Se for $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a segunda das equações precedentes dá

$$\sum_{1}^{n} A_i \cos x_i.$$

Das fórmulas precedentes deduzem-se algumas das fórmulas fundamentaes da Trigonometria.

[*M. C. A. Laisant: Théorèmes de Trigonométrie* (*Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. xv)].

SOBRE A DERIVAÇÃO DAS FUNCÇÕES COMPOSTAS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Tem-se ultimamente proposto uma duvida contra a demonstração que habitualmente se dava do theorema relativo á derivação das funcções compostas, o que levou a restringir o numero das funcções a que o theorema se applica, impondo-lhe condições a que têem de satisfazer. Vamos expôr esta demonstração, a duvida a que dá logar, e as condições para que o theorema tenha logar.

Seja

$$y = f(u, v),$$

$$u = \varphi_1(x), \quad v = \varphi_2(x)$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x. Chamando k e l os augmentos infinitamente pequenos de u e v correspondentes ao augmento infinitamente pequeno h de x, temos, considerando v como constante,

$$f(u+k, v) = f(u, v) + k\frac{df(u, v)}{du} + \alpha k,$$

onde α representa uma funcção de u, v e k, infinitamente pequena com k; e considerando u como constante

$$f(u, v+l) = f(u, v) + l\frac{df(u, v)}{dv} + \alpha_1 l,$$

onde α_1 representa uma funcção de u, v e l, infinitamente pequena com l.

Suppondo $\dfrac{df(u,v)}{du}$ uma funccção continua de v, temos

$$\frac{df(u,v+l)}{du}=\frac{df(u,v)}{du}+\alpha_2,$$

onde α_2 é infinitamente pequeno com l.

Mudando na primeira das tres fórmulas precedentes v em $v+l$ e attendendo ás duas ultimas, vem

$$f(u+k,v+l)=f(u,v)+k\frac{df}{du}+l\frac{df}{dv}$$
$$+\alpha' k+\alpha_2 k+\alpha_1 l,$$

chamando α' o valor que toma a funcção α quando se muda v em $v+l$.

Temos, pois, quando h tende para zero,

$$y'=\lim\frac{f(u+k,v+l)-f(u,v)}{h}=\frac{dy}{du}u'+\frac{dy}{dv}v'.$$

Para tirar esta conclusão suppõe-se que a funcção α', que tende para zero com k quando é $l=0$, ainda tende para zero quando k e l tendem simultaneamente para zero, o que nem sempre se dá.

Procuremos, pois, a condição para que α' tenda para zero quando k e l tendem simultaneamente para zero.

Em virtude da fórmula de Lagrange temos

$$\alpha=\frac{1}{2}k\frac{d^2f(u+\theta k,v)}{du^2},$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, e portanto

$$\alpha'=\frac{1}{2}k\frac{d^2f(u+\theta k,v+l)}{du^2};$$

logo, para que α' tenda para zero, basta que a derivada

$$\frac{d^2 f(u,v)}{du^2}$$

seja finita na vizinhança do ponto (u, v).

Nota. Tudo o que vem de ser dicto para o caso das variaveis reaes applica-se ao caso das variaveis imaginarias, como mostraremos n'outro logar.

II

Consideremos agora a funcção composta

$$y = f(u, v, w),$$

onde u, v e w representam funcções de x.

Temos, chamando l_1, l_2 e l_3 os augmentos de u, v e w correspondentes ao augmento h de x,

$$f(u + l_1, v, w) = y + l_1 \frac{dy}{du} + \frac{1}{2} l^2_1 \frac{d^2 f(u + \theta_1 l_1, v, w)}{du^2},$$

$$f(u, v + l_2, w) = y + l_2 \frac{dy}{dv} + \frac{1}{2} l^2_2 \frac{d^2 f(u, v + \theta_2 l_2, w)}{dv^2},$$

$$f(u, v, w + l_3) = y + l_3 \frac{dy}{dw} + \alpha l_3,$$

onde α tende para zero quando l_3 tende para zero, e onde θ_1 e θ_2 representam quantidades positivas menores do que a unidade.

Mudando na primeira fórmula v em $v + l_2$, e attendendo á segunda e á fórmula

$$\frac{df(u, v + l_2, w)}{du} = \frac{dy}{du} + l_2 \frac{d^2 f(u, v + \theta\, l_2, w)}{du\, dv},$$

vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w) = y + l_1\frac{dy}{du} + l_2\frac{dy}{dv}$$

$$+\frac{1}{2}l^2{}_1\frac{d^2f(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w)}{du^2}$$

$$+l_1\ \ l_2\ \ \frac{d^2f(u, v+\theta l_2, w)}{du\,dv}$$

$$+\frac{1}{2}l^2{}_2\frac{d^2f(u, v+\theta_2 l_2, w)}{dv^2}.$$

Suppondo $\dfrac{df(u, v, w)}{du}$ e $\dfrac{df(u, v, w)}{dv}$ funcções continuas de w, temos

$$\frac{df(u, v, w+l_3)}{du} = \frac{dy}{du} + \alpha_1$$

$$\frac{df(u, v, w+l_3)}{dv} = \frac{dy}{dv} + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são quantidades infinitamente pequenas com l_3.

Mudando agora w em $w+l_3$, vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w+l_3) = y + l_1\frac{dy}{du} + l_2\frac{dy}{dv} + l_3\frac{dy}{dw}$$

$$+\frac{1}{2}l^2{}_1\frac{d^2f(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w+l_3)}{du^2}$$

$$+l_1 l_2\ \ \frac{d^2f(u, v+\theta l_2, w+l_3)}{du\,dv}$$

$$+\frac{1}{2}l^2{}_2\frac{d^2f(u, v+\theta_2 l_2, w+l_3)}{dv^2}$$

$$+\alpha l_3 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2.$$

Quando h tende para zero temos pois

$$y' = \frac{dy}{du} u' + \frac{dy}{dv} v' + \frac{dy}{dw} w',$$

quando têem logar as seguintes condições:

1.° As funcções

$$\frac{dy}{du}, \quad \frac{dy}{dv}$$

são funcções continuas de w no ponto (u, v, w).

2.° As derivadas

$$\frac{d^2y}{du^2}, \quad \frac{d^2y}{du\,dv}, \quad \frac{d^2y}{dv^2}$$

são finitas na vizinhança do ponto (u, v, w).

III

Habitualmente acham-se as condições para que o theorema das funcções compostas tenha logar recorrendo só ás derivadas de primeira ordem, como vamos ver.

O theorema de Lagrange dá

$$f(u+k, v+l) = f(u, v+l) + k \frac{df(u+\theta_1 k, v+l)}{du}$$

$$f(u, v+l) = f(u, v) + l \frac{df(u, v+\theta_2 l)}{dv}$$

onde θ_1 e θ_2 representam quantidades positivas menores do que a unidade.

Temos pois

$$f(u+k, v+l) = f(u, v) + l\,\frac{df(u, v+\theta_2 l)}{dv}$$

$$+ k\,\frac{df(u+\theta_1 k, v+l)}{du}.$$

Logo se

$$\frac{df(u, v)}{dv}$$

é funcção continua de v no ponto (u, v); e se

$$\frac{\delta f(u, v)}{\delta u}$$

é funcção continua de u e v no ponto (u, v), vem

$$f(u+k, v+l) = f(u, v) + k\,\frac{dy}{du} + l\,\frac{\delta y}{\delta v} + \alpha_1 k + \alpha_2 l$$

onde α_1 e α_2 tendem para zero quando k e l tendem para zero.

D'esta fórmula deduz-se o theorema das funcções compostas.

No caso da funcção

$$y = f(u, v, w)$$

temos

$$f(u+l_1, v, w) = y + l_1\,\frac{df(u+\theta_1 l_1, v, w)}{du},$$

$$f(u, v+l_2, w) = y + l_2\,\frac{df(u, v+\theta_2 l_2, w)}{dv},$$

$$f(u, v, w+l_3) = y + l_3\,\frac{df(u, v, w+\theta_3 l_3)}{dw},$$

Mudando na primeira fórmula v em $v+l_2$ e attendendo á segunda, vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w) = y + l_1 \frac{df(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w)}{du} + l_2 \frac{df(u, v+\theta_2 l_2, w)}{dv}.$$

Mudando n'esta fórmula w em $w+l_3$ e attendendo á anterior, vem

$$f(u+l_1, v+l_2, w+l_3) = y + l_1 \frac{df(u+\theta_1 l_1, v+l_2, w+l_3)}{du} + l_2 \frac{df(u, v+\theta_2 l_2, w+l_3)}{dv} + l_3 \frac{df(u, v, w+\theta_3 l_3)}{dw}.$$

D'esta egualdade tira-se o theorema das funcções compostas quando a derivada $\frac{dy}{dw}$ é funcção continua de w; a derivada $\frac{dy}{dv}$ é funcção continua de v e w; e a derivada $\frac{dy}{du}$ é funcção continua de u, v e w.

Do mesmo modo se procede no caso das funcções compostas de mais de tres funcções.

Nota. O processo precedente não tem logar no caso das variaveis imaginarias.

IV

No seu excellente *Resumé du Cours d'Analyse infinitésimal de l'Université de Gand*, o sr. P. Mansion demonstra directamente que o theorema relativo á derivação das funcções compostas tem logar no caso das funcções encontradas nos Elementos. Vamos transcrever aqui a demonstração dada por este illustre geometra.

As quatro fórmulas, que se acham directamente:

$$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv,$$

$$(u + v - w)' = u' + v' - w',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \log u,$$

mostram que o theorema da derivação das funcções compostas tem logar no caso em que a funcção

$$F(u, v, w)$$

representa uma das quatro funcções

$$u + v - w, \quad uvw, \quad \frac{u}{v}, \quad u^v.$$

1.° Mostremos agora que se o theorema é verdadeiro para a funcção $s = F(u, v, w)$, tambem é verdadeiro para a funcção $y = f(s)$.

Com effeito, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

e

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{ds}{dw} \cdot \frac{dw}{dx};$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dw}\frac{dw}{dx},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx},$$

que é o theorema que se queria demonstrar.

2.° Sejam agora s e t duas funcções de u e v, funcções de x, e supponhamos que a regra de derivação das funcções compostas tem logar para s e t consideradas como funcções de u e v, u e v sendo funcções de x; para y considerado como funcção de s e t, s e t sendo funcções de x; para y considerado como funcção de s e t, s e t sendo funcções de u; para y considerado como funcção de s e t, s e t sendo funcções de v. Vamos mostrar que esta regra ainda tem logar para y considerado como funcção de u e v, u e v sendo funcções de x.

Com effeito, temos

$$\frac{ds}{dx}=\frac{ds}{du}\frac{du}{dx}+\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dt}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}$$

$$\frac{dy}{dv}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dv}.$$

Combinando as tres primeiras fórmulas vem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}$$
$$+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dv}\frac{dv}{dx}$$

ou

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{ds}\frac{ds}{du}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}\right)\frac{du}{dx}+\left(\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dv}+\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dv}\right)\frac{dv}{dx},$$

ou, attendendo ás duas ultimas,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx},$$

que é o que se queria demonstrar.

Por applicações successivas do que vem de ser dicto extende-se a regra da derivação das funcções compostas a todas as funcções elementares.

V

O modo de considerar o theorema das funcções compostas exposto no n.º III não é applicavel no caso das variaveis imaginarias. Pelo contrario, o modo exposto no n.º IV é applicavel n'este caso, como se vê facilmente, assim como o exposto nos n.ºs I e II, como vamos mostrar.

Notemos primeiro que sendo $F(z)$, $F'(z)$ e $F''(z)$ funcções finitas de z em todos os pontos da curva K que une um ponto z_0 ao ponto Z, da fórmula de M. Darboux

$$\varphi(Z)-\varphi(z_0)=\lambda s e^{\alpha i}\varphi'(z_1),$$

onde s representa o comprimento da curva K, λ um factor positivo não superior á unidade, e z_1 uma quantidade imaginaria representada por um ponto da curva K, tira-se, applicando-a á funcção de z

$$F(Z)-[F(z)+(Z-z)F'(z)],$$

a fórmula

$$F(Z)=F(z_0)+(Z-z_0)F'(z_0)+\lambda s e^{\alpha i}(Z-z_1)F''(z_1).$$

Posto isto, appliquemos esta fórmula á funcção $f(u, v)$, o que dá

$$f(u+k, v+l) = f(u+k, v) + \frac{df(u+k, v)}{dv} l$$

$$+ \lambda s e^{ai} (v + l - v_1) \cdot \frac{d^2 f(u+k, v_1)}{dv^2},$$

v_1 representando um valor de v representado por um ponto da linha descripto por v na passagem de v para $v+l$.

Mas da definição de derivada resulta

$$f(u+k, v) = f(u, v) + \frac{df}{du} k + \alpha_1 k,$$

e da continuidade de $\frac{df(u, v)}{dv}$ relativamente a u resulta

$$\frac{df(u+k, v)}{dv} = \frac{df(u, v)}{dv} + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são quantidades infinitamente pequenas com k.

Logo

$$f(u+k, v+l) = f(u, v) + \frac{df}{du} k + \frac{df}{dv} l$$

$$+ \alpha_1 k + \alpha_2 l + \lambda s e^{ai} (v + l - v_1) \frac{d^2 f(u+k, v_1)}{dv^2},$$

e portanto

$$\frac{f(u+k, v+l) - f(u, v)}{h} = \frac{df}{du} \frac{k}{h} + \frac{df}{dv} \frac{l}{h}$$

$$+ \alpha_1 \frac{k}{h} + \alpha_2 \frac{l}{h} + \lambda s e^{ai} \cdot \frac{v + l - v_1}{h} \cdot \frac{d^2 f(u+k, v_1)}{dv^2}.$$

Temos, porém, quando h tende para zero

$$\lim \frac{k}{h} = u', \quad \lim \frac{l}{h} = v', \quad \lim s = 0,$$

e das desegualdades

$$| v + l - v_1 | < | v - v_1 | + | l |,$$

$$| v_1 - v | < | l |,$$

das quaes a segunda tem logar para valores sufficientemente pequenos de l, tira-se

$$(v + l - v_1) < 2 \, | l |$$

e portanto

$$\left| \frac{v + l - v_1}{h} \right| < 2 \left| \frac{l}{h} \right|.$$

Logo se a derivada $\frac{d^2 f(u, v)}{dv^2}$ é finita na vizinhança de (u, v), temos

$$\lim \frac{f(u + k, v + l) - f(u, v)}{h} = \frac{df}{du} u' + \frac{df}{dv} v',$$

que é o que se queria demonstrar.

Do mesmo modo se demonstra o theorema quando a derivada $\frac{df(u, v)}{du}$ é uma funcção continua de v no ponto (u, v) e a derivada de segunda ordem

$$\frac{d^2 f(u, v)}{du^2}$$

é finita na vizinhança do ponto (u, v).

BIBLIOGRAPHIA

R. R. de Sousa Pinto. — *Estudos instrumentaes no Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra.* — *Coimbra, 1887.*

N'este livro excellente, e da maior utilidade para aquelles que pretendem instruir-se nos meios de trabalhar com o circulo meridiano, expõe o illustre director do Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra os methodos empregados n'aquelle Observatorio para o estudo do circulo meridiano de Repsold, com que foi dotado em 1879. Occupa-se das rectificações do instrumento, da determinação dos erros instrumentaes e das correcções que devem ser feitas ás observações das passagens meridianas e das distancias zenithaes.

R. R. de Sousa Pinto. — *Supplemento ao Calculo das ephemerides astronomicas.* — *Coimbra.*

É bem conhecido o trabalho de alta importancia que o sr. Sousa Pinto publicou em 1849, intitulado: *Calculo das Ephemerides Astronomicas*, no qual o auctor expõe desenvolvidamente os processos empregados para o calculo das *Ephemerides astronomicas*, que todos os annos publica a Universidade de Coimbra. No *Supplemento* que vem de ser publicado são expostos os processos que se empregam no calculo de alguns artigos introduzidos nas *Ephemerides* depois da publicação d'aquella obra.

A. Schiappa Monteiro. — *Note sur le triangle isoscèle* (*Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa,* 1887).

Refere-se a primeira parte d'este trabalho ao mesmo assumpto de que o auctor se occupou no seu artigo publicado na pagina 51.

Em seguida apresenta soluções novas de alguns problemas propostos pelo auctor no tomo I d'este jornal e analysa as soluções conhecidas. Finalmente apresenta algumas propriedades interessantes das bissectrizes interiores dos triangulos escalenos, das quaes faz applicação á demonstração do theorema de Geometria elementar seguinte:

Em todo o triangulo o angulo da maior bissectriz é menor do que o angulo da maior, e reciprocamente.

M. David. — *Développement des fonctions implicites* (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*, 1887).

N'esta importante memoria resolve o auctor a questão seguinte: Dada uma equação algebrica $f(x, y) = 0$, determinar uma série que represente uma funcção de y por meio da variavel x, para qualquer valor de x.

Mostra primeiro como se resolve esta questão por meio da serie de Lagrange, e como se determina o contorno no interior do qual esta serie é convergente e no exterior do qual é divergente. Em seguida mostra como se resolve a mesma questão por meio de series a dupla entrada, e que o contôrno de convergencia d'estas series está comprehendido no contôrno de convergencia da serie de Lagrange.

Finalmente faz applicação dos principios precedentes á fórmula que nós publicàmos em 1881 no *Journal de Mathématiques* e em seguida no nosso *Curso de Analyse* (pag. 237), para dar uma demonstração nova da nossa fórmula e deduzir d'ella que a serie de Lagrange é a unica serie a simples entrada que póde representar uma funcção da raiz da equação proposta.

M. David. — *Sur les contours décrits autour des points singuliers d'une équation algébrique* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, 1886).

— *Équations des contours tracés autour de points donnés* (*Item*, 1887).

H. Bentabol. — *Cuadratura de áreas planas applicada al calculo de perfiles transversales.* — *Madrid, 1887.*

N'este opusculo o auctor expõe o methodo graphico, devido ao sr. Collignon, para o calculo das áreas planas, methodo que exige sómente o emprego da regoa e do compasso. Em seguida applica este methodo ao calculo de perfis transversaes.

H. G. Zeuthen. — *Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés* (*Mathematiche Annalen*, t XXXI).

N'esta memoria importante occupa-se o sábio geometra dinamarquez de formular e demonstrar de um modo completo os principaes theoremas relativos á determinação d'uma curva algebrica que passa por pontos dados.

Principia por procurar o numero de determinações, independentes entre si, de uma curva de ordem n que deve passar por nm pontos de intersecção de uma curva de ordem n com outra de ordem m. Em seguida demonstra o theorema de Cayley relativo ao numero de determinações de uma curva que passa por $m_1 m_2$ pontos de intersecção de duas curvas de ordem m_1 e de ordem m_2. Finalmente d'estes theoremas deduz o numero de determinações de uma curva de ordem n que deve passar por um grupo de pontos dados.

M. Lerch. — *Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre limites imaginaires* (*Bulletin de la Société des Sciences de Bohême*, 1887).

O fim do auctor n'este bello trabalho é mostrar como se podem estudar os elementos da theoria das funcções de variaveis imaginarias empregando integraes rectilineos, em logar de integraes curvilineos, como se faz habitualmente. É assim que, pela consideração de integraes tomados ao longo de polygonos, demonstra o theorema de Taylor e o theorema de Cauchy relativo aos integraes tomados ao longo de um contôrno no interior do qual a funcção integrada é synectica.

M. Lerch. — *Deux théorèmes d'Arithmétique* (*Item*).

—— *Sur une formule d'Arithmétique* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1887).

S. Pincherle. — *Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 103).

N'este bello artigo demonstra o auctor que os coefficientes da serie ordenada segundo as potencias de x, que representa o desenvolvimento de um integral de uma equação differencial linear de ordem m com coefficientes racionaes, são numeros algebricos que pertencem ao dominio de racionalidade definido pela equação determinante $D(\rho)=0$; e que os coefficientes das potencias de ρ n'estes numeros são fracções que reduzidas á expressão mais simples não contêem em denominador senão factores primos p_n taes que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{p_n}{n^{m^2}}$ é um numero finito.

A. Marre. — *Théorème du carré de l'hypothénuse* (*Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. XX).

N'este interessante artigo apresenta o auctor uma serie de demonstrações do theorema do quadrado da hypothenusa attribuido a Pythagoras. É assim que apresenta uma demonstração tirada do *Youcti-Bâcha* sanscrito pelo sr. Ch. Whish; duas demonstrações tiradas do *Bija-Ganita*, a primeira fundada no desenvolvimento de $(a-b)^2$ e a segunda na semelhança do triangulo proposto com os triangulos formados pela perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa; uma demonstração fundada no desenvolvimento de $(a+b)^2$; uma demonstração devida a Saunderson; etc.

Pirzeti. — *Contribuzione allo studio geometrico della superficie ter-*

restre (*Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova*, 1887).

Piuma. — *Intorno a due classi di integrali esprimibili con soli logaritmi* (*Item*).

Loria. — *Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica* (*Item*).

Morera. — *Sulla integrazioni dell' equazıone a derivata parziali del primo ordine* (*Item*).

Perroni. — *Sul punto doppio apparente della cubica gobba* (*Item*).

G. T.

MODIFICATION DE LA TROISIÈME DÉMONSTRATION DONNÉE PAR GAUSS DE LA LOI DE REPROCITÉ DE LEGENDRE

PAR

M. LERCH

(à Prague)

Il y a déjà une foule des démonstrations du célèbre théorème arithmétique appelé la loi de reciprocité de Legendre, et parmi elles plusieures reposent sur le même principe que la troisième parmi les six démonstrations données par Gauss de ce théorème. C'est aussi la démonstration suivante que je vais développer.

Dans cette note je fais usage du symbole $E(x)$ qui représente le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x supposée réelle et positive, de sorte que la différence $x - E(x)$ sera ou zéro ou une quantité positive inférieure à l'unité; ensuite, je représente par $R(x)$ le résultat qu'on obtient en retranchant de la quantité réelle x le nombre entier qui lui est le plus approché, de sorte que la quantité $R(x)$ est ou positive ou négative, mais toujours contenue entre les limites $\left(-\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\right)$, de sorte qu'on a

$$-\frac{1}{2} \leq R(x) < \frac{1}{2}.$$

Enfin, x étant une quantité différente de zéro, je représente par le symbole sgn. x (lisez signum x) ou $+1$ ou -1, selon que x est positif ou négatif. Ces deux dernières fonctions numériques ont été introduites par M. Kronecker.

1. Soit maintenant p un nombre premier supérieur à 2, q un nombre entier positif non divisible par p, et posons

$$(1) \qquad a_\nu = 2\nu q - p - 2p\mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right), \quad \left(\nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}\right).$$

Les nombres $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{p-1}{2}}$ sont évidemment tous entiers, positifs ou négatifs, impairs, et en valeur absolue moindres que p. Je vais en premier lieu en déterminer les signes. Comme le nombre a_ν a le même signe que le suivant

$$\frac{a_\nu}{2p} = \frac{\nu q}{p} - \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right) - \frac{1}{2},$$

il suffit de considérer ce dernier nombre. Or la différence

$$\frac{\nu q}{p} - \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

étant le reste positif de la fraction $\frac{\nu q}{p}$, la quantité $\frac{a_\nu}{2p}$ sera positive ou négative selon que

$$\frac{\nu q}{p} - \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right) > \frac{1}{2} \text{ ou } < \frac{1}{2};$$

et comme on a dans le premier cas $\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right) < 0$, et $\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right) > 0$ dans le second, on voit que $\frac{a_\nu}{2p}$ sera positif ou négatif selon que $\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ sera négatif ou positif.

En d'autres termes on a

$$\mathrm{sgn.}\left(\frac{a_\nu}{2p}\right) = -\,\mathrm{sgn.}\,\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right),$$

ou ce qui est la même chose,

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{sgn.} a_\nu = -\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right).$$

C'est cette formule qui exprime le signe de a_ν par celui de la fonction arithmétique $\mathrm{R}(x)$.

Je dis maintenant que les $\frac{p-1}{2}$ nombres a_ν sont différents même dans leurs valeurs absolues. Car en effet, si a_ρ et a_ν auraient la même valeur absolue, on devrait avoir ou $a_\nu = a_\rho$ ou $a_\nu = -a_\rho$, c'est-à-dire l'un des deux nombres $a_\nu \pm a_\rho$ devrait s'annuler. Or les nombres ν, ρ étant supposés contenus dans la série $1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}$, la valeur absolue du nombre $\nu \pm \rho$ sera moindre que $p-1$; ensuite, on déduit de l'hypothèse $a_\nu \pm a_\rho = 0$ l'équation suivante

$$2(\nu \pm \rho) q = (1 \pm 1) p + 2p \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right),$$

dont on voit que $(\nu \pm \rho) q$ doit être divisible par p. Or q étant premier avec p, il faut que $\frac{\nu \pm \rho}{p}$ soit un nombre entier, ce qui est impossible, le numérateur étant inférieur à $p-1$. Donc tous les nombres a_ν ont leurs modules différents entre eux.

Cela étant il est clair que les nombres a_ν ne diffèrent que par l'ordre et le signe des nombres de la suite $1, 2, 5, 7, \ldots p-2$, de sorte que le produit $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{\frac{p-1}{2}}$ a pour valeur absolue le nombre $1 . 3 . 5 \ldots p-2$, et comme son signe équivant au produit des seconds membres de la formule (2), savoir

$$\Pi\left[-\operatorname{sgn.} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \operatorname{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right),$$

on aura évidemment la formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1 a_2 a_3 \ldots a_{\frac{p-1}{2}} \\ & = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 1.3.5 \ldots (p-2)\,\mathrm{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right). \end{aligned}\right.$$

Or l'équation (1) montre qu'il subsiste la congruence

$$a_\nu \equiv 2\nu q, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

de sorte que nous aurons

$$a_1 a_2 \ldots a_{\frac{p-1}{2}} \equiv 1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2} . (2q)^{\frac{1}{2}(p-1)}, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

et l'équation (3) nous donnera, par conséquent, la congruence

$$\begin{aligned} & 1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2} . (2q)^{\frac{1}{2}(p-1)} \\ & \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 1.3.5 \ldots (p-2)\,\mathrm{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right) \end{aligned}$$

prise par rapport au même module p.

En multipliant les deux membres de cette congruence par le nombre

$$2.4.6 \ldots (p-1) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)} . 1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2},$$

il vient

$$(3*)\quad \left\{\begin{aligned} & \left(1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2}\right)^2 . (4q)^{\frac{1}{2}(p-1)} \\ & \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} (p-1)!\,\mathrm{sgn.} \prod \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right). \end{aligned}\right.$$

Or le théorème de Wilson exprimé par la formule

$$(p-1)! \equiv -1, \quad (\mathrm{mod}\, p)$$

conduit à la congruence

$$\left(1.2.3 \ldots \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv -(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}, \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

puisque les nombres $\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots p-1$ sont congrus aux nombres $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots -1$; on a ensuite, d'après le théorème de Fermat,

$$4^{\frac{1}{2}(p-1)} = 2^{p-1} \equiv 1, \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

D'après ces trois congruences la formule (3 *) se change en la suivante

$$q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \mathrm{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right), \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

et c'est cette congruence qui joue le rôle capitale dans la démonstration qui nous occupe.

Car en représentant avec Legendre par le symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$ ou 1 ou -1 selon que la congruence $x^2 \equiv q$, $(\mathrm{mod}\ p)$ a ou n'a pas de racines, on sait depuis Euler que l'on a

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q}{p}\right),$$

ce qui est en même temps le théorème le plus élémentair de la théorie des résidus quadratiques.

D'après cette formule la congruence (4) se change en l'équation

$$(5) \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = \text{sgn.} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

qui se trouve établie dans plusieurs articles fort intéressants de M. Kronecker (*).

2. La formule (5) n'exprime que ce que le symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$ équivaut ou à 1 ou à -1, selon que le nombre des termes négatifs de la série

$$(5*) \qquad \mathrm{R}\left(\frac{q}{p}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{2q}{p}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{3q}{p}\right), \ldots \mathrm{R}\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)q}{p}\right]$$

est pair ou impair. Cette série peut être remplacée par d'autres; par exemple, le signe de la quantité $\operatorname{tg}\pi\varkappa$ ou celui de $\sin 2\pi\varkappa$ étant le même que celui de $\mathrm{R}(\varkappa)$ on peut considérer les séries

$$\operatorname{tg}\frac{\nu q\pi}{p},\ \sin\frac{2\nu q\pi}{p},\ \left(\nu = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}\right)$$

au lieu de la précédante.

Je me borne seulement à remarquer que la somme

$$(6) \qquad \sigma = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{2}\left[1 - \text{sgn.}\,\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]$$

est précisément égale au nombre des termes négatifs de la série (5). Car si $\text{sgn.}\,\mathrm{R}\left(\frac{\nu q}{p}\right) = 1$, le terme correspondant de la

(*) Sitzungsberichte der kön. preussischen Akad. d. Wiss; mai et juin 1884, avril et novembre 1885.

somme σ disparaît, tandis qu'il deviendra égal à l'unité en supposant que $R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ soit négatif, c'est-à-dire que $\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right) = -1$; on aura donc la formule

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sigma}. \tag{6 *}$$

Pour transformer la somme (6) je considère de nouveau les nombres a_ν introduits au commencement. Les nombres a_ν étant affectés du signe $-\operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ les produits $a_\nu \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ seront négatifs et coïncideront à l'ordre près avec les termes de la série $-1, -3, -5, \ldots -(p-2)$, dont la somme est

$$-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

de sorte qu'il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left[2\nu q - p - 2p\,E\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] . \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right) = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2;$$

il s'ensuit la formule

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left[\nu q - p\,E\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] . \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$
$$= \frac{p}{2} \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \operatorname{sgn.} R\left(\frac{\nu q}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2;$$

en la retranchant, membre à membre, de l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left[\nu q - p\,E\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] = \frac{p^2-1}{8} q - p \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right)$$

il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left[\nu q - p\mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]\left[1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]$$

$$=p\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right]-p\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)+\frac{p^2-1}{8}(q-1).$$

Or les facteurs $1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ étant ou zéro ou deux, on voit que le premier membre est un nombre pair, et le nombre p étant impair on voit aisément que le second membre n'est pair que si

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{\nu q}{p}\right)\right] \\ &\equiv \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \mathrm{E}\left(\frac{\nu q}{p}\right)+\frac{p^2-1}{8}(q-1, \quad (\mathrm{mod}\ 2); \end{aligned}\right.$$

c'est donc une formule qui permet de remplacer la somme (6) par un nombre de la même parité, ce qui suffit pour notre but.

Prenant alors $q=2$ et se rappelant ce que, dans ce cas, tous les fractions $\frac{2\nu}{p}$ étant moindres que l'unité, on aura $\mathrm{E}\left(\frac{2\nu}{p}\right)=0$, de sorte que la formule (7) nous donne

$$\sigma \equiv \frac{p^2-1}{8}, \quad (\mathrm{mod}\ 2),$$

et par suite l'équation (6 *) devient dans ce cas

$$(8)\qquad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Soit maintenant q un nombre impair; dans ce cas le nombre $\frac{p^2-1}{8}(q-1)$ sera pair et la congruence (7) deviendra

$$(9) \qquad \sigma \equiv \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right), \quad (\text{mod } 2).$$

Cette formule n'exige que ce que le nombre q soit impair et non divisible par le nombre premier p.

Mais si l'on cherche l'expression $\left(\frac{q}{p}\right)$, on doit supposer que même le nombre q soit premier et différent de p.

Cela étant supposé rempli, la règle exprimée par la formule (6 *) nous donne

$$(10) \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sigma'}, \quad \sigma' \equiv \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\rho p}{q}\right), \quad (\text{mod } 2).$$

Je vais maintenant prouver la formule

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right) + \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\rho p}{q}\right) = \frac{1}{4}(p-1)(q-1).$$

A cet effet je suppose $q<p$ et je considère la droite OP dont l'équation, dans le système cartésien, soit $y=\frac{q}{p}x$; soit P le point de cette droite dont l'abscisse est $x=\frac{1}{2}(p-1)$ et dont l'ordonnée sera donc

$$y=\frac{1}{2}(q-1)+\frac{1}{2}\left[1-\frac{q}{p}\right],$$

de sorte que

$$E(y)=\frac{1}{2}(q-1).$$

En représentant par P′, P″ les projections du point P sur l'axe des x et des y, j'observe que le triangle rectangle OP′P contient précisément $\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ points dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs, ainsi que le triangle OP″P contient $\sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\rho p}{q}\right)$ des points de cette espèce. Comme le contour de ces triangles ne contient aucun de tels points, on voit que la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\nu q}{p}\right) + \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{\rho p}{q}\right)$$

équivaut au nombre des points, à coordonnées entières et positives, placés dans le rectangle OP′PP″, et ce nombre étant évidemment le produit $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ l'équation (11) est démontrée.

Alors il résulte des formules (6 *), (9), (10) et (11) la suivante

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}$$

qui exprime le célèbre théorème de Legendre que nous voulions établir.

SUR CERTAINES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

A. GUTZMER

(à Berlin)

. . . . . Vous connaissez le théorème de M. Rouché (*) sur la moyenne arithmétique d'une fonction

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{ou} \quad f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu x^\nu,$$

selon lequel la moyenne arithmétique de toutes les valeurs de $\frac{f(x)}{x^n}$, correspondantes à une valeur déterminée du module r de la variable

$$x=r\,.\,e^{\theta i}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

est égale au coefficient a_n, ce qui s'écrit

$$\mathcal{M}_r\frac{f(x)}{x^n}=a_n.$$

Ce théorème, cité par plusieurs auteurs et d'une certaine importance dans la théorie des fonctions, a été étendue par M. Thomae (**).

(*) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, cahier 39.—Voyez aussi: Serret, *Algèbre Supérieur.*

(**) *Elementare Theorie der analytischen Functionen*, p. 130.

Je vais vous communiquer dans ces lignes un théorème analogue qui se rapporte aux valeurs du carré du module de la fonction $f(x)$ le long d'un cercle autour de l'origine, et qui sera publié prochainement dans les «Mathematische Annalen».

Supposons que la série de puissance

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{1}$$

converge absolument dans la région définie par $|x| \leq R$ (en désignant d'après M. Weierstrass par $|x|$ le module de la quantité x), et posons

$$x = r \,.\, e^{\theta i}, \quad (r < R);$$

l'équation (1) deviendra

$$f(x) = f(r, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu e^{\nu\theta i}$$

et par la multiplication par la quantité conjuguée

$$\overline{f}(r\theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \overline{a}_\mu r^\mu e^{-\mu\theta i}$$

nous obtiendrons

$$|f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a}_\mu r^{\nu+\mu} \,.\, e^{(\nu-\mu)\theta i}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a}_\mu r^{\nu+\mu} e^{(\nu-\mu)\theta i}.$$

En posant $a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, cette équation devient

$$|f(r,\theta)|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \Big\{ (\alpha_\nu \alpha_\mu + \beta_\nu \beta_\mu) \cos(\nu-\mu)\theta + (\alpha_\nu \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_\nu) \sin(\nu-\mu)\theta \Big\} r^{\nu+\mu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big\{ (\alpha_{\mu+\lambda} \alpha_\mu + \beta_{\mu+\lambda} \beta_\mu) \cos\lambda\theta + (\alpha^{\mu+\lambda} \beta_\mu - \alpha_\mu \beta_{\mu+\lambda}) \sin\lambda\theta \Big\} r^{2\mu+\lambda}.$$

En désignant

$$(2)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty}(\alpha_{\mu+\lambda}\,\alpha_{\mu}+\beta_{\mu+\lambda}\,\beta_{\mu})\,r^{2\mu+\lambda}=A_{\lambda}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}(\alpha_{\mu+\lambda}\,\beta_{\mu}-\alpha_{\mu}\,\beta_{\mu+\lambda})\,r^{2\mu+\lambda}=B_{\lambda},$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(3)\qquad |f(r,\theta)|^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\Big\{A_\lambda\cos\lambda\theta+B_\lambda\sin\lambda\theta\Big\}.$$

Cette équation nous donne immédiatement

$$|f(r,\theta+\pi)|^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda\Big\{A_\lambda\cos\lambda\theta+B_\lambda\sin\lambda\theta\Big\}$$

et par suite nous aurons

$$\frac{1}{2}\Big\{|f(r,\theta)|^2+|f(r,\theta+\pi)|^2\Big\}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\Big\{A_{2\lambda}\cos 2\lambda\theta+B_{2\lambda}\sin 2\lambda\theta\Big\}.$$

De même vous trouvez

$$\frac{1}{2}\left\{\left|f\left(r,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|^2+\left|f\left(r,\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right\}$$

$$=\sum_\nu|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda\Big\{A_{2\lambda}\cos 2\lambda\theta+B_{2\lambda}\sin 2\lambda\theta\Big\},$$

et, en additionnant ces deux équations, vous aurez

$$\frac{1}{4}\left\{|f(r,\theta)|^2+\left|f\left(r,\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|^2+|f(r,\theta+\pi)|^2+\left|f\left(r,\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right\}$$

$$=\sum_\nu|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\Big\{A_{4\lambda}\cos 4\lambda\theta+B_{4\lambda}\sin 4\lambda\theta\Big\}.$$

En continuant de cette manière, vous finirez par trouver l'équation

$$(4) \qquad \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(r,\theta+\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}+2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta)+B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)\right\}.$$

Maintenant il est facile de se convaincre que la dernière somme s'approche de la valeur zéro, si n augmente indéfiniment. En effet, en profitant des définitions (2) et de la supposition faite de la série (1), il s'ensuit

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_{2^n\lambda}\cos(2^n\lambda\theta)+B_{2^n\lambda}\sin(2^n\lambda\theta)\right\}$$

$$<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{2\mu+2^n\lambda}\left\{|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\cdot\alpha_\mu|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}\cdot\beta_\mu|+\right.$$

$$\left.+|\alpha_{\mu+2^n\lambda}\cdot\beta_\mu|+|\alpha_\mu\cdot\beta_{\mu+2^n\lambda}|\right\}$$

$$<\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{2\mu+2^n\lambda}\cdot\left\{|\alpha_\mu|+|\beta_\mu|\right\}\cdot\left\{|\alpha_{\mu+2^n\lambda}|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}|\right\}$$

$$<\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{\mu}\cdot\left\{|\alpha_\mu|+|\beta_\mu|\right\}\cdot\sum_{\lambda=1}^{\infty}r^{\mu+2^n\lambda}\cdot\left\{|\alpha_{\mu+2^n\lambda}|+|\beta_{\mu+2^n\lambda}|\right\}.$$

La première somme est évidemment une quantité finie, tandis que la seconde en représente une sorte de reste; par conséquent elle devra s'évanouir pour n infini, et de même le produit des deux séries.

Nous pouvons donc conclure que

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|f\left(r,\theta+\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Or, le premier membre de (5) représente la moyenne arithmétique des carrés des modules de (1) pour tous les points du cercle $|x| = r$.

En indiquant cette moyenne par $\mathfrak{M}_r$, nous avons

$$(6) \qquad \mathfrak{M}_r\, |f(x)|^2 = \mathfrak{M}_r \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \right|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Cette équation nous fournit le

Théorème: *La moyenne arithmétique des carrés des modules de toutes les valeurs que la série*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

puisse avoir le long du cercle $|x| = r$, *situé dans la région de convergence, est égale à la somme des carrés des modules des termes de la série.*

Il est aisé de voir que ce théorème est encore en force pour des séries plus générales d'une seule ou de plusieurs variables. De même on peut énoncer ce théorème pour un cercle quelconque, situé parfaitement dans la région de convergence de la série, pourvu qu'on prenne, au lieu de la série proposée, son développement autour du centre du cercle. Mais je n'y insisterai plus.

Dans ses recherches sur les séries trigonométriques (*) A. Harnack a trouvé quelques formules intégrales, qui ne sont autre chose que des théorèmes sur la moyenne d'une fonction, et il est facile de dériver d'une de ces formules une autre démonstration de notre théorème, laquelle je dois à une lettre, dont M. W. Dyck m'a honoré; il s'ensuit que ce théorème est en force plus généralement qu'il semble d'après la démonstration donnée ci-dessus. Cependant A. Harnack n'a pas tiré des conséquences de sa formule pour les fonctions d'une variable complexe. Toutefois, cette formule (**) m'a inspiré une nouvelle démonstration du théorème énoncé, que je me permets de vous communiquer.

(*) *Mathematische Annalen*, ts. 17 e 19.
(**) L. c., t. 17, p. 127, éq. (III).

En effet, en sortant de l'équation (3), nous aurons par intégration

$$\int_0^{2\pi}|f, \theta)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.d\theta + 2\int_0^{2\pi}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_\lambda \cos\lambda\theta + B_\lambda \sin\lambda\theta\right\}.d\theta$$

$$= 2\pi . \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_\lambda\int_0^{2\pi}\cos\lambda\theta . d\theta + B_\lambda\int_0^{2\pi}\sin\lambda\theta . d\theta\right\}$$

$$= 2\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu} + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left\{A_\lambda\left(\frac{\sin\lambda\theta}{\lambda}\right)_0^{2\pi} + B_\lambda\left(\frac{-\cos\lambda\theta}{\lambda}\right)_0^{2\pi}\right\}.$$

Evidemment chaque terme de la dernière somme, et par suite la somme elle-même, s'évanouit, de sorte que nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r, \theta)|^2 d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2 r^{2\nu}.$$

Voilà le théorème en forme intégrale. Vous voyez, Monsieur, qu'il ne faut que de supposer que l'intégrale au premier membre a un sens, ce qui est conforme aux conditions de A. Harnack pour les séries trigonométriques.

Considérons encore quelques exemples. D'après la formule (6) nous aurons pour la fonction e^x:

$$\mathfrak{M}_r|e^x|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(n!)^2}$$

ce qui devient, pour le cercle $|x| = 1$,

$$\mathfrak{M}_1|e^x|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}.$$

De même nous aurons pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ la relation

$$\mathfrak{M}_r\left|\Sigma\frac{x^n}{n^2}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n^4};$$

par conséquent la moyenne arithmétique du carré du module de cette série, pour tous les points du cercle $|x|=1$, est égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ possède pour un cercle $|x|=r$ la moyenne arithmétique $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2^{2n}}$, qui devient pour $r=\frac{1}{2}$,

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{2}} \left| \Sigma \frac{x^n}{2^n} \right|^2 = \Sigma \frac{1}{2^{4n}} = \frac{16}{15},$$

et pour $r=1$

$$\Sigma \frac{1}{2^{2n}} = \frac{4}{3}.$$

Pour la série

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

il suit

$$\mathcal{M}_r \left| \log \frac{1}{1-x} \right|^2 = \Sigma \frac{r^{2n}}{n^2}, \quad (\text{où } r<1);$$

la même moyenne se trouve pour la fonction

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n},$$

car évidemment on a

$$\mathcal{M}_r |\log(1+x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n^2} \quad (\text{où } r<1),$$

de sorte que les carrés des modules des deux fonctions $\log(1+x)$ et $\log \frac{1}{1-x}$ ont la même moyenne arithmétique pour les mêmes cercles.

Parmi les conséquences qu'on peut tirer du théorème énoncé, je ne mentionnerai que la suivante. En désignant par q_λ des quantités positives, nous aurons certainement l'inégalité

$$q^2_\mu + q^2_\nu > 2\, q_\mu\, q_\nu \quad (\mu \neq \nu).$$

Formons cette inégalité pour toutes les valeurs de $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m$, $\mu \neq \nu$; nous trouverons facilement par addition

$$(m-1) \sum_{\mu=1}^{m} q^2_\mu > 2 \sum_{\mu,\nu=1}^{m} q_\mu\, q_\nu, \quad \mu \neq \nu.$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité l'expression $q^2_1 + q^2_2 + \ldots + q^2_m$; il suit

$$m \cdot \sum_{\mu=1}^{m} q^2_\mu > \left(\sum_{\mu=1}^{m} q_\mu\right)^2,$$

ou

$$\sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^{m} q^2_\mu\right)} > \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} q_\mu}{\sqrt{m}}.$$

Si nous posons maintenant

$$q_\mu = \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|$$

et $m = 2^n$, nous aurons

$$\sqrt{\frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2} > \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|}{2^n}$$

d'où vient à l'aide de l'équation (5), pour n infini

$$\sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 r^{2\nu}} > \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{2^n-1} \left| f\left(r, \theta + \frac{2^{n-1}}{\mu\pi}\right)\right|.$$

A gauche nous avons une quantité finie et déterminée, par conséquent la quantité à droite devra être finie, et comme la somme $\Sigma \left| f\left(r, \theta + \frac{\mu \pi}{2^{n-1}}\right) \right|$ est certainement divergente, il faut qu'elle devienne infinie du même ordre que 2^n.

D'autre part le second membre représente la moyenne arithmétique des valeurs que le module de $f(x)$ parcourt pour le cercle $|x| = r$. Nous avons donc le

THÉORÈME: *La moyenne arithmétique des valeurs que le module de la fonction* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *parcourt pour tous les points du cercle* $|\mathfrak{x}| = \mathfrak{r}$, *est inférieure à la racine carrée de la moyenne arithmétique du carrée de ces modules.*

Nous avons donc une limite supérieure de cette moyenne arithmétique; je n'ai pas encore réussi à en trouver une expression exacte par la méthode employée d'abord dans cette lettre.

Pour déterminer cette expression par l'autre méthode, on aurait à former

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_\nu \overline{a}_\mu\, r^{\nu+\mu} \cdot e^{(\nu-\mu)\theta i}} \cdot d\theta$$

Peut-être je reviendrai une autre fois à cette expression.

Permettez-moi, Monsieur, de ajouter à ces lignes une nouvelle démonstration du théorème de M. Rouché, cité au commencement de cette lettre. Considérons la fonction

$$\frac{f(x)}{x^k} = \sum_\nu a_\nu x^{\nu-k} = \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \left\{\cos(\nu-k)\theta + i\sin(\nu-k)\theta\right\};$$

en intégrant, on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^k}\, d\theta = \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \int_0^{2\pi} \left\{\cos(\nu-k)\theta + i\sin(\nu-k)\theta\right\} d\theta$$

$$= 2\pi a_k + \sum_\nu a_\nu r^{\nu-k} \left\{\left(\frac{\sin(\nu-k)\theta}{\nu-k}\right)_0^{2\pi} - i\left(\frac{\cos(\nu-k)\theta}{\nu-k}\right)_0^{2\pi}\right\}, \quad \nu \neq k,$$

Chaque terme de la somme, et par suite la somme elle-même, devient zéro, de sorte que nous avons la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x)}{x^k}\,d\theta = a_k,$$

ce qui démontre le théorème de M. Rouché d'une manière nouvelle.

Berlin, mai 1888.

EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

I

Sobre a convergencia das series

A serie de termos positivos Σu_n *será convergente se, a partir d'um certo valor do numero inteiro e positivo* n, *for*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu.$$

a_n *sendo uma funcção positiva de* n *e* μ *uma constante positiva.*

Tira-se este theorema da desegualdade

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1})$$

que dá

$$u_{n+1} + \ldots + u_{n+m} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+m} u_{n+m}) < \frac{1}{\mu} a_n u_n.$$

D'este theorema deduz-se:

1.° Pondo $a_n = 1$, o criterio de convergencia de Cauchy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu;$$

2.° Pondo $a_n = n$, o criterio de Duhamel

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] > 1 + \mu;$$

3.° Pondo $a_n = n \log n$, $n \log n \log \log n$, obtêm-se os criterios do sr. Bertrand.

[*J. L. Jensen: Sur un théorème général de convergence* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 1888)].

II

Sobre um theorema de Tchébychew

Se U e V representam duas funcções de x, cada uma das quaes varía n'um determinado sentido, quando x varía de 0 a 1, a expressão

$$\int_0^1 \mathrm{UV}\, dx - \int_0^1 \mathrm{U}\, dx \int_0^1 \mathrm{V}\, dx$$

é positiva ou negativa, segundo que U e V variam ou não no mesmo sentido.

Tem-se dado varias demonstrações d'este theorema importante devido a Tchébychew. A seguinte, devida ao sr. G. d'Arone, é muito simples:

Considera-se a expressão

$$n(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$$

onde $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ representam quantidades arbitrarias. Disponham-se os seus termos do modo seguinte:

$$\begin{aligned} & u_1(v_1 - v_1) + u_1(v_1 - v_2) + \ldots + u_1(v_1 - v_n) \\ + & u_2(v_2 - v_1) + u_2(v_2 - v_2) + \ldots + u_2(v_2 - v_n) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & u_n(v_n - v_1) + u_n(v_n - v_2) + \ldots + u_n(v_n - v_n). \end{aligned}$$

Os termos da diagonal principal são nullos, e os termos symetricos relativamente a esta diagonal podem ser agrupados de modo a reduzir esta expressão á fórma

$$
\begin{aligned}
(u_1-u_2)(v_1-v_2)+(u_1-u_3)(v_1-v_3)+\ldots+(u_1-u_n)(v_1-v_n)&\\
+(u_2-u_3)(v_2-v_3)+\ldots+(u_2-u_n)(v_2-v_n)&\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
+(u_{n-1}-u_n)(v_{n-1}-v_n).&
\end{aligned}
$$

Temos pois

$$n\sum_{i=1}^{n} u_i v_i-\sum_{i=1}^{n} u_i\sum_{i=1}^{n} v_i=\sum_{i,j}^{n}(u_i-u_j)(v_i-v_j).$$

Supponhamos agora que os u e os v representam os valores tomados pelas funcções U e V nos extremos superiores de n intervallos eguaes em que se devida o intervallo de 0 a 1. Teremos

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} u_i=\int_0^1 \mathrm{U}\,dx$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} v_i=\int_0^1 \mathrm{V}\,dx$$

e portanto a egualdade precedente dará, depois de dividida por n^2,

$$\int_0^1 \mathrm{UV}dx-\int_0^1 \mathrm{U}dx\int_0^1 \mathrm{V}dx=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}^{n}(u_i-u_j)(v_i-v_j).$$

D'esta egualdade deduz-se o theorema enunciado, visto que os productos $(u_i-_j)(v_i-v_j)$ são positivos ou negativos segundo que U e V variam ou não no mesmo sentido quando x varía desde 0 até 1.

[*Giovanni d'Arone: Intorno ad un teorema di Tchébychew* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, t. XXVI)].

III

Uma propriedade da transversal do triangulo

Seja ABC um triangulo dado, M um ponto da superficie d'este triangulo cujas coordenadas normaes são x, y, z; Δ uma transversal que passa pelo ponto M e corta o lado BC no ponto A_1, o lado AB no ponto C_1 e o lado AC no ponto B_1; e N um outro ponto da transversal cujas coordenadas normaes são x_1, y_1, z_1.

$$\frac{x_1}{x}=\frac{A_1N}{A_1M},\quad \frac{y_1}{y}=\frac{B_1N}{B_1M},\quad \frac{z_1}{z}=\frac{C_1N}{C_1M};$$

d'onde se tira, pondo $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$,

$$ax_1=\frac{A_1N}{A_1M}ax,\quad by_1=\frac{B_1N}{B_1M}by,\quad cz_1=\frac{C_1N}{C_1M}cz.$$

Por outra parte temos, as coordenadas sendo tomadas em valor absoluto,

$$ax_1+cz_1+by_1=2S,\quad ax+by+cz=2S,$$

e portanto

$$\left(\frac{A_1N}{A_1M}-1\right)ax-\left(\frac{B_1N}{B_1M}+1\right)by+\left(\frac{NC_1}{MC_1}-1\right)cz=0.$$

Mas

$$A_1N-A_1M=MN,\quad B_1N+B_1M=MN,\quad NC_1-MC_1=MN,$$

logo

$$\frac{ax}{MA_1}+\frac{by}{MB_1}+\frac{cz}{MC_1}=0,$$

que é a relação que se pretendia achar.

[*H. Plamenewsky: Une propriété nouvelle de la transversale du triangle* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1888)].

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Lerch

(à Prague)

... Le théorème que j'ai en vue est le suivant: La somme de tous les produits possibles de la forme $q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$, où les q sont des nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$q_1 = \leqq 2, \ q_{\alpha+1} \leqq 1 + q_\alpha,$$

est égale au nombre $1.3.5 \ldots (2n+1)$.

Ce théorème résulte en évaluant de deux manières différentes la dérivée

$$\left(\frac{d^{n+2} x}{du^{n+2}}\right)_{u=0},$$

où

$$x = 1 - \sqrt{1-2u} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} 2^\nu u^\nu.$$

On a évidemment

$$\left(\frac{d^{n+2} x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = 1.3.5 \ldots (2n+1);$$

ensuite, la fonction x satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{d^2x}{du^2}=\left[\sum_{\alpha_0=0}^{\infty}\alpha_0\,x^{\alpha_0-1}\right]\frac{dx}{du}=\sum_{\alpha_0,\alpha_1}\alpha_0\,x^{\alpha_0+\alpha_1-1},$$

où

$$\alpha_0,\alpha_1=0,1,2,3,\ldots.$$

De là on tire, en différentiant de nouveau,

$$\frac{d^3x}{du^3}=\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2}\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1-1)\,x^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2},\ (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2=0,1,2,\ldots)$$

et ainsi de suite. De cette manière on trouve aisément la formule générale

$$\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}=\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n+1}}\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1-1)(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2)\ldots$$

$$\ldots(\alpha_0+\alpha_1\ldots\alpha_n-n)\,x^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n+1}-n-1},$$

d'où

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0}=\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n+1}}\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1-1)(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2)\ldots$$

$$\ldots(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-n),$$

les symboles $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ représentant des nombres de la série 0, 1, 2, ... assujettis à la condition

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=n+1.$$

Or en posant

$$\alpha_0=q_n,\ \alpha_0+\alpha_1-1=q_{n-1},$$

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-2=q_{n-2},\ \ldots,\ \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n-n=q_0=1,$$

de sorte que $1 + q_\alpha \geqq q_{\alpha+1}$, on aura

$$\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0} = \sum q_0\, q_1\, q_2 \ldots q_n, \quad q_0 = 1,$$

les q étant des nombres entiers positifs assujettis à la condition $1 + q_\alpha \geqq q_{\alpha+1}$. On a donc

$$\sum q_1\, q_2 \ldots q_n = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n+1),$$

c. qu. f. d.

Cerhovice, le 6 juin 1888.

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES (*)

(Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch)

PAR

F. Gomes Teixeira

Soit X un polynôme entier du dégré impair n et $f(x, \sqrt{X})$ une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$. Vous savez, Monsieur, qu'on peut toujours mettre cette fonction sous la forme

$$G+\frac{H}{\sqrt{X}},$$

G et H représentant des fonctions rationnelles de x, et qu'on peut décomposer $\frac{H}{\sqrt{X}}$ en termes de la forme $\frac{x^m}{\sqrt{X}}$ et en termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^m\sqrt{X}}$. Donc, pour intégrer la fonction $f(x, \sqrt{X})$, on est conduit à considérer des intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{X}}$$

et des intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}}.$$

(*) Esta carta foi apresentada pelo sr. Lerch á *Sociedade Real das Sciencias da Bohemia* na sessão de 27 de abril de 1888, e publicada em seguida no Boletim d'esta sociedade.

Notre objet est ramener ces intégrales aux *intégrales hyperelliptiques* de *première espèce*, de *seconde espèce* et de *troisième espèce*.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}},$$

et soit

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda).$$

Nous avons

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}$$

$$-\frac{1}{2(m-1)}\int \frac{X' dx}{(x-a)^{m-1} X \sqrt{X}}.$$

Si a est différent de $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, nous avons

$$\frac{X'}{2(m-1)(x-a)^{m-1} X} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda}$$

$$+\frac{M_1}{x-a} + \frac{M_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{M_{m-1}}{(x-a)^{m-1}},$$

où A, B, ... L, M_1, etc. représentent des constantes; et par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}$$

$$-A\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}} - B\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - \ldots - L\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$-M_1\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} - M_2\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}} - \ldots$$

$$-M_{m-1}\int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m=2, \ldots, m-1$, on ramène l'étude de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}}$ à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

Si a est égal à une des racines de l'équation $X=o$, par exemple $a=\alpha$, on a

$$\frac{X'}{2(m-1)(x-a)^m(x-\beta)\ldots(x-\lambda)} = \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M_1}{x-a} + \frac{M_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{M_m}{(x-a)^m},$$

où B, C, ... L, M_1, ... représentent des constantes. On obtient la constante M_m, la seule qu'il nous faut connaître, en déterminant la vraie valeur de la fraction

$$\frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X}$$

quand $x=\alpha$; on a alors

$$M_m = \lim_{x=\alpha} \frac{X'(x-\alpha)}{2(m-1)X} = \frac{1}{2(m-1)}.$$

Donc

$$\frac{2m-3}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}\sqrt{X}} - B\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}} - \ldots - L\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} - M_1 \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} - M_2 \int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}} - \ldots - M_{m-1}\int \frac{dx}{(x-a)^{m-1}\sqrt{X}}.$$

Au moyen de cette formule et des formules analogues qu'on obtient en y posant $m=2, 3, \dots m-1$ on ramène encore l'étude de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{X}}$ à celles des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \dots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

quand $a=\alpha$.

Déterminons maintenant les intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \dots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}.$$

De l'identité

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\dots+\frac{1}{x-\lambda}=\frac{X'}{X}$$

on tire

$$(1) \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}+\dots+\int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}} = -\frac{2}{\sqrt{X}}.$$

D'un autre côté, de la formule

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{X}}=\frac{x^{k+1}}{(k+1)\sqrt{X}}+\frac{1}{2(k+1)}\int \frac{x^{k+1}X'dx}{X\sqrt{X}}$$

et de la formule

$$\begin{aligned}\frac{x^{k+1}X'}{X} &= \frac{x^{k+1}}{x-\alpha}+\frac{x^{k+1}}{x-\beta}+\dots+\frac{x^{k+1}}{x-\lambda} \\ &= nx^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\dots+a_k \\ &\quad +\frac{\alpha^{k+1}}{x-\alpha}+\frac{\beta^{k+1}}{x-\beta}+\dots+\frac{\lambda^{k+1}}{x-\lambda}\end{aligned}$$

on tire

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(2k+2-n)\int\frac{x^k dx}{\sqrt{X}}-a_1\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{X}}-\ldots-a_k\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\\&=\frac{2x^{k+1}}{\sqrt{X}}+\alpha^{k+1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\beta^{k+1}\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}+\\&\qquad+\ldots+\lambda^{k+1}\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}\end{aligned}\right.$$

et, en posant $k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-2$,

$$\alpha\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\ldots+\lambda\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$=-(n-2)\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{2x}{\sqrt{X}}$$

$$\alpha^2\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\ldots+\lambda^2\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

$$=-(n-4)\int\frac{xdx}{\sqrt{X}}-a_1\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{2x^2}{\sqrt{X}}$$

....

$$\alpha^{n-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}+\ldots+\lambda^{n-1}\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}=$$

$$(n-2)\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}-a_1\int\frac{x^{n-3}dx}{\sqrt{X}}-\ldots-a_{n-2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{2x^{n-1}}{\sqrt{X}}.$$

Au moyen de ces équations et de l'équation (1) on ramène l'étude des intégrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

à celle des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}$$

parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha & \beta & \ldots & \lambda \\ \alpha^2 & \beta^2 & \ldots & \lambda^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} & \ldots & \lambda^{n-1} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

La formule (2) permettra aussi d'exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$$

quand $m > n-2$, au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{X}}.$$

Donc, en dernière analyse, les intégrales considerées

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{X}}, \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$$

peuvent être exprimées au moyen des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \ldots \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{X}}$$

et de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

PROBLÈME D'ALGÈBRE

(Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne à M. Gomes Teixeira)

... Vous savez que les nombres que j'ai étudiés dans l'*American Journal of Mathematics* (vol. IX, p. 353) sous le nom de nombres K_m^p, et dont je me suis efforcée de faire ressortir l'importance au point-de-vue de l'analyse (qui m'ont permis, en particulier, de donner des expressions explicites très simples [formules (54), (55), (56)] des nombres de Bernoulli) sont définis par les formules

$$K_m^1 = 1, \quad K_m^m = 1,$$

$$K_m^p = pK_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1},$$

formules qui se traduisent, ainsi que je l'ai fait voir, par un tableau à double entrée analogue au triangle arithmétique de Pascal.

Le nombre K_m^p est d'ailleurs donné explicitement par la formule (5′) de mon Mémoire

$$K_m^p = \frac{p^m - C_p^1 (p-1)^m + C_p^2 (p-2)^m - \ldots}{p!}$$

$$\frac{+(-1)^{p-2} C_p^{p-2} 2^m + (-1)^{p-1} C_p^{p-1} 1^m}{p!}.$$

Voici, à titre de nouvelle application des nombres K_m^p, un problème d'algèbre que je résous par l'emploi de ces nombres :

Étant donné un polynôme entier et rationnel en x

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

on se propose de le mettre sous la forme

$$F(x)=h_0+h_1x+h_2x(x+1)+\ldots+h_nx(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

Donner l'expression explicite des coefficients h *en fonction des coefficients* a.

Un calcul facile montre que pour des différences de la variable x égales à l'unité, la $p^{\text{ième}}$ différence de la fonction $F(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\Delta^p F(x)=1.2.3\ldots p.h_p+2.3.4\ldots(p+1)\,h_{p+1}(x+p)\\ +3.4.5\ldots(p+2)\,h_{p+2}(x+p)(x+p+1)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta^p F(-p)=p!\,h_p,$$

et

$$(1)\qquad h_p=\frac{\Delta^p F(-p)}{p!}.$$

Or, la formule (15) de mon Mémoire de l'*American Journal*, transformée d'une formule de M. Cesarò, donne

$$\Delta^p F(x)=\sum_{i=0}^{i=n-p}\frac{K^p_{p+i}}{A^i_{p+i}}\,.\,F^{(p+i)}(x)$$

A^i_{p+i} représentant le nombre $(p+i)(p+i-1)\ldots(p+1)$ des arrangements de $p+i$ objets pris i à i.

D'ailleurs

$$\begin{aligned}F^{(m)}(x)=1.2\ldots m.a_m+2.3\ldots(m+1)\,a_{m+1}x\\ +3.4\ldots(m+2)\,a_{m+2}x^2+\ldots;\end{aligned}$$

donc

$$\Delta^p F(x) = \frac{K_p^p}{A_p^0}[1.2\ldots p.a_p + 2.3\ldots(p+1)\,a_{p+1}\,x$$
$$+3.4\ldots(p+2)\,a_{p+2}\,x^2+\ldots]$$
$$+\frac{K_{p+1}^p}{A_p^1}[1.2\ldots(p+1)a_{p+1}+2.3\ldots(p+2)\,a_{p+2}\,x$$
$$+3.4\ldots(p+3)\,a_{p+3}\,x^2+\ldots]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{K_{n-1}^p}{A_{n-1}^p}[1.2\ldots(n-1)\,a_{n-1}+2.3\ldots n.a_n\,x]$$
$$+\frac{K_n^p}{A_n^p}1.2\ldots n.a_n.$$

Faisant, dans cette formule, $x=-p$, e divisant par $p!$, on a, en vertu de (1),

$$h_p = a_p\,.\,C_p^p K_p^p$$
$$-a_{p+1}\left(C_{p+1}^p K_p^p\,.\,p - C_p^p K_{p+1}^p\right)$$
$$+a_{p+2}\left(C_{p+2}^p K_p^p p^2 - C_{p+1}^p K_{p+1}^p \frac{p+2}{p+1}p + C_p^p K_{p+2}^p\right)$$
$$-a_{p+3}\left(C_{p+3}^p K_p^p p^3 - C_{p+2}^p K_{p+1}^p \frac{p+3}{p+1}p^2\right.$$
$$\left.+C_{p+1}^p K_{p+2}^p \frac{(p+2)(p+3)}{(p+2)(p+1)}p - C_p^p K_{p+3}^p \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+3)(p+2)(p+1)}\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-p}a_n\left(C_p^p K_p^p p^{n-p} - C_{n-1}^p K_{p+1}^p \frac{n}{p+1}p^{n-p-1}+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-p}C_p^p K_n^p \frac{(p+1)(p+2)\ldots n}{n\ldots(p+2)(p+1)}\right),$$

formule qui résout le problème que nous nous étions proposé, et où, bien entendu, C_m^n réprésente le nombre

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$

des combinaisons de m objets pris n à n.

NOTE DE CALCUL INTÉGRAL

PAR

H. LE PONT

Dans un précédent article, nous avons indiqué une méthode qui permet d'intégrer un système de n équations linéaires simultanées aux différentielles totales et à coefficients constants, et qui donne en même temps les conditions de compabilité de ce système. Nous nous proposons dans cette note de développer la même analyse dans le cas d'un système de deux équations à m variables indépendantes et à coefficients quelconques.

Prenons, pour plus de simplicité, les deux équations

$$(A)\quad \begin{cases} dy_1 = (a_{1,1}\,y_1 + a_{1,2}\,y_2)\,dx_1 + (a_{2,1}\,y_1 + a_{2,2}\,y_2)\,dx_2 \\ dy_2 = (b_{1,1}\,y_1 + b_{1,2}\,y_2)\,dx_1 + (b_{2,1}\,y_1 + b_{2,2}\,y_2)\,dx_2 \end{cases}$$

les coefficients a et b étant des fonctions quelconques des variables indépendantes x_1 et x_2.

Multiplions la seconde équation par une fonction indéterminée λ de x_1 et de x_2, et ajoutons ce produit à la première, il vient

$$(1)\quad \begin{cases} d(y_1+\lambda y_2) = \left[(a_{1,1}+\lambda b_{1,1})\,y_1 + \left(a_{1,2}+\lambda b_{1,2}+\dfrac{d\lambda}{dx_1}\right) y_2\right] dx_1 \\ \qquad + \left[(a_{2,1}+\lambda b_{2,1})\,y_1 + \left(a_{2,2}+\lambda b_{2,2}+\dfrac{d\lambda}{dx_2}\right) y_2\right] dx_2 \end{cases}$$

ou

$$(B)\quad d\,\mathrm{Log}\,(y_1+\lambda y_2) = (a_{1,1}+\lambda b_{1,1})\,dx_1 + (a_{2,1}+\lambda b_{2,1})\,dx_2$$

en posant

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dx_1} = b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2} \\ \dfrac{d\lambda}{dx_2} = b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}. \end{cases}$$

Pour que le système (A) soit compatible, il faut et il suffit évidemment: 1° que le second membre de l'équation (B) soit une différentielle exacte; 2° que les équations (2) définissent une même fonction λ, intégrale de l'équation aux différentielles totales

$$(C)\quad \begin{cases} d\lambda = [b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2}]\,dx_1 \\ \qquad + [b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}]\,dx_2. \end{cases}$$

La première condition s'exprime de la manière suivante

$$\frac{d}{dx_2}(a_{1,1} + \lambda b_{1,1}) = \frac{d}{dx_1}(a_{2,1} + \lambda b_{2,1}),$$

ou, en développant et remplaçant $\dfrac{d\lambda}{dx_1}$ et $\dfrac{d\lambda}{dx_2}$ par leurs valeurs

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{da_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{da_{1,1}}{dx_2} - a_{1,2}b_{2,1} + b_{1,1}a_{2,2} \\ + \left[\dfrac{db_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{db_{1,1}}{dx_2} + (a_{1,1} - b_{1,2})b_{2,1} - (a_{2,1} - b_{2,2})b_{1,1}\right]\lambda = 0, \end{cases}$$

équation qui doit être vérifiée identiquement. Donc

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{da_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{da_{1,1}}{dx_2} = a_{1,2}\,b_{2,1} - b_{1,1}\,a_{2,2} \\ \dfrac{db_{2,1}}{dx_1} - \dfrac{db_{1,1}}{dx_2} = (a_{2,1} - b_{2,2})\,b_{1,1} - (a_{1,1} - b_{1,2})\,b_{2,1}. \end{cases}$$

Pour obtenir la seconde condition, égalons les valeurs de $\dfrac{d^2\lambda}{dx_1 dx_2}$

fournies par les équations (2). Nous avons ainsi, en éliminant toujours $\frac{d\lambda}{dx_1}$ et $\frac{d\lambda}{dx_2}$, et en tenant compte de (I)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}=(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}+(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}\\ &\qquad+\left(\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1,2}}{dx_2}-b_{1,1}\,a_{2,2}+a_{1,2}\,b_{2,1}\right)\lambda=0\end{aligned}\right.$$

puis, en annulant les coefficients de cette équation

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}=(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}-(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}\\ &\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1,2}}{dx_2}=-a_{1,2}\,b_{2,1}+b_{1,1}\,a_{2,2}.\end{aligned}\right.$$

Les quatre relations (I) et (II) sont les conditions de compatibilité du système différentiel proposé. Il est du reste facile de le vérifier directement. En effet, les équations (A) sont équivalentes à celles-ci

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx_1}=a_{1,1}\,y_1+a_{1,2}\,y_2 \qquad \frac{dy_1}{dx_2}=a_{2,1}\,y_1+a_{2,2}\,y_2\\ &\frac{dy_2}{dx_1}=b_{1,1}\,y_1+b_{1,2}\,y_2 \qquad \frac{dy_2}{dx_2}=b_{2,1}\,y_1+b_{2,2}\,y_2.\end{aligned}\right.$$

Egalant les valeurs de $\frac{d^2y_1}{dx_1\,dx_2}$ et de $\frac{d^2y_2}{dx_1\,dx_2}$ tirées de ces équations, nous avons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{da_{2.1}}{dx_1}-\frac{da_{1,1}}{dx_2}+b_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}\,b_{2,1}\right)y_1\\ &+\left[\frac{da_{2,2}}{dx_1}-\frac{da_{1,2}}{dx_2}+(a_{2,1}-b_{2,2})\,a_{1,2}-(a_{1,1}-b_{1,2})\,a_{2,2}\right]y_2=0\\ &\left[\frac{db_{2,1}}{dx_1}-\frac{db_{1.1}}{dx^2}+(a_{1,1}-b_{1,2})\,b_{2,1}-(a_{2,1}-b_{2,2})\,b_{1,1}\right]y_1\\ &\qquad+\left(\frac{db_{2,2}}{dx_1}-\frac{db_{1.2}}{dx_2}+a_{1,2}\,b_{2,1}-b_{1,1}\,a_{2,2}\right)y_2=0\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, en exprimant que les coefficients de y_1 et de y_2 sont nuls, les relations (I) et (II).

Ces conditions étant supposées satisfaites, nous allons déterminer les deux fonctions λ qui forment nos deux combinaisons linéaires immédiatement intégrables. Posons

$$(5)\quad \begin{cases} h_1 = b_{1,1}\lambda^2 + (a_{1,1} - b_{1,2})\lambda - a_{1,2} \\ h_2 = b_{2,1}\lambda^2 + (a_{2,1} - b_{2,2})\lambda - a_{2,2}; \end{cases}$$

l'équation (C) prend la forme

$$(\gamma)\qquad d\lambda = h_1\, dx_1 + h_2\, dx_2.$$

La condition d'intégrabilité, qui se réduit ici à

$$h_1 \frac{dh_2}{d\lambda} - h_2 \frac{dh_1}{d\lambda} = 0,$$

doit être vérifiée. Nous avons alors, en effectuant

$$(S)\quad \begin{cases} [(a_{1,1} - b_{1,2})b_{2,1} - (a_{2,1} - b_{2,2})b_{1,1}]\lambda^2 - 2(a_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}a_{2,2})\lambda \\ \qquad\qquad + (a_{1,1} - b_{1,2})a_{2,2} - (a_{1,1} - b_{2,2})a_{1,2} = 0, \end{cases}$$

équation qui détermine les deux valeurs de λ satisfaisant à la question.

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation et

$$(a_{1,1} + \lambda_1 b_{1,1})\, dx_1 + (a_{2,1} + \lambda_1 b_{2,1})\, dx_2 = dt_1$$

$$(a_{1,1} + \lambda_2 b_{1,1})\, dx_1 + (a_{2,1} + \lambda_2 b_{2,1})\, dx_2 = dt_2;$$

nous avons, en appelant c_1 et c_2 les constantes d'intégration,

$$y_1 + \lambda_1 y_2 = c_1 e^{t_1} \qquad y_2 + \lambda_2 y_2 = c_2 e^{t_2}$$

et par suite

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,(c_1\lambda_2 e^{t_1} - c_2\lambda_1 e^{t_2}) \\[2ex] y_2 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,(c_1 e^{t_1} - c_2 e^{t_2}), \end{cases}$$

système intégrant des équations (A).

Il est facile de voir que l'équation (3) ne peut jamais avoir de racine double. En effet, introduisons dans les valeurs (Σ) de y_1 et y_2 l'hypothèse

$$\lambda_1 = \lambda + \varepsilon \quad \lambda = \lambda$$

il vient en faisant tendre ε vers zéro

$$y_1 + \lambda y_2 = 0.$$

Or la relation

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} (a_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}a_{2,2})^2 + [(a_{1,1} - b_{1,2})\,a_{1,2} - (a_{2,1} - b_{2,2})\,a_{1,2}] \\ \qquad + [a_{1,1} - b_{1,2})\,b_{2,1} - (a_{2,1} - b_{2,2})\,b_{1,1}] = 0, \end{cases}$$

qui exprime que l'équation (3) a une racine double λ exprime aussi, comme il est facile de s'en assurer par un calcul direct, que cette valeur λ est une solution commune des équations

$$(6)\qquad h_1 = 0 \quad h_2 = 0,$$

et alors, à cause des formules (2) elle est indépendante à la fois de x_1 et de x_2.

Nous nous trouvons donc dans le cas d'une seule fonction y définie par deux équations différentielles qui se reduisent nécessairement à une seule, ce que nous n'avons pas supposé.

Il est clair aussi que l'équation (3) ne peut pas avoir de racine indépendante à la fois de x_1 et de x_2. Si l'une des racines ne contiene ni x_1, ni x_2, elle est racine commune des équations (6) et racine double de l'équation (S), nous rentrons dans le cas precedent; si les deux racines ne contiennent ni x_1 ni x_2, elles satisfont aux équations (6) et donnent

$$\text{(III)} \qquad \frac{a_{1,2}}{a_{2,2}} = \frac{a_{1,1} - b_{1,2}}{a_{2,1} - b_{2,2}} = \frac{b_{1,1}}{b_{2,1}},$$

relations qui montrent que l'équation (S) est vérifiée identiquement, ce qui est contraire à notre hypothèse.

On voit que le seul cas où la méthode puisse tomber en défaut est celui où l'équation (S) est vérifiée identiquement. Les relations (I) et (II) deviennent alors à cause des équations (III)

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{da_{2,1}}{dx_1} = \dfrac{da_{1,1}}{dx_2} & \dfrac{da_{2,2}}{dx_1} = \dfrac{da_{1,2}}{dx_2} \\[2ex] \dfrac{db_{2,1}}{dx_1} = \dfrac{db_{1,1}}{dx_2} & \dfrac{db_{2,2}}{dx_1} = \dfrac{db_{1,2}}{dx_2}. \end{array} \right.$$

Si nous mettons le système (A) sous la forme

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dy_1 = (a_{1,1}\,dx_1 + a_{2,1}\,dx_2)\,y_1 + (a_{1,2}dx_1 + a_{2,2}dx_2)\,y_2 \\ dy_2 = (b_{1,1}\,dx_1 + b_{2,1}\,dx_2)\,y_1 + (b_{1,2}\,dx_1 + b_{1,2}\,dx_2)\,y_2 \end{array} \right.$$

nous voyons que les coefficients de y_1 et de y_2 sont des différentielles exactes.

L'équation (S) étant vérifiée quelque soit λ, l'est aussi pour les valeurs de λ qui ne contiennent ni x_1 ni x_2; les équations (6) ayant leurs racines indépendantes des variables s'écrivent

$$(10) \qquad a + c\lambda - b\lambda^2 = 0$$

a, b, c étant des constantes; et les équations (A) sont

$$\text{(P)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} dy_1 = [f_1(x_1,x_2)\,y_1 + aky_2]\,dx_1 + [f_2(x_1,x_2)\,y_1 + ay_2]\,dx \\ dy_2 = [bky_1 + \{f_1(x_1,x_2) + ck\}\,y_2]\,dx_1 \\ \qquad\qquad + [by_1 + \{f_2(x_1,x_2) + c\}\,y_2]\,dx_2 \end{array} \right.$$

en appelant k la valeur commune des rapports (III), $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ deux fonctions de x_1 et x_2 satisfaisant à la relation

$$\text{(V)} \qquad \frac{df_1(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{df_2(x_1, x_2)}{dx_2}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(\alpha)\ d\mathrm{Log}(y_1+\lambda y_2) = f_1(x_1,x_2)\,dx_1 + f_2(x_1,x_2)\,dx_2 + \lambda b(k dx_1 + dx_2).$$

Soint $f(x_1, x_2)$ l'intégrale de l'expression

$$f_1(x_1, x_2)\,dx_1 + f_2(x_1, x_2)\,dx_2,$$

Δ le discriminant de l'équation (10), Γ_1 et Γ_2 deux constantes, nous avons pour intégrales des équations (P)

$$\text{(R)}\left\{\begin{aligned} y_1 &= \frac{e^{f(x_1,x_2)-\frac{c}{2}(kx_1+x_2)}}{\sqrt{\Delta}}\left[(\sqrt{\Delta}+c)\Gamma_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1+x_2)} + (\sqrt{\Delta}-c)\Gamma_2 e^{\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1+x_2)}\right] \\ y_2 &= \frac{2be^{f(x_1,x_2)-\frac{c}{2}(kx_1+x_2)}}{\sqrt{\Delta}}\left[\Gamma_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1+x_2)} - \Gamma_2 e^{\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}(kx_1+x_2)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Du reste l'équation (10) ne peut avoir ses racines égales sans que le système (P) ne contienne qu'une seule fonction y, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Si les fonctions $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ se réduisent à des constantes, nous retrouvons les systèmes que nous avons considérés dans notre note précédente. Les équations (P) se ramènent à deux équations à coefficients constants par la substitution

$$y_1 = e^{\theta f(x_1, x_2)} z_1$$

$$y_2 = e^{\theta f(x_1, x_2)} z_2$$

θ désignant une constante.

En résumé, l'intégration d'un système de deux équations simultanées aux différentielles totales et à m variables indépendantes ne dépend que de la résolution d'une équation du second degré et à l'intégration de $2m$ différentielles exactes de ces m variables.

Dans un prochain article, nous considérons les systèmes généraux de n équations à m variables indépendantes et à coefficients quelconques.

BIBLIOGRAPHIA

Henrique de Figueiredo. — Curvas planas algebricas. — Coimbra, 1888.

A theoria geral das curvas planas algebricas tem sido modernamente objecto de trabalhos notaveis, que além de estenderem o campo da Geometria, têem concorrido para progresso de muitos pontos importantes da Analyse. É d'esta theoria geral que se occupa o sr. Henrique de Figueiredo no seu opusculo, apresentado á faculdade de mathematica da universidade de Coimbra como Dissertação para o concurso a uma cadeira da mesma faculdade.

Principia o auctor por expôr algumas noções geraes sobre os dois systemas de coordenadas homogeneas conhecidas pelos nomes de *coordenadas pontos* e de *coordenadas linhas.* Passando em seguida ao assumpto especial do livro, considera successivamente os theoremas relativos á passagem de curvas algebricas por pontos dados, os pontos multiplos d'estas curvas, as suas *hesseanas,* as suas *polares;* define as noções de genero e de classe e mostra a importancia d'estas noções; apresenta as *formulas de Plücker* a que satisfazem os numeros caracteristicos de uma curva; e finalmente estuda a theoria das *curvas unicursaes,* e indica a importancia que tem a consideração d'estas curvas para o problema da integração das funcções algebricas.

E. Cesàro. — Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazii (*Memorias da Academia real das sciencias de Lisboa,* 1888).

Na primeira parte d'esta interessante Memoria demonstra o auctor os dois theoremas seguintes:

1.° Existem só dezoito especies de polyedros em que as faces da mesma ordem concorrem em cada vertice no mesmo numero;

2.° Existem só dezoito especies de polyedros em que os vertices da mesma ordem se acham em cada face no mesmo numero.

Deve-se observar que o auctor chama *ordem* de uma face ou de um vertice o numero de lados diminuido de duas unidades.

Na segunda parte mostra o auctor que todos os polyedros de que se occupou na primeira parte podem derivar-se uns dos outros por meio de operações muito simples, cujo estudo o leva a propôr, para os designar, uma nomenclatura simples e clara.

Na terceira parte mostra que as fórmulas empregadas na primeira parte podem levar a rêdes de rectas que satisfazem ás condições dos dois theoremas n'ella demonstrados, e estuda estas rêdes.

Finalmente na quarta parte estuda as fórmas polyedricas no espaço a n dimensões.

F. Casorati. — Sopra le coupures *del sig. Hermite, i* Querschnitte *e le superficie di Riemann el i concetti d'integrazione si reale che complessa.*

N'esta Memoria importante estuda o sabio professor da Universidade de Pavia a funcção $\Phi(z)$ definida pelo integral

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, z)\, dt$$

para lhe procurar os diversos ramos correspondentes aos differentes caminhos seguidos pela variavel t na passagem de t_0 para t_1, e para os representar por superficies de Riemann.

Principia o auctor por considerar o caso de ser $f(t, z)$ uma funcção racional de t e de z, caso estudado pelo sr. Hermite no caso de ser rectilineo o caminho seguido por t na passagem de t_0 para t_1, e que levou este grande geometra á noção de *coupure*. Mostra que cada ramo da funcção tem uma linha de discontinuidade (*coupure*), mas que a reunião de todos os ramos dá uma só funcção continua.

Estuda em seguida o caso em que $f(z, t)$ representa uma funcção irracional, isto é, uma raiz de uma equação algebrica com coefficientes racionaes relativamente a z e a t.

Finalmente estuda alguns casos em que $f(z, t)$ é uma funcção transcendente.

F. Amorétti e C. Morales. — *Teoria elemental de las determinantes.* — *Buenos Ayres, 1888.*

Esta obra, como outra sobre a theoria dos quaterniões, de que se deu noticia no volume anterior d'este jornal, mostra o desenvolvimento que vai tomando o ensino das mathematicas puras na Universidade de Buenos Ayres, o que é devido principalmente á iniciativa do professor na mesma Universidade, sr. dr. Valentin Balbin. Contém ella o curso feito por este illustre professor no anno de 1884 e é redigida por dois dos seus discipulos, os srs. engenheiros F. Amorétti e C. Morales.

No livro primeiro tractam os auctores da theoria geral dos determinantes. Ahi são estudadas as propriedades fundamentaes dos determinantes, as regras para os calcular, as operações a que se sujeitam, etc.

No livro segundo, o mais interessante da obra, consideram os auctores os determinantes de fórma especial, estudando successivamente os determinantes reciprocos, os determinantes symetricos, os determinantes multiplos, os circulantes, os alternantes, os continuantes e os determinantes funccionaes.

Finalmente no livro terceiro vêem as applicações analyticas da theoria dos determinantes á resolução dos systemas de equações do primeiro grão, á theoria da eliminação entre equações algebricas de qualquer grão, etc., e algumas applicações a questões de Geometria elementar.

Ph. Gilbert. — *Sur la convergence des intégrales à limites infinis* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2.ᵉ série, t. XII).

N'este bello artigo apresenta o auctor exemplos de integraes definidos da fórma

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

que têem valores finitos sem que $f(x)$ tenda para zero quando x tende para o infinito, ou mude indefinidamente de signal.

Apresenta como primeiro exemplo o integral

$$\int_0^\infty (\operatorname{sen}^2 \pi x)^{\varphi(x)}\,dx,$$

onde $\varphi(x)$ representa uma funcção positiva, crescente com x a partir de um valor determinado de x, e tal que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < 1.$$

Considera em seguida o integral

$$\int_0^\infty \psi(x)\,(\mathrm{sen}^2 \pi x)^{\varphi(x)}\,dx,$$

onde $\psi(x)$ é uma funcção positiva de x tal que

$$\int^1 \psi(n+x)^2\,dx$$

não póde exceder um valor fixo qualquer que seja n. Mostra que este integral é finito, e partindo d'elle chega a este resultado interessante: É possivel determinar a funcção $f(x)$ de tal modo que, conservando-se positiva e tornando-se infinita um numero de vezes tão grande quanto se queira no mais pequeno intervallo dado, a partir de um valor convenientemente escolhido de x, o integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ seja todavia finito e determinado.

D. S. Archilla y Espejo e D. G. Vicuña. — *Discursos leidos ante la real Academia de Ciencias.* — *Madrid, 1888.*

Contém este opusculo os bellos discursos pronunciados pelos srs. Archilla e Vicuña perante a Academia das Sciencias de Madrid na recepção solemne do primeiro d'estes distinctos mathematicos.

Foi o sr. Archilla procurar á Analyse infinitesimal, de que é professor na Universidade de Madrid, o assumpto para o seu discurso, tomando para thema d'elle o modo de conceber esta analyse.

Referindo-se primeiro aos methodos empregados para resolver as questões de Geometria infinitesimal antes da descoberta do Calculo infinitesimal, expõe e examina o methodo empregado por

Archimedes, o maior geometra da antiguidade, que, como o auctor diz, creou a maior parte das noções fundamentaes que deram origem e serviram de base a este calculo; e em seguida o methodo dos indivisiveis de Cavalieri, no qual apparece a applicação immediata da noção de infinitamente pequena a resolução das questões mathematicas.

Occupa-se depois da descoberta do Calculo infinitesimal por Newton e Leibnitz e analysa os modos como estes grandes sabios concebiam este calculo. Segue-se a apreciação dos conceitos que do mesmo calculo faziam Euler, Lagrange, Carnot e Cauchy, demorando-se principalmente na referencia a este ultimo, cujo modo de vêr adopta.

Na resposta ao discurso anterior, o sr. Vicuña, depois de apreciar as altas qualidades do novo academico, occupa-se em indicar as obras escriptas em Hespanha, em que se estuda a analyse infinitesimal, ou em que se faz uso d'esta analyse.

Em seguida aprecia o discurso do sr. Archilla e a obra importante intitulada: *Estudios fundamentales del Calculo diferencial*, onde este illustre professor expõe desenvolvidamente o mesmo assumpto cuja parte philosophica condensa no seu discurso.

G. Tarry. — *Essai sur la Géométrie des figures imaginaires* (*Association française pour l'avancement des sciences*, 1887).

O auctor considera o ponto imaginario como determinado por dois pontos, um ponto origem A e um ponto extremo A′ representando um papel differente do primeiro. Representa o ponto imaginario pelo signal $A\underline{A'}$. O ponto $A\underline{A}$ é o ponto real. Á posição que toma o ponto A′ depois de descrever uma circumferencia em roda de A chama posição exterior do ponto $A\underline{A'}$.

Para definir a recta imaginaria o auctor corta por uma transversal tres rectas que passam por um ponto fixo, o que dá tres pontos A, B, C. Construe em seguida um ponto $P\underline{P'}$ determinado pela relação $(\alpha ABC) = K_\lambda$, onde α representa a posição exterior do ponto $P\underline{P'}$ e (αABC) uma quantidade complexa determinada pela razão $\dfrac{\alpha B}{\alpha C} : \dfrac{AB}{AC} = K$ e pelo angulo $(C\alpha B - CAB = \gamma)$. Fazendo variar a transversal, o ponto $\overline{PP'}$ descreve uma recta real quando $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm \pi$, e um logar geometrico que o sr. Tarry chama recta imaginaria, nos outros casos.

Na interessante Memoria a que nos estamos referindo, o auctor apresenta uma serie de propriedades dos pontos e rectas imaginarias para justificar a importancia da nova representação dos imaginarios.

M. Lerch. — *Sur une formule d'Arithmétique* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2^e^ série, t. XII).

——— *Théorèmes d'Arithmétique (Item).*

Referem-se á Arithmetica superior estes dois bellos artigos.

No primeiro o auctor demonstra a fórmula seguinte:

$$\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} [\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1) - \chi(m-\sigma a, a)]$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{k-1} [\psi(m+\lambda a, \lambda-1) - \chi(m+\lambda a, a)] = 0,$$

onde $\psi(p, q)$ representa o numero de divisores de p superiores a q, $\chi(p, q)$ o numero de divisores de p eguaes ou inferiores a q, e a, m e k numeros positivos dos quaes o ultimo é superior á unidade. D'esta fórmula tira o auctor algumas consequencias interessantes.

No segundo artigo apresenta o auctor a fórmula notavel

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m+\alpha n, \alpha) - \psi(m+\alpha n, a)] = \varphi(a, n)$$

onde $\varphi(a, n)$ representa o numero de termos da serie $1, 2, 3, \ldots, a$ que são primos com n, e m um numero primo com n.

Pondo n'esta fórmula $a = n$ ou $n - 1$ obtem o sr. Lerch duas relações que ligam a funcção $\varphi(n)$ de Euler e Gauss com a funcção $\psi(p, q)$.

M. d'Ocagne. — *Quelques propriétés de l'ellipse; déviation, écart normal* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ème série, t. VII).

N'este artigo estuda o auctor a correlação geometrica que existe entre o angulo que a tangente á ellipse em cada ponto faz com a tangente correspondente ao circulo principal, e a anomalia excentrica; e a correlação geometrica que existe entre a inclinação da normal sobre o diametro correspondente e a mesma anomalia, o que o leva a uma serie de theoremas interessantes relativos á ellipse.

A. Lugli. — *Sul numero dei numeri primi da* 1 *ad* n (*Giornale di Matematiche*, t. XXVI).

N'este artigo interessante apresenta o auctor um methodo mais simples do que os methodos de Legendre e Meissel para determinar o numero de numeros primos comprehendidos entre 1 e um inteiro qualquer n.

Ed. Weyr. — *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec* n *unités principales* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. XI).

M. Lerch. — *Uber Functionem mit beschränktem Existenzbereich* (*Abhandlungen der K. böhmischen Gesellschaft der Wischenschaften*, 1888).

— *Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 103).

M. d'Ocagne. — *Sur les cordes communes à une conique et à un cercle de rayon nul; Application à la théorie géométrique des foyers dans les coniques* (*Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, t. V).

— *Sur les invariants des formes binaires* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 1888).

E. Cesàro. — *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ème série, t. VII).

——— *Sur les lois asymptotiques des nombres* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lencei*, 1888).

——— *Sur les systèmes de nombres entiers* (*Item*).

S. Pincherle. — *Sur une généralisation des fonctions eulériennes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888).

R. Guimarães. — *Semelhança e rectificação dos arcos ellipticos.* — *Porto, 1887*).

Do excellente jornal *Mathesis* (t. VIII, pag. 137) extrahimos a seguinte noticia a respeito d'este opusculo:

«Este interessante trabalho tracta primeiro da associação, e em seguida da rectificação dos arcos ellipticos. Dois arcos são associados, se a sua differença é rectificavel. Dois pontos M e N d'uma ellipse são associados se as normaes á curva n'estes pontos estão egualmente affastadas do centro. Se A e B são os vertices da ellipse, AM e BN são dois arcos associados, e tem-se a egualdade

$$\mathrm{AM} - \mathrm{BN} = \frac{k^2}{a} x_1 x_2 = p,$$

que é a traducção do theorema de Fagnano. O auctor dá duas outras demonstrações d'este celebre theorema; a ultima é uma bella applicação do methodo de que se serviu Talbot para deduzir um grande numero de fórmulas analogas ás de Fagnano. No terceiro paragrapho encontram-se os theoremas de Graves e de Mac-Cullagh, que dão arcos de differença rectificavel sem que seja necessario que os arcos se terminem nos vertices da ellipse; citemos tambem uma generalisação da relação

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}(\mu) = ak^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu,$$

se

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}(\mu) = 0.$$

«A segunda parte d'este trabalho comprehende tambem tres paragraphos. No primeiro o auctor demonstra que existe, sobre um quadrante elliptico, uma infinidade de arcos rectificaveis por meio de rectas, e dá a relação que deve existir entre as coordenadas das extremidades d'estes arcos. D'este theorema conclue que existe uma infinidade de valores para os limites de um integral elliptico de segunda especie, que tornam este integral exprimivel algebricamente. O segundo paragrapho é consagrado ás indagações sobre os limites superiores e inferiores do perimetro E da ellipse. O auctor reproduz a demonstração do theorema

$$\pi(a+b) < \mathrm{E} < \pi\sqrt{2a^2+2b^2},$$

dada pelo sr. Mister, assim como a substancia dos artigos dos srs. Barbarin e Mansion sobre os valores approximados de E.

«No ultimo paragrapho o auctor estabelece a impossibilidade de rectificar, de um modo geral, um arco elliptico, e procura a equação da envolvente da ellipse.»

G. T.

ERRATAS

Pag. 116, linh. 5 — em logar de *necessaria para a convergencia* deve ler-se *sufficiente para a divergencia.*

Pag. 116, linh. 7 — deve supprimir-se *differente de.*

Pag. 116, linh. 11 — deve escrever-se *lim* antes do primeiro membro.

Pag. 117, linh. 11 — em logar de $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right)$ deve ler-se $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$.

INDICE