projection les *sommets variables des cônes correspondants,* nous n'obtiendrons, pour projection des diverses sections, qu'une *seule courbe invariable* de forme et de position ; et, si, en même temps et avec les mêmes centres, nous faisons la projection centrale des sections correspondantes de Σ, nous aurons des *cercles variables* en grandeur et en position, mais faciles à tracer.

Ainsi des points communs des projections centrales ou coniques, de deux sections correspondantes, ou déterminées par un même plan auxiliaire, nous déduirons facilement les points homologues de celle-ci, dans le système de projection donné.

2.° Nous pouvons encore construire des cônes, qui aient, deux à deux, le même sommet, et qui aient pour directrices deux sections horizontales correspondantes de Σ et Σ' ; et ensuite par un *mouvement de translation* transporter tous les cônes, qui ont pour directrices les sections de Σ', jusqu'à ce qu'ils aient *la même trace horizontale.*

6. *Remarque.*—Dans cette seconde méthode il y a un avantage : c'est que nous ne faisons point la plupart des constructions sur les projections des surfaces données, évitant ainsi de charger la figure d'une multitude de lignes auxiliaires, dont l'ensemble la rend ordinairement très-confuse.

Soit dans l'une soit dans l'autre méthode, nous voyons que les centres de projections sont *variables.*

Si les cônes, qui ont pour directrices les sections de Σ', sont *parallèles,* après le mouvement de translation, quand ils auront la même trace, ils auront aussi le même sommet, et par suite *ils se confondront :* d'où il résultera une plus grande simplification dans la construction, car non seulement nous sommes réduits à avoir une courbe invariable de forme et de position homothétique aux sections de Σ', mais encore nous n'avons qu'un *seul centre de projection.*

Il y a des cas très-particuliers où nous pourrons employer la *projection cylindrique,* c'est-à-dire prendre le centre de projection *à l'infini* (*). D'ailleurs, on pourra souvent employer à la fois, et avantageusement, *deux systèmes de projection oblique.*

(*) Par exemple, dans le cas où les surfaces Σ et Σ' auront des *sections elliptiques homothétiques* (lorsque leur direction sera facile de déterminer) ; quand les sections de l'une des surfaces seront des ellipses et les correspondantes de l'autre seront des *lignes droites ;* etc.

7. *Observation.* — L'application de ces méthodes à quelques problèmes (en entrant dans les détails convenables) se trouvent dans notre *Mémoire de géométrie descriptive,* où l'on pourra voir la fécondité de ces méthodes, et en même temps la manière de faire disparaître quelque difficulté, à peine apparente, que l'on rencontre presque toujours dans l'exécution des épures respectives.

III

Observations générales

8. La détermination des *points* de la courbe d'intersection, où *la tangente est horizontale* (*), est très-souvent convenable pour connaître non-seulement la disposition générale de cette courbe, mais surtout les *plans auxiliaires limites;* évitant ainsi d'employer ceux des plans qui ne donnent aucun point.

Voici, donc, les moyens d'obtenir ces points:

1.° Lorsque les deux sections horizontales *se touchent,* les *points de contact* seront, dans l'intersection demandée, évidemment ceux où la tangente est *horizontale.* Mais comme le *contact* doit aussi exister dans la projection *conique* ou *polaire* de ces sections, il s'ensuit que la question se réduit à la détermination des *cercles* ou des *droites auxiliaires,* qui touchent la *conique invariable,* aussi *auxiliaire:* et cela s'obtient, en général, après un *court essai,* qui peut se régulariser par une *courbe auxiliaire* ou *d'erreur.*

2.° Si au lieu des cercles, qui représentent les sections horizontales de l'une des surfaces Σ, nous imaginons des *cercles concentriques* avec ceux-ci et *tangentes* aux sections correspondantes de l'autre surface Σ', ces cercles engendreront une troisième *surface* σ (**), qui ne coupera évidemment la surface Σ que suivant des *cercles horizontals,* qui donnent les points où la tangente est *horizontale,* ou les plans auxiliaires *limites,* et elle touchera la surface Σ' le long *d'une courbe* ω, qui passera par ces points.

(*) Les tangentes horizontales sont évidemment *parallèles aux asymptotes du lieux géométrique des traces horizontales de toutes les tangentes à l'intersection demandée.*

(**) Cette surface auxiliaire σ ne peut dégénérer en plus de quatre surfaces distinctes: car c'est le plus grand nombre de cercles concentriques, que puissent être tangents à une autre conique quelconque.

Donc, pour déterminer les points où la tangente est horizontale, et, par conséquent, les plans auxiliaires limites, il suffit de trouver les *points d'intersection* du contour apparent de la surface Σ sur le plan vertical, avec le *contour apparent* correspondant de la *surface* σ, lequel se construit aisément (*).

En effet, après avoir fait la projection conique du centre de chacune des sections circulaires de Σ, nous décrirons, avec ces centres, des *cercles* qui touchent la conique auxiliaire invariable suivant laquelle se projettent les sections horizontales de Σ'; et ensuite, passant au système de projection donné, nous obtiendrons la *grandeur des cercles générateurs* de la surface σ, de façon que réunissant les extrémités des rayons *parallèles* au plan vertical par une ligne continue, *cette ligne* représentera le *contour apparent* demandé.

Il est facile de reconnaître quels sont les cercles de la surface σ, parmi lesquels sont compris les points demandés, ou les plans limites, pour n'avoir à déterminer que la partie du contour respectif, qui est seule nécessaire.

Lorsque les sections de la surface Σ seront des lignes droites, si nous imaginons des *lignes droites* qui leur soient *parallèles*, et qui soient *taugentes* aux sections correspondantes de la surface Σ' (**), nous obtiendrons une *surface auxiliaire* σ' qui coupera évidemment la surface Σ, suivant des *lignes droites* qui donneront les points de tangente *horizontale.* Ces sections rectilignes nous les détermineront en construisant l'intersection des *traces verticales* de Σ et σ'. Mais, si ces traces se coupent *hors des limites du dessin*, nous emploierons les traces de ces surfaces sur un *plan* parallèle au plan vertical de projection et convenablement choisi.

3.° Les divers *points de contact* de la conique auxiliaire invariable, avec les projections coniques des sections horizontales de la surface σ, étant de même transportés sur les projections coniques des sections horizontales correspondantes de Σ, donneront une *courbe* (***) qui, combinée avec la conique mentionée, nous conduira aussi à la détermination des plans limites.

(*) Ici, les contours apparents de Σ et σ, par rapport au plan vertical, se confondront évidemment avec les traces de ces surfaces sur leur plan principal commum, parallèle au plan vertical de projection.

(**) Il est clair que pour la détermination de ces tangentes nous recourrons, comme dans le premier procédé, à la conique auxiliaire invariable.

(***) Cette courbe peut être prise comme courbe d'erreur dans le premier procédé (Voyez la *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, t. II, p. 438).

Observation. — On voit facilement, selon les cas qui se présenteront, lequel de ces procédés on devra préférer, pour que la détermination des plans limites soit la plus simple et la plus rigoureuse; en cherchant, en tout cas, s'il est possible d'employer une solution directe, préférable en général.

9. Quand il ne sera pas possible de disposer convenablement les surfaces Σ et Σ' par rapport aux plans de projections nous emploierons, selon les cas, l'un des moyens suivants:

1.° Nous pourrons recourir à des *changements de plans de projection*, et à des *rotations des figures*, ce qui n'est au fond que le même principe.

2.° Nous pourrons encore déterminer la *direction commune* des plans sécants, qui donnent dans l'une des surfaces Σ des *cercles*. Alors, nous appliquerons la seconde méthode (*), c'est-à-dire que sur un *plan parallèle* à ces plans, nous tracerons une *courbe homothétique* aux sections correspondantes de l'autre surface Σ', et nous prendrons des *cônes parallèles* pour surfaces projetantes de ces dernières sections; ces cônes étant transportés par *translation*, jusqu'à ce que, ayant pour trace cette courbe auxiliaire, *ils se confondent* en un cône unique, et que par conséquent, nous n'ayons qu'un *seul centre* de projection w.

Ensuite, sur ce plan (que nous supposons rabattu sur le plan horizontal ou vertical), nous aurons à déterminer le centre et le rayon de chacune des projections coniques des sections circulaires correspondants de Σ.

Pour cela nous construirons, sur le plan considéré, les traces des droites issues de ce centre unique w, parallèlement aux projetantes des extrémités des rayons convenables de ces sections.

Des points d'intersection des projections centrales de chaque couple de sections correspondantes, nous passerons facilement aux points homologues dans la courbe d'intersection des surfaces proposées Σ et Σ'.

Dans le cas *très-particulier* où la surface Σ pourra être coupée, par des plans parallèles, suivant des *droites*, les constructions se simplifient: car, après avoir déterminé la *direction commune* de ces plans sécants, nous n'avons qu'à choisir convenablement les

(*) La première méthode peut être également applicable, mais les constructions seront, en général, plus difficiles.

cônes projetants des sections de Σ', et puis à construire, sur le plan horizontal, une *courbe homothétique* aux traces de ces cônes que (étant parallèles) nous transporterons *parallèlement* à eux-mêmes, jusqu'à ce que, ayant pour trace cette courbe auxiliaire, *ils se confondent* en un seul cône, et que, par suite, nous n'ayons qu'un *seul centre* de projection.

Alors nous n'avons qu'à employer des constructions analogues à celles qui contituent la seconde méthode.

Si les sections de Σ', déterminées par les plans sécants correspondants aux sections rectilignes de Σ, sont des ellipses, nous pourrons évidemment, en général, recourir à la projection cylindrique.

3.° La *transformation homologique* des surfaces données Σ et Σ' peut également, dans *certains cas,* nous conduire à des constructions très-faciles.

10. Nous devons remarquer que les méthodes que nous avons présentées pour trouver l'intersection des surfaces du second ordre sont évidemment applicables à la détermination de l'intersection de deux *surfaces* S et S' *d'une ordre quelconque,* pourvu que l'une S puisse être coupée suivant des *cercles* ou des *droites,* par des *plans parallèles;* les sections correspondantes de l'autre S' étant des *courbes homothétiques;* etc. (*).

Il est clair que, dans ce dernier cas, nous déterminerons les points de la courbe d'intersection des surfaces S et S', où la tangente est horizontale, avec la même facilité que lorsque les surfaces données sont *toutes deux du second ordre.*

Enfin il est facile de voir, selon le cas, laquelle de ces deux méthodes nous devons préférer, pour que les constructions soient en même temps les plus simples et les plus rigoureuses.

(*) Il est bon de remarquer que par ces méthodes nous pouvons quelquefois, non-seulement trouver l'intersection de quelques-unes de *ces surfaces particulières,* mais encore démontrer *géométriquement* certaines propriétés de telles surfaces ou de leur intersection.

Comme exemple, nous présenterons le *conoïde oblique* circonscrit à une *courbe plane* quelconque C, lequel a la propriété d'admettre un mode de génération par des *courbes planes du même ordre que cette courbe* C. Une telle propriété se démontre très-facilement en employant la *projection conique:* parce qu'ainsi nous somme réduits seulement à comparer des triangles semblables pour obtenir les relations convenables (Voyez la *Traité de géométrie descriptive* par Mr. Gournerie, art. 667, où il considère le cas de la *courbe* C être du *second* ordre).

11. Nous devons observer que, dans les méthodes exposées, les plans sécants auxiliaires peuvent, dans certains cas, laisser d'être parallèles entre eux, quand les projections obliques des respectives sections satisfassent aux conditions exigées dans ces méthodes, ce qui fait qu'elles soient quelquefois et avantageusement appliquées même lorsque la nature des surfaces, ou bien leur position relative donne lieu à l'emploi des procédés ordinaires (*).

12. Nous ne dirons rien de plus, parce que avec ces éléments, qui ont été l'objet de nos études, nous pensons, que l'on peut sûrement résoudre tous les autres problèmes qui en dérivent.

(*) Ainsi, par exemple, dans la théorie des ombres, où nous avons à considérer des cônes, des cylindres et des plans d'ombre, nos méthodes nous conduisent à combiner les traces invariables de ces surfaces avec les projections coniques ou cylindriques de génératrices des surfaces éclairées, ce qui est sans doute préférable, aux procédés ordinaires, toutes les fois que ces génératrices se projettent suivant des droites ou des cercles.

SOBRE ALGUNS THEOREMAS DE ARITHMETICA

POR

Pedro Gomes Teixeira

Alferes alumno de Artilheria

I

Theorema (*). — *Se fôr a um numero da fórma* $2^{2p-1}.p-\alpha$, *sendo* α *um inteiro menor que* $2p-1$, *terá logar a congruencia seguinte:*

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+2p-1)\equiv 3^2\times 5^2\times 7^2\times\ldots\times$$
$$\times[2(p-\alpha)-3]^2\times[2(p-\alpha)-1]\times[2(p-\alpha)+1]^2\times\ldots\times$$
$$\times(2p-1)^2 p,$$

onde o modulo é igual a

$$a+a+1+a+2+\ldots+a+(2p-1).$$

Seja pois

(1) $$a=2^{2p-1}.p-\alpha.$$

e façamos

$$2p-1=n$$

(2) $$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)=N$$

(3) $$a+a+1+a+2+a+3+\ldots+$$
$$+a+n=p(2a+2p-1)=D.$$

(*) Questão proposta n.° 18.

De (1) tira-se $a+\alpha=2^n.p$, que reduz (2) a

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+\alpha-1)\,2^n p\,(a+\alpha+1)\ldots(a+n)=\mathrm{N}.$$

Fazendo agora

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+\alpha-1)\,2^n(a+\alpha+1)\ldots(a+n)=\mathrm{A}$$
$$2a+2p-1=\mathrm{B}$$

teremos

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{Q}+\frac{r}{\mathrm{B}}$$

d'onde se tira

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}=\frac{r}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{R}}{p\mathrm{B}},$$

ou

$$\mathrm{R}=pr.$$

R será pois conhecido logo que r o seja.

Posto isto, façamos

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}+1}=\mathrm{A}'$$

e vem

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{A}'+\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}},$$

$$\mathrm{A}'=a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{n-1}(a+\alpha+1)\ldots$$
$$(a+p-1)(a+p+1)\ldots(a+n).$$

Do mesmo modo, fazendo successivamente

$$\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}+3}=\mathrm{A}'',\quad \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{B}+5}=\mathrm{A}''',\quad \frac{\mathrm{A}'''}{\mathrm{B}+7}=\mathrm{A}^{(4)},$$

$$\ldots,\quad \frac{\mathrm{A}^{(p-2)}}{\mathrm{B}+2p-3}=\mathrm{A}^{(p-1)},\quad \frac{\mathrm{A}^{(p-1)}}{\mathrm{B}+(2p-1)}=\mathrm{A}^{(p)},$$

resultam as igualdades seguintes:

$$\frac{A'}{B} = A'' + \frac{3\,A''}{B}$$

$$A'' = a(a+1)(a+2)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{n-2}(a+\alpha+1)\ldots$$
$$(a+p-1)(a+p+1)\ldots(a+n)$$

$$\frac{A''}{B} = A''' + \frac{5\,A'''}{B}$$

$$A''' = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{n-3}(a+\alpha+1)\ldots$$
$$(a+p-1)(a+p+3)\ldots(a+n)$$

$$\frac{A'''}{B} = A^{(4)} + \frac{7\,A^{(4)}}{B}$$

$$A^{(4)} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{n-4}(a+\alpha+1)\ldots$$
$$(a+p-1)(a+p+4)\ldots(a+n)$$

....

....

$$\frac{A^{(p-2)}}{B} = A^{(p-1)} + \frac{(2p-3)\,A^{(p-1)}}{B}$$

$$A^{(p-1)} = a(a+1)\ldots 2^{p}(a+\alpha+1)\ldots(a+p-1)(a+n)$$

$$\frac{A^{(p-1)}}{B} = A^{(p)} + \frac{(2p-1)\,A^{(p)}}{B}$$

$$A^{(p)} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{p-1}(a+\alpha+1)\ldots(a+p-1).$$

Estas igualdades dão

$$\frac{A}{B} = A' + A'' + 3\,A''' + 3.5\,A^{(4)} + 3.5.7\,A^{(5)} + \ldots +$$

$$+ 3.5.7\ldots(2p-3)\,A^{(p)} + \frac{3.5.7\ldots(2p-1)\,A^{(p)}}{B}.$$

Vamos agora tractar de determinar o valôr de $\frac{A^{(p)}}{B}$. Fazendo

$$\frac{A^{(p)}}{B-1} = A_1,$$

vem

$$\frac{A^{(p)}}{B} = A_1 - \frac{A_1}{B},$$

$$A_1 = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{p-2}(a+\alpha+1)\ldots(a+p-2).$$

Do mesmo modo, fazendo

$$\frac{A_1}{B-3} = A_2, \quad \frac{A_2}{B-5} = A_3, \quad \frac{A_3}{B-7} = A_4, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{A_{p-\alpha-3}}{B-[2(p-\alpha)-5]} = A_{p-\alpha-2}, \ldots\ldots$$

$$\frac{A_{p-\alpha-2}}{B-[2(p-\alpha)-3]} = A_{p-\alpha-1}, \ldots$$

vem as igualdades seguintes:

$$\frac{A_1}{B} = A_2 - \frac{3\,A_2}{B}$$

$$A_2 = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{p-3}(a+\alpha+1)\ldots(a+p-3)$$

$$\frac{A_2}{B} = A_3 - \frac{5\,A_3}{B}$$

$$A_3 = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{p-4}(a+\alpha+1)\ldots(a+p-4)$$

$$\frac{A_3}{B} = A_4 - \frac{7\,A_4}{B}$$

$$A_4 = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{p-5}(a+\alpha+1)\ldots(a+p-5)$$

....

....

$$\frac{A_{p-\alpha-3}}{B} = A_{p-\alpha-2} - \frac{[2(p-\alpha)-5]\,A_{p-\alpha-2}}{B}$$

$$A_{p-\alpha-2} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{\alpha}$$

$$\frac{A_{p-\alpha-2}}{B} = A_{p-\alpha-1} - \frac{[2(p-\alpha)-3]\,A_{p-\alpha-1}}{B}$$

$$A_{p-\alpha-1} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)\,2^{\alpha}$$

$$\frac{A_{p-\alpha-1}}{B} = A_{p-\alpha+1} - \frac{[2(p-\alpha)+1]\,A_{p-\alpha+1}}{B}$$

$$A_{p-\alpha+1} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-2)\,2^{\alpha-1}$$

$$\frac{A_{p-\alpha+1}}{B} = A_{p-\alpha+2} - \frac{[2(p-\alpha)+3]\,A_{p-\alpha+2}}{B}$$

$$A_{p-\alpha+2} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-3)\,2^{\alpha-2}$$

$$\frac{A_{p-\alpha+2}}{B} = A_{p-\alpha+3} - \frac{[2(p-\alpha)+5]\,A_{p-\alpha+3}}{B}$$

$$A_{p-\alpha+3} = a(a+1)\ldots(a+\alpha-4)\,2^{\alpha-3}$$

....

....

Vem pois

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{3.5.7\ldots(2p-1)\,A^{(p)}}{B},$$

fazendo

$$Q = A' + A'' + 3\,A''' + 3.5\,A^{(4)} + \ldots + 3.5.7\ldots(2p-3)\,A^{(p)},$$

e

$$\frac{A^{(p)}}{B} = Q' \pm \frac{3.5.7\ldots[2(p-\alpha)-3][2(p-\alpha)+1]\ldots(2p-1)}{B},$$

fazendo

$$Q' = A_1 - A_2 + 3\,A_3 - 3.5\,A_4 + 3.5.7\,A_5 - \ldots \pm 3.5\ldots(2p-3).$$

Conclue-se pois que é

$$\frac{A}{B} = Q + Q' \mp$$

$$\mp \frac{3^2.5^2.7^2\ldots[2(p-\alpha)-3]^2[2(p-\alpha)-1][2(p-\alpha)+1]^2\ldots(2p-1)^2}{B}$$

e portanto

$$N \equiv 3^2.5^2.7^2\ldots[2(p-\alpha)-3]^2\,[2(p-\alpha)-1]\,[2(p-\alpha)+1]^2\ldots$$
$$(2p-1)^2.p$$

sendo o *modulo D*.

Por exemplo, sendo

$$a = 95,$$

o que dá

$$p = 3, \quad \alpha = 1,$$

vem

$$95.96.97.98.99.100 \equiv 1.3.5^2.3,$$

sendo o modulo igual a $585 = 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$, como é facil de verificar.

II

Pelos mesmos principios se resolve a questão seguinte:

Procuremos o resto da divisão do producto de numeros successivos

$$A = a(a+1)\dots(a+n),$$

sendo agora a *e* n *numeros quaesquer, pelo divisor* a — i = B.

Fazendo

$$\frac{A}{B+i} = A',$$

virá

$$\frac{A}{B} = A' + i\frac{A'}{B}$$

$$A' = (a+1)(a+2)\dots(a+n).$$

Fazendo depois successivamente

$$\frac{A'}{B+i+1} = A'', \quad \frac{A''}{B+i+2} = A''', \dots \quad \frac{A^{(n)}}{B+i+n} = A^{(n+1)}$$

virá

$$\frac{A'}{B} = A'' + (i+1)\frac{A''}{B}$$

$$A'' = (a+2)(a+3)\dots(a+n)$$

$$\frac{A''}{B} = A''' + (i+2)\frac{A'''}{B}$$

$$A''' = (a+3)(a+4)\dots(a+n)$$

....

....

$$\frac{A^{(n)}}{B} = A^{(n+1)} + (i+n)\frac{A^{(n+1)}}{B}$$

$$A^{(n)} = a + n$$

$$A_{n+1} = 1.$$

Virá pois

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+n)}{B}$$

sendo

$$Q = A' + iA'' + i(i+1)A''' + \ldots + i(i+1)\ldots(i+n-1)A^{(n+1)}.$$

Temos pois a congruencia

$$A \equiv i(i+1)(i+2)\ldots(i+n)$$

sendo o modulo $a-i$.

Supponhamos agora que queremos dividir A por um numero $B = a+i$, sendo $i > n$.

Fazendo

$$\frac{A}{B-i} = A'$$

virá

$$\frac{A}{B} = A' - i\frac{A'}{B}$$

$$A' = (a+1)(a+2)\ldots(a+n).$$

Fazendo depois successivamente

$$\frac{A'}{B-i+1} = A'', \quad \frac{A''}{B-i+2} = A''', \text{ etc.}$$

. . . .

virá

$$\frac{A'}{B} = A'' - (i-1)\frac{A''}{B}$$

$$A'' = (a+2)(a+3)\ldots(a+n)$$

$$\frac{A''}{B} = A''' - (i-2)\frac{A'''}{B}$$

$$A''' = (a+3)\ldots(a+n)$$

....

....

$$\frac{A^{(n)}}{B} = A^{(n+1)} + (i-n)\frac{A^{(n+1)}}{B}$$

$$A^{(n+1)} = 1.$$

Logo será

$$A \equiv i(i-1)(i-2)\ldots(i-n)$$

sendo o modulo $a+i$, e

$$Q = A' - iA'' + i(i-1)A''' - \ldots \pm i(i-1)\ldots(i-n+1).$$

III

Pelo mesmo meio se podem achar muitos theoremas. Por exemplo:

1.º Fazendo

$$\frac{A}{B+i} = A', \quad \frac{A'}{B+i+k} = A'', \quad \frac{A''}{B+i+k'} = A''', \text{ etc.}$$

obtêm-se a congruencia que contém a precedente como caso particular

$$a(a+k)(a+k')\ldots(a+n) \equiv i(i+k)(i+k')\ldots(i+n)$$

sendo o modulo $a-i$.

2.° Fazendo

$$\frac{A}{B-i}=A', \quad \frac{A'}{B-i+k}=A'', \quad \frac{A''}{B-i+k'}=A''', \text{ etc.}$$

vem a congruencia

$$a(a+k)(a+k')\ldots(a+n)\equiv i(i-k)(i-k')\ldots(i-n)$$

sendo o modulo $a+i$.

3.° Supponhamos que na pag. 106 é

$$B=2a+2p-(2i+1).$$

Fazendo

$$\frac{A}{B+2i+1}=A'$$

vem

$$A'=a(a+1)\ldots(a+\alpha-1)2^{n-1}(a+\alpha+1)\ldots$$
$$(a+p-1)(a+p+1)\ldots(a+n).$$

Do mesmo modo, fazendo

$$\frac{A'}{B+2i+3}=A'', \quad \frac{A''}{B+2i+5}=A''', \ \ldots$$

$$\frac{A^{(p-2)}}{B+2i+2p-3}=A^{(p-1)}, \quad \frac{A^{(p-1)}}{B+2i+2p-1}=A^{(p)}$$

e depois

$$\frac{A^{(p)}}{B-(2i+1)}=A_1, \quad \frac{A_1}{B-(2i+3)}=A_2, \text{ etc.}$$

vem primeiro

$$A\equiv(2i+1)(2i+3)(2i+5)\ldots(2i+2p-1)A^{(p)}$$

e depois a congruencia

$$A \equiv (2i+1)^2 \times (2i+3)^2 \times \ldots \times [2i+2(p-\alpha)-3]^2$$

$$\times [2i+2(p-\alpha)-1] \times [2i+2(p-\alpha)+1]^2 \times \ldots \times (2p-1)^2$$

sendo o modulo $B = 2a + 2p - (2i+1)$.

Podiamos ainda em I considerar o caso de ser o divisor $B = 2a + 2p + 2i + 1$; o caso de o dividendo ser o producto

$$a(a+k)(a+k')\ldots(a+n)$$

e muitos outros casos.

O que se faz sempre é nas fracções

$$\frac{A^{(l)}}{B+l} = A^{(l+1)}$$

dispor convenientemente do l para fazer desapparecer factores do dividendo.

QUESTÕES PROPOSTAS N.os 19 E 20

Seja N um numero inteiro que não contém os factores 2 e 5. Demonstrar o theorema seguinte:

Se os restos de divisão parcial que resultam da transformação das fracções irreductiveis $\frac{M}{N}$ *em fracções decimaes, não formam senão dois grupos* (*), *o producto de dois restos de divisão parcial ou o resto da divisão que se obtem quando este producto é dividido por* N, *estará no mesmo grupo que um dos restos, quando ambos são tomados no mesmo grupo, mas não estará no mesmo grupo que um dos restos, quando elles são tomados cada um em seu grupo.*

Birger Hansted.

Resolver com os recursos da Geometria elementar a questão seguinte:

Sendo dadas tres rectas quaesquer sobre um plano, tirar por um ponto d'este transversaes, de modo que os segmentos de cada uma d'estas, comprehendidos entre este ponto e uma das rectas dadas, sejam iguaes aos seus segmentos comprehendidos entre as outras duas rectas igualmente dadas; discutir os diversos casos que se podem dar e deduzir algumas propriedades notaveis das figuras que nos conduzem á solução pedida.

A. Schiappa Monteiro.

(*) A fracção irreductivel $\frac{M}{N}$ transforma-se em fracção decimal periodica simples com k decimaes em cada periodo. Se fôr $M \leqq N-1$ e $N-1=\alpha k$, os restos das divisões parciaes provenientes d'esta transformação agrupam-se em α grupos, dos quaes cada um contém k, que resultam da transformação da mesma fracção $\frac{M}{N}$ em fracção decimal.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 16

POR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

Sendo dadas n *quantidades positivas* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, *demonstrar que é*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma a_1 a_2}{\frac{n(n-1)}{1.2}}} > \sqrt[3]{\frac{\Sigma a_1 a_2 a_3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}} > \ldots$$

$$> \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Demonstração

Sendo

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n > a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots\ldots \quad (1)$$

teremos tambem

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) > n.a_1 a_2 \ldots a_n \quad (2)$$

ou

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-1} a_1 + \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-1} a_2 + \ldots$$

$$+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-1} a_n > a_1 a_2 \ldots a_n + a_1 a_2 \ldots a_n + \ldots$$

$$+ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Se no segundo membro d'esta desegualdade (3) supprimirmos respectivamente os factores $a_1, a_2, \ldots, a_n$, em cada um dos seus n productos, e supprimirmos junctamente no primeiro membro os factores eguaes áquelles, acharemos n desegualdades, que representam o numero de modos porque podemos supprimir os factores considerados, e que sommadas membro a membro, se reduzem á desegualdade seguinte:

$$n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-1} > a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots$$

$$+ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ou

$$n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-1} > \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

na qual o segundo membro conterá os n productos distinctos ou combinações que se podem formar com as letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomadas $(n-1)$ a $(n-1)$.

Da desegualdade (4) tira-se

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} (a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

$$> a_1 a_3 \ldots a_n + a_2 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \quad (6)$$

ou

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} a_1 + \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} a_2 + \ldots$$

$$\ldots > a_1 a_3 \ldots a_n + a_2 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \quad (7).$$

Se agora no segundo membro, em cada um dos seus n productos distinctos formados dos factores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomados $(n-1)$ a $(n-1)$, supprimirmos respectivamente estes factores, supprimindo ao mesmo tempo no primeiro membro os factores eguaes áquelles, acharemos as $(n-1)$ desegualdades seguintes:

$$\left.\begin{array}{l}
n\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} > a_3a_4\ldots a_n+\ldots+a_1a_2\ldots a_{n-3}a_{n-2} \\
n\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} > a_2a_4\ldots a_n+\ldots+a_1a_3\ldots a_{n-2}a_{n-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n\left(\dfrac{a_1+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} > a_2a_3\ldots a_{n-1}+\ldots+a_1a_2\ldots a_{n-3}a_n
\end{array}\right\} \quad (8)$$

que correspondem ao numero de modos de supprimir os factores considerados.

Junctando, pois, estas desegualdades membro a membro, vem

$$n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} > a_1\,a_2\ldots a_{n-2}$$
$$+\,a_1\,a_3\ldots a_{n-1}+\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Vê-se, portanto, que no segundo membro devemos ter productos ou combinações das n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomadas $(n-2)$ a $(n-2)$; mas sendo o numero de termos obtidos egual a $n(n-1)$, segue-se que estes productos serão eguaes dois a dois, pelo que teremos

$$n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} > 2.\Sigma\, a_1\,a_2\ldots a_{n-2} \quad (10)$$

ou

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-2} > \Sigma\, a_1\,a_2\ldots a_{n-2} \quad (11).$$

Da desegualdade (10) deduz-se a seguinte:

$$(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$
$$>2.\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ou

$$(n-1)\left[\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3}a_1+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3}a_2+\ldots\right]$$
$$>2\,\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

em cujos n productos de cada um dos $(n-1)$ grupos do segundo membro, formados dos factores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomados $(n-2)$ a $(n-2)$, supprimiremos respectivamente estes factores, bem como os factores eguaes a estes nos n productos de cada um dos $(n-1)$ grupos do primeiro membro, e teremos as $(n-2)$ desegualdades

$$\left.\begin{array}{l}
n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3} > a_2 a_3 \ldots a_{n-2} \\
\qquad + a_1 a_3 \ldots a_{n-2} + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-3} \\
n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3} > a_2 a_4 \ldots a_{n-1} \\
\qquad + a_1 a_4 \ldots a_{n-1} + \ldots + a_2 a_3 \ldots a_{n-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3} > a_3 a_4 \ldots a_{n-1} \\
\qquad + a_1 a_5 \ldots a_n + \ldots + a_2 a_4 \ldots a_{n-1}
\end{array}\right\} \quad (14)$$

que sommadas membro a membro dão a desegualdade

$$n(n-1)(n-2)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3}$$
$$> a_2 a_3 \ldots a_{n-2} + a_1 a_3 \ldots a_{n-2} + \ldots \ldots\ldots \quad (15)$$

cujo segundo membro se comporá de productos ou combinações das n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomadas $(n-3)$ a $(n-3)$; e como o numero de termos obtidos é egual a $n(n-1)(n-2)$, estes productos serão eguaes seis a seis, e logo

$$n(n-1)(n-2)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3} > 2.3\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-3} \quad (16)$$

ou

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-3} > \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-3} \quad (17).$$

Procedendo de modo analogo sobre esta desegualdade, e assim successivamente, chegaremos á expressão geral

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots p}.\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-p}$$

$$> \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-p} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

onde o segundo membro é composto da somma dos productos distinctos das n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomadas $(n-p)$ a $(n-p)$.

Do mesmo modo teremos a expressão geral

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-p)+1)}{1.2.3.4\ldots(n-p)}.\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-(n-p)}$$

$$> \Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-(n-p)}$$

ou

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(p+1)}{1.2.3.4\ldots(n-p)}.\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{p}$$

$$> \Sigma a_1 a_2 \ldots a_p \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

onde o segundo membro é a somma das combinações d'estas mesmas letras tomadas p a p.

Fazendo $p=n-2$ na fórmula (18) ou $p=2$ na fórmula (19), teremos emfim

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2>\Sigma a_1 a_2 \ldots\ldots (20)$$

e com effeito, sendo

$$\left.\begin{array}{r} a_1>a_2;\ a_1>a_3;\ a_1>a_4;\ \ldots;\ a_1>a_n \\ a_2>a_3;\ a_2>a_4;\ \ldots;\ a_2>a_n \\ a_3>a_4;\ \ldots;\ a_3>a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}>a_n \end{array}\right\} \ldots (21)$$

será tambem

$$\left.\begin{array}{r} a_1^2+a_2^2>2.a_1a_2;\ a_1^2+a_3^2>2.a_1a_3;\ a_1^2+a_4^2>2.a_1a_4;\ldots; \\ a_1^2+a_n^2>2.a_1a_n \\ a_2^2+a_3^2>2.a_2a_3;\ a_2^2+a_4^2>2.a_2a_4;\ldots; \\ a_2^2+a_n^2>2.a_2a_n \\ a_3^2+a_4^2>2.a_3a_4;\ldots; \\ a_3^2+a_n^2>2.a_3a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}^2+a_n^2>2.a_{n-1}a_n \end{array}\right\} (22)$$

ora n'estas desegualdades (22) entram evidentemente $(n-1)$ vezes os quadrados $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$, e portanto, sommando-as membro a membro, teremos a desegualdade

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)>2.\Sigma a_1 a_2 \ldots\ldots (23)$$

d'onde

$$(n-1)\,[a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2.\Sigma a_1 a_2] > 2.n.\Sigma a_1 a_2 \quad (24)$$

e logo

$$\frac{n\,(n-1)}{1.2}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2 > \Sigma\, a_1 a_2 \ldots\ldots \quad (20).$$

Ainda podemos chegar ao mesmo resultado do modo seguinte. Sendo

$$a_1^2+a_2^2 > 2.a_1 a_2$$

ou

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 > a_1 a_2\,;\ \left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2 > a_1 a_3\,;\ldots\ldots \quad (22)$$

teremos

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right)^2$$

$$> a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots a_{n-1} a_n \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

ou

$$\frac{a_1^2+a_2^2+2.a_1 a_2}{4}+\frac{a_1^2+a_3^2+2.a_1 a_2}{4}+\ldots$$

$$+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2+2.a_{n-1} a_n}{4} > \Sigma\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

d'onde

$$(n-1)\,(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) > 2\,\Sigma\, a_1 a_2 \ldots\ldots \quad (23)$$

logo, etc.

Da desegualdade (20) deduziremos ainda

$$(n-1)\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n) > 2\,\Sigma\, a_1 a_2 \quad (27)$$

ou

$$(n-1)\left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.a_1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.a_2+\ldots\right]$$

$$> 2\,\Sigma\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

e supprimindo no segundo membro respectivamente os factores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nos productos distinctos de cada um dos seus $(n-1)$ grupos, e supprimindo junctamente os factores eguaes a estes no primeiro membro, ficaremos reduzidos á identidade

$$n(n-1)\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=(n-1)\Sigma a_1 \ldots\ldots \quad (29)$$

ou

$$n.\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\Sigma a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

á qual chegamos tambem, fazendo $p=n-1$ em (18) ou $p=1$ em (19); e teremos assim provado elementarmente que *quando a somma de* n *quantidades* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é constante, a somma dos seus productos distinctos ou combinações, tomando-as duas a duas, tres a tres e em geral* p *a* p, *será um* maximum, *logo que estas quantidades sejam eguaes entre si* (*).

Por um processo inverso chegamos á desegualdade (19) e portanto á desegualdade (1), partindo da identidade (30) ou da desegualdade (20).

Com effeito, formando n'esta identidade os productos das n quantidades ou elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomados dois a dois, vem a desegualdade (20); e se os n productos de cada um dos seus $(n-1)$ grupos do segundo membro d'esta desegualdade forem multiplicados por cada um dos $(n-2)$ factores ou elementos restantes, de modo que estes se achem dispostos na ordem natural, e egualmente multiplicarmos os n productos de cada um dos seus $(n-1)$ grupos do primeiro membro pelos n factores $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

(*) A demonstração directa d'este theorema dada pelo emprego da theoria dos *maximos* e *minimos* (recorrendo ao calculo infinitesimal) permittir-nos-ia passar immediatamente d'esta identidade para as expressões geraes (18) e (19).

teremos as $(n-2)$ desegualdades seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
&n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2 \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \\
&\qquad > a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_4 + \ldots \\
&n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2 \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \\
&\qquad > a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_5 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&n(n-1)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2 \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \\
&\qquad > a_1 a_2 a_n + a_1 a_3 a_n + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

que sommadas membro a membro dão a desegualdade

$$n(n-1)(n-2)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^3 > a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_4 + \ldots \quad (32)$$

sendo o segundo membro composto de productos ou combinações das n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomadas tres a tres; e como o numero de termos obtidos é egual a $n(n-1)(n-2)$, estes productos serão eguaes seis a seis, e portanto será

$$n(n-1)(n-2)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^3 > 2.3\,\Sigma\, a_1 a_2 a_3 \quad (33)$$

ou

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^3 > \Sigma\, a_1 a_2 a_3 \ldots. \quad (34).$$

Procedendo por modo similhante sobre esta desegualdade, e assim por diante, chegaremos á desegualdade geral

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.3.3\ldots p}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^p$$
$$>\Sigma a_1 a_2 \ldots a_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

tendo para segundo membro a somma dos productos distinctos ou combinações das n letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomadas p a p.

Teremos, portanto, tambem a expressão geral (fazendo $p=n-p$)

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots(n-p)}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n-p}$$
$$>\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

cujo segundo membro é composto da somma das combinações d'estas mesmas letras tomadas $(n-p)$ a $(n-p)$.

Estas duas ultimas desegualdades serão pois respectivamente identicas ás desegualdades (19) e (18), ou teremos como se sabe

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots(n-p)} \quad (37).$$

Fazendo $p=n$ em (35) ou $p=0$ em (36), teremos a expressão (1).

Assim teremos a seguinte serie de expressões:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.n=\Sigma a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\sqrt{\frac{n(n-1)}{1.2}}>\sqrt{\Sigma a_1 a_2}\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\sqrt[3]{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}>\sqrt[3]{\Sigma a_1 a_2 a_3} \quad (c)$$

....

....

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}}>\sqrt[p]{\Sigma a_1 a_2\ldots a_p}\quad (p)$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}>\sqrt[p+1]{a_1 a_2\ldots a_{p+1}}\quad (q)$$

....

....

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\sqrt[n-1]{n}>\sqrt[n-1]{\Sigma a_1 a_2\ldots a_{n-1}}\ldots\ldots (y)$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1 a_2\ldots a_n}\ldots\ldots (z)\ (*).$$

D'estas expressões consideremos duas quaesquer (p) e (q), e façamos

$$\frac{\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}\right]^{\frac{1}{p+1}}}=\mathrm{K}\ldots\ldots\ldots (37)$$

d'onde

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{(n-p)^p}\cdot\frac{(p+1)^p}{1.2\ldots p}=\mathrm{K}^{p(p+1)}\ldots (38)$$

e portanto será

$$\mathrm{K}>1$$

ou

$$\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}}>\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}\quad (39).$$

(*) Como veremos n'outra occasião, a applicação exclusiva das desegualdades (21) que nos conduziu ás desegualdades (22) e (25), e portanto á desegualdade pedida (20), póde tambem dar-nos directamente todas estas expressões.

Assim teremos a desegualdade

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\left[\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}}-\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}\right]$$

$$>\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}}-\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}\quad(40)$$

da qual evidentemente o primeiro e segundo membros representam respectivamente os *limites superior* e *inferior* ou *os valores maximo* e *minimo* da differença entre os segundos membros das desegualdades (p) e (q), em vista do que teremos forçosamente

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$>\frac{\sqrt[p]{\Sigma a_1 a_2\ldots a_p}-\sqrt[p+1]{\Sigma a_1 a_2\ldots a_{p+1}}}{\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}}-\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}}>1\quad(41)$$

d'onde

$$\frac{\sqrt[p]{\Sigma a_1 a_2\ldots a_p}}{\sqrt[p+1]{\Sigma a_1 a_2\ldots a_{p+1}}}>\frac{\sqrt[p]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}}}{\sqrt[p+1]{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}}\quad(42)$$

e por conseguinte

$$\sqrt[p]{\frac{\Sigma a_1 a_2\ldots a_p}{\frac{n(n-3)\ldots(n-p-1)}{1.2\ldots p}}}>\sqrt[p+1]{\frac{\Sigma a_1 a_2\ldots a_{p+1}}{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2\ldots(p+1)}}}\quad(43).$$

Logo

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma a_1 a_2}{\frac{n(n-1)}{1.2}}} \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma a_1 a_2}{\frac{n(n-1)}{1.2}}} > \sqrt[3]{\frac{\Sigma a_1 a_2 a_3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}} \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

....

....

$$\sqrt[p]{\frac{\Sigma a_1 a_2 \ldots a_p}{\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.\ldots p}}} > \sqrt[p+1]{\frac{\Sigma a_1 a_1 \ldots a_{p+1}}{\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1.2.\ldots(p+1)}}} \quad (\varpi)$$

....

....

$$\sqrt[n-1]{\frac{\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{n}} > \sqrt[n]{\Sigma a_1 a_2 \ldots a_n} \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

q. e. d.

Observação

Em vista do que acabamos de expôr, vê-se que *a differença entre os termos da serie composta dos primeiros membros (successivamente decrescentes) das expressões* (*a*), (*b*), (*c*), . . ., (*p*), (*q*), . . ., (*y*) e (*z*), *e os termos correspondentes da serie formada dos segundos membros (egualmente decrescentes) d'estas mesmas expressões irá crescendo successivamente a partir de zero.*

Esta propriedade, que se póde reconhecer *a priori*, podia servir-nos de base para chegarmos tambem á expressão geral (43).

Não entramos no estudo das interessantes propriedades das expressões consideradas, sobretudo com relação á theoria geral das equações algebricas, para não sahirmos do campo restricto da questão proposta.

NOTE SUR LA LIGNE DE STRICTION DE L'HYPERBOLOÏDE

PAR

A. Schiappa Monteiro

1. Mr. Chasles, pour déterminer la ligne de striction de l'hyperboloïde, ou la ligne des points centraux des génératrices des deux systèmes, considère cette ligne comme l'intersection de cette surface avec le cône (C_0) représenté par l'équation

$$b^4(a^2+c^2)^2\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}+a^4(b^2+c^2)\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{b^2}-c^4(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=0 \quad (1),$$

laquelle il a obtenue (*Correspondance mathématique et physique*, tome XI, page 67), à l'aide du calcul différentiel, et en regardant le point central comme le point de la commune perpendiculaire à la génératrice considérée et à la génératrice voisine.

L'étude analytique de cette ligne de striction est faite par Mr. Jules de la Gournerie, dans la note du nº 720 de son *Traité de Géométrie descriptive*, publié en 1862, en partant de l'équation (1), sans la déduire, en faisant remarquer seulement qu'on y arrive à peu près aussi facilement en cherchant le point de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini, et qu'alors l'algèbre ordinaire suffit pour les calculs, qui ne sont que la traduction analytique de la figure respective.

2. D'après cela nous avons crû devoir présenter nos humbles recherches sur ce point très-intéressant, que nous avons aussi étudié seulement à l'aide de l'algèbre ordinaire.

Considérons le plan tangent (P) en un point quelconque I de l'hyperboloïde (H), et les deux génératrices IA et IB, qui passent par ce point. . . . . . .

Comme nous savons, les plans asymptotes (s) et (s') menés par ces génératrices toucheront le cône asymptote (S) suivant deux génératrices Va et Vb parallèles à celles-là; et le plan (p) déterminé par ces génératrices du cône sera le plan polaire du point I, ou le plan diamétral conjugué au demi-diamètre VI.

Alors les angles τ et τ' du plan polaire (p) avec les plans asymptotes (s) et (s') seront complémentaires des obliquités θ et θ' du plan tangent (P) par rapport aux génératrices IA et IB; et par conséquent *les lieux géométriques des points des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde où l'obliquité du plan tangent est donnée seront les intersections de cette surface avec les surfaces coniques engendrées par les diamètres conjugués aux plans, qui coupent continuellement le cône asymptote sous un angle constant, complémentaire de l'obliquité considérée.*

On voit aussi que les obliquités θ et θ' sont liées de manière que, l'une étant donnée, on trouve immédiatement l'autre.

3. En désignant par x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées des points a et b des génératrices Va et Vb du cône (S), dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

les équations de ces génératrices seront

$$x=\frac{x'}{z'}.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$y=\frac{y'}{z'}.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

et

$$x=\frac{x''}{z''}.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

$$y=\frac{y''}{z''}.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

ou, en faisant

$$\frac{x'}{z'}=p', \quad \frac{y'}{z'}=q', \quad \frac{x''}{z''}=p'' \quad \text{et} \quad \frac{y''}{z''}=q'',$$

$$x=p'.z \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7),$$

$$y=q'.z \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8),$$

et

$$x=p''.z \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9),$$

$$y=q''.z \dots\dots\dots\dots\dots\dots (10).$$

Soient maintenant

$$A.x+B\;y+C.z=0 \dots\dots\dots\dots (11)$$

et

$$A'.x+B'.y+C'.z=0 \dots\dots\dots\dots (12)$$

les équations de deux plans qui passent par la génératrice Va.

L'angle t de ces deux plans sera déterminé par la formule

$$\cos t=\frac{A.A'+B.B'+C.C'}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \dots\dots (13),$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 t=\frac{(A.B'-A'.B)^2+(A.C'-A'.C)^2+(B.C'-B'.C)^2}{(A.A'+B.B'+C.C')^2} \quad (14),$$

et, puisque ces plans passent par la génératrice Va, nous auront

$$A.p'+B.q'+C=0 \dots\dots\dots\dots (15),$$

$$A'.p'+B'.q'+C'=0 \dots\dots\dots\dots (16),$$

donc

$$\operatorname{tg}^2 t=\frac{(A'.B-A.B')^2(1+p'^2+q'^2)}{[A(A'-C'.p')+B(B'-C'.q')]^2} \dots\dots (17).$$

D'ailleurs si nous considérons le cas où le plan (12) est tangent le long de Va, on aura

$$\frac{A'}{C'} = -\frac{c^2}{a^2}.p' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18),$$

et

$$\frac{B'}{C'} = -\frac{c^2}{b^2}.q' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

En effet, si l'équation (12) représente un plan sécant quelconque, passant par V, les génératrices suivant lesquelles il coupe le cône (S) auront pour équations

$$x = -a.\frac{a.A'.C' - b.B'\sqrt{a^2.A'^2 + b^2.B'^2 - c^2.C'^2}}{a^2.A'^2 + b^2.B'^2}.z \quad (20)$$

$$y = -b.\frac{b.B'.C' - a.A'\sqrt{a^2.A'^2 + b^2.B'^2 - c^2.C'^2}}{a^2.A'^2 + b^2.B'^2}.z \quad (21)$$

et

$$x = -a.\frac{a.A'.C' + b.B'\sqrt{a^2.A'^2 + b^2.B'^2 - c^2.C'^2}}{a^2.A'^2 + b^2.B'^2}.z \quad (22)$$

$$y = -b.\frac{b.B'.C' + a.A'\sqrt{a^2.A'^2 + b^2.B'^2 - c^2.C'^2}}{a^2.A'^2 + b^2.B'^2}.z \quad (23)$$

et, quand ce plan deviendra tangent, ces deux génératrices coïncideront, et par conséquent on aura

$$a^2.A'^2 + b^2.B'^2 - c^2.C'^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (24),$$

ou

$$B' = \pm\frac{\sqrt{c^2.C'^2 - a^2.A'^2}}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (25),$$

d'où

$$x = -\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{A'}{C'}\cdot z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26),$$

$$y = -\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{B'}{C'}\cdot z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27),$$

ou

$$y = \mp\frac{b}{c^2}\cdot\frac{\sqrt{c^2.C'^2 - a^2.A'^2}}{C'} \ldots\ldots\ldots \quad (28),$$

qui sont les équations de la génératrice de contact, qui, coïncidant avec Va, donnera

$$p' = -\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{A'}{C'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29),$$

$$q' = -\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{B'}{C'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30),$$

et l'équation du plan tangent respectif (s) sera

$$\frac{p'}{a^2}.x + \frac{q'}{b^2}.y - \frac{1}{c^2}.z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Autrement. — Le plan donné par l'équation (12), passant par la génératrice Va du cône (S), étant sécant, représentons par

$$x = p_1 . z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$y = q_1 . z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

les équations de l'autre génératrice d'intersection Va_1, et nous avons l'équation de condition

$$A'.p_1 + B'.q_1 + C' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34),$$

qui retranchée de l'équation (16) donne

$$\frac{A'}{B'} = -\frac{q'-q_1}{p'-p_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Or, à cause de l'équation (2), nous aurons

$$b^2.p'^2 + a^2.q'^2 = b^2.p^2{}_1 + a^2.q^2{}_1 = \frac{a^2.b^2}{c^2} \ldots\ldots \quad (36),$$

d'où

$$\frac{b^2}{a^2}.\frac{p'+p_1}{q'+q_1} = -\frac{q'-q_1}{p'-p_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37),$$

et par conséquent

$$\frac{A'}{B'} = \frac{b^2}{a^2}.\frac{p'+p_1}{q'+q_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Quand on aura $p'=p_1$ et $q'=q_1$, ou le plan (12) deviendra tangent au cône (S), on trouvera

$$\frac{A'}{B'} = \frac{b^2}{a^2}.\frac{p'}{q'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39),$$

et de la combinaison de cette équation avec l'équation (16) nous déduirons les équations (18) et (19) ou (29) et (30). Donc, etc.

En substituant en (17) les valeurs de A', B' et C', il vient

$$\mathrm{tg}^2 t = \frac{c^4 (a^2.A.q' - b^2.B.p')^2 (1 + p'^2 + q'^2)}{[b^2.(a^2+c^2) A.p' + a^2 (b^2+c^2) B q']^2} \ldots\ldots \quad (40)$$

ou

$$\mathrm{tg}^2 \theta = \frac{[b^2 (a^2+c^2) A.p' + a^2 (b^2+c^2) B.q']^2}{c^4 (a^2.A.q' - b^2.B.p')^2 (1 + p'^2 + q'^2)} \ldots\ldots \quad (41)$$

ou

$$\operatorname{tg}\theta = \pm \frac{b^2(a^2+c^2)\,A.p' + a^2(b^2+c^2)\,B.q'}{c^2(a^2.A.q' - b^2.B.p')\sqrt{1+p'^2+q'^2}} \ldots (42)$$

et de même

$$\operatorname{tg}\theta' = \pm \frac{b^2(a^2+c^2)\,A.p'' + a^2(b^2+c^2)\,B.q''}{c^2(a^2.A.q'' - b^2.B.p'')\sqrt{1+p''^2+q''^2}} \ldots (43)$$

en prenant pour origines des angles les plans normaux (n) et (n'), le long des génératrices Va et Vb de la surface (S).

Le plan (11) passant par les génératrices Va et Vb, on a

$$A.p' + B.q' + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

$$A.p'' + B.q'' + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (44).$$

Si maintenant dans les équations (35) et (38) nous faisons $A' = A$, $B' = B$, $p_1 = p''$ et $q_1 = q'$, il vient

$$\frac{A}{B} = -\frac{q'-q''}{p'-p''} \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

ou

$$A.p' + B.q' = A.p'' + B.q'' = -C \ldots\ldots (46)$$

et

$$\frac{A}{B} = \frac{b^2}{a^2}.\frac{p'+p''}{q'+q''} \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

ou

$$a^2.A.q'' - b^2.B.p'' = -(a^2.A.q' - b^2.B.p') \ldots (48).$$

Donc, l'obliquité θ' sera aussi donnée par la formule

$$\operatorname{tg}\theta' = \mp \frac{b^2.(a^2+c^2)\,A.p'' + a^2(b^2+c^2)\,B.q''}{c^2(a^2.A.q' - b^2.B.p')\sqrt{1+p''^2+q''^2}} \ldots (49).$$

4. Maintenant nous allons voir comment nous obtenons, en fonction de a, b, c, p', q' et θ', les valeurs des coefficients A, B et C de l'équation (11), qui représentera les plans polaires correspondants.

La formule (42) donne

$$\pm c^2(a^2.A.q'-b^2.B.p')\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta$$
$$=b^2(a^2+c^2)A.p'+a^2(b^2+c^2).B.q' \ldots\ldots \quad (50)$$

ou

$$[a^2.c^2.q'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \mp b^2(a^2+c^2)p']A$$
$$=[b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm a^2(b^2+c^2)q']B \ldots \quad (51)$$

et en éliminant B entre cette équation et l'équation (15), on aura

$$A\left[p'+\frac{a^2.c^2.q'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\mp b^2(a^2+c^2)p'}{b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\pm a^2(b^2+c^2)q'}.q'\right]=-C \quad (52)$$

d'où

$$A=-\frac{b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}\operatorname{tg}\theta\pm a^2(b^2+c^2)q'}{[(a^2.q'^2+b^2.p'^2)\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\pm(a^2-b^2)p'.q'}.C \quad (53);$$

mais pour le point a l'équation (2) donne

$$\frac{p'^2}{a^2}+\frac{q'^2}{b^2}=\frac{1}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

ou

$$a^2.q'^2+b^2.p'^2=\frac{a^2.b^2}{c^2} \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

donc

$$A=-\frac{b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\pm a^2(b^2+c^2)q'}{a^2.b^2\ \sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\pm c^2(a^2-b^2)p'.q'}.C \quad (56).$$

En substituant cette valeur de A en (51), on aura

$$B=-\frac{a^2.c^2.q'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\mp b^2(a^2+c^2)p'}{a^2.b^2\ \sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta\pm c^2(a^2-b^2)p'.q'}.C \quad (57).$$

D'après cela l'équation (11) deviendra

$$[b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm a^2(b^2+c^2)q' \quad]x$$

$$+[a^2.c^2.q'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \mp b^2(a^2+c^2)p' \quad]y$$

$$=[a^2.b^2 \quad \sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm c^2(a^2-b^2)p'.q']z \quad (58)$$

qui représentera l'une ou l'autre des deux plans polaires (p), (p'), passant par la génératrice Va, suivant que nous prenons les signes supérieurs ou inférieurs.

Cela posé soient

$$\alpha = m.\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

$$\beta = n.\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

les équations d'une génératrice VI des surfaces coniques demandées; et, puisque les plans tangents le long des génératrices Va et Vb du cône (S), lesquelles déterminent son plan polaire, doivent se couper suivant cette droite, nous aurons

$$\frac{x'}{a^2}.\alpha + \frac{y'}{b^2}.\beta = \frac{z'}{c^2}.\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

et

$$\frac{x''}{a^2}.\alpha + \frac{y''}{b^2}.\beta = \frac{z''}{c^2}.\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62),$$

et en supposant x', y', z' et x'', y'', z'' (en supprimant les lignes), il vient

$$\frac{\alpha}{a^2}.x + \frac{\beta}{b^2}.y = \frac{\gamma}{c^2}.z \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

ou

$$m.\frac{c^2}{a^2}.x + n.\frac{c^2}{b^2}.y = z \ldots\ldots\ldots \quad (64).$$

Or, étant identiques les équations (11) et (64), on aura

$$A = m.\frac{c^2}{a^2}, \quad B = n.\frac{c^2}{b^2}, \quad \text{et} \quad C = -1$$

donc

$$m = \frac{a^2}{c^2}.A \quad \text{et} \quad n = \frac{b^2}{c^2}.B,$$

et en substituant A et B par leurs valeurs (56) et (57), les équations des polaires VI et VI′ des plans (p) et (p), en fonction de α, b, c, p', q' et θ, seront

$$\alpha = \frac{a^2}{c^2}.\frac{b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm a^2(b^2+c^2)q'}{a^2.b^2 \quad \sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm c^2(a^2-b^2)p'.q'}.\gamma \quad (65)$$

$$\beta = \frac{b^2}{c^2}.\frac{a^2.c^2.q'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \mp b^2(a^2+c^2)p'}{a^2.b^2 \quad \sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm c^2(a^2-b^2)p'.q'}.\gamma \quad (66)$$

et par suite

$$\alpha = \frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2.c^2.p'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \pm a^2(b^2+c^2)q'}{a^2.c^2.q'\sqrt{1+p'^2+q'^2}.\operatorname{tg}\theta \mp b^2(a^2+c^2)p'}.\beta \quad (67).$$

L'élimination de p' et q' entre les équations (54), (65) et (66), nous donnairait les relations entres les variables α, β et γ, ou les équations des surfaces coniques demandées.

Nous n'aborderons point ici la déduction de ces équations générales, qui est tout à fait en dehors de notre sujet; en nous réservant pour plus tard faire nos recherches générales sur ce point, ainsi que sur autres surfaces gauches (*); cependant dans

(*) Nous réservons aussi pour plus tard démontrer synthétiquement que *toute surface gauche engendrée par une droite que se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes est du second ordre;* et déduire de même les propriétés plus remarquables de ces surfaces, et des figures respectives. Mr. Jules de la Gournerie s'est aussi occupé en spécial de ces surfaces, dans son *Traité de géométrie descriptive* (1862); mais sans recourir exclusivement à la méthode synthétique.

ce mémoire nous entrerons dans ces recherches générales sur l'hyperboloïde de revolution (n° 7) vu la facilité avec laquelle nous y arrivons.

5. Considérons donc le cas tout particulier où les plans polaires (p) et (p') se confondent avec le plan normal (n) à la surface conique (S).

Dans ce cas étant $\theta = 0$ l'équation (58) deviendra

$$\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2.p'}.x-\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2.q'}.y-z=0\ldots\ldots \quad (68)$$

qui représantera le plan normal (n).

Les équations (65), (66) et (67) de la polaire respective deviendront

$$\alpha=\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^4}{c^4.p'}.\gamma\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

$$\beta=-\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{b^4}{c^4.q'}.\gamma\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

$$\alpha=-\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}\cdot\frac{a^4.q'}{b^4.p'}.\beta\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

et l'élimination de p' et q' entre les équations (54), (69) et (70) donnera

$$\frac{a^6(b^2+c^2)^2}{c^8(a^2-b^2)^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{b^6(a^2+c^2)^2}{c^8(a^2-b^2)^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}-\frac{1}{c^2}=0\ldots\ldots \quad (72)$$

ou

$$b^4(a^2+c^2)^2\frac{\alpha^2}{a^2}\cdot\frac{\gamma^2}{c^2}+a^4(b^2+c^2)^2\frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{\gamma^2}{c^2}-c^4(a^2-b^2)^2\frac{\alpha^2}{a^2}\cdot\frac{\beta^2}{b^2}=0 \quad (73).$$

Telle est donc l'équation du cône (C_0) qui coupe l'hyperboloïde (H) suivant sa ligne de striction.

En remplaçant α, β et γ par x, y et z, on aura l'équation (1) donnée par Mr. Chasles.

Observation.—Nous pouvons aussi déduire directement l'équation de ce cône, comme nous allons voir.

6. Les équations des plans tangents (s) et (s') au cône (S) le long des génératrices Va et Vb étant (n° 3)

$$\frac{x'}{a^2}.x+\frac{y'}{b^2}.y=\frac{z'}{c^2}.z \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

$$\frac{x''}{a^2}.x+\frac{y''}{b^2}.y=\frac{z''}{c^2}.z \ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

et étant (n° 4)

$$\alpha=m.\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

$$\beta=n.\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

les équations de leur intersection VI, on aura

$$\frac{x'.\alpha}{a^2}+\frac{y'.\beta}{b^2}=\frac{z'.\gamma}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

$$\frac{x''.\alpha}{a^2}+\frac{y''.\beta}{b^2}=\frac{z''.\gamma}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Si dans ces équations nous considérons comme variables x', y', z' et x'', y'', z'' (en supprimant les lignes), nous aurons l'équation

$$\frac{\alpha}{a^2}.x+\frac{\beta}{b^2}.y-\frac{\gamma}{c^2}z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

qui sera évidemment celle du plan polaire du point I, ou de la droite VI.

Ce plan étant, par exemple, normal à (S) le long de la génératrice Va, ou perpendiculaire au plan tangent respectif, on doit avoir la relation

$$\frac{\alpha}{a^2}.\frac{x'}{a^2}+\frac{\beta}{b^2}.\frac{y'}{b^2}+\frac{\gamma}{c^2}.\frac{z'}{c^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

ou

$$\frac{\alpha . x'}{a^4}+\frac{\beta . y'}{b^4}+\frac{\gamma . z'}{c^4}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (78),$$

or, l'équation (76) du plan polaire donne

$$\frac{\alpha . x'}{a^2 . b^2}+\frac{\beta . y'}{b^4}-\frac{\gamma . z'}{b^2 . c^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

donc

$$\alpha=\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2} . \frac{a^4}{c^4 . p'} . \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (69),$$

et semblablement

$$\beta=-\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2} . \frac{b^4}{c^4 . q'} . \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (70).$$

L'élimination de p' et q' entre les équations (54), (69) et (70) donnera de même l'équation (73).

Autrement. — Pour que les plans tangents (s) et (s') ayent pour intersection la droite VI, on aura les relations

$$\frac{c^2 . m}{a^2} . p'+\frac{c^2 . n}{b^2} . q'-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

$$\frac{c^2 . m}{a^2} . p''+\frac{c^2 . n}{b^2} . q''-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (81).$$

Maintenant faisons passer par la génératrice Va un plan normal à (S)

$$A . x+B . y+C . z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

lequel doit satisfaire à la condition

$$A . p'+B . q'+C=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

pour contenir cette génératrice, et à la condition

$$A.\frac{c^2}{a^2}.p'+B.\frac{c^2}{b^2}.q'-C=0 \ldots\ldots\ (82)\ (*)$$

pour être normal à (S) le long de cette même génératrice.

Alors les équations (15) et (82) donnent

$$A=-\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}.\frac{a^2}{c^2.p'}.C \ldots\ldots\ldots\ldots\ (83)$$

$$B=\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}.\frac{b^2}{c^2.q'}.C \ldots\ldots\ldots\ldots\ (84)$$

donc l'équation (11) du plan normal (n) deviendra

$$\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}.\frac{a^2}{c^2.p'}.x-\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}.\frac{b^2}{c^2.q'}.y-z=0 \ldots\ (68).$$

En considérant comme variables x', y' et z', l'équation (80) deviendra

$$\frac{c^2.m}{a^2}.x+\frac{c^2.n}{b^2}.y-z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (85)$$

qui sera l'équation du plan polaire (p) ou (p') qui se confonde maintenant avec le plan normal (n).

Ainsi les équations (68) et (85) étant identiques, il vient, par la comparaison des coefficients

$$m=\frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}.\frac{a^4}{c^4.p'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (86)$$

et

$$n=-\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}.\frac{b^4}{c^4.q'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (87)$$

(*) C'est le numérateur de la formule (42), qui donne la valeur de tg θ.

donc

$$\alpha = \frac{b^2+c^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^4}{c^4 . p'} . \gamma \dots\dots\dots\dots \quad (69)$$

et

$$\beta = -\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{b^4}{c^4 . q'} . \gamma \dots\dots\dots\dots \quad (70)$$

d'où nous déduirons, comme précédemment, l'équation (73).

Recherches sur l'hyperboloïde de révolution

7. Comme on sait, étant $a=b$, on aura l'hyperboloïde de révolution $(H)_r$; et en représentant par r le rayon du cercle de gorge, et par s le rapport $\frac{r}{c}$, l'équation de cette surface et celle de son cône asymptote $(S)_r$ seront

$$\alpha^2+\beta^2 = r^2+s^2 . \gamma^2 \dots\dots\dots\dots \quad (88)$$

et

$$x^2+y^2 = s^2 . z^2 \dots\dots\dots\dots \quad (2)_r.$$

En portant ces valeurs dans les équations (58), (65) et (66), on aura l'équation

$$(p' . \operatorname{tg}\theta \pm q'\sqrt{1+s^2})x + (q' . \operatorname{tg}\theta \mp p'\sqrt{1+s^2})y = s^2 . \operatorname{tg}\theta \times z \quad (58)_r$$

qui sera celle des plans diamètraux parallèles aux plans tangents dont l'obliquité est θ ; et les équations

$$\alpha = \left(p' \pm q' . \frac{\sqrt{1+s^2}}{\operatorname{tg}\theta}\right)\gamma \dots\dots\dots\dots \quad (65)_r$$

$$\beta = \left(q' \mp p' . \frac{\sqrt{1+s^2}}{\operatorname{tg}\theta}\right)\gamma \dots\dots\dots\dots \quad (66)_r$$

qui seront les équations des respectifs diamètres conjugués à ces plans diamètraux, ou de leurs polaires. L'équation (67) deviendra aussi

$$\alpha = \frac{p' . \operatorname{tg} \theta \pm q' \sqrt{1+s^2}}{q' . \operatorname{tg} \theta \mp p' \sqrt{1+s^2}} . \beta \dots\dots\dots\dots (67)_r.$$

L'élimination de p' et q' entre les deux équations $(65)_r$, $(66)_r$ et l'équation

$$p'^2 + q'^2 = s^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (54)_r$$

qui résulte de l'équation (54), donne l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{s^2 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1 + s^2)}{\operatorname{tg}^2 \theta} . \gamma^2 \dots\dots\dots (89)$$

laquelle représente une surface conique de révolution $(C_0)_r$, concentrique à la surface conique asymptote $(S)_r$, coupant les génératrices rectilignes des deux systèmes de l'hyperboloïde aux points où l'obliquité θ des plans tangents respectifs est donnée.

Ainsi en combinant les équations (88) et (89), nous aurons les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 . \frac{\operatorname{tg}^2 \theta + 1 + s^2}{1 + s^2} \dots\dots\dots\dots (90)$$

et

$$\gamma = \pm \frac{r . \operatorname{tg} \theta}{s \sqrt{1+s^2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (91)$$

lesquelles représentent *le lieu géométrique des points des génératrices des deux systèmes où l'obliquité θ des plans tangents est donnée.*

Ce lieu géomètrique sera donc composé de deux parallèles (π) et (π') équidistants du cercle de gorge (g), ainsi qu'il était facile de le prévoir.

8. Dans le point de rencontre I_r de deux génératrices de systèmes différents le plan tangent aura par rapport à chaque génératrice des obliquités égales et de sens opposé.

En effet, les formules (42) et (49) pour $a=b=r$ deviennent

$$\operatorname{tg}\theta = \mp \frac{\sqrt{1+s^2}}{A.q'-B.p'}.C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)_r$$

$$\operatorname{tg}\theta' = \pm \frac{\sqrt{1+s^2}}{A.q'-B.p'}.C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)_r$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\theta'.$$

9. Pour $\theta=0$ les équations (90) et (91) deviendront

$$\alpha^2+\beta^2=r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

$$\gamma=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

d'où il résulte que *le cercle de gorge de l'hyperboloïde de révolution sera la ligne de striction dans les deux systèmes de génératrices.*

Dans ce cas l'équation $(58)_r$ deviendra

$$q'.x-p'.y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

qui représentera le plan normal au cône $(S)_r$ le long de la génératrice Va_r, ayant pour équations

$$x=p'.z$$

$$y=q'.z$$

et alors dans les équations (65) et (66) étant évidemment $\gamma=0$, l'équation (67) donne

$$\beta=-\frac{p'}{q'}.\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)_r$$

ce qui montre, comme on sait, que le plan normal et sa polaire se coupent orthogonalement, cette droite décrivant le plan xy ou le plan du cercle de gorge.

*

10. L'intersection des plans des parallèles (π) et (π') de l'hyperboloïde $(\mathrm{H})_r$ avec le cône asymptote $(\mathrm{S})_r$, étant les parallèles (ϖ) et (ϖ') de celui-ci données par les équations

$$x^2+y^2=\frac{r^2.\operatorname{tg}^2\theta}{1+s^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (95)$$

$$z=\pm c^2.\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+s^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

et la distance δ du point central d'une génératrice de $(\mathrm{H})_r$ aux points de cette droite où les plans tangents ont une obliquité donnée θ étant égale à la longueur de la génératrice parallèle de $(\mathrm{S})_r$ depuis le sommet jusqu'aux parallèles (ϖ) et (ϖ'), nous aurons

$$\delta=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\pm c.\operatorname{tg}\theta \ldots\ldots\ldots (97).$$

On voit, donc, que *la distance du point central d'une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde de révolution, aux points de cette droite où les plans tangents ont une obliquité donnée, est proportionnelle à la tangente de cette obliquité.*

Étant $\theta=45°$ la distance δ deviendra le paramètre k des génératrices, et nous aurons

$$k=\pm c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

et par conséquent *le paramètre* k *des génératrices dans l'hyperboloïde de révolution est égal au demi-axe non transverse de cette surface.*

11. Si dans une surface gauche nous considérons une génératrice rectiligne quelconque G, ainsi que la génératrice qui lui est infiniment voisine, nous pouvons évidemment prendre une droite telle que les hyperboloïdes de raccordement le long de G, déterminés par ces droites, soient de révolution.

Les centres de ces hyperboloïdes seront donc sur la normale au point central de la génératrice G, ou sur le plan tangent à l'infini, et tous les demi-axes non transverses seront égaux au paramètre K de cette génératrice, considérée sur la surface gauche.

D'après cela l'équation (97) montre immédiatement que *la tangente de l'obliquité du plan tangent en un point d'une génératrice rectiligne d'une surface gauche est proportionnelle à la distance de ce point au point central de cette génératrice* (*).

De même nous pouvons aussi énoncer d'autres théorèmes relatifs aux surfaces gauches recourant aux hyperboloïdes de révolution avec lesquels se raccordent tout le long d'une génératrice rectiligne quelconque.

Observation. — Il est clair que nous pouvons aussi arriver directement à cette étude de l'hyperboloïde de révolution d'une manière très-facile.

12. Passons maintenant à déterminer la surface conique enveloppe des plans diamètraux parallèles aux plans tangents d'obliquité donnée θ, ou la surface conique polaire $(C_p)_r$ du cône $(C_0)_r$ par rapport au cône $(S)_r$.

En ordennant l'équation $(58)_r$ par rapport à p' et q', on a

$$(x.\operatorname{tg}\theta \mp y\sqrt{1+s^2})\,p' + (y.\operatorname{tg}\theta \pm x\sqrt{1+s^2})\,q' = s^2.\operatorname{tg}\theta \times z \quad (99).$$

En représentant par

$$x = p_1.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)_r$$

$$y = q_1.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)_r$$

les équations d'une autre génératrice du cône $(S)_r$, l'équation des plans diamètraux passant par cette droite étant ordonnée par rapport à p_1 et q_1, sera

$$(x.\operatorname{tg}\theta \mp y\sqrt{1+s^2})\,p_1 + (y.\operatorname{tg}\theta \pm x\sqrt{1+s^2})\,q_1 = s^2.\operatorname{tg}\theta \times z \quad (100).$$

Maintenant on peut substituer à l'une des équations (99) et (100), à la seconde par exemple, l'équation

$$(p'-p_1)(x.\operatorname{tg}\theta \mp y\sqrt{1+s^2}) + (q'-q_1)(y.\operatorname{tg}\theta \pm x\sqrt{1+s^2} = 0) \quad (101)$$

(*) Mr. Jules de la Gournerie — *Traité de géométrie descriptive*, n.º 622 (1862).

obtenue en retranchant ces équations membre à membre; mais étant

$$p'^2+q'^2=p_1^2+q_1^2=s^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (36)_r$$

on a

$$\frac{p'+p_1}{q'+q_1}=-\frac{q'-q_1}{p'-p_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)_r$$

et par suite

$$(p'+p_1)(y.\text{tg}\,\theta\pm x\sqrt{1+s^2})-(q'+q_1)(x.\text{tg}\,\theta\mp y\sqrt{1+s^2})=0\,(102).$$

Si l'on fait diminuer $(p'-p_1)$ et $(q'-q_1)$ les deux couples de plans diamètraux se raprocheront indéfiniment, et leurs intersections s'aprocheront d'une limite, qui est la génératrice de la surface conique enveloppe demandée, ou la caractèristique de cette enveloppe; et pour cette limite l'équation (102) deviendra

$$(y.\text{tg}\,\theta\pm x\sqrt{1+s^2})\,p'-(x.\text{tg}\,\theta\mp y\sqrt{1+s^2})\,q'=0 \quad (103).$$

En éliminant les paramètres p' et q', entre les équations (99), $(36)_r$ et (103), on aura pour équation de l'enveloppe demandée l'équation

$$x^2+y^2=\frac{s^2}{\text{tg}^2\theta+1+s^2}.z^2 \ldots\ldots\ldots (104)$$

qui représente un cône de révolution $(C_p)_r$, qui sera le cône polaire demandé.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 15

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Dada uma figura plana composta de um hexagono regular sobre os lados do qual estão seis outros hexagonos regulares congruentes ao primeiro, quer-se saber como se póde cortar esta figura por tres linhas rectas que a dividam em partes congruentes ou incongruentes, de modo que com estas partes se possa formar um hexagono regular.

Seja $abcdef$ o primeiro hexagono regular, cujo centro representamos por o_1; e $abmlkj$, $bcqpn$, $cdtsrq$, $dexvut$, $efgzyx$, $fajihg$ os outros seis hexagonos regulares, tendo cada um d'elles um lado commum com o primeiro, e cujos centros representaremos respectivamente por o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7.

Se R e r designarem respectivamente os raios ou lados do hexagono pedido (H) e dos sete hexagonos que compõem a figura dada (F); e por A e a representarmos as suas áreas, teremos evidentemente

$$\frac{A}{a}=\frac{7}{1}=\frac{R^2}{r^2},$$

d'onde

$$R=r\sqrt{7}.$$

Sendo P e Q os pontos de intersecção da recta $o_1 o_2$ com os lados ab e kl dos hexagonos componentes $abcdef$ e $abmlkj$, teremos que o_1Q será egual á somma dos apothemas o_1P, Po_2, o_2Q; mas é

$$o_1P=Po_2=o_2Q=\frac{r}{2}\sqrt{3}$$

ou

$$o_1 Q = \frac{r}{2} 3\sqrt{3}$$

logo

$$o_1 l = \sqrt{\overline{o_1 Q}^2 + \overline{Ql}^2} = r \cdot \sqrt{7} = \mathrm{R}.$$

Assim os vertices $l, n, p, r, s, u, v, y, z, h, i, k$ do polygono dado $ghijklmnpqrstuvxyz$ ou (F) estão sobre uma circumferencia de raio $\mathrm{R} = r\sqrt{7}$, e por conseguinte os seis vertices l, p, s, v, z, i, e os seis vertices k, q, r, u, y, h, determinam dois hexagonos regulares $(\mathrm{H})'$ e $(\mathrm{H})''$ inscriptos n'esta circumferancia, e portanto eguaes ao hexagono pedido (H).

Se considerarmos, por exemplo, o hexagono $(\mathrm{H})'$, as suas diagonaes $l\alpha o_1 \delta v$, $p\beta o_1 \varepsilon z$ e $s\gamma o_1 \varphi i$ representarão um systema de tres rectas que dividem o polygono dado (F) em partes congruentes, e que reunidas convenientemente formam o hexagono (H).

Com effeito, se fizermos girar em torno de i a parte $i\varphi o_1 \delta vxyzgh$, formada da reunião das duas partes congruentes $i\varphi o_1 \varepsilon zgh$ e $z\varepsilon o_1 \delta vxy$, até que os vertices h, g, z, venham coincidir com os vertices j, k, l, os pontos o_1 e v virão determinar dois vertices o'_1 e v' de (H); e fazendo depois girar a parte $p\beta o_1 \delta vutsrq$, composta da reunião das duas partes congruentes $p\beta o_1 \gamma srq$ e $s\gamma o_1 \delta vut$, de modo que os vertices q, r, s venham coincidir com os vertices n, m, l, o ponto o_1 determinará outro vertice o''_1 de (H), e os vertices y, x, v da primeira parte $i\varphi o_1 vxyzgh$ coincidirão com os vertices t, u, v d'esta segunda parte. Tal é, pois, um dos modos de formar o hexagono pedido, no caso de serem congruentes as partes em que se divide a figura ou polygono dado (F).

Consideremos agora a divisão d'este polygono em partes incongruentes.

Tiremos a recta $p\pi o_2 \tau$ que córta bm e jk em π e τ; a recta $\omega o_2 \rho g$ que córta lm e aj em ω e ; e finalmente a recta $\lambda g\sigma$, que fórma com $\omega o_2 \varphi g$ um angulo de 120° e córta hi e xy em λ e σ: d'onde resulta que os pontos p, o_1, g serão evidentemente tres vertices do hexagono pedido.

Em virtude do traçado d'estas tres rectas, teremos um dos modos de dividir o polygono em partes incongrutes $go_2pqrstuvx\sigma$, $tkluo_2$, σyzg, $gh\lambda$, $g\lambda ij\tau o_2$ e $o_2\omega mnp$.

Se agora destacarmos a segunda parte $tkluo_2$, e fizermos coincidir os seus pontos τ, k, l com os pontos σ, x, v da primeira parte $go_2pqrstuvx\sigma$, o ponto o_2 determinará o quarto vertice o'_2 de (H). Collocando a terceira parte σyzg, de modo que os seus pontos y e z coincidam com os pontos v e u da primeira parte, e o ponto σ coincida com o ponto ω da segunda parte, na sua nova posição, o ponto g determinará o quinto vertice g' de (H).

Tomando a quarta e quinta parte reunidas, isto é, a parte $ghij\tau o_2$, façamos coincidir os pontos g, h, i, j com os pontos g', u, t, s, e a posição do ponto o_2 determinará o sexto vertice o''_2 de (H).

Finalmente transportando a sexta parte o_2umnp, de modo que se confundam os pontos o_2, u, m, n, p com os pontos o''_2, τ, r, q, p, acabaremos de formar o hexagono pedido.

Como se vê, ha grande numero de modos de fazer a decomposição do polygono dado (F) em partes congruentes e incongruentes, para com ellas se formar o hexagono pedido (H); mas julgamos sufficiente as decomposições que indicámos, que mostram bem a marcha geral que se deve seguir na solução da questão proposta.

BIBLIOGRAPHIA

Notes sur l'équations aux dérivées partielles, par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand.

Estas *Notas* foram publicadas nos *Annaes da Sociedade Scientifica de Bruxellas*, 5e année, 1881.

Na primeira demonstra o illustre mathematico belga, d'uma maneira rigorosa e simples, o processo conhecido para integrar as equações ás derivadas parciaes lineares de primeira ordem, cujas demonstrações anteriores o sr. Gilbert tinha atacado recentemente nos mesmos *Annaes*. Considera uma funcção indeterminada u de x e y. Será, pois, y funcção de x e u, e portanto

$$\frac{dz}{du} = p + q\frac{dy}{dx}.$$

Eliminando p entre esta equação e a proposta, e determinando u de modo que na equação resultante seja nullo o coefficiente de q, obtem as duas equações differenciaes conhecidas, cujos integraes $v = \alpha$, $w = \beta$, sendo α e β funcções arbitrarias de u, dão pela eliminação de u a equação $F(u, w) = 0$, que representa o integral pedido.

Esta demonstração é muito simples, e applicada ás equações de segunda ordem conduz ao methodo de Monge. Basta para isso eliminar na proposta r e t por meio das equações

$$\frac{dp}{dx} = r + s\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx}.$$

O fim da segunda *Nota* do sr. Mansion é dar um methodo para integrar a equação ás derivadas parciaes das superficies regradas mais claro e rigoroso do que o apresentado por Monge para o mesmo fim.

Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du première ordre, par M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain.

Começa o sr. Gilbert por estabelecer uma relação importante a que deve satisfazer a funcção de Poisson, e depois deduz d'ella alguns theoremas fundamentaes na theoria de Jacobi sobre a integração das equações ás derivadas parciaes. Expõe depois algumas difficuldades que se encontram no methodo de Jacobi, e mostra como desapparecem quando se usa dos principios por elle desenvolvidos. Esta *Nota* deve ser lida por todos os que estudam a bella Memoria de Jacobi—*Novus methodus etc.*

Este trabalho foi publicado no mesmo volume dos *Annaes da Sociedade Scientifica de Bruxellas*, em que foi publicado o precedente.

Estudo sobre o deslocamento de um solido invariavel no espaço, por Luiz Porfirio da Motta Pegado. Lisboa, 1881.

N'esta Memoria, publicada nas *Memorias da Academia das Sciencias de Lisboa*, tracta o illustre professor do movimento mais geral, pelo qual um solido póde passar d'uma posição do espaço para outra, seguindo um methodo geometrico differente d'aquelle que seguiu para o mesmo fim o sabio geometra francez, o sr. Chasles, na sua Memoria classica—*Propriétés relatives etc.*

Para chegar a este resultado teve o sr. Pegado de estabelecer alguns theoremas novos, requeridos pela marcha que seguiu para tractar a questão proposta.

Nos capitulos I e II tracta dos diversos movimentos de rotação, pelos quaes uma recta póde passar de uma posição para outra, que são em numero infinito ou não, segundo são ou não dados os pontos homologos da recta nas duas posições, e cujos eixos no primeiro caso estão sobre um paraboloide hyperbolico isosceles.

Nos capitulos IV e V tracta da mesma questão, suppondo o movimento da recta helicoidal, e mostra que o numero dos eixos centraes é sempre infinito, e que estão sobre a superficie d'um conoide elliptico quando ha pontos homologos.

No capitulo VI tracta do movimento helicoidal d'uma figura invariavel obrigada a passar por duas posições dadas, e mostra que ha só um eixo central do movimento que está na intersecção de dois conoides ellipticos determinados.

Em todos estes capitulos e no capitulo III tracta de muitas proposições de Geometria, de que precisa para as questões de que se occupa, ou que são consequencia d'ellas.

Observações sobre o magnetismo terrestre na ilha de S. Thomé, por Guilherme Augusto de Brito Capello. S. Thomé, 1881.

Estas observações feitas de 4 a 26 de maio de 1881 pelo sr. G. Brito Capello, um dos membros d'essa notavel familia que tantos serviços tem prestado ao paiz, aproveitando as occasiões que lhe deixava livre o seu logar de commandante da canhoneira *Sado*, referem-se á intensidade magnetica, á declinação e á inclinação.

G. T.

QUESTÃO PROPOSTA N.º 21

Achar as soluções inteiras da equação $x^y = y^x$ *sem recorrer aos logarithmos.*

A. Schiappa Monteiro.

SOBRE UMA FÓRMULA DE EULER

POR

J. M. RODRIGUES

A fórmula de Euler

$$\int \varphi x dx = h\Sigma\varphi x + \frac{h}{2}.\varphi x - \beta_1 \varphi' x . \frac{h^2}{1\ 2} + \beta_2 \varphi''' x . \frac{h^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

é uma fórmula fundamental do Calculo Integral.

A serie de Euler

$$E = \frac{h}{2}.\varphi x - \beta_1 \varphi' x . \frac{h^2}{1.2} + \beta_2 \varphi''' x . \frac{h^4}{1.2.3.4} - \beta_3 \varphi^{\mathrm{v}} x . \frac{h^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

onde β_1, β_2, β_3, ... designam os *numeros de Bernouilli*, é uma serie muito notavel pela sua lei de geração.

Os integraes indefinidos, os integraes das differenças ou sommas finitas e os integraes definidos são os tres algorithmos primitivos e fundamentaes do Calculo Integral, e constituem um modo universal da geração theorica das quantidades reaes ou imaginarias, immanentes ou transcendentes, pela sommação finita ou indefinida das suas partes elementares.

A fórmula de Euler, na sua accepção philosophica, constitue, como demonstraremos, a expressão algorithmica da unidade logica entre os tres algorithmos theoricos, primitivos e fundamentaes do Calculo Integral.

I

Serie de Euler

Consideremos a serie de Euler decomposta em duas partes

$$E = \frac{h}{2}.\varphi x - h\,E_1,$$

onde

$$E_1 = \beta_1 \varphi' x . \frac{h}{1.2} - \beta_2 \varphi''' x . \frac{h^3}{1.2.3.4} + \ldots \qquad (a)$$

ou

$$E_1 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \ldots + (-1)^{n+1}.T_n + \ldots$$

sendo

$$T_n = \beta_n \frac{d^{2n-1}\varphi x}{dx^{2n-1}} . \frac{h^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1).2n} \qquad (a')$$

a expressão do seu termo geral.

Para achar a funcção generatriz da serie de Euler seja

$$\varphi(x+ht\sqrt{-1}) = \varphi x + ht\sqrt{-1}.\varphi' x - \frac{h^2 t^2}{1.2}.\varphi'' x - \sqrt{-1}\frac{h^3 t^3}{1.2.3}.\varphi''' x + \ldots$$

e

$$\varphi(x-ht\sqrt{-1}) = \varphi x - ht\sqrt{-1}.\varphi' x - \frac{h^2 t^2}{1.2}.\varphi'' x + \sqrt{-1}\frac{h^3 t^3}{1.2.3}.\varphi''' x + \ldots,$$

d'onde se deduz

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}.[\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})] =$$

$$= t\frac{h}{1}.\varphi' x - t^3\frac{h^3}{1.2.3}.\varphi''' x + t^5\frac{h^5}{1.2.3.4.5.6}.\varphi^{\mathrm{v}} x - \ldots;$$

por consequencia, multiplicando por $\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$ e integrando entre os limites 0 e ∞, resulta

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1})-\varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} . dt =$$

$$= \frac{h}{1} \varphi' x . \int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} - \frac{h^3}{1.2.3} \varphi''' x . \int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{e^{2\pi t}-1} + \ldots \quad (b)$$

ou

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1})-\varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} . dt =$$

$$= T'_1 - T'_2 + T'_3 - T'_4 + \ldots + (-1)^{n+1} . T'_n + \ldots$$

onde

$$T'_n = \frac{h^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)} \cdot \frac{d^{2n-1}\varphi x}{dx^{2n-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} \quad (b').$$

Ora

$$(e^z-1)^{-1} = e^{-z} + e^{-2z} + e^{-3z} + e^{-4z} + \ldots,$$

por consequencia

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty (e^z-1)^{-1} . z^{p-1} dz = \int_0^\infty e^{-z} . z^{p-1} dz + \int_0^\infty e^{-2z} . z^{p-1} dz \\ + \int_0^\infty e^{-3z} . z^{p-1} dz \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \int_0^\infty e^{-mz} . z^{p-1} dz \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} (c);$$

mas o integral euleriano de segunda especie

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-z}.z^{p-1}\,dz$$

dá pela mudança de z em mz

$$\Gamma(p)=m^p.\int_0^\infty e^{-mz}.z^{p-1}\,dz,$$

d'onde

$$\int_0^\infty e^{-mz}.z^{p-1}\,dz=\frac{\Gamma(p)}{m^p};$$

logo, dando a m os valores

$$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

a serie (c) transforma-se em

$$\int_0^\infty (e^z-1)^{-1}.z^{p-1}\,dz=\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots\right).\Gamma(p)$$

ou

$$\int_0^\infty (e^z-1)^{-1}.z^{p-1}\,dz=S_p\times\Gamma(p)$$

sendo

$$S_p=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$$

Esta serie notavel tem sido objecto de muitas investigações. Quando $p=2n$ sabe-se que

$$S_{2n}=\beta_n.\frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n-1)2n}$$

e

$$\Gamma(2n)=1.2.3\ldots(2n-1),$$

por consequencia

$$S_{2n} \times \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \cdot \pi^{2n} \cdot \frac{\beta_n}{2n},$$

logo

$$\int_0^{\infty} (e^z - 1)^{-1} \cdot z^{2n-1} dz = \frac{(2\pi)^{2n}}{2} \cdot \frac{\beta_n}{2n}$$

onde β_n designa o numero de Bernouilli da ordem n.

Fazendo pois $z = 2\pi t$, o que não altera os limites da integração, resulta finalmente

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta_n}{2n}.$$

Logo, substituindo o valor d'este integral definido na expressão do termo geral da serie (b), resulta

$$T'_n = \frac{1}{2} \cdot \beta_n \frac{h^{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n} \cdot \frac{d^{2n-1} \varphi x}{dx^{2n-1}},$$

e pela comparação com o termo geral da serie (a) vem

$$T'_n = \frac{1}{2} \cdot T_n.$$

Temos pois

$$E_1 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot T_n + \ldots$$

e

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x + ht\sqrt{-1}) - \varphi(x - ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot T_1 - \frac{1}{2} \cdot T_1 + \frac{1}{2} \cdot T_3 - \frac{1}{2} \cdot T_4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} T_n + \ldots$$

Logo

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} . dt$$

é a funcção generatriz da serie de Euler, a que chamaremos — *transcendente euleriana.*

A fórmula de Euler transforma-se pois em

$$\int \varphi x\, dx = h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2} . \varphi x -$$

$$- \frac{h}{\sqrt{-1}} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} . dt \qquad (d);$$

mas

$$\Sigma \varphi x + \frac{1}{2} . \varphi x = \Sigma \left[\varphi x + \frac{1}{2} . \Delta \varphi x\right] = \frac{1}{2} . \Sigma [\varphi x + \varphi(x+h)],$$

logo

$$\int \varphi x\, dx = \frac{h}{2} . \Sigma [\varphi x + \varphi(x+h)] -$$

$$- \frac{h}{\sqrt{-1}} . \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1} . dt \qquad (e).$$

A esta transformada da fórmula de Euler chamaremos — *fórmula euleriana,* a qual, depois da integração effectuada, se deve completar com uma constante arbitraria.

II

Fórmulas integraes

Seja

$$\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}) = \varphi x + \alpha\sqrt{-1} . \varphi' x - \frac{\alpha^2}{1.2} . \varphi'' x - \sqrt{-1} \frac{\alpha^3}{1.2.3} . \varphi''' x + \ldots$$

e

$$\varphi(x-\alpha\sqrt{-1}) = \varphi x - \alpha\sqrt{-1} . \varphi' x - \frac{\alpha^2}{1.2} . \varphi'' x + \sqrt{-1} \frac{\alpha^3}{1.2.3} . \varphi''' x + \ldots$$

Sommando e subtrahindo resulta

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})]=$$

$$=\varphi x-\frac{\alpha^2}{1.2}.\varphi'' x+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}.\varphi^{\text{IV}} x-\ldots$$

e

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}[\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})]=$$

$$=\alpha\varphi' x-\frac{\alpha^3}{1.2.3}.\varphi''' x+\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}.\varphi^{\text{v}} x-\ldots$$

Ora

$$(e^{2\theta i}+z^2)^{-1}=e^{-2\theta i}-z^2.e^{-4\theta i}+z^4.e^{-6\theta i}-\ldots$$

onde θ designa um angulo e i o imaginario primitivo $i=\sqrt{-1}$; por consequencia

$$\frac{e^{2\theta i}}{z^2+e^{2\theta i}}=1-z^2.e^{-2\theta i}+z^4.e^{-4\theta i}-\ldots$$

e

$$\frac{e^{\theta i}}{z^2+e^{2\theta i}}=e^{-\theta i}-z^2.e^{-3\theta i}+z^4.e^{-5\theta i}-\ldots$$

Multiplicando estes dois desenvolvimentos por $\varphi(x+re^{\theta i})\,d\theta$ e integrando entre os limites 0 e 2π, vem

$$\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+re^{\theta i})}{z^2+e^{2\theta i}}.e^{2\theta i}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i})\,d\theta$$

$$-z^2\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-2\theta i}\,d\theta$$

$$+z^4\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-4\theta i}\,d\theta$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^n.z^{2n}\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-2n\theta i}\,d\theta$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e

$$\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+re^{\theta i})}{z^2+e^{2\theta i}}.e^{\theta i}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-\theta i}\,d\theta$$

$$-z^2\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-3\theta i}\,d\theta$$

$$+z^4\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-5\theta i}\,d\theta$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^n z^{2n}\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{\theta i}).e^{-(2n+1)\theta i}\,d\theta$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mas pela notavel fórmula de Cauchy

$$\frac{d^n \varphi x}{d x^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) . e^{-n\theta i} d\theta$$

os termos geraes d'estes dois desenvolvimentos são

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) . e^{-2n\theta i} \, d\theta = \frac{2\pi r^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} \cdot \frac{d^{2n} \varphi x}{d x^{2n}}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) . e^{-(2n+1)\theta i} d\theta = \frac{2\pi r^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \cdot \frac{d^{2n+1} \varphi x}{d x^{2n+1}};$$

por consequencia

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{z^2 + e^{2\theta i}} . e^{2\theta i} d\theta = \varphi x - \frac{z^2 . r^2}{1.2} . \varphi'' x + \frac{z^4 . r^4}{1.2.3.4} . \varphi^{\text{IV}} x - \ldots$$

e

$$\frac{1}{2\pi r} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{z^2 + e^{2\theta i}} . e^{\theta i} d\theta = \varphi' x - \frac{z^2 . r^2}{1.2.3} . \varphi''' x + \frac{z^4 . r^4}{1.2.3.4.5} . \varphi^{\text{V}} x - \ldots$$

Fazendo agora $z r = \alpha$ ou $z = \frac{\alpha}{r}$ resulta

$$\frac{r^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} . e^{2\theta i} d\theta = \varphi x - \frac{\alpha^2}{1.2} . \varphi'' x + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} . \varphi^{\text{IV}} x - \ldots$$

e

$$\frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} . e^{2\theta i} d\theta = \varphi' x - \frac{\alpha^2}{1.2.3} . \varphi''' x + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4.5} . \varphi^{\text{V}} x - \ldots;$$

logo

$$\frac{r^2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 e^{2\theta i}} . e^{2\theta i} d\theta = \varphi(x + \alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x - \alpha\sqrt{-1}) \quad (\alpha)$$

$$\frac{\alpha\sqrt{-1}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + r e^{\theta i})}{\alpha^2 + r^2 . e^{2\theta i}} . r e^{\theta i} d\theta = \varphi(x + \alpha\sqrt{-1}) - \varphi(x - \alpha\sqrt{-1}) \quad (\beta).$$

Estas duas fórmulas exprimem a geração theorica d'um grande numero de integraes definidos.

A fórmula (β) conduz immediatamente a uma transformação da fórmula euleriana. Com effeito, pondo $\alpha = t h$, multiplicando por $\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$, e integrando entre os limites 0 e ∞, resulta, attendendo á independencia das variaveis t e θ e dos limites de integração,

$$\frac{h}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+re^{2\theta i})}{t^2h^2+r^2e^{2\theta i}}\cdot\frac{e^{\theta i}}{e^{2\pi t}-1}\cdot t\,dt\,d\theta =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1})-\varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1}.dt.$$

A fórmula euleriana transforma-se pois em

$$\left.\begin{array}{l}\int\varphi x\,dx=\frac{h}{2}.\Sigma[\varphi x+\varphi(x+h)]-\\[2ex] -\frac{h^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+re^{\theta i})}{t^2h^2+r^2e^{2\theta i}}\cdot\frac{re^{\theta i}}{e^{2\pi t}-1}.t\,dt\,d\theta\end{array}\right\}(e').$$

Esta transformada da fórmula euleriana primitiva (e) determina uma nova classe de integraes definidos duplos.

Ora

$$\frac{1}{2}.\Sigma[\varphi x+\varphi(x+h)]=\Sigma\varphi x+\frac{1}{2}.\varphi x,$$

por consequencia, attendendo á independencia das variaveis t e θ, a fórmula (e') dá

$$\int\varphi x\,dx=h\Sigma\varphi x+\frac{h}{2}.\varphi x-$$

$$-\frac{h^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\varphi(x+re^{\theta i})re^{\theta i}d\theta\int_0^{2\pi}\frac{t\,dt}{(t^2h^2+r^2e^{2\theta i})(e^{2\pi t}-1)}\right],$$

mas pela fórmula de Cauchy

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \, d\theta,$$

por consequencia

$$\int \varphi x \, dx = h \Sigma \varphi x + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) \, d\theta -$$

$$-\frac{h^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\varphi(x + r e^{\theta i}) r e^{\theta i} d\theta \int_0^{\infty} \frac{t \, dt}{(t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i})(e^{2\pi t} - 1)} \right];$$

logo

$$\int \varphi x \, dx = h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) . \Theta \, d\theta \qquad (e'')$$

sendo

$$\Theta = \frac{1}{2} - 2h . r e^{\theta i} \int_0^{\infty} \frac{t \, dt}{(t^2 h^2 + r^2 e^{2\theta i}) . (e^{2\pi t} - 1)}.$$

Esta segunda transformada (e'') da fórmula euleriana (e) mostra claramente o valor philosophico da fórmula de Euler, e por isso deve denominar-se — *a fórmula euleriana principal.*

O integral definido

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) . \Theta \, d\theta$$

é a funcção generatriz da serie de Euler, e a fórmula euleriana principal

$$\int \varphi x \, dx = h \Sigma \varphi x + \frac{h}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi(x + r e^{\theta i}) . \Theta \, d\theta$$

liga pelo algorithmo primitivo da sommação os tres algorithmos fundamentaes do Calculo Integral.

III

Integraes definidos

A integração das differenças finitas pelas funcções elementares é ainda mais limitada que a integração das funcções differenciaes; e, pelas faculdades algorithmicas, succede o contrario, a integração das differenças é mais geral, porque na fórmula de Wronski o integral indefinido exprime-se em funcção d'um integral definido, cuja determinação é puramente contingente.

Esta dupla propriedade caracterisa, pois, os dois primeiros algorithmos fundamentaes do Calculo Integral.

Ora, como é sabido, a geração theorica do algorithmo inverso das differenças $\Sigma\varphi x$, pelas funcções elementares, é só possivel, quando φx tem uma das fórmas seguintes:

I $\quad \varphi x = x(x \pm h)(x \pm 2h)\ldots(x \pm \overline{n-1}\,h) \times fx;$

II $\quad \varphi x = \dfrac{fx}{x(x \pm h)(x \pm 2h)\ldots(x \pm \overline{n-1}\,h)};$

III $\quad \varphi x = a^{mx} \times fx;$

IV $\quad \varphi x = \operatorname{sen}^n x . \cos^n x \times fx;$

onde fx designa um polynomio racional e inteiro e m e n quantidades positivas: por consequencia a fórmula euleriana

$$\Sigma[\varphi x + \varphi(x+h)] = \frac{2}{h} . \int \varphi x\,dx +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{-1}} . \int_0^\infty \frac{\varphi(x+ht\sqrt{-1}) - \varphi(x-ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t}-1}\,dt$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}\frac{h}{2}.\Sigma[\varphi x+\varphi(x+h)]=\int\varphi x dx+\\ +\frac{1}{\sqrt{-1}}.\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+\theta\sqrt{-1})-\varphi(x-\theta\sqrt{-1})}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}.d\theta\end{array}\right\}\quad(a)$$

determina um grande numero de integraes definidos para cada um dos quatro casos em que é possivel a integração das differenças.

As mesmas considerações são applicaveis ás outras transformadas da fórmula euleriana.

No que vae seguir-se fazemos sómente algumas applicações d'esta fórmula (a).

I Seja $\varphi x=e^{ax}$; será

$$\frac{h}{2}.\Sigma[e^{ax}+e^{a(x+h)}]=\int e^{ax}dx+\frac{1}{\sqrt{-1}}.\int_0^{\infty}\frac{e^{a(x+\theta\sqrt{-1})}-e^{a(x-\theta\sqrt{-1})}}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}d\theta;$$

mas

$$\Sigma[e^{ax}+e^{a(x+h)}]=(1+e^{ah}).\Sigma e^{ax}=\frac{e^{ah}+1}{e^{ah}-1}.e^{ax}$$

e

$$e^{ax}[e^{a\theta\sqrt{-1}}-e^{-a\theta\sqrt{-1}}]=2\sqrt{-1}.e^{ax}\operatorname{sen}a\theta;$$

logo

$$\frac{h}{2}.\frac{e^{ah}+1}{e^{ah}-1}=\frac{1}{a}+\int_0^{\infty}\frac{2\operatorname{sen}a\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}.d\theta\quad(b)$$

d'onde

$$\int_0^{\infty}\frac{2\operatorname{sen}a\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}.d\theta=\frac{h}{2}.\frac{e^{ah}+1}{e^{ah}-1}-\frac{1}{a}$$

ntegral definido já conhecido.

A fórmula (b) onde suppozemos $h=1$ transforma-se em

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^a+1}{e^a-1}=\frac{1}{a}+\int_0^\infty \frac{2\operatorname{sen} a\,\theta}{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}\cdot e^{-\pi\theta}\,d\theta;$$

mas

$$\operatorname{sen}\operatorname{hyp} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

e

$$\operatorname{cotg}\operatorname{hyp} x=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1};$$

logo

$$\operatorname{cotg}\operatorname{hyp}\frac{a}{2}=\frac{2}{a}+2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\,\theta}{\operatorname{sen}\operatorname{hyp}\pi\theta}\cdot e^{-\pi\theta}\,d\theta$$

ou, mudando a em $2x$,

$$\operatorname{cotg}\operatorname{hyp} x=\frac{1}{x}+2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x\,\theta}{\operatorname{sen}\operatorname{hyp}\pi\theta}\cdot e^{-\pi\theta}\,d\theta \qquad (b').$$

II Seja $\varphi x=\operatorname{sen} a\,x$; será

$$\frac{h}{2}\cdot\Sigma[\operatorname{sen} a\,x+\operatorname{sen} a\,(x+h)]=$$

$$=\int\operatorname{sen} a\,x\,dx+\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} a\,(x+\theta\sqrt{-1})-\operatorname{sen} a\,(x-\theta\sqrt{-1})}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}d\theta.$$

Convertendo o *seno* em exponenciaes pela fórmula de Euler

$$\operatorname{sen} a\,x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left[e^{a\,x\sqrt{-1}}-e^{-a\,x\sqrt{-1}}\right]$$

resulta

$$\Sigma[\operatorname{sen} a x + \operatorname{sen} a(x+h)] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[(1+e^{ah\sqrt{-1}}).\Sigma e^{ax\sqrt{-1}} - (1+e^{-ah\sqrt{-1}})\Sigma e^{-ax\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{e^{ah\sqrt{-1}}+1}{e^{ah\sqrt{-1}}-1}.e^{ax\sqrt{-1}} - \frac{e^{-ah\sqrt{-1}}+1}{e^{-ah\sqrt{-1}}-1}.e^{-ax\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{e^{ah\sqrt{-1}}+1}{e^{ah\sqrt{-1}}-1}.e^{ax\sqrt{-1}} + \frac{e^{ah\sqrt{-1}}+1}{e^{ah\sqrt{-1}}-1}.e^{-ax\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}.\frac{e^{ah\sqrt{-1}}+1}{e^{ah\sqrt{-1}}-1}.\cos a x;$$

logo

$$\frac{h}{2}.\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{e^{ah\sqrt{-1}}+1}{e^{ah\sqrt{-1}}-1} = -\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{-1}}.\int_0^{\infty}\frac{2\operatorname{sen} a\theta\sqrt{-1}}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}.d\theta,$$

ou

$$\frac{h}{2}.\frac{e^{ah\sqrt{-1}}+1}{e^{ah\sqrt{-1}}-1} = \frac{1}{a\sqrt{-1}}+\int_0^{\infty}\frac{2\operatorname{sen} a\theta\sqrt{-1}}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}.d\theta,$$

expressão analoga á expressão (b), e da qual se podia deduzir pela simples mudança de a em $a\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$\frac{1}{2}.\frac{e^{a\sqrt{-1}}+1}{e^{a\sqrt{-1}}-1}.\sqrt{-1} = \frac{1}{a}+\sqrt{-1}.\int_0^{\infty}\frac{2\operatorname{sen} a\theta\sqrt{-1}}{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}.e^{-\pi\theta}d\theta;$$

mas

$$\operatorname{sen} a\theta\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.\operatorname{sen hyp} a\theta$$

e

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{e^{a\sqrt{-1}}+1}{e^{a\sqrt{-1}}-1}.\sqrt{-1},$$

logo

$$\cot\frac{a}{2}=\frac{2}{a}-2\int_0^{\infty}\frac{\text{sen hyp}\, a\,\theta}{\text{sen hyp}\, \pi\,\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta,$$

ou

$$\cot x=\frac{1}{x}-2\int_0^{\infty}\frac{\text{sen hyp}\, 2\theta x}{\text{sen hyp}\, \pi\,\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta \qquad (b'').$$

As expressões (b') e (b'') mostram a analogia e a intima relação que existe entre as funcções circulares e as funcções hyperbolicas: a primeira exprime a cotangente hyperbolica em funcção de um seno circular; a segunda exprime a cotangente circular pelo integral definido de uma funcção de senos hyperbolicos.

Os integraes definidos

$$C=\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\, 2\,\theta\, x}{\text{sen hyp}\, \pi\,\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta$$

$$C'=\int_0^{\infty}\frac{\text{sen hyp}\, 2\theta x}{\text{sen hyp}\, \pi\,\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta$$

exprimem as propriedades theoricas das cotangentes hyperbolica e circular, e constituem as funcções generatrizes do desenvolvimento em serie de uma cotangente, isto é, constituem o limite da serie a partir do segundo termo.

Das fórmulas (b') e (b'') deduz-se a relação importante

$$\text{cotg hyp}\, x-\cot x=2\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\, 2\,\theta\, x+\text{sen hyp}\, 2\,\theta\, x}{\text{sen hyp}\, \pi\,\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta$$

logo a differença entre uma cotangente hyperbolica e uma cotangente circular exprime-se pelo integral definido entre *zero* e o *infinito* de uma funcção da somma do seno circular com o seno hyperbolico.

IV

Transcendentes

A funcção transcendente

$$\chi_x = \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}.e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}}$$

tem sido objecto de investigações d'um grande numero de geometras, e goza de propriedades importantes no Calculo Integral e na Theoria dos Numeros; o seu logarithmo nepereano tem por desenvolvimento a serie notavel

$$l\chi_x = \frac{\beta_1}{1.2}.\frac{1}{x} - \frac{\beta_2}{3.4}.\frac{1}{x3} + \frac{\beta_2}{5.6}.\frac{1}{x5} - \ldots$$

dada pela fórmula de Stirling.

Cauchy exprimiu esta funcção no integral definido

$$l\chi_x = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1-e^{-\theta}} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right).e^{-\theta x}d\theta;$$

a fórmula euleriana dá tambem da funcção $l\chi_x$ duas transformadas.

Com effeito, as funcções elementares lx e $\frac{1}{x}$ são duas funcções integraveis; mas no Calculo das Differenças são duas transcendentes irreductiveis e inintegraveis.

A fórmula euleriana dá para estas funcções

$$\frac{h}{2}.\Sigma[lx+l(x+h)] = \int dx\,lx + \frac{1}{\sqrt{-1}}.\int_0^{\infty} l\left(\frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}}\right).\frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1} + c$$

e

$$\frac{h}{2}\cdot\Sigma\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}\right]=\int\frac{dx}{x}-2\int_0^\infty\frac{\theta}{x^2+\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}+c;$$

isto é, reduz os seus integraes Σ a integraes definidos, que exprimem propriedades da transcendente χ_x.

E, com effeito,

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\int_0^\infty\frac{\varphi(x+\theta\sqrt{-1})-\varphi(x-\theta\sqrt{-1})}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}\cdot d\theta=$$

$$=\beta_1\varphi'x\cdot\frac{h}{1.2}-\beta_2\varphi'''x\cdot\frac{h^3}{1.2.3.4}+\beta_3\varphi^{\text{v}}x\cdot\frac{h^5}{1.2.3.4.5.6}-\ldots;$$

portanto, para $\varphi x=lx$ e $\varphi x=\frac{1}{x}$, resulta

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\int_0^\infty l\left(\frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}}\right)\cdot\frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}$$

$$=\frac{\beta_1}{1.2}\cdot\frac{h}{x}-\frac{\beta_2}{3.4}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^3+\frac{\beta_3}{5.6}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^5-\ldots$$

e

$$2\int_0^\infty\frac{\theta}{x^2+\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{e^{2\pi\frac{\theta}{h}}-1}=\frac{\beta_1}{2}\cdot\frac{h}{x^2}-\frac{\beta_2}{4}\cdot\frac{h^3}{x^4}+\frac{\beta_3}{6}\cdot\frac{h^5}{x^6}-\ldots;$$

logo

$$l\chi_x=\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\int_0^\infty l\left(\frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}}\right)\cdot\frac{d\theta}{e^{2\pi\theta}-1}$$

e

$$\frac{dl\chi_x}{dx}=-2\int_0^\infty\frac{\theta}{x^2+\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{e^{2\pi\theta}-1}.$$

Ora, para $x=\infty$, $l\chi_x=0$; por consequencia, integrando esta segunda expressão, resulta

$$l\chi_x=-2\int_0^{\infty}\frac{\text{arc tang}\,\dfrac{x}{\theta}}{e^{2\pi\theta}-1}.d\theta,$$

ou

$$l\chi_x=\quad 2\int_0^{\infty}\frac{\text{arc cotg}\,\dfrac{x}{\theta}}{e^{2\pi\theta}-1}.d\theta,$$

ou ainda

$$l\chi_x=-2\int_0^{\infty}\frac{\text{arc tang}\,\dfrac{x}{\theta}}{\text{sen hyp}\,\pi\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta$$

e

$$l\chi_x=\quad 2\int_0^{\infty}\frac{\text{arc cotg}\,\dfrac{x}{\theta}}{\text{sen hyp}\,\pi\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta.$$

Convertendo as funcções logarithmicas em exponenciaes, a funcção $\Gamma(x+1)$ converte-se no producto

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}\times e^{-x+\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^{\infty}l\left(\frac{x+\theta\sqrt{-1}}{x-\theta\sqrt{-1}}\right).\frac{d\theta}{e^{2\pi\theta}-1}}$$

ou

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}\times e^{-(x+2\int_0^{\infty}\frac{\text{arc tang}\frac{x}{\theta}}{\text{sen hyp}\,\pi\theta}.e^{-\pi\theta}d\theta)}$$

....;

etc.

e passando aos logarithmos resultam outras tantas expressões exactas de $l\Gamma(x+1)$ para qualquer valor positivo de x, real ou imaginario, commensuravel ou incommensuravel.

A funcção $\Gamma(x+1)$ exprime o integral euleriano de *segunda especie*

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-z}.z^x\,dz;$$

por consequencia as fórmulas precedentes mostram outras tantas propriedades d'este celebre integral.

NOTA SOBRE A TRANSFORMAÇÃO D'UM INTEGRAL DEFINIDO

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

No ultimo artigo que publicámos n'este Jornal, na pag. 65 d'este volume, vem o seguinte caso de transformação obtida pelos contornos

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}} = \alpha^n . \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^{2n}\theta \, d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Agora vamos chegar ao mesmo resultado deduzindo-o elementarmente, o que é facil, insistindo de novo, visto a importancia que tem na reducção de varias expressões.

Seja

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}} = (1-\alpha e^{\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} \times (1-\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}$$

mas

$$(1-\alpha e^{\pm\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{\pm\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2 e^{\pm 2\theta\sqrt{-1}} +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3 e^{\pm 3\theta\sqrt{-1}} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n e^{\pm n\theta\sqrt{-1}} + \ldots$$

e como fazemos

$$\mu = 1 + \frac{1}{2}\alpha\cos\theta + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2\cos 2\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3\cos 3\theta + \ldots +$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n\cos n\theta + \ldots$$

$$\nu = \frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3\,\mathrm{sen}\,3\theta + \ldots +$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n\,\mathrm{sen}\,n\theta + \ldots$$

vem

$$(1 - \alpha e^{\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = \mu + \nu\sqrt{-1}$$

$$(1 - \alpha e^{-\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = \mu - \nu\sqrt{-1}$$

logo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}} = \mu^2 + \nu^2 = \\
&= \Big(1 + \sum_1^\infty{}_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n\cos n\theta\Big)^2 + \\
&+ \Big(\sum_1^\infty{}_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n\,\mathrm{sen}\,n\theta\Big)^2 = \\
&= \frac{1}{2}P_0 + P_1\cos\theta + P_2\cos 2\theta + \ldots + P_n\cos n\theta + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

sendo

$$P_0 = 2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \alpha^6 + \ldots\right]$$

$$P_1 = 2\alpha\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1.3}{2.4}\alpha^2 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^4 + \ldots\right]$$

$$P_2 = 2\alpha^2\left[\frac{1.3}{2.4} + \frac{1}{2}\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^2 + \frac{1.3}{2.4}\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\alpha^4 + \ldots\right]$$

....

....

$$P_n = \frac{2}{2^n}.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n \times$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{2}.\frac{2n+1}{2(n+1)}\alpha^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{.4}.\frac{(2n+1)(2n+3)}{4(n+1)(n+2)}\alpha^4 + \ldots\right].$$

Precisamos conhecer apenas P_0 e P_1 para ficarem determinados os outros coefficientes, porque de (a) tiramos, derivando em ordem a θ,

$$\alpha \operatorname{sen}\theta \sum_0^\infty{}_n P_n \cos n\theta = (1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)\sum_0^\infty{}_n n P_n \operatorname{sen} n\theta$$

logo

$$P_n = \frac{2(n-1)(\alpha^2+1)P_{n-1} - (2n-3)\alpha P_{n-2}}{(2n-1)\alpha}.$$

*

Como sabemos, é este um caso particular da funcção perturbadora

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}=\sum_{0}^{\infty}{}_{(i)}\, b^{(i)}_s \cos i\theta$$

$$b^{(i)}_s=2\alpha^i\left[\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots(i-1)i}+\right.$$

$$\left.+s.\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+i)}{1.2.3\ldots(i+1)}\alpha^2+\ldots\right]$$

suppondo $s=\frac{1}{2}$.

Por outro lado obtemos

. . . .

. . . .

$$P_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta}}=1+\frac{1}{2}\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1.3}{2.4}\alpha^4\operatorname{sen}^4\theta+\ldots+$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^{2n}\operatorname{sen}^{2n}\theta$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}^{2n}\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta}}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\times$$

$$\times\left[1+\frac{1}{2}.\frac{2n+1}{2n+2}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}.\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}\alpha^4+\ldots\right]$$

visto ser

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\theta\, d\theta=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\pi$$

e como tambem

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n} = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}$$

resulta afinal

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}} = \alpha^n \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^{2n}\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Applicação. — Seja $x = \cos\theta$, temos

$$P_n = X_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos\left[n \operatorname{arc}(\cos = x)\right] dx}{\sqrt{(1+\alpha^2) - 2\alpha x - (1+\alpha^2)x^2 + 2\alpha x^3}} =$$

$$= \frac{2\alpha^n}{\pi} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}}$$

representando X_n as *funcções de Legendre.*

Este ultimo integral dá-nos um meio muito simples e rapido para exprimir X_n no producto de $\frac{4\alpha^n}{\pi}$ por uma expressão da fórma

$$\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1} \times \frac{\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}.\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}}{2.\alpha^3} +$$

$$+ \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}{1.2} \times \frac{\alpha^3 - \frac{3\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\left(\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}.\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)}{4.\alpha^5} - \ldots$$

Com effeito, pela fórmula

$$\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{y^{m-2}.\sqrt{a^2+y^2}}{(m-1)} - \frac{m-2}{m-1}.a\int\frac{y^{m-3}.dy}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

obtemos

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \log\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}$$

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{y\sqrt{a^2+y^2}}{2} - \frac{1}{2}.a\log\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}$$

$$\int \frac{y^4\,dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{y^3\sqrt{a^2+y^2}}{4} - \frac{3}{2.4}.a\times$$

$$\times\left[y\sqrt{a^2+y^2} - a\log\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}\right]$$

$$\int \frac{y^6\,dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{1}{6}\,y^5\sqrt{a^2+y^2} - \frac{5}{4.6}\,ay^3\sqrt{a^2+y^2} +$$

$$+\frac{3.5}{2.4.6}\,a\left[y\sqrt{a^2+y^2} - a\log\frac{y+\sqrt{a^2+y^2}}{a}\right]$$

....

....

Fazendo agora

$$\left.\begin{aligned} a^2&=1-\alpha^2 \\ y&=a\,x \\ dy&=a\,dx \end{aligned}\right\}$$

temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}}=\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}}=\frac{1}{2.\alpha^3}\left[\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}\times\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}}=\frac{1}{4.\alpha^5}\times$$

$$\times\left[\alpha^3-\frac{3\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\left(\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}}=\frac{1}{6.\alpha^7}\times$$

$$\times\left[\alpha^5-\frac{5}{4}\alpha^3\sqrt{1-\alpha^2}+\frac{3.5}{2.4}\sqrt{1-\alpha^2}\left(\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}\log\frac{\alpha+1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right]$$

....

....

e como

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}} -$$

$$-\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}} +$$

$$+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2(1-x^2)}} -$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

fica portanto demonstrado o que pretendiamos.

. . . .

. . . .

SOBRE A MULTIPLICAÇÃO DOS DETERMINANTES

POR

F. Gomes Teixeira

No *Tratado dos determinantes* do sr. Dostor, para demonstrar o theorema da multiplicação, dá-se primeiro um lemma, que lá se demonstra por inducção que não é facil de completar.

Demonstra-se este lemma muito simplesmente do modo que vamos expôr.

Quer-se demonstrar a igualdade

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & \ldots\ldots \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+i} & b_{n+i} & c_{n+i} & \ldots\ldots \alpha_{n+i} & \beta_{n+i} & \gamma_{n+i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n} & b_{2n} & c_{2n} & \ldots\ldots \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & \ldots \\ \alpha_{n+2} & \beta_{n+2} & \gamma_{n+2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} & \ldots \end{vmatrix}$$

Com effeito, no desenvolvimento do primeiro determinante, o factor que multiplica um termo da columna de ordem menor que n e da linha de ordem maior que n é nullo, porque o determinante menor que o multiplica, sendo desenvolvido, deve conter em cada termo um elemento de cada linha e um elemento de cada columna; logo das n primeiras linhas, cujos elementos são zeros da columna de ordem $n-1$ em diante não podem entrar em cada termo mais de $n-1$ elementos significativos, isto é, deve entrar em cada termo pelo menos um elemento nullo.

Póde pois substituir-se o primeiro determinante pelo seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_{n+2} & \beta_{n+2} & \gamma_{n+2} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} & \ldots \end{vmatrix}$$

Para desenvolver este determinante temos de no termo principal

$$a_1 \, b_2 \, c_3 \ldots k_n \, \alpha_{n+1} \, \beta_{n+2} \, \gamma_{n+3} \ldots \lambda_{2n}$$

permutar os indices e sommar os termos resultantes, tendo em vista a regra conhecida dos signaes. Mas como as letras romanas não podem ter indices superiores a n, nem as gregas podem ter indices inferiores a n, basta permutar separadamente os indices $1, 2, 3 \ldots n$ e $n+1, n+2 \ldots 2n$, e collocar diante de cada uma das permutações do primeiro grupo cada uma das do segundo. Isto equivale evidentemente a multiplicar o determinante, cujo termo principal é $a_1 \, b_2 \, c_3 \ldots k_n$, pelo determinante, cujo termo principal é $\alpha_{n+1} \, \beta_{n+2} \ldots \gamma_{2n}$, d'onde se conclue o theorema enunciado.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 14 (*)

POR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

Sendo por hypothese $\alpha < 2p-1$, teremos

$$\left.\begin{array}{l} a+(a+1)+\ldots+(a+\alpha-x)+\ldots+(a+\alpha-1)+(a+\alpha)+(a+\alpha+1)+ \\ +\ldots+(a+\alpha+y)+\ldots+(a+2p-1)=a+(a+1)+\ldots+ \\ +(a+p-1)+(a+p)+\ldots+(a+2p-1)=(2a+2p-1)p \end{array}\right\} (1)$$

d'onde

$$\left.\begin{array}{l} 2a+(2a+2)+\ldots+(2a+2\alpha-2x)+\ldots+ \\ +(2a+2\alpha-2)+(2a+2\alpha)+(2a+2\alpha+2)+\ldots+ \\ +(2a+2\alpha+2y)+\ldots+(2a+4p-2)-(2a+2p-1)2p=0 \end{array}\right\} (2)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} -(2p-1)-(2p-3)-\ldots-[2(p-\alpha)-(2x+1)]-\ldots- \\ -[2(p-\alpha)+1]-[2(p-\alpha)-1]-[2(p-\alpha)-3]-\ldots- \\ -[2(p-\alpha)+(2y+1)]-\ldots+ \\ +(2p-3)+(2p-1)=-(2p-1)-(2p-3)-\ldots- \\ -7-5-3-1+1+3+5+7+\ldots+(2p-3)+(2p-1)=0 \end{array}\right\} (3).$$

(*) Esta solução foi recebida quando estava no prélo a solução dada a pag. 105, e porisso só agora é publicada.

Assim se, por exemplo,

$$-[2(p-\alpha)-(2x+1)] \quad \text{e} \quad -[2(p-\alpha)+(2y+1)]$$

são termos equidistantes dos extremos, será

$$-2(p-\alpha)+(2x+1)-2(p-\alpha)-(2y+1)=0$$

ou

$$(2y+1)=-4(p-\alpha)+(2x+1)$$

e portanto teremos

$$\left.\begin{array}{l} -(2p-1)-(2p-3)-\ldots- \\ -[2(p-\alpha)+1]-[2(p-\alpha)-1]-[2(p-\alpha)-3]-\ldots- \\ -7-5-3-1+1+3+5+7+\ldots+ \\ +[2(p-\alpha)-3]+[2(p-\alpha)-1]+[2(p-\alpha)+1]+\ldots+ \\ +(2p-3)+(2p-1)=0 \end{array}\right\} \quad (4).$$

Representando agora por Q e R o quociente e o resto da divisão do producto dado

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+\alpha)\ldots(a+2p-1)\ldots\ldots \quad (5)$$

composto de $2p$ numeros inteiros consecutivos, pela somma $(2a+2p-1)p$ dos mesmos numeros

$$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+\alpha)+\ldots+(a+2p-1) \quad (6)$$

teremos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+\alpha-1)2^{2p-1}.(a+\alpha+1)\ldots(a+2p-1)}{2a+2p-1} \\ \qquad =Q+\dfrac{R}{2a+2p-1} \end{array}\right\} \quad (7)$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2a(2a+2)\ldots(2a+2\alpha-2)(2a+2\alpha+2)\ldots(2a+4p-2)}{2a+2p-1}\\&\qquad=Q+\frac{R}{2a+2p-1}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

visto ser

$$a+\alpha=2^{2p-1}.p\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

Ora sabemos que *o resto da divisão de um producto de factores inteiros por qualquer divisor inteiro não muda de valor, quando a um ou mais factores se juncta ou tira o divisor ou multiplos d'este,* logo se de cada um dos factores do dividendo

$$2a(2a+2)\ldots(2a+2\alpha-2)(2a+2\alpha+2)\ldots(2a+4p-2)\ (10)$$

subtrahirmos o divisor $2a+2p-1$, e attendermos á expressão (4), obteremos o dividendo

$$\left.\begin{aligned}&\pm1^2.3^2.5^2.7^2\ldots[2(p-\alpha)-3]^2[2(p-\alpha)-1][2(p-\alpha)+1]^2\\&\qquad\ldots(2p-1)^2\end{aligned}\right\}\ (11)$$

[onde ha um só factor da fórma $2(p-\alpha)-1$] adoptando-se o signal superior ou inferior segundo fôr p impar ou par; e se representarmos por Q' o quociente respectivo (não attendendo aos signaes), teremos

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1^2.3^2.5^2.7^2\ldots[2(p-\alpha)-3]^2[2(p-\alpha)-1][2(p-\alpha)+1]^2\ldots(2p-1)^2}{2a+2p-1}\\&\qquad=Q'+\frac{R}{2a+2p-1}\end{aligned}\right\}(12).$$

Logo são eguaes os restos das divisões do producto (5) pela somma (6) dos seus factores e do producto (11) pelo numero $2a+2p-1$.

BIBLIOGRAPHIA

Sur l'évaluation approchée des aires planes, par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand. Bruxelles, 1881.

Com este titulo publicou o sr. Mansion nos *Annaes da Sociedade Scientifica de Bruxellas* (*) uma Memoria muito importante, em que se occupa das principaes fórmulas empregadas para avaliar aproximadamente as áreas planas, isto é, da fórmula dos trapezios, das duas de Simpson, da de Weddle, da de Poncelet, da do sr. Parmentier, da do sr. Dupain, da do sr. Catalan e de uma fórmula nova.

Estas diversas fórmulas são demonstradas pelo illustre professor belga de uma maneira simples, clara e uniforme, com o calculo do limite superior do erro correspondente, o que é tanto mais importante, que as demonstrações conhecidas d'estas fórmulas, exceptuando as de Poncelet e do sr. Parmentier, deixavam muito a desejar.

Termina a Memoria pela comparação das fórmulas precedentes, tendo em vista em primeiro logar o rigor e depois a simplicidade.

D'esta comparação conclue:

1.° Se se não tem necessidade de uma grande aproximação, o melhor é recorrer á fórmula dos trapezios, ou, se o numero das ordenadas é impar, á do sr. Parmentier.

2.° Se se quer uma exactidão maior, e o numero das ordenadas é par, deverá usar-se da fórmula do sr. Catalan. Se o numero das ordenadas é impar, usar-se-ha da fórmula do sr. Dupain, ou, se se requer grande exactidão, da primeira fórmula de Simpson.

As outras fórmulas podem ser empregadas em casos particulares.

Vê-se que as fórmulas dos trapezios, a primeira de Simpson, a do sr. Parmentier, a do sr. Dupain e a do sr. Catalan são as mais importantes na pratica.

(*) *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 5me année, 1881, pagg. 231 a 291.

As demonstrações das tres primeiras e da de Poncelet são similhantes e muito simples. Resultam de substituir a área pedida por medias de tres áreas, que são a do polygono formado pela reunião dos trapezios que se obtêm, tirando tangentes á curva pelas extremidades das ordenadas de ordem par; o polygono formado pelos trapezios que se obtêm, unindo successivamente a primeira extremidade de ordenadas, as de ordem par e a ultima; o polygono formado pelos trapezios que se obtêm, unindo successivamente todas as extremidades das ordenadas. Chamando estes polygonos M, m, m' e S a superficie pedida, as fórmulas são:

$$S=\frac{1}{2}(M+m) \qquad \text{(Poncelet)}$$

$$S=\frac{1}{3}(2M+m) \qquad \text{(Parmentier)}$$

$$S=\frac{1}{2}(M+m') \qquad \text{(fórmula dos trapezios)}$$

$$S=\frac{1}{3}(2M+m') \qquad \text{(Simpson).}$$

A consideração da área m', que levou a uma demonstração tão simples das duas ultimas fórmulas, é devida ao sr. Mansion, e foi já introduzida no ensino elementar pelos srs. Rouché e Comberousse na ultima edição que vêm de publicar dos seus *Éléments de Géométrie*.

A parte elementar da Memoria a que nos estamos referindo, foi tambem publicada no jornal—*Mathesis* (*).

G. T.

(*) *Mathesis—Recueil mathématique*, publié par P. Mansion e J. Neuberg. Gand.—Vol. I, pag. 17.

INDICE

ERRATAS

Na pagina 29, linha 21, em logar de: *diminue indefinidamente até zero, quando* h *vae diminuindo indefinidamente até zero*, deve escrever-se: *acaba por diminuir indefinidamente passando por todos os valores até zero, quando* h *diminue indefinidamente passando por todos os valores até zero*.

Na pagina 30, linha 11, em logar de: $n+n'$, deve escrever-se: $n\times n'$.

Na pagina 30, linha 19, em logar de: *da tangente comprehendida entre o ponto de contacto e o pé*, deve escrever-se: $M'T$.

Na pagina 30, linha 23, em logar de: $MT=MM' \cos TMM'$, deve escrever-se: $M'T=MM' \operatorname{sen} TMM'$.

Na pagina 31, linha 13, em logar de: MT, deve escrever-se: $M'T$.