SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Suite)

7. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions simples, dont nous avons parlé au n° 4, peut être encore obtenue d'une autre manière, que nous allons exposer.

La fraction proposée est

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}.$$

Divisant le numérateur de cette fraction par $x-b_1$, appelant $\varphi(x)$ le quotient, et remarquant que le reste est $F_1(b_1)$ par un théorème d'Algèbre bien connu, nous avons

$$\frac{F_1(x)}{x-b_1} = \varphi(x) + \frac{F_1(b_1)}{x-b_1}.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $x-b_2$, et appelant $\varphi_1(x)$ le quotient de la division de $\varphi(x)$ par $x-b_2$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)}=\varphi_1(x)+\frac{\varphi(b_2)}{x-b_2}+\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)}.$$

En continuant de même on obtient les égalités suivantes:

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)}=\varphi_2(x)+\frac{\varphi_1(b_3)}{x-b_3}$$

$$+\frac{\varphi(b_2)}{(x-b_2)(x-b_3)}+\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)}$$

$$\frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)}=\varphi_3(x)+\frac{\varphi_2(b_4)}{x-b_4}$$

$$+\frac{\varphi_1(b_3)}{(x-b_3)(x-b_4)}+\frac{\varphi(b_2)}{(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)}$$

$$\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_1(x)}{F(x)}&=\varphi_{n-1}(x)+\frac{\varphi_{n-2}(b_n)}{x-b_n}+\frac{\varphi_{n-3}(b_{n-1})}{(x-b_{n-1})(x-b_n)}+\ldots+\\&+\frac{\varphi(b_2)}{(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_n)}+\frac{F_1(b_1)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)}\end{aligned}\right\}(8).$$

Cette dernière formule résout la question proposée, parceque les numérateurs des fractions qu'y entrent sont constants, et nous avons déjà donné au n° 2 des formules pour décomposer les fractions rationnelles, dont les numérateurs sont constants. Nous devons encore remarquer que les formules précédentes sont applicables dans le cas de $F(x)$ contenir des facteurs égaux; il suffit alors d'y rendre égales celles des quantités $b_1, b_2, b_3 \ldots$ qui correspondent aux facteurs égaux.

Quand le degré de $F_1(x)$ est inférieur de i unités à celui de $F(x)$, quelques unes des quantités $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(b_n)$, $\varphi_{n-3}(b_{n-1}), \ldots$ sont nulles.

Nous ferons encore remarquer que, dans le cas de $F(x)=0$ donner, par exemple, α racines égales à a_1, faisant $b_1=b_2=b_3=\ldots a_1$, et continuant à appeler $a_2, a_3 \ldots$ les autres racines dont les degrés de multiplicité sont $\beta, \gamma, \delta \ldots$, nous aurons en (8) des parcelles de la forme suivante à décomposer:

$$\frac{1}{(x-a_1)^\alpha \quad (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-1} (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-2} (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda},$$

$$\frac{1}{(x-a_1)^{\alpha-3} (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda}$$

....

..

En décomposant la première au moyen des formules (6) du n° 2, on obtient A_1, A_2, A_3, etc., qui sont les numérateurs des fractions dont les dénominateurs sont $x-a_1$, $(x-a_1)^2$, $(x-a_1)^3$, etc.

Après, pour décomposer les autres fractions il n'est pas nécessaire un nouveau calcul, parceque les numérateurs de $x-a_1$, $(x-a_1)^2$, $(x-a_1)^3$, etc., sont: A_2, A_3, A_4... dans la deuxième fraction; ils sont A_3, A_4, A_5, etc. dans la troisième, et ainsi de suite.

Nous allons appliquer cette doctrine à l'exemple déjà considéré au n° 4:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

Nous avons

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)}=x-2+\frac{3}{x-1},$$

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}&=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)x}\\ &-\frac{1}{(x-1)^3(x-2)x}+\frac{3}{(x-1)^4(x-2)x}\end{aligned}\right\}(a).$$

La dernière fraction fut déjà décomposée au n° 3, et nous avons trouvé

$$\frac{1}{(x-1)^4(x-2)x}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{x-2}-\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

donc, par le remarque précédent,

$$\frac{1}{(x-1)^3(x-2)x}=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)x}=-\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}-\frac{\frac{1}{2}}{x}$$

Substituant ces fractions en (a) et faisant les additions nous obtenons:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^4}$$

$$+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}-\frac{\frac{5}{2}}{x},$$

comme au n° 4.

(à suivre).

SOBRE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

POR

LUIZ FELICIANO MARRECAS FERREIRA

Fazer passar por um ponto uma recta tal, que os segmentos determinados pelas suas intersecções com uma curva ou superficie, guardem entre si uma relação constante.

Consideremos em primeiro logar um ponto M, situado no plano d'uma curva Σ; uma recta girando em tôrno d'elle córta Σ n'um ou mais pontos, em cada posição que tomar, e designem-se estes por: a, a', a''...; entre M e Σ, sobre $\mathrm{M}a$, $\mathrm{M}a'$..., marquemos pontos n, n_1... taes que:

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}a}=\frac{\mathrm{M}n_1}{\mathrm{M}a'}=\frac{\mathrm{M}n_2}{\mathrm{M}a''}=\ldots=\lambda$$

sendo λ a relação constante.

Para o outro lado de M marquem-se pontos: n', n'_1, n''_1,... de sorte que:

$$\frac{\mathrm{M}n'}{\mathrm{M}a}=\frac{\mathrm{M}n'_1}{\mathrm{M}a'}=\ldots=\lambda.$$

Obteremos assim duas curvas Σ_1 e Σ', homotheticas de Σ, sendo M o centro e λ a razão de homothecia.

Determinem-se os pontos: i, i_1... em que Σ_1 córta Σ; as rectas $\mathrm{M}i$, $\mathrm{M}i_1$... resolvem o problema, porque a recta movel é cortada pelas duas curvas em segmentos, guardando entre si a relação determinada, e, como os pontos i e i_1 pertencem a ambas, segue-se que os outros pontos: m, m_1... em que Mi, Mi_1... cortam Σ, devem satisfazer á relação constante:

$$\frac{Mi}{Mm}=\frac{Mi_1}{Mm_1}=\ldots=\lambda$$

Determinemos agora as intersecções: i', i'_1... de Σ' com Σ_1 e sejam: n', n'_1... os pontos em que Mi', Mi'_1... cortam a ultima curva, ter-se-ha ainda:

$$\frac{Mi'}{Mn'}=\frac{Mi'_1}{Mn'_1}=\ldots=\lambda,$$

e estas secantes resolvem igualmente o problema.

Vê-se, pois, qual é o processo a seguir, qualquer que seja o numero de pontos, em que a recta movel córta a curva Σ, n'uma determinada posição.

No primeiro caso, os dois segmentos, cuja relação é λ, são subtractivos, e no segundo addictivos.

Este problema póde admittir muitas soluções, uma apenas, ou nenhuma.

No caso de ser Σ uma conica, empregaremos a curva Σ', se o ponto é interior á curva, e Σ_1 se é exterior.

Este processo immediatamente applicavel ao angulo e a todos os polygonos, permitte-nos resolver o seguinte problema:

Dado um ponto no espaço e um cylindro de base qualquer, determinar duas geratrizes, que dividam as secantes tiradas pelo ponto em segmentos, que tenham uma relação determinada.

Faz-se passar pelo ponto um plano qualquer, determina-se a sua intersecção Σ com o cylindro, e os pontos em que Σ_1 ou Σ' cortam Σ, faz-se passar por cada um d'estes a recta movel, e obtêm-se as outras intersecções d'esta linha com a curva. Cada grupo de duas geratrizes passando respectivamente por pontos correspondentes na mesma secante, resolve o problema.

É claro que fazendo passar por M uma recta parallela ás geratrizes do cylindro, esta existirá no mesmo plano com as de cada grupo, que precedentemente obtivemos; logo n'um d'esses planos, uma recta qualquer será cortada pelas duas geratrizes e a parallela tirada por M em segmentos, cuja relação é λ.

Se em logar do cylindro considerarmos um prisma de base qualquer, ou dois planos que se cortem, o processo será ainda o mesmo, devendo a recta, que passa por M, ser parallela ás arestas do prisma, ou á do diedro.

Dada uma superficie qualquer, levaremos pelo ponto diversos planos que a cortem, e applica-se o processo a cada secção.

Quando Σ não fôr uma curva plana, faremos passar por ella um cone tendo o vertice em M, obteremos Σ_1 e Σ'; para haver solução é necessario que as geratrizes dirigidas para as intersecções de Σ_1 ou Σ' com Σ vão ainda cortar esta curva n'outros pontos.

No caso de ser Σ uma superficie, construiremos da mesma sorte, duas outras, que lhe sejam homotheticas, segundo a relação λ, procedendo-se d'um modo analogo ao anterior.

Quando as superficies homotheticas forem de difficil construcção, o que geralmente acontece, a primeira marcha indicada será a menos difficultosa.

No caso de ser Σ uma ellipse e o ponto M existir no seu plano, em vez de construirmos outra ellipse Σ_1 ou Σ', homothetica da primeira, podemos passar do systema proposto a outro mais simples, por uma transformação homologica.

Construiremos uma circumferencia, tomando para diametro um dos eixos principaes da ellipse — considerado agora como eixo de transformação —, o ponto M passa a occupar outra posição, que facilmente se determina, sobre uma perpendicular ao eixo.

Applicando o processo ao ponto e circumferencia, obtêm-se assim as direcções das secantes que resolvem o problema, e vê-se qual a posição que lhes compete no systema primitivo.

Funda-se este processo em que a proporcionalidade, sendo uma propriedade projectiva, subsiste depois da transformação homologica.

SECÇÃO II

NOTA SOBRE AS SOLUÇÕES DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 4 D'ESTE JORNAL

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Como a solução que enviámos ao sr. dr. Francisco Gomes Teixeira, é similhante á solução dada pelo sr. Craveiro Lopes, torna-se inutil a sua publicação. Comtudo não podemos deixar de dizer algumas palavras sobre este assumpto, attendendo ás circumstancias especiaes que se apresentam.

Como sabemos, este celebre problema foi resolvido analyticamente por Pappus, Newton, Gergone, etc., na hypothese das rectas dadas serem rectangulares. Carnot resolveu-o, na hypothese das rectas serem obliquas, empregando o methodo trignometrico, Reynaud e outros geometras empregaram o methodo analytico; e não nos consta que alguem se tenha occupado da solução d'este problema, empregando apenas os recursos da geometria elementar, solução que nos parece ser a mais facil de todas.

Na nossa solução tambem fizemos notar a propriedade indicada pelo sr. Craveiro Lopes, mas não a considerámos em especial, em virtude do que, a este respeito diz Carnot, na sua Geometria de posição no n.º 42, quando resolve o problema *auxiliar* de que tanto o sr. Craveiro Lopes, como nós, fizemos depender o problema proposto.

Entre as differentes maneiras simples de demonstrar directamente esta propriedade, podemos citar a que tem por base provar a igualdade dos triangulos EMD e EOL, o que se vê immediatamente, tirando por L uma recta parallela á corda AB.

Esta propriedade póde ainda ser considerada como uma consequencia do *porisma* CCII de Euclides.

Na nossa solução tambem discutimos os casos em que havia duas, tres ou quatro soluções, considerando os arcos descriptos de E como centro com os raios $EL = ED$ e $EM = ED$.

A figura corresponde ao caso de haver quatro soluções e n'ella é facil de reconhecer que se prolongarmos a recta FO até encontrar a recta AB, e fizermos centro no ponto de encontro, descrevendo o circulo que passa por O, as tangentes tiradas de G a este circulo serão iguaes a GM.

Similhantemente, se fizermos centro no ponto de intersecção de FL e AB, e descrevermos o circulo que passa por L, as tangentes tiradas de G serão iguaes a GD. Além d'isso, estas tangentes aos dois circulos confundir-se-ão duas a duas, tornando-se em tangentes communs exteriores d'estes dois circulos.

Quando descrevermos o circulo com o centro em M e o raio ML, e lhe tirarmos tangentes do ponto G, o circulo descripto d'este ponto como centro e com o raio igual ás referidas tangentes, cortará a recta AB nos mesmos pontos em que a córta o circulo descripto de F como centro e com o raio FL.

Finalmente, tambem se reconhece que estas duas tangentes serão communs ao circulo (M) e ao circulo descripto de F como centro e com o raio FO, sendo uma das tangentes exterior e a outra interior.

Mais tarde tractaremos d'estas propriedades d'uma maneira geral, quando publicarmos o nosso estudo das conicas sob o ponto de vista da sua geração por meio do circulo, e em geral por meio d'outra conica.

O sr. Amorim Vianna seguiu realmente um caminho extremamente curto e elegante, mas não considerou o angulo supplementar, e por isso a sua solução não dá a posição da transversal no caso de ser o segmento m menor do que a perpendicular baixada de C sobre qualquer das duas rectas dadas.

Comtudo, invertendo na figura os dadas, podia chegar a resolver d'uma maneira completa o problema. Agora passo a provar que, apezar dos srs. Craveiro Lopes e Amorim Vianna terem seguido caminhos differentes apparentemente, as soluções não são realmente distinctas, podendo considerar-se como reciprocas.

Com effeito (fig. 4), supponhamos o problema resolvido, e represente $MA'B'$ a transversal, que partindo do ponto M, dado sobre a bissectriz MVV'' encontra as rectas dadas VA' e VB' de modo que seja $A'B'=m$. O circulo $A'VV''B'V'$, circumscripto ao triangulo $A'VB'$, ou que determina o segmento capaz de angulo $A'VB'$, cortará a bissectriz MV n'um segundo ponto V'', que representará evidentemente o extremo do diametro $V'V''$ d'este circulo perpendicular á corda $A'B'=m$.

Assim o circulo $A'B'b'a'$, que tiver este ponto V'' para centro, e cujo raio seja qualquer das duas cordas conhecidas $V''A'$, $V''B'$ do circulo $A'V''B'V'$ determinará os dois pontos A' e B' que dão a direcção da transversal pedida.

Tomemos para incognita VV'', a que chamaremos x, e seja $MV=a$, $V''A'=V''B'=b$. Posto isto, a comparação dos triangulos similhantes $MA'V''$ e $A'VV''$ dá

$$\overline{V''A'}^2=V''V(V''V+VM),$$

ou

$$b^2=x(a+x),$$

logo o circulo (V'') córta orthogonalmente o circulo (O) descripto sobre MV como diametro, ou a tangente $V''t$ a este circulo é igual a b, e por conseguinte, a distancia $OV''=\frac{1}{2}a+x$ é a hypothenusa d'um triangulo rectangulo, cujos cathetos são $tO=\frac{1}{2}a$ e $tV''=b$.

Para construirmos esta grandeza, marcaremos, pois, sobre MV o segmento $Vm'=\frac{1}{2}m$, e levantando-lhe no extremo m' a perpendicular $m'\theta'$, esta determinará sobre VB' o segmento $V\theta'=b$, por ser o triangulo $V m' \theta'$ igual ao triangulo $A' P V''$, e marcando sobre a bissectriz $V V'$ do angulo $A' V B'$ o segmento $V \theta = V \theta'$, o circulo $V'' \theta V_1''$ descripto do ponto O como centro e com o raio $O \theta$, determinará sobre $M V$ o ponto pedido V'', de modo que fazendo centro n'este ponto e com $V \theta'$ ou $V \theta$ como raio descrevendo o circulo (V''), este evidentemente cortará sempre as rectas dadas em dois pares de pontos A', B', a', b', que darão duas posições da transversal que resolvem o problema.

Ora, como o circulo $V'' \theta V_1''$ córta $M V$ n'um segundo ponto V_1'', segue-se que se fizermos centro n'este ponto e com o mesmo raio $V \theta' = V \theta$ descrevermos o circulo (V_1''), este cortará, em geral, as rectas dadas em dois pares de pontos A, B, a, b, que darão mais duas direcções $A B$ e $a b$ para a transversal, e por conseguinte mais duas soluções do problema.

Temos assim provado que as duas soluções podem realmente considerar-se como reciprocas.

Como no triangulo rectangulo $V m' \theta'$ é o catheto $m' \theta'$ igual a $V'' P$, segue-se que, quando fizermos centro em V'' e descrevermos o circulo com o raio igual a este catheto, as duas tangentes $M B'$ e $M b'$ a este circulo, que evidentemente sempre se póde tirar de M, darão duas soluções.

Quando tomarmos o ponto V_1'' para centro d'este circulo as duas tangentes $A B$ e $a b$ que, em geral, se podem tirar de M, darão mais duas soluções.

Teremos assim mais outra maneira de resolver o problema.

Discussão

É claro que o circulo $b A a B$ descripto de V_1'' como centro com o raio $N \theta'$, ou não córta as rectas dadas ou lhe é tangente, ou as córta, conforme fôr respectivamente $V \theta'$ menor, igual ou maior do que a perpendicular $V_1'' \pi'$ baixada de V_1'' sobre $V A$, d'onde resulta que quando se considerar o segmento da transversal dentro do angulo $a V A$, póde deixar de haver salução, haver uma ou duas: logo o problema proposto terá duas, tres ou quatro soluções, segundo fôr $V \theta'$ menor igual ou maior do que a perpendicular $V_1'' \pi'$.

Se considerarmos o circulo de raio $m' \theta'$ reconhecermos de modo analogo que o problema terá duas, tres ou quatro soluções, segundo fôr $m' \theta'$ maior, igual ou menor do que $V_1'' M$.

Observação

Se na nossa figura tirarmos as rectas $b n_1'' B$, $A a$, $A' a'$, $B n'' b'$, as circumferencias $O t'' n_1''$ e $O t' n''$, descriptas sobre os segmentos $O n_1''$ e $O n''$ como diametro, e a circumferencia $M t'' t' V$ terão para cordas communs as rectas $A a$ e $A' a'$ (*).

(*) Vide Methodos em geometria de P. Serret.

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 6

Traduz-se o problema proposto pela equação:

$$a^x+(a+1)^y+(a+2)^z=3\,i.$$

Os restos possiveis da divisão d'um numero qualquer a por 3 sendo

$$0 \quad 1 \quad 2,$$

é claro que no primeiro caso os restos das potencias de a por 3 serão sempre 0.

Se fosse
$$\frac{a}{3}=q+\frac{1}{3}$$
uma potencia qualquer a^n teria ainda o mesmo resto 1.

No terceiro caso, isto é, sendo

$$\frac{a}{3}=q+\frac{2}{3},$$

teriamos as equações

$$\frac{a^{2n}}{3}=q\,a^{2n-1}+\frac{2}{3}a^{2n-1}$$

$$\frac{a^{2n+1}}{3}=q\,a^{2n}+\frac{2}{3}a^{2n}$$

as quaes mostram que se o resto para uma potencia impar qualquer fôr 2, para a par seguinte será 1 e reciprocamente, os valores dos restos serão pois constantemente

$$2 \quad 1 \quad 2\ldots$$

Posto isto, se attendermos a que aos restos 0, 1, 2 de a correspondem

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad \text{em } (a+1)$$

e

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad \text{em } (a+2)$$

teremos

Potencias	Restos		
a^{2n+1}	0 ou	1 ou	2
a^{2n}	0	1	1
$(a+1)^{2n+1}$	1	2	0
$(a+1)^{2n}$	1	1	0
$(a+2)^{2n+1}$	2	0	1
$(a+2)^{2n}$	1	0	1

Ora, considerando unicamente a primeira columna dos restos, observaremos o seguinte:

1.° Que a somma de potencias impares dos tres numeros dá resto nullo;

2.° Que a somma de dois d'elles levantados a potencias impares com o terceiro levantado a potencia par dará o resto 2, se o resto d'este numero fôr tambem 2 e 0 nos outros casos;

3.° Que a somma de dois d'elles levantados a potencias pares com o terceiro levantado a potencia impar dará o resto 0, se o resto d'este numero fôr 2 e nos outros casos o resto 2;

4.° E finalmente, que, se os numeros tiverem todos potencias pares, o resto da sua somma será 2.

O mesmo para as outras columnas.

Como os numeros são tres e as suas potencias ou hão de ser pares ou impares, ou duas d'uma natureza e a terceira d'outra, teremos considerado todos os casos.

Concluiremos, portanto, que a somma das potencias será divisivel por 3, quando forem estas todas impares; quando havendo uma par, o resto da sua base por 3 não fôr 2; e finalmente quando havendo uma impar, o resto da sua base por 3 fôr 2.

LUIZ IGNACIO WOODHOUSE.

NOTICIAS

Novos planetas. — Desde o principio de outubro de 1877 descobriram-se os seguintes planetas:

Um em 1 de outubro por Watson em Ann-Arbor.
Outro em 2 de outubro por Palisa, no observatorio de Pola.
Outro em 14 de outubro por Peters, no observatorio de Clinton.
Outro em 6 de novembro por Henry, no observatorio da París.
Outro em 6 de novembro por Palisa, no observatorio de Pola.
Outro planeta brilhante de primeira grandeza, pelo professor Watson, em Ann-Arbor, no dia 12 de novembro.

Tendo-se porém achado que o segundo d'estes planetas é identico com o (161), ficam elles reduzidos aos cinco descobertos pelos srs. Peters, Henry, Palisa e Watson: 175, 176, 177, 178, 179.

Novo cometa. — Foi descoberto um cometa em 2 de outubro por Tempel.

QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Sendo dadas tres rectas sobre um plano, e concorrendo no mesmo ponto, tirar pelo ponto O d'este plano uma transversal tal, que a parte comprehendida entre este ponto e uma das rectas, seja igual á parte comprehendida entre as outras duas.

Alfredo Schiappa Monteiro.

SECÇÃO I

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Suite)

8. Nous allons maintenant traduire par des formules générales ce que nous venons de dire au n° précédent.

Nous avons

$$\varphi_{i-1}(x) = \frac{F_1(x)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_i)},$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{(i-1)}(x) = B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + B_2 x^{m-i-2} + \dots +\\ + B_{m-i-1} x + B_{m-i}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et nous allons déterminer B_0, B_1, B_2, etc.

On a

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

$$= (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_i)$$

$$\times (B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + \ldots + B_{m-i-1} x + B_{m-i})$$

$$= (x^i - S_1 x^{i-1} + S_2 x^{i-2} - S_3 x^{i-3} + \ldots \pm S_i)$$

$$\times (B_0 x^{m-i} + B_1 x^{m-i-1} + \ldots + B_{m-i-1} x + B_{m-i}),$$

où $S_1, S_2, S_3, \ldots S_i$ représentent la somme de toutes les combinaisons des quantités $b_1, b_2, b_3, \ldots b_i$ prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc.

Mais les coefficients des deux membres de cette égalité doivent être égaux, donc

$$A_0 = B_0$$

$$A_1 = -B_0 S_1 + B_1$$

$$A_2 = B_0 S_2 - B_1 S_1 + B_2$$

$$A_3 = -B_0 S_3 + B_1 S_2 - B_2 S_1 + B_3$$

....

$$A_i = (-1)^i (B_0 S_i - B_1 S_{i-1} + B_2 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_i)$$

$$A_{i+1} = (-1)^i (B_1 S_i - B_2 S_{i-1} + B_3 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_{i+1})$$

$$A_{i+2} = (-1)^i (B_2 S_i - B_3 S_{i-1} + B_4 S_{i-2} - \ldots + (-1)^i B_{i+2})$$

....

$$A_{m-1} = (-1)^i (B_{m-i-1} S_i - B_{m-i} S_{i-1})$$

$$A_m = (-1)^i B_{m-i} S_i$$

La première des équations précédentes donne B_0, la seconde donne B_1, la troisième donne B_2 et ainsi de suite.

On peut obtenir immédiatement les valeurs des quantités B_0, $B_1, B_2, \ldots B_i$ au moyen des formules:

$$B_0 = A_0$$

$$B_1 = A_1 + A_0 S'_1$$

$$B_2 = A_2 + A_1 S'_1 + A_0 S'_2$$

$$B_3 = A_3 + A_2 S'_1 + A_1 S'_2 + A_0 S'_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_i = A_i + A_{i-1} S'_1 + A_{i-2} S'_2 + \ldots + A_0 S'_i$$

où $S'_1, S'_2, S'_3 \ldots$ représentent les sommes des combinaisons des quantités $b_1, b_2, b_3, \ldots b_i$ prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc., pouvant la même quantité entrer plus qu'une fais en chaque combinaison, c'est-à-dire:

$$S'_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_i = S_1$$

$$S'_2 = b^2{}_1 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b^2{}_2 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + \ldots$$

$$S'_3 = b^3{}_1 + b_1 b^2{}_2 + b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les formules précédentes sont applicables au cas de $F(x)$ contenir des facteurs égaux. Il faut alors y rendre égales quelques-une des quantités b_1, b_2, b_3, etc.

Cela posé, pour obtenir $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(b_n)$, $\varphi_{n-3}(b_{n-1}) \ldots$ $\varphi_1(b_3)$, $\varphi(b_2)$, nous ferons dans la formule (9) $i = n, n-1, n-2, \ldots$ 2, 1 et nous y changerons x en x, b_n, b_{n-1}, $b_{n-2}, \ldots b_3$, b_2.

..

Nous allons appliquer maintenant cette doctrine à l'exemple déjà considéré:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

La formule (8), en faisant

$$b_1=b_2=b_3=b_4=1,\ b_5=2,\ b_6=0,\ n=6,$$

donne

$$\frac{F_1 x}{F\ x}=\varphi_5(x)+\frac{\varphi_4(0)}{x}+\frac{\varphi_3(2)}{x(x-2)}+\frac{\varphi_2(1)}{x(x-2)(x-1)}$$

$$+\frac{\varphi_1(1)}{x(x-2)(x-1)^2}+\frac{\varphi(1)}{x(x-2)(x-1)^3}+\frac{F_1(x)}{x(x-2)(x-1)^4},$$

et la formule (9), en y faisant $m=2$ et $i=6, 5, 4, 3, 2, 1,$

$$\varphi_5(x)=0,\ \varphi_4(0)=0,\ \varphi_3(2)=0,\ \varphi_2(1)=0$$

$$\varphi_1(1)=B_0=A_0^2=1$$

$$\varphi(1)=B_0+B_1=A_0+A_1+B_0S_1=-1,\ F_1(1)=3,$$

par conséquent nous obtenons le même résultat qu'au n° 7.

(à suivre).

NOTE SUR L'ÉTUDE DE MR. JULES DE LA GOURNERIE À L'ÉGARD DE LA DIVISION HOMOGRAPHIQUE DE DEUX DROITES (*)

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Comme nous savons, étant données deux droites ua et ua' (Est. I, fig. 1), situées dans un plan, si, d'un point Q, pris arbitrairement sur ce plan, nous menons deux droites QJ et QI, qui leur soient respectivement parallèles, et une sécante quelconque Qaa', nous aurons

$$\mathrm{J}a \times \mathrm{I}a' = \mathrm{QJ} \times \mathrm{QI} = \mathrm{C} \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

ce qui exprime que les points de rencontre des droites données avec la transversale forment deux divisions homographiques; l'origine J étant, sur la droite ua, homologue du point de ua' situé à l'infini, et l'origine I étant, sur la droite ua', homologue du point de ua situé à l'infini. Le point u représente donc deux points homologues réunis.

Si nous prenons pour origine des segments des points arbitraires b et c' l'équation (1) devient

$$(ba - b\mathrm{J})(c'a' - c'\mathrm{I}) = \mathrm{C} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

ou

$$ba . c'a' - c'\mathrm{I} . ba - b\mathrm{J} . c'a' + b\mathrm{J} . c'\mathrm{I} - \mathrm{C} = 0 \ldots (3),$$

(*) Voyez le *Traité de géométrie descriptive* de Mr. Jules de la Gournerie, p. 182.

et si nous faisons

$$-c'\mathrm{I}=\lambda,\ -b\mathrm{J}=\mu,\ b\mathrm{J}.c'\mathrm{I}-\mathrm{C}=\nu$$

nous aurons

$$ba.c'a'+\lambda.ba+\mu.c'a'+\nu=0\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Quand les points J et I se trouvent à l'infini, il en sera de même du point de concours Q, et par suite les droites passant par les points homologues seront parallèles (fig. 2), d'où il résulte que la division sera proportionelle; et ainsi une telle division est donc un cas particulier de la division homographique.

Mr. Gournerie, après avoir fait ces considérations, a ajouté qu'il est facile de voir que l'équation (4) aux segments se présente alors sous la forme

$$\lambda.ba+\mu c'a'+\nu=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5).$$

En supposant donc que Mr. Gournerie est réellement parti de l'équation (3), pour arriver à l'équation (5), nous allons exposer le procédé qui nous avons suivi, et qui nous a paru le plus simple. Si nous faisons coincider le point a avec b l'équation (3) donne

$$b\mathrm{J}.c'\mathrm{I}_4-\mathrm{C}=b\mathrm{J}.c'b'$$

d'où

$$ba.c'a'-b\mathrm{J}.c'a'-c'\mathrm{I}.ba+b\mathrm{J}.c'b'=0\ldots.\ (6).$$

Les triangles semblables $c'\mathrm{I}\mathrm{Q}$ et $c'uc$ donnent

$$\frac{c'\mathrm{I}}{c'u}=\frac{u\mathrm{J}}{uc}$$

d'où

$$c'\mathrm{I}=\frac{c'u}{cu}.u\mathrm{J}.$$

En substituant cette valeur en (6), nous aurons

$$ba.c'a' - bJ.c'a' - \frac{c'u}{cu}.uJ.ba + bJ.c'b' = 0 \ldots \quad (7)$$

donc

$$\frac{1}{uJ}.ba.c'a' - \frac{bJ}{uJ}.c'a' - \frac{c'u}{cu}.ba + \frac{bJ}{uJ}.c'b' = 0 \ldots \quad (8).$$

Telle est l'autre forme que nous pouvons donner à l'équation (3), qui exprime la division homographique.

Cela étant, lorsque le point J passe à l'infini, il sera

$$uJ = \infty \text{ et } bJ = \infty$$

et nous aurons

$$c'a' - \frac{c'u}{cu}.ba - c'b' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

ou, en faisant

$$cu = \lambda_1, \ -c'u = \mu_1, \ -cu.c'b' = \nu_1$$
$$\lambda_1.c'a' + \mu_1.ba + \nu_1 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Cette formule exprime donc la division semblable ou proportionelle.

En effet, la formule (9) pouvant se mettre sous la forme

$$cu(c'a' - c'b') - c'u.ba = 0,$$

il sera

$$cu.b'a' - c'u.ba = 0$$

ou

$$cu.b'a' = c'u.ba$$

donc (fig. 2)

$$\frac{ba}{b'a'} = \frac{cu}{c'u} = \text{constante} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

q. e. d.

Quand le point u passe à l'infini, c'est-à-dire quand les droites sont parallèles (fig. 3), il sera

$$cu = \infty \text{ et } c'u = \infty,$$

donc (form. (11))

$$\frac{ba}{b'a'} = 1 \text{ ou } ba = b'a'$$

et les équations (8) et (9) deviennent

$$c'a' - ba - c'b' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Telle est l'équation qu'exprime la division en des parties égales, ce qui est un cas particulier de la division semblable.

SECÇÃO II

SOBRE A ORGANISAÇÃO DO REAL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LISBOA

POR

A. F. DA ROCHA PEIXOTO

(Continuação)

Além d'estes documentos, que a consciencia publica ha de acceitar com veneração, que valem tudo contra malevolas tentativas, ha ainda a nobre e honrada palavra do general dr. Filippe Folque. No relatorio dos trabalhos executados na direcção geral dos trabalhos geodesicos durante o anno de 1870, relatorio publicado em 1872, escreveu este illustre sabio:

«A fundação do real observatorio astronomico de Lisboa, devida á munificente iniciativa do senhor D. Pedro v, de saudosa memoria, teve por fim satisfazer a urgente necessidade do serviço publico, attender aos interesses da sciencia e do bom nome portuguez, e dotar o paiz e o *mundo scientifico* com um observatorio de primeira ordem, *destinado especialmente ao estudo e adiantamento da astronomia sideral.*»

No seu projecto de organisação do mesmo observatorio, inseriu tambem o dr. Filippe Folque o seguinte artigo:

«O fim principal d'este estabelecimento scientifico, *em conformidade com os desejos* do seu augusto fundador, é o *estudo* *e adiantamento da astronomia sideral, e muito especialmente a determinação das parallaxes annuaes das estrellas, e as observações e estudos sobre a natureza das nebulosas,* e auxiliar finalmente a sciencia nas observações *occasionaes* dos phenomenos do systema solar.»

Testemunho é este de summo valor, tanto pelo caracter d'esta illustração portugueza, como pelas relações intimas e de todos conhecidas, que El-Rei D. Pedro v teve com o seu mestre o dr. Filippe Folque. N'este assumpto, um escripto de tão distincto mathematico vale tanto como se fôra do proprio fundador do observatorio, cuja organisação é necessario fixar-se definitivamente.

Tal era o pensamento de todos, ácerca do fim d'este observatorio, que pela sciencia era reclamado como uma necessidade impreterivel, quando, na sessão legislativa de 1875, o meu excellente amigo, o conselheiro Antonio Rodrigues Sampaio, então ministro do reino, e um dos ministros que mais dedicados têm sido á instrucção publica em Portugal, apresentou ás côrtes uma proposta de lei, que no art. 3.º estabelecia:

«O fim principal do real observatorio astronomico de Lisboa é o adiantamento da astronomia sideral, especialmente no que diz respeito á determinação das parallaxes das estrellas, ao estudo das estrellas multiplas e ao conhecimento da natureza das nebulosas;»

e no art. 4.º:

«Além do objecto principal designado no artigo antecedente, o real observatorio astronomico de Lisboa tem por objectos secundarios, que não podem todavia prejudicar o fim especial da instituição:

«1.º A execução de observações e outros trabalhos tendentes ao adiantamento da astronomia do systema solar, quando pela raridade dos phenomenos a que se referem, ou pelas condições especiaes do observatorio sejam de particular interesse para a sciencia;

«2.º Quaesquer observações que tenham por fim o aperfeiçoamento da geographia, da hydrographia e da navegação, com tanto que não possam prejudicar os trabalhos designados no n.º 1.º d'este artigo;

«3.º A transmissão telegraphica da hora official, contada pelo meridiano do observatorio, ás estações semaphoricas e outros pontos do reino.»

A commissão da instrucção publica da camara dos srs. deputados, esquecendo-se de todos os documentos que deixo citados, das necessidades da sciencia, dos compromissos da nação, emfim do encargo com que havia sido honrada, e como se fôra inspirada unicamente por um especulador industrioso, alterou ambos estes artigos, reduzindo-os ao seguinte:

«Os fins do real observatorio astronomico de Lisboa são:

«1.º O adiantamento da astronomia sideral, especialmente no que diz respeito á determinação das parallaxes das estrellas, ao estudo das estrellas multiplas e ao conhecimento da natureza das nebulosas;

«2.º A execução de todas as observações e outros trabalhos tendentes ao adiantamento da astronomia solar;

«3.º Quaesquer operações que tenham por fim o aperfeiçoamento da geographia, da hydrographia e da navegação;

«4.º A transmissão telegraphica da hora official ás estações semaphoricas e outros pontos do paiz.»

Que motivos determinaram a illustre commissão, na organisação definitiva d'este observatorio, a desvial-o do pensamento do proprio fundador? Por que foi contra os pareceres de tantos sabios e as necessidades da sciencia?

Diz ella que a astronomia sideral é uma parte relativamente pequena da sciencia astronomica! E a mesma commissão realmente duvída de que a astronomia sideral tenha uma importancia social mais larga e interesse scientifico menos limitado do que a solar!

Pois n'essa commissão não haveria um mathematico distincto? Pois o proprio relator pensaria assim? Não póde ser; e, de que assim não é, estão certos todos os que com justiça apreciam e respeitam, como o auctor d'este artigo tem a satisfação de apreciar e respeitar, o relator, deputado tão illustre como distincto professor de mathematica na nossa universidade, o dr. Antonio José Teixeira.

É um erro considerar-se a astronomia sideral uma parte relativamente pequena da sciencia astronomica. Sem a astronomia sideral é impossivel o conhecimento da constituição do universo; não se póde estabelecer a theoria mathematica dos differentes systemas que povoam os immensos espaços da natureza, como as moleculas formam os corpos. As observações sideraes, quando forem completas, precisas e exactas, como hoje as do systema solar, hão de ser a base da mecanica universal da natureza; e d'esta grandiosa sciencia, um dia, será um capitulo relativamente pequeno a astronomia solar, como n'esta é hoje a theoria de qualquer dos planetas. Então, depois de muitas e maravilhosas conquistas do pensamento em tão vastos e remotos dominios da natureza e da lei, poder-se-ha dizer com verdade, que na sciencia astronomica ha uma parte *relativamente pequena;* e será essa parte a astronomia solar. Emquanto fôr verdade o axioma e o todo maior que qualquer das suas partes, a astronomia sideral ha de ser mais importante do que a solar; e com razão ninguem poderá duvidar *que tenha a astronomia sideral um interesse scientifico menos limitado e uma importancia social mais larga do que a astronomia solar,* embora esta reuna *interesses scientificos e praticos de todas as ordens.*

Isto já não é novo; todos o sabem, até as pessoas extranhas á sciencia, que por curiosidade hajam lido os livros de C. Flammarion e artigos por este elegante escriptor de astronomia, publicados em jornaes illustrados. Todos observam que, ha annos, as attenções dos observadores convergem para a astronomia sideral. «É util e curioso desviar os olhos da vida ruidosa do nosso mundo para ir contemplar novas naturezas n'outras espheras» está escripto em linguagem ao alcance de todos.

Não se illuda, pois, quem não se haja dedicado especialmente ao estudo pratico da sciencia astronomica.

Mas o pensamento da commissão será considerar a astronomia sideral menos importante que a solar, por estar menos adiantada? Talvez seja; e francamente parece-me que sim. Devêra então propôr que o fim do real observatorio astronomico de Lisboa fosse *unica* e não *principalmente* a astronomia sideral. Comprehender-se-ia isto; o contrario, porém, é só absurdo para quem não o julgar mais severamente.

Assumptos para muitos e importantes artigos seriam as questões que vivamente occupam hoje os astronomos, para o estudo das estrellas. Basta porém reflectir nos resultados obtidos ácerca das distancias de muitas estrellas ao nosso systema planetario; e meditar no que está descoberto para os movimentos proprios e rotações das estrellas.

«Se Le Verrier não houvesse seguido os movimentos de Urano, não teria antevisto a existencia de uma massa perturbadora, nem daria logar á descoberta, nos confins do systema solar, do planeta que tomou o seu nome, e que tamanha gloria lhe deu a elle, e tão grandes vantagens á sciencia» diz a commissão no relatorio que precede o seu projecto de lei. E com este facto, realmente um dos mais maravilhosos da moderna astronomia, quer ella justificar as *graves duvidas que tem ácerca da preferencia que deva dar-se á astronomia sideral ou solar,* ou antes, fundamentar a importantissima alteração que introduziu na proposta primitiva.

Mas para este facto tem a astronomia sideral dous. Bessel, discutindo as posições das estrellas *Sirius* e *Procyon,* correspondentes a epochas convenientemente escolhidas, descobriu nos movimentos d'estes astros irregularidades, que revelaram a existencia de corpos opacos, de consideraveis dimensões, e de que as duas estrellas podem ser consideradas satellites. Se os movimentos uranianos conduziram Le Verrier á descoberta de Neptuno; pelos movimentos de *Sirius* e *Procyon* chegou o sabio observador de Koenigsberg a descobrir centros escuros de attracção.

Repugna acreditar que a illustrada commissão haja tido o pensamento de reduzir os fins de tão grandioso observatorio aos resultados praticos que immediatamente se possa obter. Fôra essa idêa indigna de homens sinceramente devotados á sciencia.

O que darão as observações sideraes para os usos da vida? A que interesses scientificos conduzirão? Impossivel é responder hoje a esta e a outras perguntas da mesma ordem.

Demais, e emfim, se a illustrada commissão reconhece que a descoberta de Neptuno foi de grandes vantagens para a sciencia, basta lembrar que menos não valem as dos centros escuros de attracção nos mundos sideraes.

(Continúa).

NOTICIAS

Constituição da superficie solar.—O grande astronomo photographo, Mr. Janssen, apresentou em 31 de dezembro á Academia das Sciencias de París uma Nota, na qual diz:—que obteve pela photographia, tornando a duração da acção luminosa convenientemente pequena, imagens solares, que, relativamente ás antigas, constituem um mundo novo.

«As photographias, diz elle, mostram a superficie solar coberta de uma granulação geral. Os grãos têm fórmas muito variadas, mas que se referem mais ou menos á fórma espherica. Onde mesmo a granulação é menos nitida, e onde os grãos parecem estendidos, percebe-se que a esphera foi a fórma primitiva dos elementos, fórma mais ou menos modificada por effeito das forças que actuam sobre estes corpos. Estes elementos são constituidos por uma materia muito movel que cede com facilidade ás acções exteriores, muito analoga á das nossas nuvens atmosphericas. Se a camada solar que fórma a photosphera estivesse n'um estado de repouso e equilibrio perfeito, os elementos granulares deveriam confundir-se uns nos outros, o brilho do sol seria uniforme em todas as suas partes contínuas. Mas as correntes gazosas ascendentes não permittem este estado de equilibrio perfeito. Estas correntes quebram e dividem esta camada fluida em muitos pontos para sahirem: d'ahi a producção dos elementos que não são senão fracções do envolucro photospherico. Estes movimentos, de que a camada gazosa onde nadam os elementos photosphericos é continuamente agitada, preferem certos pontos. A superficie solar é assim dividida em regiões de calma e de actividade relativas, d'onde resulta a producção da rede photospherica. O poder luminoso do sol reside principalmente n'um pequeno numero de pontos da sua superficie. Em outras palavras, se a superficie solar fosse coberta inteiramente pelos elementos granulares mais brilhantes que ella nos mostra, o seu poder luminoso seria, segundo uma primeira approximação sobre a qual teremos a voltar, dez a vinte vezes mais consideravel.»

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 7

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Sendo dadas tres rectas sobre um plano, e concorrendo no mesmo ponto, tirar pelo ponto A d'este plano uma transversal tal, que a parte comprehendida entre este ponto e uma das rectas, seja igual á parte comprehendida entre as outras duas.

Sejam O K, O C, O B as rectas dadas e A o ponto dado (*). Tire-se A B C D parallela a O K.

Tome-se $CD = AB$, e sobre A D como diametro construa-se a semi-circumferencia A E D. Levante-se a perpendicular B E, e sobre AEE' tome-se $EE' = ED$.

Unam-se O e E' e tire-se E F parallela OE' para determinar F sobre A O.

Sobre A O tome-se $OH = AF$ e por H e F tirem-se as parallelas H I, e F G a O K para determinar I e G sobre O C e O B.

A recta pedida será A G I K.

Com effeito

$$\frac{AF}{OF} = \frac{AE}{EE'} = \frac{AE}{ED}$$

logo

$$\frac{AF^2}{OF^2} = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{AC} = \frac{GF \times AO}{OF} \times \frac{OH}{IH \times AO}$$

$$= \frac{GF}{IH} \times \frac{OH}{OF} = \frac{GF}{IH} \times \frac{AF}{OF},$$

(*) Póde-se ir construindo a figura com as indicações dadas.

por ser

$$OH = AF,$$

logo

$$\frac{AF}{OF} = \frac{GF}{IH}.$$

Mas

$$OF = OH + HF = AH,$$

logo

$$\frac{GF}{IH} = \frac{AF}{AH}$$

logo $AGIK$ estão em linha recta e $IK = AG$.

Ainda que o angulo OAE se torne egual a dous rectos, o ponto F sempre se poderá determinar, por isso que AF é uma quarta proporcional entre AE, EE' e AO.

Como $BD = AC$ é sempre maior que AB, sempre será $OH < OF$ e o ponto H nunca poderá coincidir nem passar além de F.

Pedro Amorim Vianna.

QUESTÃO PROPOSTA

Conhecendo a base e a altura d'um triangulo rectilinio, e conhecendo a somma ou a differença dos outros dois lados, construir o triangulo com os unicos recursos da geometria elementar.

C. H. d'Aguiar Craveiro Lopes.

SECÇÃO I

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE M. CHAPUY

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

M. Chapuy, pour déterminer l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, dont les axes ne sont pas dans le même plan, en n'employant que la ligne droite et le cercle (*), recherche la direction commune des plans, qui coupent les deux surfaces suivant des ellipses homothétiques (quand il existe de telles sections) pour les projecter cylindriquement suivant des cercles.

Maintenant, nous allons montrer que cette méthode est aussi applicable à d'autres surfaces de révolution du second ordre.

En effet, comme la projection centrale est toujours applicable à la détermination de l'intersection de deux surfaces du second ordre (**) quelles qu'elles soient, il s'ensuit que nous pouvons

(*) Voyez la *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, tom. II, p. 256; le *Traité de géométrie descriptive*, par L. de Fourcy (quatrième édition), n.° 152, etc.

(**) Voyez *Notre mémoire de géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces du second ordre et des surfaces de révolution.*

aussi considérer les centres variables de projection situés à l'infini, ou employer la projection cylindrique, toutes les fois que les surfaces du second ordre auront simultanément des sections elliptiques homothétiques, pourvu que les constructions générales, pour déterminer la direction commune de ces sections, soient bien faciles: ce qui a lieu en effet dans le cas òu ces surfaces seront de révolution, en recourant aux propositions suivantes:

1.° *Deux surfaces de révolution ont toujours deux plans méridiens parallèles à leurs axes de révolution.*

2.° *Quand deux surfaces du second ordre ont deux points de contact communs, elles s'entrecoupent suivant deux courbes planes,* réelles *ou* imaginaires, *passant par ces points, de telle sorte que la droite d'intersection de ces plans a pour polaire réciproque la droite d'intersectiou des plans tangents aux points de contact considérés* (*).

Considérons donc deux surfaces du second ordre de révolution R et R′, quelles qu'elles soient; et représentons respectivement par P et P′ leurs *plans méridiens parallèles.*

Si maintenant nous imaginons une *troisième surface* R″ *homothétique* à l'une R′ de ces surfaces, et telle qu'elle puisse toucher l'autre R en *deux points donnés t* et *t′*, extrémités d'une *corde tt′ perpendiculaire* aux plans P et P′, il est facile d'apercevoir que, si les deux surfaces R e R″, ainsi tangentes, s'entrecoupent, les sections faites dans ces surfaces, par des plans parallèles à ceux de leurs courbes d'intersection, seront *homothétiques;* et comme d'ailleurs les sections faites dans la seconde surface R′ par ces mêmes plans seront *homothétiques* à celles de la troisième R″, il s'ensuit qu'elles le seront à celles de la première R.

Il en sera de même dans le cas où nous pourrons transporter l'une R′ des surfaces, *parallèlement à elle-même,* jusqu'à ce qu'elle

(*) Voyez le *Traité des Propriétés projectives,* par M. Poncelet, art. 603; la *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique,* tom. III, p. 328 et suivantes, etc.

touche l'autre R en *deux points* t_0 et t_1, extrémités d'une *corde* $t_0 t_1$ perpendiculaire aux deux plans considérés P et P'.

Ces considérations faites, nous allons présenter les procédés généraux pour déterminer la direction commune de ces sections.

Premier cas.—Sur la surface R, déterminons convenablement deux points t et t', extrémités d'une corde $t\,t'$ perpendiculaire aux plans P et P', et cherchons le *cylindre* C *circonscrit* à cette surface le long de la *conique respective* c, qui passe par ces points.

Déterminons un *cylindre* C' *circonscrit* à la seconde surface R' *parallèlement* au premier, et représentons par c' la *conique respective* de contact; puis, menons dans l'espace un *plan* π *perpendiculaire* à ces cylindres, et sur lequel nous construirons les *projections* x et x' de ces coniques de contact c et c'.

Cela posé, déterminons une *conique* x'' *homothétique* à la conique x', et qui ait un *double contact* avec la conique x aux *points* θ et θ', qui représentent les projections des points donnés t et t', et si nous considérons cette troisième conique x'' comme la trace d'un *cylindre* C'' *parallèle* aux deux premiers, il touchera évidemment le cylindre C le long des *génératrices* ou *arêtes* $\theta\,t$ et $\theta'\,t'$, et la surface R aux points t et t': et à la fois il sera circonscrit à la surface demandée R'', suivant la section faite dans ce cylindre par un *plan* conduit par $t\,t'$ *parallèlement* à la conique c'; d'où il résulte que cette surface auxiliaire R'' sera complétement déterminée.

Il est évident que, si les points choisis t et t'' sont des *sommets* des surfaces R et R'', cette dernière surface se trouve immédiatement.

Second cas.— Déterminons la *courbe de contact* c_0 de la surface R avec un *cylindre* C_0 *parallèle* aux plans P et P' et convenablement choisi. Cherchons de même la *courbe de contact* c_1 de la seconde surface R' avec un *cylindre* C_1 *parallèle* au premier C_0, et menons dans l'espace un *plan* π_0 *perpendiculaire* à ces cylindres, sur lequel nous construirons les projections x_0 et x_1 de ces coniques de contact c_0 et c_1.

Donc, si nous pouvons transporter la conique x_1 *parallèlement* *à elle-même* jusqu'à ce qu'elle touche l'autre x_0 en *deux points* θ_0 et θ_1, évidemment situés sur une *sécante* $\theta_0\,\theta_1$ perpendiculaire aux plans P et P', les deux cylindres considérés C_0 et C_1 se toucheront aussi le long de *deux arêtes*, qui passent par ces points de contact θ_0 et θ_1, et lesquelles détermineront, par leur rencontre avec les coniques de contact c_0 et c_1, les *points* t_0 et t_1 suivant lesquels les surfaces donnés R et R' peuvent se toucher.

Il est clair que dans la plupart des cas, ou nous n'avons pas de procédés pour obtenir ce double contact des coniques x_0 et x_1, ou un tel contact n'a pas lieu, et par conséquent il en sera de même des surfaces donnés.

q. e. d.

SOBRE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

POR

Luiz Feliciano Marrecas Ferreira

Dadas tres rectas quaesquer sobre um plano, tirar por um ponto d'este uma transversal que as córte, produzindo dois segmentos descontinuos iguaes.

Sejam: S A, S B, M C as tres rectas, e O′ o ponto dado, que póde existir no exterior, ou interior, do triangulo que formam; não havendo solução alguma, se estiver sobre qualquer das linhas. Consideremos primeiramente o caso de ser externo, como indica a fig. I (Est. II) e imagine-se a hyperbole, de que S A e S B são asymptotas, passando por O′; um dos pontos, em que M C corta a curva, e o dado, definem a recta, que representa uma solução, porque as asymptotas separam segmentos descontinuos iguaes nas cordas da hyperbole.

A recta que estiver mais proxima de O′, e qualquer das outras, constituem as asymptotas d'uma hyperbole, que será sempre cortada pela terceira; podemos construir duas hyperboles distinctas, e haverá por isso duas soluções, ainda no caso, em que as linhas concorram n'um unico ponto.

Supponha-se a hyperbole, de que S A e S B são asymptotas, passando por O′, e vamos obter as intersecções de I C com a curva, a qual se póde considerar meridiano d'um hyperboloide de revolução, sendo A S B o do cone asymptotico. D'este modo resolve-se o problema, recorrendo apenas á linha recta e circumferencia.

Seja T T′, perpendicular á bissectriz do angulo A S B, a linha de terra; as duas geratrizes, que passam por O′, devem existir n'um cone de revolução, e eixo vertical, com uma abertura igual

a A S B; tire-se O' p, parallela a B S; de O, projecção horizontal de O', como centro, com um raio igual a O p, descreva-se uma circumferencia, que será o logar geometrico dos pés das geratrizes, estas projectam-se tangencialmente á circumferencia da góla, que tem o centro em S, e, por esse facto, os seus pés devem existir igualmente na circumferencia, construida sobre S o como diametro. b é um dos pontos de intersecção dos dois logares geometricos. As duas geratrizes projectam-se verticalmente em O' b'; horizontalmente em O b, e na recta symetrica com esta em relação á linha de terra.

Um plano perpendicular ao vertical, tendo por traço sobre este a linha M C, corta o hyperboloide segundo uma ellipse, cujo centro está em (m', m), ponto medio de M N; para determinar o eixo menor construa-se o parallelo de (m', m), que vae cortar a geratriz (O' b', O b) num ponto (a', a), projectando-se horizontalmente na circumferencia descripta de S, como centro, com um raio S a. $m\,m_1$, perpendicular á linha de terra, será o eixo menor.

O outro eixo está sobre M C, e as suas extremidades podem ser obtidas de diversos modos:

— Interceptando as geratrizes pelo plano da ellipse obtêem-se assim dois pontos da curva, qualquer d'elles e o eixo $m\,m_1$ bastam para determinar a projecção horizontal d'esta; este processo é inconveniente, quando os pontos estiverem muito proximos dos extremos do eixo procurado, porque se torna confuso;

— Recorrendo á propriedade de serem homotheticas as secções, feitas por um plano no hyperboloide e cone respectivo; d'este modo determina-se o parallelo do cone, que passa por (m', m), e a corda $m\,g$, perpendicular a T T', será o eixo menor da ellipse, produzida no cone pelo plano secante, r será a projecção d'um dos extremos do eixo maior; tirem-se pois $g\,r$ e $m_1\,r_1$, parallela a $g\,r$; será r_1 a projecção horizontal de I, extremo do eixo projectado sobre M N, e que se desejava obter;

— A secção produzida no hyperboloide é igual a uma outra parallela, feita no cone, o centro d'esta existe na recta S m'; cortando pois o cone por um plano perpendicular ao vertical, que tenha por traço sobre este aquella recta, obteremos duas geratrizes do cone, e determinamos os pontos d'ellas, separados por uma corda horizontal de grandeza $2\,m\,m_1$, que supporemos projectados verticalmente em m''; tira-se por este ponto uma parallela a MN, e determinam-se as intersecções com SA e SB; projectando horizontalmente um d'estes pontos e m'', será a distancia entre as duas projecções igual a mr_1.

O segundo d'estes processos é o mais simples, ficando r_1 bem determinado.

Conhecido I será O'I uma das transversaes, que resolvem o problema, obtendo-se as outras soluções por um modo analogo.

Se MN fosse dirigida para S, dentro do angulo supplementar de ASB, o plano MN não cortaria o cone; em tal caso podemos recorrer ao primeiro, ou terceiro, dos processos indicados; sendo a recta MN parallela a uma recta, que, passando por S, exista dentro do angulo ASB, se encontrar a curva, ser-lhe-ha tangente.

Dadas tres rectas: A, B, C e um ponto O' no interior do triangulo por ellas formado, substituiremos A por A', parallela á primeira e á mesma distancia de O', ficando este ponto no exterior do triangulo assim formado. Como é facil de ver, ha uma solução em cada transversal, que resolve o problema no novo triangulo, ou duas soluções para este. Podendo constituir-se tres triangulos distinctos, haverá portanto seis soluções, e este numero subsiste, ainda no caso de passar a parallela pelo vertice opposto á linha correspondente.

Applicando ao primeiro caso este processo reconhece-se que o numero das soluções se eleva a quatro.

Entre os problemas, cujas soluções derivam immediatamente da proposta, citarei os seguintes:

1.° — Achar as intersecções d'uma recta com uma hyperbole, determinada pelas asymptotas e um ponto, sem construir a curva; ou determinar os pontos, em que a tangente é parallela a uma recta dada.

Recorre-se á propriedade, de serem as tangentes, nos extremos d'um diametro, parallelas ao conjugado d'este; dividindo um diametro, em partes iguaes, todas as cordas parallelas ao seu conjugado.

2.° — Dado um angulo, determinar a posição, que deve ter uma secante, parallela a uma recta dada, para que o triangulo, que elle constitue com os lados do angulo, seja equivalente ao produzido por outra secante.

A tangente na hyperbole determina com as asymptotas um triangulo de área constante; considerando pois a segunda recta, como tangente a uma hyperbole, de que os lados do angulo são asymptotas, o ponto medio d'esta tangente pertencerá á curva; conhece-se a direcção que deve ter a outra tangente e recahimos por isso no caso anterior.

3.° — Dado um angulo NFE, (fig. II) determinar uma linha AD, parallela a uma recta dada, que, interceptando BE, forme dois triangulos ABC e CDE, que sejam equivalentes.

Os triangulos AFD e BFE serão equivalentes, e o problema reduz-se ao anterior.

4.° — Dado um trapesio, cortal-o por uma recta, parallela ás bases, de modo que os dois triangulos formados sejam equivalentes.

Na figura II tirem-se BM e EN, parallelas, será BMNE um trapesio; recahimos assim no caso precedente.

5.° — Dado um parallelogrammo ABMC (fig. III), em que AM é uma diagonal, construir outro sobre AB e AC, equivalente ao primeiro, tendo uma das suas diagonaes a direcção AM′.

O ponto medio da diagonal BC deve estar sobre AM, e o de B′C′ — diagonal correspondente no segundo parallelogrammo — sobre AM′; sabe-se que, tirando pelo ponto medio do segmento da tangente, comprehendido entre as assymptotas, parallelas a estas linhas o parallelogrammo assim formado tem uma área constante — metade da correspondente ao triangulo, determinado pela tangente — podemos pois considerar BC e B′C′, como tangentes da mesma hyperbole.

A direcção de B′C′ é conhecida, tomando um ponto sobre qualquer dos lados do angulo CAB, e, construindo uma parallela ao outro lado, que divida ao meio as transversaes, para elle tiradas pelo ponto; obtem-se a intersecção d'esta parallela com AM′, junctando o ponto, tomado arbitrariamente, com a intersecção, conhece-se assim a direcção, a que B′C′ deve ser parallela.

6.° — Construir um hyperboloide de revolução, conhecendo um meridiano do cone asymptotico e um ponto da superficie.

Determinam-se, como na fig. I, as geratrizes que passam pelo ponto, será S*b* o raio do circulo da góla, que vae cortar a linha de terra nos vertices do meridiano da superficie.

Dada uma recta no plano do meridiano, podemos-lhe achar as intersecções com a superficie, sem construir aquelle; não existindo a linha n'um meridiano, podemos tirar por ella um plano perpendicular ao vertical, determinam-se os eixos da secção, que este produz na superficie, e o problema estará reduzido a determinar as intersecções d'uma recta com uma ellipse, ou hyperbole, cujos eixos são conhecidos, e qualquer d'estes problemas já se resolveu.

Podemos ainda determinar os pontos da superficie, em que o plano tangente seja parallelo a uma recta, ou plano dado, empregando tão sómente nas construcções a linha recta e a circumferencia.

Substituindo qualquer das tres rectas por uma curva arbitraria, construiremos uma hyperbole, e cada um dos pontos, em que a conica é interceptada pela outra curva, fornece uma solução, quando situado do lado opposto a O' em relação ás asymptotas.

Se considerarmos O', uma conica C, e uma curva arbitraria Σ faremos passar por O' outra conica homothetica e concentrica com C; as transversaes, tiradas por O', são cortadas em segmentos descontinuos iguaes por C e C'; determinam-se pois as intersecções de C' com Σ, e d'estas se escolherão as que resolvem o problema, se for possivel o resolver-se.

Sendo C uma superficie de segunda ordem, constroe-se a homothetica C', e determinam-se-lhe as intersecções com Σ, que póde ser uma curva, ou superficie.

Só o exame de cada caso particular indicará, se o problema póde ser resolvido e o numero de soluções.

SECÇÃO II

NOÇÕES ELEMENTARES SOBRE A THEORIA DOS DETERMINANTES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

O objecto do presente artigo é a exposição da parte elementar da importantissima theoria dos determinantes e suas applicações mais simples.

1. *Definição de determinante.*—Consideremos as quantidades

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n \\ b_1,\ b_2,\ b_3\ \ldots\ b_n \\ c_1,\ c_2,\ c_3\ \ldots\ c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots\ u_n \end{array}\right\}\ (1),$$

sendo o numero das linhas igual ao das columnas.

Multipliquemos as que estão na diagonal, o que dá

$$a_1 \ b_2 \ c_3 \ldots u_n \quad (2)$$

e depois permutemos de todos os modos possiveis todos os indices, sem alterar a ordem das lettras. Aos productos que provêm de (2) por um numero par de permutações dê-se o signal +, e aos que provêm de (2) por um numero impar de permutações dê-se o signal —. O resultado obtido chama-se um *determinante.*

Esclareçamos esta definição por alguns exemplos.

Se forem dadas as quantidades

$$a_1, a_2$$

$$b_1, b_2$$

virá

$$a_1 \ b_2$$

e permutando os indices

$$a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

que é um determinante.

Se tivermos as quantidades

$$a_1, a_2, a_3$$

$$b_1, b_2, b_3$$

$$c_1, c_2, c_3$$

vem

$$a_1 \ b_2 \ c_3.$$

Mas as permutações dos indices tres a tres são

1, 2, 3; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 2, 1; 3, 1, 2; 1, 3, 2;

logo vem

$$a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2.$$

O modo como se devem effeituar as permutações dos indices

$$1, 2, 3, 4 \ldots n$$

é fazer passar o 1 por todos os logares da esquerda para a direita, depois fazer o mesmo ao 2, ao 3, etc. D'este modo basta depois dar aos termos do determinante alternativamente os signaes + e —, sem ser necessario ver por quantas permutações derivaram da diagonal de (1). Com effeito, por este processo, permutam-se de cada vez só dous indices entre si, e o signal deve por isso mudar.

Tomemos como exemplo o determinante em que o producto dos termos da diagonal é

$$a_1\, b_2\, c_3\, d_4.$$

Fazendo as permutações dos indices pela regra precedente, virá, fazendo primeiro passar o 1 por todos os logares,

$$1, 2, 3, 4;\ 2, 1, 3, 4;\ 2, 3, 1, 4;\ 2, 3, 4, 1;$$

fazendo depois na ultima permutação passar o 2 por todos os logares,

$$3, 2, 4, 1;\ 3, 4, 2, 1;\ 3, 4, 1, 2;$$

fazendo agora passar o 3 na ultima permutação por todos os logares,

$$4, 3, 1, 2;\ 4, 1, 3, 2;\ 4, 1, 2, 3;$$

e, fazendo o mesmo ao 4,

$$1, 4, 2, 3;\ 1, 2, 4, 3;\ 1, 2, 3, 4.$$

Vem, pois, rejeitando a ultima permutação que coincide com a primeira, o determinante:

$$\begin{aligned} & a_1 b_2 c_3 d_4 - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 \\ & + a_3 b_2 c_4 d_1 - a_3 b_4 c_2 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_4 b_3 c_1 d_2 \\ & + a_4 b_1 c_3 d_2 - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_2 c_4 d_3. \end{aligned}$$

Designam-se os determinantes do modo seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1, a_2 \ldots a_n \\ b_1, b_2 \ldots b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1, u_2 \ldots u_n \end{vmatrix}$$

ou mais simplesmente

$$(a_1\, b_2\, c_3 \ldots u_n).$$

Para verificar que não esqueceu algum termo do determinante, deve attender-se a que o numero d'elles é igual ao das permutações de n letras, isto é

$$[n \mathrm{P} n] = 1.2.3\ldots(n-1)\,n,$$

e, que realisando-as pelo processo anterior, deve chegar-se á permutação de que se partiu.

(Continúa).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 8

Conhecendo a base e a altura d'um triangulo rectilineo, e conhecendo a somma ou a differença dos outros dous lados, construir o triangulo com os unicos recursos da geometria elementar.

Tirem-se duas rectas parallelas A B e C D, que distem entre si d'uma grandeza igual á altura α do triangulo pedido, e sobre A B marque-se o segmento ab igual á base dada β d'este triangulo.

Se agora fizermos centro n'um dos extremos b da base ab, e descrevermos uma circumferencia (b), com o raio igual á somma Σ ou á differença δ dos outros dous lados do triangulo, é facil de ver que a determinação do terceiro vertice depende da resolução muito simples do seguinte problema:

Achar um circulo tangente a um circulo dado (b), *que passe por um ponto dado* a, *e cujo centro esteja situado sobre uma recta igualmente dada* C D (*).

Faça-se, pois, centro n'um ponto c de C D e descreva-se, com o raio ca, um circulo (c), que córte o circulo (b) em dous pontos s e s'. Do ponto a baixe-se uma perpendicular sobre a recta C D, que determinará sobre a circumferencia (c) uma corda que representaremos por $a a_1$, cujo ponto médio m é evidentemente a sua intersecção com aquella perpendicular.

Seja a_2 o ponto de intersecção das cordas ss' e aa_1; a' e a'' os pontos em que, em geral, a circumferencia descripta sobre $a_2 b$,

(*) Vide *Applications d'analyse et de géométrie*, par Mr. Poncelet.

como diametro, córta a circumferencia (b); então os raios $b\,a'$ e $b\,a''$ interceptam C D em dous pontos, que representarão respectivamente as vertices v e v_1 de dous triangulos que resolvem o problema. Com effeito, o centro do circulo procurado devendo achar-se sobre a recta C D, e passando este circulo pelo ponto a terá $a\,a_1$ para corda, logo

$$a\,s\,.\,a\,s' = a_2\,a_1\,.\,a_2\,a = \overline{a_2\,a'}^2 = \overline{a_2\,a''}^2$$

o que prova que os circulos pedidos $a\,a_1\,a'$ e $a\,a_1\,a''$, passando por a, tocam o circulo (b) respectivamente em a' e a''.

Discussão

Consideremos em primeiro logar o caso de ser dada a somma Σ dos dous lados do triangulo, e sejam d e d' os pontos de intersecção do circulo (b) com a recta $a\,m$.

É claro que segundo fôr $\frac{1}{2}\,d\,d'$ ou $\sqrt{\Sigma^2 - \beta^2}$ maior, igual ou menor do que $a\,a_1$ ou $2\,\alpha$, assim o problema terá duas, uma ou nenhuma solução.

No caso de ser dada a differença δ dos lados, é tambem facil de reconhecer que haverá sempre duas soluções emquanto fôr $b\,a'$ ou δ menor do que $a\,b$ ou β.

Se fôr de $\delta = \beta$, então os circulos (v) e (v_1), confundindo-se com a corda $a\,a_1$, os seus centros achar-se-ão a distancia infinita, e os lados do triangulo confundir-se-ão com a recta A B.

Para $\delta > \beta$ é claro que não haverá solução.

Nota

É facil de ver que o logar geometrico dos circulos que passam por a e são tangentes ao circulo (b), pertencem a uma ellipse ou hyperbole, segundo fôr o raio do circulo (b) igual a Σ ou a δ.

Estas curvas terão para fócos os pontos a e b.

Assim o problema auxiliar que empregamos, conduz-nos á resolução do seguinte problema, empregando apenas os recursos da geometria elementar:

Sendo dados os eixos d'uma ellipse ou hyperbole, determinar a sua intersecção com uma recta qualquer, sem traçar estas curvas (*).

Quando em vez do circulo (b) tivermos uma perpendicular levantada em b sobre ab, os centros dos circulos que forem tangentes a esta perpendicular e passarem por a, pertencem então a uma parabola, tendo este ponto para fóco; e as construcções serão mais faceis, por ser um caso particular do problema auxiliar (**).

No caso da hyperbole ser dada por um ponto e pelas suas asymptotas, podemos achar tambem a sua intersecção com uma recta qualquer, sem construir a curva, empregando a geometria elementar, recorrendo á solução do problema seguinte:

Sendo dadas tres rectas situadas d'uma maneira qualquer n'um plano, tirar por um ponto d'este plano uma transversal, de modo que a parte d'esta comprehendida entre o ponto e uma das rectas, seja igual á parte comprehendida entre as outras duas.

O problema que propozemos no n.º 7, é um caso particular d'este, tambem mui facil de resolver.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

(*) Vide *Applications d'analyse et de géométrie*, par Mr. Poncelet.
(**) Vide o referido *Tratado* de Mr. Poncelet.

QUESTÃO PROPOSTA

Calcular por meio da geometria elementar a área lateral e o volume d'uma cunha cylindrica, determinada pela intersecção d'um cylindro de revolução e de dous planos quaesquer, passando por um diametro da sua secção recta.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

SECÇÃO I

SOLUZIONE TROVATA COL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

DAL

PROF. G. BELLAVITIS

Una questione alquanto più generale di quella proposta nel *Jornal de Sciencias Mathematicas,* Coimbra 1877. I. pag. 112, e risolta a pag. 127 mi occorse nella ricerca di alcune curve; il metodo delle equipollenze me ne offrì spontaneamente la seguente soluzione. Dati in un piano un punto O e tre rette k, h, l condurre la trasversale O H L K in modo che la O H sia equipollente (cioè uguale, parallela e diretta nello stesso senso) alla L K (fig. 1).

La retta k sia data mediante la perpendicolare $\mathrm{OA}=a$ abassate su di essa dal punto O; similmente O B perpendicolare alla h abbia la lunghezza b e formi colla O A (presa per origine delle inclinazioni) l'angolo positivo $\mathrm{AOB}=\beta$; pertachè nel metodo delle equipollenze si scriverà

$$\mathrm{OA} \simeq a,\quad \mathrm{OB} \simeq b\varepsilon^{\beta};$$

così pure la O C perpendicolare sulla retta l abbia la lunghezza c e l'inclinazione γ, cioè sia

$$\mathrm{OC} \simeq c\varepsilon^{\gamma}.$$

Se la retta ricenata OHLK abbia l'inclinazione ξ (intendasi sempre sulla O A) sarà

$$\mathrm{OK} \simeq \frac{a}{\cos \xi}, \quad \mathrm{OH} \simeq \frac{b}{\cos(\xi-\beta)}, \quad \mathrm{OL} \simeq \frac{c}{\cos(\xi-\gamma)},$$

e la condizione del problema sarà datta dall'equazione

$$a \cos(\xi-\beta) \cos(\xi-\gamma) = b \cos \xi \cos(\xi-\gamma) + c \cos \xi \cos(\xi-\beta),$$

la quale, osservando che $2 \cos \xi = \varepsilon^{\xi} + \varepsilon^{-\xi}$, si sviluppa nel equipollenze

$$\left(a\varepsilon^{-\beta-\gamma} - b\varepsilon^{-\gamma} - c\varepsilon^{-\beta}\right)\varepsilon^{2\xi} + \left(a\varepsilon^{\beta+\gamma} - b\varepsilon^{\gamma} - c\varepsilon^{-\beta}\right)\varepsilon^{-2\xi}$$

$$\simeq -2a\cos(\beta-\gamma) + 2b\cos\gamma + 2c\cos\beta,$$

che noi paragoneremo termine a termine coll'equipollenza identica

$$\mathrm{OV} + \mathrm{VU} \simeq \mathrm{OU}$$

e costruiremo nel seguente modo: sulla O A si prenda la somma algebrica

$$-2\cos(\beta-\gamma) + 2b\cos\gamma + 2c\cos\beta \simeq \mathrm{OU}$$

e sia

$$\mathrm{OV} \simeq \mathrm{OS}.\varepsilon^{2\xi}, \quad \mathrm{VU} \simeq \mathrm{OR}.\varepsilon^{-2\xi},$$

la O R essendo la *somma geometrica* delle retta

$$a\varepsilon^{\beta+\gamma}-b\varepsilon^{\gamma}-c\varepsilon^{\beta},$$

cioè

$$OP \doteq a\varepsilon^{\beta+\gamma},\ PQ \doteq -b\varepsilon^{\gamma},\ QR \doteq -c\varepsilon^{\beta}$$

e la O S è uguale alla O R e forma colla O A un angolo A O S = — A O R; (la O P è uguale alla O A e forma l'angolo A O P = $\beta+\gamma$ = A O B + A O C, la Q P è parallela alla O C ed uguale alla O B = b, e R Q è parallela alla O B ed uguale alla O C = c). Sulla base O U si costruiscano i due triangoli isosceli O U V e O U V_2 coi lati O V = U V = O V_2 = U V_2 = O S; e l'angolo ξ = A O K sarà la metà dell'uno o dell'altro degli angoli S O V, S O V_2, e quindi si hanno le due soluzione per le quali

$$OK \doteq OH + OL.$$

Applichiamo lo stesso metodo alla questione proposta dal medesimo Matematico a pag. 64 e risolta in vari modi pag. 71, 105. Siano (fig. 2) O A $\doteq a\varepsilon^{\alpha}$, O B $\doteq b\varepsilon^{-\alpha}$ le perpendicolari abbassate dal dato punto O sulle due rette k e h, e fra queste debba tirarsi la retta K H, che passi par O e abbia la data lunghezza H O + O K = δ. Chiamata ξ l'inclinazione della cenata O A sulla retta, che dimezza l'angolo B O A e che prendesi per l'origine delle inclinazioni, dovrà essere

$$\frac{a}{\cos(\xi-\alpha)}+\frac{b}{-\cos(\xi+\alpha)}=\delta,$$

la qual equazione dà l'equipollenza

$$2a\left(\varepsilon^{\xi+\alpha}+\varepsilon^{-\xi-\alpha}\right)-2b\left(\varepsilon^{\xi-\alpha}+\varepsilon^{-\xi+\alpha}\right)$$

$$=\delta\left(\varepsilon^{\xi-\alpha}+\varepsilon^{-\xi+\alpha}\right)\left(\varepsilon^{\xi+\alpha}+\varepsilon^{-\xi-\alpha}\right)$$

che si sviluppa in

$$\delta \varepsilon^{2\xi} - 2(a\varepsilon^{\alpha} - b\varepsilon^{-\alpha})\varepsilon^{\xi} + \delta(\varepsilon^{2\alpha} + \varepsilon^{-2\alpha}) - 2(a\varepsilon^{-\alpha} - b\varepsilon^{\alpha})\varepsilon^{-\xi}$$

$$+ \delta \varepsilon^{-2\xi} \simeq 0$$

questa è del quarto grado rispetto all'incognita ε^{ξ}; ma nel caso speciale che $b = a$ (e perciò l'intersezione delle rette h e k cada sull'origine delle inclinazioni) essa è *convertibile;* poniamo

$$\varepsilon^{\xi} - \varepsilon^{-\xi} \simeq 2\, i \operatorname{sen} \xi,$$

e perciò

$$\varepsilon^{2\xi} + \varepsilon^{-2\xi} \simeq 2 - 4 \operatorname{sen}^2 \xi$$

ne risulterà

$$4\delta \operatorname{sen}^2 \xi - 8a \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\xi + 4\delta \operatorname{sen}^2\alpha - 4\delta = 0$$

da cui

$$\delta \operatorname{sen}\xi = a \operatorname{sen}\alpha \pm \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \delta^2 \cos^2\alpha};$$

la qual formula si costruisce nel seguente modo: se P sia il punto di mezzo della retta B A sarà $PA = a \operatorname{sen}^2 \alpha$; sulla O A prolungata si prenda $OD = \delta$, ed abbassata da D la perpendicolare D Q sull'origine della inclinazioni, sarà $OQ = \delta \cos \alpha$, sia $QE \simeq PA$; portata l'ipotenusa $OE = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \delta^2 \cos^2 \alpha}$ sulla B P A dalle due parti di A in A R, A R', si tirerano parallelamente alla retta O P Q la R X, R' X', che tagliate in X, X'... dal circolo di raggio O D dasanno le direzione O X della retta ricercata.

La questione proposta a pag. 80 e risolta a pag. 94 é troppo facile; encone la soluzione che mi sembra la più spedita. Dal dato punto A (fig. 3) si tiri una retta, che tagli il circolo dato in B e C; col centro C ed il raggio C A si descriva un arco A D, sulla prolungazione della C B A prendasi B E $\triangleq$ C A, e col centro E ed il medesimo raggio si descriva l'arco B D, che tagli il primo nel punto D; sarà A D la lunghezza della tangente che da A potrebbe guidarsi al circolo B C X Y. Sopra una stessa retta sieno A M e A N le rette, che hanno il dato rapporto $m:n$, suppongo $m>n$; con una costruzione analoga alla precedente sia $MA \triangleq NQ$, $MA = MP = QP$, quindi $AP = \sqrt{AM \cdot AN}$. Sulla A P prendasi $AI = AD$, e si tirino le rette IX' e IY' parallele rispettivamente alle P M e P N; e che taglino la A N M nei punti $X'Y'$, saranno AX', AY' le lunghezze della cercata secante A X e della sua parte esterna A Y tali che $AX : AY = m:n$.

Questione proposta a pag. 128 (fig. 4).

Sulla base F G costruire un triangolo F G X, che abbia l'altezza h e la somma $2a$ dei due lati F X G X. Sulla F G si costruisca il triangolo isoscele F B G con $FB = BG = a$, ed il circolo di centro O, essendo $FO \triangleq OG$, e raggio $OA = a$, si tagli in N colla retta che sia parallela alla F G e ne abbia la distanza $ah:b$, il punto cercato sarà posto nella N X perpendicolare alla F O G.

Non so se questa soluzione soddisfarà il desiderio dell' Autore.

Nel caso che si conosca invece la differenza (fig. 5)

$$FX - GX = 2 . OA$$

si tirerà la O B perpendicolare alla F O G e si farà $AB = OF = OG$, poscia tirata HK parallela alla BA si prenderà $HX = \sqrt{(OK)^2 + (OA)^2}$.

Padova 19 febbraio 1878.

SECÇÃO II

SOBRE UM PROBLEMA DE ANALYSE INDETERMINADA

POR

L. Porfirio da Motta Pegado

Problema.—*Sendo* N *e* x *dous numeros inteiros, achar todos os valores de* x, *que tornam* $N + x^2$ *quadrado perfeito.*

As soluções inteiras da equação

$$N + x^2 = y^2$$

ou

$$N = (y + x)(y - x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

na qual N designa um numero inteiro, contém evidentemente os unicos valores de x, que satisfazem ao problema proposto.

Pelas condições do problema $y + x$ e $y - x$ são dous factores inteiros de N, e designando em geral por P e Q quaesquer dous *factores correspondentes* de N, será

$$P = y + x, \qquad Q = y - x$$

e por consequencia

$$x = \frac{P - Q}{2}, \qquad y = \frac{P + Q}{2} \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Decompondo N em dous factores inteiros P e Q por todos os modos possiveis, e introduzindo nas equações (2) os valores de P e Q correspondentes a cada decomposição, obtem-se todos os systemas de numeros inteiros ou fraccionarios, que satisfazem á equação (1). Querendo, porém, achar unicamente as soluções inteiras da equação (1), como convém ao problema, as equações (2) mostram que sómente devem admittir-se os valores de P e Q, que forem simultaneamente pares ou impares.

Quando N fôr um quadrado perfeito, ha, entre os systemas de factores correspondentes, um que é composto de dous factores iguaes, e ao qual correspondem os valores

$$x=0, \qquad y=N.$$

Esta solução deixa de convir ao problema, embora satisfaça á equação (1) e por isso abstrahiremos d'ella.

A resolução do problema fica, pois, dependente da decomposição de N em dous factores inteiros, desiguaes e simultaneamente pares ou impares, por todos os modos possiveis.

Seja em geral

$$N=A^a.B^b.C^c\ldots H^h.2^k \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

e A, B, C, ... H, numeros primos.

Não sendo $k=0$, a equação (3) representará todos os numeros pares, e os valores de x e y dados pelas equações (2) não poderão ser inteiros, senão quando forem pares os dous factores P e Q correspondentes a cada decomposição de N.

Para se saber portanto, quantas são as soluções inteiras e differentes de zero da equação (1), no caso de N ser par, é preciso determinar o numero de productos de dous factores pares e desiguaes em que é possivel decompôr N.

Ora é sabido que o numero $N=A^a.B^b.C^c\ldots H^h.2^k$ admitte $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)$ divisores impares, e que todos os outros em numero $(a+1)(b+1)\ldots(h+1)k$ são pares.

N'este numero comprehendem-se $(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)$ divisores, que são multiplos de 2^k, e que por este motivo têm por correspondentes factores impares. Excluindo estes ultimos divisores fica reduzido a

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)(k-1)$$

o numero de divisores pares de N, que podem convir ás equações (2). Imaginando todos estes divisores pares dispostos por ordem de grandeza, e multiplicando o primeiro pelo ultimo, o segundo pelo penultimo, e assim successivamente, obter-se-ha uma serie de productos todos iguaes a N. E sómente, quando o numero de taes divisores fôr impar, isto é, quando N fôr quadrado perfeito, é que haverá no meio d'aquella serie um factor igual a $\sqrt{N}$, ao qual corresponderá $x=0$. Não contando, pois, com este factor, concluir-se-ha que o numero de decomposições em dous factores pares e desiguaes que se póde obter, quando N fôr par, é

$$p=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)(k-1)\ldots\ldots\ (4)$$

ou

$$p=\frac{1}{2}[(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)(k-1)-1]\ldots\ (5)$$

segundo N não fôr ou fôr quadrado perfeito.

No caso de N ser impar acha-se discorrendo d'um modo similhante, que o numero de decomposições possiveis em productos de dous factores desiguaes é

$$p=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)\ldots\ldots\ (6)$$

se N não é quadrado perfeito, e

$$p = \frac{1}{2}[(a+1)(b+1)(c+1)\ldots(h+1)-1]\ldots \quad (7)$$

se N é quadrado perfeito, suppondo em ambas as hypotheses

$$N = A^a . B^b . C^c \ldots . H^h.$$

A equação (4) mostra que será $p=1$, quando se tiver

$$a=1,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=2$$

ou

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=3.$$

No primeiro caso é $N=A.2^2$, e no segundo $N=2^3$ ou $N=A.2^2$ suppondo $A=2$.

A equação (5) dá $p=1$ quando fôr

$$a=2,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=2$$

ou

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ldots h=0,\ k=4$$

isto é, quando se tiver $N=A^2.2^2$ ou $N=2^4$, isto é, igual a $A^2.2^2$ suppondo $A=2$.

Similhantemente se reconhece que a equação (6) dá $p=1$, quando fôr $N=A$, e que o mesmo resultado dará a equação (7) sempre que se tiver $N=A^2$.

Reduzem-se portanto a quatro os casos em que o problema proposto tem uma unica solução, a saber: quando N designa um numero primo, o quadrado d'um numero primo, ou o quadruplo d'um numero primo ou do quadrado d'um numero primo.

Ora, ou N seja numero primo, ou quadrado de numero primo, sempre $N-1$ será divisivel por 2. Logo, se N fôr numero primo ou quadrado de numero primo, o problema tem apenas uma solução, que é

$$x=\frac{N-1}{2},\quad y=\frac{N+1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Quando N é igual ao quadruplo d'um numero primo, ou do quadrado d'um numero primo, ha effectivamente só dous factores pares e desiguaes, $2A$ e 2 ou $2A^2$ e 2, capazes de dar o producto N, e fazendo na equação (2)

$$P=2A=\frac{N}{2},\qquad Q=2$$

ou

$$P=2A^2=\frac{N}{2},\qquad Q=2$$

conforme se tiver $N=4A$ ou $N=4A^2$, achar-se-ha para ambas as hypotheses

$$x=\frac{N}{4}-1,\qquad y=\frac{N}{4}+1\ldots\ldots\ldots (9).$$

Ha por consequencia quatro casos em que o problema proposto tem uma única solução, mas sómente em dous d'elles o valor de x é metade do numero immediatamente inferior ao numero dado. Estes dous casos são o de N ser primo, ou quadrado de numero primo.

Montferrier (*Dictionnaire des sciences mathématiques*, vol. I) depois de demonstrar que, sendo N um numero primo, ha só o inteiro $\frac{N-1}{2}$, cujo quadrado sommado com N dá outro quadrado, diz que esta propriedade póde servir para descobrir se um numero dado é ou não primo. A precedente deducção mostra que é impossivel distinguir por este meio um numero primo de outro que seja quadrado de numero primo. É comtudo possivel aproveitar a indicação de Montferrier, extrahindo préviamente a raiz quadrada ao numero proposto, e applicando depois o seu processo unicamente aos numeros, que não forem quadrados perfeitos. O processo assim modificado fica exacto, mas póde obrigar a extrahir raizes quadradas a alguns dos numeros, que designámos por y, tornando-o por vezes bastante trabalhoso na pratica do calculo.

As equações (4), (5), (6) e (7) mostram que o problema só deixa de ter solução, quando N fôr igual a 4 ou a 1, ou quando fôr numero par não divisivel por 4.

PRIMEIRA ARITHMETICA IMPRESSA

I. — Estão quasi a completar-se 400 annos, depois que na Europa se imprimira o *primeiro tractado arithmetico*, formando então uma obra especial, popularisada com o nome de *abbaco*.

Eis aqui o titulo d'este escripto curioso: — *Incomincia una pratica molto bona ed utile a chiascheduno che vuole usare l'arte della mercatancia, chiamata vulgarmente l'arte del abbaco.*

II.—Fez-se a impressão em *Treviso*, cidade episcopal da Italia, acabando-se a 10 de dezembro de 1478.

Consta de 62 folhas, sem *paginação*, nem *rubricas*, nem *reclamos*, com 32 linhas por pagina, em caracteres simi-gothicos, n'um formato de 4.° regular.

III.—Em nenhum bibliographo se acha a menção d'esta obra, indicada apenas como especialidade valiosa, nas *Memorie Trevigiane* de *Frederico*.

N'esta collecção prestimosa, na pag. 73, dá-se-lhe como impressor a *Miguel Manziolo*, que foi um dos mais antigos de *Treviso*.

IV. — O exemplar mencionado n'estas *memorias*, extraviou-se infelizmente: e a nenhum dos bibliographos que o procuraram, *com o indefesso Brunet por chefe de cruzada*, foi dado rastrear-lhe os vestigios.

D'aqui nasceu a opinião muito em voga, de que este *abbaco* não era um *escripto real*, mas uma verdadeira *mystificação* bibliographica.

V. — Desde 1859, com a vulgarisação da venda dos livros do erudito mathematico *Libri*, venda começada em 1 de agosto e ultimada em 15 do mesmo mez, verificou-se a existencia real d'esta obra, especimen precioso para a *litteratura mathesiologica*.

No *Catalogo* d'este leilão, effectuado em Londres, onde este honrador da Italia tinha adoecido gravemente, acha-se a descripção respectiva d'este *abbaco,* onde póde ver-se na pag. 53, n.º 470.

VI. — A reimpressão d'este escripto rarissimo, *unico até hoje conhecido em paragem fixa,* seria de certo um serviço valioso, prestado pela mão editorial á *historia das mathematicas.*

Ella pagaria em lucros e galardões as despezas da imprensa: e não daria logar a dizer-se d'ella, o que no *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques,* tom. VII, pag. 53, nos dissera, com razão, o seu coordenador *Terquem:*

«On fait souvent des dépenses excessives, pour des productions qui ne profitent pas à l'esprit humain — pour la valeur d'un centime!»

Braga, 1878.

PEREIRA CALDAS.

NOTICIAS

PLANETAS ULTIMAMENTE DESCOBERTOS

Planeta	Grandeza	Descobridor	Logar	Data
N.º 180	12ª	Perrotin	Toulouse	29 de janeiro de 1878
» 181		Cottenot	Marseille	2 de fevereiro de 1878
» 182	10,5	Palisa	Pola	7 de fevereiro de 1878
» 183	12ª	»	»	8 de fevereiro de 1878
» 184	11ª	»	»	28 de fevereiro de 1878
» 185	10ª	Peters	Clinton	3 de março de 1878

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 9

Calcular por meio da geometria elementar a área lateral e o volume d'uma cunha cylindrica, determinada pela intersecção d'um cylindro de revolução e de dous planos quaesquer, passando por um diametro da sua secção recta.

Basta considerar a cunha cylindrica terminada pelo plano da secção recta, o qual supporemos horizontal, e por um plano obliquo que passe pelo diametro d'essa secção.

Devemos depois inscrever no circulo da base um polygono regular; conduzir pelos seus lados planos verticaes, formando assim um prisma, no qual os planos da base e obliquo cortarão um solido, cujo limite é a cunha dada.

Posto isto sejam (Est. III, fig. 6):

OB, OA os traços verticaes do plano da base e do plano obliquo,

OB o traço horizontal d'um dos meridianos do cylindro,

OD perpendicular a OB no plano da base,

ODB circulo da base,

ab um lado qualquer do polygono,

Om o seu apothema,

mf a ordenada parallela a OD,

Ea, Eb parallelas a OD e OB e iguaes ás projecções de ab sobre essas duas rectas,

finalmente cd, aa', bb' as porções das verticaes comprehendidas entre m, a, b, e o plano obliquo OA.

A área lateral do solido compõe-se de trapezios $a a' b b'$; as faces das extremidades reduzem-se a triangulos. A área de cada trapezio é $ab.cd$. A área total é pois

$$A = 2\Sigma ab.cd;$$

ora

$$\frac{ab}{aE} = \frac{Om}{Of}, \quad cd = \frac{AB}{OB} OC = \frac{AB}{OB} Of$$

logo

$$A = 2\Sigma \frac{Om}{Of}.aE.\frac{AB}{OB}.Of = \frac{2Om.AB}{OD}\Sigma aE$$

mas

$$\Sigma aE = OD$$

logo

$$A = 2.Om.AB,$$

no limite $Om = OD$, logo

$$A = 2.OD.AB = 4 \text{ vezes a área do triangulo } ABO.$$

O volume do solido compõe-se de pyramides $Om\, a a'\, b b'$; o volume de cada uma é

$$\frac{Om.ab.cd}{3}$$

logo o volume total é

$$V = \frac{2}{3}\Sigma Om.ab.cd = \frac{2}{3}\,\frac{\overline{Om}^2 AB}{OD}\Sigma aE = \frac{2}{3}\overline{Om}^2.AB;$$

no limite $Om = OD$, logo

$$V = \frac{2}{3}\overline{OD}^2.AB = 4 \text{ vezes o volume da pyramide de altura } OD$$

e de base OAB.

O calculo integral dá o mesmo resultado.

Com effeito, tomando para eixo dos z o eixo do cylindro, e para plano dos xy o plano da sua base, designemos por $z = tg\,\theta . x$, $x^2 + y^2 = r^2$ as equações do plano obliquo e do cylindro; vem

$$V = \int\int z\,dx\,dy = \int \frac{tg\,\theta\, x^2\,dy}{2} \int = \frac{1}{2} tg\,\theta \int (r^2 - y^2)\,dy$$

$$V = \frac{1}{2} tg\,\theta \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3\right]_{-r}^{+r} = \frac{2}{3} tg\,\theta\, r^3 = \frac{2}{3} \overline{OD}^2 . AB.$$

Desenvolvendo o cylindro, a secção obliqua transforma-se em uma sinusoide, cuja equação é

$$z = r\, tg\,\theta \cos \frac{x}{r};$$

a área pedida é

$$A = \int r\, tg\,\theta \cos \frac{x}{r}\,dx = 2 r^2 tg\,\theta \left[\operatorname{sen} \frac{x}{r}\right]_0^{\frac{\pi r}{2}} = 2\, tg\,\theta . r^2$$

$$= 2\,OD . AB.$$

PEDRO AMORIM VIANNA.

QUESTÃO PROPOSTA

Traçar um arco de circulo que faça angulos dados com duas circumferencias concentricas conhecidas.

PEDRO AMORIM VIANNA.

SECÇÃO I

SOBRE O MOVIMENTO D'UM PONTO ACTUADO POR UMA FORÇA PERPENDICULAR AO RAIO VECTOR

POR

F. da Ponte Horta

O problema do movimento d'um ponto material que é actuado por uma força perpendicular á recta que lhe é dirigida d'um ponto fixo (raio vector, tomando este ponto por origem), offerece um certo interesse, porque no caso da força variar inversamente com a distancia ao referido ponto, constitue um caso de excepção das superficies de nivel no theorema das forças vivas; caso em que estas se cortam, e por conseguinte em que a velocidade póde não ser a mesma nas differentes passagens do ponto pela mesma superficie. Ao mesmo tempo este movimento é tambem o que adquiriria uma conta de rosario enfiada n'um arame rectilineo inflexivel, estando este animado d'um movimento de rotação uniforme em torno d'um de seus pontos (suppomos o arame sem expessura, e ser a conta um ponto material). Com effeito, o ponto material n'estas condições, é submettido á acção d'uma força perpendicular ao arame, da qual provém o seu movimento de escorregamento sem que haja a menor intervenção de qualquer força centrifuga, como acertadamente observa Mr. Bour, contestando, assim, a errada asserção d'alguns physicos, que citam este movimento como exemplo da existencia da força centrifuga.

É sabido que um ponto material inteiramente livre em movimento, não póde descrever uma curva sem que o actue uma força, cuja direcção seja differente da de seu movimento. Costuma-se, porém, para facilidade do estudo, decompôr a força em duas, uma segundo a tangente á trajectoria igual a $m\frac{dv}{dt}$, e outra normal igual a $\frac{v^2}{\rho}$. A primeira tem sido denominada força tangencial, e a segunda força centripeta. São estas duas forças puramente ficticias na generalidade dos casos. Sómente deixa de o ser a segunda, quando a força que actua o movel for constantemente normal á trajectoria. Será então nulla a componente tangencial, e ter-se-ha um movimento curvelineo, devido á acção d'uma força centripeta *real*, sem que esta denominação implique a ideia d'uma força, passando por um ponto fixo.

Uma força que mudasse constantemente de direcção sem cessar de se conservar tangente a uma curva dada, obrigaria um ponto a descrever uniformemente uma de suas desinvolventes, se a dicta força igual a $m\frac{v^2}{\rho}$ variasse inversamente com o raio osculador d'esta, cuja direcção tem. Se a evoluta da trajectoria, ou involvente de suas respectivas normaes se reduzir a um ponto, cahe-se então no caso particularissimo da trajectoria circular descripta por um ponto, em virtude d'uma força centripeta de grandeza constante, que então passaria por um ponto fixo.

Se o ponto fôr obrigado a descrever uma curva dada, como succederia no exemplo já citado d'uma conta enfiada n'um arame, suppondo este de fórma curvelinea absolutamente invariavel, sem espessura, só resistindo na direcção normal, e a conta reduzida a um ponto material não submettida a força alguma exterior, ter-se-ha realizado n'este movimento curvelineo obrigatorio a hypothese antecedente da acção continua d'uma força centripeta (a resistencia do arame) passando pelos successivos centros osculadores da curva constituida pelo arame; e variando de grandeza inversamente com os mesmos raios osculadores.

Mas o que é a força centrifuga? É uma força igual e contraria á centripeta, e com ella ficticia ou real. A consideração da força centrifuga provém da realidade do principio de Newton *«da reacção igual e contraria á acção.»* Se a força centripeta existe, ella emana da acção d'um ponto A sobre o ponto movel e livre B, e a força centrifuga é a acção contraria de B sobre A. Ou ella é a acção d'uma curva sobre um ponto que obrigadamente a percorre, sem que nenhuma força exterior o actue, sendo a centrifuga a reacção do ponto sobre a curva, força igual e contraria á primeira, e por isso tendo como ella por valor symbolico $\frac{m v^2}{\rho}$.

Estudemos agora o movimento do ponto que é actuado por uma força perpendicular ao raio vector.

É sabido que a trajectoria é plana, tomaremos pois dois eixos n'esse plano, o dos x dirigindo-se do ponto fixo para o ponto d'onde parte o movel, e o dos y perpendicular ao primeiro conduzido igualmente pelo ponto fixo.

Designando por x, y, r e φ as coordenadas, raio vector do movel, e angulo que este fórma com o eixo dos x na epocha t, teremos as seguintes equações do movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -F\frac{y}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = F\frac{x}{r} \,\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Deduz-se d'estas equações

$$\frac{x\,d^2x + y\,d^2y}{dt^2} = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

mas da equação

$$x^2 + y^2 = r^2$$

deduz-se por duas differenciações successivas,

$$x\,d^2x + y\,d^2y = d\,r^2 + r\,d^2r - d\,s^2;$$

e pondo em logar de $d\,s^2$ o seu valor $d\,r^2 + r^2 d\,\varphi^2$, teremos

$$x\,d^2x + y\,d^2y = r\,d^2r - r^2 d\,\varphi^2$$

e em virtude da equação A

$$\frac{d^2r}{d^2\varphi} = r \,.................. \text{(B)}$$

tal é a equação differencial da trajectoria.

Integrando teremos

$$r = \mathrm{A}\,e^{\varphi} + \mathrm{B}\,e^{-\varphi} \,............... \text{C.}$$

D'onde

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi} = \mathrm{A}\,e^{\varphi} - \mathrm{B}\,e^{-\varphi} \,............... \text{D.}$$

Para determinar as constantes, seja r_0 a distancia que vae da origem, sobre o eixo dos x até ao ponto d'esse eixo d'onde parte o movel, teremos

$$r_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

Quanto a $\frac{dr}{d\varphi}$ para $\varphi=0$, notaremos que, sendo a força perpendicular a r, o primeiro elemento da trajectoria se faz segundo a força, isto é, perpendicularmente a r, e logo o primeiro dr se obtem por um triangulo rectangulo infinitamente pequeno, em que um dos catectos é $r\,d\varphi$, sendo o angulo opposto o angulo de contacto $d\tau$: d'onde $r=r\,d\varphi . d\tau$, o que mostra ser $\frac{dr}{d\varphi}=r\,d\tau$, isto é, infinitamente pequeno, ou tendo por limite zero.

A equação B para $\varphi=0$, mudar-se-ha em

$$0=A-B;$$

e portanto $A=B=\frac{r_0}{2}$, sendo a equação da trajectoria definitivamente

$$r=\frac{r_0}{2}(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

resultado notavel, por ser a trajectoria independente da natureza da força.

Deduz-se ainda das equações (1)

$$\frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{dt^2}=Fr;$$

d'onde

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}=\int F\,r\,dt=\frac{r^2d\varphi}{dt} \ldots\ldots\ldots (E).$$

Supponhamos

$$F=\frac{a}{r},$$

teremos

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt}=at,$$

ou

$$2\frac{d\lambda}{dt}=at,$$

d'onde

$$\lambda=\frac{at^2}{4} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3).$$

Mostra esta equação que o raio vector descreve arcos que estão entre si como os quadrados dos tempos.

Determinemos o valor que deve ter a força F, para que a velocidade de circulação seja constante.

Faremos

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega \text{ (sendo } \omega \text{ constante)}$$

obter-se-ha

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt}=\omega r^2=\int F.r\,dt;$$

da qual deduziremos por differenciação o pertendido valor

$$F=2\omega\frac{dr}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4).$$

Multiplicando a primeira das equações (1) por $2\,dx$ e a segunda por $2\,dy$, e sommando as equações resultantes obteremos

$$\frac{2\,dx\,d^2x+2\,dy\,d^2y}{dt^2}=\frac{2\,\mathrm{F}\,(x\,dy-y\,dx)}{r}=2\,\mathrm{F}\,r\,d\varphi,$$

d'onde

$$v^2=2\int \mathrm{F}\,r\,d\varphi.$$

Se fôr

$$\mathrm{F}=\frac{a}{r},$$

teremos

$$v^2=2\,a\,\varphi \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

A equação geral das superficies de nivel sendo

$$\varphi=c$$

mostra serem estas superficies linhas rectas que se cortam na origem. É o caso de excepção de que fallamos; effectivamente o quadrado da velocidade cresce sempre, passando na mesma superficie do valor $2\,a\,\varphi$ a $2\,a\,(\varphi+\pi)$, $2\,a\,(\varphi+2\,\pi)$.

Suppondo agora $\mathrm{F}=2\,\omega\frac{dr}{dt}$, o que corresponde ao caso da circulação uniforme, teremos

$$v^2=2\int 2\,\omega\,r\frac{dr}{dt}\,d\varphi=4\,\omega^2\int r\,dr=2\,\omega^2\,r^2 \,\ldots\ldots \quad (6).$$

As superficies de nivel são então circumferencias de circulo, cujo centro commum é a origem das coordenadas. Estas circumferencias são cortadas pela trajectoria debaixo do angulo de 45°, visto que sendo $\omega^2 r^2$ o quadrado da velocidade de circulação, será tambem $\omega^2 r^2$ o quadrado da velocidade de escorregamento e o valor da força será definitivamente $2\,\omega^2 r$.

N'este caso a trajectoria não é a equação (2), por quanto, nós suppozemos para a determinação das constantes que o movel partia do eixo dos x sem velocidade, o que determinou a relação $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0$, e actualmente, sendo $\frac{r\,d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}$, teremos $\frac{dr}{d\varphi} = r$, e logo $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = r_0$, o que faz que se tenha $A = r_0$ e $B = r_0$, convertendo-se a equação da trajectoria em

$$r = r_0 e^{\varphi} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(7)}.$$

Suppondo $F = \frac{a}{r}$, deduz-se da equação

$$r^2 d\varphi = a\,t\,dt,$$

pondo em logar de r^2 o seu valor em funcção de φ deduzido de (2),

$$r_0^2 (e^{2\varphi} + 2 + e^{-2\varphi})\,dx = a\,t\,dt$$

d'onde

$$t = \frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{e^{2\varphi} + 4\varphi - e^{-2\varphi}}{a}} \dots\dots\dots \text{(8)}.$$

Tambem se póde obter uma equação differencial entre r e t, no caso de ser F funcção de r ou t.

Das equações B e E obtem-se, com effeito

$$\frac{r^3 d^2 r}{d t^2} = (\int \mathrm{F}\, r\, d t^2),$$

da qual se deduz nas duas hypotheses de $\mathrm{F} = \frac{a}{r}$ e $\mathrm{F} = 2\,\omega \frac{d r}{d t}$

$$\frac{r^3 d^2 r}{d t^2} = a^2 t^2 \text{ e } \frac{d^2 r}{d t^2} = \omega^2 r \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Em conclusão. O caso do movimento da conta enfiada n'um arame rectilineo inflexivel, girando este em torno d'um de seus pontos, está tractado nas linhas que precedem. É o caso do ponto livre actuado por uma força $\mathrm{F} = 2\,\omega^2 r$ perpendicular ao raio vector. Nenhuma força centripeta ou centrifuga ahi interveio.

A conta escorrega pelo arame, por que é submettida por este a acção d'uma força perpendicular á sua direcção, tendo por valor $2\,\omega^2 r$.

É certo que este movimento se póde tractar pela theoria do movimento relativo. Com effeito, suppondo ser o arame um dos eixos coordenados moveis, deduziremos o movimento da conta segundo esse eixo, que designaremos por x, prescindindo de considerar a acção do arame por ser normal ao dicto eixo, e só attenderemos á força apparente de inercia de arrastamento, a qual se deduz, como é sabido, procurando a força (sua contraria) que deveria ser applicada ao ponto para lhe dar, sendo livre, o mesmo movimento que os eixos lhe communicariam, se na epocha t a elles fosse ligada invariavelmente. Essa força teria por valor $\dfrac{m v^2}{\rho} = m \omega^2 x$, vindo a ser a equação do movimento em questão

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \omega x,$$

exactamente identica com a formula (9), obtida pela consideração da força normal, que é a verdadeira força que actua o movel; emquanto que a força centrifuga que figura na fórmula do movimento relativo, não passa d'uma força ficticia, que só apparece como um expediente de calculo e nada mais.

SECÇÃO II

SOBRE UM THEOREMA DA THEORIA DOS NUMEROS

POR

A. ZEFERINO CANDIDO

Se N *é um numero primo, a equação*

$$N + x^2 = y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

tem uma unica solução:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{N-1}{2} \\ y &= \frac{N+1}{2} \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Com effeito; tira-se de (1)

$$N = (y + x)(y - x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

equação, que pela natureza de N, só póde ser satisfeita, fazendo

$$y - x = 1$$

$$y + x = N,$$

que dão as soluções (2).

Quando N fôr multiplo, a equação (1) tem, além de (2), uma ou mais soluções; conseguintemente a propriedade, traduzida pelas equações (1) e (2), sendo geral para os numeros primos e exclusiva d'estes numeros, póde servir para o seu reconhecimento.

É claro que este raciocinio, tão logico na sua fórma como verdadeiro nas suas consequencias, não póde ser contradictado por quaesquer deducções, que, partindo de bases mais geraes, se não affeiçoem nas subsequentes restricções ao problema considerado aqui.

Ha um caso muito especial e unico em que a equação (1) tem além de (2) só uma outra solução: é quando N fôr o quadrado d'um numero primo. Vê-se effectivamente, n'este caso que

$$\left.\begin{aligned} x&=0 \\ y&=N \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

é uma nova e unica solução de (1).

Como nem o raciocinio, nem a natureza do problema, nem quaesquer considerações feitas na sua apresentação, excluem similhante solução, claro é que ella vem confirmar o theorema demonstrado, excluindo pela sua existencia o numero considerado da classe dos numeros primos.

Se uma outra analyse feita sobre uma questão diversa, excluiu esta solução, resulta para quem assim procedeu, a necessidade de completar o problema a que quer chegar por um segundo caracter differencial, que tenha por fim distinguir o numero primo dos quadrados d'esta especie de numeros.

Montferrier, a quem se deve o theorema que apresentamos, é que não precisa de similhante correcção, porque não excluiu este caso.

Assim, no processo que Montferrier deduz do theorema demonstrado, deve sempre principiar-se por verificar se o numero proposto é um quadrado, operação extremamente facil, não só em comparação com a serie de operações que a regra total exige, como ainda porque, attentas as condições do problema, apenas será preciso extrahir a raiz quadrada ao numero, quando elle terminar em 1, 9, 5.

NOTICIAS

Passagem de Mercurio por diante do Sol

1878 — maio 6 — Coimbra

Contactos	Tempo medio	Observador
1.º interno	$2^h40^m47^s$	Lucas

O annuncio da Ephemeride dava $2^h41^m,0$.

As nuvens que encobriram o Sol em quasi todo o dia, apenas permittiram que se observasse aquelle contacto.

S. Pinto.

DESCOBERTAS DE PLANETAS

Planeta	Grandeza	Descobridor	Logar	Datas
(186)	11,5	Henry	Paris	6 de abril de 1878
(187)	10	Coggia	Marselha	11 de abril de 1878

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 10

Traçar um arco de circulo que faça angulos dados com duas circumferencias concentricas conhecidas.

Solução

Representemos por (E) e (I) as circumferencias dadas, e por (x) a circumferencia pedida.

Supponhamos o problema resolvido, e seja b um dos pontos em que a circumferencia (x) corta a circumferencia (E); e b' aquelle em que ella corta a circumferencia (I). Se depois tirarmos nos pontos b e b' da circumferencia (x) as tangentes tb e tb', e designarmos por a o ponto em que tb corta a circumferencia (E), e por d' a intersecção de tb' com a circumferencia (I), é claro que, por ser sempre $tb = tb'$, a solução do problema proposto ficará reduzido á solução extremamente simples e geral do seguinte problema:

Sendo dada uma circumferencia (E) *e uma das suas cordas* a b, *achar n'outra circumferencia egualmente dada* (I) *uma corda* b' d', *de grandeza conhecida, de modo que o ponto de concurso* t *d'estas duas cordas determine sobre uma d'ellas* a b *um segmento* t b *egual a um dos dois segmentos* t b', t d', *que fórma sobre a outra* b' d'.

Tiremos, pois, por d' uma recta parallela a bb'; representemos por d o ponto em que ella corta a corda ab; e por m e m' respectivamente os pontos medios do segmento bd e da corda $b'd'$, que formam os lados eguaes do trapezio isosceles $bdd'b'$.

A solução do problema *auxiliar* reduz-se então a determinar a circumferencia (y), que toca este segmento e esta corda nos seus pontos medios, ou que toque este segmento no ponto medio e seja tangente a uma circumferencia (I′), involucro das diversas posições da corda da circumferencia (I).

Assim sendo e e i os angulos sob os quaes a circumferencia (x) deve cortar respectivamente as circumferencias dadas (E) e (I), traçaremos na circumferencia (E) uma corda $a\,b$ que a corte sob o angulo e, e na circumferencia (I) a corda $b_1{}'\,d_1{}'$, que a corte sob o angulo i; e se, depois d'isto, sobre a corda $a\,b$, por exemplo, marcarmos o segmento $b\,d$ egual á cordá $b_1{}'\,d_1{}'$, e no seu ponto medio m lhe levantarmos uma perpendicular, sobre a qual tomemos o segmento $m\,c$ egual ao raio da circumferencia (I′), e unirmos o seu centro C com o ponto c: a perpendicular levantada ao meio n de Cc cortará $m\,c$ n'um ponto O, que será evidentemente o centro da circumferencia (y), bem como cortará $a\,b$ no ponto t, pelo qual deve passar a corda pedida $b'\,d'$: por conseguinte o centro o da circumferencia (x) achar-se-ha na intersecção de $n\,t$ com a perpendicular $b\,o$ levantada no extremo b da corda $a\,b$.

Discussão

Como o segmento $m\,c$ se póde tomar tanto para a parte superior como para a parte inferior de $a\,b$, segue-se que para esta posição da corda, ha duas circumferencias (x) e (x') que, passando pelo ponto b de (E), resolvem o problema proposto, quer o segmento $b\,d$ se tome para a direita, quer para a esquerda d'este ponto, como se reconhece immediatamente.

Se considerarmos a outra corda $b\,a_1$, que passa pelo mesmo ponto b, teremos outras duas circumferencias (x_1) e $(x_1{}')$, eguaes ás circumferencias (x) e (x'), e symetricamente collocadas a respeito d'estas.

Quando tomarmos arbitrariamente um ponto $b_1{}'$ da circumferencia (I), acharemos analogamente quatro circumferencias (z), (z') e (z_1), $(z_1{}')$, eguaes e symetricas duas a duas; mas que, como sabemos, não são distinctas das dos dois grupos que achamos para cada ponto de (E).

Sendo (E) a circumferencia exterior e (I) a interior, as circumferencias (x) e (x') acham-se situadas do mesmo lado da corda ab; e as circumferencias (z) e (z') ficam situadas de lados differentes.

Vê-se, portanto, que para cada ponto das circumferencias dadas ha sempre quatro soluções eguaes e symetricas duas a duas.

Observação

Como acabamos de ver, o methodo seguido para resolver o problema proposto, é geral, e portanto applicavel mesmo quando as circumferencias (E) e (I) não forem concentricas.

N'este caso os quatro circulos que passam por cada ponto das circumferencias dadas não são eguaes nem symetricos dois a dois, excepto quando estes pontos estão sobre a linha dos centros d'estas circumferencias.

Como, porém, só temos que satisfazer á solução pedida, reservamo-nos para n'outra occasião tractarmos da solução geral, e deduzirmos d'alli algumas propriedades curiosas da figura.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

QUESTÃO PROPOSTA

Calcular elementarmente a área lateral e o volume d'uma cunha conica determinada pela intersecção d'um cône de revolução com dois planos, sendo um d'estes perpendicular ao eixo de revolução.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

SECÇÃO I

NOTE DE GÉOMETRIE DESCRIPTIVE SUR L'INTERSECTION DES SURFACES DE RÉVOLUTION D'UN ORDRE QUELCONQUE

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Dans le cas général, c'est-à-dire, quand les axes de révolution ne concourent pas, la *méthode des sections horizontales* est celle que l'on a l'habitude d'employer pour déterminer l'intersection de ces surfaces, et, en construisant les *projections horizontales* de chaque *couple de sections auxiliaires,* nous aurons autant de points que nous voudrons de la courbe d'intersection demandée. Comme ces sections sont, pour la plupart, des courbes difficiles à construire, nous pouvons encore prendre le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe de révolution de l'une des surfaces, et alors dans celle-ci, les sections étant des cercles, qui se projettent en *véritable grandeur,* nous n'aurons qu'à construire par *points* les projections des sections faites sur l'autre.

Cela posé, nous allons voir que nous pouvons encore résoudre ce problème, en employant, pour *surfaces auxiliaires,* des *surfaces de révolution,* sans que les constructions en deviennent plus difficiles; peut-être même selon nous, cet emploi de telles surfaces les rend-il plus faciles dans certain cas.

Soient, en effet, Σ et Σ' les deux surfaces de révolution; prenons le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe de révolution de la première surface, et le plan vertical parallèle aux deux axes.

Si maintenant nous considérons un parallèle ω de Σ, les points où celui-ci rencontre Σ' sont évidemment des points de l'intersection demandée des deux surfaces. Voyons alors comme nous pourrons construire ces points *sans tracer la courbe* déterminée sur la surface Σ' par le plan du parallèle ω, et sans même recourir à elle, c'est-à-dire, sans employer la méthode des sections horizontales.

Il est clair que, si nous supposons qu'un *cercle* perpendiculaire à l'axe de révolution de Σ' se meut *ayant toujours son centre sur cet axe*, et un *point* de sa circonférence sur la circonférence du parallèle proposé ω, quand ce cercle passera par les points d'intersection, il se confondra avec les parallèles de Σ', qui passent par ces points. Mais la *surface engendrée* par le *cercle mobile* est une *surface de révolution* σ, qui a le *même axe* que Σ', et dont la *génératrice* est le parallèle ω de Σ, que nous avons considéré: donc les parallèles de Σ' qui coupent le parallèle ω sont les parallèles *communs* de Σ' et de σ, lignes d'intersection de ces surfaces.

Ainsi, donc, nous aurons à construire le *méridien principal de* σ; et ses points *communs* avec le méridien principal de Σ', détermineront les *positions des parallèlles* de cette surface, qui rencontrent le parallèle ω, et qui par conséquent donnent des points de l'intersection demandée de Σ et Σ'. De même nous déterminerions des points de l'intersection situés sur l'autre parallèle ω' de Σ; et ainsi nous aurions autant de points que nous voudrions.

Lorsque, dans les surfaces de révolution Σ et Σ' les axes sont *concourants*, le parallèle ω de Σ, tournant autour de l'axe de révolution de Σ', engendre évidemment une *zône sphérique* dans laquelle cette *zône* est la partie *utile;* et c'est effectivement cette surface *auxiliaire* que l'on emploie dans ce cas.

Si les axes de révolution de Σ et Σ' sont *parallèles*, le parallèle ω de Σ, tournant autour de l'axe de révolution de Σ', engendre une *zône plane* limitée par deux cercles concentriques, qui sont *l'enveloppe* du cercle ou parallèle proposé; et alors la surface *auxiliaire* σ se transforme en *un plan*, dans lequel la partie *utile* se réduit à cette zone, ou *couronne circulaire;* et c'est réellement la surface auxiliaire qu'il convient d'employer dans ce cas.

Observation

Quand il s'agit d'obtenir l'intersection des surfaces de révolution du second ordre, il n'y a pas d'avantage à employer la *méthode* générale, que nous venons d'exposer, parce que nous pouvons employer la *méthode de la projection centrale* que nous conduit à trouver l'intersection des surfaces du second ordre quelles qu'elles soient (*), et dont celles que nous considérons maintenant sont des *cas particuliers;* excepté seulement, lorsque les axes de révolution se trouvent dans le *même plan*.

(*) Voyez *Notre mémoire de géométrie descriptive*, publié em 1875.

Additamento á pag. 173

A reducção do annuncio do *Connaissance des temps*, no qual se adopta outro semi-diametro do sol, á posição do Observatorio Astronomico de Coimbra dá $2^h40^m50^s$, que differe ainda menos do tempo da observação.

S. Pinto.

ESTUDO SOBRE O PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 10

POR

F. DA PONTE HORTA

O estudo do problema do sr. Amorim, de que nos occupamos na presente nota, consta de duas partes; na primeira abordamos o problema pela geometria analytica, procurando a construcção graphica dos centros dos circulos secantes, quando se arbitra o ponto de secção em um dos circulos dados, visto que este problema é indeterminado. Na outra, procuramos, egualmente pela geometria analytica, os logares dos centros de todos os circulos secantes; determinando suas equações, de que seguidamente fazemos applicação aos casos particulares que nos pareceram mais importantes.

PROBLEMA.—*Dados dois circulos, determinar um terceiro que corte os primeiros debaixo de angulos dados.*

PRIMEIRA PARTE

Secções feitas pelo mesmo ponto d'um dos circulos dados

Um dos modos de resolver o problema da intersecção de duas circumferencias dadas por uma terceira debaixo de angulos dados, póde derivar do seguinte theorema:

O logar geometrico dos centros dos circulos passantes pelo mesmo ponto, que cortam uma circumferencia dada por um angulo tambem dado, é uma conica.

Por quanto tirando um raio Cy (Est. IV—Fig. 1) na circumferencia dada, e no ponto y da circumferencia uma recta yx que fórme o angulo dado α com o prolongamento do dicto raio, a perpendicular levantada ao meio da recta yM, que une o ponto y com o ponto dado M, cortará yx no centro do circulo, passante por M e y, que intercepta C pelo angulo α. Tirando as rectas Mx e Cx, obteremos dois triangulos Cyx e CxM, dos quaes designando o angulo externo em M do segundo triangulo por φ, as rectas Cy, yx e CM por r, ρ e a, respectivamente, deduzir-se-ha

$$\overline{Cx}^2 = r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos\alpha = a^2 + \rho^2 + 2a\rho\cos\varphi,$$

d'onde

$$\rho = \frac{a^2 - r^2}{2(r\cos\alpha - a\cos\varphi)} \quad (1).$$

Esta equação determina uma conica, de que M é um dos fócos, e cujo eixo focal tem a direcção MC.

Será uma ellipse parabola ou hyperbole, conforme fôr

$$a \lesseqgtr r\cos\alpha.$$

Se tirarmos nova recta yx', formando tambem o angulo α com o prolongamento de Cy, e por conseguinte em posição symetrica com yx a respeito de Cy, obteremos ainda a mesma equação (1), porque esta não muda quando ao valor de α se substitue $360 - \alpha$, o que nos diz que a mesma conica reune os centros dos circulos secantes que aquellas duas direcções determinam.

Se fizermos $\alpha = 90$ na equação (1) teremos

$$\rho = \frac{a^2 - r^2}{-2a\cos\varphi},$$

equação d'uma recta perpendicular a CM (theorema conhecido).

Quando a curva (1) é uma hyperbole, as suas asymptotas têm por equação

$$\cos\varphi = \frac{r\cos\alpha}{a}.$$

As respectivas perpendiculares tiradas pelo ponto M, cortarão a circumferencia C pelo angulo α em quatro pontos P, P', Q, Q', visto que as perpendiculares tiradas ao meio dos segmentos MP, MP', MQ, MQ', as quaes devem conter os centros das circumferencias secantes, encontram a hyperbole no infinito. Logo:

O problema que consiste em cortar uma circumferencia em angulo dado por uma recta tirada de um ponto dado M, é sempre soluvel, se o ponto M está fóra da circumferencia ($a > r\cos\alpha$). Elle é insoluvel, no caso do ponto interior, quando $a < r\cos\alpha$; o que aliás era evidente.

Observaremos ainda que, a cada um dos quatro pontos P, P', Q, Q', corresponde tambem um circulo secante, porque todas as rectas parallelas ás asymptotas, além de concorrerem com estas no ponto infinito da hyperbole, ainda cortam esta curva n'outro ponto.

Podemos sujeitar as circumferencias secantes a cortarem em M por um certo angulo α', qualquer recta que passe por esse ponto.

Seja a recta dada MA; tire-se MT, formando o angulo α' com MA; o centro do circulo pedido estará n'uma recta Mx perpendicular a MT; e como os centros dos circulos secantes de C pelo angulo α estão n'uma conica de que M é fóco, haverá duas soluções.

Se traçarmos nova recta MT', symetrica de MT a respeito de MA, a perpendicular que lhe tirarmos pelo ponto M interceptará a mesma hyperbole em outros dois pontos, que serão centros de dois novos circulos egualmente secantes de C pelo angulo α e da recta MA pelo angulo α', logo:

Toda a circumferencia C', tangente a MA no ponto M, poderá ser cortada por quatro circumferencias debaixo do angulo α', as quaes ao mesmo tempo cortarão a circumferencia C pelo angulo α.

Querendo pois cortar duas circumferencias C e C' com uma terceira pelos angulos dados α e α' respectivamente, tomaremos um ponto M em uma d'ellas, v. gr. em C', uniremos os pontos C e M; tiraremos o raio C' M, e pelo mesmo ponto M duas rectas que formem com o prolongamento d'esse raio, d'um e outro lado, o angulo α', sobre as quaes se acharão os centros dos circulos secantes. Construiremos cada grupo de duas soluções pela formula

$$\rho = \frac{a^2 - r^2}{2r\cos\alpha \pm 2a\cos\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

em que $\beta = 180 - \varphi$, é um dos angulos agudos que a perpendicular a M T ou M T' fórma com M C. A construcção será duplicada, se os angulos β e β' relativos a M T e M T' forem differentes, o que sempre se verificará, excepto quando C M tiver a direcção de M A (tangente á circumferencia C' no ponto M), ou lhe fôr perpendicular. No primeiro caso, as circumferencias secantes são symetricas em relação á circumferencia C; no segundo são symetricas ao mesmo tempo em relação a C e a C'. Esta ultima hypothese é sempre verificada, quando C e C' são concentricas.

N'este caso, substituindo r' em logar de a, e notando que $\beta = \beta' = \alpha'$, teremos

$$\rho = \frac{r'^2 - r^2}{2r\cos\alpha \pm 2r'\cos\alpha'} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

A construcção dos valores de ρ pelas formulas 2 ou 3 é muito facil; ella deriva do theorema de geometria que «o quadrado da perpendicular baixada da circumferencia sobre um diametro, é egual ao producto dos dois segmentos do mesmo diametro.» Projectaremos pois M C sobre Mx, a qual projecção augmentaremos e diminuiremos da grandeza $r\cos\alpha$; teremos assim (a contar de M) os dois segmentos $r\cos\alpha \pm a\cos\beta$, cujas grandezas duplicaremos, mantendo-lhe a origem M; e sobre a perpendicular á mesma recta, tirada por M, marcaremos a grandeza $\sqrt{a^2 - r^2}$ (é a grandeza da tangente ao circulo C tirada de M). As circumferencias passantes pelos pontos assim determinados, tendo os respectivos centros na recta Mx, nos determinarão os valores de ρ, etc.

Podemos tambem empregar um processo geral, commum ás tres curvas determinadas pela equação (1), traçando previamente as directrises circulares da ellipse e hyperbole, e rectilinea da parabola. Para isso é preciso, com respeito ás duas primeiras, achar a posição do segundo fóco, e grandeza do eixo maior ou transverso; e na ultima a distancia do vertice ao fóco, a qual duplicada dará a distancia do mesmo fóco á directriz.

Deduz-se effectivamente da equação (1), designando por D a distancia entre os fócos, e por D' a grandeza do eixo maior na ellipse; e trocando estes valores para a hyperbole,

$$D=\frac{r\cos\alpha(a^2-r^2)}{a^2-r^2\cos^2\alpha},\ \text{e}\ D'=\frac{a(a^2-r^2)}{a^2-r^2\cos^2\alpha}.$$

Cada um d'estes valores se obterá pela construcção de uma quarta proporcional, recorrendo ao theorema do triangulo cortado por uma transversal.

Com effeito, traçando duas rectas concorrentes, formando um angulo não muito agudo GCG' (fig. 2), faremos CG e CG' eguaes aos maiores segmentos do numerador e denominador de $\frac{(a+r)(a-r)}{(a+r\cos\varphi)(a-r\cos\varphi)}$, a saber, $CG=a+r$, e $CG'=a+r\cos\varphi$; e dos pontos G e G' para o vertice, e contra o vertice, os segmentos $GA=a-r\cos\varphi$, $G'B=a-r$; tiraremos as rectas AB e GG', e teremos, como é sabido,

$$GC.G'B.G''A=G'C.G''B.GA$$

d'onde

$$\frac{(a+r)(a-r)}{(a+r\cos\varphi)(a-r\cos\varphi)}=\frac{G''B}{G''A}=\frac{D'}{a}=\frac{D}{r\cos\alpha}:$$

tomando pois $AD=a$ ou $=r\cos\alpha$, e tirando por B a recta BD' parallela a $G''D$, será $DD'=D'$ ou $=D$.

Temos pois a resolver o seguinte problema:

Dados os dois fócos d'uma ellipse ou hyperbole, e o eixo maior ou transverso, achar as intersecções da curva com uma recta dada.

Solução. — Fazendo centro em um dos fócos, e com um raio egual ao eixo maior, ou transverso, traçaremos a circumferencia directriz; e com o centro na recta dada, traçaremos nova circumferencia que passe pelo outro fóco: a corda commum a estas, e a recta tirada pelo mesmo fóco perpendicular á recta dada, determinarão um ponto (centro radical), d'onde tiraremos duas tangentes á circumferencia directriz. Os dois raios d'esta, dirigidos aos pontos de contacto das referidas tangentes, interceptarão a recta dada nos seus pontos communs com a curva. Funda-se este methodo na theoria dos eixos e centro radical.

No caso da parabola, é $a = r \cos\alpha$, e por conseguinte

$$\rho = \frac{r \operatorname{sen}^2 \alpha}{2r \cos\alpha (1 - \cos\varphi)}:$$

d'onde se deduz para a distancia do fóco á directriz $D' = \dfrac{r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2r \cos\alpha}$.

Este valor póde construir-se com facilidade, e traçando depois a directriz, obter-se-ha a intercepção da parabola com uma recta qualquer, empregando o processo geral anterior. Note-se porém, que, a circumferencia directriz é agora uma recta; traçando pois uma circumferencia que passe pelo fóco, tendo o centro na recta dada, a sua corda commum com a circumferencia directriz será a mesma directriz.

Tiraremos pois pelo fóco uma perpendicular á recta dada, a qual cortará a corda commum (directriz) n'um ponto O. Deveriamos agora tirar d'este ponto O duas tangentes á circumferencia directriz, o que é impossivel. Resolve-se porém esta difficuldade, tirando-as á circumferencia já existente; visto que o ponto O pertence ao eixo radical d'esta circumferencia e da directriz. Achadas as grandezas d'estas tangentes, rebatel-as-hemos sobre a directriz, girando com ellas sobre o ponto O: e d'estes novos pontos obtidos sobre a directriz, equidistantes do referido ponto O, tiraremos os respectivos raios, ou perpendiculares á sua direcção, os quaes vão cortar a recta dada nos seus pontos communs com a curva.

Observaremos ainda que, no problema proposto, visto a recta dada passar pelo fóco, a respectiva perpendicular tirada por esse ponto, será tangente á circumferencia tambem por elle traçada com o centro na recta dada; e por conseguinte a distancia que vae do ponto O, em que ella encontra o eixo radical já determinado, até ao dicto fóco, marcará tambem a grandeza das tangentes que se hão de tirar do mesmo ponto O á directriz.

Caso em que uma das circumferencias dadas é infinita.

Se tivermos não duas circumferencias a cortar por uma terceira, mas sim uma circumferencia e uma recta, a solução será a mesma que no primeiro caso, quando o ponto commum ás quatro circumferencias secantes fôr tomado na recta. Se porém esse ponto commum fôr tomado na circumferencia, a solução será mais simples, reduzindo-se a determinar uma quarta proporcional.

Seguindo a mesma ordem de raciocinios que no primeiro problema, notaremos que, o logar geometrico dos pontos que distam egualmente d'um ponto e d'uma recta, contando estas distancias á recta n'uma direcção dada, não orthogonal, é uma hyperbole.

Com effeito, o ponto dado é um dos fócos d'uma hyperbole, e a recta uma de suas directrizes; visto que girando com essas distancias obliquas parallelamente a si mesmas, até se tornarem perpendiculares á directriz, todas ellas encurtarão proporcionalmente; e de eguaes que eram aos respectivos raios vectores, se tornam todas menores e proporcionaes aos dictos raios vectores, que é a propriedade caracteristica da hyperbole com respeito ás suas directrizes.

Não deixa de ter um certo interesse a determinação da fórma e propriedades d'esta curva, quando ella é definida pela propriedade de serem as distancias obliquas ás directrizes eguaes ás distancias ao fóco.

Limitar-nos-hemos a deduzir os valores dos segmentos rectilineos mais importantes da figura, por ser notavel a fórma simples como todos se exprimem em funcção de tres d'entre elles, Sejam, pois (fig. 3) F o fóco, D E a directriz; F D e F E as direcções das distancias obliquas; e designemos por a, b e d os tres segmentos B F, B E = B D e F E = F D.

É facil reconhecer, que se nos derem o ponto P, pé das distancias á directriz de determinados pontos da curva, se acham estes, tirando as rectas P M e P N, respectivamente parallelas a D F e E F, a recta P F, e a perpendicular ao meio d'ella, cujas intersecções com as rectas PM e PN serão os pontos pedidos M e N.

Se o ponto P se deslocar até cahir em H, intersecção da directriz com a perpendicular a D F tirada por F, a perpendicular ao meio de F H só encontrará no infinito a distancia O H parallela a D F. A recta O H é pois uma das asymptotas da hyperbole: a sua symetrica O H' será a outra asymptota, e o ponto O o respectivo centro.

Dos triangulos similhantes B F H e B E F, e mais triangulos constantes da figura, deduzem-se as seguintes relações

$$BH : BF :: BF : BE$$

d'onde

$$BH = \frac{a^2}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\overline{BH}^2 = BO \times BF$$

d'onde

$$BO = \frac{a^3}{b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\overline{OH}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{BH}^2 = \frac{a^4 (a^2 + b^2)}{b^4} = \frac{a^4 d^2}{b^4}$$

e logo

$$HO = \frac{a^2 d}{b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Seja A o ponto onde a curva corta a recta F B, será $AQ = AF$, e logo

$$BA : AF :: a : d,$$

d'onde

$$BA + AF : a + d :: BA : a :: AF :: d$$

e portanto

$$BA = \frac{a^2}{a+d} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(7)},$$

$$AF = \frac{ad}{a+d} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(8)}.$$

$$AO = AB + BO = \frac{a^2}{a+d} + \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^2(d-a)}{d^2-a^2} + \frac{a^3}{b^2},$$

logo

$$AO = \frac{a^2 d}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(9)}$$

e por conseguinte

$$AO = HO.$$

Tirando A L perpendicular a B F, ter-se-ha

$$OL : OH :: OA : OB,$$

d'onde

$$OL = \frac{a d^2}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(10)}$$

$$OF = OA + AF = \frac{a^2 d}{b^2} + \frac{a d(d-a)}{b^2} = \frac{a d^2}{b^2} \dots \text{(11)}$$

logo

$$OF=OL,\quad HL=AF,\quad AL=FH=\sqrt{FB.FO}=\frac{ad}{b}\dots(12)$$

$$BQ:BA::BE:BF,$$

d'onde

$$BQ=\frac{ab}{a+d}\dots\dots\dots\dots\dots(13)$$

etc., etc.

Passando agora á questão proposta, substituiremos os valores dos semi-eixos e excentricidade (formulas 6, 11, 12)

$$A=\frac{a^2d}{b^2},\ B=\frac{ad}{b}\ \text{e}\ C=\frac{ad^2}{b^2},$$

na equação polar da hyperbole

$$\rho=\frac{c^2-A^2}{A-c\cos\varphi},$$

de que obteremos

$$\rho=\frac{ad}{a-d\cos\varphi}.$$

Esta formula póde tambem deduzir-se directamente como se segue:

Considerando um raio qualquer F M, a respectiva distancia obliqua MG=FM, e bem assim a recta MP, perpendicular á directriz, ter-se-ha

$$FM=MG\ \text{ou}\ \rho:MP::d:a;$$

mas

$$MG=a+\rho\cos\varphi,$$

logo

$$\rho a=d(a+\rho\cos\varphi),$$

e finalmente

$$\rho = \frac{a\,d}{a - d\cos\varphi} \quad (14).$$

Poderiamos resolver o problema proposto pela construcção do valor de ρ determinado por esta equação, que é, como asseveramos, uma quarta proporcional aos segmentos $a - d\cos\varphi$, a e d: mas póde obter-se outra construcção ainda mais facil, observando que dos triangulos similhantes IMD e IFP, se deduz

$$d : \mathrm{FI} :: \rho : \mathrm{FI} - \rho,$$

d'onde

$$d + \mathrm{FI} : \mathrm{FI} :: d : \rho,$$

e finalmente

$$\rho = \frac{d \times \mathrm{FI}}{d + \mathrm{FI}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Esta mesma recta IF encontra a curva em outro ponto M' (fig. 3) (que approximámos da directriz para não alongar a figura) relativamente ao qual se tem

$$d : \mathrm{FI} :: \mathrm{M'P'} : \mathrm{M'I}, \text{ sendo } (\mathrm{M'P'} = \mathrm{M'F} = \rho),$$

ou

$$d : \mathrm{FI} :: \rho : \rho - \mathrm{FI};$$

d'onde

$$d - \mathrm{FI} : \mathrm{FI} :: d : \rho;$$

e finalmente

$$\rho = \frac{d \times \mathrm{FI}}{d - \mathrm{FI}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Incidentemente observaremos que d'estas duas formulas se deduz, fazendo $\mathrm{FI} = \infty$,

$$\rho = \pm d;$$

o que nos diz que a ordenada que passa pelo fóco é egual a FE.

Esta geração da hyperbole pelas distancias obliquas á directriz, dá logar a uma applicação interessante do methodo de Roberval na determinação das tangentes.

Com effeito, na geração cynematica da curva, a direcção do movimento do ponto m será tambem a da tangente á curva no mesmo ponto. Este ponto póde reputar-se conduzido pelo vector $\mathrm{F}m$, ou pela distancia mp, obliqua á directriz. No primeiro caso o movimento será considerado como resultante d'um escorregamento mq, segundo mf (parte de mf), e uma rotação em torno de F, pela qual o ponto m percorrerá a recta qs perpendicular a fm. No segundo caso o ponto m executará sobre mp o escorregamento $mq' = mq$ (por ser sempre $mf = mp$), e a translação $q's$, parallela á directriz: e visto que a direcção do movimento resultante é só uma, ella ficará determinada pela recta que unir o ponto m com a intersecção das rectas qs e $q's$.

Como a grandeza do escorregamento é arbitraria, tome-se o vector $m\mathrm{F}$ para a representar; então a perpendicular qs será tirada pelo ponto F. O escorregamento na distancia mp é toda esta distancia mp, e logo a translação do ponto m se fará sobre a propria directriz, d'onde:

A tangente á hyperbole em qualquer de seus pontos é a recta que unir esse ponto com aquelle ponto T da directriz em que esta é interceptada pela perpendicular ao raio vector tirada pelo fóco.

Se prolongarmos o vector $\mathrm{F}m$ até encontrar a curva do outro lado, a tangente em o novo ponto m' tambem passará pelo mesmo ponto T, logo:

A directriz da hyperbole é o logar geometrico dos vertices dos angulos circumscriptos, cujas cordas de contacto passam pelo fóco.

(Continúa).

INDICE