UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA
DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. IX — N.º 1

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1941

REVISTA

DA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA
DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. IX

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1941

A actividade científica dos primeiros directores do Gabinete de Física que a reforma pombalina criou em Coimbra, em 1772

A DESCOBERTA, FEITA EM COIMBRA, DA LEI DAS ACÇÕES MAGNÉTICAS

Entre os vários aspectos inovadores da reforma pombalina de 1772, existe um que não tem sido focado com o interêsse que merece. É o que se refere às condições, largamente criadas pela reforma, para a realização da investigação científica entre nós. Há, na verdade, que reconhecer que o reformador soube produzir as condições materiais necessárias para a sua realização efectiva, e disto é prova suficiente o magnífico conjunto de trabalhos que, embora esquecidos ou ignorados, foram realizados pelos primeiros professores do Gabinete de Física da nossa Universidade.

Tivesse sido acarinhado e mantido o impulso inicial, tivesse sido outro o ambiente social do país, e teriamos tido, em Coimbra, larga produção científica, da qual, hoje, nos poderiamos certamente orgulhar. A valorizar, logo de princípio, êsse magnifico conjunto de trabalhos, não faltou sequer a descoberta sensacional de uma lei fundamental da Física: *a lei das acções magnéticas.*

Como foi possível tal descoberta, e como se compreende que ela tenha sido esquecida a ponto de, universalmente, ser atribuïda a Coulomb?

Pelo que se refere à primeira interrogação, é o próprio autor que nos explica as razões do sucesso do seu trabalho. Diz êle:

«*Confiado em possuir nêste Régio Gabinete de Física experimental (por mercê da liberalidade do Augustíssimo Rei o Senhor Dom José I, sempre de gloriosa memória) um pedaço de Iman, que na proporção da sua grandeza é pela sua fôrça um dos mais* *estimáveis, que eu jámais vi, ou de que ouvi falar: confiado, digo, que êste Iman experimentado por diferentes modos poderia dar alguma luz mais clara sôbre a lei, de que falo, me abalancei intrèpidamente à obra no princípio de Março do ano passado, esperando-se por meio da minha fraca indústria (a qual eu confeço inferior à de tantos homens célebres, que antes de mim trabalharam tão sàbiamente nêste ponto) não conseguisse o meu fim; ao menos uma copiosa colecção de experiências feitas com o referido Iman (além de poder merecer uma benigna aprovação da minha empreza) serviria talvez algum dia de matéria para exercitar o espírito, e talento mais penetrante de algum outro Filósofo.»*

Sôbre a origem dêste Iman, logo a seguir, no mesmo escrito, acrescenta o autor:

«*Pelo que soube de algumas relações que se me fizeram, êste famoso Iman foi um presente feito pelo Imperador da China, ao grande, e magnífico monarcha de Portugal, o senhor D. João V.*».

Dêstes passos se infere claramente, em prova do que afirmámos, *que foi a riqueza material do Gabinete de Física pombalino que tornou possível a descoberta, em Coimbra, da lei fundamental das acções magnéticas.*

Pelo que respeita à segunda interrogação, forçoso é confessar que foram a inércia do nosso meio social, o isolamento do país, a incompreensão de certos dirigentes, os principais responsáveis pelo esquecimento desastroso a que foi votado o trabalho coimbrão.

Já pela sua importância, já porque foi realmente o primeiro trabalho sério de investigação científica feito a seguir à reforma pombalina — primeiro resultado encorajante do esfôrço dispendido pelo reformador — merece êle que nos detenhamos um pouco sôbre alguns pormenores da sua realização. Acresce a isto a circunstância, como mostraremos adiante, de existirem ainda os principais materiais dêsse trabalho, integrados, hoje, no Museu pombalino há pouco constituido.

Foi o professor João António dalla Bella, o autor do referido trabalho. Natural de Pádua, sabe-se que veio para Portugal a convite do Marquês de Pombal. Tive ocasião já de me ocupar das circunstâncias que o trouxeram para Coimbra e da sua acção como primeiro director do Gabinete de Física, no trabalho que comecei, em 1937, sôbre a reconstituïção e restauração dêste famoso Gabinete. Foi êste trabalho, concluido em 1938, conforme comunicação que apresentei em Junho dêste mesmo ano, à Academia das Ciências de Lisboa, que me levou a ocupar-me da actividade do professor dalla Bella. Informado de que havia sido sócio desta mesma Academia, e até o primeiro sócio efectivo da minha especialidade, tive interêsse em folhear as Memórias publicadas por esta Academia, no intuito evidente de estudar os trabalhos que êle não poderia ter deixado de ali apresentar. Tive logo a grande surpreza de encontrar, nas primeiras páginas do primeiro volume das Memórias, de págs. 85 a 199, o trabalho importante da descoberta da lei fundamental das acções magnéticas. Trata-se de um trabalho consciencioso que revela as magníficas qualidades de investigador do seu autor. Tudo é descrito com a maior precisão: observações feitas, cuidados havidos e resultados obtidos.

Algumas passagens são muito curiosas; entre muitas, cito o comentário que dalla Bella escreve a propósito dos cuidados que julgou dever tomar durante tôdas as suas experiências. Diz êle:

«Não estranheis, respeitáveis Académicos, a relação de tantas escrupulosas advertências minhas; porque certamente em tais experiências nunca há deligências superfluas. É absolutamente necessário que aquelas, das quais se intenta tirar alguma decisão, sejam feitas com escrupulosa exactidão, que as faz ser trabalhosas; mas sem a qual elas perdem todo o seu merecimento.»

São numerosas as experiências que dalla Bella descreve, mas logo das primeiras que considera, conclue:

«Confrontando os números do cálculo com os da experiência, se conhece que as fôrças magnéticas dos dois Imans que serviram para esta experiência, mostram seguir muito proximamente a razão inversa dos quadrados das distâncias, até à de duas polegadas.»

Êste trabalho é de 1782; ora, só em 1785 é que Coulomb publicou o seu, com o enunciado da mesma lei. A prioridade da descoberta pertence portanto a dalla Bella. Mas, como já referimos, ela foi, infelizmente, esquecida a favor de Coulomb que tem sido, até agora, considerado como seu único autor.

Sem querer, por agora, pormenorizar tôdas as causas dêste lamentável esquecimento, devo referir uma que desde logo se me apresentou: foi a da data da publicação do primeiro tomo das Memórias da Academia. Com efeito, esta publicação só se fêz em 1797. Quere dizer: dalla Bella faz o seu trabalho em 1782, apresenta-o à Academia no mesmo ano, e os dirigentes desta agremiação científica cometem o lamentável desleixo de o conservar esquecido durante 15 anos nos seus arquivos!

Não teria feito contudo dalla Bella outra publicação do seu trabalho ou, por outro lado, lido e apresentado o trabalho na Academia das Ciências, em 1782, não teria sido dada notícia dêle para outras Academias ou para outros jornais científicos da época? Se tal tivesse acontecido, não seria ainda possível, com tôda a justiça, passar a designar-se, daqui em deante, pelo nome de dalla Bella, a lei das acções magnéticas?

Propuz-me fazer, nêste sentido, as necessárias investigações. Foi, durante estas, que eu tive o prazer de receber um trabalho do professor e meu eminente colega Giovanni Costanzo, dando conta igualmente da descoberta de dalla Bella, e referindo — o que eu desconhecia — que, em Itália, já o professor Mário Gliozzi se havia ocupado em 1937 do mesmo assunto num livro publicado sôbre a história da Electricidade: *L'Elettrologia fino al Volta*.

Pelo que escrevem estes dois professores, não pensam êles que haja outra publicação de dalla Bella diferente da que se encontra nas Memórias da Academia das Ciências de Lisboa. Na verdade, não encontrei até agora, nas pesquizas a que já procedi, qualquer referência. Percorri já tôda a colecção do Journal des Sçavants, as Memórias das Academias de Paris, de Berlim e de Itália, e nada me foi possível encontrar.

Seja porém como fôr, quer seja possível encontrar ainda alguma referência ao trabalho de dalla Bella, quer não, *é incontestável que foi no Gabinete de Física pombalino, e com o seu material científico, que foi descoberta, em 1782, a lei das acções magnéticas*. Ao averiguar facto tão importante, desde logo procurei saber se teriam sido conservados, no Gabinete, os materiais de que se serviu dalla Bella nas suas investigações, sobretudo a parte mais importante, o famoso Iman que «*na proporção da sua grandeza*» foi «*pela sua fôrça um dos mais estimáveis*» que o eminente físico jámais viu ou de que ouviu falar, como êle afirma na parte que atrás transcrevi da sua memória.

Foi fácil a identificação do famoso Iman; o catálogo dos instrumentos da época — o *Index Instrumentorum* — descreve-o, com o número 43, nos seguintes termos:

«*Magnes Sinicus figuræ irregularis eleganter armatus. Lapis nudus est 605 $\frac{1}{2}$ unciarum pondo, ac pondus 3271 unciarum usque sustulit. Sustinetur Magnes a stylobate ligneo, cui insistunt columnæ binæ cum epystilo, et ope manubrii per trochleas occultas, ac funiculos columnis, et epystilo interclusos tenditur atque laxatur. M. IV. d. 43.*»

Trata-se de um grande bloco de iman natural, felizmente conservado até agora no Laboratório, como eu tive ocasião já de indicar na publicação [1] que fiz sôbre a reconstituïção do Museu pombalino, referindo até que é o único exemplar que se vê na fig. 5 dêste trabalho, e na qual se mostra o aspecto da sala pombalina antes da reconstituïção.

Reproduzo aqui, na fig. 1, a fotografia do Iman com o seu suporte, sem a cobertura que é constituida por uma coroa real; na fig. 2, vê-se uma fotografia com esta coroa.

O iman foi encontrado em bom estado, mas o suporte muito danificado [2].

Além dêste iman, utilizou dalla Bella um outro, também, felizmente, conservado no Laboratório, e que é descrito no *Index Instrumentorum* com o número 44:

«*Magnes alter figurae sphaericae diametro linearum 19. pondere unciarum 6 $\frac{1}{4}$. Hic armatus est laminis chalybeis, quae ope*

---

[1] Um novo Museu em Coimbra: O Museu Pombalino de Física da Faculdade de Ciências da Universidade, págs. 8.

[2] Já depois de feita a composição tipográfica dêste artigo — durante a revisão das 2.as provas — apareceu um complemento curioso do Iman que fomos encontrar em casa do mestre de obras, senhor António Pedro: o pêso que o Iman normalmente sustentava, no tempo de dalla Bella, quando montado no seu suporte. Êste pêso tem aproximadamente sessenta quilos; é de chumbo, com um revestimento metálico dourado. Comprámo-lo agora por 350$00; tal foi o valor arbitrado por aquele senhor que não quis limitar-se ao valor em chumbo que o pêso tem. Contudo, dado o seu interêsse, não hesitámos em o comprar. A fig. 7 mostra a sua fotografia, por baixo do Iman que o sustenta. Se compararmos esta fotografia com a da fig. 2, verifica-se que o conjunto ganhou em harmonia.

quarundam zonarum ex Argento cum Magnete arcte conjunguntur. Sustulit pondus unciarum 174. Suspenditur a columna ex orichalco super basim ligneam stabili. M IV.».

Reproduzo a fotografia dêste iman na fig. 3.

*

* *

No trabalho citado que recebi do meu colega Giovanni Costanzo, lamenta êste professor que todos os autores que se têm ocupado de dalla Bella, entre os quais apenas cita Silvestre Ribeiro, Teófilo Braga, Simões de Carvalho e Inocêncio da Silva, tenham esquecido a memória sôbre a fôrça magnética, e tenham apenas citado os trabalhos:

Memória sôbre o modo de aperfeiçoar a manufactura do azeite.

Memória sôbre a cultura das oliveiras em Portugal.

Notícias históricas e práticas acêrca do modo de defender os edifícios dos estragos dos raios.

Tratado de física em latim, em três volumes: Physices Elementa usui Academiae Conimbricensis accommodata.

A estes trabalhos, junta Giovanni Costanzo a indicação de mais um que encontrou, manuscrito, na Academia das Ciências de Lisboa, com o título:

Discursos preliminares aos elementos de agricultura, acêrca dos modos mais convenientes para animar esta nobilíssima arte em Portugal.

A estes devo eu agora juntar mais os seguintes, que nunca foram considerados, certamente porque a única referência que dalla Bella lhes faz, é a que se encontra no Catálogo dos instrumentos do Gabinete; — são, na verdade, aparelhos da invenção de dalla Bella, incluidos, por esta circunstância, no Inventário do referido Gabinete:

«*N.º 299. Nova Machinula a me inventa, qua faciliori modo ostenditur ex chalybe filici alliso in vacuo non excituri scintillas nec pulverem pyrium, vel escam incendi. Componitur haec Machina ex lamina aenea ad latus perforata, cui insistit capsula quatuor veluti pedunculis sussulta. Huic capsulae adnexa est catapulta illi similis, quae adhibetur in sclopetis. Super laminam sub capsulae fulcris datur regula dentata mobilis, quae ad extrema capita duos habet veluti vectes erectos, quorum ope catapulta oneratur et exoneratur ad libitum, prout regula dextrorsum aut sinistorsum movetur. Cochlea firmatur machinula super orbem Antliae Pneumaticae, et operitur Campana vitrea utrimque aperta. Operculum Campanae, quod est ex orichalco, habet virgam aeneam oblongam satis crassam, quae permeat operculum, et inferius definit in laternam dentatum. Laternae dentes congruunt cum regulae dentibus, ita ut virgam in orbem volvendo, ipsa regula motu ad finitorem parallelo facile moveatur. Hoc modo, si exoneretur catapulta antequam aer extrahatur, conspiciuntur scintillae, quae non apparent, quando Campana est aere vacua. O. IV.*»

«*N.º 209. Machina, quam egomet inveni, ad explorandas vires funium. Constat haec ex plano ligneo 4 ped. ablongo ad horizontem parallelo. Ad alterum ejus caput extremum erigitur tabella quadrilatera, firma prope medium aperta, quam permeat funis, ibique claviculo retinetur. Ad alterum extremum duabus parastatis sustinetur rota circum axem volubilis ex duobus cylindris diametro inaequalibus composita. Circum minorem Cylindrum circumvolvitur funis, cujus resistentiae vim scire cupimus, alterum cylindrum circumvolvit funis a trochlea extra basim Machinae directus, cui varia pondera appenduntur, donec funis explorandus dirumpatur. Hic cylindrus altero maior est, ut appensorum ponderum momenta angeantur, uti evenit in Machina Funicularia. M. VI.*»

Dêstes dois aparelhos, só existe o primeiro cuja fotografia reproduzimos na fig. 4. O segundo, feito naturalmente em boa madeira do Brasil, deve ter sido vendido no leilão a que me referi no meu citado trabalho sôbre o Museu.

A descrição que faz dalla Bella dos seus aparelhos é suficientemente clara para que nos dispensemos de lhes fazer uma mais larga referência.

Encontra-se ainda descrita no Catálogo, com o n.º 505, a seguinte máquina:

«*N° 505. Machina nova, quam fieri curavi, ut ipsi aptarentur duae chordae musicae sibi parallelae, quae chordae ad varias longitudines reduci possent. Constat Machina ex lignea basi oblonga 4. pedes, ad cujus alterum extremum surgit parastata firma, cui adhaeret uncus geminatus ferreus: super basim autem moventur duae veluti columnae ligneae, quae cochlearum ope ad quamlibet distantiam firmantur. Utrique columnae adnectitur trochlea, quae fidem sustinet, et ita dirigit, ut pondera, quae fidibus tendendis apponuntur, extra basim pendeant. Haec Machina explorantur Toni, qui oriuntur a varia longitudine, crassitudine, et tensione chordarum. S. VI*».

Trata-se de uma máquina, não de singular invenção, mas mandada construir por dalla Bella segundo indicações suas. Embora em mau estado e incompleta, a máquina encontra-se ainda no Laboratório, e será reparada dentro de pouco tempo.

*

* *

Pelo exposto, verifica-se que dalla Bella soube, pelo menos em parte, aproveitar as condições de trabalho postas à sua disposição pela reforma pombalina, embora haja que estranhar a dispersão da sua actividade por assuntos muito diferentes uns dos outros, e uma produção científica de qualidade muito desigual. Deve contudo acentuar-se que não só procurou investigar, como também soube transmitir a outros o interesse pela investigação. Tivessem tido os sucessores de dalla Bella recursos materiais tão apropriados à época em que trabalharam, como aquêles de que dispoz êste professor em relação à sua, e teríamos tido no domínio da Física, e em Coimbra, como comecei por acentuar, larga produção científica durante todo o século XIX, até nossos dias. Infelizmente, assim não aconteceu, e o resultado foi que, a seguir a dalla Bella, ràpidamente se extinguiu tôda a actividade ligada à investigação científica.

Na verdade, por fôrça da desarticulação que com o tempo cada vez mais se acentuou entre as necessidades desta investigação e os recursos materiais do Gabinete de Física, poucos foram, entre os sucessores de dalla Bella, os que puderam ainda ligar à sua função docente, uma razoável e satisfatória actividade de investigador. Entre êsses poucos, um único merece aqui referência especial, e êste foi o imediato sucessor de dalla Bella na direcção do Gabinete, o dr. Constantino Botelho de Lacerda Lobo.

Publica Inocêncio da Silva, no seu conhecido *Dicionário Bibliográfico*, uma longa lista de trabalhos de Lacerda Lobo, sôbre os mais variados assuntos. É curioso que não indique um, que tem para nós algum interêsse. Talvez que o título dêste trabalho tivesse levado Inocêncio a ocultá-lo, considerando-o possìvelmente ridículo; trata-se do trabalho: *Memoria sobre o magnetismo da lata, e vantagens que se seguem de serem feitas dela as agulhas de Marear.*

O interêsse que esta memória nos pode merecer, não é pròpriamente a descoberta do magnetismo da lata, a que Lacerda Lobo parece ter ligado importância excessiva, mas a indicação que êle nos dá de ter colaborado com dalla Bella nas experiências sôbre a descoberta da lei das acções magnéticas, mostrando todo o interêsse que estas lhe mereceram.

Diz, com efeito, Lacerda Lobo, logo no princípio da sua memória:

«Em todas as ocasiões, em que meu Mestre de Phisica Experimental, o senhor João Antonio dalla Bella fazia as experiencias do Magnetismo via eu que o fluido magnético passava atravez do vidro, do marmore e de qualquer sólido de madeira, e que fazia mover a limagem de ferro, que se tinha lançado em o plano oposto àquele em que se aproximava o magnete.

Depois que o Principe Regente N. S. me fez a graça de nomear-me Lente de Phisica Experimental muitos anos repeti as experiências de meu Mestre, sem nada adiantar, até que no ano de 1807 me lembrou averiguar se o fluido magnético atravessava outros corpos alem dos referidos».

Além desta memória esquecida, como disse, por Inocêncio, devemos indicar mais as cinco seguintes que dizem respeito à Física:

Memoria sobre a diversa densidade da agua em diferentes alturas, publicada no Jornal de Coimbra, vol. I, págs. 170.

Memoria sobre os pesos de que se faz uso no nosso comercio, publicada no Jornal de Coimbra, vol. III, págs. 173.

Memoria sobre um novo pyrometro de comparação, publicada no Jornal de Coimbra, vol. II, págs. 31.

Memória sôbre os defeitos que têem os nossos carros de transportes militares, publicada no Jornal de Coimbra, vol. I, págs. 329.

Memoria sôbre um novo modo de aplicar ao movimento das Machinas, a fôrça do vapor d'água fervendo, publicada no Jornal de Coimbra, vol. I, págs. 255.

Estas duas últimas memórias são os mais importantes.

A primeira diz respeito à substituïção, nos eixos dos carros, do atrito de 1.ª espécie pelo de 2.ª espécie, quere dizer, do atrito de escorregamento pelo de rolamento: Lacerda Lobo propõe que os eixos dos carros assentem sôbre cilindros móveis. É a mesma ideia do rolamento sôbre esferas, hoje tanto em voga. Existe no actual Laboratório de Física, na sua sala do século XIX, também há pouco organizada, como a do século XVIII, um modêlo de carro que exemplifica a ideia de Lacerda Lobo. Êste modêlo pertence à colecção do Catálogo redigido pelo Dr. José Homem de Figueiredo Freire, sucessor de Lacerda Lobo na direcção do Laboratório de Física, que o descreve nos seguintes termos:

Outro carro como o de Boulard, só com a differença de seu eixo gyrar sobre trez cylindros moveis, para que o attrito seja de segunda espécie. Esta addicção é do Sr. Constantino Botelho de Lacerda Lobo.

Reproduzimos a fotografia dêste modêlo na fig. 5.

A segunda memória, ou seja a última que citámos, foi a que deu mais renome ao seu autor.

O Visconde de Villarinho de S. Romão, na sua *História resumida da invenção e melhoramento das machinas de vapor,* faz-lhe larga referência, e diz que o seu autor foi um homem distinto e de grande génio, reconhecendo contudo que a máquina inventada não corresponde a uma ideia inteiramente nova. Também existe no

Laboratório um modêlo desta máquina, descrito, pelo Catálogo da época, nos seguintes termos:

«*N.º 74. Maquina rotatoria que se põe em movimento pela fôrça dos vapores da água. Tem em cima um carreto que comunica com uma roda dentada, para mostrar o modo como se poderia aplicar a acção dos vapores, como fôrça mechanica. Esta aplicação é do Sr. Constantino Botelho de Lacerda Lobo.*»

Reproduzo a fotografia desta máquina na fig. 6.

Afirma Lacerda Lobo, num dos seus escritos, que a ideia da máquina lhe foi roubada por um francês, Verzi, que conseguiu, segundo também refere o Visconde de Villarinho, realizá-la em França em ponto grande, obtendo para isso do Estado francês os meios necessários.

Em outros domínios, e sôbre diversos assuntos, desenvolveu Lacerda Lobo considerável actividade. Podemos indicar mais os seguintes trabalhos, (também referidos por Inocêncio):

Memoria sobre a historia das marinhas em Portugal.

Memoria sobre a cultura das vinhas em Portugal.

Memoria sobre a decadencia da pescaria de Monte-Gordo.

Memoria sobre o estabelecimento da cultura do chenopodio maritimo.

Analyse do sal comum das marinhas de Portugal.

Memoria sobre a preparação do peixe salgado.

Memoria sobre a decadencia das Pescarias em Portugal.

Memoria sobre as pescarias na costa do Algarve.

Memoria sobre a agricultura do Algarve.

Memoria sobre a agricultura da provincia d'Entre Douro e Minho.

*

*   *

Embora poucos, e alguns de interesse limitado, provam estes trabalhos que alguma coisa se fez nos primeiros tempos da reforma pombalina. Temos assim a indicação segura de que a investigação científica aparece sempre que haja condições próprias para a realizar. Se esta actividade quási desapareceu, depois de Lacerda Lobo, a culpa não foi dos professores que tiveram nas suas mãos a direcção do Gabinete. Muitos dêles foram espíritos cultos e brilhantes, professores cujas lições ainda hoje são recordadas com admiração. Citemos Sanches Goulão, Santos Viegas, Teixeira Bastos. Não tiveram contudo estes professores — convém afirmá-lo bem claro — condições materiais próprias que lhes permitissem realizar qualquer trabalho de investigação científica, nem chegou até êles o impulso dado inicialmente pela reforma de 1772.

Pressentem-se, hoje, rumores de um recomêço de actividade Simples rumores contudo, pois está ainda por fazer, neste meiado do século XX em que nos encontramos, a reforma que esteja para o nosso tempo, como a de 1772 esteve para a época em que foi promulgada.

Dr. Mário Augusto da Silva

Estudios cualitativos sobre algunas reacciones de los sulfuros orgánicos y en especial del de etilo ββ' diclorado

POR

I. Ribas, A. Caño y A. S. Contra

Laboratorio de Química Orgánica de la Universidad de Salamanca

Resumen: Se describe una reación más sensible que la de Obermiller para poner de manifiesto la presencia de sulfuro de etilo ββ' diclorado en el agua o en el aire. Consiste en un enturbiamiento lechoso coloidal fluorescente que se produce cuando trazas de aquel cuerpo se ponen en contacto con una disolución acuosa de un heteropoliácido, por ejemplo, ácido fosfowolfrámico al uno por ciento, adicionada de unas gotas de disolución acuosa de cloruro de oro al uno por mil.

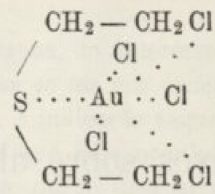
Mediante dicha reacción, se puede reconocer la presencia de aquel cuerpo aun diluyendo en cuatro litros de agua una gota del mismo que corresponde aproximadamente a 1 en 200.000.

Esta reacción se ha mostrado específica en la investigación de dicho cuerpo en el aire.

Se ha demonstrado que el cloruro de oro transforma los sulfuros orgánicos en sales de sulfonio y éstas dan la reacción con los heteropoliácidos y precipitan también con todos los reactivos generales de alcaloides.

Se demuestra que el producto de adición del cloruro de oro al sulfuro de etilo ββ' diclorado debe ser considerado como complejo de Werner de indice de coordinación seis, en el que el oro ocuparía el centro del octaedro y el sulfuro de etilo ββ' diclorado inter-

vendría en tres posiciones de coordinación, dos de ellas, en vértices opuestos, con sus dos átomos de cloro y la otra con el azufre



La estructura dipolar cerrada de esta molécula sería la causa de su extraordinária solubilidad en todas las substancias orgánicas. Sin embargo, hemos podido encontrar que el papel de celofán es totalmente impermeable para dicho cuerpo.

Simultaneamente, Martha Obermiller y Gustav-Adolf Schröter publicaron en Angw. Chem, *49,* 162 y 164. 1936 dos trabajos muy interesantes describiendo el mejor método actualmente conocido para el reconocimiento del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado.

Su fundamento consiste en utilizar la reacción de precipitación, enturbiamiento o coloración amarilla producida cuando trazas de aquel cuerpo se ponen en contacto de una disolución acuosa de cloruro de oro al uno por mil. Así se puede obtener reacción positiva, en unos cuatro minutos, con la pequeña concentración de diez milígramos de aquel cuerpo por metro cúbico de aire, concentración diez veces mas pequeña que la que se puede poner de manifiesto, en iguales condiciones experimentales, con el reactivo de Grignard, Rivat y Scatchard (Ann. Chim. (9). 15. 5. 1921). Ver sobre este punto Izquierdo Croselles, Manual del Arma Química. Espasa-Calpe. 1940. pag. 385 y L. Blas, Química de Guerra.

Por el cargo de Vocal de la Junta de Defensa de la Población Civil de Salamanca que desempeña uno de nosotros (I. R.) estábamos interesados en el estudio de la reacción anterior y además también porque su autor en el trabajo mencionado, deja planteado el problema de su mecanismo químico.

Martha Obermiller es la que ha dado a conocer el reactivo cloruro de oro. Nosotros a fines de 1936 y principios de 1937 nos propusimos, tomando como punto de partida su interesante trabajo, investigar la posibilidad de existencia de otros reactivos todavía mas sensibles.

Por causas ajenas a nuestra voluntad los trabajos no pudieron ser publicados.

Considerando, como también lo admite su autor, que por lo menos en una primera fase, la reacción consiste en la adición del cloruro de oro al átomo de azufre, con formación de un producto insoluble, y que la atención de la investigadora alemana se fijó solamente en los cloruros metálicos siguientes:

$Cl_2\,Cu$	$Cl_2\,Cd$	$Cl_4\,Ti$	$Cl_3\,Fe$
$Cl_2\,Cu_2$	$Cl_2\,Hg$	$Cl_4\,Sn$	$Cl_2\,Pd$
$Cl_3\,Au$		$Cl_2\,Sn$	$Cl_4\,Pt$
		$Br_4\,Sn$	

Y, teniendo presente que la producción de compuestos metálicos, con los sulfuros orgánicos, puede tener lugar con otras sales, además de las halogenadas, como sucede en el caso del nitrato de plata tan bien estudiado por los químicos indios P. C. Rây (C. I. 934. 1932) cuyo trabajo al parecer no conoció Obermiller, pues no aparece citado entre los que figuran en su bibliografía, emprendimos la tarea empírica, pero sistemática, de ensayar la acción del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado con las sales de todos los ácidos de los metales a nuestro alcance.

El 5 de Febrero de 1937, al ensayar, en caliente, la acción del molibdato amónico obtuvimos fuerte reacción. Seguidamente ensayamos los ácidos fosfowolfrámico, fosfomolíbdico, silicowolfrámico, cuyas disoluciones, tal com se usan como reactivos de alcaloides, producen abundante enturbiamiento y precipitado, calentadas en presencia de una gota de sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado.

En experiencias comparativas, las reacciones producidas por los mencionados heteropoliácidos se mostraros más sensibles que la del cloruro de oro. Para fines prácticos, tenían la desventaja de no producirse expontaneamente a temperatura ambiente, siendo necesario calentar. Entonces intuimos, que el efecto del calor, sería activar la molécula del sulfuro, para producir con los heteropoliácidos sal de sulfónio insoluble, de manera análoga a como los alcaloides dan sal de amonio también insoluble. Si nuestra hipótesis era correcta, se podía buscar una activación análoga de la molécula del sulfuro, mediante la adición de alguna substancia que uniéndose al sulfuro produjera un complejo. Este es el mecanismo usado por la naturaleza en sus procesos más fundamentales y la teoría de la activación molecular mediante la producción de complejos ha sido desarrollada también por Meerwein y figura ya en libros elementales, por ejemplo Scklenk-Bergmann. Lehrbuch d. Org. Chem. I. 187. 1932. Entonces pensamos podía tener dicho carácter el producto de adición que se produce con el cloruro de oro y adicionamos unas gotas de la disolución al uno por mil, produciéndose la reacción en frío y rapidamente.

Para buscar trazas de sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado se procederá de la siguiente manera. En un tubo de ensayo se pondrán de 10 a 20 cc. del agua problema se añadirán unos cc. de disolución acuosa de un heteropoliácido al uno por ciento, por ejemplo de ácido fosfowolfrámico y se adicionará después unas gotas de disolución acuosa de cloruro de oro al uno por mil; en caso positivo aparecerá una opalescencia lechosa y al mismo tiempo una fluorescencia azulada. El orden de los reactivos no puede variarse.

La sensibilidad de la reacción anterior resulta ser, para personas experimentadas, de 10 a 20 veces superior a la de Obermiller. Para personas acostumbradas a percibir la fluorescencia es aun mucho mayor.

Así se puede apreciar bién una gota de sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado disuelta en dos litros de agua lo que teniendo en cuenta el peso de dicha gota, (0,018 gr.), supone una dilución de uno en 110.000. También se aprecia una gota en cuatro litros de agua.

Si el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado se presenta en abundancia, se produce una reacción análoga a la que producen los alcaloides, llegándose a separar precipitado.

Para investigar sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado en el aire, se hace burbujear éste a través de la disolución del heteropoliácido al uno por ciento adicionada de uno diez por ciento de otra de cloruro de oro al uno por mil.

En la investigación de dicho cuerpo en el aire dicha reacción se ha mostrado altamente específica. Aire conteniendo vapores de los siguientes cuerpos: oxol, sulfuro de etilo, vapores de disolventes orgánicos, cloruro de azufre, cloruro de arsénico, cloruro de carbonilo, clorovinildicloroarsina, diclorovinilcloroarsina, difenilaminacloroarsina, cloropicrina, cloroacetofenona, sulfuro de vinilo y $\alpha\alpha'$ diclorosulfuro de dietilo, no ha dado la reacción, ni su presencia la ha estorbado.

Para analizar el producto de reacción, se tomó 0,2 gr. de sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado y se agitó en un frasco mecànicamente con 50, cc. de disolución de ácido fosfowolfrámico al uno por ciento, agregando 5 cc. de disolución de cloruro de oro. Terminada la reacción se separó por centrifugación el precipitado y lavó con agua varias veces y luego otras con alcohol, centrifugando después de cada lavado. Después de seco pesó 0,55 gr. Fué insoluble, y por tanto incristalizable, en todos los disolventes ensayados. Está también desprovisto de las propriedades fisiológicas del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado, lo que no deja de ser interesante. Su composición parece ser variable dentro de ciertos límites. Analogamente ocurre con el precipitado de los alcaloides.

El análisis elemental cualitativo de dicho precipitado ha demostrado la presencia de todos los elementos de las dos moléculas reaccionantes, carbono, cloro, azufre, wolfram, fósforo. El cuantitativo, dió malos números que además no nos decian nada y fué abandonado. Ejemplo: Cl % hallado, 7,68. 7,89. 6,84. S % hallado, 5,39. 4,98.

Para establecer, todavía más, la analogía entra esta reacción y la que producen los alcaloides hemos hecho el siguiente experimento:

Con efedrina, alcaloide de peso molecular bajo y soluble en agua, hemos preparado una disolución diluida y añadiéndole unas gotas de disolución al uno por cien de ácido fosfowolfrámico se produce la opalinidad lechosa y la fluorescencia azulada característica de la reacción.

En cuanto a su mecanismo químico creemos que los datos experimentales expuestos y los que expondremos mas adelante nos autorizan a admitir que el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado se transforma, en una primera fase, en derivado de sulfonio y éste produce después la reacción con los heteropoliácidos, que consiste en la formación de la sal de sulfonio.

Que nosotros sepamos, la precipitación de las sales de sulfonio con los heteropoliácidos no ha sido señalada, así como tampoco se ha indicado su precipitación por los reactivos generales de los alcaloides. No hemos visto la menor alusión a ello en los trabajos que, al hacer la bibliografía, hemos leido ni tampoco se encuentra indicada en libros de Química Orgánica, antiguos ni modernos, por ejemplo, Meyer-Jacobson, Richter-Anschütz, Schlenk-Bergmann, Karrer, etc. Sí hemos visto caracterizar sales de sulfonio mediante su cloroplatinato, cloro aurato, picrato, etc.

De nuestros ensayos resulta que la precipitación de las sales de sulfonio por los reactivos generales de los alcaloides parece ser general y convendrá por tanto indicarlo al estudiar dichos reactivos asi como se indica que también precipitan con ellos proteinas, aminoácidos, aminas y ciertos glucósidos, hecho que a nuestro juicio puede tener interés en algunos casos.

El fenómeno que queda ahora por aclarar es el paso del sulfuro a sulfonio.

La bibliografía nos enseña la facilidad con que un sulfuro orgánico se transforma en sal de sulfónio por la acción de un derivado halogenado en presencia de un disolvente orgánico según la reacción

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!>S+RX=\left[\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!>S-R\right]^{+}.\bar{X}$$

También ha sido descrita, principalmente por P. C. Rây y Colaboradores (C. 1932. I. 2569) la producción de complejos, conteniendo un catión sulfónico por la acción de un sulfuro, un derivado halogenado y una sal metálica según la reacción siguiente

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!>S+RX+X_2Me\rightarrow\left[\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!>S-R\right]^{+}.[MeX_3]^{-};$$
$$(Me=Hg,\ Cd,\ Zn,\ etc.).$$

También Balfe, Kenyon y Philips (J. Chem. Soc. Lond. 1930. 2554) han demostrado la constitución sulfonica de productos obtenidos en virtud de la reacción anterior.

Y por último P. C. Rây y Colaboradores (C. 1932. I. 934) han encontrado que el tricloruro de antimonio se disuelve en los sulfuros orgánicos líquidos sin reaccionar, pero calentando en tubo cerrado entre 120° y 190° reaccionan obteniéndose la sal de sulfonio

$$\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!>S+Cl_3Sb=\left[Cl_2Sb-S<\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\right]^{+}.\bar{Cl}$$

En nuestro caso el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado pasaría a derivado del sulfonio por la acción del calor y por la del cloruro de oro.

Estudiemos por separado estos dos casos.

Acción del calor: Hemos visto que calentando una gota de otros sulfuros (de etilo, propilo, alilo, etc.) con disolución al uno por cien de ácido fosfowolfrámico no se producía la reacción descrita para el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado, luego el paso a sulfonio de este último cuerpo, hay que buscarlo en su estado molecular especial, que hace que el azufre, con sus dos pares de electrones no ligados, tenga una mayor tendencia que la normal en los sulfuros, a captar un protón, en este caso del agua, transformándose así en catión sulfonico. El calor no haría más que acelerar este fenómeno

$$\begin{matrix} Cl\,CH_2-CH_2 \\ Cl\,CH_2-CH_2 \end{matrix}\!\!>\!\overset{\cdot\cdot}{S} + \overset{+}{H} + \overset{-}{O}H = \overset{-}{H}O +$$

$$+\left[\begin{matrix} Cl\,CH_2-CH_2 \\ Cl\,CH_2-CH_2 \end{matrix}\!\!>\!S\!\begin{matrix} \cdot\,H \\ \cdot \end{matrix}\right]^{+}$$

El estado electrónico de la molécula del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado es conocido gracias a los hermosos trabajos de Bennett y Colaboradores (J. Chem. Soc. Lond. 1927. 479. 1803) que lo formulan así

$$\underset{-}{\overleftarrow{Cl}} - \underset{+}{CH_2} - \underset{-}{\overleftarrow{CH_2}} - \underset{+}{S} - \underset{-}{\overrightarrow{CH_2}} - \underset{+}{CH_2} - \underset{-}{\overrightarrow{Cl}}$$

De cuya fórmula se deduce la tendencia del azufre a pasar a catión sulfonico favorecida por el carácter electronegativo de los átomos de cloro y por su especial posición beta dentro de la molécula.

Acción del cloruro de oro : Ya Martha Obermiller señala en su importante trabajo, que la primera acción tiene que ser la adición del metal al átomo de azufre porque los thioéteres producen reacción, mientras los sulfóxidos y sulfonas no.

Nosotros hemos estudiado la acción del reactivo cloruro de oro al uno por mil sobre los varios sulfuros antes mencionados y todos ellos dan reacción aunque se diferencia de la producida por el de etilo $\beta\beta'$ diclorado, fundamentalmente, en que el precipitado o enturbiamiento coloidal amarillo-rojizo es mucho mas fugaz para aquellos cuerpos que para éste.

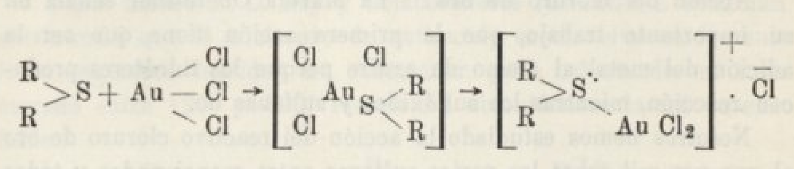
Si sobre 5 cc. de reactivo cloruro de oro se añade por ejemplo una gota de sulfuro de etilo y se agita, aparece la reacción bien característica, que es general para todos los sulfuros orgánicos ensayados, que se manifiesta por un enturbiamiento coloidal amarillo-rojizo que desaparece a los pocos segundos quedando un líquido totalmente claro e incoloro.

También la reacción que produce el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado es pasajera, como ya señaló su descubridora, pero tarda mucho más en desaparecer y en opinión de la misma, es debido a que la hidrólisis transforma el sulfuro de dicloro etilo, según es bien sabido, en oxol y el producto de adición de este cuerpo con el cloruro de oro es soluble por efecto de sus dos grupos oxhidrilos. Ya se verá más adelante que esta explicación es solo parcialmente cierta.

Analizando el líquido claro e incoloro resultante de la reacción antes mencionada, nos hemos encontrado con la sorpresa de que el sulfuro se encuentra en forma de sal de sulfónio formando un catión complejo juntamente con el oro y una parte del cloro del cloruro de oro, la otra parte de dicho cloro forma el anión, pues dicho líquido no da las reacciones del oro con ácido oxálico, sulfato ferroso y cloruro estannoso; y precipitándolo por ácido fosfowolfrámico se obtiene un abundante precipitado blanco que filtrado lavado y analizado contiene, además de los elementos del ácido fosfowolfrámico, carbono, azufre, oro y cloro.

Por otra parte el líquido en cuestión acidulado con ácido nítrico precipita por adición de nitrato de plata cloruro de plata, reacción que no puede ser atribuida al cloruro de oro que eventualmente pudiera suponerse sin reaccionar, porque dicho cloruro de oro no da precipitado.

Por tanto la reacción entre el cloruro de oro al uno por mil y el sulfuro debe ser formulada asi



Se produce en su primera fase el complejo de adición coordinado coloreado e insoluble que se transforma rápidamente en el cloruro de sulfonio, más estable e incoloro o mucho menos coloreado.

En virtud de un proceso químico análogo, transforma el cloruro de oro en sal de sulfónio, la molécula del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado, pero su comportamiento, algo diferente, demuestra una intervención de los átomos de cloro.

En primer lugar, la persistencia mucho mayor de la primera fase de la reacción, nos indica una mayor estabilidad del complejo de oro coordinado producido.

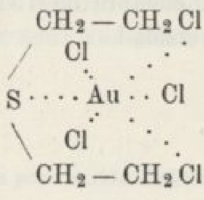
En segundo lugar, hay que admitir la intervención de los átomos de cloro del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado en dicha coordinación, porque mediante el siguiente experimento se prueba que están activados y por eso poseen una mayor velocidad de hidrólisis.

Se toman dos porciones de una misma disolución reciente de sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado en agua destilada y se dejan una al lado de otra para conservarlas a la misma temperatura ambiente; a una de ellas se añade disolución de cloruro de oro suficiente para producir el complejo y a la otra no se añade nada. Al cabo de algún tiempo desaparece la reacción producida por el cloruro de oro, por haberse hidrolizado en este líquido todo el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado y transformado en oxol que da rápidamente la sal de sulfonio incolora y soluble; este líquido ya no da más las reacciones de aquel cuerpo, ni por adición de más cloruro de oro, ni por ácido fosfowolfrámico seguido de adición de cloruro de oro, según nuestra reacción. Por el contrario, la otra porción de líquido a la que no se adicionó cloruro de oro continua dando las reacciones del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado.

En tercer lugar, el siguiente experimento prueba también la intervención de los átomos de cloro en la formación del compuesto de coordinación coloreado con el cloruro de oro.

Se agita una gota de sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado con diez cc. del reactivo cloruro de oro durante unos segundos e inmediatamente se filtra, recogiendo el filtrado sobre disolución de nitrato de plata previamente acidulada con ácido nítrico observándo-se que inmediatamente no se produce precipitado de cloruro de plata, sino que, éste va apareciendo progresivamente en la medida que se va decolorando el producto de adición.

Por tanto formularemos la primera fase de la reacción del cloruro de oro con el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado mediante un complejo coordinado del oro con índice seis así



El átomo de oro acuparía el centro del octaedro de Werner y la molécula del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado intervendría en tres posiciones de coordinación ocupando el azufre una y los dos cloros otra cada uno en vértices opuestos del octaedro. Mediante la construcción de un modélo estereoquímico se aprecia perfectamente la posibilidad de dicha distribución espacial. Además no está en desacuerdo con la configuración estereoquímica de la molécula del sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado que exigen Zahn y Mohles (C. 1939. I 3530) como resultado de sus medidas de su momento dipolar.

Esta estructura dipolar cerrada nos explicaría el extraordinario poder disolvente de esta molécula sobre las restantes orgánicas y la dificultad de encontrar substancias impermeables a dicho cuerpo. Nosotros en 1937 investigamos, con auxilio de nuestro reactivo, este problema y solo encontramos totalmente impermeable, el papel de celofán.

El hecho de precipitar el sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado por algunos de los reactivos generales de alcaloides era conocido ya desde 1920 en que, según la bibliografía que figura en el trabajo ya citado de Schröter, F. Martin (J. Pharm. Chim. (7). 22. 161) cuyo original no hemos podido leer, propuso como reactivos de dicho cuerpo el de Bouchardat (iodo en ioduro potásico y el de Dragendorff (ioduro bismútico potásico).

Modernamente Burianà (C. 1937. II. 2300) ha propuesto el iodo mercuriato sódico para su determinación cuantitativa recogiendo el precipitado obtenido y J. Hokl y V. Karhànek (C. 1938. I. 239) han vuelto a proponer el reactivo de alcaloides según Dragendorff y además el de Mayer (iodo mercuriato potásico) indicando que estos reactivos son menos sensibles que el de Grignard.

Ahora comprendemos porqué solamente los reactivos de alcaloides anteriores precipitan al sulfuro de etilo $\beta\beta'$ diclorado (por tener iodo o halogenuro metálico que produce la transformación en sal de sulfonio, que es la que precipita) y porqué en los heteropoliácides no había sido descubierta dicha precipitación.

Salamanca a 16 de Diciembre de 1940. Laboratorio de Química orgánica de la Universidad.

Sur quelques théorèmes classiques

PAR

J. Vicente Gonçalves [1]

(à Coimbra)

La première partie de ce travail contient l'extension des théorèmes de Darboux, Rolle et Lagrange à une classe de fonctions dérivables — les fonctions $g(x)$ — comprenant des fonctions discontinues; dans la seconde partie je m'occupe des fonctions qui ne passent pas d'une valeur a une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires (*fonctions remplissantes*); et dans la troisième et dernière partie je fais en quelque sorte l'inversion locale du théorème des accroissements finis.

I — LE THÉORÈME DE DARBOUX

1. Dans ce qui va suivre, $g(x)$ désigne toujours une fonction qui vérifie dans (a, b) les trois conditions suivantes:

α) Elle y est la dérivée (finie) d'une fonction [que nous représenterons par $G(x)$];

β) Elle y admet, au moins aux points intérieurs, une dérivée finie ou infinie;

γ) Si elle n'est pas continue, ses points de discontinuité forment un ensemble réductible.

Toute fonction jouissant de ces mêmes propriétés dans un certain intervalle (α, β) sera pour nous *une fonction* g (ou *au type* g) dans cet intervalle.

---

[1] Boursier de l'*Instituto para a Alta Cultura.*

Une fonction continue est évidemment une fonction g dans tout intervalle où elle possède une dérivée (finie ou infinie).

1. g (x) *n'a jamais des points de discontinuité de première espèce.*

En effet, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\frac{G(c+h)-G(c)}{h}=g(c+\theta h) \qquad (o<\theta<1);$$

la limite de $g(x)$ pour $x=c$, lorsqu'elle existe, est donc toujours $G'(c)$, c'est-à-dire $g(c)$.

La fonction

$$f(x)=sen\,\frac{1}{x} \quad , \quad f(o)=o,$$

discontinue pour $x=o$, nous offre un exemple très simple d'une fonction g à un seul point de discontinuité.

Lorsque $f(x)$ est une fonction g dans $(a+\varepsilon, b)$, quelque petit que soit le nombre positif ε, on dit qu'elle est une fonction g dans $(a+o, b)$. Il existe alors, évidemment, une fonction $F(x)$ ayant $f(x)$ pour dérivée pour toute valeur de x vérifiant la condition $a<x\overline{\gtrless}b$.

On entendra de même les fonctions qui sont au type g dans $(a, b-o)$ ou dans $(a+o, b-o)$.

Soit $f(x)$ une fonction qui est au type g dans $(a+o, b)$ et qui admet pour $x=a$ une limite finie k. $f(x)$ reste donc bornée au voisinage de a et, d'après le théorème des accroissements finis,

$$F(x'')-F(x')=(x''-x')\,f(y) \qquad (a<x'<y<x''),$$

sa primitive $F(x)$ admet elle aussi une limite finie K pour $x=a$

Dès lors, si nous faisons

$$\varphi(x)=f(x) \quad , \quad \Phi(x)=F(x) \quad \text{pour} \quad a<x\overline{\gtrless}b$$

et

$$\varphi(x)=k \quad , \quad \Phi(x)=K \quad \text{pour} \quad x=a,$$

$\Phi(x)$ sera continue dans (a, b) et, d'après la relation

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}=\varphi(a+\theta h) \qquad (o<\theta<1),$$

aura pour $x=a$ une derivée égale à $\varphi(a)$. La fonction $\varphi(x)$ sera donc une fonction g dans toute l'extension de l'intervalle (a, b).

De ces fonctions $\varphi(x)$ et $\Phi(x)$ nous dirons qu'elles sont les *prolongements naturels* de $f(x)$ et $F(x)$, respectivement, pour $x=a$.

Nous pouvons alors écrire:

2. *Lorsqu'une fonction est au type* g *dans un intervalle ouvert et y admet un prolongement naturel, ce prolongement est encore une fonction* g *dans l'intervalle fermé.*

2. Cela posé, revenons à notre fonction $g(x)$. D'après la condition β), $g(x)$ admet, au moins à l'intérieur de (a, b), une derivée finie ou infinie $g'(x)$. Nous désignerons par k et K les bornes de cette dérivée pour $a<x<b$ et nous allons montrer que

1. g' (x) *prend à l'intérieur de* (a, b) *toute valeur* λ *comprise entre* k *et* K.

Dire que $g'(x)$ prend la valeur λ c'est dire que la dérivée de $g(x)-\lambda x$ prend la valeur zéro, et réciproquement. Nous pouvons donc supposer $\lambda=o$ et par suite $k<o$, $K>o$.

D'après la définition même de ces limites, il existe à l'intérieur de (a, b) deux points α et β tels que $g'(\alpha)<o$ et $g'(\beta)>o$; et on peut déterminer un nombre positif δ de manière à avoir

$$\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}<o \quad , \quad \frac{g(\beta+h)-g(\beta)}{h}>o$$

pour toute valeur (positive) de h plus petite que δ.

Or, la fonction

$$\varphi(x)=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ayant dans (α, β) une primitive continue, la double condition $\varphi(\alpha) < o$, $\varphi(\beta) > o$ implique, d'après le théorème de Darboux, $\varphi(\xi) = o$, c'est-à-dire

$$1) \qquad g(\xi + h) = g(\xi) \qquad (\alpha < \xi < \beta).$$

Nous voyons donc que l'hypothèse $k < o$, $K > o$ entraîne l'existence de deux points $\xi(h)$ et $\xi(h) + h$ — h étant aussi petit qu'on le veut — pour lesquels $g(x)$ prend des valeurs égales.

Supposons maintenant que $g'(x)$ *ne soit jamais nulle à l'intérieur de* (a, b) et construisons une succession h_n tendant vers zéro et telle que la correspondante succession ξ_n tende vers quelque limite X [nécessairement contenue dans (α, β), donc intérieure à (a, b)].

Ni ξ_n ni $\xi_n + h_n$ ne peuvent rester fixes pour une infinité de valeurs de n: il serait alors $\xi_n = X$ ou $\xi_n + h_n = X$ (pour de telles valeurs de n) et il s'en suivrait $g'(X) = o$ à cause de 1); il n'est pas possible, non plus, que X demeure intérieur à $(\xi_n, \xi_n + h_n)$, car, pour h assez petit, les deux conditions

$$g'(X) \gtrless o \quad , \quad \xi_n < X < \xi_n + h_n$$

entraîneraient

$$g(\xi_n) \lessgtr g(\xi_n + h_n).$$

À partir d'un certain ordre, X est donc en dehors de $(\xi_n, \xi_n + h_n)$ et les relations

$$\lim \xi_n = \lim (\xi_n + h_n) = X$$

assurent l'existence d'une infinité d'intervalles $(\xi, \xi + h)$, tous disjoints, pour lesquels X est un point limite.

Soit (a_i, b_i) un de ces intervalles. Que $f(x)$ y soit continue ou non, on ne peut avoir toujours $g'(x) > o$ (ou $g'(x) < o$) depuis a_i jusqu'à b_i, car $g(a_i) = g(b_i)$ [1]. On peut donc trouver dans (a_i, b_i) deux points — α_i et β_i — pour lesquels $g'(x)$ prend des

---

[1] Ainsi qu'il este bien connu, il n'est pas nécessaire d'avoir recours au théorème des acroissements finis pour établir qu'une fonction dont la dérivée est positive dans tous les points d'un intervalle est croissante dans cet intervalle.

valeurs (finies ou non) de signes opposés, et on en déduit comme ci-dessus qu'il existe dans (α_i, β_i) un point X_i, limite d'intervalles disjoints (a_{ij}, b_{ij}), dont les extremes donnent des valeurs égales pour la fonction $g(x)$. Et ainsi de suite.

S'il y avait un intervalle $(a_{ij\ldots m}, b_{ij\ldots m})$ dans lequel $g(x)$ fût continue, nous aurions certainement $g'(x') = o$ pour quelque point intérieur x'; mais, par hypothèse, c'est toujours $g'(x) \neq o$: il est donc nécessaire qu'il y ait au moins un point u de discontinuité pour $g(x)$ dans chacun de ces intervalles.

Or, les points u appartenant à (a_i, b_i) ont au moins un point limite — X; les u appartenant aux (a_{ij}, b_{ij}) ont au moins un point limite X_i dans (a_i, b_i) et, par conséquent, il y aura au moins un point — X — dans leur second dérivé; et ainsi successivement. Si c'était $g'(x) \gtrless o$ partout à l'intérieur de (a, b), les points de discontinuité de $g(x)$ formeraient donc un ensemble ayant des dérivés de tout ordre fini, et ceci n'est pas possible d'aprés la définition même de $g(x)$.

Nous avons ainsi étendu aux fonctions $g(x)$ le théorème de Darboux pour les fonctions continues.

Il convient de remarquer que

2. $g'(x)$ *admet dans* (a, b) *les mêmes bornes qu'à l'intérieur.*

Occupons-nous, par exemple, des bornes inférieurs k et k', celle-ci se rapportant à l'intervalle fermé.

Si c'était $k < k'$, les bornes correspondantes pour la dérivée de

$$\varphi(x) = g(x) - \gamma x \qquad (k' < \gamma < k)$$

seraient $k' - \gamma < o$ et $k - \gamma > o$. Il suffit donc de prouver qu'on ne peut avoir $k' < o$ et $k > o$.

k étant positive, $g(x)$ croît avec x à l'intérieur de (a, b), et il vient $g(a+o) < g(x) < g(b-o)$; or, $k' < o$ entraîne $g'(a) < o$ ou $g'(b) < o$, c'est-à-dire $g(a) > g(a+o)$ ou $g(b) < g(b-o)$; $g(x)$ aurait alors au moins un point de discontinuité de première espèce, et nous savons que cela n'est pas possible (**1.** 1).

3. On peut maintenant généraliser sans peine les théorèmes classiques de Rolle, Lagrange et Cauchy, les rendant applicables aux fonctions $g(x)$, et cela sans rien supposer de l'existence de $g'(x)$ aux points extrêmes.

Par exemple,

1. *Si* g (a) = g (b) , g' (x) *s'annule entre* a *et* b.

Il suffit de montrer que $g'(x)$ prend des valeurs de signes opposés à l'intérieur de (a, b). Or, si l'on avait toujours $g'(x) > o$ pour $a < x < b$, on aurait aussi, pour ces mêmes valeurs de x, $g(a+o) < g(x) < g(b-o)$ et ce seraient $g(a+o)$ et $g(b-o)$ et non pas $g(a)$ et $g(b)$ les valeurs de $G'(x) = g(x)$ pour $x = a$ et $x = b$ (**1.** 1).

Les théorèmes de Lagrange et de Cauchy se déduisent comme d'habitude du théorème de Rolle.

Remarquons seulement que la première de ces propositions,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x + \theta h) \qquad (o < \theta < 1),$$

nous assure que la limite de $g'(t)$ pour $t = x$, lorsqu'elle existe (finie ou non), est la valeur même de $g'(t)$ pour $t = x$.

En particulier,

2. g' (x) *n'a jamais des points de discontinuité de première espèce et est par suite une fonction continue dans tout intervalle où elle est monotone.*

4. Les fonctions $g(x)$ ne sont pourtant pas les seules auxquelles on puisse appliquer ces propositions fondamentales. En voici un exemple, dont nous aurons à nous servir plus tard.

Soit $f(x)$ une fonction au type g pour $a < x \overline{<} b$, mais ayant au point $x = a$ une discontinuité de première espèce.

Nous savons (**1.** 2) que cette fonction admet un prolongement naturel $\varphi(x)$, qui, lui, est une fonction g dans tout l'intervalle (a, b). Nous avons donc le droit d'écrire

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \varphi'(a + \eta h) \qquad (o < \eta < 1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(a+h)-f(a+o)}{h}=f'(a+\eta h).$$

De là

1) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\eta h)+\frac{A}{h},$$

en posant

$$A=f(a+o)-f(a).$$

On a d'ailleurs $f'(a)=\pm\infty$ selon que $A \gtrless o$.

Faisons maintenant l'hypothèse que $f'(x)$ puisse converger vers $f'(a)$ le long d'une succession x_n ayant a pour limite, et choisissons x_p en sorte que $f'(x_p)$ soit comprise entre $f'(a)$ et le second membre de 1). Ce second membre sera alors lui même compris entre $f'(x_p)$ et $f'(a+\eta h)$ et il y aura (**2.** 1) entre x_p et $a+\eta h$ un point $a+\theta h$ tel que

$$f'(a+\eta h)+\frac{A}{h}=f'(a+\theta h).$$

Ce sera donc

2) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h) \qquad (o<\theta<1),$$

pour toute valeur positive de $h \lessgtr b-a$.

Il est à remarquer que, réciproquement, cette relation 2) entraîne pour $f'(x)$ la possibilité de converger vers $f'(a)$ le long d'une succession ayant a pour limite. La condition est donc, en même temps, nécessaire et suffisante.

II – LES FONCTIONS REMPLISSANTES

5. Soit $f(x)$ une fonction réelle quelconque et soient $l(c,\varepsilon)$ et $L(c,\varepsilon)$ ses bornes pour l'intervalle $(c, c+\varepsilon)$. Nous ferons

$$l(c+o)=\lim_{\varepsilon=o} l(c,\varepsilon)\ ,\ L(c+o)=\lim_{\varepsilon=o} L(c,\varepsilon) \qquad (a \lessgtr c<b)$$

et nous dirons que $l(c+o)$ et $L(c+o)$ sont le *minimum* et le *maximum* de $f(x)$ pour $x=c+o$. Ces limites (finies ou infinies) et toutes les valeurs intermédiaires seront pour nous les *valeurs possibles* de $f(x)$ pour $x = c + o$.

Toute valeur λ (nécessairement finie) prise par $f(x)$ dans $(c, c+\varepsilon)$, *quelque petit que soit* ε, sera une *valeur réalisable* à $c + o$.

Évidemment, seules les valeurs possibles à $c + o$ peuvent y être réalisables.

Ces conventions s'étendent d'elles mêmes à $c - o$, c'est-à-dire au coté gauche de c.

La plus petite des limites $l(c+o)$ et $l(c-o)$ est le *minimum* $l(c)$ de $f(x)$ pour $x = c$; la plus grande des limites $L(c+o)$ et $L(c-o)$ est le *maximum* $L(c)$ de $f(x)$ pour $x = c$.

D'ailleurs, comme on a

$$l(c+o) \overline{\lessdot} L(c-o) \quad , \quad l(c-o) \overline{\lessdot} L(c+o),$$

$l(c)$, $L(c)$ et toute valeur intermédiaire sont des *valeurs possibles de* f(x) *pour* x = c, — soit à gauche $(x = c - o)$, soit à droite $(x = c + o)$.

Nous dirons que $f(x)$ est *remplissante dans* (a, b) lorsque cette fonction ne peut passer de $f(\alpha)$ à $f(\beta)$ sans prendre dans (α, β) toutes les valeurs intermédiaires, et cela quels que soient α e β dans (a, b).

Les dérivées à primitive contínue et, plus généralement, les dérivées des fonctions $g(x)$ jouissent de cette propriété; il y a pourtant des fonctions remplissantes qui sont partout discontinues.

*Une fonction remplissante dans (*a, b*) prend à l'intérieur de cet intervalle toute valeur comprise entre ses bornes pour ce même intervalle.*

Soient l et L les bornes de $f(x)$ pour (a, b) Si l'on a $l < \lambda < L$, on peut déterminer $\alpha \overline{>} a$ et $\beta \overline{<} b$ en sorte qu'il soit encore $f(\alpha) < \lambda < f(\beta)$, et alors $f(x)$ prendra la valeur λ à l'intérieur de (α, β).

Il est d'ailleurs évident que $f(x)$ a les mêmes bornes dans (a, b), que l'intervalle soit ouvert ou fermé.

6. $f(x)$ sera dite remplissante à $c + o$ lorsque toutes ses valeurs possibles pour $x = c + o$ y sont réalisables, sauf, peut-être, celles qui sont des bornes de la fonction pour quelque intervalle $(c, c+\varepsilon)$. Même définition pour $x = c - o$. Et nous dirons que $f(x)$ est *remplissante à* c lorsque cette fonction sera remplissante à $c - o$ et à $c + o$ [1].

Une fonction remplissante dans (a, b) *l'est aussi à tout point de cet intervalle.*

En effet, étant remplissante dans (a, b), $f(x)$ prend dans $(c, c+\varepsilon)$ toute valeur comprise entre $l(c, \varepsilon)$ et $L(c, \varepsilon)$; elle y prend donc toute valeur comprise entre $l(c+o$ et $L(c+o)$, et cela quelque petit que soit ε. Elle y prendra même la valeur $l(c+o)$, par exemple, si toutefois cette valeur, supposée finie, n'est la borne de $f(x)$ pour aucun intervalle $(c, c+\delta)$. Toutes ces valeurs sont bien réalisables pour $x = c + o$, et il en serait de même pour le coté gauche de c.

Remarquons encore que $f(x)$ prend effectivement dans $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ toute valeur comprise entre $l(c)$ et $L(c)$. *Parmi les valeurs possibles à* c *il y a donc deux, tout au plus, qui n'y sont pas réalisables.*

La fonction

$$f(x) = 2\,x\,(1 + sen\,\frac{1}{x} + log\,x^2) - cos\,\frac{1}{x} \qquad (f(o) = o),$$

ayant partout une primitive continue, est remplissante en tout point. Pour $x = o$, nous avons

$$l(+o) = l(-o) = -1 \quad , \quad L(+o) = L(-o) = 1\,;$$

les deux limites sont bien réalisables à gauche, mais le premier seul est réalisable à droite. On voit que $L(+o) = 1$ est la borne supérieure de $f(x)$ pour des intervalles (o, δ).

Réciproquement,

Une fonction remplissante à chaque point de (a, b) *est aussi remplissante dans* (a, b).

---

(1) Bien entendu, pour $c = a$ ou $c = b$ on ne considère qu'un coté de c.

Nous prenons λ plus grand que $f(\alpha)$ et plus petit que $f(\beta)$ et nous allons montrer qu'il se trouve dans (α, β) un point ξ pour lequel $f(x)$ égale λ.

Il en est bien ainsi s'il y a à l'intérieur de (α, β) un point ξ tel que

$$l(\xi) < \lambda < L(\xi).$$

Admettons donc que cela n'ait jamais lieu et choisissons à l'intérieur de cet intervalle un point c tel que $L(c) \leqq \lambda$. (Il suffit pour cela que $l(c) < \lambda$).

Si $f(x)$ prend des valeurs plus grandes que λ en tout intervalle $(c, c+\varepsilon)$, nous avons $L(c+o) = \lambda$ et λ n'est alors la borne supérieure de $f(x)$ pour aucun de ces intervalles, — pas plus que la borne inférieure si $f(c) < \lambda$. Dans ce cas-ci, donc, λ est atteint en c, à droite. D'ailleurs, lorsqu'on n'a pas $f(c) < \lambda$, les relations

$$f(c) \leqq L(c+o) = \lambda$$

donnent $f(c) = \lambda$, et la proposition est bien démontrée.

S'il y a des intervalles $(c, c+\varepsilon)$ où jamais $f(x)$ ne surpasse λ, soit γ le borne supérieure de leurs extrêmes $c+\varepsilon$. Évidemment, $\gamma \leqq \beta$.

On ne peut avoir $L(\gamma) < \lambda$, car cela entraînerait $\gamma < \beta$ et il y aurait alors un intervalle $(\gamma, \gamma+\varepsilon)$ où nous aurions encore

$$f(x) < L(\gamma) + \delta < \lambda.$$

Si $L(\gamma) = \lambda$, il vient aussi $\gamma < \beta$; et, comme $f(x)$ prend dans $(\gamma, \gamma+\varepsilon)$ des valeurs plus grandes que λ, nous retombons dans le prémier cas $(\gamma = c)$.

Enfin, si $L(\gamma) > \lambda$, nous avons $f(\gamma) > \lambda$, donc $L(c-o) > \lambda$, et en même temps $l(c-o) \leqq \lambda$ (car $f(x) \leqq \lambda$ à gauche de γ). λ est donc possible en γ, à gauche, et y est aussi réalisable, car elle n'est ni la borne supérieure ni la borne inférieure de $f(x)$ pour un intervalle $(\gamma-\varepsilon, \gamma)$, sauf, pour la dernière, si $f(x)$ demeure toujours égale a λ au voisinage gauche de γ. En tous les cas, donc, $f(x)$ prend la valeur λ à l'intérieur de (α, β).

Pour une fonction g (x), il y a tout au plus un ensemble réductible de discontinuités et, pour tout point de cet espèce, tout au plus deux valeures qui n'y sont pas réalisables. Donc, *Pour une fonction* g (x), *les valeurs non réalisables là où elles sont possibles forment, tout au plus, un ensemble dénombrable.*

III — INVERSION LOCALE DU THÉORÈME DE LAGRANGE

7. Le théorème de Darboux (**2.** 1) admet une interprétation géométrique bien simple :

Tout nombre compris entre les bornes k' *et* K' *de* g' (x) *pour l'intervalle* (a, b) *est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe* y = g (x) *à un point intérieur de l'arc correspondant à cet intervalle.*

On pourrait y ajouter, en renversant en quelque sorte l'interprétation géométrique du théorème des accroissements finis,

Le point de contact appartient à des arcs dont la corde est parallèle à la susdite tangente.

En effet, choisissons α, β et δ de manière à avoir

$$\frac{1}{h}\Big[g(\alpha+h)-g(\alpha)\Big]<\lambda<\frac{1}{h}\Big[g(\beta+h)-g(\beta)\Big]$$

pour toute valeur (positive) de h plus petite que δ. La fonction

$$\varphi(x)=\frac{1}{h}\Big[g(x+h)-g(x)\Big]$$

étant la derivée d'une fonction continue, il existe à l'intérieur de (α, β) un point ξ tel que $\varphi(\xi)=\lambda$, c'est-à-dire, d'après le théorème de Lagrange,

$$\frac{1}{h}\Big[g(\xi+h)-g(\xi)\Big]=\lambda=g'(\xi+\theta h) \quad (o<\theta<1).$$

λ est donc, en même temps, le coefficient angulaire de la tangente au point d'abcisse $\xi+\theta h$ et le coefficient angulaire de la corde de l'arc correspondant à l'intervalle $(\xi, \xi + h)$, au quel cette abcisse est intérieure.

En diminuant h et en augmentant ξ, on peut faire en sorte que $\xi + \theta h$ reste constante (sans variation de θ), et on obtient alors une infinité d'arcs ayant la propriété dont il s'agit.

La proposition est d'ailleurs géométriquement intuitive: Si en $M^o [x^o, g(x^o)]$ aboutissent *deux arcs* de $y = g(x)$ — l'un pour $x \lessgtr x^o$, l'autre pour $x \gtrless x^o$ — et si ces arcs sont placés du même coté de la tangente $M^o T$, en conduisant par un point voisin $M [x, g(x)]$ une parallèle à cette droite on aura une corde dans les conditions désirées.

Par conséquent,

La tangente oblique aux cordes de tous les arcs contenant à l'intérieur son point de contact est une tangente d'inflexion; et la valeur correspondante de $g'(x)$ *est une des bornes* k' *ou* K' *de cette dérivée pour l'intervalle de la courbe.*

Si M^o est un point d'inflexion, tout arc assez petit ayant ce point à l'intérieur possède une corde oblique à la tangente $M^o T$ ou confondue avec celle-ci.

8. Cette question de parallèlisme parmi cordes et des tangentes présente un aspect local d'un certain interêt.

Soit $\widehat{AB}$ la répresentation géométrique (continue ou non) de la fonction $y = f(x)$ — $a \lessgtr x \lessgtr b$ — dans le plan des axes rectangulaires OX et OY, ce dernier étant censé vertical:

Dans quelles conditions $\widehat{AB}$ *contient-il une partie* $\widehat{AH}$ *dont la tangente intérieure* MT — *lorsqu'elle n'est pas verticale — soit parallèle à la corde d'un arc* $\widehat{AN}$, *plus grand que* $\widehat{AM}$ *et ayant la même origine* A?

Nous allons étudier cette question en supposant qu'à tout point M correspond un seul arc $\widehat{AN}$ et que cet arc s'annule en même temps que $\widehat{AM}$ [1]. Nous admettrons en outre que $f(x)$ est une fonction g *à l'intérieur de* (a, b).

[1] C'est à-dire que N tend vers la droite $x = a$ en même temps que M. Ce n'est pas toujours le cas si $f(x)$ est discontinue pour $x = a$.

Analytiquement, en faisant pour abréger $a = f(a) = o$, il s'agit de chercher dans quelles conditions il existe un nombre positif α tel qu'à tout x de (o, α) on puisse faire correspondre un et un seul $y > x$ tendant vers zéro avec x et vérifiant l'égalité

$$4) \qquad f'(x) = \frac{f(y)}{y}$$

partout où $f'(x)$ est finie.

Nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature de $f(x)$ pour $x = o$; mais, cette fonction étant du type g à l'intérieur de (o, b), il en sera évidemment de même de la fonction $\varphi(x) = f(x) : x$, qui y est continue et dérivable en même temps que $f(x)$ et admet aussi une primitive continue.

En supposant que α existe et jouisse des susdites propriétés, choisissons dans (o, α) un point ξ où $f'(x)$ ait une valeur finie. À $x = \xi$ correspond par hypothèse un $y = \eta$ et nous aurons

$$5) \qquad f'(\xi) = \frac{f(\eta)}{\eta} = \varphi(\eta).$$

Tout d'abord, $\varphi(x)$ *est continue pour* $x = \eta$

En effet, s'il en était autrement, on aurait, par exemple, $f'(\eta) = \varphi'(\eta) = +\infty$ et, p et q étant le *minimum* et le *maximum* de $\varphi(x)$ pour $x = \eta$, il viendrait $\varphi(\eta) = p$. Or, soit λ un nombre compris entre

$$p = f'(\xi) \quad \text{et} \quad q < f'(\eta) = +\infty$$

et soit u un point de (ξ, η) où $f'(x) = \lambda$. Nous savons que dans tout intervalle $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ il se trouve une infinité de points v où $\varphi(x)$ prend cette valeur λ. Alors, pour $x = u$ il y aurait non pas un, mais une infinité de points correspondants $y = v$.

Donc, $\varphi(x)$ est bien continue pour $x = \eta$.

En second lieu, $\varphi'(\eta)$ *a une valeur finie.*

Si l'on avait, par exemple, $\varphi'(\eta) = +\infty$, ce serait aussi $f'(\eta) = +\infty$ et on pourrait construire une succession croissante

$\eta_n \to \eta$, telle que $f'(\eta_n) \to +\infty$ [1]. Soit ϑ la limite des ϑ_n qui correspondent aux η_n. Comme $\varphi(\vartheta_n) \to +\infty$, on ne peut avoir $\vartheta = \eta$; et alors les conditions $\eta_n < \vartheta_n$, $\eta_n \to \eta$ donnent $\vartheta > \eta$.

Or, $\varphi(\vartheta_n)$ peut approcher $+\infty$, mais on n'a pas

$$\lim_{x=\vartheta} \varphi(x) = +\infty,$$

car, si celà était, la primitive de $\varphi(x)$ aurait à ϑ une dérivée infinie et non pas égale à $\varphi(\vartheta)$. Donc, $\varphi(x)$ peut tendre aussi vers une autre limite A quand x tend vers ϑ. Mais ceci n'est pas moins impossible, car, étant remplissante à ϑ, $\varphi(x)$ devrait prendre, au voisinage de ce point, une infinité de fois toute valeur finie $\lambda > A$ prise par $f'(x)$ au voisinage de η.

Enfin, *pour* $\eta < \alpha$, $\varphi'(\eta) \neq o$.

En effet, les deux conditions $\eta < \alpha$, $\varphi'(\eta) \neq \infty$ assurent à $x = \eta$ un correspondant $y = \vartheta$. Nous avons donc

$$f'(\xi) = \varphi(\eta) \quad , \quad f'(\eta) = \varphi(\vartheta)$$

et l'hypothèse $\varphi'(\eta) = o$, c'est-à-dire $\varphi(\eta) = f'(\eta)$, entraînerait l'existence de deux correspondants pour ξ: savoir η et ϑ.

9. Ces remarques faites, nous allons maintenant démontrer que

1. *Si α existe, φ (x) est monotone à l'intérieur de (o, b).*

D'abord, il existe certainement un nombre δ tel que $f'(x)$ ne change pas de signe en (o, δ), car, s'il en était autrement, $f'(x)$ s'annulerait à des points x_n convergeant vers $x = o$, points dont les correspondants convergeraient eux-mêmes vers zéro, et alors,

---

(1) $f(x)$ étant une fonction g à l'intérieur de (o, b), pour tout point c qu'on y prenne ce sera (3)

$$\frac{f(c \pm h) - f(c)}{\pm h} = f'(c \pm \theta h) \qquad (o < \theta < 1).$$

Il est donc possible de construire une successions (même monotone) $x_n = c \pm \theta_n h_n$ tendant vers c et telle que $f'(x_n) \to f'(c)$.

en prenant $f'(X_1) < o$ et $f'(X_2) > o$, tout x_n aurait encore un correspondant entre les correspondants Y_1 et Y_2 de X_1 et X_2, vu que $\varphi(Y_1) < o$ et $\varphi(Y_2) > o$.

Supposons donc $f'(x)$ positive à l'intérieur de (o, δ). $f(x)$ y est alors une fonction croissante et nous pouvons même admettre (en remplaçant au besoin δ par un nombre plus petit) qu'elle y est toujours positive (à cause de 4). Lorsque x tend vers zéro, $f(x)$ décroît donc vers une limite finie $f(+o)$ et, s'il arrive que $f(+o)$ diffère de $f(o)$, 4) nous assure que $f'(x)$ peut converger vers $f'(o)$ le long d'une succession ayant zéro comme limite. $f(x)$ étant une fonction g pour $o < x \overline{<} b$, ce sera alors (**4**), pour toutes ces valeurs de x,

6) $$\frac{f(x)}{x} = f'(u) \qquad (o < u < x).$$

Or, si l'on avait

$$\varphi(U_1) = \varphi(U_2) \qquad (o < U_1 < U_2 \overline{<} b),$$

en faisant

$$\frac{f(U_1)}{U_1} = f'(u_1),$$

on aurait également

$$f'(u_1) = \varphi(U_1) = \varphi(U_2)$$

et à $x = u_1$ correspondraient $y = U_1$ et $y = U_2$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc, $\varphi(x)$ est bien une fonction monotone.

Le fait que, d'après 6), tout x est aussi un y, nous montre que $\varphi'(x)$ est toujours finie à l'intérieur de (o, b); il en est de même, donc, de $f'(x)$ et par suite $f(x)$ *est une fonction continue pour toutes ces valeurs de* x.

$\varphi(x)$ étant monotone, $f'(o)$, d'après sa définition même, existe toujours (finie ou non), et on voit à 4) que

7) $$\lim_{x=o} f'(x) = f(o).$$

D'ailleurs, on a partout $\varphi'(x) \overline{<} o$ ou $\varphi'(x) \overline{>} o$; mais, puisque tout x est aussi un y, seules les inégalités sont possibles. Donc, *Si* α *existe,* f (x) *vérifie la relation* 7), *ainsi que l'une ou l'autre des conditions*

$$8)\quad x f'(x)-f(x)<o \quad , \quad x f'(x)-f(x)>o \qquad (o<x\overline{<}b).$$

Réciproquement, la première des conditions 8), par exemple, étant vérifiée, $\varphi(x)$ croît avec $\dfrac{1}{x}$ et il vient

$$\varphi(b)<\varphi(x)<f'(o).$$

Or, $f'(x)$, qui est plus petite que $\varphi(x)$ d'après 8), tend vers $f'(o)$ lorsque x tend vers zéro. On peut donc determiner α en sorte que

$$9)\qquad \varphi(b)<f'(x)<\varphi(x) \qquad \text{pour} \qquad o<x\overline{<}\alpha$$

et, $\varphi(u)$ étant remplissante dans (x, b), il y aura à l'intérieur de cet intervalle un y tel que

$$\varphi(y)=f'(x).$$

Naturellement, il n'y en a pas d'autres à cause de 8); et y tend vers zéro en même temps que x, car, plus x est petit, plus petit aussi será de nombre β qu'on pourra mettre en 9) à la place de b.

En nous débarrassant des hypothèses faites pour abréger l'écriture, nous pouvons donc dire:

2. f (x) *étant une fonction* g *pour* a $<$ x $\overline{<}$ b, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un nombre positif* α *tel qu'à tout* k $\overline{<}$ α *corresponde un et un seul* h $>$ k *vérifiant la relation*

$$f(a+h)-f(a)=h\, f'(a+k)$$

et tendant vers zéro en même temps que k *est que* f (x) *elle même vérifie l'une ou l'autre des inégalités*

$$10)\qquad (x-a)\, f'(x) \gtrless f(x)-f(a)$$

pour toutes les valeurs de x *considerées et qu'on ait en outre*

$$11)\qquad \lim_{x=a} f'(x)=f'(a).$$

Les conditions 10) et 11) sont certainement vérifiées au voisinage de $x = a$ lorsque $f''(a)$ existe et a une valeur finie et différente de zéro.

En effet, nous avons alors, d'après la formule de Taylor-Peano,

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\left[f''(a) + \varepsilon\right] \quad \left(\lim_{x=a} \varepsilon = o\right)$$

et la définition même de dérivée nous donne en même temps

$$f'(x) = f'(a) + (x - a)\left[f''(a) + \varepsilon'\right] \quad \left(\lim_{x=a} \varepsilon' = o\right).$$

Ce sera donc

$$12) \quad (x-a) f'(x) - \Big(f(x) - f(a)\Big) = \frac{(x-a)^2}{2}\left[f''(a) + \varepsilon''\right] \quad \left(\lim_{x=a} \varepsilon'' = o\right),$$

ainsi que l'exige 10). La condition 11) est évidemment satisfaite.

Si $f''(a)$ n'existe pas ou a une valeur nulle ou infinie, mais $f''(x)$ demeure toujours différente de zéro au voisinage de a et $f'(x)$ y est une fonction g, les deux conditions 10) et 11) sont encore verifiées.

En effet, $f''(x)$ ne pouvant alors changer de signe, le premier membre de 12), dont la dérivée est $(x - a) f''(x)$, reste toujours positif ou toujours négatif pour les petites valeurs de $x - a$. Et d'autre part $f'(x)$ est une fonction monotone. On suppose, bien entendu, $f(x)$ bornée au voisinage de a, autrement $f(a + o)$ pourrait ne pas exister.

PARECER

acêrca da fiscalização e condicionamento de venda das especialidades farmacêuticas

Dignou-se o Sindicato Nacional dos Farmacêuticos de convidar a Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra a pronunciar-se sôbre a doutrina do ante-projecto de um decreto-lei e respectivo Regulamento, cuja promulgação vai solicitar do Govêrno da Nação Esse ante-projecto, respeitante à fiscalização e condicionamento de venda das especialidades farmacêuticas, sugere as seguintes considerações que se afiguram da mais alta importância.

No art. 1.º, alínea 3.ª, estabelece-se que de quaisquer especialidades farmacêuticas que se pretenda introduzir no mercado se forneçam «as amostras necessárias para as análises e experiências a que a nova especialidade deve ser submetida»; e na alínea 4.ª determina-se que, depois de feitas as análises e experiências em questão, o requerente se tem de apresentar a um júri de que fazem parte vários membros e entre êles um *professor catedrático da Faculdade de Ciências.*

Parece mais razoável que em vez dum *exame,* o requerente objecte por escrito a quaisquer alegações que as entidades oficiais encarregadas das análises e apreciação do valor terapêutico das especialidades, no seu relatório, contra elas apresentem. Mais razoável e mais seguro.

Onde o ante-projecto, que estamos analisando, se afigura porém de importância transcendental para a vida das Universidades, é nos seus arts. 5.º e 6.º. Pelo art. 5.º cria-se o Laboratório Nacional de Verificação Científica; reconhece-se-lhe carácter de *Instituto de investigação científica;* e pelo art. 6.º coloca-se, como *Estabeleci-*

mento de alta cultura, na dependência do *Ministério da Educação Nacional*. Mas, não obstante tôdas essas características, o referido Laboratório e Instituto de investigação é criado, não junto das Faculdades universitárias que são naturalmente os organismos nacionais encarregados da *função cultural*, mas junto do Sindicato Nacional dos Farmacêuticos que não passa dum organismo de coordenação económica dependente do Ministério da Economia.

Isto não está certo!

Se o Sindicato Nacional dos Farmacêuticos, para exercer as suas acções coordenadora e orientadora das actividades profissionais dos seus membros, necessita da cooperação das Universidades e outras Escolas Superiores, é evidente que se devem estabelecer as condições legais indispensáveis para eficazmente se assegurar essa colaboração. As Universidades têm nisso todo o interesse, e estou certo de que se porão com a maior boa vontade à disposição do Govêrno.

Com o que, porém, as Universidades não podem nem devem concordar é com a *criação de Institutos de alta cultura e de investigação científica* fora do âmbito da sua jurisdição administrativa, técnica e cultural, quando, como se verifica, tôda a actividade científica e cultural dêsses organismos mais não é do que uma extensão da laboriosidade científica universitária. Tem-se nos últimos tempos assistido, — com alegria o notamos — a uma solicitação constante e intensa da parte dos organismos económicos de colaboração universitária nas tentativas de solução de numerosos e vários problemas científicos de interesse imediato à vida e prosperidade da Nação. Mas não podemos deixar de discordar da forma como essa colaboração se tem estabelecido, ou pretendido estabelecer, por ser altamente prejudicial aos interesses universitários, em última análise aos da Nação. Refiro-me à deslocação do pessoal técnico dos laboratórios universitários para institutos criados fora das Universidades, ou nomeados para comissões de serviços doutros Ministérios, por tempo que obriga ao abandono completo dos seus encargos técnicos normais.

Novos problemas envolvem despesas e pessoal técnico suplementar; não é indispensável criar mais laboratórios e institutos do que os existentes; basta supri-los de meios pecuniários e agentes técnicos em correspondência com o excesso de actividade que se lhes demanda.

É mais económico e, para um país pequeno, sem grandes recursos quer de dinheiro quer de pessoal técnico, mais útil sob o ponto de vista do desenvolvimento cultural da Nação. Valem mais poucos laboratórios bem instalados e apetrechados, com direcção técnica superior e competente, do que muitos todos êles pobremente organizados nos seus vários aspectos. Melhorem-se os existentes, habilitando-os a bem desempenhar tôdas as suas funções — actuais e futuras — mas não se vá aumentar mais uma unidade à legião dos indigentes!

Isto quanto ao interêsse universitário geral do ante-projecto. Mas se analisarmos devidamente as disposições dos seus art.os 9.º e 11.º não será difícil concluir que a sua aprovação vem a constituir a sentença de morte do ensino da Farmácia nas Universidades de Coimbra e Porto.

Na realidade a direcção técnica do Laboratório Nacional de Verificação Científica viria exclusivamente a competir (art.º 9.º.) ao Director da Escola Superior de Farmácia de Lisboa, e como o conselho técnico do referido Laboratório (art.º 11.º.) fica com competência para organizar *cursos de aperfeiçoamento,* regidos por especialistas estrangeiros de reconhecida competência, para isso contratados, (art.º 11.º.), não será fantasia suspeitar que, na base de quaisquer preferências legais, fáceis de conseguir, se venha de futuro a dar preferência nas colocações aos farmacêuticos que tiverem seguido com proveito tais cursos de aperfeiçoamento. Natural será pois concluír que, num futuro relativamente próximo, a freqüência da Escola e Faculdade de Farmácia de Coimbra e do Porto se achem reduzidas a um número tal que não justifique a sua existência.

Mas há ainda outros aspectos que, sob o ponto de vista nacionalista, merecem devida ponderação, e mostram o paradoxo da maior parte das iniciativas nesta curva da evolução política nacional em que afortunadamente nos encontramos.

Tudo custa dinheiro! Não há melhoria possível no estado da insuficiência geral que manifestam as actividades nacionais sem que os respectivos organismos disponham de recursos financeiros suficientes e técnicos competentes. Material bom e pessoal adestrado são necessidades caras.

A mentira da nossa producção científica é a resultante lógica da falta de correspondência que existe entre as aspirações legais introduzidas no articulado dos diplomas dos respectivos organismos e a miséria dos recursos postos à sua disposição (material e técnicos).

No ante-projecto em discussão encara-se êste aspecto do assunto (art.º 7.º), autorizando-se o Sindicato Nacional dos Farmacêuticos «a contrair um empréstimo na Caixa Geral dos Depósitos, Crédito e Previdência, até à quantia de 1.000 contos, amortizável em cinco anos, destinado à instalação e montagem do Laboratório Nacional de Verificação Científica»; estipulando se no § único, que a referida instalação «deve fazer-se por ampliação da séde do Sindicato Nacional dos Farmacêuticos, a que será acrescido um andar destinado exclusivamente ao fim para que é construído, podendo também aproveitar-se para o mesmo fim a cave e o terreno circundante».

Ficar-se-ia com mais um laboratóriozinho! A verba é manifestamente insuficiente, mesmo que se destine exclusivamente à aparelhagem do laboratório.

Por outro lado não é de aprovar o processo consignado no art.º 8.º de angariação de receita pela aposição de um sêlo de $20 em cada receita médica aviada nas farmácias, para fazer face ao acréscimo de despeza que inevitàvelmente resultará da criação de tal laboratório.

As despezas públicas de interesse geral devem ser satisfeitas pelo rendimento das contribuïções e impostos, e se há serviços que interessam à comunidade nacional estão em primeira linha os que se referem à cultura geral e à investigação científica, sejam quais fôrem os problemas que os estabelecimentos científicos em particular tenham a seu cargo. O Estado reconhece ou não reconhece as vantagens ou conveniências da instalação dos novos serviços e correlativamente inscreverá, ou não, nos seus orçamentos as verbas necessárias. A criação de um impôsto, que outro nome não pode ter, especial de $20 por receita aviada nas farmácias para ocorrer às necessidades dum laboratório de investigação científica não se pode defender. Tal impôsto iria afectar sensìvelmente apenas certas classes sociais, proletários e classe média, que bem precisam de alívio em matéria de contribuïções e impostos.

Finalmente, não se justificam as disposições dos arts. 12.º e 13.º, (criação de laboratórios, sob a direcção de químicos-farmacêuticos, nos estabelecimentos de revenda de produtos químicos destinados à farmácia, para análise dêsses produtos).

A não ser que com tais medidas se queira arranjar logares para os químicos-farmacêuticos, não se compreende bem para que é preciso haver laboratórios de análise nos estabelecimentos de revenda de produtos químicos destinados à farmácia. É preferível res-

tringir a produção de farmacêuticos aos limites das exigências da sua actividade profissional a entrar pelo caminho de criar receitas especiais, para acudir a prováveis crises de desemprego por super--produção de diplomados, à custa de certas classes da população (art. 14.º — adicional de 5 % sôbre os preços dos produtos químicos destinados às farmácias).

A análise dêsses produtos químicos pode ser feita nos laboratórios universitários, e a sua venda condicionada pela apresentação dos respectivos boletins de análise.

O Relator:

(*a*) Dr. Eusébio Tamagnini

Aprovado, por unanimidade, pelo Conselho Escolar da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, em congregação de 15 de Janeiro de 1941.

O Director:

(*a*) João Pereira Dias

Determinações quantitativas de vitamina C em bananas (Musa nana) provenientes da Ilha da Madeira *

POR

A. J. A. de Gouveia, F. Pinto Coelho ** e J. Anachoreta Correia
Laboratório Químico da Universidade de Coimbra

INTRODUÇÃO

Na publicação do Dr. Vicente de Gouveia «A Banana» (Funchal 1939) (1), apresentam-se algumas dúvidas sôbre a existência da vitamina C no fruto da «Musa nana», resultantes dos trabalhos do Professor Geraldo Paula Sousa do Instituto de Higiene de S. Paulo.

Considerando a grande importância dêste fruto na economia da Ilha da Madeira e o seu valor como alimento, por instigação do Dr. Vicente de Gouveia e em virtude do grande interesse mostrado pelo Grémio dos Exportadores de Frutos e Produtos Hortícolas da Madeira, resolvemos fazer alguns ensaios com o fim de resolver êste problema.

*
* *

Na determinação quantitativa da vitamina C, além dos métodos biológicos, têm sido utilizados métodos volumétricos de oxidação-redução e espectrofotométricos.

---

* Alguns resultados indicados neste trabalho foram apresentados no XVI Congresso da Associação Espanhola para o Progresso das Ciências (Saragoça - Dezembro de 1940).

** Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura.

Métodos volumétricos. — O reagente que mais se emprega nos métodos de oxidação-redução é o 2,6-diclorofenol-indofenol proposto por Tillmans e colaboradores (2): na presença de certos compostos, como o glutatião, cisteína, ergotioneína, tiosulfatos e outros compostos sulfurados o reagente de Tillmans não é específico; estes compostos são oxidados e além de se obterem resultados elevados desaparece a nitidez do termo de reacção.

Várias modificações foram introduzidas no método de Tillmans com o fim de eliminar êste inconveniente; a de Emmerie e van Eekelen (3) é a que melhores resultados tem dado. Num estudo crítico de Manceau, Policard e Ferrand (4), o método de Emmerie e van Eekelen, aplicado à urina, mostra vantagens sôbre outros métodos, tais como o de Tillmans e o de acetato de chumbo (5).

Métodos espectrofotométricos. — A vitamina C apresenta uma banda de absorção bem definida e intensa no ultravioleta médio com máximo em 265 $m\mu$ ($\log \varepsilon_{\text{max.}} = 3{,}97$) em soluções aquosas de $\text{pH} > 4$ (6).

A-pesar da elevada intensidade desta banda de absorção, a aplicação da espectrofotometria nas determinações do ácido ascórbico-l, em substâncias pouco ricas nesta vitamina, apresenta dificuldades em virtude de concomitantemente existirem outras substâncias que absorvem na mesma região.

Van Eekelen e Emmerie (7) fizeram determinações espectrofotométricas directas no líquido cérebro-espinal, nos humores do globo ocular e em extractos do cristalino, obtendo uma banda semelhante à da vitamina C.

J. A. Loureiro (8) determinou, espectrofotomètricamente, a vitamina C em extractos de tecidos animais; eliminou prèviamente as substâncias que, além da vitamina C, absorvem no ultravioleta médio, por tratamento com alcool ou acetona, ácido fosfotungstico e acetato mercúrico.

Chevalier e Choron (9) na determinação da vitamina C, em extractos de tecidos animais, obtem espectrofotogramas dêstes, antes e depois de irradiados com tubo de hidrogénio; determinam a concentração de ácido ascórbico pelas diferenças de intensidade de absorção em 265 $m\mu$.

Na determinação da vitamina C, nos vinhos tintos da Bairrada, por precipitação com acetato mercúrico e saturação com sulfídrico, Schön, Gouveia e Pinto Coelho (10) verificaram que, na dosagem com 2,6-diclorofenol-indofenol, depois da eliminação completa do ácido sulfídrico, a redução do corante é inicialmente nítida, tornando-se depois difícil. O volume de corante gasto nestas condições excede consideràvelmente a espectativa; os autores verificaram que na dosagem do ácido ascórbico nos vinhos, havia necessidade de fazer dois ensaios, um sem destruïção, outro com destruïção da vitamina C, sendo as dosagens feitas simultâneamente e nas mesmas condições; a concentração da vitamina C é obtida por diferença dos resultados encontrados nos dois ensaios.

O método anterior funda-se na destruïção irreversível da vitamina C em meio alcalino, na presença de cupri-ião ([11]), em contacto com o ar; não deve haver modificação sensível de outras substâncias que por tratamento pelo sulfrídrico dão origem a compostos redutores do corante.

Com o fim de demonstrar a existência da vitamina C nas bananas provenientes da Ilha da Madeira, associámos o método volumétrico aplicado aos vinhos ([10]) com o método espectrofotométrico convenientemente adaptado ao caso presente.

Para provar a legitimidade e generalidade do método extendemos êste estudo a outros frutos com concentrações de vitamina C muito diferentes.

Os métodos são independentes e além disto a destruïção da vitamina C fez-se não só por oxidação em meio alcalino, catalisada por cupri-iões, mas também por irradiação prolongada em meio ácido, com formação de ácido dehidroascórbico e seus produtos de destruïção ([12]).

No método espectrofotométrico obtivemos a concentração do ácido ascórbico por diferença dos valores dos coeficientes de extinção em 265 $m\mu$, nas soluções antes e depois da destruïção da vitamina C. Esta destruïção foi sempre feita por irradiação.

Sabe-se que a absorção em meio ácido do produto de oxidação do ácido ascórbico obtido em meio alcalino apresenta absorção selectiva para maiores comprimentos de onda ([6]).

PARTE EXPERIMENTAL

Material. — Utilizámos nas dosagens microburetas e micropipetas graduadas en centésimos de mililitro.

Usámos, nas irradiações, uma lâmpada de quartzo, com mercúrio.

Os espectrogramas foram obtidos com um espectrógrafo Hilger E 316, associado a um fotómetro Spekker.

O ácido ascórbico-1 e o 2,6-dicloro-indofenol foram fornecidos por F. Hoffmann-La Roche (Basileia, Suiça).

Resultados experimentais. — Ácido ascórbico-1 (vitamina C). — Preparámos uma solução de ácido ascórbico-1 em tampão de acetato M/5, pH = 5, na presença de cianeto de potássio (0,0002 %). A concentração da solução, 0,0021 %, foi determinada por pesagem e dosagem com 2,6-diclorofenol-indofenol.

O espectrograma obtido com esta solução, com a espessura de 1 cm. apresenta uma banda com o máximo em 265 $m\mu$ ($log\ I_0/I = 1{,}2$) ou seja o coeficiente de extinção $\varepsilon = 10^4$ (figs. 1 e 2), resultado que concorda com as determinações por pesagem e volumétricas.

Á solução, depois de irradiada num tubo de ensaio de vidro de parede fina, com uma lâmpada de quartzo, com mercúrio, à distância de cêrca de 18 cm., durante 7 horas, é, nas condições anteriores, transparente à luz ultravioleta e não reduz o 2,6-diclorofenol-indofenol.

A mesma solução, tratada com uma gôta de uma solução aquosa de sulfato de cobre a 1 %, e com uma solução aquosa de hidróxido de sódio a 40 %, até à reacção alcalina, durante cêrca de 2 horas, depois de acidulada e tratada pelo ácido sulfídrico, não reduz o 2,6-diclorofenol-indofenol.

Banana proveniente da Ilha da Madeira (Musa nana).

Determinação volumétrica. — A solução de 2,6-diclorofenol-indofenol foi titulada com uma solução de ácido ascórbico-1 cujo título foi prèviamente fixado com uma solução de iodo N/200. Em determinações posteriores, fixámos o título do corante com o iodeto de potássio em meio sulfúrico e solução titulada de tiosulfato de sódio ([13]). A 5 mls. da solução do corante juntámos 0,5 ml. de solução de iodeto de potássio a 10 %, 1 ml. de ácido sulfúrico diluído (1:4) e, depois da agitação, doseamos o iodo libertado com $Na_2S_2O_3$ N/100.

Preparação da solução para a dosagem. — 10 gramas de banana foram triturados com areia e seguidamente extraídos com uma solução aquosa de ácido tricloroacético a 3 %.

A solução é neutralizada com carbonato de cálcio; centrifuga-se e lava-se o resíduo; a solução obtida é tratada com cêrca de 2 cc. duma solução de acetato mercúrico a 20 %. Determina-se o

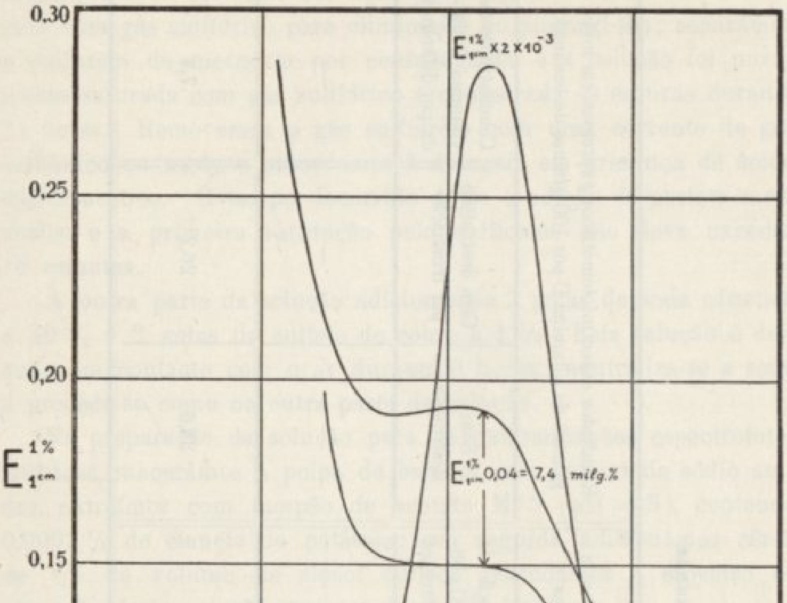


Fig. 1

Espectros de absorção: I — Ácido ascórbico-1; II — Extracto de banana; III — Extracto de banana depois de irradiado; IV — Extracto de ananás; V — Extracto de ananás depois de irradiado.

TABELA I — Bananas

	Resultados volumétricos expressos em miligramas de vitamina C por 100 gramas de bananas			Resultados espectrofotométricos expressos em miligramas de vitamina C por 100 gramas de bananas		
	Sem destruição	Com destruição $[Cu(H_2O)_4]^{++}$	Concentração de vitamina C obtida por diferença	Sem destruição	Com destruição por irradiação	Concentração de vitamina C obtida por diferença
Bananas CCl_3COOH + $Hg(AcO)_2$	9.6	2,4	7,2	—	—	—
	11,6	4,7	6,9	—	—	—
Bananas (Na_2SO_4, extraída com tampão + alcool)	—	—	—	33,6	26,2	7,4

volume total e divide-se em duas partes iguais; uma delas é saturada com gás sulfídrico para eliminação do mercuri-ião; separámos o sulfureto de mercúrio por centrifugação e a solução foi novamente saturada com gás sulfídrico e conservada às escuras durante 24 horas. Removemos o gás sulfídrico com uma corrente de gás carbónico ou azote e procedemos à dosagem em presença de ácido tricloroacético. O tempo decorrido entre a adição de acetato mercúrico e a primeira saturação pelo sulfídrico não deve exceder 10 minutos.

À outra parte da solução adicionámos 2 gotas de soda cáustica a 40 % e 2 gotas de sulfato de cobre a 1 %. Esta solução é deixada em contacto com o ar durante 3 horas; neutraliza-se a soda e procede-se como na outra parte da solução.

Na preparação da solução para as determinações espectrofotométricas, macerámos a polpa de banana com sulfato de sódio anidro, extraímos com tampão de acetato M/5 (pH = 5), contendo 0,0002 % de cianeto de potássio; em seguida adicionámos cêrca de 1/5 de volume de alcool etílico. Estudámos o espectro de absorção desta solução, antes e depois de irradiada.

Os resultados obtidos vão resumidos no quadro I e nas curvas da fig. 1.

Limão. — O sumo de limão foi doseado directamente na presença de ácido tricloroacético com a solução titulada de 2,6-diclorofenol-indofenol. Estudámos os espectros de absorção do sumo de limão, em tampão de acetato, antes e depois de 7 horas de irradiação, nas condições atrás referidas (fig. 2); esta solução foi também titulada com o corante.

Tratámos o sumo de limão segundo o método de Emmerie e Van Eekelen ([3]); noutro ensaio seguimos o mesmo método mas destruímos a vitamina C com sulfato de cobre em meio alcalino, levamos o pH ao valor inicial com ácido tricloroacético, reduzimos pelo sulfídrico e fizemos as dosagens pela maneira usual. Espectrofotografámos a primeira solução antes e depois de irradiada durante 7 horas (fig. 3).

Numa outra determinação procedemos de maneira semelhante sem contudo adicionarmos o ácido tricloroacétido (fig. 4).

Os resultados estão resumidos no quadro II.

Ananás. — Na dosagem volumétrica procedemos como no caso da banana. Obtivemos o espectro de absorção da solução sem e com destruïção da vitamina C por irradiação.

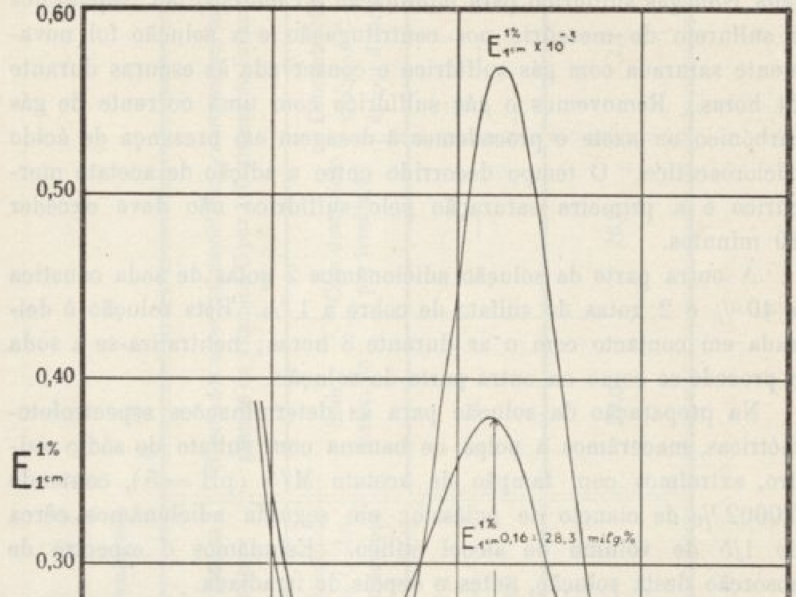


Fig. 2

Espectros de absorção, em tampão de acetato: I — Ácido ascórbico-l; II — Sumo de limão; III - Sumo de limão depois de irradiado.

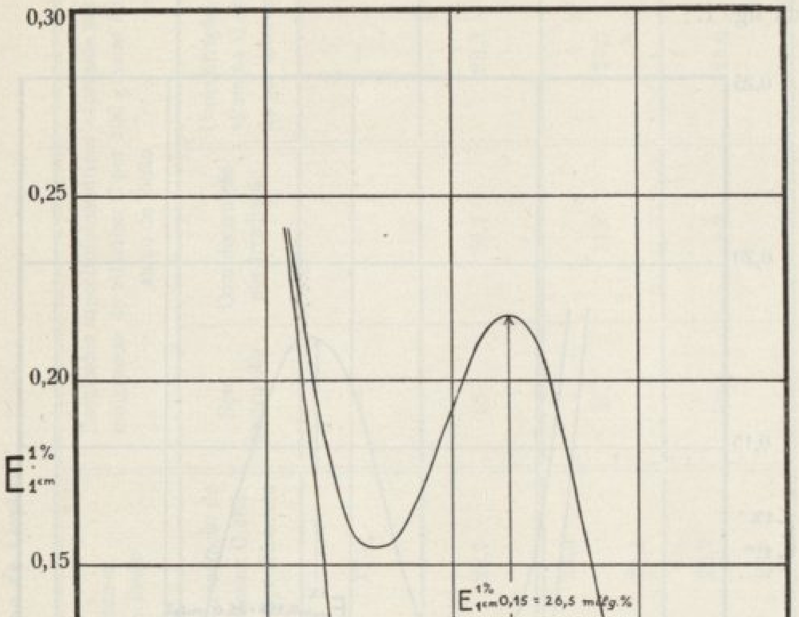


Fig. 3

Espectros de absorção, em tampão de acetato: I — Sumo de limão depois de tratado com acetato mercúrico e ácido tricloroacético; II — Solução anterior depois de irradada.

Os resultados obtidos estão resumidos no quadro III e curvas da fig. 1.

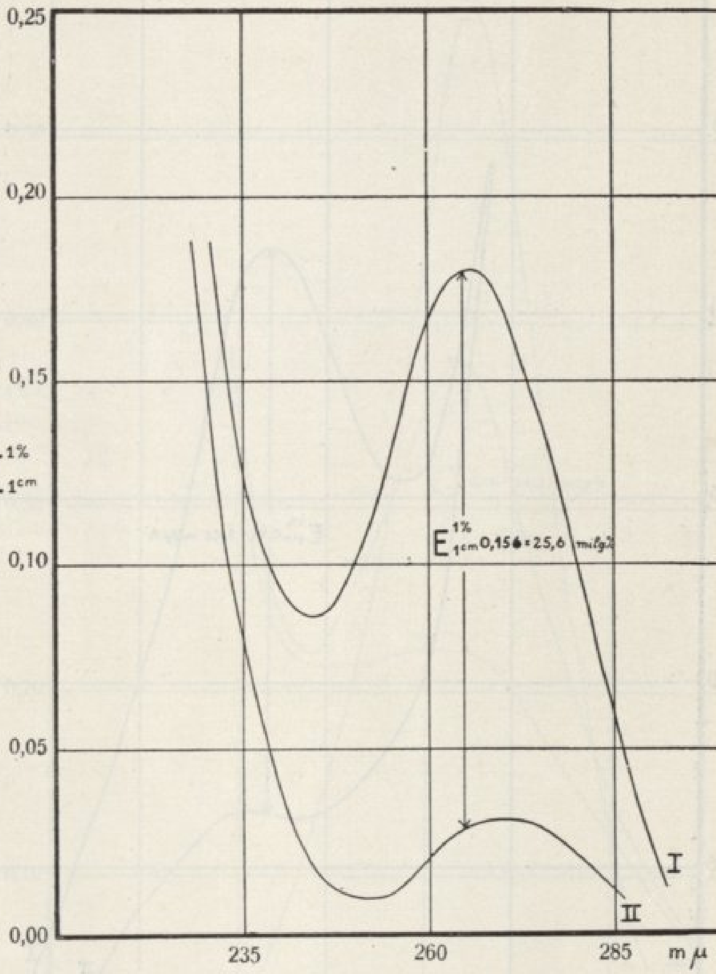


Fig. 4

Espectros de absorção, em tampão de acetato: I — Sumo de limão depois de tratamento com acetato mercúrico; II — Solução anterior depois de irradiada

Pêssego. — Os ensaios foram idênticos aos anteriores. Doseamos ainda a solução que continha a vitamina C, depois de irradiada.

Os resultados encontram se no quadro IV. Os espectros de absorção são semelhantes aos do ananás (fig. 1).

TABELA II — **Sumo de Limão**

	Resultados volumétricos expressos em miligramas de vitamina C por 100 gramas de sumo de limão				Resultados espectrofotométricos expressos em miligramas de vitamina C por 100 gramas de sumo de limão		
	Sem destruïção	Com destruïção por: $[Cu(H_2O)_4]^{++}$	Com destruïção por: irradiação	Concentração de vitamina C obtida por diferença	Sem destruïção	Com destruïção por irradiação	Concentração de vitamina C obtida por diferença
Sumo de Limão	27,8	—	0,8	27,0	—	—	—
Sumo de Limão	29,7	—	1,0	28,7	65	26,7	28,3
Sumo de Limão CCl_3COOH + $Hg(AcO)_2$	26,2	2,1	1,3	24,9 24,1	37,7	11,2	26,5
Sumo de Limão $Hg(AcO)_2$	27,9	1,9	1,7	26,2 26	29,8	4,2	25,6

TABELA III — **Ananás**

	Resultados volumétricos expressos em miligramas de vitamina C por 100 gramas de ananás				Resultados espectrofotométricos expressos em miligramas de vitamina C por 100 gramas de ananás		
	Sem destruïção	Com destruïção por: $[Cu(H_2O)_4]^{++}$	Com destruïção por: irradiação	Concentração de vitamina C obtida por diferença	Sem destruïção	Com destruïção por irradiação	Concentração de vitamina C obtida por liferença
ANANÁS CCl_3COOH + $Hg(AcO)_2$	7,1	3,5	—	3,6	9,9	6,7	3,2

TABELA IV — **Pêssego**

	Sem destruïção	$[Cu(H_2O)_4]^{++}$	irradiação	Concentração de vitamina C obtida por diferença	Sem destruïção	Com destruïção por irradiação	Concentração de vitamina C obtida por diferença
PÊSSEGO CCl_3COOH + $Hg(AcO)_2$	7,2	3.9	4,8	2,4 3,3	9,1	6,3	2,8

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

O exame dos resultados experimentais conduz-nos à conclusão de que no caso dos frutos e derivados (vinho) [10] o método de determinação da vitamina C por tratamento com ácido tricloroacético, carbonato de cálcio e acetato mercúrico, seguido de tratamento pelo sulfídrico, dá resultados, em alguns casos, muito elevados; formam-se possìvelmente, compostos sulfurados (caracterizados pelo cheiro), que não são arrastados pela corrente de gás carbónico ou azote.

As tabelas I, II, III, e IV mostram-nos uma boa concordância entre os resultados volumétricos e espectrofotométricos quando se toma a diferença dos valores obtidos antes e depois da destruïção do ácido ascórbico-1.

As discordâncias entre estes métodos são relativamente maiores nos frutos em que há menor concentração de vitamina C. O método espectrofotométrico não é aplicável ao vinho nas condições atrás descritas, pois verificámos que a absorção da solução aumentava por irradiação.

A concordância satisfatória entre os resultados volumétricos e espectrofotométricos e ainda entre os resultados volumétricos com destruïção em meio alcalino e a destruïção por irradiação demonstra que o ensaio com destruïção afecta, entre as substâncias que reduzem o corante, sòmente o àcido ascórbico-1.

Os volumes de corante gastos, correspondentes às substâncias redutoras, com excepção do ácido ascórbico, dependem não só das condições em que as operações são executadas, mas também da natureza do fruto. Os ensaios devem, portanto, ser realizados nas mesmas condições.

As percentagens de vitamina C determinadas são, em geral, ligeiramente inferiores aos resultados apresentados por Van Eekelen [11].

No caso do vinho é inconveniente o tratamento com o ácido tricloroacético, pois o corante não é totalmente eliminado.

Os resultados obtidos no caso do limão, com ácido tricloroacético e sem êste ácido, apresentam diferenças que estão dentro dos êrros do método.

A destruïção da vitamina C por irradiação com lâmpada de vapor de mercúrio, com a solução em tubo de ensaio de parede fina, só fica completa no fim de cêrca de 6 horas. A utilização de vazos de quartzo torna esta destruïção mais rápida (60 minutos, segundo Zilva) ([12]).

As soluções de sumo de limão, as soluções obtidas a partir do sumo de limão por tratamento com ácido tricloroacético e acetato mercúrico, e as obtidas só com acetato mercúrico, apresentam uma banda bem definida com máximo em 265 $m\mu$. A persistência da banda é maior na solução que foi tratada com acetato mercúrico e o valor de $E^{1\%}_{1\,cm.}$ 265 $m\mu$ é menor do que nos outros casos. Demonstra-se assim que a eliminação de substâncias que interferem nos ensaios é feita pelo acetato mercúrico nas melhores condições. Nos produtos destruídos mantém-se uma inflexão ligeiramente deslocada para maiores comprimentos de onda.

O espectro de absorção do extracto de banana apresenta uma inflexão nítida na região 250 270 $m\mu$.

No ananás e pêssego, obtivemos espectros de absorção com características análogas.

Estabelecida a legitimidade dos métodos atrás descritos, a concordância dos resultados volumétricos e espectrofotométricos obtidos nas determinações feitas nas bananas demonstra a existência de ácido ascórbico-l neste fruto.

As concentrações de vitamina C na banana anã da Ilha da Madeira são da ordem de grandeza dos resultados obtidos por R. M. Leverton em determinações em bananas ([15]).

SUMÁRIO

1) As dosagens da vitamina C em alguns frutos e derivados que contêm percentagens baixas desta vitamina, dão, em geral, resultados demasiadamente elevados quando se faz o tratamento pelo acetato mercúrico em meio tricloroacético.

2) Chegámos a êstes resultados por métodos volumétricos e espectrofotométricos destruindo a vitamina C por oxidação em meio alcalino e por irradiação.

3) A dosagem da vitamina C deve fazer-se por diferença destruindo a vitamina, num dos ensaios, quer por oxidação em meio alcalino quer por irradiação.

4) Fizemos as dosagens, por êstes métodos, em banana, limão, ananás e pêssego.

5) Os resultados obtidos pelos métodos volumétricos e espectro-

fotométricos são concordantes, excepto no caso do vinho em que o método espectrofotométrico não pode ser aplicado nas condições em que operámos.

6) Demonstrámos a existência de vitamina C nas bananas (Musa nana) da Ilha da Madeira (cêrca de 7 miligramas por 100 gramas) por dois métodos independentes, volumétrico e espectrofotométrico.

Êste trabalho foi subsidiado pelo Grémio dos Exportadores de Frutas e Produtos Hortícolas da Ilha da Madeira e faz parte do plano do Centro de Estudos de Química anexo pelo Instituto para a Alta Cultura ao Laboratório Químico da Universidade de Coímbra.

Ao Grémio dos Exportadores de Frutas e Produtos Hortícolas da Ilha da Madeira e aos Ex.[mos] Senhores Dr. Fernando Tolentino da Costa e Engenheiro F. Teixeira de Sousa apresentamos os nossos agradecimentos pelo interesse mostrado nêste trabalho e subsídio que facilitou a sua execução. Ao Dr. Vicente H. de Gouveia que sugeriu e tanto animou êste trabalho, e ainda ao Dr. João de Almada exprimimos o nosso reconhecimento. Apresentamos os nossos agradecimentos ao Professor Dr. Rui G. Couceiro da Costa pelas facilidades concedidas e interesse mostrado na execução dêste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

1) Vicente H. de Gouveia, «A Banana» (Funchal, 1939).
2) J. Tillmans e colaboradores, Zeitschr. f. Unters Lebensmittel (1932), *63*, 1, 21, 241, 267, 276.
Biochem. Zeitschr., (1932), *250*, 312.
3) A. Emmerie, Biochem. J., (1934), *28*, 268.
A. Emmerie e van Eekelen, Biochem. J., (1934), *28*, 1153.
4) P. Manceau, A. A. Policard e M. Ferrand, Bull. Soc. Chim. Biol. (1938), *18*, 1623.
5) W. A. Dewjatnin e W. M. Doroschenko, Biochem. Zeitschr., (1935), *280*, 118.
6) F. P. Bowden e C. P. Snow, Nature, (1932), *129*, 720.
R. W. Herbert e E. L. Hirst, Nature, (1932), *130*, 205.
R. W. Herbert, E. L. Hirst, E. G. V. Percival, R. J. W. Reynolds e E. Smith, J. Chem. Soc. (1933), 1270.
D. K. Baird, W. N. Haworth, R. W. Herbert, E. L Hirst, E. Smith e M. Stacey, J. Chem. Soc. (1934), 66.
7) M. van Eekelen e A. Emmerie, Klinische Wochenschrift (1934), *15*, 564.
8) J. A. Loureiro, Bull Soc. Chim. Biol. (1936), *18*, 757.
9) A. Chevalier e J. Choron, Bull. Soc. Chim. Biol., (1937), *19*, 511.
10) K. Schön, A. J. A. de Gouveia e F. Pinto Coelho, Revista da Faculdade de Ciências da Univ. Coimbra, (1940), *8*, 130.
11) E. S. G. Barron, R. H. Demeio e F. Klemperer, J. Biol. Chem. (1936), *112*, 625.
A. O. Dekker e A. R. G. Dickinson, J. Amer. Chem. Soc., (1940), *62*, 2165.
12) A. E. Kellie e S. S. Zilva, Biochem J. (1938), *32*, 1561.
13) Menaker e Guerrant, Ind. Eng. Chem. [Anal.], (1939), *10*, 25.
14) M. van Eekelen, Over Opname, Verbruik en Mitscheiding van Vitamine C door de Mens (1936) Utrecht
15) Ruth M. Leverton, Food Res, (1937), *2*, 59, Univ., of Chicago.

Sur la primitive des différentielles totales

On fait dans cette Note un exposé tout-à-fait élémentaire du problème de l'intégration d'une différentielle totale, ce qui permet de traiter cette questions dans les cours d'Algèbre à la suite des problèmes concernant les primitives ordinaires.

1. Si $F(x, y)$ est une primitive de

$$1) \qquad \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy,$$

c'est-à-dire, si

$$2) \qquad dF = \varphi\, dx + \psi\, dy,$$

φ admet par rapport à x une primitive $H(x, y)$, dérivable par rapport à y et telle que

$$3) \qquad \psi - H'_y$$

ne dépend pas de x. On peut prendre, par exemple, $H = F$, car on a, d'après 2),

$$F'_x = \varphi \quad , \quad \psi - F'_y = o.$$

Réciproquement, si φ admet par rapport à x une primitive H remplissant ces deux conditions, la fonction

$$4) \qquad F = H + P_y(\psi - H'_y)\ (^1)$$

est bien une primitive de 1).

---

(1) On entend par $P_y\, U$ une fonction V des mêmes variables de U et vérifiant la condition $V'_y = U$.

Donc,

La condition nécessaire et suffisante pour que 1) *soit une différentielle exacte est que* φ *possède par rapport à* x *une primitive* H *rendant l'expression* $\psi - H'_y$ *indépendante de* x*;* 1) *est alors la différentielle de* 4) ([1]).

Cette condition est certainement vérifiée par toute primitive Φ de φ, lorsque φ'_y e ψ'_x existent et sont des fonctions continues vérifiant la condition

$$\varphi'_y = \psi'_x.$$

Dans ce cas là, en effet, $\Phi''_{xy} = \varphi'_y$ est une fonction continue, donc égale à Φ''_{yx}, et on peut alors écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi - \Phi'_y) = \psi'_x - \Phi''_{yx} = \varphi'_y - \Phi''_{xy} = o.$$

2. De même,

La condition nécessaire et suffisante pour que

1′) $$\varphi(x, y, z)\, dx + \psi(x, y, z)\, dy + \pi(x, y, z)\, dz$$

soit une différentielle exacte est que

5) $$\varphi\, dx + \psi\, dy$$

possède une primitive H(x, y, z) *rendant* $\pi - H'_z$ *indépendante de* x *et de* y*;* 1′) *est alors la différentielle de*

$$F = H + P_z(\pi - H'_z).$$

Cette condition est certainement vérifiée par toute primitive A de 5), lorsque

$$\varphi'_z \ , \ \psi'_z \ , \ \pi'_x \ \text{et} \ \pi'_y$$

([1]) Naturellement, on peut interchanger x et y, φ et ψ.

existent et sont des fonctions continues verifiant les conditions

$$\varphi'_z = \pi'_x \ , \quad \psi'_z = \pi'_y .$$

3. Mais il est préférable de rapporter aux fonctions φ, ψ et π elles-mêmes la condition d'exactitude.

Pour cela, remarquons que, si 1') est la différentielle de $F(x, y, z)$, φ admet par rapport a x une primitive Φ, derivable par rapport à y et à z et rendant

$$b = \psi - \Phi'_y \quad \text{et} \quad c = \pi - \Phi'_z$$

indépendantes de x; et que ψ admet par rapport à y une primitive Ψ, dérivable par rapport à z et rendant

$$d = \pi - \Psi'_y$$

indépendante de x et de y. On peut prendre $\Phi = \Psi = F$, auquel cas on a $b = c = d = o$.

Réciproquement, s'il est possible de prendre Φ telle que b et c ne dépendent pas de x et de prendre Ψ telle que d ne dépende ni de x ni de y, nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi\, dx + \psi\, dy + \pi\, dz - d\,\Phi &= \left(\psi - \Phi'_y\right) dy + \left(\pi - \Phi'_z\right) dz \\ &= b\, dy + c\, dz \end{aligned}$$

et, en prenant $H = \Psi - \Phi$ pour primitive de b par rapport à y, il viendra

$$c - H'_z = \pi - \Phi'_z - \Psi'_z + \Phi'_z = d.$$

Dans ce cas, $b\, dy + c\, dz$ admet la primitive

$$K = H + P_z \left(c - H'_z\right)$$

et nous avons

$$\varphi\, dx + \psi\, dy + \pi\, dz = d\,(\Phi + K);$$

1') est donc la différentielle de

$$\begin{aligned} F &= \Phi + K \\ 6) \qquad &= \Psi + P_z \left(\pi - \Psi'_z\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

La condition nécessaire et suffisante pour que 1') *soit une diffiérentielle exacte est que* φ *possède par rapport à* x *une primitive* Φ *rendant*

$$\psi - \Phi'_y \quad \text{et} \quad \pi - \Phi'_z$$

indépendantes de x *et que* ψ *possède par rapport à* y *une primitive* Ψ *rendant*

$$\pi - \Psi'_z$$

indépendante de x *et de* y*;* 1') *est alors la différentielle de* 6).

Il est à peine besoin de dire que toute primitive Ψ peut servir dans 6) lorsque les six dérivées

$$\varphi'_y \;,\; \varphi'_z \;,\; \psi'_x \;,\; \psi'_z \;,\; \pi'_x \;,\; \pi'_y$$

existent et sont des fonctions continues vérifiant les conditions

$$\varphi'_y = \psi'_x \quad , \quad \varphi'_z = \pi'_x \quad , \quad \psi'_z = \pi'_y .$$

Tout ceci se géneralise sans aucune difficulté.

J. Vicente Gonçalves

Contribuïção para o estudo da teoria das funções

CAPÍTULO VIII

CONCEITO DE FUNÇÃO

(CONTINUAÇÃO)

89. Oscilação duma função. — Seja $f(\mathsf{x})$ uma função definida no conjunto $\mathbf{A}$. Chamamos *oscilação* de $f(\mathsf{x})$ num dado subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ ao diâmetro do correspondente conjunto $f(\mathbf{X})$, e será representada por $\omega(\mathbf{X})$. Para qualquer elemento x de $\mathbf{A}$ vem, em particular, $\omega(\mathsf{x}) = 0$. A oscilação de $f(\mathsf{x})$ em $\mathbf{X}$ torna-se infinita quando $f(\mathbf{X})$ é ilimitado.

Consideremos agora um subconjunto $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$ (um elemento y, em particular). Quando $f(\mathsf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{Y}$, damos o nome de *oscilação limite de* $f(\mathsf{x})$ *no conjunto* $\mathbf{Y}$ ao diâmetro do respectivo conjunto limite $\lambda(\mathbf{Y})$. A oscilação de $f(\mathsf{x})$ em $\mathbf{Y}$ será designada por $\Omega(\mathbf{Y})$, e diremos que é infinita quando $f(\mathsf{x})$ fôr ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{Y}$. À função $\Omega(\mathsf{y})$, definida em todos os elementos de $[\mathbf{A}]$, excepto naqueles em que a oscilação limite se torna infinita, chamaremos *oscilação elementar limite de* $f(\mathsf{x})$.

É evidente a relação $\omega(\mathbf{X}) \overline{\gtrless} \Omega(\mathbf{X})$, pois também temos $f(\mathbf{X}) \mid < \lambda(\mathbf{X})$.

A oscilação $\Omega(\mathbf{Y})$ tem o mesmo valor que em qualquer conjunto juxtaposto a $\mathbf{Y}$ [*v.* VIII, *p.* 120, *l.* 15]. Mais geralmente:

São as mesmas as oscilações limites em conjuntos juxtapostos de funções juxtapostas entre si.

São de facto os mesmos os conjuntos limites em conjuntos juxtapostos de duas funções juxtapostas entre si [*v.* VIII, *p.* 120, *l.* 17]. Quando nas vizinhanças de um dos conjuntos a correspondente função é ilimitada, o mesmo sucede relativamente à outra [*v.* VIII, *p.* 118, *l.* 5]; as oscilações limites são nesse caso infinitas.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$. *Se*

$$\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2,\ \ldots,\ \mathbf{U}_i,\ \ldots$$

e

$$\mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2,\ \ldots,\ \mathbf{V}_i,\ \ldots$$

são duas sucessões de vizinhanças de $\mathbf{B}$, *sendo as primeiras relativas a* $\mathbf{A}$ *e as segundas a* $[\mathbf{A}]$, *tais que seja* $lim\, \overline{\mathbf{U}_i \mathbf{B}} = lim\, \overline{\mathbf{V}_i \mathbf{B}} = 0$, *temos*

$$lim\, \omega(\mathbf{U}_i) = lim\, \Omega(\mathbf{U}_i) = lim\, \Omega(\mathbf{V}_i) = \Omega(\mathbf{B}).$$

É uma conseqüência da proposição do *v.* VIII, *p.* 122, *l.* 13. Com efeito, quando $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$, os diâmetros dos termos das sucessões (16), (17) e (18) tendem para o diâmetro do respectivo limite $\lambda(\mathbf{B})$ [*v.* V, *p.* 134, *l.* 17]; quando $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{B}$, também são ilimitados os diversos termos das mesmas sucessões, e os respectivos diâmetros são infinitos.

Por conseguinte, a um dado número α superior a $\Omega(\mathbf{B})$ correspondem sempre vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$ para as quais é $\omega(\mathbf{U}) < \alpha$, $\Omega(\mathbf{U}) < \alpha$ e $\Omega(\mathbf{V}) < \alpha$ [1].

A cada sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faça $lim\, \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$ corresponde pois uma ordem a partir da qual temos $\overline{f(\mathbf{x}_i)\, f(\mathbf{x}_{i'})} < \alpha$.

---

[1] É claro que da terceira destas desigualdades se deduzem as duas primeiras quando as vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são definidas por um mesmo número positivo.

Se as funções $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, definidas no mesmo conjunto $\mathbf{A}$, *satisfazem à condição $\overline{f_1(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x})} \lesseqgtr \beta$ para um certo número β e para qualquer elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$, as suas oscilações $\omega_1(\mathbf{X})$ e $\omega_2(\mathbf{X})$ e as suas oscilações limites $\Omega_1(\mathbf{Y})$ e $\Omega_2(\mathbf{Y})$ satisfazem às condições*

$$(23) \qquad |\omega_1(\mathbf{X}) - \omega_2(\mathbf{X})| \lesseqgtr 2\beta$$

e

$$(24) \qquad |\Omega_1(\mathbf{Y}) - \Omega_2(\mathbf{Y})| \lesseqgtr 2\beta \,.$$

Dada a hipótese $\overline{f_1(\mathbf{x})\, f_2(\mathbf{x})} \lesseqgtr \beta$, temos evidentemente $\overline{f_1(\mathbf{X})\, f_2(\mathbf{X})} \lesseqgtr \beta$, donde se deduz a relação (23) [*v.* IV, *p.* 105, (3)]. Quando uma das oscilações $\omega_1(\mathbf{X})$ ou $\omega_2(\mathbf{X})$ se torna infinita, o mesmo acontece à outra [*v.* IV, *p.* 102, *l.* 10].

Tendo em vista a proposição precedente, da relação (23) deduz-se a (24), sendo também as oscilações $\Omega_1(\mathbf{Y})$ e $\Omega_2(\mathbf{Y})$ ou ambas finitas ou ambas infinitas.

Suponhamos que num dado subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$ é $\Omega(\mathbf{B}) < \alpha$. Se a sucessão de subconjuntos de $[\mathbf{A}]$

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

é tal que $\lim \overrightarrow{\mathbf{Y}_i \mathbf{B}} = 0$, temos a partir de certa ordem $\Omega(\mathbf{Y}_i) < \alpha$.

Determinemos uma vizinhança $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ relativa a $[\mathbf{A}]$ na qual seja $\Omega(\mathbf{V}) < \alpha$. A partir da ordem em que é $\mathbf{Y}_i | < \mathbf{V}$ temos $\Omega(\mathbf{Y}_i) < \alpha$.

Se em particular é $\Omega(\mathbf{b}) < \alpha$ num dado elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$ e se a sucessão $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_i, \ldots$ de elementos de $[\mathbf{A}]$ tende para $\mathbf{b}$, vem a partir de certa ordem $\Omega(\mathbf{y}_i) < \alpha$ (1).

(1) Exprimimos esta propriedade dizendo que $\Omega(\mathbf{y})$ é uma função semicontínua superiormente.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto fechado de* $[\mathbf{A}]$. *É fechado o conjunto dos subconjuntos limitados* $\mathbf{Y}$ *de* $\mathbf{B}$ *onde* $\Omega(\mathbf{Y})$ *iguala ou excede um dado número* γ.

Consideremos uma sucessão convergente

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

de subconjuntos de $\mathbf{B}$, de soma limitada, tais que $\Omega(\mathbf{Y}_i) \geqq \gamma$. Seja $\mathbf{Y}$ um limite da mesma sucessão mas contido em $\mathbf{B}$ [*v.* v, *p.* 137, *l.* 18]. Dado um número positivo δ, verifica-se a desigualdade $\Omega(\mathbf{Y}_i) < \Omega(\mathbf{Y}) + \delta$ a partir de certa ordem [*p.* 71, *l.* 15], sendo por conseguinte $\gamma < \Omega(\mathbf{Y}) + \delta$. Temos pois $\gamma \leqq \Omega(\mathbf{Y})$, o que demonstra a proposição.

Notemos que a oscilação $\Omega(\mathbf{Y})$ pode ser infinita [1].

Em particular:

Se $\mathbf{B}$ *é um subconjunto fechado de* $[\mathbf{A}]$, *também é fechado o conjunto dos elementos* $\mathbf{y}$ *de* $\mathbf{B}$ *onde* $\Omega(\mathbf{y})$ *iguala ou excede um dado número* γ.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$ *limitado e fechado. Se* $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *a função* $\Omega(\mathbf{y})$ *atinge um valor máximo em* $\mathbf{B}$; *se* $f(\mathbf{x})$ *é ilimitada nas vizinhanças de* $\mathbf{B}$, *existe um elemento dêste conjunto onde* $\Omega(\mathbf{y})$ *se torna infinita. É fechado o conjunto dos elementos de* $\mathbf{B}$ *onde* $\Omega(\mathbf{y})$ *atinge o seu valor máximo ou onde se torna infinita.*

Suponhamos, primeiro, que $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$. Seja Ω o limite superior da oscilação $\Omega(\mathbf{y})$ nos diversos elementos de $\mathbf{B}$. Em virtude da proposição anterior é fechado o conjunto $\mathbf{Y}_i$ dos elementos $\mathbf{y}_i$ de $\mathbf{B}$ onde temos

$$\Omega(\mathbf{y}_i) \geqq \Omega - \frac{1}{i}.$$

Mas existe e é fechado o produto dos conjuntos $\mathbf{Y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, produto êste que é constituído pelos elementos $\mathbf{y}$ de $\mathbf{B}$, um pelo menos, onde se verifica a igualdade $\Omega(\mathbf{y}) = \Omega$.

---

[1] De idêntica maneira reconhecemos que, se $\mathbf{B}$ é totalmente fechado, o mesmo acontece ao conjunto dos subconjuntos limitados $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{B}$ que fazem $\Omega(\mathbf{Y}) \geqq \gamma$ [*v.* v, *p.* 137, *l.* 30].

É pois fechado superiormente o conjunto dos valores da função $\Omega(\mathbf{y})$ nos diversos elementos de $\mathbf{B}$ (1).

Se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{B}$, existe um elemento dêste conjunto onde a oscilação limite de $f(\mathbf{x})$ se torna infinita [*v.* VIII, *p.* 117, *l.* 32]. O conjunto de todos estes elementos de $\mathbf{B}$ é fechado.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto limitado e fechado do lugar do conjunto* $\mathbf{A}$ *onde se entende definida a função* $f(\mathbf{x})$. *Se esta função é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *a cada número* α *superior ao máximo de* $\Omega(\mathbf{y})$ *em* $\mathbf{B}$ *correspondem vizinhanças* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$, *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $|\mathbf{A}|$, *e um número positivo* ε *tais que seja*

$$\omega(\mathbf{X}) < \alpha \quad \text{e} \quad \Omega(\mathbf{Y}) < \alpha$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *de* $\mathbf{U}$ *e de* $\mathbf{V}$ *cujos diâmetros sejam inferiores a* ε.

Dada a hipótese $\Omega(\mathbf{y}) < \alpha$ em $\mathbf{B}$, a cada elemento $\mathbf{y}$ dêste conjunto corresponde uma vizinhança de $\mathbf{y}$ relativa a $[\mathbf{A}]$ na qual a oscilação limite de $f(\mathbf{x})$ é inferior a α [*p.* 70, *l.* 22]. Mas podemos determinar uma vizinhança $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ em relação a $[\mathbf{A}]$ e um número positivo ε tais que um subconjunto $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{V}$ de diâmetro inferior a ε pertença sempre a uma dessas vizinhanças [*v.* VIII, *p.* 111, *l.* 17]. Qualquer dos mesmos subconjuntos $\mathbf{Y}$ satisfaz pois à desigualdade $\Omega(\mathbf{Y}) < \alpha$.

Verifica-se em particular a desigualdade $\Omega(\mathbf{y}) < \alpha$ *em qualquer elemento* $\mathbf{y}$ *da vizinhança* $\mathbf{V}$.

Consideremos agora a vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ relativa a $\mathbf{A}$ definida pelo mesmo número que define $\mathbf{V}$. Temos $\mathbf{U} \,|\!< \mathbf{V}$, e, para qualquer subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{U}$ de diâmetro inferior ao já determinado número ε, vem $\Omega(\mathbf{X}) < \alpha$ e portanto $\omega(\mathbf{X}) < \alpha$.

A vizinhança $\mathbf{V}$ *divide-se num número finito de partes em cada uma das quais a oscilação limite de* $f(\mathbf{x})$ *é inferior a* α.

Podemos afirmar, nas condições do enunciado, que *existem uma vizinhança* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativa a* $[\mathbf{A}]$ *e um número positivo* ε *tais*

---

(1) Em geral: ***uma função de elementos numéricos e reais, semicontínua superiormente, definida num conjunto limitado e fechado, admite um valor máximo.***

que se mantém inferior a α *a distância entre dois elementos limites quaisquer de* $f(\mathbf{x})$ *tomados em elementos de* $\mathbf{V}$ *cuja distância seja inferior a* ε.

Como corolário evidente deduz-se o seguinte teorema de BAIRE:

Seja $f(\mathbf{x})$ *uma função definida num conjunto limitado* $\mathbf{A}$. *A cada número* α *superior ao máximo de* $\Omega(\mathbf{y})$ *em* $[\mathbf{A}]$ *corresponde um número positivo* ε *tal que seja* $\omega(\mathbf{X}) < \alpha$ *para qualquer subconjunto* $\mathbf{X}$ *de* $\mathbf{A}$ *de diâmetro inferior a* ε [1].

Verifica-se pois a desigualdade $\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \alpha$ para elementos quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}$ tais que seja $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$ [2].

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$ *limitado e fechado. Se* $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *a cada número* α *superior ao máximo de* $\Omega(\mathbf{y})$ *em* $\mathbf{B}$ *correspondem vizinhanças* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$, *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$, *e um número positivo* ε *de maneira que seja*

$$(25) \qquad \overline{f(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X}')} < \alpha \quad \text{e} \quad \overline{\lambda(\mathbf{Y})\, \lambda(\mathbf{Y}')} < \alpha$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ *e* $\mathbf{Y}'$, *os dois primeiros de* $\mathbf{U}$ *e os outros de* $\mathbf{V}$, *tais que se tenha* $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'} < \varepsilon$.

Consideremos, com efeito, a vizinhança $\mathbf{U}$ e o número positivo ε dados pela proposição a *p.* 73, *l.* 7. Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ dois subconjuntos de $\mathbf{U}$ que façam $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$. A cada elemento de qualquer dêstes subconjuntos corresponde um elemento do outro a uma distância do primeiro inferior ε. Logo a cada elemento $f(\mathbf{x})$ de $f(\mathbf{X})$ corresponde um elemento $f(\mathbf{x}')$ de $f(\mathbf{X}')$ tal que $\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \alpha$ e inversamente. Verifica-se pois a relação $\overline{f(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X}')} \overline{<} \alpha$.

Anàlogamente se demonstra a segunda das desigualdades (25).

---

[1] No enunciado do teorema de BAIRE supõe-se que $\mathbf{A}$ é um conjunto fechado.

[2] Também podemos deduzir directamente o teorema de BAIRE do lema exposto no *v.* VIII, *p.* 111, *l.* 1. Suponhamos que é $\Omega(\mathbf{y}) < \alpha$ em $[\mathbf{A}]$. A cada sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}$ corresponde uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer têm por correspondentes para $f(\mathbf{x})$ elementos a uma distância um do outro inferior a α [*p.* 70, *l.* 25]. Existe pois um número positivo ε tal que seja $\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \alpha$ sempre que se tenha $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$.

Resulta por evidência que, se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ são subconjuntos de $\mathbf{B}$, contidos em $\mathbf{A}$, juxtapostos entre si, a distância $\overline{f(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X}')}$ não excede o máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{B}$.

Seja $\mathbf{B}$ um subconjunto de $[\mathbf{A}]$ limitado e fechado. Suponhamos que $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$ e designemos por Ω o valor máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{B}$. A cada número positivo δ, correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$, relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$, e um número positivo ε de maneira que seja

$$|\,\omega(\mathbf{X}) - \omega(\mathbf{X}')\,| < 2\,\Omega + \delta \tag{26}$$

e

$$|\,\Omega(\mathbf{Y}) - \Omega(\mathbf{Y}')\,| < 2\,\Omega + \delta \tag{27}$$

para quaisquer subconjuntos $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$, os dois primeiros de $\mathbf{U}$ e os outros de $\mathbf{V}$, tais que se tenha $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'} < \varepsilon$.

Ponhamos $\alpha = \Omega + \frac{\delta}{3}$. Verificam-se as hipóteses que deram origem à proposição a *p.* 74, *l.* 12, donde, por intermédio da relação

$$|\,\omega(\mathbf{X}) - \omega(\mathbf{X}')\,| \leq 2\,\overline{f(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X}')} \quad [v. \text{ IV}, p. 105, (3)],$$

se deduz a desigualdade (26) para todos os pares de subconjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{U}$ tais que $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$.

De modo análogo se demonstra a desigualdade (27).

Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{K}$, a desconexão do conjunto $\lambda(\mathbf{K})$ não excede o máximo Ω de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{K}$.

Consideremos, com efeito, um número α superior a Ω. Decomponhamos $\mathbf{K}$ num número finito de partes $\mathbf{Y}$ que façam $\Omega(\mathbf{Y}) < \alpha$ [*p.* 73, *l.* 29]. Os conjuntos $\mathbf{Y}$ são ligados entre si [*v.* VI, *p.* 323, *l.* 17]. O mesmo sucede aos respectivos conjuntos limites $\lambda(\mathbf{Y})$ [*v.* VIII, *p.* 122, *l.* 7], que constituem uma decomposição de $\lambda(\mathbf{K})$ em partes [*v.* VIII, *p.* 121, *l.* 26] de diâmetros inferiores a α. A desconexão de $\lambda(\mathbf{K})$ é pois inferior a α [*v.* VI, *p.* 315, *l.* 26], e por conseguinte não excede Ω.

Se $f(\mathbf{x})$ é definida num conjunto $\mathbf{C}$ perfeitamente conexo (1), *a desconexão de $f(\mathbf{C})$ não excede o limite superior de $\Omega(\mathbf{x})$ em $\mathbf{C}$* (2).

Demonstremos que, seja qual fôr o modo de divisão de $f(\mathbf{C})$ em duas partes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$, a distância reduzida $\overline{\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}'}$ não excede o limite superior Ω, que supomos finito, de $\Omega\overline{(\mathbf{x})}$ em $\mathbf{C}$ [*v.* VI, *p.* 314, *l.* 26].

Os maiores subconjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{C}$ que fazem $\mathbf{Z}\,|\,f(\mathbf{X})$ e $\mathbf{Z}'\,|\,f(\mathbf{X}')$ constituem uma divisão de $\mathbf{C}$ em duas partes. Mas existe um elemento $\mathbf{x}'$ de um dêsses subconjuntos, suponhamos de $\mathbf{X}'$, que é limite duma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos do outro. A cada número positivo ∂ corresponde um elemento $\mathbf{x}_i$ da mesma sucessão tal que $\overline{f(\mathbf{x}')\,f(\mathbf{x}_i)} < \Omega + \partial$ [*p.* 70, *l.* 25], sendo por conseguinte $\overline{\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}'} < \Omega + \partial$. Verifica-se pois a condição $\overline{\mathbf{Z}\,\mathbf{Z}'} \overline{<} \Omega$ que desejávamos demonstrar.

Da presente proposição se conclui que, dado um número α superior a Ω e dados dois subconjuntos limitados de $f(\mathbf{C})$, podemos unir estes por uma sucessão dum número finito de subconjuntos de $f(\mathbf{C})$ tais que as distâncias entre conjuntos consecutivos sejam inferiores a α [*v.* VI, *p.* 321, *l.* 10].

Se $f(\mathbf{x})$ é definida num conjunto conexo $\mathbf{C}$ tal que, para qualquer divisão dêste em duas partes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$, exista o produto $[\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$, a desconexão de $f(\mathbf{C})$ não excede o limite superior de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{C}]$.

Seja $j(\mathbf{x})$ uma função juxtaposta a $f(\mathbf{x})$ que resulte de prolongarmos $f(\mathbf{x})$ para o conjunto $[\mathbf{C}] - \mathbf{C}$. Por ser $f(\mathbf{C}) \,\|\, j([\mathbf{C}])$ [*v.* VIII, *p.* 117, *l.* 7], a desconexão de $f(\mathbf{C})$ é a mesma de $j([\mathbf{C}])$ [*v.* VI, *p.* 318, *l.* 5], e esta, em virtude da proposição precedente, não excede o limite superior de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{C}]$.

---

(1) Dizemos que o conjunto $\mathbf{C}$ é *perfeitamente conexo* quando, seja qual fôr a maneira de o dividirmos em duas partes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$, o produto $\mathbf{C} \times [\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$ seja provido de um elemento pelo menos, isto é, quando exista um elemento duma das partes que seja limite de elementos da outra. Pertencem à classe dos conjuntos perfeitamente conexos os contínuos limitados, os domínios elementares [*v.* VI, *p.* 499, *l.* 17] e qualquer conjunto no qual dois elementos arbitrários se unam sempre por meio dum contínuo limitado nêle contido.

(2) Quando o limite superior de $\Omega(\mathbf{x})$ é infinito, a desconexão de $f(\mathbf{C})$ pode tornar-se também infinita.

Em particular:

Se uma função limitada $f(\mathbf{x})$ é definida num conjunto $\mathbf{C}$ limitado e conexo, a desconexão de $f(\mathbf{C})$ não excede o máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{C}]$.

Tal proposição também pode deduzir-se da enunciada a *p.* 75, *l.* 21, pondo $\mathbf{A} \mid \mathbf{C}$ e $\mathbf{K} \mid [\mathbf{C}]$. Como é então $\lambda(\mathbf{K}) \mid \lambda(\mathbf{C}) \mid [f(\mathbf{C})]$, concluímos que a desconexão de $[f(\mathbf{C})]$, ou seja a de $f(\mathbf{C})$, não excede o valor máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{C}]$.

A mesma proposição ainda pode justificar-se recorrendo ao já demonstrado teorema de BAIRE, e admite o seguinte caso particular:

Se a função limitada $f(\mathbf{x})$ é definida num contínuo limitado $\mathbf{K}$, a desconexão de $f(\mathbf{K})$ não excede o máximo de $\Omega(\mathbf{x})$ em $\mathbf{K}$.

Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{K}$, a cada número α superior ao máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{K}$ corresponde um número positivo ε tal que, para quaisquer vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{K}$, relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$, que distem de $\mathbf{K}$ menos de ε, as desconexões dos conjuntos $f(\mathbf{U})$. $\lambda(\mathbf{U})$ e $\lambda(\mathbf{V})$ sejam inferiores a α.

Consideremos a infinidade das vizinhanças $\mathbf{U}$ de $\mathbf{K}$ relativas a $\mathbf{A}$. Em virtude da proposição do *v.* VIII, *p.* 122, *l.* 13, a cada sucessão (14) de vizinhanças $\mathbf{U}$ que tenda para $\mathbf{K}$ corresponde uma ordem a partir da qual as desconexões dos termos $f(\mathbf{U}_i)$ da correspondente sucessão (16) são inferiores à desconexão de $\lambda(\mathbf{K})$ [*v.* VI, *p.* 319, *l.* 13], e portanto inferiores a α. Logo é possível determinar um número positivo ε tal que, para qualquer dos conjuntos $\mathbf{U}$ que diste de $\mathbf{K}$ menos de ε, a desconexão de $f(\mathbf{U})$ seja inferior a α [*v.* VIII, *p.* 114, *l.* 1].

Da mesma maneira se demonstram as partes da proposição relativas aos conjuntos $\lambda(\mathbf{U})$ e $\lambda(\mathbf{V})$.

90. Noção de continuïdade. — Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida no conjunto $\mathbf{A}$ e consideremos um elemento $\mathbf{y}$ de $[\mathbf{A}]$. Dizemos que $f(\mathbf{x})$ é *contínua* no elemento $\mathbf{y}$ quando a respectiva oscilação limite $\Omega(\mathbf{y})$ se reduz a zero. A função é nesse caso limitada numa vizinhança de $\mathbf{y}$, e o conjunto limite $\lambda(\mathbf{y})$ compõe-se de elementos juxtapostos uns aos outros entre os quais figura $f(\mathbf{y})$ quando $\mathbf{y}$ pertence a $\mathbf{A}$ [1].

A função é contínua em todos os elementos juxtapostos a $\mathbf{y}$ uma vez que seja contínua neste elemento [*v.* VIII, *p.* 295, *l.* 8].

Elementos da função correspondentes a elementos de continuïdade juxtapostos entre si são também juxtapostos uns aos outros.

Uma função não contínua num elemento chama-se *descontínua* no mesmo elemento [2].

Dizemos que $f(\mathbf{x})$ é contínua num dado subconjunto de $[\mathbf{A}]$ quando é contínua em todos os elementos dêsse subconjunto. Quando falarmos em função contínua, sem mais referência, entenderemos que a mesma é contínua no conjunto $\mathbf{A}$ onde a supomos definida.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$, limitado e fechado, os conjuntos $\lambda(\mathbf{X})$ e $f(\mathbf{X})$ juxtapõem-se elemento a elemento [*v.* VIII, *p.* 121, *l.* 18].

Dada a continuïdade de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{y}$, é convergente qualquer sucessão $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2) \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$ que resulte duma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$ [*v.* IV, *p.* 18, *l.* 8], e reciprocamente. Podemos então escrever $\lim f(\mathbf{x}_i) \parallel \lambda(\mathbf{y})$, e, quando $f(\mathbf{x})$ é definida em $\mathbf{y}$, $\lim f(\mathbf{x}_i) \parallel f(\mathbf{y})$, seja qual fôr a suces-

---

(1) Na definição habitual de continuïdade supõe-se que a função é definida no elemento $\mathbf{y}$ e que êste é elemento limite de $\mathbf{A}$.

(2) Um caso simples de descontinuïdade de $f(\mathbf{x})$ num elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ é o que se apresenta quando a função se torna contínua pela supressão de $\mathbf{x}$ do conjunto $\mathbf{A}$ (para simplificar a exposição desta nota admitimos que dois elementos distintos de $\mathbf{A}$ nunca são juxtapostos um ao outro). A descontinuïdade chama-se então *artificial*.

Se a função só admite em $[\mathbf{A}]$ descontinuïdades que sejam artificiais, o conjunto dos elementos (necessàriamente de $\mathbf{A}$) onde tal facto se verifica é finito ou numerável, como vamos ver.

Consideremos primeiro o caso de $\mathbf{A}$ ser limitado. Basta demonstrar que é finito o conjunto dos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ onde $\Omega(\mathbf{x})$ excede um dado número positivo ε. Se tal não acontecesse, o conjunto dêsses elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ admitiria um elemento limite $\mathbf{x}'$, no qual seria $\Omega(\mathbf{x}') \geqq \varepsilon$ mesmo depois de suprimirmos o elemento $\mathbf{x}'$ ao conjunto $\mathbf{A}$ [*p* 71, *l.* 22]. A descontinuïdade em $\mathbf{x}'$ não seria pois artificial.

Se $\mathbf{A}$ é ilimitado, consideramos uma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito e notamos que os elementos de $\mathbf{A}$ onde $f(\mathbf{x})$ se torna descontínua, situados em cada um dêsses esferóides, são em número finito ou formam uma infinidade numerável.

são $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$. Qualquer destas condições exprime a continuïdade de $f(\mathbf{x})$ no elemento $\mathbf{y}$.

Se $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{y}$, para que se dê a continuïdade neste elemento é suficiente que exista uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ que faça $lim\, \overline{f(\mathbf{x}_i)\, \lambda(\mathbf{y})} = 0$, pois em tal caso $\lambda(\mathbf{y})$ reduz se a elementos juxtapostos entre si.

Para que $f(\mathbf{x})$ seja contínua no conjunto $[\mathbf{A}]$ é necessário e suficiente que a qualquer sucessão convergente $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ corresponda uma sucessão também convergente $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$ de elementos de $f(\mathbf{A})$.

Consideremos uma classe de sucessões de elementos de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots, \mathbf{x}'_i, \ldots$$

que tendam para um mesmo elemento $\mathbf{y}$. *Suponhamos que, dada uma sucessão qualquer de elementos de* $\mathbf{A}$ *que tenda para* $\mathbf{y}$, *dela podemos sempre extrair uma sucessão da classe. Para que* $f(\mathbf{x})$, *definida em* $\mathbf{A}$, *seja contínua em* $\mathbf{y}$ *é suficiente que tôdas as sucessões*

$$f(\mathbf{x}'_1), f(\mathbf{x}'_2), \ldots, f(\mathbf{x}'_i), \ldots$$

correspondentes às diversas sucessões da classe tendam para limites juxtapostos entre si [*v.* VIII, *p.* 119, *l.* 9] (¹).

Seja $f(\mathbf{x})$ *contínua em* $\mathbf{y}$. *Consideremos um elemento* $\mathbf{c}$ *do espaçóide a que pertence* $\overline{f(\mathbf{A})}$. *Dados dois números que compreendam a distância* $\overline{\lambda(\mathbf{y})\,\mathbf{c}}$, *existe uma vizinhança de* $\mathbf{y}$ *relativa a* $\mathbf{A}$ *tal que em todos os seus elementos* $\mathbf{x}$ *a distância* $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{c}}$ *se encontra entre os mesmos números.*

Efectivamento, se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ é uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda $\mathbf{y}$, temos $lim\, \overline{f(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{c}} = \overline{\lambda(\mathbf{y})\,\mathbf{c}}$, e por isso existe uma ordem a partir da qual a distância $\overline{f(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{c}}$ se encontra entre os números dados. Podemos pois determinar uma vizi-

---

(¹) Se por exemplo A é constituído por números ou por pontos, para que $f(x)$, definida em A, seja contínua num ponto x' dêste conjunto é suficiente que tendam para $f(x')$ tôdas as sucessões de elementos de $f(x)$ correspondentes às sucessões monótonas de pontos de A que tendam para x'.

nhança de **y** em relação a **A** tal que em todos os seus elementos **x** a distância $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{c}}$ se encontre entre os mesmos números [*v.* VIII, *p.* 111, *l.* 12] (1).

Se $f(\mathbf{x})$ *é contínua no elemento* **y**, *o mesmo sucede a qualquer função juxtaposta à primeira* [*p.* 69, *l.* 24].

Logo, quando $f(\mathbf{x})$ é contínua num elemento **y** de $[\mathbf{A}]$ que não pertença a **A**, a definição de $f(\mathbf{x})$ nesse elemento conforme dissemos a *p.* 120, *nota*, mantém a continuïdade em **y**. Tal *prolongamento* de $f(\mathbf{x})$ para um ou mais elementos do conjunto $[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$ não introduz pois descontinuïdades.

Se $f(\mathbf{x})$, definida em **A** mas não em todos os elementos de $[\mathbf{A}]$, é contínua no conjunto $[\mathbf{A}]$, qualquer função $j(\mathbf{x})$ que resulte de *prolongarmos* a primeira para o conjunto $[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$ é ainda contínua. Logo a uma função definida em **A** e contínua em $[\mathbf{A}]$ corresponde sempre uma função definida e contínua em $[\mathbf{A}]$ e que em **A** coincide com $f(\mathbf{x})$.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $[\mathbf{A}]$, uma função juxtaposta à primeira e definida em $[\mathbf{A}]$ é qualquer função que resulte de atribuirmos um só elemento à função limite $\lambda(\mathbf{y})$ em cada elemento de $[\mathbf{A}]$.

Se dois elementos distintos de $[f(\mathbf{A})]$ nunca são juxtapostos entre si, existe uma única função definida em $[\mathbf{A}]$ e juxtaposta a $f(\mathbf{x})$: é a função $\lambda(\mathbf{y})$ que se obtém *prolongando* $f(\mathbf{x})$ para o conjunto $[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$ (2).

---

(1) Para dar uma aplicação simples admitamos que $f(\mathbf{A})$ é numérico e que $f(\mathbf{x})$ é diferente de zero e contínua num elemento $\mathbf{x}'$ de **A**. A um dado número positivo ε inferior à distância de $f(\mathbf{x}')$ ao ponto zero, isto é, ao módulo de $f(\mathbf{x}')$, corresponde um esferóide de centro $\mathbf{x}'$ tal que em todos os seus elementos **x** se mantém a mesma relação $\varepsilon < |f(\mathbf{x})|$.

(2) Como exemplos de funções contínuas recordemos os seguintes casos:
A distância $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}$ entre dois elementos dum dado espaçóide **P** é uma função contínua do elemento $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ definida no espaçóide composto $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ [*v.* IV, *p.* 20, *l.* 16]. As projecções dum elemento composto são funções contínuas dêsse elemento [*v.* IV, *p.* 38, *l.* 12]. A distância reduzida entre um elemento e um conjunto é uma função contínua dêsse elemento [*v.* IV, *p.* 93, *l.* 20]. O diâmetro dum conjunto é uma função contínua do mesmo conjunto [*v.* V, *p.* 134, *l.* 23]. A distância reduzida $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$, o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ e a distância $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ entre conjuntos limitados são funções contínuas do elemento composto $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ [*v.* V, *p.* 135, *l.* 14 e 17]. As projecções dum conjunto limitado de ordem *n* são funções contínuas do mesmo conjunto [*v.* V, *p.* 136, *l.* 17]. As separações máxima e mínima de *n* conjuntos

Seja $\mathbf{y}$ *um elemento de continuïdade da função* $f(\mathbf{x})$. *Se*

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

e

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

são sucessões de subconjuntos respectivamente de $\mathbf{A}$ *e de* $[\mathbf{A}]$ *tais que* $lim\,\overline{\mathbf{X}_i\,\mathbf{y}} = lim\,\overline{\mathbf{Y}_i\,\mathbf{y}} = 0$, *temos* [*v.* VIII, *p.* 123, *l.* 29].

$$lim\,\overline{f(\mathbf{X}_i)\,\lambda(\mathbf{y})} = lim\,\overline{\lambda(\mathbf{Y}_i)\,\lambda(\mathbf{y})} = 0$$

e

$$lim\,\omega(\mathbf{X}_i) = lim\,\Omega(\mathbf{Y}_i) = 0\,.$$

Por conseguinte, se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{y}$, a cada número positivo ∂ correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{y}$ relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$ tais que seja $\omega(\mathbf{U}) < \partial$ e $\Omega(\mathbf{V}) < \partial$. Recìprocamente, uma qualquer destas condições basta para a continuïdade de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{y}$, pois em virtude dela é convergente qualquer sucessão de elementos de $f(\mathbf{x})$ que resulte duma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$.

Se $f(\mathbf{x})$ *é contínua em* $\mathbf{y}$, *a cada número positivo* ∂ *corresponde um número positivo* ε *de maneira que se verifiquem as desigualdades*

$$\overline{f(\mathbf{X})\,\lambda(\mathbf{y})} < \partial \quad , \quad \overline{f(\mathbf{X})\,f(\mathbf{X}')} < \partial$$

e

$$\overline{\lambda(\mathbf{Y})\,\lambda(\mathbf{y})} < \partial \quad , \quad \overline{\lambda(\mathbf{Y})\,\lambda(\mathbf{Y}')} < \partial$$

para quaisquer subconjuntos $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}'$, *os dois primeiros de* $\mathbf{A}$ *e os outros de* $[\mathbf{A}]$, *que distem de* $\mathbf{y}$ *menos de* ε [*v.* VIII, *p.* 124, *l.* 20].

Temos em particular

$$\overline{f(\mathbf{x})\,\lambda(\mathbf{y})} < \partial \quad \text{e} \quad \overline{f(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')} < \partial$$

sempre que seja $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{y}} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{x}'\,\mathbf{y}} < \varepsilon$.

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ são funções contínuas do elemento composto $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ [*v.* VI, *p.* 300, *l.* 9, e *p.* 302, *l.* 11]. A desconexão dum conjunto é uma função contínua do mesmo conjunto [*v.* VI, *p.* 319, *l.* 3].

Qualquer destas condições também é suficiente de continuïdade em $\mathbf{y}$, porque, dada uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$, da primeira se conclui que a sucessão dos elementos correspondentes de $f(\mathbf{x})$ tende para $\lambda(\mathbf{y})$, e da segunda resulta também a convergência da mesma sucessão.

Seja $\mathbf{y}$ *um elemento de continuïdade de* $f(\mathbf{x})$. *Se a função* $\varphi(\mathbf{z})$, *definida no conjunto* $f(\mathbf{A})$, *é contínua no conjunto* $\lambda(\mathbf{y})$ *relativo a* $f(\mathbf{x})$, *a função de função* $\varphi\big(f(\mathbf{x})\big)$ *é contínua em* $\mathbf{y}$.

Efectivamente, dada uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$, temos $\lim f(\mathbf{x}_i) \parallel \lambda(\mathbf{y})$, e por isso existe $\lim \varphi\big(f(\mathbf{x}_i)\big)$.

Se as funções $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$, *definidas no mesmo conjunto* $\mathbf{A}$, *são contínuas no elemento* $\mathbf{y}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *a função composta* [*v.* VIII, *p.* 115, *l* 24]

$$(28) \qquad \big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big)$$

também é contínua em $\mathbf{y}$ *e reciprocamente.*

Na verdade, se, qualquer que seja a sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$, as correspondentes sucessões dos elementos das funções dadas são convergentes, o mesmo sucede à sucessão dos elementos da função composta e reciprocamente [*v.* IV *p.* 37, *l.* 29].

Seja $\varphi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ *uma função definida no conjunto dos elementos da função composta* (28). *Se as funções componentes são contínuas em* $\mathbf{y}$ *e se a função dada* φ *é contínua num elemento limite da* (28) *em* $\mathbf{y}$, *a função*

$$\varphi\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big)$$

é contínua no mesmo elemento $\mathbf{y}$.

Trata-se efectivamente duma função φ contínua no conjunto $\lambda(\mathbf{y})$ relativo a uma função (28) contínua em $\mathbf{y}$.

Seja $\mathbf{X}$ *um subconjunto limitado de* $\mathbf{A}$. *Se* $f(\mathbf{x})$ *é contínua em* $[\mathbf{X}]$, *temos* $\lambda(\mathbf{X}) \mid [f(\mathbf{X})]$.

Com efeito, sendo $\mathbf{X}$ limitado e tratando-se duma função contínua em $[\mathbf{X}]$, o conjunto $\lambda(\mathbf{X})$ não se altera quando se considera a função definida exclusivamente sôbre $\mathbf{X}$, pois $\lambda(\mathbf{X})$ é a soma dos limites $\lambda(\mathbf{y})$ relativos aos diversos elementos $\mathbf{y}$ de $[\mathbf{X}]$. Logo vem $\lambda(\mathbf{X}) \,|\, [f(\mathbf{X})]$ [*v.* VIII, *p.* 120, *l.* 10].

São juxtapostos os conjuntos dos elementos duma função contínua em conjuntos juxtapostos.

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ subconjuntos de $\mathbf{A}$ juxtapostos entre si. Se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{X}$ e em $\mathbf{X}'$, cada elemento dum qualquer dos conjuntos $f(\mathbf{X})$ e $f(\mathbf{X}')$ é limite duma sucessão de elementos do outro, e por isso também temos $f(\mathbf{X}) \,\|\, f(\mathbf{X}')$.

Numa função contínua a conjuntos juxtapostos correspondem pois conjuntos juxtapostos (¹).

Se a função $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, é contínua em $[\mathbf{A}]$, a conjuntos limitados e ligados correspondem para a função conjuntos ligados.

Em geral, se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ são subconjuntos de $\mathbf{A}$ cujos lugares possuam um elemento comum e se $f(\mathbf{x})$ é contínua nesse elemento, os conjuntos $f(\mathbf{X})$ e $f(\mathbf{X}')$ são ligados entre si.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num subconjunto $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, existe uma vizinhança de $\mathbf{Y}$ relativa a $\mathbf{A}$ onde $f(\mathbf{x})$ é limitada.

Basta notar que a função é limitada numa vizinhança de cada elemento de $\mathbf{Y}$ [*v.* VIII, *p.* 117, *l.* 25].

Em particular:

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no lugar $[\mathbf{X}]$ dum subconjunto limitado $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$, o conjunto $f(\mathbf{X})$ é limitado.

(¹) Por êste motivo são juxtapostos por exemplo: correspondentes projecções de conjuntos juxtapostos de ordem n; o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto de segunda ordem e o conjunto que se obtém da mesma maneira a partir dum conjunto juxtaposto ao primeiro; o conjunto das distâncias entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e cada elemento de $\mathbf{B}$ e o que se obtém da mesma maneira a partir de conjuntos juxtapostos aos primeiros; o conjunto das distâncias entre os elementos de $\mathbf{A}$ e o das distâncias entre os elementos dum conjunto juxtaposto ao primeiro.

Note-se que estas afirmações já tinham sido demonstradas directamente no *v.* IV, [*p.* 40, *l.* 23; *p.* 43, *l.* 5; *p.* 44, *l.* 25; *p.* 45, *l.* 21].

Logo, se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $[\mathbf{A}]$, a conjuntos limitados correspondem para a função conjuntos limitados.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no conjunto fechado $\mathbf{A}$, o conjunto de todos os elementos de segunda ordem $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é igualmente fechado.

Considerando, com efeito, uma sucessão convergente

$$(29) \qquad (\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)), (\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)), \ldots, (\mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i)), \ldots$$

de elementos dêsse conjunto de segunda ordem, são também convergentes a sucessão das primeiras coordenadas e a das segundas dos mesmos elementos. A primeira tende para um elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, e, em virtude da continuïdade, a segunda tende para $f(\mathbf{a})$. Logo a sucessão (29) tende para $(\mathbf{a}, f\,\mathbf{a})$ [*v.* IV, *p.* 38, *l.* 8], que é um elemento do referido conjunto de segunda ordem.

Deduz-se como corolário a proposição seguinte:

É fechado o conjunto dos elementos duma função contínua num conjunto $\mathbf{A}$ limitado e fechado.

O conjunto $f(\mathbf{A})$ é limitado. O conjunto dos elementos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é pois limitado e fechado, e por isso $f(\mathbf{A})$ também é fechado [*v.* IV, *p.* 41, *l.* 10].

Também reconhecemos que $f(\mathbf{A})$ é fechado notando que os conjuntos $f(\mathbf{A})$ e $\lambda(\mathbf{A})$ juxtapõem-se elemento a elemento quando $\mathbf{A}$ é limitado e fechado [*p.* 78, *l.* 14].

Dado o caso de $f(\mathbf{A})$ ser numérico e real, a função atinge pois um valor máximo e um valor mínimo quando é contínua no conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$ [1].

---

(1) Mais uma vez reconhecemos as seguintes proposições [*v.* IV, *p.* 47, *l.* 29]:

É limitado e fechado o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto limitado e fechado de segunda ordem (supomos, é claro, que as projecções dêsse conjunto fazem parte dum mesmo espaçóide).

É limitado e fechado o conjunto das distâncias entre cada elemento de A e cada elemento de B quando estes conjuntos são limitados e fechados, pois tal distância é uma função contínua no conjunto limitado e fechado (A, B) [*v.* IV, *p.* 42, *l.* 3]. A distância reduzida $\mathsf{A}\,\underline{\mathsf{B}}$ é nesse caso a distância entre um elemento de A e um elemento de B convenientemente determinados. O diâmetro dum conjunto limitado e fechado é a distância entre dois determinados dos seus elementos.

É limitado e fechado o conjunto das distâncias reduzidas $\mathsf{a}\,\underline{\mathsf{B}}$ entre cada

É condição suficiente de continuïdade em $[\mathbf{A}]$ *duma função* $f(\mathbf{x})$ *limitada em* $\mathbf{A}$ *que o conjunto* $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ *seja fechado* [1] *(supõe-se que a elementos juxtapostos de* $\mathbf{A}$ *correspondem elementos juxtapostos de* $f(\mathbf{A})$*).*

Basta demonstrar que dada uma sucessão convergente $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ a correspondente sucessão

$$(30) \qquad f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \cdots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$$

também é convergente [*p.* 79, *l.* 8]. Consideremos um limite $\mathbf{y}$ da primeira sucessão, e dois limites $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}'$ da segunda. Os elementos de segunda ordem $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ e $(\mathbf{y}, \mathbf{z}')$ são limites da sucessão

$$(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)), (\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)), \ldots, \mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i)), \ldots,$$

e, como o conjunto dos elementos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é fechado, existem elementos $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ e $(\mathbf{a}', f(\mathbf{a}'))$ juxtapostos a $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ e $(\mathbf{y}, \mathbf{z}')$. Temos pois $\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}'$ e, por hipótese, $f(\mathbf{a}) \parallel f(\mathbf{a}')$. Logo $\mathbf{z} \parallel \mathbf{z}'$. Todos os limites da sucessão limitada (30) são juxtapostos entre si, razão porque a mesma é convergente [*v.* IV, *p.* 18, *l.* 8].

Podemos afirmar, por conseguinte, que:

É condição necessária e suficiente de continuïdade duma função limitada $f(\mathbf{x})$ *num conjunto fechado que o correspondente conjunto* $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ *seja fechado (supõe-se que a elementos juxtapostos de* $\mathbf{A}$ *correspondem elementos juxtapostos de* $f(\mathbf{A})$*).*

Como corolário evidente vem a seguinte proposição, também fácil de justificar directamente:

A função inversa duma função contínua num conjunto limitado e fechado, quando existe, é contínua (supomos que elementos juxtapostos de $f(\mathbf{A})$ *são correspondentes a elementos juxtapostos de* $\mathbf{A}$*).*

---

elemento $\mathbf{a}$ dum conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$ e um conjunto $\mathbf{B}$. Logo o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ representa a distância reduzida entre um determinado elemento de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$.

[1] Em tais condições o conjunto $\mathbf{A}$ é necessàriamente fechado. Em geral: *É fechada uma projecção dum conjunto fechado de ordem n sempre que a projecção complementar seja limitada.*

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua e se $\mathbf{A}$ e $f(\mathbf{A})$ são totalmente fechados, temos $[f(\mathbf{X})] \mid f([\mathbf{X}])$ para qualquer subconjunto limitado $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ (supomos que elementos juxtapostos de $f(\mathbf{A})$ são correspondentes a elementos juxtapostos de $\mathbf{A}$).

Por outras palavras, se $\mathbf{Z}$ é correspondente a $\mathbf{X}$, também $[\mathbf{Z}]$ é correspondente a $[\mathbf{X}]$. Na verdade, os conjuntos $f(\mathbf{X})$ e $f([\mathbf{X}])$ são juxtapostos [*p* 83, *l.* 11], e como $f([\mathbf{X}])$ é totalmente fechado, temos $[f(\mathbf{X})] \mid f([\mathbf{X}])$.

As operações representadas pelos símbolos $[\;]$ e f são permutáveis dadas as condições do enunciado [1].

Seia $f(\mathbf{x})$ uma função definida e contínua num conjunto fechado $\mathbf{A}$. Dado um subconjunto $\mathbf{Z}$ de $f(\mathbf{A})$, façamos-lhe corresponder o maior subconjunto $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{Z} \parallel f(\mathbf{X}')$ [2]. *Se*

$$(31) \qquad \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_i, \ldots$$

é uma sucessão que tenda para $\mathbf{Z}$ de vizinhanças de $\mathbf{Z}$ relativas a $f(\mathbf{A})$, a correspondente sucessão

$$(32) \qquad \mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \ldots, \mathbf{X}'_i, \ldots$$

tende para $\mathbf{X}'$.

É claro que $\mathbf{X}'$ é um subconjunto de qualquer dos conjuntos $\mathbf{X}'_i$. Basta pois demonstrar que o limite integral $\ddot{\mathbf{X}}'$ da

---

(1) Como aplicação deduzimos as seguintes proposições, já directamente justificadas no *v.* IV, *p.* 40, *n.º* 16 *e segs.*, e resumidamente enunciadas no mesmo *v.* IV, *p.* 47, *l.* 31:

O lugar duma projecção dum conjunto limitado de ordem n é a correspondente projecção do lugar do mesmo conjunto. O lugar do conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto limitado de segunda ordem é o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento do lugar do mesmo conjunto. Em particular, o lugar do conjunto das distâncias entre cada elemento dum conjunto limitado $\mathbf{A}$ e cada elemento dum conjunto limitado $\mathbf{B}$ é o conjunto que se obtém da mesma maneira a partir de $[\mathbf{A}]$ e de $[\mathbf{B}]$. O lugar do conjunto das distâncias entre os elementos de $\mathbf{A}$ é o conjunto das distâncias entre os elementos de $[\mathbf{A}]$. [veja-se *v.* IV, *p.* 48, *l.* 3].

(2) O conjunto $\mathbf{X}'$ é constituído pelos elementos de $\mathbf{A}$ que têm por correspondentes para $f(\mathbf{x})$ elementos de $[\mathbf{Z}]$.

A subconjuntos juxtapostos de $f(\mathbf{A})$ correspondem assim para $\mathbf{A}$ subconjuntos também juxtapostos.

sucessão (32) pertence a $[\mathsf{X}']$ [*v.* v, *p.* 143, *l.* 28]. Cada elemento de $\ddot{\mathsf{X}}'$ juxtapõe-se a um elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e é limite duma sucessão $\mathsf{x}_r, \mathsf{x}_s, \cdots, \mathsf{x}_u, \ldots$ extraída duma subsucessão da (32). Por continuïdade vem $lim\, f(\mathsf{x}_u) \| f(\mathbf{a})$, e, como a sucessão (31) tende para $\mathbf{Z}$, o elemento $f(\mathbf{a})$ pertence a $[\mathbf{Z}]$. Logo $\mathbf{a}$ pertence a X'.

Qualquer elemento de $\ddot{\mathsf{X}}'$ juxtapõe-se a um elemento de X', e por isso $\ddot{\mathsf{X}}'$ pertence a $[\mathsf{X}']$.

Seja $f(\mathsf{x})$ uma função definida e contínua num conjunto fechado $\mathbf{A}$. Dado um subconjunto $\mathbf{Z}$ de $f(\mathbf{A})$, é fechado o maior subconjunto X' de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{Z} \| f(\mathsf{X}')$.

É fechado, com efeito, o conjunto $\ddot{\mathsf{X}}'$ que figura na demonstração precedente, e acabámos de ver que $\ddot{\mathsf{X}}'$ e X' se juxtapõem elemento a elemento.

Por conseguinte, a um subconjunto fechado $\mathbf{Z}$ de $f(\mathbf{A})$ no qual figurem todos os elementos de $f(\mathbf{A})$ que se juxtapõem a elementos de $\mathbf{Z}$ (como sucede por exemplo quando $\mathbf{Z}$ é totalmente fechado) corresponde sempre um conjunto fechado X tal que $\mathbf{Z} \,|\, f(\mathsf{X})$.

Dado em particular um elemento $\mathbf{z}$ de $f(\mathbf{A})$, é fechado o conjunto de todos os elementos de $\mathbf{A}$ que têm por correspondentes para $f(\mathsf{x})$ elementos juxtapostos a $\mathbf{z}$.

Seja $f(\mathsf{x})$ uma função definida e contínua num conjunto fechado $\mathbf{A}$. Dado um subconjunto $\mathbf{Z}$ de $f(\mathbf{A})$, designemos por X' o maior subconjunto de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{Z} \| f(\mathsf{X}')$. Se o limite integral da sucessão

$$f(\mathsf{X}_1), f(\mathsf{X}_2), \ldots, f(\mathsf{X}_i), \ldots$$

pertence a $[\mathbf{Z}]$, também o limite integral da sucessão

$$\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_i, \ldots$$

pertence a $[\mathsf{X}']$.

Tal qual como se procedeu há pouco, demonstra-se que um elemento qualquer do limite integral $\ddot{\mathsf{X}}$ da sucessão precedente juxtapõe-se a um elemento de X'.

Quando a soma dos termos da mesma sucessão é limitada, podemos escrever $lim\, \overrightarrow{\mathsf{X}_i\mathsf{X}'} = 0$.

Se em particular a sucessão limitada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ é tal que *lim* $f(\mathbf{x}_i)$ $\mathbf{Z} = 0$, também temos *lim* $\underline{\mathbf{x}_i\ \mathbf{X}} = 0$ [1].

Se a função $f(\mathbf{x})$, *definida em* $\mathbf{A}$, *é contínua no subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *limitado e fechado, a cada número positivo* δ *correspondem vizinhanças* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$ *e um número positivo* ε *tais que seja*

$$\omega(\mathbf{X}) < \delta \quad \text{e} \quad \Omega(\mathbf{Y}) < \delta$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *de* $\mathbf{U}$ *e de* $\mathbf{V}$ *cujos diâmetros sejam inferiores a* ε [*p.* 73, *l.* 7, e *p.* 83. *l.* 21].

Podemos pois dividir a vizinhança $\mathbf{V}$ num número finito de partes em cada uma das quais a oscilação limite de $f(\mathbf{x})$ seja inferior a δ.

As desigualdades

$$\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \delta \quad \text{e} \quad \overline{\lambda(\mathbf{y})\, \lambda(\mathbf{y}')} < \delta$$

verificam-se sempre que os elementos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{U}$ e os elementos $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'$ de $\mathbf{V}$ satisfaçam às condições $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}'} < \varepsilon$.

Supondo que é $\mathbf{B} \mid [\mathbf{A}]$, vem a proposição seguinte:

Se $f(\mathbf{x})$, *definida no conjunto limitado* $\mathbf{A}$, *é contínua em* $[\mathbf{A}]$, *a cada número positivo* δ *corresponde um número positivo* ε *tal que seja* $\omega(\mathbf{X}) < \delta$ *para qualquer subconjunto* $\mathbf{X}$ *de* $\mathbf{A}$ *de diâmetro inferior a* ε [Cantor].

Temos pois $\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \delta$ sempre que seja $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$ [2].

---

[1] Como corolário encontramos mais uma vez a proposição que diz:

A função inversa duma função contínua num conjunto limitado e fechado, quando existe, é contínua (supomos que elementos justapostos de $f(\mathbf{A})$ *só podem resultar de elementos justapostos de* $\mathbf{A}$*).*

Efectivamente, considerando uma sucessão $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$ que tenda para um dado elemento $f(\mathbf{a})$ de $f(\mathbf{A})$, a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i \ldots$ tende para $\mathbf{a}$.

[2] Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num conjunto $\mathbf{A}$ limitado e fechado, a possibilidade da divisão de $\mathbf{A}$ num número finito de partes $\mathbf{X}$ em cada uma das quais seja $\omega(\mathbf{X}) < \varepsilon$ não traduz o teorema de Cantor nem sequer é característica das funções contínuas. Qualquer função limitada $f(\mathbf{x})$ definida num conjunto limitado $\mathbf{A}$ satisfaz a tal condição. Efectivamente, uma divisão do conjunto de todos os elementos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, a cada número positivo δ correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$, relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$, e um número positivo ε de maneira que seja

$$\overline{f(\mathbf{X})\,f(\mathbf{X}')} < \delta \quad \text{e} \quad \overline{\lambda(\mathbf{Y})\,\lambda(\mathbf{Y}')} < \delta$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$, os dois primeiros de $\mathbf{U}$ e os outros de $\mathbf{V}$, tais que se tenha $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'} < \varepsilon$ [*p.* 74, *l.* 12].

Como corolário afirmamos que:

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconiunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, as funções $f(\mathbf{X})$ e $\lambda(\mathbf{Y})$ sendo a primeira definida nos subconjuntos limitados $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ e a segunda nos subconiuntos limitados $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$, são contínuas no coniunto $\mathbf{B}$ e em todos os seus subconjuntos [*v.* v, *p.* 137, *l.* 1].

Por conseguinte, dado um subconjunto limitado $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$, se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $[\mathbf{X}]$ e se a sucessão $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$ de subconjuntos de $\mathbf{A}$, de soma limitada, tende para $\mathbf{X}$, a correspondente sucessão $f(\mathbf{X}_1), f(\mathbf{X}_2) \ldots, f(\mathbf{X}_i), \ldots$ tende para $f(\mathbf{X})$.

Quando em particular $f(\mathbf{x})$ é definida e contínua em todo o espaçóide a que pertence a variável $\mathbf{x}$, a correspondente função $f(\mathbf{X})$ é contínua em qualquer conjunto limitado $\mathbf{X}$ [1].

Se $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$ satisfaz apenas à condição $lim\ \overrightarrow{\mathbf{X}_i\mathbf{X}} = 0$, também temos $lim\ \overrightarrow{f(\mathbf{X}_i)\,f(\mathbf{X})} = 0$ quando $\mathbf{X}$ é limitado e $f(\mathbf{x})$ contínua em $[\mathbf{X}]$. Na verdade, os termos da sucessão precedente

---

num número finito de partes de diâmetros inferiores a um dado número positivo δ determina uma divisão de $\mathbf{A}$ no mesmo número de partes, sendo manifesto que em cada uma delas a oscilação de $f(\mathbf{x})$ é inferior a δ. No caso geral duma função qualquer definida num conjunto qualquer, podemos dividir êste numa infinidade numerável de partes em cada uma das quais a oscilação da função seja inferior a δ.

[1] Os limites superior e inferior dum conjunto limitado de números reais são manifestamente funções contínuas dêsse conjunto. Por conseguinte, se a função $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, é contínua num dado subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, e se $f(\mathbf{A})$ é numérico e real, os limites superior e inferior do conjunto $f(\mathbf{X})$, quando limitado, são funções contínuas no conjunto $\mathbf{B}$ e nos seus diversos subconjuntos [*p.* 82, *l.* 6].

Por exemplo, como a distância reduzida $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}$ é uma função contínua de $\mathbf{x}$, concluímos qne a distância reduzida $\overline{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ e o desvio $\overrightarrow{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ (respectivamente o limite inferior e o superior do conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}$ correspondentes aos diversos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}$) são funções contínuas do conjunto limitado $\mathbf{X}$.

podem considerar-se subconjuntos dos termos correspondentes duma sucessão de subconjuntos de $\mathbf{A}$, de soma limitada, que tenda para X.

Se em particular a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ é tal que $lim\ \overline{\mathbf{x}_i X} = 0$, vem $lim\ \overline{f(\mathbf{x}_i)\ f(X)} = 0$, supondo ainda que $f(\mathbf{x})$ é contínua no conjunto limitado $[\mathbf{X}]$.

Se $f(\mathbf{x})$ *é contínua no subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *limitado e fechado, a cada número positivo* δ *correspondem vizinhanças* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$ *e um número positivo* ε *de maneira que seja*

$$|\omega(\mathbf{X}) - \omega(\mathbf{X}')| < \delta \quad e \quad |\Omega(\mathbf{Y}) - \Omega(\mathbf{Y}')| < \delta$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ *e* $\mathbf{Y}'$, *os dois primeiros de* $\mathbf{U}$ *e os outros de* $\mathbf{V}$ *tais que se tenha* $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'} < \varepsilon$ [*p.* 75, *l.* 4].

Logo, se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, as oscilações $\omega(\mathbf{X})$ e $\Omega(\mathbf{Y})$, a primeira das quais é definida nos subconjuntos limitados de $\mathbf{A}$ e a segunda nos de $[\mathbf{A}]$, são contínuas no conjunto $\mathbf{B}$ e nos seus diversos subconjuntos [1]. A função $\Omega(\mathbf{y})$, em particular, é contínua nos elementos $\mathbf{y}$ de continuïdade de $f(\mathbf{x})$.

Seja $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ *uma função contínua num conjunto limitado e fechado* $\mathbf{A}$. *Consideremos uma função* $\varphi(\mathbf{z})$ *definida no conjunto* $f(\mathbf{A})$. *Dado um elemento* $\mathbf{z}'$ *de* $f(\mathbf{A})$, *designemos por* X' *o maior subconjunto de* $\mathbf{A}$ *tal que seja* $\mathbf{z}' \parallel f(X')$. *É condição necessária e suficiente de continuïdade da função de função* $\varphi(f(\mathbf{x}))$ *no conjunto* X' *que* $\varphi(\mathbf{z})$ *seja contínua no elemento* $\mathbf{z}'$ (*supomos que a elementos juxtapostos a* $\mathbf{z}'$ *correspondem para* $\varphi(\mathbf{z})$ *elementos juxtapostos a* $\varphi(\mathbf{z}')$.

Demonstremos que a condição é necessária. Sendo $f(\mathbf{x})$ contínua no conjunto fechado $\mathbf{A}$, dada qualquer sucessão de elementos de $f(\mathbf{A})$

$$\mathbf{z}_1 \mid f(\mathbf{x}_1),\ \mathbf{z}_2 \mid f(\mathbf{x}_2),\ \ldots,\ \mathbf{z}_i \mid f(\mathbf{x}_i),\ \ldots$$

---

[1] Ao mesmo resultado também podemos chegar notando que $\omega(\mathbf{X})$ e $\Omega(\mathbf{Y})$ são funções contínuas de $f(\mathbf{X})$ e de $\lambda(\mathbf{Y})$ [*v.* v, *p.* 134, *l.* 23] e que estas últimas são contínuas em $\mathbf{B}$ e nos seus diversos subconjuntos, como atrás dissemos. É uma aplicação do teorema da continuïdade da função de função.

que tenda para o limite $\mathbf{z}'$, temos $\underline{lim}\ \mathbf{x}_i\mathbf{X}' = 0$ [*p.* 88, *l.* 1]. Se $\varphi(f(\mathbf{x}))$ é contínua no conjunto $\mathbf{X}'$, que é limitado e fechado [*p.* 87, *l.* 9], temos também

$$\underline{lim\ \varphi(f(\mathbf{x}_i))\ \varphi(f(\mathbf{X}'))} = 0 \quad [p.\ 90,\ l.\ 4],$$

ou $\underline{lim}\ \varphi(\mathbf{z}_i)\ \varphi(\mathbf{z}') = 0$. A função $\varphi(\mathbf{z})$ é pois contínua em $\mathbf{z}'$. A condição é suficiente como atrás se demonstrou [*p.* 82, *l.* 6].

Por conseguinte afirmamos que:

Sendo $f(\mathbf{x})$ definida e contínua num conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$, é condição necessária e suficiente de continuïdade da função de função $\varphi(f(\mathbf{x}))$ em $\mathbf{A}$ que $\varphi(\mathbf{z})$ seja contínua em $f(\mathbf{A})$ (supomos que a elementos de $f(\mathbf{A})$ juxtapostos entre si correspondem para $\varphi(\mathbf{z})$ elementos também juxtapostos) [1].

Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, é contínua em $\mathbf{K}$, o conjunto limite $\lambda(\mathbf{K})$ é um contínuo [*p.* 75, *l.* 21] [2].

Como corolário deduzimos que:

Se $f(\mathbf{x})$ é definida e contínua num contínuo limitado $\mathbf{K}$, o conjunto $f(\mathbf{K})$ também é um contínuo [Cauchy].

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num conjunto $\mathbf{C}$ tal que dois quaisquer dos seus elementos se unam por um contínuo limitado nêle contido, o conjunto $f(\mathbf{C})$ satisfaz à mesma condição [3].

---

(1) Outro modo de provar a condição necessária consiste em demonstrar que é fechado o conjunto dos elementos de segunda ordem $(\mathbf{z}, \varphi(\mathbf{z}))$ [*p.* 85, *l.* 19] (recordemos que o conjunto $\mathbf{A}$, e por conseguinte os conjuntos $f(\mathbf{A})$ e $\varphi(f(\mathbf{A}))$, são limitados e fechados). Basta para isso notar que é fechado o conjunto dos elementos de terceira ordem $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \varphi(f(\mathbf{x})))$ [*p.* 85, *nota*], o que se torna evidente em virtude da suposta continuïdade das funções $f(\mathbf{x})$ e $\varphi(f(\mathbf{x}))$ no conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$.

(2) Êste contínuo pode degenerar num só elemento ou em elementos juxtapostos entre si.

(3) Do teorema de Cauchy e da proposição a *p.* 76, *l.* 1, deduz-se a seguinte: *É contínua a função inversa, caso exista, duma função de elementos numéricos reais definida e contínua num conjunto tal que dois quaisquer dos elementos se unam por um contínuo limitado nêle contido.*

Seja $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ a função considerada, definida em $\mathbf{A}$. O conjunto $f(\mathbf{A})$ é um

Se a função $f(\mathbf{x})$ é definida e contínua num conjunto $\mathbf{C}$ perfeitamente conexo [p. 76, 1.ª nota], o conjunto $f(\mathbf{C})$ também é perfeitamente conexo [1].

Consideremos, com efeito, uma divisão de $f(\mathbf{C})$ em duas partes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$. Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ os maiores subconjuntos de $\mathbf{C}$ que façam $\mathbf{Z} \mid f(\mathbf{X})$ e $\mathbf{Z}' \mid f(\mathbf{X}')$. Existe por hipótese um elemento $\mathbf{c}$ do produto $\mathbf{C} \times [\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$, e, como $f(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{c}$, o elemento correspondente $f(\mathbf{c})$ pertence a $[\mathbf{Z}]$ e a $[\mathbf{Z}']$. O produto $f(\mathbf{C}) \times [\mathbf{Z}] \times [\mathbf{Z}']$ é por conseguinte provido de elementos.

De idêntica maneira se demonstra a seguinte proposição:

Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida num conjunto $\mathbf{C}$ tal que, para qualquer divisão dêste em duas partes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$, exista o produto $[\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$. Se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $[\mathbf{C}]$, o conjunto $f(\mathbf{C})$ satisfaz à mesma condição: seja qual fôr a maneira de o dividirmos em duas partes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$, existe o produto $[\mathbf{Z}] \times [\mathbf{Z}']$.

Em particular:

Se $f(\mathbf{x})$, definida num conjunto limitado e conexo $\mathbf{C}$, é contínua em $[\mathbf{C}]$, o conjunto $f(\mathbf{C})$ é conexo.

Supondo fechado o conjunto $\mathbf{C}$ que figura nesta proposição, obtemos mais uma vez o teorema de Cauchy acima enunciado.

Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, é contínua em $\mathbf{K}$, a cada número positivo δ corresponde um positivo ε tal que, para quaisquer vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{K}$, relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$, que distem de $\mathbf{K}$ menos de ε, as desconexões dos conjuntos $f(\mathbf{U})$, $\lambda(\mathbf{U})$ e $\lambda(\mathbf{V})$ sejam inferiores a δ [p., 77 l. 14].

---

intervalo porque dois quaisquer dos seus elementos unem-se por meio dum intervalo contido em $f(\mathbf{A})$. Tomemos um elemento $\mathbf{z}_0 \mid f(\mathbf{x}_0)$ e consideremos um intervalo de centro $\mathbf{z}_0$ tal que a parte contida em $f(\mathbf{A})$ seja um intervalo fechado I. Sejam $f(\mathbf{x}')$ e $f(\mathbf{x}'')$ os extremos de I. Os elementos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ unem-se por meio dum contínuo limitado $\mathbf{K}$ contido em $\mathbf{A}$. O conjunto $f(\mathbf{K})$ é um intervalo; a êle pertence I. Ficamos assim reduzidos ao caso já considerado duma função contínua sôbre um conjunto limitado e fechado $\mathbf{K}$. Logo a uma sucessão de elementos de $f(\mathbf{A})$ que tenda para $\mathbf{z}_0$ corresponde uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tende para $\mathbf{x}_0$.

[1] Da proposição a *p.* 76, *l.* 1, conclui-se imediatamente que $f(\mathbf{C})$ é um conjunto conexo.

Seja $f(\mathbf{X})$ *uma função definida, limitada e contínua num conjunto* $\mathbf{A}$. *Consideremos um subconjunto conexo* $\mathbf{C}$ *de* $[\mathbf{A}]$. *Se existe uma sucessão de subconjuntos de* $\mathbf{A}$ *perfeitamente conexos*

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots$$

cada um dos quais contenha uma vizinhança de $\mathbf{C}$ *e tais que seja* $lim\ \overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{C}} = 0$, *o conjunto limite* $\lambda(\mathbf{C})$ *é um contínuo* (¹).

Na verdade, demonstrámos há pouco que os conjuntos $f(\mathbf{C}_i)$ são conexos [*p.* 127, *l.* 1] (²).

(¹) Dispensa-se a hipótese da limitabilidade de $f(x)$ quando o conjunto $f(\mathbf{A})$ é numérico e real [*v* VIII, *p.* 129, *obs.*].

(²) Considerando, por exemplo, uma função definida, limitada e contínua, num intervalo aberto, o conjunto limite numa das extremidades é um contínuo.

Se uma função $f(x)$, definida num intervalo incluindo uma das extremidades x', é contínua nos pontos interiores, o conjunto limite em x', caso exista, da razão

$$\frac{f(x)\ f(x')}{x-x'}$$

é um intervalo [*v.* VIII, *p.* 129, *nota* (1)].

Se uma função $f(p)$ do ponto p dum espaço ordinário de mais de uma dimensão é limitada e contínua nos pontos duma esfera de centro p', à excepção dêste ponto onde não a definimos, o respectivo conjunto limite em p' é um contínuo.

Supondo esta função definida em p', o conjunto limite da razão

$$\frac{f(p)\ f(p')}{p\ p'}$$

quando existe, é um intervalo, mesmo que $f(p)$ não seja limitada na referida esfera.

Seja $f(z)$ uma função de variável imaginária z definida no conjunto A dos pontos de certo círculo do qual excluímos o centro z' e a circunferência C que o limita. Se $f(z)$ é limitada e contínua em A, os respectivos conjuntos limites $\lambda(z')$ e $\lambda(\mathrm{C})$ são contínuos.

Se $f(z)$ é contínua em z' e se a razão incremental

$$\frac{f(z)-\lambda(z')}{z-z'}$$

se mantém limitada em A, o conjunto limite em z' da mesma razão é um contínuo.

Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida, limitada e contínua no conjunto $\mathbf{A}$ [1]. *Suponhamos que o subconjunto $\mathbf{C}$ de $[\mathbf{A}]$ verifica a seguinte propriedade: seja qual fôr a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faça $\lim \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{C}} = 0$, há uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_{i'}$ pertencem a um conjunto ferfeitamente conexo $\mathbf{C}_{i,i'}$ contido em $\mathbf{A}$ de tal modo que se tenha $\lim \overrightarrow{\mathbf{C}_{i,i'} \mathbf{C}} = 0$. Nestas condições o conjunto limite $\lambda(\mathbf{C})$ é um contínuo* [*v*, VIII, *p*. 127, *l*. 22].

Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida e contínua num conjunto $\mathbf{C}$ no qual dois quaisquer dos elementos pertençam a um contínuo limitado contido em $\mathbf{C}$. Admitamos que, para um certo elemento $\mathbf{z}$ de $f(\mathbf{x})$, existem em $\mathbf{C}$ contínuos $\mathbf{K}$ que façam $f(\mathbf{K}) \parallel \mathbf{z}$. Se cada elemento de qualquer dêsses contínuos determina uma vizinhança $\mathbf{U}$ do mesmo elemento relativa a $\mathbf{C}$ que faça ainda $f(\mathbf{U}) \parallel \mathbf{z}$, temos também $f(\mathbf{C}) \parallel \mathbf{z}$.

Consideremos a colecção dos contínuos $\mathbf{K}$ a que se refere o enunciado. Por ser $f(\mathbf{x})$ uma função contínua em $\mathbf{C}$, qualquer contínuo contido em $\mathbf{C}$ que se juxtaponha a uma soma de contínuos da colecção é um contínuo da mesma colecção. Além disso, por fôrça das condições impostas no enunciado, seja qual fôr a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{C}$ que tenda para um elemento de um dêsses contínuos, temos, a partir de certa ordem, $f(\mathbf{x}_i) \parallel \mathbf{z}$. Por êste motivo, cada contínuo limitado da colecção determina uma visinhança $\mathbf{V}$ relativa a $\mathbf{C}$ na qual é $f(\mathbf{V}) \parallel \mathbf{z}$ [*v*. VIII, *p*. 111, *l*. 7]. Qualquer contínuo contido em $\mathbf{V}$ é pois um dos da colecção considerada. A proposição enunciada no *v*. VIII, *p*. 104, *l*. 33, diz então que a soma dos contínuos limitados da colecção é o conjunto $\mathbf{C}$, sendo por isso $f(\mathbf{C}) \parallel \mathbf{z}$ [2]

Sejam $h(\mathbf{x})$ e $k(\mathbf{x})$ funções definidas e contínuas num conjunto $\mathbf{C}$ no qual dois quaisquer dos elementos pertençam a um

---

(1) Primeira nota da página precedente.

(2) Se por exemplo uma função numérica de variável independente imaginária, holomorfa num domínio elementar aberto, é constante sôbre um contínuo nêle contido (basta para isso que se mantenha constante sôbre um conjunto que admita um derivado de ordem ω contido nesse domínio) a mesma função é constante em todo o domínio.

contínuo limitado contido em $\mathbf{C}$. *Admitamos que existem em* $\mathbf{C}$ *contínuos* $\mathbf{K}$ *tais que seja* $h(\mathbf{x}) \parallel k(\mathbf{x})$ *em cada um dos seus elementos* $\mathbf{x}$. *Se qualquer dêstes elementos determina uma vizinhança relativa a* $\mathbf{C}$ *em cujos elementos tenha ainda lugar a mesma juxtaposição, esta verifica-se em todos os elementos de* $\mathbf{C}$.

Efectivamente, a função $\overline{h(\mathbf{x})\ k(\mathbf{x})}$ **encontra-se nas condições da função** $f(\mathbf{x})$ **considerada na proposição anterior.**

(Continua)

Luís Beda Neto

Sôbre a determinação do índice orbitário e a assimetria da órbita [1]

POR

L. P. Canêdo de Morais e J. A. Serra [2]

Fac. de Ciências da Univ. de Coimbra

O índice orbitário tem sido determinado de diferentes maneiras, conforme os pontos em que terminam a altura e a largura da órbita. No que respeita à largura, pode ser tomada a partir do *dakryon* (ponto de encontro da sutura lacrimomaxilar com a sutura frontomaxilar), ou a partir do *lacrimale* (ponto na crista lacrimal sôbre a sutura frontolacrimal), e ainda a partir do *maxilofrontale* (ponto de encontro do bordo interno da órbita com a sutura frontomaxilar). Enquanto que o Congresso de Mónaco de 1906 preconizava o dakryon, Martin [3] prefere o maxilofrontale; na verdade, êste último ponto parece morfològicamente mais aconselhável, pois que, por definição, está situado no bordo da órbita e naturalmente a largura orbitária deve ser medida na entrada da órbita, ao passo que o dakryon ou o lacrimale estão situados interiormente. Para terminação da largura da órbita toma-se quási sempre o *ektokonchion,* ou seja, o ponto sôbre o bordo externo onde termina o eixo mediano da órbita paralelo aos bordos superior e inferior; também se pode empregar um eixo da órbita paralelo ao plano horizontal e tirar a largura segundo êste eixo.

A altura da órbita é habitualmente definida como a distância

---

(1) Um resumo desta comunicação foi apresentado no Congresso para o Progresso das Ciências, em Saragoça — 1940.

(2) Bolseiro do «Instituto para a Alta Cultura».

(3) R. Martin — Lehrbuch der Anthropologie. Jena, 1928.

do bordo superior ao inferior da órbita, perpendicular à largura, e que divide a órbita em duas partes aproximadamente iguais.

Para a morfologia da órbita é importante não só o índice orbitário, mas também a inclinação do eixo da órbita, a forma geral da entrada e o desenvolvimento das regiões circundantes, particularmente da região supraciliar, assim como a conformação das paredes interiores O índice orbitário é, contudo, o que mais se presta a comparações entre várias populações e tem por isso sido bastante estudado. Verifica-se, porém, que os dados dos vários autores não são comparáveis entre si, dada a diversidade das técnicas empregadas. Para os Portugueses há várias determinações do índice orbitário [1] feitas segundo métodos diferentes e fornecendo resultados diferentes; enquanto que Macedo e Oliveira seguiram o método de Broca, determinando a largura desde o dakryon até o ponto onde se encontra o diâmetro máximo sôbre o bordo externo da órbita, Ataíde e Temido seguiram as instruções de Mónaco. Não existiam determinações feitas segundo as indicações de Martin, em que a largura orbitária se toma a partir do maxilofrontale. Para comparações raciais pode ter interesse a existência de dados segundo as novas técnicas. Êste trabalho apresenta tais dados [2] e, além dêste fim, visa principalmente a servir como uma verificação da técnica usada e a tratar da questão interessante que é a assimetria da face.

MATERIAL E MÉTODO

As determinações foram efectuadas na colecção do Instituto de Antropologia de Coimbra de que se serviu A. A. Temido. Trata-se de 375 crânios masculinos e 239 femininos, identificados, em que se conhece o sexo, naturalidade, idade à data do falecimento, etc. Como as mensurações incidem sôbre os mesmos crânios que as de

(1) Cf. — F. Macedo — Crime et criminel. Lisbôa, 1892; V. N. Oliveira — 1902 — Sôbre o índice orbitário dos Portugueses. Trab. Univ. Coimbra, *1*, 247; A. Ataíde — 1922 — Sôbre algumas correlações faciais. Trab. Soc. Port. Antr. Etnol., *1*, 197-215; A. A. Temido — 1931 — O índice orbitário nos Portugueses. Contr. para o estudo da Antr Port. — Rev. Fac. C. Univ. Coimbra, *12*, n.º 1.

(2) No final do trabalho vão os valores individuais obtidos, juntamente com os dados referentes à «identidade» dos esqueletos.

A. A. Temido, é interessante verificar as diferenças ocasionadas na mensuração da altura orbitária (o único diâmetro que foi tomado da mesma maneira) devidas a causas puramente pessoais. Medimos a altura e a largura orbitárias como recomenda Martin — largura a partir do maxilofrontale. As medições foram efectuadas não só do lado esquerdo como também do direito, de forma a poder-se determinar a diferença existente de um para outro lado e, portanto, a assimetria dos dois diâmetros orbitários. A aproximação das medidas foi levada até meio milímetro, como é usual para as medidas pequenas.

RESULTADOS

Tratamos separadamente as duas séries, masculina e feminina, pois que há diferenças significativas. Na *tabela I* estão resumidos os resultados a que chegamos quanto às medições. As medidas são expressas em milímetros.

TABELA I

		N.º de casos	Homens		N.º de casos	Mulheres	
			Média	Desvio-padrão		Média	Desvio-padrão
Altura orbitária	esque.	375	33,21 ± 0,103	1,99 ± 0,073	239	32,96 ± 0,123	1,90 ± 0,087
	direita	372	33,04 ± 0,107	2,07 ± 0,076	238	32,82 ± 0,134	2,07 ± 0,095
Larg. orbitária	esque.	375	41,37 ± 0,093	1,81 ± 0,066	239	40,04 ± 0,094	1,45 ± 0,066
	direita	372	42,04 ± 0,094	1,82 ± 0,067	238	40,62 ± 0,114	1,75 ± 0,080

Pode desde já verificar-se a assimetria entre as duas órbitas. Para as alturas [1] a diferença é insignificante, mas para as larguras obtém-se uma diferença de 0,67 ± 0,132 no sexo masculino e

[1] Diferenças de 0,17 ± 0,148 para os homens e 0,14 ± 0,182 para as mulheres.

de 0,58 ± 0,148 no feminino. Ambas as diferenças são estatìsticamente significativas, pois que são respectivamente maiores cêrca de 5 e de 4 vezes os correspondentes êrros médios (probabilidade de ocorrência fortúita de um tal valor, menos de 0,0001% e 0,01%) (1). Tanto no sexo masculino como no feminino a órbita direita é mais larga que a esquerda.

No que respeita às diferenças sexuais, verifica-se que as alturas não têm diferenças significativas entre as médias dos dois sexos (embora lèvemente maiores no sexo masculino, a diferença de 0,25 ± 0,160 à direita e 0,22 ± 0,172 à esquerda, é no melhor dos casos igual a cêrca de 1,56 vezes o respectivo êrro-médio — probabilidade cêrca de 12% — e, portanto, não é significativa).

A largura apresenta uma diferença de 1,33 ± 0,132 à esquerda e de 1,42 ± 0,148 à direita, sendo a largura do sexo masculino a maior: as diferenças são estatìsticamente significativas, evidentemente.

Considerando as médias que nós obtivemos e as de A. A. Temido sôbre o mesmo material, vê-se que as diferenças para a largura (à esquerda) são de 2,37 ± 0,126 no sexo masculino e de 2,01 ± 0,139 no sexo feminino. Wagner (2) dá para diferenças entre a largura orbitária medida pelos dois processos nos Caledónios 2,1 no sexo masculino e feminino; nos habitantes da ilha da Lealdade (papuas) 2,3 e 2,4, respectivamente no sexo masculino e no feminino. O mesmo autor calculou dos dados de Pöch (3) 2,4 para os dois sexos, nos Australianos. Verifica-se que estas diferenças são muito aproximadas das que nós obtivemos.

A partir dos diâmetros orbitários foi determinado o índice orbitário, estando as médias e desvios-padrões e os respectivos erros médios expostos na *tabela II*.

(1) Por exemplo em R. Fisher - Statistical methods for research workers. London, 1932.

(2) K. Wagner — The craniology of the oceanic races. Oslo, 1937.

(3) Cf. pág. 88 de K. Wagner, loc. cit.. Tôdas as diferenças são dadas em milímetros.

A assimetria nos diâmetros orbitários evidencia-se ainda mais no índice. No sexo masculino há uma diferença entre as médias do índice nas órbitas esquerda e direita de 1,66 ± 0,354, e no sexo feminino a diferença é de 1,49 ± 0,446; tanto num caso como noutro, as diferenças são estatìsticamente significativas e indicam a existência de uma real assimetria não só nas dimensões (diâmetros), como também nas proporções da entrada da órbita.

TABELA II

		N.º de casos	Homens		N.º de casos	Mulheres	
			Média	Desvio-padrão		Média	Desvio-padrão
Índice orbitário	esque.	375	80,38 ± 0,248	4,80 ± 0,175	239	82,41 ± 0,294	4,55 ± 0,208
	direito	372	78,72 ± 0,253	4,88 ± 0,179	238	80,92 ± 0,335	5,16 ± 0,237

As diferenças sexuais são também nítidas, o que está de acôrdo com os resultados dos diferentes autores que determinaram o índice orbitário; para a órbita esquerda a diferença é de 2,03 ± 0,384 e para a direita é de 2,20 ± 0,420. As diferenças são estatìsticamente significativas e a favor do sexo masculino. Temido [1] nas mesmas séries encontrou uma diferença de 1,42 ± 0,406, menor que a nossa; parece, portanto, que o índice determinado com a largura a partir do maxilo-frontale diferencia melhor os dois sexos.

Quanto à diferença entre o índice com a largura a partir do maxilofrontale e o índice com a largura do dakryon, verificamos nas nossas séries que é de 5,11 ± 0,353 para o sexo masculino e de 4,50 ± 0,434 no sexo feminino (do lado esquerdo). No índice a diferença de técnica é muito mais notória que nas medidas, como era de esperar. Esta diferença só numa parte mínima é devida a influências pessoais na maneira de medir, como se prova pelas diferenças entre as alturas medidas por nós e por A. A. Temido, dife-

---

[1] O índice orbitário nos Portugueses, loc. cit.. Os erros médios que nós apresentamos foram calculados a partir dos erros prováveis de A. A. Temido.

renças que são muito pequenas (aproximadamente 0,10 no sexo masculino e 0,09 no feminino).

DISCUSSÃO

Tratemos em primeiro lugar da assimetria da órbita. É sabido que há duas espécies de assimetrias: uma *normal,* que diz respeito principalmente aos órgãos internos e que seguramente deve ter bases hereditárias, e uma outra assimetria que se pode classificar de *acidental* e que se manifesta nos órgãos ou membros pares ou nas duas metades do corpo ([1]). Poder-se-ia chamar ao segundo grupo assimetrias «paratípicas», pois que segundo os actuais conhecimentos sôbre o assunto elas não são hereditárias. Mesmo a dextria e a sinistria (a propriedade de usar predominantemente a mão esquerda) parece que não são hereditárias, como o demonstram investigações em famílias ([2]) e em gémeos ([3]). Contràriamente a alguns autores anteriores, as histórias familiares de Busse provam que não se podem interpretar os dados para as várias assimetrias como se estas fôssem causadas por um factor mendeliano ou por mais que um factor, mas antes, aparentemente são de natureza paratípica. Igualmente se verifica nos gémeos *idênticos* (uniovolares) que em muitos casos um dos gémeos é dextro e o outro esquerdo; embora os dados sejam a êste respeito um pouco contraditórios ([4]) verifica-se no entanto que se pode considerar como certo que é mais freqüente nos gémeos *idênticos* ser um dextro e outro esquerdo do que nos gémeos *fraternos* (biovulares). É de notar que nos gémeos fraternos há muito mais esquerdos do que na população geral. Todos êstes factos indicam que a assimetria dos braços é de ordem paratípica e pode adiantar-se que as causas que influem na assimetria se começam a fazer sentir muito cedo no desenvolvimento embrio-

([1]) E. Fischer; em Baur-Fischer-Lenz — Menscliche Erblehre. München, 1936, págs. 223-225.

([2]) H. Busse, 1936, Über normale Asymetrien des Gesichts und im Körperbau des Menschen. Z Morph. Anthr., *35,* 412-445.

([3]) O. Verschuer, 1930; Zur Frage der Asimetrie des menschlichen Körpers. Z Morph. Anthr., *27,* 171-178.

([4]) H. Newman, F. N. Freeman e K. J. Holzinger-Twins. A study of heredity and environment. Chicago, 1937. Cf. pág. 39 e seg.

nário. Spemann, Falkenberg e Ruud [1] viram que cortando ao meio larvas de tritões podiam provir dois animais mais ou menos simétricos ou assimétricos, sendo a assimetria tanto maior quanto mais tarde eram separados: no estado de quatro células, por exemplo, provinham dois animais ambos simétricos ou com leves assimetrias, ao passo que separados no princípio da gastrulação já resultavam animais com forte assimetria, como era de esperar. Pode dar-se igual caso com os gémeos idênticos, que se supõe serem derivados de um único ovo que se cinde mais ou menos cêdo; uma das metades do corpo resultaria assim com assimetria oposta à da outra.

Quanto à assimetria na região da órbita, sabe-se que no vivo se observam com facilidade assimetrias na altura das pálpebras, na inclinação da fenda palpebral, etc. Em gémeos idênticos [2] encontram-se diferenças na conformação destas particularidades que denotam influências paratípicas. Vemos agora que igualmente as assimetrias são evidentes no esqueleto da órbita e se podem demonstrar determinando os diâmetros orbitários. A diferença das médias da largura orbitária é evidentemente devida a assimetria; contudo, para uma melhor apreciação achamos as diferenças entre a largura à direita e à esquerda, fazendo o mesmo para a altura orbitária. Os resultados estão expressos nos números da *tabela III*.

Verifica-se que a largura orbitária é maior à esquerda que à direita apenas em cêrca de 15 % dos casos, ao passo que é maior à direita que à esquerda em cêrca de 60 % dos crânios. Com a altura orbitária dá-se o inverso: é maior à esquerda que à direita em cêrca de 42 % dos casos, e é maior à direita em quási 27 %. As diferenças das percentagens nos dois sexos são de pequena importância e sem significado estatístico (a não ser a diferença entre as percentagens para a largura orbitária em que dir. = esq., mas não se poderá atribuir qualquer significado a êste facto). Enquanto que a diferença entre as médias da altura orbitária direita e esquerda não permitem tirar conclusões a respeito da assimetria dêste diâmetro, a consideração das diferenças individuais demonstra que de facto há uma diferença ou assimetria entre a

---

(1) Cit. em Verschuer (cf. nota 3 da pág. anterior).

(2) J. Weninger, 1932, Über die Weichteile der Augengegend bei erbgleichen Zwillingen. — Anthrop. Anz., *9*, 57-67.

altura à direita e à esquerda e é mais freqüente ser o diâmetro esquerdo o maior, do que o inverso.

TABELA III

LARGURA ORBITÁRIA	dir. > esq.		dir. = esq.		esq. > dir.	
	N.º de casos	%	N.º de casos	%	N.º de casos	%
Homens	234	62,90 ± 2,504	75	20,16 ± 2,080	63	16,94 ± 1,945
Mulheres	139	58,65 ± 3,215	65	27,43 ± 2,898	33	13,92 ± 2,248

ALTURA ORBITÁRIA	dir. > esq.		dir. = esq.		esq. > dir.	
	N.º de casos	%	N.º de casos	%	N.º de casos	%
Homens	98	26,34 ± 2,284	118	31,72 ± 2,413	156	41,94 ± 2,558
Mulheres	67	28,27 ± 2,925	68	28,69 ± 2,938	102	43,04 ± 3,216

A técnica de determinação dos diâmetros orbitários implica um êrro de pelo menos 0,5 mm.; parece, portanto, que as diferenças de 0,5 entre os diâmetros à direita e à esquerda se não poderão rigorosamente considerar como comprovando assimetria. Os números da tabela 3 entram mesmo com as diferenças de 0,5 mm., mas se tomarmos em conta apenas as diferenças maiores que 0,5 mm. os resultados mantêm-se na sua essência: continua a altura orbitária a ser mais frequentemente maior à esquerda (20,43 ± 2,090 % nos ♂ e 18,57 ± 2,526 % nas ♀) do que à direita (9,95 ± 1,552 % nos ♂ e 12,24 ± 2,129 % nas ♀); para a largura passa-se o inverso, com mais nitidez, sendo maior a largura à direita em 43,54 ± ± 2,571 % dos casos nos ♂ e 40,93 ± 3,194 % nas ♀, e a largura é maior à esquerda em 5,92 ± 1,224 % dos casos nos ♂ e 5,06 ± ± 1,424 % nas ♀.

Sôbre as causas desta assimetria, porque é que a órbita esquerda é em média mais alta e menos larga que a direita, pouco se pode dizer. A melhor estudada das assimetrias é a das extremidades superiores e no entanto as respectivas causas são apenas ainda conjecturadas. O braço direito e a perna esquerda são em média os mais longos. A assimetria existe já a partir dos primeiros anos de vida extrauterina ou mesmo ainda durante a última parte da vida fetal; não é, portanto, o uso mais freqüente dum dos membros que causa a assimetria. Pode supôr-se que a causa é um desigual desenvolvimento dos hemisférios cerebrais, originado por sua vez por uma desigual distribuïção das artérias; ou então pode imputar-se a assimetria a uma desigual incurvação do embrião na vida uterina [1]. É provável que haja uma compensação entre as assimetrias de um e de outro lado. Esta compensação deve dar-se em regiões limitadas como a órbita, mas já é mais duvidosa para o caso de regiões afastadas.

Consideremos agora as diferenças sexuais. O índice orbitário é maior nas mulheres que nos homens em virtude de a órbita masculina ser em média mais larga que a feminina, embora a diferença média entre as alturas seja insignificante, resultado êste a que também já tinham chegado outros autores. O índice da órbita esquerda distribui-se pelas três classes de Martin em percentagem:

nos homens $17,33 \pm 1,955\,\%$ chamaekonchios, $66,93 \pm 2,429$ mesokonchios e $15,74 \pm 1,880\,\%$ hypsikonchios;

e nas mulheres $8,78 \pm 1,597\,\%$ chamaekonchios, $62,76 \pm 3,127\,\%$ mesokonchios e $28,46 \pm 2,918\,\%$ hypsikonchios.

A distribuïção pelas três classes apresenta diferenças. Em ambos os sexos predomina fortemente a mesoconquia, mas as mulheres são mais hipsiconquias e menos cameconquias que os homens, e as diferenças entre as duas classes extremas nos dois sexos são significativas. Pode dizer-se que os Portugueses são mesoconquios e que no sexo feminino há ainda um pouco de tendência para a hipsiconquia.

---

[1] Cf. R. Martin — Lehrbuch der Anthropologie, 2.ª edição, Jena, 1928, pág. 439 e seg.

As três espécies de classificações usadas para o índice orbitário (conforme se toma o maxilofrontale, ou o dakryon, ou o lacrimale) não tem correspondência entre si. Nós verificamos numa mesma série que a diferença entre a largura orbitária determinada a partir do maxilofrontale e a partir do dakryon é em média de cêrca de 5 unidades (4,5 para o sexo feminino e 5,1 para o masculino). Para as classes do índice se corresponderem num e noutro caso deviam ser diferentes. Já expusemos as razões porque preferimos a determinação da largura a partir do maxilofrontale: êste ponto está, por definição, no bôrdo interno da órbita, ao passo que os outros estão dentro da órbita. É sempre fácil determinar o maxilofrontale usando o processo de avivar o bôrdo da órbita com um lápis, como é costume em osteometria. O índice orbitário tomado desta forma apresenta uma diferença sexual mais nítida do que o índice que entra com o dakryon, o que é certamente mais uma vantagem a favor da técnica descrita por Martin.

No que respeita a comparações raciais, sabe-se que há populações caracterizadas por possuirem um índice orbitário baixo, particularmente os Tasmanianos, Australianos e Novocaledónios; contudo, no caso dos Australianos [1] conforme as regiões consideradas assim são cameconquios ou mesoconquios e as médias diferem consideràvelmente, o que provàvelmente depende do acaso da constituïção das séries, que são sempre pequenas.

As médias do índice orbitário nos Portugueses são muito aproximadas das dos Noruegueses [2] e dos Lapões determinados por Schreiner pela técnica de Martin. As conclusões, aqui como em tantos outros capítulos da antropometria comparada, necessitam de cuidada revisão. A maior parte das populações são mesoconquias, tal como os Portugueses. Apenas os Mongolóides e poucos mais se inclinam para a hipsiconquia, parecendo que as diferenças raciais ou não existem ou são em regra pequenas.

RESUMO

Foi determinado o índice orbitário em 375 crânios masculinos e 239 femininos, Portugueses, adultos, de sexo e identidade conhe-

---

(1) Cf. K. Wagner, Craniology of the oceanic races, pág. 89.

(2) K. E. Schreiner, Zur Osteologie der Lappen. Oslo, 1935 (pág. 103).

cida. A técnica adoptada foi a de Martin, em que a largura orbitária parte do maxilofrontale. Como já estava determinado o índice orbitário com a largura a partir do dakryon nas mesmas séries, pudemos comparar directamente as duas técnicas. As principais conclusões são:

1.ª A técnica de Martin é morfològicamente mais aconselhável e as diferenças sexuais são mais nítidas do que com a técnica do congresso de Mónaco.

2.ª As médias da largura orbitária obtidas com a técnica de Martin são maiores em cêrca de $2{,}4^{mm}$ no sexo masculino e $2{,}0^{mm}$ no feminino, do que as médias obtidas com a largura orbitária a partir do dakryon. Entre o índice orbitário tomado pelas duas técnicas há uma diferença média de 5,1 unidades no sexo masculino e de 4,5 no feminino.

3.ª A diferença sexual é de aproximadamente 2 unidades para o índice orbitário, o que é devido principalmente à largura, maior no sexo masculino.

4.ª Há uma assimetria nítida das proporções da órbita, sendo o índice orbitário à esquerda maior que à direita; a diferença é nos dois sexos de cêrca de 1,5 e é devida principalmente à diferença das larguras.

5.ª Os Portugueses são predominantemente mesoconquios (aproximadamente 65 % dos crânios), havendo no sexo feminino uma certa tendência para a hipsiconquia.

CRÂNIOS MASCULINOS

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Òrbita Esq. Largura orbitária	Òrbita Esq. Altura orbitária	Índice orbi-tário	Órbita Dir. Largura orbitária	Órbita Dir. Altura orbitária	Índice orbi-tário
1	Braga	37	41	34	82,93	43	33	76,74
3	Leiria	48	40	30,5	76,25	41,5	31	74,70
4	Porto	69	43	30	69,77	42	30	71,43
5	Coimbra	57	41	35	85,36	45	35	77,78
6	Leiria	25	40,5	35,5	87,65	45	33,5	74,44
7	Santarém	56	42	35	83,33	43,5	35	80,46
8	Castelo Branco	26	40	34,5	86,25	40,5	35	86,42
9	Faro	64	40,5	33	81,48	41	33	80,49
10	Coimbra	25	39,5	33	83,54	40,5	30	74,07
11	Lisboa	68	39,5	30	75,95	—	—	—
13	Guarda	25	40	30	75	41	30,5	74,39
14	Viana do Castelo	30	42,5	34	80	45	34,5	76,67
15	Coimbra	41	41	36	87,80	40,5	37,5	92,59
16	Lisboa	39	39,5	32	81,01	40	31	77,50
17	Viseu	21	43	33,5	77,90	44	33,5	76,14
22	Viana do Castelo	36	41	33,5	81,71	42	32,5	77,38
23	Lisboa	23	41,5	32	71,11	42	31,5	74,90
24	Coimbra	48	37,5	30	80	38,5	30	77,92
27	Lisboa	28	38,5	31,5	81,82	39	31,5	80,77
28	Viana do Castelo	52	43,5	35,5	81,61	43	35	81,40
29	»	42	44,5	37	83,15	42,5	37	87,06
33	Coimbra	55	42	33	78,57	42,5	32	75,29
35	Évora	56	43,5	36,5	83,91	—	—	—
36	Lisboa	23	40	32,5	81,25	40	32,5	81,25
37	»	57	40	31,5	78,75	42,5	32	75,29
38	Coimbra	78	43	30,5	70,93	42,5	31	72,94
40	Lisboa	67	39,5	30,5	77,22	39,5	30,5	77,23
41	Castelo branco	44	39,5	31,5	79,75	39,5	31	78,84
43	Vila Real	30	43,5	33,5	77,01	43	33	76,74
46	Lisboa	52	43	31,5	73,25	41,5	30,5	73,49
47	»	26	39,5	32,5	82,28	41,5	31,5	75,90
50	»	28	43,5	33,5	77,01	45	33	73,33
51	»	35	41	32,5	79,27	44	33	75
53	Évora	54	42,5	35	82,35	43,5	34	78,16
54	Coimbra	44	41,5	33	79,52	42,5	32,5	76,47
55	Viseu	45	40,5	31	76,54	42	31	73,81
57	Leiria	56	42	37,5	89,29	42	36	85,71
58	Lisboa	21	41	34	82,93	42	33	78,57
59	»	27	43	34,5	80,23	44	34	77,27
62	Santarém	35	41	35	85,37	40,5	36	88,89
63	Coimbra	45	41	34,5	84,15	41	33	80,49

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq. Largura orbitária	Órbita Esq. Altura orbitária	Índice orbitário	Órbita Dir. Largura orbitária	Órbita Dir. Altura orbitária	Índice orbitário
65	Coimbra	57	43	33	76,74	42,5	32	75,29
68	Lisboa	60	40	35,5	88,75	40	33	82,50
69	»	60	38	32,5	85,53	39	32	82,05
72	Aveiro	87	40,5	32,5	80,24	40,5	32	79,01
74	Viseu	60	40	35,5	88,75	41,5	34,5	85,54
79	Lisboa	76	40	32	80	41	32,5	79,27
82	»	60	42,5	31	72,94	43,5	30	68,97
84	»	45	40,5	35	86,42	41,5	34	81,93
87	Guarda	27	40,5	31,5	77,77	40,5	30	74,07
89	Coimbra	45	40	34	85	41,5	34	81,39
90	Porto	48	39,5	31	78,48	39,5	31	78,48
94	Coimbra	24	40,5	31,5	77,77	40,5	30	74,07
95	Viseu	23	43	33	76,74	42,5	33	77,65
97	Évora	45	40,5	36	88,89	41	36,5	89,02
98	Coimbra	?	41,5	29,5	71,08	42	29	69,05
100	»	28	42	32,5	77,38	43	32	74,42
102	»	77	41	32,5	79,27	41,5	33,5	80,72
104	Aveiro	25	38,5	31	80,52	38	31	81,58
105	Coimbra	55	44	33	75	43	33	76,74
106	»	32	40,5	32,5	80,24	40,5	33	81,48
108	»	30	43,5	32	73,56	43	31,5	73,25
110	Lisboa	23	38	30	78,95	38,5	30	77,92
113	Coimbra	50	40	33,5	83,75	42	32	76,19
115	»	22	41	33,5	81,71	41,5	32	77,11
119	»	80	40	33,5	83,75	41	33,5	81,71
120	»	31	39,5	30	79,95	40,5	29	71,60
123	Leiria	47	44	33	75	44	32	72,73
124	Viseu	50	44	35	75,95	44	38	86,36
125	Leiria	40	40,5	36	88,89	42	35	83,33
126	»	50	43	33,5	77,90	42,5	33	77,65
128	Coimbra	36	40	34	85	42	33	78,57
131	Braga	22	40	33	82,50	39	32	82,05
133	Porto	47	44,5	32,5	73,03	46	34	73,91
135	Vila Real	42	41,5	31	74,70	41,5	30	72,29
136	Porto	27	40,5	34	83,95	42	33	78,57
137	»	28	42	36	85,71	43	36	83,72
142	Viseu	46	45	33,5	74,44	43	33	76,74
145	Vila Real	46	45	32,5	72,22	44	31	70,45
146	Braga	45	41,5	36	86,75	41	35,5	86,59
147	Viseu	44	40,5	34	83,95	42,5	36	84,71
150	Porto	54	42	32,5	77,38	44	32,5	73,87
152	Aveiro	48	40	34,5	86,25	40	35	87,50
153	Viseu	32	40	31,5	78,75	40,5	31,5	77,77
154	Porto	30	43	35,5	77,90	44,5	35	78,65
157	»	48	39,5	33	83,54	40	33	82,50
158	»	90	38,5	33,5	87,01	38,5	33	85,71
161	Viana do Castelo	69	41,5	33	79,52	41,5	33	79,52
162	Viseu	37	40	31	77,50	41,5	31,5	75,90
163	»	49	38	32	84,21	38,5	31,5	81,82
164	Porto	46	41,5	28,5	68,67	41,5	29	69,88
166	»	22	40	30,5	76,25	39,5	30,5	77,22
167	»	30	42	33,5	79,76	42,5	33,5	78,83

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbi-tário	Órbita Dir.		Índice orbi-tário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitari	
169	Porto	50	44	34	77,27	45	35	77,78
171	»	60	42	31,5	75	42,5	31	72,94
172	Vila Real	?	40,5	34,5	85,18	41,5	32,5	78,31
182	Guarda	84	39,5	30	75,95	39,5	31	78,84
183	Coimbra	70	41,5	31,5	75,90	41,5	31,5	75,90
184	Porto	58	41,5	34,5	83,93	42	34	80,95
186	»	68	40	36,5	91,25	42	36	85,71
189	»	67	42,5	33	77,65	41,5	32	77,11
190	Viseu	55	40	32,5	81,25	42,5	32,5	76,47
193	Viana do Castelo	45	39,5	33	83,54	41,5	32	77,11
194	Porto	39	39,5	35,5	89,88	40	35,5	88,75
195	»	70	40	32	80	38,5	32	83,12
197	Viseu	42	40,5	32,5	80,24	42	31	73,81
203	Aveiro	70	39	33	84,62	39,5	33	83,54
205	Porto	32	38,5	32,5	84,42	39	32,5	83,33
207	Guarda	40	39	32	82,05	39	32	82,05
210	Viana do Castelo	40	40	32,5	81,25	42	32,5	77,38
211	Porto	23	39,5	34	86,08	41	33	80,48
212	Coimbra	72	41,5	34	81,93	41,5	33	79,52
216	Porto	23	39	33	84,62	40,5	33	81,48
217	»	50	43,5	32	73,56	44	32,5	73,87
221	Viseu	28	37,5	35,5	94,66	38,5	35	90,91
222	Porto	42	42,5	33,5	83,53	43	32,5	75,58
223	Viseu	34	42,5	34	80	42,5	33,5	78,83
225	Braga	50	39	33,5	85,90	38,5	33	85,71
228	Coimbra	58	44,5	32,5	73,03	45,5	31	68,13
231	»	42	41,5	34	81,93	42	34	80,95
232	»	56	42,5	29,5	69,42	41,5	30	72,29
233	»	50	42	32,5	77,38	43,5	31	71,26
235	»	65	39	32	82,05	40	31,5	75,58
236	»	37	44	34	77,27	44,5	33,5	75,28
237	»	48	40,5	32,5	80,23	40,5	32	79,01
238	»	29	41	31,5	76,83	40,5	29,5	72,83
240	Leiria	44	42	35,5	84,52	44,5	37	83,15
241	Lisboa	30	43	33	76,74	42,5	33	77,65
245	Coimbra	35	41,5	34,5	82,59	43,5	34,5	79,31
246	»	65	45	35,5	78,89	46,5	34,5	74,20
247	»	78	38,5	27,5	71,43	38	28,5	75
248	Viseu	69	39	30	76,92	41	28,5	69,51
251	Coimbra	70	39,5	30	75,95	40,5	30	74,07
252	»	70	40	31	77,50	39,5	31	78,48
253	»	29	41,5	31	74,70	40	32	80
254	Viseu	34	42,5	34,5	81,18	44	34	77,27
255	Coimbra	35	41	33	80,49	42,5	31	72,94
256	»	48	43	35,5	82,56	43,5	34,5	79,31
257	»	70	40	33	80,49	42	32,5	77,38
258	»	66	39,5	32	81,01	42,5	32,5	76,47
260	»	30	39,5	31,5	79,75	40,5	32	79,01
262	Leiria	22	43	33,5	77,90	45	31	68,89
264	Viseu	—	—	—	—	—	—	—
265	Coimbra	53	44	32,5	73,87	44	32	72,73
266	»	37	42	32	76,19	42	32	76,19

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitária	
267	Coimbra	62	38	32	84,21	38,5	32	83,12
269	Lisboa	66	45	36	80	46	37	80,43
270	Castelo Branco	59	40,5	31,5	77,77	41,5	31,5	75,90
271	Santarém	49	38	31,5	82,90	38,5	30,5	79,22
274	Lisboa	50	43,5	33,5	77,01	43,5	33,5	77,01
275	Castelo Branco	41	43	35	81,40	41	35	85,37
276	»	46	43	34	79,07	43	34	79,07
278	Guarda	20	40,5	32,5	80,24	40,5	32	79,01
279	Santarém	50	43	32	74,42	43,5	33	75,86
280	Lisboa	40	37,5	31	82,67	39	30,5	78,20
281	?	50	40	31	77,50	41,5	31,5	75,90
283	Lisboa	36	43,5	34,5	79,31	43	35	81,40
284	»	25	44,5	34	76,40	43	34,5	80,23
285	Viana do Castelo	76	42	31,5	75	42	31,5	75
289	Coimbra	40	42	33,5	79,76	41,5	34	81,93
290	Leiria	59	39,5	33,5	84,81	41,5	33	79,52
293	Braga	45	44	35,5	80,69	44	35,5	80,69
294	Lisboa	69	36,5	31	84,93	40,5	30	74,07
296	»	53	41,5	33,5	80,72	41,5	32,5	78,31
297	»	43	42,5	33,5	78,83	43,5	34,5	79,31
298	»	49	43,5	34,5	79,31	46	36	78,26
300	»	90	40,5	33	81,48	40,5	33	81,48
301	»	38	40	31	77,50	39	32	82,05
302	Guarda	70	39,5	35	88,61	39,5	37	93,67
303	Lisboa	43	40,5	31,5	77,77	41,5	32	77,11
304	Faro	72	40	31,5	78,75	43	31,5	73,25
305	Aveiro	54	42,5	37	87,06	—	—	—
307	Lisboa	51	41	30,5	74,39	41,5	31	74,70
309	Leiria	40	44	34	77,27	44,5	34	76,40
310	Lisboa	50	39	32	82,05	39,5	32	81,01
313	«	50	39,5	31,5	79,75	39,5	30,5	77,22
314	»	66	44	38	86,36	45	36,5	81,11
315	Viana do Castelo	45	40	32	80	40,5	32	79,01
316	Viseu	50	43	33	76,74	42,5	32,5	76,47
317	Lisboa	23	37,5	29,5	78,66	39	29,5	75,64
319	Guarda	30	40,5	37,5	92,59	40	37,5	93,75
321	?	42	42,5	35,5	83,53	44,5	36	80,90
322	Lisboa	50	42	32	76,19	42,5	30,5	71,77
324	Viana do Castelo	37	41	34	82,93	42	34,5	82,14
325	Santarém	41	42	34,5	82,14	43,5	33	75,86
326	Porto	22	37,5	28,5	76	39	29,5	75,64
327	Portalegre	50	44,5	33,5	75,28	44	35	79,55
331	?	60	41	30	73,17	42	29,5	70,24
333	?	?	42	31,5	75	42	31,5	75
334	Viseu	29	40	33	82,50	39	33,5	85,90
335	Lisboa	42	39	29	74,36	40,5	31	76,54
336	Vila Real	32	43	37	86,05	43,5	36,5	83,91
337	?	55	41,5	33	79,52	41,5	34	81,93
339	Lisboa	50	42	35,5	84,52	44,5	35,5	79,77
342	Guarda	40	41	36	87,80	41,5	34,5	83,13
343	Évora	42	42	36	85,71	41,5	36,5	87,95
344	Lisboa	61	43,5	32,5	74,71	44,5	32	71,91

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq. Largura orbitária	Órbita Esq. Altura orbitária	Índice orbitário	Órbita Dir. Largura orbitária	Órbita Dir. Altura orbitária	Índice orbitário
345	Lisboa	23	41,5	37	89,16	43	37	86,05
346	Beja	70	43	35	81,40	43,5	34,5	79.31
347	Lisboa	46	38	29	76,32	39	29	74,36
350	?	80	42	38	90,48	42	38	90,48
351	Coimbra	42	41,5	30	72,29	41,5	30	72,29
352	Lisboa	66	45	36	80	46	36	78,26
355	»	64	43,5	35,5	81,61	43,5	35	80,46
356	»	55	41	31	75,61	41	31,5	76,83
357	Braga	61	38,5	35	90,91	40	35	87,50
359	Viseu	40	41	32	78,05	40,5	32	79,01
361	Faro	34	40,5	36	88,89	43	35	81,40
364	»	34	42,5	34	80	42,5	33,5	78,83
365	Lisboa	72	40,5	33,5	82,71	40	32	80
366	»	62	42,5	32,5	76,47	43	32,5	75,58
367	Santarém	39	42,5	35,5	83,53	43	35	81,40
368	Lisboa	52	43	33,5	77,90	43,5	34,5	79,31
369	Santarém	54	43	35	81,40	44,5	35	78,65
372	Lisboa	45	46,5	35	75,27	46	36	78,26
373	»	43	43	35	81,40	44	34	77,27
374	?	40	40,5	32	79,01	43	30,5	70,93
376	Coimbra	24	39	32,5	83,33	39,5	31	78,48
377	Aveiro	29	38	30	78,95	39,5	29,5	74,68
382	Coimbra	70	41,5	33	79,52	40,5	33	81,48
385	Viseu	42	42	35	83,33	42,5	33,5	76,47
386	Cuarda	41	41,5	34,5	83,13	43,5	35	80,46
387	Coimbra	68	41,5	28,5	68,67	43,5	29	66,67
388	?	60	42,5	33	77,65	43	33,5	77,90
389	Leiria	47	43	31	72,09	45	31,5	70
390	?	?	37,5	29	77,33	36,5	28,5	78,08
391	Viseu	44	40	29,5	73,75	40,5	30,5	75,30
392	Leiria	?	43,5	30,5	70,12	44	30	68,18
393	?	45	43	35	81,40	44,5	33,5	77,24
394	?	?	44	33,5	76,14	45	34	75,56
398	Lisboa	75	43,5	35	80,46	43,5	34,5	79,31
399	Évora	73	41	29,5	71,95	41,5	28	67,47
400	Coimbra	65	41,5	36,5	87,95	42,5	37	87,06
403	Lisboa	56	42,5	35,5	83,53	42	35	83,33
406	Santarém	73	41,5	35	84,34	41,5	35	84,34
408	Coimbra	61	42	35	83,33	44,5	35,5	79,77
410	Lisboa	50	43,5	32	73,56	45	32	71,11
411	Leiria	50	41,5	34	81,93	43,5	34,5	79,31
412	Lisboa	60	41,5	34,5	83,13	41,5	33	79,52
413	?	65	39,5	34,5	87,35	40,5	35	86,42
415	Aveiro	26	40,5	34	83,95	41,5	33,5	80,72
416	Santarém	?	42,5	30,5	71,77	43,5	31	71,26
421	Leiria	36	41,5	34	81,93	42	33,5	79,76
422	Porto	55	43,5	32,5	74,71	43	32	74,42
424	Lisboa	48	40,5	35,5	87,65	42,5	35,5	83,53
426	Coimbra	78	43,5	31	71,26	44	31,5	71,59
427	»	50	37	34,5	93,24	40	34,5	86,25
428	Lisboa	76	41	34,5	84,15	42	33	78,57
429	Coimbra	44	44,5	34	76,40	45	34	75,56

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitária	
430	Leiria	60	43,5	33	75,86	43	34,5	80,23
431	»	55	40	34	85	42,5	33	77,65
432	Faro	60	40	36	90	42	36	85,71
433	Lisboa	67	45	34,5	76,66	45,5	34,5	75,83
435	»	52	38	31	81,58	39,5	30,5	77,22
436	»	58	42	32	76,69	42	31,5	75
437	Évora	35	39	32	82,05	38,5	31,5	81,82
438	Lisboa	53	40,5	32	79,01	40,5	32	79,01
439	»	48	40,5	32	79,01	40,5	32	79,01
444	Beja	?	38	30,5	80,27	38,5	30,5	79,22
445	»	66	42	32	76,19	42	32	76,19
446	Lisboa	60	40	33	82,50	40	30	75
447	Coimbra	?	40	31,5	78,75	39,5	31,5	77,22
448	Lisboa	30	39	33,5	85,90	41	33	80,49
449	Coimbra	?	41,5	30	72,29	43	30	69,77
450	Guarda	70	41,5	33	79,52	42,5	30,5	71,77
451	Leiria	70	38	31	81,58	40,5	31,5	77,77
452	Coimbra	58	40,5	31,5	77,77	40,5	31,5	77,77
453	»	37	42	33	78,57	43	33	76,74
456	»	75	42,5	33	77,65	43,5	33	75,86
457	»	80	42	34	80,95	42,5	34	80
459	»	41	40,5	34	83,95	41,5	34	81,93
462	Leiria	?	40,5	36,5	90,12	43,5	35,5	81,61
464	Coimbra	70	40	35	87,50	40,5	34,5	85,18
467	Leiria	31	41,5	34,5	83,13	43,5	35	80,46
469	Coimbra	70	42	31,5	75	41,5	30,5	73,49
471	?	80	41,5	33	79,52	43	33,5	77,90
474	Coimbra	70	45	36	80	45,5	36	79,12
475	»	60	41	31,5	76,83	42	33	78,57
476	»	70	41,5	33	79,52	43	32,5	75,58
480	Aveiro	40	40	33,5	82,50	42,5	33	77,65
482	Leiria	40	44,5	36,5	82,02	43	36	83,72
483	Coimbra	38	39	31,5	80,77	40,5	30	74,07
484	Leiria	60	40	32	80	41	31,5	76,83
485	Coimbra	80	42,5	35,5	83,53	43,5	35	80,46
487	»	70	40,5	28,5	70,37	40,5	28	69,14
488	Leiria	30	42	31	73,81	43	31	72,09
490	Viseu	47	43	34	79,07	43,5	32,5	74,71
491	Coimbra	47	40,5	35,5	82,71	41,5	34	81,93
494	»	25	40,5	34	83,95	39,5	33,5	84,81
495	Aveiro	42	44	33	75	43,5	33	75,86
497	Guarda	23	40	37	92,50	40	37	92,50
498	Santarém	60	39,5	31	78,48	39,5	30	75,95
501	Guarda	76	42	30	71,43	43,5	30	68,97
502	Lisboa	74	42,5	33	77,65	44	33	75
503	»	50	44	36	81,82	43,5	35,5	81,61
505	»	44	43	34,5	80,23	43,5	34,5	79,31
506	Viseu	59	42	32	76,19	42	31,5	75
508	Lisboa	40	40,5	32,5	80,24	41,5	33	79,52
509	Coimbra	41	44	35,5	80,69	43,5	36	82,76
513	Lisboa	61	41,5	33,5	80,72	42,5	33,5	77,83
514	Santarém	49	42,5	34,5	81,18	41,5	35,5	85,54

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq		Índice orbi-tário	Órbita Dir.		Índice orbi-tário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitária	
516	Santarém	26	40,5	33	81,48	40.5	31,5	77,77
517	Beja	52	40	36	90	41	36,5	89,02
518	Lisboa	79	44,5	32	71,91	44,5	32	71,91
519	»	60	43.5	35	80,46	43,5	35,5	81.61
520	Viseu	57	42,5	34	81,18	43	34	79,07
522	Santarém	33	44,5	34	76,40	44,5	34,5	77,52
523	Lisboa	41	41.5	33,5	80,72	41,5	36	86,75
524	Coimbra	62	40	32,5	81,25	40	31.5	78,75
526	Santarém	53	43	34	79,07	45	34,5	76,66
528	?	47	43	30,5	70,93	43.5	30	68.97
529	Évora	51	39,5	36,5	92,41	40	35,5	88,75
530	Aveiro	55	43	35	81,40	43,5	35,5	81,61
531	Braga	46	42,5	35,5	83,53	42,5	35.5	83,53
532	Lisboa	68	41,5	32,5	78,31	41	33	80,49
533	»	80	42	35,5	84.52	42,5	35	82,35
534	Viseu	55	37,5	29,5	78.66	38,5	29,5	76,62
539	Leiria	49	42	35,5	84,52	42,5	34,5	81,18
540	Lisboa	50	41,5	36	86.75	41,5	35,5	85,54
546	»	36	41,5	36,5	87.95	41,5	36,5	87,95
547	Castelo Branco	33	41,5	32,5	78,31	43,5	32	73,56
5.9	Lisboa	73	39	30	76,92	39,5	29,5	74.69
550	Aveiro	69	42	32	76,19	45	32	71,11
553	Lisboa	50	42	37	88.10	43,5	36,5	83,91
554	Portalegre	58	41,5	34	81,93	43	35,5	82,56
555	Lisboa	58	43,5	33	75,86	42	34,5	82,14
556	Coimbra	92	43	33	76,74	43	33	76,74
559	Lisboa	50	40,5	31,5	77,77	42	32	76,19
561	»	51	41,5	36	86,75	41.5	36	86,75
562	»	78	42	34	80,95	43.5	34	78,16
563	Guarda	37	40,5	33	81,48	42,5	33,5	78,83
564	Beja	49	43	35	81,40	42,5	34	80
566	Faro	37	40,5	33	81,48	41,5	33,5	80,72
568	Vila Real	43	40.5	34	83,95	41	34	82,93
569	Lisboa	48	41,5	31,5	75,90	41	31	75,61
570	Coimbra	50	41,5	33	79,52	41,5	33	79.52
571	Viana do Castelo	55	44,5	34	76,40	47	33,5	71,27
572	Lisboa	65	40	33,5	83,75	42	34,5	82,14
573	Guarda	62	45	36	80	45	36	80
574	Lisboa	40	43,5	30	68,97	43	33	76,74
575	?	58	42,5	32,5	76,47	42,5	32,5	76,47
576	Lisboa	74	40	34,5	86,25	41	35	85,37
577	»	62	43.5	32,5	74,71	44,5	33,5	75.28
578	Évora	50	41,5	34	81.93	41,5	33,5	80.72
580	Leiria	50	39	35	89,74	40	35	87,50
584	Lisboa	72	42	35,5	84,52	42	35,5	84,52
1-a	Coimbra	67	45	39	86,67	45	40	88,89
3-a	»	60	40	33	82,50	41,5	34,5	83,13
4-a	»	25	38,5	32	83,12	40	32,5	81,25
8-a	»	54	48,5	33	68,04	47	33	70,21
11-a	»	64	40.5	33,5	82,71	42	32	76,19
14-a	Santarém	30	40	33	82,50	41	33	80,49
18-a	Castelo Branco	49	44	38,5	87,50	44,5	38,5	86,51

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitaria	
21-a	Viseu	67	41,5	29	69,88	42,5	30	70,59
24-a	Coimbra	60	42	32,5	77,38	43,5	32	73,56
28-a	»	41	41,5	33,5	80,72	42,5	34	80
31-a	»	62	42,5	33	77,65	42	32,5	77,38
34-a	»	65	43	34	79,07	44,5	34,5	77,52
35-a	»	54	40,5	30,5	75,30	40,5	31	76,54
37-a	»	49	44	37	84,09	44,5	36,5	82,02
38-a	»	39	41,5	34,5	83,13	42,5	34,5	81,18
43-a	»	42	40,5	32,5	80,24	42	32,5	77,38
44-a	»	46	41	35,5	86,59	41,5	35	84,34
45-a	»	21	42,5	34	80	45	34,5	76,67
46-a	»	38	40,5	33	81,48	41,5	33	79,52
47-a	»	23	42,5	33	77,65	43	32,5	75,58
53-a	»	42	39	33	84,62	40,5	34	83,95
56-a	»	65	43	38	88,37	43	37,5	87,21
60-a	»	48	41	31	75,61	41,5	31	74,70
61-a	Viana do Castelo	55	40	35	87,50	41	35	85,37
64-a	Coimbra	45	42	33	78,57	41,5	33	79,52
65-a	»	64	43	34,5	80,23	43,5	34	78,16
68-a	»	44	39	34,5	88,46	39,5	35	88,61
70-a	Guarda	53	42	33	78,57	42	33	78,57
71-a	Coimbra	49	42	32,5	77,38	43	32,5	75,58
72-a	Castelo Branco	76	42	34,5	82,14	42,5	33,5	78,83

CRÂNIOS FEMININOS

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitária	
2	Faro	40	38	36	97,74	40,5	36	88,89
12	Lisboa	65	38	31	81,58	39	30	76,92
19	Porto	40	39,5	32	81,01	41	31,5	76,83
20	Lisboa	28	39,5	35	88,61	41	35	85,37
21	Coimbra	34	39,5	33,5	84,81	40,5	35	86,42
25	Lisboa	70	40,5	28	69,14	42	27,5	65,48
26	Santarém	46	43	36	83,72	43,5	37	85,06
30	Coimbra	23	42	32,5	77,38	43	32	74,42
31	Lisboa	27	40	30	75	40	33	82,50
32	Coimbra	65	40	35	87,50	43	35	81,40
34	Lisboa	84	42	33,5	79,76	43,5	33	75,86
42	Coimbra	40	41,5	30,5	73,49	43,5	28,5	65,52
44	Lisboa	80	—	—	—	42,5	33	77,65
48	»	77	41	31	75,61	42	30	71,43
49	»	35	41	33,5	81,71	43,5	33	75,86
52	»	67	38	32,5	85,53	39,5	32	81,01
61	Bragança	40	38,5	37	96,10	39	36	92,31
66	Lisboa	65	42	34	80,95	43	33	76,74
67	Leiria	70	41	29,5	71,95	42	29,5	70,24
70	Santarém	66	37	33,5	90,54	37,5	32	85,33
71	Lisboa	24	41	32	78,05	42	31	73,81
73	»	90	38,5	30,5	79,22	39	29,5	75,64
75	Viseu	26	40	35	87,50	39,5	35	88,61
76	Beja	21	37	31,5	85,13	38,5	31	80,52
77	Lisboa	60	39	32,5	83,33	40	32	80
81	Faro	50	40,5	33	81,48	41	33	80,49
83	Lisboa	22	39	33,5	85,90	39	34	87,18
85	»	34	40	33,5	83,75	42	32,5	77,38
86	»	60	42	35	83,33	42	33,5	79,76
88	»	45	38,5	35	90,91	39,5	34	86,08
92	Coimbra	70	42	35	83,33	43	34	79,07
96	»	23	39	31	79,49	40	32	80
99	»	70	41,5	34,5	83,13	42	36	85,71
101	Aveiro	40	40	31	77,50	40	31	77,50
107	Coimbra	50	39	31,5	80,77	39	31,5	80,77
109	Leiria	25	40	33,5	83,75	41	34	82,93
111	Coimbra	45	37	29,5	79,73	36	30	83,33
112	Vila Real	22	40	32,5	81,25	40	32,5	81,25
114	Coimbra	29	38	32,5	85,53	40	33	82,50
116	»	34	39,5	34	86,08	41,5	33,5	80,72
117	»	38	36	32	88,89	36	33	91,67

N.^{os}	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitária	
118	Guarda	22	39	30,5	78,20	40	29	72,50
121	Lisboa	25	39	33	84,62	39	32,5	83,33
122	Leiria	28	38	29,5	77,64	37	29	78,38
127	»	48	38	29	76,32	38	28	73,68
129	Coimbra	38	40	30,5	76,25	41	30,5	74,39
130	Aveiro	22	39	32	82,05	40,5	31	76,54
132	Porto	78	42	30	71,43	42	29	69,05
134	Braga	55	37	31,5	85,13	38	30,5	80,27
138	Porto	68	39	33,5	85,90	—	—	—
139	Braga	70	38,5	32	83,12	39	32,5	83,33
140	Porto	45	39	32	82,05	39,5	32	81,01
141	Braga	60	42	33	78,57	40,5	33,5	83,07
143	Porto	40	39,5	33,5	84,81	40	33	82,50
144	Braga	40	39,5	31	78,48	41,5	31	74,70
148	Porto	33	40	31,5	78,75	39,5	32	81,01
149	»	35	41,5	31,5	75,90	41	30	73,17
151	Braga	27	40	32,5	81,25	40	32	80
155	Viseu	33	39,5	30	75,95	40	30	75
159	Braga	60	38,5	34,5	89,61	40,5	34	83,95
160	Porto	32	38	33	86,48	39	34	87,18
165	»	?	40	32	80	40	32	80
173	»	70	38,5	32,5	84,42	40	32	80
174	Aveiro	40	41	37	90,24	41,5	37,5	90,36
175	Porto	22	41,5	34,5	83,13	42	34	80,95
176	»	34	36	27,5	76,39	37	28	75,68
177	»	60	40,5	33	81,48	41,5	33,5	80,72
178	»	50	40,5	32	79,01	41,5	32	77,11
179	»	28	39,5	30	75,95	39,5	29,5	74,69
180	»	50	39,5	33	83,54	41,5	32,5	78,31
181	Viseu	30	39,5	33,5	84,81	39,5	33,5	84,81
185	Braga	56	40,5	31	76,54	40,5	30,5	75,30
187	Porto	64	39	33,5	85,90	39,5	33	83,54
188	Viseu	61	40,5	37	91,36	40	37,5	93,75
191	»	34	38	31	81,58	38	31	81,58
192	Aveiro	50	39	31	79,49	39	31	79,49
196	»	45	39	33,5	85,90	39	32,5	83,33
198	Porto	56	39,5	29,5	74,69	39	30	76,92
199	»	47	43	36	83,72	43	34,5	81,23
200	»	89	40	35,5	88,75	39,5	35	88,61
201	»	55	40,5	35	86,42	39	35	89,74
204	Bragança	26	41	30	73,17	40,5	31	76,54
206	Porto	45	40	32,5	81,25	41	32,5	79,27
208	Viseu	28	41,5	35	84,34	41,5	36	86,75
209	Porto	45	41,5	39	93,98	42	39,5	94,05
213	»	47	41	32	78,05	40	32,5	81,25
214	»	29	37	31	83,78	37,5	31,5	84
215	»	24	39	31,5	80,77	39,5	30,5	77,22
218	Aveiro	40	38	32,5	85,53	38	33	86,84
219	Porto	29	42	33,5	79,77	42	33,5	79,76
220	»	40	39	34,5	88,46	40	33	82,50
224	»	70	40	34,5	86,25	40	34	85
227	Coimbra	30	37,5	30	80	37,5	30	80

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitária	
229	Coimbra	25	36,5	30	82,19	38,5	29,5	76,62
230	Lisboa	31	39,5	30,5	77,22	39,5	30,5	77,22
234	Coimbra	40	40,5	30,5	75,30	40	31	77,50
239	»	95	39	36	92,31	38,5	34	88,31
242	Aveiro	50	40,5	32,5	80,24	40,5	33,5	82,71
243	Coimbra	65	43	34	79,07	45	35	77,78
249	»	42	42	34	80,95	42	34	80,95
259	»	90	40	34,5	86,25	40	34	85
261	»	70	39	32,5	83,33	40	32,5	81,25
263	»	58	42	33	78,57	42,5	33	77,65
268	»	33	40	30,5	76,25	39,5	30,5	77,22
272	Lisboa	60	38	33	86,84	38	34	89,47
273	Beja	42	46,5	36,5	78,50	45	36	80
277	?	60	38,5	34	88,31	39,5	34	86,08
282	Vila Real	28	37,5	29,5	78,66	39	31,5	80,77
286	Lisboa	66	39	33,5	87,70	40,5	33	81,48
287	»	66	40,5	31	76,54	41,5	31,5	75,90
288	Beja	80	41,5	33,5	80,70	41,5	34,5	83,13
291	Lisboa	50	41	35	85,37	41	32,5	79,27
292	Porto	70	40	32	80	40	32	80
295	Lisboa	75	38	30	78,95	39	31	79,49
299	»	50	41,5	34	81,93	41,5	33	79,52
308	Coimbra	27	41,5	34,5	83,13	41,5	35	84,34
311	Lisboa	70	46	34,5	75	45,5	34,5	75,83
312	Guarda	49	—	—	—	—	—	—
318	Coimbra	56	44	33,5	76,14	42,5	34,5	81,18
320	Guarda	23	43,5	32	73,56	44	32	72,73
323	Lisboa	33	38	32	84,21	38	32	84,21
328	Leiria	60	37,5	34	90,67	39	34,5	88,46
329	Lisboa	56	42	32,5	77,38	42	31,5	75
332	Castelo Branco	60	41	32,5	79,27	43	32	74,42
340	Leiria	23	38	35	92,11	39	35,5	91,02
341	Lisboa	23	39,5	34,5	86,35	40,5	34	83,95
348	Castelo Branco	24	39,5	30	79,95	39,5	29	73,42
349	?	35	40	34,5	86,25	40	34,5	86,25
358	Guarda	48	38,5	33	85,71	40,5	32,5	80,24
360	Lisboa	31	40	33,5	83,75	40,5	33	81,48
362	Viseu	21	41	36,5	89,02	42,5	36	84,71
363	»	37	39	33,5	85,90	41	32,5	79,27
370	Lisboa	40	38,5	29,5	76,62	38,5	30,5	79,22
371	»	?	37	29,5	79,73	38	30	79,95
375	Coimbra	47	40,5	33,5	82,71	40,5	32,5	80,24
378	»	35	39	33	84,62	39	33	84,62
379	»	30	38	33,5	88,16	39,5	31,5	79,75
380	Lisboa	40	39,5	30,5	77,22	41,5	30	72,29
381	Coimbra	32	40,5	33,5	82,71	41,5	33	79,52
383	»	60	44,5	35,5	79,77	46	35,5	77,18
384	Viseu	68	38,5	30	77,92	39	30,5	78,20
395	Leiria	59	40,5	32	79,01	40,5	30	74,07
396	Lisboa	86	39	32	82,05	40,5	32	79,01
397	?	60	42,5	34	80	42,5	31	72,94
401	?	50	42,5	32	75,29	43,5	32	73,56

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbi-tário	Órbita Dir.		Índice orbi-tário
			Largura orbitária	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitaria	
402	?	65	42,5	34	80	43	34	79,07
404	Aveiro	66	42	36	85,71	44,5	36	80.90
405	Lisboa	87	40	35	87,50	40,5	34,5	85,18
407	»	80	41,5	33	79,52	—	—	—
409	»	60	41	35	85,37	40,5	35,5	87,65
414	Faro	35	40,5	35,5	87,65	41,5	35,5	85,54
417	Castelo Branco	25	40,5	32,5	80,24	40,5	32,5	80,24
418	Lisboa	55	39,5	31,5	79,75	40,5	31	76.54
419	»	80	40,5	32	79.01	40	32	80
423	»	55	38	31,5	82,90	39	31,5	80,77
425	?	69	39,5	34	86,08	39,5	34	86,08
434	Vila Real	28	36,5	32,5	89,04	38	32,5	85,53
442	?	80	43	36	83,72	44,5	35	78,65
443	Faro	55	40,5	36	88,89	42	35,5	84,52
454	Évora	66	37,5	31	82,67	39	31,5	80,77
455	Coimbra	60	38,5	30	77,92	39	31	79,49
458	»	50	36,5	31	84,93	38,5	30,5	79,22
460	»	60	41	33	80,49	40,5	32,5	80,24
461	Leiria	41	40,5	30,5	75,30	41,5	30	72,29
465	Coimbra	74	42,5	32	75,29	43	31,5	73,25
468	»	60	39,5	33,5	84,81	40	32	80
470	»	63	42,5	32,5	76,47	43	33,5	77,90
472	»	71	40,5	34,5	85,18	41	35,5	86,59
473	Aveiro	40	41	33,5	81,71	41,5	33	79,52
477	Leiria	70	38,5	31,5	81,82	39,5	31	78,48
478	Coimbra	60	40	34	85	42,5	33,5	78,83
479	»	72	43	37,5	87,21	42,5	36 5	85,89
481	?	75	41,5	33,5	80,72	42,5	33	77,65
486	Coimbra	80	41	34	82,93	41,5	33,5	80,72
489	Leiria	45	40,5	32	79,01	40,5	31,5	77.77
492	Coimbra	44	38,5	30	77,92	41	30	73,17
493	»	23	40,5	32	79,01	40,5	32	79,01
496	»	32	42	32	76,19	42	33	78,57
499	Lisboa	68	39	33	84,62	39,5	33,5	84,81
500	Coimbra	64	43	33	76,74	44	36	81,82
504	Lisboa	50	46	35	76,09	43,5	35,5	81.61
507	Évora	61	40	36	90	41,5	36	86,75
510	Leiria	32	40	33	82,50	40,5	33	81,48
511	Lisboa	91	40,5	34	83.95	40	33	82,50
412	»	40	41,5	36	86,75	42	35,5	84,52
515	»	25	38,5	32	83,12	39	32	82,05
521	»	80	41	34,5	84,15	41,5	34,5	83,13
525	Viseu	44	38	30,5	80,27	40	30,5	76,25
527	Lisboa	40	39,5	35,5	89,88	40	35	87.50
535	»	60	40,5	32,5	80,24	40,5	32,5	80,24
536	»	50	41,5	32,5	78,31	40,5	31,5	77,77
537	Leiria	55	39,5	32,5	82,28	40,5	32	79,01
538	Lisboa	54	41	34,5	84,15	42	35,5	84,52
541	»	80	41,5	34,5	83,13	41,5	34,5	83,13
542	»	50	39	33	84,62	40	33,5	83,75
543	Faro	90	42	33	78,57	41,5	33,5	80,72
544	Castelo Branco	40	41	34	82,93	41	34,5	84,15

N.os	Naturalidade (Distritos)	Idade (Anos)	Órbita Esq.		Índice orbitário	Órbita Dir.		Índice orbitário
			Largura orbitaria	Altura orbitária		Largura orbitária	Altura orbitari.	
545	Santarém	70	40,5	32,5	80,24	40	34	85
548	Lisboa	87	39	32,5	83,33	40	33	82,50
552	Faro	64	39	29,5	75,64	42,5	30	70,59
557	Lisboa	32	37,5	30	80	37,5	28	74,67
558	»	40	39	30,5	78,20	39,5	29	73,42
562	»	82	41,5	31,5	75,90	41,5	31,5	75,90
567	»	63	40,5	37	93,67	40,5	37,5	92,59
579	Évora	58	42,5	35	82,35	43,5	35,5	81,61
581	Lisboa	58	39,5	34	86,08	41,5	35	84,34
582	»	60	40,5	33,5	82,71	40,5	35	86,42
583	»	65	39	36,5	93,59	39	36	92,31
585	»	73	39	32	82,05	39	32	82,05
2-a	Coimbra	30	38,5	32,5	84,42	40,5	31,5	77,77
7-a	Aveiro	62	40	32	80	41	31,5	76,83
9-a	Porto	48	40	32	80	41	32,5	79,27
10-a	»	21	42	34	80,95	44	33,5	76,14
13-a	Coimbra	84	37,5	32	85,33	39	33	84,62
15-a	»	78	41	32,5	79,27	43	32,5	75,58
16-a	»	40	38	34	89,47	38,5	34	88,31
17-a	»	52	40	31	77,50	43	31	72,09
19-a	Vila Real	62	41	33	80,49	41	32,5	79,27
20-a	Coimbra	75	39,5	38	96,20	41,5	39	93,98
23-a	»	55	39,5	35	88,61	39,5	35	88,61
25-a	Guarda	37	39	35	89,74	38,5	33,5	87,01
26-a	Coimbra	80	42	35,5	84,52	42	35	83,33
27-a	»	80	41,5	37	89,16	43	37,5	87,21
29-a	»	80	41,5	34	81,93	42	33,5	79,76
30-a	»	35	42,5	33,5	78,83	42,5	33	77,65
32-a	»	77	45	34	75,56	44	33	75
36-a	Viseu	39	40,5	33	81,48	39	33	84,62
39-a	Coimbra	65	39	30	76,92	38	30	78,95
40-a	»	70	43	33,5	77,90	42	32,5	77,38
41-a	Guarda	60	38	31,5	82,90	39,5	31,5	78,65
42-a	»	25	37	32	86,49	37,5	32,5	86,66
48-a	Coimbra	74	41	34,5	84,15	41	33,5	81,71
52-a	Porto	38	38	34	89,47	38	34	89,47
54-a	Viseu	38	42	32,5	77,38	43,5	32,5	74,71
55-a	Coimbra	60	38,5	35	90,91	38,5	35	90,91
57-a	»	50	40	33	82,50	40,5	34	83,95
58-a	»	74	42	34	80,95	41,5	33	79,52
62-a	Lisboa	55	39	33,5	85,90	39,5	34	86,08
66-a	Coimbra	63	40	37	92,50	40,5	36,5	90,12
67-a	»	21	41,5	33,5	80,72	41,5	33,5	80,72
69-a	»	30	37	33,5	90,54	37,5	33,5	89,33

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida ao DIRECTOR DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, com a indicação de que se refere à REVISTA.