42

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS

E

ASTRONOMICAS

10
5
9

PUBLICADO

PELO

Dr. Francisco Gomes Teixeira

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra

e

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

VOL. I—N.º 8

COIMBRA

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

1877

Neste livro estão os vol. 1º 2º e 3º

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Cada mez se publicará um numero do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas,* que formarão no fim de cada anno um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume (12 numeros)....... 2$400 réis.

As assignaturas são pagas adiantadamente.

A correspondencia relativa á Redacção do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para os Palacios Confusos, n.º 24—Coimbra.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS

E

ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. Francisco Gomes Teixeira

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra
e
Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

VOL. I

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1877

Começamos hoje a publicação de um Jornal dedicado ás Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Quasi todos os paizes da Europa, ainda os mais pequenos, sustentam, além das publicações periodicas publicadas pelas corporações scientificas, onde vem artigos relativos a todas as sciencias, jornaes de iniciativa particular dedicados exclusivamente ás Sciencias Mathematicas ou ás Sciencias Astronomicas. Em Portugal não existe nenhum d'este segundo genero. É na realidade uma empresa difficil, que todavia ousamos emprehender, apezar das nossas poucas forças, confiados no auxilio que esperamos dos Mathematicos e Astronomos Portuguezes.

É nosso objecto a publicação de memorias relativas ás Mathematicas puras, á Mecanica racional e applicada, á Physica mathematica, á Astronomia, á Geodesia, á Stereotomia, etc.

Em cada numero haverá duas secções, uma relativa a questões de Mathematicas superiores, outra destinada ás pessoas que conhecem só as mathematicas, que se ensinam nos nossos cursos de instrucção secundaria, na qual publicaremos artigos sobre Mathematicas elementares, Noticias astronomicas, etc., para cujo bom exito esperamos que concorrerão os professores dos nossos Lyceus com seus artigos.

F. Gomes Teixeira.

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

1. Toute fraction rationelle de x peut être décomposée en un polynôme entier et en une fraction dant le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur.

Cette fraction peut être encore décomposée, comme on sait, en d'autres, dont les dénominateurs sont des puissances d'un binome du premier degré en x. Beaucoup de géomètres se sont occupés de la détermination des numérateurs de ces fractions, et ont même donné des formules générales pour les trouver, mais ces formules font dépendre les numérateurs les uns des autres.

Le savant géomètre M. Hermite donne, dans son *Cours d'Analyse*, des formules directes pour trouver les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles ou peut décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}}.$$

Le but de ce Mémoire est de généraliser cette doctrine, pour donner une forme, que je crois nouvelle, aux formules qui donnent les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles on décompose une fraction rationelle, forme qui a l'avantage de donner ces numérateurs independamment les uns des autres. Les formules, auxquelles je parviens, contiennent les formules de M. Hermite comme cas particulier.

2. Toute fraction rationnelle propre, après avoir été réduite à son expression la plus simple, peut être décomposée de la manière suivante:

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{L_1}{(x-a_n)} + \frac{L_2}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-a_n)^\lambda},$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots B_1, B_2, \ldots L_1, L_2 \ldots$ étant des constantes, et

$$F(x) = (x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda.$$

Le problème à résoudre est la détermination des quantités A_1, $A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots L_1, L_2 \ldots$

Nous supposerons premièrement $F_1(x) = 1$.

Évidemment

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{1}{a_1-a_2} \times \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{a_2-a_1} \times \frac{1}{x-a_2},$$

donc, en multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{x-a_3}$, et en appliquant ensuite la formule précédente aux produits

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_3)} \text{ et } \frac{1}{(x-a_2)(x-a_3)}, \text{ il vient}$$

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}=\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\cdot\frac{1}{x-a_1}$$

$$+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}\cdot\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\cdot\frac{1}{x-a_3}.$$

. . . .

En continuant de la même manière, on obtient en général la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}&=\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}\cdot\frac{1}{x-a_1}\\ &+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}\cdot\frac{1}{x-a_2}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}\cdot\frac{1}{x-a_n}\end{aligned}\right\}(1).$$

Mais, d'un antre côté,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{x-a_1-h_1}=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{h_1}{(x-a_1)^2}+\dfrac{h_1{}^2}{(x-a_1)^3}+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{h_1{}^{\alpha-1}}{(x-a_1)^{\alpha}}+\ldots \\
\dfrac{1}{x-a_2-h_2}=\dfrac{1}{x-a_2}+\dfrac{h_2}{(x-a_2)^3}+\dfrac{h_2{}^2}{(x-a_2)^3}+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{h_2{}^{\beta-2}}{(x-a_2)^{\beta}}+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{1}{x-a_n-h_n}=\dfrac{1}{x-a_n}+\dfrac{h_n}{(x-a_n)^2}+\dfrac{h_n{}^2}{(x-a_n)^3}+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{h_n{}^{\lambda-1}}{(x-a_n)^{\lambda}}+\ldots
\end{array}\right\}(2)$$

et

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_2+h_2)}=\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{h_2-h_1}{(a_1-a_2)^2}+\frac{(h_2-h_1)^2}{(a_1-a_2)^3}+\ldots$$

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_3+h_3)}=\frac{1}{a_1-a_3}+\frac{h_3-h_1}{(a_1-a_3)^2}+\frac{(h_3-h_1)^2}{(a_1-a_3)^3}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_n+h_n)}=\frac{1}{a_1-h_n}+\frac{h_n-h_1}{(a_1-a_n)^2}+\frac{(h_n-h_1)^2}{(a_1-a_n)^3}+\ldots$$

En rémarquant que le coefficient de $h^m k^n$ dans le développement de $(k-h)^{m+n}$ est $(-1)^n [(m+n)\,Cn]$, les formules précédentes se transforment dans les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a_1+h_1-(a_2+h_2)}=\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{h_2-h_1}{(a_1-a_2)^2}+\cdots\\
&+\Sigma(-1)^{\delta'}.\frac{[(\delta'+\beta-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\delta'+\beta}}h_1{}^{\delta'}h_2{}^{\beta-1}+\cdots\\
&\frac{1}{a_1+h_1-(a_3+h_3)}=\frac{1}{a_1-a_3}+\frac{h_3-h_1}{(a_1-a_3)^2}+\cdots\\
&+\Sigma(-1)^{\delta''}.\frac{[(\delta''+\gamma-1)\,C\delta'']}{(a_1-a_3)^{\delta''+\gamma}}h_1{}^{\delta''}h_3{}^{\gamma-1}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{a_1+h_1-(a_n+h_n)}=\frac{1}{a_1-a_n}+\frac{h_n-h_1}{(a_1-a_n)^2}+\cdots\\
&+\Sigma(-1)^{\delta^{(n-1)}}.\frac{[(\delta^{(n-1)}+\lambda-1)\,C\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\delta^{(n-1)}+\lambda}}h_1{}^{\delta^{(n-1)}}h_3{}^{\lambda-1}+\cdots
\end{aligned}\right\}(3)$$

dans lesquelles $\delta', \delta'', \ldots \delta^{(n-1)}$ peuvent avoir toutes les valeurs entières et positives.

En substituant les développements (2) et (3) dans la formule (1), après avoir changé en celle-ci: a_1 en a_1+h_1, a_2 en a_2+h_2, a_3 en a_3+h_3, etc., et en égalant les coefficients de $h_1{}^{\alpha-1}\times h_2{}^{\beta-1}\times h_3{}^{\gamma-1}\ldots h_n{}^{\lambda-1}$ dans les deux membres, on obtient une équation, dont le premier membre est $\frac{1}{F(x)}$ et dont le deuxième membre est une somme de fractions simples, dans lesquelles $\frac{1}{F(x)}$ se peut décomposer.

On trouve ainsi que le numérateur de la première fraction, c'est à dire de la fraction $\frac{A_1}{x-a_1}$, est

$$\left.\begin{aligned}A_1 = (-1)^{\alpha-1}\Sigma \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \\ \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}}\end{aligned}\right\} (4),$$

en étandant le Σ à toutes les valeurs entières et positives, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = \alpha - 1 \qquad (5).$$

Le numérateur de la fraction $\frac{A_2}{(x-a_1)^2}$ peut être obtennu de la même manière. Nous avons dans ce cas:

$$\left.\begin{aligned}A_2 = (-1)^{\alpha-2}\Sigma \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \\ \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}}\end{aligned}\right\},$$

où

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = \alpha - 2.$$

En général, le numérateur de $\frac{A_i}{(x-a_1)^i}$ est donné par la formule

$$\left.\begin{aligned} A_i = (-1)^{\alpha-i} \Sigma \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \\ \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

en posant

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = \alpha - i.$$

Pour trouver les numérateurs des fractions $\frac{B_1}{(x-a_2)}, \frac{B_2}{(x-a_2)^2} \ldots$

$\frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}$ il suffit de changer dans les formules précedentes α en β et a_1 en a_2.

De la même manière, on trouve les numérateurs des fractions $\frac{C_1}{x-a_3}, \frac{C_2}{(x-a_3)^2}, \ldots \frac{C_\gamma}{(x-a_2)^\gamma}$ en changeant dans les formules antérieures: α en γ, et a_1 en a_3.

En continuant de la même manière on obtient tous les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles on peut décomposer la fraction $\frac{1}{F(x)}$.

En faisant dans le formule (6) $a_1 = a$, $a_2 = b$, $\gamma = 0 \ldots \lambda = 0$, on obtient pour A_1, $A_2 \ldots$ les expressions

$$(-1)^{\alpha-1} \frac{[(\beta+\alpha-2)\,C\,(\alpha-1)]}{(a-b)^{\alpha+\beta-1}}, (-1)^{\alpha-2} \frac{[(\beta+\alpha-3)\,C\,(\alpha-2)]}{(a-b)^{\alpha+\beta-2}}, \ldots$$

qui s'accordent avec les formules qui se lisent dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, en changeant α en $\alpha+1$ et β en $\beta+1$.

On aurait pu aussi déduire ces formules des formules connues:

$$1 = A_{(\alpha)} \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2.1}$$

$$0 = A_{(\alpha)} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 2} + A_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a)_1}{\alpha(\alpha+1)\ldots 2}$$

$$0 = A_{(\alpha)} \cdot \frac{F^{(\alpha+2)}(a_1)}{(\alpha+2)(\alpha+1)\ldots 3} + A_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\ldots 3}$$

$$+ A_{(\alpha-2)} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha\ldots 3}$$

. . . .

$$0 = A_{(\alpha)} \cdot \frac{F^{(2\alpha-1)}(a_1)}{(2\alpha-1)\ldots\alpha} + A_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(2\alpha-2)}(a_1)}{(2\alpha-2)\ldots\alpha}$$

$$+ \ldots + A_1 \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha}$$

mais le calcul aurait été beaucoup plus compliqué.

(à suivre).

SECÇÃO II

NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. Gomes Teixeira

Saturno, o sexto dos planetas visiveis a olho nú na ordem das suas distancias ao sol, descreve uma ellipse em roda d'este astro a uma distancia media de 1:411 milhões de kilometros, com uma velocidade media de $9^k,5$ por segundo, e fazendo uma revolução em vinte e nove annos e meio proximamente.

Em virtude da combinação do seu movimento de translação com o movimento de translação da terra, parece umas vezes retrogradar na esphera celeste de oriente para occidente, outras vezes avançar de occidente para oriente, outras vezes estacionar. O primeiro caso dá-se logo depois de estar em opposição com o sol, e dura cento e trinta e nove dias pouco mais ou menos, o segundo dura duzentos e trinta e nove dias, passados os quaes o planeta está outra vez em opposição com o sol. Na occasião da conjuncção passa pelo merediano ao meio dia, na da opposição á meia noute, e está n'este ultimo caso á menor distancia da terra.

Quem observa Saturno por um bom telescopio é vivamente impressionado pelo aspecto admiravel d'este curioso planeta.

«Não ha talvez, diz o grande astronomo inglez W. Herschel, um objecto no céo que se nos mostre com tal variedade de phenomenos extraordinarios, como o planeta Saturno: um globo explendido rodeado por um annel duplo estupendo; acompanhado por sete satellites, ornamentado com cinturões equatoriaes; achatado nos pólos; girando em roda de um eixo; mutuamente eclipsando seus anneis e satellites, e eclipsado por elles; com o annel exterior girando tambem em roda de um eixo, bem como o mais affastado dos seus satellites; umas partes do systema reflectindo luz para as outras — os anneis e as luas illuminando as noutes dos Saturninos, o globo e as luas illuminando as partes obscuras dos anneis, e o planeta e os anneis reflectindo para as luas os raios do sol, quando privadas d'elles na occasião da sua conjuncção.»

Vê-se por esta eloquente descripção que nenhum planeta conhecido é mais curioso do que Saturno: vamos pois dar noticia das observações mais interessantes que se têm feito sobre este astro, e das explicações que se têm dado dos phenomenos por elle apresentados.

Poucos annos depois da descoberta do telescopio, Galileu, esse homem eminente, que tão grandes descobertas fez em Mecanica e Astronomia, mandou construir um para com elle explorar o céo. Foi com este instrumento que em 1610 pela primeira vez observou Saturno, quando este planeta estava proximo da opposição e por tanto mais favoravelmente disposto para ser observado. Viu, com grande espanto, que Saturno tinha a fórma de um disco, tendo dous outros menores symetricamente collocados um de cada lado. Notou mais que estes discos conservaram durante muitos mezes a mesma posição e grandeza. Esta descoberta foi por elle annunciada aos astronomos debaixo da fórma de anagramma, explicado depois n'uma carta a Giuliano de Medicis onde diz: que observou com grande espanto que Saturno não é uma estrella unica, mas tres, que parecem tocar-se, sendo a do meio maior que as lateraes, que estão situadas uma a oriente e outra a occidente, e n'uma linha que não está na direcção do zodiaco.

Anno e meio depois observou este grande homem outra vez Saturno, mas com grande surpreza viu um disco unico, sem estrellas lateraes, do que deu parte a Marco Velseri n'uma carta onde escreve: que não póde dizer cousa segura em caso tão estranho, inopinado e novo, que a brevidade do tempo, o accidente sem exemplo, a falta de engenho, e o receio de errar, o tornam grandemente confuso; onde expõe, porém, com toda a reserva, a esperança de que Saturno, em tempos determinados, se hade apresentar outra vez com a fórma com que o tinha visto primeiramente.

Fon/ É o que aconteceu. Algum tempo depois os appendices de Saturno appareceram de novo, foram alargando, tomando varias fórmas até tomar aquella que tinham, quando pela primeira vez os observou.

Galileu não pôde explicar estes phenomenos, que lhe apresentava Saturno, e Hevelius, astronomo infatigavel, que estudou muito este planeta e sobre o qual escreveu um livro —*De nativa Saturni facie*—, não o conseguiu tambem.

Em 1654, Huygens, que reuniu em tão elevado gráo o conhecimento das sciencias especulativas ao das sciencias applicadás, observando Saturno por um telescopio, instrumento que elle muito aperfeiçoou, viu que dentro dos appendices descobertos por Galileu havia espaços escuros de cada lado do disco do planeta, de modo que parecia um globo com duas azas, que mais tarde desappareceram.

Estava reservado a este sabio dar a explicação, que Galileu tinha procurado debalde, dos phenomenos manifestados pelos appendices de Saturno. Depois de os analysar nas suas diversas phases e de os combinar com as posições do astro relativamente ao sol e á terra, Huygens em 1659 reconheceu que o globo do planeta está cercado por um annel tenue, chato, que o não toca, inclinado sobre o plano da ecliptica e de expessura igual á do espaço comprehendido entre elle e o planeta, o que explicava completamente os phenomenos observados por Galileu, Hevelius e por elle mesmo. Os espaços escuros eram, com effeito, devidos ao espaço comprehendido entre o planeta e o annel, e as diversas apparencias que apresentavam os appendices eram devidas á posição dos anneis relativamente ao observador, em virtude do movimento de Saturno e da terra em roda do sol, porque sendo o plano dos anneis inclinado sobre o plano da orbita da terra, os anneis appareciam debaixo da fórma de uma ellipse, cujo eixo menor ia diminuindo á medida que a inclinação sobre o plano do annel dos raios luminosos, que vão d'elle para o olho do observador, ia diminuindo, até que, quando estes raios estavam no plano do annel, este desapparecia pela pequenez da sua expessura, que não era visivel nos telescopios. Desapparecia ainda o annel, quando, estando a terra de um lado do seu plano e o sol do outro, estava obscurecida a parte d'elle visivel da terra.

Seis annos depois da descoberta de Huygens observou W. Ball na superficie norte do annel uma facha escura, de expessura consideravel, com os seus contornos concentricos aos d'elle. Dez annos mais tarde descobriu D. Cassini uma facha correspondente no lado sul, e notou que a parte do annel exterior a esta facha não é tão brilhante como a interior.

Para explicar esta observação admittiu este astronomo que o annel é dividido em dous outros, sendo o interior mais brilhante do que o exterior.

Depois d'estas observações até ás de W. Herschel, fizeram-se algumas de menos importancia.

Este grande e infatigavel astronomo, munido com um telescopio superior a todos os do seu tempo, observou Saturno durante quinze annos, ora descobrindo n'este planeta phenomenos novos, ora confirmando os anteriormente observados.

Descobriu, medindo o tempo, que pequenas manchas de luz, que appareciam no annel, quando a sua borda estava directamente voltada para a terra, levavam a chegar de uma extremidade á outra da mesma borda, que o annel tem o movimento de rotação no seu proprio plano, fazendo uma revolução em 10^h, 32^m, 15^s de tempo medio.

Achando pouco provavel a divisão do annel em dous, como parecia resultar das observações de W. Ball e D. Cassini, observou durante dez annos as fachas escuras que estes astronomos haviam descoberto, um na face norte e o outro na face sul do annel, antes de admittir esta divisão. Tendo porém notado durante este intervallo de tempo que a facha do lado norte conservava sempre a mesma côr e expessura, apezar do annel ter movimento de rotação, e tendo achado os seus contornos concentricos aos do annel, admittiu finalmente a existencia da divisão, que d'este modo ficou completamente demonstrada.

Verificou mais, por um processo, de que adiante fallaremos, que os anneis estão no plano do equador de Saturno, como já tinha annunciado Hadley.

(Continúa).

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Suite)

3. On voit que, pour calculer les numérateurs $A_1, A_2, A_3, \ldots$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$, nous avons premièrement à résoudre l'équation indéterminée:

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m,$$

où $\delta', \delta'', \delta''', \ldots \delta^{(n-1)}$ doivent être des nombres entiers et positifs, problème qui se présente en beaucoup de questions importantes d'analyse.

On peut, pour cela, suivre une règle due à Hindenbourg, que nous allons extraire des *Instituições Mathematicas* de *Simões Margiochi,* en renvoyant pour sa démonstration à cet excellent ouvrage.

En supposant

$$m_i = i, i+1, i+2, \ldots m$$

$$m^{(2)}{}_i = m_i, m_{i+1}, m_{i+2}, \ldots m_m$$

$$m^{(3)}{}_i = m^{(2)}{}_i, m^{(2)}{}_{i+1}, m^{(3)}{}_{i+2}, \ldots m^{(2)}{}_m$$

....

les racines de l'équation indéterminée seront donnés par les égalités symboliques :

$$\delta' = m - m_0{}^{(n-2)},\ \delta'' = m_0{}^{(n-2)} - m_0{}^{(n-3)},\ \delta''' = m_0{}^{(n-3)} - m_0{}^{(n-4)},$$

....

$$\delta^{(n-3)} = m_0{}^{(3)} - m_0{}^{(2)},\quad \delta^{(n-2)} = m_0{}^{(2)} - m_0,\quad \delta^{(n-1)} = m_0$$

que l'on doit développer en ayant égard à la signification des symboles.

Si, par exemple, l'équation indéterminée est

$$x + y + z = 4,$$

il viendra

$$x = 4 - m^{(2)}{}_0,\ y = m^{(2)}{}_0 - m_0,\ z = m_0$$

ou, ayant égard à la signification des symboles,

$$x = 4 - m_0,\ y = m_0\quad,\ z = 0$$

$$x = 4 - m_1,\ y = m_1 - 1,\ z = 1$$

$$x = 4 - m_2,\ y = m_2 - 2,\ z = 2$$

$$x = 4 - m_3,\ y = m_3 - 3,\ z = 3$$

$$x = 4 - m_4,\ y = m_4 - 4,\ z = 4$$

La première ligne donne cinq systèmes de racines, la deuxième en donne quatre, la troisième en donne trois etc. Ces solutions sont :

4, 0, 0	3, 1, 0	2, 2, 0
1, 3, 0	0, 4, 0	3, 0, 1
2, 1, 1	1, 2, 1	0, 3, 1
2, 0, 2	1, 1, 2	0, 2, 2
1, 0, 3	0, 1, 3	0, 0, 4

Je vais exposer maintenant une autre règle, que je crois nouvelle, pour résoudre la même question, et qui est plus avantageuse pour notre but, parceque non seulement nous avons à résoudre l'équation

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m,$$

mais encore les équations

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m - 1$$

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m - 2$$

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m - 3$$

....

Pour plus de clarté, nous allons raisonner sur un exemple, mais il est facile de voir que ce que nous allons dire est général.

Soit proposée l'équation

$$x + y + z + t = 4.$$

Écrivons premièrement

4, 3, 2, 1, 0.

Écrivons ensuite devant chacun de ces chiffres ceux qui lui étant additionnés donnent 4 ou moins de 4. On obtient

4,0; 3,1; 3,0; 2,2; 2,1; 2,0; 1,3;
1,2; 1,1; 1,0; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,0.

Devant chacun de ces groupes mettons les chiffres qui étant additionnés aux chiffres du groupe donnent 4 ou moins de 4. Il vient

4, 0, 0	3, 1, 0	3, 0, 1	3, 0, 0	2, 2, 0
2, 1, 1	2, 1, 0	2, 0, 2	2, 0, 1	2, 0, 0
1, 3, 0	1, 2, 1	1, 2, 0	1, 1, 2	1, 1, 1
1, 1, 0	1, 0, 3	1, 0, 2	1, 0, 1	1, 0, 0
0, 4, 0	0, 3, 1	0, 3, 0	0, 2, 2	0, 2, 1
0, 2, 0	0, 1, 3	0, 1, 2	0, 1, 1	0, 1, 0
0, 0, 4	0, 0, 3	0, 0, 2	0, 0, 1	0, 0, 0

Devant chacun de ces groupes mettons maintenant les chiffres qui additionnés à ceux de ce groupe donnent 4, et nous obtiendrons:

4, 0, 0, 0	3, 1, 0, 0	3, 0, 1, 0	3, 0, 0, 1
2, 2, 0, 0	2, 1, 1, 0	2, 1, 0, 1	2, 0, 0, 2
2, 0, 1, 1	2, 0, 0, 2	1, 3, 0, 0	1, 2, 1, 0
1, 2, 0, 1	1, 1, 2, 0	1, 1, 1, 1	1, 1, 0, 2
1, 0, 3, 0	1, 0, 2, 1	1, 0, 1, 2	1, 0, 0, 3
0, 4, 0, 0	0, 3, 1, 0	0, 3, 0, 1	0, 2, 2, 0
0, 2, 1, 1	0, 2, 0, 2	0, 1, 3, 0	0, 1, 2, 1
0, 1, 1, 2	0, 1, 0, 3	0, 0, 4, 0	0, 0, 3, 1
0, 0, 2, 2	0, 0, 1, 3	0, 0, 0, 4	

que sont tous les systèmes de racines entières et positives de l'équation proposée.

Il est convenable, pour voir si l'on a oublié quelque système de racines, de chercher une formule qui en donne le nombre. C'est ce que nous allons faire. Nous designerons, dans ce qui va suivre, par N_i le nombre de combinations i à i des chiffres, obtenues comme nous l'avons dit précédemment.

On sait par l'Algèbre que

$$[(m+n)\,\mathrm{C}n] = [(m+n-1)\,\mathrm{C}^{(n-1)}] + [(m+n-2)\,\mathrm{C}^{(n-1)}]$$

$$+ \dots + [(m+n-q)\,\mathrm{C}^{(n-1)}]$$

$$+ [(m+n-q)\,\mathrm{C}n],$$

d'où l'on déduit

$$[(m+2)\,C\,2] = [(m+1)\,C\,1] + [m\,C\,1] + \ldots\ldots + [2\,C\,1] + 1$$

$$[(m+3)\,C\,3] = [(m+2)\,C\,2] + [m+1)\,C\,2] + \ldots + [3\,C\,2] + 1$$

$$[(m+4)\,C\,4] = [(m+3)\,C\,3] + [m+2)\,C\,3] + \ldots + [4\,C\,3] + 1$$

....

et

$$[(m+1)\,C\,2] = [(m+2)\,C\,2] - [(m+1)\,C\,1]$$

$$[m\,C\,2] = [(m+2)\,C\,2] - [(m+1)\,C\,1] - [m\,C\,1]$$

$$[(m-1)C2] = [(m+2)C2] - [(m+1)C\,1] - [m\,C\,1] - [(m-1)C\,1]$$

....

et de la même manière

$$[(m+2)\,C\,3] = [(m+3)\,C\,3] - [(m+2)\,C\,2]$$

$$[(m+1)\,C\,3] = [(m+3)\,C\,3] - [(m+2)\,C\,2] - [(m+1)\,C\,2]$$

....

D'un autre côté, en réfléchissant sur la méthode indiquée pour résoudre l'équation indéterminée, on voit que

$$N_1 = m + 1 = [(m+1)\,C\,1]$$

et

$$N_2 = (m+1) + m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

$$= [(m+1)\,C\,1] + [m\,C\,1] + [(m-1)\,C\,1] + \ldots [2\,C\,1] + 1$$

donc, en ayant égard aux formules précédentes,

$$N_2 = [(m+2)\,C\,2].$$

De la même manière on obtient

$$N_3 = N_2 + [N_2 - (m+1)] + [N_2 - (m+1) - m]$$
$$+ [N_2 - (m+1) - m - (m-1)] + \ldots + 1,$$

ou, ayant aussi égard aux formules précédentes,

$$N_3 = [(m+3)\,C\,3].$$

On obtient N_4 en ôtant de N_3 successivement un, deux, trois, etc., parcelles de N_3, et additionnant ensuite les résultats obtenus. Il vient ainsi:

$$N_4 = N_3 + [N_3 - N_2] + [N_3 - N_2 - (N_2 - (m-1))] + \ldots.$$

qu'on peut écrire

$$N_4 = [(m+4)\,C\,4].$$

En continuant de la même manière on trouve enfin la formule

$$N_{n-2} = [(m+n-2)\,C\,(n-2)]$$

qui donne le nombre de systèmes de racines de l'équation indéterminée.

Dans l'exemple proposé nous avons $m=4$ et $n=5$, donc $N_3 = 35$.

Après avoir résolu l'équation $x+y+z+t=4$, pour résoudre l'équation $x+y+z+t=3$, il n'est pas nécessaire de répéter tout le calcul précédent, parceque il suffit dans les groupes de trois chiffres de joindre à chacun un chiffre tel que la somme des quatre chiffres du groupe soit égale à 3. Il vient ainsi

3, 0, 0, 0	2, 1, 0, 0	2, 0, 1, 0	2, 0, 0, 1
1, 2, 0, 0	1, 1, 1, 0	1, 1, 0, 1	1, 0, 2, 0
1, 0, 1, 1	1, 0, 0, 2	0, 3, 0, 0	0, 2, 1, 0
0, 2, 0, 1	0, 1, 2, 0	0, 1, 1, 1	0, 1, 0, 2
0, 0, 3, 0	0, 0, 2, 1	0, 0, 1, 2	0, 0, 0, 3

Pour résoudre l'équation

$$x+y+z+t=2$$

il suffit de poser devant chaque groupe de trois chiffres un chiffre qui additionné à ceux du groupe donne 2, et il vient:

$$\begin{array}{ccccc} 2,0,0,0 & 1,1,0,0 & 1,0,1,0 & 1,0,0,1 & 0,2,0,0 \\ 0,1,1,0 & 0,1,0,1 & 0,0,2,0 & 0,0,1,1 & 0,0,0,2 \end{array}$$

De la même manière on obtient les systèmes de racines de l'équation

$$x+y+z+t=1$$

qui sont

$$1,0,0,0 \qquad 0,1,0,0 \qquad 0,0,1,0 \qquad 0,0,0,1.$$

Comme application de cette doctrine, décomposons en fractions simples la fraction rationnelle suivante:

$$\frac{1}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}=\frac{1}{(x-1)^4(x-2)x}$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_4}{(x-1)^4}$$

$$+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x}$$

En posant dans la formule (6) $i=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=0$, il vient

$$A_1=\Sigma(-1)^3\frac{[\delta' C \delta'][\delta'' C \delta'']}{(-1)^{1+\delta'}1^{1+\delta''}}=\Sigma\frac{1}{(-1)^{\delta'}},$$

étant $\delta'+\delta''=3$, et par conséquent $\delta'=3, 2, 1, 0$, ce qui donne $A_1=0$.

De la même manière on obtient, en posant $i=2$

$$A_2=-\Sigma\frac{1}{(-1)^{\delta''}},\ \delta'+\delta''=2,$$

ce qui donne $\delta'=2, 1, 0$ et par conséquent $A_2=-1$.

En continuant de la même manière, c'est à dire en faisant $i=3$ et $\delta'+\delta''=1$, et après $i=4$, $\delta'+\delta''=0$, il vient $A_3=0$, $A_4=-1$.

La même formule (6) donne

$$B=\Sigma\frac{1}{1^{\delta'+1}2^{\delta''+1}},\ \delta'+\delta''=0,$$

d'où l'on déduit $B=\frac{1}{2}$.

On obtient aussi

$$C=\Sigma\frac{1}{(-1)^{\delta'+4}(-2)^{\delta''+1}},\ \delta'+\delta''=0$$

ce qui donne $C=-\frac{1}{2}$.

Le résultat de la décomposition de la fraction proposée en des fractions simples est donc le suivant:

$$\frac{1}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$+\frac{-1}{(x-1)^4}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{2}}{x}.$$

(à suivre).

SECÇÃO II

NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. Gomes Teixeira

(Continuação)

Mediu tambem W. Herschel a largura do systema de anneis de Saturno, e achou que está para a largura do espaço comprehendido entre elles e o planeta, como 5 para 4.

Demonstrou que a expessura dos anneis é muito pequena por meio de observações tão completas, que não deixam a menor duvida a este respeito. O processo, que seguiu, foi, quando a borda dos anneis estava voltada directamente para a terra, ver passar diante d'ella os satellites de Saturno, que faziam assim o papel de micrometros para avaliar a sua expessura. A borda dos anneis formava uma linha luminosa, sobre a qual se moviam os satellites «como contas por um fio.»

De ver ainda os anneis quando o sol estava de um lado e a terra do outro lado do seu plano, tirou a conclusão, que provavelmente a borda de cada annel não é cylindrica, mas sim espheroidica.

As observações de W. Herschel sobre Saturno foram expostas em duas bellas Memorias, que este grande astronomo apresentou á Sociedade Real de Londres, e foram publicadas nos volumes das *Phyl. Trans.* correspondentes aos annos de 1790 e 1792. Estas Memorias fornecem um exemplo notavel das precauções e cuidado, com que este infatigavel astronomo fazia as suas observações, antes de emittir a sua opinião sobre o phenomeno observado.

No nosso seculo tem-se feito muitas descobertas importantes sobre a estructura dos anneis de Saturno.

Em 1850 os astronomos americanos G. Bond e W. Bond, membros do observatorio de Harvard, descobriram um terceiro annel interior aos outros dous, obscuro e diaphano. Este annel foi depois visto por muitos outros observadores, e apresentou-se tão distinctamente, que admira não ter sido descoberto por W. Herschel, que usava já de um bom telescopio. Suppõe-se que este grande astronomo o confundiu com um cinturão equatorial, que nos seus desenhos de Saturno apparece perfeitamente concentrico com as bordas do annel interior.

Aquelle mesmo astronomo descobriu juncto da borda interior do annel brilhante espaços obscuros, cujos contornos formavam uma ellipse de grande excentricidade, concentrica com a formada pelas bordas do mesmo annel, e cortando as bordas do annel obscuro obliquamente em quatro pontos.

Depois das descobertas precedentes, a mais importante é a de Wray. Este astronomo observou, quando a borda do annel estava voltada directamente para a terra, uma linha de luz muito estreita, que, passando além de outra linha de luz menos estreita, parecia pertencer ao annel exterior. Concluiu d'aqui que o annel exterior é menos expesso, do que o do meio.

Estas observações foram depois confirmadas pelas do eminente astronomo, Director do Observatorio de Pulkowa, Otto Struve.

Durante todo o seculo XIX, muitos astronomos eminentes têm descoberto nos anneis fachas obscuras concentricas com as bordas dos mesmos, mas estas fachas não são permanentes, nem pertencem os seus contornos aos mesmos circulos; não se póde, pois, concluir d'aqui, que ha mais de tres anneis. Algumas vezes estas fachas são semi-córadas ou côr de cinza, como observaram Bond e Dawes.

Terminaremos a exposição das observações feitas sobre os appendices de Saturno, apresentando a relação entre a largura do systema de anneis brilhantes e a largura do espaço comprehendido entre elles e o planeta nas diversas epochas, relação de que teremos depois de fazer uso, para a determinação da natureza dos mesmos anneis.

Segundo Huygens, cujas observações foram feitas no seculo XVI, a largura do systema de anneis e a largura do espaço comprehendido entre elles e o planeta são iguaes.

Segundo Pound, o systema de anneis é menos estreito do que o espaço comprehendido entre elle e o planeta.

As medidas de W. Herschel, feitas no seculo passado, dão a razão da largura do systema de anneis para a do espaço comprehendido entre elles e o planeta igual á de 5 para 4. As de Hind, feitas no seculo XIX, dão esta razão como sendo a mesma que de 10 para 7, e as de O. Struve, feitas no mesmo seculo, como sendo a mesma que de 10 para $6\frac{1}{2}$. Estas observações foram discutidas completamente por O. Struve, que chegou á conclusão que uma tal differença não podia provir da imperfeição das observações antigas, e que os anneis tem crescido em largura, approximando-se cada vez mais do planeta, visto que o diametro exterior não tem soffrido alteração notavel.

«Continuarão, diz Guilmin, estas modificações a produzir-se no mesmo sentido, ou serão seguidas de mudanças inversas? Graves questões que interessam a conservação do appendice annullar. Está talvez reservado ás gerações futuras assistir ao mais commovente de todos os phenomenos que póde apresentar ao homem o mundo solar, de que a sua morada faz parte. Talvez se veja nos céos o grandioso espectaculo do cataclysmo produzido pela deslocação dos anneis de Saturno.»

Mais tarde mostraremos que não ha a receiar tal cataclysmo, pois que as modificações agora observadas poderão depois ter logar em sentido inverso.

Em dimensões absolutas, o annel exterior tem de largura 3:152 leguas de 5 kilometros, e é separado do annel medio por um espaço vazio de 680 leguas. Este segundo annel tem uma largura de 6:320 leguas, e o annel obscuro tem de largura 2:784 leguas. A expessura do systema de anneis é de 80 leguas. É escusado dizer que estas dimensões são apenas approximadas, e que variam com o tempo.

Muitas outras observações interessantes têm sido feitas sobre os anneis de Saturno, mas as que vimos de expôr são as mais importantes para a discussão da sua natureza, de que agora passamos a occupar-nos.

Apresentando phenomenos unicos no mundo conhecido, o planeta Saturno não podia deixar de chamar, mais que qualquer outro planeta, a attenção dos que tomam o céo para campo das suas explorações ou objecto de seu pensar. É assim que quasi todos os observadores, desde Galileu, se tem occupado d'este planeta, e muitos sabios tem tambem tomado os phenomenos que elle apresenta para thema de suas meditações.

Maupertuis suppunha a causa do annel de Saturno na cauda de um cometa, que attrahido por aquelle, quando passava perto, se tinha inflectido e o tinha cercado.

Buffon, o celebre naturalista, explicava o annel de Saturno, suppondo que era uma porção da região equatorial do planeta, separada d'este em virtude da força centrifuga em tempo, no qual o planeta se extendera até á região dos anneis.

Mairian dizia que o annel era uma parte da região do equador do planeta arrancada por alguma violenta convulsão.

Estas hypotheses estão já hoje fóra do campo da discussão, e por isso não nos demoraremos mais com ellas. Tractaremos só de ver o que são os anneis na actualidade, isto é, se são corpos continuos solidos, liquidos ou gazosos, ou uma agglomeração de satellites, que são evidentemente os unicos estados em que os podemos suppor.

O eminente mathematico francez, Laplace, na sua obra monumental a —*Mecanica Celeste*, tractou do equilibrio dos anneis de Saturno com aquella profundeza, com que este grande homem costumava tractar as questões mais difficeis do systema do mundo.

Depois, n'outra obra, a que elle deu o nome de —*Exposição do systhema do mundo*, e onde resumiu os resultados a que chegou na *Mecanica Celeste* em linguagem elegante e pura, expoz n'um pequeno capitulo os resultados das suas brilhantes indagações sobre os anneis de Saturno. É a doutrina d'este sabio que passamos primeiramente a expôr.

Sabe-se, desde Newton, que a força, que sollicita duas particulas materiaes uma para a outra, está na razão directa das suas massas e na inversa do quadrado das suas distancias.

Portanto o planeta sollicita para si os anneis, segundo a lei anterior, e como esta força é muito grande, pela grandeza de Saturno, permanente, e a resistencia dos anneis pequena, por causa da sua pequena expessura, segue-se que os anneis deveriam cahir em fragmentos sobre o planeta. M. Hirn calculou ultimamente o peso do annel do meio, e achou que, suppondo-o composto de materia tão pesada como o hydrogeneo, que é o mais leve dos corpos conhecidos, o peso total do annel em virtude da attracção que sobre elle exerce o planeta, seria de duzentos milhões de milhares de tonneladas. Portanto, para não ter logar a destruição dos anneis, é necessario que exista uma força em sentido contrario, capaz de equilibrar aquella. Esta força existe, como vamos ver.

Quando um corpo se move em roda de um centro fixo ou movel, sujeito a uma força dirigida para esse centro, desenvolve-se uma força de reacção em sentido contrario, que, por causa da direcção, se chama *força centrifuga*. Esta força cresce com a velocidade do movimento.

Para o equilibrio dos anneis de Saturno ter logar, basta pois que elles tenham movimento de rotação em roda do planeta com uma velocidade sufficiente para a força centrifuga resultante equilibrar a attracção d'aquelle.

Laplace calculou mesmo o tempo que levaria uma revolução dos anneis.

Este movimento de rotação foi observado, como já dissemos, por W. Herschel, bem como o tempo que levava uma revolução, e os resultados dos calculos do geometra francez concordaram completamente com as observações do astronomo inglez.

Este movimento de rotação não é porém sufficiente para o equilibrio dos anneis.

Sendo, com effeito, a parte interior de um annel attrahido pelo planeta com mais força do que a exterior, em virtude de a força da attracção ser inversamente proporcional ao quadrado das distancias, como já dissemos, e sendo, para a mesma velocidade de rotação, a força centrifuga proporcional á distancia ao centro, a differença d'estas duas leis faria que o equilibrio entre a força de attracção e a força centrifuga não podesse ter logar em toda a largura do annel, e o annel partir-se-ia, a não ter uma cohesão sufficiente,

M. Hirn demonstrou que, suppondo as condições mais favoraveis para a conservação d'um annel, isto suppondo-o formado da mais leve e mais resistente das substancias conhecidas, cada annel não deveria ter mais de 1:200 leguas, e portanto que o annel medio deveria compor-se de cinco anneis pelo menos. Já vimos o que a observação mostra a tal respeito.

Para ver qual seria a figura dos anneis de Saturno, seguiu Laplace o caminho que, desde Newton, se seguia para a determinação da figura dos planetas, questão de que elle já havia tractado n'um capitulo anterior da sua obra de uma maneira brilhante, dando um impulso vigoroso a esta doutrina, uma das mais difficeis da *Mecanica Celeste*.

Suppoz que os anneis tinham estado anteriormente no estado de fusão ignea, e que, arrefecendo gradualmente pela irradiação de seu calor para o espaço, tinham tomado o estado solido. Era uma extensão aos planetas e aos anneis do que parece ter tido logar na terra, como têm attestado os estudos geologicos.

Procurou depois qual seria a figura que tomaria uma annel fluido, girando em roda de Saturno, sujeito á attracção d'este astro.

Aqui, como na determinação da figura dos planetas, não pôde Laplace determinar directamente qual a superficie da massa fluido para estar em equilibrio. O que pôde foi verificar que a superficie do corpo gerado por uma ellipse, movendo-se em roda do eixo do planeta, satisfaz, e foi esta que elle admittiu para os anneis. Viu mais que esta ellipse póde variar de grandeza de secção para secção, e mesmo que para o equilibrio dos anneis torna-se necessaria esta variação.

Com effeito, se os anneis fossem regulares e homogeneos, de modo que o seu centro de gravidade coincidisse com o do planeta, demonstrou Laplace que o equilibrio seria instavel, isto é, que bastaria uma pequena força, tal como a acção de um satellite, de um cometa, etc., para deslocar estes dous centros, e desde então o centro do annel afastar-se-ia sempre do do planeta, até o annel ir bater contra elle.

Diz pois Laplace que os anneis são solidos, cujos centros de figura coincidem proximamente com o de Saturno, mas cujos centros de gravidade pódem e devem achar-se n'um ponto differente.

Cada centro gira em roda do planeta no mesmo tempo que o annel, e o annel gira em roda do seu centro de gravidade no mesmo tempo que em roda de Saturno. Este equilibrio dos anneis é comparado por J. Herschel ao que tem logar, quando um clown sustenta uma vara direita e n'um estado de immobilidade apparente, na extremidade de um dedo ou sobre a fronte, communicando á base movimentos imperceptiveis.

Esta doutrina de Laplace sobre o equilibrio dos anneis de Saturno foi completamente admittida durante muito tempo. Tendo-se porém proposto no meio do presente seculo algumas duvidas sobre ella, quando a descoberta do annel obscuro chamou outra vez a attenção sobre este planeta, foi ella proposta pela Universidade de Cambridge para o concurso ao premio Adams, premio que foi conferido ao distincto geometra e physico J. Clerk Maxwell. Na sua *Memoria* começou Maxwell por estudar o movimento de um corpo qualquer em roda de Saturno, e depois supondo que esse corpo era um annel solido, chegou á conclusão que as apparencias deveriam ser differentes das que manifestam os telescopios. Além d'isso demonstrou que, na hypothese de Laplace, a mais pequena causa seria bastante para destruir a estabilidade do annel.

Mr. Maxwell considerou tambem a hypothese de ser o annel fluido, e concluiu que, em virtude da attracção do planeta, deveriam formar-se vagas, e o annel dividir-se em satellites fluidos, e poz portanto tambem de parte esta hypothese.

Restava pois só a hypothese de que os anneis são formados por uma multidão de satellites. Esta hypothese já fôra proposta muito tempo antes por J. Cassini, que diz: «Esta apparencia, de que não vemos exemplo nos outros corpos celestes, nos levou a conjecturar, que podia ser uma multidão de satellites, dispostos quasi no mesmo plano, girando em roda do planeta, tendo um volume tão pequeno que se não podessem aperceber separadamente, e tão proximos uns dos outros que se não podessem distinguir tambem os intervallos que os separam, de modo que parecessem formar um corpo continuo.»

Maxwell adoptou-a, suppõe porém que, em virtude dos choques entre estes satellites tão visinhos, a destruição dos anneis deve ter logar depois de muitos seculos.

No estado actual da sciencia, a analyse mathematica não póde ser applicada ao movimento dos anneis considerados como reunião de satellites. Se houve grandes difficuldades para applicar a analyse ao movimento da lua, que difficuldade não haverá para calcular o movimento de cada um dos satellites que constituem os anneis de Saturno, que estão sujeitos á acção do planeta central, do sol, dos oito satellites que acompanham Saturno, dos outros corpos que fazem parte dos anneis e ás acções menores dos outros membros do systema solar?

M. Hirn, sem ter conhecimento dos trabalhos de Mr. Maxwell, estudou tambem as condições de equilibrio dos anneis de Saturno, e chegou ás mesmas conclusões que o geometra inglez.

Mostrou primeiro que a irregularidade, que Laplace tinha attribuido aos anneis, seria a causa da sua destruição, pois que, sendo as diversas partes do annel desigualmente attrahidas, e a força centrifuga constante, não poderia haver equilibrio entre as duas forças e o annel deveria alongar-se, formando uma ellipse. Demonstrou mais M. Hirn que, para não ter logar um alongamento real e successivo, seria necessario que, suppondo o caso mais desfavoravel para este alongamento de ter a substancia do annel a densidade do hydrogeneo, tivesse o annel uma rigidez e cohesão muito superior á do diamante, isto é, seria necessario suppor o annel formado de uma substancia imaginaria.

Apresenta ainda Hirn uma experiencia para mostrar que a constituição que Laplace atttribue aos anneis não póde ter logar. Com effeito, Gallet descobriu a excentricidade dos anneis relativamente ao planeta, Schawabe e Harding verificaram-n'a, W. Struve, South e J. Herschel mediram-n'a; mas estes astronomos acharam esta excentricidade sempre do mesmo lado, em quanto que, segundo a theoria de Laplace, ella deveria variar de posição durante uma revolução dos anneis, e o planeta deveria parecer occilar da direita para a esquerda durante meia revolução dos anneis, e depois da esquerda para a direita durante a outra meia.

Conclue de tudo isto Hirn que os anneis não podem ser solidos formados de uma só peça.

(Continúa).

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Suite)

4. Nous allons passer maintenant à la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions simples.

Nous avons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{M_1}{x-a_1}+\frac{M_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

où est

$$\varphi(x)=(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma\ldots(x-a_\alpha)^\lambda,$$

et nous voulons déterminer les constantes $M_1, M_2, M_3, \ldots M_\alpha$.

En faisant $x=a_1+h$, il vient

$$\frac{F_1(a_1+h)}{F(a_1+h)}=\frac{M_1}{h}+\frac{M_2}{h^2}+\ldots+\frac{M_\alpha}{h^\alpha}+\frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}.$$

Le quotient de la division de $\varphi_1(a_1+h)$ par $\varphi(a+h)$ ne peut contenir que des puissances entières de h, parceque, $\varphi(a_1)$ n'étant pas nulle, $\frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi(a)}$ ne peut pas être égal à l'infinit, et par conséquent

$M_1, M_2, M_3, \ldots M_\alpha$ sont les coefficientes de $\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^3}, \ldots$

dans le développement de $\frac{F_1(a_1+h)}{F(a+h)}$ suivant les puissances de h.

Cela posé, nous avons (n.° 2)

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1 F_1(x)}{x-a_1} + \frac{A_2 F_1(x)}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1 F_1(x)}{x-a_2} + \frac{B_2 F_1(x)}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta F_1(x)}{(x-a_2)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{K_1 F_1(x)}{(x-a_n)} + \frac{K_2 F_1(x)}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{K_\lambda F_1(x)}{(x-a_n)^\lambda}$$

$A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots K_1, K_2, \ldots$ étant des constantes que nous avons déjà déterminé précédemment.

En faisant $x = a_1 + h$ dans le premier terme de cette somme, il vient

$$A_1 \frac{F_1(a_1+h)}{h} = A_1 \frac{F_1(a_1) + h F_1'(a_1) + \frac{1}{2} h^2 F_1''(a_1) + \ldots}{h}$$

$$= A_1 h^{-1} F_1(a_1) + A_1 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_1 h F_1''(a_1) + \ldots$$

De la même manière le second terme de la somme donne

$$\frac{A_2 F_1(a_1+h)}{h^2} = A_2 h^{-2} F_1(a_1) + A_2 h^{-1} F_1'(a_1)$$

$$+ \frac{1}{2} A_2 F_1''(a_1) + \ldots,$$

et le troisième donne

$$A_3 \frac{F_1(a_1+h)}{h^3} = A_3 h^{-3} F_1(a_1) + A_3 h^{-2} F_1'(a_1)$$

$$+ \frac{1}{2} A_3 h^{-1} F_1''(a_1) + \frac{1}{2.3} A_3 F_1'''(a_1) + \ldots,$$

et on peut continuer ainsi pour tous les termes de la première ligne.

En faisant $x = a_1 + h$ dans les autres lignes, ils ne viennent pas des puissances negatives de h, et pour cela il ne faut pas y avoir égard.

Les coefficients de $\frac{1}{h}$ seront donc

$$A_1 F_1(a_1), A_2 F_1'(a_1), \ldots \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1)$$

et par conséquent

$$M_1 = A_1 F_1(a_1) + A_2 F_1'(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1).$$

Additionnant séparément les coefficients des secondes, troisièmes, etc. puissances de $\frac{1}{h}$, on obtient les valeurs de M_2, M_3, $M_4 \ldots$, et nous avons ainsi les formules suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
M_1 = A_1 F_1(a_1) + A_2 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_3 F_1''(a_1) \\[1em]
\qquad + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1) \\[1em]
M_2 = A_2 F_1(a_1) + A_3 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_4 F_1''(a_1) \\[1em]
\qquad + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-2)} F_1^{(\alpha-2)}(a_1) \\[1em]
M_3 = A_3 F_1(a_1) + A_4 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_5 F_1''(a_1) \\[1em]
\qquad + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-3)} F_1^{(\alpha-3)}(a_1) \\[1em]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1em]
M_\alpha = A_\alpha F_1(a_1),
\end{array}\right\} (7)$$

que sont les formules que nous cherchions.

Pour trouver les numérateurs $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des autres fractions simples dans lesquelles on peut décomposer $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, dont les dénominateurs sont $x - a_2$, $(x - a_2)^2$, etc., il suffit de changer dans les formules précédentes a_1 en a_2 et $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\alpha$ en $B_1, B_2, B_3, \ldots B_\beta$.

Il faut faire des changements analogues pour trouver les autres fractions simples.

On aurait pu aussi déduire les formules précédentes des formules connues:

$$F_1(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2.1}$$

$$F_1'(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 2} + M_{\alpha-1} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots 2}$$

$$F_1''(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha+2)}(a_1)}{(\alpha+2)(\alpha+1)\ldots 3} + M_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\ldots 3}$$

$$+ M_{(\alpha-2)} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 3}$$

. . . .

(à suivre).

LETTRE DE M. D. A. DA SILVA À M. MOIGNO

SUR UNE RÉCLAMATION DE PRIORITÉ

(article extrait du journal *Les Mondes* du 29 de mars de 1877)

Ce n'est que bien tard, par la lecture de votre intéressante revue (n° du 13 janvier 1877), que j'ai été informé que M. Darboux avait présenté à l'Académie des sciences de Paris un mémoire, par lequel sont ajoutées d'importantes propriétés, qu'il croit nouvelles, à la théorie de Möbius, relative aux transformations d'un système de forces de grandeurs et de directions constantes, agissant en des points d'un corps solide, quand ce corps change d'orientation dans l'espace, théorie que, quoique ayant la date 1837, vous fûtes le premier à faire connaître en France, en 1868 [1].

Vous aurez la complaisance de m'excuser, je l'espère bien, si je vous demande l'honneur de profiter de la grande publicité et de l'auctorité reconnue de votre recueil, noblement voué à la diffusion de la science et aux indications précises de son histoire, en vous adressant une réclamation de priorité qui, malheureusement pour moi, en présence de dates connues, ne peut être que partielle.

A la séance du 27 février 1850, a été présenté par moi, à l'Académie royale des sciences de Lisbonne [2], un mémoire écrit en portugais, *sur la rotation des forces autour de leurs points d'application* [3]. A cette époque, j'ignorais complètement que, treize

---

[1] *Léçons de mécanique analytique. Statique.*

[2] Actas das sessões da Academia real das sciencias de Lisboa, tom. II, pag. 41.

[3] *Memoria sobre a rotação das forças em torno dos pontos de applicação.* Hist. e mem. da Academia real das sciencias de Lisboa, 2.ª serie, tom. III, pag. 1, 1851.

ans auparavant, Möbius, dans sa statique, eût traité la même théorie, quoique d'une manière tout à fait différente. Je croyais donc, et je l'indiquais dans ma préface, que tous les théorèmes contenues dans mon mémoire, assez étendu (171 pages d'impression), et qui a été publié en 1851, étaient entièrement nouveaux.

Il est tout naturel d'admettre la sincérité de mon aveu, puisque, di -sept années après la publication de mon mémoire (qui a été envoyé a toutes les principales Académies de l'Europe et de l'Amérique), la curieuse et importante théorie de Möbius, comme vous le dites dans la préface de votre statique, était toute neuve pour la France. Ce ne serait point un étalage grandiose de modestie nationale que d'avouer que nous ne sommes, pas ici, en Portugal, mieux informés, que vous ne l'êtes en France, des progrès accomplis dans les sciences exactes au delà du Rhin.

En ce moment même, le livre si vanté du savant géomètre allemand n'existe pas, à ma connaissance, en Portugal.

Encore un mot, qui prouvera assez, à ce qu'il me semble, la sincérité de mon illusion de priorité. Tout en respectant la majesté du vrai mérite, c'est un sentiment fort naturel, souvent même irrésistible, à ceux qui cultivent la science, que le désir de relever les égarements où sont tombés les génies du prémier ordre, et Möbius était de ce nombre. Or, M. Darboux fait remarquer, dans l'analyse qu'il a publié de son mémoire, que l'illustre mathématicien saxon a commis une grave erreur, en croyant que tout corps qui est en équilibre en quatre orientations diverses, doit être aussi en équilibre dans toutes les autres positions.

Cependant, vingt-six ans avant la dernière publication de M. Darboux (qui ignore même l'existence de mon mémoire), j'avais trouvé, tout à fait comme lui (§ 180), qu'il y a, en général, quatre positions d'équilibre, et seulement quatre, qui se déduisent les unes des autres par des rotations de 180°, autour de trois axes rectangulaires. Je n'aurais donc pas été moins porté que M. Darboux, à faire remarquer cette rectification capitale, que ce savant géomètre, sans même connaître mon nom obscur, a publié un quart de siècle après moi.

J'ai traité aussi, d'une manière assez développée (§§ 160 et suiv.), une représentation géométrique, que je pense être identique à un théorème énoncé par M. Darboux, celle d'un ellipsoide dont les trois demi-diamètres conjugués donnent, en grandeur, les moments *maxima*, et, en direction, les bras des trois couples, qui sont l'équivalent d'un système de forces tournantes, destitué de résultante principale.

Après avoir déterminé l'existence d'un plan fixe (plan central de Möbius) où se trouvent tous les points d'application des résultantes principales, je fais remarquer assez clairement (§ 91) que les trois forces résultantes qui représentent, en général, tout système de forces tournantes, ont toujours leurs points d'application sur ce même plan fixe. Cette proposition, présentée comme nouvelle par M. Darboux, quoiqu'elle ne soit pas énoncée expressément à l'endroit cité, est toutefois la conclusion immédiate, évidente, de la construction géométrique indiquée dans ce même paragraphe. Je considère aussi comme lui, quoique probablement par une méthode différente, la représentation géométrique des positions de l'axe central des moments, fixant d'un manière précise et complète (§ 139) les positions de la résultante unique, cas qui seraient figurés d'un façon plus élégant, au moyen du beau théorème de Minding, que je crois antérieur aussi à mon mémoire.

Pour conclure, permettez-moi encore d'ajouter, monsieur le rédacteur, que, par rapport à la théorie, dont je croyois être l'initiateur, n'avant vu que depuis bien peu de jours votre excellente *Statique* et l'analyse du mémoire de M. Darboux, publiée aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris (27 décembre 1876), je pense, toutefois, qu'il reste encore dans mon mémoire un certain nombre de théorèmes, qui ne se trouvent ni dans le livre de Möbius, ni dans le mémoire de votre savant compatriote.

Je vous demande, en finissant, très-humblement pardon, mon respectable savant, si ma vanité personnelle prend, dans cette lettre, une place bien plus large que ne le permettrait l'intérêt de l'histoire de la science, et la modeste graduation intellectuelle de mes publications mathématiques.

Daniel A. da Silva.

SECÇÃO II

NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. GOMES TEIXEIRA

(Continuação)

Depois de mostrar que os anneis de Saturno não podem ser solidos, formados de uma só peça, passa M. Hirn a mostrar que não podem tambem ser fluidos.

Aqui, como no caso anterior, para haver equilibrio entre a força centrifuga e a attracção do planeta, deveria cada camada cylindrica, em que podemos decompôr os anneis, mover-se com uma velocidade que deveria augmentar com a sua proximidade do planeta. O resultado d'esta differença de velocidade seria ir diminuindo a das camadas mais proximas, em virtude do attricto das outras, até que todas tivessem a mesma velocidade. Em troca d'esta diminuição de velocidade, haveria, segundo os principios da Thermodynamica, uma producção de calor.

Depois as moleculas fluidas que, se fossem independentes completamente, o que não tem logar, descreveriam, como qualquer satellite, ellipses, cuja posição e grandeza seria alterada a cada instante pelas acções do sol, dos planetas, cometas, etc., deveriam descrever curvas pouco differentes da ellipse. Devendo as moleculas mover-se com velocidade differente, os attrictos fariam diminuir a velocidade de cada annel; haveria portanto um augmento de calor correspondente, e o annel approximar-se-ia do planeta. E como isto se deveria continuar, os anneis acabariam por se depositarem sobre elle.

Os anneis fluidos não poderiam pois subsistir, e rejeita portanto M. Hirn tambem a hypothese precedente; admitte pois que os anneis são formados por uma multidão de pequenos solidos, assaz afastados, para se não chocarem, apresentando o aspecto de um corpo continuo pelo seu numero e velocidade, e movendo-se, uns no equador de Saturno, outros n'um plano pouco inclinado sobre elle.

Como se vê, a differença entre as hypotheses de Mr. Maxwell e as de M. Hirn está simplesmente na proximidade dos satellites e sua grandeza.

As observações confirmam que os anneis de Saturno não podem ser solidos continuos, nem fluidos, mas sim uma multidão de satellites.

Com effeito, suppondo os anneis solidos continuos, como explicar os phenomenos apresentados pelo annel obscuro, isto é, a sua transparencia, que tem diminuido consideravelmente, a ponto de não ser notada por W. Herschel, e ser actualmente perfeitamente visivel mesmo em oculos de força media?

Como explicar, suppondo os anneis solidos continuos, as variações da sua largura desde Huygens até hoje? Otto Struve, depois de analysar as medidas da expessura dos anneis feitas até aos tempos modernos, diz: «A largura do systema de anneis brilhantes está crescendo gradual e continuamente, pela aproximação da sua borda interior do equador de Saturno; ambos os anneis têm tomado parte n'esta mudança, comtudo o annel interior têm crescido em largura mais rapidamente, do que o exterior. O annel escuro cresceu consideravelmente em largura durante o comparativamente breve espaço de tempo, que decorreu desde a sua descoberta.

Vejamos agora como os phenomenos observados se podem explicar pela hypothese de serem os anneis formados de satellites.

As fachas obscuras, semi-córadas ou côr de cinza, que, como dissemos, muitos astronomos têm visto nos anneis, concentricas com as bordas dos mesmos, explicam-se pela separação temporaria dos satellites em pequenos arcos, deixando entre si fachas, ou sem satellites, e portanto escuras, ou com elles mais afastados, e portanto semi-córadas.

O annel obscuro póde explicar-se, suppondo que a principio não existia e foi-se formando lentamente á custa de satellites provenientes do annel brilhante.

O augmento da largura dos anneis explica-se pela acção da região equatorial de Saturno, que pela sua attracção pucha os satellites continuamente para o plano do seu equador.

Os espaços sombrios, que dissemos que G. Bond havia descoberto juncto da borda interior dos anneis brilhantes, são explicados por Mr. Proctor, admittindo que a agglomeração de satellites augmenta da borda exterior para a borda interior dos anneis. Com effeito, um espaço vasio de satellites deve parecer menor na extremidade do eixo menor do que na extremidade do eixo maior, pois que o angulo, segundo o qual este espaço é visto, é formado por duas linhas, tiradas uma para a borda mais proxima de nós, outra para a mais afastada, na extremidade do eixo menor e em todos os outros pontos, excepto na extremidade do eixo maior. Os satellites devem pois parecer mais agglomerados, e o annel ser mais brilhante na extremidade do eixo menor. Junctando a isto a diminuição de brilho da borda exterior para a borda interior, devida á diminuição dos satellites, fica explicada a existencia da parte sombria juncto á borda interior dos anneis brilhantes na extremidade do eixo maior.

Como já dissemos, nenhum dos planetas conhecidos apresenta um systema mais complexo do que o de Saturno. Além de ser rodeado por anneis, é acompanhado por um cortejo de oito satellites, que se movem em roda d'elle, segundo as leis de Kepler.

Designaremos, segundo o uso, estes satellites pelos numeros que indicam a ordem das suas distancias ao planeta.

O *primeiro* satellite foi descoberto por W. Herschel em 1787. Faz a sua revolução em roda de Saturno em 22^h, 36^m, 17^s a uma distancia media d'este planeta igual a 3,36 vezes o raio equatorial de Saturno.

O *segundo* satellite foi descoberto por W. Herschel no mesmo anno, e pouco tempo antes da descoberta do anterior. A duração da sua revolução sideral é de 1^d, 8^h, 53^m, 7^s, e a sua distancia ao centro de Saturno é igual a 4,31 vezes o raio equatorial do planeta, Os *terceiro* e *quarto* satellites, chamados tambem Thetys e Dione, foram descobertos por D. Cassini em 1684. Fazem as suas revoluções em roda de Saturno em $1^d, 21^h, 18^m, 26^s$ e $2^d, 17^h, 44^m, 51^s$ a distancias do centro d'este planeta iguaes a 5,33 e 6,84 vezes o seu raio equatorial.

O *quinto* satellite, chamado tambem Rhea, foi descoberto pelo mesmo astronomo em 1672. Dura a sua revolução sideral $4^d, 12^h, 25^m, 11^s$, e a sua distancia a Saturno é igual a 9,55 vezes o raio equatorial d'este planeta.

Em 1655 descobriu Huygens o *sexto* satellite, que foi chamado tambem Titan, e que, attendendo ao seu brilho e á sua distancia á terra, suppoz pouco differente em grandeza do planeta Marte. Move-se em roda de Saturno, descrevendo a sua ellipse em $15^d, 22^h, 41^m, 25^s$ a uma distancia media do centro d'este planeta igual a 22,14 vezes o seu raio equatorial.

O *setimo* satellite, chamado tambem Hyperion, foi descoberto ao mesmo tempo por Bond na America, e por Lassell na Inglaterra. Percorre a sua orbita em roda de Saturno em $21^d, 4^h, 20^m, 0^s$ a uma distancia media d'este planeta igual a 28 vezes o seu raio equatorial.

Finalmente o *oitavo* satellite foi descoberto por D. Cassini em 1671, e foi chamado Japetus. Notou este grande astronomo que o satellite desapparecia regularmente durante metade da revolução em roda de Saturno, emquanto que era visto claramente durante a outra metade, phenomeno que elle explicou, suppondo a superficie de um hemispherio d'este satellite menos reflectora do que a do outro, e suppondo que gira em roda de um eixo, fazendo uma rotação em roda d'elle no mesmo tempo em que faz uma revolução em roda de Saturno. Estas conclusões foram mais tarde completamente confirmadas. A duração de uma revolução de Japetus é de $79^d, 7^h, 54^m, 41^s$ e a sua distancia ao centro de Saturno igual a 64 vezes o raio equatorial d'este planeta.

Como nota Mr. Proctor uma lei, similhante á de Bode, liga entre si as distancias dos oito satellites de Saturno. Se a cada um dos numeros 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 junctarmos 4, vem proximamente as distancias dos satellites de Saturno ao planeta, tomando para unidade a quarta parte da distancia do primeiro satellite.

Para fazer ideia da grandeza d'estes satellites, extrahiremos da Astronomia de Dubois a tabella seguinte, que dá o raio de cada um, sendo o raio da terra tomado para unidade:

1.º...............	0,125
2.º...............	»
3.º...............	0,07
4.º...............	0,07
5.º...............	0,175
6.º...............	0,42
7.º...............	»
8.º...............	0,26

As observações dos satellites de Saturno são muito difficeis, e porisso a sua theoria é ainda hoje muito imperfeita.

Os seis primeiros movem-se no plano dos anneis, o setimo e o oitavo n'um plano inclinade sobre aquelle. Laplace explica isto pela acção de Saturno, que, em virtude do seu achatamento, retêm os seis primeiros satellites e os anneis no plano do seu equador, d'onde tende a afastal-os a acção do sol, que só se torna sensivel para os ultimos satellites.

Mostrou ainda o eminente auctor da *Mecanica Celeste* que os satellites de Saturno movem-se sobre planos, que passam constantemente entre o equador e a orbita do planeta, pela sua intersecção mutua, e que são tanto mais inclinados sobre este equador, quanto mais afastados estão os satellites do centro de Saturno.

Descripto o systema dos anneis e o systema dos satellites de Saturno, resta, para terminar esta noticia, considerar mesmo o planeta, para ver qual a sua figura, grandeza, massa e constituição.

A figura do disco de Saturno foi considerada como espheroidica desde o tempo de Newton até ao de W. Herschel. Observando porém este grande astronomo este planeta em abril de 1805, viu que o contorno de Saturno era uma curva irregular, tendo a fórma de um parallelogrammo de cantos arredondados, e tendo a sua maior diagonal inclinada de 43°.20′ sobre a diametro equatorial, emquanto que a menor diagonal coincidia com o eixo do planeta, Como as observações subsequentes não confirmaram isto, attribuiu-se este aspecto do planeta a illusão optica, e continuou-se a considerar o planeta como sendo um espheroide.

Ultimamente, porém, Mr. Proctor, astronomo inglez, que se occupou muito de Saturno, mostrou que este planeta está sujeito a mudanças de figura, o que elle prova com algumas observações.

Diz primeiro que as particularidades da figura de Saturno observadas por W. Herschel não podem ser attribuidas a defeito do instrumento, pois que Herschel fez a observação com muitos instrumentos; que não podem ser devidas a perturbações atmosphericas, porque estas particularidades conservaram-se durante muito tempo; não podem ser attribuidas a illusão proveniente da disposição dos anneis, porque, para isso, deveriam ser periodicas.

Além das observações de W. Herschel apresenta Mr. Proctor muitas outras.

Em 5 de agosto de 1803, Schröter viu que Saturno apresentava uma figura que não era perfeitamente espheroidica. Kitchener viu durante o outomno de 1818 que Saturno apresentava a figura descripta por W. Herschel. Observou com duas lentes diversas, e quando o annel se apresentava muito estreito, o que provava que o aspecto do planeta não podia ser devido a illusão proveniente da lente ou do annel.

O grande astronomo inglez, Mr. Airy, observando Saturno n'uma occasião, viu-o apresentar o aspecto descripto por W. Herschel; observando-o n'outra occasião, viu-o pelo contrario achatado em logar de elevado na latitude de 45°.

Coolidge, astronomo americano, viu, quando o annel estava na sua maxima abertura, o diametro maior do globo de Saturno, umas vezes coincidindo com o equador do planeta, outras vezes inclinado de 20° sobre elle.

Os astronomos G. Bond e W. Bond, que muitas vezes observaram Saturno, dizem que em muitas occasiões o contorno d'este planeta lhes pareceu irregularmente achatado e torto.

Bessel, em 1832, e Main, em 1848, observaram o disco de Saturno com todo o cuidado, e viram que elle apresentava perfeitamente a figura espheroidica.

De todas estas observações conclue Mr. Proctor, com toda a razão, que o disco do planeta Saturno varía de figura, o que explica, suppondo-o sujeito á influencia de forças que, ou levantam porções da sua superficie a uma grande altura de tempos a tempos, ou fazem levantar a uma grande altura massas de nuvens.

A massa de Saturno, deduzida da sua attracção sobre o sexto satellite é 94,68 vezes a da terra. O seu volume é proximamente igual a 691 vezes o da terra, e a sua densidade media é igual a 0,13, a da terra sendo tomada para unidade, ou 0,75 da densidade da agua.

Saturno faz uma rotação em roda do seu eixo em $10^h. 29^m. 16^s, 8$, resultado a que chegou W. Herschel, vendo o tempo que certas manchas, que apparecem na superficie do planeta, levam a fazer uma revolução.

Huygens descobriu no globo de Saturno *bandas* parallelas ao equador do planeta, analogas ás que tambem já haviam sido descobertas em Jupiter. Esta observação foi confirmada depois por Hadley, que achou que estas bandas variam na fórma e no numero.

W. Herschel observou tambem as bandas de Saturno, e viu que os seus contornos são similhantes aos contornos dos anneis, d'onde concluiu que são parallelas ao plano d'elles.

Comparando estas bandas com a direcção do movimento das manchas que serviram, como já vimos, para determinar a rotação do planeta, concluiu este grande astronomo que ellas são parallelas ao seu equador.

As bandas de Saturno dividem-se em dous grupos: umas escuras, variando desde a côr parda ou avermelhada, perto do equador, até á côr azulada ou esverdeada, perto do polo; outras brilhantes, quasi brancas no equador e amarelladas nas outras latitudes.

Estas bandas são devidas ás nuvens que fluctuam na atmosphera de Saturno, atmosphera, cuja existencia é demonstrada pela adherencia que parece existir entre os satellites de Saturno e o planeta nas suas occultações por elle, pois que dura tempo de mais para se attribuir ás dimensões dos satellites.

As bandas brilhantes correspondem ás nuvens que fluctuam na atmosphera do planeta, que reflectem para nós a luz do sol; as bandas escuras correspondem ás zonas visiveis da superficie menos reflectora do planeta, ou a nuvens que fluctuam mais perto d'esta superficie do que as primeiras.

Mr. Proctor estudou muito as bandas de Jupiter e Saturno, e chegou a conclusões da mais alta importancia relativamente á constituição do planeta, como vamos ver.

Sobre as bandas escuras apparecem manchas pretas, como têm observado muitos astronomos. Estas manchas são, como diz Mr. Proctor, porções visiveis da superficie do planeta através das nuvens que formam as bandas escuras, ou são ainda devidas a nuvens, fluctuando mais baixo do que as primeiras. As manchas brancas, que apparecem sobre estas mesmas bandas, são attribuidas ou a nuvens mais altas, ou a enormes correntes de vapor levantadas por acções volcanicas.

O systema de bandas está sujeito a grandes variações de fórma e extensão. As bandas escuras são umas vezes muito estreitas, outras vezes muito largas; ora muito numerosas, ora pouco numerosas; ora dispostas com regularidade, ora formando figuras irregulares. Estão, além d'isso, sujeitas a grandes mudanças de côr, bem como as bandas brilhantes.

(Continúa).

QUESTÃO PROPOSTA (*)

Dadas as condições binomiaes

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = \text{inteiro},$$

deduzir d'ellas as praxes das extracções dos 9 e dos 11.

PEREIRA CALDAS
(Professor no Lyceu de Braga).

(*) Em cada numero d'este Jornal será proposta uma questão, e n'um dos numeros proximos será publicada a solução que primeiro nos fôr enviada.

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. Gomes Teixeira

(Suite)

Soit, par exemple, à décomposer la fraction

$$\frac{x^2-3x+5}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}$$

$$=\frac{M_4}{(x-1)^4}+\frac{M_3}{(x-1)^3}+\frac{M_2}{(x-1)^2}+\frac{M_1}{x-1}+\frac{N}{x-2}+\frac{P}{x}.$$

Les formules (7) donnent

$$M_1=3A_1-A_2+A_3,$$

$$M_2=3A_2-A_3+A_4,$$

$$M_3=3A_3-A_4,$$

$$M_4=3A_4,$$

mais nous avons déjà vu que

$$A_1 = 0,\ A_2 = -1,\ A_3 = 0,\ A_4 = -1,$$

il s'en suit donc que

$$M_1 = 1,\ M_2 = -4,\ M_3 = -4,\ M_4 = -3.$$

De la même manière on trouve

$$N = 3B_1,\ P = 5C_1,$$

mais nous avons déjà vu que $B_1 = \frac{1}{2}$ et $C_1 = -\frac{1}{2}$, donc

$$N = \frac{3}{2},\ P = \frac{5}{2},$$

et par conséquent

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 2x}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^4}$$

$$+ \frac{\frac{3}{2}}{x-2} - \frac{\frac{5}{2}}{x}.$$

5. Comme application de la décomposition des fractions rationnelles nous allons déduire quelques formules, dont nous aurons à user plus tard.

On sait que toute fraction rationnelle propre peut être développée en une serie ordonnée suivant les puissances entières croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{\omega_1}{x}+\frac{\omega_2}{x^2}+\frac{\omega_3}{x^3}+\frac{\omega_4}{x^4}+\ldots,$$

et nous allons déterminer ω_1, ω_2, ω_3, etc.

En développant en serie les fractions simples, dans lesquelles on peut décomposer $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, il vient

$$\frac{M_1}{x-a_1}=M_1\left[\frac{1}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_1^2}{x^3}+\ldots\right]$$

$$\frac{N_1}{x-a_2}=N_1\left[\frac{1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_2^2}{x^3}+\ldots\right]$$

$$\frac{P_1}{x-a_3}=P_1\left[\frac{1}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\frac{a_3^2}{x^3}+\ldots\right]$$

....

donc

$$\Sigma\frac{M_1}{x-a_1}=\frac{\Sigma M_1}{x}+\frac{\Sigma M_1 a_1}{x^2}+\frac{\Sigma M_1 a_1^2}{x^3}+\ldots$$

en étendant le Σ à toutes les racines de $F(x)=0$.

De la même manière on obtient

$$\frac{M_2}{(x-a_1)^2}=M_2\left[\frac{1}{x^2}+2\frac{a_1}{x^3}+3\frac{a_1^2}{x^4}+\ldots\right]$$

$$\frac{M_3}{(x-a_1)^3}=M_3\left[\frac{1}{x^3}+3\frac{a_1}{x^4}+6\frac{a_1^2}{x^5}+\ldots\right]$$

. . . .

et par conséquent

$$\Sigma\frac{M_2}{(x-a_1)^2}=\frac{\Sigma M_2}{x^2}+2\frac{\Sigma M_2 a_1}{x^3}+3\frac{\Sigma M_2 a_1^2}{x^4}+\ldots$$

$$\Sigma\frac{M_3}{(x-a_1)^3}=\frac{\Sigma M_3}{x^3}+3\frac{\Sigma M_3 a_1}{x^4}+6\frac{\Sigma M_3 a_1^2}{x^5}+\ldots$$

. . . .

En égalant maintenant le développement de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ à la somme des développements des fractions simples dans lesquelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être décomposée, il vient:

$$\frac{\omega_1}{x}+\frac{\omega_2}{x^2}+\frac{\omega_3}{x^3}+\ldots$$

$$=\frac{\Sigma M_1}{x}+\frac{\Sigma M_1 a_1+\Sigma M_2}{x^2}+\frac{\Sigma M_1 a_1^2+2\Sigma M_2 a_1+\Sigma M_3}{x^3}$$

$$\frac{\Sigma M_1 a_1^3+3\Sigma M_2 a_1^2+3\Sigma M_3 a_1+\Sigma M_4}{x^4}+\ldots$$

En égalant donc les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les formules:

$$\omega_1 = \Sigma M_1$$

$$\omega_2 = \Sigma M_1 a_1 + \Sigma M_2$$

$$\omega_3 = \Sigma M_1 a_1^2 + 2 \Sigma M_2 a_1 + \Sigma M_3$$

$$\omega_4 = \Sigma M_1 a_1^3 + 3 \Sigma M_2 a_1^2 + 3 \Sigma M_3 a_1 + \Sigma M_4$$

....

En général, on obtient la formule suivante, qui est, je crois, nouvelle:

$$\omega_{n+1} = \Sigma M_1 a_1^n + [n\,C\,1] \Sigma M_2 a_1^{n-1} + [n\,C\,2] \Sigma M_3 a_1^{n-2}$$

$$+ \ldots + [n\,C\,p] \Sigma M_{p+1} a_1^{n-p} + \ldots + \Sigma M_{n+1}$$

comme il est facile de voir en ayant égard aux termes généraux des développements des fractions simples, qui sont

$$\Sigma M_1 a_1^n,\ \Sigma M_2 \frac{2(2+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-1)} a_1^{n-1},$$

$$\Sigma M_3 \frac{3(3+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-2)} a_1^{n-2},\ \Sigma M_4 \frac{4(4+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-3)} a_1^{n-3}$$

....

ou

$$\Sigma M_1 a_1^n,\ n \Sigma M_2 a_1^{n-1},\ \frac{n(n-1)}{1.2} \Sigma M_3 a_1^{n-2}, \text{ etc.}$$

6. Comme on sait, un des principaux usages de la décomposition des fractions rationnelles se rencontre dans le Calcul Intégral, lorsqu'il s'agit d'intégrer ces fractions.

Ainsi pour intégrer $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ on décompose la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$, et après cela on intégre ces fractions au moyen des règles connues.

En faisant donc usage des formules que nous avons données précédemment pour la décomposition des fractions rationnelles, nous avions à employer les formules (6) et (7). Il est cependant plus simple de décomposer seulement la fraction $\frac{1}{F(x)}$ au moyen des formules (6).

En effet (pag. 34)

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \Sigma \int \frac{G_k F_1(x)}{(x-a_i)^k}dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \Sigma G_k \left[-\frac{F_1(x)}{(k-1)(x-a_i)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int \frac{F_1'(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-1}} \right].$$

De la même manière nous avons

$$\int \frac{F_1'(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-1}} = -\frac{F_1'(x)}{(k-2)(x-a_i)^{k-2}} + \frac{1}{k-2}\int \frac{F_1''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-2}}$$

$$\int \frac{F_1''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-2}} = -\frac{F_1''(x)}{(k-3)(x-a_i)^{k-3}} + \frac{1}{k-3}\int \frac{F_1'''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-3}}$$

....

et par conséquent

$$\int \frac{F_1(x)\,dx}{F(x)} = \Sigma\, G_k \Big[-\frac{F_1(x)}{(k-1)(x-a_i)^{k-1}}$$

$$-\frac{1}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{F_1'(x)}{(x-a_i)^{k-2}}$$

$$-\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} \cdot \frac{F_1''(x)}{(x-a_i)^{k-3}}$$

. . . .

$$-\frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)} \cdot \frac{F_1^{(n-1)}(x)\,dx}{(x-a)^{k-n}}$$

$$+\frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)} \cdot \int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}}.$$

Considérons cette dernière intégrale.

Comme $F_1(x)$ est une fonction rationnelle et entière, une de ses dérivées doit être une quantité constante.

1.° Si $F_1^{(n)}(x)$ est cette dérivée constante, et $k-n>1$, il vient

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}} = -\frac{F_1^{(n)}(x)}{(k-n-1)(x-a_i)^{k-n-1}},$$

et l'intégrale de la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ est algebrique.

2.° Si $F_1^{(n)}(x)$ est constante, et $k-n=1$, il vient

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)} = F_1^{(n)}(x)\,.\,l\,(x-a_i)$$

et l'intégrale de $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ est transcendante.

3.° Si $k-n$ est égal à l'unité, avant de $F_1^{(n)}(x)$ être constante, on obtiendra

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a_i} = \int \frac{A\,x^m + B\,x^{m-1} + \ldots + K}{x-a_i}$$

ou

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a_i} = \int a\,x^{m-1}\,dx + \int b\,x^{m-2}\,dx + \int c x^{m-3}\,dx + \ldots$$

$$+ \int k\,dx + \int \frac{R}{x-a_i}$$

$$= \frac{a\,x^m}{m} + \frac{b\,x^{m-1}}{m-1} + \ldots + k\,x + R\,l(x-a_i)$$

où a, b, c, etc., sont les coefficients des puissances de x dans le quotient de la division de $F_1^{(n)}(x)$ par $x-a_i$, et R est le reste de cette division

L'intégrale de $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ est donc algebrique si R est nul, c'est à dire si a_i est une racine de $F_1^{(n)}(x)=0$.

SECÇÃO II

SOBRE DIVISIBILIDADE DOS NUMEROS

POR

Francisco da Ponte Horta

Dadas as condições binomiaes

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = \text{inteiro},$$

deduzir d'ellas as praxes das extracções dos 9 e dos 11.

(Questão proposta no numero anterior).

Separemos d'esta equação as duas seguintes

$$\frac{x^m \pm a^m}{x + a} = \text{inteiro}, \quad \frac{x^m \pm a^m}{x - a} = \text{inteiro}.$$

Effectuando as divisões indicadas, obtem-se

$$\frac{x^m \pm a^m}{x+a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots \pm a^{m-1} . x^{m-m} = \text{inteiro}$$

$$\frac{x^m \pm a^m}{x-a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} = \text{inteiro.}$$

A primeira forma da primeira equação exige que m seja impar.

Só é verdadeira a segunda no caso de m par.

A primeira forma da segunda equação é absurda. É verdadeira a segunda, quer m seja par quer seja impar.

Consideremos actualmente o numero $abcdefg$, em que as letras $g, f, e, \ldots$ representam unidades, dezenas, centenas, etc., teremos

$$\begin{aligned} abcdefg = a \times 10^6 &= a(10^6 - 1) + a = a(10^6 - 1) + a \\ + b \times 10^5 &= b(10^5 + 1) - b = b(10^5 - 1) + b \\ + c \times 10^4 &= c(10^4 - 1) + c = c(10^4 - 1) + c \\ + d \times 10^3 &= d(10^3 + 1) - d = d(10^3 - 1) + d \\ + e \times 10^2 &= e(10^2 - 1) + e = e(10^2 - 1) + e \\ + f \times 10 &= f(10 + 1) - f = f(10 - 1) + f \\ + g &= \qquad\quad + g = \qquad\quad + g \end{aligned}$$

Reconhece-se pelas duas ultimas columnas verticaes da egualdade, visto havermos provado que os binomios $10^6 - 1$, $10^5 + 1$, $10^4 - 1$, $10^3 + 1$, etc., são divisiveis por $10 + 1 = 11$, e bem assim que $10^6 - 1$, $10^5 - 1$, $10^4 - 1$, etc., são divisiveis por $10 - 1 = 9$:

1.° Todo o numero é composto d'um certo numero de onzes e mais a somma dos algarismos das casas impares, menos a somma dos algarismos das casas pares;

2.° Todo o numero é composto d'um certo numero de noves e mais a somma de seus algarismos.

Podem tambem deduzir-se por modo similhante os casos da divisibilidade por 7 e por 13; notando que os residuos da divisão das potencias de 3 por 7 e 13 são:

Potencias	Residuos para 7	Residuos para 13
3	$+3$	$+3$
3^2	$+2$	-4
3^3	-1	$+1$
3^4	-3	$+3$
3^5	-2	-4
3^6	$+1$	$+1$
3^7	$+3$	$+3$
3^8	$+2$	-4
3^9	-1	$+1$
....	....	....

lembrando que $(10^{2n}-3^{2n})$ e $(10^{2n+1}+3^{2n+1})$ são divisiveis por $10+3=13$; bem como que (10^n-3^n) é sempre divisivel por $10-3=7$.

Com effeito

$$\begin{array}{lll}
abcdefg = a(10^6-3^6)+a.3^6 = \mathrm{N}\ .13+\ a & = a(10^6-3^6)+a.3^6 = n\ .7+\ a \\
\quad +b(10^5+3^5)-b.3^5 = \mathrm{N}^{\mathrm{I}}\ .13+4\,b & = b(10^5-3^5)+b.3^5 = n^{\mathrm{I}}\ .7-2\,b \\
\quad +c(10^4-3^4)+c.3^4 = \mathrm{N}^{\mathrm{II}}\ .13+3\,c & = c(10^4-3^4)+c.3^4 = n^{\mathrm{II}}\ .7-3\,c \\
\quad +d(10^3+3^3)-d.3^3 = \mathrm{N}^{\mathrm{III}}.13-\ d & = d(10^3-3^3)+d.3^3 = n^{\mathrm{III}}.7-\ d \\
\quad +e(10^2+3^2)+e.3^2 = \mathrm{N}^{\mathrm{IV}}.13-4\,e & = e(10^2-3^2)+e.3^2 = n^{\mathrm{IV}}.7+2\,e \\
\quad +f(10+3)-f.3 = \mathrm{N}^{\mathrm{V}}\ .13-3\,f & = f(10-3)+f.3 = n^{\mathrm{V}}\ .7+3\,f \\
\quad +g \qquad\qquad\qquad\qquad +\ g & = \qquad\qquad +g \ = \qquad +\ g
\end{array}$$

D'onde se conclue:

1.° Se dividirmos o numero dado em classes de tres algarismos a partir das dezenas $(\ldots abc, def, g)$ e multiplicarmos ordenadamente da direita para a esquerda os tres algarismos de cada classe por 3, 4 e 1, e sommarmos o algarismo das unidades com os productos provenientes dos algarismos das classes pares, e lhe tirarmos os productos provenientes dos algarismos das classes impares, o numero obtido, depois de tirados os 13, será o residuo do numero dado para o divisor 13;

2.° Se dividirmos o numero dado em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, e multiplicarmos ordenadamente no mesmo sentido os tres algarismos de cada classe por **1**, **3** e **2**, tirarmos a somma dos productos provenientes dos algarismos das classes pares da somma dos productos provenientes dos algarismos das classes impares, o numero resultante, depois de excluidos os 7, será o residuo do numero dado para o divisor 7.

Corol. Todo o numero formado por um numero par de grupos de tres algarismos, dois a dois eguaes, collocados em tal ordem, que se um d'estes grupos for par, o seu egual seja impar, é divisivel por 7 e por 13, e por conseguinte por 91.

Ex.:

$$\underset{1}{243}\,\underset{2}{243}\,\underset{3}{427}\,\underset{4}{213}\,\underset{5}{213}\,\underset{6}{427}\ldots(A).$$

Os numeros formados de seis algarismos eguaes **111111**, **222222**, etc., são divisiveis por 3, 7, 11, 13 e 91.

Os numeros da forma (A) são circulares para o divisor 91 [1].

Por quanto dispostos estes numeros em circulo, e escrevendo um outro circulo concentrico, pondo em correspondencia com os algarismos do primeiro os seus respectivos multiplicadores, quer relativos á divisibilidade por treze $+1, -3, -4, -1, +3, +4$, etc., ou por sete $+1, +3, +2, -1, -3, -2$, etc., vê-se que se este segundo circulo girar de uma, duas ou mais casas, não cessam os algarismos eguaes dos grupos eguaes de terem eguaes multiplicadores de signaes contrarios; nem tão pouco de estarem estes na ordem em que os demanda a divisibilidade por 7 ou 13, se, querendo formar o numero, abrirmos o circulo immediatamente á direita do algarismo que tiver em correspondencia um dos multiplicadores $+1$.

Esta proposição é, porém, consequencia d'outra mais geral que vamos enunciar.

[1] Numero circular para o divisor *a* é aquelle que disposto em circulo, afim de perder a indicação dos algarismos em que começa e acaba, é sempre divisivel pelo mesmo divisor, aonde quer que se abra depois o circulo para tornar a rectificar o numero.

Todo o numero composto d'um numero par de grupos de tres algarismos que fôr divisivel por 7 ou 13, é circular para esse divisor.

Com effeito, verifica-se ser 1 o residuo para 7 ou 13 das potencias de 3, cujo espoente fôr um dos termos da progressão 6, 12, 18, 24, . . .

Se, pois, $a\text{M}$ designar o numero dado, em que M (numero composto de 5, 11, 17, 23, etc., algarismos) representa o numero que se segue á direita do primeiro algarismo a do numero dado, teremos por hypothese (empregando a notação de Gauss)

$$a\text{M} = a.10^m + \text{M} \equiv 0\ (\text{M}\ {}^{13}{}_{7}) \ldots (1).$$

Passando o algarismo a da esquerda para a direita do numero dado, obteremos outro numero que representarmos por $10\,\text{M} + a$: e visto não sabermos se elle é ou não divisivel por 7 ou 13, escreveremos

$$10\,\text{M} + a \equiv \text{X}:$$

multiplicando a primeira congruencia por 10, e subtrahindo-lhe a segunda, teremos

$$a(10^{m+1} - 1) \equiv -\text{X};$$

ou

$$a(10^{m+1} - 3^{m+1}) + a(3^{m+1} - 1) \equiv -\text{X}: \ldots (2)$$

mas $m + 1$ é um dos numeros da serie 6, 12, 18, etc., logo

$$3^{m+1} - 1 \equiv 0;$$

e visto que é tambem

$$10^{m+1} - 3^{m+1} \equiv 0,$$

temos

$$\text{X} \equiv 0.$$

Todo o numero circular para os divisores 7 ou 13 consta d'um numero par de grupos de tres algarismos.

Com effeito, em relação ao divisor 7, sendo $X \equiv 0$ (por hypothese) e bem assim $10^{m+1} - 3^{m+1} \equiv 0$; teremos

$$3^{m+1} - 1 \equiv 0,$$

logo $m + 1 = 6$, 12, 18, etc.

Com respeito ao divisor 13, a proposição é evidente, se $m+1$ fôr par; porque sendo $X \equiv 0$ e $10^{m+1} - 3^{m+1} \equiv 0$ (M 13), ter-se-ha

$$3^{m+1} - 1 \equiv 0,$$

e logo $m + 1 = 6$, 12, 18...

Se $m + 1$ fôr impar, teremos

$$-X \equiv a(10^{m+1} - 1) = a(10^{m+1} + 3^{m+1}) \pm n a,$$

e visto que

$$10^{m+1} + 3^{m+1} \equiv 0 \text{ (M 13)}$$

será $\pm n a \equiv 0$, o que é absurdo por ser 13 numero primo, e ser 4 o maior valor de n.

Prova-se de um modo inteiramente similhante que os numeros circulares para o divisor 11 devem conter um numero par de algarismos. E, reciprocamente, todo o multiplo de 11 que contiver um numero par de algarismos é circular para este divisor.

NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. GOMES TEIXEIRA

(Continuação)

Todas as mudanças de que fallámos anteriormente, affectando uma grande porção da superficie do Saturno, effectuando-se em pequenos intervallos de tempo, e sendo visiveis a uma distancia tão consideravel, como a que separa Saturno da terra, não podem ser attribuidas, senão a forças de grande intensidade.

Os phenomenos manifestados pela atmosphera de Saturno não se podem pois explicar pela acção do sol sobre elle, como acontece para a terra, porque a distancia do sol a este planeta é muito grande para produzir os effeitos descriptos. Demais se taes effeitos fossem devidos só á acção do sol, a região equatorial d'aquelle planeta deveria ser, como a zona equatorial da terra, a região das calmas, o que não acontece, pois está sujeita a grandes e continuadas mudanças. Além d'isso, emquanto que na terra a zona de nuvens que existe entre os tropicos varía de posição com as estações, permanecendo ao norte do equador durante o estio, e ao sul durante o inverno, em Saturno ha uma banda brilhante que fica permanentemente equatorial.

Conclue Mr. Proctor que as forças que produzem taes effeitos não são exteriores ao planeta, e guiando-se pelo que parece ter-se passado na terra em tempos remotos, e pelo que se passa actualmente no sol, diz que muito provavelmente Saturno é uma massa incandescente, ainda fluida, ainda fervente, onde se levantam continuamente enormes massas de nuvens, que são dispostas em bandas pela influencia da rapida rotação do planeta.

Esta hypothese sobre o estado actual de Saturno explica completamente as suas mudanças de figuras, mudanças que, como vimos, não podem ser postas em duvida, pelo credito que merecem os astronomos que as observaram.

Explica tambem esta hypothese a pequena densidade que dissemos já que tinha Saturno. Com effeito, têm-se reconhecido que os planetas, cuja natureza póde ser estudada, são constituidos dos mesmos elementos que o sol, porém, no sol e n'estes planetas estes elementos acham-se em condições diversas; póde pois haver planetas em que elles se achem nas mesmas condições que no sol, e que tenham portanto uma pequena densidade, visto que a do sol é tambem muito pequena.

A similhança da constituição de Saturno com a do sol, de que acabamos de fallar, não é porém completa. Em quanto que as nuvens do sol são luminosas, as de Saturno, que estão n'uma temperatura mais baixa, não o são, e vellam assim a maior parte da luz propria do planeta.

Mais argumentos ha ainda a favor da hypothese precedente, como passamos a ver.

(Continúa).

QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da Geometria elementar o problema seguinte:

Por um ponto dado a igual distancia de duas rectas tambem dadas, conduzir uma transversal tal, que a parte intercepta por estas rectas seja igual a uma recta dada m.

Lisboa — 1877.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

SECÇÃO I

SUR LES FORMULES DE MR. FRENET

PAR

CH. HERMITE

Une courbe dans l'espace étant représentée par les équations:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\theta(t),$$

je pôse pour abréger:

$$A=y'z''-z'y''$$

$$B=z'x''-x'z''$$

$$C=x'y''-y'x''$$

et:

$$D^2=A^2+B^2+C^2.$$

Mr. Hermite, um dos primeiros mathematicos francezes, dignou-se illustrar o nosso Jornal, enviando-nos o presente artigo para n'elle ser publicado.

Cela étant, les angles, (α, β, γ), (λ, μ, ν), (ξ, η, ζ), de la tangente, de l'axe du plan osculateur et de la normale principale avec les axes coordonées sont déterminées par les relations suivantes:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{s'},\ \cos\lambda = \frac{A}{D},\ \cos\xi = \frac{Bz' - Cy'}{Ds'}$$

$$\cos\beta = \frac{y'}{s'},\ \cos\mu = \frac{B}{D},\ \cos\eta = \frac{Cx' - Az'}{Ds'}$$

$$\cos\gamma = \frac{z'}{s'},\ \cos\nu = \frac{C}{D},\ \cos\zeta = \frac{Ay' - Bx'}{Ds'}.$$

On sait aussi que le rayon de courbure R, et le rayon de torsion r, ont pour valeur:

$$R = \frac{s'^3}{D},\ r = \frac{D^2}{\Delta},$$

où:

$$\Delta = A x''' + B y''' + C z'''.$$

Cela étant, l'identité:

$$Bz' - Cy' = (x''s' - x's'')s'$$

donnant

$$\cos\xi = \frac{x''s' - x's''}{D} = \frac{s'^2}{D}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{x'}{s'}\right],$$

on voit déjà, qu'on a:

$$\frac{d\cos\alpha}{dt}=\frac{D}{s'^2}\cos\xi=\frac{s'}{R}\cos\xi,$$

et semblablement:

$$\frac{d\cos\beta}{dt}=\frac{s'}{R}\cos\eta,\quad \frac{d\cos\gamma}{dt}=\frac{s'}{R}\cos\zeta.$$

Ces résultats conduisent à chercher les valeurs des dérivées par rapport a t de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, qui s'obtiennent facilement comme on va voir.

On a d'abord:

$$\frac{d\cos\lambda}{dt}=\frac{A'D-AD'}{D^2}=\frac{A'D^2-ADD'}{D^3};$$

remarquant ensuite que:

$$A'D^2-ADD'=A'(A^2+B^2+C^2)-A(AA'+BB'+CC')$$

$$=B(A'B-AB')+C(A'C-AC'),$$

il suffit de se rappeler les relations bien connues:

$$A'B-AB'=\Delta z'$$

$$B'C-BC'=\Delta x'$$

$$C'A-CA'=\Delta y'$$

pour en conclure:

$$A'D^2-ADD'=\Delta(Cy'-Bz').$$

Nous avons donc:

$$\frac{d\cos\lambda}{dt}=\frac{\Delta(Cy'-Bz')}{D^3}=-\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\xi,$$

et de même:

$$\frac{d\cos\mu}{dt}=-\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\eta,\quad \frac{d\cos\nu}{dt}=-\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\zeta.$$

Enfin la relation $\cos^2\alpha+\cos^2\lambda+\cos^2\xi=1$ donne immédiatement

$$\cos\xi\frac{d\cos\xi}{dt}=-\cos\alpha\frac{d\cos\alpha}{dt}-\cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{dt}$$

et par suite:

$$\frac{d\cos\xi}{dt}=-\frac{D}{s'^2}\cos\alpha+\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\lambda.$$

On aura de même:

$$\frac{d\cos\eta}{dt}=-\frac{D}{s'^2}\cos\beta+\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\mu.$$

$$\frac{d\cos\zeta}{dt}=-\frac{D}{s'^2}\cos\gamma+\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\nu.$$

Ce sont les formules importantes dont la première découverte est due a Mr. Frenet, mais que Mr. Serret a obtenues de son côté presqu'en même temps. En introduisant les quantités R, r, et remplaçant s' par $\frac{ds}{dt}$, elles deviennent:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\frac{\cos\xi}{R},\quad \frac{d\cos\beta}{ds}=\frac{\cos\eta}{R},\quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=\frac{\cos\zeta}{R},$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=-\frac{\cos\xi}{r},\quad \frac{d\cos\mu}{ds}=-\frac{\cos\eta}{r},\quad \frac{d\cos\nu}{ds}=-\frac{\cos\zeta}{r}$$

$$\frac{d\cos\xi}{ds}=-\frac{\cos\alpha}{R}+\frac{\cos\lambda}{r}$$

$$\frac{d\cos\eta}{ds}=-\frac{\cos\beta}{R}+\frac{\cos\mu}{r}$$

$$\frac{d\cos\zeta}{ds}=-\frac{\cos\gamma}{R}+\frac{\cos\nu}{r}.$$

Je remarque enfin, qu'en désignant par a, b, c, trois constantes arbitraires, et faisant:

$$u=(a-x)\cos\alpha+(b-y)\cos\beta+(c-z)\cos\gamma$$

$$v=(a-x)\cos\xi+(b-y)\cos\eta+(c-z)\cos\zeta$$

$$w=(a-x)\cos\lambda+(b-y)\cos\mu+(c-z)\cos\nu,$$

ces diverses relations sont comprises dans celles-ci :

$$\frac{du}{ds} = -s + \frac{v}{R}$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r}$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{v}{r}$$

qui me semblent offrir sous la forme la plus simple les équations différentielles pour la détermination d'une courbe, dont on donne le rayon de courbure et le rayon de torsion.

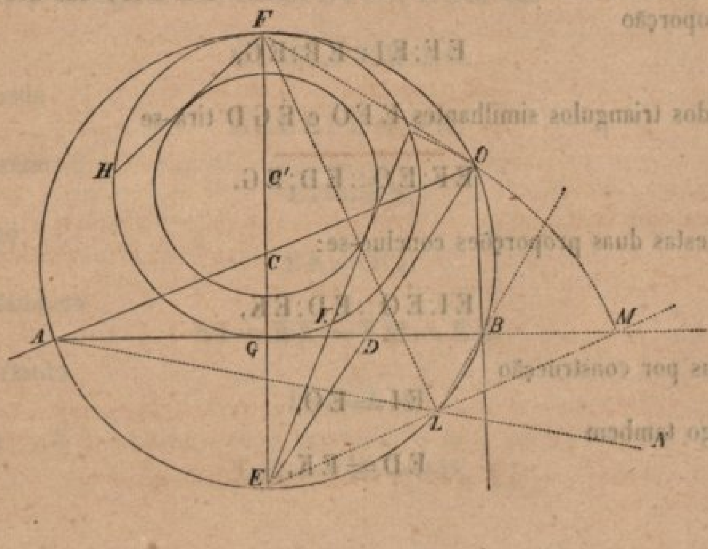
SECÇÃO II

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA NO NUMERO ANTERIOR

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar o problema seguinte:

***Por um ponto dado a igual distancia de duas rectas tambem dadas, conduzir uma transversal tal, que a parte intercepta por estas rectas seja igual a uma recta dada* m.**

Primeira solução



Seja A B a recta representada por *m*. Façamos sobre ella o segmento A F B capaz de conter o augulo formado pelas duas rectas dadas: evidentemente o vertice do dicto angulo estará n'algum ponto O do arco A F B, e o angulo das duas rectas dadas será A O B. Tiremos o diametro F E perpendicular a A B; a bissetriz do angulo passará necessariamente por E, e o ponto dado a igual distancia das duas rectas será D.

Para definitivamente determinar o ponto O, faça-se a seguinte construcção:

Sobre G F como diametro trace-se um circulo, e n'elle tire-se uma corda F H igual á distancia conhecida do ponto dado ao vertice do angulo formado pelas duas rectas; descreva-se outra circumferencia concentrica com a antecedente e tangente a F H, então, por E, tire-se a recta E I tangente á mesma circumferencia, e fazendo centro em E, com o raio E I, descreva-se um arco de circulo, que pela sua intercessão com a circumferencia A F B E, irá determinar o ponto procurado O: pois que O D fica sendo a distancia conhecida a que o ponto dado estava effectivamente do vertice do angulo.

Demonstração

As duas secantes E F e E I ao circulo F H G K I dão-nos a proporção

$$EF:EI::ER:EG,$$

e dos triangulos similhantes E F O e E G D tira-se

$$EF:EO::ED:EG.$$

D'estas duas proporções conclue-se:

$$EI:EO::ED:EK,$$

mas por construcção

$$EI=EO,$$

logo tambem

$$ED=EK,$$

portanto

$$EO - ED = EI - EK,$$

ou

$$OD = IK,$$

mas IK, pela construcção que fizemos, é igual a FH, logo

$$OD = FH$$

q. e. d.

Se continuarmos o arco IO até encontrar o prolongamento de AB em M, e tirarmos a recta EM, esta cortará a circumferencia n'um ponto L; tirando BL e ALN, o angulo BLN será igual ao angulo formado pelas rectas dadas, pois que é medido pelo mesmo arco; LM será a bissetriz d'esse angulo e M o ponto que nos era dado, a recta MA tirada por elle vai cortar um dos lados do augulo em B e o prolongamento do outro em A, ficando a parte AB por elles intercepta igual á grandeza dada *m*.

Com effeito, tinhamos achado a proporção

$$EF : EI :: EK : EG,$$

mas os triangulos similhantes EFL e EGM dão

$$EF : EL :: EM : EG,$$

d'onde

$$EI : EL :: EM : EK,$$

porém

$$EI = EM$$

logo

$$EK = EL$$

e tambem

$$EI - EK = EM - EL$$

portanto

$$IK = LM$$

ou

$$LM = FH = OD,$$

Advertencia:—Achámos $EL = EK$, e tambem mostrámos que $EK = ED$, logo $EL = ED$, facto este que se traduz no seguinte theorema:

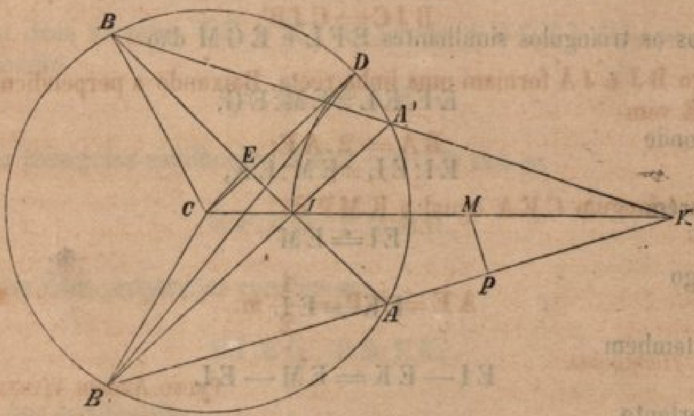
Se do meio d'um arco tirarmos duas rectas iguaes a terminarem, uma na circumferencia e a outra no prolongamento da corda do mesmo arco, a circumferencia separará n'esta ultima um segmento igual áquelle que a corda separa na primeira.

Esta proposição, que appareceu incidentemente, não nos era conhecida, nem sabemos se já por alguem foi enunciada: não deixa de ser curiosa, e póde demonstrar-se directamente por uma maneira simples e elegante.

Carlos Henrique d'Aguiar Craveiro Lopes.

Segunda solução

Seja J o ponto dado e AK e BK as rectas dadas.



Tome-se $EP = \frac{1}{2} m$ e levante-se a perpendicular PM.

Com o diametro K J descreva-se a circumferencia D J e tire-se a tangente $DC = KM$, problema facil de resolver.

Com o raio C D descreva-se a circumferencia $AA'BB'$ a qual contará os lados do angulo em quatro pontos, que fornecerão as duas transversaes A B, $A'B'$ pedidas.

Com effeito

$$CA^2 = DC^2 = KC \times CJ$$

logo os triangulos K C A, J C A são similhantes, bem como KCB', JCB'.

Portanto o angulo

$$CJB' = CB'A = CAB' = JAB' - JAC,$$

mas

$$JAC = \frac{1}{2} K,$$

logo

$$CJB' = KJA.$$

Mas

$$BJC = CJB',$$

logo B J e J A formam uma linha recta. Baixando a perpendicular C E vem

$$BA = 2.AE;$$

e o triangulo C E A egual a K M P dá

$$AE = KP = \frac{1}{2} m.$$

(Continúa).

Pedro Amorim Vianna.

SOBRE A ORGANISAÇÃO DO REAL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LISBOA

POR

A. F. DA ROCHA PEIXOTO

Observa F. Arago, na biographia do principe Albategnius, astronomo arabe do seculo I, que nos tempos remotos, e entre os mahometanos, não eram contradictorios os dous titulos de principe e astronomo. Na historia da astronomia, *parte essencial da historia do espirito humano,* é esta observação brilhantemente demonstrada com gloriosos nomes de principes illustrados e distinctos, pela dedicação com que protegeram a sciencia exploradora dos céos.

Pois, nos tempos modernos, é de justiça tambem a mesma observação. O nome saudoso de D. Pedro V, cujo tumulo é um altar de veneração para quantos amarem Portugal, ha de sempre dourar a historia da astronomia d'este seculo, tão feliz em progressos, que a divisão do trabalho é já uma necessidade, uma verdadeira lei, nas sciencias como nas artes, e na vida social. Á generosa e dedicada iniciativa d'este sempre querido rei é devida a fundação de um observatorio, na Ajuda, para a astronomia sideral, estabelecimento reclamado imperiosamente pelos progressos da astronomia moderna e pelos mais eminentes sabios que para elles têm contribuido com os seus talentos e trabalhos.

Foi em 1857 que teve começo esta grandiosa obra. Na legislação portugueza ha documentos que mostram evidentemente, sem permittirem a mais leve duvida, o pensamento unico que o inspirou a um principe tão illustrado como infeliz.

Para que a verdade seja de todos conhecida, bastam os decretos de 31 de janeiro e 14 de fevereiro de 1857, dos quaes o segundo vem, na parte mais significativa, transcripto nas excellentes considerações que, sobre tão importante assumpto, publicou em 1875 o distincto astronomo, e meu honrado amigo, Frederico Augusto Oom. Julgo necessario transcrever ambos estes documentos n'este modesto artigo, que me é imposto por um dever de homem publico. Assignados por D. Pedro V, dizem assim:

«Tendo attenção ás urgencias do estado, hei por bem ordenar que, da dotação que me fôra estabelecida, na conformidade da carta constitucional da monarchia, se deduza a quantia de 91:250$000 réis, como donativo espontaneo, que deverá verificar-se durante o anno de 1857-1858; e outrosim sou servido declarar que é minha vontade que d'esta somma sejam applicados 30:000$000 rs. á fundação de um observatorio astronomico em Lisboa, e 10:000$000 réis para enriquecer as collecções do instituto industrial d'esta capital, devendo a restante quantia de 51:250$000 réis entrar na receita geral do estado.

«O duque mordomo-mór assim o tenha entendido e fará constar na repartição competente. Paço, aos 31 de janeiro de 1857. — REI. — *Duque mordomo-mór.*»

«Attendendo a que as leis da creação das escolas polytechnica e naval determinam que haja um observatorio para o ensino pratico de astronomia, e a que em tempos mais remotos havia n'esta mesma cidade o observatorio denominado — do Castello —, que foi successivamente decahindo até desapparecer de facto, não existindo na actualidade senão o observatorio da marinha, que não póde desempenhar os fins que se têm em vista; e sendo certo que um observatorio astronomico erigido na capital do reino, e organisado *segundo as prescripções da epocha*, satisfazendo ao ensino, póde e deve cooperar igualmente *para o adiantamento da sciencia*, e servir ao mesmo tempo para recolher factos, ministrar dados, e desempenhar os variados trabalhos que são precisos ao bom serviço das diversas repartições publicas; *tomando na maior consideração as exigencias que têm apresentado os mais celebres e distinctos astronomos do seculo, os quaes preparam seguramente um brilhante futuro para a sciencia e para o credito d'este paiz, dotado pela natureza com condições climatericas quasi exclusivas* *d'elle, sendo a principal d'essas exigencias um curso contínuo de observações especiaes, feitas n'esta posição como ponto singular e unico para certos e determinados fins;* desejando, pois, que *todos* estes resultados, *de tanto momento para o serviço do estado, para a publica instrucção e para a sciencia, e de tanta gloria para a nação portugueza,* se obtivessem promptamente; fui servido ordenar, por decreto de 31 de janeiro do corrente anno, que, da dotação que me foi estabelecida, na conformidade da carta constitucional da monarchia, se deduzissem 30:000$000 réis para a fundação de um observatorio astronomico em Lisboa. Attendendo, porém, a que uma similhante creação, no actual estado da astronomia, é objecto de maior importancia scientifica, e depende de variados conhecimentos especiaes, sou servido nomear uma commissão, composta do marechal de campo, José Feliciano da Silva Costa, do meu conselho, meu ajudante de campo e commandante geral do corpo de engenheria; do coronel graduado de engenheria, o dr. Filippe Folque, do meu conselho, lente de astronomia e director geral dos trabalhos geodesicos do reino e do observatorio da marinha; do coronel graduado de engenheria, João Ferreira de Campos, lente jubilado da escola polytechnica; e do major graduado de artilheria, o dr. Guilherme José Antonio Dias Pegado, lente de physica e director do observatorio meteorologico do infante D. Luiz; de que será presidente o primeiro, e secretario o que por elle fôr nomeado. Cumpre á commissão: 1.° apresentar uma relação dos instrumentos fundamentaes astronomicos, que satisfaçam completamente, tanto ás observações relativas ao systema solar, *como ás que devem servir de base aos progressos da astronomia sideral,* indicando tambem os artistas mais acreditados que devem encarregar-se da sua construcção, e informando tudo o mais que julgar conveniente sobre o assumpto; 2.° escolher e indicar o local mais apropriado para a edificação do observatorio; 3.° apresentar o projecto e orçamento da construcção, de modo que o edificio tenha a capacidade necessaria e mais condições technicas para a perfeita estabilidade de todos os instrumentos e apparelhos que deve possuir no seu estado completo, e em tudo similhante ao dos mais modernos observatorios de primeira ordem; tendo tambem em vista que deve poder proporcionar alojamento conveniente aos empregados que tiverem de fazer as observações a qualquer hora do dia ou da noute. Espero da reconhecida illustração, zelo e actividade dos membros da commissão nomeada, que desempenharão cabalmente o importante serviço de que sou servido encarregal-os.

«O visconde de Sá da Bandeira, par do reino, ministro e secretario de estado dos negocios da marinha e ultramar, e interinamente encarregado dos negocios da guerra, assim o tenha entendido e faça executar na parte respectiva a cada uma das dictas repartições. Paço, aos 14 de fevereiro de 1857.—REI.—*Visconde de Sá da Bandeira.*»

O primeiro d'estes decretos vem publicado no *Diario do Governo*, n.º 30, de 4 de fevereiro de 1857, e o outro no n.º 43, de 19 d'este mez.

Não houve então quem usasse deturpar este grandioso pensamento; não appareceram talentos desvairados pela ambição, perdidos de cynismo, a sacrificar a interesses proprios e mesquinhos, e com criminoso egoismo, os progressos e as necessidades da astronomia. A obra iniciada pelo virtuoso soberano foi proseguindo pelo concurso de todos os que para ella podiam trabalhar efficazmente; e, n'um relatorio apresentado ás côrtes, ha cêrca de dezenove annos, disse o visconde de Sá da Bandeira, ministro da marinha:

«O governo tenciona levantar nas proximidades d'esta capital um observatorio *com todas as condições necessarias aos grandes estudos da astronomia sideral.* Sua Magestade El-Rei dignou-se concorrer para esta obra com o donativo de 30:000$000 réis, sendo este mais uma demonstração do vivo interesse que toma pelo progresso das sciencias. Para se poder realisar a construcção do observatorio, a escolha e acquisição dos instrumentos que n'elle hão de servir, foi nomeada uma commissão composta de pessoas eminentes pelo seu saber, a qual se acha em relação com diversos sabios extrangeiros, e entre elles M. Struve, o illustre astronomo director do observatorio de Palkova na Russia, que levado pelo amor da sciencia, que com tanto esmero cultiva, se presta a indicar tudo quanto fôr conducente a realisar a construcção do projectado observatorio, que deverá procurar-se que contenha todos os aperfeiçoamentos que a sciencia tem indicado, e tambem a dirigir a construcção e acquisição dos principaes instrumentos que têm de alli ser collocados: e, com effeito, acham-se já em construcção, em Munich, pelo celebre artista Merz, *um grande refractor parallatico;* em Londres *duas pendulas normaes* e um *apparelho galvanico,* para a contagem do tempo; e em Hamburgo, pelo outro notavel artista M. Repsold, um *circulo meridiano* e um *instrumento de passagens pelo primeiro vertical.* M. Struve enviou ao governo uma interessante memoria, por elle escripta, indicando as condições que a sciencia aconselha na edificação de um observatorio astronomico, fazendo ao mesmo tempo mui importantes reflexões sobre *a especialidade dos trabalhos de que se deve occupar o observatorio e educação do seu pessoal.* Aproveitando o offerecimento d'este celebre astronomo, mandou um joven official de marinha, que se dedica com zelo ao estudo da astronomia, a praticar no observatorio de Pulkova, e assim habilitar-se ao uso dos grandes instrumentos que alli existem e que são *indispensaveis* ás observações sideraes.»

(Continúa).

QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Por um ponto dado no plano de um circulo, tirar uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos de intersecção com o circulo estejam numa razão dada $\frac{m}{n}$.

Alfredo Schiappa Monteiro.

SECÇÃO I

NOTE SUR L'ANGLE D'UNE COURBE AVEC UNE DROITE

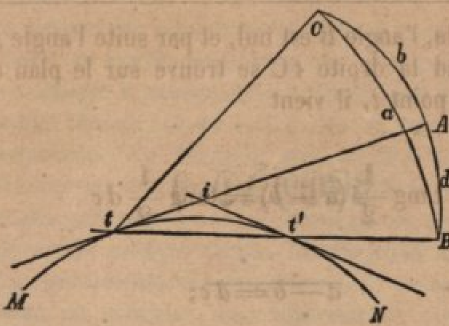
PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Selon l'opinion de Mr. Jules de la Gournerie, l'angle d'une courbe quelconque avec une droite est égal à l'angle formé par cette droite avec la sécante, qui passe par le point de rencontre de ces lignes, et par un autre point infiniment rapproché; d'où il conclut que, toutes les fois que l'on n'a à considérer que des quantités finies, on peut prendre la tangente au lieu de la sécante, l'erreur commise étant égale à la moitié de l'angle de contingence (*).

En admettant donc cette manière de considérer la grandeur de l'angle d'une droite avec une courbe quelconque, nous allons prouver que, lorsque nous prendrons la tangente au lieu de la sécante, l'erreur commise n'est égale à la moitié de l'angle de contingence, que lorsque la droite donnée sera située sur le plan osculateur de la courbe, correspondant au point de rencontre des lignes considérées.

(*) Voyez le n.° 485 du *Traité de géométrie descriptive* par Mr. Jules de la Gournerie.



En effet, soit $Mtt'N$ la courbe donnée; tA et $t'i$ deux tangentes infiniment rapprochées, et tC la droite aussi donnée, passant par le point t.

Maintenant, considérons le triangle sphérique ABC déterminé par les droites tA, tB et tC sur une sphère quelconque dont le centre est en t, et dont nous prendrons le rayon pour unité.

En faisant $BC = a$, $AC = b$ et $AB = dc$, nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}dc . \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

Telle est la formule qui donne la différence entre les angles AtC et BtC de la droite tC avec la tangente tA et la sécante tB.

Ainsi, quand les angles A et B seront égaux, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = 0$$

donc

$$a - b = 0.$$

Si, par exemple, l'angle B est nul, et par suite l'angle $A=180°$, c'est-à-dire quand la droite tC se trouve sur le plan osculateur de la courbe au point t, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}dc$$

d'où

$$a-b=dc;$$

mais, en représentant par ds l'arc tt' et par ρ le rayon de courbure au point t, nous savons que l'expression

$$-\left(\frac{ds}{6\rho}\right)^2\left(\frac{d\rho}{d^2s}\right)$$

est la différence des angles formés par la corde tt' avec les tangentes à ses extrémités, et, en négligeant cette différence en présence de la grandeur de l'angle de contingence A it' ou $\frac{ds}{\rho}$, nous pouvons considérer le triangle infiniment petit tit' comme isosceles, d'où il resulte

$$a-b=dc=\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho}$$

D'après cela, nous voyons, comme il était facile de le reconnaître *à priori*, que la différence $(a-b)$ doit varier entre 0 et $\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho}$: cette dernière valeur *maximum* étant celle qui correspond, comme nous l'avons dit, au cas où la droite se trouve sur le plan osculateur de la courbe au point de rencontre t de ces lignes

q. e. d.

DEMONSTRAÇÃO DO THEOREMA DE M. VILLARCEAU SOBRE O TÓRO

POR

PEDRO AMORIM VIANNA

A secção feita em um tóro de revolução pelo plano tangente que passa pelo seu centro, é um circulo duplo (*).

Supponhamos o eixo do tóro vertical, e consideremos um meridiano qualquer CMN, onde $CN = a$ é a distancia do eixo ao centro do circulo gerador, e $NM = r$ é o raio d'esse circulo.

Tomando sobre o traço horizontal do plano tangente $CD = r$ e unindo DM, os triangulos DMC e MCN serão iguaes, em quanto os angulos DCM e CMN, que chamaremos φ e ψ, forem da mesma especie.

Com effeito, o triangulo rectilineo MCN dá

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{r}{a}\operatorname{sen}\psi.$$

E as rectas CM, CN, DC determinam um triangulo espherico rectangulo onde

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} J,$$

chamando J a inclinação sobre o horizonte do plano tangente;

(*) Para construir a figura, trace-se a linha CN, no ponto N levante-se-lhe a perpendicular MN, e tire-se a linha CM. Pelo ponto C tire-se depois a linha DCD′, tomando os pontos D e D′ a igual distancia de C.

mas

$$\text{sen } J = \frac{r}{a},$$

logo

$$\text{sen } \theta = \frac{r}{a} \text{ sen } \varphi,$$

portanto

$$\text{sen } \varphi = \text{sen } \psi,$$

os triangulos CMN e CDM são iguaes e $DM = CN = a$.

Na circulação, em tôrno do eixo do tóro, do meridiano CMN n'um dos sentidos φ e ψ se conservarão da mesma especie e o ponto de tangencia M descreverá um circulo em tôrno de D. Porém, na circulação no sentido contrario, deveremos tomar $CD' = CD$ para ser D' centro do outro circulo descripto pelo mesmo ponto.

NOTICIA SOBRE LE VERRIER

POR

R. R. DE SOUSA PINTO

No dia 23 de setembro ultimo falleceu em París M. J. L. Le Verrier, nascido em S^t^ Lô em 11 de março de 1811.

Depois de frequentar com distincção a Eschola Polytechnica de París, e de ser empregado por alguns annos nas Manufacturas do Estado e no Magisterio, entregou-se com ardor aos estudos astronomicos theoricos, para os quaes tinha decidida vocação.

Tornado desde 1839 o amigo e collaborador do sabio astronomo Arago, entrou por indicação d'este no Observatorio de París; succedendo-lhe em 1854 na direcção d'aquelle estabelecimento, da qual esteve depois privado por quatro annos; e foi reintegrado em 1873.

Encetando a brilhante carreira, percorrida em trinta e oito annos, pelas notaveis memorias sobre as variações seculares dos elementos das orbitas planetarias, sobre a theoria de Mercurio, e sobre o cometa de 1770, que lhe abriram as portas da Academia Real das Sciencias, sendo eleito membro da secção de astronomia em 19 de janeiro de 1846, e que n'elle revelaram um sucessor de Laplace, elevou-se depois ao zenith da gloria e da popularidade, pela famosa descoberta de Neptuno, a que o levára a explicação das anomalias do movimento de Urano, até então inexplicaveis.

Calculadas, com o maximo escrupulo, todas as desigualdades sensiveis provenientes das acções perturbadoras de Jupiter e Saturno, reduzidas com igual cuidado as observações que lhe inspiraram mais confiança, e comparados os logares assignados pela theoria com os deduzidos da observação, discutiu a possibilidade de expellir os erros, assim achados, por algum dos meios seguintes: correcção das observações; correcção dos elementos ellipticos; modificação da lei newtoniana; acção do ether; acção d'algum satellite desconhecido do planeta; acção d'algum cometa. E, depois de verificar que nenhuma d'estas correcções satisfazia ao fim proposto, emprehendeu resolver o problema inverso do ordinario das perturbações, isto é, achar os elementos da orbita d'um planeta exterior, cuja acção produzisse no movimento de Urano perturbações iguaes aos erros alludidos; partindo provisoriamente da distancia ao sol, que a lei de Bode indicava.

A longa serie de profundas e delicadas investigações analyticas e de calculos penosos, que a resolução d'este problema demandava, apresentada á Academia Real das Sciencias em 10 de novembro de 1845, 1 de julho e 31 de agosto de 1846, e a concordancia dos seus resultados com a observação do novo planeta, feita pelo dr. Galle, de Berlin, em 23 de setembro de 1846, são um padrão de gloria immorredoura, que o insigne astronomo erigiu a si e á sciencia, para attestar perennemente a sublimidade dos estudos astronomicos, a intelligentissima actividade com que elle os cultivava, e a justiça que lhe fez o illustre Villarceau, sem duvida insuspeito, quando, á beira da sepultura, exclamou: *Adeus, grande astronomo! Adeus!*

Se ao mesmo tempo, e sem communicação reciproca, o distinctissimo mathematico inglez Adams se occupava do mesmo problema, e chegava a conhecer a existencia do planeta, assignando-lhe uma posição conforme com a determinada por Le Verrier, o elevado conceito que os seus trabalhos lhe grangearam, não diminue a gloria d'este, mais cedo confiado na segurança e exactidão dos resultados que obtivera, e mais feliz na opportunidade de encontrar a confirmação da sua descoberta pelas observações, pedindo-a aos astronomos de Berlin.

Com aquella descoberta, logo depois confirmada pela observação, e com a mais recente de Vulcano, cuja existencia esta provavelmente virá tambem comprovar, coube a Le Verrier a gloria de remover os limites do systema planetario para fóra e para dentro dos até alli suppostos.

Formando o vasto plano de rever e aperfeiçoar a theoria dos movimentos dos corpos celestes, e de applical-a a todos os planetas, calculando as suas taboas, metteu hombros a uma empresa colossal, que, sem a sua penetrante sagacidade, sem o recurso dos seus profundos conhecimentos analyticos, e sem a inexcedivel perseverança com que trabalhava, só poderia ser levada ao cabo por uma corporação scientifica. E, além d'isso, por sua direcção e collaboração foram já reduzidas todas as observações feitas no observatorio de París desde 1800 até 1868.

Os onze volumes de memorias dos *Annaes do Observatorio de París*, e os vinte e quatro de observações, contêm as formulas, as taboas e os catalogos, resultado d'este grande commettimento, que são hoje o preciosissimo thesouro, onde os astronomos e os calculadores acham, em abundancia, e com inteira confiança, os elementos necessarios para os seus trabalhos.

A menção honrosa, em 14 de janeiro de 1848, pelas investigações relativas á descoberta de Neptuno, e as medalhas de ouro conferidas em fevereiro de 1868 e em fevereiro de 1876, pelas taboas planetarias, são eloquente testimunho do subido apreço que a Real Sociedade Astronomica de Londres deu a estas explendidas e summamente uteis producções.

Na instituição das communicações rapidas, em grande escala, para o prompto annuncio dos accidentes meteorologicos e das tempestades nos logares convenientes, organisada em 1865, fez á agricultura e á navegação um serviço importantissimo. E fez outros tambem muito valiosos á geodesia e á meteorologia.

Pelos brilhantes resultados astronomicos que obteve, e pelos relevantes serviços que prestou á sciencia e á humanidade, tornou-se o nome de Le Verrier conhecido e respeitado em todo o mundo.

Teve, é verdade, frequentemente contradictores, e sustentou algumas vezes rudes polemicas com os seus emulos; como aconteceu nas memoraveis questões relativas a alguns pontos das theorias dos corpos do systema solar, especialmente de Mercurio, e á transferencia do observatorio de París, ventiladas no seio da Academia Real das Sciencias. Mas as suas exequias apresentaram o espectaculo tocante da reunião de amigos e admiradores, entre os quaes avultavam alguns dos seus illustres adversarios, que todos se despediam saudosos do grande astronomo, e rendiam franca homenagem ao seu extraordinario merecimento.

Quando a sua alma estava prestes a deixar a prisão terrena, occorreu a circumstancia notavel de lhe ser annunciada a conclusão da obra herculea, na qual trabalhava, havia mais de trinta annos. E, ao receber a noticia, murmurou elle as ultimas palavras — *Nunc dimittis servum tuum, domine* —; dando assim mais uma prova de que o respeito a Deus e os sentimentos religiosos são companheiros da verdadeira sciencia.

Foi por isso que M. Tresca, no discurso que pronunciou nas exequias, em nome do Conselho Scientifico do Observatorio, proferiu estas edificantes palavras:

«La fin de ce savant, qui fut illustre avant l'âge, et par laquelle on n'apprendra pas sans émotion, peut être, que l'étude du ciel et la foi scientifique n'avaient fait que consolider en lui la foi vive du chrétien, c'est là un exemple qui sera donné de bien haut à la conscience publique et à la moralité de notre époque.»

SECÇÃO II

NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. Gomes Teixeira

(Continuação)

As observações photometricas do illustre astronomo, dr. Zöllner, mostram que Saturno reflecte para a terra mais luz do que reflectiria, se fosse constituido como Marte, a lua ou a terra. Com effeito, em quanto que Marte reflecte uma quarta parte da luz que recebe do sol, e a lua menos de uma quinta parte, Saturno reflecte metade d'esta luz. A não admittir que Saturno tem luz propria, seria necessario attribuir-lhe, segundo Zöllner, um poder reflector quasi igual ao do papel branco, o que não concorda com a côr que se vê ao telescopio.

De tudo o que precede concluiremos, com Mr. Proctor, que, com toda a probabilidade, Saturno é quasi um sol que illumina e aquece os oito mundos que circulam á roda d'elle.

Submettido só a attracção do sol, Saturno descreveria em roda d'este astro uma ellipse de que elle occuparia o fóco, percorrendo a linha que une o seu centro ao do sol areas iguaes em tempos iguaes.

A attracção dos outros corpos celestes altera este movimento. Como porém esta attracção é muito pequena, comparada com a primeira, por causa da pequenez das massas dos planetas relativamente á massa do sol, póde-se ainda considerar Saturno, como descrevendo em roda do sol uma ellipse, cuja grandeza e posição varía contínua e lentamente.

Como a determinação d'estas variações não se póde fazer exactamente, recorre-se, para as obter, aos meios de approximação. A efficacia d'estes meios é fundada na pequenez das acções dos planetas, comparadas com a do sol.

Para obter uma determinada exactidão na determinação precedente, é, pois, necessario um calculo tanto mais complicado, quanto maiores são as acções a que o planeta considerado está sujeito da parte dos outros planetas.

Saturno está sujeito a uma attracção consideravel da parte de Jupiter, que tem uma grande massa, e é visinho d'elle. A massa de Jupiter é, com effeito, trezentas vezes, e a de Saturno mais de cem vezes a massa da terra. O movimento elliptico de Saturno soffre por esta causa muitas perturbações.

Tendo os primeiros calculos que se fizeram d'estas perturbações dado resultados não conformes com as observações, chegou-se a duvidar da lei da attracção universal.

O eminente auctor da *Mecanica Celeste* tractou d'esta questão com mais successo, explicando e calculando todas as desigualdades de Saturno, e obtendo resultados concordantes com as observações, comprovando assim brilhantemente a lei de Newton.

Como a approximação com que Laplace havia calculado as perturbações do movimento de Saturno, não fosse sufficiente na actualidade, pela progressiva perfeição que tem havido nos meios de observar, de modo que havia differença sensivel entre os logares do astro calculados pelas formulas e os observados, o insigne astronomo Le Verrier fez de novo este calculo laborioso e difficil, levando a approximação mais longe do que exigem as mais perfeitas observações. Quando se quer levar a approximação até onde Le Verrier a levou, os termos a que ha a attender são tantos que, diz M. Bertrand, os calculos seriam inexequiveis, sem a habilidade com que o auctor sabe distinguir, para os conservar só, os termos, cuja influencia é apreciavel.

Concluida a theoria de Saturno, tractou Le Verrier de a comparar com as observações.

Como a posição do planeta é determinada relativamente a certas estrellas fundamentaes, começou este grande astronomo por corrigir as posições, dadas por Bessel, d'estas estrellas. Comparando depois os logares de Saturno, observados em Greenwich desde 1751 até 1869, e os observados em París desde 1837 até 1867 com os logares dados pelas suas formulas, achou pequenas differenças, excepto em 1839 e 1844, em que essas differenças attingiam os valores 4″,4 e 5″.

Refez pois os calculos por um outro caminho, que o levou a resultados pouco differentes dos primeiros; e como, por outra parte, esta variação da differença entre o calculo e a observação era muito brusca para ser attribuida ao calculo, concluiu que a differença notada só se podia attribuir aos erros das observações, provenientes provavelmente da influencia do annel, que ora desapparece e deixa ver o planeta debaixo da fórma de um disco, ora é visivel, e cobre com a sua sombra uma parte variavel do disco do planeta, umas vezes deixando observar as duas bordas do astro, outras vezes não deixando ver senão uma.

Concluirei este artigo, transcrevendo do livro sobre Saturno, de Mr. Proctor, as condições a que deve satisfazer um telescopio, para se poderem observar os phenomenos precedentemente descriptos.

Só os melhores telescopios mostram (em circumstancias atmosphericas favoraveis) a serie completa dos phenomenos descriptos. O primeiro, segundo e setimo satellites são especialmente difficeis de ver. Mr. Wray recorda, todavia, que Mimas e Enceladus foram vistos em dezembro de 1861 (quando o lado escuro do annel estava voltado para a terra), com sua achromatica de sete pollegadas sómente de abertura livre. O terceiro, quarto e quinto satellites não são difficeis de ver. O quinto é um pouco mais brilhante que os outros dous; comtudo todos tres são visiveis com uma boa achromatica de quatro pollegadas de abertura, estando a atmosphera clara e calma. O sexto e oitavo satellites podem ser promptamente descobertos com telescopios de pequeno poder amplificador, Japetus requerendo um poder amplificador igual a 100, e Titan sendo facilmente visivel com um telescopio d'um poder amplificador igual a 80. Em geral, Japetus deve ser procurado a uma distancia consideravel do disco do seu primario. O mais pequeno poder amplificador do telescopio necessario para se poder ver os anneis, é pouco mais ou menos 50. Para os ver distinctamente, requer-se um poder amplificador igual a 150. A divisão entre os anneis póde ver-se com um telescopio, cujo poder amplificador é 200, quando os anneis estão descobertos em quasi toda a extensão, e são observados em condições favoraveis. Nas mesmas circumstancias o annel escuro póde ser visto com uma boa achromatica de quatro pollegadas de abertura. A divisão no annel exterior e as divisões variaveis são só visiveis com poucos dos mais finos reflectores e refractores que ha no mundo.

As bandas da superficie do planeta são visiveis, em circumstancias atmosphericas favoraveis, com uma boa achromatica de quatro pollegadas de abertura. Em geral, todavia, requerem telescopios de maior força para revelar seus contornos distinctamente.

Nenhum objecto no céo apresenta uma apparencia tão bella como Saturno, visto com um instrumento de força adequada. O disco dourado, com suas bandas côr de prata; os anneis que o cercam, com suas variações de brilho e côr; e a perfeita symetria do systema quando atravessa o fundo escuro do campo de vista, combinam-se para formar uma pintura tão encantadora, como sublime e tocante.

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA NO NUMERO ANTERIOR

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Por um ponto dado no plano de um circulo, tirar uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos de intersecção com o circulo estejam n'uma razão dada $\frac{m}{n}$.

Solução

1.° CASO (*). Seja A o ponto dado fóra do circulo e DEM o circulo.

Tirem-se pelo ponto A, a tangente AD ao circulo, e outra recta Ax que faça com a tangente um angulo qualquer.

Tomem-se sobre Ax, a partir de A, os comprimentos $AF=n$, e em seguida $FG=m$, e construa-se a quarta proporcional DH.

(*) Pedimos aos leitores o favor de construirem primeiro a figura com as indicações seguintes:

Marque-se um ponto A no plano de um circulo; tire-se depois uma tangente AD a esse circulo, marcando com a letra D o ponto de contacto. Tire-se pelo ponto A uma recta Ax qualquer, e marque-se sobre ella os cumprimentos $AF=m$ e depois $FG=n$. Una-se F com D por uma linha recta e por G tire-se-lhe uma parallela, e marque-se com a letra H o seu ponto de intersecção com AD. Sobre AH como diametro descreva-se uma semi-circumferencia, e no ponto D levante-se a perpendicular DJ a AH, marcando com a letra J o ponto em que esta linha encontra a semi-circumferencia. Do ponto A como centro com o raio DJ descreva-se um arco de circumferencia, e marque-se com as letras E e M os pontos em que córta a circumferencia dada. Finalmente unam-se estes dous pontos com A pelas rectas AMN e AEP.

Construa-se D J, meia proporcional entre A D e D H. Finalmente, do ponto A como centro e com um raio igual a D J descreva-se o arco E M. As transversaes A M e A E resolvem o problema.

Com effeito, segundo as construcções indicadas, temos

$$\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}},$$

$$\overline{\mathrm{DJ}}^2=\overline{\mathrm{AM}}^2=\mathrm{AD}\times\mathrm{DH},$$

$$\mathrm{AM}\times\mathrm{AN}=\overline{\mathrm{AD}}^2.$$

As duas ultimas relações dão

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}},$$

ou, pela primeira,

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}}=\frac{m}{n}.$$

2.º CASO (*). Se o ponto dado está dentro do circulo em A, tire-se o diametro D A B, e pela extremidade D uma recta qualquer D x. Construa-se a quarta proporcional a m, n, e D A, e tome-se A D H igual a essa quarta proporcional. Construa-se A L meia proporcional a A H e A B, e do centro A com o raio A L descreva-se uma circumferencia. Os pontos N e O, onde esta circumferencia córta a proposta, pertencem ás transversaes M N e O P, que resolvem a questão.

(*) Pedimos aos leitores que vão construindo a figura com as indicações dadas, o que é facil.

Com effeito; as relações $\overline{AL}^2 = \overline{AN}^2 = AH \times AB$

$$AN \times AM = AD \times AB$$

$$\frac{AH}{AD} = \frac{n}{m},$$

dão

$$\frac{AN}{AM} = \frac{n}{m}.$$

Vê-se claramente que o problema é sempre possivel, em quanto fôr

$$\frac{m}{n} > \frac{\pm (AC - R)}{AC + R}$$

e

$$\frac{m}{n} < \frac{AC + R}{\pm (AC - R)}$$

chamando R o raio do circulo, e empregando o signal + ou — segundo o ponto A está fóra ou dentro do circulo.

ANTONIO ZEFERINO CANDIDO.

QUESTÃO PROPOSTA

Tendo tres grupos de objectos, contendo: o primeiro a objectos, o segundo $a+1$ e o terceiro $a+2$; a que potencias se deve levantar cada um d'estes numeros, para que se possa formar um numero exacto de grupos de tres objectos? Nos outros casos, quantos objectos restam depois de formados os grupos?

F. GOMES TEIXEIRA.

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. Gomes Teixeira

(Suite)

7. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions simples, dont nous avons parlé au n° 4, peut être encore obtenue d'une autre manière, que nous allons exposer.

La fraction proposée est

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}.$$

Divisant le numérateur de cette fraction par $x-b_1$, appelant $\varphi(x)$ le quotient, et remarquant que le reste est $F_1(b_1)$ par un théorème d'Algèbre bien connu, nous avons

$$\frac{F_1(x)}{x-b_1}=\varphi(x)+\frac{F_1(b_1)}{x-b_1}.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $x-b_2$, et appelant $\varphi_1(x)$ le quotient de la division de $\varphi(x)$ par $x-b_2$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)}=\varphi_1(x)+\frac{\varphi(b_2)}{x-b_2}+\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)}.$$

En continuant de même on obtient les égalités suivantes:

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)}=\varphi_2(x)+\frac{\varphi_1(b_3)}{x-b_3}$$

$$+\frac{\varphi(b_2)}{(x-b_2)(x-b_3)}+\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)}$$

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)}=\varphi_3(x)+\frac{\varphi_2(b_4)}{x-b_4}$$

$$+\frac{\varphi_1(b_3)}{(x-b_3)(x-b_4)}+\frac{\varphi(b_2)}{(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)}$$

$$\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_1(x)}{F(x)}=\varphi_{n-1}(x)+\frac{\varphi_{n-2}(b_n)}{x-b_n}+\frac{\varphi_{n-3}(b_{n-1})}{(x-b_{n-1})(x-b_n)}+\ldots+\\ +\frac{\varphi(b_2)}{(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_n)}+\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}\end{aligned}\right\}(8).$$

Cette dernière formule résout la question proposée, parceque les numérateurs des fractions qu'y entrent sont constants, et nous avons déjà donné au nº 2 des formules pour décomposer les fractions rationnelles, dont les numérateurs sont constants. Nous devons encore remarquer que les formules précédentes sont applicables dans le cas de $F(x)$ contenir des facteurs égaux; il suffit alors d'y rendre égales celles des quantités b_1, b_2, $b_3 \dots$ qui correspondent aux facteurs égaux.

Quand le degré de $F_1(x)$ est inférieur de i unités à celui de $F(x)$, quelques unes des quantités $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(b_n)$, $\varphi_{n-3}(b_{n-1}), \dots$ sont nulles.

Nous ferons encore remarquer que, dans le cas de $F(x)=0$ donner, par exemple, α racines égales à a_1, faisant $b_1=b_2=b_3=\dots a_1$, et continuant à appeler a_2, $a_3 \dots$ les autres racines dont les degrés de multiplicité sont β, γ, $\delta \dots$, nous aurons en (8) des parcelles de la forme suivante à décomposer:

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha}\,(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-1}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-2}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-3}(x-a_2)^{\beta}\dots(x-a_n)^{\lambda}}$$

. . . .

En décomposant la première au moyen des formules (6) du n° 2, on obtient A_1, A_2, A_3, etc., qui sont les numérateurs des fractions dont les dénominateurs sont $x-a_1$, $(x-a_1)^2$, $(x-a_1)^3$, etc.

Après, pour décomposer les autres fractions il n'est pas nécessaire un nouveau calcul, parceque les numérateurs de $x-a_1$, $(x-a_1)^2$, $(x-a_1)^3$, etc., sont: A_2, A_3, A_4... dans la deuxième fraction; ils sont A_3, A_4, A_5, etc. dans la troisième, et ainsi de suite.

Nous allons appliquer cette doctrine à l'exemple déjà considéré au n° 4:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

Nous avons

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)}=x-2+\frac{3}{x-1},$$

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}&=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)x}\\ &-\frac{1}{(x-1)^3(x-2)x}+\frac{3}{(x-1)^4(x-2)x}\end{aligned}\right\}(a).$$

La dernière fraction fut déjà décomposée au n° 3, et nous avons trouvé

$$\frac{1}{(x-1)^4(x-2)x}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{x-2}-\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

donc, par le remarque précédent,

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)x}=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)x}=-\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}-\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

Substituant ces fractions en (a) et faisant les additions nous obtenons:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^4}$$

$$+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}-\frac{\frac{5}{2}}{x},$$

comme au n° 4.

(à suivre).

SOBRE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

POR

Luiz Feliciano Marrecas Ferreira

Fazer passar por um ponto uma recta tal, que os segmentos determinados pelas suas intersecções com uma curva ou superficie, guardem entre si uma relação constante.

Consideremos em primeiro logar um ponto M, situado no plano d'uma curva Σ; uma recta girando em tôrno d'elle córta Σ n'um ou mais pontos, em cada posição que tomar, e designem-se estes por: $a, a', a''\ldots$; entre M e Σ, sobre $\mathrm{M}a, \mathrm{M}a'\ldots$, marquemos pontos $n, n_1\ldots$ taes que:

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}a}=\frac{\mathrm{M}n_1}{\mathrm{M}a'}=\frac{\mathrm{M}n_2}{\mathrm{M}a''}=\ldots=\lambda$$

sendo λ a relação constante.

Para o outro lado de M marquem-se pontos: $n', n'_1, n''_1,\ldots$ de sorte que:

$$\frac{\mathrm{M}n'}{\mathrm{M}a}=\frac{\mathrm{M}n'_1}{\mathrm{M}a'}=\ldots=\lambda.$$

Obteremos assim duas curvas Σ_1 e Σ', homotheticas de Σ, sendo M o centro e λ a razão de homothecia.

Determinem-se os pontos: $i, i_1\ldots$ em que Σ_1 córta Σ; as rectas $\mathrm{M}i, \mathrm{M}i_1\ldots$ resolvem o problema, porque a recta movel é cortada pelas duas curvas em segmentos, guardando entre si a relação determinada, e, como os pontos i e i_1 pertencem a ambas, segue-se que os outros pontos: m, m_1... em que Mi, Mi_1... cortam Σ, devem satisfazer á relação constante:

$$\frac{Mi}{Mm}=\frac{Mi_1}{Mm_1}=\ldots=\lambda$$

Determinemos agora as intersecções: i', i'_1... de Σ' com Σ_1 e sejam: n', n'_1... os pontos em que Mi', Mi'_1... cortam a ultima curva, ter-se-ha ainda:

$$\frac{Mi'}{Mn'}=\frac{Mi'_1}{Mn'_1}=\ldots=\lambda,$$

e estas secantes resolvem igualmente o problema.

Vê-se, pois, qual é o processo a seguir, qualquer que seja o numero de pontos, em que a recta movel córta a curva Σ, n'uma determinada posição.

No primeiro caso, os dois segmentos, cuja relação é λ, são subtractivos, e no segundo addictivos.

Este problema póde admittir muitas soluções, uma apenas, ou nenhuma.

No caso de ser Σ uma conica, empregaremos a curva Σ', se o ponto é interior á curva, e Σ_1 se é exterior.

Este processo immediatamente applicavel ao angulo e a todos os polygonos, permitte-nos resolver o seguinte problema:

Dado um ponto no espaço e um cylindro de base qualquer, determinar duas geratrizes, que dividam as secantes tiradas pelo ponto em segmentos, que tenham uma relação determinada.

Faz-se passar pelo ponto um plano qualquer, determina-se a sua intersecção Σ com o cylindro, e os pontos em que Σ_1 ou Σ' cortam Σ, faz-se passar por cada um d'estes a recta movel, e obtêm-se as outras intersecções d'esta linha com a curva. Cada grupo de duas geratrizes passando respectivamente por pontos correspondentes na mesma secante, resolve o problema.

É claro que fazendo passar por M uma recta parallela ás geratrizes do cylindro, esta existirá no mesmo plano com as de cada grupo, que precedentemente obtivemos; logo n'um d'esses planos, uma recta qualquer será cortada pelas duas geratrizes e a parallela tirada por M em segmentos, cuja relação é λ.

Se em logar do cylindro considerarmos um prisma de base qualquer, ou dois planos que se cortem, o processo será ainda o mesmo, devendo a recta, que passa por M, ser parallela ás arestas do prisma, ou á do diedro.

Dada uma superficie qualquer, levaremos pelo ponto diversos planos que a cortem, e applica-se o processo a cada secção.

Quando Σ não fôr uma curva plana, faremos passar por ella um cone tendo o vertice em M, obteremos Σ_1 e Σ'; para haver solução é necessario que as geratrizes dirigidas para as intersecções de Σ_1 ou Σ' com Σ vão ainda cortar esta curva n'outros pontos.

No caso de ser Σ uma superficie, construiremos da mesma sorte, duas outras, que lhe sejam homotheticas, segundo a relação λ, procedendo-se d'um modo analogo ao anterior.

Quando as superficies homotheticas forem de difficil construcção, o que geralmente acontece, a primeira marcha indicada será a menos difficultosa.

No caso de ser Σ uma ellipse e o ponto M existir no seu plano, em vez de construirmos outra ellipse Σ_1 ou Σ', homothetica da primeira, podemos passar do systema proposto a outro mais simples, por uma transformação homologica.

Construiremos uma circumferencia, tomando para diametro um dos eixos principaes da ellipse — considerado agora como eixo de transformação —, o ponto M passa a occupar outra posição, que facilmente se determina, sobre uma perpendicular ao eixo.

Applicando o processo ao ponto e circumferencia, obtêm-se assim as direcções das secantes que resolvem o problema, e vê-se qual a posição que lhes compete no systema primitivo.

Funda-se este processo em que a proporcionalidade, sendo uma propriedade projectiva, subsiste depois da transformação homologica.

SECÇÃO II

NOTA SOBRE AS SOLUÇÕES DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 4 D'ESTE JORNAL

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Como a solução que enviámos ao sr. dr. Francisco Gomes Teixeira, é similhante á solução dada pelo sr. Craveiro Lopes, torna-se inutil a sua publicação. Comtudo não podemos deixar de dizer algumas palavras sobre este assumpto, attendendo ás circumstancias especiaes que se apresentam.

Como sabemos, este celebre problema foi resolvido analyticamente por Pappus, Newton, Gergone, etc., na hypothese das rectas dadas serem rectangulares. Carnot resolveu-o, na hypothese das rectas serem obliquas, empregando o methodo trignometrico, Reynaud e outros geometras empregaram o methodo analytico; e não nos consta que alguem se tenha occupado da solução d'este problema, empregando apenas os recursos da geometria elementar, solução que nos parece ser a mais facil de todas.

Na nossa solução tambem fizemos notar a propriedade indicada pelo sr. Craveiro Lopes, mas não a considerámos em especial, em virtude do que, a este respeito diz Carnot, na sua Geometria de posição no n.º 42, quando resolve o problema *auxiliar* de que tanto o sr. Craveiro Lopes, como nós, fizemos depender o problema proposto.

Entre as differentes maneiras simples de demonstrar directamente esta propriedade, podemos citar a que tem por base provar a igualdade dos triangulos EMD e EOL, o que se vê immediatamente, tirando por L uma recta parallela á corda AB.

Esta propriedade póde ainda ser considerada como uma consequencia do *porisma* CCII de Euclides.

Na nossa solução tambem discutimos os casos em que havia duas, tres ou quatro soluções, considerando os arcos descriptos de E como centro com os raios EL = ED e EM = ED.

A figura corresponde ao caso de haver quatro soluções e n'ella é facil de reconhecer que se prolongarmos a recta FO até encontrar a recta AB, e fizermos centro no ponto de encontro, descrevendo o circulo que passa por O, as tangentes tiradas de G a este circulo serão iguaes a GM.

Similhantemente, se fizermos centro no ponto de intersecção de FL e AB, e descrevermos o circulo que passa por L, as tangentes tiradas de G serão iguaes a GD. Além d'isso, estas tangentes aos dois circulos confundir-se-ão duas a duas, tornando-se em tangentes communs exteriores d'estes dois circulos.

Quando descrevermos o circulo com o centro em M e o raio ML, e lhe tirarmos tangentes do ponto G, o circulo descripto d'este ponto como centro e com o raio igual ás referidas tangentes, cortará a recta AB nos mesmos pontos em que a córta o circulo descripto de F como centro e com o raio FL.

Finalmente, tambem se reconhece que estas duas tangentes serão communs ao circulo (M) e ao circulo descripto de F como centro e com o raio FO, sendo uma das tangentes exterior e a outra interior.

Mais tarde tractaremos d'estas propriedades d'uma maneira geral, quando publicarmos o nosso estudo das conicas sob o ponto de vista da sua geração por meio do circulo, e em geral por meio d'outra conica.

O sr. Amorim Vianna seguiu realmente um caminho extremamente curto e elegante, mas não considerou o angulo supplementar, e por isso a sua solução não dá a posição da transversal no caso de ser o segmento *m* menor do que a perpendicular baixada de C sobre qualquer das duas rectas dadas.

Comtudo, invertendo na figura os dadas, podia chegar a resolver d'uma maneira completa o problema. Agora passo a provar que, apezar dos srs. Craveiro Lopes e Amorim Vianna terem seguido caminhos differentes apparentemente, as soluções não são realmente distinctas, podendo considerar-se como reciprocas.

Com effeito (fig. 4), supponhamos o problema resolvido, e represente $MA'B'$ a transversal, que partindo do ponto M, dado sobre a bissectriz MVV'' encontra as rectas dadas VA' e VB' de modo que seja $A'B'=m$. O circulo $A'VV''B'V'$, circumscripto ao triangulo $A'VB'$, ou que determina o segmento capaz de angulo $A'VB'$, cortará a bissectriz MV n'um segundo ponto V'', que representará evidentemente o extremo do diametro $V'V''$ d'este circulo perpendicular á corda $A'B'=m$.

Assim o circulo $A'B'b'a'$, que tiver este ponto V'' para centro, e cujo raio seja qualquer das duas cordas conhecidas $V''A'$, $V''B'$ do circulo $A'V''B'V'$ determinará os dois pontos A' e B' que dão a direcção da transversal pedida.

Tomemos para incognita VV'', a que chamaremos x, e seja $MV=a$, $V''A'=V''B'=b$. Posto isto, a comparação dos triangulos similhantes $MA'V''$ e $A'VV''$ dá

$$\overline{V''A'}^2=V''V\,(V''V+VM),$$

ou

$$b^2=x(a+x),$$

logo o circulo (V'') córta orthogonalmente o circulo (O) descripto sobre MV como diametro, ou a tangente $V''t$ a este circulo é igual a b, e por conseguinte, a distancia $OV''=\frac{1}{2}a+x$ é a hypothenusa d'um triangulo rectangulo, cujos cathetos são $tO=\frac{1}{2}a$ e $tV''=b$.

Para construirmos esta grandeza, marcaremos, pois, sobre MV o segmento $Vm'=\frac{1}{2}m$, e levantando-lhe no extremo m' a perpendicular $m'\theta'$, esta determinará sobre VB' o segmento $V\theta'=b$, por ser o triangulo $V m' \theta'$ igual ao triangulo $A' P V''$, e marcando sobre a bissectriz $V V'$ do angulo $A' V B'$ o segmento $V\theta = V\theta'$, o circulo $V'' \theta V_1''$ descripto do ponto O como centro e com o raio $O\theta$, determinará sobre MV o ponto pedido V'', de modo que fazendo centro n'este ponto e com $V\theta'$ ou $V\theta$ como raio descrevendo o circulo (V''), este evidentemente cortará sempre as rectas dadas em dois pares de pontos A', B', a', b', que darão duas posições da transversal que resolvem o problema.

Ora, como o circulo $V'' \theta V_1''$ córta MV n'um segundo ponto V_1'', segue-se que se fizermos centro n'este ponto e com o mesmo raio $V\theta' = V\theta$ descrevermos o circulo (V_1''), este cortará, em geral, as rectas dadas em dois pares de pontos A, B, a, b, que darão mais duas direcções AB e ab para a transversal, e por conseguinte mais duas soluções do problema.

Temos assim provado que as duas soluções podem realmente considerar-se como reciprocas.

Como no triangulo rectangulo $V m' \theta'$ é o catheto $m' \theta'$ igual a $V'' P$, segue-se que, quando fizermos centro em V'' e descrevermos o circulo com o raio igual a este catheto, as duas tangentes MB' e Mb' a este circulo, que evidentemente sempre se póde tirar de M, darão duas soluções.

Quando tomarmos o ponto V_1'' para centro d'este circulo as duas tangentes AB e ab que, em geral, se podem tirar de M, darão mais duas soluções.

Teremos assim mais outra maneira de resolver o problema.

Discussão

É claro que o circulo $bAaB$ descripto de V_1'' como centro com o raio $N\theta'$, ou não córta as rectas dadas ou lhe é tangente, ou as córta, conforme fôr respectivamente $V\theta'$ menor, igual ou maior do que a pe, pendicular $V_1''\pi'$ baixada de V_1'' sobre VA, d'onde resulta que quando se considerar o segmento da transversal dentro do angulo aVA, póde deixar de haver salução, haver uma ou duas: logo o problema proposto terá duas, tres ou quatro soluções, segundo fôr $V\theta'$ menor igual ou maior do que a perpendicular $V_1''\pi'$.

Se considerarmos o circulo de raio $m'\theta'$ reconhecermos de modo analogo que o problema terá duas, tres ou quatro soluções, segundo fôr $m'\theta'$ maior, igual ou menor do que $V_1''M$.

Observação

Se na nossa figura tirarmos as rectas $bn_1''B$, Aa, $A'a'$, $Bn''b'$, as circumferencias $Ot''n_1''$ e $Ot'n''$, descriptas sobre os segmentos On_1'' e On'' como diametro, e a circumferencia $Mt''t'V$ terão para cordas communs as rectas Aa e $A'a'$ (*).

(*) Vide Methodos em geometria de P. Serret.

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 6

Traduz-se o problema proposto pela equação:

$$a^x+(a+1)^y+(a+2)^z=3\,i.$$

Os restos possiveis da divisão d'um numero qualquer a por 3 sendo

$$0 \quad 1 \quad 2,$$

é claro que no primeiro caso os restos das potencias de a por 3 serão sempre 0.

Se fosse $$\frac{a}{3}=q+\frac{1}{3}$$

uma potencia qualquer a^n teria ainda o mesmo resto 1.

No terceiro caso, isto é, sendo

$$\frac{a}{3}=q+\frac{2}{3},$$

teriamos as equações

$$\frac{a^{2n}}{3}=q\,a^{2n-1}+\frac{2}{3}a^{2n-1}$$

$$\frac{a^{2n+1}}{3}=q\,a^{2n}\quad+\frac{2}{3}a^{2n}$$

as quaes mostram que se o resto para uma potencia impar qualquer fôr 2, para a par seguinte será 1 e reciprocamente, os valores dos restos serão pois constantemente

$$2 \quad 1 \quad 2\ldots$$

Posto isto, se attendermos a que aos restos 0, 1, 2 de a correspondem

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad \text{em } (a+1)$$

e

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad \text{em } (a+2)$$

teremos

Potencias	Restos		
a^{2n+1}	0 ou	1 ou	2
a^{2n}	0	1	1
$(a+1)^{2n+1}$	1	2	0
$(a+1)^{2n}$	1	1	0
$(a+2)^{2n+1}$	2	0	1
$(a+2)^{2n}$	1	0	1

Ora, considerando unicamente a primeira columna dos restos, observaremos o seguinte:

1.° Que a somma de potencias impares dos tres numeros dá resto nullo;

2.° Que a somma de dois d'elles levantados a potencias impares com o terceiro levantado a potencia par dará o resto 2, se o resto d'este numero fôr tambem 2 e 0 nos outros casos;

3.° Que a somma de dois d'elles levantados a potencias pares com o terceiro levantado a potencia impar dará o resto 0, se o resto d'este numero fôr 2 e nos outros casos o resto 2;

4.° E finalmente, que, se os numeros tiverem todos potencias pares, o resto da sua somma será 2.

O mesmo para as outras columnas.

Como os numeros são tres e as suas potencias ou hão de ser pares ou impares, ou duas d'uma natureza e a terceira d'outra, teremos considerado todos os casos.

Concluiremos, portanto, que a somma das potencias será divisivel por 3, quando forem estas todas impares; quando havendo uma par, o resto da sua base por 3 não fôr 2; e finalmente quando havendo uma impar, o resto da sua base por 3 fôr 2.

LUIZ IGNACIO WOODHOUSE.

NOTICIAS

Novos planetas. — Desde o principio de outubro de 1877 descobriram-se os seguintes planetas:

Um em 1 de outubro por Watson em Ann-Arbor.
Outro em 2 de outubro por Palisa, no observatorio de Pola.
Outro em 14 de outubro por Peters, no observatorio de Clinton.
Outro em 6 de novembro por Henry, no observatorio da París.
Outro em 6 de novembro por Palisa, no observatorio de Pola.
Outro planeta brilhante de primeira grandeza, pelo professor Watson, em Ann-Arbor, no dia 12 de novembro.

Tendo-se porém achado que o segundo d'estes planetas é identico com o (161), ficam elles reduzidos aos cinco descobertos pelos srs. Peters, Henry, Palisa e Watson: 175, 176, 177, 178, 179.

Novo cometa. — Foi descoberto um cometa em 2 de outubro por Tempel.

QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Sendo dadas tres rectas sobre um plano, e concorrendo no mesmo ponto, tirar pelo ponto O d'este plano uma transversal tal, que a parte comprehendida entre este ponto e uma das rectas, seja igual á parte comprehendida entre as outras duas.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Suite)

8. Nous allons maintenant traduire par des formules générales ce que nous venons de dire au n° précédent.

Nous avons

$$\varphi_{i-1}(x)=\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_i)},$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{(i-1)}(x)=B_0x^{m-i}+B_1x^{m-i-1}+B_2x^{m-i-2}+\ldots+\\ +B_{m-i-1}x+B_{m-i}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

et nous allons déterminer B_0, B_1, B_2, etc.

Or a

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

$$= (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_i)$$

$$\times (B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + \ldots + B_{m-i-1} x + B_{m-i})$$

$$= (x^i - S_1 x^{i-1} + S_2 x^{i-2} - S_3 x^{i-3} + \ldots \pm S_i)$$

$$\times (B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + \ldots + B_{m-i-1} x + B_{m-i}),$$

où $S_1, S_2, S_3, \ldots S_i$ représentent la somme de toutes les combinaisons des quantités $b_1, b_2, b_3, \ldots b_i$ prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc.

Mais les coefficients des deux membres de cette égalité doivent être égaux, donc

$$A_0 = B_0$$

$$A_1 = - B_0 S_1 + B_1$$

$$A_2 = B_0 S_2 - B_1 S_1 + B_2$$

$$A_3 = - B_0 S_3 + B_1 S_2 - B_2 S_1 + B_3$$

. . . .

$$A_i = (-1)^i (B_0 S_i - B_1 S_{i-1} + B_2 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_i)$$

$$A_{i+1} = (-1)^i (B_1 S_i - B_2 S_{i-1} + B_3 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_{i+1})$$

$$A_{i+2} = (-1)^i (B_2 S_i - B_3 S_{i-1} + B_4 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_{i+2})$$

. . . .

$$A_{m-1} = (-1)^i (B_{m-i-1} S_i - B_{m-i} S_{i-1})$$

$$A_m = (-1)^i B_{m-i} S_i$$

La première des équations précédentes donne B_0, la seconde donne B_1, la troisième donne B_2 et ainsi de suite.

On peut obtenir immédiatement les valeurs des quantités B_0, B_1, B_2, ... B_i au moyen des formules:

$$B_0 = A_0$$

$$B_1 = A_1 + A_0 S'_1$$

$$B_2 = A_2 + A_1 S'_1 + A_0 S'_2$$

$$B_3 = A_3 + A_2 S'_1 + A_1 S'_2 + A_0 S'_3$$

....

$$B_i = A_i + A_{i-1} S'_1 + A_{i-2} S'_2 + \ldots + A_0 S'_i$$

où S'_1, S'_2, S'_3... représentent les sommes des combinaisons des quantités b_1, b_2, b_3, ... b_i prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc., pouvant la même quantité entrer plus qu'une fais en chaque combinaison, c'est-à-dire:

$$S'_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_i = S_1$$

$$S'_2 = b^2_1 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b^2_2 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + \ldots$$

$$S'_3 = b^3_1 + b_1 b^2_2 + b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \ldots$$

....

Les formules précédentes sont applicables au cas de $F(x)$ contenir des facteurs égaux. Il faut alors y rendre égales quelques-une des quantités b_1, b_2, b_3, etc.

Cela posé, pour obtenir $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(b_n)$, $\varphi_{n-3}(b_{n-1})$... $\varphi_1(b_3)$, $\varphi(b_2)$, nous ferons dans la formule (9) $i = n$, $n-1$, $n-2$,... 2, 1 et nous y changerons x en x, b_n, b_{n-1}, b_{n-2},...b_3, b_2.

..

Nous allons appliquer maintenant cette doctrine à l'exemple déjà considéré:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

La formule (8), en faisant

$$b_1=b_2=b_3=b_4=1,\ b_5=2,\ b_6=0,\ n=6,$$

donne

$$\frac{F_1\,x}{F\;\,x}=\varphi_5(x)+\frac{\varphi_4(0)}{x}+\frac{\varphi_3(2)}{x(x-2)}+\frac{\varphi_2(1)}{x(x-2)(x-1)}$$

$$+\frac{\varphi_1(1)}{x(x-2)(x-1)^2}+\frac{\varphi(1)}{x(x-2)(x-1)^3}+\frac{F_1(x)}{x(x-2)(x-1)^4},$$

et la formule (9), en y faisant $m=2$ et $i=6, 5, 4, 3, 2, 1$,

$$\varphi_5(x)=0,\ \varphi_4(0)=0,\ \varphi_3(2)=0,\ \varphi_2(1)=0$$

$$\varphi_1(1)=B_0=A_0^2=1$$

$$\varphi(1)=B_0+B_1=A_0+A_1+B_0\,S_1=-1,\ F_1(1)=3,$$

par conséquent nous obtenons le même résultat qu'au n° 7.

(à suivre).

NOTE SUR L'ÉTUDE DE MR. JULES DE LA GOURNERIE À L'ÉGARD DE LA DIVISION HOMOGRAPHIQUE DE DEUX DROITES (*)

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Comme nous savons, étant données deux droites ua et ua' (Est. I, fig. 1), situées dans un plan, si, d'un point Q, pris arbitrairement sur ce plan, nous menons deux droites QJ et QI, qui leur soient respectivement parallèles, et une sécante quelconque Qaa', nous aurons

$$Ja \times Ia' = QJ \times QI = C \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

ce qui exprime que les points de rencontre des droites données avec la transversale forment deux divisions homographiques; l'origine J étant, sur la droite ua, homologue du point de ua' situé à l'infini, et l'origine I étant, sur la droite ua', homologue du point de ua situé à l'infini. Le point u représente donc deux points homologues réunis.

Si nous prenons pour origine des segments des points arbitraires b et c' l'équation (1) devient

$$(ba - bJ)(c'a' - c'I) = C \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

ou

$$ba.c'a' - c'I.ba - bJ.c'a' + bJ.c'I - C = 0 \ldots (3),$$

(*) Voyez le *Traité de géométrie descriptive* de Mr. Jules de la Gournerie, p. 182.

et si nous faisons

$$-c'I=\lambda,\ -bJ=\mu,\ bJ.c'I-C=\nu$$

nous aurons

$$ba.c'a'+\lambda.ba+\mu.c'a'+\nu=0\ldots\ldots\ (4).$$

Quand les points J et I se trouvent à l'infini, il en sera de même du point de concours Q, et par suite les droites passant par les points homologues seront parallèles (fig. 2), d'où il résulte que la division sera proportionelle; et ainsi une telle division est donc un cas particulier de la division homographique.

Mr. Gournerie, après avoir fait ces considérations, a ajouté qu'il est facile de voir que l'équation (4) aux segments se présente alors sous la forme

$$\lambda.ba+\mu c'a'+\nu=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5).$$

En supposant donc que Mr. Gournerie est réellement parti de l'équation (3), pour arriver à l'équation (5), nous allons exposer le procédé qui nous avons suivi, et qui nous a paru le plus simple. Si nous faisons coincider le point a avec b l'équation (3) donne

$$bJ.c'I-C=bJ.c'b'$$

d'où

$$ba.c'a'-bJ.c'a'-c'I.ba+bJ.c'b'=0\ldots\ (6).$$

Les triangles semblables $c'IQ$ et $c'uc$ donnent

$$\frac{c'I}{c'u}=\frac{uJ}{uc}$$

d'où

$$c'I=\frac{c'u}{cu}.uJ.$$

En substituant cette valeur en (6), nous aurons

$$ba.c'a' - bJ.c'a' - \frac{c'u}{cu}.uJ.ba + bJ.c'b' = 0 \ldots (7)$$

donc

$$\frac{1}{uJ}.ba.c'a' - \frac{bJ}{uJ}.c'a' - \frac{c'u}{cu}.ba + \frac{bJ}{uJ}.c'b' = 0 \ldots (8).$$

Telle est l'autre forme que nous pouvons donner à l'équation (3), qui exprime la division homographique.

Cela étant, lorsque le point J passe à l'infini, il sera

$$uJ = \infty \text{ et } bJ = \infty$$

et nous aurons

$$c'a' - \frac{c'u}{cu}.ba - c'b' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ou, en faisant

$$cu = \lambda_1, \; -c'u = \mu_1, \; -cu.c'b' = \nu_1$$
$$\lambda_1.c'a' + \mu_1.ba + \nu_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (10).$$

Cette formule exprime donc la division semblable ou proportionelle.

En effet, la formule (9) pouvant se mettre sous la forme

$$cu(c'a' - c'b') - c'u.ba = 0,$$

il sera

$$cu.b'a' - c'u.ba = 0$$

ou

$$cu.b'a' = c'u.ba$$

donc (fig. 2)

$$\frac{ba}{b'a'} = \frac{cu}{c'u} = \text{constante} \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

q. e. d.

Quand le point u passe à l'infini, c'est-à-dire quand les droites sont parallèles (fig. 3), il sera

$$cu = \infty \text{ et } c'u = \infty,$$

donc (form. (11))

$$\frac{ba}{b'a'} = 1 \text{ ou } ba = b'a'$$

et les équations (8) et (9) deviennent

$$c'a' - ba - c'b' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Telle est l'équation qu'exprime la division en des parties égales, ce qui est un cas particulier de la division semblable.

SECÇÃO II

SOBRE A ORGANISAÇÃO DO REAL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LISBOA

POR

A. F. DA ROCHA PEIXOTO

(Continuação)

Além d'estes documentos, que a consciencia publica ha de acceitar com veneração, que valem tudo contra malevolas tentativas, ha ainda a nobre e honrada palavra do general dr. Filippe Folque. No relatorio dos trabalhos executados na direcção geral dos trabalhos geodesicos durante o anno de 1870, relatorio publicado em 1872, escreveu este illustre sabio:

«A fundação do real observatorio astronomico de Lisboa, devida á munificente iniciativa do senhor D. Pedro V, de saudosa memoria, teve por fim satisfazer a urgente necessidade do serviço publico, attender aos interesses da sciencia e do bom nome portuguez, e dotar o paiz e o *mundo scientifico* com um observatorio de primeira ordem, *destinado especialmente ao estudo e adiantamento da astronomia sideral.*»

No seu projecto de organisação do mesmo observatorio, inseriu tambem o dr. Filippe Folque o seguinte artigo:

«O fim principal d'este estabelecimento scientifico, *em conformidade com os desejos* do seu augusto fundador, é o *estudo* *e adiantamento da astronomia sideral, e muito especialmente a determinação das parallaxes annuaes das estrellas, e as observações e estudos sobre a natureza das nebulosas,* e auxiliar finalmente a sciencia nas observações *occasionaes* dos phenomenos do systema solar.»

Testemunho é este de summo valor, tanto pelo caracter d'esta illustração portugueza, como pelas relações intimas e de todos conhecidas, que El-Rei D. Pedro V teve com o seu mestre o dr. Filippe Folque. N'este assumpto, um escripto de tão distincto mathematico vale tanto como se fôra do proprio fundador do observatorio, cuja organisação é necessario fixar-se definitivamente.

Tal era o pensamento de todos, ácerca do fim d'este observatorio, que pela sciencia era reclamado como uma necessidade impreterivel, quando, na sessão legislativa de 1875, o meu excellente amigo, o conselheiro Antonio Rodrigues Sampaio, então ministro do reino, e um dos ministros que mais dedicados têm sido á instrucção publica em Portugal, apresentou ás côrtes uma proposta de lei, que no art. 3.º estabelecia:

«O fim principal do real observatorio astronomico de Lisboa é o adiantamento da astronomia sideral, especialmente no que diz respeito á determinação das parallaxes das estrellas, ao estudo das estrellas multiplas e ao conhecimento da natureza das nebulosas;»

e no art. 4.º:

«Além do objecto principal designado no artigo antecedente, o real observatorio astronomico de Lisboa tem por objectos secundarios, que não podem todavia prejudicar o fim especial da instituição:

«1.º A execução de observações e outros trabalhos tendentes ao adiantamento da astronomia do systema solar, quando pela raridade dos phenomenos a que se referem, ou pelas condições especiaes do observatorio sejam de particular interesse para a sciencia;

«2.º Quaesquer observações que tenham por fim o aperfeiçoamento da geographia, da hydrographia e da navegação, com tanto que não possam prejudicar os trabalhos designados no n.º 1.º d'este artigo;

«3.º A transmissão telegraphica da hora official, contada pelo meridiano do observatorio, ás estações semaphoricas e outros pontos do reino.»

A commissão da instrucção publica da camara dos srs. deputados, esquecendo-se de todos os documentos que deixo citados, das necessidades da sciencia, dos compromissos da nação, emfim do encargo com que havia sido honrada, e como se fôra inspirada unicamente por um especulador industrioso, alterou ambos estes artigos, reduzindo-os ao seguinte:

«Os fins do real observatorio astronomico de Lisboa são:
«1.º O adiantamento da astronomia sideral, especialmente no que diz respeito á determinação das parallaxes das estrellas, ao estudo das estrellas multiplas e ao conhecimento da natureza das nebulosas;
«2.º A execução de todas as observações e outros trabalhos tendentes ao adiantamento da astronomia solar;
«3.º Quaesquer operações que tenham por fim o aperfeiçoamento da geographia, da hydrographia e da navegação;
«4.º A transmissão telegraphica da hora official ás estações semaphoricas e outros pontos do paiz.»

Que motivos determinaram a illustre commissão, na organisação definitiva d'este observatorio, a desvial-o do pensamento do proprio fundador? Por que foi contra os pareceres de tantos sabios e as necessidades da sciencia?

Diz ella que a astronomia sideral é uma parte relativamente pequena da sciencia astronomica! E a mesma commissão realmente duvída de que a astronomia sideral tenha uma importancia social mais larga e interesse scientifico menos limitado do que a solar!

Pois n'essa commissão não haveria um mathematico distincto? Pois o proprio relator pensaria assim? Não póde ser; e, de que assim não é, estão certos todos os que com justiça apreciam e respeitam, como o auctor d'este artigo tem a satisfação de apreciar e respeitar, o relator, deputado tão illustre como distincto professor de mathematica na nossa universidade, o dr. Antonio José Teixeira.

É um erro considerar-se a astronomia sideral uma parte relativamente pequena da sciencia astronomica. Sem a astronomia sideral é impossivel o conhecimento da constituição do universo; não se póde estabelecer a theoria mathematica dos differentes systemas que povoam os immensos espaços da natureza, como as moleculas formam os corpos. As observações sideraes, quando forem completas, precisas e exactas, como hoje as do systema solar, hão de ser a base da mecanica universal da natureza; e d'esta grandiosa sciencia, um dia, será um capitulo relativamente pequeno a astronomia solar, como n'esta é hoje a theoria de qualquer dos planetas. Então, depois de muitas e maravilhosas conquistas do pensamento em tão vastos e remotos dominios da natureza e da lei, poder-se-ha dizer com verdade, que na sciencia astronomica ha uma parte *relativamente pequena;* e será essa parte a astronomia solar. Emquanto fôr verdade o axioma e o todo maior que qualquer das suas partes, a astronomia sideral ha de ser mais importante do que a solar; e com razão ninguem poderá duvidar *que tenha a astronomia sideral um interesse scientifico menos limitado e uma importancia social mais larga do que a astronomia solar,* embora esta reuna *interesses scientificos e praticos de todas as ordens.*

Isto já não é novo; todos o sabem, até as pessoas extranhas á sciencia, que por curiosidade hajam lido os livros de C. Flammarion e artigos por este elegante escriptor de astronomia, publicados em jornaes illustrados. Todos observam que, ha annos, as attenções dos observadores convergem para a astronomia sideral. «É util e curioso desviar os olhos da vida ruidosa do nosso mundo para ir contemplar novas naturezas n'outras espheras» está escripto em linguagem ao alcance de todos.

Não se illuda, pois, quem não se haja dedicado especialmente ao estudo pratico da sciencia astronomica.

Mas o pensamento da commissão será considerar a astronomia sideral menos importante que a solar, por estar menos adiantada? Talvez seja; e francamente parece-me que sim. Devêra então propôr que o fim do real observatorio astronomico de Lisboa fosse *unica* e não *principalmente* a astronomia sideral. Comprehender-se-ia isto; o contrario, porém, é só absurdo para quem não o julgar mais severamente.

Assumptos para muitos e importantes artigos seriam as questões que vivamente occupam hoje os astronomos, para o estudo das estrellas. Basta porém reflectir nos resultados obtidos ácerca das distancias de muitas estrellas ao nosso systema planetario; e meditar no que está descoberto para os movimentos proprios e rotações das estrellas.

«Se Le Verrier não houvesse seguido os movimentos de Urano, não teria antevisto a existencia de uma massa perturbadora, nem daria logar á descoberta, nos confins do systema solar, do planeta que tomou o seu nome, e que tamanha gloria lhe deu a elle, e tão grandes vantagens á sciencia» diz a commissão no relatorio que precede o seu projecto de lei. E com este facto, realmente um dos mais maravilhosos da moderna astronomia, quer ella justificar as *graves duvidas que tem ácerca da preferencia que deva dar-se á astronomia sideral ou solar*, ou antes, fundamentar a importantissima alteração que introduziu na proposta primitiva.

Mas para este facto tem a astronomia sideral dous. Bessel, discutindo as posições das estrellas *Sirius* e *Procyon*, correspondentes a epochas convenientemente escolhidas, descobriu nos movimentos d'estes astros irregularidades, que revelaram a existencia de corpos opacos, de consideraveis dimensões, e de que as duas estrellas podem ser consideradas satellites. Se os movimentos uranianos conduziram Le Verrier á descoberta de Neptuno; pelos movimentos de *Sirius* e *Procyon* chegou o sabio observador de Koenigsberg a descobrir centros escuros de attracção.

Repugna acreditar que a illustrada commissão haja tido o pensamento de reduzir os fins de tão grandioso observatorio aos resultados praticos que immediatamente se possa obter. Fôra essa idêa indigna de homens sinceramente devotados á sciencia.

O que darão as observações sideraes para os usos da vida? A que interesses scientificos conduzirão? Impossivel é responder hoje a esta e a outras perguntas da mesma ordem.

Demais, e emfim, se a illustrada commissão reconhece que a descoberta de Neptuno foi de grandes vantagens para a sciencia, basta lembrar que menos não valem as dos centros escuros de attracção nos mundos sideraes.

(Continúa).

NOTICIAS

Constituição da superficie solar.—O grande astronomo photographo, Mr. Janssen, apresentou em 31 de dezembro á Academia das Sciencias de París uma Nota, na qual diz:—que obteve pela photographia, tornando a duração da acção luminosa convenientemente pequena, imagens solares, que, relativamente ás antigas, constituem um mundo novo.

«As photographias, diz elle, mostram a superficie solar coberta de uma granulação geral. Os grãos têm fórmas muito variadas, mas que se referem mais ou menos á fórma espherica. Onde mesmo a granulação é menos nitida, e onde os grãos parecem estendidos, percebe-se que a esphera foi a fórma primitiva dos elementos, fórma mais ou menos modificada por effeito das forças que actuam sobre estes corpos. Estes elementos são constituidos por uma materia muito movel que cede com facilidade ás acções exteriores, muito analoga á das nossas nuvens atmosphericas. Se a camada solar que fórma a photosphera estivesse n'um estado de repouso e equilibrio perfeito, os elementos granulares deveriam confundir-se uns nos outros, o brilho do sol seria uniforme em todas as suas partes contínuas. Mas as correntes gazosas ascendentes não permittem este estado de equilibrio perfeito. Estas correntes quebram e dividem esta camada fluida em muitos pontos para sahirem: d'ahi a producção dos elementos que não são senão fracções do envolucro photospherico. Estes movimentos, de que a camada gazosa onde nadam os elementos photosphericos é continuamente agitada, preferem certos pontos. A superficie solar é assim dividida em regiões de calma e de actividade relativas, d'onde resulta a producção da rede photospherica. O poder luminoso do sol reside principalmente n'um pequeno numero de pontos da sua superficie. Em outras palavras, se a superficie solar fosse coberta inteiramente pelos elementos granulares mais brilhantes que ella nos mostra, o seu poder luminoso seria, segundo uma primeira approximação sobre a qual teremos a voltar, dez a vinte vezes mais consideravel.»

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 7

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Sendo dadas tres rectas sobre um plano, e concorrendo no mesmo ponto, tirar pelo ponto A d'este plano uma transversal tal, que a parte comprehendida entre este ponto e uma das rectas, seja igual á parte comprehendida entre as outras duas.

Sejam OK, OC, OB as rectas dadas e A o ponto dado (*). Tire-se ABCD parallela a OK.

Tome-se $CD = AB$, e sobre AD como diametro construa-se a semi-circumferencia AED. Levante-se a perpendicular BE, e sobre AEE′ tome-se $EE' = ED$.

Unam-se O e E′ e tire-se EF parallela OE′ para determinar F sobre AO.

Sobre AO tome-se $OH = AF$ e por H e F tirem-se as parallelas HI, e FG a OK para determinar I e G sobre OC e OB.

A recta pedida será AGIK.

Com effeito

$$\frac{AF}{OF} = \frac{AE}{EE'} = \frac{AE}{ED}$$

logo

$$\frac{AF^2}{OF^2} = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{AC} = \frac{GF \times AO}{OF} \times \frac{OH}{IH \times AO}$$

$$= \frac{GF}{IH} \times \frac{OH}{OF} = \frac{GF}{IH} \times \frac{AF}{OF},$$

(*) Póde-se ir construindo a figura com as indicações dadas.

por ser

$$OH = AF,$$

logo

$$\frac{AF}{OF} = \frac{GF}{IH}.$$

Mas

$$OF = OH + HF = AH,$$

logo

$$\frac{GF}{IH} = \frac{AF}{AH}$$

logo $AGIK$ estão em linha recta e $IK = AG$.

Ainda que o angulo OAE se torne egual a dous rectos, o ponto F sempre se poderá determinar, por isso que AF é uma quarta proporcional entre AE, EE' e AO.

Como $BD = AC$ é sempre maior que AB, sempre será $OH < OF$ e o ponto H nunca poderá coincidir nem passar além de F.

PEDRO AMORIM VIANNA.

QUESTÃO PROPOSTA

Conhecendo a base e a altura d'um triangulo rectilinio, e conhecendo a somma ou a differença dos outros dois lados, construir o triangulo com os unicos recursos da geometria elementar.

C. H. D'AGUIAR CRAVEIRO LOPES.

SECÇÃO I

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE M. CHAPUY

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

M. Chapuy, pour déterminer l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, dont les axes ne sont pas dans le même plan, en n'employant que la ligne droite et le cercle (*), recherche la direction commune des plans, qui coupent les deux surfaces suivant des ellipses homothétiques (quand il existe de telles sections) pour les projecter cylindriquement suivant des cercles.

Maintenant, nous allons montrer que cette méthode est aussi applicable à d'autres surfaces de révolution du second ordre.

En effet, comme la projection centrale est toujours applicable à la détermination de l'intersection de deux surfaces du second ordre (**) quelles qu'elles soient, il s'ensuit que nous pouvons

(*) Voyez la *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, tom. II, p. 256; le *Traité de géométrie descriptive*, par L. de Fourcy (quatrième édition), n.° 152, etc.

(**) Voyez *Notre mémoire de géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces du second ordre et des surfaces de révolution.*

aussi considérer les centres variables de projection situés à l'infini, ou employer la projection cylindrique, toutes les fois que les surfaces du second ordre auront simultanément des sections elliptiques homothétiques, pourvu que les constructions générales, pour déterminer la direction commune de ces sections, soient bien faciles: ce qui a lieu en effet dans le cas où ces surfaces seront de révolution, en recourant aux propositions suivantes:

1.° *Deux surfaces de révolution ont toujours deux plans méridiens parallèles à leurs axes de révolution.*

2.° *Quand deux surfaces du second ordre ont deux points de contact communs, elles s'entrecoupent suivant deux courbes planes,* réelles *ou* imaginaires, *passant par ces points, de telle sorte que la droite d'intersection de ces plans a pour polaire réciproque la droite d'intersectiou des plans tangents aux points de contact considérés* (*).

Considérons donc deux surfaces du second ordre de révolution R et R′, quelles qu'elles soient; et représentons respectivement par P et P′ leurs *plans méridiens parallèles.*

Si maintenant nous imaginons une *troisième surface* R″ *homothétique* à l'une R′ de ces surfaces, et telle qu'elle puisse toucher l'autre R en *deux points donnés t* et *t′*, extrémités d'une *corde tt′ perpendiculaire* aux plans P et P′, il est facile d'apercevoir que, si les deux surfaces R e R″, ainsi tangentes, s'entrecoupent, les sections faites dans ces surfaces, par des plans parallèles à ceux de leurs courbes d'intersection, seront *homothétiques;* et comme d'ailleurs les sections faites dans la seconde surface R′ par ces mêmes plans seront *homothétiques* à celles de la troisième R″, il s'ensuit qu'elles le seront à celles de la première R.

Il en sera de même dans le cas où nous pourrons transporter l'une R′ des surfaces, *parallèlement à elle-même,* jusqu'à ce qu'elle

(*) Voyez le *Traité des Propriétés projectives*, par M. Poncelet, art. 603; la *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique,* tom. III, p. 328 et suivantes, etc.

touche l'autre R en *deux points* t_0 et t_1, extrémités d'une *corde* $t_0 t_1$ perpendiculaire aux deux plans considérés P et P'.

Ces considérations faites, nous allons présenter les procédés généraux pour déterminer la direction commune de ces sections.

Premier cas.—Sur la surface R, déterminons convenablement deux points t et t', extrémités d'une corde $t\,t'$ perpendiculaire aux plans P et P', et cherchons le *cylindre* C *circonscrit* à cette surface le long de la *conique respective* c, qui passe par ces points.

Déterminons un *cylindre* C' *circonscrit* à la seconde surface R' *parallèlement* au premier, et représentons par c' la *conique respective* de contact; puis, menons dans l'espace un *plan* π *perpendiculaire* à ces cylindres, et sur lequel nous construirons les *projections* x et x' de ces coniques de contact c et c'.

Cela posé, déterminons une *conique* x'' *homothétique* à la conique x', et qui ait un *double contact* avec la conique x aux *points* θ et θ', qui représentent les projections des points donnés t et t', et si nous considérons cette troisième conique x'' comme la trace d'un *cylindre* C'' *parallèle* aux deux premiers, il touchera évidemment le cylindre C le long des *génératrices* ou *arêtes* $\theta\,t$ et $\theta' t'$, et la surface R aux points t et t': et à la fois il sera circonscrit à la surface demandée R'', suivant la section faite dans ce cylindre par un *plan* conduit par $t\,t'$ *parallèlement* à la conique c'; d'où il résulte que cette surface auxiliaire R'' sera complétement déterminée.

Il est évident que, si les points choisis t et t'' sont des *sommets* des surfaces R et R'', cette dernière surface se trouve immédiatement.

Second cas.— Déterminons la *courbe de contact* c_0 de la surface R avec un *cylindre* C_0 *parallèle* aux plans P et P' et convenablement choisi. Cherchons de même la *courbe de contact* c_1 de la seconde surface R' avec un *cylindre* C_1 *parallèle* au premier C_0, et menons dans l'espace un *plan* π_0 *perpendiculaire* à ces cylindres, sur lequel nous construirons les projections x_0 et x_1 de ces coniques de contact c_0 et c_1.

Donc, si nous pouvons transporter la conique x_1 *parallèlement* *à elle-même* jusqu'à ce qu'elle touche l'autre x_0 en *deux points* θ_0 et θ_1, évidemment situés sur une *sécante* $\theta_0\,\theta_1$ perpendiculaire aux plans P et P′, les deux cylindres considérés C_0 et C_1 se toucheront aussi le long de *deux arêtes*, qui passent par ces points de contact θ_0 et θ_1, et lesquelles détermineront, par leur rencontre avec les coniques de contact c_0 et c_1, les *points* t_0 et t_1 suivant lesquels les surfaces donnés R et R′ peuvent se toucher.

Il est clair que dans la plupart des cas, ou nous n'avons pas de procédés pour obtenir ce double contact des coniques x_0 et x_1, ou un tel contact n'a pas lieu, et par conséquent il en sera de même des surfaces donnés.

q. e. d.

SOBRE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

POR

LUIZ FELICIANO MARRECAS FERREIRA

Dadas tres rectas quaesquer sobre um plano, tirar por um ponto d'este uma transversal que as córte, produzindo dois segmentos descontinuos iguaes.

Sejam: S A, S B, M C as tres rectas, e O′ o ponto dado, que póde existir no exterior, ou interior, do triangulo que formam; não havendo solução alguma, se estiver sobre qualquer das linhas. Consideremos primeiramente o caso de ser externo, como indica a fig. I (Est. II) e imagine-se a hyperbole, de que S A e S B são asymptotas, passando por O′; um dos pontos, em que M C corta a curva, e o dado, definem a recta, que representa uma solução, porque as asymptotas separam segmentos descontinuos iguaes nas cordas da hyperbole.

A recta que estiver mais proxima de O′, e qualquer das outras, constituem as asymptotas d'uma hyperbole, que será sempre cortada pela terceira; podemos construir duas hyperboles distinctas, e haverá por isso duas soluções, ainda no caso, em que as linhas concorram n'um unico ponto.

Supponha-se a hyperbole, de que S A e S B são asymptotas, passando por O′, e vamos obter as intersecções de I C com a curva, a qual se póde considerar meridiano d'um hyperboloide de revolução, sendo A S B o do cone asymptotico. D'este modo resolve-se o problema, recorrendo apenas á linha recta e circumferencia.

Seja T T′, perpendicular á bissectriz do angulo A S B, a linha de terra; as duas geratrizes, que passam por O′, devem existir n'um cone de revolução, e eixo vertical, com uma abertura igual a A S B; tire-se O′ p, parallela a B S; de O, projecção horizontal de O′, como centro, com um raio igual a O p, descreva-se uma circumferencia, que será o logar geometrico dos pés das geratrizes, estas projectam-se tangencialmente á circumferencia da góla, que tem o centro em S, e, por esse facto, os seus pés devem existir igualmente na circumferencia, construida sobre S o como diametro. b é um dos pontos de intersecção dos dois logares geometricos. As duas geratrizes projectam-se verticalmente em O′ b'; horizontalmente em O b, e na recta symetrica com esta em relação á linha de terra.

Um plano perpendicular ao vertical, tendo por traço sobre este a linha M C, corta o hyperboloide segundo uma ellipse, cujo centro está em (m', m), ponto medio de M N; para determinar o eixo menor construa-se o parallelo de (m', m), que vae cortar a geratriz (O′ b', O b) num ponto (a', a), projectando-se horizontalmente na circumferencia descripta de S, como centro, com um raio S a. $m\,m_1$, perpendicular á linha de terra, será o eixo menor.

O outro eixo está sobre M C, e as suas extremidades podem ser obtidas de diversos modos:

— Interceptando as geratrizes pelo plano da ellipse obtêem-se assim dois pontos da curva, qualquer d'elles e o eixo $m\,m_1$ bastam para determinar a projecção horizontal d'esta; este processo é inconveniente, quando os pontos estiverem muito proximos dos extremos do eixo procurado, porque se torna confuso;

— Recorrendo á propriedade de serem homotheticas as secções, feitas por um plano no hyperboloide e cone respectivo; d'este modo determina-se o parallelo do cone, que passa por (m', m), e a corda $m\,g$, perpendicular a T T′, será o eixo menor da ellipse, produzida no cone pelo plano secante, r será a projecção d'um dos extremos do eixo maior; tirem-se pois $g\,r$ e $m_1 r_1$, parallela a $g\,r$; será r_1 a projecção horizontal de I, extremo do eixo projectado sobre M N, e que se desejava obter;

— A secção produzida no hyperboloide é igual a uma outra parallela, feita no cone, o centro d'esta existe na recta S m'; cortando pois o cone por um plano perpendicular ao vertical, que tenha por traço sobre este aquella recta, obteremos duas geratrizes do cone, e determinamos os pontos d'ellas, separados por uma corda horizontal de grandeza 2 $m\,m_1$, que supporemos projectados verticalmente em m''; tira-se por este ponto uma parallela a MN, e determinam-se as intersecções com SA e SB; projectando horizontalmente um d'estes pontos e m'', será a distancia entre as duas projecções igual a $m r_1$.

O segundo d'estes processos é o mais simples, ficando r_1 bem determinado.

Conhecido I será O'I uma das transversaes, que resolvem o problema, obtendo-se as outras soluções por um modo analogo.

Se MN fosse dirigida para S, dentro do angulo supplementar de ASB, o plano MN não cortaria o cone; em tal caso podemos recorrer ao primeiro, ou terceiro, dos processos indicados; sendo a recta MN parallela a uma recta, que, passando por S, exista dentro do angulo ASB, se encontrar a curva, ser-lhe-ha tangente.

Dadas tres rectas: A, B, C e um ponto O' no interior do triangulo por ellas formado, substituiremos A por A', parallela á primeira e á mesma distancia de O', ficando este ponto no exterior do triangulo assim formado. Como é facil de ver, ha uma solução em cada transversal, que resolve o problema no novo triangulo, ou duas soluções para este. Podendo constituir-se tres triangulos distinctos, haverá portanto seis soluções, e este numero subsiste, ainda no caso de passar a parallela pelo vertice opposto á linha correspondente.

Applicando ao primeiro caso este processo reconhece-se que o numero das soluções se eleva a quatro.

Entre os problemas, cujas soluções derivam immediatamente da proposta, citarei os seguintes:

1.° — Achar as intersecções d'uma recta com uma hyperbole, determinada pelas asymptotas e um ponto, sem construir a curva; ou determinar os pontos, em que a tangente é parallela a uma recta dada.

Recorre-se á propriedade, de serem as tangentes, nos extremos d'um diametro, parallelas ao conjugado d'este; dividindo um diametro, em partes iguaes, todas as cordas parallelas ao seu conjugado.

2.° — Dado um angulo, determinar a posição, que deve ter uma secante, parallela a uma recta dada, para que o triangulo, que elle constitue com os lados do angulo, seja equivalente ao produzido por outra secante.

A tangente na hyperbole determina com as asymptotas um triangulo de área constante; considerando pois a segunda recta, como tangente a uma hyperbole, de que os lados do angulo são asymptotas, o ponto medio d'esta tangente pertencerá á curva; conhece-se a direcção que deve ter a outra tangente e recahimos por isso no caso anterior.

3.° — Dado um angulo N F E, (fig. II) determinar uma linha A D, parallela a uma recta dada, que, interceptando B E, forme dois triangulos A B C e C D E, que sejam equivalentes.

Os triangulos A F D e B F E serão equivalentes, e o problema reduz-se ao anterior.

4.° — Dado um trapesio, cortal-o por uma recta, parallela ás bases, de modo que os dois triangulos formados sejam equivalentes.

Na figura II tirem-se B M e E N, parallelas, será B M N E um trapesio; recahimos assim no caso precedente.

5.° — Dado um parallelogrammo A B M C (fig. III), em que A M é uma diagonal, construir outro sobre A B e A C, equivalente ao primeiro, tendo uma das suas diagonaes a direcção A M'.

O ponto medio da diagonal B C deve estar sobre A M, e o de B' C' — diagonal correspondente no segundo parallelogrammo — sobre A M'; sabe-se que, tirando pelo ponto medio do segmento da tangente, comprehendido entre as assymptotas, parallelas a estas linhas o parallelogrammo assim formado tem uma área constante — metade da correspondente ao triangulo, determinado pela tangente — podemos pois considerar B C e B' C', como tangentes da mesma hyperbole.

A direcção de B' C' é conhecida, tomando um ponto sobre qualquer dos lados do angulo C A B, e, construindo uma parallela ao outro lado, que divida ao meio as transversaes, para elle tiradas pelo ponto; obtem-se a intersecção d'esta parallela com A M', junctando o ponto, tomado arbitrariamente, com a intersecção, conhece-se assim a direcção, a que B' C' deve ser parallela.

6.° — Construir um hyperboloide de revolução, conhecendo um meridiano do cone asymptotico e um ponto da superficie.

Determinam-se, como na fig. I, as geratrizes que passam pelo ponto, será S *b* o raio do circulo da góla, que vae cortar a linha de terra nos vertices do meridiano da superficie.

Dada uma recta no plano do meridiano, podemos-lhe achar as intersecções com a superficie, sem construir aquelle; não existindo a linha n'um meridiano, podemos tirar por ella um plano perpendicular ao vertical, determinam-se os eixos da secção, que este produz na superficie, e o problema estará reduzido a determinar as intersecções d'uma recta com uma ellipse, ou hyperbole, cujos eixos são conhecidos, e qualquer d'estes problemas já se resolveu.

Podemos ainda determinar os pontos da superficie, em que o plano tangente seja parallelo a uma recta, ou plano dado, empregando tão sómente nas construcções a linha recta e a circumferencia.

Substituindo qualquer das tres rectas por uma curva arbitraria, construiremos uma hyperbole, e cada um dos pontos, em que a conica é interceptada pela outra curva, fornece uma solução, quando situado do lado opposto a O' em relação ás asymptotas.

Se considerarmos O', uma conica C, e uma curva arbitraria Σ faremos passar por O' outra conica homothetica e concentrica com C; as transversaes, tiradas por O', são cortadas em segmentos descontinuos iguaes por C e C'; determinam-se pois as intersecções de C' com Σ, e d'estas se escolherão as que resolvem o problema, se for possivel o resolver-se.

Sendo C uma superficie de segunda ordem, constroe-se a homothetica C', e determinam-se-lhe as intersecções com Σ, que póde ser uma curva, ou superficie.

Só o exame de cada caso particular indicará, se o problema póde ser resolvido e o numero de soluções.

SECÇÃO II

NOÇÕES ELEMENTARES SOBRE A THEORIA DOS DETERMINANTES

POR

F. Gomes Teixeira

O objecto do presente artigo é a exposição da parte elementar da importantissima theoria dos determinantes e suas applicações mais simples.

1. *Definição de determinante.*—Consideremos as quantidades

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n \\ b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots b_n \\ c_1,\ c_2,\ c_3 \ldots c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n \end{array}\right\} \quad (1),$$

sendo o numero das linhas igual ao das columnas.

Multipliquemos as que estão na diagonal, o que dá

$$a_1\ b_2\ c_3 \dots u_n \quad (2)$$

e depois permutemos de todos os modos possiveis todos os indices, sem alterar a ordem das lettras. Aos productos que provêm de (2) por um numero par de permutações dê-se o signal +, e aos que provêm de (2) por um numero impar de permutações dê-se o signal —. O resultado obtido chama-se um *determinante*.

Esclareçamos esta definição por alguns exemplos.

Se forem dadas as quantidades

$$a_1,\ a_2$$

$$b_1,\ b_2$$

virá

$$a_1\ b_2$$

e permutando os indices

$$a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

que é um determinante.

Se tivermos as quantidades

$$a_1,\ a_2,\ a_3$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3$$

$$c_1,\ c_2,\ c_3$$

vem

$$a_1\ b_2\ c_3.$$

Mas as permutações dos indices tres a tres são

1, 2, 3; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 2, 1; 3, 1, 2; 1, 3, 2;

logo vem

$$a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2.$$

O modo como se devem effeituar as permutações dos indices

$$1, 2, 3, 4 \dots n$$

é fazer passar o 1 por todos os logares da esquerda para a direita, depois fazer o mesmo ao 2, ao 3, etc. D'este modo basta depois dar aos termos do determinante alternativamente os signaes + e —, sem ser necessario ver por quantas permutações derivaram da diagonal de (1). Com effeito, por este processo, permutam-se de cada vez só dous indices entre si, e o signal deve por isso mudar.

Tomemos como exemplo o determinante em que o producto dos termos da diagonal é

$$a_1\, b_2\, c_3\, d_4.$$

Fazendo as permutações dos indices pela regra precedente, virá, fazendo primeiro passar o 1 por todos os logares,

$$1, 2, 3, 4;\ 2, 1, 3, 4;\ 2, 3, 1, 4;\ 2, 3, 4, 1;$$

fazendo depois na ultima permutação passar o 2 por todos os logares,

$$3, 2, 4, 1;\ 3, 4, 2, 1;\ 3, 4, 1, 2;$$

fazendo agora passar o 3 na ultima permutação por todos os logares,

$$4, 3, 1, 2;\ 4, 1, 3, 2;\ 4, 1, 2, 3;$$

e, fazendo o mesmo ao 4,

$$1, 4, 2, 3;\ 1, 2, 4, 3;\ 1, 2, 3, 4.$$

Vem, pois, rejeitando a ultima permutação que coincide com a primeira, o determinante:

$$\begin{aligned} & a_1 b_2 c_3 d_4 - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 \\ & + a_3 b_2 c_4 d_1 - a_3 b_4 c_2 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_4 b_3 c_1 d_2 \\ & + a_4 b_1 c_3 d_2 - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_2 c_4 d_3. \end{aligned}$$

Designam-se os determinantes do modo seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \dots a_n \\ b_1, b_2 \dots b_n \\ \dots\dots\dots \\ u_1, u_2 \dots u_n \end{vmatrix}$$

ou mais simplesmente

$$(a_1 \, b_2 \, c_3 \dots u_n).$$

Para verificar que não esqueceu algum termo do determinante, deve attender-se a que o numero d'elles é igual ao das permutações de n letras, isto é

$$[n \mathrm{P} n] = 1.2.3\dots(n-1)\,n,$$

e, que realisando-as pelo processo anterior, deve chegar-se á permutação de que se partiu.

(Continúa).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 8

Conhecendo a base e a altura d'um triangulo rectilineo, e conhecendo a somma ou a differença dos outros dous lados, construir o triangulo com os unicos recursos da geometria elementar.

Tirem-se duas rectas parallelas A B e C D, que distem entre si d'uma grandeza igual á altura α do triangulo pedido, e sobre A B marque-se o segmento ab igual á base dada β d'este triangulo.

Se agora fizermos centro n'um dos extremos b da base ab, e descrevermos uma circumferencia (b), com o raio igual á somma Σ ou á differença δ dos outros dous lados do triangulo, é facil de ver que a determinação do terceiro vertice depende da resolução muito simples do seguinte problema:

Achar um circulo tangente a um circulo dado (b), *que passe por um ponto dado* a, *e cujo centro esteja situado sobre uma recta igualmente dada* C D (*).

Faça-se, pois, centro n'um ponto c de C D e descreva-se, com o raio ca, um circulo (c), que córte o circulo (b) em dous pontos s e s'. Do ponto a baixe-se uma perpendicular sobre a recta C D, que determinará sobre a circumferencia (c) uma corda que representaremos por aa_1, cujo ponto médio m é evidentemente a sua intersecção com aquella perpendicular.

Seja a_2 o ponto de intersecção das cordas ss' e aa_1; a' e a'' os pontos em que, em geral, a circumferencia descripta sobre $a_2 b$,

---

(*) Vide *Applications d'analyse et de géométrie*, par Mr. Poncelet.

como diametro, córta a circumferencia (b); então os raios $b\,a'$ e $b\,a''$ interceptam C D em dous pontos, que representarão respectivamente as vertices v e v_1 de dous triangulos que resolvem o problema. Com effeito, o centro do circulo procurado devendo achar-se sobre a recta C D, e passando este circulo pelo ponto a terá $a\,a_1$ para corda, logo

$$a\,s \,.\, a\,s' = a_2\,a_1 \,.\, a_2\,a = \overline{a_2\,a'}^2 = \overline{a_2\,a''}^2$$

o que prova que os circulos pedidos $a\,a_1\,a'$ e $a\,a_1\,a''$, passando por a, tocam o circulo (b) respectivamente em a' e a''.

Discussão

Consideremos em primeiro logar o caso de ser dada a somma Σ dos dous lados do triangulo, e sejam d e d' os pontos de intersecção do circulo (b) com a recta $a\,m$.

É claro que segundo fôr $\frac{1}{2}\,d\,d'$ ou $\sqrt{\Sigma^2-\beta^2}$ maior, igual ou menor do que $a\,a_1$ ou $2\,\alpha$, assim o problema terá duas, uma ou nenhuma solução.

No caso de ser dada a differença δ dos lados, é tambem facil de reconhecer que haverá sempre duas soluções emquanto fôr $b\,a'$ ou δ menor do que $a\,b$ ou β.

Se fôr de $\delta = \beta$, então os circulos (v) e (v_1), confundindo-se com a corda $a\,a_1$, os seus centros achar-se-ão a distancia infinita, e os lados do triangulo confundir-se-ão com a recta A B.

Para $\delta > \beta$ é claro que não haverá solução.

Nota

É facil de ver que o logar geometrico dos circulos que passam por a e são tangentes ao circulo (b), pertencem a uma ellipse ou hyperbole, segundo fôr o raio do circulo (b) igual a Σ ou a δ.

Estas curvas terão para fócos os pontos a e b.

Assim o problema auxiliar que empregamos, conduz-nos á resolução do seguinte problema, empregando apenas os recursos da geometria elementar:

Sendo dados os eixos d'uma ellipse ou hyperbole, determinar a sua intersecção com uma recta qualquer, sem traçar estas curvas (*).

Quando em vez do circulo (b) tivermos uma perpendicular levantada em b sobre ab, os centros dos circulos que forem tangentes a esta perpendicular e passarem por a, pertencem então a uma parabola, tendo este ponto para fóco; e as construcções serão mais faceis, por ser um caso particular do problema auxiliar (**).

No caso da hyperbole ser dada por um ponto e pelas suas asymptotas, podemos achar tambem a sua intersecção com uma recta qualquer, sem construir a curva, empregando a geometria elementar, recorrendo á solução do problema seguinte:

Sendo dadas tres rectas situadas d'uma maneira qualquer n'um plano, tirar por um ponto d'este plano uma transversal, de modo que a parte d'esta comprehendida entre o ponto e uma das rectas, seja igual á parte comprehendida entre as outras duas.

O problema que propozemos no n.º 7, é um caso particular d'este, tambem mui facil de resolver.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

(*) Vide *Applications d'analyse et de géométrie*, par Mr. Poncelet.
(**) Vide o referido *Tratado* de Mr. Poncelet.

QUESTÃO PROPOSTA

Calcular por meio da geometria elementar a área lateral e o volume d'uma cunha cylindrica, determinada pela intersecção d'um cylindro de revolução e de dous planos quaesquer, passando por um diametro da sua secção recta.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

SECÇÃO I

SOLUZIONE TROVATA COL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

DAL

PROF. G. BELLAVITIS

Una questione alquanto più generale di quella proposta nel *Jornal de Sciencias Mathematicas,* Coimbra 1877. I. pag. 112, e risolta a pag. 127 mi occorse nella ricerca di alcune curve; il metodo delle equipollenze me ne offrì spontaneamente la seguente soluzione. Dati in un piano un punto O e tre rette *k, h, l* condurre la trasversale OHLK in modo che la OH sia equipollente (cioè uguale, parallela e diretta nello stesso senso) alla LK (fig. 1).

La retta *k* sia data mediante la perpendicolare $OA = a$ abassate su di essa dal punto O; similmente OB perpendicolare alla *h* abbia la lunghezza *b* e formi colla OA (presa per origine delle inclinazioni) l'angolo positivo $AOB = \beta$; pertachè nel metodo delle equipollenze si scriverà

$$OA \doteq a, \quad OB \doteq b\varepsilon^{\beta};$$

così pure la OC perpendicolare sulla retta *l* abbia la lunghezza *c* e l'inclinazione γ, cioè sia

$$OC \doteq c\varepsilon^{\gamma}.$$

Se la retta ricenata OHLK abbia l'inclinazione ξ (intendasi sempre sulla O A) sarà

$$\mathrm{OK} \simeq \frac{a}{\cos\xi},\ \mathrm{OH} \simeq \frac{b}{\cos(\xi-\beta)},\ \mathrm{OL} \simeq \frac{c}{\cos(\xi-\gamma)},$$

e la condizione del problema sarà datta dall'equazione

$$a\cos(\xi-\beta)\cos(\xi-\gamma) = b\cos\xi\cos(\xi-\gamma) + c\cos\xi\cos(\xi-\beta),$$

la quale, osservando che $2\cos\xi = \varepsilon^{\xi} + \varepsilon^{-\xi}$, si sviluppa nel equipollenze

$$\left(a\varepsilon^{-\beta-\gamma} - b\varepsilon^{-\gamma} - c\varepsilon^{-\beta}\right)\varepsilon^{2\xi} + \left(a\varepsilon^{\beta+\gamma} - b\varepsilon^{\gamma} - c\varepsilon^{-\beta}\right)\varepsilon^{-2\xi}$$

$$\simeq -2a\cos(\beta-\gamma) + 2b\cos\gamma + 2c\cos\beta,$$

che noi paragoneremo termine a termine coll'equipollenza identica

$$\mathrm{OV} + \mathrm{VU} \simeq \mathrm{OU}$$

e costruiremo nel seguente modo: sulla O A si prenda la somma algebrica

$$-2\cos(\beta-\gamma) + 2b\cos\gamma + 2c\cos\beta \simeq \mathrm{OU}$$

e sia

$$\mathrm{OV} \simeq \mathrm{OS}.\varepsilon^{2\xi},\ \mathrm{VU} \simeq \mathrm{OR}.\varepsilon^{-2\xi},$$

la O R essendo la *somma geometrica* delle retta

$$a\varepsilon^{\beta+\gamma} - b\varepsilon^{\gamma} - c\varepsilon^{\beta},$$

cioè

$$OP \doteq a\varepsilon^{\beta+\gamma},\ PQ \doteq -b\varepsilon^{\gamma},\ QR \doteq -c\varepsilon^{\beta}$$

e la O S è uguale alla O R e forma colla O A un angolo A O S = — A O R; (la O P è uguale alla O A e forma l'angolo A O P = $\beta+\gamma$ = A O B + A O C, la Q P è parallela alla O C ed uguale alla O B = b, e R Q è parallela alla O B ed uguale alla O C = c). Sulla base O U si costruiscano i due triangoli isosceli O U V e O U V_2 coi lati O V = U V = O V_2 = U V_2 = O S; e l'angolo ξ = A O K sarà la metà dell'uno o dell'altro degli angoli S O V, S O V_2, e quindi si hanno le due soluzione per le quali

$$OK \doteq OH + OL.$$

Applichiamo lo stesso metodo alla questione proposta dal medesimo Matematico a pag. 64 e risolta in vari modi pag. 71, 105. Siano (fig. 2) O A $\doteq a\varepsilon^{\alpha}$, O B $\doteq b\varepsilon^{-\alpha}$ le perpendicolari abbassate dal dato punto O sulle due rette k e h, e fra queste debba tirarsi la retta K H, che passi par O e abbia la data lunghezza H O + O K = δ. Chiamata ξ l'inclinazione della cenata O A sulla retta, che dimezza l'angolo B O A e che prendesi per l'origine delle inclinazioni, dovrà essere

$$\frac{a}{\cos(\xi-\alpha)} + \frac{b}{-\cos(\xi+\alpha)} = \delta,$$

la qual equazione dà l'equipollenza

$$2a(\varepsilon^{\xi+\alpha} + \varepsilon^{-\xi-\alpha}) - 2b(\varepsilon^{\xi-\alpha} + \varepsilon^{-\xi+\alpha})$$

$$= \delta(\varepsilon^{\xi-\alpha} + \varepsilon^{-\xi+\alpha})(\varepsilon^{\xi+\alpha} + \varepsilon^{-\xi-\alpha})$$

che si sviluppa in

$$\delta\,\varepsilon^{2\xi}-2\left(a\varepsilon^{\alpha}-b\varepsilon^{-\alpha}\right)\varepsilon^{\xi}+\delta\left(\varepsilon^{2\alpha}+\varepsilon^{-2\alpha}\right)-2\left(a\varepsilon^{-\alpha}-b\varepsilon^{\alpha}\right)\varepsilon^{-\xi}$$

$$+\delta\,\varepsilon^{-2\xi}\simeq 0$$

questa è del quarto grado rispetto all'incognita ε^{ξ}; ma nel caso speciale che $b=a$ (e perciò l'intersezione delle rette h e k cada sull'origine delle inclinazioni) essa è *convertibile;* poniamo

$$\varepsilon^{\xi}-\varepsilon^{-\xi}\simeq 2\,i\,\mathrm{sen}\,\xi,$$

e perciò

$$\varepsilon^{2\xi}+\varepsilon^{-2\xi}\simeq 2-4\,\mathrm{sen}^2\,\xi$$

ne risulterà

$$4\,\delta\,\mathrm{sen}^2\,\xi-8\,a\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\xi+4\,\delta\,\mathrm{sen}^2\,\alpha-4\,\delta=0$$

da cui

$$\delta\,\mathrm{sen}\,\xi=a\,\mathrm{sen}\,\alpha\pm\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha+\delta^2\cos^2\alpha};$$

la qual formula si costruisce nel seguente modo: se P sia il punto di mezzo della retta B A sarà $PA=a\,\mathrm{sen}^2\alpha$; sulla O A prolungata si prenda $OD=\delta$, ed abbassata da D la perpendicolare D Q sull'origine della inclinazioni, sarà $OQ=\delta\cos\alpha$, sia $QE\simeq PA$; portata l'ipotenusa $OE=\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha+\delta^2\cos^2\alpha}$ sulla B P A dalle due parti di A in A R, A R′, si tirerano parallelamente alla retta O P Q la R X, R′ X′, che tagliate in X, X′... dal circolo di raggio O D dasanno le direzione O X della retta ricercata.

La questione proposta a pag. 80 e risolta a pag. 94 é troppo facile; encone la soluzione che mi sembra la più spedita. Dal dato punto A (fig. 3) si tiri una retta, che tagli il circolo dato in B e C; col centro C ed il raggio C A si descriva un arco A D, sulla prolungazione della C B A prendasi B E $\triangleq$ C A, e col centro E ed il medesimo raggio si descriva l'arco B D, che tagli il primo nel punto D; sarà A D la lunghezza della tangente che da A potrebbe guidarsi al circolo B C X Y. Sopra una stessa retta sieno A M e A N le rette, che hanno il dato rapporto $m:n$, suppongo $m>n$; con una costruzione analoga alla precedente sia M A $\triangleq$ N Q, M A $=$ M P $=$ Q P, quindi $AP = \sqrt{AM \,.\, AN}$. Sulla A P prendasi A I $=$ A D, e si tirino le rette I X′ e I Y′ parallele rispettivamente alle P M e P N; e che taglino la A N M nei punti X′ Y′, saranno A X′, A Y′ le lunghezze della cercata secante A X e della sua parte esterna A Y tali che $AX:AY = m:n$.

Questione proposta a pag. 128 (fig. 4).

Sulla base F G costruire un triangolo F G X, che abbia l'altezza h e la somma $2a$ dei due lati F X G X. Sulla F G si costruisca il triangolo isoscele F B G con $FB = BG = a$, ed il circolo di centro O, essendo F O $\triangleq$ O G, e raggio $OA = a$, si tagli in N colla retta che sia parallela alla F G e ne abbia la distanza $ah:b$, il punto cercato sarà posto nella N X perpendicolare alla F O G.

Non so se questa soluzione soddisfarà il desiderio dell' Autore.

Nel caso che si conosca invece la differenza (fig. 5)

$$FX - GX = 2.OA$$

si tirerà la O B perpendicolare alla F O G e si farà $AB = OF = OG$, poscia tirata HK parallela alla BA si prenderà $HX = \sqrt{(OK)^2 + (OA)^2}$.

Padova 19 febbraio 1878.

SECÇÃO II

SOBRE UM PROBLEMA DE ANALYSE INDETERMINADA

POR

L. PORFIRIO DA MOTTA PEGADO

PROBLEMA. — *Sendo* N *e* x *dous numeros inteiros, achar todos os valores de* x, *que tornam* $N+x^2$ *quadrado perfeito.*

As soluções inteiras da equação

$$N+x^2=y^2$$

ou

$$N=(y+x)(y-x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

na qual N designa um numero inteiro, contém evidentemente os unicos valores de x, que satisfazem ao problema proposto.

Pelas condições do problema $y+x$ e $y-x$ são dous factores inteiros de N, e designando em geral por P e Q quaesquer dous *factores correspondentes* de N, será

$$P=y+x, \qquad Q=y-x$$

e por consequencia

$$x=\frac{P-Q}{2}, \qquad y=\frac{P+Q}{2} \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Decompondo N em dous factores inteiros P e Q por todos os modos possiveis, e introduzindo nas equações (2) os valores de P e Q correspondentes a cada decomposição, obtem-se todos os systemas de numeros inteiros ou fraccionarios, que satisfazem á equação (1). Querendo, porém, achar unicamente as soluções inteiras da equação (1), como convém ao problema, as equações (2) mostram que sómente devem admittir-se os valores de P e Q, que forem simultaneamente pares ou impares.

Quando N fôr um quadrado perfeito, ha, entre os systemas de factores correspondentes, um que é composto de dous factores iguaes, e ao qual correspondem os valores

$$x=0, \qquad y=N.$$

Esta solução deixa de convir ao problema, embora satisfaça á equação (1) e por isso abstrahiremos d'ella.

A resolução do problema fica, pois, dependente da decomposição de N em dous factores inteiros, desiguaes e simultaneamente pares ou impares, por todos os modos possiveis.

Seja em geral

$$N=A^a.B^b.C^c\ldots H^h.2^k \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

e A, B, C, ... H, numeros primos.

Não sendo $k=0$, a equação (3) representará todos os numeros pares, e os valores de x e y dados pelas equações (2) não poderão ser inteiros, senão quando forem pares os dous factores P e Q correspondentes a cada decomposição de N.

Para se saber portanto, quantas são as soluções inteiras e differentes de zero da equação (1), no caso de N ser par, é preciso determinar o numero de productos de dous factores pares e desiguaes em que é possivel decompôr N.

Ora é sabido que o numero $N=A^a.B^b.C^c\ldots H^h.2^k$ admitte $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)$ divisores impares, e que todos os outros em numero $(a+1)(b+1)\ldots(h+1)k$ são pares.

N'este numero comprehendem-se $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)$ divisores, que são multiplos de 2^k, e que por este motivo têm por correspondentes factores impares. Excluindo estes ultimos divisores fica reduzido a

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)(k-1)$$

o numero de divisores pares de N, que podem convir ás equações (2). Imaginando todos estes divisores pares dispostos por ordem de grandeza, e multiplicando o primeiro pelo ultimo, o segundo pelo penultimo, e assim successivamente, obter-se-ha uma serie de productos todos iguaes a N. E sómente, quando o numero de taes divisores fôr impar, isto é, quando N fôr quadrado perfeito, é que haverá no meio d'aquella serie um factor igual a $\sqrt{N}$, ao qual corresponderá $x=0$. Não contando, pois, com este factor, concluir-se-ha que o numero de decomposições em dous factores pares e desiguaes que se póde obter, quando N fôr par, é

$$p=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)(k-1)\ldots\ldots\ (4)$$

ou

$$p=\frac{1}{2}[(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)(k-1)-1]\ldots\ (5)$$

segundo N não fôr ou fôr quadrado perfeito.

No caso de N ser impar acha-se discorrendo d'um modo similhante, que o numero de decomposições possiveis em productos de dous factores desiguaes é

$$p=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)\ldots\ldots\ (6)$$

se N não é quadrado perfeito, e

$$p=\frac{1}{2}[(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)-1]\ldots \quad (7)$$

se N é quadrado perfeito, suppondo em ambas as hypotheses

$$N=A^a.B^b.C^c\ldots.H^h.$$

A equação (4) mostra que será $p=1$, quando se tiver

$$a=1,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=2$$

ou

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=3.$$

No primeiro caso é $N=A.2^2$, e no segundo $N=2^3$ ou $N=A.2^2$ suppondo $A=2$.

A equação (5) dá $p=1$ quando fôr

$$a=2,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=2$$

ou

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=4$$

isto é, quando se tiver $N=A^2.2^2$ ou $N=2^4$, isto é, igual a $A^2.2^2$ suppondo $A=2$.

Similhantemente se reconhece que a equação (6) dá $p=1$, quando fôr $N=A$, e que o mesmo resultado dará a equação (7) sempre que se tiver $N=A^2$.

Reduzem-se portanto a quatro os casos em que o problema proposto tem uma unica solução, a saber: quando N designa um numero primo, o quadrado d'um numero primo, ou o quadruplo d'um numero primo ou do quadrado d'um numero primo.

Ora, ou N seja numero primo, ou quadrado de numero primo, sempre $N-1$ será divisivel por 2. Logo, se N fôr numero primo ou quadrado de numero primo, o problema tem apenas uma solução, que é

$$x=\frac{N-1}{2}, \quad y=\frac{N+1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Quando N é igual ao quadruplo d'um numero primo, ou do quadrado d'um numero primo, ha effectivamente só dous factores pares e desiguaes, $2A$ e 2 ou $2A^2$ e 2, capazes de dar o producto N, e fazendo na equação (2)

$$P=2A=\frac{N}{2}, \quad Q=2$$

ou

$$P=2A^2=\frac{N}{2}, \quad Q=2$$

conforme se tiver $N=4A$ ou $N=4A^2$, achar-se-ha para ambas as hypotheses

$$x=\frac{N}{4}-1, \quad y=\frac{N}{4}+1 \ldots\ldots\ldots (9).$$

Ha por consequencia quatro casos em que o problema proposto tem uma única solução, mas sómente em dous d'elles o valor de x é metade do numero immediatamente inferior ao numero dado. Estes dous casos são o de N ser primo, ou quadrado de numero primo.

Montferrier (*Dictionnaire des sciences mathématiques*, vol. I) depois de demonstrar que, sendo N um numero primo, ha só o inteiro $\frac{N-1}{2}$, cujo quadrado sommado com N dá outro quadrado, diz que esta propriedade póde servir para descobrir se um numero dado é ou não primo. A precedente deducção mostra que é impossivel distinguir por este meio um numero primo de outro que seja quadrado de numero primo. É comtudo possivel aproveitar a indicação de Montferrier, extrahindo préviamente a raiz quadrada ao numero proposto, e applicando depois o seu processo unicamente aos numeros, que não forem quadrados perfeitos. O processo assim modificado fica exacto, mas póde obrigar a extrahir raizes quadradas a alguns dos numeros, que designámos por y, tornando-o por vezes bastante trabalhoso na pratica do calculo.

As equações (4), (5), (6) e (7) mostram que o problema só deixa de ter solução, quando N fôr igual a 4 ou a 1, ou quando fôr numero par não divisivel por 4.

PRIMEIRA ARITHMETICA IMPRESSA

I. — Estão quasi a completar-se 400 annos, depois que na Europa se imprimira o *primeiro tractado arithmetico*, formando então uma obra especial, popularisada com o nome de *abbaco*.

Eis aqui o titulo d'este escripto curioso: — *Incomincia una pratica molto bona ed utile a chiascheduno che vuole usare l'arte della mercatancia, chiamata vulgarmente l'arte del abbaco.*

II.—Fez-se a impressão em *Treviso*, cidade episcopal da Italia, acabando-se a 10 de dezembro de 1478.

Consta de 62 folhas, sem *paginação*, nem *rubricas*, nem *reclamos*, com 32 linhas por pagina, em caracteres simi-gothicos, n'um formato de 4.º regular.

III.—Em nenhum bibliographo se acha a menção d'esta obra, indicada apenas como especialidade valiosa, nas *Memorie Trevigiane* de *Frederico*.

N'esta collecção prestimosa, na pag. 73, dá-se-lhe como impressor a *Miguel Manziolo*, que foi um dos mais antigos de *Treviso*.

IV. — O exemplar mencionado n'estas *memorias*, extraviou-se infelizmente: e a nenhum dos bibliographos que o procuraram, *com o indefesso Brunet por chefe de cruzada*, foi dado rastrear-lhe os vestigios.

D'aqui nasceu a opinião muito em voga, de que este *abbaco* não era um *escripto real*, mas uma verdadeira *mystificação* bibliographica.

V. — Desde 1859, com a vulgarisação da venda dos livros do erudito mathematico *Libri*, venda começada em 1 de agosto e ultimada em 15 do mesmo mez, verificou-se a existencia real d'esta obra, especimen precioso para a *litteratura mathesiologica*.

No *Catalogo* d'este leilão, effectuado em Londres, onde este honrador da Italia tinha adoecido gravemente, acha-se a descripção respectiva d'este *abbaco,* onde póde ver-se na pag. 53, n.º 470.

VI. — A reimpressão d'este escripto rarissimo, *unico até hoje conhecido em paragem fixa,* seria de certo um serviço valioso, prestado pela mão editorial á *historia das mathematicas.*

Ella pagaria em lucros e galardões as despezas da imprensa: e não daria logar a dizer-se d'ella, o que no *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques,* tom. VII, pag. 53, nos dissera, com razão, o seu coordenador *Terquem:*

«On fait souvent des dépenses excessives, pour des productions qui ne profitent pas à l'esprit humain — pour la valeur d'un centime!»

Braga, 1878.

PEREIRA CALDAS.

NOTICIAS

PLANETAS ULTIMAMENTE DESCOBERTOS

Planeta	Grandeza	Descobridor	Logar	Data
N.º 180	12ª	Perrotin	Toulouse	29 de janeiro de 1878
» 181		Cottenot	Marseille	2 de fevereiro de 1878
» 182	10,5	Palisa	Pola	7 de fevereiro de 1878
» 183	12ª	»	»	8 de fevereiro de 1878
» 184	11ª	»	»	28 de fevereiro de 1878
» 185	10ª	Peters	Clinton	3 de março de 1878

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 9

Calcular por meio da geometria elementar a área lateral e o volume d'uma cunha cylindrica, determinada pela intersecção d'um cylindro de revolução e de dous planos quaesquer, passando por um diametro da sua secção recta.

Basta considerar a cunha cylindrica terminada pelo plano da secção recta, o qual supporemos horizontal, e por um plano obliquo que passe pelo diametro d'essa secção.

Devemos depois inscrever no circulo da base um polygono regular; conduzir pelos seus lados planos verticaes, formando assim um prisma, no qual os planos da base e obliquo cortarão um solido, cujo limite é a cunha dada.

Posto isto sejam (Est. III, fig. 6):

O B, O A os traços verticaes do plano da base e do plano obliquo,

O B o traço horizontal d'um dos meridianos do cylindro,

O D perpendicular a O B no plano da base,

O D B circulo da base,

ab um lado qualquer do polygono,

O m o seu apothema,

mf a ordenada parallela a O D,

E a, E b parallelas a O D e O B e iguaes ás projecções de ab sobre essas duas rectas,

finalmente cd, aa', bb' as porções das verticaes comprehendidas entre m, a, b, e o plano obliquo O A.

A área lateral do solido compõe-se de trapezios $a a' b b'$; as faces das extremidades reduzem-se a triangulos. A área de cada trapezio é $ab.cd$. A área total é pois

$$A = 2\Sigma ab.cd;$$

ora

$$\frac{ab}{aE} = \frac{Om}{Of},\ cd = \frac{AB}{OB} OC = \frac{AB}{OB} Of$$

logo

$$A = 2\Sigma \frac{Om}{Of}.aE.\frac{AB}{OB}.Of = \frac{2Om.AB}{OD}\Sigma aE$$

mas

$$\Sigma aE = OD$$

logo

$$A = 2.Om.AB,$$

no limite $Om = OD$, logo

$$A = 2.OD.AB = 4 \text{ vezes a área do triangulo } ABO.$$

O volume do solido compõe-se de pyramides $Om\, a a' b b'$; o volume de cada uma é

$$\frac{Om.ab.cd}{3}$$

logo o volume total é

$$V = \frac{2}{3}\Sigma Om.ab.cd = \frac{2}{3}\,\frac{\overline{Om}^2 AB}{OD}\Sigma aE = \frac{2}{3}\overline{Om}^2.AB;$$

no limite $Om = OD$, logo

$$V = \frac{2}{3}\overline{OD}^2.AB = 4 \text{ vezes o volume da pyramide de altura } OD$$

e de base OAB.

O calculo integral dá o mesmo resultado.

Com effeito, tomando para eixo dos z o eixo do cylindro, e para plano dos xy o plano da sua base, designemos por $z = tg\,\theta\,.\,x$, $x^2 + y^2 = r^2$ as equações do plano obliquo e do cylindro; vem

$$V = \int\int z\,dx\,dy = \int \frac{tg\,\theta\,x^2\,dy}{2} \int = \frac{1}{2}\,tg\,\theta \int (r^2 - y^2)\,dy$$

$$V = \frac{1}{2}\,tg\,\theta \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3\right]_{-r}^{+r} = \frac{2}{3}\,tg\,\theta\,r^3 = \frac{2}{3}\,\overline{OD}^2\,.\,AB.$$

Desenvolvendo o cylindro, a secção obliqua transforma-se em uma sinusoide, cuja equação é

$$z = r\,tg\,\theta \cos\frac{x}{r};$$

a área pedida é

$$A = \int r\,tg\,\theta \cos\frac{x}{r}\,dx = 2r^2\,tg\,\theta \left[\operatorname{sen}\frac{x}{r}\right]_0^{\frac{\pi r}{2}} = 2\,tg\,\theta\,.\,r^2$$

$$= 2\,OD\,.\,AB.$$

Pedro Amorim Vianna.

QUESTÃO PROPOSTA

Traçar um arco de circulo que faça angulos dados com duas circumferencias concentricas conhecidas.

Pedro Amorim Vianna.

SECÇÃO I

SOBRE O MOVIMENTO D'UM PONTO ACTUADO POR UMA FORÇA PERPENDICULAR AO RAIO VECTOR

POR

F. DA PONTE HORTA

O problema do movimento d'um ponto material que é actuado por uma força perpendicular á recta que lhe é dirigida d'um ponto fixo (raio vector, tomando este ponto por origem), offerece um certo interesse, porque no caso da força variar inversamente com a distancia ao referido ponto, constitue um caso de excepção das superficies de nivel no theorema das forças vivas; caso em que estas se cortam, e por conseguinte em que a velocidade póde não ser a mesma nas differentes passagens do ponto pela mesma superficie. Ao mesmo tempo este movimento é tambem o que adquiriria uma conta de rosario enfiada n'um arame rectilineo inflexivel, estando este animado d'um movimento de rotação uniforme em torno d'um de seus pontos (suppomos o arame sem expessura, e ser a conta um ponto material). Com effeito, o ponto material n'estas condições, é submettido á acção d'uma força perpendicular ao arame, da qual provém o seu movimento de escorregamento sem que haja a menor intervenção de qualquer força centrifuga, como acertadamente observa Mr. Bour, contestando, assim, a errada asserção d'alguns physicos, que citam este movimento como exemplo da existencia da força centrifuga.

É sabido que um ponto material inteiramente livre em movimento, não póde descrever uma curva sem que o actue uma força, cuja direcção seja differente da de seu movimento. Costuma-se, porém, para facilidade do estudo, decompôr a força em duas, uma segundo a tangente á trajectoria igual a $m\frac{dv}{dt}$, e outra normal igual a $\frac{v^2}{\rho}$. A primeira tem sido denominada força tangencial, e a segunda força centripeta. São estas duas forças puramente ficticias na generalidade dos casos. Sómente deixa de o ser a segunda, quando a força que actua o movel for constantemente normal á trajectoria. Será então nulla a componente tangencial, e ter-se-ha um movimento curvelineo, devido á acção d'uma força centripeta *real*, sem que esta denominação implique a ideia d'uma força, passando por um ponto fixo.

Uma força que mudasse constantemente de direcção sem cessar de se conservar tangente a uma curva dada, obrigaria um ponto a descrever uniformemente uma de suas desinvolventes, se a dicta força igual a $m\frac{v^2}{\rho}$ variasse inversamente com o raio osculador d'esta, cuja direcção tem. Se a evoluta da trajectoria, ou involvente de suas respectivas normaes se reduzir a um ponto, cahe-se então no caso particularissimo da trajectoria circular descripta por um ponto, em virtude d'uma força centripeta de grandeza constante, que então passaria por um ponto fixo.

Se o ponto fôr obrigado a descrever uma curva dada, como succederia no exemplo já citado d'uma conta enfiada n'um arame, suppondo este de fórma curvelinea absolutamente invariavel, sem espessura, só resistindo na direcção normal, e a conta reduzida a um ponto material não submettida a força alguma exterior, ter-se-ha realizado n'este movimento curvelineo obrigatorio a hypothese antecedente da acção continua d'uma força centripeta (a resistencia do arame) passando pelos successivos centros osculadores da curva constituida pelo arame; e variando de grandeza inversamente com os mesmos raios osculadores.

Mas o que é a força centrifuga? É uma força igual e contraria á centripeta, e com ella ficticia ou real. A consideração da força centrifuga provém da realidade do principio de Newton *«da reacção igual e contraria á acção.»* Se a força centripeta existe, ella emana da acção d'um ponto A sobre o ponto movel e livre B, e a força centrifuga é a acção contraria de B sobre A. Ou ella é a acção d'uma curva sobre um ponto que obrigadamente a percorre, sem que nenhuma força exterior o actue, sendo a centrifuga a reacção do ponto sobre a curva, força igual e contraria á primeira, e por isso tendo como ella por valor symbolico $\frac{m v^2}{\rho}$.

Estudemos agora o movimento do ponto que é actuado por uma força perpendicular ao raio vector.

É sabido que a trajectoria é plana, tomaremos pois dois eixos n'esse plano, o dos x dirigindo-se do ponto fixo para o ponto d'onde parte o movel, e o dos y perpendicular ao primeiro conduzido igualmente pelo ponto fixo.

Designando por x, y, r e φ as coordenadas, raio vector do movel, e angulo que este fórma com o eixo dos x na epocha t, teremos as seguintes equações do movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{F}\frac{y}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{F}\frac{x}{r} \, \ldots\ldots\ldots \, (1).$$

Deduz-se d'estas equações

$$\frac{x\,d^2x + y\,d^2y}{dt^2} = 0 \, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, (\mathrm{A})$$

mas da equação

$$x^2 + y^2 = r^2$$

deduz-se por duas differenciações successivas,

$$x\,d^2x + y\,d^2y = d\,r^2 + r\,d^2r - d\,s^2;$$

e pondo em logar de $d\,s^2$ o seu valor $d\,r^2 + r^2 d\,\varphi^2$, teremos

$$x\,d^2x + y\,d^2y = r\,d^2r - r^2 d\,\varphi^2$$

e em virtude da equação A

$$\frac{d^2r}{d^2\varphi} = r \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

tal é a equação differencial da trajectoria.

Integrando teremos

$$r = A\,e^{\varphi} + B\,e^{-\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{C.}$$

D'onde

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi} = A\,e^{\varphi} - B\,e^{-\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{D.}$$

Para determinar as constantes, seja r_0 a distancia que vae da origem, sobre o eixo dos x até ao ponto d'esse eixo d'onde parte o movel, teremos

$$r_0 = A + B.$$

Quanto a $\frac{dr}{d\varphi}$ para $\varphi=0$, notaremos que, sendo a força perpendicular a r, o primeiro elemento da trajectoria se faz segundo a força, isto é, perpendicularmente a r, e logo o primeiro dr se obtem por um triangulo rectangulo infinitamente pequeno, em que um dos catectos é $r\,d\varphi$, sendo o angulo opposto o angulo de contacto $d\tau$: d'onde $r=r\,d\varphi.d\tau$, o que mostra ser $\frac{dr}{d\varphi}=r\,d\tau$, isto é, infinitamente pequeno, ou tendo por limite zero.

A equação B para $\varphi=0$, mudar-se-ha em

$$0=A-B;$$

e portanto $A=B=\frac{r_0}{2}$, sendo a equação da trajectoria definitivamente

$$r=\frac{r_0}{2}(e^{\varphi}+e^{-\varphi})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

resultado notavel, por ser a trajectoria independente da natureza da força.

Deduz-se ainda das equações (1)

$$\frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{dt^2}=Fr;$$

d'onde

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}=\int F\,r\,dt=\frac{r^2d\varphi}{dt}\ldots\ldots\ldots (E).$$

Supponhamos

$$F=\frac{a}{r},$$

teremos

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt}=at,$$

ou

$$2\frac{d\lambda}{dt}=at,$$

d'onde

$$\lambda=\frac{at^2}{4} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3).$$

Mostra esta equação que o raio vector descreve arcos que estão entre si como os quadrados dos tempos.

Determinemos o valor que deve ter a força F, para que a velocidade de circulação seja constante.

Faremos

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega \text{ (sendo } \omega \text{ constante)}$$

obter-se-ha

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt}=\omega r^2=\int F.r\,dt;$$

da qual deduziremos por differenciação o pertendido valor

$$F=2\omega\frac{dr}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4).$$

Multiplicando a primeira das equações (1) por $2\,dx$ e a segunda por $2\,dy$, e sommando as equações resultantes obteremos

$$\frac{2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y}{dt^2} = \frac{2\,F\,(x\,dy - y\,dx)}{r} = 2\,F\,r\,d\varphi,$$

d'onde

$$v^2 = 2\int F\,r\,d\varphi.$$

Se fôr

$$F = \frac{a}{r},$$

teremos

$$v^2 = 2\,a\,\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(5).$$

A equação geral das superficies de nivel sendo

$$\varphi = c$$

mostra serem estas superficies linhas rectas que se cortam na origem. É o caso de excepção de que fallamos; effectivamente o quadrado da velocidade cresce sempre, passando na mesma superficie do valor $2\,a\,\varphi$ a $2\,a\,(\varphi + \pi)$, $2\,a\,(\varphi + 2\,\pi)$.

Suppondo agora $F = 2\,\omega\frac{dr}{dt}$, o que corresponde ao caso da circulação uniforme, teremos

$$v^2 = 2\int 2\,\omega\,r\frac{dr}{dt}\,d\varphi = 4\,\omega^2\int r\,dr = 2\,\omega^2 r^2 \;\ldots\ldots \;(6).$$

As superficies de nivel são então circumferencias de circulo, cujo centro commum é a origem das coordenadas. Estas circumferencias são cortadas pela trajectoria debaixo do angulo de 45°, visto que sendo $\omega^2 r^2$ o quadrado da velocidade de circulação, será tambem $\omega^2 r^2$ o quadrado da velocidade de escorregamento e o valor da força será definitivamente $2\omega^2 r$.

N'este caso a trajectoria não é a equação (2), por quanto, nós suppozemos para a determinação das constantes que o movel partia do eixo dos x sem velocidade, o que determinou a relação $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0$, e actualmente, sendo $\frac{r\,d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}$, teremos $\frac{dr}{d\varphi} = r$, e logo $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = r_0$, o que faz que se tenha $A = r_0$ e $B = r_0$, convertendo-se a equação da trajectoria em

$$r = r_0 e^{\varphi} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7).$$

Suppondo $F = \frac{a}{r}$, deduz-se da equação

$$r^2 d\varphi = a\,t\,dt,$$

pondo em logar de r^2 o seu valor em funcção de φ deduzido de (2),

$$r_0^2 (e^{2\varphi} + 2 + e^{-2\varphi})\,dx = a\,t\,dt$$

d'onde

$$t = \frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{e^{2\varphi} + 4\varphi - e^{-2\varphi}}{a}} \dots\dots\dots \quad (8).$$

Tambem se póde obter uma equação differencial entre r e t, no caso de ser F funcção de r ou t.

Das equações B e E obtem-se, com effeito

$$\frac{r^3 d^2 r}{d t^2} = (\int F r \, d t^2),$$

da qual se deduz nas duas hypotheses de $F = \frac{a}{r}$ e $F = 2\omega \frac{dr}{dt}$

$$\frac{r^3 d^2 r}{d t^2} = a^2 t^2 \text{ e } \frac{d^2 r}{d t^2} = \omega^2 r \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Em conclusão. O caso do movimento da conta enfiada n'um arame rectilineo inflexivel, girando este em torno d'um de seus pontos, está tractado nas linhas que precedem. É o caso do ponto livre actuado por uma força $F = 2\omega^2 r$ perpendicular ao raio vector. Nenhuma força centripeta ou centrifuga ahi interveio.

A conta escorrega pelo arame, por que é submettida por este a acção d'uma força perpendicular á sua direcção, tendo por valor $2\omega^2 r$.

É certo que este movimento se póde tractar pela theoria do movimento relativo. Com effeito, suppondo ser o arame um dos eixos coordenados moveis, deduziremos o movimento da conta segundo esse eixo, que designaremos por x, prescindindo de considerar a acção do arame por ser normal ao dicto eixo, e só attenderemos á força apparente de inercia de arrastamento, a qual se deduz, como é sabido, procurando a força (sua contraria) que deveria ser applicada ao ponto para lhe dar, sendo livre, o mesmo movimento que os eixos lhe communicariam, se na epocha t a elles fosse ligada invariavelmente. Essa força teria por valor $\frac{m v^2}{\rho} = m\,\omega^2 x$, vindo a ser a equação do movimento em questão

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \omega x,$$

exactamente identica com a formula (9), obtida pela consideração da força normal, que é a verdadeira força que actua o movel; emquanto que a força centrifuga que figura na fórmula do movimento relativo, não passa d'uma força ficticia, que só apparece como um expediente de calculo e nada mais.

SECÇÃO II

SOBRE UM THEOREMA DA THEORIA DOS NUMEROS

POR

A. Zeferino Candido

Se N *é um numero primo, a equação*

$$N+x^2=y^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

tem uma unica solução:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{N-1}{2} \\ y&=\frac{N+1}{2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2).$$

Com effeito; tira-se de (1)

$$N=(y+x)(y-x) \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

equação, que pela natureza de N, só póde ser satisfeita, fazendo

$$y-x=1$$

$$y+x=N,$$

que dão as soluções (2).

Quando N fôr multiplo, a equação (1) tem, além de (2), uma ou mais soluções; conseguintemente a propriedade, traduzida pelas equações (1) e (2), sendo geral para os numeros primos e exclusiva d'estes numeros, póde servir para o seu reconhecimento.

É claro que este raciocinio, tão logico na sua fórma como verdadeiro nas suas consequencias, não póde ser contradictado por quaesquer deducções, que, partindo de bases mais geraes, se não affeiçoem nas subsequentes restricções ao problema considerado aqui.

Ha um caso muito especial e unico em que a equação (1) tem além de (2) só uma outra solução: é quando N fôr o quadrado d'um numero primo. Vê-se effectivamente, n'este caso que

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=\mathrm{N} \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

é uma nova e unica solução de (1).

Como nem o raciocinio, nem a natureza do problema, nem quaesquer considerações feitas na sua apresentação, excluem similhante solução, claro é que ella vem confirmar o theorema demonstrado, excluindo pela sua existencia o numero considerado da classe dos numeros primos.

Se uma outra analyse feita sobre uma questão diversa, excluiu esta solução, resulta para quem assim procedeu, a necessidade de completar o problema a que quer chegar por um segundo caracter differencial, que tenha por fim distinguir o numero primo dos quadrados d'esta especie de numeros.

Montferrier, a quem se deve o theorema que apresentamos, é que não precisa de similhante correcção, porque não excluiu este caso.

Assim, no processo que Montferrier deduz do theorema demonstrado, deve sempre principiar-se por verificar se o numero proposto é um quadrado, operação extremamente facil, não só em comparação com a serie de operações que a regra total exige, como ainda porque, attentas as condições do problema, apenas será preciso extrahir a raiz quadrada ao numero, quando elle terminar em 1, 9, 5.

NOTICIAS

Passagem de Mercurio por diante do Sol

1878 — maio 6 — Coimbra

Contactos	Tempo medio	Observador
1.° interno	$2^h 40^m 47^s$	Lucas

O annuncio da Ephemeride dava $2^h 41^m,0$.

As nuvens que encobriram o Sol em quasi todo o dia, apenas permittiram que se observasse aquelle contacto.

S. PINTO.

DESCOBERTAS DE PLANETAS

Planeta	Grandeza	Descobridor	Logar	Datas
(186)	11,5	Henry	Paris	6 de abril de 1878
(187)	10	Coggia	Marselha	11 de abril de 1878

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 10

Traçar um arco de circulo que faça angulos dados com duas circumferencias concentricas conhecidas.

Solução

Representemos por (E) e (I) as circumferencias dadas, e por (x) a circumferencia pedida.

Supponhamos o problema resolvido, e seja b um dos pontos em que a circumferencia (x) corta a circumferencia (E); e b' aquelle em que ella corta a circumferencia (I). Se depois tirarmos nos pontos b e b' da circumferencia (x) as tangentes tb e tb', e designarmos por a o ponto em que tb corta a circumferencia (E), e por d' a intersecção de tb' com a circumferencia (I), é claro que, por ser sempre $tb = tb'$, a solução do problema proposto ficará reduzido á solução extremamente simples e geral do seguinte problema:

Sendo dada uma circumferencia (E) *e uma das suas cordas* a b, *achar n'outra circumferencia egualmente dada* (I) *uma corda* b′ d′, *de grandeza conhecida, de modo que o ponto de concurso* t *d'estas duas cordas determine sobre uma d'ellas* a b *um segmento* t b *egual a um dos dois segmentos* t b′, t d′, *que fórma sobre a outra* b′ d′.

Tiremos, pois, por d' uma recta parallela a bb'; representemos por d o ponto em que ella corta a corda ab; e por m e m' respectivamente os pontos medios do segmento bd e da corda $b'd'$, que formam os lados eguaes do trapezio isosceles $bdd'b'$.

A solução do problema *auxiliar* reduz-se então a determinar a circumferencia (y), que toca este segmento e esta corda nos seus pontos medios, ou que toque este segmento no ponto medio e seja tangente a uma circumferencia (I'), involucro das diversas posições da corda da circumferencia (I).

Assim sendo e e i os angulos sob os quaes a circumferencia (x) deve cortar respectivamente as circumferencias dadas (E) e (I), traçaremos na circumferencia (E) uma corda $a\,b$ que a corte sob o angulo e, e na circumferencia (I) a corda $b_1'\,d_1'$, que a corte sob o angulo i; e se, depois d'isto, sobre a corda $a b$, por exemplo, marcarmos o segmento $b\,d$ egual á cordá $b_1'\,d_1'$, e no seu ponto medio m lhe levantarmos uma perpendicular, sobre a qual tomemos o segmento $m\,c$ egual ao raio da circumferencia (I'), e unirmos o seu centro C com o ponto c: a perpendicular levantada ao meio n de Cc cortará $m\,c$ n'um ponto O, que será evidentemente o centro da circumferencia (y), bem como cortará $a\,b$ no ponto t, pelo qual deve passar a corda pedida $b'\,d'$: por conseguinte o centro o da circumferencia (x) achar-se-ha na intersecção de $n\,t$ com a perpendicular $b\,o$ levantada no extremo b da corda $a\,b$.

Discussão

Como o segmento $m c$ se póde tomar tanto para a parte superior como para a parte inferior de $a\,b$, segue-se que para esta posição da corda, ha duas circumferencias (x) e (x') que, passando pelo ponto b de (E), resolvem o problema proposto, quer o segmento $b\,d$ se tome para a direita, quer para a esquerda d'este ponto, como se reconhece immediatamente.

Se considerarmos a outra corda $b\,a_1$, que passa pelo mesmo ponto b, teremos outras duas circumferencias (x_1) e (x_1'), eguaes ás circumferencias (x) e (x'), e symetricamente collocadas a respeito d'estas.

Quando tomarmos arbitrariamente um ponto b_1' da circumferencia (I), acharemos analogamente quatro circumferencias (z), (z') e (z_1), (z_1'), eguaes e symetricas duas a duas; mas que, como sabemos, não são distinctas das dos dois grupos que achamos para cada ponto de (E).

Sendo (E) a circumferencia exterior e (I) a interior, as circumferencias (x) e (x') acham-se situadas do mesmo lado da corda ab; e as circumferencias (z) e (z') ficam situadas de lados differentes.

Vê-se, portanto, que para cada ponto das circumferencias dadas ha sempre quatro soluções eguaes e symetricas duas a duas.

Observação

Como acabamos de ver, o methodo seguido para resolver o problema proposto, é geral, e portanto applicavel mesmo quando as circumferencias (E) e (I) não forem concentricas.

N'este caso os quatro circulos que passam por cada ponto das circumferencias dadas não são eguaes nem symetricos dois a dois, excepto quando estes pontos estão sobre a linha dos centros d'estas circumferencias.

Como, porém, só temos que satisfazer á solução pedida, reservamo-nos para n'outra occasião tractarmos da solução geral, e deduzirmos d'alli algumas propriedades curiosas da figura.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

QUESTÃO PROPOSTA

Calcular elementarmente a área lateral e o volume d'uma cunha conica determinada pela intersecção d'um cône de revolução com dois planos, sendo um d'estes perpendicular ao eixo de revolução.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

SECÇÃO I

NOTE DE GÉOMETRIE DESCRIPTIVE SUR L'INTERSECTION DES SURFACES DE RÉVOLUTION D'UN ORDRE QUELCONQUE

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Dans le cas général, c'est-à-dire, quand les axes de révolution ne concourent pas, la *méthode des sections horizontales* est celle que l'on a l'habitude d'employer pour déterminer l'intersection de ces surfaces, et, en construisant les *projections horizontales* de chaque *couple de sections auxiliaires,* nous aurons autant de points que nous voudrons de la courbe d'intersection demandée. Comme ces sections sont, pour la plupart, des courbes difficiles à construire, nous pouvons encore prendre le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe de révolution de l'une des surfaces, et alors dans celle-ci, les sections étant des cercles, qui se projettent en *véritable grandeur,* nous n'aurons qu'à construire par *points* les projections des sections faites sur l'autre.

Cela posé, nous allons voir que nous pouvons encore résoudre ce problème, en employant, pour *surfaces auxiliaires,* des *surfaces de révolution,* sans que les constructions en deviennent plus difficiles; peut-être même selon nous, cet emploi de telles surfaces les rend-il plus faciles dans certain cas.

Soient, en effet, Σ et Σ' les deux surfaces de révolution; prenons le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe de révolution de la première surface, et le plan vertical parallèle aux deux axes.

Si maintenant nous considérons un parallèle ω de Σ, les points où celui-ci rencontre Σ' sont évidemment des points de l'intersection demandée des deux surfaces. Voyons alors comme nous pourrons construire ces points *sans tracer la courbe* déterminée sur la surface Σ' par le plan du parallèle ω, et sans même recourir à elle, c'est-à-dire, sans employer la méthode des sections horizontales.

Il est clair que, si nous supposons qu'un *cercle* perpendiculaire à l'axe de révolution de Σ' se meut *ayant toujours son centre sur cet axe*, et un *point* de sa circonférence sur la circonférence du parallèle proposé ω, quand ce cercle passera par les points d'intersection, il se confondra avec les parallèles de Σ', qui passent par ces points. Mais la *surface engendrée* par le *cercle mobile* est une *surface de révolution* σ, qui a le *même axe* que Σ', et dont la *génératrice* est le parallèle ω de Σ, que nous avons considéré: donc les parallèles de Σ' qui coupent le parallèle ω sont les parallèles *communs* de Σ' et de σ, lignes d'intersection de ces surfaces.

Ainsi, donc, nous aurons à construire le *méridien principal de* σ; et ses points *communs* avec le méridien principal de Σ', détermineront les *positions des parallèlles* de cette surface, qui rencontrent le parallèle ω, et qui par conséquent donnent des points de l'intersection demandée de Σ et Σ'. De même nous déterminerions des points de l'intersection situés sur l'autre parallèle ω' de Σ; et ainsi nous aurions autant de points que nous voudrions.

Lorsque, dans les surfaces de révolution Σ et Σ' les axes sont *concourants*, le parallèle ω de Σ, tournant autour de l'axe de révolution de Σ', engendre évidemment une *zône sphérique* dans laquelle cette *zône* est la partie *utile;* et c'est effectivement cette surface *auxiliaire* que l'on emploie dans ce cas.

Si les axes de révolution de Σ et Σ' sont *parallèles*, le parallèle ω de Σ, tournant autour de l'axe de révolution de Σ', engendre une *zône plane* limitée par deux cercles concentriques, qui sont *l'enveloppe* du cercle ou parallèle proposé; et alors la surface *auxiliaire* σ se transforme en *un plan*, dans lequel la partie *utile* se réduit à cette zone, ou *couronne circulaire;* et c'est réellement la surface auxiliaire qu'il convient d'employer dans ce cas.

Observation

Quand il s'agit d'obtenir l'intersection des surfaces de révolution du second ordre, il n'y a pas d'avantage à employer la *méthode* générale, que nous venons d'exposer, parce que nous pouvons employer la *méthode de la projection centrale* que nous conduit à trouver l'intersection des surfaces du second ordre quelles qu'elles soient (*), et dont celles que nous considérons maintenant sont des *cas particuliers;* excepté seulement, lorsque les axes de révolution se trouvent dans le *même plan*.

(*) Voyez *Notre mémoire de géométrie descriptive*, publié em 1875.

Additamento á pag. 173

A reducção do annuncio do *Connaissance des temps*, no qual se adopta outro semi-diametro do sol, á posição do Observatorio Astronomico de Coimbra dá $2^h40^m50^s$, que differe ainda menos do tempo da observação.

S. Pinto.

ESTUDO SOBRE O PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 10

POR

F. DA PONTE HORTA

O estudo do problema do sr. Amorim, de que nos occupamos na presente nota, consta de duas partes; na primeira abordamos o problema pela geometria analytica, procurando a construcção graphica dos centros dos circulos secantes, quando se arbitra o ponto de secção em um dos circulos dados, visto que este problema é indeterminado. Na outra, procuramos, egualmente pela geometria analytica, os logares dos centros de todos os circulos secantes; determinando suas equações, de que seguidamente fazemos applicação aos casos particulares que nos pareceram mais importantes.

PROBLEMA.—*Dados dois circulos, determinar um terceiro que corte os primeiros debaixo de angulos dados.*

PRIMEIRA PARTE

Secções feitas pelo mesmo ponto d'um dos circulos dados

Um dos modos de resolver o problema da intersecção de duas circumferencias dadas por uma terceira debaixo de angulos dados, póde derivar do seguinte theorema:

O logar geometrico dos centros dos circulos passantes pelo mesmo ponto, que cortam uma circumferencia dada por um angulo tambem dado, é uma conica.

Por quanto tirando um raio Cy (Est. IV—Fig. 1) na circumferencia dada, e no ponto y da circumferencia uma recta yx que fórme o angulo dado α com o prolongamento do dicto raio, a perpendicular levantada ao meio da recta yM, que une o ponto y com o ponto dado M, cortará yx no centro do circulo, passante por M e y, que intercepta C pelo angulo α. Tirando as rectas Mx e Cx, obteremos dois triangulos Cyx e CxM, dos quaes designando o angulo externo em M do segundo triangulo por φ, as rectas Cy, yx e CM por r, ρ e a, respectivamente, deduzir-se-ha

$$\overline{Cx}^2 = r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos\alpha = a^2 + \rho^2 + 2a\rho\cos\varphi,$$

d'onde

$$\rho = \frac{a^2 - r^2}{2(r\cos\alpha - a\cos\varphi)} \quad (1).$$

Esta equação determina uma conica, de que M é um dos fócos, e cujo eixo focal tem a direcção MC.

Será uma ellipse parabola ou hyperbole, conforme fôr

$$a \lesseqgtr r\cos\alpha.$$

Se tirarmos nova recta yx', formando tambem o angulo α com o prolongamento de Cy, e por conseguinte em posição symetrica com yx a respeito de Cy, obteremos ainda a mesma equação (1), porque esta não muda quando ao valor de α se substitue $360 - \alpha$, o que nos diz que a mesma conica reune os centros dos circulos secantes que aquellas duas direcções determinam.

Se fizermos $\alpha = 90$ na equação (1) teremos

$$\rho = \frac{a^2 - r^2}{-2a\cos\varphi},$$

equação d'uma recta perpendicular a CM (theorema conhecido).

Quando a curva (1) é uma hyperbole, as suas asymptotas têm por equação

$$\cos\varphi = \frac{r\cos\alpha}{a}.$$

As respectivas perpendiculares tiradas pelo ponto M, cortarão a circumferencia C pelo angulo α em quatro pontos P, P', Q, Q', visto que as perpendiculares tiradas ao meio dos segmentos MP, MP', MQ, MQ', as quaes devem conter os centros das circumferencias secantes, encontram a hyperbole no infinito. Logo:

O problema que consiste em cortar uma circumferencia em angulo dado por uma recta tirada de um ponto dado M, é sempre soluvel, se o ponto M está fóra da circumferencia ($a > r\cos\alpha$). Elle é insoluvel, no caso do ponto interior, quando $a < r\cos\alpha$; o que aliás era evidente.

Observaremos ainda que, a cada um dos quatro pontos P, P', Q, Q', corresponde tambem um circulo secante, porque todas as rectas parallelas ás asymptotas, além de concorrerem com estas no ponto infinito da hyperbole, ainda cortam esta curva n'outro ponto.

Podemos sujeitar as circumferencias secantes a cortarem em M por um certo angulo α', qualquer recta que passe por esse ponto.

Seja a recta dada MA; tire-se MT, formando o angulo α' com MA; o centro do circulo pedido estará n'uma recta Mx perpendicular a MT; e como os centros dos circulos secantes de C pelo angulo α estão n'uma conica de que M é fóco, haverá duas soluções.

Se traçarmos nova recta MT', symetrica de MT a respeito de MA, a perpendicular que lhe tirarmos pelo ponto M interceptará a mesma hyperbole em outros dois pontos, que serão centros de dois novos circulos egualmente secantes de C pelo angulo α e da recta MA pelo angulo α', logo:

Toda a circumferencia C', tangente a MA no ponto M, poderá ser cortada por quatro circumferencias debaixo do angulo α', as quaes ao mesmo tempo cortarão a circumferencia C pelo angulo α.

Querendo pois cortar duas circumferencias C e C' com uma terceira pelos angulos dados α e α' respectivamente, tomaremos um ponto M em uma d'ellas, v. gr. em C', uniremos os pontos C e M; tiraremos o raio C' M, e pelo mesmo ponto M duas rectas que formem com o prolongamento d'esse raio, d'um e outro lado, o angulo α', sobre as quaes se acharão os centros dos circulos secantes. Construiremos cada grupo de duas soluções pela formula

$$\rho = \frac{a^2 - r^2}{2r \cos \alpha \pm 2a \cos \beta} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

em que $\beta = 180 - \varphi$, é um dos angulos agudos que a perpendicular a M T ou M T' fórma com M C. A construcção será duplicada, se os angulos β e β' relativos a M T e M T' forem differentes, o que sempre se verificará, excepto quando C M tiver a direcção de M A (tangente á circumferencia C' no ponto M), ou lhe fôr perpendicular. No primeiro caso, as circumferencias secantes são symetricas em relação á circumferencia C; no segundo são symetricas ao mesmo tempo em relação a C e a C'. Esta ultima hypothese é sempre verificada, quando C e C' são concentricas.

N'este caso, substituindo r' em logar de a, e notando que $\beta = \beta' = \alpha'$, teremos

$$\rho = \frac{r'^2 - r^2}{2r \cos \alpha \pm 2r' \cos \alpha'} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

A construcção dos valores de ρ pelas formulas 2 ou 3 é muito facil; ella deriva do theorema de geometria que «o quadrado da perpendicular baixada da circumferencia sobre um diametro, é egual ao producto dos dois segmentos do mesmo diametro.» Projectaremos pois M C sobre M x, a qual projecção augmentaremos e diminuiremos da grandeza $r \cos \alpha$; teremos assim (a contar de M) os dois segmentos $r \cos \alpha \pm a \cos \beta$, cujas grandezas duplicaremos, mantendo-lhe a origem M; e sobre a perpendicular á mesma recta, tirada por M, marcaremos a grandeza $\sqrt{a^2 - r^2}$ (é a grandeza da tangente ao circulo C tirada de M). As circumferencias passantes pelos pontos assim determinados, tendo os respectivos centros na recta M x, nos determinarão os valores de ρ, etc.

Podemos tambem empregar um processo geral, commum ás tres curvas determinadas pela equação (1), traçando previamente as directrises circulares da ellipse e hyperbole, e rectilinea da parabola. Para isso é preciso, com respeito ás duas primeiras, achar a posição do segundo fóco, e grandeza do eixo maior ou transverso; e na ultima a distancia do vertice ao fóco, a qual duplicada dará a distancia do mesmo fóco á directriz.

Deduz-se effectivamente da equação (1), designando por D a distancia entre os fócos, e por D′ a grandeza do eixo maior na ellipse; e trocando estes valores para a hyperbole,

$$D = \frac{r\cos\alpha\,(a^2 - r^2)}{a^2 - r^2\cos^2\alpha}, \text{ e } D' = \frac{a\,(a^2 - r^2)}{a^2 - r^2\cos^2\alpha}.$$

Cada um d'estes valores se obterá pela construcção de uma quarta proporcional, recorrendo ao theorema do triangulo cortado por uma transversal.

Com effeito, traçando duas rectas concorrentes, formando um angulo não muito agudo G C G′ (fig. 2), faremos C G e C G′ eguaes aos maiores segmentos do numerador e denominador de $\frac{(a+r)(a-r)}{(a+r\cos\varphi)(a-r\cos\varphi)}$, a saber, $CG = a+r$, e $CG' = a + r\cos\varphi$; e dos pontos G e G′ para o vertice, e contra o vertice, os segmentos $GA = a - r\cos\varphi$, $G'B = a - r$; tiraremos as rectas A B e G G′, e teremos, como é sabido,

$$GC.G'B.G''A = G'C.G''B.GA$$

d'onde

$$\frac{(a+r)(a-r)}{(a+r\cos\varphi)(a-r\cos\varphi)} = \frac{G''B}{G''A} = \frac{D'}{a} = \frac{D}{r\cos\alpha}:$$

tomando pois $AD = a$ ou $= r\cos\alpha$, e tirando por B a recta B D′ parallela a G″ D, será D D′ = D′ ou = D.

Temos pois a resolver o seguinte problema:

Dados os dois fócos d'uma ellipse ou hyperbole, e o eixo maior ou transverso, achar as intersecções da curva com uma recta dada.

Solução.—Fazendo centro em um dos fócos, e com um raio egual ao eixo maior, ou transverso, traçaremos a circumferencia directriz; e com o centro na recta dada, traçaremos nova circumferencia que passe pelo outro fóco: a corda commum a estas, e a recta tirada pelo mesmo fóco perpendicular á recta dada, determinarão um ponto (centro radical), d'onde tiraremos duas tangentes á circumferencia directriz. Os dois raios d'esta, dirigidos aos pontos de contacto das referidas tangentes, interceptarão a recta dada nos seus pontos communs com a curva. Funda-se este methodo na theoria dos eixos e centro radical.

No caso da parabola, é $a = r \cos\alpha$, e por conseguinte

$$\rho = \frac{r \operatorname{sen}^2 \alpha}{2r \cos\alpha\,(1 - \cos\varphi)}:$$

d'onde se deduz para a distancia do fóco á directriz $D' = \dfrac{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2r \cos\alpha}$.

Este valor póde construir-se com facilidade, e traçando depois a directriz, obter-se-ha a intercepção da parabola com uma recta qualquer, empregando o processo geral anterior. Note-se porém, que, a circumferencia directriz é agora uma recta; traçando pois uma circumferencia que passe pelo fóco, tendo o centro na recta dada, a sua corda commum com a circumferencia directriz será a mesma directriz.

Tiraremos pois pelo fóco uma perpendicular á recta dada, a qual cortará a corda commum (directriz) n'um ponto O. Deveriamos agora tirar d'este ponto O duas tangentes á circumferencia directriz, o que é impossivel. Resolve-se porém esta difficuldade, tirando-as á circumferencia já existente; visto que o ponto O pertence ao eixo radical d'esta circumferencia e da directriz. Achadas as grandezas d'estas tangentes, rebatel-as-hemos sobre a directriz, girando com ellas sobre o ponto O: e d'estes novos pontos obtidos sobre a directriz, equidistantes do referido ponto O, tiraremos os respectivos raios, ou perpendiculares á sua direcção, os quaes vão cortar a recta dada nos seus pontos communs com a curva.

Observaremos ainda que, no problema proposto, visto a recta dada passar pelo fóco, a respectiva perpendicular tirada por esse ponto, será tangente á circumferencia tambem por elle traçada com o centro na recta dada; e por conseguinte a distancia que vae do ponto O, em que ella encontra o eixo radical já determinado, até ao dicto fóco, marcará tambem a grandeza das tangentes que se hão de tirar do mesmo ponto O á directriz.

Caso em que uma das circumferencias dadas é infinita.

Se tivermos não duas circumferencias a cortar por uma terceira, mas sim uma circumferencia e uma recta, a solução será a mesma que no primeiro caso, quando o ponto commum ás quatro circumferencias secantes fôr tomado na recta. Se porém esse ponto commum fôr tomado na circumferencia, a solução será mais simples, reduzindo-se a determinar uma quarta proporcional.

Seguindo a mesma ordem de raciocinios que no primeiro problema, notaremos que, o logar geometrico dos pontos que distam egualmente d'um ponto e d'uma recta, contando estas distancias á recta n'uma direcção dada, não orthogonal, é uma hyperbole.

Com effeito, o ponto dado é um dos fócos d'uma hyperbole, e a recta uma de suas directrizes; visto que girando com essas distancias obliquas parallelamente a si mesmas, até se tornarem perpendiculares á directriz, todas ellas encurtarão proporcionalmente; e de eguaes que eram aos respectivos raios vectores, se tornam todas menores e proporcionaes aos dictos raios vectores, que é a propriedade caracteristica da hyperbole com respeito ás suas directrizes.

Não deixa de ter um certo interesse a determinação da fórma e propriedades d'esta curva, quando ella é definida pela propriedade de serem as distancias obliquas ás directrizes eguaes ás distancias ao fóco.

Limitar-nos-hemos a deduzir os valores dos segmentos rectilineos mais importantes da figura, por ser notavel a fórma simples como todos se exprimem em funcção de tres d'entre elles, Sejam, pois (fig. 3) F o fóco, D E a directriz; F D e F E as direcções das distancias obliquas; e designemos por a, b e d os tres segmentos B F, B E = B D e F E = F D.

É facil reconhecer, que se nos derem o ponto P, pé das distancias á directriz de determinados pontos da curva, se acham estes, tirando as rectas P M e P N, respectivamente parallelas a D F e E F, a recta P F, e a perpendicular ao meio d'ella, cujas intersecções com as rectas PM e PN serão os pontos pedidos M e N.

Se o ponto P se deslocar até cahir em H, intersecção da directriz com a perpendicular a D F tirada por F, a perpendicular ao meio de F H só encontrará no infinito a distancia O H parallela a D F. A recta O H é pois uma das asymptotas da hyperbole: a sua symetrica O H' será a outra asymptota, e o ponto O o respectivo centro.

Dos triangulos similhantes B F H e B E F, e mais triangulos constantes da figura, deduzem-se as seguintes relações

$$BH : BF :: BF : BE$$

d'onde

$$BH = \frac{a^2}{b} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

$$\overline{BH}^2 = BO \times BF$$

d'onde

$$BO = \frac{a^3}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

$$\overline{OH}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{BH}^2 = \frac{a^4 (a^2 + b^2)}{b^4} = \frac{a^4 d^2}{b^4}$$

e logo

$$HO = \frac{a^2 d}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6).$$

Seja A o ponto onde a curva corta a recta F B, será $AQ = AF$, e logo

$$BA : AF :: a : d,$$

d'onde

$$BA + AF : a + d :: BA : a :: AF :: d$$

e portanto

$$BA = \frac{a^2}{a+d} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7),$$

$$AF = \frac{ad}{a+d} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8).$$

$$AO = AB + BO = \frac{a^2}{a+d} + \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^2(d-a)}{d^2-a^2} + \frac{a^3}{b^2},$$

logo

$$AO = \frac{a^2 d}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

e por conseguinte

$$AO = HO.$$

Tirando A L perpendicular a B F, ter-se-ha

$$OL : OH :: OA : OB,$$

d'onde

$$OL = \frac{ad^2}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

$$OF = OA + AF = \frac{a^2 d}{b^2} + \frac{ad(d-a)}{b^2} = \frac{ad^2}{b^2} \dots (11)$$

logo

$$OF = OL, \quad HL = AF, \quad AL = FH = \sqrt{FB.FO} = \frac{ad}{b} \ldots (12)$$

$$BQ:BA::BE:BF,$$

d'onde

$$BQ = \frac{ab}{a+d} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

etc., etc.

Passando agora á questão proposta, substituiremos os valores dos semi-eixos e excentricidade (formulas 6, 11, 12)

$$A = \frac{a^2 d}{b^2}, \; B = \frac{ad}{b} \; \text{e} \; C = \frac{ad^2}{b^2},$$

na equação polar da hyperbole

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A - c\cos\varphi},$$

de que obteremos

$$\rho = \frac{ad}{a - d\cos\varphi}.$$

Esta formula póde tambem deduzir-se directamente como se segue:

Considerando um raio qualquer FM, a respectiva distancia obliqua $MG = FM$, e bem assim a recta MP, perpendicular á directriz, ter-se-ha

$$FM = MG \text{ ou } \rho : MP :: d : a;$$

mas

$$MG = a + \rho\cos\varphi,$$

logo

$$\rho a = d(a + \rho\cos\varphi),$$

e finalmente

$$\rho = \frac{a\,d}{a - d\cos\varphi} \quad (14).$$

Poderiamos resolver o problema proposto pela construcção do valor de ρ determinado por esta equação, que é, como asseveramos, uma quarta proporcional aos segmentos $a - d\cos\varphi$, a e d: mas póde obter-se outra construcção ainda mais facil, observando que dos triangulos similhantes IMD e IFP, se deduz

$$d : \mathrm{FI} :: \rho : \mathrm{FI} - \rho,$$

d'onde

$$d + \mathrm{FI} : \mathrm{FI} :: d : \rho,$$

e finalmente

$$\rho = \frac{d \times \mathrm{FI}}{d + \mathrm{FI}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Esta mesma recta IF encontra a curva em outro ponto M′ (fig. 3) (que approximámos da directriz para não alongar a figura) relativamente ao qual se tem

$$d : \mathrm{FI} :: \mathrm{M'P'} : \mathrm{M'I}, \text{ sendo } (\mathrm{M'P'} = \mathrm{M'F} = \rho),$$

ou

$$d : \mathrm{FI} :: \rho : \rho - \mathrm{FI};$$

d'onde

$$d - \mathrm{FI} : \mathrm{FI} :: d : \rho;$$

e finalmente

$$\rho = \frac{d \times \mathrm{FI}}{d - \mathrm{FI}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Incidentemente observaremos que d'estas duas formulas se deduz, fazendo $\mathrm{FI} = \infty$,

$$\rho = \pm d;$$

o que nos diz que a ordenada que passa pelo fóco é egual a FE.

Esta geração da hyperbole pelas distancias obliquas á directriz, dá logar a uma applicação interessante do methodo de Roberval na determinação das tangentes.

Com effeito, na geração cynematica da curva, a direcção do movimento do ponto m será tambem a da tangente á curva no mesmo ponto. Este ponto póde reputar-se conduzido pelo vector Fm, ou pela distancia mp, obliqua á directriz. No primeiro caso o movimento será considerado como resultante d'um escorregamento mq, segundo mf (parte de mf), e uma rotação em torno de F, pela qual o ponto m percorrerá a recta qs perpendicular a fm. No segundo caso o ponto m executará sobre mp o escorregamento $mq' = mq$ (por ser sempre $mf = mp$), e a translação $q's$, parallela á directriz: e visto que a direcção do movimento resultante é só uma, ella ficará determinada pela recta que unir o ponto m com a intersecção das rectas qs e $q's$.

Como a grandeza do escorregamento é arbitraria, tome-se o vector mF para a representar; então a perpendicular qs será tirada pelo ponto F. O escorregamento na distancia mp é toda esta distancia mp, e logo a translação do ponto m se fará sobre a propria directriz, d'onde:

A tangente á hyperbole em qualquer de seus pontos é a recta que unir esse ponto com aquelle ponto T da directriz em que esta é interceptada pela perpendicular ao raio vector tirada pelo fóco.

Se prolongarmos o vector Fm até encontrar a curva do outro lado, a tangente em o novo ponto m' tambem passará pelo mesmo ponto T, logo:

A directriz da hyperbole é o logar geometrico dos vertices dos angulos circumscriptos, cujas cordas de contacto passam pelo fóco.

(Continúa).

INDICE

Sur la décomposition des fractions rationnelles, pagg. 1, 17, 33, 49, 97, 113.
Noticia sobre Saturno, pagg. 13, 25, 41, 63, 90.
Lettre de M. D. A. da Silva à M. Moigno, pag. 38.
Sobre divisibilidade dos numeros, pag. 57.
Sur les formules de Mr. Frenet, pag. 65.
Sobre a organisação do real observatorio astronomico de Lisboa, pagg. 76, 121.
Sur l'angle d'une courbe avec une droite, pag. 81.
Demonstração do theorema de Mr. Willarceau sobre o tóro, pag. 84.
Noticia sobre Le Verrier, pag. 86.
Sobre um problema de Geometria, pag. 102.
Note sur l'étude de Mr. Jules de la Gournerie à l'égard de la division homographique de deux droites, pag. 117.
Généralisation de la méthode de Mr. Chapuy, pag. 129.
Sobre um problema de Geometria, pag. 133.
Noções elementares sobre a theoria dos determinantes, pag. 138.
Soluzione trovata col metodo delle equipollenze, pag. 145.
Sobre um problema de analyse indeterminada, pag. 150.
Primeira arithmetica impressa, pag. 156.
Sobre o movimento d'um ponto actuado por uma força perpendicular ao raio vector, pag. 161.
Sobre um theorema da theoria dos numeros, pag. 171.
Note de géometrie descriptive sur l'intersection des surfaces de révolution d'un ordre quelconque, pag. 177.
Estudo sobre o problema proposto no n.° 10, pag. 180.
Questões propostas, pagg. 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, 176.
Soluções, pagg. 71, 94, 105, 110, 127, 142, 158, 174.
Noticias, pagg. 112, 126, 157, 173.