

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. Francisco Gomes Teixeira

Professor de Mathematica na Universidade de Coimbra,
Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa
e da Sociedade de Sciencias Physicas e Naturaes de Bordeaux

~~~~~  
VOLUME III  
~~~~~

COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1881

JOURNAL

DE

SCIENCIAS MATEMATICAS E ASTRONOMICAS

LIBRIGADO

Publicado por el Gobierno de Chile, en virtud de un decreto de 1827, en virtud del cual se estableció el Observatorio de Valparaíso, y se le asignó el título de Observatorio Nacional.

Este tomo contiene los trabajos de los astrónomos chilenos, desde el año 1827 hasta el de 1830, en el Observatorio de Valparaíso, y en el de Santiago, y los trabajos de los matemáticos chilenos, desde el año 1827 hasta el de 1830.

VOLUMEN III

COMUNDA

IMPRESA DE ENTERRIÑOS

1831

SUR UNE QUESTION PROPOSÉE
DANS LE JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (*)

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Inscrire un triangle dans un cercle donné, étant aussi donnés les points milieux des arcs sous-tendus par ses côtés.

SOLUTION

En supposant le problème résolu, soit abc le triangle demandé, inscrit dans le cercle donné (C), et m_1 , m_2 et m_3 les points donnés, ou les milieux des arcs ab , bc et ca . La corde bm_3 passant par le point milieu m_3 de l'arc ac sera la bissectrice de l'angle abc ; et puisque les rayons Cm_1 , Cm_2 et Cm_3 du cercle (C) sont perpendiculaires aux côtés ab , bc et ca du triangle demandé, il s'ensuit que cette bissectrice sera parallèle à celle de l'angle complémentaire m_1Cm_2 , ou perpendiculaire à la corde m_1m_2 . Pour les sommets a et c nous auront de même que les cordes m_2a et m_1c seront perpendiculaires aux cordes m_1m_3 et m_2m_3 .

Donc, les sommets a , b et c du triangle demandé abc seront les points d'intersection du cercle (C) avec les perpendiculaires m_1c , m_2a et m_3b , abaissées des sommets m_1 , m_2 et m_3 du triangle donné $m_1m_2m_3$ sur les côtés opposés m_2m_3 , m_1m_3 et m_1m_2 .

Si nous considérons les extrémités n_1 , n_2 et n_3 des diamètres m_1Cn_1 , m_2Cn_2 et m_3Cn_3 , ou les points milieux des arcs supplémentaires des arcs am_1b , bm_2c et cm_3a nous aurons le triangle auxiliaire $n_1n_2n_3$, qui donnera comme précédemment le triangle inscrit $a'b'c'$ dont les côtés seront sous-tendus par ces arcs supplémentaires, et qui par suite répondra à la seconde solution du problème.

(*) Jornal publicado em Paris pelos srs. Bourget e Koehler.

Remarque générale

D'après ce que nous venons de dire nous avons d'abord ce théorème :

Les trois hauteurs $m_2 \alpha$, $m_3 \beta$ et $m_1 \gamma$ d'un triangle $m_1 m_2 m_3$ coupent la circonférence de cercle circonscrite (C) en points a , b et c , qui sont les extrémités des arcs $a b$, $b c$ et $c a$ ayant pour points milieux les sommets m_1 , m_2 et m_3 de ce triangle.

Si nous considérons maintenant le triangle abc assujetti à avoir ses côtés ab , bc et ca constamment parallèles à eux-mêmes, ou perpendiculaires aux diamètres $m_1 C n_1$, $m_2 C n_2$ et $m_3 C n_3$, et deux de ses sommets sur la circonférence de cercle (C), le troisième sommet resté libre décrira une ellipse $m_3 v' b v n_3 b'$ ou (E).

En effet, soient a et c les sommets qui se trouvent continuellement sur la circonférence, et b le sommet resté libre, étant μ_3 le point milieu du côté ab , ou son intersection avec le diamètre $m_3 C n_3$. Ce triangle étant donc continuellement parallèle à lui-même les carrés des droites parallèles $\mu_3 b$ seront entre eux comme les carrés des demi-cordes $\mu_3 a$. Or, $\mu_3 a$ étant perpendiculaire à $m_3 C n_3$, on a

$$\frac{\mu_3 b^2}{\mu_3 a^2} = m_3 \mu_3 \times \mu_3 n_3,$$

donc le carré de la droite $\mu_3 b$ sera au rectangle $m_3 \mu_3 \times \mu_3 n_3$ dans un rapport constant, pour chacun des points de la courbe, et par suite cette dernière est une ellipse ayant $m_3 C n_3$ pour l'un de ses diamètres, et les parallèles $\mu_3 b$ pour ordonnées obliques (*).

L'ellipse décrite par le point b sera évidemment concentrique au cercle considéré (C), et aura pour demi-diamètre conjugué à $m_3 C n_3$ la droite Cf , menée du centre C parallèlement à $\mu_3 b$, et son extrémité f sera la position du sommet libre du triangle variable abc , quand le côté ac deviendra le diamètre $d C e$ perpendiculaire au diamètre $m_3 C n_3$. Les deux autres points d'intersection b et b' de l'ellipse (E) et du cercle (C), que nous avons déjà déterminés élémentairement, seront sur un autre diamètre $b C b'$ de cette ellipse.

(*) Voyez *Applications d'Analyse et de Géométrie*, par J. V. Poncelet, t. II, p. 43 et suivantes.

Comme on sait, on peut encore démontrer que le lieu géométrique du sommet libre b est une ellipse en considérant le cercle (C) comme la courbe d'entrée, commune à deux cylindres, et la corde ac comme le trace de l'un des plans parallèles, qui coupent les deux cylindres suivant quatre génératrices, deux de celles-ci se projetant suivant les côtés ba et bc du triangle variable ou générateur abc . Ainsi la courbe $m_3 v' b n_3 b'$ sera la projection de la courbe plane de sortie, et par suite de même espèce que la courbe d'entrée (C).

Donc, pour déterminer l'intersection d'une ellipse (E), donnée par deux diamètres conjugués $m_3 C n_3$ et $f C g$, avec un cercle (C) décrit sur l'un $m_3 C n_3$ de ces diamètres conjugués comme diamètre, nous tirons le diamètre $d C e$ de ce cercle perpendiculaire au diamètre $m_3 C n_3$, par les extrémités duquel nous menons les cordes $m_3 b$ et $n_3 b'$ ou $n_3 b$ et $m_3 b'$ parallèles à la bissectrice de l'angle $d f e$, ou à celle de son angle supplémentaire, lesquelles couperont le cercle dans les points demandés b et b' .

Les côtés $e f$ et $d f$ du triangle $d e f$ sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes a et b de l'ellipse (E).

En effet, traçons le grand axe $u C v = 2.a$, et le petit axe $u' C v' = 2.b$, ou les parallèles à la bissectrice de l'angle $d f e$ et à celle de son supplément, étant q, p et i', e'' les deux couples d'intersections du premier et du second axe avec les côtés $e f$ et $d f$ du triangle $d f e$, et tirons par C les droites $C e'$ et $C d'$ parallèles à ces côtés, lesquelles, coupant dans les points e' et d' la droite $e' f d'$, parallèle au troisième côté $d e$ de ce triangle, déterminent le triangle $d' C e'$ inversement égal à celui-ci.

Comme on sait les deux longueurs $p f$ et $q f$ étant égales, l'une au demi-grand axe $C v = a$ et l'autre au demi-petit axe $C v' = b$; et les points milieux o et o' des segments $q o p$ et $e'' o' i'$ étant les centres des cercles $C q d' p$ et $C e'' e' i'$ décrits sur ces segments, ou sur les segments $C o d'$ et $C o' e'$ comme diamètres, les triangles $C p e$ et $d' q f$ seront égaux, ainsi que les triangles $C i' d$ et $e' e'' f$, d'où il résulte $e p = q f = b$ ou $e q = p f = a$, et $i' d = f e' = b$ ou $i' f = d e' = a$, et par suite

$$e f = a + b \text{ et } d f = a - b.$$

D'après cela, étant donnée la somme et la différence des demi-axes a et b , et un diamètre quelconque $m_3 C n_3$ d'une ellipse (E), nous déterminerons immédiatement son conjugué $f C g$.

Voyons maintenant comme nous pouvons déterminer l'intersection d'un cercle (C') avec une ellipse concentrique (E), donnée par deux demi-diamètres conjugués Cn_3 et Cf .

Pour cela, menons par le point C la perpendiculaire dCe sur Cn_3 , en prenant d'un et autre côté de C les deux longueurs Cd et Ce égales à Cn_3 et traçons le triangle dfe ; et en faisant centre dans le point milieu o du côté ef , avec le rayon oC , décrivons un cercle, qui, coupant ce côté en q et p donnera les directions Cq et Cp des axes, dont la grandeur sera $2.eq=2.a$ et $2.qf=2.b$. Puis traçons le triangle $d_1f_1e_1$ étant ses deux côtés d_1f_1 et e_1f_1 égaux aux côtés df et ef du triangle dfe , le troisième côté d_1e_1 étant égal au diamètre du cercle (C'). Cela posé, déterminons les points milieux C' et o_1 des côtés d_1e_1 et e_1f_1 , et en faisant centre en o_1 avec le rayon o_1C' décrivons, comme précédemment, un cercle, qui coupera e_1f_1 aux points p_1 et q_1 . Finalement en faisant coïncider le point C' avec le point C, ainsi que les droites rectangulaires $C'p_1$ et $C'q_1$ avec les droites Cp et Cq le troisième côté d_1e_1 du triangle $d_1f_1e_1$ sera le diamètre du cercle (C') perpendiculaire au diamètre $m'_3Cn'_3$ de ce cercle, dont les extrémités m'_3 et n'_3 représentent deux points de l'intersection demandée.

Les deux autres points d'intersection b_1 et b'_1 se détermineront comme plus haut, en menant par m'_3 et n'_3 les droites m'_3b et $n'_3b'_3$ parallèles au demi-axe Cv .

Plusieurs autres problèmes relatifs à l'ellipse (E) sont facilement résolus en s'appuyant sur les principes qu'on vient d'étudier.

SOBRE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

POR

L. F. MARRECA FERREIRA

Dadas duas rectas, que se cortam n'um plano, e um ponto, tirar por este transversaes, satisfazendo á condição, de que os rectangulos dos segmentos, definidos pelas rectas e o ponto, sejam equivalentes a um determinado rectangulo ().*

Circumferencias auxiliares

Os dados que a fig. 1.^a representa são as rectas AA₁ e BB₁ e o ponto M; K o rectangulo dos segmentos; α o angulo AVB em que existe M. Tire-se MP perpendicularmente a VB e determine-se sobre esta recta um ponto Q, tal que MP × MQ = K; sobre MQ, como diametro, construa-se uma circumferencia, e se esta curva interceptar AA₁ em i e i', teremos nas rectas Mi e M i' o seguinte:

$$Mi \times Mg = M i' \times M g' = MP \times MQ = K.$$

Sendo AA₁ tangente á circumferencia, apenas ha uma soluçõ, e nenhuma no caso de se não cortarem.

Os pontos i e i' (no caso de duas intersecções) podem estar ambos situados d'um mesmo lado de V, quer sobre VA, quer sobre VA₁; ou um sobre VA, outro sobre VA₁; e como AA₁ não póde cortar a circumferencia em mais de dois pontos, segue-se que esta curva não póde fornecer mais de duas soluções. Vê-se por outro lado que, sendo a circumferencia descripta o

(*) Amyot e diversos outros auctores, que têm proposto este problema, indicam succintamente o modo de se obter as soluções d'elle; nenhum, porém, o considerou digno de estudo especial, como um dos mais interessantes problemas de geometria elemental.

logar geometrico dos extremos i, i' ... das transversaes, cujos respectivos rectangulos, produzidos pelos segmentos, são equivalentes ao rectangulo dado, não póde haver transversal alguma, satisfazendo ao problema, que não seja obtida no angulo A_1VB por intermedio da circumferencia.

O angulo A_1VB não admite pois mais de duas transversaes nas circumstancias pedidas.

Tire-se MP_1 perpendicularmente a AA_1 , determine-se Q_1 pela condição $MP_1 \times MQ_1 = K$, construa-se uma nova circumferencia sobre MQ_1 , determinem-se as intersecções d'esta com BB_1 , e as transversaes para estes pontos dirigidas, resolverão o problema. A fig. 1.^a apresenta as duas intersecções g e g' , abaixo de V ; logo n'este caso as transversaes correspondem ao angulo A_1VB , e pelo que ficou dito devem coincidir com as anteriores, isto é, a segunda circumferencia não introduziu soluções novas. A fig. 1.^a apresenta igualmente duas soluções.

Constroem-se as soluções dentro do angulo AVB , em que existe M (fig. 2.^a), tirando $B'B'_1$, parallela a BB_1 , e á mesma distancia de M ; determinam-se as soluções correspondentes aos angulos AV_1B' e $A_1V_1B'_1$. Consideremos uma d'estas soluções Mn_1p ; será $Mp \times Mn_1 = K$; mas $Mn_1 = Mn$, logo $Mp \times Mn = K$. Podiamos tirar $A'A'_1$ parallelamente a AA_1 , e á mesma distancia do ponto M , obtendo-se ainda os mesmos resultados.

Podemos obter as soluções dentro do angulo α sem o recurso d'aquellas circumferencias auxiliares, tirando, por exemplo, por M a recta pMq (fig. 3.^a), parallela a AV , marcando sobre ella um ponto q , que satisfaça á condição $Mp \times Mq = K$, e, suppondo que rs é uma solução, serão semelhantes os triangulos qrm e Mps , e os angulos em r e p iguaes entre si e a V ; logo construa-se sobre Mq o segmento capaz de α , determinem-se-lhe as intersecções com AV e os pontos r e s' , assim obtidos, determinarão duas soluções.

Para haver uma solução, é necessario que a circumferencia descripta seja tangente a VA n'um ponto k_1 ; mas, como VA é por construcção parallela a Mq , segue-se que a perpendicular k_1m , abaixada do ponto de tangencia sobre Mq , divide esta distancia

em partes iguaes; logo o angulo mk_1M é igual a $\frac{\alpha}{2}$, e como k_1m é perpendicular a VA , a solução unica k_1M será perpendicular á bissectriz de α ; o que se conclue ainda do seguinte facto:

As soluções rs e $r's'$ da fig. 3.^a são anti-parallelas, e como por um ponto situado dentro d'um angulo não podem passar mais de duas rectas anti-parallelas, dentro de α haverá só duas soluções, e no caso d'uma qualquer d'ellas ser perpendicular á bissectriz, a segunda confundir-se-ha com ella.

Se em lugar de tirarmos a recta pq , parallela a AV, tirassemos por M uma outra parallela a VB, fazendo construcções analogas, determinaríamos as intersecções s e r' sobre VB, obtendo-se as soluções anteriores.

Conclue-se, portanto, que o numero maximo das que podem existir dentro do angulo é de duas, e como este caso corresponde evidentemente ao da fig. 1.^a, visto que ambos se resolvem do mesmo modo, attendendo ao primeiro processo empregado na determinação das soluções dentro do angulo AVB, segue-se que o numero maximo das que admite o problema é de quatro.

Se prolongassemos (fig. 1.^a) a recta MP e sobre ella tomassemos um ponto Q_1 , symetrico de Q em relação a M, e sobre MQ_1 , como diametro, construíssemos uma circumferencia, ella gosaria em relação ao angulo AVB da mesma propriedade que a construida sobre MQ; prolongando igualmente MP_1 , obteríamos ainda uma outra circumferencia, e ambas determinaríam as soluções dentro do angulo; facil é, porém, de ver que estes dois logares geometricos são exactamente os mesmos que se empregaram no segundo processo, ainda que determinados por propriedades diversas.

Condições da tangencia

Para que uma circumferencia com o centro sobre MP (fig. 4.^a), e passando por M, seja tangente a AA_1 , deve o seu centro s estar equidistante de M e da recta, ou ser sk (perpendicular a AA_1) = sM . O triangulo ksM é isosceles, ou Mk perpendicular á bissectriz do angulo em s ; logo é Mk parallello á bissectriz de AVB, ficando assim determinados os pontos k e s .

Do mesmo modo se obtêm os pontos s' e k_1 . s e s' são os pontos em que MP intercepta a parabola com o foco em M, tendo por directriz A A_1 .

Podemos determinar igualmente os pontos s_1 e s'_1 sobre MP_1 , bem como k' e k'_1 .

Os pontos M , k' e k estão situados em linha recta, por isso que a recta Mk' deve ser paralela á bissectriz de α , assim como a recta Mk .

Da mesma sorte os pontos M , k_1 e k'_1 devem estar em linha recta; assim facilmente se reconhece que Mk_1 deve ser perpendicular á bissectriz de α ; o mesmo succede com Mk'_1 .

Deslocando-se sobre o plano o ponto M , a recta Mk caminha parallelamente a si mesma, de sorte que, estando M sobre a bissectriz, k e k' confundem-se em V ; caminhando para a direita d'esta ficará k' (traço sobre BB_1) abaixo de k (traço sobre AA_1), dando-se o contrario para o lado opposto.

Pela similhaça dos triangulos ksM , $k's_1M$, MkP_1 e $Mk'P$, tem-se

$$\frac{Ms}{Ms_1} = \frac{Mk}{Mk'} = \frac{MP_1}{MP}$$

d'onde

$$MP \times Ms = MP_1 \times Ms_1.$$

Os diametros das circumferencias tangentes em k e k' aos lados do angulo (respectivamente) serão $2Ms$ e $2Ms_1$; teremos portanto

$$MP \times 2Ms = MP_1 \times 2Ms_1 = C. \dots \dots (1)$$

designando C o valor do rectangulo, correspondente a uma posição particular do ponto e dos lados do angulo.

Logo, para o valor $K = C$ e determinação das soluções nos angulos A_1VB e AVB_1 construiremos a circumferencia correspondente a cada um, será uma d'ellas tangente em k , a outra em k' , e como estes dois pontos estão em linha recta com M , segue-se que se obtem como solução unica para aquelles angulos a transversal Mk' , sendo portanto

$$Mk \times Mk' = C.$$

Deduz-se ainda que os valores de K , inferiores a C , exigindo a construcção de circumferencias, que não encontram AA_1 e BB_1 , não dão soluções nos angulos considerados; quando forem superiores áquelle valor fornecem duas soluções.

Teriamos da mesma sorte

$$MP_1 \times 2Ms'_1 = MP' \times 2Ms' = C' \dots \dots \dots (2)$$

e a transversal Mk'_1k_1 , perpendicular á bissectriz de α , será a unica solução dentro d'este angulo na hypothese $K = C'$; não existindo nenhuma para $K < C'$ e havendo duas para $K > C'$.

Dividindo (1) por (2) e attendendo a que $MP = MP'$, vem

$$\frac{Ms}{Ms'} = \frac{Ms_1}{Ms'_1} = \frac{C}{C'}; \text{ ou } C' = C \cdot \frac{Ms'}{Ms}.$$

Se é agudo o angulo AVB , a perpendicular MP encontrará AA_1 abaixo de V , ou na parte VA , não podendo ser sobre VA_1 , porque o angulo A_1VB é então obtuso.

N'este caso $s'k_1$ será menor que a sua parallela sk , e como $s'k_1 = Ms'$ e $sk = Ms$ será $Ms > Ms'$ ou $C' < C$; podemos, pois, escrever, fazendo $\lambda > 1$

$$\alpha < 90^\circ \dots \dots \dots C' = \frac{C}{\lambda}$$

sendo recto o angulo AVB , será $sk = s'k_1$ ou $Ms = Ms'$, logo

$$\alpha = 90^\circ \dots \dots \dots C' = C$$

se fôr obtuso, a intersecção de MP com AA_1 ha de fazer-se na parte VA_1 ; será portanto $sk < s'k_1$ ou $Ms < Ms'$ e

$$\alpha > 90^\circ \dots \dots \dots C' = \lambda C.$$

Vê-se facilmente que no primeiro caso estará s' mais proximo de M que s_1 ; no segundo estes pontos coincidem, sendo além d'isso a recta $k'k'_1$ parallela a kk_1 ; no terceiro o ponto s_1 será o mais proximo de M .

No caso de tangencia dentro do angulo AVB , a transversal Mk_1 , prolongada até interceptar a recta BB_1 , constitue a unica solução; a distancia de M a esta ultima recta será igual a Mk'_1 , visto que $MP = MP'$. No caso sujeito teremos pois

$$Mk_1 \times M'k'_1 = C'.$$

Determinação das soluções

$$a) \quad \alpha < 90^\circ \dots\dots C' = \frac{C}{\lambda}$$

A valores de R, menores que $\frac{C}{\lambda}$, não corresponde solução alguma; para $K = \frac{C}{\lambda}$ obtem-se uma no angulo em que existe M,

perpendicular á bissectriz de α ; para valores maiores haverá duas soluções n'esse angulo; quando $K = C$ obtem-se uma nos angulos verticalmente oppostos AVB_1 e BVA_1 ; por conseguinte esta hypothese fornece tres soluções. Sendo $K > C$ ha duas dentro de α e duas nos outros angulos, o que prefaz uma totalidade de quatro.

Se o ponto dado estiver na bissectriz de α , obtem-se o mesmo numero de soluções em cada uma das hypotheses precedentes; as quaes, no caso de não serem fornecidas pela bissectriz ou sua perpendicular, occuparão posições symetricas em relação a ambas estas linhas, ou sómente a uma d'ellas, quando forem duas apenas.

$$b) \quad \alpha = 90^\circ \dots\dots C' = C$$

Não ha solução alguma quando $K < C$; a $K = C$ correspondem duas, sendo a primeira n'um dos angulos superiores, e outra dentro de α , dando-se em ambos os casos a tangencia das circumferencias auxiliares; da hypothese $K > C$ resultam quatro soluções, sendo duas nos angulos superiores e duas dentro de α (*).

N'esta hypothese dá-se a singularidade de ser sempre par o numero de soluções, como se conclue d'esta discussão; mas o facto é susceptivel d'uma demonstração directa; prova-se effectivamente que toda a solução, fornecida pelos angulos superiores, tem uma correspondente dentro do angulo α , sendo as respectivas direcções perpendiculares entre si.

$$c) \quad \alpha > 90^\circ \dots\dots C' = \lambda C$$

Valores de K inferiores a C não fornecem solução alguma; quando $K = C$ obtem-se uma solução nos angulos superiores, e as circumferencias auxiliares são alli tangentes ás duas rectas;

(*) Obtinham-se os mesmos resultados, considerando-se o ponto dado sobre a bissectriz de α .

d'estes angulos provêm duas soluções, quando $K > C$; a $K = \lambda C$ corresponde uma solução dentro de α , e portanto esta hypothese fornece tres soluções; sendo $K > \lambda C$ haverá duas dentro de α e duas nos angulos superiores, o que prefaz uma totalidade de quatro.

Em todas as hypotheses precedentes, quando o ponto M estiver na bissectriz de α , os pontos k e k' confundem-se em V, e n'este vertice se verifica a tangencia das circumferencias auxiliares superiores; do mesmo modo os pontos k_1 e k'_1 se confundirão em V_1 , vertice em que se verifica a tangencia das circumferencias auxiliares inferiores, sendo $C = \overline{MV}^2$ e $C' = \overline{MV}_1^2$.

A seguinte tabella apresenta as soluções que resultam das differentes hypotheses :

Valores de K	$\alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha > 90^\circ$
	$C' = \frac{C}{\lambda}$	$C' = C$	$C' = \lambda C$
$K < \frac{C}{\lambda}$	0	0	0
$K = \frac{C}{\lambda}$	1	0	0
De $K = \frac{C}{\lambda}$ a $K = C$ (exclusivé)	2	0	0
$K = C$	3	2	1
De $K = C$ a $K = \lambda C$ (exclusivé)	4	4	2
$K = \lambda C$	4	4	3
$K > \lambda C$	4	4	4

O que fica exposto permite a resolução do seguinte interessante problema:

Dados um ponto e um angulo, no mesmo plano, determinar o maximo e minimo dos rectangulos dos segmentos, comprehendidos sobre uma transversal entre o ponto e os lados do angulo.

Sendo $\alpha < 90^\circ$, será $Mk \times Mk'$ o minimo para os dois angulos superiores, e $Mk_1 \times Mk'_1$ o minimo para o angulo α ; dando a segunda transversal o minimo relativo.

$\alpha = 90^\circ$ — dois minimos iguaes $Mk \times Mk' = Mk_1 \times Mk'_1$.

$\alpha > 90^\circ$ — minimo relativo $Mk \times Mk'$; o segundo é $Mk_1 \times Mk'_1$.

Os maximos em numero de quatro correspondem, como é evidente, ás transversaes parallelas aos lados do angulo, e provenientes da hypothese $K = \infty$.

Estas parallelas constituem limites de posição para as soluções comprehendidas dentro do angulo.

Nota. — Supponhamos na fig. 6.^a que AV é perpendicular a VB e AB perpendicular a mr ; teremos pela similhaça dos triangulos Amr e r_1mB o seguinte:

$$\begin{aligned} & Am : rm :: mr_1 : mB \\ \text{d'onde} \quad & Am \times mB = rm \times mr_1 \dots \dots \dots (1). \end{aligned}$$

Pela similhaça de AVB e rVr_1

$$\begin{aligned} & rV : r_1V :: VB : AV \\ \text{d'onde} \quad & rV \times AV = r_1V \times VB \dots \dots \dots (2). \end{aligned}$$

Conclue-se de (1) que sendo recto o angulo AVB, e obtida a solução, dentro do angulo, $K = Am \times mB$, haverá outra dada pela transversal mr , que é perpendicular áquella linha.

De (1) e (2) deduzem-se dois principios geraes e elementares, applicaveis a uma curva qualquer, referida a eixos orthogonaes e já conhecidos :

— O producto dos segmentos da tangente a uma curva, comprehendidos entre o ponto de contacto e dois eixos orthogonaes, é igual ao producto dos segmentos da normal, comprehendidos entre o ponto de contacto e os mesmos eixos.

— O producto das distancias da origem aos pés da tangente e normal sobre um eixo, é igual ao producto das distancias d'esse ponto aos pés das mesmas rectas sobre o outro eixo.

QUESTÃO PROPOSTA N.º 18

Demonstrar que o resto da divisão do producto de numeros inteiros consecutivos

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+2p-1)$$

pela somma dos mesmos numeros

$$a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+2p-1),$$

sendo o primeiro numero da fórmula

$$a = 2^{2p-1} \cdot p - \alpha$$

e α um inteiro menor que $2p-1$, é o mesmo que o resto da divisão de

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots [2(p-\alpha)-3]^2 [2(p-\alpha)-1] [2(p-\alpha)+1]^2 \dots (2p-1)^2$$

por $2a+2p-1$.

Em segundo lugar pede-se a expressão analytica, inteira relativamente a todos os numeros que n'ella entram, da differença entre as fracções

$$\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+2p-1)}{a+a+1+a+2+\dots+a+2p-1}$$

e

$$\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots [2(p-\alpha)-3]^2 [2(p-\alpha)-1] [2(p-\alpha)+1]^2 \dots (2p-1)^2}{2a+2p-1}$$

GOMES TEIXEIRA (PEDRO).

**SOBRE A TRANSFORMAÇÃO DAS FUNÇÕES X_n DE LEGENDRE
EM INTEGRAL DEFINIDO**

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

Alfere alumno de Artilheria

São de grande importancia em Analyse, como é sabido, as expressões da fórma

$$X_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

conhecidas pelo nome de *polynomios de Legendre*, pois foi este illustre geometra quem as primeiro estudou por occasião das suas investigações sobre a attracção dos espheroides e figura dos planetas.

Tem-se dado varias transformações d'estas funcções notaveis empregando a integração definida. Entre outras citaremos, por exemplo, as duas seguintes (*):

$$1.^a \quad X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{x^2 - 1} \cdot \cos \omega)^n d\omega$$

$$2.^a \quad X_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{1}{2} \theta \cdot \cos n \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - x)}} + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \cos n \theta d\theta}{\sqrt{2(x - \cos \theta)}}$$

(*) M. Bertrand — *Traité de Calcul etc.*, vol. II, pag. 502.

quando é $\cos \theta > \cos \varphi$; e

$$X_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \theta \sin n \theta d \theta}{\sqrt{2}(\cos \theta - x)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \frac{1}{2} \theta \sin n \theta d \theta}{\sqrt{2}(x - \cos \theta)}$$

quando é $\cos \theta < \cos \varphi$. N'estas fórmulas, devidas a Derichlet, é

$$\varphi = \arccos(x).$$

Vamos agora dar uma outra transformação de X_n , empregando o integral definido:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\gamma}{A\gamma^2 + 2B\gamma + C} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ad\gamma}{(A\gamma + B)^2 + (AC - B^2)}$$

em que

$$AC - B^2 > 0$$

para a função affecta do signal integral ser sempre finita. Os coefficients A, B, C representam quantidades reaes.

Se fizéssemos

$$A\gamma + B = z\sqrt{AC - B^2}$$

os limites $\mp\infty$ e $\pm\infty$ de z corresponderão aos limites $-\infty$ e $+\infty$ de γ , conforme o coefficiente A é positivo ou negativo, portanto (*):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\gamma}{(\pm A)\gamma^2 + 2B\gamma + C} = \frac{1}{\sqrt{(\pm A)C - B^2}} \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{\sqrt{(\pm A)C - B^2}}$$

(*) M. Hermite—*Cours d'Analyse*, pag. 288.

Para fazer, pois, a transformação desejada, consideremos o coeficiente A negativo e o coeficiente C = + A, d'onde resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\gamma}{A(1-\gamma^2) + 2B\gamma} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{A^2+B^2}} =$$

$$= \pi \cdot \sqrt{-1} (A^2+B^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Supponhamos $\alpha < 1$ e

$$\begin{cases} -A = (\alpha \cos \varphi - 1) \\ B = \alpha \operatorname{sen} \varphi. \end{cases}$$

Fazendo esta hypothese na fórmula antecedente, vem

$$(1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi \sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\gamma}{(1 - \alpha \cos \varphi)(1 - \gamma^2) + 2\gamma \alpha \operatorname{sen} \varphi}$$

mas

$$(1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n \alpha^n$$

e

$$\frac{1}{(1 - \gamma^2) - \alpha [\cos \varphi (1 - \gamma^2) - 2\gamma \operatorname{sen} \varphi]} =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{[\cos \varphi (1 - \gamma^2) - 2\gamma \operatorname{sen} \varphi]^n}{(1 - \gamma^2)^{n+1}} \alpha^n$$

logo

$$P_n = \frac{1}{\pi \sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\cos \varphi (1 - \gamma^2) - 2\gamma \operatorname{sen} \varphi]^n}{(1 - \gamma^2)^{n+1}} d\gamma.$$

*

Finalmente para $\cos \varphi = x$ vem

$$X_n = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(1-\gamma^2) - 2\gamma\sqrt{1-x^2}]^n}{(1-\gamma^2)^{n+1}} d\gamma$$

ou

$$X_n = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_0^{\infty} \frac{[x(1-\gamma^2) - 2\gamma\sqrt{1-x^2}]^n}{(1-\gamma^2)^{n+1}} d\gamma,$$

transformação a que pretendíamos chegar.

PRELECCÃO SOBRE A ORIGEM E SOBRE OS PRINCIPIOS
DO CALCULO INFINITESIMAL
FEITA AOS ALUMNOS DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Vou expor as modificações por que foi passando o methodo seguido pelos geometras antigos para resolver certas questões relativas ás linhas e superficies curvas, até ser reduzido em algorithmo pela descoberta do Calculo infinitesimal. Depois exporei os principios d'este calculo, desenvolvendo o que escrevi sobre este assumpto na minha nota—*Sur les principes du Calcul infinitesimal*, publicada nas *Memorias da Sociedade de Sciencias Physicas e Naturaes de Bordeaux* (2.^a serie, vol. IV).

I

Quando os mathematicos antigos queriam procurar as propriedades de uma linha curva, e não as podiam achar directamente, consideravam um polygono inscripto n'ella e achavam as propriedades d'esse polygono. Em seguida estudavam a alteração que iam tendo essas propriedades quando se augmentava indefinidamente os lados do polygono. E como por este augmento indefinido do numero de lados do polygono elle se aproximava tambem indefinidamente da curva, descobriam, guiando-se pela lei da continuidade, as propriedades da curva. É n'isto que consiste o *methodo de exaustão*, pois, na verdade, vae-se aqui exaurindo indefinidamente a differença entre o polygono e a curva.

Como, porém, por mais que se augmente o numero dos lados do polygono, este é sempre differente da curva, consideravam os

geometras antigos o methodo de exaustão como servindo só para a descoberta das propriedades das curvas, e não para a sua demonstração; e por isso demonstravam depois que se caía n'um absurdo, suppondo que estas propriedades não tinham logar. Era a este meio de demonstração que davam o nome de *reducção ao absurdo*.

Do mesmo modo procediam nas questões relativas ás superficies curvas e aos solidos terminados por essas superficies, inscrevendo n'ellas polyedros, cujas faces diminuiam indefinidamente de grandeza, augmentando indefinidamente o seu numero.

O primeiro exemplo que se encontra d'este methodo, é nos *Elementos* de Euclides, na proposição II do livro XII. Com effeito, para mostrar que os circulos estão entre si como os quadrados dos seus diametros, suppõe que este theorema não tem logar, e mostra que inscrevendo quadrados nos circulos e depois successivamente polygonos regulares de dobrado numero de lados, obtêm-se sempre dois polygonos que não podem estar entre si como os quadrados dos diametros dos circulos, sem se chegar a um absurdo. Encontram-se ainda outros exemplos nos *Elementos*, nas proposições X, XI, XII e XVIII, e outros sobre questões mais complicadas nas obras de Archimedes.

Ao methodo de exaustão dos antigos deu Kepler na sua *Stereometria* uma fôrma diversa no modo de applicação para determinar algumas areas e alguns volumes. Assim para achar a area do circulo, considerava-o este sabio como formado de um numero infinito de triangulos, cujos lados eram os raios do circulo e cujas bases eram os lados infinitamente pequenos de um polygono inscripto; depois sommava a area d'estes triangulos, tomando para altura o raio do circulo e para somma das bases a circumferencia. Do mesmo modo achava o volume do cone decompondo-o em pyramides triangulares pela união dos vertices dos triangulos, em que decompunha o circulo da base com o vertice do cone, e sommando depois estas pyramides. Está aqui o germen do *methodo dos indivisiveis* de que se fez uso até ás descobertas de Newton e Leibnitz.

Ao methodo de exaustão deu o geometra italiano Cavalerius uma fôrma ainda mais propria, para se resolverem por elle os problemas geometricos, na sua *Geometria dos indivisiveis*, em que a linha é considerada como sendo formada de pontos successivos, a superficie de linhas successivas, e o volume de superficies suc-

cessivas, entendendo-se por este modo de fallar, como diz Pascal explicando este methodo, que a area plana é a somma de um numero indefinido de rectangulos muito pequenos, e o solido a somma de um numero indefinido de primas.

Como se vê, Cavalerius decompõe a área plana em rectangulos infinitamente pequenos, e o volume em prismas infinitamente pequenos, em quanto que Kepler decompunha a area em triangulos e o volume em pyramides; a primeira decomposição é, em geral, muito mais vantajosa do que a segunda.

Dêmos um exemplo do methodo dos indivisiveis. Se fizermos secções planas equidistantes n'um cone de base circular, e as compararmos com as secções feitas n'um cylindro da mesma base e da mesma altura, notaremos que em cada posição da secção o raio da secção do cone é a terça parte do do cylindro, e portanto que o volume do cone é a terça parte do do cylindro, pois que, segundo a linguagem do methodo, estes corpos são a somma d'essas secções.

Aqui procede-se por comparação de figuras para achar o volume do cone pelo methodo dos indivisiveis; e assim se procedia quasi sempre antes de Wallis, que começou a applicar o calculo algebrico ás quadraturas. Para ver o uso da Algebra n'estas questões, procuremos a area do triangulo. Tirando no triangulo linhas parallelas á base, sabe-se que estas linhas decrescem proporcionalmente ás suas distancias ao vertice; formam pois uma progressão arithmetica decrescente, logo a somma d'estas linhas, isto é, a area do triangulo, é igual ao primeiro termo da progressão, isto é, á base do triangulo, multiplicada por metade do numero de termos, isto é, por metade da altura. Empregamos aqui a linguagem pouco rigorosa da Geometria dos indivisiveis, mas o raciocinio empregado é no fundo rigoroso.

Quando pelo processo precedente não podia fazer a quadratura, recorria Wallis a um processo de interpolação, que o levou a alguns resultados notaveis.

Roberval fez antes de Cavalerius a descoberta do methodo dos indivisiveis; porém tendo occultado a sua descoberta, para d'ella tirar partido para a resolução dos problemas, que os geometras d'esse tempo propunham em desafio uns aos outros, foi precedido na publicação d'elle pelo geometra italiano.

Uma outra descoberta se deve a Roberval, que tem relação com a descoberta dos novos calculos: é o seu methodo de tangentes.

Partia Roberval de que as curvas podem considerar-se descriptas pelo movimento de um ponto que se decompõe em dois, um uniforme e outro variavel. A resultante d'estes dois movimentos, que é a diagonal do parallelogrammo formado sobre as linhas que representam a grandeza e direcção dos movimentos componentes, dá a direcção do movimento a cada instante, a qual Roberval antes adivinhou, do que demonstrou que coincidia com a direcção da tangente. Por exemplo, na ellipse o ponto que a descreve, tanto se aproxima de um pólo como se afasta do outro. Os dois movimentos componentes são pois iguaes e dirigidos segundo os raios vectores, logo a tangente divide o angulo d'elles em duas partes iguaes. Este methodo porém era quasi sempre inapplicavel, porque ficava dependente da resolução de outra questão, que era a de achar os movimentos componentes, questão tão difficil, como a que se queria resolver.

Os primeiros geometras que deram um methodo de tangentes geral foram Descartes e Fermat.

O methodo de tangentes de Fermat, publicado depois do de Descartes, teve uma grande influencia na descoberta dos novos calculos, e por isso vou expol-o aqui, dando-lhe a fórma que lhe deu Barrow.

O triangulo rectangulo que Barrow chama *characteristico*, formado pela corda que passa pelo ponto de contacto e por um ponto infinitamente proximo, e por linhas parallelas aos eixos, mostra que a tangente trigonometrica do angulo formado pela tangente á curva com o eixo das absissas, é igual á differença das ordenadas dos dois pontos dividida pela differença das absissas. Achando, pois, a differença das ordenadas pela equação da curva, dividindo pela differença das absissas e fazendo depois esta differença nulla, obtem-se a tangente trigonometrica pedida. É o methodo das tangentes, como se emprega hoje, que n'aquelle tempo só se podia applicar ás curvas, para as quaes se sabia tirar da equação o quociente precedente, isto é, ás curvas algebraicas racionaes implicitas ou explicitas.

Temos seguido, em rapido esboço, as phases porque foi passando o methodo de exaustão até á descoberta do Calculo differencial e integral, e as duas questões — quadrar as curvas e tirar-lhes tangentes — que prepararam esta descoberta. Vimos que o methodo das tangentes de Roberval precisava, para se poder applicar, do conhecimento das velocidades componentes da velocidade do movel que descreve a curva, dada a equação da curva.

Estas componentes foram achadas por Newton, quer a curva representada pela equação fosse racional quer fosse irracional. O methodo das tangentes de Fermat precisava do conhecimento da relação entre os augmentos infinitamente pequenos das variaveis, dada tambem a equação da curva. Esta relação foi achada por Leibnitz por um methodo applicavel, ainda que a equação da curva tivesse radicaes, sem a desembaraçar d'elles. Vejamos, pois, agora como Newton e Leibnitz resolviam as questões de que temos fallado.

Newton suppõe as curvas geradas por um ponto, movendo-se sobre uma recta, a qual se move ao mesmo tempo parallelamente com movimento uniforme. Se o primeiro movimento componente se tornasse uniforme n'um dado instante com a velocidade que tem n'esse instante, o ponto mover-se-ia com movimento uniforme, seguindo a tangente á curva que ia descrevendo, isto é, a diagonal do parallelogrammo construido sobre as linhas que representam as velocidades dos movimentos componentes em grandeza e direcção. A estas velocidades componentes, que são as velocidades com que variam as coordenadas x e y do ponto, chama Newton *fluxões* das *fluentes* x e y . Á velocidade com que varia o arco da curva, que é representada sobre a tangente pela resultante das fluxões de x e y , chama *fluxão* do arco s .

O triangulo formado pelas linhas que representam as fluxões de x , y e s , mostra que a tangente trigonometrica do angulo formado pela tangente á curva com o eixo das abscissas é igual á fluxão da ordenada dividida pela fluxão da absissa. O problema da determinação das tangentes ás curvas fica, pois, dependente do conhecimento das fluxões das funcções.

Para achar a area de uma porção de plano limitado por uma linha curva pelo eixo das abscissas e por duas ordenadas, Newton procura a fluxão da area, isto é, a area que descreveria a ordenada que gera a curva, se n'um dado instante continuasse a mover-se uniformemente com a velocidade que então traz, e acha que é um rectangulo, cuja area é igual ao producto de y pela fluxão de x . Agora é necessario resolver a questão inversa da precedente, isto é, passar da expressão analytica que representa a fluxão da area para a fluente, isto é, para a area.

Para resolver estas questões creou, pois, Newton um novo ramo de Analyse, que tem por fim achar a fluxão de uma funcção dada — *Calculo directo das fluxões*; e, dada a fluxão, achar a funcção correspondente — *Calculo inverso das fluxões*.

Passando ainda ás questões dependentes dos novos calculos, indiquemos outro resultado a que chegou Newton. Vimos os geometras, desde Cavalerius, empregarem o methodo de exaustão dos antigos mais ou menos modificado, e considerarem os resultados a que chegavam sufficientemente demonstrados pela *lei da continuidade*, sem recorrerem, como os antigos, á redução ao absurdo. Newton, achando estas demonstrações ou pouco rigorosas ou pouco claras, e querendo evitar as demonstrações complexas dos antigos, deu o seu *principio dos limites*, pelo qual são demonstradas simples e rigorosamente todas as proposições descobertas pelo methodo de exaustão.

Em quanto Newton se occupava d'estas questões na Inglaterra, occupava-se tambem d'ellas na Allemanha um outro sabio de primeira ordem, Leibnitz.

Suppõe Leibnitz as quantidades formadas de elementos infinitamente pequenos. Estes elementos formados de outros de segunda ordem e assim successivamente, de modo que as quantidades variam por differenças infinitamente pequenas. Para o calculo, com estes elementos, deu o principio seguinte: *póde substituir-se uma por outra duas quantidades finitas, que differem de uma quantidade infinitamente pequena, ou mais geralmente duas quantidades infinitamente pequenas, que differem de uma quantidade infinitamente pequena de ordem superior*. Este principio é no fundo o que empregavam os antigos no methodo de exaustão, e que tinha sido empregado continuamente pelos geometras que usavam do methodo dos indivisiveis. Os infinitamente pequenos aqui são as quantidades que decrescem indefinidamente no methodo dos antigos.

Os augmentos infinitamente pequenos de x e y designava-os Leibnitz por dx e dy e chamava-lhes *differenciaes*. Para achar as tangentes ás curvas, empregava o methodo de Fermat como foi apresentado por Barrow, isto é, resolvia o triangulo caracteristico, e achava a tangente trigonometrica da inclinação da tangente á curva sobre o eixo das abscissas igual ao quociente da differencial de y pela de x . Este quociente que Fermat e Barrow só sabiam achar quando a equação da curva estava desembaraçada de radicaes, acha-o Leibnitz sem desembaraçar das radicaes que podem entrar na equação da curva.

Teve tambem Leibnitz a feliz ideia de considerar equações que entravam as differenciaes, consideração tanto mais im-

portante, que por equações differenciaes se traduzem quasi todos os problemas importantes de Geometria, Mecanica, etc., que resistiam aos methodos até então empregados.

Os geometras que empregavam a Geometria dos indivisiveis, tinham já achado o elemento, isto é, a differencial de uma area plana, que é, empregando a notação de Leibnitz, um rectangulo de area $y dx$. Restava, pois, passar da differencial da area para a area, isto é, resolver a questão analytica inversa d'aquelle que é necessario resolver para o methodo das tangentes.

Para outras questões precisava de passar das equações differenciaes para a relação entre as variaveis.

Para resolver todas estas questões, creou Leibnitz um novo ramo de analyse tendo por fim, dada a relação entre as variaveis, achar a relação entre as differenciaes correspondentes — *Calculo differencial*; e inversamente, dada a relação entre as differenciaes, achar a relação entre as variaveis — *Calculo integral*.

O Calculo differencial coincide com o Calculo directo das fluxões, e o Calculo integral com o Calculo inverso das fluxões. Houve ainda em vida de Newton e Leibnitz uma violenta discussão sobre a prioridade da descoberta. O estudo dos documentos apresentados n'essa questão mostra que Newton fez a sua descoberta antes de Leibnitz, pois apparece indicada n'uma carta sua com letras transpostas; mas que este não tinha conhecimento da descoberta de Newton, que só foi publicada depois da de Leibnitz. Devemos todavia notar que Leibnitz aqui foi mais longe do que Newton, pois que foi o primeiro a considerar equações differenciaes.

Viu-se que a descoberta dos novos calculos estava sufficientemente preparada pelos trabalhos de que temos dado noticia, todavia para a fazer era necessario um grande genio que n'esses trabalhos achasse o principio do methodo e lhe reconhecesse o grande alcance, e tanto isto é assim, que por muito tempo só os inventores comprehenderam a profundeza e importancia da descoberta que tinham feito.

Os primeiros geometras que comprehenderam o espirito da Analyse infinitesimal foram os dois irmãos Jaques e João Bernoulli, que applicaram o seu grande genio a fazer avançar o novo calculo e a resolver por elle questões difficeis, que resistiam aos antigos methodos.

O methodo infinitesimal, pela sua simplicidade, clareza da noção de differencial e superior merito dos geometras que o

adoptaram, progrediu muito mais depressa que o methodo das fluxões. Os geometras que seguiam aquelle methodo levavam sempre vantagem sobre os que seguiam o methodo de Newton nas questões que os partidarios de cada methodo propunham em desafio uns aos outros.

Se o methodo infinitesimal era mais simples do que o das fluxões, em compensação o das fluxões tinha o rigor da antiga Geometria, em quanto que contra o primeiro se propozeram muitas objecções, por causa do desprezo que Leibnitz fazia das quantidades infinitamente pequenas, sem o justificar. Este methodo correspondia, com effeito, ao de exaustão, e faltava para ser completamente accete, a demonstração por absurdo dos antigos geometras.

Euler, para evitar estas objecções, considerava os infinitamente pequenos como verdadeiros zeros, que se designava pela notação de Leibnitz, para indicar que vinham de quantidades que, decrescendo successivamente, se tinham *desvanecido*. Sendo assim, o Calculo infinitesimal seria um calculo de symbolos, o que não póde admittir-se, pois que sobre symbolos não se póde fazer operações.

Lagrange quiz tractar o Calculo differencial e integral sem a consideração de infinitesimos, limites ou desvanecentes, isto é, pelos processos só da Algebra. Para isso demonstra primeiro a serie de Taylor, isto é, a fórmula que dá o desenvolvimento de uma funcção em serie ordenada segundo as potencias do augmento da variavel. Chama *derivada* o coefferiente da primeira potencia do augmento no desenvolvimento, e procura depois a derivada das diversas funcções estudadas na Algebra, desenvolvendo-as em serie para achar o coefferiente da primeira potencia do augmento. A doutrina de Lagrange tem o inconveniente de partir da supposição que toda a funcção é susceptivel de se desenvolver em serie ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma quantidade. Apesar d'isto, a Obra de Lagrange, onde o seu methodo vem exposto, isto é, a *Theoria das funcções analyticas* é muito notavel pelo grande numero de vistas novas que encerra sobre as questões lá tractadas, e porque as demonstrações se tornam facilmente rigorosas, modificando as demonstrações fundadas em series.

Hoje adopta-se geralmente o methodo infinitesimal, e para dar ás demonstrações fundadas n'elle o rigor das demonstrações dos antigos, deduz-se os principios d'este methodo do theorema dos limites.

II

Passemos agora, antes de expor o methodo infinitesimal, a algumas considerações relativas ás definições de funcção, continuidade e quantidade infinitamente pequena.

A definição de funcção, como muitas outras definições em mathematica, tem-se estendido cada vez mais á medida que as necessidades da sciencia o têm exigido. Assim para Leibnitz funcção de uma quantidade era o polynomio inteiro relativamente a essa quantidade. Euler chamava já funcção de uma quantidade á expressão analytica em que entra essa quantidade ligada por operações algebraicas em numero finito ou infinito. Hoje para comprehender o caso em que uma quantidade é determinada por construcções geometricas, chama-se funcção de uma ou mais quantidades á quantidade que toma valores determinados quando ás primeiras se dá tambem valores determinados. No Calculo infinitesimal não se estudam todas estas funcções, mas aquellas que satisfazem a certas condições, como veremos.

A funcção $f(x)$ diz-se continua relativamente a x no intervallo de $x = a$ até $x = b$ quando, dando a x dois valores quaesquer a' e $a' + h$ comprehendidos n'este intervallo, a differença entre os valores correspondentes da funcção diminue indefinidamente até zero, quando h vae diminuindo indefinidamente até zero.

No Calculo infinitesimal só se estudam as funcções $f(x)$ que no intervallo finito de $x = a$ até $x = b$ apresentam um numero finito de valores não contínuos com os valores visinhos da funcção. Então os valores de x chamam-se *valores criticos*, e quando x passa por elles a funcção precisa de um estado especial: taes são os valores de x que tornam a funcção infinita, e aquelles em que ella passa de um valor a outro differindo do primeiro de uma quantidade finita. É claro que se algum valor de x tornar a funcção indeterminada, é necessario tirar a indeterminação para ver se o valor é ou não critico.

A equação $y = f(x)$ representa uma curva que póde faltar n'um intervallo finito, quando para valores de x comprehendidos n'esse intervallo a funcção se torna imaginaria. Na curva póde, pois, haver descontinuidades que não existam na funcção. Chamaremos pois *valores criticos geometricos* todos aquelles, para os quaes ha descontinuidades na curva.

Chama-se *quantidade infinitamente pequena* ou *infinitesimo*, toda a quantidade variavel que póde ter todos os valores menores que uma quantidade dada. Um infinitesimo β é da ordem n relativamente a outro infinitesimo α quando o primeiro dividido por α^n dá $\frac{\beta}{\alpha^n} = A + y$, sendo A uma quantidade finita relativamente

a α e y um infinitesimo. D'esta definição decorre immediatamente:

1.º Que se dois infinitesimos β e β' forem da ordem n e n' , o seu producto será da ordem $n+n'$ e o seu quociente da ordem $n-n'$;

2.º Que se um infinitesimo β' fôr da ordem n' relativamente a β e este da ordem n relativamente a α , o primeiro será da ordem $n+n'$ relativamente a α .

Quando um infinitesimo é das ordens n e n' relativamente a dois outros independentes, diz-se ainda que é da ordem $n+n'$.

O exemplo geometrico seguinte contém todos estes casos:

Consideremos o triangulo formado pela tangente á circumferencia no ponto $M(x, y)$ pela corda que passa por este ponto e pelo ponto infinitamente proximo $M'(x+h, y+k)$, e pela perpendicular TM' abaixada d'este ponto sobre a tangente, e procuremos a ordem da porção infinitamente pequena da tangente comprehendida entre o ponto de contacto e o pé da perpendicular, suppondo h o infinitamente pequeno, que serve de termo de comparação.

A resolução do triangulo dá $MT = MM' \cos TMM'$, logo a ordem do infinitesimo MT é igual á somma das ordens de MM' e $M'MT$.

MM' é de primeira ordem por ser

$$MM' = \frac{h}{\cos(M'Mx)}$$

Procuremos a ordem do angulo $M'MT$. É

$$\text{tang}(M'MT) = \frac{\text{tang}(TMx) - \text{tang}(M'Mx)}{1 + \text{tang}(TMx) \text{tang}(M'Mx)}$$

Suppondo que a equação da curva é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

é

$$\text{tang (T M } x) = -\frac{x-a}{y-b}$$

e

$$\text{tang (M' M } x) = \frac{k}{h} = -\frac{x-a}{y-b} + \frac{\frac{x-a}{y-b} k - h}{2(y-b) + k} = -\frac{x-a}{y-b} + \alpha$$

sendo α de primeira ordem.

Logo

$$\text{tang (M' M T)} = \frac{-\alpha}{1 + D'}$$

portanto tang (M' M T) é de primeira ordem.

Mas sabe-se pela Trigonometria que

$$\frac{\text{tang M' M T}}{\text{M' M T}} = 1 + \beta$$

onde β é infinitamente pequeno quando M' M T o é, logo M' M T é da mesma ordem que a tangente, isto é, de primeira ordem.

De tudo isto conclue-se, enfim, que M T é um infinitesimo de segunda ordem.

III

Passemos agora a expor o methodo infinitesimal pelo caminho que seguimos na nossa Nota já citada.

Comecemos por demonstrar o theorema seguinte que é fundamental:

THEOREMA. — *Se a equação*

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) = 0 \dots \dots (1)$$

tem logar, por mais pequena que seja a grandeza das differenças $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$, ella terá logar ainda quando estas differenças são nullas, isto é, será

$$f(x, y, z, \dots) = 0 \dots \dots (2).$$

Com effeito, suppondo que a funcção f é contínua, ter-se-ha

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) = f(x, y, z, \dots) + \Delta f(x, y, z, \dots) = 0$$

Δf sendo uma quantidade que se pôde fazer tão pequena, quanto se queira, diminuindo convenientemente as diferenças $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$

Se a funcção $f(x, y, z, \dots)$ não é nulla, ella tem um valor δ , e será

$$\Delta f(x, y, z, \dots) = -\delta,$$

resultado absurdo, pois que Δf é uma quantidade variavel que se pôde tornar mais pequena do que δ .

É n'este theorema que consiste o principio dos limites de Newton.

Posto isto, se se quer resolver uma questão que se traduz pela equação (2), e se se não conhece meio de achar directamente a solução, pôde-se achal-a formando primeiramente a equação (1) e fazendo em seguida n'ella as diferenças $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ nullas. Suppõe-se que se sabe formar a equação (1), e por isso o que nos vimos de dizer pertence ainda á synthese ou á analyse ordinaria. Estão, n'este caso, todas as questões de que se occuparam os geometras antes da descoberta do Calculo differencial e do Calculo integral.

Demos um exemplo. Consideremos uma recta que córte uma curva em dois pontos, e supponhamos que o segundo ponto se move na direcção do primeiro; a recta vae gyrando em roda do primeiro ponto, e a posição que toma no instante em que o segundo coincide com o primeiro chama-se *tangente* á curva n'esse ponto. Se forem $y=f(x)$ a equação da curva, (x, y) e $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ as coordenadas das extremidades da corda, θ a inclinação da tangente sobre o eixo das abscissas, e $\Delta \theta$ a inclinação da tangente sobre a corda, a resolução de um triangulo rectangulo dará

$$\text{tang}(\theta + \Delta \theta) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mas á medida que o segundo ponto se vae aproximando do primeiro, Δx e $\Delta \theta$ vão diminuindo de modo que se podem tornar ao mesmo tempo tão pequenos quanto se quizer, logo, segundo o theorema precedente, a equação ainda tem logar quando são nullos, e é

$$\text{tang } \theta = f'(x),$$

chamando $f'(x)$ aquillo em que se torna o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x = 0$. No caso de ser, por exemplo, $f(x) = x^m$ (m inteiro positivo) é $f'(x) = m x^{m-1}$. O que vimos de expor é, como se vê, o methodo das tangentes de Fermat.

Outro exemplo. A area S comprehendida entre uma curva $y = f(x)$, o eixo das abscissas e duas ordenadas póde decompor-se n'outras por meio de linhas parallelas ao eixo das ordenadas. Tirando depois parallelas ao eixo das abscissas que passem pelas extremidades d'essas ordenadas formam-se rectangulos, cujas areas sommadas dão, chamando Δx a distancia das parallelas e ΔS a differença entre a area S e a somma das areas dos rectangulos,

$$S + \Delta S = \Sigma f(x) \cdot \Delta x.$$

Esta igualdade tem logar, por mais pequenos que sejam ΔS e Δx , logo terá ainda logar quando fôr $\Delta S = 0$ e $\Delta x = 0$, isto é, será

$$S = F(x),$$

chamando $F(x)$ aquillo em que se torna a somma $\Sigma f(x) \cdot \Delta x$ quando $\Delta x = 0$. Já se viu que era assim que se achavam as areas no methodo dos indivisiveis.

Por exemplo, o valor de $\Sigma f(x) \cdot \Delta x$ no caso da curva $y = kx^2$ seria, suppondo x dividido em n partes iguaes a Δx :

$$\Sigma f(x) \cdot \Delta x = k \Delta x^3 [1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]$$

que por ser

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

e

$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

dá

$$\begin{aligned}\Sigma f(x) \cdot \Delta x &= k \Delta x^3 \left[\frac{x^3}{3 \Delta x^3} + \frac{x^2}{2 \Delta x^2} + \frac{x}{6 \Delta x} \right] \\ &= k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x^2 \Delta x + \frac{1}{6} x \Delta x^2 \right].\end{aligned}$$

Mas $\Sigma f(x) \cdot \Delta x$ representa uma somma de areas de rectangulos que se aproxima indefinidamente da area terminada pela curva $y = kx^2$, pelo eixo dos x e pela ordenada traçada á distancia x da origem. Chamando pois A esta area, será

$$A + \Delta A = k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} x^2 \Delta x + \frac{1}{6} x \Delta x^2 \right]$$

e, pela theoria precedente,

$$A = \frac{1}{3} k x^3.$$

Se a equação da curva fosse

$$y = kx^m,$$

sendo m inteiro e positivo, achava-se do mesmo modo

$$A = \frac{1}{m+1} k x^{m+1}$$

usando de um theorema conhecido que dá

$$1 + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + a n^m + b n^{m-1} + \dots + l n + u$$

sendo a, b, c, \dots, l, u quantidades independentes de n .

Voltemos ao assumpto.

Quando se resolvem as questões pelo processo anterior, em lugar de fazer estas differenças nullas sómente no resultado final, pôde-se simplificar o calculo que conduz á equação (1), fazendo no caminho as differenças Δx , Δy , Δz , etc. nullas, quando d'esta maneira se não chega a resultados ou a operações sem significação. É n'esta simplificação que consiste o espirito do Calculo infinitesimal.

Então em lugar de representar as differenças pela notação Δx , Δy , Δz , etc., representam-se por dx , dy , dz , etc., convencio-nando assim representar por dx , dy , dz , etc. differenças indeterminadas que se devem tornar nullas no fim do calculo ou durante o calculo, quando d'esta maneira se não chega a resultados ou a operações sem significação, nem a zero. Se, por exemplo, no calculo apparece o binomio $a + b dx$, a e b sendo independentes das differencias, podemos supprimir o termo $b dx$. Da mesma maneira, se no calculo apparece $ad x^n + b dx^m$ e é $m > n$, pôde-se supprimir o termo $b dx^m$, pois este binomio é igual a $dx^n (a + b dx^{m-n})$. É n'isto que consiste o principio do Calculo infinitesimal que se costuma enunciar da maneira seguinte: «Uma quantidade infinitamente pequena deve ser desprezada quando vem adicionada a uma quantidade finita ou a uma quantidade de ordem infinitesimal inferior».

Pelo contrario, se no calculo se encontra, por exemplo, a expressão $\frac{dy}{dx}$, não se pôde annullar dy e dx , pois que se chegaria ao symbolo $\frac{0}{0}$, e por isso nós continuaremos a considerar dx e dy como indeterminadas, emquanto se não poderem tornar nullas.

Assim, no primeiro dos exemplos precedentes, como para a tangente, Δx e Δy são nullas, nós teremos,

$$\text{tang } \theta = \frac{dy}{dx},$$

onde se deve substituir por dy o seu valor tirado da equação da curva.

Se esta equação, por exemplo, é $y = x^m$, vem

$$y + dy = (x + dx)^m = x^m + m x^{m-1} dx$$

annullando os termos que contêm dx^2 , dx^3 , etc.; logo

$$dy = m x^{m-1}$$

$$\text{tang } \theta = m x^{m-1}.$$

Temos supposto até aqui que a questão que se queria resolver levava á equação (1); mas deduz-se de (1) e (2) que

$$\Delta f(x, y, z, \dots) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

equação que representa uma relação entre x , y , z , etc., e as diferenças Δx , Δy , Δz , etc., isto é, que tem a fórmula

$$F(x, y, z, \dots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots) = 0,$$

e que se chama *equação ás diferenças finitas de primeira ordem*.

Muitas vezes a questão que se quer resolver leva á equação (3), e, por causa d'isto, é necessario, para a resolver, ter meios de passar da equação (3) para a equação (2). O estudo d'estes meios pertence ao *Calculo inverso das diferenças*, que serve assim para achar uma equação (2), quando se conhece a relação entre as diferenças das variaveis. Os processos d'este calculo são o inverso dos do *Calculo directo das diferenças*, que tem por fim passar da relação entre as variaveis para a relação entre as suas diferenças, que será pois estudado primeiro.

Se na equação (3) igualarmos a zero todas as diferenças que se podem igualar a zero, sem introduzir resultados ou operações insignificantes, e se representarmos as outras por dx , dy , dz , etc., a equação (3) muda-se em

$$df(x, y, z, \dots) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

isto é, n'uma equação da fórmula

$$F(x, y, z, \dots, dx, dy, dz, \dots) = 0,$$

que se chama *equação differencial de primeira ordem*.

Portanto quando a questão que se quer resolver leva a esta equação, como acontece ordinariamente, é necessario procurar meios para passar d'esta equação para a equação (2). O estudo d'estes meios pertence ao *Calculo integral*, que se occupa assim de achar a relação entre as variaveis, quando se conhece a relação, na qual se muda a relação entre as differenças Δx , Δy , Δz , etc., quando se iguala a zero aquellas que se podem annullar sem introduzir resultados insignificantes. Para resolver esta questão é necessario resolver primeiro a questão mais simples de passar da equação (2) para a equação (3), questão de que se occupa o *Calculo differencial*, que tracta, pois, de passar da relação entre as variaveis para a relação entre as suas differencias.

Supponhamos agora que a equação (1) contém tambem differenças de segunda ordem $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 z$, etc. Como estas differenças representam augmentos de Δx , Δy , Δz , etc., e a equação (1) deve subsistir, por mais pequenos que sejam aquelles augmentos, sem que os de primeira ordem variem, esta equação deve subsistir tambem quando elles são nullos, sem que os de primeira ordem o sejam. Póde-se pois annullal-os durante o calculo, quando isto é possível, sem introduzir resultados insignificantes, considerando sempre as differenças de primeira ordem como arbitrarías, e póde-se convencionar represental-os n'este caso por $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$, etc. Assim, por exemplo, em $ad^2 x + bdx$ deve-se supprimir $ad^2 x$, se o termo bdx não deve desaparecer por si mesmo.

Chega-se assim a uma equação que contém só dx , dy , dz , etc., da qual se deduz (2), como já dissemos.

N'este caso ainda supponhamos que a questão proposta em logar de levar á equação (1), leva á equação (3), que representa agora uma relação entre as differenças de segunda ordem, e que é da fórmula

$$F(x, y, z, \dots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z, \dots) = 0.$$

Chama-se esta equação *equação ás differenças finitas de segunda ordem*, e ao *Calculo directo das differenças* pertencem os processos, pelos quaes se passa da relação (2) para uma relação entre as differenças de primeira ordem e d'esta para a relação precedente, entre as differenças de segunda ordem,

112 Ao *Calculo inverso das differenças* pertencem os processos, pelos quaes se passa da equação precedente para uma de primeira ordem e d'esta para a equação (2).

113 Quando na equação precedente se fazem nullas todas as differenças que se podem annullar sem introduzir resultados insignificantes, a equação muda-se na *equação differencial de segunda ordem*

$$F(x, y, z, \dots dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \dots) = 0$$

e então as passagens de (1) para esta equação ou d'esta equação para (1) pertencem ao *Calculo differencial* e ao *Calculo integral*, passagens que se fazem, passando primeiro para uma equação de primeira ordem.

114 Considera-se do mesmo modo as equações em que ha differenças ou differenciaes de ordem superior á segunda.

115 Póde acontecer que um problema se traduza por muitas equações simultaneas, e o que vem de dizer-se applica-se a cada uma d'ellas. Se temos n equações da fórmula (2) ficam n variaveis determinadas e chamam-se *dependentes*; todas as outras ficam arbitrarías e chamam-se *independentes*. N'este caso ha tambem n equações entre as differenças primeiras, bem como entre as differenciaes de primeira ordem, que determinam as differenças ou as differenciaes das variaveis dependentes; ha tambem n equações entre as differenças segundas, bem como entre as differenciaes de segunda ordem, que determinam as differenças ou as differenciaes segundas das variaveis dependentes; e assim successivamente. Como os augmentos das variaveis independentes são arbitraríos, póde-se-lhes dar sempre o mesmo valor. D'este modo suppondo, por exemplo, que x é uma variavel independente e $\Delta x = x' - x$, vem $\Delta x + \Delta^2 x = (x' + \Delta x) - (x + \Delta x)$, isto é, $\Delta^2 x = 0$, logo as differenças segundas das variaveis independentes podem sempre annullar-se. O mesmo se diz das differenciaes, isto é, sendo x uma variavel independente, póde sempre fazer-se $d^2x = 0$.

Exemplos. 1.º Consideremos uma questão de Calculo ás differenças directo, e depois de Calculo differencial.

Seja dada a relação entre a variavel dependente y e entre a independente x

$$x^2 + y^2 = R^2$$

e procuremos a relação entre as suas differenças.

Mudando x em $x + \Delta x$ e y em $y + \Delta y$, vem

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 = R^2 + \dots$$

que dá a relação entre as diferenças

$$2x \Delta x + 2y \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 = 0.$$

A relação entre as diferenças segundas obtém-se mudando na precedente x em $x + \Delta x$, y em $y + \Delta y$, Δy em $\Delta y + \Delta^2 y$, e é

$$2 \Delta x^2 + 2 \Delta y^2 + 2 y \Delta^2 y + 2 \Delta y \Delta^2 y + (\Delta^2 y)^2 = 0.$$

Do mesmo modo se acharão as relações entre as diferenças terceiras, quartas, etc.

Para achar a relação entre as differencias basta mudar Δ em d , e desprezar os termos infinitamente pequenos que se poderem desprezar pelo principio atraz enunciado. Teremos assim

$$x dx + y dy = 0 \quad \text{e} \quad dx^2 + dy^2 + y d^2 y = 0.$$

2.º Passemos a um exemplo de *Calculo integral*. Se se quizer resolver a questão inversa da das tangentes, isto é, procurar a curva, cuja tangente faz com o eixo dos x um angulo, cuja tangente trigonometrica é a função $F(x)$ dada, é necessario procurar qual o valor de y que satisfaz á equação

$$dy = F(x) dx,$$

isto é, é necessario procurar uma relação entre y e x , tal que fazendo variar x e y de Δx e Δy , e suppondo em seguida as diferenças Δx e Δy nullas em todos os termos em que isto é possivel sem introduzir resultados insignificantes, se obtenha a equação precedente.

Se é, por exemplo,

$$F(x) = m x^{m-1}$$

sendo m inteiro e positivo, será

$$y = x^m + a$$

que dá, com efeito,

$$y + \Delta y = a + x^m + m \Delta x x^{m-1} + \dots$$

ou

$$\Delta y = m \Delta x x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta x^2 x^{m-2} + \dots$$

e portanto

$$dy = m x^{m-1} dx.$$

Póde mesmo mais geralmente procurar-se qual a curva, cuja tangente faz com o eixo dos x um angulo, cuja tangente trigonometrica é uma funcção dada $F(x, y)$ das coordenadas do ponto de contacto, e então é necessario procurar o valor de y que satisfaz á equação

$$dy = F(x, y) dx.$$

Se é, por exemplo,

$$y = \frac{x}{y}$$

vem

$$y dy = x dx$$

e é necessario procurar qual a relação entre x e y , tal que mudando n'ella x em $x + \Delta x$ e y em $y + \Delta y$, e fazendo nullos todos os termos que se poderem annullar sem introduzir resultados insignificantes, se obtenha a equação precedente. Esta relação é

$$y^2 = x^2 + c,$$

que dá, com efeito,

$$y^2 + 2y \Delta y + \Delta y^2 = x^2 + 2x \Delta x + \Delta x^2,$$

ou, attendendo á proposta e desprezando os infinitamente pequenos de segunda ordem,

$$y dy = x dx.$$

A curva é, pois, uma hyperbole.

IV

Postas estas considerações geraes, passemos a considerar especialmente a equação explicita

$$y = f(x),$$

sendo $f(x)$ uma funcção continua de x .

Até aos ultimos tempos as obras sobre Calculo differencial começavam por estabelecer que a equação differencial de primeira ordem tinha n'este caso a fórma

$$dy = f'(x) dx,$$

sendo $f'(x)$ uma funcção, que só se tornava nulla e infinita um numero limitado de vezes, quando x variava entre limites finitos.

Modernamente, porém, descobriram-se funcções que são continuas, e todavia não tem uma equação differencial da fórma precedente.

Todavia quando a funcção $f(x)$ é d'aquellas que se estudam na Algebra, isto é, quando esta funcção tem a variavel x affectada de operações algebraicas, exponenciaes, logarithmicas ou circulares, a equação differencial de primeira ordem tem a fórma precedente. A demonstração d'esta proposição é muito simples; nós vamos aqui transcrevel-a só para ficar a presente doutrina completa.

Todas as funcções de x são constituidas pela combinação de funcções *simples*, chamando funcções simples áquellas em que a variavel x entra affectada de uma só operação. Vamos, pois, primeiramente achar as equações differenciaes correspondentes a estas funcções.

As funcções simples são as seguintes :

$$a \pm x, ax, \frac{1}{x}, x^m, \sqrt{x}, a^x, \log x, \text{sen } x, \text{arc}(\text{sen } = x),$$

onde m é inteiro.

Vamos derivá-las, notando que dx e dy representam augmentos, cujas potenciaes se devem annullar quando sommadas com potenciaes de grau inferior.

1) A funcção $y = a \pm x$ dá evidentemente $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.

2) $y = ax$ dá evidentemente $\frac{dy}{dx} = a$.

3) A funcção $y = \frac{1}{x}$ dá

$$y + dy = \frac{1}{x + dx}$$

ou

$$x dy + y dx + dx dy = 0$$

d'onde resulta

$$dy = -\frac{y dx}{x + dx} = -\frac{y dx}{x}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

4) No caso da funcção $y = x^m$, sendo m inteiro, a fórmula do binomio dá

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m = x^m + m \Delta x \cdot x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta x^2 x^{m-2} + \dots$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

5) Se é $y = \sqrt[m]{x}$, que dá $y^m = x$, vem $dx = m y^{m-1} dy$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m y^{m-1}} = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

6) No caso da equação $y = a^x$, é

$$dy = a^{x+dx} - a^x = a^x (a^{dx} - 1);$$

mas sabe-se pela Algebra que

$$a^{dx} - 1 = dx \log_e a$$

designando por $\log_e a$ o logarithmo neperiano de a ; logo será

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log_e a.$$

7) A funcção $y = \log_a x$ dá $x = a^y$, logo

$$dx = a^y \log_e a dy$$

e portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log_e a}.$$

8) A funcção $y = \text{sen } x$ dá

$$dy = \text{sen}(x + dx) - \text{sen } x = \text{sen } x \cos dx + \cos x \text{sen } dx - \text{sen } x,$$

mas sabe-se pela Trigonometria que

$$\text{sen } dx = dx, \quad \cos dx = 1$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

9) A funcção $y = \text{arc}(\text{sen } x)$ dá $x = \text{sen } y$, logo

$$dx = \cos y dy$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Passemos agora ás funcções compostas. Seja primeiro

$$u = F(y), \quad y = \varphi(x),$$

sendo $F(y)$ e $\varphi(x)$ funcções simples de y e x .

Será identicamente

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

onde se deve substituir $\frac{du}{dy}$ pelo seu valor tirado da equação diferencial da primeira equação, e $\frac{dy}{dx}$ pelo valor tirado da equação diferencial da segunda.

Consideremos agora o caso de ser

$$u = F(y_1, y_2), \quad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x),$$

sendo F , φ_1 , φ_2 funcções simples relativamente a y_1 , y_2 e x .

Fazendo só variar y_2 vem

$$F(y_1, y_2 + dy_2) = F(y_1, y_2) + D_{y_2} u \cdot dy_2,$$

chamando D_{y_2} o valor de $\frac{du}{dy_2}$ tirado da equação diferencial da primeira das equações precedentes, considerando y_1 constante.

Depois, mudando aqui y_1 em $y_1 + dy_1$, vem

$$F(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2) = F(y_1 + dy_1, y_2) + D_{y_2} F(y_1 + dy_1, y_2) \cdot dy_2$$

ou

$$F(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2) = F(y_1, y_2) + D_{y_1} u \cdot dy_1 + D_{y_2} u \cdot dy_2 + D_{y_2} D_{y_1} u \cdot dy_1 dy_2.$$

Logo, desprezando o ultimo termo que é infinitesimo relativamente aos precedentes, e dividindo toda a equação por dx , vem

$$\frac{du}{dx} = D_{y_1} u \frac{dy_1}{dx} + D_{y_2} u \frac{dy_2}{dx}.$$

No caso de ser

$$u = F(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \quad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

sendo $F, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, funcções simples relativamente a $x_1, y_2, y_3, \dots, y_n, x$; é facil de ver seguindo o mesmo caminho que

$$\frac{du}{dx} = D_{y_1}u \cdot \frac{dy_1}{dx} + D_{y_2}u \cdot \frac{dy_2}{dx} + D_{y_3}u \cdot \frac{dy_3}{dx} + \dots + D_{y_n}u \cdot \frac{dy_n}{dx},$$

em que $D_{y_1}u, D_{y_2}u, \dots$, se tiram das equações differenciaes da primeira equação, considerando successivamente y_1, y_2, \dots , como unica variavel independente; e $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots$, se tiram das equações differenciaes das outras equações.

Fazendo applicações successivas d'este theorema, acha-se a equação differencial de $y = f(x)$, sendo $f(x)$ formada por combinações das funcções simples de x atraz estudadas.

SOBRE UM THEOREMA RELATIVO ÀS SECÇÕES PLANAS DO CONE DE REVOLUÇÃO

POR

A. F. ROCHA PEIXOTO

Sendo rectangulares os planos de projecção e o horizontal perpendicular ao eixo do cone, a projecção horizontal do vertice d'esta superficie é fóco da projecção horizontal da secção feita na mesma superficie por um plano perpendicular ao vertical; e a projecção da horizontal do mesmo plano secante na altura do vertice é a directriz correspondente a esse fóco.

A cada ponto da secção corresponde um triangulo rectangulo, cujos vertices são esse mesmo ponto, o centro do respectivo paralelo e o vertice do cone; e cujos angulos agudos são o do eixo do cone com cada qual das geratrizes rectilineas e o d'estas com o plano horizontal; angulos que são os mesmos para todos os pontos da secção.

Os triangulos assim constituidos e correspondentes a todos estes pontos são semelhantes; e portanto é constante a relação entre o raio ρ de cada paralelo e a distancia β do vertice do cone ao centro do mesmo paralelo; isto é

$$\frac{\rho}{\beta} = \text{const.} \dots\dots\dots (1).$$

Façamos passar pelo vertice do cone um plano horizontal, e por cada ponto da secção um plano paralelo ao vertical de projecção. Todos estes planos cortam o plano da secção, determinando o primeiro a *horizontal* do plano da secção na altura do vertice do cone e os outros *linhas de inclinação* do mesmo plano sobre o horizontal.

Nos planos paralelos ao vertice de projecção consideremos, em cada ponto da secção, o triangulo rectangulo, cujos vertices são o mesmo ponto da secção, por onde fizemos passar o plano considerado, a intersecção da *linha de inclinação* do plano secante com a *horizontal* do mesmo na altura do vertice e o ponto em que a vertical tirada d'esta intersecção atravessa o plano do paralelo do ponto da secção.

São semelhantes os triangulos indicados em todos os pontos da secção, porque um dos angulos agudos de cada um d'elles é a inclinação do plano da secção sobre o plano horizontal, angulo que portanto é o mesmo para todos os pontos da secção. O outro angulo agudo é o da *linha de inclinação* do mesmo plano secante com uma vertical. É portanto constante a relação entre os cathetos, um horizontal e o outro vertical de cada um d'estes triangulos. O catheto horizontal é a distancia δ de cada ponto da secção ao plano vertical projectante da *horizontal* do plano secante na altura do vertice do cone; e o catheto vertical é a distancia da mesma *horizontal* ao plano do paralelo do mesmo ponto da secção, distancia que é igual a β .

Temos assim

$$\frac{\delta}{\beta} = \text{const.};$$

e esta relação com (1) conduz a

$$\frac{\rho}{\delta} = \text{const.}$$

Ora é evidente que a *horizontal* considerada no plano secante e as linhas horizontaes ρ e δ são projectadas todas tres em verdadeira grandeza sobre o plano horizontal; e as projecções horizontaes d'estas duas ultimas passam pela projecção horizontal do ponto da secção; e portanto, no plano horizontal, é constante a relação entre as distancias de cada ponto da projecção da secção ás projecções do vertice do cone e da *horizontal* do plano secante na altura do mesmo vertice.

Assim está demonstrado o theorema.

No *Traité de Géométrie Descriptive* do sr. Jules de la Gournerie, 1.^a parte, edição de 1873, pag. 66, art. 166.^o no fim, encontra-se ligeiramente indicada, mas sem a sufficiente clareza e sómente para o caso da secção elliptica, esta demonstração, que é de natureza elementar; ainda assim pareceu-me conveniente des- envolvê-la. Para maior facilidade de comprehensão podem ser aproveitadas as figuras 104 (secção elliptica) e 106 (secção hyperbolica) da mesma obra do illustre professor.

Se, na figura 104, imaginarmos tiradas pelo ponto G' uma perpendicular á projecção vertical do eixo do cone e uma paral- lela á projecção $S'a'$ da generatriz ($Sa, S'a'$), veremos immediata- mente que é

$$S'H > 2p;$$

e portanto no ponto G da projecção horizontal da secção é

$$\frac{p}{\delta} < 1,$$

o que indica que esta projecção é uma ellipse.

Por meio da mesma construcção feita na figura 106 e appli- cada ao ponto A' , como na figura 104 indicámos para o ponto G' , veremos que é

$$\frac{p}{\delta} > 1,$$

o que indica que n'este caso a projecção horizontal da secção é uma hyperbole.

Finalmente, se considerarmos um plano secante paralelo á generatriz ($Sa, S'a'$) e perpendicular ao plano vertical de projecção, veremos que é

$$\frac{p}{\delta} = 1,$$

o que exprime que é uma parabolá a projecção horizontal da secção.

SOBRE A REDUÇÃO DIRECTA DE UMA CLASSE DE INTEGRAES DEFINIDOS MULTIPLOS

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

Alferes alumno de Artilheria

Temos em vista, no presente artigo, dar a fórmula geral da redução directa do integral definido multiplo

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot \dots \times \\ \times F(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) \end{array} \right\} . dx_1 . dx_2 . dx_3 \dots$$

independente do desprezo da parte imaginaria, o que não succede na fórmula do illustre analysta, sr. Catalan.

Como é sabido, foi o sr. Tchebichef que deu no *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, publié par Mr. Liouville, t. VIII, année 1843, o seguinte theorema relativo á classe de integraes A: «*Seja qual fór a fórma da funcção f, temos*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) \cdot \dots \times \\ \times f(x^m + y^n + \dots) \end{array} \right\} . dx . dy \dots = \int_0^\infty \Phi(u) f(u) du$$

equação em que $\Phi(u)$ se determina pelas funcções dadas $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, . . . , por meio das quadraturas, tomando

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(u\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi \cdot u^2 \sqrt{-1}}$$

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty \varphi_1(x) e^{-\frac{\alpha x^m}{u^2}} dx \int_0^\infty \varphi_2(y) e^{-\frac{\alpha y^n}{u^2}} dy \dots \right] d\alpha .$$

Procurando depois o sr. Catalan demonstrar este theorema, empregou a fórmula notavel

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} F(\mu) \cos(\mu - x) \alpha d\alpha d\mu$$

de Fourier, para chegar á seguinte

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) \cdot \chi(\mu) d\mu$$

visto desprezar sempre a parte imaginaria. Convém lembrar que n'esta ultima fórmula é

$$\chi(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha \mu \sqrt{-1}} \cdot v_1(\alpha) \cdot v_2(\alpha) \cdot v_3(\alpha) \dots d\alpha$$

$$v_1(\alpha) = \int_0^{\infty} f_1(x_1) \cdot e^{-\alpha x_1 \sqrt{-1}} d x_1$$

$$v_2(\alpha) = \int_0^{\infty} f_2(x_2) \cdot e^{-\alpha x_2 \sqrt{-1}} d x_2$$

$$v_3(\alpha) = \int_0^{\infty} f_3(x_3) \cdot e^{-\alpha x_3 \sqrt{-1}} d x_3$$

.....

Posto isto, vamos effectuar a redução directa de A, empregando em logar da fórmula de Fourier, uma outra, que segue, devida ao illustre geometra Cauchy, expressa em uma unica exponencial imaginaria da variavel:

$$F(x) = \frac{1}{2(N + M\sqrt{-1})} \times \int_0^{\infty} \int_{x_0}^X \left\{ \begin{array}{l} -(a+b\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2} \\ (a+b\sqrt{-1}) \cdot e \\ -(a+c\sqrt{-1})r\sqrt{(x-\mu)^2} \\ -(a+c\sqrt{-1}) \cdot e \end{array} \right\} \cdot F(\mu) d\mu dr$$

sendo

$$x_0 < x < X$$

$$M = \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{b}{a} \right) - \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{c}{a} \right)$$

$$N = \frac{1}{2} l \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} \right)$$

sendo a, b, c constantes reaes e $F(\mu)$ uma funcção de μ . que não se torna infinita entre os limites x_0 e X . A demonstração d'esta fórmula vem nos *Exercices de Mathématiques*, par A. L. Cauchy, second année 1827, pag. 112.

Se fôr

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots \\ x_0 = 0, \quad X = \infty \end{cases}$$

resulta

$$A = \frac{1}{2(N + M\sqrt{-1})} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \dots \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} (a+b\sqrt{-1})e^{-(a+b\sqrt{-1})r(x_1+x_2+x_3+\dots-\mu)} \\ -(a+c\sqrt{-1})e^{-(a+c\sqrt{-1})r(x_1+x_2+x_3+\dots-\mu)} \end{array} \right\} \times$$

$$\times F(\mu) d\mu dr dx_1 dx_2 dx_3 \dots$$

$$= \frac{1}{2(N + M\sqrt{-1})} \left[(a+b\sqrt{-1}) \int_0^\infty F(\mu) d\mu \int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})\mu r} dr \times \right.$$

$$\times \int_0^\infty f_1(x_1) e^{-(a+b\sqrt{-1})rx_1} dx_1 \int_0^\infty f_2(x_2) e^{-(a+b\sqrt{-1})rx_2} dx_2 \times$$

$$\times \int_0^\infty f_3(x_3) e^{-(a+b\sqrt{-1})rx_3} dx_3 \dots - (a+c\sqrt{-1}) \int_0^\infty F(\mu) d\mu \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-(a+c\sqrt{-1})\mu r} dr \int_0^\infty f_1(x_1) e^{-(a+c\sqrt{-1})rx_1} dx_1 \times$$

$$\times \int_0^\infty f_2(x_2) e^{-(a+c\sqrt{-1})rx_2} dx_2 \times \int_0^\infty e^{-(a+c\sqrt{-1})rx_3} dx_3 \dots \left. \right].$$

*

Seja agora

$$\varphi_1(r) = \int_0^{\infty} f_1(x_1) e^{-(a+b\sqrt{-1})rx_1} dx_1$$

$$\varphi_2(r) = \int_0^{\infty} f_2(x_2) e^{-(a+b\sqrt{-1})rx_2} dx_2$$

$$\varphi_3(r) = \int_0^{\infty} f_3(x_3) e^{-(a+b\sqrt{-1})rx_3} dx_3$$

.....

como tambem

$$\psi_1(r) = \int_0^{\infty} f_1(x_1) e^{-(a+c\sqrt{-1})rx_1} dx_1$$

$$\psi_2(r) = \int_0^{\infty} f_2(x_2) e^{-(a+c\sqrt{-1})rx_2} dx_2$$

$$\psi_3(r) = \int_0^{\infty} f_3(x_3) e^{-(a+c\sqrt{-1})rx_3} dx_3$$

.....

e

$$\Phi(\mu) = \int_0^{\infty} e^{(a+b\sqrt{-1})\mu r} \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(r) \cdot \varphi_3(r) \dots dr$$

$$\Psi(\mu) = \int_0^{\infty} e^{(a+c\sqrt{-1})\mu r} \psi_1(r) \cdot \psi_2(r) \cdot \psi_3(r) \dots dr$$

virá a fórmula

$$A = \frac{1}{2(N+M\sqrt{-1})} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (a+b\sqrt{-1}) \cdot \Phi(\mu) \\ -(a+c\sqrt{-1}) \cdot \Psi(\mu) \end{array} \right\} \cdot F(\mu) d\mu$$

ou fazendo

$$(a+b\sqrt{-1})\Phi(\mu) - (a+c\sqrt{-1})\Psi(\mu) = \Xi(\mu)$$

$$A = \frac{\int_0^{\infty} \Xi(\mu) \cdot F(\mu) d\mu}{l \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2} \right) + \left[\arctan \left(\frac{b}{a} \right) - \arctan \left(\frac{c}{a} \right) \right] \cdot 2\sqrt{-1}}$$

Fazendo

Fazendo

$$c = -b, \quad a = b = 1,$$

virá a fórmula seguinte :

tem tambem a fórmula simples

$$\varphi_1(r) = \int_0^\infty f_1(x_1) e^{-(1+\sqrt{-1})rx_1} dx_1$$

$$\varphi_2(r) = \int_0^\infty f_2(x_2) e^{-(1+\sqrt{-1})rx_2} dx_2$$

$$\varphi_3(r) = \int_0^\infty f_3(x_3) e^{-(1+\sqrt{-1})rx_3} dx_3$$

.....

$$\psi_1(r) = \int_0^\infty f_1(x_1) e^{-(1-\sqrt{-1})rx_1} dx_1$$

$$\psi_2(r) = \int_0^\infty f_2(x_2) e^{-(1-\sqrt{-1})rx_2} dx_2$$

$$\psi_3(r) = \int_0^\infty f_3(x_3) e^{-(1-\sqrt{-1})rx_3} dx_3$$

.....

$$\Phi(\mu) = \int_0^\infty e^{(1+\sqrt{-1})\mu r} \varphi_1(r) \varphi_2(r) \varphi_3(r) \dots dr$$

$$\Psi(\mu) = \int_0^\infty e^{(1-\sqrt{-1})\mu r} \psi_1(r) \psi_2(r) \psi_3(r) \dots dr$$

$$A = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{-1}} \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} (1+\sqrt{-1}) \Phi(\mu) \\ -(1-\sqrt{-1}) \Psi(\mu) \end{array} \right\} F(\mu) d\mu.$$

Fica, por consequencia, deduzida a fórmula de redução directa da classe considerada de integraes definidos multiplos.

Fazendo

$$a=0 \quad e \quad b=-c$$

fazendo

vem tambem a fórmula simples

$$A = \frac{\int_0^\infty \Xi(\mu) d\mu}{2\pi\sqrt{-1}}$$

onde é

$$\Xi = [\Phi(\mu) + \Psi(\mu)]\sqrt{-1}$$

$$\Phi(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu r \sqrt{-1}} \cdot \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(r) \dots dr$$

$$\Psi(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu r \sqrt{-1}} \cdot \psi_1(r) \cdot \psi_2(r) \dots dr$$

$$\varphi_1(r) = \int_0^\infty f_1(x_1) e^{-r x_1 \sqrt{-1}} dx_1$$

.....

$$\psi_1(r) = \int_0^\infty f_1(x_1) e^{-r x_1 \sqrt{-1}} dx_1$$

.....

Esta por consequencia deduzida a fórmula de redução directa da classe considerada de integrais de integrais de integrais.

SOBRE UMA FÓRMULA DE WRONSKI

POR

J. M. RODRIGUES

Wronski, creador do algorithmo universal das facultades, demonstrou que a integração das funcções de uma variavel era dada em funcção de uma facultade exponencial pela fórmula

$$\int F(x) dx = l \left\{ \left[e^{\psi x_0} \right] x \right\} + \text{constante}$$

onde é

$$\psi x = Fx + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{dFx}{dx} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2Fx}{dx^2} + \dots,$$

devendo, depois de feitos os calculos, fazer-se $x_0 = 0$.

As facultades algorithmicas gozam de propriedades caracteristicas bem determinadas; por consequencia quando fôr possível obter a somma da serie que define a funcção ψ , a fórmula de Wronski exprime analyticamente a integração geral das funcções de uma só variavel.

Em tudo o que segue deve ter-se em vista que depois de se desenvolver a facultade deve fazer-se $x_0 = 0$.

1

Somma da serie

$$\psi x = Fx + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{dFx}{dx} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2Fx}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^3Fx}{dx^3} \quad (a)$$

I

O termo geral da serie

$$T_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \cdot \frac{d^n F x}{d x^n}$$

transforma-se em

$$T_n = \frac{z^{-n}}{n+1} \cdot \frac{d^n F x}{d x^n} \cdot \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n},$$

designando por $z = \frac{v}{r}$ uma quantidade real ou imaginaria da forma $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$; portanto, formando o producto das series, cujos termos geraes são cada um dos factores de T_n :

$$S = F x + \frac{dF}{d x} \cdot \frac{z}{1} + \frac{d^2 F x}{d x^2} \cdot \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 F x}{d x^3} \cdot \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (1)$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} \right)^3 + \dots \quad (2)$$

resulta

$$S S_1 = \psi x + \sum A z^m + \sum A' z^{-m} \quad (3)$$

Mas as funções algorithmicas que geram as series (1) e (2) são

$$S = F(x+z) \quad \text{e} \quad S_1 = -z l \left(1 - \frac{1}{z} \right);$$

logo

$$-z l \left(1 - \frac{1}{z} \right) \times F(x+z) = \psi x + \sum A z^m + \sum A' z^{-m};$$

e como é

$$v = r e^{\pm u \sqrt{-1}}, \quad z = \frac{v}{r} = e^{\pm u \sqrt{-1}}$$

virá

$$U = -r e^{+u\sqrt{-1}} l \left(1 - \frac{e^{-u\sqrt{-1}}}{r} \right) \times F(x + r e^{+u\sqrt{-1}}) = \psi x$$

$$+ \Sigma A . e^{+mu\sqrt{-1}} + \Sigma A' . e^{-mu\sqrt{-1}},$$

$$U_1 = -r e^{-u\sqrt{-1}} l \left(1 - \frac{e^{+u\sqrt{-1}}}{r} \right) \times F(x + r e^{-u\sqrt{-1}}) = \psi x$$

$$+ \Sigma A . e^{-mu\sqrt{-1}} + \Sigma A' . e^{+mu\sqrt{-1}},$$

d'onde se tira

$$U + U_1 = 2\psi x + \Sigma A (e^{+mu\sqrt{-1}} + e^{-mu\sqrt{-1}})$$

$$+ \Sigma A' (e^{-mu\sqrt{-1}} + e^{+mu\sqrt{-1}})$$

ou

$$U + U_1 = 2\psi x + 2\Sigma A \cos mu + 2\Sigma A' \cos mu.$$

Multiplicando por du , e integrando entre os limites 0 e π , resulta

$$\psi x = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (U + U_1) du.$$

Quando se souber, pois, achar este integral definido, a fórmula de Wronski dará

$$\int F x dx = l \left\{ \left[e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (U + U_1) du} x \right] \right\} + \text{const.}$$

II

Se $F x$ fôr uma função finita, contínua e periodica, Cauchy demonstrou que

$$\frac{d^n F x}{dx^n} = \frac{1.2.3 \dots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} F(x + r e^{n\theta}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

onde r designa um raio arbitrario menor que o raio do circulo de convergencia.

O termo geral da serie proposta (a) transforma-se, pois, em

$$T_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x + r e^{\theta i}) r^{-n} e^{-n\theta i} d\theta,$$

e por consequencia

$$\psi x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x + r e^{\theta i}) d\theta \\ \times \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-\theta i}}{r} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\theta i}}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-\theta i}}{r} \right)^3 + \dots \right];$$

mas

$$l \left(1 - \frac{e^{-\theta i}}{r} \right) = \left(\frac{e^{-\theta i}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-\theta i}}{r} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\theta i}}{r} \right)^3 + \dots,$$

logo

$$\psi x = -\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} l \left(1 - \frac{e^{-\theta i}}{r} \right) \times F(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{\theta i} d\theta.$$

A fórmula de Wronski exprime, pois, o integral de uma funcção periodica, monodroma e monogenea em funcção do logarithmo das facultades; a saber

$$\int Fx dx = l \left\{ \left[e^{-\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + r e^{\theta i}) \cdot \Theta e^{-\theta i} d\theta} x \right] \right\} + \text{const.},$$

onde

$$\Theta = l \left(1 - \frac{e^{-\theta i}}{r} \right).$$

III

Concebamos a possibilidade de uma funcção problematica de uma variavel z independente de x e de um parametro arbitrario, e tal que, o seu integral definido entre dois limites dados, seja

$$\int_x^\beta \varphi z dz = \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

O termo geral da serie proposta

$$T_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{d^n Fx}{dx^n}$$

transforma-se no integral definido

$$T_n = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^n Fx}{dx^n} \cdot \frac{\varphi_n z}{1 \cdot 2 \dots n};$$

por consequencia

$$\psi x = \int_{\alpha}^{\beta} dz \left[Fx \times \varphi_0 z + \frac{dFx}{dx} \cdot \frac{\varphi_1 z}{1} + \frac{d^2 Fx}{dx^2} \cdot \frac{\varphi_2 z}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 Fx}{dx^3} \cdot \frac{\varphi_3 z}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right]$$

Como a funcção φ é uma funcção problematica indeterminada podemos imprimir-lhe a condição

$$\varphi_n z = [\varphi_1 z]^n, \tag{2}$$

essencial para a sua determinação; portanto

$$\psi x = \int_{\alpha}^{\beta} dz \left[Fx + \frac{dFx}{dx} \cdot \frac{\varphi_1 z}{1} + \frac{d^2 Fx}{dx^2} \cdot \frac{\varphi_1 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 Fx}{dx^3} \cdot \frac{\varphi_1 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right]$$

Logo

$$\psi x = \int_{\alpha}^{\beta} F(x + \varphi_1 z) dz \tag{b}$$

é a somma da serie proposta, obtida por intermedio de uma funcção auxiliar e condicional φz .

Derivando a funcção ψ dada pela fórmula (b) resulta

$$\frac{d\psi x}{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x + \varphi_1 z) dz, \quad \frac{d^{n+1} \psi x}{dx^{n+1}} = \int_{\alpha}^{\beta} F^{(n+1)}(x + \varphi_1 z) dz; \tag{b_1}$$

mas

$$\frac{d\psi x}{dx} = \frac{dFx}{dx} + \frac{1}{1!1^2} \cdot \frac{d^2 Fx}{dx^2} + \frac{1}{1!1^3} \cdot \frac{d^3 Fx}{dx^3} + \dots,$$

portanto

$$\frac{d\psi x}{dx} = F(x+1) - Fx, \quad \frac{d^{n+1}\psi x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n F(x+1)}{dx^n} - \frac{d^n Fx}{dx^n}. \quad (b_2)$$

O integral de uma funcção differencial é pois

$$\int Fx dx = l \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} F(x_0 + \varphi_1 z) dz \right\} x | 1 \quad \left. \right\} + \text{const.} \quad (c)$$

e o seu desenvolvimento em serie obtem-se pelo desenvolvimento correspondente da faculdade ou do seu logarithmo. N'estas series entram as derivadas da funcção ψx , as quaes se exprimem por integraes definidos ou pelas derivadas da funcção Fx , como se vê pelas expressões (b_1) e (b_2) . Isto mesmo é applicavel ás fórmulas achadas pelos methodos precedentes.

2

Investigação de integraes definidos

I

A integração das funcções de uma variavel depende do conhecimento de certos integraes definidos, como se vê pelas fórmulas precedentes.

A determinação da funcção φ e dos limites de integração α e β na fórmula (c) gera muitos integraes definidos para a sommação da serie ψ , e por consequencia para a integração geral das funcções. As condições necessarias e sufficientes, a que deve satisfazer a funcção φ , para que a somma da serie (a) seja dada pela fórmula (b) , exprimem-se pelo integral definido

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1 z^n dz = \frac{1}{n+1}. \quad (m)$$

Existem muitas funcções elementares que satisfazem a esta expressão fundamental; e achada uma deduzem-se depois muitas outras por uma simples mudança de variavel independente.

Com effeito, entre a multiplicidade d'essas funcções, a mais simples é $\varphi_1 z = z$, quando os limites de integração são 0 e 1.

Assim

$$\int_0^1 z^n dz = \frac{1}{n+1}.$$

Fazendo $z = \varphi t$, e designando por t_0 e t_1 os valores de t que tornam $\varphi t = 0$ e $\varphi t = 1$, resulta

$$\int_0^1 z^n dz = \int_{t_0}^{t_1} \varphi^n t^n \cdot \varphi' t dt = \frac{1}{n+1}; \quad (m')$$

por consequencia

$$\psi x = \int_{t_0}^{t_1} F(x + \varphi t) \cdot \varphi' t dt. \quad (m'')$$

Como a funcção φt é uma funcção arbitraria; segue-se que, attribuindo-lhe fórmãs diferentes, existe um numero infinito de funcções particulares para effectuar a sommação da serie ψ pelo integral definido (m'') , e por consequencia para obter a expressão analytica do integral de uma funcção differencial em funcção de uma facultade pela fórmula

$$\int F x dx = l \left\{ \left[\int_{t_0}^{t_1} F(x + \varphi t) \varphi' t dt \right] x \right\} + \text{const.} \quad (n)$$

Assim, dando a φt as fórmãs particulares

$$\varphi t = t^{\pm 1}, \quad e^{\pm t}, \quad \text{sen } t, \quad \text{tang } t, \quad e^{-\text{tang } t}, \quad \text{etc. ...},$$

os valores t_0 e t_1 de t que tornam $\varphi t = 0$ e $\varphi t = 1$, são respectivamente

$$\left. \begin{array}{l} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \infty \\ 1 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} -\infty \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} +\infty \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \text{etc. ...}$$

Sabendo pois determinar qualquer dos integraes definidos
 expressão fundamental; e achada uma deduzem-se depois muitas
 outras por uma simples mudança de variavel independentemente.
 Com effeito, entre a multiplicação d'essas funcções, a mais
 simples é $\varphi(x) = x$, durante a qual a integração são 0 e 1.

$$\int_0^{\mp\infty} F(x + e^{\pm t}) e^{\pm t} dt,$$

$$+ \int_1^{\infty} F\left(x + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

$$\int_0^{\pi} F(x + \operatorname{sen} t) \cos t dt,$$

$$\int_0^{\pi} F(x + \operatorname{tang} t) (1 + \operatorname{tang}^2 t) dt,$$

etc.

Como a função φt é uma função arbitraria; segue-se que
 attribuido-lhe formas diferentes existe um numero infinito de
 o integral indefinido da função Fx é dado pela fórmula (n), na
 qual devemos substituir por t_0 e t_1 os limites da integração, e
 por φt a função correspondente a estes limites.

II

A função $\varphi z = (z - a)^n$, integrada entre os limites $+a$ e $-a$,
 satisfaz ás condições expressas pelo integral definido (m), porque

$$\int_{-a}^{+a} (z - a)^n dz = -(-2a)^{n+1} \times \frac{1}{n+1}$$

d'onde

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \left(-\frac{z-a}{2a}\right)^n dz = \frac{1}{n+1};$$

portanto sabendo determinar os integraes definidos

$$\psi x = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} F\left(x - \frac{z-a}{2a}\right) dz, \quad (p)$$

e operando a mudança de variavel independente

$$\psi x = \frac{1}{2a} \int_{t_1}^{t'_1} F\left(x - \frac{\varphi t - a}{2a}\right) \varphi' t dt, \quad (p')$$

onde t_1 e t'_1 designam os valores de t , que tornam $\varphi t = +a$ e $\varphi t = -a$.

Como a quantidade a é uma quantidade finita, real ou imaginaria, a fórmula (p) comprehende um grande numero de integraes definidos entre limites reaes ou imaginarios, e dado um d'estes limites, deduzem-se depois muitos outros integraes pela fórmula (p').

Assim, quando $a = 1$,

$$\psi x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F\left(x - \frac{z-1}{2}\right) dz;$$

e fazendo

$$z = e^{\pm t}, \quad \cos t, \quad e^{\pm t} \sqrt{-1}, \quad \frac{t}{\sqrt{-1}}, \quad \text{etc. . . . ,}$$

resulta

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t'_1 = \pi \sqrt{-1} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 \\ \pm \pi \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 0 \\ +\pi \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{array} \right\}, \quad \text{etc. . . .}$$

Portanto, sabendo determinar os integraes definidos

$$(q) \int_{-1}^{+1} F\left(x + \frac{t-1}{2}\right) dt,$$

$$= \int_0^{+\pi\sqrt{-1}} F\left(x + \frac{e^{\pm t}-1}{2}\right) e^{\pm t\sqrt{-1}} dt,$$

$$(q) \int_0^{\pm\pi} F\left(x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t\right) \operatorname{sen} t dt,$$

$$+ \int_{-\pi}^{+\sqrt{-1}} F\left[x + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{-1}}\right)\right] \frac{dt}{\sqrt{-1}},$$

onde t e $\sqrt{-1}$ são as raizes da equação $t^2 + 1 = 0$.
 Como a quantidade x é uma quantidade finita, real ou imaginária, a fórmula (q) comprehende um grande numero de integraes definidos entre limites reais ou imaginarios, e dado um d'estes o integral indefinido de $F x$ é dado pela fórmula de Wronski.

$$; z = \left(\frac{1-z}{2} - x\right) \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} dx =$$

$$\dots \dots \dots \frac{1}{\sqrt{-1}} \dots \dots \dots z = \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \begin{cases} +\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{cases} \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO DE UM THEOREMA DE MR. BESGE

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

Alferes alumno de Artilheria

No *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XIX, Novembre 1874, lê-se (extracto de uma carta de Mr. Besge dirigida a Mr. Liouville) o seguinte theorema: — «Seja α uma constante positiva ou negativa, mas de um valor absoluto $a < 1$, e x uma variavel independente, de 0 a π . Designemos além d'isso pela caracteristica $f(t)$, uma função susceptivel de se desenvolver em serie pela fórmula de Maclaurin, segundo as potencias de sua variavel supposta real ou imaginaria; emfim, consideremos o integral definido

$$A = \int_0^{\pi} \frac{f(e^{x i}) + f(e^{-x i})}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx.$$

Este integral, susceptivel de uma grande redução, é simplesmente igual ao dobro do seguinte:

$$\int_0^{\pi} \frac{f(\alpha \operatorname{sen}^2 x)}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}} dx.»$$

Este theorema foi apresentado sem demonstração, e por isso não sabemos se a que vamos dar coincide com a do auctor.

Pela fórmula de Maclaurin obtemos a serie

$$\begin{aligned}
 f(e^{\pm xi}) &= f(0) + \frac{e^{\pm xi}}{1} f'(0) + \\
 &+ \frac{e^{\pm 2xi}}{1.2} f''(0) + \\
 &+ \frac{e^{\pm 3xi}}{1.2.3} f'''(0) + \\
 &\dots + \\
 &+ \frac{e^{\pm nxi}}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(0) + \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Desdobrando e sommando membro a membro, as duas equações dão

$$\begin{aligned}
 f(e^{xi}) + f(e^{-xi}) &= 2f(0) + \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{1} f'(0) + \\
 &+ \frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{1.2} f''(0) + \\
 &+ \frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{1.2.3} f'''(0) + \\
 &\dots + \\
 &+ \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(0) + \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ f(0) + \frac{\cos x}{1} f'(0) + \frac{\cos 2x}{1.2} f''(0) + \frac{\cos 3x}{1.2.3} f'''(0) + \dots + \frac{\cos nx}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(0) + \dots \right\}$$

e analogamente

$$f(\pm \alpha \text{sen}^2 x) = \left\{ \begin{aligned} & f(0) \pm \frac{\alpha \text{sen}^2 x}{1} f'(0) + \frac{\alpha^2 \text{sen}^4 x}{1.2} f''(0) \pm \frac{\alpha^3 \text{sen}^6 x}{1.2.3} f'''(0) + \\ & + \dots + (-1)^n \frac{\alpha^n \text{sen}^{2n} x}{1.2 \dots n} f^{(n)}(0) + \dots \end{aligned} \right\}$$

Por consequencia, para o caso de ser α positivo, temos

$$\int_0^\pi \frac{f(e^{xi}) + f(e^{-xi})}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx =$$

$$= 2 \left\{ \begin{aligned} & f(0) \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} + \frac{f'(0)}{1} \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} + \\ & + \frac{f''(0)}{1.2} \int_0^\pi \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} + \frac{f'''(0)}{1.2.3} \int_0^\pi \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} + \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3 \dots n} \int_0^\pi \frac{\cos nx dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} + \dots \end{aligned} \right\}$$

e

$$\int_0^\pi \frac{f(\alpha \text{sen}^2 x) dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 x}} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & f(0) \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 x}} + \frac{\alpha f'(0)}{1} \int_0^\pi \frac{\text{sen}^2 x dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 x}} + \\ & + \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} \int_0^\pi \frac{\text{sen}^4 x dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 x}} + \frac{\alpha^3 f'''(0)}{1.2.3} \int_0^\pi \frac{\text{sen}^6 x dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 x}} + \\ & + \dots + \frac{\alpha^n f^{(n)}(0)}{1.2.3.4 \dots n} \int_0^\pi \frac{\text{sen}^{2n} x dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 x}} + \dots \end{aligned} \right\}$$

*

portanto torna-se necessario provar as igualdades

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha \cos x + \alpha^2}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx = \alpha \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx = \alpha^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}} dx$$

.....

ou em geral

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{1-2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx = \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}} dx.$$

Para isso consideremos o integral definido

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y^{2n} dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\alpha^2 y^2)}}$$

susceptivel de transformação e simplificação pelos contornos, α positivo menor que a unidade, n um numero inteiro positivo.

Effectivamente descreva-se sobre um eixo dos x e para o mesmo lado duas semi-circumferencias \widehat{ab} , $\widehat{a'b'}$ com centros em $O'O''$, dados pelos comprimentos iguaes $OO' = OO'' = 1$ do mesmo eixo, a partir da origem O , de raios iguaes e muito pequenos; depois uma outra semi-circumferencia $\widehat{cc'c'}$, tambem do mesmo lado para onde se acham voltadas as outras, tendo o seu centro em O e um raio R comprehendido entre a unidade e $\frac{1}{\alpha}$;

então o integral

$$\int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\alpha^2 z^2)}}$$

relativo ao contorno $Oabcc''c'b'a'O$ é nullo, pois a funcção affecta do signal de integração é holomorpha na parte do plano limitado por esta curva; e como os integraes relativos aos dois segmentos $c'b'$, bc se destroem, e bem assim os integraes relativos aos semi-circulos \widehat{ab} , $\widehat{a'b'}$, porque são infinitesimos, concluimos já d'aqui a nullidade da somma dos integraes relativos á recta $a'a$ e á semi-circumferencia finita $\widehat{c c''}$.

Fazendo portanto $R = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, obtemos sobre a circumferencia respectiva

$$z = \frac{e^{\theta i}}{\sqrt{\alpha}}, \quad dz = \frac{i \cdot e^{\theta i} d\theta}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\sqrt{(1-z^2)(1-\alpha^2 z^2)} = \pm \frac{i \cdot e^{\theta i}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{1-2\alpha \cos 2\theta + \alpha^2}$$

por conseguinte

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y^{2n} dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\alpha^2 y^2)}} = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^\pi \frac{e^{2n\theta i}}{\sqrt{1-2\alpha \cos 2\theta + \alpha^2}} d\theta$$

d'onde

$$2 \cdot \int \frac{y^{2n} dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\alpha^2 y^2)}} = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta d\theta}{\sqrt{1-2\alpha \cos 2\theta + \alpha^2}}$$

Fazendo

$$\begin{cases} y = \text{sen } x \\ 2\theta = x \end{cases}$$

vem

$$\alpha^n \int_0^\pi \frac{\text{sen}^{2n} x dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \text{sen}^2 x}} = \int_0^\pi \frac{\cos nx dx}{\sqrt{1-2\alpha \cos x + \alpha^2}}$$

logo

$$\int_0^\pi \frac{f(e^{xi}) + f(e^{-xi})}{\sqrt{1-2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx = 2 \cdot \int_0^\pi \frac{f(\alpha \text{sen}^2 x)}{\sqrt{1-\alpha^2 \text{sen}^2 x}} dx.$$

Para considerar agora o caso de ser α negativo, fazemos $\alpha = \pi - y$ nos dois membros d'esta equação, o que dá

$$\int_0^\pi \frac{f(-e^{y^i}) + f(-e^{-y^i})}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} dy = 2 \cdot \int_0^\pi \frac{f(\alpha \operatorname{sen}^2 y)}{\sqrt{1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 y}} dy =$$

$$= \int_0^\pi \frac{f(e^{y^i}) + f(e^{-y^i})}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}} dy$$

por consequencia

$$\int_0^\pi \frac{dy}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} = \int_0^\pi \frac{dy}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}}$$

$$- \int_0^\pi \frac{\cos y dy}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} = \int_0^\pi \frac{\cos y dy}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2y dy}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} = \int_0^\pi \frac{\cos 2y dy}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}}$$

$$- \int_0^\pi \frac{\cos 3y dy}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} = \int_0^\pi \frac{\cos 3y dy}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos 4y dy}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} = \int_0^\pi \frac{\cos 4y dy}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}}$$

.....

$$(-1)^i \int_0^\pi \frac{\cos i y dy}{\sqrt{1 + 2\alpha \cos y + \alpha^2}} = \int_0^\pi \frac{\cos i y dy}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos y + \alpha^2}}$$

.....

logo

$$\int_0^\pi \frac{f(-\alpha \operatorname{sen}^2 y)}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 y}} dy = f(0) \int_0^\pi \frac{dy}{\sqrt{1+2\alpha \cos y + \alpha^2}} +$$

$$+ \frac{f'(0)}{1} \int_0^\pi \frac{\cos y dy}{\sqrt{1+2\alpha \cos y + \alpha^2}} +$$

$$+ \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} \int_0^\pi \frac{\cos 2y dy}{\sqrt{1+2\alpha \cos y + \alpha^2}} + \dots$$

$$= \int_0^\pi \frac{f(e^{y i}) + f(e^{-y i})}{\sqrt{1+2\alpha \cos y + \alpha^2}} dy.$$

Por conseguinte

$$\int_0^\pi \frac{f(e^{x i}) + f(e^{-x i})}{\sqrt{1 \pm 2\alpha \cos x + \alpha^2}} dx = 2 \int_0^\pi \frac{f(\pm \alpha \operatorname{sen}^2 x) dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

ou tornando implicito o signal de α , vem

$$A = 2 \int_0^\pi \frac{f(\alpha \operatorname{sen}^2 x)}{\sqrt{1-a^2 \operatorname{sen}^2 x}} dx.$$

Convém, porém, notar que a fórmula de Mr. Besge tem no referido jornal o α do segundo membro substituido por a , o que não nos parece exacto, certamente devido a erro de impressão.

Quando fôr $a > 1$ temos ainda

$$\int_0^\pi \frac{f(e^{xi}) + f(e^{-xi})}{\sqrt{1 - \frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}}} dx = 2 \cdot \int_0^\pi \frac{f\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{a}\right)^2}} dx$$

ou finalmente

$$A = \frac{2}{a} \cdot \int_0^\pi \frac{f\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{a}\right)^2}} dx.$$

Conviém, porém, notar que a fórmula de Mr. Hecke tem no referido jornal o 2.º membro substituído por x , o que não nos parece exacto, certamente devido a erro de impressão.

SOBRE A HISTORIA DO NONIUS

No n.º 2:289 do jornal allemão — *Astronomische Nachrichten* vem um artigo do sr. Breusing, de Bremen, com o titulo de — *Nonius ou Vernier?* —, onde elle discute a parte que teve cada um dos tres sabios, Pedro Nunes, C. Clavius e P. Vernier na descoberta do instrumento para medir pequenas partes de linhas rectas ou de angulos. Julgamos este artigo interessante para portuguezes, e porisso aqui o publicamos.

Ao mesmo tempo, para se fazer uma ideia completa da historia do Nonius, julgámos util publicar tambem a passagem do livro — *De Crepusculis*, onde Pedro Nunes, pela primeira vez, apresenta o instrumento, visto que este livro é extremamente raro. Esta passagem foi copiada pelo sr. F. Oom, director do Observatorio Astronomico de Lisboa, do exemplar que existe n'aquelle Observatorio. Devo acrescentar que o sr. F. Oom conservou a orthographia do original, com a unica differença de substituir os *jj* por *ii* e os *uu* por *vv* e vice-versa, onde foi necessario, e que dois erros que elle encontrou foram conservados no texto mas emendados em notas.

Passagem tirada do livro — *De Crepusculis* (*)

PROPOSITIO III

Instrumentum quoddam construere, ad observationes astrorum valde opportunum, quo videlicet eorum elevationes examussim deprehendi possint.

Construatur enim Astrolabium quàm exacte fieri possit: dioptramq; habeat, hoc est regulam quæ super centro volvitur,

(*) Petri Nonii salaciensis, de crepusculis liber unus. Item Allacen Arabis vetustissimi, de causis Crepusculorum Liber unus, à Gerardo Cremonensi jam olim Latinitate donatus, & per eundem Petrum Nonium denuò recognitus.

Secunda editio
Conimbricæ. Excudebat Antonius à Marys. anno 1573.

quàm rectissimam: ad hanc tabellæ ut fieri solet erectæ sint: quarum meatus maiores non sint quàm ut per ea lucidiora fixa sydera distincte videri possint. Esto exempli gratia hujusmodi astrolabij plana una at que circularis superficies $abcd$ (*), diametrisque ac, bd , in quadrantes divisa: ejus centrum sit e , punctum. Super hoc intra ipsam circumferentiam, quantovis intervallo (pari aut impari nihil refert) alius intra alium circulorū quadrantes describantur numero 44. Exterior quadrās ut ab , in nonaginta æquales partes dividatur. Interiorū vero ei propiuior in partes æquales 89. Sequēs deinde in 88. & qui hūc proxime sequitur in 87. et ita deinceps hoc ordine progrediatur, donec ad ultimū interiorū minimūq; perveniatur, qui in partes æquales 46. se-cabitur. In quolibet quadrante singulæ denæ partes tenuissimis quibusdā lineolis, parū circūferētia prætergrediētibus notentur. Nā nisi Astrolabiū in gētis magnitudinis esset, si quinæ aut denæ partes numeris distinguerētur, prænimia intervallorū angustia, magna cōfusio accideret. Numerus autē partiū quas unusquisq; quadrans habet, prope unū ejus extremū juxta semidiametrū scribatur. Ut si supputatio fiat $ab a$, versus b , super ipso b , pūcto 90, scribatur notis algoristicis; subt' vero juxta diametrū eb , reliqui numeri suis debitisq; locis collocabūtur. Igitur hac arte numerus graduū nonaginta quē unusquisq; quadrās etiā interior habere intelligitur, & si in pauciores partes divisus proponatur, omnē aliquotā partē actu habet, quæ à quovis numero nonaginta minori denominatur: nempe dimidiā partē totius, tertiā, quartā, quintā, sextā, septimā, octavā, nonam, decimā, undecimā, duodecimam, & reliquas singulatim usque nonagessimam, quā exterior quadrās actu habet. Nā quod à minorib' partibus ad maiores progrediendo usq; ad quadragesimā sextā aliquotās partes habeat, videlicet nonagessimā, octogessimam nonam, octogessimam octavam, & reliquas, nemo inficiabitur. At quod & cæteras quoque habeat, quæ ab ijs numeris dominantur, qui inter unitatem sunt atq; 46, hinc facile constare poterit, quod qui numerū aliquē in numerum dividit, dividit & in subdupla, sub quadruplū, cæterosq; numeros sub multiples quos dividēs numer' habet: ut q dividit in nonagita, dividit ēt inquadraginta quinque, & qui in 88, dividit & in 44, & ita deinceps in cæteris. Atqui singuli numeri à 23.

(*) Esta passagem vem acompanhada de uma figura, que é tão facil de traçar com as indicações ahi dadas, que a julgamos dispensavel.

usque 45. subdupli sunt eorū qui in serie numerorū disponūtur à 46. usque 90. uno semper intermisso: & hi quoq; aliorū minorū multiplices sunt, & ita in reliquis, alij *ad* alios eodē modo se habent, usque ad unitatem. Igitur numerus ipse graduū nonaginta quē in unoquoq; quadrante contineri intelligimus, *p* prædictas divisiones omnē aliquotā partē habet à dimidia usq; *ad* nonagesimā. Hactenus de instrumenti structura: usus vero per quā facilis erit. Libeat enim nocturno tēpore, cujusvis stella altitudinē supra horizontē ex amussim deprehendere: attolamus hujusmodi Astrolabiū insublime supra oculū, ita ut ex armilla suspensoria pūcto *b*, affixa libere pēdeat, & ejus latus *ab*, ad stellā ipsam dirigemus, dioptrāq; sensim sursum atq; deorsum versus torquebimus, quoad per utrunq; foramen observatā stellā *p* spiciamus. Quoniā vero vix unquā dioptra descriptis quadrantibus superponitur, quin secundū aliquā divisionis notā aliquē eorū inter secet, considerabimus numerū partiū integrarū quē abscisa portio habet, numerū præterea in quē totus ipse quadrans divisus fuerit, & per cōmune documentū numerorū proportionaliū, has partes in nonagesimas partes quadrantis, quas gradus appellare consuevimus, hoc modo convertemus. Multiplicabimus earū numerū in nonaginta, productū dividemus per numerū partiū totius quadrantis, & prodibit ex ea partitione numerus graduū quē ille partes habēt. Sed si numerus aliquis ex divisione relinquatur (ut sepe numero cōtingit) multiplicabimus eū in sexaginta, productū dividemus per prædictū numerum partium totius quadrantis, cōmunem divisorem, & provenient minuta prima. Relictū quoquo numerum ex hujusmodi partitione iterum multiplicabimus in sexaginta, productumq; dividemus per cōmunē divisorē: & provenient secunda minuta: & ita deinceps fiet quoadusque aut nihil ex partitione relinquatur, aut minutiae quæ ex partitione proveniunt, ob earū parvitātē contēni debeant. Exēplum: observata altitudine alicujus stellæ, habeat in Astrolabio extrema linea diopræ per centrum veniens, quam fiducia lineam Astronomi appellant, eam positionem quam diameter *fg*: secetque quadrantem *ir*, partium æqualem 87. in puncto *o*, & ipse arcus altitudinis *oi*, partes comprehendat triginta. Igitur multiplicabimus 30. in 90. fietq; 2700, hunc numerum dividemus per 87. & venient ex partitione gradus 31. sed relinquenter 3. hūc numerum multiplicabimus in 60. & fiet 180. denique dividemus 180. in 87. communem divisorem, & venient ex partitione minuta prima duo, numerusq;

relictus erit 6: hunc deinde multiplicabimus in 60: ad colligenda minuta secunda, fientq 360. hac dividemus per 87, & prodibūt ex partitione minuta tertia (*) quatuor: sed relictus numerus erit 12. hoc igitur ducto in 60. productoq; diviso per cōmunem divisorē, venient minuta quarta (**) octo, at relinquētur ex partitione 24. Et eadem prorsus arte progrediemur quoad libuerit. Cæterum ut hujusmodi instrumentum observationibus solis cōmodius inservire possit, fiant in erectis tabellis alij duo meatus angustissimi: per eos enim interdiu radius solis ingrediens, ejus altitudinem supra horizontem certius cōmōstrabit.

Nonius ou Vernier?

No terceiro volume da sua *Historia das mathematicas* apresenta Kästner, em dezoito paragraphos, noticias historicas sobre os methodos para obter as pequenas partes de linhas rectas ou angulos. O que se segue é um extracto em que os numeros se referem aos paragraphos de Kästner.

No primeiro paragrapho ensina-se o meio de determinar aproximadamente um pequeno arco por meio de movimentos reiterados de uma regoa, e no paragrapho quarto enunciam-se muitos meios engenhosos de dividir linhas e arcos em pequenas partes, bem como o dos quadrantes concentricos de Nunes, em que o interior está dividido em noventa partes iguaes e os interiores em oitenta e nove, oitenta e oito, etc. Kästner continúa:

5. O mais commodo e ainda hoje muito em uso é o seguinte: Divide-se uma linha recta ou um arco em partes iguaes. Toma-se um intervallo contendo m d'estas partes e divide-se em $m + 1$ ou $m - 1$ partes iguaes. Transportam-se estas partes para uma regoa que se faz escorregar sobre o comprimento mencionado, etc.

6. 7. 8. Tres livros ensinam esta ideia engenhosa:

Pierre Vernier — *La construction, l'usage et les proprietes du quadrant nouveau etc.* Bruxelles, 1631.

Bened. Hedraeus — *Nova et accurata astrolabii geometrici structura etc.* Lugd. Bat., 1643.

(•) Aliás secunda.

(••) Aliás tertia.

Ger. a. Gutschoven — *Usus quadrantis geometrici etc.* Bruxellæ, 1674.

9. Nem Hedraeus nem Gutschoven mencionam Vernier.

13. Vernier ficou tão esquecido, que a regoa movel foi attribuida por Hevel a Hedraeus. Robert Hook no livro — *Animadversions on the first part of the Machina caelestis of Johannes Hevelius*, London, 1674, diz, a pagg. 20 e 29, que elle obteve a sua descoberta de um outro, de quem um pequeno livro talvez perdido e esquecido lhe veio accidentalmente á mão: Pierre Vernier — *La construction etc.*

14. Lalande diz no Livro XIII da sua *Astronomia* que o arco movel pertence a Vernier, e funda-se para isso n'um livro de Pézenas — *Mémoires redigés à l'Observatoire de Marseille*, 1753.

18. Nos escriptores até aqui mencionados não encontro uso algum da regoa movel para a divisão das rectas, que todavia já tinha sido indicado por Vernier. O uso mais antigo que eu conheço encontra-se n'uma carta de Regnault a Monconys — *Voyages de Mr. de Monconys*, Paris, 1695, pag. 204. O titulo é — *De la règle de Clavius pour le toisage*. A descoberta e o segredo da divisão d'esta regoa pertence a Clavius; Hedraeus serviu-se d'ella com successo; acha-se tambem por meio de uma correddissa as mais pequenas partes de um arco ou de uma linha recta. Regnault ensina tambem a dividir uma toesa em 10:000 partes. Onde Clavius apresenta uma tal indicação, não o diz elle, e eu nada acho a tal respeito nas obras de Clavius que possuo.

Kästner não examinou Clavius cuidadosamente. A sua muita idade desculpa-o, e talvez elle tenha apenas procurado nas figuras um desenho do Nonius, e porque o não achou, acreditou que nada vinha no texto. Clavius foi esquecido e posto de parte de um modo incomprehensivel; eu fiquei surprehendido quando nas suas obras (*Christophori Clavii Bambergensis opera*. V. Voll. Mogurtiae, 1611, fol.) encontrei a seguinte passagem:

Tom. II. *Geometria practica*, pag. 5:

In regula rectæ ducantur æque in 100 particulas æquales distribuantur, vel in 1:000 si longiores sint. Ita ex qualibet recta quot vis partes centesimæ aut millesimæ abscindi poterunt. Imo si sumatur linea KL_1 continens 11 particulas ex illis 100 vel 1:000 dividaturque in 10 partes æquales, si quidem secta sit regula in 100 partes æquales, poterunt beneficio rectæ KL_1 continentis 11 particulas ejusmodi et in 10 partes æquales divisæ,

ex data recta qualibet accipi quotvis millesimæ partes, perinde ac si partes singulæ centesimæ in regula sectæ essent in denas particulas æquales; si vero regula in 1:000 particulas distributa sit et linea KL talium 11 partium in 10 particulas dissecta, poterunt ex quavis linea recta preposita partes, quot quis voluerit, millesimarum decimæ auferri, non secus ac si singulæ partes millesimæ in regula distributæ essent in 10 partes æquales.

Rursus si regula contineat 100 partes et recta quæpiam MN constans ex 101 ejusmodi particulis distribuatur in 100 partes, poterimus ex data accipere partes decimas millesimarum. At si in regula notatæ sint 1:000 partes et linea quæpiam continens ejusmodi partes 101 secetur in 100 partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centesimæ millesimarum, ac si partes singulæ millesimæ in regula conplecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1:001 dividatur in 1:000 partes, capiemus in quavis recta partes millesimas millesimarum, perinde ac si partes millesimæ singulæ in regula partes 1:000 comprehenderent.

Tom. III. *Astrolabium*, pag. 10:

Doceamus, qua ratione geometrice abscindendus sit arcus, in quo præter gradus quotcunque etiam minuta proposita comprehendantur; et vicissim, quo pacto cognoscendum, quot minuta in quavis particula unius gradus contineantur.

Depois de especificar varios artificios, entre outros aquelle de que falla Kästner no paragrapho primeiro, hem como o modo de obter um arco de 57' quando se divide um arco de 57° em sessenta partes e um arco de 43° em sessenta partes, continúa Clavius a pag. 12:

Ceterum si contenti esse velimus unico quadrante in gradus 90 accurate distributo, nimirum quadrante AB, cujus semidiameter CD, longe expeditius in eo arcum quodlibet graduum ac minorum accipiemus, si intervallo ejusdem semidiametri CD arcus describatur, in eoque arcus LM abscindatur complectens gradus 61 quadrantis AB atque hic arcus LM in 60 partes æquales distribuatur. Una harum particularum continebit unum gradum semel et insuper partem sexagesimam unius gradus, hoc est unum minutum. Ex quo fit, ut duæ particulæ conplectantur duos gradus et insuper duo minuta; tres particulæ tres gradus et tria minuta: et sic deinceps.

Itaque si in quadrante AB cupiat quis particulam unius minuti,

transferat unam arcus particulam LM in quadrantem, initio facto a puncto A vel a quovis gradu. Nam particula ultra unum gradum continebit 1 minutum. Eodem modo si duæ particulæ transferantur, complectetur particula ultra duos gradus 2 minuta; si tres particulæ transferantur, continebit particula ultra tres gradus 3 minuta; si 53 particulæ transferantur, comprehendet particula ultra 53 gradus 53 minuta, et sic deinceps.

Estas passagens dão pois a decisiva demonstração de que não devemos a theoria da divisão do Nonius a outro senão a Clavius, e tanto para a medida das rectas como dos arcos.

Lalande diz na sua *Astronomia*, tom. II. 2341:

La division, qui est aujourd'hui la plus employée, est appellée dans la plupart des auteurs division de Nonius quoique Nonius n'en soit pas l'auteur; mais il en avait imaginé une qui eut beaucoup de célébrité, et qui pouvait conduire à celle que nous avons aujourd'hui. Le véritable auteur de la nôtre dans son état actuel fut Pierre Vernier, qui la publia dans un petit ouvrage imprimé à Bruxelles en 1631, intitulé — *La construction, usage et les propriétés du cadran nouveau*. Je crois donc qu'il est juste de rétablir le véritable auteur dans ses droits, et d'appeller Vernier au lieu de Nonius la piece qui forme la division dont il s'agit. Mr. Magellan se plaint avec aigreur de cette innovation, mais cette plainte est injuste, et ne pouvait être faite que par un Portugais, c'est-à-dire un compatriote de Nonius. Mr. Bailly regarde la division de Vernier comme étant celle de Nonius perfectionnée, et le P. Pézenas cite le P. Clavius comme ayant proposé de diviser six parties en cinq; mais ni l'un ni l'autre n'avait pensé à en faire une petit division mobile, et je regarde comme idée très neuve celle de substituer un seul petit arc à la place des vingt circonférences de Nonius et de mettre cette division sur l'alidade mobile; c'est une découverte précieuse, à laquelle personne que Vernier ne peut avoir de droit; elle a un merite indépendant de celui des nombres inégaux de Nonius.

É um enigma que aqui nada mais se diga a respeito de Clavius, senão que dividiu seis partes em cinco. Certamente Clavius servia-se do seu arco movendo-o com a mão ou applicando-o sobre o circulo; a Vernier ficou o merito de o ter ajustado á alidade. Lalande não distinguio as duas cousas; para ser justo em relação aos factos deveria dizer:

La véritable auteur de la division dans son état actuel fut Christophe Clavius de Bamberg; et de mettre cette division sur l'alidade mobile, c'est une idée, à laquelle personne que Vernier ne peut avoir de droit.

Aqui não deve tratar-se de qual dos dois teve merecimento. E como não é inverosímil que Clavius fosse levado á divisão de sessenta e uma partes em sessenta, pelo facto de Pedro Nunes ter dividido noventa partes em oitenta e nove, deve-se conservar sempre a denominação de Nonius.

Bremen.

BRUSING.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 17

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Sendo dado um quadrado magico formado por n² numeros distinctos, pergunta-se de quantos modos é possivel permutar estes n² numeros, sem que o quadrado magico cesse de existir.

Para chegarmos á expressão geral que dê o numero de permutações pedidas, podemos considerar primeiramente em particular um determinante de quinta ordem,

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \quad (1)$$

cujos vinte e cinco elementos supponmos dispostos *em quadrado magico*, isto é, de modo que as sommas dos elementos pertencentes ás mesmas columnas, ás mesmas linhas e ás mesmas diagonaes sejam eguaes entre si.

Como as permutações que se podem fazer entre os seus vinte e cinco elementos, sem que o quadrado magico cesse de existir, equivalem evidentemente ás *permutações symetricas* das columnas e das linhas correspondentes, poderemos chegar facilmente por este caminho á expressão geral do numero dos modos de permutar os numeros distinctos que compõem um quadrado magico qualquer, sem que o quadrado magico cesse de existir.

Representando, pois, por A, B, M, B₁, A₁ as columnas, e por A', B', M', B'₁, A'₁ as linhas do determinante Δ₃, para termos as permutações symetricas de cada um d'estes grupos de letras, permutaremos em primeiro lugar separadamente as duas primeiras letras entrê si, e do mesmo modo as duas ultimas, e teremos as permutações symetricas

$$A B M B_1 A_1 \mid A' B' M' B'_1 A'_1 \mid \dots \dots \dots (2)$$

$$B A M A_1 B_1 \mid B' A' M' A'_1 B'_1 \mid \dots \dots \dots (3)$$

Se agora em cada uma d'estas permutações permutarmos os indices um a um, teremos as permutações symetricas

$$A B_1 M B A_1 \mid A' B'_1 M' B' A'_1 \mid \dots \dots \dots (4)$$

$$B A_1 M A B_1 \mid B' A'_1 M' A' B'_1 \mid \dots \dots \dots (5)$$

$$A_1 B M B_1 A \mid A'_1 B' M' B'_1 A' \mid \dots \dots \dots (6)$$

$$B_1 A M A_1 B \mid B'_1 A' M' A'_1 B' \mid \dots \dots \dots (7)$$

e permutando os indices dois a dois, vem

$$A_1 B_1 M B A \mid A'_1 B'_1 M' B' A' \mid \dots \dots \dots (8)$$

$$B_1 A_1 M A B \mid B'_1 A'_1 M' A' B' \mid \dots \dots \dots (9)$$

Achamos portanto oito modos de permutar symetricamente as columnas e linhas (*); numero tambem evidentemente igual ao dos modos de permutar symetricamente as columnas e linhas n'um determinante de quarta ordem, com os elementos dispostos em quadrado magico.

(*) Convém observar que comparando as quatro permutações (2), (3), (4) e (5) respectivamente com as quatro (8), (9), (6) e (7) se reconhece immediatamente que os quadrados magicos correspondentes ás primeiras permutações não differem dos restantes quadrados obtidos senão na posição relativa, podendo considerar-se em absoluto como eguaes aos quatro primeiros quadrados, em vista do que as permutações consideradas ficariam em rigor reduzidas a quatro.

Se nos oito quadrados magicos assim obtidos mudarmos as columnas em linhas e inversamente, teremos outros oito quadrados magicos (*), e portanto acharemos dezeseis modos de permutar os numeros do quadrado magico dado (1), sem que este cesse de existir. Finalmente se considerarmos os quadrados magicos symetricos d'estes dezeseis, teremos ao todo trinta e dois modos de permutar os numeros do quadrado magico dado.

Para mais claramente vermos como se chega á fórmula geral que dá o numero pedido de permutações, consideraremos ainda um determinante de sexta ou setima ordem, e representemos por A, B, C as suas tres primeiras columnas ou linhas. As permutações ordinarias d'estas tres letras serão

$$ABC \mid ACB \mid BAC \mid BCA \mid CAB \mid CBA \mid \dots (10)$$

Designando por A₁, B₁, C₁ as tres columnas ou linhas symetricas das tres primeiras, se permutarmos estas letras com as letras eguaes das seis permutações (10), uma a uma, duas a duas, tres a tres, vem os seguintes grupos de permutações,

$$\begin{array}{c} A_1 B_1 C_1 \mid A_1 B_1 C_1 \\ A_1 B_1 C_1 \mid A_1 B_1 C_1 \mid A_1 B_1 C_1 \mid \dots \dots \dots (11) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A_1 C_1 B_1 \mid A_1 C_1 B_1 \\ A_1 C_1 B_1 \mid A_1 C_1 B_1 \mid A_1 C_1 B_1 \mid \dots \dots \dots (12) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B_1 A_1 C_1 \mid B_1 A_1 C_1 \\ B_1 A_1 C_1 \mid B_1 A_1 C_1 \mid B_1 A_1 C_1 \mid \dots \dots \dots (13) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B_1 A_1 C_1 \mid B_1 A_1 C_1 \\ B_1 A_1 C_1 \mid B_1 A_1 C_1 \end{array}$$

(*) É claro que estes oito quadrados magicos podem-se considerar em absoluto como symetricos dos oito primeiros.

*

$$\begin{array}{c}
 B_1 C A \mid B_1 C_1 A \mid \\
 B C_1 A \mid B_1 C A_1 \mid B_1 C_1 A_1 \mid \dots \dots \dots (14) \\
 B C A_1 \mid B C_1 A_1 \mid
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 C_1 A B \mid C_1 A_1 B \mid \\
 C A_1 B \mid C_1 A B_1 \mid C_1 A_1 B_1 \mid \dots \dots \dots (15) \\
 C A B_1 \mid C A_1 B_1 \mid
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 C_1 B A \mid C_1 B_1 A \mid \\
 C B_1 A \mid C_1 B A_1 \mid C_1 B_1 A_1 \mid \dots \dots \dots (16) \\
 C B A_1 \mid C B_1 A_1 \mid
 \end{array}$$

por onde se vê que as permutações symetricas das columnas e linhas relativas a cada um dos seis primeiros grupos, são eguaes ao numero de letras A, B, C; as permutações symetricas relativas a cada um dos seis segundos grupos, são eguaes ao numero de *productos distinctos* ou *combinações* d'estas letras tomadas duas a duas; e finalmente aos terceiros grupos correspondem as permutações symetricas eguaes ao numero de *productos distinctos* ou *combinações* das mesmas letras tomadas tres a tres.

Assim acharemos em primeiro logar quarenta e oito modos differentes de permutar os numeros do quadrado magico dado, sem que este cesse de existir (*).

Quando mudarmos as columnas em linhas e vice-versa, acharemos o dobro das permutações. Finalmente, junctando aos quadrados magicos assim obtidos os seus symetricos, teremos ao todo cento e noventa e dois modos de permutar os numeros do quadrado magico dado, sem que elle cesse de existir.

(*) Como sabemos, a nota a pag. 82 é geral, e portanto se não attendermos á posição relativa d'estes quarenta e oito quadrados magicos, só vinte e quatro d'elles podemos considerar como realmente distinctos.

Logo se n representa a ordem do determinante com os elementos dispostos em quadrado magico, o numero N dos modos de permutar estes elementos, que em primeiro logar obtemos, será dado pela fórmula

$$N = 1.2 \dots \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} \left(1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \frac{n-2}{4} + \dots \right) \\ = 1.2 \dots \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (17)$$

sendo n par, ou

$$N = 1.2 \dots \frac{n-3}{2} \frac{n-1}{2} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \dots \dots \dots (18)$$

sendo n impar.

Quando mudarmos as linhas em columnas e inversamente o numero N' dos diferentes modos de permutar os n^2 numeros, será dado pela fórmula

$$N' = 2.N = 1.2 \dots \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n+2}{2}} \dots \dots (19)$$

ou

$$N' = 2.N = 1.2 \dots \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \dots \dots (20)$$

segundo n fôr par ou impar.

Finalmente, tomando os quadrados magicos symetricos dos obtidos pelas $2.N$ permutações, teremos que, em geral, o numero total N'' dos modos de permutar os n^2 numeros distinctos d'um quadrado magico dado, sem que este cesse de existir, será dado pela fórmula

$$N'' = 4.N = 1.2 \dots \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n+4}{2}} \dots \dots (21)$$

ou

$$N'' = 4.N = 1.2 \dots \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot 2^{\frac{n+3}{2}} \dots \dots (22)$$

segundo fôr n par ou impar.

Observação.— Como acabámos de ver, consideramos a permutação simultanea de columnas e linhas dos determinantes, para que as suas diagonaes fossem sempre compostas dos mesmos elementos; devendo-se notar que entre as permutações symetricas que resultam para os elementos de cada uma d'estas diagonaes só ha N permutações que sejam distinctas.

Póde, porém, succeder que, n'alguns casos, os n^2 elementos dos determinantes, de ordem superior á terceira, sejam taes, que as columnas e linhas possam soffrer separadamente a permutação symetrica, sem que a disposição d'estes elementos em quadrado magico cesse de existir, d'onde resulta que as diagonaes não serão sempre compostas dos mesmos elementos, e o numero N''' de modos de permutar os elementos do quadrado magico dado attingirá o valor maximo $12(N-2)$.

Como exemplo apresentaremos o determinante de quarta ordem composto dos primeiros dezeseis numeros inteiros

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} \quad (23).$$

Ainda podiamos proseguir nas nossas investigações; mas não o fazemos, para não sahirmos do campo da questão proposta.

SOBRE A THEORIA DAS FACULDADES

POR

J. M. RODRIGUES

I

Seja

$$y = [\varphi z]$$

uma faculdade exponencial dada, onde φz , base da faculdade, designa uma função theorica ou problematica de uma quantidade z independente da variavel x ; será

$$y + dy = [\varphi z]^{x + dx|\xi} \cdot dx|\xi$$

d'onde

$$dy = y[\varphi(z + x\xi) - 1];$$

mas pela theoria dos factores elementares

$$\text{fact. elem. } [\varphi z]^{x|\xi} = [\varphi(z + x\xi)]^{dx|\xi},$$

e, como é sabido,

$$\text{fact. elem. } [\varphi z]^{x|\xi} = 1 + dx[l\varphi(z + x\xi) -$$

$$-\beta_0 \frac{d l \varphi}{dz} \cdot \frac{\xi}{1} + \beta_1 \frac{d^2 l \varphi}{dz^2} \cdot \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} - \dots],$$

onde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ designam os *numeros de Bernouilli*: por consequencia, fazendo

$$\varphi z = e^{\psi z} \quad \text{ou} \quad \psi z = l \varphi z,$$

resulta o desenvolvimento em serie da derivada de uma faculdade exponencial

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\psi(z+x\xi) - \beta_0 \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\xi}{1} + \beta_1 \frac{d^2\psi}{dz^2} \cdot \frac{\xi^2}{1.2} - \beta_2 \frac{d^3\psi}{dz^3} \cdot \frac{\xi^3}{1.2.3.4} + \dots \right] \quad (a).$$

Ora pela fórmula de Euler

$$\sum u = \frac{1}{\xi} \int u dz - \beta_0 u + \beta_1 \frac{du}{dz} \cdot \frac{\xi}{1.2} - \beta_2 \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{\xi^2}{1.2.3.4} + \dots$$

obtem-se facilmente a sommação da serie (a), a saber:

$$\xi \sum \frac{d\psi(z+x\xi)}{dz} = \psi(z+x\xi) - \beta_0 \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{\xi}{1} + \beta_1 \frac{d^2\psi}{dz^2} \cdot \frac{\xi^2}{1.2} - \beta_2 \frac{d^3\psi}{dz^3} \cdot \frac{\xi^3}{1.2.3.4} + \dots;$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \xi \sum \frac{d\psi(z+x\xi)}{dz}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sum \frac{d\psi(z+x\xi)}{dx} \dots \dots \dots (a')$$

é uma expressão da derivada de uma faculdade exponencial.

O factor elementar de uma faculdade será pois

$$\text{fact. elem. } [\varphi z]^{x|\xi} = 1 + dx \sum \frac{d\varphi(z+x\xi)}{dx}$$

II

A lei de construcção da derivada de uma faculdade conduz naturalmente á deducção de duas fórmulas de Wronski, muito notaveis.

Com effeito

$$\int dx \Sigma \frac{d\psi(z+x\xi)}{dx} = ly + c,$$

mas

$$\int \Sigma \frac{d\psi(z+x\xi)}{dx} . dx = \Sigma \psi(z+x\xi),$$

logo

$$\Sigma \psi(z+x\xi) = l \left\{ \left[e^{\psi z} \right] \left| \frac{x}{\xi} \right. \right\} + c \dots \dots (b).$$

Fazendo $z=0$ e mudando $x\xi$ em x resulta

$$\Sigma \psi x = l \left\{ \left[e^{\psi z_0} \right] \left| \frac{x}{\xi} \right. \right\} + c \dots \dots (b'),$$

d'onde se deduz

$$\Sigma F x = \frac{1}{\xi} . l \left\{ \left[\xi F x_0 \right] \left| \frac{x}{\xi} \right. \right\} + c \dots \dots (b''),$$

pondo

$$\psi x = \xi F x.$$

Foi sob esta fórma que Wronski deu a sua fórmula, a qual exprime analyticamente o algorithmo das differenças inversas em funcção do algorithmo das faculdades.

Partindo d'esta fórmula, Wronski achou, pela sua *Theoria dos factores elementares*, a seguinte

onde $\int F x dx = l \left\{ e^{\psi x_0} x^l \right\} + \text{const.}$

$$\psi x = F x + \frac{1}{1.2} F' x + \frac{1}{1.2.3} F'' x + \frac{1}{1.2.3.4} F''' x + \dots (c)$$

a qual facilmente se pôde deduzir e por muitos modos diferentes. Com effeito, a serie de Taylor

$$\Delta u = \xi \frac{du}{dx} + \frac{\xi^2}{1.2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\xi^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \dots$$

dá

$$(3) \dots u = \xi \sum \frac{du}{dx} + \frac{\xi^2}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\xi^3}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} + \dots;$$

portanto, sendo $z = 0$ e mudando x em $x + \xi$ resulta

$$u = \int F x dx,$$

resulta

$$(3) \dots \int F x dx = \xi \sum F x + \frac{\xi^2}{1.2} \sum F' x + \frac{\xi^3}{1.2.3} \sum F'' x + \dots (c)';$$

mas pela fórmula (b') ou (b'')

$$(3) \dots \frac{\xi^{n+1}}{1^{n+1} 1!} \sum F^{(n)} x = l \left\{ e^{\frac{\xi^{n+1}}{1.2 \cdot (n+1)} F^{(n)} x_0} \left[\frac{x}{\xi} \right] \right\} + c,$$

por consequencia

$$\int F x dx = l \left\{ e^{\frac{\xi^3}{1.2} F' x_0} \left[\frac{x}{\xi} \right] + \dots \right\} + \text{const.}$$

Ora em virtude de uma propriedade elemental das facultades
 algorithmicas

$$\int F x d x = l \left\{ \left[e^{\xi F x_0 + \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F' x_0 + \dots} \right] \frac{x}{\xi} \right\} + \text{const.},$$

logo

$$\int F x d x = l \left\{ \left[e^{\psi x_0} \right] \frac{x}{\xi} \right\} + \text{const.} \dots \dots \dots (c'').$$

Como ξ designa um augmento arbitrario da variavel, podemos,
 sem alterar a generalidade, suppor $\xi = 1$, o que dá

$$\int F x d x = l \left\{ \left[e^{\psi x_0} \right] x \right\} + \text{const.} \dots \dots \dots (c''').$$

A somma da serie que define a funcção ψ obtem-se, como
 vimos, pelos integraes definidos; por consequencia a fórmula de
 Wronski póde exprimir um integral geral em funcção de integraes
 definidos pelo algorithmo das facultades exponenciaes.

III

A fórmula symbolica de Lagrange

$$\sum u = \left(e^{\xi \frac{d}{dx}} - 1 \right) \cdot u$$

applicada á expressão (c') dá immediatamente

$$\int F x d x = \left(e^{\xi \frac{d}{dx}} - 1 \right) \cdot \left[\xi F x + \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} F' x + \frac{\xi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'' x + \dots \right] + \text{const.},$$

por consequencia,

$$\int F x d x = \left(e^{\xi \frac{d}{dx}} - 1 \right) \cdot \psi x + \text{const.},$$

logo

$$\int F x d x = \sum \psi x + \text{const.} \dots \dots \dots (m).$$

Construindo esta somma Σ em funcção das faculdades, resulta a fórmula de Wronski (c''') ou (c''), segundo se suppõe o augmento ξ igual ou diferente da unidade.

Ora, como demonstramos, a funcção ψ é gerada por muitos integraes definidos reductiveis aos tres typos geraes:

$$\psi x = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (U + U_1) du, \quad \psi x = \int_\alpha^\beta F(x + \varphi z) dz \quad (m')$$

$$\psi x = -\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x + r e^{\theta i}) \ominus e^{\theta i} d\theta;$$

logo, suppondo $\xi = 1$ na expressão (m), o que é permittido, vem

$$\left. \begin{aligned} \int F x dx &= \frac{1}{2\pi} \Sigma \int_0^\pi (U + U_1) du + \text{const.} \\ \int F x dx &= \Sigma \int_\alpha^\beta F(x + \varphi z) dz + \text{const.} \\ \int F x dx &= -\frac{r}{2\pi} \Sigma \int_0^{2\pi} F(x + r e^{\theta i}) \ominus e^{\theta i} d\theta + \text{const.} \end{aligned} \right\} (n).$$

Estas fórmulas exprimem relações entre integraes geraes ou indefinidos, sommas finitas e integraes definidos.

A fórmula de Wronski transformada com os integraes definidos (m'), a saber:

$$\left. \begin{aligned} \int F x dx &= l \left\{ \left[e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (U + U_1) du} \right] x | 1 \right\} + \text{const.} \\ \int F x dx &= l \left\{ \left[e^{\int_\alpha^\beta F(x + \varphi z) dz} \right] x | 1 \right\} + \text{const.} \\ \int F x dx &= l \left\{ \left[e^{-\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x + r e^{\theta i}) \ominus e^{\theta i} d\theta} \right] x | 1 \right\} + \text{const.} \end{aligned} \right\} (n')$$

e as fórmulas (n) ligam a integração geral das funcções com a theoria dos integraes definidos pelo algorithmo universal das faculdades e pelo algorithmo das differenças inversas ou sommas finitas.

IV

A lei de construcção (a') da derivada de uma faculdade exponencial póde ainda conduzir a outras consequencias mais notaveis.

Com effeito, seja

$$u = l y \quad \text{e} \quad y = \left[e^{\Delta f z} \right] x | \xi$$

uma faculdade, cuja base é a differença

$$\Delta f z = f(z + \xi) - f z$$

de uma função finita e continua; será

$$\frac{d u}{d x} = \frac{y'}{y} = \sum \frac{d \Delta f(z + x \xi)}{d x} = \sum \frac{\Delta d f(z + x \xi)}{d x} = \frac{d f(z + x \xi)}{d x}$$

e em geral

$$\frac{d^n u}{d x^n} = \frac{d^n f(z + x \xi)}{d x^n}$$

por consequencia o desenvolvimento em serie, ordenada segundo as potencias ascendentes da variavel x , do logarithmo da faculdade proposta será, pela fórmula de Maclaurin,

$$u = u_0 + \frac{x}{1} \left(\frac{d u}{d x} \right)_0 + \frac{x^2}{1.2} \left(\frac{d^2 u}{d x^2} \right)_0 + \frac{x^3}{1.2.3} \left(\frac{d^3 u}{d x^3} \right)_0 + \dots;$$

mas $u_0 = 0$, porque a faculdade de expoente zero é igual á unidade; logo

$$l \left\{ \left[e^{\Delta f z} \right] x | \xi \right\} = \frac{x}{1} \left(\frac{d f}{d x} \right)_0 + \frac{x^2}{1.2} \left(\frac{d^2 f}{d x^2} \right)_0 + \frac{x^3}{1.2.3} \left(\frac{d^3 f}{d x^3} \right)_0 + \dots (p)$$

mas

$$f(z + x \xi) - f z + \frac{x}{1} \left(\frac{d f}{d x} \right)_0 + \frac{x^2}{1.2} \left(\frac{d^2 f}{d x^2} \right)_0 + \dots$$

logo

$$f(z + x\xi) - f z = l \left\{ \left[e^{\Delta f z} \right] x |\xi| \right\} \dots\dots\dots (p')$$

Pondo

$$x\xi = h \quad \text{ou} \quad x = \frac{h}{\xi}$$

resulta

$$f(z + h) = f z + l \left\{ \left[e^{\Delta f z} \right] \frac{h}{\xi} \right\} \dots\dots\dots (p'')$$

e fazendo tambem em (p'')

vem

$$f x = f x_0 + l \left\{ \left[e^{\Delta f x_0} \right] x |\xi| \right\} \dots\dots\dots (p''')$$

Estas fórmulas operam a transformação de uma função no algorithmo das facultades. A primeira (p'') exprime o theorema de Taylor, e a segunda (p''') o de Maclaurin no algorithmo das facultades exponenciaes.

Mudando em (p'') e (p''') f em lf resulta

$$f(z + h) = f z \times \left\{ \left[\frac{f(z + \xi)}{f z} \right] \frac{h}{\xi} \right\} \dots\dots\dots (q)$$

$$f x = f x_0 \times \left\{ \left[\frac{f(x_0 + 1)}{f x_0} \right] x |1| \right\} \dots\dots\dots (q')$$

Desenvolvendo em serie estas facultades pelas fórmulas de Wronski, obtêm-se transformações muito interessantes dos theoremas de Taylor e Maclaurin.

As fórmulas de Wronski relativas ás sommas finitas e integraes são um caso particular das fórmulas precedentes.

Com effeito, fazendo

$$f x = \sum \xi F x,$$

resulta immediatamente

$$\sum F x = \frac{1}{\xi} \cdot l \left\{ \left[e^{\xi F x_0} \right] \frac{x}{\xi} \right\} + c.$$

Do mesmo modo, pondo

$$f x = \int F x d x,$$

será

$$\Delta f x = f(x+1) - f x = F x + \frac{1}{1.2} F' x + \frac{1}{1.2.3} F'' x + \dots$$

ou

$$\Delta f x = \psi x;$$

logo, tomando $f x_0$ para constante arbitraria,

$$\int F x d x = l \left\{ \left[\frac{\psi x_0}{e} \right] x \right\} + \text{const. arbit.}$$

Da fórmula (q') deduzem-se tres outras relativas á integração geral das funcções.

Com effeito, a expressão (q') póde transformar-se n'esta

$$f x = f x_0 \times \left\{ \left[1 + \frac{f(x_0+1) - f x_0}{f x_0} \right] x \right\};$$

portanto, sendo

$$f x = \int F x d x,$$

será

$$f x_0 = c \quad \text{e} \quad \psi x_0 = f(x_0+1) - f x_0;$$

logo, attendendo aos integraes definidos (m') que geram a funcção ψ , vem

$$\int F x dx = c \left\{ \left[1 + \frac{1}{2\pi c} \int_0^\pi (U + U_1) du \right]^{x|1} \right\},$$

$$\int F x dx = c \left\{ \left[1 + \frac{1}{c} \int_\alpha^\beta F(x_0 + \varphi z) dz \right]^{x|1} \right\},$$

$$\int F x dx = c \left\{ \left[1 - \frac{r}{2\pi c} \int_0^{2\pi} F(x_0 + r e^{\theta i}) \Theta e^{\theta i} d\theta \right]^{x|1} \right\}.$$

Estas fórmulas mostram tambem que a theoria dos integraes definidos está intimamente ligada á integração geral das funcções pelo algorithmo das facultades exponenciaes.

NOTE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE SUR L'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND ORDRE

PAR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

I

Considérations générales

1. Toutes les fois que nous voudrions déterminer l'intersection de deux surfaces, définies par les projections de leurs génératrices, nous devons examiner s'il nous est possible de l'obtenir, en recourant seulement à ces projections et au mode de génération de chacune des surfaces proposées, ou encore aux propriétés caractéristiques de celles-ci. Néanmoins l'emploi de ces moyens n'est pas toujours possible, ce qui fait que nous sommes obligés, en général, d'employer des surfaces *auxiliaires* telles que chacune coupe les surfaces proposées suivant des *courbes* dont la construction soit immédiatement possible.

Il faut cependant avoir un grand soin, quand la courbe d'intersection a *plusieurs branches*, de distinguer quels sont les points appartenant à une même branche, et dont les projections, situées sur chaque plan de projection, unies par un trait continu, donnent les projections de la courbe.

2. Le choix des surfaces auxiliaires doit se faire en harmonie avec le mode de génération des surfaces données, et en ayant égard à la direction des plans de projection : de manière à ce que les constructions deviennent toujours les plus faciles que l'on puisse obtenir.

3. Il est clair que les *plans* parallèles entre eux, ou à l'un des plans de projection sont les surfaces auxiliaires qu'il convient en général d'employer : à moins qu'il ne se présente des circon-

stances *toutes particulières*, qui nous conduisent à leur donner une direction plus convenable. Ordinairement ces plans sont *horizontals*, et la méthode, qui se fonde sur eux, se nomme alors *méthode des sections horizontales*. Elle peut encore se simplifier dans plusieurs cas *particuliers*, en déterminant sur un des plans de projection les projections *cylindriques* ou *coniques* des sections faites sur les surfaces données, par chaque plan auxiliaire : de sorte qu'au moyen des points *communs* de ces projections *obliques* nous obtenions dans le système de projection donné, les projections des points de l'intersection demandée.

4. Ces principes généraux exposés, nous allons déterminer par des *méthodes* que nous supposons *plus expéditives* que celles qui sont connues, l'intersection des surfaces du second ordre quelles qu'elles soient ou entre elles-mêmes, ou avec d'autres surfaces particulières.

II

Intersection des surfaces du second ordre

5. Comme nous savons, la méthode des sections horizontales est celle que l'on emploie, en général, pour déterminer l'intersection de deux surfaces du second ordre Σ et Σ' ; mais, quoique l'on puisse choisir le plan horizontal de projection parallèle aux *sections circulaires*, ou encore, dans des cas très-particuliers, aux *sections rectilignes* d'une des surfaces Σ , cette méthode ne laisse pas d'être presque toujours assez laborieuse : parce que nous avons à construire, par points, les projections horizontales des sections correspondantes de Σ' , à moins qu'il ne se présente des cas tout-à-fait spéciaux.

Nous pouvons, cependant, résoudre le problème de divers manières, on ne traçant, sur le plan horizontal, qu'une *courbe homothétique* aux sections faites, par des plans horizontaux, sur la surface Σ' .

En effet : 1.° sur le plan horizontal de projection construisons une courbe homothétique aux sections de Σ' : il est clair que cette courbe peut être considérée comme une trace commune à *différents cônes*, chacun desquels sera déterminé par elle et par une des sections horizontales de Σ' : de sorte que, si nous faisons la *projection centrale* de ces sections, en prenant pour centre de

projection les sommets variables des cônes correspondants, nous n'obtiendrons, pour projection des diverses sections, qu'une seule courbe invariable de forme et de position; et, si, en même temps et avec les mêmes centres, nous faisons la projection centrale des sections correspondantes de Σ , nous aurons des cercles variables en grandeur et en position, mais faciles à tracer.

Ainsi des points communs des projections centrales ou coniques, de deux sections correspondantes, ou déterminées par un même plan auxiliaire, nous déduirons facilement les points homologues de celle-ci, dans le système de projection donné.

2.^o Nous pouvons encore construire des cônes, qui aient, deux à deux, le même sommet, et qui aient pour directrices deux sections horizontales correspondantes de Σ et Σ' ; et ensuite par un mouvement de translation transporter tous les cônes, qui ont pour directrices les sections de Σ' , jusqu'à ce qu'ils aient la même trace horizontale.

6. *Remarque.* — Dans cette seconde méthode il y a un avantage: c'est que nous ne faisons point la plupart des constructions sur les projections des surfaces données, évitant ainsi de charger la figure d'une multitude de lignes auxiliaires, dont l'ensemble la rend ordinairement très-confuse.

Soit dans l'une soit dans l'autre méthode, nous voyons que les centres de projections sont variables.

Si les cônes, qui ont pour directrices les sections de Σ' , sont parallèles, après le mouvement de translation, quand ils auront la même trace, ils auront aussi le même sommet, et par suite ils se confondront: d'où il résultera une plus grande simplification dans la construction, car non seulement nous sommes réduits à avoir une courbe invariable de forme et de position homothétique aux sections de Σ , mais encore nous n'avons qu'un seul centre de projection.

Il y a des cas très-particuliers où nous pourrions employer la projection cylindrique, c'est-à-dire prendre le centre de projection à l'infini (*). D'ailleurs, on pourra souvent employer à la fois, et avantageusement, deux systèmes de projection oblique.

(*) Par exemple, dans le cas où les surfaces Σ et Σ' auront des sections elliptiques homothétiques (lorsque leur direction sera facile de déterminer); quand les sections de l'une des surfaces seront des ellipses et les correspondantes de l'autre seront des lignes droites; etc.

7. *Observation.* — L'application de ces méthodes à quelques problèmes (en entrant dans les détails convenables) se trouvent dans notre *Mémoire de géométrie descriptive*, où l'on pourra voir la fécondité de ces méthodes, et en même temps la manière de faire disparaître quelque difficulté, à peine apparente, que l'on rencontre presque toujours dans l'exécution des épures respectives.

III

Observations générales

8. La détermination des points de la courbe d'intersection, où la tangente est horizontale (*), est très-souvent convenable pour connaître non-seulement la disposition générale de cette courbe, mais surtout les plans auxiliaires limites; évitant ainsi d'employer ceux des plans qui ne donnent aucun point.

Voici, donc, les moyens d'obtenir ces points :

1.° Lorsque les deux sections horizontales se touchent, les points de contact seront, dans l'intersection demandée, évidemment ceux où la tangente est horizontale. Mais comme le contact doit aussi exister dans la projection conique ou polaire de ces sections, il s'ensuit que la question se réduit à la détermination des cercles ou des droites auxiliaires, qui touchent la conique invariable, aussi auxiliaire; et cela s'obtient, en général, après un court essai, qui peut se régulariser par une courbe auxiliaire ou d'erreur.

2.° Si au lieu des cercles, qui représentent les sections horizontales de l'une des surfaces Σ , nous imaginons des cercles concentriques avec ceux-ci et tangentes aux sections correspondantes de l'autre surface Σ' , ces cercles engendreront une troisième surface σ (**), qui ne coupera évidemment la surface Σ que suivant des cercles horizontaux, qui donnent les points où la tangente est horizontale, ou les plans auxiliaires limites, et elle touchera la surface Σ' le long d'une courbe ω , qui passera par ces points.

(*) Les tangentes horizontales sont évidemment parallèles aux asymptotes du lieu géométrique des traces horizontales de toutes les tangentes à l'intersection demandée.

(**) Cette surface auxiliaire σ ne peut dégénérer en plus de quatre surfaces distinctes: car c'est le plus grand nombre de cercles concentriques, que puissent être tangents à une autre conique quelconque.

Donc, pour déterminer les points où la tangente est horizontale, et, par conséquent, les plans auxiliaires limites, il suffit de trouver les *points d'intersection* du contour apparent de la surface Σ sur le plan vertical, avec le *contour apparent* correspondant de la surface σ , lequel se construit aisément (*).

En effet, après avoir fait la projection conique du centre de chacune des sections circulaires de Σ , nous décrirons, avec ces centres, des *cercles* qui touchent la conique auxiliaire invariable suivant laquelle se projettent les sections horizontales de Σ' ; et ensuite, passant au système de projection donné, nous obtiendrons la *grandeur des cercles générateurs* de la surface σ , de façon que réunissant les extrémités des rayons *parallèles* au plan vertical par une ligne continue, *cette ligne* représentera le *contour apparent* demandé.

Il est facile de reconnaître quels sont les cercles de la surface σ , parmi lesquels sont compris les points demandés, ou les plans limites, pour n'avoir à déterminer que la partie du contour respectif, qui est seule nécessaire.

Lorsque les sections de la surface Σ seront des lignes droites, si nous imaginons des *lignes droites* qui leur soient *parallèles*, et qui soient *tangentes* aux sections correspondantes de la surface Σ' (**), nous obtiendrons une *surface auxiliaire* σ' qui coupera évidemment la surface Σ , suivant des *lignes droites* qui donneront les points de tangente *horizontale*. Ces sections rectilignes nous les détermineront en construisant l'intersection des *traces verticales* de Σ et σ' . Mais, si ces traces se coupent *hors des limites du dessin*, nous emploierons les traces de ces surfaces sur un *plan* parallèle au plan vertical de projection et convenablement choisi.

3.^o Les divers *points de contact* de la conique auxiliaire invariable, avec les projections coniques des sections horizontales de la surface σ , étant de même transportés sur les projections coniques des sections horizontales correspondantes de Σ , donneront une *courbe* (***) qui, combinée avec la conique mentionnée, nous conduira aussi à la détermination des plans limites.

(*) Ici, les contours apparents de Σ et σ , par rapport au plan vertical, se confondront évidemment avec les traces de ces surfaces sur leur plan principal commun, parallèle au plan vertical de projection.

(**) Il est clair que pour la détermination de ces tangentes nous recourrons, comme dans le premier procédé, à la conique auxiliaire invariable.

(***) Cette courbe peut être prise comme courbe d'erreur dans le premier procédé (Voyez la *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, t. II, p. 438).

Observation. — On voit facilement, selon les cas qui se présenteront, lequel de ces procédés on devra préférer, pour que la détermination des plans limites soit la plus simple et la plus rigoureuse; en cherchant, en tout cas, s'il est possible d'employer une solution directe, préférable en général.

9. Quand il ne sera pas possible de disposer convenablement les surfaces Σ et Σ' par rapport aux plans de projections nous emploierons, selon les cas, l'un des moyens suivants:

1.^o Nous pourrions recourir à des *changements de plans de projection*, et à des *rotations des figures*, ce qui n'est au fond que le même principe.

2.^o Nous pourrions encore déterminer la *direction commune* des plans sécants, qui donnent dans l'une des surfaces Σ des *cercles*. Alors, nous appliquerons la seconde méthode (*), c'est-à-dire que sur un *plan parallèle* à ces plans, nous tracerons une *courbe homothétique* aux sections correspondantes de l'autre surface Σ' , et nous prendrons des *cônes parallèles* pour surfaces projetantes de ces dernières sections; ces cônes étant transportés par *translation*, jusqu'à ce que, ayant pour trace cette courbe auxiliaire, ils se confondent en un cône unique, et que par conséquent, nous n'ayons qu'un *seul centre* de projection w .

Ensuite, sur ce plan (que nous supposons rabattu sur le plan horizontal ou vertical), nous aurons à déterminer le centre et le rayon de chacune des projections coniques des sections circulaires correspondants de Σ .

Pour cela nous construirons, sur le plan considéré, les traces des droites issues de ce centre unique w , parallèlement aux projetantes des extrémités des rayons convenables de ces sections.

Des points d'intersection des projections centrales de chaque couple de sections correspondantes, nous passerons facilement aux points homologues dans la courbe d'intersection des surfaces proposées Σ et Σ' .

Dans le cas *très-particulier* où la surface Σ pourra être coupée, par des plans parallèles, suivant des *droites*, les constructions se simplifient: car, après avoir déterminé la *direction commune* de ces plans sécants, nous n'avons qu'à choisir convenablement les

(*) La première méthode peut être également applicable, mais les constructions seront, en général, plus difficiles.

cônes projetants des sections de Σ' , et puis à construire, sur le plan horizontal, une *courbe homothétique* aux traces de ces cônes que (étant parallèles) nous transporterons *parallèlement* à eux-mêmes, jusqu'à ce que, ayant pour trace cette courbe auxiliaire, ils se confondent en un seul cône, et que, par suite, nous n'ayons qu'un *seul centre* de projection.

Alors nous n'avons qu'à employer des constructions analogues à celles qui constituent la seconde méthode.

Si les sections de Σ' , déterminées par les plans sécants correspondants aux sections rectilignes de Σ , sont des ellipses, nous pourrons évidemment, en général, recourir à la projection cylindrique.

3.° La *transformation homologique* des surfaces données Σ et Σ' peut également, dans *certain cas*, nous conduire à des constructions très-faciles.

10. Nous devons remarquer que les méthodes que nous avons présentées pour trouver l'intersection des surfaces du second ordre sont évidemment applicables à la détermination de l'intersection de deux surfaces S et S' d'une *ordre quelconque*, pourvu que l'une S puisse être coupée suivant des *cercles* ou des *droites*, par des *plans parallèles*; les sections correspondantes de l'autre S' étant des *courbes homothétiques*; etc. (*).

Il est clair que, dans ce dernier cas, nous déterminerons les points de la courbe d'intersection des surfaces S et S' , où la tangente est horizontale, avec la même facilité que lorsque les surfaces données sont *toutes deux du second ordre*.

Enfin il est facile de voir, selon le cas, laquelle de ces deux méthodes nous devons préférer, pour que les constructions soient en même temps les plus simples et les plus rigoureuses.

(*) Il est bon de remarquer que par ces méthodes nous pouvons quelquefois, non-seulement trouver l'intersection de quelques-unes de ces surfaces particulières, mais encore démontrer géométriquement certaines propriétés de telles surfaces ou de leur intersection.

Comme exemple, nous présenterons le *conoïde oblique* circonscrit à une *courbe plane* quelconque C , lequel a la propriété d'admettre un mode de génération par des *courbes planes du même ordre* que cette courbe C . Une telle propriété se démontre très-facilement en employant la *projection conique*: parce qu'ainsi nous sommes réduits seulement à comparer des triangles semblables pour obtenir les relations convenables (Voyez la *Traité de géométrie descriptive* par Mr. Gournerie, art. 667, où il considère le cas de la courbe C être du *second ordre*).

11. Nous devons observer que, dans les méthodes exposées, les plans sécants auxiliaires peuvent, dans certains cas, laisser d'être parallèles entre eux, quand les projections obliques des respectives sections satisfassent aux conditions exigées dans ces méthodes, ce qui fait qu'elles soient quelquefois et avantageusement appliquées même lorsque la nature des surfaces, ou bien leur position relative donne lieu à l'emploi des procédés ordinaires (*).

12. Nous ne dirons rien de plus, parce que avec ces éléments, qui ont été l'objet de nos études, nous pensons, que l'on peut sûrement résoudre tous les autres problèmes qui en dérivent.

(*) Ainsi, par exemple, dans la théorie des ombres, où nous avons à considérer des cônes, des cylindres et des plans d'ombre, nos méthodes nous conduisent à combiner les traces invariables de ces surfaces avec les projections coniques ou cylindriques de génératrices des surfaces éclairées, ce qui est sans doute préférable, aux procédés ordinaires, toutes les fois que ces génératrices se projettent suivant des droites ou des cercles.

SOBRE ALGUNS THEOREMAS DE ARITHMETICA

PEDRO GÓMES TEIXEIRA

Alfere alumno de Artilheria

THEOREMA (*). — Se fór a um numero da fórma $2^{2p-1}.p-\alpha$, sendo α um inteiro menor que $2p-1$, terá logar a congruência seguinte :

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+2p-1) \equiv 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times \dots \times [2(p-\alpha)-3]^2 \times [2(p-\alpha)-1] \times [2(p-\alpha)+1]^2 \times \dots \times (2p-1)^2 p,$$

onde o modulo é igual a

$$a+a+1+a+2+\dots+a+(2p-1).$$

Seja pois

(1) $\dots (1+x+n) a \equiv 2^{2p-1}.p-\alpha \dots (1+x+n)$
e façamos

$$(a+n) \dots 2p-1 = n(1+x+n)$$

(2) $a(a+1)(a+2)\dots(a+n) = N$

(3) $a+a+1+a+2+a+3+\dots+a+n = p(2a+2p-1) = D.$

(*) Questão proposta n.º 18.

De (1) tira-se $a + \alpha = 2^n \cdot p$, que reduz (2) a

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+\alpha-1)2^n p(a+\alpha+1)\dots(a+n) = N.$$

Fazendo agora

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+\alpha-1)2^n(a+\alpha+1)\dots(a+n) = A$$

$$2a + 2p - 1 = B$$

teremos

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D} = \frac{A}{B} = Q + \frac{r}{B}$$

d'onde se tira

$$\frac{R}{D} = \frac{r}{B} = \frac{R}{pB},$$

ou

$$R = pr.$$

R será pois conhecido logo que r o seja. (3)

Posto isto, façamos

$$\frac{A}{B+1} = A'$$

e vem

$$(1 - \frac{1}{B}) + \frac{A}{B} = A' + \frac{A'}{B},$$

$$A' = a(a+1)\dots(a+\alpha-1)2^{n-1}(a+\alpha+1)\dots \quad (4)$$

$$(a+p-1)(a+p+1)\dots(a+n).$$

Do mesmo modo, fazendo successivamente

$$\frac{A'}{B+3} = A'', \quad \frac{A''}{B+5} = A''', \quad \frac{A'''}{B+7} = A^{(4)},$$

$$\dots \frac{A^{(p-2)}}{B+2p-3} = A^{(p-1)}, \quad \frac{A^{(p-1)}}{B+(2p-1)} = A^{(p)},$$

resultam as igualdades seguintes:

$$\frac{A'}{B} = A'' + \frac{3A'''}{B}$$

$$A'' = a(a+1)(a+2)\dots(a+\alpha-1)2^{n-2}(a+\alpha+1)\dots$$

$$(a+p-1)(a+p+1)\dots(a+n)$$

$$\frac{A''}{B} = A''' + \frac{5A'''}{B}$$

$$A''' = a(a+1)\dots(a+\alpha-1)2^{n-3}(a+\alpha+1)\dots$$

$$(a+p-1)(a+p+3)\dots(a+n)$$

$$\frac{A'''}{B} = A^{(4)} + \frac{7A^{(4)}}{B}$$

$$A^{(4)} = a(a+1)\dots(a+\alpha-1)2^{n-4}(a+\alpha+1)\dots$$

$$(a+p-1)(a+p+4)\dots(a+n)$$

.....

$$\frac{A^{(p-2)}}{B} = A^{(p-1)} + \frac{(2p-3)A^{(p-1)}}{B}$$

$$A^{(p-1)} = a(a+1)\dots 2^p(a+\alpha+1)\dots(a+p-1)(a+n)$$

$$\frac{A^{(p-1)}}{B} = A^{(p)} + \frac{(2p-1)A^{(p)}}{B}$$

$$A^{(p)} = a(a+1)\dots(a+\alpha-1)2^{p-1}(a+\alpha+1)\dots(a+p-1).$$

Estas igualdades dão

$$\frac{A}{B} = A' + A'' + 3A''' + 3 \cdot 5 A^{(4)} + 3 \cdot 5 \cdot 7 A^{(5)} + \dots +$$

$$+ 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-3) A^{(p)} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-1) A^{(p)}}{B}.$$

Vamos agora tractar de determinar o valor de $\frac{A^{(p)}}{B}$.
Fazendo

$$\frac{A^{(p)}}{B-1} = A_1,$$

vem

$$\frac{A^{(p)}}{B} = A_1 - \frac{A_1}{B},$$

$$A_1 = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^{p-2} (a+\alpha+1) \dots (a+p-2).$$

Do mesmo modo, fazendo

$$\frac{A_1}{B-3} = A_2, \quad \frac{A_2}{B-5} = A_3, \quad \frac{A_3}{B-7} = A_4, \dots,$$

$$\frac{A^{p-\alpha-3}}{B-[2(p-\alpha)-5]} = A^{p-\alpha-2},$$

$$\frac{A^{p-\alpha-2}}{B-[2(p-\alpha)-3]} = A^{p-\alpha-1}, \dots$$

vem as igualdades seguintes:

$$\frac{A_1}{B} = A_2 - \frac{3A_2}{B}$$

$$A_2 = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^{p+3} (a+\alpha+1) \dots (a+p-3)$$

$$\frac{A_2}{B} = A_3 - \frac{5 A_3}{B}$$

$$A_3 = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^{p-4} (a+\alpha+1) \dots (a+p-4)$$

$$\frac{A_3}{B} = A_4 - \frac{7 A_4}{B}$$

$$A_4 = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^{p-5} (a+\alpha+1) \dots (a+p-5)$$

.....

$$\frac{A_{p-\alpha-3}}{B} = A_{p-\alpha-2} - \frac{[2(p-\alpha)-5] A_{p-\alpha-2}}{B}$$

$$A_{p-\alpha-2} = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^\alpha$$

$$\frac{A_{p-\alpha-2}}{B} = A_{p-\alpha-1} - \frac{[2(p-\alpha)-3] A_{p-\alpha-1}}{B}$$

$$A_{p-\alpha-1} = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^\alpha$$

$$\frac{A_{p-\alpha-1}}{B} = A_{p-\alpha+1} - \frac{[2(p-\alpha)+1] A_{p-\alpha+1}}{B}$$

$$A_{p-\alpha+1} = a(a+1) \dots (a+\alpha-2) 2^{\alpha-1}$$

$$\frac{A_{p-\alpha+1}}{B} = A_{p-\alpha+2} - \frac{[2(p-\alpha)+3] A_{p-\alpha+2}}{B}$$

$$A_{p-\alpha+2} = a(a+1) \dots (a+\alpha-3) 2^{\alpha-2}$$

$$\frac{A_{p-\alpha+2}}{B} = A_{p-\alpha+3} - \frac{[2(p-\alpha)+5] A_{p-\alpha+3}}{B}$$

$$A_{p-\alpha+3} = a(a+1) \dots (a+\alpha-4) 2^{\alpha-3}$$

.....

Vem pois

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-1) A^{(p)}}{B},$$

fazendo

$$Q = A' + A'' + 3A''' + 3 \cdot 5 A^{(4)} + \dots + 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-3) A^{(p)},$$

e

$$\frac{A^{(p)}}{B} = Q' + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots [2(p-\alpha)-3][2(p-\alpha)+1] \dots (2p-1)}{B},$$

fazendo

$$Q' = A_1 - A_2 + 3A_3 - 3 \cdot 5 A_4 + 3 \cdot 5 \cdot 7 A_5 - \dots \pm 3 \cdot 5 \dots (2p-3).$$

Conclue-se pois que é

$$\frac{A}{B} = Q + Q' = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots [2(p-\alpha)-3]^2 [2(p-\alpha)-1][2(p-\alpha)+1]^2 \dots (2p-1)^2}{B}$$

e portanto

$$N \equiv 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots [2(p-\alpha)-3]^2 [2(p-\alpha)-1][2(p-\alpha)+1]^2 \dots (2p-1)^2 \cdot p$$

sendo o *modulo D*.

Por exemplo, sendo

$$a = 95,$$

o que dá

$$p = 3, \quad \alpha = 1,$$

vem

$$95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 3,$$

sendo o modulo igual a $585 = 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$, como é facil de verificar.

Pelos mesmos principios se resolve a questão seguinte :

Procuremos o resto da divisão do producto de numeros successivos

$$A = a(a+1)\dots(a+n),$$

sendo agora a e n numeros quaesquer, pelo divisor $a-i=B$.

Fazendo

$$\frac{A}{B+i} = A',$$

virá

$$(n+i) \frac{A}{B} = A' + i \frac{A'}{B}$$

$$A' = (a+1)(a+2)\dots(a+n).$$

Fazendo depois successivamente

$$\frac{A'}{B+i+1} = A'', \quad \frac{A''}{B+i+2} = A''', \dots \quad \frac{A^{(n)}}{B+i+n} = A^{(n+1)}$$

virá

$$\frac{A'}{B} = A'' + (i+1) \frac{A''}{B}$$

$$A'' = (a+2)(a+3)\dots(a+n)$$

$$\frac{A''}{B} = A''' + (i+2) \frac{A'''}{B}$$

$$A''' = (a+3)(a+4)\dots(a+n)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{A^{(n)}}{B} = A^{(n+1)} + (i+n) \frac{A^{(n+1)}}{B}$$

$$A^{(n)} = a + n$$

$$A_{n+1} = 1.$$

Virá pois

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{i(i+1)(i+2)\dots(i+n)}{B}$$

sendo

$$Q = A' + iA'' + i(i+1)A''' + \dots + i(i+1)\dots(i+n-1)A^{(n+1)}.$$

Temos pois a congruencia

$$A \equiv i(i+1)(i+2)\dots(i+n)$$

sendo o modulo $a-i$.

Supponhamos agora que queremos dividir A por um numero $B = a+i$, sendo $i > n$.

Fazendo

$$\frac{A}{B-i} = A' + i \frac{A'}{B}$$

virá

$$\frac{A}{B} = A' + i \frac{A'}{B}$$

$$A' = (a+1)(a+2)\dots(a+n).$$

Fazendo depois successivamente

$$\frac{A'}{B-i+1} = A'', \quad \frac{A''}{B-i+2} = A''', \text{ etc.}$$

virá

$$\frac{A'}{B} = A'' - (i-1) \frac{A''}{B}$$

$$A'' = (a+2)(a+3)\dots(a+n)$$

$$\frac{A''}{B} = A''' - (i-2) \frac{A'''}{B}$$

$$A''' = (a+3)\dots(a+n)$$

.....

$$\frac{A^{(n)}}{B} = A^{(n+1)} + (i-n) \frac{A^{(n+1)}}{B}$$

$$A^{(n+1)} = 1.$$

Logo será

$$A \equiv i(i-1)(i-2)\dots(i-n)$$

sendo o modulo $a+i$, e

$$Q = A' - iA'' + i(i-1)A''' - \dots \pm i(i-1)\dots(i-n+1).$$

III

Pelo mesmo meio se podem achar muitos theoremas. Por exemplo :

1.º Fazendo

$$\frac{A}{B+i} = A', \quad \frac{A}{B+i+k} = A'', \quad \frac{A}{B+i+k'} = A''', \text{ etc.}$$

obtêm-se a congruencia que contém a precedente como caso particular

$$a(a+k)(a+k')\dots(a+n) \equiv i(i+k)(i+k')\dots(i+n)$$

sendo o modulo $a-i$.

2.º Fazendo

$$\frac{A}{B-i} = A', \quad \frac{A'}{B-i+k} = A'', \quad \frac{A''}{B-i+k'} = A''', \text{ etc.}$$

vem a congruencia

$$a(a+k)(a+k') \dots (a+n) \equiv i(i-k)(i-k') \dots (i-n)$$

sendo o modulo $a+i$.

3.º Supponhamos que na pag. 106 é

$$B = 2a + 2p - (2i + 1).$$

Fazendo

$$\frac{A}{B+2i+1} = A'$$

vem

$$A' = a(a+1) \dots (a+\alpha-1) 2^{\alpha-1} (a+\alpha+1) \dots$$

$$(a+p-1)(a+p+1) \dots (a+n).$$

Do mesmo modo, fazendo

$$\frac{A'}{B+2i+3} = A'', \quad \frac{A''}{B+2i+5} = A''', \dots$$

$$\frac{A^{(p-2)}}{B+2i+2p-3} = A^{(p-1)}, \quad \frac{A^{(p-1)}}{B+2i+2p-1} = A^{(p)}$$

e depois

$$\frac{A^{(p)}}{B-(2i+1)} = A_1, \quad \frac{A_1}{B-(2i+3)} = A_2, \text{ etc.}$$

vem primeiro

$$A \equiv (2i+1)(2i+3)(2i+5) \dots (2i+2p-1) A^{(p)}$$

e depois a congruencia

$$A \equiv (2i+1)^2 \times (2i+3)^2 \times \dots \times [2i+2(p-\alpha)-3]^2 \\ \times [2i+2(p-\alpha)-1] \times [2i+2(p-\alpha)+1]^2 \times \dots \times (2p-1)^2$$

sendo o modulo $B = 2a + 2p - (2i+1)$.

Podiamos ainda em I considerar o caso de ser o divisor $B = 2a + 2p + 2i + 1$; o caso de o dividendo ser o producto

$$a(a+k)(a+k') \dots (a+n)$$

e muitos outros casos.

O que se faz sempre é nas fracções

$$\frac{A^{(t)}}{B+l} = A^{(t+1)}$$

dispor convenientemente do l para fazer desaparecer factores do dividendo.

QUESTÕES PROPOSTAS N.ºs 19 E 20

Seja N um numero inteiro que não contém os factores 2 e 5.
 Demonstrar o theorema seguinte:

Se os restos de divisão parcial que resultam da transformação das fracções irreductíveis $\frac{M}{N}$ em fracções decimaes, não formam senão dois grupos (), o producto de dois restos de divisão parcial ou o resto da divisão que se obtem quando este producto é dividido por N , estará no mesmo grupo que um dos restos, quando ambos são tomados no mesmo grupo, mas não estará no mesmo grupo que um dos restos, quando elles são tomados cada um em seu grupo.*

BIRGER HANSTED.

Resolver com os recursos da Geometria elementar a questão seguinte:

Sendo dadas tres rectas quaesquer sobre um plano, tirar por um ponto d'este transversaes, de modo que os segmentos de cada uma d'estas, comprehendidos entre este ponto e uma das rectas dadas, sejam iguaes aos seus segmentos comprehendidos entre as outras duas rectas igualmente dadas; discutir os diversos casos que se podem dar e deduzir algumas propriedades notaveis das figuras que nos conduzem á solução pedida.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

(*) A fracção irreductivel $\frac{M}{N}$ transforma-se em fracção decimal periodica simples com k decimaes em cada periodo. Se fôr $M \leq N-1$ e $N-1 = \alpha k$, os restos das divisões parciais provenientes d'esta transformação agrupam-se em α grupos, dos quaes cada um contém k , que resultam da transformação da mesma fracção $\frac{M}{N}$ em fracção decimal.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 16

POR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

Sendo dadas n quantidades positivas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, demonstrar que é

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt{\frac{\sum a_1 a_2}{n(n-1)}} > \sqrt[3]{\frac{\sum a_1 a_2 a_3}{n(n-1)(n-2)}} > \dots > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Demonstração

Sendo

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n > a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \dots \dots (1)$$

teremos tambem

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) > n \cdot a_1 a_2 \dots a_n (2)$$

ou

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{n-1} a_1 + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{n-1} a_2 + \dots + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{n-1} a_n > a_1 a_2 \dots a_n + a_1 a_2 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_n \dots \dots \dots (3)$$

Se no segundo membro d'esta desigualdade (3) supprimirmos respectivamente os factores a_1, a_2, \dots, a_n , em cada um dos seus n productos, e supprimirmos junctamente no primeiro membro os factores eguaes áquelles, acharemos n desigualdades, que representam o numero de modos porque podemos supprimer os factores considerados, e que sommas membro a membro, se reduzem á desigualdade seguinte:

$$n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-1} > a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 \dots a_n + \dots \\ + a_1 a_2 \dots a_{n-1} \dots \dots \dots (4)$$

ou

$$n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-1} > \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-1} \dots \dots \dots (5)$$

na qual o segundo membro conterà os n productos distinctos ou combinações que se podem formar com as letras a_1, a_2, \dots, a_n tomadas $(n-1)$ a $(n-1)$.

Da desigualdade (4) tira-se

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ > a_1 a_3 \dots a_n + a_2 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1} (6)$$

ou

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} a_1 + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} a_2 + \dots \\ > a_1 a_3 \dots a_n + a_2 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1} (7).$$

Se agora no segundo membro, em cada um dos seus n productos distinctos formados dos factores a_1, a_2, \dots, a_n tomados $(n-1)$ a $(n-1)$, supprimirmos respectivamente estes factores, supprimindo ao mesmo tempo no primeiro membro os factores eguaes áquelles,

acharemos as $(n-1)$ desigualdades seguintes :

$$\left. \begin{aligned} n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} &> a_3 a_1 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_{n-2} \\ n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} &> a_2 a_1 \dots a_n + \dots + a_1 a_3 \dots a_{n-2} a_{n-1} \\ \dots & \\ n \left(\frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} &> a_2 a_3 \dots a_{n-1} + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_n \end{aligned} \right\} (8)$$

que correspondem ao numero de modos de supprimir os factores considerados.

Junctando, pois, estas desigualdades membro a membro, vem

$$n(n-1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} > a_1 a_2 \dots a_{n-2} + a_1 a_3 \dots a_{n-1} + \dots \dots \dots (9).$$

Vê-se, portanto, que no segundo membro devemos ter productos ou combinações das n letras a_1, a_2, \dots, a_n tomadas $(n-2)$ a $(n-2)$; mas sendo o numero de termos obtidos igual a $n(n-1)$, segue-se que estes productos serão eguaes dois a dois, pelo que teremos

$$n(n-1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} > 2 \cdot \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-2} \quad (10)$$

ou

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-2} > \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-2} \quad (11).$$

cujo segundo membro se comporá de productos ou combinações das n letras a_1, a_2, \dots, a_n tomadas $(n-3)$ a $(n-3)$; e como o numero de termos obtidos é igual a $n(n-1)(n-2)$, estes productos serão eguaes seis a seis, e logo

$$n(n-1)(n-2) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-3} > 2.3 \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-3} \quad (16)$$

ou

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-3} > \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-3} \quad (17).$$

Procedendo de modo analogo sobre esta desigualdade, e assim successivamente, chegaremos á expressão geral

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-p+1)}{1.2.3.4\dots p} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-p} > \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-p} \dots \dots \dots (18)$$

onde o segundo membro é composto da somma dos productos distinctos das n letras a_1, a_2, \dots, a_n tomadas $(n-p)$ a $(n-p)$.

Do mesmo modo teremos a expressão geral

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(n-p)+1)}{1.2.3.4\dots(n-p)} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{n-(n-p)} > \Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-(n-p)}$$

ou

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(p+1)}{1.2.3.4\dots(n-p)} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^p > \Sigma a_1 a_2 \dots a_p \dots \dots \dots (19)$$

onde o segundo membro é a somma das combinações d'estas mesmas letras tomadas p a p .

Fazendo $p = n - 2$ na fórmula (18) ou $p = 2$ na fórmula (19), teremos emfim

$$\frac{n(n-1)}{1.2} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 > \Sigma a_1 a_2 \dots \dots \dots (20)$$

e com effeito, sendo

$$\left. \begin{aligned} a_1 > a_2; a_1 > a_3; a_1 > a_4; \dots; a_1 > a_n \\ a_2 > a_3; a_2 > a_4; \dots; a_2 > a_n \\ a_3 > a_4; \dots; a_3 > a_n \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ a_{n-1} > a_n \end{aligned} \right\} \dots \dots (21)$$

será tambem

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 > 2 \cdot a_1 a_2; a_1^2 + a_3^2 > 2 \cdot a_1 a_3; a_1^2 + a_4^2 > 2 \cdot a_1 a_4; \dots; \\ a_1^2 + a_n^2 > 2 \cdot a_1 a_n \\ a_2^2 + a_3^2 > 2 \cdot a_2 a_3; a_2^2 + a_4^2 > 2 \cdot a_2 a_4; \dots; \\ a_2^2 + a_n^2 > 2 \cdot a_2 a_n \\ a_3^2 + a_4^2 > 2 \cdot a_3 a_4; \dots; \\ a_3^2 + a_n^2 > 2 \cdot a_3 a_n \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ a_{n-1}^2 + a_n^2 > 2 \cdot a_{n-1} a_n \end{aligned} \right\} (22)$$

ora n'estas desigualdades (22) entram evidentemente $(n-1)$ vezes os quadrados $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$, e portanto, sommando-as membro a membro, teremos a desigualdade

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) > 2 \cdot \Sigma a_1 a_2 \dots \dots \dots (23)$$

d'onde

$$(n-1) [a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2 \cdot \Sigma a_1 a_2] > 2 \cdot n \cdot \Sigma a_1 a_2 \quad (24)$$

e logo

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 > \Sigma a_1 a_2 \dots \dots \quad (20).$$

Ainda podemos chegar ao mesmo resultado do modo seguinte.
Sendo

$$a_1^2 + a_2^2 > 2 \cdot a_1 a_2$$

ou

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 > a_1 a_2; \quad \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)^2 > a_1 a_3; \dots \dots \quad (22)$$

teremos

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_{n-1} + a_n}{2} \right)^2 > a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \dots \dots \quad (25)$$

ou

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot a_1 a_2}{4} + \frac{a_1^2 + a_3^2 + 2 \cdot a_1 a_3}{4} + \dots + \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2 + 2 \cdot a_{n-1} a_n}{4} > \Sigma a_1 a_2 \dots \dots \quad (26)$$

d'onde

$$(n-1) (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) > 2 \Sigma a_1 a_2 \dots \dots \quad (23)$$

logo, etc.

Da desigualdade (20) deduziremos ainda

$$(n-1) \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) > 2 \Sigma a_1 a_2 \quad (27)$$

ou

$$(n-1) \left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot a_1 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot a_2 + \dots \right] > 2 \Sigma a_1 a_2 \dots \dots \quad (28)$$

e supprimindo no segundo membro respectivamente os factores a_1, a_2, \dots, a_n nos productos distinctos de cada um dos seus $(n-1)$ grupos, e supprimindo junctamente os factores eguaes a estes no primeiro membro, ficaremos reduzidos á identidade

$$n(n-1) \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = (n-1) \sum a_1 \dots \dots \quad (29)$$

ou

$$n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sum a_1 \dots \dots \dots \quad (30)$$

á qual chegamos tambem, fazendo $p = n - 1$ em (18) ou $p = 1$ em (19); e teremos assim provado elementarmente que *quando a somma de n quantidades a_1, a_2, \dots, a_n é constante, a somma dos seus productos distinctos ou combinações, tomando-as duas a duas, tres a tres e em geral p a p , será um maximum, logo que estas quantidades sejam eguaes entre si* (*).

Por um processo inverso chegamos á desigualdade (19) e portanto á desigualdade (1), partindo da identidade (30) ou da desigualdade (20).

Com effeito, formando n'esta identidade os productos das n quantidades ou elementos a_1, a_2, \dots, a_n tomados dois a dois, vem a desigualdade (20); e se os n productos de cada um dos seus $(n-1)$ grupos do segundo membro d'esta desigualdade forem multiplicados por cada um dos $(n-2)$ factores ou elementos restantes, de modo que estes se achem dispostos na ordem natural, e egualmente multiplicarmos os n productos de cada um dos seus $(n-1)$ grupos do primeiro membro pelos n factores a_1, a_2, \dots, a_n ,

(*) A demonstração directa d'este theorema dada pelo emprego da theoria dos *maximos* e *minimos* (recorrendo ao calculo infinitesimal) permittir-nos-ia passar immediatamente d'esta identidade para as expressões geraes (18) e (19).

teremos as $(n-2)$ desigualdades seguintes :

$$\begin{aligned}
 n(n-1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\
 > a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_4 + \dots \\
 n(n-1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\
 > a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_5 + \dots
 \end{aligned} \tag{31}$$

.....

$$\begin{aligned}
 n(n-1) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\
 > a_1 a_2 a_n + a_1 a_3 a_n + \dots
 \end{aligned}$$

que somadas membro a membro dão a desigualdade

$$n(n-1)(n-2) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^3 > a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_4 + \dots \tag{32}$$

sendo o segundo membro composto de productos ou combinações das n letras a_1, a_2, \dots, a_n tomadas tres a tres; e como o numero de termos obtidos é igual a $n(n-1)(n-2)$, estes productos serão eguaes seis a seis, e portanto será

$$n(n-1)(n-2) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^3 > 2.3 \Sigma a_1 a_2 a_3 \tag{33}$$

ou

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^3 > \Sigma a_1 a_2 a_3 \dots \tag{34}$$

Procedendo por modo semelhante sobre esta desigualdade, e assim por diante, chegaremos á desigualdade geral

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.3.3\dots p} \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^p > \sum a_1 a_2 \dots a_p \dots \dots \dots (35)$$

tendo para segundo membro a somma dos productos distinctos ou combinações das n letras a_1, a_2, \dots, a_n tomadas p a p .

Teremos, portanto, tambem a expressão geral (fazendo $p=n-p$)

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(p+1)}{1.2.3\dots(n-p)} \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^{n-p} > \sum a_1 a_2 \dots a_{n-p} \dots \dots \dots (36)$$

cujo segundo membro é composto da somma das combinações d'estas mesmas letras tomadas $(n-p)$ a $(n-p)$.

Estas duas ultimas desigualdades serão pois respectivamente identicas ás desigualdades (19) e (18), ou teremos como se sabe

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.2.3\dots p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(p+1)}{1.2.3\dots(n-p)} \quad (37).$$

Fazendo $p=n$ em (35) ou $p=0$ em (36), teremos a expressão (1). Assim teremos a seguinte serie de expressões :

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \cdot n = \sum a_1 \dots \dots \dots (a)$$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \sqrt{\frac{n(n-1)}{1.2}} > \sqrt{\sum a_1 a_2 \dots \dots \dots} (b)$$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \sqrt[3]{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}} > \sqrt[3]{\sum a_1 a_2 a_3 \dots \dots \dots} (c)$$

.....

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \sqrt[p]{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}} > \sqrt[p]{\Sigma a_1 a_2 \dots a_p} \quad (p)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)}} > \sqrt[p+1]{a_1 a_2 \dots a_{p+1}} \quad (q)$$

.....

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n-1]{\Sigma a_1 a_2 \dots a_{n-1} \dots} \quad (y)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n \dots} \quad (z) (*)$$

D'estas expressões consideremos duas quaesquer (p) e (q), e façamos

$$\frac{\left[\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p} \right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)} \right]^{\frac{1}{p+1}}} = K \dots \dots \dots (37)$$

d'onde

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{(n-p)^p} \cdot \frac{(p+1)^p}{1.2\dots p} = K^{p(p+1)} \dots \dots (38)$$

e portanto será

$$K > 1$$

ou

$$\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}} > \sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)}} \quad (39)$$

~~~~~  
 (\*) Como veremos n'outra occasião, a applicação exclusiva das desigualdades (21) que nos conduziu ás desigualdades (22) e (25), e portanto á desigualdade pedida (20), póde tambem dar-nos directamente todas estas expressões.

Assim teremos a desigualdade

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \left[ \sqrt[p]{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}} - \sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)}} \right] \\ > \sqrt[p]{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}} - \sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)}} \quad (40)$$

da qual evidentemente o primeiro e segundo membros representam respectivamente os *limites superior* e *inferior* ou os *valores máximo* e *mínimo* da diferença entre os segundos membros das desigualdades (p) e (q), em vista do que teremos forçosamente

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ > \frac{\sqrt[p]{\Sigma a_1 a_2 \dots a_p} - \sqrt[p+1]{\Sigma a_1 a_2 \dots a_{p+1}}}{\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}} - \sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)}}} > 1 \quad (41)$$

d'onde

$$\frac{\sqrt[p]{\Sigma a_1 a_2 \dots a_p}}{\sqrt[p+1]{\Sigma a_1 a_2 \dots a_{p+1}}} > \frac{\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}}}{\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\dots(n-p)}{1.2\dots(p+1)}}} \quad (42)$$

e por conseguinte

$$\sqrt[p]{\frac{\Sigma a_1 a_2 \dots a_p}{n(n-3)\dots(n-p-1)}} > \sqrt[p+1]{\frac{\Sigma a_1 a_2 \dots a_{p+1}}{n(n-1)\dots(n-p)}} \quad (43)$$



Logo

Observação

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt{\frac{\sum a_1 a_2}{n(n-1)}} \dots \dots \dots (\alpha)$$

Em vista do que acabamos de expor, vê-se que a diferença entre os termos da serie composta dos termos membros successivamente decrescentes das expressões (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (u), (v), (w), (x), (y), (z), e os termos correspondentes da serie formada dos segundos membros (quadrados das primeiras expressões) não crecendo

$$\sqrt{\frac{\sum a_1 a_2}{n(n-1)}} > \sqrt[3]{\frac{\sum a_1 a_2 a_3}{n(n-1)(n-2)}} \dots \dots \dots (\beta)$$

Esta propriedade é propriamente a que nos serve para estabelecer a validade da expressão geral (13). Os últimos estudos nos estudos das interessantes propriedades das expressões consideradas, sobretudo em relação à theoria geral das equações algebraicas, para não sahirmos do campo restricto da questão proposta.

$$\sqrt[p]{\frac{\sum a_1 a_2 \dots a_p}{n(n-1) \dots (n-p+1)}} > \sqrt[p+1]{\frac{\sum a_1 a_1 \dots a_{p+1}}{n(n-1) \dots (n-p)}} \dots \dots \dots (\omega)$$

L'étude analytique de cette ligne de direction est faite par Mr. Jules de la Gournerie, dans la note du n° 720 de son Traité de Géométrie descriptive, sous le titre de "Recherche sur la direction de la tangente à la génératrice d'un cône".

$$\sqrt[n-1]{\frac{\sum a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{n}} > \sqrt[n]{\sum a_1 a_2 \dots a_n} \dots \dots \dots (\zeta)$$

2. D'après nos recherches sur ce point très-intéressant, que nous avons étudié seulement à l'aide de l'algebre ordinaire.

Considérons le plan tangent (P) en un point quelconque I de l'hyperbole (H), et les deux génératrices A.A. et B.B. qui passent par ce point.

q. e. d.

Observação

$$(x) \dots \dots \dots \frac{z^D + \dots + z^D + 1^D}{(1-n)^n} \leftarrow \frac{a^D + \dots + z^D + 1^D}{(1-n)^n}$$

Em vista do que acabamos de expôr, vê-se que a *diferença entre os termos da serie composta dos primeiros membros (successivamente decrescentes) das expressões (a), (b), (c), . . . , (p), (q), . . . , (y) e (z), e os termos correspondentes da serie formada dos segundos membros (igualmente decrescentes) d'estas mesmas expressões irá crescendo successivamente a partir de zero.*

Esta propriedade, que se pôde reconhecer *a priori*, podia servir-nos de base para chegarmos tambem á expressão geral (43).

Não entramos no estudo das interessantes propriedades das expressões consideradas, sobretudo com relação á theoria geral das equações algebraicas, para não sahirmos do campo restricto da questão proposta.

$$(y) \frac{1+q^D \dots 1^D \leq}{(q-n) \dots (1-n)^n} \sqrt[1+q]{\dots} < \frac{q^D \dots z^D \leq}{(1+q-n) \dots (1-n)^n} \sqrt[q]{\dots} > 1$$

$$\dots \dots \dots \frac{\sum a_1 a_2 \dots a_p}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \dots \dots \dots \frac{\sum a_1 a_2 \dots a_{p+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p+1)}$$

$$(z) \dots \dots \dots \frac{1-z^D \dots z^D \leq}{n} \sqrt[n]{\dots} \dots \dots \frac{\sum a_1 a_2 \dots a_p}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \dots \dots \dots \frac{\sum a_1 a_2 \dots a_{p+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p+1)}$$



**NOTE SUR LA LIGNE DE STRICTION DE L'HYPERBOLOÏDE**

PAR

**A. SCHIAPPA MONTEIRO**

1. Mr. Chasles, pour déterminer la ligne de striction de l'hyperboloïde, ou la ligne des points centraux des génératrices des deux systèmes, considère cette ligne comme l'intersection de cette surface avec le cône (C<sub>0</sub>) représenté par l'équation

$$b^4(a^2+c^2)\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + d^4(b^2+c^2)\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} - c^4(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (1),$$

laquelle il a obtenue (*Correspondance mathématique et physique*, tome XI, page 67), à l'aide du calcul différentiel, et en regardant le point central comme le point de la commune perpendiculaire à la génératrice considérée et à la génératrice voisine.

L'étude analytique de cette ligne de striction est faite par Mr. Jules de la Gournerie, dans la note du n° 720 de son *Traité de Géométrie descriptive*, publié en 1862, en partant de l'équation (1), sans la déduire, en faisant remarquer seulement qu'on y arrive à peu près aussi facilement en cherchant le point de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini, et qu'alors l'algèbre ordinaire suffit pour les calculs, qui ne sont que la traduction analytique de la figure respective.

2. D'après cela nous avons crû devoir présenter nos humbles recherches sur ce point très-intéressant, que nous avons aussi étudié seulement à l'aide de l'algèbre ordinaire.

Considérons le plan tangent (P) en un point quelconque I de l'hyperboloïde (H), et les deux génératrices IA et IB, qui passent par ce point.

Comme nous savons, les plans asymptotes (*s*) et (*s'*) menés par ces génératrices toucheront le cône asymptote (*S*) suivant deux génératrices *Va* et *Vb* parallèles à celles-là; et le plan (*p*) déterminé par ces génératrices du cône sera le plan polaire du point *l*, ou le plan diamétral conjugué au demi-diamètre *VI*.

Alors les angles  $\tau$  et  $\tau'$  du plan polaire (*p*) avec les plans asymptotes (*s*) et (*s'*) seront complémentaires des obliquités  $\theta$  et  $\theta'$  du plan tangent (*P*) par rapport aux génératrices *IA* et *IB*; et par conséquent les lieux géométriques des points des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde où l'obliquité du plan tangent est donnée seront les intersections de cette surface avec les surfaces coniques engendrées par les diamètres conjugués aux plans, qui coupent continuellement le cône asymptote sous un angle constant, complémentaire de l'obliquité considérée.

On voit aussi que les obliquités  $\theta$  et  $\theta'$  sont liées de manière que, l'une étant donnée, on trouve immédiatement l'autre.

**3.** En désignant par *x'*, *y'*, *z'* et *x''*, *y''*, *z''* les coordonnées des points *a* et *b* des génératrices *Va* et *Vb* du cône (*S*), dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \dots \dots \dots (2),$$

les équations de ces génératrices seront

$$x = \frac{x'}{z'} \cdot z \dots \dots \dots (3),$$

$$y = \frac{y'}{z'} \cdot z \dots \dots \dots (4),$$

et

$$x = \frac{x''}{z''} \cdot z \dots \dots \dots (5),$$

$$y = \frac{y''}{z''} \cdot z \dots \dots \dots (6).$$



ou, en faisant

$$\frac{x'}{z'} = p', \quad \frac{y'}{z'} = q', \quad \frac{x''}{z''} = p'' \quad \text{et} \quad \frac{y''}{z''} = q'',$$

$$x = p' \cdot z \dots \dots \dots (7),$$

$$y = q' \cdot z \dots \dots \dots (8),$$

et

$$x = p'' \cdot z \dots \dots \dots (9),$$

$$y = q'' \cdot z \dots \dots \dots (10).$$

Soient maintenant

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0 \dots \dots \dots (11)$$

et

$$A' \cdot x + B' \cdot y + C' \cdot z = 0 \dots \dots \dots (12)$$

les équations de deux plans qui passent par la génératrice Va.

L'angle  $t$  de ces deux plans sera déterminé par la formule

$$\cos t = \frac{A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \dots \dots (13),$$

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{(A \cdot B' - A' \cdot B)^2 + (A \cdot C' - A' \cdot C)^2 + (B \cdot C' - B' \cdot C)^2}{(A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C')^2} \dots \dots (14),$$

et, puisque ces plans passent par la génératrice Va, nous auront

$$A \cdot p' + B \cdot q' + C = 0 \dots \dots \dots (15),$$

$$A' \cdot p' + B' \cdot q' + C' = 0 \dots \dots \dots (16),$$

donc

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{(A' \cdot B - A \cdot B')^2 (1 + p'^2 + q'^2)}{[A(A' - C \cdot p') + B(B' - C' \cdot q')]^2} \dots \dots (17).$$

D'ailleurs si nous considérons le cas où le plan (12) est tangent le long de Va, on aura

$$\frac{A'}{C'} = -\frac{c^2}{a^2} \cdot p' \dots \dots \dots (18),$$

et

$$\frac{B'}{C'} = -\frac{c^2}{b^2} \cdot q' \dots \dots \dots (19).$$

En effet, si l'équation (12) représente un plan sécant quelconque, passant par V, les génératrices suivant lesquelles il coupe le cône (S) auront pour équations

$$x = -a \cdot \frac{a \cdot A' \cdot C' - b \cdot B' \sqrt{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2 - c^2 \cdot C'^2}}{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2} \cdot z \quad (20)$$

$$y = -b \cdot \frac{b \cdot B' \cdot C' - a \cdot A' \sqrt{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2 - c^2 \cdot C'^2}}{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2} \cdot z \quad (21)$$

et

$$x = -a \cdot \frac{a \cdot A' \cdot C' + b \cdot B' \sqrt{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2 - c^2 \cdot C'^2}}{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2} \cdot z \quad (22)$$

$$y = -b \cdot \frac{b \cdot B' \cdot C' + a \cdot A' \sqrt{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2 - c^2 \cdot C'^2}}{a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2} \cdot z \quad (23)$$

et, quand ce plan deviendra tangent, ces deux génératrices coïncideront, et par conséquent on aura

$$a^2 \cdot A'^2 + b^2 \cdot B'^2 - c^2 \cdot C'^2 = 0 \dots \dots \dots (24),$$

ou

$$B' = \pm \frac{\sqrt{c^2 \cdot C'^2 - a^2 \cdot A'^2}}{b} \dots \dots \dots (25),$$



d'où

$$x = -\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{A'}{C'} \cdot z \dots \dots \dots (26),$$

$$y = -\frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{B'}{C'} \cdot z \dots \dots \dots (27),$$

ou

$$y = \frac{b}{c^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 \cdot C'^2 - a^2 \cdot A'^2}}{C'} \dots \dots \dots (28),$$

qui sont les équations de la génératrice de contact, qui, coïncidant avec  $Va$ , donnera

$$p' = -\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{A'}{C'} \dots \dots \dots (29),$$

$$q' = -\frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{B'}{C'} \dots \dots \dots (30),$$

et l'équation du plan tangent respectif (s) sera

$$\frac{p'}{a^2} \cdot x + \frac{q'}{b^2} \cdot y - \frac{1}{c^2} \cdot z = 0 \dots \dots \dots (31).$$

*Autrement.* — Le plan donné par l'équation (12), passant par la génératrice  $Va$  du cône (S), étant sécant, représentons par

$$x = p_1 \cdot z \dots \dots \dots (32)$$

$$y = q_1 \cdot z \dots \dots \dots (33)$$

les équations de l'autre génératrice d'intersection  $Va_1$ , et nous avons l'équation de condition

$$A' \cdot p_1 + B' \cdot q_1 + C' = 0 \dots \dots \dots (34),$$

qui retranchée de l'équation (16) donne

$$\frac{A'}{B'} = -\frac{q' - q_1}{p' - p_1} \dots \dots \dots (35).$$

Or, à cause de l'équation (2), nous aurons

$$b^2 \cdot p'^2 + a^2 \cdot q'^2 = b^2 \cdot p_1^2 + a^2 \cdot q_1^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} \dots \dots (36),$$

d'où

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p' + p_1}{q' + q_1} = -\frac{q' - q_1}{p' - p_1} \dots \dots \dots (37),$$

et par conséquent

$$\frac{A'}{B'} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p' + p_1}{q' + q_1} \dots \dots \dots (38).$$

Quand on aura  $p' = p_1$  et  $q' = q_1$ , ou le plan (12) deviendra tangent au cône (S), on trouvera

$$\frac{A'}{B'} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p'}{q'} \dots \dots \dots (39),$$

et de la combinaison de cette équation avec l'équation (16) nous déduisons les équations (18) et (19) ou (29) et (30). Donc, etc.

En substituant en (17) les valeurs de  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , il vient

$$\text{tg}^2 \theta = \frac{c^4 (a^2 \cdot A \cdot q' - b^2 \cdot B \cdot p')^2 (1 + p'^2 + q'^2)}{[b^2 \cdot (a^2 + c^2) A \cdot p' + a^2 (b^2 + c^2) B \cdot q']^2} \dots \dots (40)$$

ou

$$\text{tg}^2 \theta = \frac{[b^2 (a^2 + c^2) A \cdot p' + a^2 (b^2 + c^2) B \cdot q']^2}{c^4 (a^2 \cdot A \cdot q' - b^2 \cdot B \cdot p')^2 (1 + p'^2 + q'^2)} \dots \dots (41)$$



ou

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{b^2(a^2 + c^2)A.p' + a^2(b^2 + c^2)B.q'}{c^2(a^2.A.q' - b^2.B.p')\sqrt{1 + p'^2 + q'^2}} \dots (42)$$

et de même

$$\operatorname{tg} \theta' = \pm \frac{b^2(a^2 + c^2)A.p'' + a^2(b^2 + c^2)B.q''}{c^2(a^2.A.q'' - b^2.B.p'')\sqrt{1 + p''^2 + q''^2}} \dots (43)$$

en prenant pour origines des angles les plans normaux ( $n$ ) et ( $n'$ ), le long des génératrices  $Va$  et  $Vb$  de la surface ( $S$ ).

Le plan (1f) passant par les génératrices  $Va$  et  $Vb$ , on a

$$A.p' + B.q' + C = 0 \dots \dots \dots (15),$$

$$A.p'' + B.q'' + C = 0 \dots \dots \dots (44).$$

Si maintenant dans les équations (35) et (38) nous faisons  $A' = A$ ,  $B' = B$ ,  $p_1 = p''$  et  $q_1 = q'$ , il vient

$$\frac{A}{B} = - \frac{q' - q''}{p' - p''} \dots \dots \dots (45)$$

ou

$$A.p' + B.q' = A.p'' + B.q'' = -C \dots \dots \dots (46)$$

et

$$\frac{A}{B} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p' + p''}{q' + q''} \dots \dots \dots (47)$$

ou

$$a^2.A.q'' - b^2.B.p'' = -(a^2.A.q' - b^2.B.p') \dots \dots (48).$$

Donc, l'obliquité  $\theta'$  sera aussi donnée par la formule

$$\operatorname{tg} \theta' = \pm \frac{b^2.(a^2 + c^2)A.p'' + a^2(b^2 + c^2)B.q''}{c^2(a^2.A.q' - b^2.B.p')\sqrt{1 + p''^2 + q''^2}} \dots (49).$$

4. Maintenant nous allons voir comment nous obtenons, en fonction de  $a, b, c, p', q'$  et  $\theta'$ , les valeurs des coefficients A, B et C de l'équation (11), qui représentera les plans polaires correspondants.

La formule (42) donne

$$(41) \dots \pm c^2 (a^2 \cdot A \cdot q' - b^2 \cdot B \cdot p') \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \\ = b^2 (a^2 + c^2) A \cdot p' + a^2 (b^2 + c^2) B \cdot q' \dots \dots \dots (50)$$

ou

$$[a^2 \cdot c^2 \cdot q' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \mp b^2 (a^2 + c^2) p'] A \\ = [b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm a^2 (b^2 + c^2) q'] B \dots \dots (51)$$

et en éliminant B entre cette équation et l'équation (15), on aura

$$A \left[ p' + \frac{a^2 \cdot c^2 \cdot q' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \mp b^2 (a^2 + c^2) p'}{b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm a^2 (b^2 + c^2) q'} \cdot q' \right] = -C \quad (52)$$

d'où

$$A = \frac{b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm a^2 (b^2 + c^2) q'}{[(a^2 \cdot q'^2 + b^2 \cdot p'^2) \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm (a^2 - b^2) p' \cdot q']} \cdot C \quad (53);$$

mais pour le point  $a$  l'équation (2) donne

$$(54) \dots \dots \dots \frac{p'^2}{a^2} + \frac{q'^2}{b^2} = \frac{1}{c^2} \dots \dots \dots (54)$$

ou

$$a^2 \cdot q'^2 + b^2 \cdot p'^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} \dots \dots \dots (55)$$

donc

$$A = \frac{b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm a^2 (b^2 + c^2) q'}{a^2 \cdot b^2 \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm c^2 (a^2 - b^2) p' \cdot q'} \cdot C \quad (56).$$

En substituant cette valeur de A en (51), on aura

$$B = \frac{a^2 \cdot c^2 \cdot q' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \mp b^2 (a^2 + c^2) p'}{a^2 \cdot b^2 \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta' \pm c^2 (a^2 - b^2) p' \cdot q'} \cdot C \quad (57).$$



D'après cela l'équation (11) deviendra

$$\begin{aligned}
 & [b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1+p'^2+q'^2} \cdot \text{tg } \theta \pm a^2(b^2+c^2)q'] x \\
 & + [a^2 \cdot c^2 \cdot q' \sqrt{1+p'^2+q'^2} \cdot \text{tg } \theta \mp b^2(a^2+c^2)p'] y \\
 & = [a^2 \cdot b^2 \sqrt{1+p'^2+q'^2} \cdot \text{tg } \theta \pm c^2(a^2-b^2)p' \cdot q'] z \quad (58)
 \end{aligned}$$

qui représentera l'une ou l'autre des deux plans polaires (p), (p'), passant par la génératrice Va, suivant que nous prenons les signes supérieurs ou inférieurs.

Cela posé soient

$$\alpha = m \cdot \gamma \dots \dots \dots (59)$$

$$\beta = n \cdot \gamma \dots \dots \dots (60)$$

les équations d'une génératrice VI des surfaces coniques demandées; et, puisque les plans tangents le long des génératrices Va et Vb du cône (S), lesquelles déterminent son plan polaire, doivent se couper suivant cette droite, nous aurons

$$\frac{x'}{a^2} \cdot \alpha + \frac{y'}{b^2} \cdot \beta = \frac{z'}{c^2} \cdot \gamma \dots \dots \dots (61)$$

et

$$\frac{x''}{a^2} \cdot \alpha + \frac{y''}{b^2} \cdot \beta = \frac{z''}{c^2} \cdot \gamma \dots \dots \dots (62)$$

et en supposant  $x', y', z'$  et  $x'', y'', z''$  (en supprimant les lignes), il vient

$$\frac{\alpha}{a^2} \cdot x + \frac{\beta}{b^2} \cdot y = \frac{\gamma}{c^2} \cdot z \dots \dots \dots (63)$$

ou

$$m \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot x + n \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot y = z \dots \dots \dots (64)$$

Or, étant identiques les équations (11) et (64), on aura

$$A = m \cdot \frac{c^2}{a^2}, \quad B = n \cdot \frac{c^2}{b^2}, \quad \text{et} \quad C = -1$$

donc

$$m = \frac{a^2}{c^2} \cdot A \quad \text{et} \quad n = \frac{b^2}{c^2} \cdot B,$$

et en substituant A et B par leurs valeurs (56) et (57), les équations des polaires VI et VI' des plans (p) et (p'), en fonction de a, b, c, p', q' et  $\theta$ , seront

$$\alpha = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta \pm a^2 (b^2 + c^2) q'}{a^2 \cdot b^2 \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta \pm c^2 (a^2 - b^2) p' \cdot q'} \cdot \gamma \quad (65)$$

$$\beta = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2 \cdot c^2 \cdot q' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta \mp b^2 (a^2 + c^2) p'}{a^2 \cdot b^2 \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta \pm c^2 (a^2 - b^2) p' \cdot q'} \cdot \gamma \quad (66)$$

et par suite

$$\alpha = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 \cdot c^2 \cdot p' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta \pm a^2 (b^2 + c^2) q'}{a^2 \cdot c^2 \cdot q' \sqrt{1 + p'^2 + q'^2} \cdot \text{tg } \theta \mp b^2 (a^2 + c^2) p'} \cdot \beta \quad (67).$$

L'élimination de p' et q' entre les équations (54), (65) et (66), nous donnerait les relations entre les variables  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , ou les équations des surfaces coniques demandées.

Nous n'aborderons point ici la déduction de ces équations générales, qui est tout à fait en dehors de notre sujet; en nous réservant pour plus tard faire nos recherches générales sur ce point, ainsi que sur autres surfaces gauches (\*); cependant dans

(\*) Nous réservons aussi pour plus tard démontrer synthétiquement que toute surface gauche engendrée par une droite que se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes est du second ordre; et déduire de même les propriétés plus remarquables de ces surfaces, et des figures respectives. Mr. Jules de la Gournerie s'est aussi occupé en spécial de ces surfaces, dans son *Traité de géométrie descriptive* (1862); mais sans recourir exclusivement à la méthode synthétique.



ce mémoire nous entrerons dans ces recherches générales sur l'hyperboloïde de révolution (n° 7) vu la facilité avec laquelle nous y arrivons.

5. Considérons donc le cas tout particulier où les plans polaires ( $p$ ) et ( $p'$ ) se confondent avec le plan normal ( $n$ ) à la surface conique ( $S$ ).

Dans ce cas étant  $\theta = 0$  l'équation (58) deviendra

$$(65) \dots \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2 \cdot p'} \cdot x - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2 \cdot q'} \cdot y - z = 0 \dots (68)$$

qui représentera le plan normal ( $n$ ).

Les équations (65), (66) et (67) de la polaire respective deviendront

$$(69) \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^4}{c^4 \cdot p'} \cdot \gamma \dots (69)$$

$$(70) \beta = - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^4}{c^4 \cdot q'} \cdot \gamma \dots (70)$$

$$(71) \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} \cdot \frac{a^4 \cdot q'}{b^4 \cdot p'} \cdot \beta \dots (71)$$

et l'élimination de  $p'$  et  $q'$  entre les équations (64), (69) et (70) donnera

$$(72) \frac{a^6 (b^2 + c^2)^2}{c^8 (a^2 - b^2)^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{b^6 (a^2 + c^2)^2}{c^8 (a^2 - b^2)^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \dots (72)$$

ou

$$(73) b^4 (a^2 + c^2)^2 \frac{\alpha^2}{a^2} \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} + a^4 (b^2 + c^2)^2 \frac{\beta^2}{b^2} \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} - c^4 (a^2 - b^2)^2 \frac{\alpha^2}{a^2} \cdot \frac{\beta^2}{b^2} = 0 (73)$$

Telle est donc l'équation du cône ( $C_0$ ) qui coupe l'hyperboloïde ( $H$ ) suivant sa ligne de striction.

En remplaçant  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  par  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on aura l'équation (1) donnée par Mr. Chasles.

*Observation.*—Nous pouvons aussi déduire directement l'équation de ce cône, comme nous allons voir.

6. Les équations des plans tangents (s) et (s') au cône (S) le long des génératrices Va et Vb étant (n° 3)

$$\frac{x'}{a^2} \cdot x + \frac{y'}{b^2} \cdot y = \frac{z'}{c^2} \cdot z \dots \dots \dots (74)$$

$$\frac{x''}{a^2} \cdot x + \frac{y''}{b^2} \cdot y = \frac{z''}{c^2} \cdot z \dots \dots \dots (75)$$

et étant (n° 4)

$$\alpha = m \cdot \gamma \dots \dots \dots (59)$$

$$\beta = n \cdot \gamma \dots \dots \dots (60)$$

les équations de leur intersection VI, on aura

$$\frac{x' \cdot \alpha}{a^2} + \frac{y' \cdot \beta}{b^2} = \frac{z' \cdot \gamma}{c^2} \dots \dots \dots (61)$$

$$\frac{x'' \cdot \alpha}{a^2} + \frac{y'' \cdot \beta}{b^2} = \frac{z'' \cdot \gamma}{c^2} \dots \dots \dots (62)$$

Si dans ces équations nous considérons comme variables  $x', y', z'$  et  $x'', y'', z''$  (en supprimant les lignes), nous aurons l'équation

$$\frac{\alpha}{a^2} \cdot x + \frac{\beta}{b^2} \cdot y - \frac{\gamma}{c^2} \cdot z = 0 \dots \dots \dots (76)$$

qui sera évidemment celle du plan polaire du point I, ou de la droite VI.

Ce plan étant, par exemple, normal à (S) le long de la génératrice Va, ou perpendiculaire au plan tangent respectif, on doit avoir la relation

$$\frac{\alpha}{a^2} \cdot \frac{x'}{a^2} + \frac{\beta}{b^2} \cdot \frac{y'}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{z'}{c^2} = 0 \dots \dots \dots (77)$$



ou

$$\frac{\alpha \cdot x'}{a^4} + \frac{\beta \cdot y'}{b^4} + \frac{\gamma \cdot z'}{c^4} = 0 \dots \dots \dots (78),$$

or, l'équation (76) du plan polaire donne

$$\frac{\alpha \cdot x'}{a^2 \cdot b^2} + \frac{\beta \cdot y'}{b^4} - \frac{\gamma \cdot z'}{b^2 \cdot c^2} = 0 \dots \dots \dots (79)$$

donc

$$\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^4}{c^4 \cdot p'} \cdot \gamma \dots \dots \dots (69),$$

et semblablement

$$\beta = -\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^4}{c^4 \cdot q'} \cdot \gamma \dots \dots \dots (70).$$

L'élimination de  $p'$  et  $q'$  entre les équations (54), (69) et (70) donnera de même l'équation (73).

Autrement. — Pour que les plans tangents (s) et (s') aient pour intersection la droite VI, on aura les relations

$$\frac{c^2 \cdot m}{a^2} \cdot p' + \frac{c^2 \cdot n}{b^2} \cdot q' - 1 = 0 \dots \dots \dots (80)$$

$$\frac{c^2 \cdot m}{a^2} \cdot p'' + \frac{c^2 \cdot n}{b^2} \cdot q'' - 1 = 0 \dots \dots \dots (81).$$

Maintenant faisons passer par la génératrice Va un plan normal à (S) .....

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0 \dots \dots \dots (11)$$

lequel doit satisfaire à la condition

$$A \cdot p' + B \cdot q' + C = 0 \dots \dots \dots (15)$$

pour contenir cette génératrice, et à la condition

$$A \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot p' + B \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot q' - C = 0 \dots \dots \dots (82) (*)$$

pour être normal à (S) le long de cette même génératrice.

Alors les équations (15) et (82) donnent

$$A = - \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{p'} \cdot C \dots \dots \dots (83)$$

$$B = \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2}{q'} \cdot C \dots \dots \dots (84)$$

donc l'équation (11) du plan normal (n) deviendra

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{p'} \cdot x - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2}{q'} \cdot y - z = 0 \dots \dots (68).$$

En considérant comme variables  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$ , l'équation (80) deviendra

$$\frac{c^2 \cdot m}{a^2} \cdot x + \frac{c^2 \cdot n}{b^2} \cdot y - z = 0 \dots \dots \dots (85)$$

qui sera l'équation du plan polaire (p) ou (p') qui se confond maintenant avec le plan normal (n).

Ainsi les équations (68) et (85) étant identiques, il vient, par la comparaison des coefficients

$$m = \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^4}{c^4} \cdot \frac{b^2}{p'} \dots \dots \dots (86)$$

et

$$n = - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^4}{c^4} \cdot \frac{a^2}{q'} \dots \dots \dots (87)$$

(\*) C'est le numérateur de la formule (42), qui donne la valeur de  $\text{tg } \theta$ .



donc

$$\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^4}{c^4 \cdot p'} \cdot \gamma \dots \dots \dots (69)$$

et

$$\beta = - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^4}{c^4 \cdot q'} \cdot \gamma \dots \dots \dots (70)$$

d'où nous déduirons, comme précédemment, l'équation (73).

### Recherches sur l'hyperboloïde de révolution

7. Comme on sait, étant  $a=b$ , on aura l'hyperboloïde de révolution  $(H)_r$ ; et en représentant par  $r$  le rayon du cercle de gorge, et par  $s$  le rapport  $\frac{r}{c}$ , l'équation de cette surface et celle de son cône asymptote  $(S)_r$  seront

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 + s^2 \cdot \gamma^2 \dots \dots \dots (88)$$

et

$$x^2 + y^2 = s^2 \cdot z^2 \dots \dots \dots (2)_r$$

En portant ces valeurs dans les équations (58), (65) et (66), on aura l'équation

$$(p' \cdot \text{tg } \theta \pm q' \sqrt{1 + s^2})x + (q' \cdot \text{tg } \theta \mp p' \sqrt{1 + s^2})y = s^2 \cdot \text{tg } \theta \times z \quad (58)_r$$

qui sera celle des plans diamétraux parallèles aux plans tangents dont l'obliquité est  $\theta$ ; et les équations

$$\alpha = \left( p' \pm q' \cdot \frac{\sqrt{1 + s^2}}{\text{tg } \theta} \right) \gamma \dots \dots \dots (65)_r$$

$$\beta = \left( q' \mp p' \cdot \frac{\sqrt{1 + s^2}}{\text{tg } \theta} \right) \gamma \dots \dots \dots (66)_r$$

qui seront les équations des respectifs diamètres conjugués à ces plans diamétraux, ou de leurs polaires. L'équation (67) deviendra aussi

$$\alpha = \frac{p' \cdot \operatorname{tg} \theta \pm q' \sqrt{1+s^2}}{q' \cdot \operatorname{tg} \theta \mp p' \sqrt{1+s^2}} \cdot \beta \dots \dots \dots (67)_r$$

L'élimination de  $p'$  et  $q'$  entre les deux équations (65)<sub>r</sub>, (66)<sub>r</sub> et l'équation

$$p'^2 + q'^2 = s^2 \dots \dots \dots (54)_r$$

qui résulte de l'équation (54), donne l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{s^2 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1 + s^2)}{\operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \gamma^2 \dots \dots \dots (89)$$

laquelle représente une surface conique de révolution  $(C_0)_r$ , concentrique à la surface conique asymptote  $(S)_r$ , coupant les génératrices rectilignes des deux systèmes de l'hyperboloïde aux points où l'obliquité  $\theta$  des plans tangents respectifs est donnée.

Ainsi en combinant les équations (88) et (89), nous aurons les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \theta + 1 + s^2}{1 + s^2} \dots \dots \dots (90)$$

et

$$\gamma = \pm \frac{r \cdot \operatorname{tg} \theta}{s \sqrt{1+s^2}} \dots \dots \dots (91)$$

lesquelles représentent le lieu géométrique des points des génératrices des deux systèmes où l'obliquité  $\theta$  des plans tangents est donnée.

Ce lieu géométrique sera donc composé de deux parallèles  $(\pi)$  et  $(\pi')$  équidistants du cercle de gorge  $(g)$ , ainsi qu'il était facile de le prévoir.

**S.** Dans le point de rencontre  $I_r$  de deux génératrices de systèmes différents le plan tangent aura par rapport à chaque génératrice des obliquités égales et de sens opposé.



En effet, les formules (42) et (49) pour  $a=b=r$  deviennent

$$\operatorname{tg} \theta = \mp \frac{\sqrt{1+s^2}}{A \cdot q' - B \cdot p'} \cdot C \dots \dots \dots (42)_r$$

$$\operatorname{tg} \theta' = \pm \frac{\sqrt{1+s^2}}{A \cdot q' - B \cdot p'} \cdot C \dots \dots \dots (49)_r$$

et par suite

$$\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \theta'$$

9. Pour  $\theta = 0$  les équations (90) et (91) deviendront

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 \dots \dots \dots (92)$$

$$\gamma = 0 \dots \dots \dots (93)$$

d'où il résulte que le cercle de gorge de l'hyperboloïde de révolution sera la ligne de striction dans les deux systèmes de génératrices.

Dans ce cas l'équation (58)<sub>r</sub> deviendra

$$q' \cdot x - p' \cdot y = 0 \dots \dots \dots (94)$$

qui représentera le plan normal au cône (S)<sub>r</sub> le long de la génératrice  $Va_r$ , ayant pour équations

$$x = p' \cdot z$$

$$y = q' \cdot z$$

et alors dans les équations (65) et (66) étant évidemment  $\gamma=0$ , l'équation (67) donne

$$\beta = -\frac{p'}{q'} \cdot \alpha \dots \dots \dots (67)_r$$

ce qui montre, comme on sait, que le plan normal et sa polaire se coupent orthogonalement, cette droite décrivant le plan  $xy$  ou le plan du cercle de gorge.

\*

**10.** L'intersection des plans des parallèles  $(\pi)$  et  $(\pi')$  de l'hyperboloïde  $(H)_r$  avec le cône asymptote  $(S)_r$ , étant les parallèles  $(\omega)$  et  $(\omega')$  de celui-ci données par les équations

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + s^2} \dots \dots \dots (95)$$

$$z = \pm c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + s^2} \dots \dots \dots (96)$$

et la distance  $\delta$  du point central d'une génératrice de  $(H)_r$  aux points de cette droite où les plans tangents ont une obliquité donnée  $\theta$  étant égale à la longueur de la génératrice parallèle de  $(S)_r$  depuis le sommet jusqu'aux parallèles  $(\omega)$  et  $(\omega')$ , nous aurons

$$\delta = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm c \cdot \operatorname{tg} \theta \dots \dots \dots (97).$$

On voit, donc, que la distance du point central d'une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde de révolution, aux points de cette droite où les plans tangents ont une obliquité donnée, est proportionnelle à la tangente de cette obliquité.

Étant  $\theta = 45^\circ$  la distance  $\delta$  deviendra le paramètre  $k$  des génératrices, et nous aurons

$$k = \pm c \dots \dots \dots (98)$$

et par conséquent le paramètre  $k$  des génératrices dans l'hyperboloïde de révolution est égal au demi-axe non transverse de cette surface.

**11.** Si dans une surface gauche nous considérons une génératrice rectiligne quelconque  $G$ , ainsi que la génératrice qui lui est infiniment voisine, nous pouvons évidemment prendre une droite telle que les hyperboloïdes de raccordement le long de  $G$ , déterminés par ces droites, soient de révolution.

Les centres de ces hyperboloïdes seront donc sur la normale au point central de la génératrice  $G$ , ou sur le plan tangent à l'infini, et tous les demi-axes non transverses seront égaux au paramètre  $K$  de cette génératrice, considérée sur la surface gauche.



D'après cela l'équation (97) montre immédiatement que la tangente de l'obliquité du plan tangent en un point d'une génératrice rectiligne d'une surface gauche est proportionnelle à la distance de ce point au point central de cette génératrice (\*).

De même nous pouvons aussi énoncer d'autres théorèmes relatifs aux surfaces gauches recourant aux hyperboloïdes de révolution avec lesquels se raccordent tout le long d'une génératrice rectiligne quelconque.

Observation. — Il est clair que nous pouvons aussi arriver directement à cette étude de l'hyperboloïde de révolution d'une manière très-facile.

12. Passons maintenant à déterminer la surface conique enveloppe des plans diamétraux parallèles aux plans tangents d'obliquité donnée  $\theta$ , ou la surface conique polaire  $(C_p)_r$  du cône  $(C_0)_r$  par rapport au cône  $(S)_r$ .

En ordonnant l'équation  $(58)_r$  par rapport à  $p'$  et  $q'$ , on a

$$(x \cdot \text{tg } \theta \mp y \sqrt{1 + s^2}) p' + (y \cdot \text{tg } \theta \pm x \sqrt{1 + s^2}) q' = s^2 \cdot \text{tg } \theta \times z \quad (99).$$

En représentant par

$$x = p_1 \cdot z \dots \dots \dots (32)_r$$

$$y = q_1 \cdot z \dots \dots \dots (33)_r$$

les équations d'une autre génératrice du cône  $(S)_r$ , l'équation des plans diamétraux passant par cette droite étant ordonnée par rapport à  $p_1$  et  $q_1$ , sera

$$(x \cdot \text{tg } \theta \mp y \sqrt{1 + s^2}) p_1 + (y \cdot \text{tg } \theta \pm x \sqrt{1 + s^2}) q_1 = s^2 \cdot \text{tg } \theta \times z \quad (100).$$

Maintenant on peut substituer à l'une des équations (99) et (100), à la seconde par exemple, l'équation

$$(p' - p_1)(x \cdot \text{tg } \theta \mp y \sqrt{1 + s^2}) + (q' - q_1)(y \cdot \text{tg } \theta \pm x \sqrt{1 + s^2}) = 0 \quad (101)$$

(\*) Mr. Jules de la Gournerie — *Traité de géométrie descriptive*, n.° 622 (1862).

obtenue en retranchant ces équations membre à membre; mais étant

$$p'^2 + q'^2 = p_1^2 + q_1^2 = s^2 \dots \dots \dots (36)_r$$

on a

$$\frac{p' + p_1}{q' + q_1} = \frac{q' - q_1}{p' - p_1} \dots \dots \dots (37)_r$$

et par suite

$$(p' + p_1)(y \cdot \text{tg } \theta \pm x \sqrt{1 + s^2}) - (q' + q_1)(x \cdot \text{tg } \theta \mp y \sqrt{1 + s^2}) = 0 \quad (102).$$

Si l'on fait diminuer  $(p' - p_1)$  et  $(q' - q_1)$  les deux couples de plans diamétraux se rapprocheront indéfiniment, et leurs intersections s'approcheront d'une limite, qui est la génératrice de la surface conique enveloppe demandée, ou la caractéristique de cette enveloppe; et pour cette limite l'équation (102) deviendra

$$(y \cdot \text{tg } \theta \pm x \sqrt{1 + s^2}) p' - (x \cdot \text{tg } \theta \mp y \sqrt{1 + s^2}) q' = 0 \quad (103).$$

En éliminant les paramètres  $p'$  et  $q'$ , entre les équations (99), (36)<sub>r</sub> et (103), on aura pour équation de l'enveloppe demandée l'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{\text{tg}^2 \theta + 1 + s^2} \cdot z^2 \dots \dots \dots (104)$$

qui représente un cône de révolution  $(C_p)_r$ , qui sera le cône polaire demandé.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 15

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Dada uma figura plana composta de um hexagono regular sobre os lados do qual estão seis outros hexagonos regulares congruentes ao primeiro, quer-se saber como se póde cortar esta figura por tres linhas rectas que a dividam em partes congruentes ou incongruentes, de modo que com estas partes se possa formar um hexagono regular.

Seja  $abcdef$  o primeiro hexagono regular, cujo centro representamos por  $o_1$ ; e  $abmlkj$ ,  $bcqpn$ ,  $cdtsrq$ ,  $dexvut$ ,  $efgzyx$ ,  $fajihg$  os outros seis hexagonos regulares, tendo cada um d'elles um lado commum com o primeiro, e cujos centros representaremos respectivamente por  $o_2$ ,  $o_3$ ,  $o_4$ ,  $o_5$ ,  $o_6$ ,  $o_7$ .

Se  $R$  e  $r$  designarem respectivamente os raios ou lados do hexagono pedido (H) e dos sete hexagonos que compõem a figura dada (F); e por  $A$  e  $a$  representarmos as suas áreas, teremos evidentemente

$$\frac{A}{a} = \frac{7}{1} = \frac{R^2}{r^2},$$

d'onde

$$R = r\sqrt{7}.$$

Sendo  $P$  e  $Q$  os pontos de intersecção da recta  $o_1o_2$  com os lados  $ab$  e  $kl$  dos hexagonos componentes  $abcdef$  e  $abmlkj$ , teremos que  $o_1Q$  será igual á somma dos apothemas  $o_1P$ ,  $Po_2$ ,  $o_2Q$ ; mas é

$$o_1P = P o_2 = o_2Q = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

ou

$$o_1 Q = \frac{r}{2} 3\sqrt{3}$$

logo

$$o_1 l = \sqrt{o_1 Q^2 + Ql^2} = r \cdot \sqrt{7} = R.$$

Assim os vertices  $l, n, p, r, s, u, v, y, z, h, i, k$  do polygono dado  $ghijklmnpqrstuvxyz$  ou (F) estão sobre uma circumferencia de raio  $R = r\sqrt{7}$ , e por conseguinte os seis vertices  $l, p, s, v, z, i$ , e os seis vertices  $k, q, r, u, y, h$ , determinam dois hexagonos regulares (H)' e (H)'' inscriptos n'esta circumferencia, e portanto eguaes ao hexagono pedido (H).

Se considerarmos, por exemplo, o hexagono (H)', as suas diagonaes  $l\alpha o_1 \delta v$ ,  $p\beta o_1 \varepsilon z$  e  $s\gamma o_1 \varphi i$  representarão um systema de tres rectas que dividem o polygono dado (F) em partes congruentes, e que reunidas convenientemente formam o hexagono (H).

Com effeito, se fizermos girar em torno de  $i$  a parte  $i\varphi o_1 \delta vxyzgh$ , formada da reunião das duas partes congruentes  $i\varphi o_1 \varepsilon zgh$  e  $z\alpha o_1 \delta vxy$ , até que os vertices  $h, g, z$ , venham coincidir com os vertices  $j, k, l$ , os pontos  $o_1$  e  $v$  virão determinar dois vertices  $o'_1$  e  $v'$  de (H); e fazendo depois girar a parte  $p\beta o_1 \delta vutsrq$ , composta da reunião das duas partes congruentes  $p\beta o_1 \gamma srq$  e  $s\gamma o_1 \delta vut$ , de modo que os vertices  $q, r, s$  venham coincidir com os vertices  $n, m, l$ , o ponto  $o_1$  determinará outro vertice  $o''_1$  de (H), e os vertices  $y, x, v$  da primeira parte  $i\varphi o_1 vxyzgh$  coincidirão com os vertices  $t, u, v$  d'esta segunda parte. Tal é, pois, um dos modos de formar o hexagono pedido, no caso de serem congruentes as partes em que se divide a figura ou polygono dado (F).

Consideremos agora a divisão d'este polygono em partes incongruentes.

Tiremos a recta  $p\pi o_2 \tau$  que córta  $bm$  e  $jk$  em  $\pi$  e  $\tau$ ; a recta  $\omega o_2 \rho g$  que córta  $lm$  e  $aj$  em  $\omega$  e  $\rho$ ; e finalmente a recta  $\lambda g \sigma$ , que fórma com  $\omega o_2 \rho g$  um angulo de  $120^\circ$  e córta  $hi$  e  $xy$  em  $\lambda$  e  $\sigma$ : d'onde resulta que os pontos  $p, o_1, g$  serão evidentemente tres vertices do hexagono pedido.

Em virtude do traçado d'estas tres rectas, teremos um dos modos de dividir o polygono em partes incongruentes  $go_2 pqrstuvx\sigma$ ,  $tkluo_2$ ,  $\sigma yzg$ ,  $gh\lambda$ ,  $g\lambda ij\tau o_2$  e  $o_2 \omega mnp$ .



Se agora destacarmos a segunda parte  $tkluo_2$ , e fizermos coincidir os seus pontos  $\tau, k, l$  com os pontos  $\sigma, x, v$  da primeira parte  $go_2pqrstuvx\sigma$ , o ponto  $o_2$  determinará o quarto vertice  $o'_2$  de (H). Collocando a terceira parte  $\sigma y z g$ , de modo que os seus pontos  $y$  e  $z$  coincidam com os pontos  $v$  e  $u$  da primeira parte, e o ponto  $\sigma$  coincida com o ponto  $\omega$  da segunda parte, na sua nova posição, o ponto  $g$  determinará o quinto vertice  $g'$  de (H).

Tomando a quarta e quinta parte reunidas, isto é, a parte  $ghij\tau o_2$ , façamos coincidir os pontos  $g, h, i, j$  com os pontos  $g', u, t, s$ , e a posição do ponto  $o_2$  determinará o sexto vertice  $o''_2$  de (H).

Finalmente transportando a sexta parte  $o_2 umnp$ , de modo que se confundam os pontos  $o_2, u, m, n, p$  com os pontos  $o''_2, \tau, r, q, p$ , acabaremos de formar o hexagono pedido.

Como se vê, ha grande numero de modos de fazer a decomposição do polygono dado (F) em partes congruentes e incongruentes, para com ellas se formar o hexagono pedido (H); mas julgamos sufficiente as decomposições que indicámos, que mostram bem a marcha geral que se deve seguir na solução da questão proposta.

## BIBLIOGRAPHIA

*Notes sur l'équations aux dérivées partielles*, par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand.

Estas *Notas* foram publicadas nos *Annaes da Sociedade Scientifica de Bruxellas*, 5º année, 1881.

Na primeira demonstra o illustre mathematico belga, d'uma maneira rigorosa e simples, o processo conhecido para integrar as equações ás derivadas parciaes lineares de primeira ordem, cujas demonstrações anteriores o sr. Gilbert tinha atacado recentemente nos mesmos *Annaes*. Considera uma funcção indeterminada  $u$  de  $x$  e  $y$ . Será, pois,  $y$  funcção de  $x$  e  $u$ , e portanto

$$\frac{dz}{du} = p + q \frac{dy}{dx}$$

Eliminando  $p$  entre esta equação e a proposta, e determinando  $u$  de modo que na equação resultante seja nullo o coefficiente de  $q$ , obtem as duas equações differenciaes conhecidas, cujos integraes  $v = \alpha$ ,  $w = \beta$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  funcções arbitrarías de  $u$ , dão pela eliminação de  $u$  a equação  $F(u, w) = 0$ , que representa o integral pedido.

Esta demonstração é muito simples, e applicada ás equações de segunda ordem conduz ao methodo de Monge. Basta para isso eliminar na proposta  $r$  e  $t$  por meio das equações

$$\frac{dp}{dx} = r + s \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} = s + t \frac{dy}{dx}$$

O fim da segunda *Nota* do sr. Mansion é dar um methodo para integrar a equação ás derivadas parciaes das superficies regradas mais claro e rigoroso do que o apresentado por Monge para o mesmo fim.



*Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, par M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.

Começa o sr. Gilbert por estabelecer uma relação importante a que deve satisfazer a função de Poisson, e depois deduz d'ella alguns theoremas fundamentaes na theoria de Jacobi sobre a integração das equações ás derivadas parciaes. Expõe depois algumas difficuldades que se encontram no methodo de Jacobi, e mostra como desapparecem quando se usa dos principios por elle desenvolvidos. Esta *Nota* deve ser lida por todos os que estudam a bella Memoria de Jacobi — *Novus methodus etc.*

Este trabalho foi publicado no mesmo volume dos *Annaes da Sociedade Scientifica de Bruxellas*, em que foi publicado o precedente.

*Estudo sobre o deslocamento de um solido invariavel no espaço*, por Luiz Porfirio da Motta Pegado. Lisboa, 1881.

N'esta Memoria, publicada nas *Memorias da Academia das Sciencias de Lisboa*, tracta o illustre professor do movimento mais geral, pelo qual um solido póde passar d'uma posição do espaço para outra, seguindo um methodo geometrico differente d'aquelle que seguiu para o mesmo fim o sabio geometra francez, o sr. Chasles, na sua Memoria classica — *Propriétés relatives etc.*

Para chegar a este resultado teve o sr. Pegado de estabelecer alguns theoremas novos, requeridos pela marcha que seguiu para tractar a questão proposta.

Nos capitulos I e II tracta dos diversos movimentos de rotação, pelos quaes uma recta póde passar de uma posição para outra, que são em numero infinito ou não, segundo são ou não dados os pontos homologos da recta nas duas posições, e cujos eixos no primeiro caso estão sobre um paraboloido hyperbolico isosceles.

Nos capitulos IV e V tracta da mesma questão, suppondo o movimento da recta helicoidal, e mostra que o numero dos eixos centraes é sempre infinito, e que estão sobre a superficie d'um conoide elliptico quando ha pontos homologos.

No capitulo VI tracta do movimento helicoidal d'uma figura invariavel obrigada a passar por duas posições dadas, e mostra que ha só um eixo central do movimento que está na intersecção de dois conoides ellipticos determinados.

Em todos estes capitulos e no capitulo III tracta de muitas proposições de Geometria, de que precisa para as questões de que se occupa, ou que são consequencia d'ellas.

**Observações sobre o magnetismo terrestre na ilha de S. Thomé,**  
por Guilherme Augusto de Brito Capello. S. Thomé, 1881.

Estas observações feitas de 4 a 26 de maio de 1881 pelo sr. G. Brito Capello, um dos membros d'essa notavel familia que tantos serviços tem prestado ao paiz, aproveitando as occasiões que lhe deixava livre o seu logar de commandante da canhoneira *Sado*, referem-se á intensidade magnetica, á declinação e á inclinação.

G. T.

### QUESTÃO PROPOSTA N.º 21

**Achar as soluções inteiras da equação  $xy = y^x$  sem recorrer aos logarithmos.**

A. SCHIAPPA MONTEIRO.



SOBRE UMA FÓRMULA DE EULER

POR

J. M. RODRIGUES

A fórmula de Euler

$$\int \varphi x dx = h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2} \cdot \varphi x - \beta_1 \varphi' x \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \beta_2 \varphi''' x \cdot \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

é uma fórmula fundamental do Calculo Integral.

A serie de Euler

$$E = \frac{h}{2} \cdot \varphi x - \beta_1 \varphi' x \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \beta_2 \varphi''' x \cdot \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \beta_3 \varphi^v x \cdot \frac{h^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

onde  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  designam os *numeros de Bernouilli*, é uma serie muito notavel pela sua lei de geração.

Os integraes indefinidos, os integraes das differenças ou sommas finitas e os integraes definidos são os tres algorithmos primitivos e fundamentaes do Calculo Integral, e constituem um modo universal da geração theorica das quantidades reaes ou imaginarias, immanentes ou transcendentas, pela sommação finita ou indefinida das suas partes elementares.

A fórmula de Euler, na sua accepção philosophica, constitue, como demonstraremos, a expressão algorithmica da unidade logica entre os tres algorithmos theoricos, primitivos e fundamentaes do Calculo Integral.

## I

## Serie de Euler

Consideremos a serie de Euler decomposta em duas partes

$$E = \frac{h}{2} \cdot \varphi x - h E_1,$$

onde

$$E_1 = \beta_1 \varphi' x \cdot \frac{h}{1 \cdot 2} - \beta_2 \varphi''' x \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (a)$$

ou

$$E_1 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot T_n + \dots$$

sendo

$$T_n = \beta_n \frac{d^{2n-1} \varphi x}{dx^{2n-1}} \cdot \frac{h^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2n} \quad (a')$$

a expressão do seu termo geral.

Para achar a função geratriz da serie de Euler seja

$$\varphi(x+ht\sqrt{-1}) = \varphi x + ht\sqrt{-1} \cdot \varphi' x - \frac{h^2 t^2}{1 \cdot 2} \cdot \varphi'' x + \sqrt{-1} \frac{h^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \varphi''' x + \dots$$

e

$$\varphi'(x-ht\sqrt{-1}) = \varphi' x - ht\sqrt{-1} \cdot \varphi'' x - \frac{h^2 t^2}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''' x + \sqrt{-1} \frac{h^3 t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \varphi^{(4)} x + \dots,$$

d'onde se deduz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{-1}} [\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})] = \\ & = t \frac{h}{1} \cdot \varphi' x - t^3 \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \varphi''' x + t^5 \frac{h^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \varphi^{(5)} x + \dots \end{aligned}$$



por consequencia, multiplicando por  $\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$  e integrando entre os limites 0 e  $\infty$ , resulta

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} \cdot dt =$$

$$= \frac{h}{1} \varphi' x \cdot \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{2\pi t}-1} - \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi''' x \cdot \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2\pi t}-1} + \dots \quad (b)$$

ou

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} \cdot dt =$$

$$= T'_1 - T'_2 + T'_3 - T'_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot T'_n + \dots$$

onde

$$T'_n = \frac{h^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)} \cdot \frac{d^{2n-1} \varphi x}{dx^{2n-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t}-1} \quad (b')$$

Ora

$$(e^z-1)^{-1} = e^{-z} + e^{-2z} + e^{-3z} + e^{-4z} + \dots,$$

por consequencia

$$\int_0^\infty (e^z-1)^{-1} \cdot z^{p-1} dz = \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{p-1} dz + \int_0^\infty e^{-2z} \cdot z^{p-1} dz$$

$$+ \int_0^\infty e^{-3z} \cdot z^{p-1} dz$$

$$+ \dots \dots \dots (c);$$

$$+ \int_0^\infty e^{-mz} \cdot z^{p-1} dz$$

$$+ \dots \dots \dots$$

mas o integral euleriano de segunda especie

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-z} \cdot z^{p-1} dz$$

dá pela mudança de  $z$  em  $mz$

$$\Gamma(p) = m^p \cdot \int_0^{\infty} e^{-mz} \cdot z^{p-1} dz,$$

d'onde

$$\int_0^{\infty} e^{-mz} \cdot z^{p-1} dz = \frac{\Gamma(p)}{m^p};$$

logo, dando a  $m$  os valores

$$m = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

a serie (c) transforma-se em

$$\int_0^{\infty} (e^z - 1)^{-1} \cdot z^{p-1} dz = \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots\right) \cdot \Gamma(p)$$

ou

$$\int_0^{\infty} (e^z - 1)^{-1} \cdot z^{p-1} dz = S_p \times \Gamma(p)$$

sendo

$$S_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

Esta serie notavel tem sido objecto de muitas investigações. Quando  $p = 2n$  sabe-se que

$$S_{2n} = \beta_n \cdot \frac{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) 2n}$$

e

$$\Gamma(2n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1),$$



por consequencia

$$S_{2n} \times \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \cdot \pi^{2n} \cdot \frac{\beta_n}{2n}$$

logo

$$\int_0^\infty (e^z - 1)^{-1} \cdot z^{2n-1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{2} \cdot \frac{\beta_n}{2n}$$

onde  $\beta_n$  designa o numero de Bernouilli da ordem  $n$ .

Fazendo pois  $z = 2\pi t$ , o que não altera os limites da integração, resulta finalmente

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta_n}{2n}$$

Logo, substituindo o valor d'este integral definido na expressão do termo geral da serie (b), resulta

$$T'_n = \frac{1}{2} \cdot \beta_n \frac{h^{2n-1} + \frac{d^{2n-1} \varphi x}{dx^{2n+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}$$

e pela comparação com o termo geral da serie (a) vem

$$T'_n = \frac{1}{2} \cdot T_n$$

Temos pois

$$E_1 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot T_n + \dots$$

e

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) - \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot T_1 - \frac{1}{2} \cdot T_2 + \frac{1}{2} \cdot T_3 - \frac{1}{2} \cdot T_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} T_n + \dots$$

Logo

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt$$

é a funcção geratriz da serie de Euler, a que chamaremos — *transcendente euleriana*.

A fórmula de Euler transforma-se pois em

$$\int \varphi x dx = h \sum \varphi x + \frac{h}{2} \cdot \varphi x - \frac{h}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt \quad (d);$$

$$\sum \varphi x + \frac{1}{2} \cdot \varphi x = \sum \left[ \varphi x + \frac{1}{2} \cdot \Delta \varphi x \right] = \frac{1}{2} \cdot \sum [\varphi x + \varphi(x+h)],$$

logo

$$\int \varphi x dx = \frac{h}{2} \cdot \sum [\varphi x + \varphi(x+h)] - \frac{h}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt \quad (e).$$

A esta transformada da fórmula de Euler chamaremos — *fórmula euleriana*, a qual, depois da integração effectuada, se deve completar com uma constante arbitraria.

## II

### Fórmulas integraes

Seja

$$\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}) = \varphi x + \alpha\sqrt{-1} \cdot \varphi'x - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''x + \sqrt{-1} \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \varphi'''x + \dots$$

e

$$\varphi(x-\alpha\sqrt{-1}) = \varphi x - \alpha\sqrt{-1} \cdot \varphi'x - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot \varphi''x + \sqrt{-1} \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \varphi'''x + \dots$$



Sommando e subtrahindo resulta

$$\frac{1}{2} [\varphi(x + \alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x - \alpha\sqrt{-1})] =$$

$$= \varphi x - \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \varphi'' x + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \cdot \varphi^{iv} x - \dots$$

e

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} [\varphi(x + \alpha\sqrt{-1}) - \varphi(x - \alpha\sqrt{-1})] =$$

$$= \alpha \varphi' x - \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \varphi''' x + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} \cdot \varphi^v x - \dots$$

Ora

$$(e^{2\theta i} + z^2) - 1 = e^{-2\theta i} - z^2 \cdot e^{-4\theta i} + z^4 \cdot e^{-6\theta i} - \dots$$

onde  $\theta$  designa um angulo e  $i$  o imaginario primitivo  $i = \sqrt{-1}$ ; por consequencia

$$\frac{e^{2\theta i}}{z^2 + e^{2\theta i}} = 1 - z^2 \cdot e^{-2\theta i} + z^4 \cdot e^{-4\theta i} - \dots$$

e

$$\frac{e^{\theta i}}{z^2 + e^{2\theta i}} = e^{-\theta i} - z^2 \cdot e^{-3\theta i} + z^4 \cdot e^{-5\theta i} - \dots$$

\*

Multiplicando estes dois desenvolvimentos por  $\varphi(x + r e^{\theta i}) d\theta$  e integrando entre os limites 0 e  $2\pi$ , vem

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{z^2 + e^{2\theta i}} \cdot e^{2\theta i} d\theta &= \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) d\theta \\ &- z^2 \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-2\theta i} d\theta \\ &+ z^4 \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-4\theta i} d\theta \\ &+ (-1)^n \cdot z^{2n} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-2n\theta i} d\theta \\ &+ \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{z^2 + e^{2\theta i}} \cdot e^{\theta i} d\theta &- \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-\theta i} d\theta \\ &- z^2 \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-3\theta i} d\theta \\ &+ z^4 \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-5\theta i} d\theta \\ &- \dots \\ &+ (-1)^n z^{2n} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-(2n+1)\theta i} d\theta \\ &+ \dots \end{aligned}$$



Mas pela notavel fórmula de Cauchy

$$\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = \frac{1.2.3...n}{2\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-n\theta i} d\theta$$

os termos geraes d'estes dois desenvolvimentos são

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-2n\theta i} d\theta = \frac{2\pi r^{2n}}{1.2.3...2n} \cdot \frac{d^{2n} \varphi x}{dx^{2n}}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot e^{-(2n+1)\theta i} d\theta = \frac{2\pi r^{2n+1}}{1.2.3...(2n+1)} \cdot \frac{d^{2n+1} \varphi x}{dx^{2n+1}}$$

por consequencia

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{z^2 + e^{2\theta i}} \cdot e^{2\theta i} d\theta = \varphi x - \frac{z^2 \cdot r^2}{1.2} \cdot \varphi'' x + \frac{z^4 \cdot r^4}{1.2.3.4} \cdot \varphi^{IV} x - \dots$$

e

$$\frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{z^2 + e^{2\theta i}} \cdot e^{\theta i} d\theta = \varphi' x - \frac{z^2 \cdot r^2}{1.2.3} \cdot \varphi''' x + \frac{z^4 \cdot r^4}{1.2.3.4.5} \cdot \varphi^V x - \dots$$

Fazendo agora  $zr = \alpha$  ou  $z = \frac{\alpha}{r}$  resulta

$$\frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} \cdot e^{2\theta i} d\theta = \varphi x - \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \varphi'' x + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \cdot \varphi^{IV} x - \dots$$

e

$$\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} \cdot e^{2\theta i} d\theta = \varphi' x - \frac{\alpha^2}{1.2.3} \cdot \varphi''' x + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4.5} \cdot \varphi^V x - \dots;$$

logo

$$\frac{r^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} \cdot e^{2\theta i} d\theta = \varphi(x + \alpha \sqrt{-1}) + \varphi(x - \alpha \sqrt{-1}) \quad (\alpha)$$

$$\frac{\alpha \sqrt{-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} \cdot r e^{\theta i} d\theta = \varphi(x + \alpha \sqrt{-1}) - \varphi(x - \alpha \sqrt{-1}) \quad (\beta).$$

Estas duas fórmulas exprimem a geração theorica d'um grande numero de integraes definidos.

A fórmula (β) conduz immediatamente a uma transformação da fórmula euleriana. Com effeito, pondo  $\alpha = th$ , multiplicando por  $\frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}$ , e integrando entre os limites 0 e  $\infty$ , resulta, attendendo á independencia das variaveis  $t$  e  $\theta$  e dos limites de integração,

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x + r e^{2\theta i})}{t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i}} \cdot \frac{e^{\theta i}}{e^{2\pi t} - 1} \cdot t dt d\theta = \\ & = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) - \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt. \end{aligned}$$

A fórmula euleriana transforma-se pois em

$$\left. \begin{aligned} \int \varphi x dx &= \frac{h}{2} \cdot \Sigma [\varphi x + \varphi(x+h)] - \\ & - \frac{h^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i}} \cdot \frac{r e^{\theta i}}{e^{2\pi t} - 1} \cdot t dt d\theta \end{aligned} \right\} (e').$$

Esta transformada da fórmula euleriana primitiva (e) determina uma nova classe de integraes definidos duplos.

Ora

$$\frac{1}{2} \cdot \Sigma [\varphi x + \varphi(x+h)] = \Sigma \varphi x + \frac{1}{2} \cdot \varphi x,$$

por consequencia, attendendo á independencia das variaveis  $t$  e  $\theta$ , a fórmula (e') dá

$$\begin{aligned} \int \varphi x dx &= h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2} \cdot \varphi x - \\ & - \frac{h^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \varphi(x + r e^{\theta i}) r e^{\theta i} d\theta \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i})(e^{2\pi t} - 1)} \right], \end{aligned}$$



mas pela fórmula de Cauchy

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) d\theta,$$

por consequencia

$$\int \varphi x dx = h \Sigma \varphi x + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) d\theta - \frac{h^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \varphi(x + r e^{\theta i}) r e^{\theta i} d\theta \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i}) (e^{2\pi t} - 1)} \right];$$

logo

$$\int \varphi x dx = h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot \Theta d\theta \quad (e'')$$

sendo

$$\Theta = \frac{1}{2} - 2h \cdot r e^{\theta i} \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i}) \cdot (e^{2\pi t} - 1)}.$$

Esta segunda transformada (e'') da fórmula euleriana (e) mostra claramente o valor philosophico da fórmula de Euler, e por isso deve denominar-se — a fórmula euleriana principal.

O integral definido

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot \Theta d\theta$$

é a função generatriz da serie de Euler, e a fórmula euleriana principal

$$\int \varphi x dx = h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \cdot \Theta d\theta$$

liga pelo algorithmo primitivo da sommação os tres algorithmos fundamentaes do Calculo Integral.

## III

## Integraes definidos

A integração das diferenças finitas pelas funcções elementares é ainda mais limitada que a integração das funcções differenciaes; e, pelas facultades algorithmicas, succede o contrario, a integração das diferenças é mais geral, porque na fórmula de Wronski o integral indefinido exprime-se em funcção d'um integral definido, cuja determinação é puramente contingente.

Esta dupla propriedade caracteriza, pois, os dois primeiros algorithmos fundamentaes do Calculo Integral.

Ora, como é sabido, a geração theorica do algorithmo inverso das diferenças  $\sum \varphi x$ , pelas funcções elementares, é só possivel, quando  $\varphi x$  tem uma das fórmulas seguintes:

$$I \quad \varphi x = x(x \pm h)(x \pm 2h) \dots (x \pm n-1h) \times f x;$$

$$II \quad \varphi x = \frac{f x}{x(x \pm h)(x \pm 2h) \dots (x \pm n-1h)};$$

$$III \quad \varphi x = a^{m x} \times f x;$$

$$IV \quad \varphi x = \text{sen}^n x \cdot \text{cos}^n x \times f x;$$

onde  $f x$  designa um polynomio racional e inteiro e  $m$  e  $n$  quantidades positivas; por consequencia a fórmula euleriana

$$\sum [\varphi x + \psi(x+h)] = \frac{2}{h} \cdot \int \varphi x dx + \frac{2}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} dt$$



ou

$$\left. \begin{aligned} & \frac{h}{2} \cdot \Sigma [\varphi x + \varphi(x+h)] = \int \varphi x dx + \\ & + \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{\varphi(x+\theta\sqrt{-1}) - \varphi(x-\theta\sqrt{-1})}{e^{2\pi\frac{\theta}{\lambda}} - 1} \cdot d\theta \end{aligned} \right\} (a)$$

determina um grande numero de integraes definidos para cada um dos quatro casos em que é possivel a integração das diferenças.

As mesmas considerações são applicaveis ás outras transformadas da fórmula eulerjana.

No que vae seguir-se fazemos sómente algumas applicações d'esta fórmula (a).

I Seja  $\varphi x = e^{ax}$ ; será

$$\frac{h}{2} \cdot \Sigma [e^{ax} + e^{a(x+h)}] = \int e^{ax} dx + \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{e^{a(x+\theta\sqrt{-1})} - e^{a(x-\theta\sqrt{-1})}}{e^{2\pi\frac{\theta}{\lambda}} - 1} d\theta;$$

mas

$$\Sigma [e^{ax} + e^{a(x+h)}] = (1 + e^{ah}) \cdot \Sigma e^{ax} = \frac{e^{ah} + 1}{e^{ah} - 1} \cdot e^{ax}$$

e

$$e^{ax} [e^{a\theta\sqrt{-1}} - e^{-a\theta\sqrt{-1}}] = 2\sqrt{-1} \cdot e^{ax} \text{sen } a\theta;$$

logo

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{e^{ah} + 1}{e^{ah} - 1} = \frac{1}{a} + \int_0^\infty \frac{2 \text{sen } a\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{\lambda}} - 1} \cdot d\theta \quad (b)$$

d'onde

$$\int_0^\infty \frac{2 \text{sen } a\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{\lambda}} - 1} \cdot d\theta = \frac{h}{2} \cdot \frac{e^{ah} + 1}{e^{ah} - 1} - \frac{1}{a}$$

ntegral definido já conhecido.

A fórmula (b) onde supozemos  $h=1$  transforma-se em

$$(v) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{e^a + 1}{e^a - 1} = \frac{1}{a} + \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{sen} a \theta}{e^{\pi \theta} - e^{-\pi \theta}} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta;$$

mas

$$\operatorname{sen} \operatorname{hyp} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} \operatorname{hyp} x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1};$$

logo

$$\operatorname{cotg} \operatorname{hyp} \frac{a}{2} = \frac{2}{a} + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a \theta}{\operatorname{sen} \operatorname{hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta$$

ou, mudando  $a$  em  $2x$ ,

$$\operatorname{cotg} \operatorname{hyp} x = \frac{1}{x} + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x \theta}{\operatorname{sen} \operatorname{hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta \quad (b')$$

II Seja  $\varphi x = \operatorname{sen} a x$ ; será

$$\frac{h}{2} \cdot \int [\operatorname{sen} a x + \operatorname{sen} a (x+h)] =$$

$$= \int \operatorname{sen} a x dx + \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a (x+\theta \sqrt{-1}) - \operatorname{sen} a (x-\theta \sqrt{-1})}{e^{2\pi \theta} - 1} d\theta.$$

Convertendo o  $\operatorname{sen} a$  em exponenciaes pela fórmula de Euler

$$\operatorname{sen} a x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot [e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-ax\sqrt{-1}}]$$



resulta

$$\Sigma [\text{sen } ax + \text{sen } a(x+h)] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} [(1 + e^{ah\sqrt{-1}}) \cdot \Sigma e^{ax\sqrt{-1}} + (1 + e^{-ah\sqrt{-1}}) \Sigma e^{-ax\sqrt{-1}}]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[ \frac{e^{ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{ah\sqrt{-1}} - 1} \cdot e^{ax\sqrt{-1}} - \frac{e^{-ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{-ah\sqrt{-1}} - 1} \cdot e^{-ax\sqrt{-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[ \frac{e^{ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{ah\sqrt{-1}} - 1} \cdot e^{ax\sqrt{-1}} + \frac{e^{ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{ah\sqrt{-1}} - 1} \cdot e^{-ax\sqrt{-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{ah\sqrt{-1}} - 1} \cdot \cos ax;$$

logo

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{ah\sqrt{-1}} - 1} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{2 \text{sen } a\theta \sqrt{-1}}{e^{2\pi\theta} - 1} \cdot d\theta,$$

ou

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{e^{ah\sqrt{-1}} + 1}{e^{ah\sqrt{-1}} - 1} = \frac{1}{a\sqrt{-1}} + \int_0^\infty \frac{2 \text{sen } a\theta \sqrt{-1}}{e^{2\pi\theta} - 1} \cdot d\theta,$$

expressão analogia á expressão (b), e da qual se podia deduzir pela simples mudança de  $a$  em  $a\sqrt{-1}$ .

Temos pois

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{a\sqrt{-1}} + 1}{e^{a\sqrt{-1}} - 1} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{a} + \sqrt{-1} \cdot \int_0^\infty \frac{2 \text{sen } a\theta \sqrt{-1}}{e^{\pi\theta} - e^{-\pi\theta}} \cdot e^{-\pi\theta} d\theta;$$

mas

$$\text{sen } a\theta \sqrt{-1} = \sqrt{-1} \cdot \text{sen } \text{hyp } a\theta$$

e

$$\text{cotg } \frac{a}{2} = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + 1}{e^{a\sqrt{-1}} - 1} \cdot \sqrt{-1},$$

logo

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \frac{2}{a} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen hyp} a \theta}{\operatorname{sen hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta,$$

ou

$$\left[ \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen hyp} 2\theta x}{\operatorname{sen hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta \right] \quad (b'').$$

As expressões (b') e (b'') mostram a analogia e a íntima relação que existe entre as funcções circulares e as funcções hyperbolicas: a primeira exprime a cotangente hyperbolica em funcção de um seno circular; a segunda exprime a cotangente circular pelo integral definido de uma funcção de senos hyperbolicos.

Os integraes definidos

$$C = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\theta x}{\operatorname{sen hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta$$

$$C' = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen hyp} 2\theta x}{\operatorname{sen hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta$$

exprimem as propriedades theoricas das cotangentes hyperbolica e circular, e constituem as funcções geratrizes do desenvolvimento em serie de uma cotangente, isto é, constituem o limite da serie a partir do segundo termo.

Das fórmulas (b') e (b'') deduz-se a relação importante

$$\operatorname{cotg hyp} x - \operatorname{cotg} x = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\theta x + \operatorname{sen hyp} 2\theta x}{\operatorname{sen hyp} \pi \theta} \cdot e^{-\pi \theta} d\theta$$

logo a differença entre uma cotangente hyperbolica e uma cotangente circular exprime-se pelo integral definido entre zero e o infinito de uma funcção da somma do seno circular com o seno hyperbolico,



IV

Transcendentes

A funcção transcendente

$$\chi_x = \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}}$$

tem sido objecto de investigações d'um grande numero de geometras, e goza de propriedades importantes no Calculo Integral e na Theoria dos Numeros; o seu logarithmo nepereano tem por desenvolvimento a serie notavel

$$l\chi_x = \frac{\beta_1}{1.2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{\beta_2}{3.4} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{\beta_3}{5.6} \cdot \frac{1}{x^5} - \dots$$

dada pela fórmula de Stirling.

Cauchy exprimiu esta funcção no integral definido

$$l\chi_x = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \left( \frac{1}{1-e^{-\theta}} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\theta x} d\theta;$$

a fórmula euleriana dá tambem da funcção  $l\chi_x$  duas transformadas.

Com effeito, as funcções elementares  $lx$  e  $\frac{1}{x}$  são duas funcções integraveis; mas no Calculo das Diferenças são duas transcendentis irreductiveis e inintegraveis.

A fórmula euleriana dá para estas funcções

$$\frac{h}{2} \cdot \Sigma[lx+l(x+h)] = f dx lx + \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty l \left( \frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}} \right) \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1} + c$$

e

$$\frac{h}{2} \cdot \Sigma \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} \right] = \int \frac{dx}{x} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1} + c;$$

isto é, reduz os seus integraes  $\Sigma$  a integraes definidos, que exprimem propriedades da transcendente  $\chi_x$ .

E, com effeito,

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+\theta\sqrt{-1}) - \varphi(x-\theta\sqrt{-1})}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1} \cdot d\theta =$$

$$\frac{h}{1.2} \varphi''x + \frac{h^3}{1.2.3.4} \varphi''''x + \frac{h^5}{1.2.3.4.5.6} \varphi''''''x + \dots$$

portanto, para  $\varphi x = lx$  e  $\varphi x = \frac{1}{x}$ , resulta

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^{\infty} l \left( \frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}} \right) \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1}$$

$$= \frac{\beta_1}{1.2} \cdot \frac{h}{x} - \left( \frac{\beta_2}{3.4} \cdot \left( \frac{h}{x} \right)^3 + \frac{\beta_3}{5.6} \cdot \left( \frac{h}{x} \right)^5 - \dots \right)$$

e

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1} = \frac{\beta_1}{2} \cdot \frac{h}{x^2} - \frac{\beta_2}{4} \cdot \frac{h^3}{x^4} + \frac{\beta_3}{6} \cdot \frac{h^5}{x^6} - \dots$$

logo

$$l\chi_x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^{\infty} l \left( \frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}} \right) \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1}$$

e

$$\left( \frac{dl\chi_x}{dx} \right) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}} - 1}$$



Ora, para  $x = \infty$ ,  $l\gamma_x = 0$ ; por consequencia, integrando esta segunda expressão, resulta

$$l\gamma_x = -2 \int_0^{\infty} \frac{\text{arc tang } \frac{x}{\theta}}{e^{2\pi\theta} - 1} \cdot d\theta,$$

ou

$$l\gamma_x = 2 \int_0^{\infty} \frac{\text{arc cotg } \frac{x}{\theta}}{e^{2\pi\theta} - 1} \cdot d\theta,$$

ou ainda

$$l\gamma_x = -2 \int_0^{\infty} \frac{\text{arc tang } \frac{x}{\theta}}{\text{sen hyp } \pi\theta} \cdot e^{-\pi\theta} d\theta$$

e

$$l\gamma_x = 2 \int_0^{\infty} \frac{\text{arc cotg } \frac{x}{\theta}}{\text{sen hyp } \pi\theta} \cdot e^{-\pi\theta} d\theta.$$

Convertendo as funcções logarithmicas em exponenciaes, a funcção  $\Gamma(x+1)$  converte-se no producto

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \times e^{-x+\frac{1}{\sqrt{-1}}} \int_0^{\infty} l\left(\frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}}\right) \cdot \frac{d\theta}{e^{2\pi\theta}-1}$$

ou

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \times e^{-(x+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} \frac{\text{arc tang } \frac{x}{\theta}}{\text{sen hyp } \pi\theta} \cdot e^{-\pi\theta} d\theta$$

.....;

etc.

e passando aos logarithmos resultam outras tantas expressões exactas de  $l\Gamma(x+1)$  para qualquer valor positivo de  $x$ , real ou imaginario, commensuravel ou incommensuravel.

A função  $\Gamma(x+1)$  exprime o integral euleriano de *segunda especie*

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^x dz;$$

por consequencia as fórmulas precedentes mostram outras tantas propriedades d'este celebre integral.



NOTA SOBRE A TRANSFORMAÇÃO D'UM INTEGRAL DEFINIDO

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

No ultimo artigo que publicámos n'este Jornal, na pag. 65 d'este volume, vem o seguinte caso de transformação obtida pelos contornos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n \theta d \theta}{\sqrt{1-2 \alpha \cos \theta + \alpha^2}} = \alpha^n \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n} \theta d \theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta}}$$

Agora vamos chegar ao mesmo resultado deduzindo-o elementarmente, o que é facil, insistindo de novo, visto a importancia que tem na redução de varias expressões.

Seja

$$\frac{1}{\sqrt{1-2 \alpha \cos \theta + \alpha^2}} = (1-\alpha e^{\theta} \sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} \times (1-\alpha e^{-\theta} \sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}}$$

mas

$$(1-\alpha e^{\pm \theta} \sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha e^{\pm \theta} \sqrt{-1} + \frac{1.3}{2.4} \alpha^2 e^{\pm 2 \theta} \sqrt{-1} +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} \alpha^3 e^{\pm 3 \theta} \sqrt{-1} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \alpha^n e^{\pm n \theta} \sqrt{-1} + \dots$$

e como fazemos

$$\mu = 1 + \frac{1}{2} \alpha \cos \theta + \frac{1.3}{2.4} \alpha^2 \cos 2\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6} \alpha^3 \cos 3\theta + \dots +$$

$$+ \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \alpha^n \cos n\theta + \dots$$

$$v = \frac{1}{2} \alpha \sin \theta + \frac{1.3}{2.4} \alpha^2 \sin 2\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6} \alpha^3 \sin 3\theta + \dots +$$

$$+ \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \alpha^n \sin n\theta + \dots$$

vem

$$(1 - \alpha e^{-\theta} \sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} = \mu + v \sqrt{-1}$$

$$(1 - \alpha e^{-\theta} \sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}} = \mu - v \sqrt{-1}$$

logo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2}} = \mu^2 + v^2 =$$

$$= \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \alpha^n \cos n\theta\right)^2 +$$

$$+ \left(\sum_1^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \alpha^n \sin n\theta\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} P_0 + P_1 \cos \theta + P_2 \cos 2\theta + \dots + P_n \cos n\theta + \dots$$

(a)



sendo

$$P_0 = 2 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \alpha^2 + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \alpha^4 + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \alpha^6 + \dots \right]$$

$$P_1 = 2 \alpha \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^4 + \dots \right]$$

$$P_2 = 2 \alpha^2 \left[ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \alpha^4 + \dots \right]$$

.....

$$P_n = \frac{2}{2^n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \alpha^n \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{4(n+1)(n+2)} \alpha^4 + \dots \right].$$

Precisamos conhecer apenas  $P_0$  e  $P_1$  para ficarem determinados os outros coeficientes, porque de (a) tiramos, derivando em ordem a  $\theta$ ,

$$\alpha \operatorname{sen} \theta \sum_0^{\infty} P_n \cos n \theta = (1 - 2 \alpha \cos \theta + \alpha^2) \sum_0^{\infty} n P_n \operatorname{sen} n \theta$$

logo

$$P_n = \frac{2(n-1)(\alpha^2+1)P_{n-1} - (2n-3)\alpha P_{n-2}}{(2n-1)\alpha}$$

\*

Como sabemos, é este um caso particular da função perturbadora

$$\dots (1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-s} = \sum_{i=0}^{\infty} b^{(i)}_s \cos i\theta$$

$$b^{(i)}_s = 2\alpha^i \left[ \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i-1) i} + \right. \\ \left. + s \cdot \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i+1)} \alpha^2 + \dots \right]$$

suppondo  $s = \frac{1}{2}$ .

Por outro lado obtemos

$$P_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2}}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^2 \theta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^4 \sin^4 \theta + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \alpha^{2n} \sin^{2n} \theta$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \theta d\theta}{\sqrt{1 - 2\alpha^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} \alpha^4 + \dots \right]$$

visto ser

$$\int_0^\pi \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \pi$$



e como tambem

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

resulta afinal

$$\int_0^\pi \frac{\cos n \theta d \theta}{\sqrt{1 - 2 \alpha \cos \theta + \alpha^2}} = \alpha^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \theta d \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}$$

*Aplicação.* — Seja  $x = \cos \theta$ , temos

$$\begin{aligned} P_n = X_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos [n \arccos(x)] dx}{-1 \sqrt{(1 + \alpha^2) - 2 \alpha x - (1 + \alpha^2) x^2} + 2 \alpha x^3} = \\ &= \frac{2 \alpha^n}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} dx}{-1 \sqrt{1 - \alpha^2 (1 - x^2)}} \end{aligned}$$

representando  $X_n$  as *funções de Legendre*.

Este ultimo integral dá-nos um meio muito simples e rapido para exprimir  $X_n$  no producto de  $\frac{4 \alpha^n}{\pi}$  por uma expressão da forma

$$\begin{aligned} &\log \frac{\alpha + 1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)}{1} \times \frac{\alpha - \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \log \frac{\alpha + 1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}{2 \cdot \alpha^3} + \\ &+ \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2} \times \frac{\alpha^3 - \frac{3 \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \left(\alpha - \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \log \frac{\alpha + 1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\right)}{4 \cdot \alpha^5} \dots \end{aligned}$$

Com efeito, pela fórmula

$$\int \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{y^{m-2} \cdot \sqrt{a^2+y^2}}{(m-1)} - \frac{m-2}{m-1} \cdot a \int \frac{y^{m-3} dy}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

obtemos

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \log \frac{y + \sqrt{y^2+a^2}}{a}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{y \sqrt{a^2+y^2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot a \log \frac{y + \sqrt{y^2+a^2}}{a}$$

$$\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{y^3 \sqrt{a^2+y^2}}{4} - \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot a \times$$

$$\times \left[ y \sqrt{a^2+y^2} - a \log \frac{y + \sqrt{y^2+a^2}}{a} \right]$$

$$\int \frac{y^6 dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{1}{6} y^5 \sqrt{a^2+y^2} - \frac{5}{4 \cdot 6} a y^3 \sqrt{a^2+y^2} +$$

$$+ \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a \left[ y \sqrt{a^2+y^2} - a \log \frac{y + \sqrt{a^2+y^2}}{a} \right]$$

.....  
 .....



Fazendo agora

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 1 - \alpha^2 \\ y &= \alpha x \\ dy &= \alpha dx \end{aligned} \right\}$$

temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2}(1-x^2)} = \log \frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-\alpha^2}(1-x^2)} = \frac{1}{2 \cdot \alpha^3} \left[ \alpha - \sqrt{1-\alpha^2} \times \log \frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-\alpha^2}(1-x^2)} = \frac{1}{4 \cdot \alpha^5} \times$$

$$\times \left[ \alpha^3 - \frac{3\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \left( \alpha - \sqrt{1-\alpha^2} \log \frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-\alpha^2}(1-x^2)} = \frac{1}{6 \cdot \alpha^7} \times$$

$$\times \left[ \alpha^5 - \frac{5}{4} \alpha^3 \sqrt{1-\alpha^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \sqrt{1-\alpha^2} \left( \alpha - \sqrt{1-\alpha^2} \log \frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \right]$$

.....  
 .....

e como

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$

$$- \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)}{1} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} +$$

$$+ \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)}{1.2} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} -$$

.....

fica portanto demonstrado o que pretendiamos.

$$\left[ \left( \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{2n-1} \sqrt{1-x^2} \right] \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[ \left( \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{2n-1} \sqrt{1-x^2} \right] \times$$

.....



**SOBRE A MULTIPLICAÇÃO DOS DETERMINANTES**

POR

F. GOMES TEIXEIRA

No *Tratado dos determinantes* do sr. Dostor, para demonstrar o theorema da multiplicação, dá-se primeiro um lemma, que lá se demonstra por indução que não é facil de completar.

Demonstra-se este lemma muito simplesmente do modo que vamos expôr.

Quer-se demonstrar a igualdade

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_n & b_n & c_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & \dots & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n+i} & b_{n+i} & c_{n+i} & \dots & \alpha_{n+i} & \beta_{n+i} & \gamma_{n+i} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{2n} & b_{2n} & c_{2n} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\
 a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_n & b_n & c_n & \dots
 \end{vmatrix}
 \times
 \begin{vmatrix}
 \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & \dots \\
 \alpha_{n+2} & \beta_{n+2} & \gamma_{n+2} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} & \dots
 \end{vmatrix}$$

Com effeito, no desenvolvimento do primeiro determinante, o factor que multiplica um termo da columna de ordem menor que  $n$  e da linha de ordem maior que  $n$  é nullo, porque o determinante menor que o multiplica, sendo desenvolvido, deve conter em cada termo um elemento de cada linha e um elemento de cada columna; logo das  $n$  primeiras linhas, cujos elementos são zeros da columna de ordem  $n-1$  em diante não podem entrar em cada termo mais de  $n-1$  elementos significativos, isto é, deve entrar em cada termo pelo menos um elemento nullo.

Póde pois substituir-se o primeiro determinante pelo seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n+2} & \beta_{n+2} & \gamma_{n+2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} & \dots \end{vmatrix}$$

Para desenvolver este determinante temos de no termo principal

$$a_1 b_2 c_3 \dots k_n \alpha_{n+1} \beta_{n+2} \gamma_{n+3} \dots \lambda_{2n}$$

permutar os indices e sommar os termos resultantes, tendo em vista a regra conhecida dos signaes. Mas como as letras romanas não podem ter indices superiores a  $n$ , nem as gregas podem ter indices inferiores a  $n$ , basta permutar separadamente os indices  $1, 2, 3 \dots n$  e  $n+1, n+2 \dots 2n$ , e collocar diante de cada uma das permutações do primeiro grupo cada uma das do segundo. Isto equivale evidentemente a multiplicar o determinante, cujo termo principal é  $a_1 b_2 c_3 \dots k_n$ , pelo determinante, cujo termo principal é  $\alpha_{n+1} \beta_{n+2} \dots \gamma_{2n}$ , d'onde se conclue o theorema enunciado.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 14 (\*)

POR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

Sendo por hypothese  $x < 2p - 1$ , teremos

$$\left. \begin{aligned} a+(a+1)+\dots+(a+x)+\dots+(a+1)+(a+x)+(a+x+1)+ \\ +\dots+(a+x+y)+\dots+(a+2p-1) &= a+(a+1)+\dots+ \\ + (a+p-1)+(a+p)+\dots+(a+2p-1) &= (2a+2p-1)p \end{aligned} \right\} (1)$$

d'onde

$$\left. \begin{aligned} 2a+(2a+2)+\dots+(2a+2x-2x)+\dots+ \\ +(2a+2x-2)+(2a+2x)+(2a+2+2)+\dots+ \\ +(2a+2x+2y)+\dots+(2a+4p-2)-(2a+2p-1)2p &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} -(2p-1)-(2p-3)-\dots-[2(p-x)-(2x+1)]-\dots- \\ -[2(p-x)+1]-[2(p-x)-1]-[2(p-x)-3]-\dots- \\ -[2(p-x)+(2y+1)]-\dots+ \\ +(2p-3)+(2p-1) &= -(2p-1)-(2p-3)-\dots- \\ -7-5-3-1+1+3+5+7+\dots+(2p-3)+(2p-1) &= 0 \end{aligned} \right\} (3).$$

(\*) Esta solução foi recebida quando estava no prelo a solução dada a pag. 105, e porisso só agora é publicada.

Assim se, por exemplo,

$$-[2(p-\alpha)-(2x+1)] \quad \text{e} \quad -[2(p-\alpha)+(2y+1)]$$

são termos equidistantes dos extremos, será

$$-2(p-\alpha)+(2x+1)-2(p-\alpha)-(2y+1)=0$$

ou

$$(2y+1)=-4(p-\alpha)+(2x+1)$$

e portanto teremos

$$\left. \begin{aligned} &-(2p-1)-(2p-3)-\dots- \\ &-[2(p-\alpha)+1]-[2(p-\alpha)-1]-[2(p-\alpha)-3]-\dots- \\ &-7-5-3-1+1+3+5+7+\dots+ \\ &+[2(p-\alpha)-3]+[2(p-\alpha)-1]+[2(p-\alpha)+1]+\dots+ \\ &+(2p-3)+(2p-1)=0 \end{aligned} \right\} (4).$$

Representando agora por Q e R o quociente e o resto da divisão do producto dado

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+\alpha)\dots(a+2p-1)\dots\dots (5)$$

composto de  $2p$  numeros inteiros consecutivos, pela somma  $(2a+2p-1)p$  dos mesmos numeros

$$a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+\alpha)+\dots+(a+2p-1) (6)$$

teremos

$$\left. \begin{aligned} &\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+\alpha-1)2^{2p-1}\cdot(a+\alpha+1)\dots(a+2p-1)}{2a+2p-1} \\ &= Q + \frac{R}{2a+2p-1} \end{aligned} \right\} (7)$$



ou

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2a(2a+2) \dots (2a+2\alpha-2)(2a+2\alpha+2) \dots (2a+4p-2)}{2a+2p-1} \\ & = Q + \frac{R}{2a+2p-1} \end{aligned} \right\} (8)$$

visto ser

$$a + \alpha = 2^{2p-1} \cdot p \dots \dots \dots (9).$$

Ora sabemos que o resto da divisão de um producto de factores inteiros por qualquer divisor inteiro não muda de valor, quando a um ou mais factores se juncta ou tira o divisor ou multiplos d'este, logo se de cada um dos factores do dividendo

$$2a(2a+2) \dots (2a+2\alpha-2)(2a+2\alpha+2) \dots (2a+4p-2) \quad (10)$$

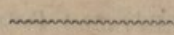
subtrahirmos o divisor  $2a+2p-1$ , e attendermos á expressão (4), obteremos o dividendo

$$\left. \begin{aligned} & \pm 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots [2(p-\alpha)-3]^2 [2(p-\alpha)-1] [2(p-\alpha)+1]^2 \\ & \dots (2p-1)^2 \end{aligned} \right\} (11)$$

[onde ha um só factor da fórmula  $2(p-\alpha)-1$ ] adoptando-se o signal superior ou inferior segundo fôr  $p$  impar ou par; e se representarmos por  $Q'$  o quociente respectivo (não attendendo aos signaes), teremos

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots [2(p-\alpha)-3]^2 [2(p-\alpha)-1] [2(p-\alpha)+1]^2 \dots (2p-1)^2}{2a+2p-1} \\ & = Q' + \frac{R}{2a+2p-1} \end{aligned} \right\} (12).$$

Logo são eguaes os restos das divisões do producto (5) pela somma (6) dos seus factores e do producto (11) pelo numero  $2a+2p-1$ .



## BIBLIOGRAPHIA

*Sur l'évaluation approchée des aires planes*, par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand. Bruxelles, 1881.

Com este titulo publicou o sr. Mansion nos *Annaes da Sociedade Scientifica de Bruxellas* (\*) uma Memoria muito importante, em que se occupa das principaes fórmulas empregadas para avaliar aproximadamente as áreas planas, isto é, da fórmula dos trapezios, das duas de Simpson, da de Weddle, da de Poncelet, da do sr. Parmentier, da do sr. Dupain, da do sr. Catalan e de uma fórmula nova.

Estas diversas fórmulas são demonstradas pelo illustre professor belga de uma maneira simples, clara e uniforme, com o calculo do limite superior do erro correspondente, o que é tanto mais importante, que as demonstrações conhecidas d'estas fórmulas, exceptuando as de Poncelet e do sr. Parmentier, deixavam muito a desejar.

Termina a Memoria pela comparação das fórmulas precedentes, tendo em vista em primeiro logar o rigor e depois a simplicidade.

D'esta comparação conclue:

1.º Se se não tem necessidade de uma grande aproximação, o melhor é recorrer á fórmula dos trapezios, ou, se o numero das ordenadas é impar, á do sr. Parmentier.

2.º Se se quer uma exactidão maior, e o numero das ordenadas é par, deverá usar-se da fórmula do sr. Catalan. Se o numero das ordenadas é impar, usar-se-ha da fórmula do sr. Dupain, ou, se se requer grande exactidão, da primeira fórmula de Simpson.

As outras fórmulas podem ser empregadas em casos particulares.

Vê-se que as fórmulas dos trapezios, a primeira de Simpson, a do sr. Parmentier, a do sr. Dupain e a do sr. Catalan são as mais importantes na pratica.

(\*) *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 5<sup>me</sup> année, 1881, pagg. 231 a 291.



As demonstrações das tres primeiras e da de Poncelet são semelhantes e muito simples. Resultam de substituir a área pedida por medias de tres áreas, que são a do polygono formado pela reunião dos trapezios que se obtêm, tirando tangentes á curva pelas extremidades das ordenadas de ordem par; o polygono formado pelos trapezios que se obtêm, unindo successivamente a primeira extremidade de ordenadas, as de ordem par e a ultima; o polygono formado pelos trapezios que se obtêm, unindo successivamente todas as extremidades das ordenadas. Chamando estes polygonos  $M$ ,  $m$ ,  $m'$  e  $S$  a superficie pedida, as fórmulas são :

$$S = \frac{1}{2} (M + m) \quad (\text{Poncelet})$$

$$S = \frac{1}{3} (2M + m) \quad (\text{Parmentier})$$

$$S = \frac{1}{2} (M + m') \quad (\text{fórmula dos trapezios})$$

$$S = \frac{1}{3} (2M + m') \quad (\text{Simpson}).$$

A consideração da área  $m'$ , que levou a uma demonstração tão simples das duas ultimas fórmulas, é devida ao sr. Mansion, e foi já introduzida no ensino elementar pelos srs. Rouché e Comberousse na ultima edição que vêm de publicar dos seus *Éléments de Géométrie*.

A parte elementar da Memoria a que nos estamos referindo, foi tambem publicada no jornal — *Mathesis* (\*).

G. T.

(\*) *Mathesis* — *Recueil mathématique*, publié par P. Mansion e J. Neuberg. Gand. — Vol. I, pag. 47.

# INDICE

- Sur une question proposée dans le journal de mathématiques élémentaires*,  
par A. Schiappa Monteiro, pag. 3.
- Sobre um problema de Geometria*, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 7.
- Sobre a transformação das funções  $X_n$  de Legendre em integral definido*,  
por J. A. Martins da Silva, pag. 17.
- Prelecção sobre a origem e sobre os principios do Calculo infinitesimal feita  
aos alumnos da Universidade de Coimbra*, por F. Gomes Teixeira, pag. 21.
- Sobre um theorema relativo ás secções planas do cone de revolução*, por A. F.  
Rocha Peixoto, pag. 46.
- Sobre a redução directa de uma classe de integraes definidos multiplos*, por  
J. A. Martins da Silva, pag. 49.
- Sobre uma fórmula de Wronski*, por J. M. Rodrigues, pag. 55.
- Demonstração de um theorema de Mr. Besge*, por J. A. Martins da Silva,  
pag. 65.
- Sobre a historia do Nonius*, pag. 73.
- Solução da questão proposta n.º 17*, por A. Schiappa Monteiro, pag. 81.
- Sobre a theoria das facultades*, por J. M. Rodrigues, pag. 87.
- Note de Géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces du second ordre*,  
par A. Schiappa Monteiro, pag. 97.
- Sobre alguns theoremas de Arithmetica*, por Pedro Gomes Teixeira, pag. 105.
- Solução da questão proposta n.º 16*, por A. Schiappa Monteiro, pag. 117.
- Note sur la ligne de striction de l'hyperboloïde*, par A. Schiappa Monteiro,  
pag. 131.
- Solução da questão proposta n.º 15*, por A. Schiappa Monteiro, pag. 151.
- Sobre uma fórmula de Euler*, por J. M. Rodrigues, pag. 157.
- Nota sobre a transformação de um integral definido*, por J. A. Martins da  
Silva, pag. 177.
- Sobre a multiplicação dos determinantes*, por F. Gomes Teixeira, pag. 185.
- Solução da questão proposta n.º 14*, por A. Schiappa Monteiro, pag. 187.
- Bibliographia*, pagg. 154 e 190.
- Questões propostas*, pagg. 16, 116, 156.

---

## ERRATAS

Na pagina 29, linha 24, em logar de: *diminue indefinidamente até zero*,  
quando  $h$  *vae diminuindo indefinidamente até zero*, deve escrever-se: *acaba  
por diminuir indefinidamente passando por todos os valores até zero*, quando  $h$   
*diminue indefinidamente passando por todos os valores até zero*.

Na pagina 30, linha 11, em logar de:  $n+n'$ , deve escrever-se:  $n \times n'$ .

Na pagina 30, linha 19, em logar de: *da tangente comprehendida entre o  
ponto de contacto e o pé*, deve escrever-se:  $M'T$ .

Na pagina 30, linha 23, em logar de:  $MT=MM' \cos TMM'$ , deve escre-  
ver-se:  $M'T=MM' \sin TMM'$ .

Na pagina 34, linha 13, em logar de:  $MT$ , deve escrever-se:  $M'T$ .

---