associado com excesso de cabelos loiros — Santarém, Leiria, Porto e Viana-do-Castelo, — ou com excesso de cabelos castanhos — Aveiro.*
- 2) *Em toda a região fronteira há excesso de cabelo castanho, mas ao passo que na zona montanhosa do nordeste — Guarda, Vizeu, Vila Real e Bragança — apenas este tipo de cabelos está em excesso, nos restantes distritos ao sul da Guarda há também excesso de cabelos loiros.*

- 3) O excesso de cabelos loiros estende-se ainda aos distritos de Santarém e Leiria (associado com excesso de cabelos pretos) e ao de Setúbal, que concorda com o restante Alentejo (associação com cabelo castanho).

*Côr do cabelo — Distritos.*

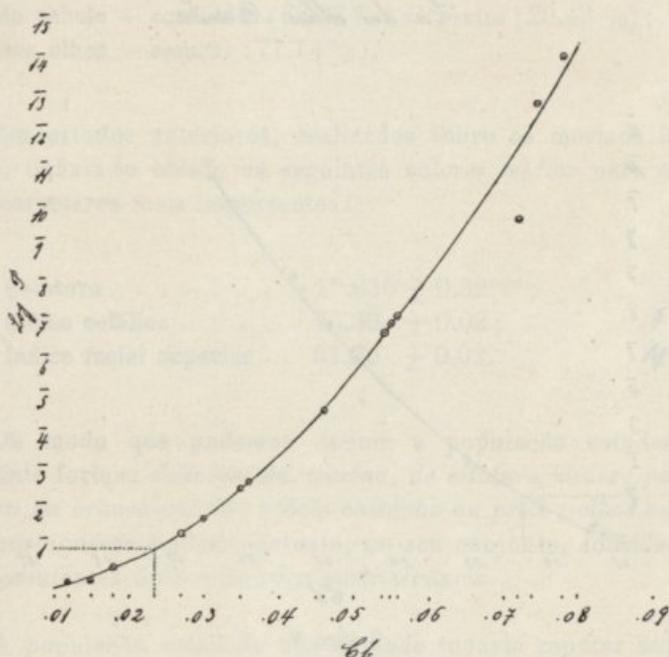


Gráfico IV

- c) *Côr dos olhos.* — Os valores obtidos para o coeficiente de contingência foram (Tabela XVI):

$$C = .139 \pm .005 \text{ (províncias),}$$

e

$$C = .146 \pm .006 \text{ (distritos),}$$

que provam haver também falta de uniformidade na distribuição geográfica deste carácter.

Nas Tabelas XIII e XIV estão registados os valores  $C_b$  e  $\log. P$  que mostram serem todos os valores de  $C_b > .0235$  indicativos de divergências reais — Gráfico V.

A situação pode resumir-se da seguinte maneira (Mapa XXVII):

- 1) De Coimbra para o norte tende a manifestar-se *excesso de olhos azuis*, quer isoladamente, quer associados com

*Viz dos olhos - Distritos.*

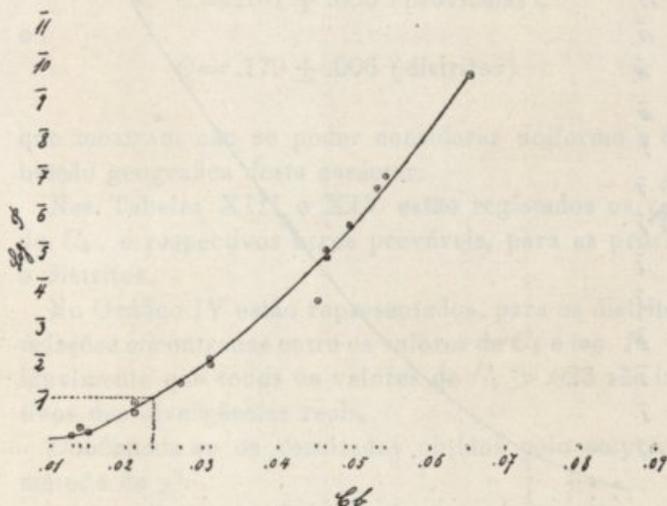


Gráfico V

excesso de olhos médios — Coimbra, Vila Real, Bragança e Viana do Castelo. Em Aveiro os olhos azuis associam-se com excesso dos olhos escuros; na Guarda não há excesso de olhos azuis.

- 2) As divergências a sul da Guarda e Coimbra são devidas exclusivamente ao *excesso de olhos escuros*, com excepção do distrito de Santarém que diverge por excesso de olhos médios.

## CONCLUSÕES GERAIS

Considerando o conjunto dos indivíduos observados como amostra fortuita da população portuguesa, verifica-se que esta se pode caracterizar, quanto à pigmentação, pelos seguintes valores típicos:

Côr da pele — *trigueira* (45.44%) ou *branca-pálida* (45.00%);  
 Côr do cabelo — *castanhos* (68.33%) ou *pretos* (29.43%);  
 Côr dos olhos — *escuros* (77.74%).

Em estudos anteriores, realizados sobre os mesmos indivíduos, tinham-se obtido os seguintes valores médios para alguns dos caracteres mais importantes:

Estatura . . . . .  $1^m.635 \pm 0.32^{m/m}$ ;  
 Índice cefálico . . . . .  $76.39 \pm 0.02$ ;  
 Índice facial superior . . . . .  $51.26 \pm 0.02$ .

De modo que podemos definir a população estudada da seguinte forma: *dolicécefala, mesêna, de estatura média; pele trigueira ou branca-pálida; cabelo castanho ou preto; olhos escuros*. Os portugueses podem portanto, no seu conjunto, considerar-se representantes típicos da *raça mediterrânica*.

A população estudada não se pode todavia reputar homogênia, como se provou neste estudo, e nos outros anteriores<sup>(1)</sup>, pela consideração das diferenças locais relativas dos vários caracteres.

O estudo da heterogeneidade da população portuguesa — quanto ao índice cefálico, estatura e índice facial superior — não foi tão minuciosamente efectuado como o relativo à pigmentação, pois para aquêles caracteres apenas determinamos as diferenças

(1) Cf. — *Contribuições para o estudo da Antropologia Portuguesa* — x — Parte II — O índice facial superior, pág. 322, Quadro IV.

locais relativas respeitantes à distribuição provincial, e não se calcularam os coeficientes de divergência local.

Todavia parece-nos conveniente realizar uma análise do conjunto dos factos averiguados, pois tal análise nos pode dar indicações interessantes acerca do sentido em que se opera a diferenciação regional da nossa população e sugerir estudos dirigidos à investigação das causas intervenientes (Tabela XIX).

Pondo de parte quaisquer influências paracínéticas, — cuja actuação absolutamente desconhecemos — podemos, pela consideração das tendências fenotípicas manifestadas nas diversas províncias em relação com as associações morfológicas que caracterizam os três tipos étnicos fundamentais das populações europeias — nórdico, alpino e mediterrânico —, esboçar a seguinte síntese.

O substractum essencial da população portuguesa é constituído pelo *elemento mediterrânico*, como manifestamente nos indicam, em tôdas as províncias, as percentagens elevadas dos traços morenos — pele, cabelo e olhos, — e os valores médios da estatura, índice cefálico e índice facial superior.

A consideração das diferenças significativas na distribuição do *índice cefálico*, mostra que nas três províncias meridionais — Extremadura, Alentejo e Algarve — e no Entre-Douro-e-Minho, se faz sentir a influência diferenciante dum elemento braquicéfalo — o *elemento alpino*, — influência que parece ser mais acentuada no sul do país, como mostra a sua associação harmónica com diferenças significativas nos valores do índice facial superior.

Com efeito, no Entre-Douro-e-Minho o índice facial superior tende para valores menos leptenas, contrariamente ao que sucede na Extremadura, Alentejo e Algarve.

As diferenças nos traços pigmentares indicam também uma influência indiscutível e bastante generalizada, geográficamente, do *elemento nórdico*.

Com efeito, na Beira Baixa, Extremadura, Alentejo e Algarve nota-se excesso significativo de peles rosadas e cabelos loiros, a que no Algarve se associa ainda tendência para maiores estaturas.

No Entre-Douro-e-Minho há excesso significativo de olhos azuis e de estaturas mais altas a que, na primeira destas províncias, ainda se associa excesso significativo de cabelo loiro.

TABELA XIX  
Diferenças locais relativas

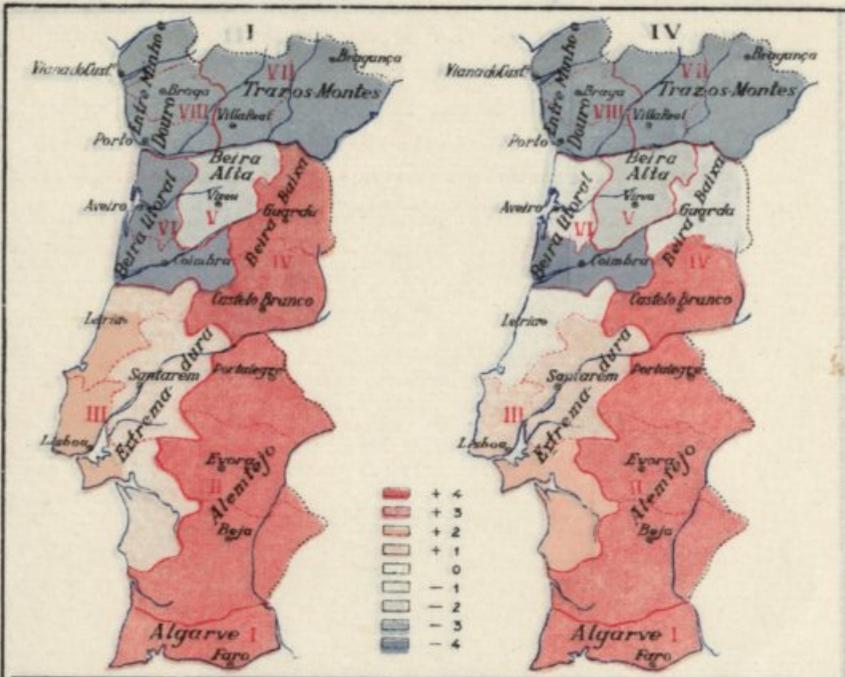
Provincias	Ind. cefal.	Estat.	Ind. fac.	Pele			Cabelo			Olhos		
				Rosada	Pálida	Trig.	Loiro	Cast.	Preto	Azuis	Médios	Escuros
Entre Douro e Minho	+ 2.46	+ 3.50	+ 5.28	- 11.97	+ 7.52	- 0.48	+ 2.21	- 10.75	+ 10.26	+ 9.70	- 1.40	- 4.79
Traz-os-Montes	- 19.26	+ 6.08	+ 9.40	- 11.54	+ 13.24	- 6.44	- 3.52	+ 4.78	- 3.74	+ 2.44	+ 0.81	- 2.21
Beira Litoral	- 4.36	- 3.93	+ 2.59	- 11.74	- 1.83	+ 8.73	- 2.99	- 6.02	+ 7.12	+ 2.40	+ 3.16	- 4.21
Beira Alta	- 7.20	+ 1.90	- 2.75	- 2.07	+ 6.92	- 5.70	- 0.65	+ 3.22	- 3.07	+ 0.99	- 0.31	- 0.35
Beira Baixa	- 2.64	- 4.42	- 3.47	+ 6.35	+ 0.06	- 3.80	+ 2.58	+ 4.05	- 4.97	- 1.72	+ 0.66	+ 0.50
Extremadura	+ 13.38	- 4.90	- 3.86	+ 1.92	+ 1.31	- 2.43	+ 2.65	- 2.40	+ 1.66	- 4.16	+ 1.01	+ 1.70
Alentejo	+ 14.57	0	- 6.97	+ 27.36	- 19.66	+ 3.56	+ 0.93	+ 6.15	- 6.57	- 8.69	- 3.72	+ 8.53
Algarve	+ 6.39	+ 4.74	- 2.45	+ 11.28	- 9.27	+ 2.63	+ 0.64	+ 7.64	- 8.05	- 4.62	- 1.36	+ 4.03

Até que ponto, e com que intensidade, as sugestões indicadas correspondem à realidade, sòmente estudos ulteriores o poderão determinar, pois as nossas conclusões baseiam-se apenas em dados individuais, separadamente considerados, e não se conhecem ainda as correlações exactas dos diferentes caracteres que tem sido objecto dos nossos estudos.

DR. EUSÉBIO TAMAGNINI

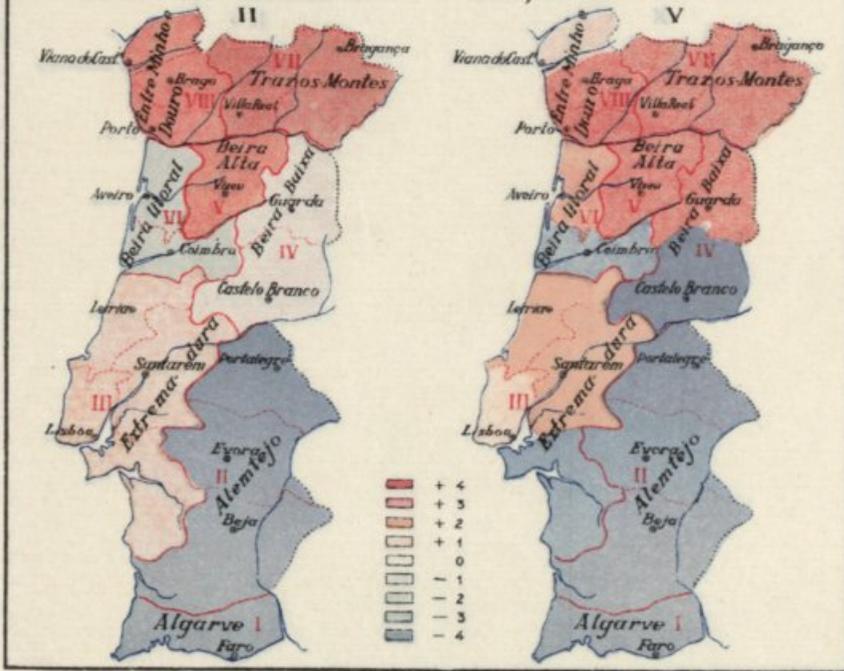
*Foto rosada - Provincias.*

*Foto rosada - Distritos.*

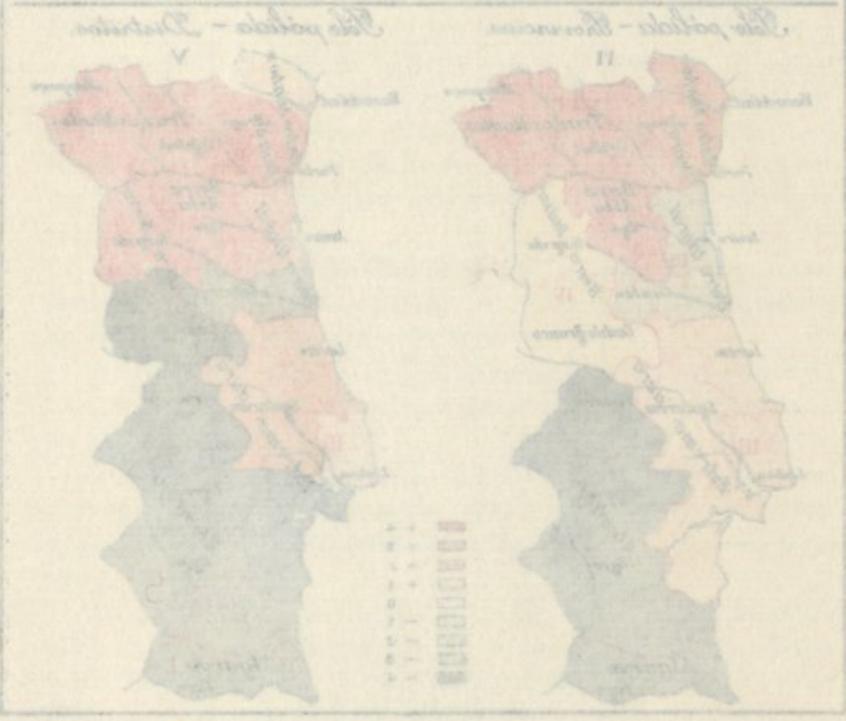
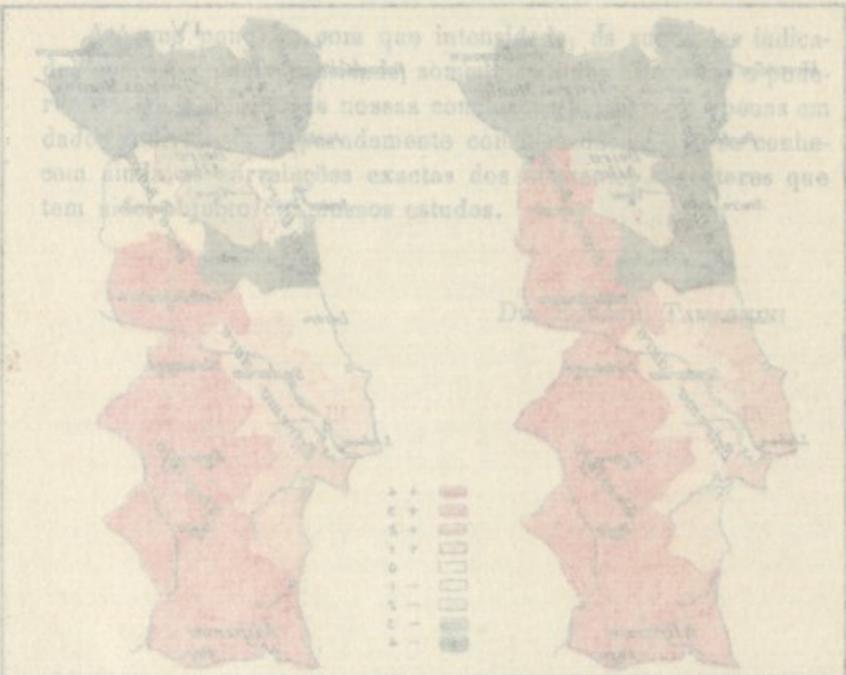


*Foto pálida - Provincias.*

*Foto pálida - Distritos.*

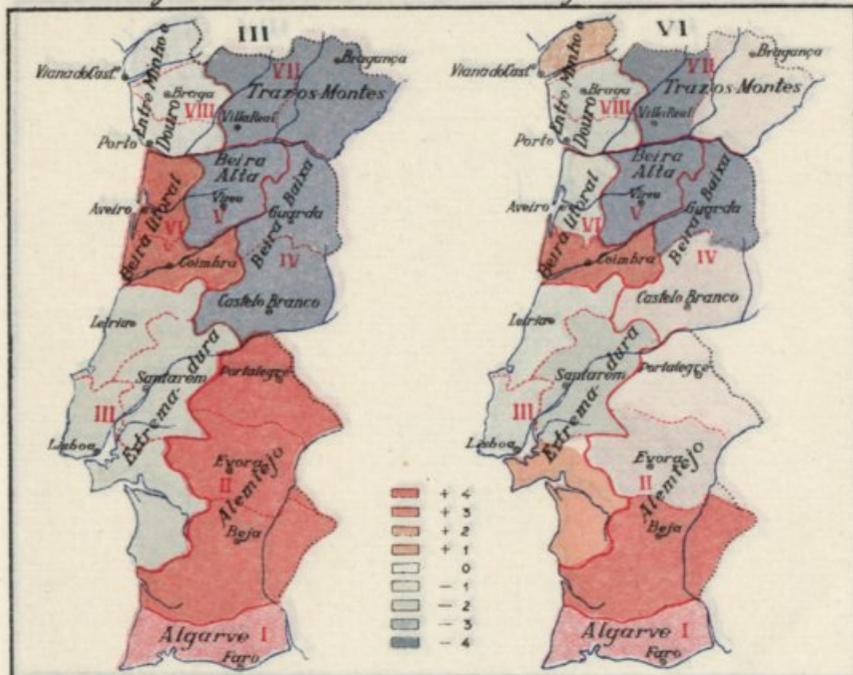


... para que intensidade de ... indica-  
 ... com ...  
 ... com ...  
 ... com ...  
 ... com ...



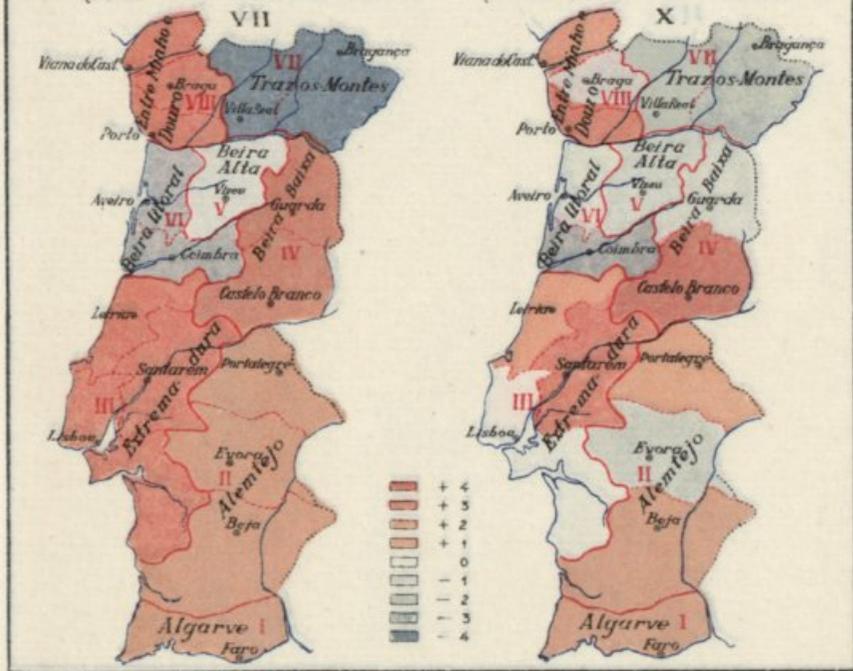
Falo trigueira - *Provincias.*

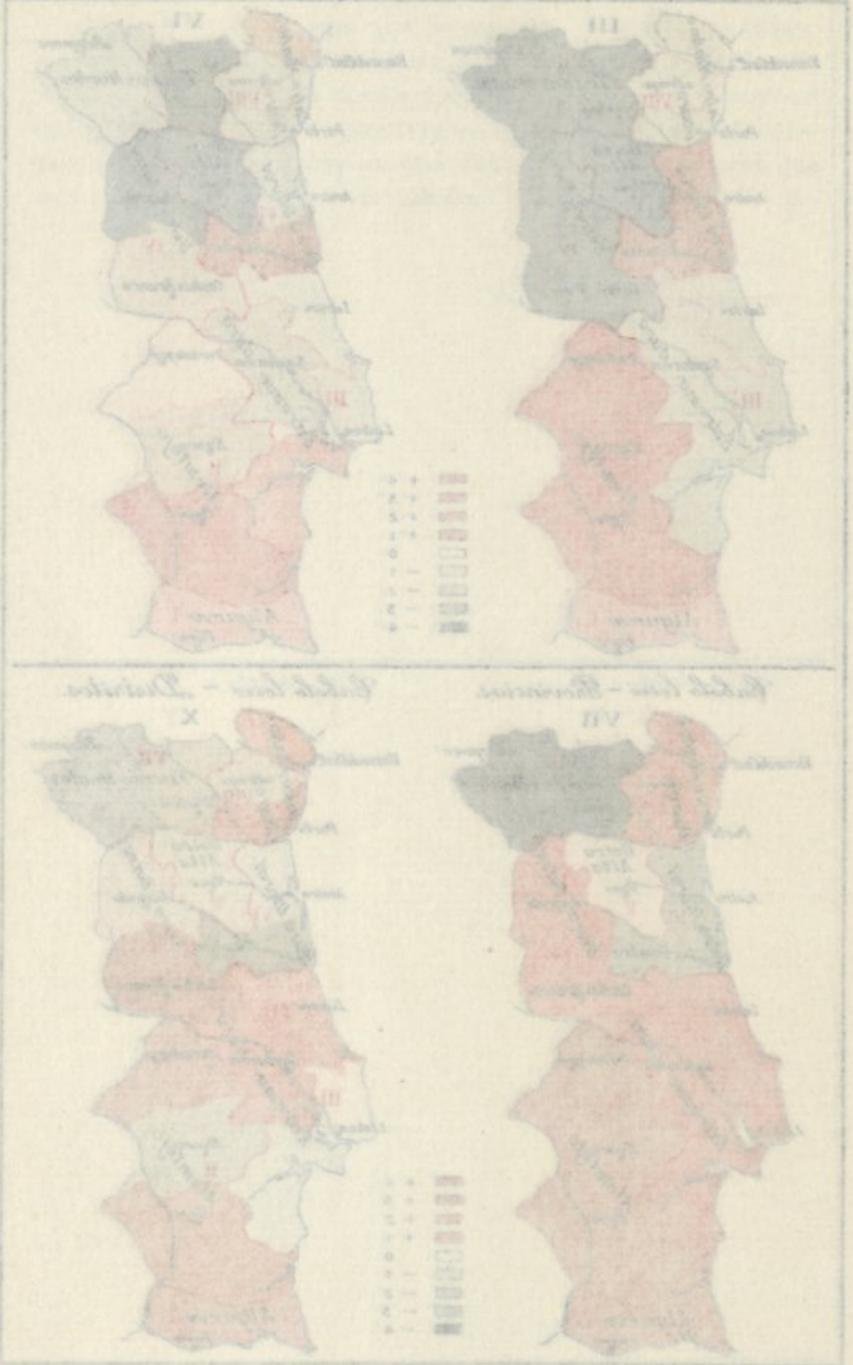
Falo trigueira - *Distritos.*



Falo leiro - *Provincias.*

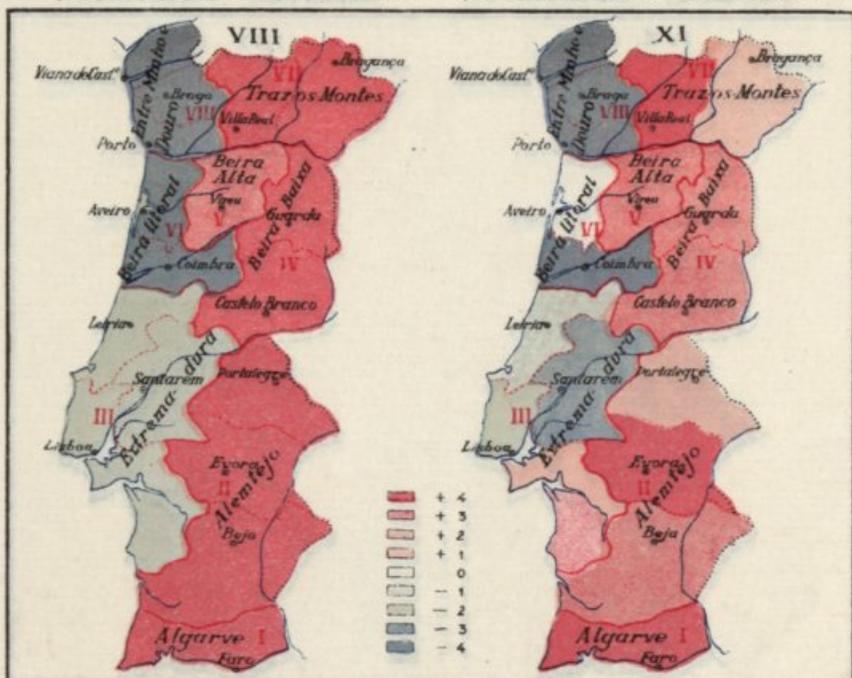
Falo leiro - *Distritos.*





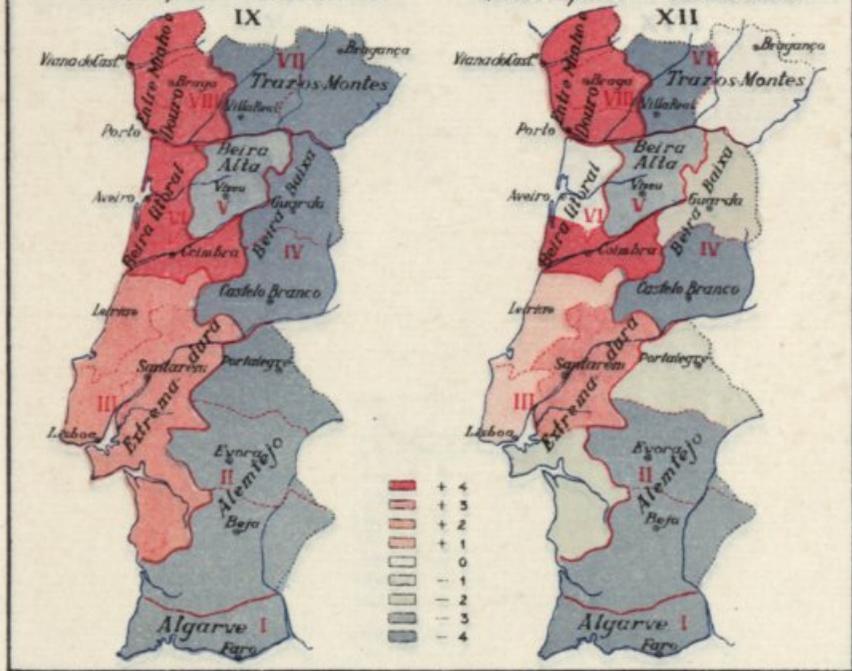
*Cabolo castanho - Provincias.*

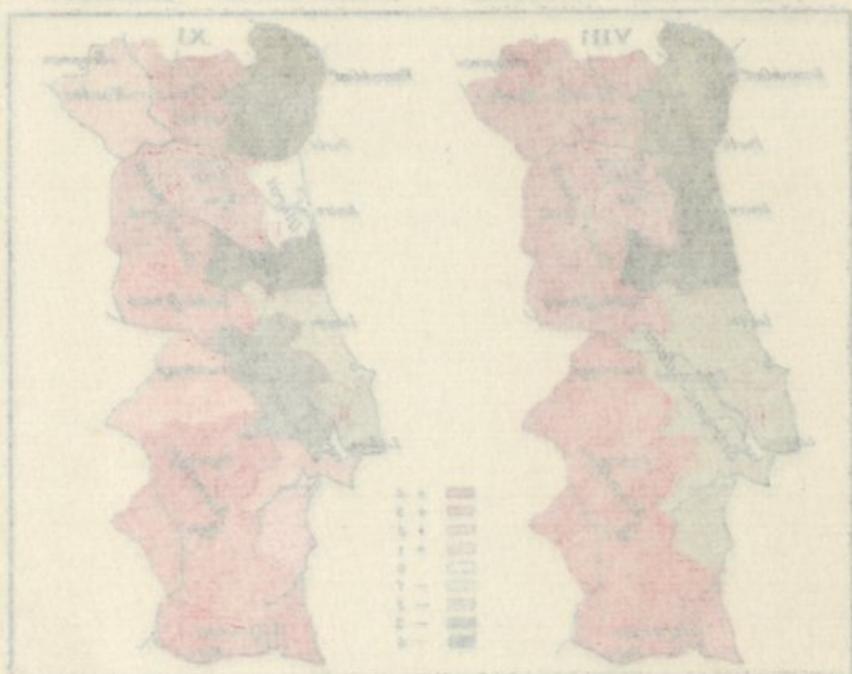
*Cabolo castanho - Distritos.*



*Cabolo preto - Provincias.*

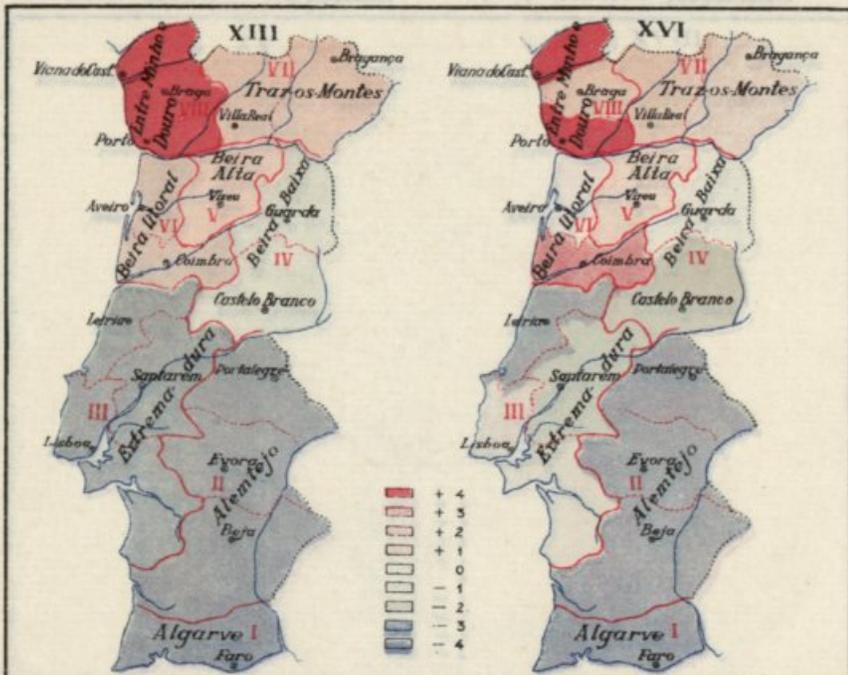
*Cabolo preto - Distritos.*





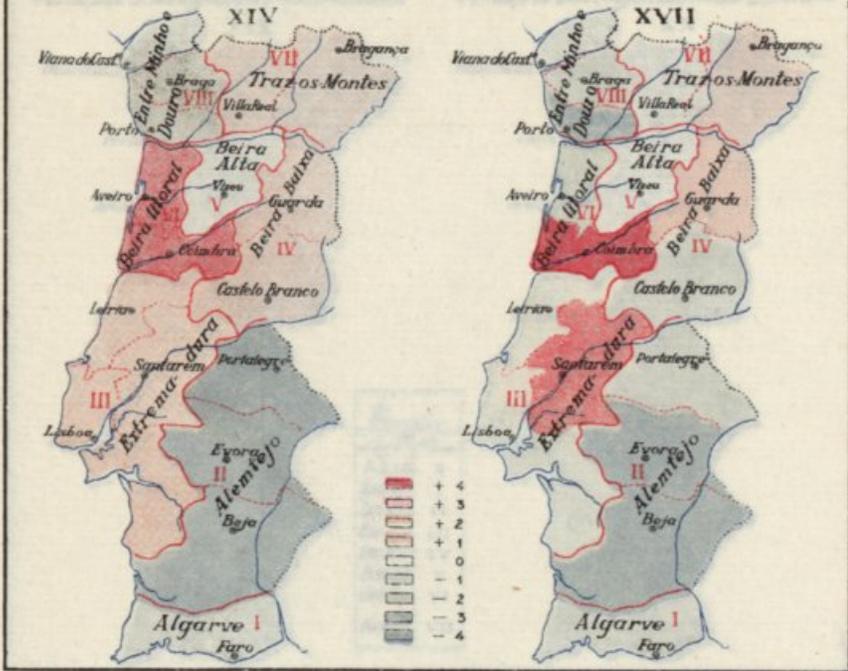
Olhos azuis - Provincias.

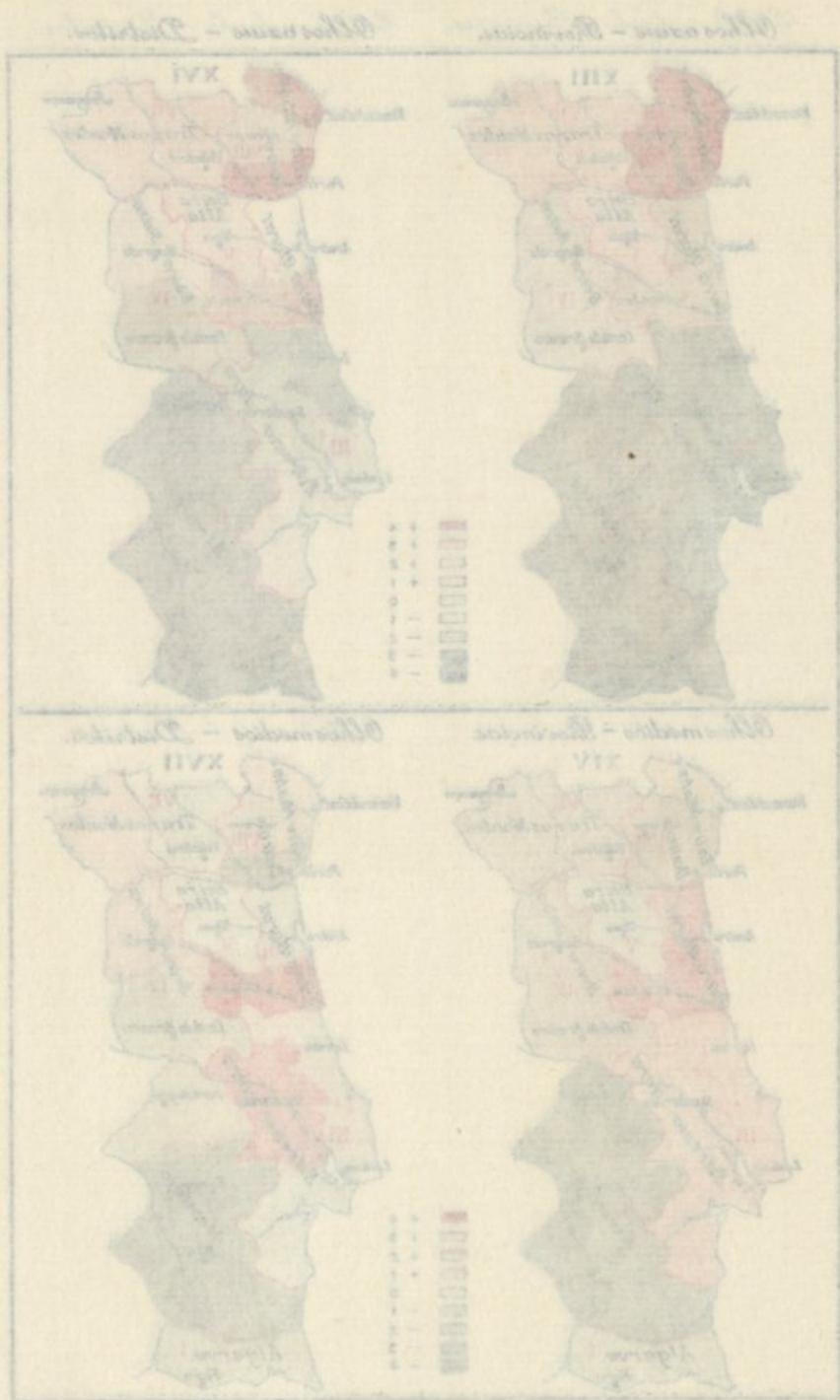
Olhos azuis - Distritos.



Olhos medicos - Provincias.

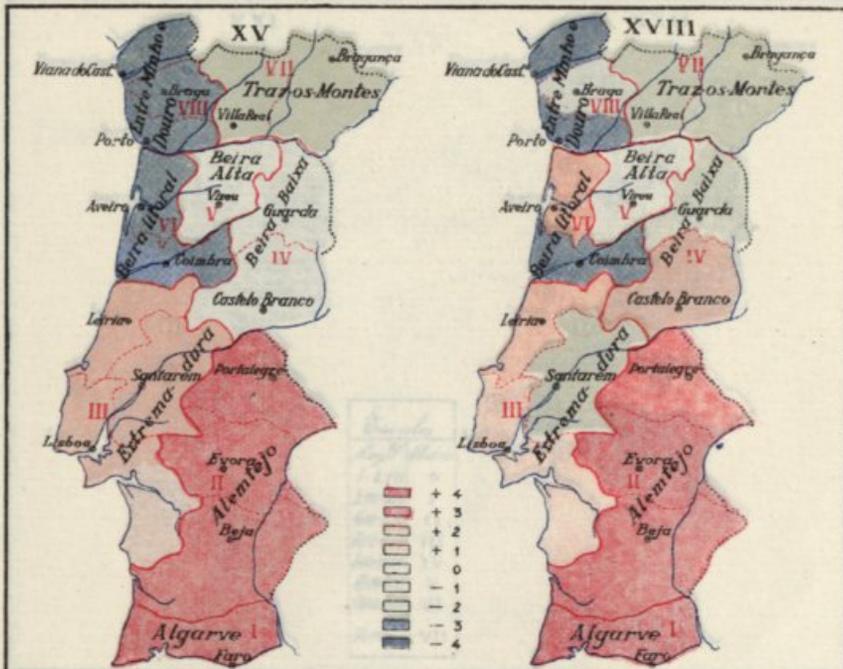
Olhos medicos - Distritos.





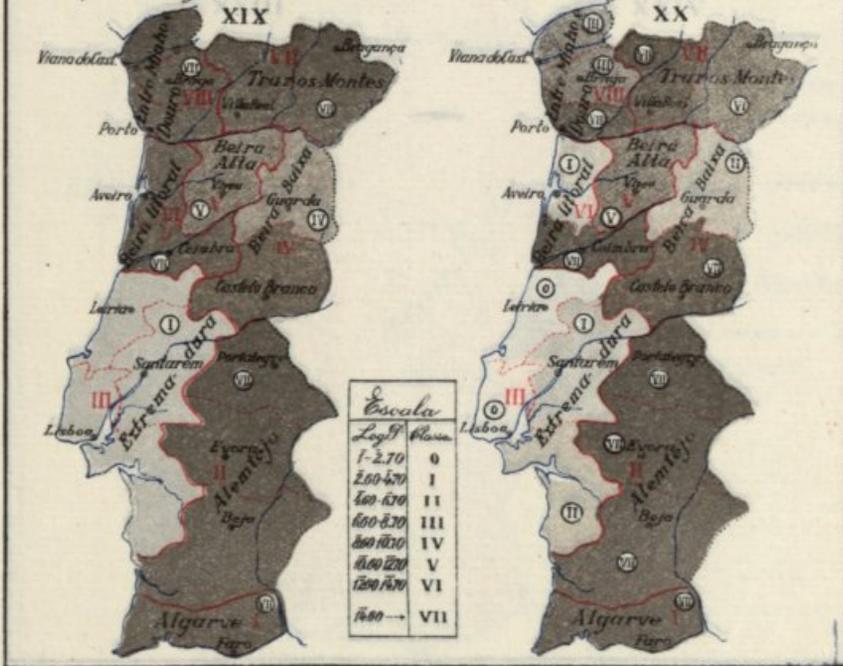
Olhos escuros - *Provincias.*

Olhos escuros - *Distritos*



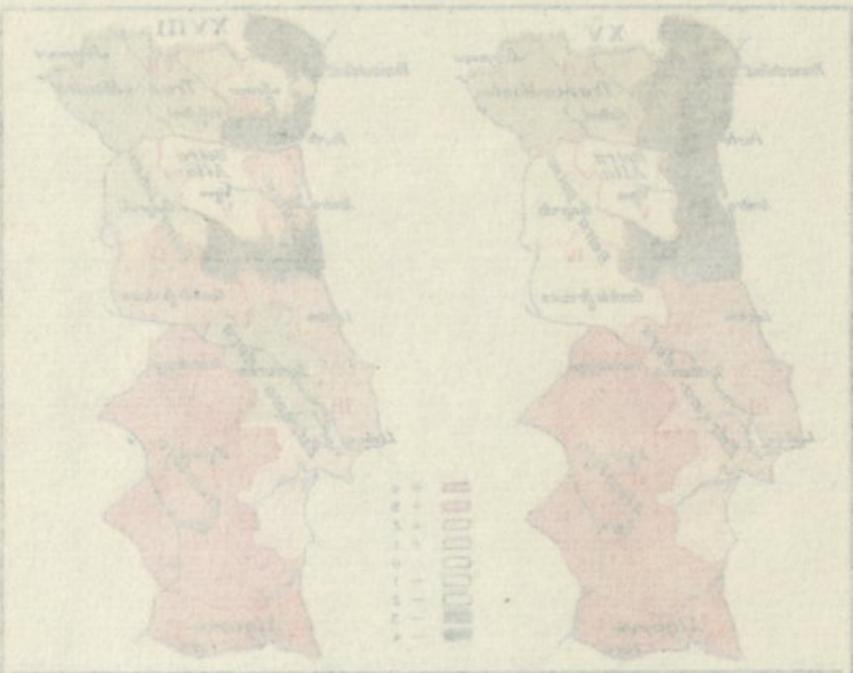
Côr da pele *Divergencias locais Provincias*

Côr da pele *Divergencias locais Distritos*



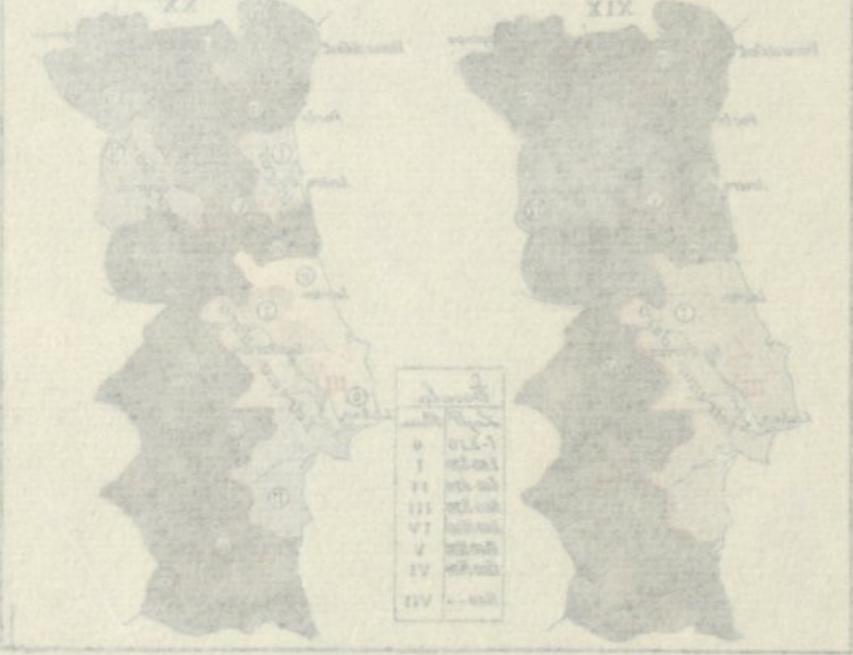
Walden - Walden

Walden - Walden



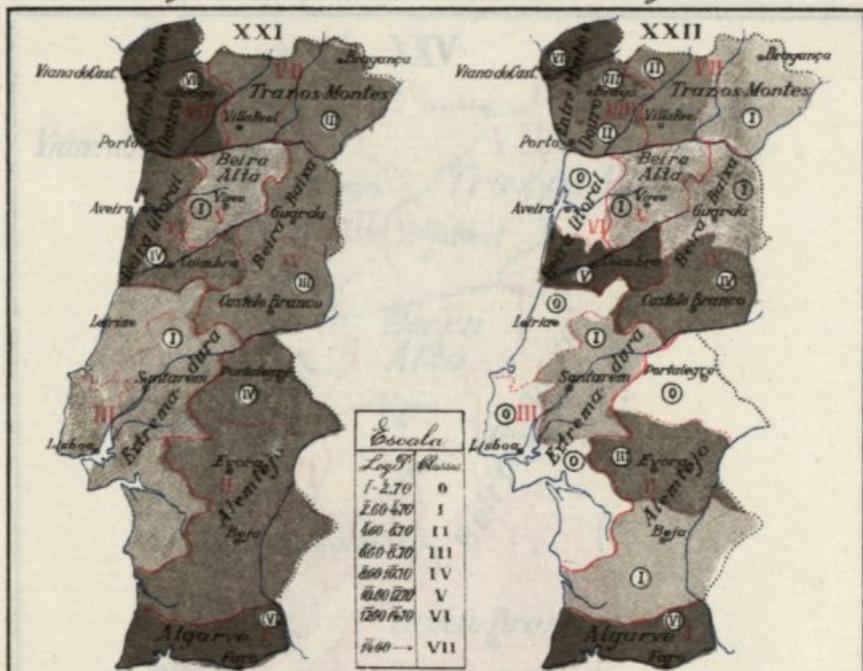
Walden - Walden

Walden - Walden



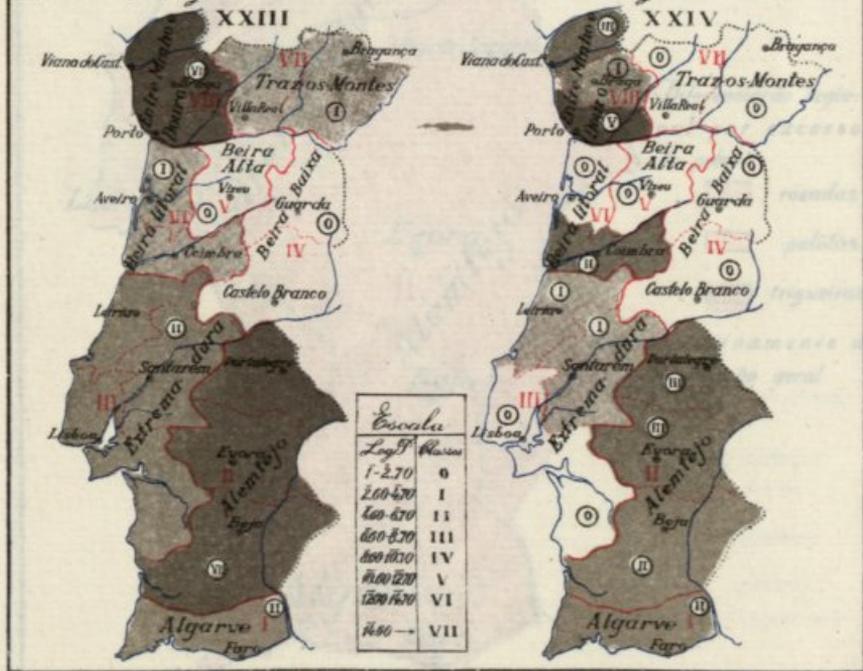
*Côrdo-cabelo - Divergências locais - Províncias.*

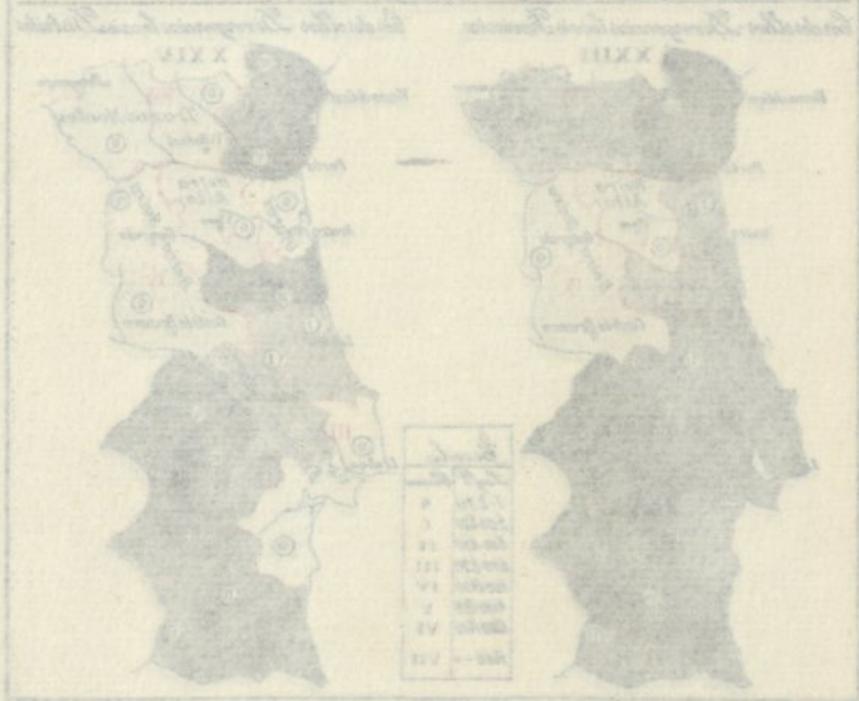
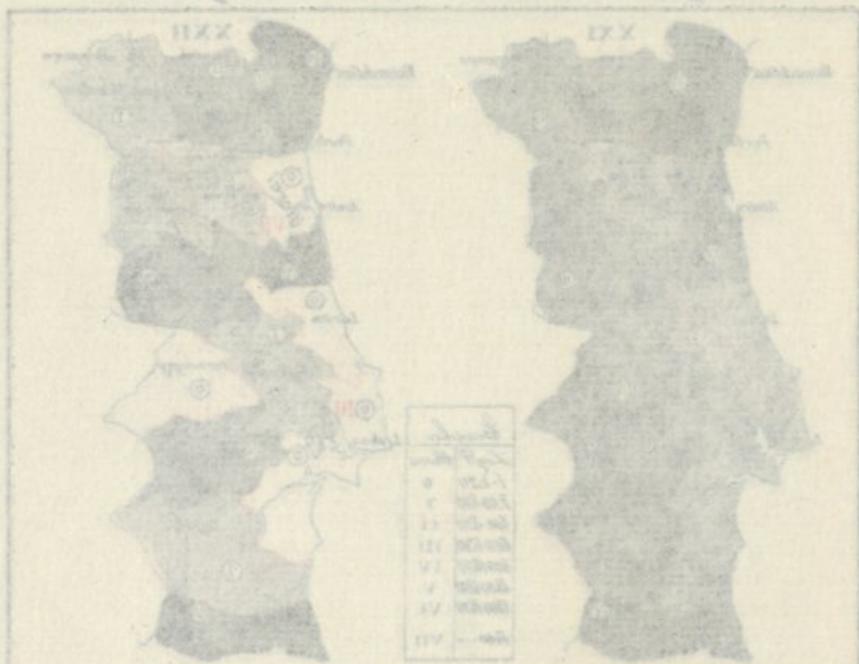
*Côrdo-cabelo - Divergências locais - Distritos.*



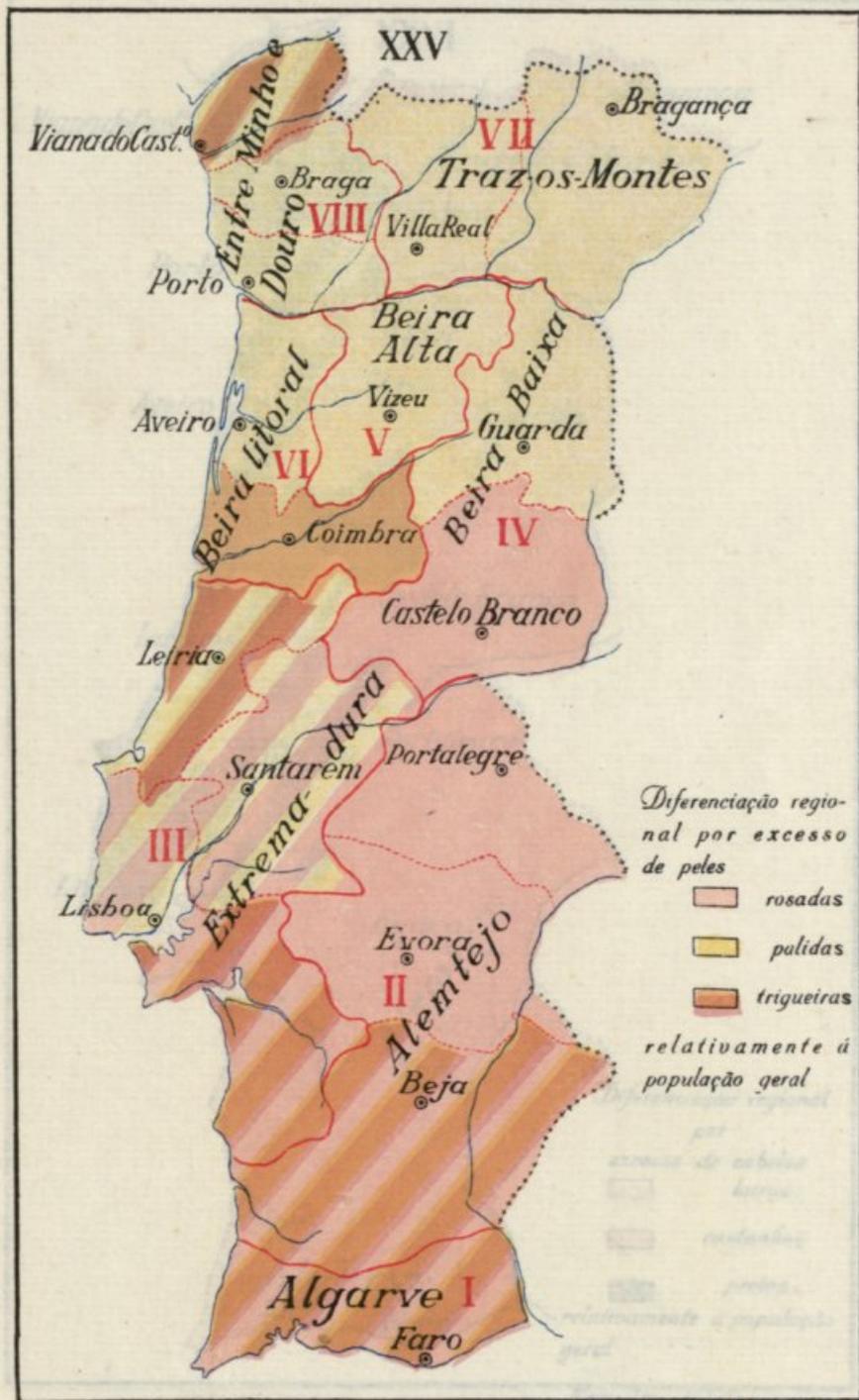
*Côrdo-cabelo - Divergências locais - Províncias.*

*Côrdo-cabelo - Divergências locais - Distritos.*

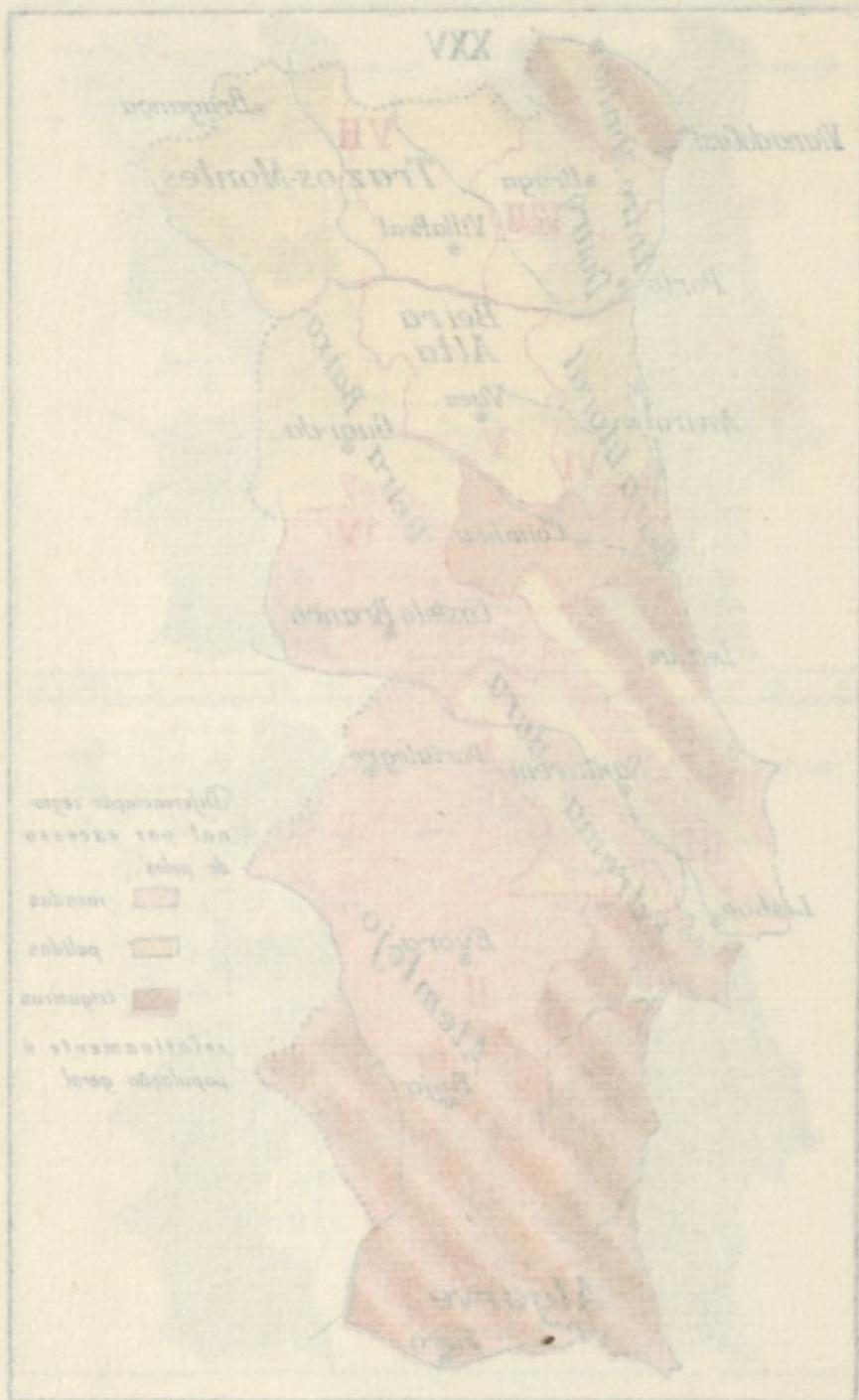




# Pele

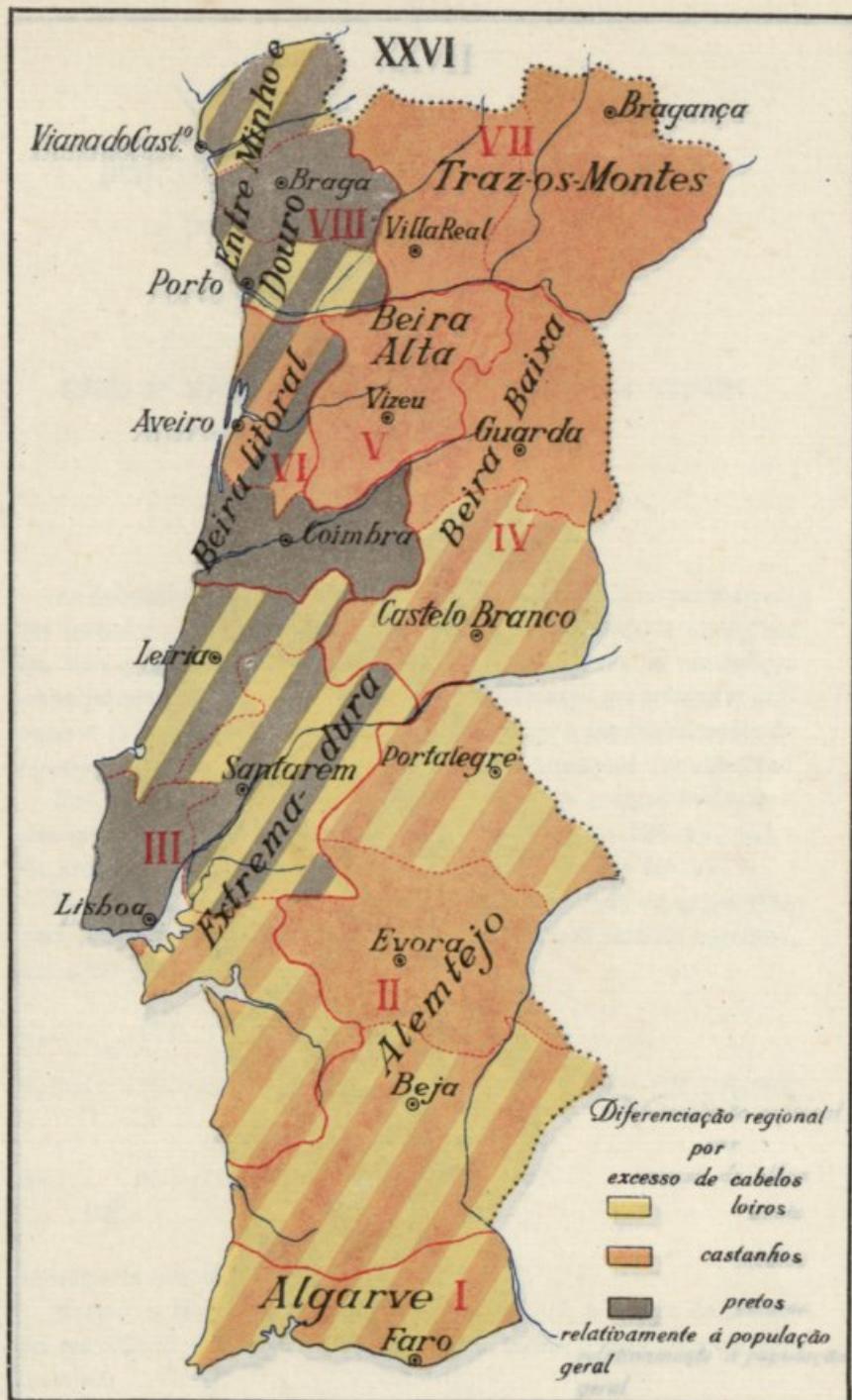


Escala = 1:2.500.000



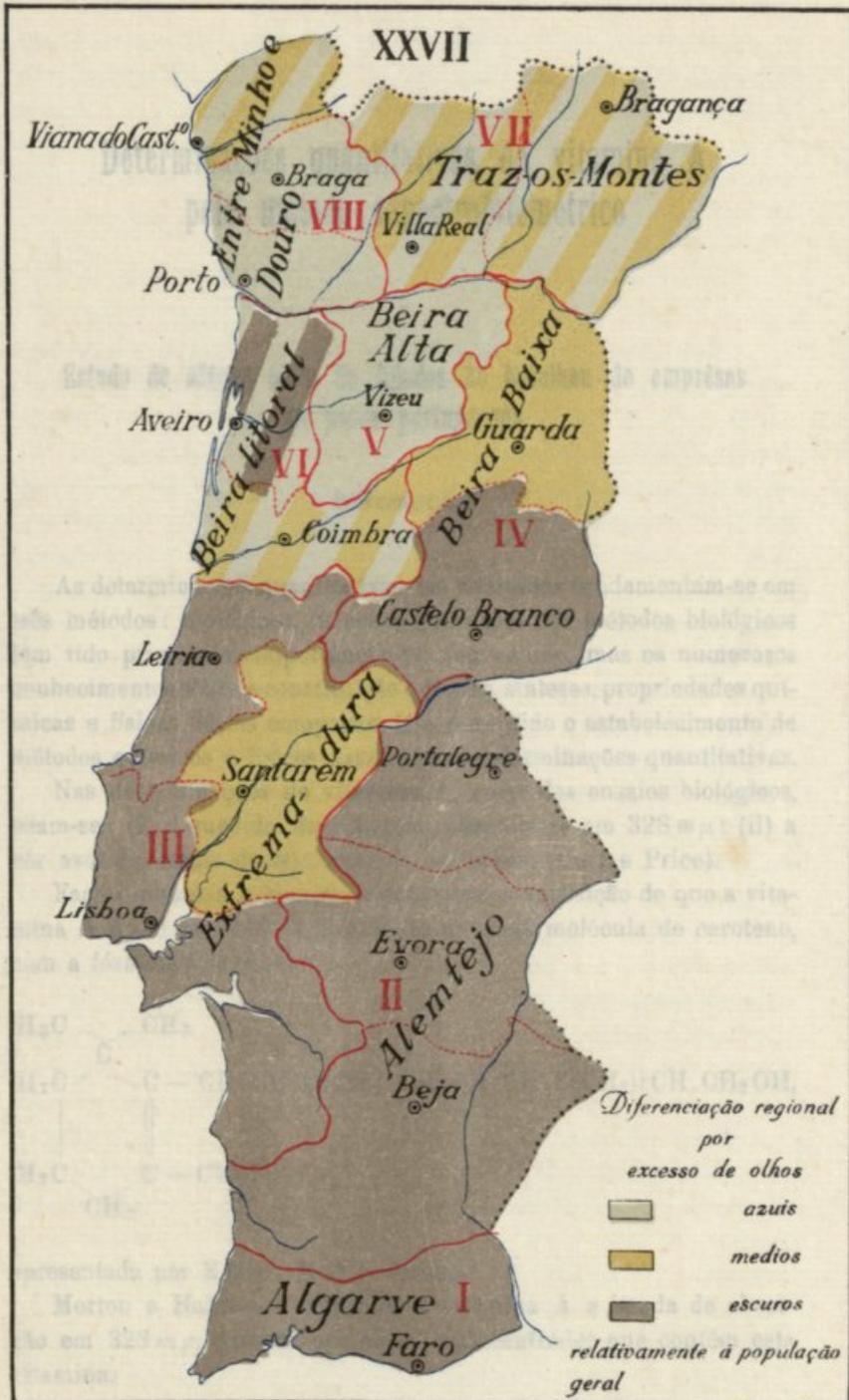
Religiónes de los indios  
 Religiónes de los europeos

# Cabelo





# Olhos



Diferenciação regional por excesso de olhos

- azuis
- medios
- escuros

relativamente à população geral

Escala = 1:2.500.000

XXVII



popolazione a popolazione  
 eccellenza de eccellenza  
 media  
 eccellenza  
 eccellenza de eccellenza  
 eccellenza de eccellenza

1:500,000

# Determinações quantitativas de vitamina A pelo método espectrofotométrico

## I

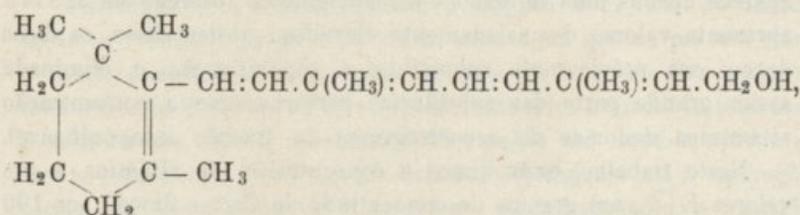
### Estudo de alguns óleos de fígados de bacalhau de empresas de pesca portuguesas

#### Introdução

As determinações quantitativas das vitaminas fundamentam-se em três métodos: biológicos, físicos e químicos. Os métodos biológicos têm tido primordial importância no seu estudo, mas os numerosos conhecimentos sobre a constituição química, sínteses, propriedades químicas e físicas destes compostos têm permitido o estabelecimento de métodos químicos e físicos para as suas determinações quantitativas.

Nas determinações de vitamina A, a-par dos ensaios biológicos, usam-se: (i) a medida da absorção ultravioleta em 328  $m\mu$ ; (ii) a cor azul do ensaio do tricloreto de antimónio (Carr e Price).

Factos químicos e biológicos conduzem à suposição de que a vitamina A é um produto de hidratação de meia molécula de caroteno, com a fórmula  $C_{20}H_{30}O$ :



apresentada por Karrer, Morf e Schöpp<sup>1</sup>.

Morton e Heilbron<sup>2</sup> atribuem à vitamina A a banda de absorção em 328  $m\mu$ , exibida por óleos e concentrados que contém esta vitamina.

O relatório da Conferência Internacional da «Permanent Comission on Biological Standardization of the League of Nations Health Organization», reunida em Londres em 1934, afirma que a medida do coeficiente de absorção em 328  $m\mu$  constituiu um método seguro para a determinação da quantidade de vitamina A em óleos e concentrados<sup>3</sup>.

### Princípio do método espectrofotométrico

A pesar das numerosas tentativas feitas no sentido de obter a vitamina A pura, somente foram conseguidas preparações muito activas. Os concentrados de Karrer, Morf e Schöpp<sup>4</sup>, Heilbron, Heslop, Morton, Webster, Rea e Drummond<sup>5</sup>, e Carr e Jewell<sup>6</sup> são os mais ricos até agora obtidos; as análises orgânicas destes concentrados confirmam a fórmula de Karrer, e podem considerar-se como preparações quasi puras de vitamina A. O valor do coeficiente de absorção do concentrado de Carr e Jewell em 328  $m\mu$ , referido a 1 centímetro de espessura e à concentração de 1% da solução alcoólica, é  $E_{1\text{cm}}^{1\%} = 1600$ ; este valor permite-nos calcular a potência em vitamina A dos óleos e concentrados.

Os espectrogramas, para a determinação do coeficiente de absorção em 328  $m\mu$ , de concentrados ou óleos muito ricos em vitamina A, podem obter-se directamente com as soluções em alcool puro daquelas substâncias; a banda de absorção deve ser persistente e bem definida para que os valores de  $E_{1\text{cm}}^{1\%}$  sejam de confiança. Principalmente nos óleos pobres, outras substâncias cromóforas, que acompanham a vitamina A, modificam a persistência e a intensidade da banda 328  $m\mu$ ; a persistência da banda diminui, algumas vezes aparece apenas uma inflexão, e o coeficiente de absorção em 328  $m\mu$  apresenta valores demasiadamente elevados; nestes casos, os óleos devem ser previamente submetidos à saponificação, e, eliminada assim grande parte das substâncias perturbadoras, a concentração vitamínica deduz-se do espectrograma da fracção insaponificável.

Neste trabalho, exprimimos a concentração de vitamina A em valores  $E_{1\text{cm}}^{1\%}$ , em gramas do concentrado de Carr e Jewell por 100 gramas de óleo, e em unidades internacionais. A unidade internacional de vitamina A é 0,6  $\gamma$  (0,0006 mgm.) de caroteno- $\beta$  (prò-vitamina). Os valores  $E_{1\text{cm}}^{1\%}$  328  $m\mu$  multiplicados por 1600 dão números que representam unidades internacionais de vitamina A por grama de óleos ou concentrados. O factor 1600 é a média duma

série de ensaios comparativos e independentes sobre as fracções insaponificáveis de óleos de fígados de bacalhau e concentrados<sup>7</sup>. Usando êste factor, a unidade internacional de vitamina A corresponde a 0,39  $\gamma$  do concentrado de Carr e Jewell\*.

### Técnica

*Espectrofotómetro* — Obtivemos os espectros de absorção com um espectrógrafo de quartzo, Hilger, E 316, associado com um fotómetro Spekker; usámos, como fonte luminosa, uma fâsca entre electrodos de aço de tungsténio.

*Espectrogramas dos óleos* — Obtivemos os espectrogramas dos diferentes óleos em soluções alcoólicas com concentrações e espessuras tais que os coeficientes de absorção em 328  $m\mu$  foram calculados para densidades ( $\log I_0/I$ ) compreendidas entre 0,9 e 1,2. Os coeficientes de absorção calcularam-se em 328  $m\mu$  e não no máximo da banda que em alguns óleos vem ligeiramente deslocado para menores comprimentos de onda.

*Saponificação* — Os óleos em que  $E_{1\text{cm}}^{1\%}$  328  $m\mu$  é menor do que 7 devem ser saponificados. Fizemos as saponificações segundo o método da «Society of Public Analysts»<sup>8</sup>. Pesam-se 0,2 — 1,0 gm. de óleo (o pêso aproximado deduz-se em cada caso do espectrograma preliminar da solução do óleo) num balão de fundo redondo de 100 a 150 c. c. Juntam-se 10 c. c. de álcool absoluto e 0,5 c. c. de KOH 10N (solução a 56  $\frac{1}{10}$  em água destilada); aquece-se a mistura num banho de água durante 5 minutos, agitando o balão de tempo a tempo.

*Extracção* — A solução quente é lançada num funil de decantação, e lava-se o balão com 20 c. c. de água que se passam para o funil; a seguir, o balão é lavado com 25 c. c. de éter recentemente destilado, que se passam igualmente para o funil. Imprime-se à mistura um ligeiro movimento de rotação até torná-la aparentemente homogénea e em seguida deixa-se em repouso até à separação nítida em duas camadas. Remove-se, cuidadosamente, a camada

---

\* O factor 0,60 é assunto de crítica e investigação (Bacharach, Drummond e Morton, Nature, 1936, 137, 118; Hume, *ibid.*, 1936, 137, 277; Ward e Haines, *ibid.*, 1936, 137, 402 e 1936, 138, 128); êste número é provisório e sujeito a revisão.

inferior para outro funil de decantação e reextrai-se, com mais 25 c. c. de éter, recentemente destilado, por agitação enérgica. Separa-se a camada inferior que contém os sabões e a camada superior transfere-se para o primeiro funil; lava-se o segundo funil com alguns c. c. de éter, que se juntam ao primeiro funil.

*Lavagem* — Lavam-se os extractos etéreos por agitação muito moderada com água destilada, KOH N/2 e água, seguidas de duas agitações fortes com água (10 a 20 c. c. em cada tratamento). Remove-se o extracto lavado para um balão e lava-se o funil com éter e depois com 1 a 2 c. c. de alcohol.

*Preparação da solução da fracção insaponificável* — Destila-se a maior parte do éter; a remoção completa faz-se por arrastamento numa corrente de azote ou gás carbónico, aquecendo o balão ligeiramente num banho de água. O resíduo dissolve-se em alcohol, cuja transparência no ultravioleta foi previamente verificada, e a solução leva-se a um volume apropriado, num balão graduado. O espectrograma da fracção insaponificável obtém-se como no caso dos óleos.

## Óleos

Fizemos determinações de vitamina A, sobre os seguintes óleos:

- (1) Óleo da Noruega (comercial)
- (2) Óleo de Aveiro, comercial, não purificado
- (3) Óleo de Aveiro, comercial, filtrado
- (4) Óleo de Aveiro, (Ilhavo), lugre X, não purificado, bancos da Terra Nova
- (5) Óleo de Aveiro, (Ilhavo), lugre X, filtrado, bancos da Terra Nova
- (6) Óleo de Aveiro, (Ilhavo), lugre Y, não purificado, bancos da Groenlândia.

A extracção dos óleos na Terra Nova é feita à temperatura local, deitando os fígados em barris; o pêso dos fígados lançados uns sobre os outros faz com que o óleo se vá acumulando à superfície. Quando a temperatura é bastante baixa, activa-se a desagregação dos fígados com água quente, mas nestas condições os óleos obtidos não são tão claros.

Usa-se, também, a extracção dos fígados frescos, em caldeiras de duplo fundo, aquecidas com vapor de água<sup>9</sup>.

## Resultados experimentais

*Fluorescência* — Os óleos apresentam fluorescência verde, de intensidade variável, sendo as mais fortes as dos óleos (4), (5) e (1).

*Côr* — As côres dos óleos foram medidas com um fotômetro de Pulfrich\*; os resultados, resumidos na figura 1, indicam os coeficientes de extinção,  $\alpha$ , correspondentes aos vários comprimentos de onda, não havendo indicação de absorção selectiva na região visível do espectro. Pela inspecção dos gráficos conclui-se que a ordem decrescente de transparência dos óleos, no visível, é: (i) nos óleos não purificados (4), (2) e (6); (ii) nos óleos purificados (1), (5) e (3).

*Espectros de absorção* — Os espectros de absorção foram obtidos nos óleos e fracções insaponificáveis. Dos primeiros resultados, apresentamos dois casos limites referentes aos óleos (1) e (4); no óleo (1) aparece apenas uma inflexão entre 305 e 330  $m\mu$  ( $E_{1\text{ cm}}^{1\%} 328\text{ m}\mu = 0,45$ ) e no óleo (4) uma banda de pequena persistência com o máximo em 315  $m\mu$  ( $E_{1\text{ cm}}^{1\%} 328\text{ m}\mu = 1,28$ ). Este estudo preliminar dos óleos conduziu-nos à necessidade do estudo das fracções insaponificáveis. Os resultados estão indicados na figura 2; em ordenadas estão marcados os valores  $E_{1\text{ cm}}^{1\%}$  e em abscissas os comprimentos de onda expressos em  $m\mu$ . Os valores de  $E_{1\text{ cm}}^{1\%} 328\text{ m}\mu$ , percentagens de vitamina A (referidas ao concentrado de Carr e Jewell), e unidades internacionais, para os diferentes óleos, estão resumidos no quadro seguinte.

Óleos	$E_{1\text{ cm}}^{1\%} 328\text{ m}\mu$	% de vitamina A	U. I./gm	
não purificados	(6)	0,387	0,024	619
	(2)	0,425	0,030	1000
	(4)	1,156	0,072	1850
purificados	(1)	0,297	0,018	475
	(3)	0,340	0,021	560
	(5)	1,049	0,065	1678

\* As medidas com o fotômetro de Pulfrich foram executadas pelo Dr. K. Schön, a quem apresentamos os nossos agradecimentos.





vindo os valores de  $E_{1\text{cm}}^{1\%}$  325  $m\mu$  acrescidos, respectivamente, de 0,153 e 0,124.

Os óleos de fígados de bacalhau portugueses provêm de peixe pescado nos bancos da Terra Nova e Groenlândia. A riqueza vitamínica dos óleos de bacalhau da Terra Nova é superior à dos óleos de bacalhau da Escócia, Islândia e Noruega<sup>41</sup>. Era pois de esperar que a quantidade de vitamina A nos óleos estudados fôsse elevada. As concentrações de vitamina A nos óleos de fígados de bacalhau (O. F. B.) variam aproximadamente entre 0,01 % e 0,05 %<sup>41</sup>; segundo Edisbury<sup>42</sup>, 43 amostras de O. F. B. (*Gadus callarias*) deram um valor médio de 0,04 %. As concentrações de vitamina A dos óleos (6), (2), (1) e (3) encontram-se dentro destes limites, apresentando os óleos (4) e (5) valores superiores. O óleo (2) apresenta o valor médio citado por Edisbury; os óleos (6) e (3) apresentam valores inferiores, aproximando-se da concentração vitamínica do óleo da Noruega.

Comparando as transparências dos óleos no visível com as intensidades de absorção em 320-330  $m\mu$ , verifica-se que a concentração de vitamina A nos óleos não purificados é tanto maior quanto maior fôr a sua transparência. A cor dos óleos não é devida a carotenoides insaponificáveis pois esta passa totalmente para a fracção saponificada. Segundo Mac Pherson, do Laboratório Biológico da Terra Nova<sup>43</sup>, a potência em vitamina A dos O. F. B. depende, além doutros factores, da idade do peixe; o peixe novo (4 a 5 anos) dá óleos de cor pálida, com pequena quantidade de vitamina A; o peixe velho (12 a 13 anos) dá óleos fortemente pigmentados, com elevada concentração vitamínica. Os nossos resultados estão em aparente contradição com os de Mac Pherson; evidentemente, o nosso caso é diferente, pois, os óleos por nós estudados provêm de peixes de idades diferentes e a cor dos óleos fortemente pigmentados deve ser devida aos métodos de extracção e conservação, com simultâneo empobrecimento de vitamina A.

Os óleos (3) e (5) foram purificados a partir, respectivamente, dos óleos (2) e (4). A diferença das quantidades de vitamina A nos óleos (3) e (2) é grande, havendo uma perda de cerca de 50 % na purificação; a perda de vitamina A na purificação do óleo (4) é menor, cerca de 10 %. Vê-se por estes resultados que a purificação dos óleos pode ter como consequência grandes perdas de vitamina A.

## Conclusões

1) Fizemos determinações espectrofotométricas, quantitativas, de vitamina A em alguns óleos de fígados de bacalhau, de empresas de pesca de Aveiro.

2) Dois óleos pouco corados têm concentrações de vitamina A superiores aos valores médios dos óleos de fígados de bacalhau.

3) Os óleos fortemente corados têm fraca riqueza vitamínica, facto possivelmente devido aos métodos de extracção e conservação dos óleos.

4) A purificação dos óleos tal como esta foi feita, traz como resultado perda de vitamina, que em um caso atingiu cerca de 50%.

Apresentamos os nossos agradecimentos ao Prof. Dr. Egas Pinto Basto pelas facilidades concedidas na execução deste trabalho. Aos senhores dr. João Oliveira Mano e António Joaquim da Silva Lopes ficam expressos os nossos agradecimentos por valiosas informações e pela oferta de algumas amostras de óleos.

## BIBLIOGRAFIA

- 1) *Helv. Chim. Acta*, 1931, *14*, 1036; *14*, 1431.
- 2) *Biochem. J.*, 1928, *22*, 987; *J. Soc. Chem. Ind.*, 1931, *50*, 183.
- 3) *Nature*, 1935, *135*, 517.
- 4) *Loc. cit.*
- 5) *Biochem. J.*, 1932, *26*, 1178.
- 6) *Nature*, 1933, *131*, 92.
- 7) *Nature*, 1935, *135*, 517.
- 8) *The Analyst*, 1933, *58*, 203; Morgan, Edisbury e Morton, *Biochem. J.*, 1935, *29*, 1645.
- 9) Relatório da Comissão desempenhada pelo Contra-Almirante Francisco Aníbal Oliver a bordo do transporte «Gil Eanes» nos Bancos da Terra Nova (1928).
- 10) Drummond e Hilditch, *Empire Marketing Board*, 1930, *35*.
- 11) Bacharach e Smith, *The Analyst*, 1934, *70*.
- 12) *Ph. D. Thesis (Liverpool)*, 1933.
- 13) *Nature*, 1933, *132*, 26.

A. J. A. DE GOUVEIA  
F. PINTO COELHO.

# Cálculo Simbólico

(CONTINUAÇÃO)

## CAPÍTULO IV

### FORMAS SIMBÓLICAS

As soluções desta equação, (n.º 250) serão:

$$y_1 = a_0 I \left( n + 1, -\frac{t^2}{4} \right)$$

e

$$y_2 = b_0 t^{-2n} I \left( 1 - n, -\frac{t^2}{4} \right).$$

254. Se na equação (1) do n.º 232 fizermos  $a = -2n$  e  $q^2 = -1$ , obtemos a equação do número anterior. Substituindo nos integrais particulares achados para a mencionada equação (1),  $a$  e  $q$  pelos seus valores e  $x$  por  $t$ , obtemos os resultados seguintes (n.ºs 233 e 234):

$$y_1 = a_0 I \left( n + 1, -\frac{t^2}{4} \right) \quad \text{e} \quad y_2 = b_0 t^{-2n} I \left( 1 - n, -\frac{t^2}{4} \right)$$

idênticos aos achados em o número anterior.

## CAPÍTULO V

### TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

255. O operador  $P \left( x, \frac{d}{dx} \right)$  pode também ser estudado por um processo muito engenhoso devido a Laplace.

Seja dada a equação

$$P \left( x, \frac{d}{dx} \right) y = 0$$

a que se pode dar a forma

$$P \left( \frac{d}{dx} \right) y + x Q \left( \frac{d}{dx} \right) y + x^2 R \left( \frac{d}{dx} \right) y + \dots = 0,$$

ordenando-a segundo as potências de  $x$ . Fazamos nesta equação

$$y = \int_L Z e^{xz} dz$$

onde  $Z$  é a nova variável dependente, função da variável imaginária  $z$  e  $L$  um contorno de integração independente de  $x$ .

Ora,

$$P \left( \frac{d}{dx} \right) \int_L Z e^{xz} dz = \int_L Z e^{xz} P(z) dz$$

pelo n.º 115. Do mesmo modo se transformam  $Q \left( \frac{d}{dx} \right) y$ ,

$$R \left( \frac{d}{dx} \right) y, \dots$$

Mas, integrando por partes, vem:

$$x \int Q(z) e^{xz} Z dz = e^{xz} Z Q(z) - \int e^{xz} \frac{d}{dz} \left\{ Z Q(z) \right\} dz;$$

$$x^2 \int R(z) e^{xz} Z dz = e^{xz} \left\{ x Z R(z) - \frac{d}{dz} [Z R(z)] \right\} +$$

$$+ \int e^{xz} \frac{d^2}{dz^2} [Z R(z)] dz;$$

.....

Substituindo estas expressões no 1.º membro da proposta, vem:

$$\begin{aligned} \int_L \left[ P \left( \frac{d}{dx} \right) + x Q \left( \frac{d}{dx} \right) + \dots \right] Z e^{xz} dz = \\ = \left[ e^{xz} \left\{ Z Q(z) + x Z R(z) - \frac{d}{dz} [Z R(z)] + \dots \right\} \right]_L + \\ + \int_L e^{xz} \left\{ Z P(z) - \frac{d}{dz} [Z Q(z)] + \frac{d^2}{dz^2} [Z R(z)] \dots \right\} dz \end{aligned}$$

Se se determinar  $Z$  pela equação diferencial

$$ZP(z) - \frac{d}{dz} [ZQ(z)] + \frac{d^2}{dz^2} [ZR(z)] + \dots = 0,$$

e  $L$  pela condição de ser

$$\left[ e^{xz} \left\{ ZQ(z) + xZR(z) - \frac{d}{dz} [ZR(z)] + \dots \right\} \right]_L = 0,$$

a equação proposta fica satisfeita.

Se o integral ao longo de  $L$  de  $Z e^{xz}$  fôr finito e diferente de zero, dar-nos há um integral da proposta.

**256. Equação de Laplace.** — No caso da proposta ser de 1.º grau em  $x$ , isto é, da forma

$$P \left( \frac{d}{dx} \right) y + x Q \left( \frac{d}{dx} \right) y = 0,$$

toma o nome de equação de Laplace e a sua integração pelo método que acabámos de indicar, faz-se por meio da integração de outra equação diferencial de 1.ª ordem.

Com efeito, a equação que determina  $Z$  é, neste caso,

$$ZP(z) - \frac{d}{dz} [ZQ(z)] = 0$$

que é, de facto, de 1.ª ordem.

Desta equação tira-se imediatamente

$$\frac{\frac{d}{dz} [ZQ(z)]}{ZQ(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

e

$$\log [ZQ(z)] = \log C + \int_{z_0}^z \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

onde  $z_0$  não é zero de  $Q(z)$  e  $C$  é uma constante arbitrária, que podemos supor igual à unidade, visto  $z_0$  ficar arbitrário. Teremos, pois,

$$Z = \frac{1}{Q(z)} e^{\int_{z_0}^z \frac{P(z)}{Q(z)} dz}$$

257. A equação que condiciona o contórno é, neste caso,

$$[e^{xz} ZQ(z)]_L = 0.$$

Pondo

$$V = e^{xz} ZQ(z) = e^{xz + \int_{z_0}^z \frac{P(x)}{Q(x)} dx},$$

o contórno terá de ser escolhido de modo que a variação de  $V$  ao longo dele seja nula e que o integral de  $Z e^{xz}$  seja finito e diferente de zero.

258. Se representarmos por  $a, b \dots l$  as raízes de  $Q(z)$ , o integral indefinido de  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  terá uma parte racional,  $R(z)$ , cujo denominador tem as mesmas raízes de  $Q(z)$  com o grau de multiplicidade diminuído duma unidade; e uma parte logarítmica, da forma  $\alpha \log(z-a) + \beta \log(z-b) + \dots + \lambda \log(z-l)$ , sendo  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ , constantes determinadas. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} V &= e^{xz + R(z) + \alpha \log(z-a) + \dots + \lambda \log(z-l)} = \\ &= e^{xz + R(z)} (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \dots (z-l)^\lambda. \end{aligned}$$

Descrevendo um lacete em volta da raíz  $a$ , a partir duma origem qualquer, onde  $V$  toma o valor inicial  $V_0$ , volta-se ao ponto de partida com o valor  $V_1 = V_0 e^{2\alpha\pi i}$ , se o lacete fôr descrito no sentido directo; e com o valor  $V'_1 = V_0 e^{-2\alpha\pi i}$ , se o lacete fôr descrito em sentido contrário. Representando por  $A_1, B_1, \dots, L_1$ , os lacetes descritos no sentido directo em volta das raízes  $a, b \dots l$ , respectivamente; e por  $A_{-1}, B_{-1} \dots$  os mesmos lacetes descritos em sentido inverso, a função  $V$  voltará ao valor inicial tôdas as vezes que  $z$  descreva um contórno decomponível em pares de lacetes descritos em sentidos contrários. Assim, por exemplo, um contórno decomponível nos lacetes  $A_1, B_1, A_{-1}, B_{-1}$ , deixa  $V$  inalterado.

259. Também se podem obter contórnos a partir das raízes de  $V$ . Um contórno aberto que termine em duas destas raízes, dá para  $V$  uma variação nula e pode dar para  $Z$  um valor finito e diferente de zero.

260 Um contôrno infinito, partindo dum zero de  $V$ , pode também resolver o problema, logo que seja convenientemente escolhido (V. Goursat, *Cours d'Aurbyn*, II, 1911, pág. 443), isto é, que seja tal que  $V$  tenda para zero quando  $Z$  se afasta sôbre êle indefinidamente.

261. **Equação de Bessel.** — Apliquemos esta doutrina à integração da equação de Bessel:

$$xy'' + (2n + 1)y' + xy = 0,$$

sendo a parte real de  $n$ , positiva ou nula.

Passando para a forma do n.º 256, vem:

$$(2n + 1) \frac{d}{dx} y + x \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + 1 \right] y = 0.$$

Conseqüentemente,

$$P(z) = (2n + 1)z \quad \text{e} \quad Q(z) = z^2 + 1.$$

O valor de  $Z$  é dado por

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{z^2 + 1} e^{\int_{z_0}^z \frac{(2n+1)x}{x^2+1} dx} \\ &= C(1 + z^2)^{n - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Ora, para êste valor de  $Z$ , vem

$$y = \int_L e^{xz} Z dz = C \int_L e^{xz} (1 + z^2)^{n - \frac{1}{2}} dz$$

e

$$V = C e^{xz + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(1 + z^2)} = C e^{xz} (1 + z^2)^{n + \frac{1}{2}}.$$

Tomando para contôrno de integração uma linha aberta que termine nos pontos  $\pm i$ , a variação de  $V$  será nula e o valor de  $y$  finito. Tomando para contôrno de integração o segmento de recta que une os pontos  $\pm i$ , vem

$$y = C \int_{-i}^i e^{xz} (1 + z^2)^{n - \frac{1}{2}} dz.$$

262. Fazendo  $z = it$ , vem

$$\begin{aligned} y &= C \int_{-1}^1 e^{ixt} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} idt \\ &= C \int_{-1}^1 (\cos xt + i \operatorname{sen} xt) (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} idt; \end{aligned}$$

ou ainda,

$$y = C \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos xt \cdot dt$$

por ser ímpar a outra parcela da função a integrar.

263. Em vez dum contôrno aberto, pode fazer-se a integração ao longo dum contôrno fechado formado por dois lacetes apenas, um descrito um volta do ponto  $+i$ , no sentido directo; outro descrito em volta do ponto  $-i$ , no sentido inverso. O integral obtido só difere do já achado por um factor constante.

264. A série

$$I(\gamma, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{[m \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \dots (\gamma + m - 1)]}$$

representa um integral particular da equação de Bessel se nela fizermos  $\gamma = n + 1$  e substituirmos  $x$  por  $-\frac{x^2}{4}$ , como se viu em o n.º 253. Dos integrais desta equação, só êste é uma função inteira, como resulta da forma do integral geral da proposta. Portanto, o valor de  $y$  achado em o número anterior e o dado pela série

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{[m \cdot (n+1)(n+2) \dots (n+m)]} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

só podem diferir por um factor constante. Logo:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos xt \cdot dt = C \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{[m \cdot (n+1) \dots (n+m)]} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

onde  $C$  é uma constante que se determina atendendo a que, para  $x = 0$ , a série toma o valor 1.

265. Para  $n = 0$ , vem:

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt = C \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(|m|)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m};$$

e

$$C = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi.$$

Representando por  $I(x)$  a série da equação anterior, vem

$$\pi I(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

266. Obter-se-ia o outro integral particular da equação proposta, tomando um contorno de integração começado em um qualquer dos zeros de  $V$  e tal que, afastando-se  $Z$  sobre ele indefinidamente, a parte real de  $Zx$  tende para  $-\infty$ .

267. É evidente que os resultados dos n.ºs 255, 256 e 257, subsistem para o caso de  $P(z)$  e  $Q(z)$  serem séries inteiras (n.º 115).

#### Divisão dos operadores da forma $A\left(x, \frac{d}{dx}\right)$

268. Um operador da forma

$$A_m(x, d) = a_0 d^n + a_1 d^{n-1} + \dots + a_{n-1} d + a_n,$$

onde os  $a_i$  são funções de  $x$  quaisquer e onde  $d$  representa o operador  $\frac{d}{dx}$ , goza de propriedades semelhantes às dos polinómios para os efeitos da divisão e do cálculo do máximo divisor comum. Assim, se  $B_n(x, d)$  for um operador da mesma forma de  $A_m(x, d)$ , é manifesto que  $A_m(x, d)$  e  $B_n(x, d)$  dão, por multiplicação, um operador da mesma forma, mas de grau  $m+n$  em  $d$ , qualquer que seja a ordem porque se multiplicam, sendo

$$A_m(x, d) \cdot B_n(x, d) = a_0 b_0 d^{m+n} + \dots$$

269. Pôsto isto, dados os operadores  $A_m(x, d)$  e  $B_n(x, d)$ , para  $m > n$ , é possível determinar outro operador da mesma forma e de grau  $m - n$ ,  $Q_{m-n}(x, d)$ , tal que

$$A_m(x, d) - Q_{m-n}(x, d) B_n(x, d) = R_{n-1}(x, d) \quad (1)$$

sendo  $R_{n-1}(x, d)$  da mesma forma e de grau  $n - 1$  quando muito. Com efeito, pondo

$$Q_{m-n}(x, d) = q_0 d^{m-n} + q_1 d^{m-n-1} + \dots + q_{m-n},$$

sendo os  $q_i$  função de  $x$  a determinar, vem:

$$Q_{m-n}(x, d) B_n(x, d) = q_0 b_0 d^m + \alpha d^{m-1} + \dots + \lambda$$

sendo  $\alpha, \beta \dots \lambda$ , funções de  $x$ , lineares em  $q_0, q_1 \dots q_{m-n}$ , e de coeficientes conhecidos, formados pelos  $b_i$  e suas derivadas.

Como podemos determinar  $q_0, q_1 \dots q_m$  pela condição de tornarem iguais  $q_0, b_0, \alpha, \beta \dots \lambda$  aos coeficientes dos termos homólogos de  $A_m(x, d)$ , fica demonstrado que a diferença

$$A_m(x, d) - Q_{m-n}(x, d) \cdot B_n(x, d)$$

se reduz a um polinómio em  $d$  de grau quando muito igual  $n - 1$ .

270. A relação demonstrada em o número anterior, é a equação da divisão de  $A_m(x, d)$  por  $B_n(x, d)$ , sendo  $Q_{m-n}(x, d)$  o cociente e  $R_{n-1}(x, d)$ , o resto.

271. Máximo divisor comum. — Aplicando aos operadores  $A_m(x, d)$  e  $B_n(x, d)$ , o algoritmo das divisões sucessivas, obtem-se o máximo divisor comum deles, isto é, o operador da mesma forma e de maior grau, capaz de os dividir a ambos exactamente.

272. Aplicação. — Da relação (1) deduz-se imediatamente que as soluções comuns às equações diferenciais lineares

$$A_m(x, d) y = 0 \quad \text{e} \quad B_n(x, d) y = 0, \quad (2)$$

são também soluções da equação linear

$$R_{n-1}(x, d)y = 0. \quad (3)$$

273. Conseqüentemente, as soluções comuns a duas equações diferenciais lineares dadas, são soluções do seu máximo divisor comum.

274. Se as soluções da segunda das equações (2) forem todas soluções da primeira, também serão soluções de (3), como é evidente. Ora (3), sendo de ordem inferior a  $n$ , não poderá ter  $n$  soluções distintas, sem ser idênticamente nula como é sabido. Logo: se as soluções de  $B_n(x, d)y = 0$  satisfizerem todas a  $A_m(x, d)y = 0$ , será

$$A_m(x, d) = Q_{m-n}(x, d) \cdot B_n(x, d).$$

A equação  $A_m(x, d)y = 0$  poderá, portanto, escrever-se debaixo da forma

$$Q_{m-n}(x, d)B_n(x, d)y = 0$$

e pode desdobrar-se em duas

$$Q_{m-n}(x, d)Z = 0$$

$$B_n(x, d)y = Z.$$

Determinando  $Z$  pela primeira, calcula-se em seguida  $y$  pela segunda, obtendo-se uma solução com  $m$  constantes arbitrárias, isto é, o integral geral.

275. Esta doutrina permite-nos também substituir uma equação não homogênia, por outra homogênia, mas de ordem superior, pelo menos de uma unidade. Seja a equação não homogênia

$$B_n(x, d)y = Z.$$

Forme-se uma equação

$$Q_{m-n}(x, d)Z = 0$$

que tenha por solução o segundo membro da equação não homogénia dada. As soluções da proposta satisfazem tôdas a equação homogénia.

$$Q_{m-n}(x, d) \cdot B_n(x, d) y = 0$$

276. Conhecendo  $n$  integrais particulares da equação  $A_m(x, d) y = 0$ , podemos formar uma equação de ordem  $n$ ,  $B_n(x, d) y = 0$  que os tenha por soluções. A integração da proposta fica reduzida à integração de  $Q_{m-n}(x, d) Z = 0$  e ao cálculo dum integral particular da equação  $B_n(x, d) y = Z$  de que se conhece o integral geral do primeiro membro, isto é, a quadraturas.

277. Deve notar-se que as propriedades dos n.ºs 268, 269, 270, 271, 272 e 273, se mantem seja qual fôr o significado que se dê a  $d$ , logo que seja operador aditivo e permutável com os números.

278. Se o operador representado por  $d$  fôr tal que a equação  $R_{n-1}(x, d) y = 0$  tenha de ser idênticamente nula logo que admita  $n$  soluções distintas, a doutrina dos n.ºs 274 e 275, também se applicará aos operadores da forma  $A(x, d)$ .

## CAPÍTULO VI

### SISTEMAS DE EQUAÇÕES SIMBÓLICAS

279. Seja  $\rho$  um operador uniforme, aditivo e permutável com os números. Todos os polinómios inteiros em  $\rho$  serão também uniformes, aditivos, permutáveis com os números e permutáveis entre si (n.ºs 41 e 49). Êste facto permite-nos resolver pelas regras de Crammer um sistema de equações cujos coeficientes sejam polinómios em  $\rho$ . Seja, para fixar idéias, um sistema de três equações a três incógnitas:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho) u_1 + \varphi_2(\rho) u_2 + \varphi_3(\rho) u_3 &= \varphi(x) \\ \psi_1(\rho) u_1 + \psi_2(\rho) u_2 + \psi_3(\rho) u_3 &= \psi(x) \\ \theta_1(\rho) u_1 + \theta_2(\rho) u_2 + \theta_3(\rho) u_3 &= \theta(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Seja  $\Delta$  o determinante simbólico formado com os coeficientes das incógnitas :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(\rho) & \varphi_2(\rho) & \varphi_3(\rho) \\ \psi_1(\rho) & \psi_2(\rho) & \psi_3(\rho) \\ \theta_1(\rho) & \theta_2(\rho) & \theta_3(\rho) \end{vmatrix}$$

e sejam  $\Delta_{u_1}$ ,  $\Delta_{u_2}$  e  $\Delta_{u_3}$  os determinantes que se obtém d'este, pela substituição dos coeficientes de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , respectivamente, pelos termos conhecidos, depois de transpostos para o 2.º membro, segundo a conhecida regra de Crammer. É claro que do sistema (1), se obtém o sistema

$$\begin{aligned} \Delta \cdot u_1 &= \Delta_{u_1} \\ \Delta \cdot u_2 &= \Delta_{u_2} \\ \Delta \cdot u_3 &= \Delta_{u_3} \end{aligned} \quad (2)$$

effectuando operações análogas às empregadas na dedução da mencionada regra.

280. Na verdade, representando pelas letras maiúsculas correspondentes, os complementos algébricos dos elementos de  $\Delta$  representados por letras minúsculas, deduz-se de (1) :

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \Phi_1 + \psi_1 \Psi_1 + \theta_1 \Theta_1) u_1 + (\varphi_2 \Phi_1 + \psi_2 \Psi_1 + \theta_2 \Theta_1) u_2 + \\ + (\varphi_3 \Phi_1 + \psi_3 \Psi_1 + \theta_3 \Theta_1) u_3 &= \Delta_{u_1}; \\ (\varphi_1 \Phi_2 + \psi_1 \Psi_2 + \theta_1 \Theta_2) u_1 + (\varphi_2 \Phi_2 + \psi_2 \Psi_2 + \theta_2 \Theta_2) u_2 + \\ + (\varphi_3 \Phi_2 + \psi_3 \Psi_2 + \theta_3 \Theta_2) u_3 &= \Delta_{u_2}; \\ (\varphi_1 \Phi_3 + \psi_1 \Psi_3 + \theta_1 \Theta_3) u_1 + (\varphi_2 \Phi_3 + \psi_2 \Psi_3 + \theta_2 \Theta_3) u_2 + \\ + (\varphi_3 \Phi_3 + \psi_3 \Psi_3 + \theta_3 \Theta_3) u_3 &= \Delta_{u_3} \end{aligned} \quad (3)$$

que é o sistema (2).

281. Se o determinante  $\Delta$  foi identicamente nulo, sem que o sejam  $\Delta_{u_1}$ ,  $\Delta_{u_2}$ ,  $\Delta_{u_3}$ , o sistema (2) será absurdo; e, como se deduz legitimamente do (1), também o sistema (1) será absurdo, ou *incompatível*.

282. Se  $\Delta$  fôr identicamente nulo e o mesmo suceder a  $\Delta_{u_1}$ ,  $\Delta_{u_2}$ , e  $\Delta_{u_3}$ , ponhamos

$$f_1 \equiv \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\rho) u_i - \varphi(x)$$

$$f_2 \equiv \sum_{i=1}^3 \psi_i(\rho) u_i - \psi(x)$$

$$f_3 \equiv \sum_{i=1}^3 \theta_i(\rho) u_i - \theta(x),$$

e teremos:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_2(\rho) & \varphi_3(\rho) \\ f_2 & \psi_2(\rho) & \psi_3(\rho) \\ f_3 & \theta_2(\rho) & \theta_3(\rho) \end{vmatrix} \equiv \Phi_1(\rho) \cdot f_1 + \Psi_1(\rho) \cdot f_2 + \Theta_1(\rho) \cdot f_3 = 0.$$

Logo: se os menores de 1.<sup>a</sup> classe de  $\Delta(\rho)$  não forem todos identicamente nulos e o fôr  $\Delta(\rho)$ , as equações propostas satisfazem a uma equação simbólica linear e homogênea.

283. Se todos estes menores fôsem nulos, sucederia como nos casos semelhantes dos sistemas de equações lineares, como se vê pelo caso que fica exposto.

284. Se  $\Delta \neq 0$ , multipliquemos as equações de (3) por  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  respectivamente e somemos membro a membro.

Virá:

$$\Delta \cdot (\varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3) = \Delta \cdot \varphi;$$

e

$$\Delta \cdot (\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 u_3) = \Delta \cdot \psi \quad (4)$$

$$\Delta \cdot (\theta_1 u_1 + \theta_2 u_2 + \theta_3 u_3) = \Delta \cdot \theta$$

análogamente.

285. É claro que as soluções de (3), satisfazem a (4), como as de (1) satisfazem a (2), e as de (2) satisfazem a (3). Logo: as soluções de (1) satisfazem a (4), como é aliás evidente. Mas as soluções de (4) é que podem não satisfazer todas a (1). Com efeito, a solução mais geral de (4) pode representar-se simbolicamente por

$$\begin{aligned} \varphi_1 u_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 u_3 &= \Delta^{-1} \Delta \varphi \\ \psi_1 u_1 + \psi_2 v_2 + \psi_3 u_3 &= \Delta^{-1} \Delta \psi \\ \theta_1 u_1 + \theta_2 v_2 + \theta_3 u_3 &= \Delta^{-1} \Delta \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Ora, podendo o operador  $\Delta^{-1}$  ser multiforme, não será em geral permutável com  $\Delta$ , e a expressão  $\Delta^{-1} \Delta \varphi$  será mais geral do que  $\Delta \Delta^{-1} \varphi = \varphi$ , o mesmo se dizendo das outras que lhe são semelhantes.

286. Vê-se, pois, claramente que as operações que nos permitiram deduzir o sistema (2) do sistema (1), podem introduzir no sistema (2), soluções estranhas a (1).

287. Mas como o sistema (2) é em geral mais simples de resolver do que (1), por ter as incógnitas separadas, resolveremos em 1.º lugar o sistema (2) e em seguida substituiremos as soluções achadas no sistema (1), afim de arredar as soluções estranhas que é aliás o processo habitual em semelhantes casos.

288. Cálculo duma solução particular. — Como

$$\Delta u_1 = \begin{vmatrix} \varphi(x), \varphi_2(\rho), \varphi_3(\rho) \\ \psi(x), \psi_2(\rho), \psi_3(\rho) \\ \theta(x), \theta_2(\rho), \theta_3(\rho) \end{vmatrix} \\ = \Phi_1(\rho) \varphi(x) + \Psi_1(\rho) \psi(x) + \Theta_1(\rho) \theta(x)$$

se soubermos calcular um valor para  $\Delta^{-1}(\rho) \varphi(x)$ ,  $\Delta^{-1}(\rho) \psi(x)$  e  $\Delta^{-1}(\rho) \theta(x)$ , teremos obtido um valor para  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , embora esse valor não seja o mais geral. Com efeito, os valores

$$u_1 = \Phi_1(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \varphi(x) + \Psi_1(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \psi(x) + \Theta_1(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \theta(x)$$

$$u_2 = \Phi_2(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \varphi(x) + \Psi_2(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \psi(x) + \Theta_2(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \theta(x)$$

$$u_3 = \Phi_3(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \varphi(x) + \Psi_3(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \psi(x) + \Theta_3(\rho) \Delta^{-1}(\rho) \theta(x)$$

satisfazem ao sistema (1) proposto, como imediatamente se verifica fazendo as substituições.

289. Se alguma das equações (1) fôr tal que todos os operadores do primeiro membro admitam um divisor comum, convém começar por desembaraçar a dita equação dêsse divisor.

Assim, seja  $\xi(\rho)$  o máximo divisor comum dos operadores da primeira das equações (1), por exemplo, e seja

$$\varphi_1(\rho) = \xi(\rho) \cdot \eta_1(\rho)$$

$$\varphi_2(\rho) = \xi(\rho) \cdot \eta_2(\rho)$$

$$\varphi_3(\rho) = \xi(\rho) \cdot \eta_3(\rho).$$

Multiplcando ambos os membros dessa equação por  $\xi^{-1}(\rho)$ , vem:

$$\eta_1(\rho) \cdot u_1 + \eta_2(\rho) \cdot u_2 + \eta_3(\rho) u_3 = \xi^{-1}(\rho) \varphi(x).$$

290. Com esta equação e com as duas últimas de (1), forma-se um novo sistema, mais simples do que (1).

291. Multiplcando ambos os membros desta equação por  $\xi(\rho)$ , obtem-se a primeira das equações (1), donde se partiu. Logo: tôdas as soluções do sistema em que esta equação entra, satisfazem a (1), mas a recíproca pode não ser verdadeira.

292. É manifesto que, determinada uma solução particular para o sistema (1), o podemos substituir por outro sem segundos membros. Com efeito, se representarmos por  $v_1$   $v_2$   $v_3$  uma solução particular de (1), e puzermos

$$u_1 = v_1 + U_1; \quad u_2 = v_2 + U_2; \quad u_3 = v_3 + U_3,$$

substituindo estes valores em (1), o sistema reduz-se a

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho) U_1 + \varphi_2(\rho) U_2 + \varphi_3(\rho) U_3 &= 0 \\ \psi_1(\rho) U_1 + \psi_2(\rho) U_2 + \psi_3(\rho) U_3 &= 0 \\ \theta_1(\rho) U_1 + \theta_2(\rho) U_2 + \theta_3(\rho) U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

293. Por sua vez, o sistema (2) reduz-se a

$$\Delta U_1 = 0; \quad \Delta U_2 = 0; \quad \Delta U_3 = 0 \quad (7)$$

294. As funções  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , embora sejam determinadas pela mesma equação e tenham portanto, a mesma forma, podem

diferir umas das outras por particularidades necessárias para que o sistema (6) fique satisfeito.

295. Claro que se o sistema (6) fôr satisfeito pelas soluções  $v_1, v_2, v_3$  e  $w_1, w_2, w_3$ , também será satisfeito pela solução

$$Av_1 + Bw_1, \quad Av_2 + Bw_2, \quad Av_3 + Bw_3,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias.

#### Sistemas de equações diferenciais de coeficientes constantes

296. No caso particular de ser  $\rho = \frac{d}{dx}$ , o sistema (2) torna-se de equações diferenciais de coeficientes constantes e pode-se-lhe aplicar o que foi dito para  $\rho$  qualquer. Seja, para fixar ideias, um sistema de três equações:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \varphi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \varphi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= \varphi(x) \\ (8) \quad \psi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \psi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \psi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= \psi(x) \\ \theta_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \theta_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \theta_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= \theta(x). \end{aligned}$$

onde os  $\varphi\varphi$ , os  $\psi\psi$  e os  $\theta\theta$  são polinómios inteiros. Aplicando-lhe a doutrina do n.º 279, obtemos um novo sistema com as variáveis separadas:

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{d}{dx} \right) \cdot u_1 &= \Delta u_1 \\ \Delta \left( \frac{d}{dx} \right) \cdot u_2 &= \Delta u_2 \\ \Delta \left( \frac{d}{dx} \right) \cdot u_3 &= \Delta u_3 \end{aligned} \tag{9}$$

onde  $\Delta \left( \frac{d}{dx} \right)$  é o determinante do sistema proposto.

A ordem destas equações é a ordem do sistema proposto.

297. Por vezes, o sistema (8) pode substituir-se por outro de ordem menos elevada, applicando-lhe a doutrina do n.º 282. Procurem-se, para tanto, as raízes da equação característica

$$\Delta (X) = 0$$

e seja  $a$  uma delas. Se os coeficientes de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  em alguma das equações (8) se anularem todos em  $a$ , elles admitem um factor comum da forma  $\left(\frac{d}{dx} - a\right)^n$  e começaremos pela sua eliminação em (8).

298. Se forem nulos todos os menores de 2.ª ordem de  $\Delta (a)$ , teremos, entre outras, as relações

$$\frac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)} = \frac{\varphi_2(a)}{\psi_2(a)} = \frac{\varphi_3(a)}{\psi_3(a)} = \alpha;$$

multiplicando a 1.ª das equações (8) por  $\alpha$  e subtraindo da 1.ª, obtem-se uma nova equação cujos coeficientes se anulam todos em  $a$ .

Esta equação tem coeficientes que admitem um factor comum que se eliminará. Substituindo a 1.ª ou a 2.ª das equações (8) por esta última, obtemos um novo sistema cujo determinante, no ponto  $a$ , não tem os elementos das duas 1.ªs linhas, proporcionais. E se porventura os tivesse, aplicaríamos o processo tantas vezes quantas fôsem precisas para chegar a um determinante em que tal não succedesse.

Como o grau da equação característica vai diminuindo sempre, acabaríamos por chegar a um resultado satisfatório ou por eliminar a raiz  $a$  do determinante do sistema.

299. Dam modo geral, supondo que é qualquer a ordem de  $\Delta (a)$ , se todos os menores de ordem  $i$  contidos em  $\Delta (a)$  fôsem nulos, podíamos substituir o sistema proposto por outro equivalente em que tal não succedesse. Por exemplo, multiplicando a 2.ª linha de  $\Delta (a)$  por  $\alpha$ ; a 3.ª por  $\beta$ , etc., a de ordem  $i$  por  $\lambda$  e somando estes produtos com a 1.ª linha, obtemos um determinante igual ao 1.º. Igualando a zero os elementos da 1.ª linha d'este determinante, obtemos um sistema de tantas equações quantas as unidades da ordem de  $\Delta (a)$ .

Como os menores de ordem  $i$  de  $\Delta(a)$  são todos nulos, por hipótese, estas equações em  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  são tódas compatíveis e haverá sempre valores de  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  que as satisfazem. Multiplicando pelos mesmos números  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ , as equações correspondentes de (8) e somando com a 1.<sup>a</sup>, obtemos uma nova equação cujos coeficientes se anulam todos em  $a$  e estão no caso de poderem ser simplificados.

Usando convenientemente dêste processo, podemos obter um novo sistema em que os menores de ordem  $i$  de um determinante não são todos nulos em  $a$ ; ou então eliminamos a raiz  $a$  da equação característica do sistema.

300. Conseqüentemente, podemos sempre substituir o sistema proposto por outro em que haja um menor de 1.<sup>a</sup> classe de  $\Delta(a)$  que seja diferente de zero.

301. Resolvido que seja êste último sistema, resolvido fica o proposto. Com efeito, cada factor da forma  $\left(\frac{d}{dx} - a\right)$  que se suprima numa das equações propostas ou noutras que delas derivem linearmente, abaixa de uma unidade o grau da equação característica do sistema a resolver, mas introduz ao mesmo tempo uma constante arbitrária no 2.<sup>o</sup> membro da equação resultante. Conseqüentemente o número de constantes arbitrárias da solução geral do sistema simplificado, é o mesmo que o das constantes arbitrárias do sistema como foi proposto. A solução geral do sistema simplificado é, pois, a solução geral do sistema proposto.

302. Suporemos sempre que os sistemas dados estão já simplificados.

303. Como se disse e mostrou (n.<sup>o</sup> 285), as soluções do sistema (8) satisfazem tódas a (9), mas a recíproca pode não ser verdadeira.

304. Cálculo duma solução particular. — O conhecimento duma solução particular de (8), permite-nos transformar êste sistema noutro sem segundos membros.

Há um caso bastante vulgar em que a investigação dêsse

integral particular se faz muito facilmente por meio do cálculo simbólico. Esse caso apresenta-se quando os segundos membros do sistema proposto são de forma  $\sum e^{\alpha x} P(x)$ , onde  $P(x)$  é um polinômio inteiro em  $x$  e o somatório se estende a um número finito de parcelas. Seja o sistema proposto

$$\varphi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \varphi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \varphi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 = \sum e^{\alpha x} \varphi(x)$$

$$\psi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \psi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \psi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 = \sum e^{\beta x} \psi(x) \quad (9')$$

$$\theta_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \theta_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \theta_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 = \sum e^{\gamma x} \theta(x)$$

É fácil de calcular neste caso, um valor de  $\Delta^{-1} \left( \frac{d}{dx} \right) \sum e^{\alpha x} \varphi(x)$ . Com efeito, pelo n.º 121, temos

$$\Delta^{-1} \left( \frac{d}{dx} \right) \sum e^{\alpha x} \varphi(x) = \sum e^{\alpha x} \Delta^{-1} \left( \alpha + \frac{d}{dx} \right) \varphi_1(x).$$

Se  $\alpha$  não for raiz da equação característica, desenvolvendo  $\Delta^{-1} \left( \alpha + \frac{d}{dx} \right)$  pela série de Taylor segundo as potências crescentes de  $\left( \frac{d}{dx} \right)$  obtemos uma série que aplicada ao polinômio  $\varphi(x)$ , dá um desenvolvimento finito.

305. Se  $\alpha$  for raiz da equação característica, ainda se pode desenvolver segundo as potências inteiras e crescentes de  $\left( \frac{d}{dx} \right)$ , mas com um número finito de termos de expoente negativo. Aplicando esse desenvolvimento a  $\varphi(x)$  ainda obtemos um resultado finito.

306. Calculando do mesmo modo  $\Delta^{-1} \left( \frac{d}{dx} \right) \sum e^{\beta x} \psi(x)$  e  $\Delta^{-1} \left( \frac{d}{dx} \right) \sum e^{\gamma x} \theta(x)$ , facilmente se obtém um integral particular aplicando a doutrina do n.º 288.

307. Exemplo. — *Calcular uma solução particular do sistema*

$$\frac{dx}{dt} + ry - qz = kp$$

$$\frac{dy}{dt} + pz - rx = kq$$

$$\frac{dz}{dt} + qx - py = kr$$

Pondo, para simplificar,  $\frac{d}{dx} = \rho$  e  $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ , o determinante do sistema é

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} \rho & r & -q \\ -r & \rho & p \\ q & -p & \rho \end{vmatrix} = \rho^3 + \omega^2 \rho.$$

Aplicando a este sistema a regra de Cramer, vem :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} a & r & -q \\ b & \rho & p \\ c & -p & \rho \end{vmatrix}}{\Delta(\rho)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \rho & p \\ -p & \rho \end{vmatrix} a + \begin{vmatrix} -p & \rho \\ r & -q \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} r & -q \\ \rho & p \end{vmatrix} c}{\Delta(\rho)} \\ &= \frac{(\rho^2 + p^2) a + (pq - r\rho) b + (pr + q\rho) c}{\Delta(\rho)} \end{aligned}$$

E, pelo n.º 288

$$u = (\rho^2 + p^2) \Delta^{-1}(\rho) a + (pq - r\rho) \Delta^{-1}(\rho) b + (pr + q\rho) \Delta^{-1}(\rho) c$$

Mas,

$$\Delta^{-1}(\rho) = \frac{1}{\rho^3 + \omega^2 \rho} = \frac{1}{\omega^2} \rho^{-1} - \frac{1}{\omega^4} \rho + \dots$$

Logo:

$$\Delta^{-1}(\rho) kp = \frac{kp}{\omega^2} t$$

e

$$\Delta^{-1}(\rho) kq = \frac{kq}{\omega^2} t$$

$$\Delta^{-1}(\rho) kr = \frac{kr}{\omega^2} t$$

E, do mesmo modo,

$$(p^2 + \rho^2) \Delta^{-1}(\rho) kp = kp \frac{p^2}{\omega^2} t$$

$$(pq - r\rho) \Delta^{-1}(\rho) kq = kp \frac{q^2}{\omega^2} t - k \frac{qr}{\omega^2}$$

$$(pr + q\rho) \Delta^{-1}(\rho) kr = kp \frac{r^2}{\omega^2} t + k \frac{qr}{\omega^2}$$

Logo:

$$x = kpt.$$

Do mesmo modo se acha

$$y = kqt \quad \text{e} \quad z = krt.$$

Os valores achados para  $x$ ,  $y$  e  $z$  constituem uma solução particular do sistema proposto, como facilmente se verifica.

#### Sistemas homogêneos

308. Todas as vezes que se pode determinar um integral particular dum sistema completo, a sua resolução fica reduzida à do sistema que se obtém suprimindo os segundos membros às equações do sistema dado. Como o número de constantes arbitrárias é o mesmo para os dois sistemas, como é sabido da Análise, calculado que seja o integral geral do sistema homogêneo, basta acrescentar-lhe o integral particular já conhecido, para obter o integral geral do sistema completo. Para resolver o sistema homogêneo procede-se do modo que passamos a expor.

309. Sistema homogénio. — Suponhamos então que sabemos calcular um sistema de integrais particulares de (9), o que nos permitirá reduzir o sistema proposto à forma

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \varphi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \varphi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= 0 \\ \psi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \psi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \psi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= 0 \\ \theta_1 \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 + \theta_2 \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 + \theta_3 \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

em que  $\Delta \left( \frac{d}{dx} \right)$  não tem raízes comuns pelo menos com um dos seus menores de 1.<sup>a</sup> classe.

310. A separação das variáveis dêste sistema, leva a esta outro

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{d}{dx} \right) u_1 &= 0 \\ \Delta \left( \frac{d}{dx} \right) u_2 &= 0 \\ \Delta \left( \frac{d}{dx} \right) u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

311. As expressões mais gerais de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  que satisfazem a (11) são dadas pela equação diferencial

$$\Delta \left( \frac{d}{dx} \right) u = 0 \quad (12)$$

e tem a mesma forma para  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ . Mas as soluções de (11), com tóda a sua generalidade, podem não satisfazer a (10) e de facto não satisfazem. Se fôr  $n$  o grau da equação característica

$$\Delta (X) = 0,$$

em  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , dados por (11), haverá ao todo  $3n$  constantes, que terão de ser limitadas pela condição destas funções satisfazerem a (10). Estas  $3n$  constantes podem exprimir-se em função

de  $n$  constantes arbitrárias, como é sabido da Análise, e vamos ver agora qual a forma dessas expressões.

**312. Caso duma raiz simples.** — Seja  $a$  uma raiz simples da equação característica, isto é, seja

$$\Delta(a) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta'(a) \neq 0.$$

Já sabemos que em  $\Delta(a)$  há um menor de 1.<sup>a</sup> classe que é diferente de zero. Suponhamos, para fixar ideias, que <sup>(1)</sup> é

$$\Phi_1(a) \neq 0.$$

A esta raiz corresponderá em (12) um valor de  $u$  da forma  $u = Ae^{ax}$ ; e para o sistema (11), as soluções

$$u_1 = A_1 e^{ax}; \quad u_2 = A_2 e^{ax}; \quad u_3 = A_3 e^{ax}. \quad (13)$$

Substituindo estes valores em (10), virá (pelo n.º 115):

$$\begin{aligned} A_1 \varphi_1(a) + A_2 \varphi_2(a) + A_3 \varphi_3(a) &= 0 \\ A_1 \psi_1(a) + A_2 \psi_2(a) + A_3 \psi_3(a) &= 0 \\ A_1 \theta_1(a) + A_2 \theta_2(a) + A_3 \theta_3(a) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Este sistema é compatível por ser nulo o seu determinante; e como

$$\Phi_1(a) = \begin{vmatrix} \psi_2(a) & \psi_3(a) \\ \theta_2(a) & \theta_3(a) \end{vmatrix} \neq 0,$$

segue-se que

$$\frac{A_1}{\Phi_1(a)} = \frac{A_2}{\Phi_2(a)} = \frac{A_3}{\Phi_3(a)} = \alpha, \quad (15)$$

sendo  $\alpha$  uma constante arbitrária. Logo: o sistema (10) ficará satisfeito pelas soluções (13), se  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , forem dados

---

(1) Representamos os complementos algébricos dos elementos de  $\Delta(a)$  pela letra grega maiúscula correspondente, como é costume.

por (15). Logo: as soluções de (10) correspondentes à raiz simples  $a$  da equação característica, são

$$u_1 = \alpha \Phi_1(a) e^{ax}; \quad u_2 = \alpha \Phi_2(a) e^{ax}; \quad u_3 = \alpha \Phi_3(a) e^{ax}, \quad (16)$$

sendo  $\alpha$  uma constante arbitrária.

**313. Raiz dupla.** — Se  $a$  fôr raiz dupla da equação característica, será  $u = e^{ax} (Ax + A')$  solução de (12) e

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{ax} (A_1 x + A'_1); & u_2 &= e^{ax} (A_2 x + A'_2); & (17) \\ u_3 &= e^{ax} (A_3 x + A'_3) \end{aligned}$$

serão soluções de (11). Substituindo estes valores na 1.<sup>a</sup> de (10), obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{d}{dx} \right) e^{ax} (A_1 x + A'_1) + \varphi_2 \left( \frac{d}{dx} \right) e^{ax} (A_2 x + A'_2) + \\ + \varphi_3 \left( \frac{d}{dx} \right) e^{ax} (A_3 x + A'_3) = 0; \end{aligned}$$

ou ainda (pelo n.º 121)

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left( a + \frac{d}{dx} \right) (A_1 x + A'_1) + \varphi_2 \left( a + \frac{d}{dx} \right) (A_2 x + A'_2) + \\ + \varphi_3 \left( a + \frac{d}{dx} \right) (A_3 x + A'_3) = 0. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left( a + \frac{d}{dx} \right) (A_1 x + A'_1) &= \left( \varphi_1(a) + \varphi_1'(a) \frac{d}{dx} + \dots \right) (A_1 x + A'_1) \\ &= A_1 \varphi_1(a) x + [A_1 \varphi_1'(a) + A'_1 \varphi_1(a)]. \end{aligned}$$

Substituindo este valor e os análogos na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[ \varphi_1(a) A_1 + \varphi_2(a) A_2 + \varphi_3(a) A_3 \right] x + \\ & + \left[ \varphi_1'(a) A_1 + \varphi_2'(a) A_2 + \varphi_3'(a) A_3 \right] + \\ & + \left[ \varphi_1(a) A'_1 + \varphi_2(a) A'_2 + \varphi_3(a) A'_3 \right] = 0. \end{aligned}$$

Para que esta equação seja identicamente satisfeita, é necessário e suficiente que seja

$$\varphi_1(a) A_1 + \varphi_2(a) A_2 + \varphi_3(a) A_3 = 0$$

e

$$\begin{aligned} & \left[ \varphi'_1(a) A_1 + \varphi'_2(a) A_2 + \varphi'_3(a) A_3 \right] + \\ & + \left[ \varphi_1(a) A'_1 + \varphi_2(a) A'_2 + \varphi_3(a) A'_3 \right] = 0. \end{aligned}$$

Tratando de modo igual a 2.<sup>a</sup> e a 3.<sup>a</sup> das equações (10), obtemos equações análogas a estas, e que completam dois sistemas distintos: um é idêntico ao sistema (14); o outro é o que segue:

$$\begin{aligned} & \varphi'_1(a) A_1 + \varphi'_2(a) A_2 + \varphi'_3(a) A_3 + \\ & + \varphi_1(a) A'_1 + \varphi_2(a) A'_2 + \varphi_3(a) A'_3 = 0 \\ & \psi'_1(a) A_1 + \psi'_2(a) A_2 + \psi'_3(a) A_3 + \quad (18) \\ & + \psi_1(a) A'_1 + \psi_2(a) A'_2 + \psi_3(a) A'_3 = 0 \\ & \theta'_1(a) A_1 + \theta'_2(a) A_2 + \theta'_3(a) A_3 + \\ & + \theta_1(a) A'_1 + \theta_2(a) A'_2 + \theta_3(a) A'_3 = 0 \end{aligned}$$

Se  $A_1, A_2$  e  $A_3, A'_1, A'_2$  e  $A'_3$  forem determinados de modo que fiquem satisfeitos os sistemas (14) e (18), os valores de  $u_1, u_2, u_3$  dados por (17), satisfarão o sistema proposto.

314. O sistema (14) dá para  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , os valores (15). Substituindo estes valores na 1.<sup>a</sup> equação (18), e notando que

$$\begin{aligned} & \varphi'_1(a) A_1 + \varphi'_2(a) A_2 + \varphi'_3(a) A_3 = \\ & = \alpha [\varphi'_1(a) \Phi_1(a) + \varphi'_2(a) \Phi_2(a) + \varphi'_3(a) \Phi_3(a)] \\ & = \alpha \Delta_{\varphi'} \end{aligned}$$

sendo

$$\Delta_{\varphi'} = \begin{vmatrix} \varphi'_1(a) & \varphi'_2(a) & \varphi'_3(a) \\ \psi_1(a) & \psi_2(a) & \psi_3(a) \\ \theta_1(a) & \theta_2(a) & \theta_3(a) \end{vmatrix}.$$

vem:

$$\varphi_1(a) A'_1 + \varphi_2(a) A'_2 + \varphi_3(a) A'_3 + \alpha \Delta_{\varphi'} = 0$$

Se representarmos por  $\Delta_{\psi'}$  e  $\Delta_{\theta'}$ , os determinantes que se obtem de  $\Delta_{\varphi'}$  substituindo respectivamente  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$  e  $\varphi'_3$ , por  $\psi'_1$ ,  $\psi'_2$ ,  $\psi'_3$  e por  $\theta'_1$ ,  $\theta'_2$ ,  $\theta'_3$ , do sistema (18) deduz-se o sistema

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) A'_1 + \varphi_2(a) A'_2 + \varphi_3(a) A'_3 + \alpha \Delta_{\varphi'} &= 0 \\ \psi_1(a) A'_1 + \psi_2(a) A'_2 + \psi_3(a) A'_3 + \alpha \Delta_{\psi'} &= 0 \\ \theta_1(a) A'_1 + \theta_2(a) A'_2 + \theta_3(a) A'_3 + \alpha \Delta_{\theta'} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

315. É fácil de ver que a característica da matriz do sistema (19) é 2. Com efeito, todos os determinantes de 3.<sup>a</sup> ordem nela contidos são nulos (sendo  $\Phi_1 \neq 0$  por hipótese).

Basta ver que

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\varphi'} & , & \varphi_2 & , & \varphi_3 \\ \Delta_{\psi'} & , & \psi_2 & , & \psi_3 \\ \Delta_{\theta'} & , & \theta_2 & , & \theta_3 \end{vmatrix} = (\psi_2 \theta_3 - \psi_3 \theta_2) \Delta_{\varphi'} + (\varphi_3 \theta_2 - \varphi_2 \theta_3) \Delta_{\psi'} + (\varphi_2 \psi_3 - \varphi_3 \psi_2) \Delta_{\theta'} = \Phi_1(a) \cdot \Delta'(a) - \Phi_1'(a) \cdot \Delta(a) = 0,$$

por  $a$  ser raiz dupla, por hipótese, da equação  $\Delta(a) = 0$ .

316. Conseqüentemente, das equações (19) só duas são distintas, o que reduz a duas as constantes arbitrárias. As constantes  $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$  podem exprimir-se em função de  $\alpha$  e de outra constante arbitrária  $\alpha'$  pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \alpha \Phi'_1(a) + \alpha' \Phi_1(a) \\ A'_2 &= \alpha \Phi'_2(a) + \alpha' \Phi_2(a) \\ A'_3 &= \alpha \Phi'_3(a) + \alpha' \Phi_3(a) \end{aligned} \quad (20)$$

sendo  $\Phi'_1(a)$ ,  $\Phi'_2(a)$  e  $\Phi'_3(a)$  as derivadas em ordem a  $a$  de  $\Phi_1(a)$ ,  $\Phi_2(a)$  e  $\Phi_3(a)$ , respectivamente.

Com efeito, é manifesto que estes valores (20) de  $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$  satisfazem a (19) se fizermos  $\alpha = 0$ . Basta, portanto, verificar as soluções para  $\alpha' = 0$  e  $\alpha \neq 0$ . Neste caso, substituindo em (19) e suprimindo o factor comum  $\alpha$  vem:

$$\begin{aligned} & \varphi_1 \Phi'_1 + \varphi_2 \Phi'_2 + \varphi_3 \Phi'_3 + \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} = \\ & = \varphi_1 \Phi'_1 + \varphi_2 \Phi'_2 + \varphi_3 \Phi'_3 + \varphi'_1 \Phi_1 + \varphi'_2 \Phi_2 + \varphi'_3 \Phi_3 = \\ & = \frac{d}{dx} (\varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_2 + \varphi_3 \Phi_3) = \Delta'(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

o que mostra que a 1.<sup>a</sup> das equações (19) é satisfeita. Fazendo igual substituição na 2.<sup>a</sup> de (19) vem:

$$\begin{aligned} & \psi_1 \Phi'_1 + \psi_2 \Phi'_2 + \psi_3 \Phi'_3 + \begin{vmatrix} \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix} = \\ & = \frac{d}{dx} (\psi_1 \Phi_1 + \psi_2 \Phi_2 + \psi_3 \Phi_3) = 0. \end{aligned}$$

E do mesmo modo se vê que se verifica também a 3.<sup>a</sup> equação, como é evidente.

Estão, pois, justificadas as fórmulas (20)

A raiz dupla  $a$  gera para o sistema proposto a solução

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{\alpha x} [\Phi_1(a)(\alpha x + \alpha') + \alpha \Phi'_1(a)] \\ u_2 &= e^{\alpha x} [\Phi_2(a)(\alpha x + \alpha') + \alpha \Phi'_2(a)] \\ u_3 &= e^{\alpha x} [\Phi_3(a)(\alpha x + \alpha') + \alpha \Phi'_3(a)] \end{aligned}$$

317. Generalizemos as fórmulas (20) para um sistema de qualquer número de equações e para uma raiz  $a$  de qualquer grau de multiplicidade. Para tanto note-se que os cálculos que nos levaram às fórmulas (20) se aplicam a um sistema de qual-

quer número de equações. Supondo que as equações são  $n$ , as equações (20) serão também  $n$  e teremos, dum modo geral,

$$A'_i = \alpha \Phi'_i(a) + \alpha' \Phi_i(a). \quad (21)$$

Note-se também que o 2.º membro de (21) tem a forma da derivada do produto  $\alpha \Phi_i(a)$  onde  $\alpha$  se supuzesse função de  $a$ . Conseqüentemente, podemos escrever simbòlicamente:

$$A'_i = D [\alpha \Phi_i(a)] \quad (22)$$

entendendo-se que  $D\alpha$  significa uma constante diferente de  $\alpha$ . É debaixo desta forma que vamos generalizar equações (20).

**318. Lema.** — Se convencionarmos representar simbòlicamente as constantes  $A, A', A'', \dots A^{(i)}, \dots$  por

$$D^0 A, D A, D^2 A, \dots D^i A \dots$$

tomando a *plica* como se fôsse um sinal de derivação, um polinómio qualquer de grau  $k$  pode representar-se simbòlicamente por

$$(x + D)^k A. \quad (23)$$

Com estas notações, vamos demonstrar que

$$\varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x + D)^k A = (x + D)^k [\varphi(a) \cdot A] \quad (23')$$

representando  $D^0 \varphi, D \varphi, D_2 \varphi, \dots$  os valores  $\varphi(a), \varphi'(a), \varphi''(a), \dots$

Com efeito, pelo n.º 121,

$$\varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) = e^{\frac{d}{dx}} \cdot \frac{d}{da} \varphi(a); \quad (24)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} (x + D)^k A &= \sum \binom{k}{h} x^h D^{k-h} A \\ &= \sum \binom{k}{h} x^h A^{(k-h)} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x + D)^k A &= \sum \binom{k}{h} \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) x^h D^{k-h} A \\
 &= \sum \binom{k}{h} \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) x^h A^{(k-h)} \\
 &= \sum \binom{k}{h} A^{(k-h)} \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) x^h \\
 &= \sum \binom{k}{h} A^{(k-h)} e^{\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{da}} \varphi(a) x^h \\
 &= \sum \binom{k}{h} A^{(k-h)} e^{\frac{d}{da} \cdot \frac{d}{dx}} x^h \varphi(a)
 \end{aligned}$$

pelo n.º 121,

$$\begin{aligned}
 &= \sum \binom{k}{h} A^{(k-h)} \left( x + \frac{d}{da} \right)^h \varphi(a) \\
 &= \left[ \sum \binom{k}{h} A^{(k-h)} \left( x + \frac{d}{da} \right)^h \right] \varphi(a) \\
 &= \left[ \sum \binom{k}{h} \left( x + \frac{d}{da} \right)^h D_1^{k-h} A \right] \varphi(a)
 \end{aligned}$$

representando por  $D_1$  um novo operador que só actua sobre  $A$  e de tal modo que

$$D_1^{k-h} A = A^{(k-h)}.$$

Nesta última expressão entram dois operadores:  $D_1$  que só actua sobre  $A$ ;  $\frac{d}{da}$  que só actua sobre  $\varphi(a)$ .

Podemos, pois, escrever:

$$\begin{aligned}
 \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x + D)^k A &= \left[ \sum \binom{k}{h} \left( x + \frac{d}{da} \right)^h D_1^{k-h} \right] [A \cdot \varphi(a)] \\
 &= \left( x + \frac{d}{da} + D_1 \right)^k [A \varphi(a)]
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d}{da} + D_1 \right) [A \varphi(a)] &= \frac{d}{da} [A \varphi(a)] + D_1 [A \varphi(a)] \\
 &= A \varphi'(a) + A' \varphi(a).
 \end{aligned}$$

Logo: representando por  $D$  a derivada simbólica do produto  $A \cdot \varphi(a)$  podemos escrever

$$\frac{d}{da} + D_1 = D$$

e, conseqüentemente:

$$\varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x + D)^k A = (x + D)^k [A \varphi(a)], \quad (25)$$

c. d. d.

NOTA: É evidente que (25) é verdadeira, quer  $A, A', A'' \dots$  sejam constantes, quer  $A$  seja função de  $a$  e  $A', A'' \dots$  as suas derivadas sucessivas.

319. A (25) pode, pois, dar-se a forma

$$\varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) \left( x + \frac{d}{da} \right)^k \psi(a) = \left( x + \frac{d}{da} \right)^k [\varphi(a) \psi(a)] \quad (26)$$

Esta identidade pode generalizar-se dando origem ao seguinte

320. Teorema. — Se  $F(x)$  fôr uma função de  $x$  da forma

$$F(x) = \sum B_k x^k,$$

verifica-se a seguinte identidade:

$$\varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) F \left( x + \frac{d}{da} \right) \psi(a) = F \left( x + \frac{d}{dx} \right) [\varphi(a) \psi(a)] \quad (27)$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) F \left( x + \frac{d}{da} \right) \psi(a) &= \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) \sum B_k \left( x + \frac{d}{da} \right)^k \psi(a) \\ &= \sum B_k \varphi \left( a + \frac{d}{dx} \right) \left( x + \frac{d}{da} \right)^k \psi(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum B_k \left(x + \frac{d}{da}\right)^k [\varphi(a) \psi(a)] \\
&= \left[ \sum B_k \left(x + \frac{d}{da}\right)^k \right] [\varphi(a) \psi(a)] \\
&= F \left(x + \frac{d}{da}\right) [\varphi(a) \psi(a)],
\end{aligned}$$

c. d. d.

321. É claro que daquela identidade ainda se tira esta :

$$\varphi \left(a + \frac{d}{dx}\right) F \left(x + \frac{d}{da}\right) \psi(a) = \psi \left(a + \frac{d}{dx}\right) F \left(x + \frac{d}{da}\right) \varphi(a) \quad (28)$$

322. Corolário : — Se  $\varphi(a)$  fôr constante, de (28) resulta que

$$F \left(x + \frac{d}{da}\right) \psi(a) = \psi \left(a + \frac{d}{dx}\right) F(x) \quad (29)$$

323. Entremos agora na generalização das fórmulas (22) para o caso duma raiz  $a$  de multiplicidade  $k$ . Uma raiz nestas condições dá para a equação (12) uma solução da forma

$$u = e^{ax} P_{k-1}(x),$$

onde  $P_{k-1}(x)$  é um polinómio em  $x$  de grau  $k-1$  e de coeficientes arbitrários. Ora, a êste polinómio pode dar-se a forma simbólica (23)  $P_{k-1}(x) = (x + D)^{k-1} A$  e podemos, portanto, escrever

$$u = e^{ax} (x + D)^{k-1} A. \quad (30)$$

As soluções do sistema (11) serão da forma

$$u_i = e^{ax} (x + D)^{k-1} A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Para que estas soluções satisfaçam ao sistema proposto, basta que as constantes  $A_i, A'_i, A''_i \dots$  satisfaçam aos sistemas que se obtêm substituindo nele as funções desconhecidas por estes valores.

Supondo que as equações propostas são  $n$ , para maior generalidade, podemos dar-lhes a forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i \left( \frac{d}{dx} \right) u_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \psi_i \left( \frac{d}{dx} \right) u_i &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \frac{d}{dx} \right) u_i &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Substituindo  $u_i$  pela sua expressão, vem:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \left( \frac{d}{dx} \right) e^{ax} (x+D)^{k-1} A_i = e^{ax} \sum_{i=1}^n \varphi_i \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x+D)^{k-1} A_i = 0$$

Logo: da 1.<sup>a</sup> de (31), deduz-se

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x+D)^{k-1} A_i = 0.$$

Mas, por 319,

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \left( a + \frac{d}{dx} \right) (x+D)^{k-1} A_i = (x+D)^{k-1} \sum_{i=1}^n \varphi_i (a) A_i.$$

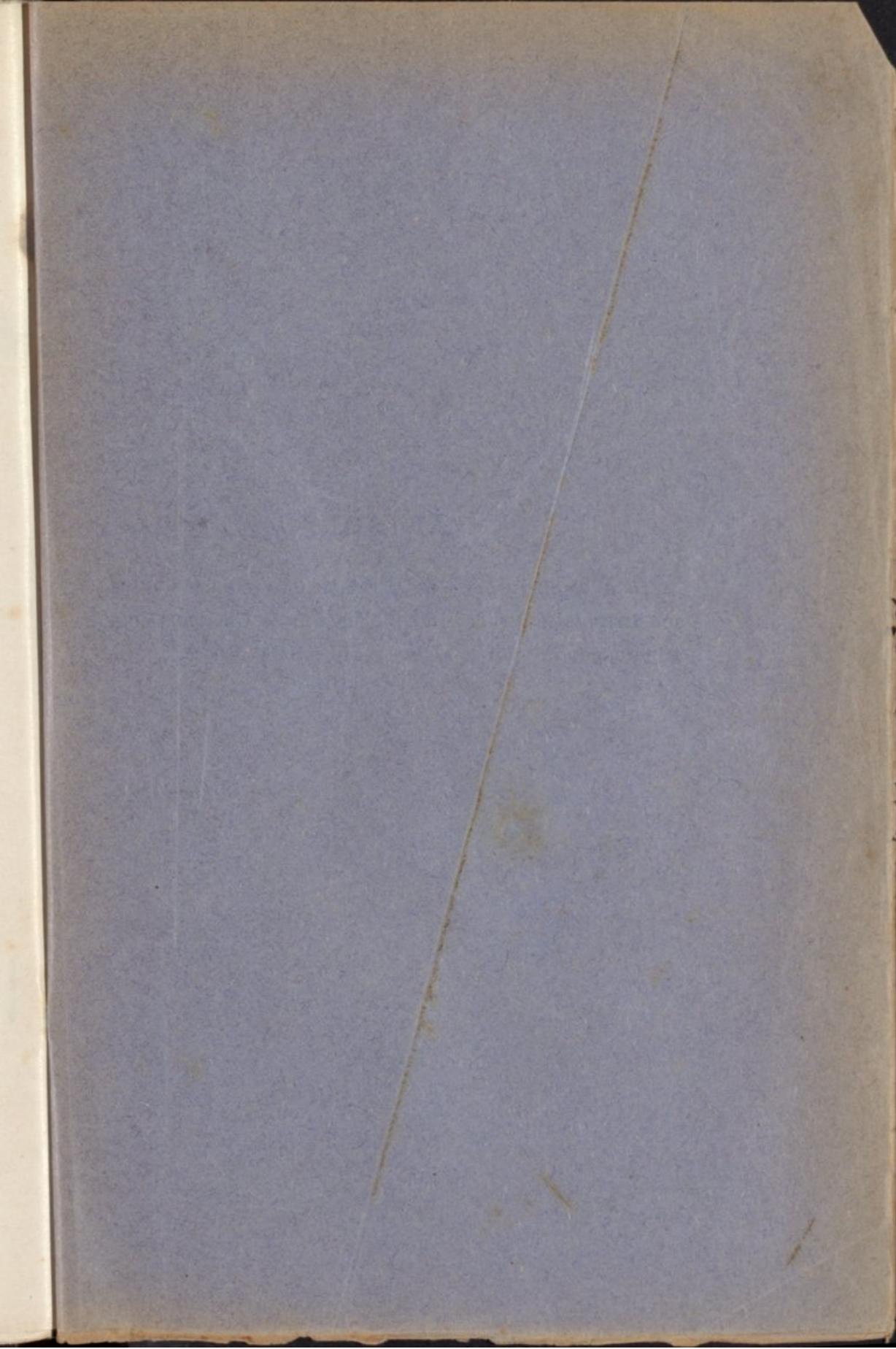
Logo:

$$(x+D)^{k-1} \sum_{i=1}^n \varphi_i (a) A_i = 0$$

qualquer que seja  $x$ . Mas, para que tal suceda, é necessário que seja

$$\begin{aligned} \sum \varphi_i (a) A_i &= 0 \\ D \sum \varphi_i (a) A_i &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ D^{k-1} \sum \varphi_i (a) A_i &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

*Continua.*



## AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.