

336  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

---

# REVISTA

DA

# FACULDADE DE CIÊNCIAS

---

VOL. V — N.º 2



A  
9  
13

COIMBRA  
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA

1935



1821

MEMORIAL OF THE GENERAL

## Relatório da Quinta Assembleia Geral

da

União Geodésica e Geofísica Internacional, reunida em Lisboa de 17 a 25 de Setembro de 1933, exposto na Sociedade de Geografia de Lisboa, pelo Presidente da Secção Nacional, F. M. da Costa Lobo

EX.<sup>mo</sup> SR. PRESIDENTE !

MINHAS SENHORAS E MEUS SENHORES !

Profundamente sensível à honra que me dá presidindo a esta sessão Sua Excelência o Sr. Ministro da Instrução Pública, Professor Alexandre de Sousa Pinto, aqui lhe testemunho os meus profundos sentimentos de admiração, que de muito longe vem, e a minha gratidão. Também desejo testemunhar já o meu constante reconhecimento à Sociedade de Geografia pela generosidade com que permite que eu use da palavra nas suas salas habituadas a brilhantes sessões que ao nosso país dão o maior prestígio.

SENHOR PRESIDENTE !

Sustadas as operações da Grande Guerra, que, infelizmente, continúa em estado latente, com variados aspectos, a cooperação científica organizou-se em novas bases, e para as Matemáticas, Astronomia, Geodesia e Geofísica, foi montado um sólido e vasto organismo que teve por cúpula o *Conselho Internacional de Investigações*, posteriormente designado « *Conselho Internacional das Uniões Científicas* » chamado a reunir brevemente, composto pelas três Uniões, *Matemática, Astronómica, Geodésica e Geofi-*

sica. Esta última mais vasta, não pela natureza do assunto, mas pela possibilidade de poderem ser objecto de mais directo estudo os variados capítulos de que se ocupa, ficou a princípio composta por sete secções, ultimamente transformadas em Associações, que gozam de uma considerável autonomia, o que lhes facilita a acção, conservando-se em todo o caso subordinados os seus trabalhos à coordenação que lhe é determinada pela sua agremiação na União Geodésica e Geofísica. As associações a que venho de fazer referência são as seguintes: — *Geodesia, Sismologia, Meteorologia, Magnetismo, Electricidade terrestre, Oceanografia física, Vulcanologia e Hidrologia científica.*

A primeira assemblea geral desta União teve lugar em Roma em 1922, conjuntamente com a Assembleia Geral da União Astronómica, dois anos depois de ter tido lugar em Strasburgo, em 1920, a primeira Assembléa Geral da União Internacional de Matemática, a qual debaixo da presidência do sábio Secretário perpétuo da Academia das Ciências de Paris, Mr. Emile Picard, teve brilhante successo, facto que igualmente tem sido marcado pelas Assembleas Gerais da União Internacional Geodésica e Geofísica, debaixo da direcção do sábio geodesista Mr. Ch. Lallemand, que presidiu a sucessivas reuniões que teem tido lugar em Roma, 1922; Madrid, 1924; Praga, 1927; Stockolmo, 1930; e finalmente em Lisboa no ano findo de 1933.

Em todas tenho tido a honra de tomar parte, excepto nas de Roma, por motivo infelizmente justificado: — em Madrid, em companhia do Ilustre director do Instituto Geofísico, Coronel Mimoso Guerra e Ex.<sup>mo</sup> Professor Santos Andréa; em Praga, do Ex.<sup>mo</sup> Professor Ferraz de Carvalho; e em Stockolmo, do Ex.<sup>mo</sup> Professor Machado e Costa, e com satisfação posso assegurar que em todas aquelas reuniões tiveram os delegados de Portugal uma activa intervenção tendo feito, na Assembléa de Madrid, o nosso colega Coronel Mimoso Guerra o relatório sôbre os trabalhos geodésicos realizados em Portugal, encargo de que me desempenhei nas reuniões de Praga e Stockolmo, e que finalmente foi retomado por este distinto homem de ciência na assemblea geral ultimamente realizada em Lisboa, à qual apresentou uma extensa e admirável memória que dá conta, com proficiência e brilho, da actividade do nosso país neste ramo científico, que tantos cuidados tem merecido, e onde tão notáveis trabalhos tem sido realizados com intervenção de professores e de officiais de

mar e terra, numa intensa e pródica cooperação que data sobretudo dos meados do século XIX, como foi acentuado, pela mais distinta forma, pelo nosso Ex.<sup>mo</sup> Presidente, S. Ex.<sup>a</sup> o Ministro da Instrução Pública, no admirável discurso que pronunciou na sessão inaugural da 5.<sup>a</sup> Assembleia Geral, a que me estou referindo, e que teve lugar na nossa capital em Setembro último com tal successo que de todos os lados, e dos mais remotos países, nos chegam generosas apreciações, destacando o entusiasmo e cordialidade manifestados pelo sábio Presidente Ch. Lallemand, os termos do relatório oficial feito pelo illustre secretário geral da União, Brigadeiro Winterbotham, director dos serviços geodésicos em Inglaterra. O sábio geodesista General Perrier, alma da associação geodésica, refere-se também no relatório oficial que já publicou largamente, e com expressões cativantes, ao nosso país. Dele destacarei alguns períodos, que demonstram esta asserção, e servem também para a história deste Congresso.

« Le Comité national portugais de géodésie et de géophysique ne fait qu'un avec le Comité national de Astronomie. Il a pour Président le Professeur F. da Costa Lobo, Directeur de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Coimbra, et pour Secrétaire général, depuis la mort recente du Commandant Nunes Ribeiro, Directeur des Services de Télégraphie sans fil du Portugal, le Capitaine Oom, fils du regretté Directeur de l'Observatoire de Tapada. Il comprend, entre autres personnalités, le Colonel Mimoso Guerra, Directeur de l'Institut géographique et Cadastral de Lisbonne. Ces trois personnes ont déployé, pour assurer l'organisation matérielle de l'assemblée générale ainsi que les plaisirs et distractions de toute nature offerts à ses membres, une somme d'efforts méritant toute la reconnaissance des Délégués et Invités et des membres de leurs Familles les ayant accompagnés. M. da Costa Lobo, présent partout et s'imposant un vrai surmenage, semblait avoir le don d'ubiquité; c'est à ses démarches répétées auprès des pouvoirs publics que l'assemblée générale doit pour une bonne part, son heureuse réussite.

Dans ce beau pays du Portugal, pendant une saison de l'année où le climat est plus particulièrement agréable, l'utile (travaux, visites d'Établissements scientifiques etc.) et l'agréable (banquets, receptions, excursions, etc.) ont tenu sans cesse en

habit ceux des Membres de l'Assemblée qui étaient desirieux d'être présents partout. Il était heureusement loisible aux autres de faire leur choix.

Rapellons la séance solennelle d'ouverture au Palais du Congrès; la visite de l'Institut Géographique et Cadastral, celle de l'Exposition Cartographique de la Société de Géographie; les réceptions par la municipalité de Lisbonne, le Ministre de l'Instruction Publique, le Président de la République; l'excursion à Cintra, le concert, la garden-party, et le banquet d'Estoril, la promenade en bateau sur le Tage, le banquet offert par l'Université de Coimbra, l'excursion finale à Bussaco, Curia, aux vignobles de la vallée du Douro (Raposeira, Lamego, Régoa), les visites et réceptions à Porto, d'où les membres de l'assemblée ont pris le chemin du retour ».

Logo no princípio do seu relatório nos dá o ilustre general Perrier informações muito interessantes que será oportuno registar aqui.

« La séance solennelle d'ouverture de l'assemblée (tenue dans le Palais du Parlement) n'a eu lieu que le 17, mais l'Association de Géodesie dont l'ordre du jour est toujours le plus chargé, a, suivant un habitude prise dès l'assemblée de Madrid en 1924, commencé ses travaux dès le 14. La séance de clôture n'a eu lieu que le lundi 25, mais pas à Lisbonne, à Coimbra, dans le cadre original de la grande salle de l'antique Université.

M. Deslandres, empêché de se rendre au Portugal, n'a pu recevoir à Coimbra, comme il était prévu, les insignes de Docteur « honoris causa » de l'Université. Mais le Président sortant de l'Union, M. Lallemand, qui ne pouvait pas être relu aux termes des nouveaux statuts et d'ailleurs desirait se retirer après avoir pendant 14 ans conduit les destinées de l'Union depuis son origine, a été l'occasion de touchantes marques de sympathie: le Président du comité national d'astronomie et de géodésie — géophysique portugais, le Professeur F. da Costa Lobo, Directeur de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Coimbra, et le Doyen des géodesiens présents, sir Gerald Lenox — Conyngham, ont exprimé, en termes élevés, la reconnaissance que l'Union doit à son premier Président, tandis qu'une adresse à M. Lallemand était couverte des signatures de toutes les personnes présentes, Délégués, Invités et Professeurs de l'Université de Coimbra ».

Eis o texto da moção que tive a honra de proferir e entusiasticamente foi aprovada por aclamação :

« Les membres de l'Union Géodésique et Geophysique Internationale, auxquels s'ajoutent des professeurs de l'Université de Coimbra qu'ont pris part à la reception faite par cette Université en honneur des Illustres Membres de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale, sont heureux de témoigner dans ce moment solennel à l'Illustre Président et éminent savant, Mr. Charles Lallemand, qui, présidant 14 ans, a conduit avec inexcédible zèle et avec la plus grande distinction cette renommée corporation scientifique, leur profonde sympathie, et leurs sentiments d'admiration pour ses hautes qualités d'homme et de savant ».

Faz o general Perrier referência à falta do sábio astrónomo director honorário do Observatório de Paris, Mr. H. Deslandres, facto que para mim, e para a Universidade de Coimbra, foi particularmente sensível, tanto empenho havia em testemunhar-lhe a admiração que temos pela sua obra científica e reconhecimento que sentimos pelo seu generoso apoio. Infelizmente circunstâncias de força maior inibiram-nos de ter esse prazer, mas aqui registarei alguns períodos da carta que então me endereçou, e que acrescentou mais tarde com entusiásticas manifestações pelo successo do nosso Congresso :

« Je suis très sensible à vos aimables lettres, aux multiples invitations que vous m'avez adressées depuis plusieurs années, et j'aurais été très heureux de voir, sous votre direction ce beau pays qui est le votre, si riche en œuvres d'art, en souvenirs glorieux et pavoisé d'un beau ciel et d'une terre vraiment féconde. Enfin j'étais très attiré par les grandes questions de la géophysique et par les belles fêtes que vous avez si largement préparées.

.....  
« A mon très grand regret je prends la decision de rester en France, et je vous adresse mes très vives félicitations pour la belle organisation préparée par vous à l'occasion du Congrès, et mes souhaits pour une réussite complete. »

Mais faltas tivemos a lamentar, algumas irremediáveis como sejam do antigo vice-presidente da Associação de Geodesia, Raoul Gauthier, do General Ferrié e do General Vachelli, outras determinadas por circunstâncias ocasionais como as do sábio director

do Observatório de Paris, Mr. Esclanjon, do antigo director do Observatório de Greenwich, sir Franck Dyson, e do sábio director dos serviços geodésicos dos Estados Unidos da América, a quem, conjuntamente com Hayford, se deve o grande impulso que à Geodesia tem sido dado numa nova orientação, e que dedicadamente e com superior competência, tem desde o seu início acompanhado os trabalhos da União, exercendo as elevadas funções de presidente da Associação Geodésica, que deixou agora para ficar à frente da União Geodésica e Geofísica como seu prestigioso presidente. Sòmente à última hora verificou Mr. Bowie ser-lhe impossível acompanhar-nos nesta ocasião, e como fácil será reconhecer, convirá também deixar registadas as razões de alta importância que nos transmite, e que são muito para meditar :

«O Presidente dos Estados Unidos destinou 2.600.000 dolares dos fundos de emergência ao *Coast and Geodetic Survey* para trabalhos geodésicos fazendo também face por êste modo à crise do desemprego.

Dessa importância gastar-se-ão 1.050.000 dolares em trabalhos geodésicos, sob a superintendência dêste serviço durante o ano económico corrente. Além desta quantia temos mais a de 300.000 dolares, de outros fundos, também para trabalhos geodésicos. A quantia total, portanto, a dispender pela secção de geodesia dos nossos serviços, até 30 de Junho de 1934, é de 1.362.000 dolares.

«Isto é realmente uma soma importante e sinto que o problema de organização das brigadas, compra de instrumentos, equipamento etc., é indispensável e requiere a minha atenção em Washington. Se a reunião em Lisboa tivesse lugar dois ou três meses mais tarde, eu poderia ir, porque nessa ocasião já tudo estaria iniciado, e o pessoal poderia então trabalhar sem a minha presença. Embora sinta que a minha presença em Lisboa seria porventura de algum valor para a Geodesia creio bem que a ciência geodésica tirará muito maior lucro da minha presença no meu posto neste momento.

«Tenho esperança que o exemplo dado pelo meu governo, ao reconhecer os trabalhos geodésicos como uma parte do seu programa de grandes obras de interesse público, atribuindo-lhes uma importância considerável, económica e científica, servirá de estímulo aos governos de outros países. Eu desejaria que os trabalhos da triangulação e nivelamento fòssem generalizados a



todas as regiões do globo e estou certo de que os benefícios que daí viriam haviam de compensar de sobra o seu custo. Desejaria ainda ver mais trabalhos effectuados em gravimetria, medidas astronómicas do desvio da vertical, etc.»

Muitas teem também sido, e sempre extremamente elogiosas, as notícias publicadas em revistas sôbre êste Congresso. Limitar-me-ei a fazer referência ao largo estudo que lhe foi dedicado no *Geographical Journal* por Mr. A. H. Hinks, que já tinha visitado anteriormente o nosso país, e que representou no Congresso a *Royal Geographical Society*. Eis o primeiro parágrafo dêste notável trabalho.

«A V assembleia geral da União Internacional de Geodesia e Geofísica teve lugar em Lisboa desde 14 a 23 de setembro no Palácio do Congresso, com um tempo admirável. Á espontânea hospitalidade dos portugueses para com os seus hóspedes só poderia ser apontada a crítica de excessiva, sempre com distintas manifestações, sobretudo num período de crise geral. O presidente da União, Mr. Lallemand, manteve até ao fim do exercício da sua alta situação a mais delicada distinção, demonstrando sempre as qualidades de um incomparável presidente.

O Presidente da República honrou a União presidindo à sua primeira sessão plenária, e recebendo no último dia os delegados no seu palácio de Belem. O ministro da Instrução Pública, a municipalidade de Lisboa, os ministros do Comércio e da Marinha, o director do Instituto Geográfico a Sociedade de Geografia, e a Sociedade do Estoril, bem como o *Comité* Nacional português, honram-nos com a mais esplêndida hospitalidade, e o presidente dêste *Comité*, Professor Costa Lobo, que tudo inspirou, conduziu ainda esta assembleia à Universidade de Coimbra, como prelúdio das excursões que se seguiram ao encerramento do Congresso. Grande pesar experimentaram os delegados britânicos que não puderam aproveitar o convite para irem a Coimbra, e seguir na visita que foi feita às belas regiões do Douro»

Ex.<sup>mo</sup> Sr. Presidente: recordadas algumas de tantas manifestações de alto apreço que em países estrangeiros são testemunhadas ao nosso país a propósito da última assembleia geral da União Internacional Geodésica e Geofísica, eu desejo paten-tear já que devemos profundo reconhecimento ao distinto apoio de Sua Excelência o Presidente da República e do Govêrno,

da Câmara Municipal de Lisboa, da Sociedade de Geografia, das Universidades de Coimbra, Lisboa e Porto, do Conselho Nacional do Turismo, da Imprensa, das direcções das Companhias de Caminhos de Ferro, e de outras entidades como sejam a Sociedade da Costa do Sul, a Casa do Douro, a Sociedade das Caves da Raposeira, e do pessoal do palácio do Congresso; mas, especialmente, eu quero consignar quanto é para apreciar a forma como V. Ex.<sup>a</sup> compreendeu a sua alta responsabilidade e cumpriu a sua missão como chefe prestigioso da intelectualidade portuguesa, num momento em que Portugal era honrado com um Congresso composto exclusivamente de Delegados e convidados de 37 países civilizados que compreendiam sábios dos mais eminentes nas complexas e difíceis ciências da Geodesia e Geofísica. Pela minha parte gostosamente cumprio também o dever de consignar quanto foi valioso o apoio de sua Ex.<sup>a</sup> o Ministro do Comércio que prestigiou várias das nossas reuniões com a sua presença, honrando nos com a sua palavra na recepção de Sintra.

Mas, antes de prosseguir. é também do meu dever registar com grande satisfação o ambiente de franca cordealidade em que decorreu este congresso, e o muito que se deve à dedicada colaboração de todos os elementos da secção nacional que nêlo tomaram parte e logo da direcção, além dos meus Ex.<sup>mos</sup> Colegas mencionados pelo General Perrier, recorro o Ilustre Director do Observatório Nacional da Tapada, Manuel Peres, o Director da Faculdade de Ciências de Lisboa, Vítor Hugo de Lemos, activos elementos, e o Almirante Gago Coutinho; o Professor Eduardo Andréa e Comandante Pires da Rocha que nos deram o prestígio do seu nome, tendo a lamentar a ausência do Comandante Baeta Neves. Com a maior consideração e gratos sentimentos pela sua valiosíssima coadjvação registarei também os distintos elementos que pela sua actividade e alta inteligência muito contribuíram para o successo dos trabalhos das Associações, recordando especialmente o pesado encargo e profícua intervenção que na Comissão dos Estatutos teve o nosso Ex.<sup>mo</sup> Colega Prof. V. H. de Lemos.

Na Associação de Geodesia tivemos o General Norton de Matos, Comandante Azevedo Coutinho, General Sanches de Castro, Coronel M. J. da Silva, Coronel Cunha Belem, Tenente Coronel Pais Clemente, Major J. F. da Silva, Prof. Pereira

Gonçalves, Comandante Vieira da Rocha, Prof. Pereira Dias, Dr. Gumersindo Sarmiento, Dr. C. F. de Carvalho, Prof. António Barreiros.

Na Associação de Vulcanologia — Professores Machado e Costa, Reis Portugal, Custódio de Moraes, Rosas da Silva, Tenente Coronel José Agostinho, Professor Mário de Jesus.

Na Associação de Meteorologia — Secção de Dinâmica, Professor Rodrigues Machado, Comandante Freitas Morna, Dr. Oscar Saturnino Ribeiro, Comandante Carvalho Brandão, Dr. Norberto Guimarães, Dr. Gumersindo Sarmiento.

Secção Climatológica — Professor Cirillo Soares, Comandante Frazão, Dr. Alvaro Pádua, Professor Ferraz de Carvalho, Tenente Coronel José Agostinho.

Na Associação de Sismologia, Professor Ferraz de Carvalho, Tenente Coronel José Agostinho, Raul de Miranda, Professor Cirillo Soares, Dr. Oscar Saturnino, Professor F. M. da Costa Lobo.

Na Associação de Magnetismo e Electricidade Terrestre — Almirante Ramos da Costa, Artur Dias Pratas, Professor Ferraz de Carvalho, dr. Gumersindo Sarmiento.

Na Associação de Oceanografia — Capitão de Mar e Guerra J. Wils de Araujo, dr. Alfredo de Magalhães Ramalho.

Na Associação de Hidrologia Científica — Capitão de Mar e Guerra J. Wils de Araujo, dr. Armando Narciso.

Meus Senhores. Em seguida ao Congresso realizado em Madrid em 1924 fez o meu ilustre colega Mimoso Guerra, nesta mesma sala, um admirável relatório sob os trabalhos geodésicos que ali tiveram lugar, entre os quais avultou, após larga discussão, a fixação de dimensões da Terra considerada um elipsoide de revolução, semieixo maior 6378,388 km, semieixo menor 6356,912 km, que marcam para o achatamento o valor de  $\frac{1}{297}$ , quando Helmert tinha proposto  $\frac{1}{298,25}$ . Em seguida aos Congressos de Praga e Stokolmo, 1927 e 1930, aos quais aquele meu ilustre colega não assistiu, desempenhei-me de seu encargo, o que ainda voltarei a fazer relativamente à 5.ª Assembleia Geral de Lisboa, de 1933, na qual o coronel Mimoso Guerra apresentou à Associação de Geodesia, como já notei, um vasto e valioso relatório, ocupando-me agora de uma maneira rápida dos trabalhos realizados nas sete Associações da União.

Mas antes de fazer uma rápida exposição dos principais trabalhos efectuados, farei uma sumária referência a alguns dos assuntos que neste momento principalmente preocupam este departamento científico, e desta vez não tanto para dar conta de doutrinas assentes o que, é certo, mais apraz ao meu espírito optimista, mas de preferência para evitar dúvidas e despertar precauções tomando para exemplo aquele admirável discurso pronunciado por Lord Salisbury, quando, ao mesmo tempo chanceler da Universidade de Oxford e Presidente da *British Association*, que congregou ao fim de cerca de um século de divergência, no discurso inaugural do Congresso daquela associação, no qual especialmente pôs em relêvo as contradições em que incorriam célebres doutrinas, *com curso legal*, como fôsem entre outras, a teoria sobre as espécies de Darwin, e a teoria sobre o éter, de resultados maravilhosos, imaginada por Fresnel, e hoje tanto em decadência.

Mas para começar a referir já algumas dessas dificuldades em que tropeça a explicação dos fenómenos, é justo, não para elucidação do ilustrado auditório que se digne assistir a esta sumária exposição, mas para seguir uma ordem lógica, observar o que se passa relativamente à definição dos problemas que são objecto do estudo da geodesia e geofísica; apreciar se esta designação é ainda hoje a mais adequada, e ficar a sua posição no campo da ciência.

Observarei que o vertiginoso desenvolvimento que as ciências teem atingido, justifica geralmente a classificação que ainda há pouco aqui nesta mesma sala lembrei, ocupando-me da Assembleia Geral da União Internacional Astronómica realizada em Cambridge (Estados Unidos da América) em 1932, de ciência da antiguidade, clássica e da actualidade. Seria hoje intempestivo, visto a falta de tempo, referir-me aos trabalhos das primeiras épocas, e notarei que para a ciência clássica a geodesia tinha por objectivo o estudo da forma e dimensões da terra, e pode bem dizer-se que, embora desde tempos remotos haja memória de trabalhos destinados a esclarecer estes problemas, realmente a ciência geodésica data de uma época bem recente e muito deve à acção da ciência francesa, que ainda agora determinou a execução dos trabalhos internacionais da determinação, com o maior rigor possível das longitudes geográficas, afim de serem devidamente esclarecidos delicados problemas, visto ter

partido a iniciativa destes trabalhos do *Bureau des Longitudes de Paris*, em consequência de propostas feitas pelo meu saudoso amigo e ilustre sábio o general Ferrié. Realmente é aos esforços que nos séculos 17 e 18 desenvolveram homens de alto valor, como Picard, os Cassinis, Clairaut, Delambre, que se deve ter adquirido à geodesia a categoria de uma ciência ao mesmo tempo de grande valor especulativo e utilidade, sendo conveniente observar que sem o conhecimento das dimensões da Terra e da sua massa ficariam vazios de sentido os conhecimentos da paralaxe do Sol, das acções exercidas pelos corpos do sistema planetário e muitas outras. E com justificado orgulho pôde d'Alembert classificar a primeira missão ao Peru, composta por Godin, Bouger e La Condamine, como sendo a mais grandiosa empresa que a ciência tinha tentado até então. É sabido que foram as medições feitas por aquela missão no Peru desde 1735 a 1744 e pela missão composta por Maupertuis, Clairaut, Comus, Le Monnier, na Lapónia em 1736 e 1737 que resolveram a dúvida suscitada pelas medições de anos feitas em França por Jean Dominique e Jacques Cassini desde 1683 a 1718, de resultados contrários aos das observações feitas com o pêndulo por Richer em Cayena, em 1672, as quais confirmavam as conclusões, verdadeiras, a que Newton tinha chegado partindo do princípio que descobrira da gravitação universal, de que a Terra tinha a forma de um elipsoide de revolução achatado nos polos, enquanto que as observações dos Cassinis concluíam pelo alongamento do elipsoide no sentido do eixo polar.

Notarei que a forma da Terra é vantajosamente deduzida das observações do pêndulo, sem dúvida difíceis pelas precauções que se tornam precisas, e ainda pelas reduções necessárias, e as dimensões pelas medidas de arcos, sobretudo meridianos e de paralelos.

Mas quando a precisão, especialmente das primeiras observações, atingiu um certo limite, reconheceu-se a existência de desvios inexplicáveis na hipótese de ser a Terra composta de massas concêntricas homogêneas, e as dificuldades avolumaram-se quando adoptada uma superfície de referência designada por *Geoide*, superfície média dos mares em cada ponto perpendicular à direcção da vertical, e que nas ilhas e continentes passa por baixo das respectivas massas, se verificaram também sensíveis desvios para a direcção observada da vertical rela-

tivamente à posição que resultava para a normal ao geóide. Enquanto aos desvios da gravidade foram considerados positivos quando os valores indicados pela observação se mostraram superiores aos resultantes das fórmulas, a primeira determinada por Clairaut, mais tarde modificada em harmonia com novos conhecimentos, sem nada diminuir o alto merecimento do trabalho de Clairaut que continua sendo um dos mais valiosos da teoria dos fluidos, e negativa quando o resultado da observação é inferior ao valor teórico.

Tornando-se preciso admitir para a Terra uma constituição heterogénea, pelo menos dentro de certos limites de profundidade, e tendo partido a necessidade desta consideração das investigações dos geodestas, ficaram naturalmente os estudos desta ordem adstritos à ciência geodésica, que passaria a compreender o estudo da constituição da Terra pelo menos da *litosfera*. E agora um novo campo de apaixonantes estudos científicos, se abre à avidez humana. Com pesar devemos constatar que os exames directos sobre a crosta da litosfera, raras vezes excedem um quilómetro e não vão a mais de dois. Que desapontamento para a verdade humana quando notamos que o raio equatorial da Terra é superior a 6.378 quilómetros!

Mas as desigualdades que, deveria supor-se, constituiriam uma contrariedade, trouxeram novos alentos à ciência, e rasgaram novos e deslumbrantes horizontes. Alguma coisa de parecido com o que sucedeu com os estudos espectroscópicos; a princípio tão simples e de resultados tão fáceis de interpretar, enquanto pôde admitir-se a invariabilidade da posição relativa de riscas da constituição permanente. Mas um dia a perturbação estabeleceu-se: verificava-se que a posição das riscas sofria variações sensíveis, e que riscas consideradas indivisíveis sofriam acidentes tais que se desdobravam. A desordem provocada por estas surpreendentes descobertas muito terá perturbado nos primeiros momentos os homens verdadeiramente dedicados e capazes da investigação científica; mas a confusão passou rapidamente e verificou-se logo que ricos filões tinham sido descobertos para impulsionar as descobertas científicas. Desde então foi possível reconhecer as condições de temperatura, de pressão as acções eléctricas e magnéticas a que estavam submetidos os corpos observados, mais do que isso, tornou-se possível calcular com grande aproximação, as velocidades radiais

dos longínquos focos estelares, consideradas até então inacessíveis a nossa observação, parecendo que só poderiam ser apreciadas para um pequeno número de estrélas, das vizinhanças, pela comparação das suas insignificantes paralaxes.

Também aquelas anomalias da gravidade, embora de reduzidos valores, também aqueles desvios da vertical foram raios de luz que vieram iluminar as profundas trevas das inacessíveis regiões interiores da Terra, sôbre as quais tão variadas e por vezes absurdas hipóteses tinham sido formuladas. É certo que a capacidade humana não pode deduzir directamente daquelas inesperadas observações a estrutura interior da Terra, mas tratou-se de formular hipóteses, por vezes bem audaciosas, deduzir pelo cálculo fenómenos que deveriam ser observados à superfície da Terra, e a concordância dos resultados conduziu à convicção, possivelmente justificada, de uma das mais belas teorias da actualidade, a da isostasia, que tanto apaixona actualmente o mundo geodesta, e tanto deve ao talento e persistência das suas investigações, sobretudo dos sábios dos Estados Unidos da América, recentemente do Hayford e do nosso sábio presidente Mr. Bowie. Depois me referirei, a este importante assunto, sem dúvida muito sucintamente, visto que é preciso não esquecer que a Terra não toma descanso no seu incessante lidar — às regiões siderais que governam a marcha do Mundo ainda não chegaram as reivindicações das 8 horas de trabalho diário, e muito menos de uma semana de 36 ou 40 horas. Agora apareceu a propósito da crítica da designação de geodesia e geofísica porquanto, tendo-se introduzido a doutrina da determinação da estrutura da litosfera na geodesia, adquiriu esta um novo domínio que talvez mais lógico fôsse considerar em repartição especial, para evitar o perigo de ser justificada a pretensão da geofísica de compreender as doutrinas da geodesia clássica.

Mas em verdade para que surgirão tais conflitos de jurisdição? É fácil verificar que as doutrinas da geodesia como as dos outros ramos compreendidos na geofísica, discriminados pelas Associações que constituem a nossa União, à medida que os conhecimentos que lhes dizem respeito mais profundos se tornam, também mais se entrelaçam as raízes destas ciências a ponto de se nos afigurar que tódas brotam da mesma origem, e que as árvores frondosas que hoje contemplamos têm afinal

troncos idênticos não sendo possível contemplar qualquer delas destacadamente de tôdas as outras.

Ao mesmo tempo será oportuno notar que as surpreendentes observações que estou referindo não confinam a sua importância no campo especulativo, e, qualquer que elle fôsse, não careceria de importância científica, e rapidamente chamarei a atenção para a grande intervenção de utilidade imediata para a humanidade, que já adquiriram. Reconhecido que as anomalias da gravidade observadas à superfície da Terra resultam da repartição das massas nas camadas subjacentes, — as anomalias magnéticas das diversas propriedades magnéticas dos materiais constitutivos daquelas camadas, e os registos sismográficos que denunciam as condições mecânicas do interior da Terra, com a aplicação do instrumento matemático, tem conduzido às mais surpreendentes descobertas.

Tornou-se possível estabelecer as distribuições, à superfície da Terra, do campo geofísico e magnético para diversas hipóteses de distribuição interior, e por paralelismo poderão concluir-se as condições interiores de uma região correspondente a determinadas características superficiais. Os resultados práticos tem sido de grande alcance, e é sabido como as observações gravimétricas e magnéticas tem conduzido à descoberta de importantes jazigos metalíferos. A medida da conductibilidade eléctrica denuncia a existência no subsolo de minérios metálicos de conductibilidades diversas. A aplicação deste género de observações tem grande utilidade para a investigação da localização de jazigos de petróleo.

É também importante notar que as investigações na crusta terrestre, embora num campo já bastante afastado do que temos considerado, estão indicadas para profundar o estudo que naturalmente mais apaixonou a humanidade, o conhecimento das condições de habitabilidade dos astros. Até há pouco fazia-se depender a resposta a esta questão de identificação de condições análogas àquelas que sobre a terra podem ser consideradas indispensáveis para a produção do plasma base da vida, mas quando amanhã se verificar que outras condições poderão conduzir a resultados análogos, quando também entre elas e as que se verificam na parte conhecida da Terra, se demonstre a analogia, sem dúvida importantes conclusões poderão ser enuncadas relativamente à possibilidade da existência da vida noutros astros



embora com modalidades diversas. Já se aventa, com razões justificativas, a possibilidade da existência de organismos em que sejam substituídos os quatro componentes fundamentais da vida à superfície da Terra — oxigénio, hidrogénio, carbono e azoto enxofre, corónio, silício e fósforo, de propriedades respectivamente análogas às daqueles outros corpos e também largamente espalhados no Universo. De mais eu julgo justificado considerar a possibilidade da existência de organismos resultantes da intervenção de elementos estáveis mas muito incompletos relativamente àqueles que nas condições actuais da terra têm mais probabilidades de viabilidade, de que os ionizados são já complexos exemplares, e que pela sua estrutura, digamos mais etérea, poderão produzir também seres muito mais delicados do que aqueles que se desenvolvem na Terra.

Mas qualquer que seja a atenção que nos mereçam as considerações expostas, o que no campo da classificação científica é incontroverso, é que todas as doutrinas que fazem objecto da geodesia e geofísica constituem um ramo da Astronomia, porquanto, nem pelo facto de existir a humanidade sobre este astro designado por Terra, deixa de ser certo que é ela um corpo celeste em condições idênticas à de todos os mais na definição geral que atribuímos ao termo Astronomia, sendo evidente que, se aqui nos encontrámos com os problemas que para os astros do Universo considera a astronomia, sem dúvida, quando deles tratamos, astronomia fazemos igualmente, somente com a vantagem, por vezes é certo, como já observei, bastante reduzida, de poder ser mais meticolosa a observação por se encontrar este corpo imediatamente debaixo da nossa observação, mas dificultada pela circunstância apontada da reduzida profundidade explorada, tanto no sentido do nadir como do zenite, embora deste lado um pouco mais longe tenhamos podido penetrar.

Queria ocupar-me já dalguns problemas que maior interesse despertam neste momento como sejam os do isostasia, da translação dos continentes, teoria proposta por Wegener, porém receando que a sua crítica me iniba de cumprir a missão que neste momento se impõe de dar um relatório embora sucinto, dos trabalhos da última assembleia renovarei a exposição das dúvidas que nos sugerem para outra ocasião.

Para expôr um rápido relato do labor científico da Assembleia Geral da União Geodésica e Geofísica de que me estou

ocupando, notarei que ao dar conta do relatório do General Perrier já foram referidos vários pontos, sobretudo, foi dada uma sucinta enumeração das recepções que acompanharam os trabalhos científicos, os quais decorreram com a maior elevação, prolongando-se por vezes pela noite, embora principiassem com toda a regularidade cêrca das 9 da manhã.

A sessão inaugural presidida por S. Ex.<sup>a</sup> o Presidente da República teve lugar no palácio do Congresso e foi revestida do maior brilho para o que contribuiu uma numerosa e selecta assistência, S. Ex.<sup>a</sup> o Ministro da Instrução Pública que pronunciou uma notável e erudita oração, S. Ex.<sup>a</sup> o Ministro do Comércio que deu ao Congresso o seu valiosíssimo apoio, S. Ex.<sup>a</sup> o Coronel Linhares de Lima que pronunciou em nome da Cidade de Lisboa, uma primorosa alocução, grande número de membros do Corpo diplomático, os reitores das Universidades de Coimbra, Lisboa e Porto, oficiais generais e autoridades superiores e mais de duzentos congressistas que tinham à sua frente o sábio membro do Instituto de França M. Charles Lallemand, que desde o início tem presidido à União Internacional Geodésica e Geofísica com a notável distinção e profundos conhecimentos que destacam da sua encantadora personalidade. Entre os membros do Congresso notava-se o Secretário Geral da União o Brigadeiro Winterbotham, o Secretário Geral da União Geodésica e Geofísica General Perrier, e os presidentes das Associações, Mrs Wening Mernesr, dos Países Baixos; E. Oddone, da Italia; A. Wallen, da Suecia; J. A. Fleming, dos Estados Unidos; R. Witting, da Finlândia; C. Ktonas, da Grecia; J. Smetana, da Checo-Slováquia.

Foi de elevada significação, e profundos conceitos, o discurso pronunciado pelo Presidente da União, demonstrando mais nma vez Mr. Lallemand os seus profundos conhecimentos.

Foi êste discurso caracterizado pela expressão dos mais delicados sentimentos para com o nosso país, parte mesmo pronunciado em português tocou-nos profundamente com as mais distintas referências aos actos heroicos dos nossos antepassados, às qualidades que caracterizam a nossa raça e as belezas e o encanto da nossa terra.

Pela minha parte coube-me testemunhar o sentimento de admiração e cordealidade que tributavamos aos nossos ilustres hóspedes em nome da secção nacional portuguesa, e o nosso

reconhecimento para com todos os elementos que tinham contribuído para a realização deste Congresso em Lisboa, lembrando que este facto tinha sido resolvido em Stokolmo com a aprovação por aclamação da moção que ali tive ocasião de apresentar, especializando o apoio que tinha tido da parte do nosso Illustre Presidente Mr. Lallemand. Referindo-me aos trabalhos realizados nas reuniões das Associações comecei por me referir aos das 17 comissões que constituem a Associação de Geodesia, e notei que os nossos elementos nelas mantiveram activa colaboração ficando a pertencer a estas comissões internacionais, entre outros dos nossos, o Coronel Mimoso Guerra, o director do Observatório Nacional, Manuel Peres, os Professores V. H. de Lemos, Jorge Om, Eduardo Andrea, General Norton de Matos, Comandante Vieira da Rocha, Tenente Coronel Pais Clemente.

A comissão de Bibliografia tomou conhecimento de que vai ser iniciada a publicação da Bibliografia geodésica internacional, que será publicada com intervalos de três anos, mencionará os trabalhos geodésicos que sejam publicados em todo o mundo com uma detida notícia.

A comissão de triangulação occupou-se especialmente da medida do arco do 3º meridiano em África. Preconizou a medida de dois arcos de paralelo, um vizinho do Equador, do Senegal à Somalia, e outro ao longo do paralelo de 6º de latitude sul.

A comissão de projecções occupou-se da escolha de uma representação plana apropriada às cartas de navegação aérea.

A comissão de latitudes, que é uma comissão mixta, como a comissão de longitudes, de membros designados pela União Internacional Astronómica e de membros designados pela União Internacional geodésica e geofísica, occupa-se especialmente do estudo da variação das latitudes, facto que o rigor das modernas observações tornou possível constatar, embora se tenham confirmado as previsões d'Euler, de reduzidos movimentos do polo, que pode considerar-se certo não excederão  $0''{,}7$ , cêrca de 20 metros entre as suas posições extremas. Estações especiais foram montadas para se occuparem deste delicado estudo. Lembrarei ter encontrado um género de curvas, que designei *Espirais Reversíveis*, as quais oferecem modalidades análogas às cónicas, e entre elas a que é representada por uma curva fechada oferece um desenvolvimento semelhante ao que mostra a curva polar, podendo esperar-se a possibilidade da determinação dos seus parâmetros

por forma que se consiga um sensível ajustamento, embora seja certo que principalmente os resultados dos últimos anos, sem modificarem o aspecto geral da curva, ofereçam aspectos bastante perturbados. Mas o estudo dessas desigualdades possivelmente poderá descobrir modificações determinadas na disposição das massas terrestres, deitando supor-se que será especialmente devido aos deslocamentos destas as perturbações referidas.

Enquanto ao processo aproveitado para a determinação das latitudes é sabido ter sido adoptado o método de Tacôt como oferecendo probabilidades de maior rigor, mesmo comparado com o de Struve, o que é admissível. Contudo já tive ocasião de submeter a esta Comissão as dúvidas que se me oferecem parecendo-me que o rigor da observação feita pelo método Talcot, muito para considerar geralmente, não é de natureza a impor este método exactamente para este género de estudos por depender do conhecimento da posição que se pretende apreciar do polo. Escapa a esta objecção o método baseado na observação das circumpolares, e tive ocasião de demonstrar o seu rigor desde que as observações sejam feitas em latitudes de cerca de  $60^{\circ}$ . Mr. Kirunza, o sábio presidente desta Comissão, que a este problema tem ligado o seu nome, dignou-se observar a dificuldade que haverá em conseguir estações em tão elevadas latitudes. E' um assunto de que me ocupo neste momento procurando por um lado apreciar a influência do uso de um método que apresenta neste caso um círculo vicioso, e a correspondência entre a curva que vem sendo descrita pelo polo, e a curva geométrica a que aludi.

*Comissão das longitudes.* Nos últimos tempos a sua principal preocupação tem sido conseguir uma rede de diferenças de longitudes entre estações devidamente apetrechadas e preparadas para fazerem as observações em harmonia com as prescrições determinadas por esta comissão, que tem hoje como presidente o incansável General Perrier a quem a ciência geodésica deve um continuado e exaustivo serviço, sendo daqueles para quem o trabalho dedicado à União absorve por completo o tempo, tanto na acção científica como na parte administrativa. Bastaria a admirável publicação que é o Boletim da Associação Geodésica para o tornar crêdor da gratidão desta Associação e de todo o mundo científico que se interessa pelos assuntos que lhe estão cometidos. É justo também lembrar a valiosa colaboração do

secretário desta Comissão Mr. Lambert, ilustre astrónomo do Observatório de Paris, impedido de tomar parte no Congresso de Lisboa por dever encontrar-se já nessa ocasião na Algeria, a conduzir os observadores destinados à campanha das longitudes, que decorreu oficialmente nos meses de outubro e novembro, embora com possibilidade de ser prolongada até meados de dezembro e na qual o nosso país tomou parte. Está fixado o intervalo de sete anos para este género de observações. O primeiro grupo de observações teve logar em 1926, e então funcionaram cerca de 40 estações, algumas das quais, sobressaindo a da Algeria, conseguiram resultados surpreendentes. Agora contava-se com cerca de 100 estações. A preparação foi sem dúvida muito mais completa, e por isso é de esperar que os resultados obtidos nos venham a dar completa satisfação. A satisfação que a ciência nos oferece generosamente, e nenhuma outra lhe é comparável se exceptuarmos a que se encontra no seio da Família, onde o camartelo da civilização ainda não tinha conseguido a sua destruição.

É oportuno observar já que a meu vêr os resultados que sejam obtidos deverão ser apreciados tomando em consideração a influência que sobre as variações das longitudes tem o deslocamento constatado do polo, porquanto, pelo cálculo que fiz, essa influência embora devida a uma causa tão insignificante como seja um deslocamento do polo, de menos de um segundo exactamente cerca de sete décimos de segundo de arco ou seja um afastamento nas posições extremas de cerca de 20 metros produziria uma variação de cerca de 2" na longitude apreciada em relação a uma estação equatorial e outra a 80° de latitude, a que corresponderia uma extensão, de cerca de 60 metros, no equador facto muito para atender exactamente quando se tem em vista apreciar a confiança que pode merecer uma teoria ousada como é a da translação dos continentes de Wegener, e embora se reconheça que a influência deste facto possa desaparecer quando considerarmos períodos de tempo suficientemente extensos, atendendo à periodicidade que oferece o movimento do polo.

*A comissão da intensidade da gravidade sobre a Terra* apreciou os notáveis resultados obtidos com a nova disposição dada ao pêndulo por Holweck-Lejay, e principalmente os magníficos estudos recentemente realizados pelo Rev. Padre Lejay que

acaba de concluir uma carta gravimétrica na região de Pekin com 38 estações que se estendem sobre 10 graus de longitude e 7 de latitude em volta daquela cidade. Esta carta demonstra que as anomalias gravimétricas (calculadas pela redução de Bouger) são negativas e crescem rapidamente em valor absoluto para oeste, sendo sensivelmente paralelas à costa do Pacífico as linhas de iguais anomalias. Recordemos que o Rev. Padre Lejay se notabilizou com os trabalhos que sob a sua direcção foram executados em Saigon, quando teve logar a primeira determinação internacional de longitudes.

*Comissão da intensidade da gravidade sobre o mar.* É sabido que ao sábio holandez Mr. Vening Meinesz se deve um processo que permite determinar a gravidade nos mares com grande rigor, prescindindo do emprêgo dos pêndulos, reconhecido que os balanços dos barcos tornavam impossível o seu aproveitamento no mar embora tão preciosos na Terra. Alguma coisa parecido com a vantagem da utilização no mar, em tempos remotos da bastilha e actualmente do sextante para as observações de posição, em substituição do astrolábio noutro tempo e actualmente no teodolito sem dúvida de uso muito mais vantajoso em Terra. Mr. Vening Meinesz que justificadamente mereceu ser colocado na presidência da União Geodésica em substituição de Mr. Bowie, que passou, como já referi a ocupar a presidência da União, realizou ultimamente novos cruzeiros a bordo de submarinos para a observação de medidas gravimétricas segundo o seu processo, que também foi aproveitado por Mr. Cassinis num submarino italiano. É fácil apreciar a importância destes trabalhos que vieram preencher uma lacuna que era considerada invencível, do conhecimento da gravidade sobre os mares, de resto tão indispensável atendendo a que estes ocupam cerca de três quartas partes da superfície da Terra, exactamente 72,5%; 59,6% no hemisfério boreal e 85,6% no hemisfério austral.

*Comissão encarregada do estudo de uma compensação em conjunto da rede europeia.* Decidiu prosseguir com esta compensação e resolveu realizar em todos os países da Europa um inquérito sobre as triangulações e observações astronómicas executadas.

*Comissão do arco do meridiano desde o Oceano Glacial ao Mediterrâneo.* A despeito da demissão do seu secretário, o coronel Benés, devido ao seu estado de saúde, os trabalhos têm

avanzado na parte sul, desde a Polónia até Creta. Mr. Lampadarios, illustre director do serviço topográfico de Atenas, o primeiro dos congressistas, que chegou ao nosso país, com anticipação bastante para se declarar encantado com a sua estada aqui um pouco prolongada, é certo não tanto como desejavamos tanto da sua parte como de todos os congressistas, que como já referi nos testemunham profunda saúde do nosso país, propõe-se fazer a ligação de Creta com a África aproveitando um método seu. Em caso de se tornar insuperável aquella ligação foi admitida a possibilidade de uma variante pela Roumania, Bulgária, Ásia Menor, Siria, Palestina e Cairo.

Na Associação de Geodesia foram realizadas três importantes conferências fora das reuniões das Comissões — por M. Wening Meinesz sobre a interpretação dos resultados das suas medidas gravimétricas no mar; — por M. Tomaschek sobre os seus trabalhos relativos ao variómetro de gravidade e às marés da crusta terrestre, assunto que tem feito objecto de notáveis trabalhos de Mr. Lallemand e de Mr. Brillouin, e por Mr. Holweck sobre o aparelho Holweck-Lejay e as determinações gravimétricas obtidas com o seu aproveitamento. Os melindrosos problemas que preocupam a ciência geodésica como sejam das bases, triangulações, nivelamentos de precisão, astronomia geodésica, desvios da vertical, intensidade da gravidade sobre a terra e sobre o mar, isostasia, variação das latitudes, projecções, marés da crusta terrestre, foram largamente tratados nas sessões plenárias tomando para base os relatórios respectivos, e na sua discussão intervieram zelosa e proficuamente os membros da secção nacional portuguesa. Pela minha parte, além da intervenção já referida relativamente às latitudes e longitudes, tive ensejo de propor uma nova forma de projecção central, vantajosa para a representação dos continentes até 60° de latitude sul dentro de um círculo, e chamar a atenção para serem adoptadas pirâmides de nivelamento que julgo vantajosas para serem devidamente apreciadas as variações das altitudes.

### Associação de sismologia

Entre outros assuntos importantes occupou-se com especial atenção das *hodochronas*, curvas de propagação. Parece verificado que devido à heterogeneidade da Terra para cada sismo

existe uma determinada hodochrone, mas nos trabalhos é vantajoso utilizar curvas médias. Entre os votos aprovados figura o que solicita uma activa colaboração de alguns países como sejam a Bulgária, Chile, Portugal compreendendo os Açores e a Yugoslávia.

O presidente da comissão portugueza dr. Ferraz de Carvalho, além de uma larga exposição sobre os trabalhos do Instituto Geofísico de Coimbra, apresentou um trabalho do dr. Raul Miranda sobre «O carácter sismológico do Portugal Continental», e o dr. Oscar Saturnino fez uma exposição sobre a Estação sismológica da Serra do Pilar (Porto).

### Associação de Meteorologia

Foram lidas 14 comunicações que se ocupavam especialmente dos seguintes assuntos: — valor da aplicação, para a previsão do tempo, das modernas opiniões sobre a mecânica da atmosfera: — teorias e observações sobre a formação das nuvens e precipitações. Processos físicos da formação dos conjuntos nubelosos que acompanham as grandes perturbações: — concepção e teoria da circulação geral da atmosfera, especialmente no que se refere às transformações de energia.

Investigações sobre a natureza física da estratosfera:

São notáveis os trabalhos publicados pelo dr. António Geão sobre os fenómenos atmosféricos. Pela minha parte expuz a minha opinião sobre a correlação entre os fenómenos solares, sobretudo da atmosfera solar, e os fenómenos que ocorrem na atmosfera da terra.

### Associação de Magnetismo e Electricidade Terrestre

Nesta Associação foram lidas grande número de importantes comunicações, seguidas as mais das vezes de elucidativas discussões, sobretudo, relativamente às tempestades magnéticas; — à influência da Lua sobre os fenómenos magnéticos; — às auroras polares.

Ocupou-se da redacção das publicações relativas ao ano polar internacional (1932 a 1933), tendo o director do observatório da



Estação Meteorológica dos Açores, tenente coronel José Agostinho, tomado parte importante nas discussões e apreciações que tiveram lugar.

Nesta associação lembramos entre outros os seguintes trabalhos da secção portuguesa: — do Almirante Ramos da Costa relativamente à influência da ionização atmosférica sobre os fenómenos biológicos: — do director do Instituto Geofísico de Coimbra, Professor Ferraz de Carvalho; a) sobre os trabalhos realizados para o levantamento da carta magnética de Portugal; b) as observações magnéticas realizadas nas ilhas de S. Tomé e Príncipe; c) sobre as novas instalações da secção magnética, do Instituto Geofísico de Coimbra, no Alto da Baleia. O mesmo apresentou um trabalho do seu colaborador Artur Dias Preta relativo «às influências lunares sobre o magnetismo terrestre».

O Dr. Gumersindo Sarmento da Costa Lobo expoz os seus pontos de vista relativamente à correlação entre os fenómenos do magnetismo terrestre.

Ao fim da sessão de encerramento do Congresso, em Coimbra, grande número de Congressistas visitaram o Instituto Geofísico e o seu novo observatório magnético, no Alto da Baleia as instalações magnéticas e sismológicas a convite do seu director. Foram também recebidos na secção de Astrofísica da Universidade de Coimbra.

### Associação de vulcanologia

Foram lidos os relatórios dos seguintes *comités* nacionais Grécia, Itália, Japão, e o de Portugal feito pelo presidente da comissão nacional portuguesa Professor Machado e Costa.

Em acôrdo com a comissão das marés da crosta terrestre e da Associação de Geodesia esta Associação aprovou um voto para que os postos temporários de observações gravimétricas que possuam aparelhos para a medida dos desvios da vertical sejam instalados nas seguintes condições: a) apropriados ao estudo dos movimentos dos continentes, segundo um trajecto transversal a um continente, com preferência da América do Norte; b) apropriadas ao estudo dos movimentos regionais em pontos distanciados de 200 a 300 quilómetros; c) apropriados ao estudo das marés no alto mar sobre uma linha de ilhas isoladas; d) mais especialmente nas regiões sísmicas.

### Associação de hidrologia científica

Nesta Associação teve uma activa colaboração, o Professor Armando Narciso. Foram discutidas grande número de questões de potamologia, de limnologia, de hidrologia subterrânea, de glaciologia, de statistica e de applicações práticas. Foi emitido um voto incitando todos os países ao estudo dos caudais dos seus rios.

\*

A sessão de encerramento da União teve lugar em Coimbra, no dia 25, com a presença do Ilustre Reitor da Universidade e grande número de professores, que testemunharam aos nossos hóspedes a elevada consideração que nos mereciam, tendo sido intérprete destes sentimentos o sábio reitor dr. João Duarte de Oliveira. O Presidente da União Mr. Lallemand demonstrou em termos eloqüentes a saudade que todos os Congressistas sentiam ao afastarem-se *dêste hospitaleiro e belo país*.

As manifestações de cordealidade que se acentuaram no Busaco, Curia, em Lamego, na Régoa e emfim no Porto onde a Universidade daquela cidade com o seu Reitor à frente foram de inexcédível amabilidade, deram a êste Congresso um singular cunho de cordealidade científica que aos portugueses deu a maior satisfação, e felizmente os nossos hóspedes celebram com saudade.

F. M. DA COSTA LOBO

# Contribuição para o estudo da teoria das funções

(CONTINUAÇÃO)

## CAPÍTULO V

### LIMITES DE CONJUNTOS

---

#### I

#### LIMITES DE CONJUNTOS DE SOMA LIMITADA

48. A definição de limite duma sucessão de conjuntos de soma limitada. — Consideremos uma sucessão

$$(1) \quad A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

de subconjuntos limitados dum dado espaçoide  $P$ . No  $n.^\circ$  precedente dissemos que esta sucessão converge para um conjunto limitado  $A$ , por definição, quando temos  $\lim A_i \bar{A} = 0$ . O conjunto  $A$  chama-se um limite da mesma sucessão.

Os termos da sucessão convergente (1) constituem um conjunto limitado [v. iv, p. 12, l. 28]; por conseguinte limitado será o conjunto soma

$$A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots,$$

em virtude da proposição que enunciámos no v. iv, p. 130, l. 3. Como vemos, só podem ser convergentes conforme a mencionada definição, as sucessões de conjuntos para cada uma das quais a soma dos termos constitua um conjunto limitado (sucessões de conjuntos de soma limitada) (1).

---

(1) No  $n.^\circ$  57 apresentaremos uma definição de convergência duma sucessão de conjuntos quaisquer.

Representemos por  $\lim \mathbf{A}_i$  qualquer dos limites da sucessão convergente (1). Sabemos que todos estes limites são juxtapostos entre si [v. iv, p. 13, l. 3], admitindo por isso o mesmo lugar [v. iv, p. 128, l. 32], e que a sucessão converge para qualquer conjunto que admita o mesmo lugar que um dos limites desta sucessão [v. iv, p. 13, l. 8]. Em particular, a sucessão converge para um único limite totalmente fechado que, de harmonia com estas considerações, representaremos por  $[\lim \mathbf{A}_i]$ . Para indicar que o conjunto  $\mathbf{A}$  é um dos limites da sucessão convergente (1) bastará escrever  $\lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}$ , como já fizemos no v. iv, p. 13, l. 18.

Vejamos alguns exemplos de sucessões convergentes de conjuntos:

Dividindo um dado conjunto limitado  $\mathbf{A}$  em partes de diâmetros menores do que  $\frac{1}{i}$ , tomando em seguida um elemento em cada parte e designando por  $\mathbf{A}_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) o conjunto constituído por todos êsses elementos, vem

$$\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} < \frac{1}{i} \quad [\text{v. iv, p. 108, l. 6}], \quad \lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}.$$

Se  $\mathbf{A}_i$  representa o conjunto dos números da forma

$$\frac{i}{h+i} \quad (h=1, 2, \dots)$$

e  $\mathbf{A}$  o conjunto dos números do intervalo  $(0, 1)$ , temos

$$\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} = \frac{1}{1+i} \quad [\text{v. iv, p. 101, l. 27}], \quad \lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}.$$

Consideremos uma sucessão de hiperesferas (esferas, círculos ou intervalos, em particular) de centros  $\mathbf{a}_i$  e raios  $\rho_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ); se estes centros e raios convergirem para limites  $\mathbf{a}$  e  $\rho$ , a sucessão das hiperesferas convergirá para a hiperesfera de centro  $\mathbf{a}$  e raio  $\rho$ , e reciprocamente, porque a distância entre esta hiperesfera e a de centro  $\mathbf{a}_i$  e raio  $\rho_i$  é o número  $\overline{\mathbf{a} \mathbf{a}_i} + \overline{\rho \rho_i}$  [v. iv, p. 102, l. 3].

Para citar ainda outro exemplo representemos por  $\mathbf{A}_i$  a soma

dos esferóides de centros nos diversos elementos dum dado conjunto limitado  $\mathbf{A}$  e de raios iguais a  $\frac{1}{i}$ ; temos

$$\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} < \frac{1}{i} \quad [v. \text{iv}, p. 102, l. 4], \quad \lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}.$$

No caso particular do limite  $\mathbf{A}$  da sucessão convergente (1) se transformar num simples elemento  $\mathbf{a}$ , temos as seguintes proposições:

*É condição necessária e suficiente para que uma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada convirja para um elemento  $\mathbf{a}$ , que a cada número  $\delta > 0$  corresponda um inteiro positivo  $k$  tal que seja  $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} < \delta$  para qualquer elemento  $\mathbf{a}_i$  da soma*

$$(2) \quad \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_{k+1} + \dots$$

Esta proposição resulta imediatamente da definição de distância  $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{a}}$  e da definição que demos de convergência duma sucessão de conjuntos no caso particular do limite se reduzir a um elemento  $\mathbf{a}$ .

*É condição necessária e suficiente para que uma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada convirja para um elemento  $\mathbf{a}$ , que o diâmetro da soma  $\mathbf{A}_i + \mathbf{a}$  tenda para zero com  $\frac{1}{i}$ .*

Com efeito, seja  $\Delta_i$  o diâmetro do conjunto  $\mathbf{A}_i + \mathbf{a}$ . Temos

$$\Delta_i < 2 \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{a}},$$

em virtude da relação (3) do v. iv, p. 105 aplicada aos conjuntos  $\mathbf{A}_i + \mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}$ , e atendendo a que a distância entre  $\mathbf{A}_i + \mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}$  é a distância  $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{a}}$ . Logo, se fôr  $\lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{a}$ , teremos  $\lim \Delta_i = 0$ .

Reciprocamente, se fôr  $\lim \Delta_i = 0$ , como é  $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{a}} < \Delta_i$  (pois que a distância entre dois conjuntos não excede o diâmetro da soma dos mesmos) será  $\lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{a}} = 0$  e  $\lim \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{a}$ .

*É condição necessária e suficiente para que uma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada convirja para um elemento, que a*

todo o número  $\delta > 0$  corresponda um inteiro positivo  $k$  tal que seja  $\overline{a_i a_{i'}} < \delta$  para elementos quaisquer  $a_i$  e  $a_{i'}$  da soma (2).

Com efeito, dada a condição  $\lim A_i \| a$ , a todo o número  $\frac{\delta}{2} > 0$  corresponde um inteiro  $k > 0$  tal que é  $\overline{a_i a} < \frac{\delta}{2}$  e  $\overline{a_{i'} a} < \frac{\delta}{2}$ , donde vem  $\overline{a_i a_{i'}} < \delta$ , para elementos quaisquer  $a_i$  e  $a_{i'}$  da soma (2). Reciprocamente, dado este último caso, é evidente que uma sucessão

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$$

constituída por elementos dos termos da mesma ordem da sucessão (1) converge necessariamente para um limite  $a$  [v. iv, p. 4, 2)]; logo, por ser  $\lim \overline{A_i a_i} = 0$  como também é evidente, temos

$$\lim \overline{A_i a} < \lim (\overline{A_i a_i} + \overline{a_i a}) = 0$$

e  $\lim A_i \| a$ .

É condição necessária e suficiente para que uma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada convirja para um elemento, que o diâmetro da soma (2) tenda para zero com  $\frac{1}{k}$ .

É um corolário evidente da proposição que acabámos de demonstrar.

49. Outro modo de definir limite duma sucessão de conjuntos de soma limitada. — A seguinte proposição permite-nos dar outra forma à definição de limite duma sucessão de conjuntos:

Para que uma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada seja convergente é necessário e suficiente que se tenha  $\check{A} | \hat{A}$ . A sucessão converge para o limite  $\check{A}$ .

Noutros termos: para a convergência duma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada é necessário e suficiente que um elemento qualquer do respectivo limite integral seja limite duma sucessão convergente de elementos dos termos correspondentes da sucessão de conjuntos (1).

Com efeito, se a sucessão (1) de conjuntos de soma limitada é convergente, temos

$$\lim \overline{A_i A_{i'}} = 0 \text{ [v. iv, p. 12, l. 20] e } \check{A} | \hat{A} \text{ [v. iv p. 131, l. 18].}$$

Reciprocamente, se é  $\vec{A} \mid \hat{A}$  temos, designando estes limites por  $\mathbf{A}$ ,

$$\lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} = 0 \quad [v. \text{iv}, p. 131, l. 20],$$

e a sucessão converge para o limite  $\mathbf{A}$ . Podemos escrever, por conseguinte,  $[\lim \mathbf{A}_i] \mid \vec{A} \mid \hat{A}$  (1).

Como corolário vem a proposição seguinte:

*Uma qualquer das condições*

$$\lim \vec{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i'}} = 0 \quad (i < i'), \quad \lim \vec{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i'}} = 0 \quad (i > i'), \quad \lim \vec{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i'}} = 0$$

*é necessária e suficiente para a convergência duma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada.*

Efectivamente, sabemos que, dado o caso de ser limitada a soma dos termos da sucessão (1), uma qualquer das referidas condições é necessária e suficiente para que seja  $\vec{A} \mid \hat{A}$  [v. iv, p. 124, l. 23].

*Se o limite totalmente fechado duma sucessão convergente (1) de conjuntos de soma limitada é interior a um dado esferóide  $\mathbf{F}$ , o mesmo acontece aos termos da sucessão a partir de certa ordem.*

Com efeito, suponhamos que não há uma ordem a partir da qual os termos da sucessão (1) se encontrem todos interiores a um dado esferóide  $\mathbf{F}$  [v. iv, p. 26, l. 11]. Sendo assim, a referida sucessão admite uma subsucessão formada de termos não interiores ao esferóide  $\mathbf{F}$ , da qual podemos extrair, por conseguinte, uma sucessão de elementos ainda não interiores ao mesmo esferóide. Esta sucessão de elementos, por sua vez, admite um limite [v. iv, p. 17, l. 26], que, pertencendo necessariamente a  $\vec{A}$ , não é interior a  $\mathbf{F}$  [v. iv, p. 26, l. 32]. Logo, se o limite  $\vec{A} \mid [\lim \mathbf{A}_i]$  da sucessão convergente (1) é interior a  $\mathbf{F}$ , o mesmo acontece aos termos a partir de certa ordem.

(1) Esta condição necessária e suficiente de convergência duma sucessão de conjuntos de soma limitada será adoptada para definição de convergência duma sucessão de conjuntos quaisquer [n.º 57].

50. Desdobramento duma sucessão convergente de conjuntos de soma limitada noutras sucessões convergentes. — *Suponhamos que a sucessão (1) de conjuntos de soma limitada converge para o conjunto A soma de diversos conjuntos A' em número finito ou infinito. Podemos considerar esta sucessão como a soma de outras, em correspondência biunívoca com os conjuntos A', cada uma das quais converge para o correspondente conjunto A'.*

Com efeito, façamos corresponder a cada um dos conjuntos A' um subconjunto A'\_i de A\_i (i = 1, 2, ...) de modo que seja A'\_i |  $\sum A'_i$  e

$$\overline{A'_i A'} \leq \overline{A'_i A} + \frac{1}{i} \quad [v. IV, p. 109, l. 18].$$

A sucessão dada é a soma das diversas sucessões obtidas

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_i, \dots,$$

cada uma das quais converge para o correspondente conjunto A' como é evidente.

51. Continuidade do diâmetro dum conjunto, da distância reduzida  $\overline{AB}$  e do desvio  $\overline{A\bar{B}}$ . — *Seja dada uma sucessão (1) de conjuntos de soma limitada; se fôr  $\lim A_i \parallel A$  teremos  $\lim \Delta_i = \Delta$ , representando por  $\Delta$  e  $\Delta_i$  respectivamente os diâmetros de A e A\_i (i = 1, 2, ...).*

Esta proposição deduz-se imediatamente da relação

$$|\Delta_i - \Delta| \leq 2 \overline{A_i A} \quad [v. IV, p. 105, (3)],$$

e pode exprimir-se dizendo que o diâmetro dum conjunto é uma função contínua do mesmo conjunto.

No caso de A se reduzir a um só elemento ou a elementos juxtapostos entre si, teremos  $\lim \Delta_i = 0$ .

Sejam dadas as sucessões

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

e

$$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots$$



de conjuntos de soma limitada; se fôr

teremos  $\lim A_i \parallel A$  e  $\lim B_i \parallel B$ ,

$$\lim \underline{A_i B_i} = \underline{AB} \quad \text{e} \quad \lim \overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{AB}.$$

Com efeito, atendendo às relações (8) e (10) do v. IV, p. 106, podemos escrever

$$|\underline{A_i B_i} - \underline{AB}| < \overline{A_i A} + \overline{B_i B}$$

e

$$|\overrightarrow{A_i B_i} - \overrightarrow{AB}| < \overline{A_i A} + \overline{B_i B}.$$

Logo temos

$$\lim |\underline{A_i B_i} - \underline{AB}| = 0 \quad \text{e} \quad \lim |\overrightarrow{A_i B_i} - \overrightarrow{AB}| = 0,$$

isto é,

$$\lim \underline{A_i B_i} = \underline{AB} \quad \text{e} \quad \lim \overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{AB}.$$

Podemos dizer, portanto, que a distância reduzida entre dois conjuntos e o desvio de um ao outro são funções contínuas dos mesmos conjuntos.

A existência do limite  $\lim \overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{AB}$  justifica-se atendendo ao que dissemos no v. IV, p. 20, l. 6.

Sejam dados um conjunto limitado  $A$  e uma sucessão

$$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots$$

de conjuntos de soma limitada; se fôr  $\lim B_i \parallel B$  teremos

$$\lim \underline{A B_i} = \underline{AB}, \quad \lim \overrightarrow{A B_i} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \lim \overrightarrow{B_i A} = \overrightarrow{BA}.$$

Esta proposição é um caso particular da anterior. Efectivamente, basta notar que o conjunto  $A$  é limite da sucessão de conjuntos  $A, A, \dots$  (1).

(1) As duas últimas proposições serão generalizadas mais tarde [n.º 63].

52. Projecções dos limites duma sucessão convergente de conjuntos de ordem  $n$  e de soma limitada. — *Seja  $A^n$  um limite duma dada sucessão convergente*

$$(3) \quad A^{n_1}, A^{n_2}, \dots, A^{n_i}, \dots$$

*de conjuntos de ordem  $n$  e de soma limitada. As projecções da sucessão (3) [v. iv, p. 30, l. 17] convergem para as correspondentes projecções do limite  $A^n$ .*

Abreviadamente podemos dizer que as projecções dos limites são limites das projecções. Para justificar o enunciado basta observar que a condição de convergência  $\lim \bar{A}^{n_i} \bar{A}^n = 0$  permanecerá verdadeira se substituirmos os conjuntos  $A^n$  e  $A^{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) pelas suas projecções, porque a distância entre dois conjuntos de ordem  $n$  não é excedida pela distância entre duas correspondentes projecções dos mesmos conjuntos, quaisquer que estas sejam [v. iv, p. 104, l. 7].

A proposição que acabámos de justificar também se enuncia do seguinte modo: *as projecções dum conjunto de ordem  $n$  são funções contínuas desse conjunto.*

É claro que a proposição recíproca não se verifica em todos os casos, queremos dizer, da convergência das projecções da sucessão proposta pode não resultar a convergência desta. É o que acontece, por exemplo, se os termos de ordem ímpar representam, cada um, o segmento de recta do plano  $xOy$  que une a origem ao ponto  $(1, 1)$ , e os de ordem par o segmento de recta que une os pontos  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

Se recordarmos que as projecções dum conjunto de ordem  $n$ , limitado e totalmente fechado, são novos conjuntos totalmente fechados [v. iv, p. 41, l. 19], e que uma sucessão convergente de conjuntos admite um certo limite totalmente fechado (que é o limite integral), ainda concluiremos que:

*As projecções do limite totalmente fechado duma dada sucessão convergente de conjuntos de ordem  $n$ , de soma limitada, são os limites totalmente fechados das correspondentes projecções da mesma sucessão.*

53. Lugar do conjunto (A) dos subconjuntos limitados A dum dado conjunto B. — *O conjunto (A) dos subconjuntos limitados*

dum dado conjunto  $B$  admite por lugar o conjunto dos subconjuntos limitados do lugar  $[B]$ .

Consideremos o conjunto  $(A)$  dos subconjuntos limitados  $A$  dum dado conjunto  $B$ . Qualquer elemento  $A'$  do lugar  $[(A)]$  é limite duma sucessão convergente

$$(4) \quad A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

de subconjuntos limitados de  $B$ . Mas são evidentemente verdadeiras as relações  $A' | < \bar{A}$  [p. 133, l. 5] e  $\bar{A} | < [B]$ , das quais resulta  $A' | < [B]$ .

Reciprocamente, qualquer subconjunto limitado  $A'$  do lugar  $[B]$  é um elemento do lugar  $[(A)]$ , como vamos demonstrar. Com efeito, a cada elemento de  $A'$  façamos corresponder um elemento de  $B$  a uma distância do primeiro inferior ao número  $\frac{1}{i}$ ; seja  $A_i$  o conjunto constituído por estes elementos de  $B$ . Temos evidentemente  $\overline{A_i A'} < \frac{1}{i}$ , e a sucessão de subconjuntos  $A_i$  de  $B$  que resulta de fazermos  $i = 1, 2, \dots$  converge para o limite  $A'$ . Logo este conjunto é um elemento do lugar  $[(A)]$ .

*É fechado o conjunto  $(A)$  dos subconjuntos limitados dum dado conjunto fechado  $B$ .*

Seja  $B$  um conjunto fechado qualquer. Demonstremos que toda a sucessão convergente (4) de subconjuntos limitados de  $B$  tende necessariamente para um subconjunto de  $B$ . Como é sabido, cada elemento  $a'$  do limite integral  $\bar{A}$  da sucessão (4) é limite duma sucessão convergente de elementos dos termos da mesma ordem de (4). Mas  $B$  é um conjunto fechado, motivo porque o elemento  $a'$  se juxtapõe a um elemento  $a$  desse conjunto  $B$ . Logo, se designarmos por  $A$  o conjunto de todos os elementos  $a$  de  $B$  cada um dos quais seja juxtaposto a um elemento  $a'$  de  $\bar{A}$ , teremos  $A \parallel \bar{A}$  e  $\lim A_i \parallel A$ .

*É totalmente fechado o conjunto  $(A)$  dos subconjuntos limitados dum dado conjunto totalmente fechado  $B$ .*

Na verdade, já sabemos que o conjunto  $(A)$  dos subconjuntos limitados de  $B$  admite por lugar  $[(A)]$  o conjunto dos subconjuntos limitados do lugar  $[B]$ ; logo, supondo que é  $B | [B]$ , temos  $(A) | [(A)]$ , quer dizer,  $(A)$  é um conjunto totalmente fechado.

## II

## LIMITES DE CONJUNTOS QUAISQUER

54. **Juxtaposição de conjuntos quaisquer.** — Consideremos agora um espaçoide ilimitado  $P$  e todos os seus subconjuntos  $A, B, \dots$ , limitados e ilimitados. Algumas definições já estabelecidas para os conjuntos limitados [v. IV, n.<sup>os</sup> 40 e 41, p. 128] generalizam-se naturalmente para conjuntos quaisquer. Assim, ainda dizemos que dois conjuntos quaisquer  $A$  e  $B$  são *juxtapostos* um ao outro ( $A \parallel B$ ) quando é  $\bar{A}B = 0$ . O conjunto dos números racionais, o dos irracionais e o de todos os números reais, por exemplo, juxtapõem-se entre si.

Correspondentes projecções de conjuntos juxtapostos de ordem  $n$  também se juxtapõem entre si, como resulta do que dissemos no v. IV, p. 104, l. 12.

Da definição de conjuntos juxtapostos concluímos, por evidência, as seguintes proposições:

*Para que seja  $A \parallel B$  é necessário e suficiente que um elemento qualquer de qualquer destes conjuntos seja limite de elementos do outro.*

*Para que seja  $A \parallel B$  é necessário e suficiente que se tenha  $[A] \parallel [B]$  [v. IV, p. 103, l. 32].*

*Dadas duas somas de conjuntos, se cada parcela de qualquer delas é juxtaposta a uma parcela da outra, as duas somas são juxtapostas entre si [v. IV, p. 24, l. 25, ou p. 108, l. 15].*

*Designemos por  $I$  o interior dum esferóide  $F$ . Para que seja  $A \parallel B$  é necessário e suficiente que se tenha  $I \times A \parallel I \times B$  para qualquer esferóide  $F$ , ou simplesmente para os duma sucessão de esferóides concêntricos determinados de forma que os raios cresçam para infinito.*

Com efeito, suponhamos que é  $A \parallel B$  e seja  $I$  o interior dum dado esferóide  $F$ . Qualquer elemento de  $I \times A$  é, então, limite de elementos de  $B$ , e portanto limite de elementos de  $I \times B$ , porque um elemento de  $I$  só é limite de elementos que, a partir de certa ordem, pertencem necessariamente a  $I$  [v. IV, p. 26, l. 32]. Da mesma forma se vê que um elemento qualquer de  $I \times B$  é limite de elementos de  $I \times A$ . Logo temos  $I \times A \parallel I \times B$ .

Reciprocamente, se esta juxtaposição se verificar para qualquer esferóide duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, também será  $A \parallel B$ , porque, considerando um elemento qualquer  $a$  de  $A$  e determinando um desses esferóides de forma que  $a$  lhe seja interior, o elemento  $a$  do correspondente produto  $I \times A$  é limite de elementos de  $I \times B$ , e portanto limite de elementos de  $B$ . Pelo mesmo motivo qualquer elemento de  $B$  é limite de elementos de  $A$ . Por conseguinte temos  $A \parallel B$ .

Designemos por  $T$  a extrema dum esferóide  $F$ . Para que seja  $A \parallel B$  é necessário e suficiente que se tenha

$$T + (F \times A) \parallel T + (F \times B)$$

para qualquer esferóide  $F$ , ou simplesmente para os duma sucessão de esferóides concêntricos determinados de forma que os raios cresçam para infinito.

Com efeito, se fôr  $A \parallel B$ , teremos  $I \times A \parallel I \times B$  para qualquer esferóide  $F$  de interior  $I$  e extrema  $T$ , donde vem

$$T + (I \times A) \parallel T + (I \times B) \quad [p. 138, l. 21],$$

ou, o que é o mesmo,

$$T + (F \times A) \parallel T + (F \times B).$$

Reciprocamente, se esta juxtaposição fôr verdadeira para qualquer esferóide duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, como podemos então escrever

$$T + (I \times A) \parallel T + (I \times B),$$

resulta que todo o elemento  $a$  de qualquer dos produtos  $I \times A$  e  $I \times B$  é limite de elementos do outro, porque  $a$  não é limite de elementos de  $T$ ; logo temos  $I \times A \parallel I \times B$  para qualquer dos esferóides mencionados, donde vem  $A \parallel B$  [prop. prec.].

Para que seja  $A \parallel B$  é suficiente que se tenha  $F \times A \parallel F \times B$  para qualquer esferóide  $F$  duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito.

Com efeito, se tivermos  $F \times A \parallel F \times B$  para qualquer dos esferóides considerados, também teremos

$$T + (F \times A) \parallel T + (F \times B)$$

relativamente aos mesmos esferóides, onde  $T$  designa a estrema de  $F$ . Logo virá  $A \parallel B$  [*prop. prec.*].

**55. Conjuntos limitados ( $A$ ) de conjuntos quaisquer.** — Um conjunto ( $A$ ) de conjuntos quaisquer será *própriamente infinito* quando contiver uma infinidade de elementos (conjuntos) tais que dois quaisquer deles não sejam juxtapostos um ao outro.

Um conjunto ( $A$ ) de conjuntos quaisquer será *limitado* quando fôr limitado o conjunto das distâncias entre estes conjuntos tomados dois a dois de todos os modos possíveis. O *diâmetro* de ( $A$ ) é o limite superior do conjunto das referidas distâncias. Consideremos, por exemplo, uma determinada superfície cilíndrica de revolução; tôdas as rectas paralelas às geratrizes, mas interiores a esta superfície cilíndrica, constituem um conjunto limitado de diâmetro igual ao da secção recta do mesmo cilindro.

Num conjunto limitado de conjuntos quaisquer, estes ou são todos limitados ou todos ilimitados, porque a distância entre dois conjuntos, um limitado e o outro não, é necessariamente infinita.

*Se fôr limitado o conjunto das distâncias  $\overline{AB}$  entre cada elemento  $A$  dum conjunto ( $A$ ) e um determinado conjunto  $B$ , o conjunto ( $A$ ) será limitado.*

Efectivamente, se fôr limitado o conjunto das distâncias  $\overline{AB}$ , a relação

$$\overline{AA'} \geq \overline{AB} + \overline{BA'}$$

mostra que também será limitado o conjunto das distâncias  $\overline{AA'}$  entre dois elementos quaisquer do conjunto ( $A$ ).

O recíproco dêste enunciado não é sempre verdadeiro no caso que estamos considerando dum conjunto ( $A$ ) de conjuntos ilimitados; será verdadeiro se o conjunto  $B$  fôr um elemento de ( $A$ ), ou se existir um elemento  $A'$  dêste conjunto a uma distância finita de  $B$ , como se conclui da relação

$$\overline{AB} \geq \overline{AA'} + \overline{A'B}.$$

**Observação.** — Não é sempre possível dividir um conjunto limitado  $(A)$  de conjuntos ilimitados  $A$  num número finito de conjuntos parciais de diâmetros tão pequenos quanto quisermos. Para citar um exemplo consideremos o espaçoide dos pontos do plano  $xOy$  de coordenadas rectangulares, e suponhamos que  $(A)$  é constituído pela infinidade de conjuntos que se obtêm somando o conjunto dos pontos do semieixo positivo  $Ox$  ao conjunto dos pontos de cada segmento de recta de extremos  $(i, 0)$  e  $(i, 1)$  ( $i=1, 2, \dots$ ). Como a distância entre dois destes conjuntos, quaisquer que sejam, é igual a 1, torna-se evidentemente impossível dividir o conjunto limitado  $(A)$  num número finito de conjuntos parciais de diâmetros inferiores à unidade.

Referindo-nos agora a um conjunto  $(A)$  de subconjuntos ilimitados  $A$  dum espaçoide qualquer, e supondo que são finitas as distâncias entre estes conjuntos tomados dois a dois, da observação anterior concluímos que *pode não existir espaçoide algum a que pertença o conjunto  $(A)$  e para o qual se conserve a mesma definição de distância entre os elementos deste conjunto.*

**56. Conjuntos  $(A)$  quási-limitados.** — Diremos que um conjunto  $(A)$  de subconjuntos quaisquer de  $P$  é *quási-limitado* quando, dado um conjunto limitado  $B$  (um elemento, por exemplo), fôr limitado o conjunto das distâncias reduzidas  $AB$  entre cada elemento  $A$  de  $(A)$  e o referido conjunto  $B$ . Assim, se existir o produto dos diversos conjuntos  $A$ , estes constituirão necessariamente um conjunto quási-limitado.

Notemos que, se fôr limitado o conjunto das distâncias reduzidas  $AB$  entre cada elemento  $A$  de  $(A)$  e um determinado conjunto limitado  $B$ , o mesmo sucederá se substituirmos  $B$  por um outro conjunto qualquer  $C$ . É o que se deduz da relação

$$AC < AB + BC + \Delta \quad [v. IV, p. 90, (1)].$$

na qual  $\Delta$  representa o diâmetro de  $B$ .

A definição de conjunto  $(A)$  quási-limitado pode substituir-se pela seguinte: um conjunto  $(A)$  é quási-limitado quando podemos determinar um esferóide  $F$  de forma que exista o produto  $A \times F$  seja qual fôr o elemento  $A$  de  $(A)$ . Com efeito, se fôr  $Ab < \rho$  para qualquer elemento  $A$  de  $(A)$ , para um certo elemento  $\bar{b}$  de  $P$  e para um certo número  $\rho$ , existirá o produto  $A \times F$  de qualquer

elemento  $A$  de  $(A)$  pelo esferóide  $F$  de centro no elemento  $b$  e raio  $\rho$ . Reciprocamente, se existir o produto  $A \times F$  de qualquer elemento  $A$  de  $(A)$  por um determinado esferóide  $F$  de centro  $b$  e raio  $\rho$ , teremos  $\overline{Ab} < \rho$  para qualquer elemento  $A$  de  $(A)$ .

Por conseguinte ainda podemos dizer que um conjunto  $(A)$  de conjuntos  $A$  é quási-limitado quando podemos determinar um elemento  $a$  em cada conjunto  $A$  de tal sorte que seja limitado o conjunto de todos os elementos  $a$  assim determinados.

É evidente que a soma dum número finito de conjuntos  $(A)$  quási-limitados também é um conjunto quási-limitado.

Uma sucessão de conjuntos quaisquer diz-se quási-limitada quando o conjunto dos respectivos termos é quási-limitado.

*Qualquer conjunto limitado  $(A)$  (de conjuntos limitados ou ilimitados) também é quási-limitado.*

Com efeito, fixemos um elemento  $b$  dum determinado elemento  $B$  dum dado conjunto limitado  $(A)$ . Temos  $\overline{Ab} < \overline{AB}$  para qualquer elemento  $A$  de  $(A)$ , e, por ser limitado o conjunto das distâncias  $\overline{AB}$ , o mesmo acontece ao conjunto das distâncias reduzidas  $\overline{Ab}$ . Logo o conjunto  $(A)$  é quási-limitado.

A definição de conjunto  $(A)$  quási-limitado é, portanto, uma generalização da definição de conjunto  $(A)$  limitado.

*Seja  $(A)$  um conjunto quási-limitado de conjuntos limitados  $A$ . Para que  $(A)$  seja limitado é necessário e suficiente que os diâmetros dos conjuntos  $A$  constituam um conjunto limitado.*

Designemos por  $D$  o conjunto dos diâmetros dos conjuntos  $A$  (que supomos limitados) constituintes dum dado conjunto quási-limitado  $(A)$ .

Se  $(A)$  é limitado, o mesmo acontece a  $D$  [v. iv, p. 129, l. 26].

Reciprocamente, se  $D$  é limitado, o mesmo acontece a  $(A)$  como vamos demonstrar. Começemos por determinar um elemento  $b$  em cada conjunto  $A$  de forma que o conjunto  $B$  desses elementos seja limitado, o que é possível porque  $(A)$  é quási-limitado. Tomemos agora dois elementos quaisquer  $a$  e  $a'$  da soma  $\sum A$ , sejam  $A$  e  $A'$  duas parcelas desta soma a que pertençam tais elementos, sejam  $b$  e  $b'$  os elementos de  $A$  e  $A'$  que figuram em  $B$ . A relação

$$\overline{aa'} < \overline{ab} + \overline{bb'} + \overline{b'a'}$$



dá, designando por  $\Delta$  e  $\Delta'$  os diâmetros de  $D$  e  $B$  respectivamente,

$$\overline{a a'} < 2\Delta + \Delta'.$$

Por conseguinte o conjunto  $\sum A$  é limitado, assim como o conjunto  $(A)$  [v. IV, p. 130, l. 3].

*Uma sucessão de conjuntos que seja quasi-limitada admite necessariamente um limite integral.*

Com efeito, se a sucessão de conjuntos

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

é quasi-limitada, podemos determinar um elemento  $a_i$  em cada termo  $A_i$  de forma que seja limitada a sucessão dos elementos

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$$

Ora, o limite integral desta sucessão, que existe necessariamente, pertence ao limite integral da proposta, como é evidente.

São igualmente simples de justificar as duas proposições seguintes:

*Uma sucessão de conjuntos que admita um limite comum é quasi-limitada.*

*Para que exista o limite integral duma dada sucessão de conjuntos é necessário e suficiente que tal sucessão admita uma sub-sucessão quasi-limitada.*

57. Definição de convergência duma sucessão de conjuntos quaisquer. — No parágrafo precedente considerámos apenas os limites das sucessões de conjuntos de soma limitada. Vimos que, para uma destas sucessões convergir para um limite  $A$  é necessário e suficiente que os respectivos limites integral e comum coincidam com o lugar  $[A]$  [p. 132, l. 22].

Aproveitando esta propriedade podemos generalizar a definição de limite duma sucessão de conjuntos de soma limitada para o caso duma sucessão de conjuntos quaisquer

$$(1) \quad A_1, A_2, \dots, A_i, \dots,$$

dizendo que esta é *convergente* quando existe o limite  $\bar{A}$  e quando temos  $\bar{A} | \bar{A}$ ; a sucessão *converge* ou *tende*, por definição, para qualquer conjunto  $A$  juxtaposto ao limite  $\bar{A} | \bar{A}$ . Também dizemos que os conjuntos  $A_i$  convergem ou tendem para qualquer desses conjuntos  $A | \bar{A} | \bar{A}$ . Logo, se a sucessão (1) converge para o limite  $A$ , o lugar deste conjunto é constituído pelos limites das sucessões convergentes de elementos extraídos dos termos correspondentes de (1).

Uma sucessão de conjuntos (1) que não é convergente chama-se *divergente*. Neste caso diremos que a sucessão (1) *diverge para infinito*, ou que os conjuntos  $A_i$  divergem para infinito, quando as distâncias reduzidas

$$\underline{A_1 B}, \underline{A_2 B}, \dots, \underline{A_i B}, \dots$$

entre cada termo da sucessão (1) e um certo conjunto limitado  $B$  formarem uma sucessão de números que tenda para infinito. Na presente definição o conjunto limitado  $B$  poderá ser qualquer porque, para um outro  $C$ , de diâmetro  $\Delta$ , vem

$$\underline{A_i C} \geq \underline{A_i B} - \underline{CB} - \Delta \quad [v. IV, p. 90, (1)].$$

Por conseguinte, como o conjunto  $B$  pode substituir-se por um simples elemento, segue-se que uma sucessão de conjuntos quaisquer diverge para infinito quando a cada esferóide corresponde uma ordem a partir da qual os termos lhe são exteriores.

Em particular, dizemos que uma sucessão de elementos

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$$

diverge para infinito quando, dado um elemento  $b$ , a sucessão de distâncias

$$\overline{a_1 b}, \overline{a_2 b}, \dots, \overline{a_i b}, \dots$$

tende para infinito.

Os termos da sucessão convergente de conjuntos podem ser ou não todos limitados; o respectivo limite pode ser limitado

ou ilimitado, independentemente de qualquer destas hipóteses relativas aos termos da sucessão. Quere dizer, acôrca d'êste assunto apresentam-se, de facto, todos os casos possíveis, como podemos verificar nos seguintes exemplos de sucessões convergentes.

Consideremos o espaçoide dos pontos do plano  $xOy$ . As rectas

$$x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, \dots, x = \frac{1}{i}, \dots$$

convergem para o eixo  $Oy$ , e as rectas

$$y = \frac{1}{2}x, y = \frac{1}{3}x, \dots, y = \frac{1}{i}x, \dots$$

convergem para o eixo  $Ox$ .

Os círculos de centros na origem e raios iguais a  $1, 2, \dots, i, \dots$  convergem para todo o plano.

Se substituirmos nesta sucessão de círculos cada um de ordem ímpar por todo o plano, obteremos uma nova sucessão de conjuntos que ainda converge para todo o plano.

A sucessão dos conjuntos de pontos que se obtêm juntando a origem  $O$  aos pontos de cada parábola

$$y^2 = x - 1, y^2 = x - 2, \dots, y^2 = x - i, \dots$$

converge para a origem  $O$ .

Se aos termos de ordem ímpar desta sucessão de conjuntos suprimirmos os pontos das respectivas parábolas, a nova sucessão ainda convergirá para o ponto  $O$ .

Duma maneira geral apenas podemos afirmar que:

*Qualquer sucessão convergente de conjuntos é necessàriamente quási-limitada.*

Sabemos, com efeito, que uma sucessão de conjuntos que admita um limite comum é necessàriamente quási-limitada [p. 143, l. 17].

**Observação.** — Consideremos agora o caso particular de conjuntos de pontos dum certo espaço ordinário.

Reproduzindo a definição de limite de conjuntos apresentada por BOREL e VALLÉE POUSSIN <sup>(1)</sup>, uma sucessão de conjuntos

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

tem um *limite único*  $A$  quando os conjuntos limites completo e restrito desta sucessão coincidem com o conjunto  $A$ . Noutros termos: a sucessão precedente tem um limite único  $A$  quando a um ponto qualquer  $a$  se pode associar uma ordem a partir da qual esse ponto ou pertence a todos os conjuntos  $A_i$  ou a nenhum deles, conforme  $a$  é ou não um ponto de  $A$ .

Esta definição de limite duma sucessão de conjuntos é distinta da que enunciámos precedentemente. Basta notar, com efeito, que uma simples sucessão de números que seja propriamente infinita e que tenda para um limite no sentido habitual, também tende para o mesmo limite segundo a nossa definição, mas não tem um limite único na definição de V. P.. A definição de V. P. não inclui, pois, como caso particular a definição de limite duma sucessão de números.

Casos há em que podemos afirmar *a priori* que uma sucessão de conjuntos tende para um mesmo limite num e noutro sentido. São os casos das sucessões monótonas crescentes e das monótonas decrescentes de conjuntos fechados. No primeiro caso a sucessão tem por limite a soma dos termos [*n.º* 68, 12.<sup>a</sup> *prop.*]; no segundo o produto deles quando este produto existe, isto é, quando a sucessão é quási-limitada [*n.º* 68, 9.<sup>a</sup> *prop.*].

Não nos interessa registar outras relações entre sucessões convergentes e os respectivos limites nas duas mencionadas definições.

Como se sabe, os limites de V. P. encontram aplicações na teoria da medida dos conjuntos; os nossos limites têm aplicações de carácter topológico, como havemos de ver.

58. Algumas propriedades das sucessões convergentes de conjuntos. — Da definição de limite duma sucessão de conjuntos quaisquer resulta, por evidência, a seguinte proposição:

*Seja  $A$  é um limite da sucessão convergente de conjuntos (1).*

(1) DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, p. 8.

*Para que esta sucessão também convirja para o limite  $B$  é necessário e suficiente que seja  $B \parallel A$ .*

Por outras palavras, todos os limites duma sucessão convergente de conjuntos são juxtapostos entre si, e são limites da mesma sucessão todos os conjuntos juxtapostos a um dos seus limites.

Se adoptarmos o símbolo  $\lim A_i$  para indicar qualquer limite da sucessão convergente (1), bastará então escrever  $\lim A_i \parallel A$ , identicamente ao que fizemos na p. 130, l. 10, para mostrar que o conjunto  $A$  é um dos limites da referida sucessão.

Como os limites integral e comum duma sucessão de conjuntos não se alteram quando substituímos todos ou alguns desses conjuntos por outros juxtapostos aos primeiros [v. iv, p. 122, l. 19], segue-se que:

*A condição  $\lim A_i \parallel A$  continuará verdadeira se substituirmos todos os conjuntos  $A$  e  $A_i$ , ou apenas alguns deles, por outros juxtapostos aos primeiros.*

Em particular: se fôr  $\lim A_i \parallel A$  também será  $\lim [A_i] \parallel A$ .

É claro que *uma sucessão de conjuntos quaisquer não pode convergir para dois conjuntos totalmente fechados que sejam distintos*. De acôrdo com a notação já estabelecida para designar o lugar dum conjunto, o limite totalmente fechado da sucessão convergente (1) será representado por  $[\lim A_i]$ . Segundo a definição de limite, temos  $[\lim A_i] \mid \ddot{A} \mid \dot{A}$ .

*Se o limite totalmente fechado duma sucessão convergente de conjuntos (1) é exterior a um dado esferóide  $F$ , o mesmo acontece aos termos da sucessão a partir de certa ordem.*

Suponhamos que o limite totalmente fechado duma sucessão convergente de conjuntos (1) é exterior ao esferóide  $F$ . Se não existisse uma ordem a partir da qual os termos de (1) fôsem exteriores a  $F$ , a mesma sucessão (1) admitiria uma subsucessão formada de termos não exteriores a  $F$ , da qual poderíamos extrair, portanto, uma sucessão de elementos pertencentes a  $F$ . Esta sucessão de elementos, por sua vez, admitiria um limite que, pertencendo necessariamente a  $\ddot{A} \mid [\lim A_i]$ , não seria exterior a  $F$ .

*Se os diâmetros dos termos duma dada sucessão convergente de conjuntos limitados constituírem um conjunto limitado, a soma desses conjuntos será limitada e reciprocamente.*

Com efeito, seja dada uma sucessão convergente de conjuntos limitados. Esta sucessão é quási-limitada [p. 145, l. 25]; logo, se o conjunto dos diâmetros dos termos fôr limitado, o mesmo acontecerá ao conjunto constituído por êsses termos [p. 142, l. 22], assim como à respectiva soma [v. IV, p. 130, l. 3].

A proposição recíproca é evidente.

Por conseguinte, considerar uma sucessão convergente de conjuntos de soma limitada é considerar uma sucessão convergente de conjuntos de diâmetros limitados.

*Dado um conjunto infinito (A) de conjuntos quaisquer, para que estes sejam os termos duma sucessão que divirja para infinito é necessário e suficiente que (A) não admita um subconjunto infinito e quási-limitado.*

A condição é evidentemente necessária. Para demonstrar que é suficiente suponhamos que um dado conjunto (A) de conjuntos A não admite um subconjunto infinito que seja quási-limitado. Consideremos uma sucessão de esferóides concêntricos

$$F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$$

determinados de forma que os raios cresçam para infinito. Como são em número finito os conjuntos A que têm uma parte comum com o esferóide  $F_i$ , segue-se que todos êles podem dispor-se numa infinidade numerada de grupos de conjuntos A em número finito: os conjuntos A com uma parte comum a  $F_1$ , os distintos dos precedentes mas com uma parte comum a  $F_2$ , etc. Por conseguinte podemos formar uma sucessão com todos os conjuntos A, a qual diverge para infinito como faz ver a própria demonstração.

Em particular.

*Para que a sucessão de conjuntos (1) divirja para infinito é necessário e suficiente que não admita uma subsucessão quási-limitada.*

Em virtude do que dissemos na p. 143, l. 19, ainda podemos afirmar o seguinte:

*Para que uma dada sucessão de conjuntos divirja para infinito é necessário e suficiente que não admita um limite integral.*

59. Casos de convergência duma soma de sucessões convergentes de conjuntos. — Se as  $k$  sucessões de conjuntos quaisquer

$$(2) \quad \begin{array}{l} A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \\ B_1, B_2, \dots, B_i, \dots \\ \dots\dots\dots \\ V_1, V_2, \dots, V_i, \dots \end{array}$$

convergirem respectivamente para os limites  $A, B, \dots, V$ , a sucessão

$$(3) \quad \begin{array}{l} S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, \\ \text{na qual é} \\ S_i | A_i + B_i + \dots + V_i \\ (i=1, 2, \dots), \end{array}$$

convergir para o limite

$$S | A + B + \dots + V.$$

Na verdade, vimos no v. iv, p. 125, l. 12, que entre os limites integrais e comuns das sucessões (2) e (3) existem as relações

$$\check{S} | \check{A} + \check{B} + \dots + \check{V}$$

e

$$\hat{S} | > \hat{A} + \hat{B} + \dots + \hat{V},$$

mas, como é

$$\check{A} | \hat{A}, \check{B} | \hat{B}, \dots, \check{V} | \hat{V},$$

temos  $\hat{S} | > \check{S}$ , ou seja  $\hat{S} | \check{S}$ .

Logo, a soma de  $k$  sucessões convergentes de conjuntos é uma sucessão convergente e o limite totalmente fechado da soma é a soma dos limites totalmente fechados das parcelas.

As relações

$$[S] | [A] + [B] + \dots + [V] | \check{A} + \check{B} + \dots + \check{V} | \check{S}$$

mostram que é  $S \parallel \check{S}$ , ou que uma soma qualquer

$$S | A + B + \dots + V$$

de limites das sucessões parcelas é um limite da sucessão soma.

Por exemplo, uma sucessão de conjuntos cujo termo geral seja o conjunto dos termos gerais de diversas sucessões de elementos, convergentes e em número finito, tende para o conjunto dos limites dessas sucessões.

A soma duma infinidade de sucessões convergentes de conjuntos pode ser convergente ou divergente. No primeiro caso, pode o limite totalmente fechado da soma não coincidir com a soma dos limites totalmente fechados das parcelas. Serve de exemplo o que dissemos no v. iv, p. 126, l. 1.

É interessante o seguinte modo de completar tal observação:

*Qualquer sucessão de conjuntos que admita um limite comum pode considerar-se soma duma infinidade numerável de sucessões convergentes (cada uma de conjuntos de soma limitada, querendo), de tal forma que, determinando convenientemente os limites destas sucessões, a soma deles seja um subconjunto previamente dado do referido limite comum* (1).

No caso em que a soma duma infinidade de sucessões convergentes de conjuntos tende para a soma de determinados limites, um de cada sucessão parcela, podemos afirmar que uma soma de outros quaisquer limites, um de cada sucessão parcela, também é limite da sucessão soma, como acontece quando as sucessões parcelas são em número finito. Basta notar, com efeito, que a soma daqueles primeiros limites juxtapõe-se à soma destes segundos [p. 138, l. 21].

Ainda no mesmo caso, porém, certos limites da sucessão soma podem não resultar de somas de limites das sucessões parcelas. É o que se verifica com as sucessões de números

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 + \frac{1}{1}, & 1 + \frac{1}{2}, & \dots, & 1 + \frac{1}{i}, & \dots & & \\
 \frac{1}{2} + \frac{1}{1}, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, & \dots, & \frac{1}{2} + \frac{1}{i}, & \dots & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 \frac{1}{h} + \frac{1}{1}, & \frac{1}{h} + \frac{1}{2}, & \dots, & \frac{1}{h} + \frac{1}{i}, & \dots & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & 
 \end{array}$$

(1) Esta afirmação será justificada no n.º 61 [5.ª prop.].



Neste exemplo o limite fechado da soma é o conjunto dos números

$$0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{h}, \dots,$$

o qual não se pode obter somando limites das parcelas.

Duma maneira geral simplesmente podemos dizer que o limite comum da soma dum infinidade de sucessões convergentes de conjuntos contém a soma dos limites das parcelas, como é evidente. Logo, dada a convergência da sucessão soma, o limite totalmente fechado desta contém a soma dos limites das parcelas.

Eis um caso em que o limite totalmente fechado da soma dum infinidade de sucessões convergentes coincide com a soma dos limites totalmente fechados das mesmas sucessões:

*Suponhamos que a sucessão (1) é soma dum infinidade numerada de sucessões convergentes de conjuntos*

$$(4) \quad \begin{array}{l} A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,i}, \dots \\ A_{2,1}, A_{2,2}, \dots, A_{2,i}, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{h,1}, A_{h,2}, \dots, A_{h,i}, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

*de tal forma que os termos de cada uma delas sejam subconjuntos dos termos correspondentes da imediatamente seguinte. Se a sucessão*

$$(5) \quad \sum_i A_{1,i}, \sum_i (A_{2,i} - A_{1,i}), \dots, \sum_i (A_{h,i} - A_{h-1,i}), \dots$$

*divergir para infinito, a proposta convergirá para a soma dos limites das parcelas.*

Consideremos, com efeito, um elemento  $a$  do limite integral  $\bar{A}$  da sucessão (1). Seja  $F$  um esferóide de centro nesse elemento. Como a partir de certa ordem  $k$  os termos da sucessão (5) se encontram exteriores a  $F$ , segue-se que um elemento qualquer comum a  $F$  e a um termo da sucessão (1) também é um elemento do termo da mesma ordem dum das  $k-1$  primeiras suces-

sões (4). Daqui concluímos, sem dificuldade, que o elemento  $a$ , centro do esferóide  $F$ , pertence ao limite integral duma destas  $k-1$  sucessões, ou seja ao limite comum da mesma, e, emfim, ao limite comum da proposta. Logo temos  $\bar{A} \mid \bar{A}$ , sendo evidente que o limite totalmente fechado da sucessão soma coincide com a soma dos limites totalmente fechados das sucessões parcelas.

Em consequência temos a proposição seguinte:

*Consideremos a sucessão (1) como sendo a soma duma infinidade qualquer de sucessões de conjuntos, e seja*

$$(6) \quad A'_1, A'_2, \dots, A'_i, \dots$$

*a soma das sucessões desta infinidade cada uma das quais admita um termo com um elemento dum dado esferóide  $F$ . Se forem convergentes tôdas as sucessões (6) relativas aos esferóides duma certa sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, a sucessão proposta convergirá para a soma dos limites das sucessões (6).*

Com efeito, neste caso é evidente que as sucessões (6) relativas aos esferóides considerados encontram-se precisamente nas condições das sucessões (4) da proposição anterior. A sucessão proposta converge, por conseguinte, para a soma dos limites das referidas sucessões (6).

Observemos que a proposição agora demonstrada permanecerá verdadeira se supusermos que, em cada sucessão parcela, alguns termos, mas em número finito, possam ser desprovidos de elementos.

*Se a sucessão (1) fôr soma duma infinidade numerada de sucessões convergentes de conjuntos, e se a soma dos termos da primeira, a soma dos termos da segunda, etc. formarem uma sucessão que divirja para infinito, a proposta convergirá para a soma dos limites das parcelas.*

Efectivamente, nas condições do presente enunciado, é convergente a soma das sucessões daquela infinidade cada uma das quais admita um termo com um elemento dum dado esferóide, porque tais sucessões são convergentes e em número finito. Logo a sucessão proposta converge para a soma dos limites das parcelas, em virtude da proposição precedente.

Esta proposição ainda será verdadeira se supusermos que alguns termos de cada sucessão, em número finito, possam ser desprovidos de elementos.

As proposições que a seguir enunciamos têm demonstrações muito simples :

*A soma dum número finito de sucessões de conjuntos que divirjam para infinito também diverge para infinito* <sup>(1)</sup>.

*A soma duma sucessão convergente com uma outra que divirja para infinito converge para os mesmos limites que a primeira.*

*A diferença entre uma sucessão convergente e uma outra que divirja para infinito* <sup>(2)</sup> *converge para os mesmos limites que a primeira.*

Notemos que é possível dar maior generalidade às três últimas proposições, pois estas permanecerão verdadeiras se admitirmos que alguns termos (em número finito ou infinito) de cada sucessão que divirja para infinito possam ser desprovidos de elementos. Uma destas sucessões diverge para infinito, por definição, se a cada esferóide corresponde uma ordem a partir da qual os termos providos de elementos lhe são exteriores.

Logo, considerando uma sucessão de esferóides concêntricos

$$F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$$

cujos raios tendam para infinito, podemos afirmar que é condição necessária e suficiente de convergência duma dada suces-

<sup>(1)</sup> Poderá não acontecer o mesmo, porém, quando se tratar duma soma de infinitas sucessões.

<sup>(2)</sup> Diferença entre duas sucessões de conjuntos

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

e

$$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots,$$

dado o caso de ser

$$A_1 > B_1, A_2 > B_2, \dots, A_i > B_i, \dots,$$

é a sucessão

$$A_1 - B_1, A_2 - B_2, \dots, A_i - B_i, \dots$$

são quási-limitada de conjuntos (1) que seja convergente a sucessão

$$G_1, G_2, \dots, G_i, \dots,$$

na qual é

$$G_i \mid F_i \times A_i \text{ (}^1\text{)} \\ (i = 1, 2, \dots).$$

Esta sucessão admite os mesmos limites que a proposta. Efectivamente, basta notar que a sucessão

$$A_1 - G_1, A_2 - G_2, \dots, A_i - G_i, \dots$$

diverge para infinito.

O mesmo poderemos dizer se, em vez da sucessão de termo geral  $G_i$ , considerarmos a sucessão

$$H_1, H_2, \dots, H_i, \dots,$$

na qual é

$$H_i \mid T_i + (F_i \times A_i) \\ (i = 1, 2, \dots),$$

designando por  $T_i$  a estrema do esferóide  $F_i$ . Na verdade, a sucessão

$$T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$$

também diverge para infinito [v. iv, p. 27, l. 1].

Em particular, dado um conjunto qualquer  $A$ , as sucessões de termos gerais

$$F_i \times A \quad \text{e} \quad T_i + (F_i \times A)$$

convergem para o limite  $A$ .

O produto, se existir, de várias sucessões convergentes de conjuntos poderá não ser convergente, e, no caso afirmativo, poderá o respectivo limite totalmente fechado coincidir ou não com o produto dos limites totalmente fechados das sucessões

---

(<sup>1</sup>) Todos os produtos  $F_i \times A_i$  serão providos de elementos se determinarmos convenientemente o raio de  $F_i$ , visto tratar-se duma sucessão (1) quási-limitada.

factores. Apenas se pode afirmar dum modo geral que, se existir o produto de várias sucessões convergentes de conjuntos, o limite integral da sucessão produto pertencerá ao produto dos limites totalmente fechados das sucessões factores, como é evidente [*ex. do v. IV, p. 126, l. 13*].

60. Redução ao estudo da convergência das sucessões de conjuntos de soma limitada. — Consideremos uma sucessão quási-limitada de conjuntos quaisquer (1). Seja  $F$  um esferóide, também qualquer, de interior  $I$  e estrema  $T$ , e formemos as sucessões de conjuntos

$$(7) \quad G_1, G_2, \dots, G_i, \dots$$

e

$$(8) \quad H_1, H_2, \dots, H_i, \dots$$

de termos gerais

$$G_i | F \times A_i \quad \text{e} \quad H_i | T + (F \times A_i).$$

Convencionemos dizer que a sucessão (7) existe tôdas as vezes que os seus termos forem providos de elementos a partir de certa ordem. O mesmo dizemos com respeito à sucessão (8). Tratando-se duma sucessão (1) quási-limitada, como estamos a supor, podemos determinar o esferóide  $F$  com o raio suficientemente grande, depois de fixarmos o centro, de forma que exista a respectiva sucessão (7), e portanto a (8). É claro que a sucessão (8) existe para qualquer esferóide  $F$  que admita uma estrema.

Como um elemento de  $I$  só é limite de elementos que a partir de certa ordem pertencem necessariamente a este mesmo conjunto, torna-se evidente que uma sucessão que tenda para um elemento de  $I$  e que seja formada por elementos dos termos correspondentes duma das três sucessões (1), (7) ou (8), também é formada por elementos que, a partir de certa ordem, pertencem aos termos correspondentes de qualquer das outras duas sucessões. O que dizemos das sucessões (1), (7) e (8) dizemos igualmente de três respectivas subsucessões mas que sejam correspondentes entre si. Logo são verdadeiras as relações

$$(9) \quad I \times \check{A} | I \times \check{G} \quad \text{e} \quad I \times \check{A} | I \times \check{G},$$

$$(10) \quad I \times \check{A} | I \times \check{H} \quad \text{e} \quad I \times \check{A} | I \times \check{H},$$

das quais resulta que os limites  $\ddot{A}$  e  $\dot{A}$  são as somas

$$(11) \quad \ddot{A} \mid \sum (I \times \ddot{G}) \quad \text{e} \quad \dot{A} \mid \sum (I \times \dot{G})$$

ou

$$(12) \quad \ddot{A} \mid \sum (I \times \ddot{H}) \quad \text{e} \quad \dot{A} \mid \sum (I \times \dot{H})$$

estendidas a todos os esferóides passíveis  $F$ , ou simplesmente aos duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito.

Notemos que também é

$$(13) \quad \ddot{A} \mid \sum \ddot{G} \quad \text{e} \quad \dot{A} \mid \sum \dot{G},$$

porque estas somas estão contidas nos limites  $\ddot{A}$  e  $\dot{A}$  e contêm as somas (11) respectivamente.

Quando a sucessão (1) fôr convergente, o respectivo limite totalmente fechado será, pois, qualquer das somas acima representadas.

Registemos ainda as relações

$$(14) \quad \ddot{H} \mid T + (F \times \ddot{A}) \quad \text{e} \quad \dot{H} \mid T + (F \times \dot{A}),$$

que se deduzem imediatamente da expressão de  $H_i$  atendendo a que  $F$  e  $T$  são conjuntos totalmente fechados [v. iv, p. 26, l. 14 e 27] e a que todo o elemento interior a  $F$  só pode ser limite de elementos que pertençam a êste mesmo esferóide a partir de certa ordem.

Dadas estas noções, demonstremos que:

*É condição necessária e suficiente de convergência duma sucessão quási-limitada de conjuntos (1) que seja*

$$I \times \ddot{G} \mid I \times \dot{G}$$

*para qualquer esferóide  $F$ , ou apenas para os duma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito. A sucessão (1) converge, neste caso, para a soma  $A \mid \sum \ddot{G}$  estendida a todos êsses esferóides.*

A condição é necessária porque, dada a convergência da

sucessão (1), temos  $\ddot{A} \mid \dot{A}$ , donde resulta  $I \times \ddot{G} \mid I \times \dot{G}$  [rel. (9)] seja qual fôr o esferóide  $F$ .

A condição é suficiente porque, supondo que é  $I \times \ddot{G} \mid I \times \dot{G}$  para qualquer esferóide duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, vem  $\ddot{A} \mid \dot{A}$  [rel. (11)], e a sucessão converge para a soma  $A \mid \sum \dot{G}$  estendida a todos êsses esferóides [rel. (13)].

Demonstremos agora as seguintes proposições que fazem depender o estudo da convergência duma sucessão de conjuntos quaisquer do estudo da convergência de sucessões de conjuntos de soma limitada:

*A sucessão quási-limitada de conjuntos (1) será convergente tôdas as vezes que fôr possível determinar uma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito para cada um dos quais seja convergente a respectiva sucessão (7). O limite totalmente fechado da sucessão (1) será a soma dos limites destas sucessões (7).*

Com efeito, se fôr possível determinar uma sucessão de esferóides nas condições do presente enunciado, como será então  $\ddot{G} \mid \dot{G}$  para cada um deles, teremos  $\ddot{A} \mid \dot{A}$  [rel. (13)]. Logo a sucessão (1) convergirá para a soma  $A \mid \sum \dot{G}$  dos limites  $\dot{G}$  das sucessões (7) relativas aos mesmos esferóides.

*Para a convergência da sucessão quási-limitada de conjuntos (1) é necessário e suficiente que sejam convergentes as sucessões (8) relativas a todos os esferóides possíveis, ou apenas aos duma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito.*

Com efeito, se a sucessão proposta fôr convergente, isto é, se fôr  $\ddot{A} \mid \dot{A}$ , teremos  $\ddot{H} \mid \dot{H}$  para qualquer esferóide  $F$ , como se conclui das relações (14), e a sucessão (8) convergirá para o limite  $\ddot{H} \mid T + (F \times \dot{A})$ . Se a sucessão (1) convergir para o limite  $A$ , a (8) convergirá para o limite  $H \mid T + (F \times A)$ , porque da condição  $A \parallel \dot{A}$  resulta

$$T + (F \times A) \parallel T + (F \times \dot{A}) \quad [p. 139, l. 10],$$

ou seja  $H \parallel \dot{H}$ .

Reciprocamente, se fôr  $\vec{H} \parallel \vec{H}$  para qualquer esferóide duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, teremos  $\vec{A} \parallel \vec{A}$  em virtude das relações (12) (4). Como vemos, a sucessão (1) convergirá então para a soma  $\vec{A} \parallel \sum (\vec{I} \times \vec{H})$  estendida a todos êsses esferóides, na qual  $\vec{H}$  representa o limite totalmente fechado da sucessão (8).

64. Outras relações de convergência com as sucessões de conjuntos de soma limitada. — *Se a sucessão de conjuntos (1) converge para o limite  $\vec{A}$ , qualquer sucessão*

$$\vec{A}'_1, \vec{A}'_2, \dots, \vec{A}'_i, \dots$$

*de subconjuntos de soma limitada extraídos respectivamente dos conjuntos (1) é tal que  $\lim \vec{A}'_i \vec{A} = 0$ .*

Efectivamente, se a sucessão (1) converge para o limite  $\vec{A}$ , temos  $\vec{A} \parallel \vec{A}$ , donde vem

$$\vec{A}'_i \vec{A} = \vec{A}'_i \vec{A} \quad [v. \text{IV}, p. 97, l. 3]$$

e

$$\lim \vec{A}'_i \vec{A} = \lim \vec{A}'_i \vec{A} = 0 \quad [v. \text{IV}, p. 117, l. 9].$$

*Se a sucessão de conjuntos (1) converge para o limite  $\vec{A}$ , qualquer subconjunto limitado  $\vec{A}'$  de  $\vec{A}$  é tal que  $\lim \vec{A}' \vec{A} = 0$ .*

Com efeito, temos a relação  $\vec{A}' \parallel \vec{A}$ , da qual se deduz  $\lim \vec{A}' \vec{A} = 0$  [v. IV, p. 118, l. 1].

*Qualquer subconjunto limitado  $\vec{A}'$  do limite comum  $\vec{A}$  duma sucessão de conjuntos quaisquer (1) é limite duma sucessão convergente de subconjuntos de soma limitada extraídos respectivamente dos conjuntos (1).*

Com efeito, cada termo  $\vec{A}_i$  da sucessão proposta admite um subconjunto  $\vec{A}'_i$  tal que

$$\vec{A}'_i \vec{A}_i \leq \vec{A}'_i \vec{A}_i + \frac{1}{i} \quad [v. \text{IV}, p. 109, l. 7];$$

(4) Notemos que existe o limite  $\vec{A}$  por se tratar duma sucessão de conjuntos (1) quási-limitada.



logo a sucessão destes subconjuntos verifica a condição  $\lim \overline{A'}_i = 0$ , porque também é  $\lim \overline{A'}_i = 0$  [v. IV, p. 118, l. 1].

Esta proposição será generalizada mais adiante [n.º 67, 7.ª prop.], bem como o caso particular seguinte:

*Qualquer subconjunto limitado do limite totalmente fechado duma sucessão convergente de conjuntos quaisquer (1) é limite duma sucessão convergente de subconjuntos de soma limitada extraídos respectivamente dos conjuntos (1).*

**Observação.** — Em virtude desta última proposição, se designarmos por **A** o limite totalmente fechado da sucessão proposta e por **B** um conjunto qualquer limitado e totalmente fechado, o produto **A**  $\times$  **B**, caso exista, é limite duma sucessão convergente

$$B'_1, B'_2, \dots, B'_i, \dots$$

de subconjuntos de soma limitada extraídos respectivamente dos conjuntos (1). Mas é fácil reconhecer que a sucessão

$$B'_1 + (A_1 \times B), B'_2 + (A_2 \times B), \dots, B'_i + (A_i \times B), \dots$$

também converge para o limite **A**  $\times$  **B**; na verdade, qualquer elemento do limite integral desta sucessão é evidentemente um elemento de **A**  $\times$  **B**, e, portanto, um elemento do limite comum da mesma sucessão. Podemos dizer, por conseguinte, que o produto **A**  $\times$  **B** pode considerar-se limite duma sucessão convergente de subconjuntos de soma limitada extraídos dos termos da mesma ordem da sucessão proposta, subconjuntos estes que por sua vez contêm os termos correspondentes da sucessão

$$A_1 \times B, A_2 \times B, \dots, A_i \times B, \dots$$

Logo, se dividirmos o produto **A**  $\times$  **B** em diversos conjuntos **A'**, em número finito ou infinito, ainda poderemos afirmar, em virtude do que acabámos de dizer e da proposição da p. 134, l. 2, o seguinte: cada conjunto **A'** é limite duma sucessão convergente de subconjuntos

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_i, \dots$$

extraídos dos termos correspondentes da proposta, de tal forma que seja

$$\sum A'_i \mid > A_i \times B \quad (i = 1, 2, \dots)^{(1)}.$$

Uma sucessão de conjuntos quaisquer que admita um limite comum pode considerar-se soma duma infinidade numerável de sucessões convergentes, cada uma de conjuntos de soma limitada; se  $A'$  é um subconjunto do limite comum da proposta, podemos determinar convenientemente essas sucessões e os respectivos limites de forma que a soma dêstes seja o subconjunto  $A'$ .

Consideremos um subconjunto  $A'$  do limite  $\hat{A}$  duma sucessão (1) de conjuntos quaisquer. Dividamos êste subconjunto numa infinidade numerável de conjuntos limitados

$$A' \mid B_1 + B_2 + \dots + B_h + \dots \quad (2),$$

e façamos o mesmo a cada um dos conjuntos  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} A_1 \mid & A_{1,1} + A_{2,1} + \dots + A_{h,1} + \dots \\ A_2 \mid & A_{1,2} + A_{2,2} + \dots + A_{h,2} + \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_i \mid & A_{1,i} + A_{2,i} + \dots + A_{h,i} + \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Os conjuntos  $B_h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ) são, como vimos há pouco, limites de sucessões convergentes

$$\begin{aligned} & B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{1,i}, \dots \\ & B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{2,i}, \dots \\ (15) & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & B_{h,1}, B_{h,2}, \dots, B_{h,i}, \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

(1) Estas considerações ser-nos-ão úteis mais adiante.

(2) Se o conjunto  $A'$  fôr limitado, poderemos fazer

$$B_h \mid A' \quad (h = 1, 2, \dots);$$

se fôr ilimitado poderemos fazer, por exemplo,  $B_h \mid A' \times F_h$ , sendo

$$F_1, F_2, \dots, F_h, \dots$$

esferóides concêntricos cujos raios crescem para infinito.

cada uma das quais é formada por subconjuntos de soma limitada extraídos dos termos correspondentes da sucessão (1). Para que a soma destas sucessões seja a sucessão (1) basta fazer, como é permitido,

$$B_{1,1} | A_{1,1}$$

$$B_{2,1} | A_{2,1}, B_{2,2} | A_{1,2}$$

$$B_{3,1} | A_{3,1}, B_{3,2} | A_{2,2}, B_{3,3} | A_{1,3}$$

.....

$$B_{h,1} | A_{h,1}, B_{h,2} | A_{h-1,2}, B_{h,3} | A_{h-2,3}, \dots, B_{h,h} | A_{1,h}$$

.....

As sucessões (15) assim construídas satisfazem às condições do enunciado: admitem por soma a sucessão proposta, cada uma delas é formada por conjuntos de soma limitada, são convergentes e a soma dos respectivos limites  $B_1, B_2, \dots$  é o subconjunto  $A'$  de  $\hat{A}$  dado previamente.

É claro que  $A'$  pode coincidir com o próprio limite  $\hat{A}$ , ou reduzir-se apenas a um elemento deste conjunto.

Notemos que, se a cada par de números inteiros positivos  $(h, i)$  fizermos corresponder a sucessão que resulta da de ordem  $h$  de (15) simplesmente pela substituição do termo  $B_{h,i}$  por  $A_{h,i}$ , as sucessões assim obtidas, que constituem uma infinidade nomeável, satisfazem igualmente às condições desejadas, como é evidente.

*Consideremos qualquer infinidade de subconjuntos limitados  $A'$  do limite comum  $\hat{A}$  duma dada sucessão de conjuntos (1). Esta sucessão é a soma de outras, em correspondência biunívoca com os conjuntos  $A'$ , cada uma das quais, de conjuntos de soma limitada, converge para o correspondente conjunto  $A'$ .*

Com efeito, consideremos uma infinidade qualquer de subconjuntos limitados  $A'$  do limite comum  $\hat{A}$  duma dada sucessão de conjuntos (1). Já vimos que os diversos conjuntos  $A'$  são limites de sucessões convergentes, cada uma constituída por conjuntos de soma limitada e extraídos dos termos correspondentes da sucessão proposta [p. 158 l. 22]. Mas, depois de fixarmos uma infinidade numerável de conjuntos escolhidos entre aqueles  $A'$ , podemos determinar as aludidas sucessões que para estes últi-

mos convergem de forma que a soma destas sucessões seja justamente a proposta, como resulta da demonstração precedente. Torna-se assim evidente que a sucessão (1) é soma de diversas sucessões, em correspondência biunívoca com todos os conjuntos dados  $A'$ , cada uma das quais, de conjuntos de soma limitada, converge para o correspondente conjunto  $A'$ .

Em particular temos a proposição seguinte:

*Suponhamos que a sucessão de conjuntos (1) converge para o conjunto  $A$ , soma duma infinidade de conjuntos limitados  $A'$ . Esta sucessão é a soma de outras, em correspondência biunívoca com os conjuntos  $A'$ , cada uma das quais, de conjuntos de soma limitada, converge para o correspondente conjunto  $A'$  (1).*

*Seja  $A$  um limite duma dada sucessão convergente (1) de conjuntos de soma ilimitada. Se  $A$  é limitado, a sucessão (1) é soma de duas: uma convergente, de conjuntos de soma limitada, com o mesmo limite  $A$  que a primeira, e outra que diverge para infinito (2).*

Com efeito, seja  $A$  o limite totalmente fechado duma dada sucessão convergente de conjuntos (1), limite este que supomos ser limitado. Consideremos um esferóide  $F$  de centro num dado elemento e de raio suficientemente grande para que  $A$  lhe seja interior e para que existam os diversos produtos

$$(16) \quad F \times A_1, F \times A_2, \dots, F \times A_i, \dots$$

Podemos determinar um tal esferóide, porque  $A$  é um conjunto limitado, por hipótese, e porque a sucessão proposta é quási-limitada. Seja  $E$  o exterior de  $F$  e consideremos os produtos

$$(17) \quad E \times A_1, E \times A_2, \dots, E \times A_i, \dots$$

(1) Se excluirmos a hipótese da decomposição de  $A$  num número finito de conjuntos  $A'$ , a proposição da p. 134, l. 2, transformar-se-á num caso particular da que acabámos de enunciar.

(2) É necessário acrescentar que esta sucessão que dizemos divergir para infinito admitirá uma infinidade de termos desprovidos de elementos se a sucessão proposta admitir uma subsucessão de conjuntos de soma limitada [p. 153, l. 17].

Se entre estes produtos houver alguns, em número infinito, que sejam providos de elementos, a respectiva sucessão divergirá para infinito, de outra forma admitiria um limite integral [p. 148, l. 34], que, pertencendo necessariamente a  $\mathbf{A}$ , não seria interior a  $\mathbf{F}$  [v. iv, p. 26, l. 32]. Podemos afirmar, por conseguinte, que a sucessão (16), diferença entre a proposta e a (17), converge para  $\mathbf{A}$ , em virtude do que dissemos na p. 153, l. 10 e 13. Como vemos as duas sucessões (16) e (17) satisfazem às condições desejadas.

**62. Desdobramento duma sucessão convergente de conjuntos quaisquer noutras sucessões convergentes.** — Além das proposições precedentes relativas a êste assunto demonstremos mais as seguintes:

*Seja  $\mathbf{A}$  um limite duma dada sucessão convergente de conjuntos (1). Se  $\mathbf{A}$  é ilimitado, a sucessão (1) é soma de duas: uma convergente de conjuntos limitados, com o mesmo limite  $\mathbf{A}$  que a primeira, e outra que diverge para infinito.*

Suponhamos que o limite  $\mathbf{A}$  duma dada sucessão convergente de conjuntos (1) é ilimitado. Começemos por considerar uma sucessão de esferóides concêntricos

$$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_i, \dots$$

cujos raios cresçam para infinito. Sejam

$$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_i, \dots$$

os exteriores destes esferóides respectivamente. Determinemos o raio de  $\mathbf{F}_1$  de forma que existam os produtos  $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{A}_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), o que é possível por se tratar duma sucessão (1) quási-limitada; assim determinado o esferóide  $\mathbf{F}_1$ , podemos dizer que são providos de elementos os diversos produtos  $\mathbf{F}_h \times \mathbf{A}_i$  de cada um dos aludidos esferóides por cada termo da sucessão (1).

A partir de certa ordem  $r$  existem todos os produtos  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{A}_i$ , porque supusemos ilimitado o limite  $\mathbf{A}$  da sucessão proposta; a partir de certa ordem  $s > r$  existem todos os produtos  $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{A}_i$ ; da mesma forma determinamos uma ordem  $t > s$  a partir da qual existem os produtos  $\mathbf{E}_3 \times \mathbf{A}_i$ , e assim sucessivamente. Por con-

seguinte são providos de elementos todos os termos das sucessões

$$A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, F_1 \times A_r, F_1 \times A_{r+1}, \dots, F_1 \times A_{s-1}, \\ F_2 \times A_s, F_2 \times A_{s+1}, \dots, F_2 \times A_{t-1}, F_3 \times A_t, F_3 \times A_{t+1}, \dots$$

e

$$A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, E_1 \times A_r, E_1 \times A_{r+1}, \dots, E_1 \times A_{s-1}, \\ E_2 \times A_s, E_2 \times A_{s+1}, \dots, E_2 \times A_{t-1}, E_3 \times A_t, E_3 \times A_{t+1}, \dots$$

Estas duas sucessões satisfazem ao nosso enunciado: a soma delas é a sucessão proposta, a primeira é constituída por conjuntos limitados e converge para o limite  $\mathbf{A}$  [p. 153 l. 20], a segunda diverge para infinito.

*Suponhamos que a sucessão de conjuntos (1) converge para o conjunto  $\mathbf{A}$  soma de diversos conjuntos  $\mathbf{A}'$  em número finito ou infinito. Tal sucessão é soma de outras, em correspondência biunívoca com os conjuntos  $\mathbf{A}'$ , cada uma das quais converge para o correspondente conjunto  $\mathbf{A}'$ .*

Já justificámos esta proposição para o caso de considerarmos uma sucessão de conjuntos de soma limitada [p. 134, l. 2]. Na hipótese contrária, mas supondo que o limite  $\mathbf{A}$  é limitado, a sucessão proposta é a soma duma que diverge para infinito com outra, de conjuntos de soma limitada, que ainda converge para o mesmo conjunto  $\mathbf{A}$  [p. 162, l. 13]<sup>(1)</sup>. Esta última, por sua vez, é soma de diversas sucessões em correspondência biunívoca com os conjuntos  $\mathbf{A}'$ , cada uma das quais converge para o correspondente conjunto  $\mathbf{A}'$ . Ora, em virtude do exposto na p. 153, l. 8, as últimas sucessões obedecerão ao enunciado se substituirmos uma delas pela soma da mesma com a citada sucessão que diverge para infinito.

Considerando agora o caso em que o limite  $\mathbf{A}$  é ilimitado, suponhamos, primeiro, que os conjuntos  $\mathbf{A}'$  são em número

(1) Como atrás dissemos, alguns termos dessa sucessão que diverge para infinito podem ser desprovidos de elementos.

finito. Imaginemos uma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito,

$$F_1, F_2, \dots, F_i, \dots,$$

determinados de tal forma que existam os produtos

$$B_1 \mid F_1 \times [A], B_2 \mid [F_2 - F_1] \times [A], \dots, B_h \mid [F_h - F_{h-1}] \times [A], \dots$$

Façamos ainda

$$B'_1 \mid F_1 \times [A'], B'_2 \mid [F_2 - F_1] \times [A'], \dots, B'_h \mid [F_h - F_{h-1}] \times [A'], \dots$$

Temos evidentemente

$$[A] \mid \sum_h B_h \quad \text{e} \quad [A'] \mid \sum_h B'_h \text{ (}^1\text{)}.$$

Também temos

$$B_h \mid \sum_i B'_{h,i} \quad (h = 1, 2, \dots),$$

porque, tratando se dum número finito de conjuntos  $A'$ , vem

$$[A] \mid \sum_i [A'].$$

Para um dado valor de  $h$  cada conjunto  $B'_h$  é limite duma sucessão convergente de subconjuntos de soma limitada

$$(18) \quad A'_{h,1}, A'_{h,2}, \dots, A'_{h,i}, \dots$$

extraídos dos termos correspondentes da sucessão proposta [p. 159, l. 5] (<sup>2</sup>). Determinemos os conjuntos  $A'_{h,i}$  de tal forma que, para cada valor de  $i$ , seja

$$\sum_i A'_{h,i} \mid > [F_h - F_{h-1}] \times A_i,$$

(1) Certos conjuntos  $B'_h$  podem ser desprovidos de elementos.

(2) Os conjuntos  $B'_h$  desprovidos de elementos dão lugar, por convenção, a sucessões (18) de termos também desprovidos de elementos.

o que é possível atendendo ao que dissemos na *p.* 159, *l.* 26. Procedendo identicamente para todos os valores de  $h$ , esta relação e as que lhe são análogas mostram que a soma das sucessões (18) assim determinadas e relativas a todos os conjuntos  $\mathbf{B}_h$  é justamente a sucessão proposta.

Como o conjunto  $\mathbf{B}'_h$  é exterior ao esferóide  $\mathbf{F}_{h-2}$ , resulta que os termos da correspondente sucessão (18) também se encontram, a partir de certa ordem  $k$ , exteriores ao mesmo esferóide [*p.* 147, *l.* 24]. Para que tal circunstância se apresente logo a partir da primeira ordem façamos, como é permitido,

$$\mathbf{A}'_{h,i} \mid [\mathbf{F}_h - \mathbf{F}_{h-1}] \times \mathbf{A}_i \quad (i=1, 2, \dots, k-1).$$

Bem entendido que alguns destes produtos podem ser desprovidos de elementos, mas isso não importa. Tôdas as sucessões (18) são assim determinadas procedendo da mesma maneira com respeito a cada um dos conjuntos  $\mathbf{B}'_h$ .

Fixemos um dos conjuntos  $\mathbf{A}'$  e ponhamos, relativamente a este conjunto,

$$\mathbf{A}'_i \mid \sum_h \mathbf{A}'_{h,i} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}'_h \mid \sum_i \mathbf{A}'_{h,i}.$$

Atendendo à maneira como determinámos as sucessões (18), podemos afirmar que a sucessão de termo geral  $\mathbf{S}'_h$  diverge para infinito. Logo a sucessão

$$(19) \quad \mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \dots, \mathbf{A}'_i, \dots,$$

soma das sucessões (18) relativas ao conjunto considerado  $\mathbf{A}'$ , converge para a soma dos limites das parcelas, isto é, converge para o conjunto  $[\mathbf{A}']$ , em virtude da proposição da *p.* 152, *l.* 27. As sucessões (19) relativas a todos os conjuntos  $\mathbf{A}'$  satisfazem, pois, às condições desejadas:

$$\mathbf{A}' \parallel \lim \mathbf{A}'_i, \quad \mathbf{A}'_i \mid \sum_i \mathbf{A}'_i.$$

As sucessões (19) que tendem para conjuntos limitados  $\mathbf{A}'$  são constituídas por conjuntos de soma limitada; na verdade, cada uma delas é soma de sucessões (18) em número finito.



Observemos também que:

*Um subconjunto qualquer  $A'$  de  $A$  é limite duma sucessão convergente de subconjuntos dos termos correspondentes da sucessão proposta.*

Com efeito, em virtude do que acabámos de demonstrar, a sucessão proposta é soma de duas, uma das quais converge para  $A'$  e a outra para  $A - A'$ .

Tal observação permite-nos demonstrar imediatamente a proposição de que se trata para o caso que resta considerar duma infinidade de conjuntos  $A'$ . Com efeito, cada conjunto  $A'$  é limite duma sucessão convergente

$$(20) \quad A'_1, A'_2, \dots, A'_i, \dots$$

de subconjuntos dos termos correspondentes da proposta; mas, se numerarmos uma infinidade de sucessões escolhidas entre as (20), e se substituímos o primeiro termo da primeira por  $A'_1$ , o segundo termo da segunda por  $A'_2$  e assim sucessivamente, estas novas sucessões e tódas as restantes (20) obedecerão evidentemente às condições do enunciado.

Consideremos ainda o caso de decompormos  $A$  numa infinidade qualquer de subconjuntos  $A'$ , e suponhamos que entre estes figuram alguns conjuntos limitados (todos, em particular). Vamos ver que é possível determinar as sucessões (19) de maneira a verificar-se mais a seguinte condição: cada uma que tenha por limite um conjunto limitado  $A'$  é constituída por conjuntos de soma limitada. Com efeito, seja  $B$  a soma dos conjuntos ilimitados  $A'$  e  $C$  a soma dos limitados. A sucessão dada decompõe-se em duas: uma que tende para  $B$  e outra que tende para  $C$ . A primeira destas sucessões, por sua vez, decompõe-se noutras que tendem para os conjuntos  $A'$  parcelas de  $B$ ; a segunda também se decompõe em novas sucessões que tendem para os conjuntos  $A'$  parcelas de  $C$ . Mas, em virtude da proposição que enunciámos na p. 162, l. 8, podemos determinar estas últimas sucessões de tal modo que a soma dos termos de cada uma delas seja um conjunto limitado.

63. Relações entre diâmetros, distâncias reduzidas e desvios, com respeito aos termos e aos limites de sucessões convergentes de conjuntos quaisquer. — Relativamente a êste assunto e a

sucessões de conjuntos de soma limitada já demonstrámos algumas proposições no n.º 51, p. 134; tratando-se de sucessões de conjuntos quaisquer eis mais as seguintes:

*Se o limite  $\mathbf{A}$  duma dada sucessão convergente de conjuntos (1) é ilimitado, a sucessão dos diâmetros dos termos diverge para infinito (1).*

Com efeito, dado um número  $\rho > 0$ , determinemos dois elementos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  de  $\mathbf{A}$  de forma que seja  $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} > \rho$ . Consideremos duas sucessões

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots$$

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i, \dots$$

de elementos extraídos dos termos correspondentes de (1) e que tendam para os limites  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  respectivamente. Sabemos que é  $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$  [v. IV, p. 20, l. 12], donde resulta que, a partir de certa ordem, vem  $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} > \rho$ . Logo, a partir da mesma ordem, os termos  $\mathbf{A}_i$  de diâmetros finitos tem estes superiores ao número dado  $\rho$ , o que demonstra a proposição.

Por conseguinte, ainda no caso de convergência, quando a sucessão dos diâmetros não diverge para infinito o limite  $\mathbf{A}$  é necessariamente limitado.

*Sejam dados um conjunto limitado  $\mathbf{A}$  e uma sucessão convergente de conjuntos quaisquer*

$$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_i, \dots$$

*Se fôr  $\lim \mathbf{B}_i \parallel \mathbf{B}$ , teremos*

$$\lim \underline{\mathbf{A}\mathbf{B}_i} = \underline{\mathbf{A}\mathbf{B}} \quad \text{e} \quad \lim \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}_i} = \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}.$$

Ponhamos  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{B}$ . É limitado o conjunto das distâncias reduzidas  $\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}_i}$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ), porque a sucessão proposta é quási-limitada; o mesmo acontece ao conjunto das distâncias

(1) Alguns destes diâmetros podem ser infinitos.

reduzidas  $\underline{aB}_i$  entre cada elemento  $\underline{a}$  de  $\underline{A}$  e cada um dos conjuntos  $\underline{B}_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ), como se conclui das relações

$$\underline{aB}_i < \underline{aA} + \underline{AB}_i + \Delta = \underline{AB}_i + \Delta$$

$$(i=0, 1, 2, \dots),$$

sendo  $\Delta$  o diâmetro do conjunto  $\underline{A}$  [v. iv, p. 90, (1)]. Seja  $\rho$  um número superior a cada uma das distâncias reduzidas  $\underline{aB}_i$ . A soma de todos os esferóides do mesmo raio  $\rho$  e de centros nos diversos elementos de  $\underline{A}$  constitui um conjunto limitado, como é evidente. Encerremos esta soma num novo esferóide  $\underline{F}$ , cuja estrema designamos por  $\underline{T}$ , e ponhamos

$$\underline{H}_i | \underline{T} + (\underline{F} \times \underline{B}_i)$$

$$(i=0, 1, 2, \dots).$$

Temos, como facilmente se reconbece,

$$\underline{aH}_i = \underline{aB}_i$$

$$(i=0, 1, 2, \dots),$$

donde se deduzem as relações

$$\underline{AH}_i = \underline{AB}_i \quad [v. iv, p. 88, l. 18] \quad \text{e} \quad \overline{AH}_i = \overline{AB}_i$$

$$(i=0, 1, 2, \dots).$$

Mas, em virtude do que dissemos na p. 157, l. 23 e 31, a sucessão

$$\underline{H}_1, \underline{H}_2, \dots, \underline{H}_i, \dots$$

converge para o limite  $\underline{H}_0$ . Logo, por se tratar agora duma sucessão de conjuntos de soma limitada, temos

$$\lim \underline{AH}_i = \underline{AH}_0 \quad \text{e} \quad \lim \overline{AH}_i = \overline{AH}_0 \quad [p. 135, l. 19],$$

ou

$$\lim \underline{AB}_i = \underline{AB}_0 = \underline{AB} \quad \text{e} \quad \lim \overline{AB}_i = \overline{AB}_0 = \overline{AB},$$

como desejávamos demonstrar.

Sejam dadas duas sucessões convergentes

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

e

$$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots,$$

a primeira de conjuntos de soma limitada e a segunda qualquer; se fôr

$$\lim A_i \parallel A \quad \text{e} \quad \lim B_i \parallel B,$$

teremos

$$\lim \underline{A_i B_i} = \underline{A B} \quad \text{e} \quad \lim \vec{A_i B_i} = \vec{A B}.$$

Na verdade, como é  $\lim \vec{A_i A} = 0$ , as relações

$$|\underline{A_i B_i} - \underline{A B_i}| < \vec{A_i A} \quad \text{e} \quad |\vec{A_i B_i} - \vec{A B_i}| < \vec{A_i A} \quad [v. IV, p. 106, (9) \text{ e } (11)]$$

dão

$$\lim |\underline{A_i B_i} - \underline{A B_i}| = 0 \quad \text{e} \quad \lim |\vec{A_i B_i} - \vec{A B_i}| = 0,$$

ou, em virtude da proposição precedente,

$$\lim \underline{A_i B_i} = \lim \underline{A B_i} = \underline{A B} \quad \text{e} \quad \lim \vec{A_i B_i} = \lim \vec{A B_i} = \vec{A B} \quad (1).$$

Temos, em particular, a seguinte proposição:

Seja dada uma sucessão convergente

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

de conjuntos de soma limitada e consideremos um conjunto qualquer  $B$ ; se fôr  $\lim A_i \parallel A$ , teremos

$$\lim \underline{A_i B} = \underline{A B} \quad \text{e} \quad \lim \vec{A_i B} = \vec{A B}.$$

Sabemos, com efeito, que o conjunto  $B$  é limite da sucessão  $B, B, \dots$ .

(1) Esta proposição generaliza a que se encontra enunciada na p. 134, l. 27; a anterior e a seguinte àquela generalizam a da p. 135, l. 19.

64. Projecções dos limites duma sucessão convergente de conjuntos quaisquer de ordem  $n$ . — Dissemos na p. 136, l. 2, que as projecções duma sucessão convergente de conjuntos de ordem  $n$  e de soma limitada convergem para as correspondentes projecções dum limite da mesma sucessão, qualquer que este seja. Devemos agora observar que tal enunciado poderá não ser verdadeiro no caso de se tratar duma sucessão de conjuntos de soma ilimitada. Consideremos o espaçoide dos pontos do plano  $xOy$  de coordenadas rectangulares, por exemplo, e formemos as seguintes sucessões de pares de pontos deste plano:

$$(0, 0), (1, 1); (0, 0), (1, 2); \dots; (0, 0), (1, i); \dots$$

$$(0, 0), (1, 1); (0, 0), (2, 1); \dots; (0, 0), (1, i); (0, 0), (2, i); \dots$$

Uma e outra convergem para o ponto  $(0, 0)$ , mas a projecção da primeira sobre o eixo  $Ox$  converge para o par de números 0 e 1, e a projecção da segunda sobre o mesmo eixo não converge para limite algum.

Dum modo geral temos a seguinte proposição:

*As projecções dum limite qualquer duma sucessão convergente de conjuntos de ordem  $n$  pertencem aos limites comuns das correspondentes projecções dessa sucessão.*

Na verdade, as projecções do limite comum duma sucessão de conjuntos de ordem  $n$  pertencem aos limites comuns das correspondentes projecções da mesma sucessão [v. IV, p. 127, l. 18].

(Continua).

LUÍS BEDA NETO.

## Estudo da acção dum gene pleiotropo na «*Ephestia kühniella*» Zeller

### INTRODUÇÃO

A Genética, parte da Biologia que estuda os fenómenos e os problemas relativos à hereditariedade e procura determinar as suas leis, deve o seu notável incremento nas últimas três décadas à redescoberta das leis de MENDEL por TSCHERMAK, CORRENS, e DE VRIES, independentemente uns dos outros, em 1900, desasseis anos depois da morte do grande investigador. Nêste período, relativamente curto, a Ciência da Hereditariedade Mendeliana conseguiu lançar luz explicando convenientemente os casos mais complexos e até então inexplicáveis de fenómenos hereditários.

O sistema de sucessivas hipóteses de trabalho, que às leis se sucederam e que factos ganhos pela experiência vinham demonstrar, foi pouco a pouco formando êsse vasto edificio que é hoje o da Ciência da Hereditariedade Mendeliana.

A introdução da experiência neste campo da Biologia foi, aliada à estreita colaboração com os domínios visinhos, como por exemplo a Citologia, uma das causas, talvez a principal de tão rápido avanço dessa ciência.

Das plantas, nas quais as primeiras observações experimentais se efectuaram, passou-se ao estudo dos fenómenos hereditários nos animais; e a introdução nos laboratórios, por MORGAN, da pequena mosca do vinagre, *Drosophila melanogaster*, o objecto ideal para investigações genéticas, veio marcar uma data na história da Ciência da Hereditariedade.

As modernas teorias da estrutura do material hereditário são teorias corpusculares. Segundo estas teorias o material hereditário está dividido num certo número de unidades autónomas, que nós chamamos *genes*. Ainda segundo essas teorias e demons-

trado por investigações citológicas e genéticas, se admite que os genes se encontram localizados nos cromosomas e nêles se dispõem em série linear. Os actuais conhecimentos sobre o modo de transmissão dos genes e suas leis são no presente bastante consideráveis. Os genes são, de facto, realidades e não concepções hipotéticas como o eram as antigas concepções da estrutura do material hereditário e das suas unidades, tais por exemplo as gémulas de DARWIN, os determinantes e bióforos de WEISSMAN e as pangenes de DE VRIES.

Se percorrermos no entanto toda a vasta bibliografia genética e procurarmos obter dados sobre o modo de acção dos genes, notaremos que êste lado da questão, o da conexão entre os genes e os caracteres por êles determinados, poucas vezes foi abordado e algumas vezes apenas acessoriamente. Poucos anos antes da sua morte escrevia BOVERI: «*Über die Vererbung selbst aber, d. h., über die Frage, wie die in der Zygote gegeben Konstellation zu jenem Erbeffekt hinführt, mit dem der Vererbungsforscher arbeitet, darüber erfahren wir nichts; denn darüber wissen wir trotz aller exakten Vererbungslehre, so gut wie nichts*». Hoje, volvidos alguns anos, os nossos conhecimentos não foram ainda muito mais longe.

As unidades que compunham o material hereditário nas teorias do período pre-mendeliano, a que acima nos referimos, eram geralmente consideradas como representantes ou gérmenes de órgãos definitivos ou de partes dêsses órgãos ou apenas de células ou partes das mesmas. Estas ideias foram, a principio transmitidas à concepção dos genes que eram também, por alguns, considerados como sendo gérmenes de órgãos ou partes de órgãos.

A descoberta de caracteres poligêneos, especialmente do fenómeno da polimeria (NILSSON-EHLE), tornou necessário reconhecer que a maior parte dos caracteres não são determinados por um único gene, mas por alguns ou muitos genes. Conhecem-se por outro lado genes que actuam em caracteres de diferentes partes do corpo, sem relação funcional dumas com as outras. Tais genes foram denominados *pleiotropos* por PLATE, denominação esta usada especialmente por autores russos, alemães e escandinavos. Os autores americanas designam-nos também por genes *politopos* ou *polifenos*.

Segundo alguns autores o pleiotropismo dos genes não é um caso particular, mas antes uma regra geral. Para tais autores (MORGAN, JOHANNSEN) o desenvolvimento de uma parte do corpo,

de um órgão, não depende de um certo número de genes, mas sim de todos os genes do organismo, do seu genotipo, que actua como um todo.

Podemos agora definir unidade hereditária ou gene, como sendo a causa contida na célula sexual, que produz pela sua presença o aparecimento de um ou mais caracteres num organismo e é transmitida hereditariamente como um todo indissolúvel e autónomo.

Os genes são, para JOHANNSEN, «*zunächst Rechnungseinheiten Ausdrücke von Realitäten unbekannter Natur, aber mit bekannten Wirkungen*». E, dada a impossibilidade do estudo directo dos genes por métodos físicos ou químicos, o seu estudo poderá fazer-se indirectamente pelo estudo dos seus efeitos e do seu modo de acção.

DOBZHANSKY (1924, 1927), investigou os caracteres morfológicos duma série de mutantes da *Drosophila*, e achou que essas mutações apresentavam também, além de outras, diferenças bem caracterizadas no aparelho sexual. Concluiu assim que todos os genes por ele investigados eram pleiotropos. E foi o primeiro a indicar a possibilidade e a utilidade da aplicação dos genes pleiotropos no estudo do mecanismo da acção dos genes, pelo estudo das relações entre as diferentes manifestações fenotípicas que um mesmo gene determina.

PLUNKETT (1926), chegou também a uma imagem da acção dos genes, pela acção de factores genéticos e externos, sobre o grau de manifestação fenotípica dos caracteres determinados por um mesmo gene.

GOLDSCHMIDT (1927), expõe na sua «*Physiologische Theorie der Vererbung*» uma hipótese, de carácter geral, sobre a acção dos genes. Segundo GOLDSCHMIDT, a acção dum gene pode estudar-se por métodos genéticos associados à embriologia, pela análise do fenómeno da chamada dominância, ou pela análise da determinação do sexo. Em ambos os casos há como ponto de partida, duas espécies de genes e a possibilidade de alternativa da acção duma ou doutra no desenvolvimento.

GOLDSCHMIDT apoia-se principalmente em numerosas experiências suas sobre a determinação do sexo na *Lymantria* e nas experiências de BRIDGES e outros, na *Drosophila*, para chegar à sua concepção geral da natureza e do mecanismo da acção dos genes.



Emite a hipótese de que os genes são da natureza de catalisadores e especialmente de autocatalisadores, e que os produtos das reacções por eles catalisadas são análogas às substâncias formativas que constituem o grupo conhecido pelo nome de *hormonas*.

Diz, em conclusão, «dass (zunächst die Geschlechtsgene) Autokatalysatoren sind, die mit einer ihrer Quantität proportionalen Geschwindigkeit eine Reaktion, resp. eine Reaktionskette katalysieren; die Endprodukte der Reaktionskette sind die spezifischen Hormone der geschlechtlichen Determinierung. Dieser Satz soll dann entsprechend abgeändert für sämtliche Gene verallgemeinert werden.»

STURTEVANT (1920 e 1927), observou no estudo de alguns ginandros e mosaicos da *Drosophila* a existência de uma acção entre diferentes partes do corpo ou entre tecidos dum mesmo órgão de constituição genética diferente. Nos ginandros de STURTEVANT os olhos tinham a constituição genética seguinte: um, o gene «*vermilion*», e o outro, o alelo dominante normal. Em tais ginandros pode o olho que contém o gene «*vermilion*» não tomar a côr correspondente devido à presença do seu alelo no outro. Anàlogamente, nos olhos dos mosaicos, a manifestação do caracter «*bar*» é influenciada pela presença de tecidos que contém o alelo normal de «*bar*».

Mas é DOBZHANSKY (1931) quem nos dá uma análise mais detalhada e com ideias mais concretas sôbre a acção entre as partes masculinas e femininas de ginandros da *Drosophila simulans*. Tais ginandros tinham a seguinte constituição: as partes masculinas continham os genes «*yellow*» (côr do corpo: amarela) e «*white*» (olhos brancos em vez de vermelhos; testículos e vasos deferentes incolores em vez de amarelos). As partes femininas eram do tipo selvagem (alelomorfo dominante de «*w*» e «*y*»). Nos ginandros eram incolores os testículos e os vasos deferentes durante os primeiros dias de imago. Com a idade tomavam então a coloração amarela que aparecia primeiro nos indivíduos de olhos vermelhos do que nos de olhos brancos. Quando um vaso deferente se encontrava em contacto com um ovário, tomava então a coloração mais cedo do que nos indivíduos que só possuíam testículos ou nos quais o vaso deferente se encontrava afastado do ovário. Do mesmo modo se comportava um testículo em contacto com um oviducto. DOBZHANSKY, atribui o aparecimento do pigmento nos testículos e vasos defe-

rentes dos ginandros à influência dos tecidos femininos do tipo selvagem contendo o alelo dominante de «white».

A. WHITING (1934), estudou também na véspera parasita *Habrobracon juglandis* o comportamento da cor dos olhos de alguns mutantes, em mosaicos genéticos, observando factos semelhantes aos observados por STURTEVANT na *Drosophila*. Em olhos mosaicos de «wild-type» e «ivory» não há uma linha nítida de separação dos dois tecidos geneticamente diferentes, mas sim uma transição de preto para «ivory». Nos mosaicos com uma região dum olho «wild-type» e a outra «white» ou «cantaloup», é, pelo contrário, bem nítida a linha de separação que segue exactamente o bordo das facetas. Neste caso parece não haver qualquer acção de «wild» sobre «white» e «cantaloup» que se comportam como autónomos.

WHITING descreve ainda um outro tipo de interacção afectando a cor dos olhos, ainda que os olhos em si não sejam mosaicos, e que ocorre quando as gonadas de um macho ou uma fêmea «wild» heterozigótica para «ivory», são geneticamente «wild-type» enquanto a cabeça é geneticamente «ivory». Os olhos, são em tais individuos mais «orange» do que «ivory».

GREB (1934), faz a análise de alguns caracteres genéticos de mosaicos e ginandros ainda de *Habrobracon juglandis* e chega a conclusões concordantes com as de WHITING.

CASPARI (1933), efectuou na *Ephestia kühniella*, a tentativa de estudo da acção dum gene pleiotropo que determina, além de outros caracteres, as cores dos olhos e dos testículos. CASPARI verificou uma correlação positiva entre o grau de intensidade de coloração destes órgãos. Ambos se modificavam, e no mesmo sentido, pela acção de agentes externos e por selecção. Os animais *A* possuem olhos pretos e testículos pigmentados e *a* olhos vermelhos e testículos não ou muito fracamente pigmentados. O gene normal *A* é dominante sobre *a*. As cores dos olhos e dos testículos não se separam nos cruzamentos e Caspari considera-as determinadas pelo mesmo gene. Efectuou depois transplantações de testículos de animais *aa* para animais *AA* e observou que os testículos implantados se pigmentavam, não havendo qualquer influência sobre o organismo de *AA*. Testículos de animais *AA* implantados em *aa*, pigmentavam-se normalmente e produziam modificações na intensidade de coloração dos olhos dos animais *aa*. Implantações de testículos *AA* em animais *AA* e de *aa* em *aa*,

como testemunhas, mostravam o factor *A*, como causa das modificações de pigmentações dos testículos e olhos dos animais *a a*. CASPARI conclui afirmando que o gene *A* efectua a sua acção por meio de substâncias que lança no líquido circulante.

Foi nosso intuito ao iniciar êste trabalho, prosseguir as investigações de Caspari usando do mesmo objecto, a *Ephestia kühniella* e utilizando o método das operações, método corrente na Fisiologia do desenvolvimento e pela primeira vez utilizado no estudo da acção de genes. De facto, os métodos exclusivamente usados em tais estudos eram métodos genéticos associados à embriologia. A razão disso está nas exiguas dimensões da *Drosophila* e doutros objectos usuais da Genética, não permitindo o emprego dos métodos operatórios.

Escolhemos para o nosso estudo a mutação «olhos vermelhos», gene *a*, que determina além da côr dos olhos outros caracteres, como veremos.

Efectuamos em primeiro lugar transplantações de testículos entre larvas da mesma e diferentes idades, pertencendo umas à raça «olhos vermelhos» e outras à raça «selvagem» contendo o alelo *A* normal. Estendemos depois as transplantações aos ovários e a outros tecidos. Assim tentámos esclarecer o mecanismo pelo qual um dado gene, elemento do genotipo, realiza um determinado character ou grupo de caracteres, elementos do fenotipo.

Ao Ex.<sup>mo</sup> Sr. Prof. Dr. ALFRED KUHN, Director do Instituto de Zoologia da Universidade de Göttingen, somos devedores de sinceros agradecimentos pela hospitalidade que nos dispensou e pelo interesse com que seguiu e orientou os nossos trabalhos, iniciados no seu Instituto.

Ao Ex.<sup>mo</sup> Sr. Prof. Dr. J. G. DE BARROS E CUNHA, Director do Museu e Laboratório de Zoologia, nos sentimos reconhecidos e agradecemos todo o auxilio que nos prestou tornando possivel a conclusão, em Coimbra, deste trabalho.

Ao Ex.<sup>mo</sup> Sr. Prof. Dr. EUSÉBIO TAMAGNINI, agradecemos também o interesse demonstrado pelas nossas investigações e o valioso auxilio da rica Biblioteca do Instituto de Antropologia.

Ao Ex.<sup>mo</sup> Sr. Dr. ANTERO FREDERICO DE SEABRA, Naturalista do Museu de Zoologia, pela amabilidade com que nos facilitou algum material necessário, nos sentimos igualmente reconhecidos.

E, finalmente, ao Ex.<sup>mo</sup> Sr. ROGÉRIO NOGUEIRA DE CARVALHO, Conservador do Museu de Zoologia, patenteamos também o nosso reconhecimento pela cooperação e auxílio prestados.

Coimbra, Dezembro de 1934.

## CAPÍTULO I

### Material e técnica

A traça da farinha, *Ephestia kühniella* ZELLER, tem-se evidenciado nos últimos anos como um objecto próprio para investigações de Genética e Fisiologia do desenvolvimento. Facilidade de cultura, número suficientemente elevado de gerações por ano, grande número de indivíduos em cada geração e dimensões suficientes que permitem a utilização de métodos operatórios, tais são as razões que justificam a sua escolha como objecto de trabalho por KÜHN e sua escola. Grande número de mutações são hoje conhecidas e descritas.

Do material que utilizámos, proveniente das culturas do Instituto de Zoologia de Göttingen, pertence a raça selvagem à linha BK 14 e a raça de olhos vermelhos, à linha RoK iv. Seguimos com pequenas modificações a técnica de cultura de KÜHN usada no seu Instituto.

As culturas efectuaem-se em taças de vidro de 11<sup>cm.</sup> de diâmetro e 4,5<sup>cm.</sup> de altura, cobertas por um simples disco de vidro. Os animais que se querem utilizar para cultura recolhem-se cuidadosamente com uma pinça de pontas muito flexíveis, ou melhor, com um pequeno tubo de vidro. Frequentemente encontram-se nas culturas alguns animais em cópula que de preferência se podem utilizar na repicagem das culturas. As fêmeas não fecundadas reconhecem-se pela posição de copulação que frequentemente tomam, quer espontâneamente, quer por ligeira agitação. Nessa posição, a extremidade do abdomen curva-se para a parte superior e o ovideponente desenvagina-se. Uma tal fêmea, isolada, pode efectuar a postura de alguns ovos, mas, regra geral, estes não se desenvolvem. Podem, pois, considerar-se as fêmeas em posição de copulação, como não fecundadas. Mais seguro, sempre que se pretendem efectuar cruzamentos, é isolar as pupas

em pequenas taças de vidro onde se colocam sobre um pouco de papel de filtro.

A postura pode efectuar-se directamente sobre o alimento previamente colocado nas taças de cultura ou então sobre papel de filtro ou uma fina camada de algodão em rama que se coloca no fundo das taças. Sobre o papel de filtro ou o algodão contendo a postura se lança depois o alimento.

O alimento que empregámos foi exclusivamente farinha de trigo, moída grosseiramente.

Para combater a invasão das culturas pelo ácaro *Tyroglyphus farinae*, que aparece por vezes nas culturas antigas ou demasiado húmidas, e ataca as larvas e os insectos adultos, esterilizavamos previamente o trigo por meio duma lavagem com álcool a 70° e, depois de seco, por aquecimento a 60-70° na estufa, durante 5 a 10 minutos. O trigo assim tratado era depois moído num pequeno moinho de mão, que freqüentemente era lavado com álcool.

Outro perigo de infecção das culturas que assim se atenua, é a produzida por uma *Gregarina*, espécie não determinada, que provoca uma doença das larvas. - As larvas atacadas apresentam-se de côr avermelhada e mais escura que a normal e morrem em grande número. No intestino de tais larvas encontram-se, em abundância, gregarinas adultas e na hemolinfa numerosos esporos.

As culturas eram mantidas em estufas à temperatura de 25°. Em Göttingen servimo-nos duma estufa SARTORIUS com aquecimento de gás e regulação automática, e em Coimbra duma estufa ALTMANN com aquecimento de petróleo, regulada por tentativas, sob vigilância freqüente, de modo que em qualquer delas as variações de temperatura não eram superiores a 1° para mais ou para menos e a temperatura podia considerar-se constante de 25°. Nas culturas mantidas a esta temperatura nota-se, por vezes, uma demasiada secura do alimento que as larvas então rejeitam. Para a evitar coloca-se na estufa um copo contendo água. A humidade demasiada do alimento favorece o aparecimento dos ácaros e de bolores.

Em qualquer dos casos faz-se a mudança das larvas para novo alimento.

A velocidade de desenvolvimento da *Ephestia* é em alto grau dependente das condições externas e também de factores inter-

nos. A raça selvagem tem à temperatura de 18° uma duração do desenvolvimento quasi dupla da de 25°. O desenvolvimento desde a postura do ovo até à eclosão do insecto perfeito, efectua-se a 18° em 129 dias e a 25° em 67 dias, em média, supondo é claro, em ambos os casos, condições análogas de alimentação, natureza e humidade do alimento e densidade dos animais nos vasos de cultura. A raça de olhos vermelhos tem uma velocidade de desenvolvimento inferior, em alguns dias, à da raça selvagem.

O número de estados larvares é 5 ou 6 a 18° e quasi exclusivamente 6 a 25°.

## CAPÍTULO II

### As raças «selvagem» e «olhos vermelhos»

Os genes *A* e *a* determinam além da cor dos olhos, outros caracteres: cor dos testículos, cor das larvas, velocidade do desenvolvimento e vitalidade.

Nas raças «selvagem» os testículos apresentam-se pigmentados como acontece em muitos lepidópteros. A cor dos testículos da *Ephestia* é vermelha escura ou vermelha violácea. As cores, quer dos testículos, quer dos olhos, foram rigorosamente determinadas por comparação com as tabelas de cores de OSTWALD.

As tabelas de cores de OSTWALD, compõem-se de 24 tabelas triangulares (Fig. 1) cuja base apresenta uma série de cinzentos que estabelecem a transição entre o vértice *aa*, branco, e o vértice *pp*, preto. O vértice *pa* é ocupado por uma cor padrão. A linha *pa-aa*, à esquerda, contém as cores claras, misturas da cor e branco, e *pa-pp*, à direita, as escuras, misturas da cor e preto. Todos os outros campos são ocupados por cores resultantes da mistura das três: cor padrão, preto e branco. O número da tabela que exprime a cor padrão e duas letras que exprimem, como coordenadas, a posição da cor procurada no triângulo, e assim a sua riqueza em preto ou branco, são os elementos que servem para bem definir qualquer cor das tabelas.

Todos os campos situados na mesma horizontal, por ex.: *ga-pi* possuem a mesma quantidade de cor padrão, unicamente variam nas quantidades de preto e branco. As cores situadas

na mesma vertical, por ex.: *na-gg*, possuem a mesma mistura de preto e branco e portanto o mesmo grau de intensidade de coloração. Tais verticais de igual intensidade vão numeradas de 1 a 15, sendo 1, branco e 15, preto puro.

A pigmentação dos testículos não é uniforme. O pigmento

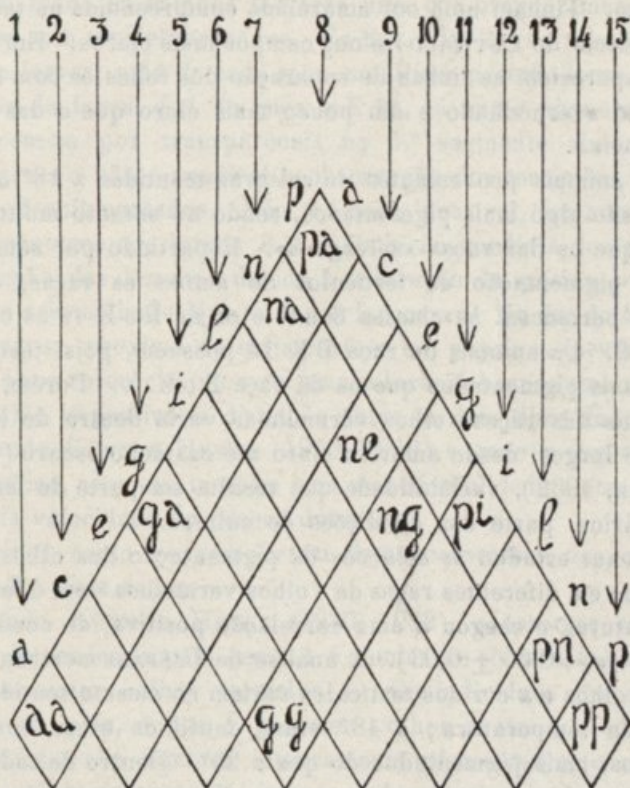


FIG. 1 — Tabela de cores segundo OSTWALD.

distribui-se à superfície dos folículos em pequenos grupos e é mais abundante nas linhas de contacto e paredes de separação dos folículos, desenhando-se assim uma série de linhas mais fortemente pigmentadas que convergem num ponto. A determinação da cor fazia-se focando com o binocular pouco nitidamente o testículo extraído da imago e contido em sôro fisiológico. Deste modo a cor aparecia-nos quasi uniforme. As cores dos testículos da raça «selvagem» que empregámos (linha BK 14) eram na

sua maioria compreendidas nas tabelas 6 e 7 e um menor número na tabela 8 (6, 3.º alaranjado; 7, 1.º vermelho; 8, 2.º vermelho; segundo OSTWALD).

Os testículos dos animais da raça «olhos vermelhos» com que trabalhamos (linha R o K IV), apresentavam-se, quando provenientes de culturas a 25°, quási na totalidade desprovidos de pigmento. Tinham uma côr amarelada compreendida na tabela 2 (2.º amarelo de OSTWALD) e nos campos mais claros. Em casos raros, apareciam as linhas de separação dos folículos com algum pigmento avermelhado e um pouco mais claro que o das raças «selvagens».

Em animais provenientes de culturas mantidas a 18° os testículos são algo mais pigmentados, sendo no entanto muito mais claros que os das raças «selvagens». Repartindo por sete classes de pigmentação os testículos de ambas as raças, os de BK 14 pertencem às classes 6 e 7 e os de R o K IV às classes de 1 a 5. Os animais da raça BK 14 possuem, pois, testículos muito mais pigmentados que os da raça R o K IV. Porém, a côr dos olhos das raças «olhos vermelhos» varia dentro de limites bastante largos, desde amarelo claro até castanho escuro (KÜHN e HENKE, 1932), variabilidade que resulta em parte de factores hereditários, parte das condições de cultura.

CASPARI estudou as relações da pigmentação dos olhos e dos testículos em diferentes raças de «olhos vermelhos» em diferentes temperaturas e chegou a uma correlação positiva, de coeficiente elevado ( $r = 0,60 \pm 0,03$ ). A análise de CASPARI mostrou que a côr dos olhos e a côr dos testículos variam no mesmo sentido pela acção da temperatura; a 18° eram, tanto os olhos como os testículos, mais pigmentados do que a 25°. Dentro de cada raça há uma correlação nítida entre o grau de pigmentação dos olhos e dos testículos. Os dois caracteres variam no mesmo sentido pela acção de agentes externos e por selecção.

Nos animais da linha R o K IV que utilizei e provenientes exclusivamente de culturas a 25°, os olhos distribuíam-se pelas tabelas 4 e 5 (1.º e 2.º alaranjado), raras vezes pelos campos mais claros da tabela 6 (3.º alaranjado, segundo OSTWALD). Os testículos apresentavam-se a essa temperatura quási sempre desprovidos de pigmentação, de modo que a correlação era impossível de estabelecer.

Outro caracter influenciado pelos genes *A* e *a* é a côr das



larvas. As larvas da raça BK 14, como as das outras raças selvagens possuem uma coloração rósea, ou côr de carne, em todos os estados larvares; tomam unicamente no fim do 6.º e último estado larvar, próximo do estado de pupa, uma coloração branca amarelada, por vezes amarelo de cõra. As larvas da raça RoK IV como as de outras raças de olhos vermelhos, possuem em todos os estados larvares uma côr branca amarelada, por vezes com tons esverdeados. Na Est. I fig. 2, vão representadas duas larvas, uma de cada raça, no último período larvar. Os testículos da larva AA da raça BK 14, já então pigmentados, reconhecem-se por transparência no 5.º segmento abdominal. Nas larvas aa não é possível a observação dos testículos, inteiramente despigmentados. Não é, pois, possível, ao contrário do que acontece nas larvas AA a distinção imediata dos sexos. A coloração das larvas é devida à coloração da quitina por um pigmento avermelhado, que falta nas larvas aa. No fim do último estado larvar, próximo da metamorfose em pupa, as larvas AA perdem a sua coloração e tomam uma coloração branca amarelada, sendo então impossível a distinção entre os dois tipos de larvas.

Segundo KÜHN e HENKE (1930, 1932) o gene *a*, em estado homozigótico, ocasiona também uma menor vitalidade e uma diminuição da velocidade do desenvolvimento.

Vejamos como se comportam estes caracteres nos cruzamentos das duas raças.

Segundo KÜHN e HENKE (1930, 1932), o caracter «olhos pretos» determinado pelo gene *A* é dominante sobre o que determina o caracter «olhos vermelhos». Os indivíduos *Aa* de  $F_1$  apresentam, pois, todos o caracter «olhos pretos». Os testículos de *Aa* são também intensamente pigmentados como os de *AA*. A «pigmentação intensa» dos testículos é portanto dominante sobre «não pigmentação» ou «pigmentação fraca»: a côr das larvas *Aa* é também a côr avermelhada das larvas *AA*. A côr das larvas das raças «olhos pretos» é, pois, também dominante sobre a côr das larvas das raças de «olhos vermelhos».

Em  $F_2$ , obtem-se uma disjunção monohibrida. Os caracteres côr dos olhos, côr dos testículos e côr das larvas, não se separaram em  $F_2$ , nem em nenhuma das gerações seguintes, ou nos cruzamentos com os progenitores.

Depois desta análise, tudo leva a admitir que todos estes caracteres sejam determinados por um mesmo gene *A* ou *a*, um

gene *pleiotropo*. Possivelmente todos os caracteres determinados por *a* apareceram simultaneamente com a mutação da cor dos olhos. Com efeito, testículos incolores e larvas esbranquiçadas encontram-se em todas as raças de olhos vermelhos, provenientes por selecção dos mesmos animais ocasionalmente mutados. Na raça de olhos pretos (linha XI) na qual os mutantes apareceram e que se manteve até hoje pura, existem testículos pigmentados e larvas avermelhadas.

Reforça esta hipótese o facto de numa das minhas culturas, a 18°, de *Ephestia elutella* (traça do chocolate) ter aparecido um mutante ♂ de olhos vermelhos muito claros (4 ne, das tabelas de OSTWALD). Tentei seguir esta nova mutação, mas do cruzamento dêsse macho com uma fêmea selvagem não se obteve descendência. A dissecação do mutante revelou a existência dum testículo completamente destituído de pigmento. A mutação da cor dos testículos, foi, neste caso, necessariamente simultânea, pois os outros indivíduos da mesma cultura confirmaram a existência de testículos normalmente pigmentados. Infelizmente a perda da descendência da nossa mutação impediu a verificação da simultaneidade de mutação da cor das larvas e dos caracteres fisiológicos, vitalidade e velocidade do desenvolvimento e se se tratava duma mutação paralela à do gene *a* da *Ephestia kühniella*.

Do anteriormente exposto se conclui que o gene *a* homozigótico se evidencia em diferentes estados do desenvolvimento. A cor das larvas é determinada ainda durante o desenvolvimento embrionário, pois no momento da eclosão do ovo, as larvas *aa* apresentam já a sua cor característica. A pigmentação dos testículos tem lugar no fim do 5.º ou princípio do 6.º e último período larvar e a pigmentação dos olhos durante o estado de pupa.

### CAPÍTULO III

## Transplantação de testículos

### a) Método

Transplantações de gonada de insectos foram primeiramente efectuadas em Lepidopteros e depois em outros insectos, por Meisenheimer, Kopeč e Klatt que, com fins diversos, as efectuaram

dum para outro sexo e entre espécies diferentes. A técnica por nós seguida baseia-se na dêstes autores.

As operações eram efectuadas com o auxílio dum microscópio binocular. As larvas a operar foram narcotizadas pelo éter puro para narcose. Outros anestésicos também aconselhados por alguns autores deram resultados inferiores aos do éter. As larvas submetiam-se à acção do éter durante 2 a 3 minutos. Êste tempo era suficiente para, na maioria dos casos, manter o animal completamente imóvel durante a rápida operação. Como material cirúrgico, servimo-nos duma fina tesoura-pinça, segundo HARRISSON, pinças de pontas muito finas e agulhas de dissecação.

Os testículos a implantar eram extraídos das larvas por meio duma incisão dorsal na altura do 5.º segmento abdominal onde estão situadas as gonadas e isolados com a tesoura e pinça. Eram depois conservados, aguardando à implantação, numa solução isotónica com a composição seguinte: Na Cl, 0,70%; K Cl, 0,020%; Ca Cl, 0,020%; e algumas gôtas duma solução saturada de Na HCO<sub>3</sub> por cada 100 c. c. de solução.

A implantação era executada do modo seguinte: A larva a operar colocava-se, depois de narcotizada, na platina do binocular sôbre uma placa de parafina. Efectuava-se então com a tesoura uma pequena incisão em V, no 4.º ou 5.º segmento abdominal; se da incisão saia hemolinfa em quantidade, era esta absorvida com um fragmento de papel de filtro sustentado na extremidade duma pinça. Para evitar o ferimento do coração e subseqüente derramamento de hemolinfa, a incisão efectuava-se sempre fóra da parte média. Com uma agulha era o testículo a implantar retirado da solução isotónica e cuidadosamente introduzido pela incisão. Os bordos da ferida eram convenientemente unidos e, depois de absorvida a hemolinfa que ocasionalmente se derramava durante a operação, cobertos com uma gôta de colódio. Depois de operadas colocavam-se as larvas, isoladas, em pequenas taças de vidro de 3 cm. de diâmetro, com alimento, e mantinham-se na estufa a 25°.

Os animais assim operados permaneciam algumas horas imóveis sob o efeito da narcose e logo que dela saíam, em regra, encasulavam-se. A mortalidade verificava-se em larga escala nos primeiros dias que se seguiam à operação. A perturbação ocasionada pela ferida durante as mudas e na passagem a pupa,

provocava também algumas vítimas. Por êste facto eram sempre escolhidos para operar, de preferência, animais no principio dos estados larvares. Da maioria das larvas que chegavam a pupa, eclodiam insectos perfeitos. A mortalidade foi nas nossas experiências bastante elevada. CASPARI obteve nas suas transplantações 20% de insectos que eclodiram de larvas operadas. Nas nossas transplantações de testículos, de 620 larvas operadas, obtivemos 86 insectos o que nos dá uma percentagem de 14%. As causas de tão elevada mortalidade são difíceis de determinar. Infecção da ferida poucas vezes se observava, e nos casos que operámos em condições de relativa asepsia não se observou menor mortalidade. Ferimentos internos de gravidade atingindo o coração ou o intestino, eram evitados pelo nosso modo de operar.

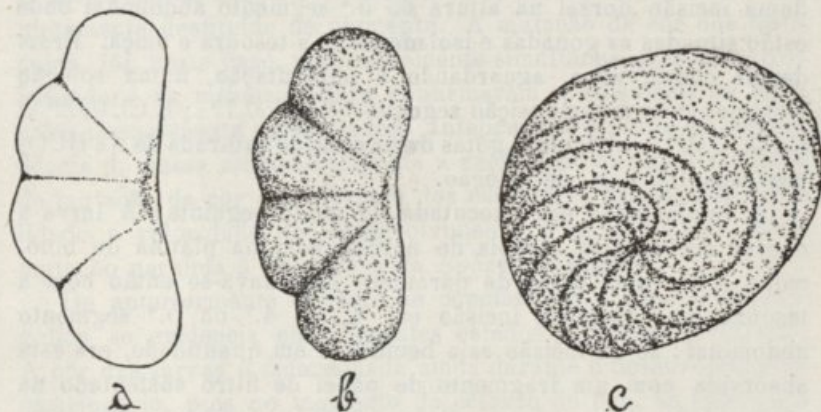


FIG. 2 — a) Testículo não pigmentado de uma larva *aa* no último estado larvar. b) Testículo pigmentado de uma larva *AA* ou *Aa* no início do último estado larvar. c) Testículo de imago *AA* ou *Aa*.  $\times 40$ .

As larvas entre as quais efectuámos as transplantações encontravam-se nos três últimos estados larvares. A maioria porém pertencia aos dois últimos. Em estados anteriores ao 4.º, são impossíveis de operar, dadas as suas exíguas dimensões. Os testículos implantados eram também provenientes de larvas dos mesmos três últimos períodos.

Os testículos da *Ephestia*, têm a meio do último período larvar o aspecto representado na Fig. 2 a e 2 b. A larva possui dois testículos que se compõem de quatro folículos, acidentalmente de cinco. A pigmentação existe não só nas paredes externas mas ainda nas paredes de separação dos folículos, onde primeiro

aparece, sendo, em geral, mais abundante. A pigmentação dos testículos inicia-se no fim do quinto período larvar ou princípio do sexto e último. Nas larvas R o K iv, de culturas a 25°, raras vezes aparecia pigmento e unicamente no final do último estado larvar. Por esta razão e ainda pelo facto de que a 25° a côr dos olhos é também mais clara, escolhemos para temperatura de cultura 25°. Nos primeiros dias de pupa, os dois testículos larvares unem-se e os oito folículos sofrem uma torsão dando assim logar ao testículo único do insecto adulto (Fig. 2 c).

Assim, as transplantações eram feitas antes que os genes *A* ou *a* produzissem as suas manifestações respeitantes às côres dos olhos e dos testículos.

As côres dos olhos dos insectos obtidos de larvas operadas foram avaliadas por comparação com as tabelas de OSTWALD e sempre, quanto possível, nas mesmas condições de iluminação. Depois disso eram os animais dissecados numa solução de RINGER sob a lupa binocular e o testículo implantado e as gonadas do insecto operado, cuidadosamente preparados; as côres dos testículos, quer do implantado quer do hospedeiro, eram também medidas com o auxílio das tabelas de côres.

MEISENHEIMER e KOPEČ, e para a *Ephestia CASPARI*, descreveram as conseqüências das operações nos insectos provenientes de larvas operadas. Nas nossas observações chegámos a resultados concordantes. Assim, nos insectos adultos, ainda que eclodindo normalmente, eram sempre mais ou menos visíveis os efeitos das operações. Alguns tinham dificuldade em eclodir e era necessário retirá-los do casulo, com o auxílio duma pinça de pontas muito flexíveis. Possuíam com freqüência anomalias nas asas e no abdomen e eram, em regra, de menores dimensões que as borboletas não operadas. As gonadas apresentavam-se normalmente desenvolvidas. O testículo implantado era também de menores dimensões que um testículo normal. Os caracteres da pigmentação serão descritos adiante detalhadamente. Em grande número de casos, os quatro folículos eram bem visíveis e nalguns nitidamente se notava a disposição em espiral das linhas de maior pigmentação, indicando as paredes de separação dos folículos, e mostrando que o testículo sofreu a torsão que normalmente executaria conjuntamente com o outro testículo larvar, para originar o testículo da borboleta adulta. No testículo implantado representado na Fig. 3 b, vê-se isso claramente. Em quasi todos os

implantados se regenerava o cálice e por vezes, em certa extensão, o vaso deferente (Fig. 13 a). Algumas vezes os testículos implantados tinham dimensões muito reduzidas, sem dúvida devidas ao facto de alguns dos folículos feridos durante a operação se não desenvolverem. Noutros casos, não foi encontrado nenhum implantado. Todos os autores que se ocuparam de transplantações de testículos em insectos, observaram casos análogos e admitem que o testículo implantado tenha sido totalmente resorvido pelo animal operado. Os testículos implantados eram algumas vezes encontrados crescidos conjuntamente com

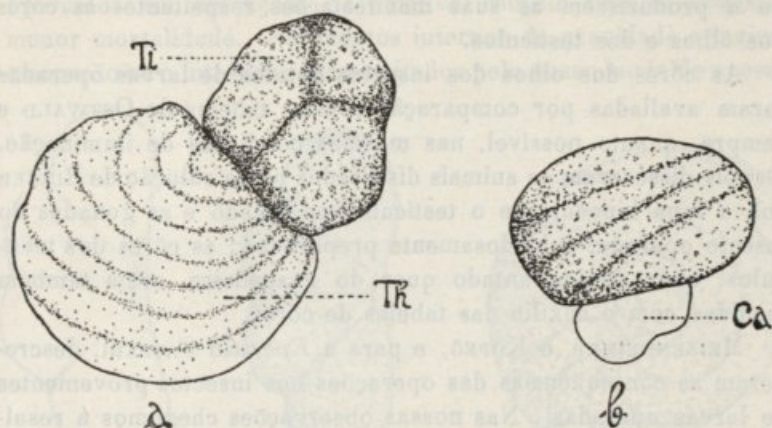


FIG. 3—*a*) Testículo *Aa* implantado crescido conjuntamente com o testículo *aa* do hospedeiro. *Ti*, testículo implantado; *Th*, testículo do hospedeiro.

*b*) Testículo *Aa* implantado num animal *aa*. *Ca*, cálice regenerado.  $\times 40$ .

as gonadas do insecto operado. Se tal acontecia num individuo masculino, os dois testículos distinguíam-se pelas menores dimensões do implantado e pela pigmentação (Fig. 3 *a*).

*b*) Transplantações de testículos entre larvas homozigóticas *aa* e *AA*.

Efectuámos quatro grupos de transplantações de testículos entre as larvas homozigóticas *aa* e *AA*: Testículos de larvas *AA* para larvas *aa*, testículos de *aa* para *AA* e como testemunhas, transplantações de *aa* para *aa* e *AA* para *AA*. As transplantações foram feitas entre larvas dos 4.º, 5.º e 6.º estados larvares, e não só entre larvas no mesmo estado larvar mas ainda em estados larvares diferentes. Deste modo eram implan-

tados testículos de larvas dos últimos estados larvares em estados larvares anteriores e inversamente, testículos jovens em estados larvares posteriores. Efectuámos ainda, por último, algumas implantações de testículos de insectos perfeitos em larvas no último estado larvar, às quais nos referiremos separadamente.

Analisemos os resultados destas experiências, começando por observar as modificações da côr dos olhos de alguns dos animais operados. As côres dos olhos dêstes animais foram medidas com o auxílio das tabelas de OSTWALD e distribuídas por três classes: classe 1, olhos vermelhos; classe 2, olhos castanhos, e classe 3, olhos pretos. À classe 2, olhos castanhos, pertencem os olhos cuja pigmentação coincide com os graus 11 a 13 das tabelas 6 e 7 de OSTWALD, e que normalmente nunca aparecem nas culturas de RoK IV à temperatura de 25°. Pigmentações mais intensas que 6 *pl* e 7 *pl* consideram-se pertencentes à classe 3. O quadro 1 representa a distribuição pelas três classes

QUADRO I

Pigmentação dos olhos dos animais operados com implantação de testículos *AA* e *aa*, e dos animais testemunhos. *n* número absoluto de animais observados; nas restantes colunas, em percentagens.

Grupos de transplantações	Pigmentação dos olhos			n	
	CLASSE 1 vermelhos	CLASSE 2 castanhos	CLASSE 3 pretos		
Animais <i>AA</i> (Testemunhos)	—	—	100	219	
Transplantações	Testículos <i>AA</i> em larvas <i>AA</i> . . .	—	100	12	
	Testículos <i>aa</i> em larvas <i>AA</i> . . .	—	100	17	
	Testículos <i>AA</i> em larvas <i>aa</i> (desenvolvidos) . . . . .	—	100	13	
	Testículos <i>AA</i> em larvas <i>aa</i> (resorvidos) . . . . .	54,6	36,3	9,1	11
	Testículos <i>aa</i> em larvas <i>aa</i> . . . . .	100	—	—	14
Animais <i>aa</i> (Testemunhos)	100	—	—	127	

de pigmentação, das côres dos olhos dos animais operados e dos animais testemunhos. (Estampa 1, 35).

A côr dos olhos dos animais homozigóticos  $AA$  é sempre a da classe 3, e a dos homozigóticos  $aa$  sempre a da classe 1. A côr dos olhos em nada se modificou pela implantação, nas larvas, de testículos larvares  $aa$  ou  $AA$ . Outro tanto não aconteceu pela implantação de um testículo  $AA$  em larvas  $aa$ : a côr dos olhos das borboletas provenientes das larvas assim operadas era modificada, apresentando uma pigmentação mais intensa, pela acção do testículo implantado. Na maioria dos casos a acção era tão intensa que os olhos se podiam considerar pertencentes à classe 3 de pigmentação.

Alguns animais operados apresentavam também olhos com côres que ficavam compreendidas dentro dos limites das classes 2 e 1. A dissecação mostrou porém que todos os indivíduos operados nos quais o testículo implantado se encontrava bem desenvolvido, possuíam olhos pertencentes à classe 3 de pigmentação. Nos indivíduos com olhos cuja pigmentação os incluía na classe 2, encontrava-se o testículo implantado muito mal desenvolvido, reduzido apenas a vestígios ou faltando mesmo nalguns casos. Em nenhum indivíduo operado cujos olhos pertenciam à classe de pigmentação 1, foi encontrado o testículo implantado. A presença de animais com olhos castanhos, classe 2, entre aqueles que apresentavam o testículo implantado reabsorvido, deve atribuir-se também à acção do testículo implantado antes da reabsorção, pois tais animais não aparecem nas culturas de  $R_0K_{IV}$  a  $25^\circ$ , e a operação só por si não altera a côr dos olhos, como se conclui das transplantações efectuadas como testemunhas, entre larvas  $aa$  e  $AA$  que deram sempre como resultado insectos perfeitos com olhos vermelhos, classe 1.

Não observámos qualquer influência da idade do testículo implantado em relação à da larva hospedeira.

Estamos assim, em presença de *uma acção a distância do testículo implantado  $AA$ , pigmentando os olhos do animal hospedeiro  $aa$ , no sentido do seu fenotipo dominante  $A$ .*

Os animais operados eram depois dissecados e cuidadosamente analisados os caracteres das gonadas. Os testículos  $AA$  implantados em larvas  $aa$  pigmentavam-se normalmente, segundo o seu fenotipo. A sua acção fazia-se ainda notar nos testículos do hospedeiro: os animais ♂, genotipicamente  $aa$ , provenientes de larvas operadas, apresentavam também os testículos pigmentados. Distribuindo os testículos por sete classes, segundo a sua pigmen-



tação, vimos que os testículos dos indivíduos *AA* (raça BK 14) pertenciam na sua maior parte às classes 6 e 7. Os testículos dos insectos provenientes das larvas *aa* operadas com implantação dum testículo *AA* não eram todavia tão fortemente pigmentados: as classes 3 e 4 eram, com efeito, as de maior frequência. O número de casos não foi suficientemente elevado para que se fizesse a comparação, com valor estatístico. Podemos, contudo, afirmar que *pela implantação de um testículo AA, os testículos aa do animal hospedeiro se pigmentavam, modificando assim o seu fenotipo no sentido do fenotipo de A, sem que no entanto a sua pigmentação atingisse a normal do fenotipo de AA.*

Algumas vezes, como vimos, os testículos implantados cresciam juntamente com os da larva hospedeira (Fig. 3a), mas na maioria dos casos o testículo implantado não ficava em contacto com os testículos da larva operada. No primeiro caso podíamos admitir uma acção de pigmentação por contacto, pela passagem de célula a célula de determinadas substâncias, dos tecidos genotipicamente diferentes dos testículos em contacto. No segundo caso existe uma acção de pigmentação a distância, sobre o testículo *aa*, análogamente ao que acontecia com a pigmentação dos olhos.

Inversamente, a implantação de testículos *aa* em larvas *AA* conduzia a testículos pigmentados, ainda que não tão intensamente como os de *AA*. Os resultados obtidos eram independentes do sexo da larva hospedeira; os testículos implantados pigmentavam-se igualmente em larvas masculinas e femininas.

Estamos agora em presença da acção inversa, *duma acção do organismo hospedeiro contendo o gene dominante A, sobre o implantado contendo o gene recessivo a.*

Implantações, efectuadas como testemunhas, de testículos *aa* em larvas *aa* conduziram sempre a testículos não pigmentados e excluem qualquer possível influência da operação sobre a pigmentação. Das implantações de testículos *AA* em organismos *AA*, resultava uma, ainda que ligeira, diminuição de pigmentação dos testículos implantados em relação à pigmentação normal dos testículos *AA*. Assim é também de explicar o facto de testículos *AA* em animais *aa* não se pigmentarem até à pigmentação normal de *AA*. A operação seria nestes casos responsável por uma diminuição da pigmentação relativamente à normal.

Vemos pois que das transplantações de testículos entre lar-

vas homozigóticas  $aa$  e  $AA$ , em todos os estados larvares operados (4.º, 5.º e 6.º) e independentemente da idade do testículo implantado em relação à da larva hospedeira, podemos concluir as seguintes acções:

- 1.º — *Do testículo implantado, contendo o gene dominante A, sobre a pigmentação dos olhos e testículos do organismo hospedeiro contendo o gene a, recessivo, modificando-a no sentido do seu fenotipo dominante A.*
- 2.º — *Do organismo hospedeiro contendo o gene dominante A, independentemente do seu sexo, sobre a pigmentação do testículo implantado contendo a, modificando-a também no sentido do fenotipo de A.*

c) *Implantação de testículos de insectos perfeitos.*

Estabelecida a acção do gene  $A$  sobre um organismo contendo o recessivo  $a$ , por transplantações de testículos dos três últimos estados larvares, uma nova questão se nos oferece: Só os tecidos em via de crescimento e diferenciação são capazes de efectuar tal acção ou também tal efeito pode ser obtido a partir de tecidos diferenciados dum insecto adulto?

Para resolver esta questão implantámos testículos de insectos perfeitos  $AA$  em larvas  $aa$  do princípio do sexto estado larvar. A operação oferecia alguma dificuldade em virtude das dimensões dos testículos a implantar e pela menor consistência e espessura da parede dos testículos dos insectos perfeitos, sendo com frequência destruídos durante a operação. Efectuámos 140 de tais implantações. As larvas operadas, apesar de, nos primeiros dias que seguiam à operação, se apresentarem com aspecto normal e não sofrerem mortalidade superior à média obtida nas operações com testículos larvares, acabavam por morrer inesperadamente. Assim, das 140 larvas operadas obtivemos apenas três borboletas, duas das quais com olhos castanhos e uma com olhos vermelhos. A dissecação dos dois primeiros animais, ambos do sexo feminino, revelou a presença de tecidos necróticos junto dos ovários, por certo restos dos testículos implantados. O terceiro animal não apresentava qualquer modificação.

A eclosão dos dois animais com olhos castanhos pode explicar-se também pela acção do gene  $A$  do testículo implantado

antes da reabsorção e necrose, caso análogo ao observado algumas vezes com testículos larvares. É-nos portanto lícito afirmar que *as implantações de testículos de insectos adultos contendo o gene A, em organismos contendo o gene a recessivo, nos revelam a possibilidade da acção daquele gene contido em tecidos adultos.*

QUADRO II

Pigmentação dos olhos dos animais operados com implantação de um testículo *Aa* e dos animais testemunhos.

Grupos de transplantações	Pigmentação dos olhos			n	
	CLASSE 1 vermelhos	CLASSE 2 castanhos	CLASSE 3 pretos		
Animais <i>AA</i> (Testemunhos)	—	—	100	176	
Transplantações { Testículo <i>Aa</i> { em larvas <i>aa</i> {	Test. impl. desenvol- vido . . . . .	—	10	90	10
	Test. impl. resorvido	88,8	11,2	—	9
Animais <i>aa</i> (Testemunhos)	100	—	—	127	

A causa de tão elevada mortalidade nestas operações deve ser procurada na degenerescência e subsequente necrose dos tecidos testiculares implantados. A dificuldade da operação, não explica, só por si, tal aumento de mortalidade.

d) Transplantações de testículos heterozigóticos *Aa*.

Nesta série de transplantações pretendemos observar, pela implantação de testículos, qual o comportamento do gene *A* em estado heterozigótico.

Pela implantação de testículos de larvas *Aa* em larvas homozigóticas *aa* obtivemos borboletas com olhos pretos. (Quadro II).

Em casos, nos quais o testículo implantado se desenvolvia mal, as implantações conduziam a borboletas com olhos castanhos. Os testículos *aa* das larvas hospedeiras pigmentaram-se

também pela implantação do testículo *Aa* (Fig 3 a). A implantação de testículos *aa* em larvas *Aa* dava como resultado testículos pigmentados e com valores para a pigmentação, não distintos dos obtidos com as implantações em animais *AA*.

Os valores obtidos para a pigmentação dos olhos e dos testículos de animais *aa* pela acção de testículos *Aa*, não são, pois, distintos dos obtidos pela acção dos testículos *AA*. *A acção do gene A em estado heterozigótico, manifestada em transplantações de testículos, não é distinta da acção do mesmo gene em estado homozigótico*

## CAPITULO IV

### Transplantações de ovários

#### a) Transplantações de um ovário *AA* em larvas *aa*.

Estudámos no capítulo anterior as acções entre os testículos implantados e os organismos hospedeiros, de constituição genética diferente. Uma nova questão se punha naturalmente: Serão só as gonadas masculinas capazes de tais acções, ou será também possível, por implantação de gonadas femininas, influenciar dum modo análogo os organismos hospedeiros de constituição genética diferente?

Para resolver esta questão, começámos por efectuar implantações de um ovário de larvas homozigóticas *AA*, em larvas *aa*, experiências paralelas às da primeira série de transplantações de testículos.

O método seguido nas transplantações de ovários, foi, em tudo, análogo ao seguido nas operações com gonadas masculinas. A preparação dos ovários a implantar oferecia alguma dificuldade em virtude das suas pequenas dimensões e da sua coloração que só difficilmente permitia distingui-los dos tecidos adiposos em contacto. Todavia, nalgumas larvas, uma ligeira coloração amarela dos ovários era sufficiente para comodamente os distinguir dos tecidos adiposos em redor. A maioria das transplantações foi efectuada entre larvas no princípio do último estado larvar. Neste estado do desenvolvimento, os ovários, situados dorsal-

mente no quinto segmento abdominal, apresentam o aspecto representado na Fig. 4; reconhecem-se já, em cada ovário, os quatro ovaríolos que só durante a fase de pupa se desenvolverão e diferenciarão originando o ovário do insecto adulto. Os ovários

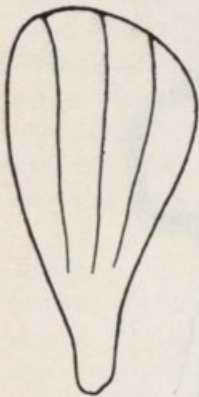


FIG. 4—Ovário de uma larva no princípio do último estado larvar.  $\times 120$ .

a implantar eram mantidos, depois de extraídos das larvas, na mesma solução isotónica de que nos servimos nas operações com gonadas masculinas, e a implantação efectuava-se do mesmo modo. Em virtude das pequenas dimensões do ovário a implantar, os insucessos durante as operações foram em maior número, pois a hemolinfa que brotava da incisão, arrastava o pequeno ovário e impedia, em muitos casos, a conclusão da operação.

A mortalidade nos animais assim operados foi algo inferior à dos operados com implantação de testículos. Com efeito, efectuámos um total de 283 implantações de um ovário, e obtivemos 50 insectos perfeitos o que equivale à percentagem de 18%, contra 14% de animais obtidos nas transplantações de testí-

culos. As menores dimensões dos ovários, permitindo fazer uma incisão diminuta explicam, talvez, a menor mortalidade. A mortalidade nas nossas operações é, comparada com a das experiências doutros autores, por ex. de KOPEČ, bastante elevada. A razão está, por um lado, nas pequenas dimensões do nosso objecto (KOPEČ trabalhou com *Macrolepidópteros*) e por outra, na extrema sensibilidade da *Ephestia* a quaisquer acções mecânicas. O simples contacto dum pinça de pontas muito finas e flexíveis usada para remover os animais das taças de cultura era, muitas vezes, a causa da morte de algumas larvas.

Os insectos obtidos eram, depois de avaliada a pigmentação dos olhos, dissecados sob um microscópio binocular e as gonadas, implantada e do hospedeiro, cuidadosamente observadas.

Vejamos, em primeiro lugar, a morfologia dos ovários da *Ephestia kühniella* (Fig. 5). Os ovários da *Ephestia* são, como os da maioria dos *Lepidópteros*, constituídos, cada um, por quatro ovaríolos, número igual ao de folículos dos testículos. Os ovaríolos são compridos e contêm grande número de ovos; os quatros ovaríolos reúnem-se no cálice, que se continua por

um curto oviducto. Os dois oviductos, um de cada ovário, reúnem-se depois num oviducto comum.

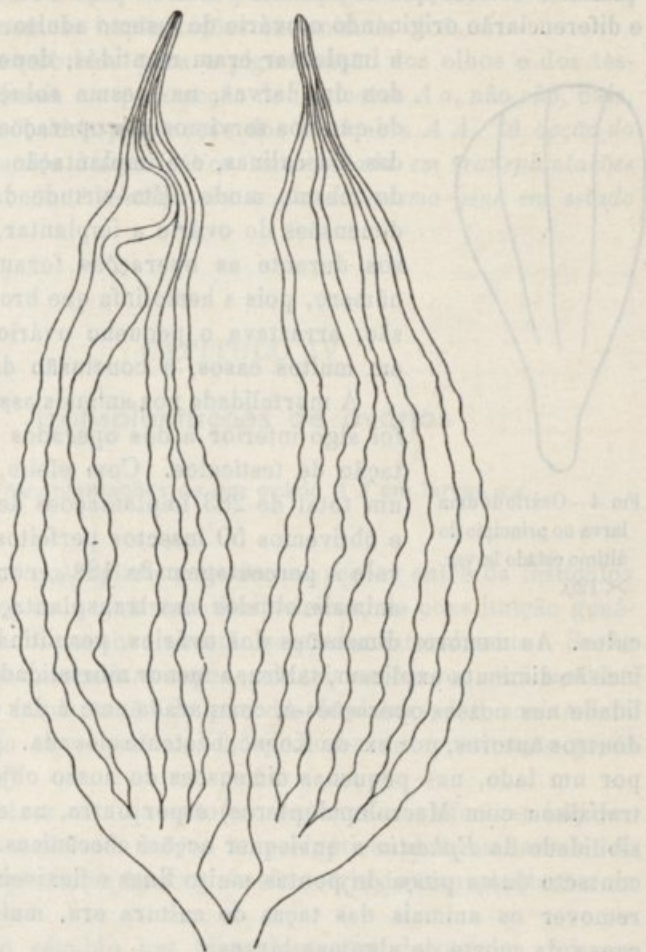


Fig. 5 — Ovários do insecto perfeito.  $\times 14$ .

Cada ovaríolo (Fig. 6) possui uma parte terminal, a câmara terminal; as quatro câmaras terminais de cada ovário estão ligadas pela membrana conjuntiva que forma a parede dos ovários. As restantes porções dos ovaríolos continuam livres até ao cálice. Os ovaríolos são do tipo *politrofo* e compõem-se de uma série de câmaras, constituídas por uma célula germinativa e cinco células vitelinas, que servem para a nutrição da célula

germinativa em crescimento. Externamente são revestidos por um épitelio folicular. Nas fêmeas recém-eclodidas, cada ovaríolo

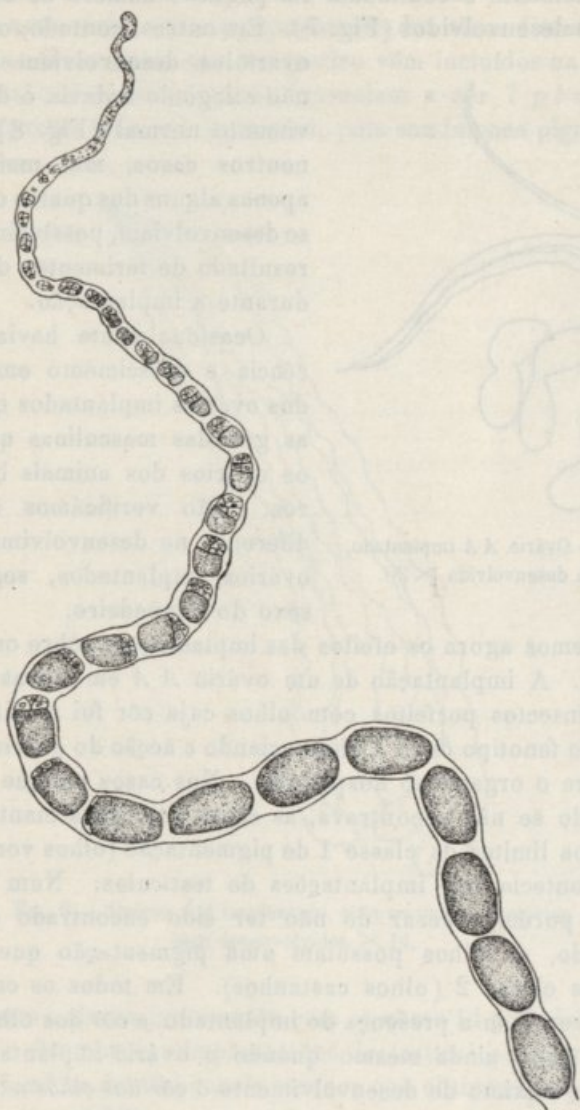


Fig. 6 — Ovaríolo dum ovário de imago.  $\times 30$ .

contém, em média, sete ou oito ovos, completamente desenvolvidos e maduros para a postura.

Os ovários implantados apresentavam-se muito diversamente desenvolvidos. Algumas vezes os ovaríolos desenvolviam-se incompletamente e continham um pequeno número de ovos normalmente desenvolvidos (Fig. 7). Em outras, contudo, os quatro



Fig. 7 — Ovário AA implantado, pouco desenvolvido.  $\times 20$ .

ovaríolos desenvolviam-se bem, não atingindo todavia o desenvolvimento normal (Fig. 8). Ainda noutros casos, mas mais raros, apenas alguns dos quatro ovaríolos se desenvolviam, possivelmente em resultado de ferimentos do ovário durante a implantação.

Ocasionalmente havia coalescência e crescimento em comum dos ovários implantados quer com as gonadas masculinas quer com os ovários dos animais hospedeiros. Não verificámos qualquer diferença no desenvolvimento dos ovários implantados, segundo o sexo do hospedeiro.

Analisemos agora os efeitos das implantações sobre os animais operados. A implantação de um ovário AA em larvas aa conduziu a insectos perfeitos com olhos cuja cor foi modificada no sentido do fenotipo de AA, denunciando a acção do ovário implantado sobre o organismo hospedeiro. Nos casos em que o ovário implantado se não encontrava, as cores dos olhos mantinham-se dentro dos limites da classe 1 de pigmentação (olhos vermelhos), como acontecia nas implantações de testículos. Num pequeno número, porém, apesar de não ter sido encontrado o ovário implantado, os olhos possuíam uma pigmentação que os fazia incluir na classe 2 (olhos castanhos). Em todos os casos, nos quais se verificou a presença do implantado, a cor dos olhos modificou-se. Mas ainda mesmo quando o ovário implantado apresentava o máximo de desenvolvimento a cor dos olhos não atingia a cor preta das borboletas AA, e que se obtinha nas implantações de testículos.

Em grande número de animais operados, as cores castanhas dos olhos não pertenciam à tabela 6 das cores de OSTWALD, como acontecia nas implantações de testículos, mas sim à tabela 7



(7 *pg*, 7 *pi*, etc.); a intensidade de pigmentação é a mesma e a cor difere apenas no tom que é neste caso castanho arroxeadado.

No quadro III vão reunidos os resultados dos efeitos da implantação de um ovário, sobre a pigmentação dos olhos dos animais *aa* operados. Os animais que no quadro vêm incluídos na classe de pigmentação 3 (olhos pretos), possuíam a cor 7 *pl* que não é contudo preta, mas que incluímos, pela sua intensa pigmentação,

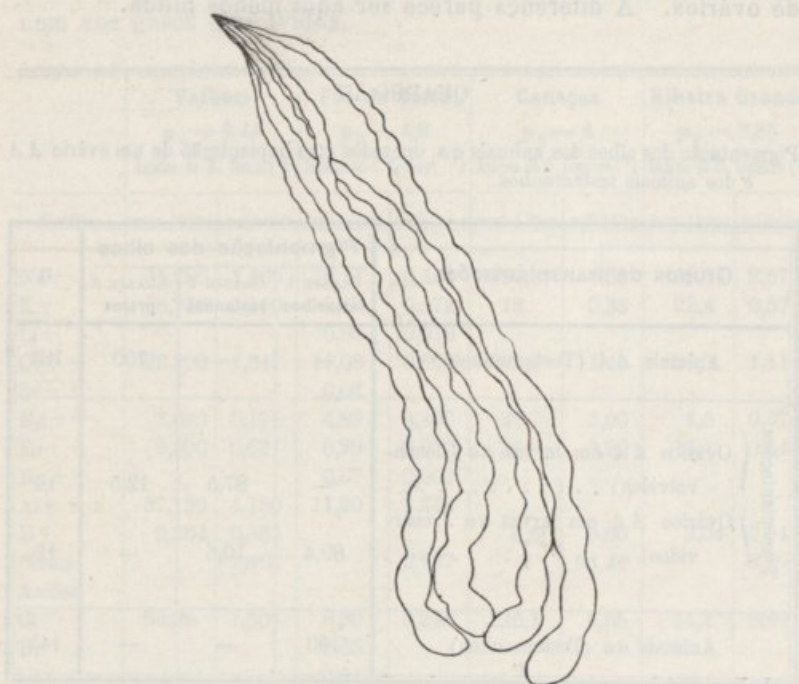


Fig. 8 — Ovário *AA* implantado, com os quatro ovaríolos bem desenvolvidos.  $\times 14$ .

nessa mesma classe juntamente com as cores 14 e 15 das tabelas, como já o fizemos nas implantações de testículos. Foram estes animais 7 *pl* os de olhos mais escuros que obtivemos nas implantações de um ovário.

Pela comparação dos efeitos sobre a pigmentação dos olhos, da implantação dum testículo e dum ovário, se conclui pois que os efeitos da implantação dum testículo, são, apesar das suas menores dimensões, superiores aos efeitos da implantação dum

ovário. A implantação simultânea de dois ovários, habilitar-nos-á a discutir e explicar a razão d'êste facto.

Os testículos dos animais masculinos *aa*, operados por implantação dum ovário *AA*, pigmentavam-se também. A maior parte pertencia às classes de pigmentação 3 e 4 que anteriormente estabelecemos. O número de casos obtidos não é suficientemente elevado para estabelecer a diferença, com significação estatística, entre as pigmentações obtidas pelas implantações de testículos e de ovários. A diferença parece ser aqui menos nítida.

## QUADRO III

Pigmentação dos olhos dos animais *aa*, operados com implantação de um ovário *AA* e dos animais testemunhos.

Grupos de transplantações		Pigmentação dos olhos			n
		CLASSE 1 vermelhos	CLASSE 2 castanhos	CLASSE 3 pretos	
Animais <i>AA</i> (Testemunhos)		—	—	100	186
Transplantações	Ovários <i>AA</i> em larvas <i>aa</i> (desenvolvidos) . . . . .	—	87,5	12,5	16
	Ovários <i>AA</i> em larvas <i>aa</i> (resorvidos) . . . . .	89,4	10,6	—	19
Animais <i>aa</i> (Testemunhos)		100	—	—	145

(*Continua*).

ALBERTO XAVIER DA CUNHA.

## Águas minerais portuguesas ácidas relativamente ao alaranjado de metilo ( $p_H < 4,4$ )

Apresentamos seguidamente um quadro com o resultado das últimas análises das quatro águas minerais portuguesas, estudadas, que dão ao alaranjado de metilo a sua côr acidica, isto é, com  $p_H < 4,4$ . Não fazemos referência aos ácidos indissociados nem aos gases dissolvidos.

Catiões	Valbom $p_H = 3,44$ Análise de P. Basto (1)		Foz da Sertã $p_H = 4,2$ Análise de C. Lepierre (2)		Caneças $p_H = 4$ Análise de C. Lepierre (3)		Ribeira Grande $p_H = 2,85$ Análise de C. Lepierre (4)	
	mgr./litro	milivales	mgr./litro	milivales	mgr./litro	milivales	mgr./litro	milivales
Na+	31,280	1,360	10,17	0,442	157,1	6,83	59,1	2,57
K+	6,256	0,160	2,82	0,072	13	0,33	22,4	0,57
Li+			0,09	0,013				
Ca++	26,990	1,347	11,08	0,554	229,1	11,45	22,3	1,11
Sr++			0,04					
Mg++	2,090	0,171	4,83	0,400	36,7	3,00	4,5	0,37
Fe++	0,600	0,021	0,29	0,010	25,2	0,90	15,1	0,54
Mn++			0,07	0,002				
Al+++	37,730	4,180	11,20	1,244				
H+	0,364	0,364			0,6	0,60	3,04	3,04
<i>Soma</i>		<i>7,603</i>		<i>2,737</i>		<i>23,11</i>		<i>8,20</i>
<b>Aniões</b>								
Cl <sup>-</sup>	53,36	1,504	8,80	0,248	236,1	6,65	14,2	0,40
Br <sup>-</sup>			0,05					
I <sup>-</sup>			0,01					
F <sup>-</sup>			0,60	0,031				
SO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	272,21	5,671	94,76	1,974	692,2	14,42	258,7	5,39
HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	35,31	0,364						
HPO <sub>4</sub> <sup>-</sup>			0,03					
HAsO <sub>4</sub> <sup>-</sup>			0,016					
NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	4,01	0,064	2,21	0,035	13,5	0,22	0,3	0,005
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>			27,45	0,450	111,3	1,82	145,1	2,38
<i>Soma</i>		<i>7,603</i>		<i>2,738</i>		<i>23,11</i>		<i>8,175</i>

(1) *Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra*, vol. III, n.º 3.

(2) *Communications présentes au XIII<sup>e</sup> Congrès I. d'Hidrologie*.

(3) *Técnica*, Nov. de 1932 — n.º 46.

(4) *Idem*.

No nosso trabalho «Expressão do resultado da análise das águas minerais» (*Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*, vol. III, n.º 3) fizemos a crítica do resultado da análise, feita pelo Prof. C. Lepierre, da água de Valbom. Então dissemos que não concordávamos também com a forma como está expresso o resultado da análise da água da Foz da Sertã, feita pelo mesmo professor.

Agora diremos que também não concordamos com a forma como está expresso o resultado das análises das águas de Caneças e da Ribeira Grande, também feitas pelo mesmo analista.

Consideremos a água da Foz da Sertã. O Prof. C. L. faz figurar no resultado da análise o ião  $\text{HCO}_3^-$ , 0,450 milivales, e  $\text{H}_2\text{CO}_3$  livre, 0,620 milimoles. Teremos

$$[\text{H}^+] = \frac{0,620}{0,450} \times 3 \times 10^{-7} = 10^{-6,39}.$$

Logo, o valor de  $p_{\text{H}}$  deduzido do resultado da análise é 6,39. O Prof. C. L. diz que o valor de  $p_{\text{H}}$  determinado directamente é, aproximadamente, 4,2.

Sendo  $p_{\text{H}} = 4,2$ , é razoável supor que todo o ácido carbónico está livre, e inadmissível admitir uma tão grande concentração de  $\text{HCO}_3^-$ . Com efeito, temos

$$[\text{H}_2\text{CO}_3] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{CO}_3^{2-}] = 1,07 \times 10^{-3}$$

e, como é fácil deduzir,

$$\begin{aligned} [\text{H}_2\text{CO}_3] &= \frac{1,07 \times 10^{-3}}{\frac{3 \times 10^{-7}}{10^{-4,2}} + \frac{3 \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-11}}{10^{-8,4}} + 1} \\ &= 1,064 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Será

$$[\text{HCO}_3^-] + [\text{CO}_3^{2-}] = 0,006 \times 10^{-3}$$

O Prof. C. L. considera

$$[\text{HCO}_3^-] = 0,450 \times 10^{-3}.$$

Podemos supor livre todo o ácido carbónico e não considerar o bicarbonato-ião. O mesmo se deduz do exame da curva de neutralização do ácido carbónico.

Do resultado da análise que o Prof. C. L. apresenta conclui-se que a água da Foz da Sertã pertenceria ao 1.º grupo da classificação de Hintz e Grünhut, do qual faz parte, por exemplo, a água de Vidago.

Sendo  $p_H = 4,2$ , deverá ser

$$S_2 > S_1,$$

designando por  $S_1$  a soma dos milivales dos catiões e por  $S_2$  a soma dos milivales dos aniões, pondo de parte os ácidos fracos e exprimindo a concentração dos sulfatos em  $SO_4^{=}$ . O Prof. C. L. acha  $S_2 < S_1$ , sendo  $d = S_1 - S_2 = + 0,449$ . Adiante mostraremos desenvolvidamente que este resultado é inadmissível.

Sendo  $p_H = 4,2$ , é  $\{H^+\} = 0,063$ . Este valor não figura no resultado da análise.

Consideremos agora as águas de Caneças e da Ribeira Grande. Nos resultados das análises destas águas figura  $HCO_3^-$  com concentrações importantes. Já dissemos que não é admissível tal hipótese. Dos referidos resultados conclui-se que não há ácido carbónico livre, mas apenas bicarbonato-ião. Para esta hipótese ser admissível deveria, como é sabido, o valor de  $p_H$  das duas águas estar compreendido entre 8 e 9. Nas duas águas podemos desprezar  $HCO_3^-$  e considerar livre todo o ácido carbónico.

No resultado da análise da água de Caneças figura  $\{H^+\} = 0,60$  quando, sendo  $p_H = 4$ , deveria figurar  $\{H^+\} = 0,10$ . No resultado da análise da água da Ribeira Grande figura  $\{H^+\} = 3,04$  quando, sendo  $p_H = 2,85$ , deveria figurar  $\{H^+\} = 1,41$ .

Na água de Caneças é  $S_2 < S_1$ , sendo  $d = S_1 - S_2 = + 1,22$ , o que é inadmissível. Apenas na água da Ribeira Grande é  $S_2 > S_1$ , sendo  $d = S_1 - S_2 = - 0,635$ .

Não concordamos com a forma como está expresso o resultado das análises das águas da Foz da Sertã, Caneças e Ribeira Grande. E, mais ainda, pomos em dúvida os próprios resultados.

O Prof. C. L. (*Expressão do resultado da análise das águas minerais*) a respeito da água da Foz da Sertã, diz:

«Acérra desta água publiquei um trabalho bastante extenso, precisamente por se tratar duma água rara, trabalho de que o Prof. Pinto Basto parece não ter conhecimento.

Escolhe-a, porém, o autor, juntamente com a de Valbom, como exemplos de águas do seu 5.º grupo, dizendo: «Consideremos apenas a água de Valbom. Não concordamos com a forma como está expresso o resultado da análise de qualquer das águas, mas a de Valbom merece-nos especial referência».

Na verdade, não torna mais a falar na água da Foz da Sertã.

Por esta forma, o A. afasta uma dificuldade, não se ocupando duma água que não cabe dentro do seu sistema, muito embora se trate duma água real, e não dum caso hipotético, architectado para arrelhar o Sr. Prof. Pinto Basto.

O V grupo é caracterizado por ser  $d < 0$  e diz ainda o A.: «O ácido carbónico... silfício... supõem-se no estado livre».

Ora, se adoptarmos esta suposição, teremos para a água da Foz da Sertã:

$S_1$ (soma dos catiões em miliequiv.) . . . . .	2,737
$S_2$ (soma dos aniões em miliequiv.) . . . . .	2,288
	$d = + 0,449$

Com os números da análise de V. Machado e Silva Pinto a diferença ainda é maior.

Quer dizer: o A. classifica indevidamente no V grupo a água da Foz da Sertã.

Note-se que não fizemos figurar nos quadros o ião  $H^+$ , como o Dr. Pinto Basto observa, e aqui com razão; se o fizéssemos, calculando  $cH^+$  a partir do valor de  $pH$  (4,22), visto as fórmulas usadas pelo autor serem, como vimos, inaplicáveis, teríamos aproximadamente:

$$d = + 0,525.$$

Por força há pois que considerar em solução o ião  $\text{HCO}_3^-$  em quantidade importante e ainda, em face da análise,  $\text{SiO}_3^-$  ou  $\text{HSiO}_3^-$ .

Estou convencido de que, com um bocado de paciência, se poderiam encontrar ainda outros casos que a teoria do Á. difficilmente resolveria.»

A razão das nossas afirmações é bem evidente. Vamos, porém, desenvolver mais o assunto para que elle fique completamente esclarecido.

O conhecimento do valor de  $p_{\text{H}}$  das águas consideradas sugere immediatamente este problema: qual será a origem da sua grande acidez?

Reparando no resultado das análises das águas de Valbom e Foz da Sertã, verificamos que o catião e anião com maior concentração são respectivamente o alumínio-ião e o sulfato-ião, sendo o número de milivales do sulfato-ião um pouco superior ao número de milivales do alumínio-ião. E, como sabemos que as soluções de sulfato de alumínio, onde existem os iões considerados, teem, em virtude da hidrólise, baixo valor de  $p_{\text{H}}$ , immediatamente lembra attribuir a acidez das águas referidas a sulfato de alumínio que estas dissolvessem. Como as águas teem em dissolução ferro, embora pouco, e os sais de ácidos fortes, quer ferrosos quer férricos, dão soluções ácidas, também este facto pode ser considerado uma causa da acidez observada.

Vejamus se as causas consideradas justificam esta acidez. Com este fim preparámos soluções de sulfato de alumínio e de alúmen com várias concentrações e determinámos o seu valor de  $p_{\text{H}}$ . Este foi determinado com eléctrodo de quinidrona e electrodo normal de calomelanos.

Obtivemos os seguintes resultados.

*Soluções de sulfato de alumínio*

Sol. 1	— 371,2 mgr de Al por litro	$p_{\text{H}} = 3,87$ a $12,5^\circ$
2	— 37,1 » » » » »	= 4,01 » »
3	— 18,6 » » » » »	= 4,07 » »
4	— 9,3 » » » » »	= 4,09 » »
5	— 3,7 » » » » »	= 4,19 » »

A figura 1 mostra como varia, aproximadamente, o valor de  $p_H$  das soluções de sulfato de alumínio com a diluição considerando concentrações de alumínio próximas das que se determinaram nas águas minerais a que nos referimos.

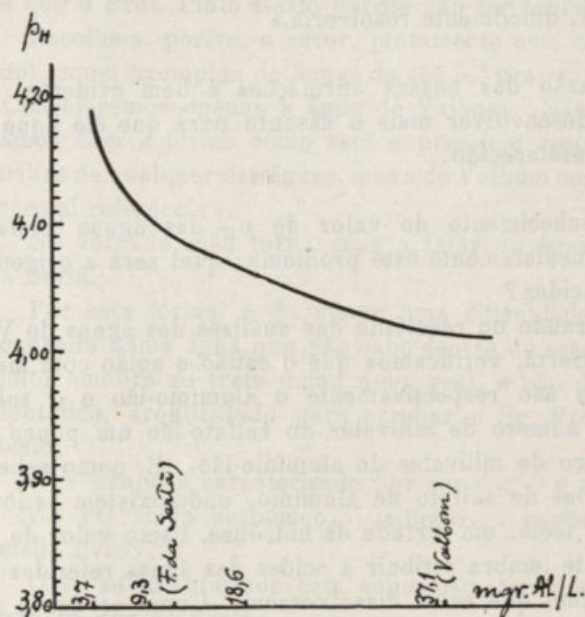


FIG. 1

Sulfato de Alumínio — 12,5°

*Soluções de alúmen*

Sol. 1 — 477,2 mgr de Al por litro	$p_H = 3,76$ a $12,5^\circ$
2 — 95,4 » » » » »	= 4,01 » »
3 — 47,7 » » » » »	= 4,07 » »
4 — 23,9 » » » » »	= 4,16 » »
5 — 11,9 » » » » »	= 4,26 » »
6 — 4,8 » » » » »	= 4,27 » »

A figura 2 mostra como varia, aproximadamente, o valor de  $p_H$  das soluções de alúmen com a diluição, considerando concentrações próximas das que se determinaram nas águas minerais a que nos referimos.



Para avaliarmos a influência no valor de  $p_H$  da existência dum sal neutro na solução de sulfato de alumínio, preparámos uma solução (Valbom) contendo por litro 37,1 mgr de alumínio e 112,1 mgr de cloreto de potássio (1,504 milivales).

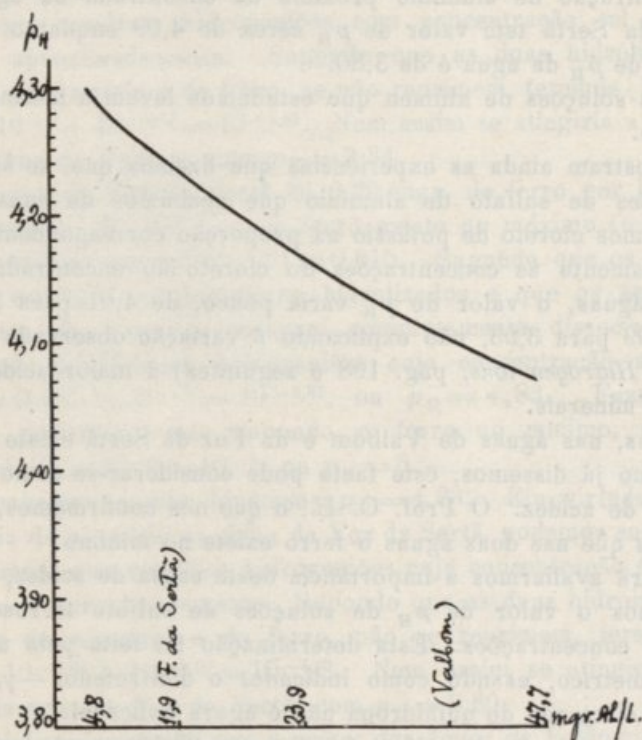


FIG. 2

Alúmen — 12,5°

Achámos  $p_H = 3,97$  a 14,5°. Na solução (Foz da Sertã) contendo 9,3 mgr de alumínio e 18,5 mgr de cloreto de potássio (0,248 milivales) por litro achámos  $p_H = 3,93$  a 12,5°.

Com electrodo de quinidrona e electrodo normal de calomelanos determinámos também o valor de  $p_H$  da água da Foz da Sertã, colhida na nascente no dia 31 de Janeiro de 1935. Achámos  $p_H = 3,80$  a 12,5°.

Dos dados que apresentamos deduz-se que, tanto na água de Valbom como na da Foz da Sertã, deve haver outra fonte de hidrogeniões além do sulfato de alumínio que podemos supor

dissolvido nas duas águas. Uma solução de sulfato de alumínio com concentração de alumínio próxima da encontrada na água de Valbom tem valor de  $p_H$  cerca de 4,01 enquanto que o valor de  $p_H$  da água é 3,34; uma solução de sulfato de alumínio com concentração de alumínio próxima da encontrada na água da Foz da Sertã tem valor de  $p_H$  cerca de 4,09 enquanto que o valor de  $p_H$  da água é de 3,80.

As soluções de alumínio que estudámos levam a mesma conclusão.

Mostram ainda as experiências que fizemos que, se às duas soluções de sulfato de alumínio que acabámos de considerar juntarmos cloreto de potássio na proporção correspondente respectivamente às concentrações do cloreto ião encontradas nas duas águas, o valor de  $p_H$  varia pouco, de 4,01 para 3,97 e de 4,09 para 3,93, não explicando a variação observada (Britton — *Hydrogen ions*, pág. 198 e seguintes) a maior acidez das águas minerais.

Mas, nas águas de Valbom e da Foz da Sertã existe ferro, e, como já dissemos, este facto pode considerar-se como outra causa de acidez. O Prof. C. L., o que nós confirmámos, reconheceu que nas duas águas o ferro existe no mínimo.

Para avaliarmos a importância desta causa de acidez, determinámos o valor de  $p_H$  de soluções de sulfato ferroso com várias concentrações. Esta determinação foi feita pelo método colorimétrico, usando como indicador o dinitrofenol —  $\gamma$ , visto que o electrodo de quinidrona não é agora aplicável.

Numa solução de sulfato ferroso com 98,53 mgr de ferro por litro achámos  $p_H = 4,6$ . Na solução com 24,63 mgr de ferro por litro e nas mais diluídas até 0,49 mgr por litro achámos  $p_H = 4,8$ . Devemos notar que, determinando o valor de  $p_H$  numa mesma solução com electrodo de quinidrona e com o dinitrofenol —  $\gamma$ , encontrámos no segundo caso valor um pouco superior.

Na água de Valbom há 0,60 mgr de ferro por litro. Supondo que o ferro existe no máximo (o que não se verifica) seria  $\{Fe^{+++}\} = 0,03$ . Supondo que os sais férricos estavam completamente hidrolizados e que os ácidos fortes resultantes da hidrólise estavam completamente dissociados, esses sais produziriam hidrogeniões cuja concentração seria  $[H^+] = 0,03 \times 10^{-3} = 10^{-4,53}$ , ou  $p_H = 4,53$ . Fazendo análogo raciocínio, mas supondo o ferro no mínimo, será  $[H^+] = 0,02 \times 10^{-3} = 10^{-4,7}$ , ou  $p_H = 4,7$ .

Notemos que numa solução de sulfato ferroso, com a quantidade de ferro que se encontra na água de Valbom, achámos, com o dinitrofenol  $\gamma$ ,  $p_H = 4,8$ .

Suponhamos a pior hipótese:  $p_H = 4,53$ . Em virtude da existência do alumínio na água de Valbom podemos supor, como vimos, que resultam hidrogeniões com concentração tal que  $p_H = 4$ , aproximadamente. Supondo que as duas hidrólises, dos sais de alumínio e de ferro, se não reprimem, teremos  $[H^+]_{\text{total}} = 10^{-4} + 10^{-4,53} = 10^{-3,89}$ . Nem assim se atingiria a acidez da água de Valbom, com  $p_H = 3,34$ .

Na água da Foz da Sertã há 0,29 mgr. de ferro por litro (C. Lepierre). Supondo que o ferro existe no máximo (o que não se verifica) seria  $\{Fe^{+++}\} = 0,015$ . Supondo que os sais férricos estavam completamente hidrolizados e que os ácidos resultantes da hidrólise estavam completamente dissociados, esses sais produziram hidrogeniões cuja concentração seria  $[H^+] = 0,015 \times 10^{-3} = 10^{-4,83}$ , ou  $p_H = 4,83$ . Fazendo análogo raciocínio, mas supondo o ferro no mínimo, será  $[H^+] = 0,01 \times 10^{-3} = 10^{-5}$ , ou  $p_H = 5$ .

Suponhamos a pior hipótese:  $p_H = 4,83$ . Em virtude da existência do alumínio na água da Foz da Sertã, podemos supor, como vimos, que resultam hidrogeniões cuja concentração é tal que  $p_H = 4$  aproximadamente. Supondo que as duas hidrólises, dos sais de alumínio e de ferro, não se reprimem, teremos  $[H^+] = 10^{-4,83} + 10^{-4,10} = 10^{-4,03}$ . Nem assim se atingiria a acidez da água da Foz da Sertã, com  $p_H = 3,80$ .

*Concluimos, portanto, que a acidez das águas de Valbom e da Foz da Sertã não pode ser apenas atribuída à hidrólise dos sais de alumínio e de ferro que podemos supor dissolvidos nas duas águas.*

Ponhamos mais claramente a questão. Suponhamos que queremos preparar artificialmente qualquer das duas águas. Principiemos por dissolver sulfato de alumínio e sulfato ferroso de modo que as concentrações do alumínio e do ferro sejam as encontradas na água escolhida. Podemos agora seguir dois caminhos: 1) ou juntamos sais neutros, que pouco modificam o valor de  $p_H$ , até que todos os catiões atinjam as concentrações desejadas, e seguidamente um dos ácidos fortes, clorídrico ou sulfúrico, o que depende dos sais neutros escolhidos, até que as concentrações totais dos aniões atinjam os valores desejados e

o valor de  $p_H$  desça até se tornar igual ao da água natural; ou 2) juntamos sais neutros e sulfatos ácidos até conseguir o mesmo fim.

Para avaliarmos a influência da dissolução de sulfatos ácidos no valor de  $p_H$ , preparámos duas soluções, uma contendo sulfato de alumínio, sendo a concentração do alumínio aproximadamente igual à que se encontra na água de Valbom, e sulfato ácido de potássio, com concentração tal que a concentração total do sulfato-ião na solução preparada seja a que se encontra na água mineral referida (37.1 mgr. de Al por litro e 151 mgr. de  $KHSO_4$  ou sejam 1,11 milivales de  $HSO_4^-$ ), e outra que do mesmo modo corresponde à água da Sertã (9,3 mgr. de Al por litro e 49, 7 mgr. de  $KHSO_4$  ou sejam 0,365 milivales de  $HSO_4^-$ ). A dissolução do  $KHSO_4$  fez baixar o valor de  $p_H$ , determinado com electrodos de quinidrona e de calomelanos normal, no primeiro caso de 4,01 para 3,09, e, no segundo, de 4,09 para 3,44. As soluções tornaram-se mais ácidas, respectivamente, do que as duas águas naturais. Para conseguir a acidez destas basta muito menor concentração de hidrosulfato-ião. Este resultado está de harmonia com os cálculos que adiante faremos.

Alfredo Luiz Lopes, a propósito da água da Foz da Sertã (*Águas minero-medicinais de Portugal, pág 385*) diz: « As análises químicas qualitativas, que nelas tinham até há pouco sido feitas, davam erradamente a indicação da existência de ácido sulfúrico livre; mas a que no corrente ano se praticou no laboratório do Instituto Industrial e Comercial de Lisboa, evidenciou que as reacções que firmaram tal opinião são devidas ao sulfato ácido de alumínio e não ao ácido sulfúrico ».

O resultado da análise da água da Foz da Sertã de V. Machado e Silva Pinto é tão incompreensível que não nos cansamos em discuti-lo. Não compreendemos como seja possível deduzir desse resultado que a acidez da água é devida ao sulfato ácido de alumínio. Os referidos analistas acham  $d = S_1 - S_2 = + 1,116$  e, admitindo a existência de sulfatos ácidos, ainda a diferença é maior. Como imaginariam os analistas aniões para contrabalançar a carga dos catiões excedentes?

O Prof. C. Lepierre (*Communications présentées au XIII<sup>e</sup> Congrès I. d'Hidrologie*) atribui a acidez da água da Foz da Sertã à hidrolise do sulfato de alumínio. Como já demonstrámos, a

hidrolise do sulfato de alumínio não chega para explicar a acidez da água.

Das determinações que fizemos conclui-se que nas águas de Valbom e da Foz da Sertã, estequiometricamente, os ácidos fortes estão incompletamente neutralizados. É justificável dizer que nas duas águas há ácidos fortes livres. Artificialmente, conseguir-se-ia uma solução com a composição de qualquer das águas dissolvendo sais neutros e ácidos fortes. A opinião dos primeiros analistas que estudaram a água da Foz da Sertã, de que há ácido sulfúrico livre, não é, portanto, desrazoável. E, notemos que esta opinião está de harmonia com a origem que se pode atribuir às duas águas minerais.

Alfred Martin (Dietrich und Kaminer — *Handbuch der Balneologie* — vol. 1, pág. 94) diz: « Não se devem considerar os jazigos de gesso como a única origem do ácido sulfúrico que se encontra nas águas minerais. Outra importante origem são certos sulfuretos facilmente atacáveis, principalmente o bisulfureto de ferro, o qual, como pirite ou marcaxite, se encontra largamente disseminado em várias rochas debaixo da forma de cristais, nódulos ou mesmo depósitos. Este composto, pela acção da água e do oxigénio, é, em grande escala, atacado, produzindo-se sulfato ferroso e ácido sulfúrico livre. Este último, arrastado pela água, exerce a sua acção dissolvente sobre as rochas com que vai estando em contacto. O ácido sulfúrico livre que se encontra em muitas nascentes tem esta origem. » O Prof. C. Lepierre (*loc. cit.*), considera esta a origem do ácido sulfúrico da água da Foz da Sertã.

Estando, estequiometricamente, na água de Valbom e da Foz da Sertã os ácidos fortes incompletamente neutralizados, havendo necessidade de considerar o ião  $\text{HSO}_4^-$ , que não é ácido forte, é evidente que nas duas águas deve ser  $\text{S}_2 > \text{S}_1$ . Foi o resultado a que chegámos na água de Valbom; ao resultado contrário chegou o Prof. C. Lepierre na água da Foz da Sertã.

Antes de esclarecer melhor este assunto, consideremos as águas de Caneças e da Ribeira Grande.

Na água de Caneças a concentração de alumínio é desprezável (C. Lepierre — *Técnica* — n.º 46, Nov. 1932); apenas o ferro pode originar acidez. Nas águas ácidas relativamente ao alaranjado o ferro pode existir no mínimo e no máximo. A determinação do ferro nos dois graus de oxidação somente pode ser

feita na nascente em virtude da facilidade com que o ferro no mínimo se oxida. Do resultado da análise feita pelo Prof. C. Lepierre concluímos que todo o ferro existe no mínimo.

Uma solução de sulfato ferroso com ferro na mesma concentração que se encontra na água de Caneças tem  $p_H = 4,8$  (dinitrofenol  $-\gamma$ ). A hidrólise dos sais ferrosos não chega, portanto, para explicar a acidez da água de Caneças,  $p_H = 4$ .

A acidez desta água, admitindo que não há ácidos fortes estequiometricamente livres, sómente se explicaria se uma parte do ferro estivesse oxidado, o que não verificou o Prof. C. Lepierre.

Na água da Ribeira Grande a quantidade de alumínio é também desprezável (Ch. Lepierre — *Técnica* — N.º 46, Nov. 1932).

Supondo que todo o ferro estava oxidado, que a hidrólise dos sais de ferro era completa e que os ácidos fortes resultantes estavam completamente dissociados, seria  $\{Fe^{+++}\} = 0,71$ ,  $[H^+] = 0,71 \times 10^{-3} = 10^{-3,15}$  e  $p_H = 3,15$ . Nem assim se explicaria a grande acidez desta água, com  $p_H = 2,85$ .

O que temos dito leva-nos, portanto, à seguinte conclusão: *nas quatro águas portuguesas ácidas relativamente ao alaranjado de metilo ( $p_H < 4,4$ ) a acidez não pode ser atribuída sómente à hidrólise dos sais de ferro e alumínio; os ácidos fortes, estequiometricamente, não estão completamente neutralizados.*

Sendo assim, é evidente que a soma dos milivales dos aniões,  $S_2$ , pondo de parte os ácidos fracos e considerando apenas o ião  $SO_4^-$ , será superior à soma dos milivales dos catiões,  $S_1$ .

Em face do desacôrdo, resolvemos analisar a água da Foz da Sertã. A água foi colhida na nascente no dia 31 de Janeiro dêste ano e analisada pelos métodos correntes. Não determinámos o ácido carbónico, que não nos interessava, e não doseámos os iões que existem com concentrações muito pequenas e cujos valores não influem sensivelmente nas conclusões a tirar.

Obtivemos os seguintes resultados:

*Água da Foz da Sertã*

$$p_H = 3,80$$

Catiões			Aniões		
	mgr / litro	milivales		mgr / litro	milivales
K+	1,642	0,042	Cl <sup>-</sup>	8,130	0,229
Na+	5,428	0,236	SO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	95,690	1,992
Mg <sup>++</sup>	1,090	0,090	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	2,00	0,032
Ca <sup>++</sup>	10,420	0,520			2,253
Fe <sup>++</sup>	0,265	0,009			
Al <sup>+++</sup>	10,140	1,126			
		2,023			

H<sub>2</sub>SiO<sub>3</sub> 29,9 mgr/litro  
CO<sub>2</sub> ?

É, portanto,

$$S_2 > S_1$$

e

$$d = S_1 - S_2 = - 0,230.$$

Segundo o método de Hintz e Grünhut (Pinto Basto — *Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra* — Vol. III, N.º 3) teremos :

$$\begin{aligned} \{H^+\} &= 0,5 \times 0,230 = 0,115 \\ \{HSO_4^-\} &= 0,115 \\ \{SO_4^-\} &= 1,992 - 0,230 = 1,762 \end{aligned}$$

O resultado da análise deve ser completado e modificado da seguinte maneira :

Catiões		Aniões	
	milivales / litro		milivales / litro
Catiões considerados	2,023	Cl <sup>-</sup>	0,229
H+	0,115	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	0,032
	2,138	HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	0,115
		SO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	1,762
			2,138

H<sub>2</sub>SiO<sub>3</sub> livre 29,9 mgr/litro  
CO<sub>2</sub> livre CO<sub>2</sub> total.

Do resultado da análise deduz-se

$$[H^+] = 0,115 \times 10^{-3} = 10^{-3,94}$$

ou

$$p_H = 3,94.$$

Diferença entre o valor de  $p_H$  deduzido e o determinado directamente :

$$3,94 - 3,80 = +0,14.$$

Vê-se, portanto, que nós não classificámos indevidamente no 5.º grupo de Hintz e Grönhut a água da Foz da Sertã. Vê-se também que tínhamos boa razão para não concordar com a forma como o Prof. Ch. Lepierre exprimiu o resultado da sua análise, e até para duvidar do rigor das determinações que fez.

No nosso trabalho sobre as águas sulfúreas portuguesas (*Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra* — Vol. v — fasc. 1) lembrámos que o resultado das análises das águas minerais poderia ser completado partindo do valor de  $p_H$  e fazendo aplicação da lei da acção de massa ou das curvas de neutralização.

A distribuição dos ácidos fracos, como o carbónico e o sulfídrico, com constantes de dissociação bem determinadas e aos quais é aplicável a lei da acção de massa, faz-se sem grandes dificuldades, como vimos.

No caso das águas que temos agora estudado trata-se da distribuição do ácido sulfúrico total entre o sulfato e o hidrosulfato ião, e da distribuição do ferro e alumínio totais entre o ferro e o alumínio ião e os respectivos hidróxidos indissociados, resultantes da hidrólise, cujas constantes de dissociação não estão determinadas. Tentemos, porém, dar ao problema uma solução aproximada.

Em solução muito diluída, podemos supor que o ácido sulfúrico está completamente dissociado em hidrogenião e hidrosulfato-ião. Este último ião, porém, não é ácido forte, mas também não é fraco. Poderemos, sem grande erro, aplicar a lei da acção de massa à sua dissociação? Sobre este assunto dizem A. A. Noyes, Melcher, Cooper e Eastman (*Zeitschrift für Physikalische Chemie* — Vol. 70 — 1910 — pág. 371), a propósito da aplicação duma equação da termodinâmica à dissociação do hidrosulfato-ião :



« A aplicação desta equação a uma substância, como o hidro-sulfato-ião, cuja dissociação não segue a lei da acção de massa, pode difficilmente dar resultados exactos ; porém, parece provável que, tratando-se duma substância com ionisação intermédia entre a dos sais e dos ácidos fracos, se obtenham valores aproximados contanto que os valores da constante dissociação às duas temperaturas se refiram à mesma concentração. » Contentemo-nos com valores aproximados, embora grosseiramente; nem é razoável por enquanto pretendê-los muito exactos no caso das águas minerais.

Os valores da constante de dissociação do hidrosulfato-ião foram determinados por Noyes, etc. (*loc. cit.*) em solucões de

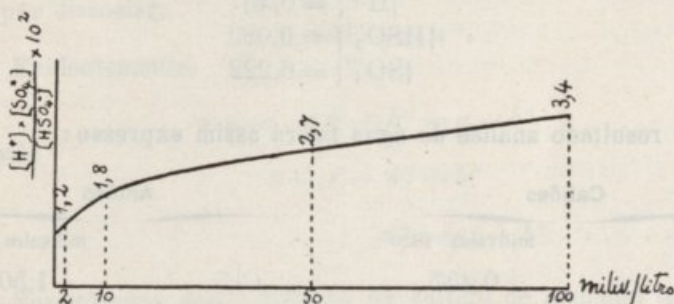


FIG. 3

H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> - 18°.

ácido sulfúrico e de sulfato ácido de potássio. Os valores obtidos nos dois casos são pouco diferentes. A figura 3 indica a maneira como varia a constante de dissociação com a concentração, a 18°, no caso do ácido sulfúrico. As abscissas representam o número de milivales de ácido sulfúrico total e as ordenadas os valores de  $K = [H^+] \times [SO_4^{2-}] / [HSO_4^-]$  multiplicados por 10<sup>2</sup>.

Da figura tira-se:

Água de Valbom	SO <sub>4</sub>   total = 6,4	K = 1,6 × 10 <sup>-2</sup>
Foz da Sertã	» = 1,992	= 1,2 × 10 <sup>-2</sup>
Caneças	» = 14,42	= 2 × 10 <sup>-2</sup>
Ribeira Grande	» = 5,39	= 1,5 × 10 <sup>-2</sup>

Êstes valores referem-se à temperatura de 18°. Quando a temperatura sobe, o valor de K diminui.

Consideremos a água de Valbom. Temos:

$$\begin{aligned}
 [\text{H}^+] &= 10^{-3,34} \\
 [\text{HSO}_4^-] + [\text{SO}_4^{--}] &= [\text{SO}_4^{--}] \text{ total} = 3,2 \times 10^{-3} \\
 \frac{[\text{H}^+] \times [\text{SO}_4^{--}]}{[\text{HSO}_4^-]} &= 1,6 \times 10^{-2}
 \end{aligned}$$

Destas equações deduz-se:

$$\begin{aligned}
 [\text{SO}_4^{--}] &= 3,111 \times 10^{-3} \\
 [\text{HSO}_4^-] &= 0,089 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Teremos

$$\begin{aligned}
 \} \text{H}^+ \{ &= 0,457 \\
 \} \text{HSO}_4^- \{ &= 0,089 \\
 \} \text{SO}_4^{--} \{ &= 6,222
 \end{aligned}$$

O resultado análise da água ficará assim expresso:

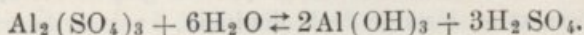
Catiões		Aniões	
	milivales / litro		milivales / litro
H <sup>+</sup>	0,457	Cl <sup>-</sup>	1,504
Outros catiões	7,239	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	0,064
	<u>7,696</u>	SO <sub>4</sub> <sup>--</sup>	6,222
		HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	0,089
			<u>7,879</u>

Será

$$D = 7,696 - 7,879 = -0,183.$$

Notemos, porém, que no resultado da análise, rigorosamente, não deveriam figurar os valores que considerámos de  $\} \text{Fe}^{++} \{$  e  $\} \text{Al}^{+++} \{$ , mas estes valores diminuídos dos valores de  $\} \text{Fe}(\text{OH})_2 \{$  e  $\} \text{Al}(\text{OH})_3 \{$  referentes aos hidróxidos não dissociados resultantes da hidrólise. Não temos elementos para fazer o cálculo destes últimos valores; não conhecemos os valores das constantes de dissociação dos dois hidróxidos.

Vejamos, porém, se poderemos determinar a ordem de grandeza das concentrações referidas. Consideremos uma solução de sulfato de alumínio e suponhamos que da sua hidrólise resulta o hidróxido de alumínio e ácido sulfúrico conforme a equação:



Trata-se duma hipótese, evidentemente, porque da hidrólise podem resultar sais básicos; esta hipótese leva-nos ao máximo valor de  $\{Al(OH)_3\}$ .

Estequiometricamente, a análise da solução deve dar

$$\{Al^{+++}\} = a \quad \{SO_4^- \} = a$$

Atendendo à hidrólise, e desprezando o valor da concentração hidroxiliónica, que é muito pequeno, devemos considerar:

$$\begin{aligned} \{Al^{+++}\} &= a' & \{SO_4^- \} &= b' \\ \{H^+\} &= a'' & \{HSO_4^- \} &= b'' \end{aligned}$$

e, por dissociar,

$$\{Al(OH)_3\} = a'''.$$

Evidentemente,

$$a' + a'' = b' + b'' = a - b''$$

donde

$$a - a' - a'' = b''$$

ou

$$a''' = a'' + b'' \dots \dots (1)$$

Suponhamos que a solução de sulfato de alumínio tem 37,1 mgr. de alumínio por litro, aproximadamente a concentração do alumínio na água de Valbom. Já vimos que nesta água, a 12,5°, é  $p_H = 4,01$ .

Teremos, estequiometricamente:

$$\{Al^{+++}\} = 4,122 \quad \{SO_4^- \} = 4,122$$

Atendamos à hidrólise. É

$$[H^+] = 0,098 \times 10^{-3}$$

e os valores de  $\{HSO_4^- \}$  e  $\{SO_4^- \}$  deduzem-se das equações

$$\frac{[H^+] \times [SO_4^-]}{[HSO_4^-]} = 1,4 \times 10^{-2},$$

como resulta da figura 3, e

$$[HSO_4^-] + [SO_4^-] = 4,122 \times 10^{-2}.$$

Será

$$\{HSO_4^- \} = 0,028 \times 10^{-3}$$

e, portanto, (1),

$$\begin{aligned} \{Al(OH)_3\} &= 0,028 + 0,098 \\ &= 0,126. \end{aligned}$$

Resulta do que dizemos que a hidrólise do sulfato de alumínio se deve dar, aproximadamente, na extensão de 3%. Mellor (*A comprehensive treatise on inorganic and theoretical chemistry* — Vol. V — pág. 285) diz que uma solução de  $AlCl_3$ , 0,0375 molar, é hidrolizada, a 25°, na extensão de 4%.

Notemos agora que, conforme demonstrámos, na água de Valbom há ácidos fortes estequiometricamente livres. O hidrogênio destes ácidos reprime a hidrólise do sulfato de alumínio e, portanto,

$$\{Al(OH)_3\} < 0,126.$$

Na impossibilidade de calcularmos o valor de  $\{Al(OH)_3\}$ , faremos figurar no resultado da análise, em vez de  $Al^{+++}$ ,  $Al^{+++} + Al(OH)_3$ . O mesmo faremos para o ferro.

Vê-se, portanto, que o valor absoluto de D, no caso da água de Valbom, é um pouco maior do que o calculado.

Consideremos agora a água da Foz da Sertã.

Fazendo o cálculo como no caso da água de Valbom e atendendo a que, figura 3,  $K=1, 2$ , obtemos os valores:

$$\begin{aligned} \{H^+\} &= 0,158 \\ \{HSO_4^-\} &= 0,013 \\ \{SO_4^{--}\} &= 1,966 \end{aligned}$$

O resultado da análise será assim expresso:

Catiões		Aniões	
	milivales / litro		milivales / litros
K <sup>+</sup>	0,042	Cl <sup>-</sup>	0,229
Na <sup>+</sup>	0,236	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	0,032
Mg <sup>++</sup>	0,090	HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	0,013
Ca <sup>++</sup>	0,520	SO <sub>4</sub> <sup>--</sup>	1,966
Fe <sup>++</sup> + Fe(OH) <sub>2</sub>	0,009		2,240
Al <sup>+++</sup> + Al(OH) <sub>3</sub>	1,126		
H <sup>+</sup>	0,158		
	2,181		

Será

$$D = 2,181 - 2,240 = - 0,059.$$

Os critérios que temos propostos de verificação das análises dão no caso das águas de Valbom e Foz da Sertã os seguintes resultados:

	$p_H$ determinado directamente	$p_H$ deduzido	Dif.	D
Valbom	3,34	3,44	0,1	- 0,183
Foz da Sertã	3,80	3,94	0,14	- 0,059

Notemos que não fizemos as análises das duas águas com o máximo rigor, mas apenas com o suficiente para podermos esclarecer questões que nos foram postas.

O que temos dito mostra bem até que ponto é arbitrário o método de Hintz e Grünhut no caso das águas do 5.º grupo. Notemos, porém, que o trabalho de Noyes e dos seus colaboradores é de 1910 e, portanto, posterior aos trabalhos dos dois notáveis hidrologistas. A arbitrariedade justifica-se bem pela falta de elementos para melhor resolver o problema. Os iões que fazem figurar no resultado das análises são, todavia, aqueles que devem ser considerados.

Apliquemos os métodos de verificação das análises ás águas de Caneças e da Ribeira Grande.

Consideremos a água de Caneças.

Método de Hintz e Grünhut. Temos  $S_1 = 22,51$ ,  $S_2 = 21,29$  e  $d = S_1 - S_2 = + 1,22$ . A água pertencerá ao 1.º grupo da classificação de Hintz e Grünhut (água de Vidago, etc.).

Deve ser

$$\begin{aligned} \{HCO_3^-\} &= d \text{ milivales} \\ [CO_2] \text{ livre} &= (C - d) \text{ milimoles / litro,} \end{aligned}$$

designado por C a quantidade total de ácido carbónico expresso em milimoles. Será, portanto,

$$\{HCO_3^-\} = 1,22$$

e

$$[CO_2] \text{ livre} = 1,82 - 1,22 = 0,6 \text{ milimoles.}$$

Notemos que o Prof. C. Lepierre faz figurar no resultado da análise todo o ácido carbónico debaixo da forma de bicarbonato-ião.

Dos valores indicados deduz-se :

$$[H^+] = \frac{0,6}{1,22} \times 3,04 \times 10^{-7} = 10^{-6,83}$$

ou

$$p_H = 6,83.$$

Este valor é muito maior do que o obtido directamente ( $p_H = 4$ ); a diferença é igual a + 2,83.

Método de verificação proposto. Sendo  $p_H = 4$ , será

$$[H^+] = 0,1 \times 10^{-3}.$$

Devemos supor

$$\{HCO_3^-\} = 0.$$

Teremos, figura 3,

$$\frac{[H^+] \times [SO_4^-]}{[HSO_4^-]} = 2 \times 10^{-2}$$

e

$$[HSO_4^-] + [SO_4^-] = 7,21 \times 10^{-3}.$$

Deduzimos :

$$\{HSO_4^-\} = 0,035$$

e

$$\{SO_4^-\} = 14,350.$$

Será, portanto,

$$D = 22,51 + 0,1 - 21,255 = 1,355.$$

Consideremos agora a água da Ribeira Grande. Temos

$$S_1 = 5,16, S_2 = 5,795 \text{ e } d = S_1 - S_2 = -0,635.$$

A água pertence, portanto, ao 5.º grupo da classificação de Hintz e Grünhut.

Método de Hintz e Grünhut. Teremos:

$$\begin{aligned} \{H^+\} &= 0,318 \\ \{HSO_4^-\} &= 0,317 \\ \{SO_4^{--}\} &= 5,39 - 0,635 = 4,755 \end{aligned}$$

logo

$$[H^+] = 0,318 \times 10^{-3} = 10^{-3,5}$$

ou

$$p_H = 3,5.$$

O valor de  $p_H$ , determinado directamente é 2,85; a diferença é, portanto, de + 0,65.

Método de verificação proposto. Sendo  $p_H = 2,85$ , será

$$[H^+] = 1,41 \times 10^{-3}.$$

Devemos supor

$$\{HCO_3^-\} = 0.$$

Teremos, figura 3,

$$\frac{[H^+] \times [SO_4^{--}]}{[HSO_4^-]} = 1,5 \times 10^{-2}$$

e

$$[HSO_4^-] + [SO_4^{--}] = 2,695 \times 10^{-3}.$$

Deduz-se

$$\begin{aligned} \{HSO_4^-\} &= 0,230 \\ \{SO_4^{--}\} &= 4,930. \end{aligned}$$

Será, portanto,

$$D = 5,16 + 1,41 - 5,565 = + 1,005.$$

Em face do resultados obtidos, afirmamos que os valores das concentrações iónicas da água de Caneças não estão rigorosamente determinados. Se a análise desta água for repetida com maior cuidado, verificar-se-há que  $S_2 > S_1$ , que a água pertence ao 5.º grupo da classificação de Hintz e Grünhut, e que os critérios de verificação conduzirão a valores de  $p_H$  e de D mais satisfatórios.

No resultado da análise da água da Ribeira Grande não deve figurar o ião  $HCO_3^-$ , cuja concentração se pode desprezar, e deve considerar-se o ião  $HSO_4^-$ . Mostram os critérios de veri-

ficação que o rigor com que foram determinadas as concentrações iónicas não é grande. Estamos convencidos de que, se a análise for repetida com maior cuidado, se chega a valores de  $p_H$  e de D mais aceitáveis.

Há tempo deixámos esclarecido o caso da água de Valbom e agora o da água da Foz da Sertã. Se forem repetidas com cuidado as análises das águas de Caneças e da Ribeira Grande, a teoria será ainda confirmada. Na descoberta da verdade científica sòmente as teorias nos guiam e auxiliam; sem elas não teriam significação os resultados da observação e experiência, e não haveria critérios para a descoberta de erros e correcções.

Não nos admira que, sem critérios de verificação das análises, ou com critérios imperfeitos, os analistas tenham chegado a resultados pouco rigorosos, escapando-lhes erros de medida e de interpretação, mesmo que possuam indiscutível perícia.

Os erros que temos apontado nenhum valor teem quando a água mineral é apenas vista debaixo do ponto de vista medicinal. A água fica suficientemente definida química e fisicamente, e sempre, mais ou menos, encoberto o enigma da sua acção terapêutica. Mas, se pretendemos exprimir com rigor, debaixo do ponto de vista químico e físico, a composição das águas minerais, devemos fazê-lo tendo em atenção os atuais conhecimentos, e é forçoso eliminar erros antigos, hoje inadmissíveis. Julgamos que o nosso trabalho demonstra bem o valor dos critérios que temos proposto de verificação das análises na eliminação dos referidos erros de medida e de interpretação.

Coimbra, Abril de 1935.

EGAS F. PINTO BASTO



## Acção química das radiações hertzianas

Nos artigos que publicámos na *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*, Vol. iv, N.º 1, Vol. v, N.º 1, criticando os trabalhos experimentais do Prof. P. Forjaz, dissemos, a respeito da acção das radiações hertzianas sobre a esterificação, o seguinte:

1.º — Não se compreende que, sobre uma esterificação em marcha, as radiações hertzianas exerçam acção ora aceleradora ora retardadora;

2.º — Não se pode concluir das experiências do autor que as radiações hertzianas dêem à marcha da esterificação carácter periódico;

3.º — É improvável que as radiações hertzianas exerçam acção sobre as esterificações estudadas pelo autor;

4.º — As últimas experiências sobre esterificação, realizadas pelo autor, estão em contradição com o segundo princípio da termodinâmica;

5.º — Atribuímos a erros de medida e imperfeição das disposições experimentais os resultados criticados.

O Prof. P. Forjaz convidou-nos a repetir as suas experiências. Respondemos que, se aparece a necessidade de as repetir, ninguém será mais competente para o fazer do que S. Ex.<sup>a</sup>. Não desejamos, *sobre este assunto*, fazer trabalhos experimentais; limitamo-nos a estudar e criticar os resultados obtidos por outros.

O autor considera definitivos os resultados que obteve, e nem a dificuldade de compreender uma acção ora retardadora ora aceleradora, nem a contradição com a teoria da radiação e com o segundo princípio da termodinâmica o faz vacilar. Para tudo se encontrará no futuro uma explicação; agora somente lhe interessam registos experimentais.

Porém, a respeito da contradição com o segundo princípio da termodinâmica, o autor esboça já uma explicação (*Scientia* — Vol. i, N.ºs 4 e 5, Abril de 1935).

Observou o autor que a reacção entre o álcool etílico e o ácido fórmico se dá num sentido durante 16 dias e seguidamente passa a dar-se em sentido contrário, sem ser exercida sobre o sistema nenhuma acção exterior. Fizemos notar este facto extraordinário. O autor explica: «Sempre considerámos as variações possíveis de temperatura, as quais acentuam o seu efeito sobre os componentes dos sistemas nas proximidades do equilíbrio. Tais componentes tem pontos de ebulição diferentes o que determina que o álcool se evapore mais facilmente, deslocando-se, por esse facto, o equilíbrio, em favor da hidrólise».

Por outras palavras, a explicação do autor é a seguinte. Desde já notemos que se deduz das afirmações do autor que os componentes dos sistemas, nas experiências que fez, se evaporaram livremente. Diz que o efeito desta evaporação se torna mais saliente na proximidade do equilíbrio, e que nesta altura, sendo o álcool etílico o componente que mais facilmente se evapora, a sua remoção do sistema determina que a reacção retrograde. Desta forma o autor explica que até ao 16.º dia a esterificação prosseguia e desde o 16.º ao 24.º dia a reacção passe a dar-se em sentido contrário.

O autor imaginou muito precipitadamente esta forçada explicação da anomalia que notámos; esqueceu-se de que o componente mais volátil do sistema não é o álcool, mas sim o formato de etilo! O álcool etílico ferve a 78,3º, o ácido fórmico a 101º e o formato de etilo a 55º. As razões do autor, levariam a conclusão contrária da que deduziu. A objecção que apresentámos mantém-se.

No caso de a mesma esterificação prosseguir sob a acção das radiações hertzianas, o autor observou também anomalias. Mas agora, a contradição com o segundo princípio não o apouca. Diz que a nossa objecção não tem interesse científico visto que factos semelhantes tem sido já observados. E diz mais: «Como verifico que o Prof. Pinto Basto deseja documentar-se, pois desconhece esses trabalhos, de boamente transcrevo uma passagem, etc.» O autor seguidamente transcreve passagens do conhecido trabalho de W. Dietz sobre a acção da lipase pancreática na esterificação que se dá entre o álcool amílico e o ácido butírico. Dietz reconheceu que a posição de equilíbrio quando a referida reacção é catalizada pela lipase é diferente da que se observa quando o catalizador é o hidrogenião. Este facto parece estar em contradição com o segundo princípio da termo-

dinâmica; a posição de equilíbrio deveria ser a mesma. Diz o autor que esta contradição, e outras que tem sido observadas, ainda não encontraram explicação.

O comportamento paradoxal que se reconhece nas experiências de Dietz é largamente discutido, por exemplo, por W. M. Bayliss (*The nature of enzyme action*). A lipase encontra-se no sistema na fase sólida, em pequenas partículas de tecido pancreático, que se podem remover por filtração. Trata-se, portanto, de um sistema heterogéneo. Bayliss faz as seguintes considerações. Como um catalizador actua pela formação de compostos intermediários, a posição de equilíbrio não é necessariamente a mesma do que no caso da reacção não ser catalizada, ou quando se emprega outro catalizador. Quando se formam compostos intermediários, as suas velocidades de formação e decomposição não são necessariamente idênticas, podendo na posição de equilíbrio haver excesso de um ou de outro. O facto de a acção da enzima se dar num sistema heterogéneo dá lugar aos fenómenos complexos que resultam da existência de superfícies de separação das fases. Ostwald reconheceu que no equilíbrio da hidrólise dum sal de um ácido gordo, a presença de tais superfícies modificava a posição de equilíbrio; devido à adsorção do ácido livre, o grau de hidrólise é aumentado.

Freundlich (*Kapillarchemie* — Band II — págs. 759 e 760) discute também os trabalhos de Dietz e de outros químicos. Considera as anomalias encontradas como provenientes de fenómenos que se passam na superfície de separação das fases.

Vê-se bem, depois do que temos dito, que não há semelhança entre os factos extraordinários que fizemos notar na esterificação estudada pelo Prof. P. Forjaz e o comportamento paradoxal que os químicos mencionados tem verificado noutros sistemas. Para este comportamento paradoxal vê-se uma explicação, embora a complexidade dos fenómenos que se passam na superfície de separação das fases e na acção das enzimas não permita por enquanto vê-la com toda a nitidez. No caso da esterificação do autor não se vê senão uma explicação: erros de medida e imperfeição das disposições experimentais. Se o segundo princípio da termodinâmica pudesse ser tão facilmente desobedecido, nenhuma importância teria a aplicação da termodinâmica à Química.

O autor não usou termostatos e não evitou que se evaporassem os componentes dos sistemas que estudou. A temperatura

e a evaporação podem ter influido desigualmente no sistema testemunha e no sujeito à acção das radiações, o que é importante visto tratar-se de descobrir pequenas diferenças; a testemunha depõe falso, mas sem responsabilidade. Depois das últimas explicações do autor, ainda mais nos convencemos do que temos afirmado.

No seu novo artigo (*Scientia*, N.ºs 4 e 5, Abril de 1935) o Prof. P. Forjaz faz referência a vários casos, estudados por vários experimentadores, em que se manifesta a acção das radiações hertzianas. Outros vamos considerar ainda, sem a pretensão de querer documentar o autor, pois certamente este os conhece.

Em 1926, em Düsseldorf, E. Wilke, professor de Química física na Universidade de Heidelberg, comunicou que as ondas eléctricas produzem alterações nos soles de trissulfureto de arsénio. E. Wilke continuou os seus estudos sobre este assunto, servindo-se principalmente dos soles de arsénio, mas experimentando também vários outros. Em 1933 publicou, de colaboração com R. Müller (*Kolloid-Zeitschrift*, Band 65, Heft 3, Dez, 1933), o resultado das suas novas experiências.

Reconheceu que as ondas eléctricas podem produzir nos coloides duas espécies de alterações: momentâneas (cataforese e conductibilidade eléctrica) e duradouras (côr, flocculação, viscosidade). Wilke e Müller terminam o seu artigo com a seguinte consideração. Ficando estabelecido que vários coloides muito sensíveis se alteram sob a acção de pequenas quantidades de energia radiada, haverá razão para admitir a possibilidade de as radiações da T. S. F. exercerem acção sobre os coloides altamente instáveis que fazem parte dos organismos animais? Wilke e Müller respondem afirmativamente.

Os últimos trabalhos de E. Wilke foram publicados, depois da sua morte, em 1935 (*Kolloid Zeitschrift*, Band 70, Heft 2, Feb. 1935). Wilke e Ganser estudaram a acção das ondas eléctricas sobre coloides catalizadores e sobre as reacções catalizadas, na ausência do coloide. Compararam o sistema radiado com um sistema testemunha. Ambos eram postos em termostatos, exactamente à mesma temperatura, e o sistema testemunha era colocado num compartimento metálico fechado, bem ao abrigo das ondas eléctricas. Estudaram a acção da diástase do malte sobre o amido, e a acção dos soles de prata e platina sobre a decomposição do peróxido de hidrogénio. Compararam a acção

de radiações com diferentes comprimentos de onda. Os coloides eram previamente sujeitos à acção das radiações durante um certo intervalo de tempo e comparada a sua acção com a do coloide não radiado; estudaram a influência da grandeza do intervalo de tempo referido. As conclusões a que chegaram são as seguintes:

I — A acção de radiações com o comprimento de onda de 50 m. aproximadamente enfraquece a acção catalítica da diástase sobre o amido; esta acção desaparece se a diástase for radiada durante bastante tempo;

II — A acção catalítica dos soles de prata sobre a decomposição do peróxido de hidrogénio é enfraquecida quando os soles são sujeitos a radiações com comprimento de onda inferior a 200 m.; quando são superiores a acção catalítica torna-se mais enérgica;

III — A acção catalítica dos soles de platina sobre a decomposição do peróxido de hidrogénio é muito pouco modificada pela acção das radiações;

IV — *A acção das radiações exerce-se apenas sobre o catalizador e não sobre a reacção catalizada;*

V — A acção catalítica do iodeto-ião sobre a decomposição do peróxido de hidrogénio não é modificada pela acção das radiações. *A acção das radiações exerce-se apenas sobre os catalizadores quando estes são coloides.*

Mostraram as experiências feitas que as radiações podem exercer influência selectiva, cuja grandeza e sentido dependem do comprimento de onda, ou influência independente do comprimento de onda. Neste último caso está a aglomeração dos iões electro-líticos na superfície de separação entre as partículas coloidais e o substrato condutor.

É interessante a parte final do artigo de Wilke e Ganser. Dizem o seguinte. Produzindo as ondas eléctricas alterações nos coloides, não poderão as radiações da T. S. F. exercer influência nos trabalhos laboratoriais e nos organismos animais? Na resposta a esta pergunta, entendem que se deve ter em atenção as seguintes considerações:

I — A influência na velocidade de migração, nos coloides, está, sem dúvidas, averiguada;

II — É sabido que as aves de migração perdem o rumo na proximidade das estações emissoras ;

III — Há uma série de acontecimentos, observados depois da grande guerra, cujo aparecimento coincidiu com o desenvolvimento da T. S. F., e cuja causa não está esclarecida. Poderão ser provocados pelas ondas eléctricas? Opõe-se a objecção da pequenez das quantidades de energia em jôgo. A acção duradoura de pequenas quantidades de energia pode, porém, ser equivalente à acção momentânea duma quantidade grande. Pode ser mais inconveniente desprezar a acção das radiações consideradas do que exagerar já a sua importância.

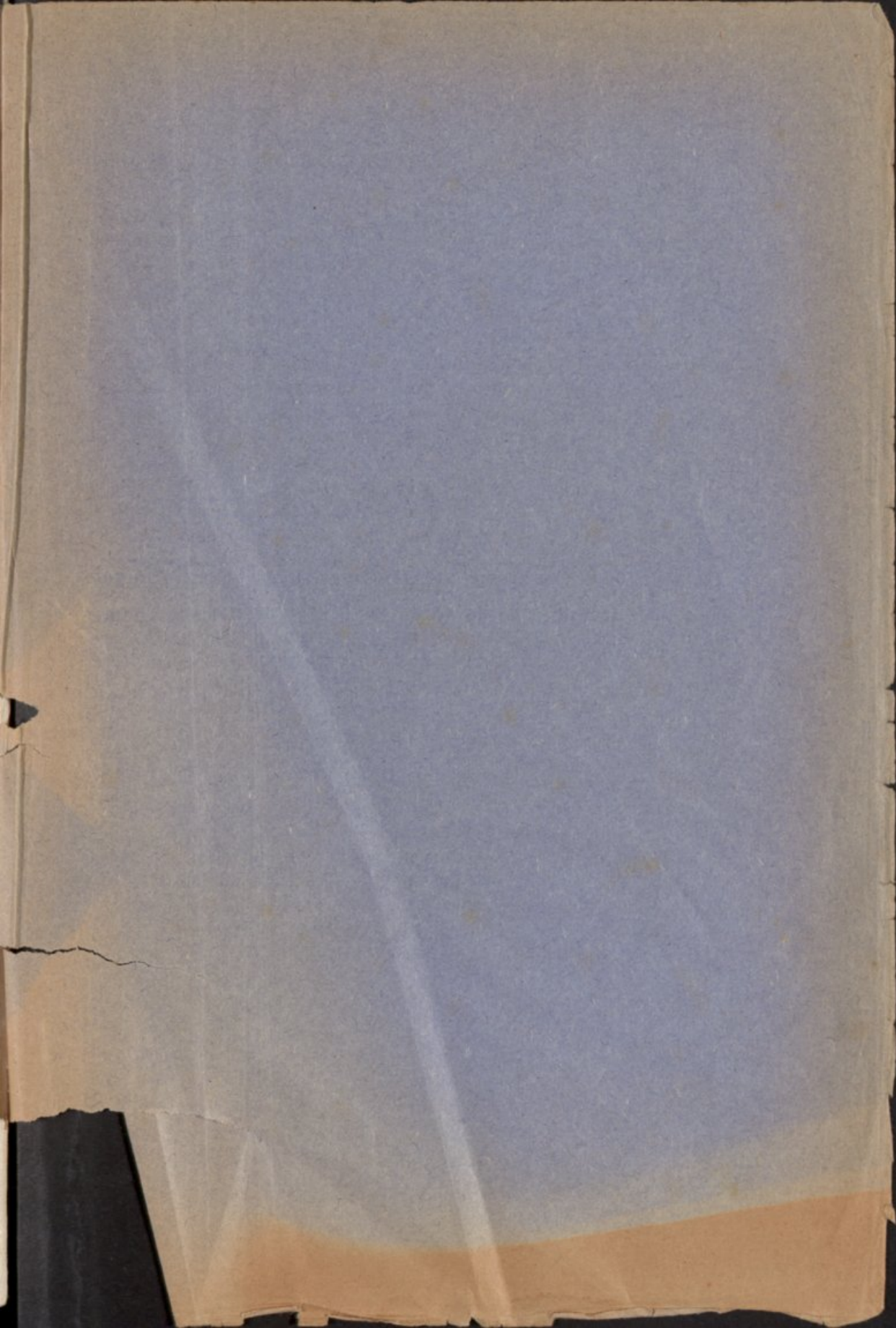
Se agora, depois da resumida exposição que fizemos dos trabalhos de Wilke, Müller e Ganser, considerarmos os trabalhos citados, em sua defeza, pelo Prof. P. Forjaz, no seu último artigo, reconhece-se imediatamente que em todo êle a acção das radiações hertzianas se exerce sobre coloides; e não esqueçamos que enzimas e corantes são colóides também. Esta acção não poderíamos nós negar com fundamento. Os trabalhos citados pelo autor de forma nenhuma o defendem, porém, das objecções que apresentámos.

Nós dissemos, e provámos, que, à luz das teorias, é altamente improvável a acção das radiações hertzianas sobre a esterificação, na ausência de coloides catalizadores, como succede nas experiências que criticámos do Prof. P. Forjaz.

Continuamos a manter as afirmações que temos feito, resumidas no começo dêste artigo, as quais o Prof. P. Forjaz não se dignou refutar. Não é com experiências feitas sem as necessárias precauções que se destroem as actuais teorias. Estamos certos de que, se o autor repetir as suas experiências com os cuidados que usou Wilke, chegará a resultados análogos aos que êste químico encontrou. Estes resultados, tão recentes, confirmam inteiramente as nossas afirmações.

Maio de 1935.

EGAS F. PINTO BASTO.



## AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.